

# 现代控制理论基础

## Fundamentals of Modern Control Theory

---

### 第八章 非线性控制系统分析

LI YIN-YA

SCHOOL OF AUTOMATION  
NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

October 30, 2019

- 1 非线性控制系统概述
- 2 常见非线性特性及其对系统运动的影响
- 3 相平面法
- 4 描述函数法
- 5 本章知识小结

# 非线性控制系统概述

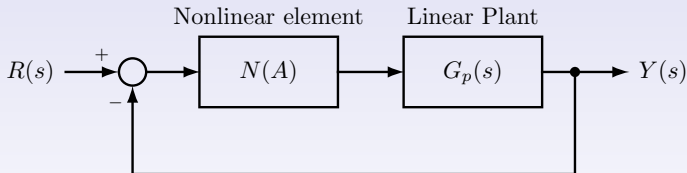
- ① 研究非线性控制理论的意义。
- ② 非线性系统的特性。
- ③ 非线性系统的分析方法。

# 研究非线性控制理论的意义

## Definition: 非线性系统 (Nonlinear system)

系统中含有一个或多个具有非线性特性的元件时，称为非线性系统。

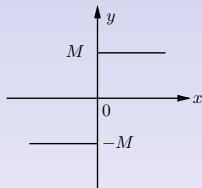
带有典型的非线性环节的系统可以用下面的框图来描述：



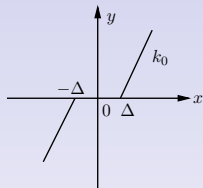
其中  $N(A)$  表示非线性环节。

# 研究非线性控制理论的意义

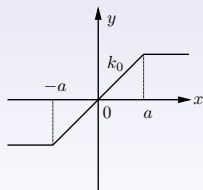
典型非线性环节有：



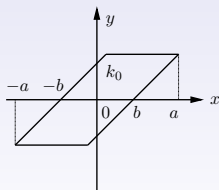
(a) 继电特性



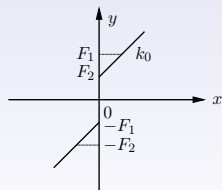
(b) 死区特性



(c) 饱和特性



(d) 间隙特性



(e) 摩擦特性

# 研究非线性控制理论的意义

- ① 实际工程中，大多都是存在不同程度的非线性环节的，严格的线性系统几乎是不存在的。
- ② 在一定条件下，可将非线性环节视为线性环节，或采用小偏差线性化方法将非线性模型线性化。
- ③ 但在某些情况下，如果不考虑系统的非线性因素，将可能使得实际的控制效果非常不理想，甚至是不稳定的系统。

# 非线性系统的特性

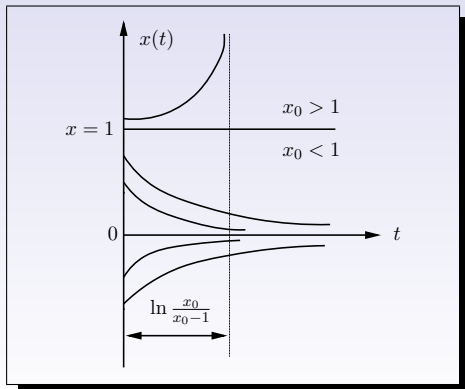
非线性系统可以表示为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

- ① 多个平衡点，如：

$$\dot{x} = x^2 - x$$

- ② 不满足叠加原则，运动特性(如稳定性)随初始条件和输入而不同。

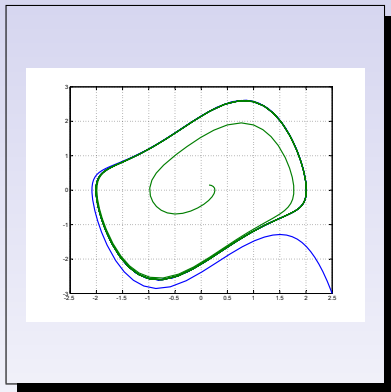


# 非线性系统的特性

- ① 存在自激振荡(无外界周期变化信号的作用时, 系统内产生的具有固定振幅和频率的稳定周期运动)现象, 如: 范德波尔方程

$$\ddot{x} - 2\rho(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

- ② 频率响应发生畸变。线性系统的频率响应与输入同频率; 非线性系统的频率响应则往往含有比输入频率更高的谐波分量。





# 非线性系统的分析方法

## 1. 相平面法

根据方向场的分布，通过描绘系统运动轨线的大致走向，来分析系统的动态特性。限于二阶系统。

## 2. 描述函数法

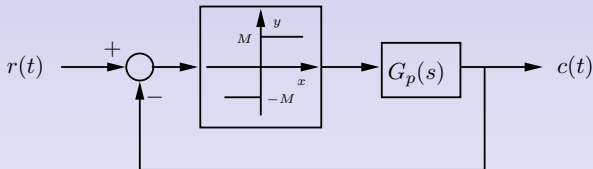
对非线性特性进行谐波线性化，再利用频域法进行分析。

## 3. 逆系统法

运用内环非线性反馈控制，构成伪线性系统，并以此为基础，设计外环控制网络。

# 常见非线性特性 及其对系统运动的影响

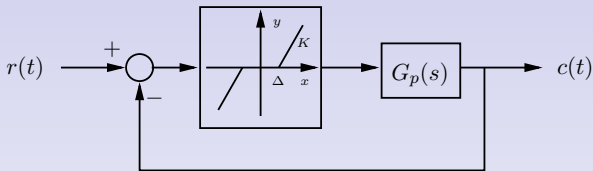
# 继电特性



$$y = \begin{cases} M, & x \geq 0 \\ -M, & x < 0 \end{cases}$$

- **原因：**继电器、接触器和可控硅等电气元件特性。
- **作用：**
  - ① 常使系统产生振荡现象；
  - ② 选择合适的继电特性可提高系统的响应速度，也可构成正弦信号发生器。

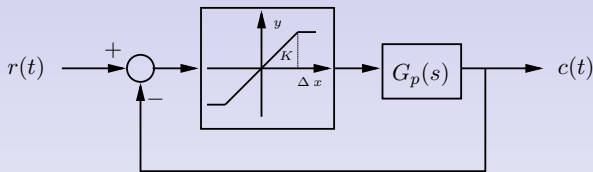
# 死区特性



$$y = \begin{cases} K(x - \Delta) & x > \Delta \\ 0 & |x| \leq \Delta \\ K(x + \Delta) & x < -\Delta \end{cases}$$

- **原因**：由测量元件、放大元件及执行机构的不灵敏区造成。
- **作用**：
  - ① 造成输出量时间上滞后，降低跟踪精度，使系统输出存在稳态误差。
  - ② 减小扰动信号的影响，提高系统抗干扰能力。

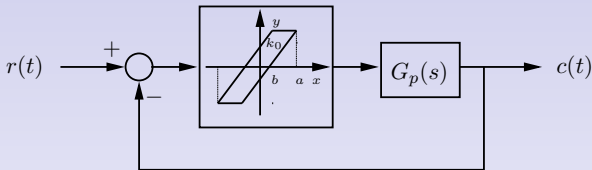
# 饱和特性



$$y = \begin{cases} K\Delta & x > \Delta \\ Kx & |x| \leq \Delta \\ -K\Delta & x < -\Delta \end{cases}$$

- **原因：**放大器及执行机构受电源电压或功率的限制。
- **作用：**
  - ① 对原稳定的系统，降低开环增益。
  - ② 对不稳定的系统，会出现自激振荡。
  - ③ 可作为功率限制、行程限制装置，保障系统安全。

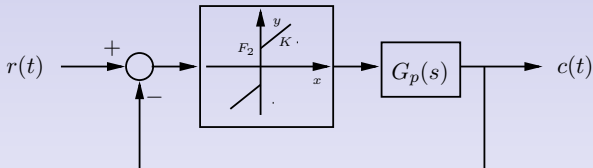
# 间隙特性



$$y = \begin{cases} k_0(x - b) & \dot{x} > 0, x > -(a - 2b) \\ k_0(a - b) & \dot{x} < 0, x > (a - 2b) \\ k_0(x + b) & \dot{x} < 0, x < (a - 2b) \\ k_0(-a + b) & \dot{x} > 0, x < -(a - 2b) \end{cases}$$

- **原因：** 齿轮、涡轮轴系的加工及装配误差或磁滞效应。
- **作用：**
  - ① 相当死区作用，增大稳态误差，降低跟踪精度。
  - ② 使过渡过程振荡加剧，甚至出现自激振荡。

# 摩擦特性



$$y = \begin{cases} Kx + F_2 & x \geq 0 \\ Kx - F_2 & x < 0 \end{cases}$$

- **原因：**机械传统中存在摩擦力。

- **作用：**

- ① 摩擦力阻挠系统的运动。

- ② 造成系统低速运动的不平滑性，导致不能跟踪目标，甚至丢失目标。

## 相平面法



# 基本概念

考虑如下二阶时不变系统

$$\ddot{x}(t) = f(\dot{x}(t), x(t))$$

## Definition: 相平面法

利用作图法，描绘系统状态的运动曲线，进而研究系统动态特性的方法。仅适用于一、二阶定常线性或非线性系统。

## Definition: 相平面

以  $x$  为横轴，以  $\dot{x}$  为纵轴，以  $O(0,0)$  为原点的直角坐标平面  $Ox\dot{x}$ 。相平面上的点对应系统的一个状态。

# 基本概念

考虑如下二阶时不变系统

$$\ddot{x}(t) = f(\dot{x}(t), x(t))$$

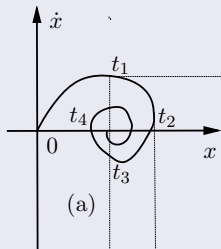
## Definition: 相轨迹

当时间  $t$  变化时, 系统状态  $(x, \dot{x})$  在相平面  $Ox\dot{x}$  上描述的曲线, 用箭头表示其运动方向。

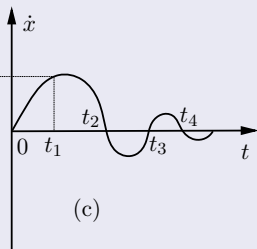
## 相轨迹的唯一性

如果系统右端函数  $f(\dot{x}, x)$  是连续可微的, 除了封闭相轨迹和奇点外, 由微分方程解的唯一性知, 对于任意给定的初始条件, 仅有一条相轨迹与之对应。

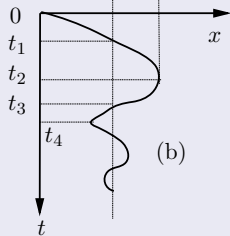
# 基本概念



(a)



(c)



(b)

# 相轨线的类型

考虑如下二阶时不变系统

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x)$$

## 奇点 $(x_e, 0)$

方程  $f(0, x_e) = 0$  的解即为奇点，即相平面上满足  $\dot{x} = 0$  和  $\ddot{x} = 0$  的点；显然奇点一定位于相平面横坐标轴上。

## 周期解

封闭曲线或极限环，当  $f(\dot{x}, x)$  连续可微时，周期解一定包围至少一个奇点。

## 一般相轨线

除奇点和周期解之外的相轨迹。

# 相轨线的类型

由于

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$$

故有

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}}$$

- ① 相轨迹在奇点处，切线的斜率不定，这表明，系统在奇点处可以按任意方向接近或远离奇点。因此在奇点处，多条相轨迹相交。
- ② 相轨迹在非奇点处（又可称为普通点），不会存在  $\dot{x}$  为零， $\ddot{x}$  同时为零的现象，此时相轨迹切线斜率为一确定的值，因此经过普通点的相轨迹只有一条。

# 相轨线的绘制

注意到

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{d\dot{x}/dt}{dx/dt} = \frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}}$$

描述了相轨线在相平面上任一点的斜率。

如果给定一个斜率值  $\alpha$ ，则获得一条曲线

$$\frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}} = \alpha$$

经过这条曲线的相轨迹，在交点处将有相同的斜率。该曲线称为等倾线。

# 相轨线的绘制

在等倾线上绘制一系列的**方向向量**。

## 方向向量

通过相平面上的一点画一微小向量，表示相轨迹在该点的运动方向，向量的斜率值为

$$\alpha = \frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x} = h(\alpha, x)$$

该式则描述了**等倾线方程**。

## 注意事项：

当点  $(x, \dot{x})$  位于相平面上半平面时，方向向量的指向**倾向右侧**，否则**倾向左侧**。对于连续系统，方向向量呈连续分布。

# 相轨线的绘制

## 向量场

由相平面上的所有方向向量构成的分布图。

## 特殊等倾线

若等倾线上的方向向量与等倾线重合，说明在该等倾线上，任意一点的运动方向都与等倾线方向一致，则该等倾线为一特解，或称特殊等倾线。



# 相轨线绘制的步骤

- ① 由给定的系统求出等倾线方程： $\dot{x} = h(\alpha, x)$
- ② 给定不同的  $\alpha$  值，尽可能多地在相平面上画出不同的等倾线；一般地，等倾线越多精度越高；
- ③ 在每条等倾线上标明其对应的  $\alpha$  值的方向向量；
- ④ 从初始点出发，沿着方向向量将这些短线段用光滑的曲线连接起来，即构成相轨迹。

# 相轨线绘制的步骤

例8-1

例

用等倾线法绘制系统  $\ddot{x} + x = 0$  的相轨迹。

解：

- 方法一：等倾线方程：

$$\alpha = \frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}} = \frac{-x}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{\alpha}x$$

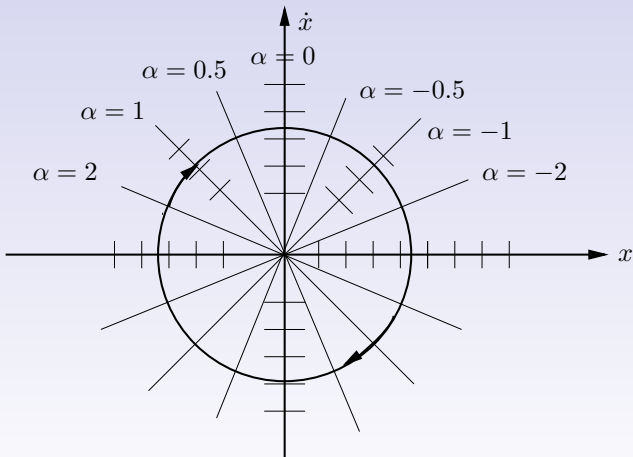
- 方法二：积分法：

$$\dot{x}d\dot{x} = -xdx \Rightarrow \int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \dot{x}d\dot{x} = \int_{x_0}^x -xdx$$

$$x^2 + \dot{x}^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2$$

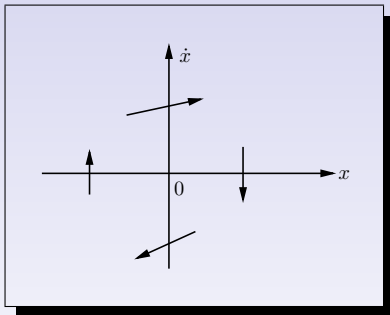
# 相轨线绘制的步骤

例8-1



# 相轨线绘制要点

- ①  $\dot{x}$  轴与  $x$  轴的比例一致。
- ② 根据  $\alpha = \frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}}$ ，把相平面分成几个区域，每部分的方向向量大致相同。
- ③ 注意在上、下相平面和坐标轴上的方向向量的方向特征。
- ④ 方向向量不在多，在于标出轨迹的运动特征。



# 典型二阶系统的相轨迹

考虑如下二阶系统

$$\ddot{c} + 2\xi\omega_n\dot{c} + \omega_n^2 c = r$$

系统零输入运动方程为

$$\ddot{c} + 2\xi\omega_n\dot{c} + \omega_n^2 c = 0$$

显然，原点(0,0)为奇点。

系统的极点为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

## 二阶系统的相轨迹： $0 < \xi < 1, \xi = 0.5, \omega_n = 1$

系统方程为： $\ddot{c} + \dot{c} + c = 0$

- ① 确定奇点： $(0, 0)$ ;
- ② 确定  $(c, \dot{c})$  处的方向向量:

$$\alpha = -\frac{\dot{c} + c}{\dot{c}}$$

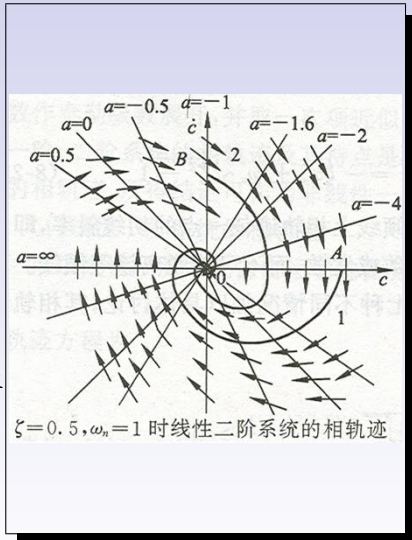
- ③ 确定方向向量斜率为  $\alpha$  的等倾线:

$$\dot{c} = -\frac{1}{1 + \alpha}c$$

- ④ 确定直线特解: 由  $\alpha = -\frac{1}{1 + \alpha}$  得

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

- ⑤ 确定  $\dot{c}$  轴上的方向向量.
- ⑥ 奇点  $(0, 0)$  为稳定焦点。



$\zeta = 0.5, \omega_n = 1$  时线性二阶系统的相轨迹

## 二阶系统的相轨迹： $-1 < \xi < 0$ , $\xi = -0.5$ , $\omega_n = 1$

系统方程为： $\ddot{c} - \dot{c} + c = 0$

- 1 确定奇点： $(0, 0)$ ;
- 2 确定  $(c, \dot{c})$  处的方向向量:

$$\alpha = \frac{\dot{c} - c}{\dot{c}}$$

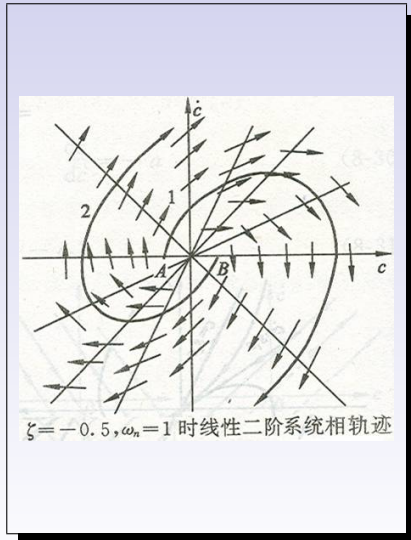
- 3 确定方向向量斜率为  $\alpha$  的等倾线:

$$\dot{c} = \frac{1}{1 - \alpha} c$$

- 4 确定直线特解: 由  $\alpha = \frac{1}{1 - \alpha}$  得

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

- 5 确定  $\dot{c}$  轴上的方向向量.
- 6 奇点  $(0, 0)$  为不稳定焦点。



## 二阶系统的相轨迹： $\xi \geq 1, \xi = 1.25, \omega_n = 1$

系统方程为： $\ddot{c} + 2.5\dot{c} + c = 0$

- ① 确定奇点： $(0, 0)$ ;
- ② 确定  $(c, \dot{c})$  处的方向向量:

$$\alpha = -\frac{2.5\dot{c} + c}{\dot{c}}$$

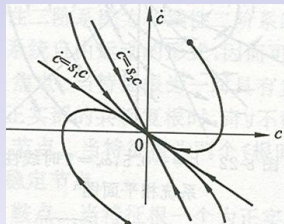
- ③ 确定方向向量斜率为  $\alpha$  的等倾线:

$$\dot{c} = -\frac{1}{2.5 + \alpha}c$$

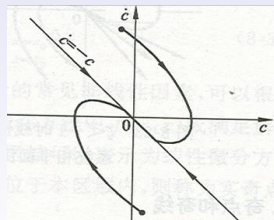
- ④ 确定直线特解: 由

$$\alpha^2 + 2.5\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{c} = -2c \\ \dot{c} = -0.5c \end{cases}$$

- ⑤ 确定  $\dot{c}$  轴上的方向向量.
- ⑥ 奇点  $(0, 0)$  为 **稳定结点**。当  $\xi = 1$ , 系统有2个相等的负实根, 为 **稳定的退化结点**。



$\xi > 1$  时线性二阶系统的相平面图



$\xi = 1, \omega_n = 1$  时线性二阶系统的相平面图



## 二阶系统的相轨迹: $\xi \leq -1, \xi = -2, \omega_n = 1$

系统方程为:  $\ddot{c} - 4\dot{c} + c = 0$

- ① 确定奇点:  $(0, 0)$ ;
- ② 确定  $(c, \dot{c})$  处的方向向量:

$$\alpha = \frac{4\dot{c} - c}{\dot{c}}$$

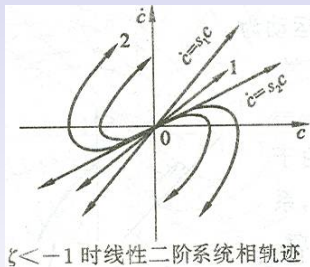
- ③ 确定方向向量斜率为  $\alpha$  的等倾线:

$$\dot{c} = \frac{1}{4 - \alpha} c$$

- ④ 确定直线特解: 由

$$\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{c} = 3.73c \\ \dot{c} = 0.27c \end{cases}$$

- ⑤ 确定  $\dot{c}$  轴上的方向向量.
- ⑥ 奇点  $(0, 0)$  为不稳定结点。当  $\xi = -1$ , 系统有2个相等的正实根, 为不稳定的退化结点。



# 二阶系统的相轨迹： $\ddot{c} + 2\xi\omega_n\dot{c} + \omega_n^2c = 0$

系统的特征根为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$\xi$ 范围	特征根类型	奇点类型	曲线类型
$0 < \xi < 1$	$\text{Re}(s_{1,2}) < 0$	稳定焦点	收敛螺线
$-1 < \xi < 0$	$\text{Re}(s_{1,2}) > 0$	不稳定焦点	发散螺线
$1 \leq \xi$	$s_{1,2} < 0$	稳定结点	 <p><math>\xi &gt; 1</math> 时线性二阶系统的相平面图</p>
$\xi \leq -1$	$s_{1,2} > 0$	不稳定结点	 <p><math>\xi &lt; -1</math> 时线性二阶系统相轨迹</p>
$\xi = 0$	$\text{Re}(s_{1,2}) = 0$	中心	圆或椭圆

## 典型二阶系统的相轨迹：鞍点

考虑如下二阶系统

$$\ddot{c} + 2\xi\omega_n\dot{c} - \omega_n^2 c = r$$

系统零输入运动方程为

$$\ddot{c} + 2\xi\omega_n\dot{c} - \omega_n^2 c = 0$$

显然，原点(0,0)为奇点。

系统的极点为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 + 1}$$

特征根为符号相反的实根，奇点(0,0)称为鞍点。

## 二阶系统的相轨迹: $\xi = 0.5, \omega_n = 1$

系统方程为:  $\ddot{c} + \dot{c} - c = 0$

- ① 确定奇点:  $(0, 0)$ ;
- ② 确定  $(c, \dot{c})$  处的方向向量:

$$\alpha = -\frac{\dot{c} - c}{\dot{c}}$$

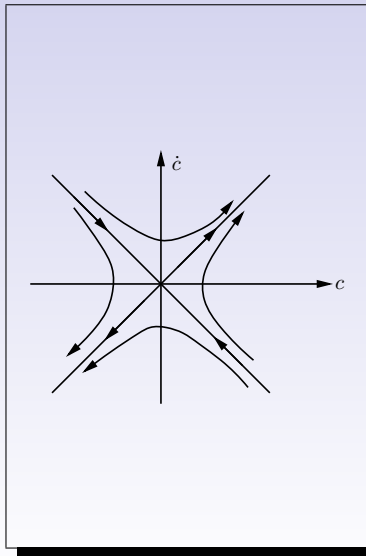
- ③ 确定方向向量斜率为  $\alpha$  的等倾线:

$$\dot{c} = \frac{1}{1 + \alpha} c$$

- ④ 确定直线特解: 由

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{c} = -1.618c \\ \dot{c} = 0.618c \end{cases}$$

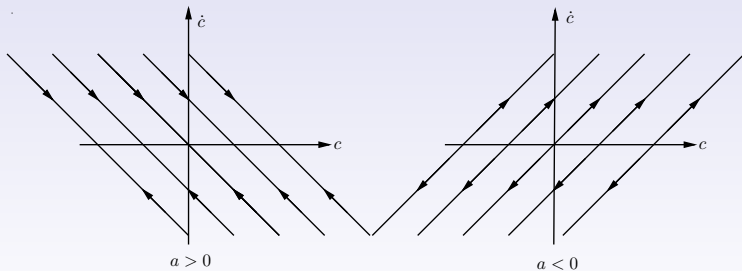
- ⑤ 确定  $\dot{c}$  轴上的方向向量:  $\alpha = -1$ .
- ⑥ 奇点  $(0, 0)$  为鞍点。



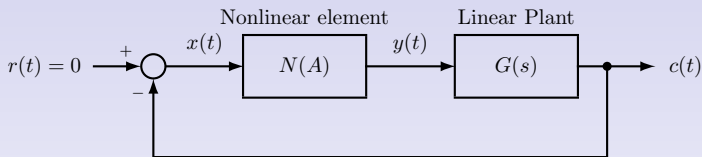
## 二阶系统的相轨迹： $\ddot{c} + a\dot{c} = 0$

- ① 确定奇点： $(c(t), 0)$ ;
- ② 确定  $(c, \dot{c})$  处的方向向量:

$$\alpha = -\frac{a\dot{c}}{\dot{c}} = -a$$

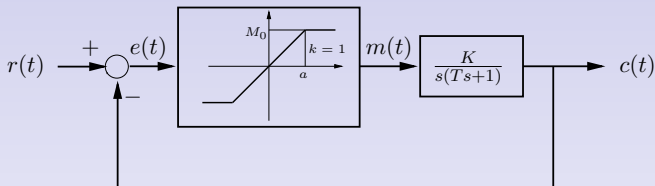


# 非线性系统的相平面分析



- 包含非线性环节所构成的非线性系统是分段线性的。
- 几条直线将相平面分割成若干片，在每一片区域内，相轨迹按某一个线性系统规律运动。
- 如果该线性系统的奇点位于本区域内，称为**实奇点**，否则称为**虚奇点**；如果位于分界线上，称为**半虚半实奇点**。

## 例1：具有饱和特性的非线性系统



$$m(t) = \begin{cases} M_0 & e(t) > e_0 \\ ke(t) & |e(t)| \leq e_0 \\ -M_0 & e(t) < -e_0 \end{cases}$$

其中  $T = 1, K = 4, k = 1, M_0 = e_0 = 0.2$ 。当  $r(t) = R \cdot 1(t) = 2 \cdot (t), r(t) = v_0 t$  时，试分别描绘系统误差  $e(t)$  的相平面图。

系统方程为

$$T\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) = Km(t), \quad e(t) = r(t) - c(t)$$

## 例1: 具有饱和特性的非线性系统: $r(t) = R \cdot 1(t)$

选择相平面  $Oe\dot{e}$ , 当  $r(t) = 2 \cdot 1(t)$  时, 分段线性方程为

$$\begin{cases} T\ddot{e} + \dot{e} + KM_0 = T\ddot{r} + \dot{r} & e(t) > e_0 \\ T\ddot{e} + \dot{e} + Kke = T\ddot{r} + \dot{r} & |e(t)| \leq e_0 \\ T\ddot{e} + \dot{e} - KM_0 = T\ddot{r} + \dot{r} & e(t) < -e_0 \end{cases}$$

代入参数可得

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0 & e(t) > 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0 & |e(t)| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0 & e(t) < -0.2 \end{cases}$$

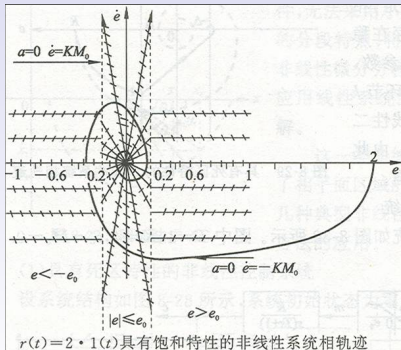


# 例1: 具有饱和特性的非线性系统: $r(t) = R \cdot 1(t)$

当  $r(t) = R \cdot 1(t)$  时, 分段线性方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0 & e(t) > 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0 & |e(t)| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0 & e(t) < -0.2 \end{cases}$$

- ① 区域  $e > 0.2$ , 无奇点, 直线  $\dot{e} = -0.8$  为特解, 方向向量为  $\alpha = -\frac{\dot{e}+0.8}{\dot{e}}$ , 等倾线为  $\dot{e} = -\frac{0.8}{\alpha+1}$ .
- ② 区域  $|e| \leq 0.2$ ,  $(0,0)$  为稳定的实焦点.
- ③ 区域  $e < -0.2$ , 无奇点, 直线  $\dot{e} = 0.8$  为特解,  $\alpha = \frac{-\dot{e}+0.8}{\dot{e}}$ , 等倾线为  $\dot{e} = \frac{0.8}{\alpha+1}$ .
- ④  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .



## 例1: 具有饱和特性的非线性系统: $r(t) = v_0 t$

选择相平面  $Oe\dot{e}$ , 当  $r(t) = v_0 t = 1.2t$  时, 分段线性方程为

$$\begin{cases} T\ddot{e} + \dot{e} + KM_0 = T\ddot{r} + \dot{r} & e(t) > e_0 \\ T\ddot{e} + \dot{e} + Kke = T\ddot{r} + \dot{r} & |e(t)| \leq e_0 \\ T\ddot{e} + \dot{e} - KM_0 = T\ddot{r} + \dot{r} & e(t) < -e_0 \end{cases}$$

代入参数可得

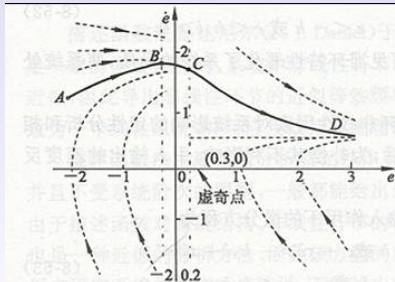
$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = v_0 & e(t) > 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} + 4e = v_0 & |e(t)| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = v_0 & e(t) < -0.2 \end{cases}$$

# 例1: 具有饱和特性的非线性系统: $r(t) = v_0 t$

当  $r(t) = 1.2t$  时, 分段线性方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 1.2 & e(t) > 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 1.2 & |e(t)| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 1.2 & e(t) < -0.2 \end{cases}$$

- ① 区域  $e > 0.2$ , 无奇点, 直线  $\dot{e} = 0.4$  为特解, 方向向量为  $\alpha = \frac{0.4 - \dot{e}}{\dot{e}}$ , 等倾线为  $\dot{e} = \frac{0.4}{\alpha + 1}$ .
- ② 区域  $|e| \leq 0.2$ ,  $(0.3, 0)$  为稳定的虚焦点.
- ③ 区域  $e < -0.2$ , 无奇点, 直线  $\dot{e} = 2$  为特解,  $\alpha = \frac{2 - \dot{e}}{\dot{e}}$ , 等倾线为  $\dot{e} = \frac{2}{\alpha + 1}$ .
- ④  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0.4, \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty$ .



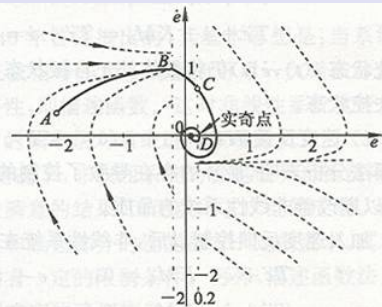
$r(t) = 1.2t$  时具有饱和特性的非线性系统的相平面图

# 例1: 具有饱和特性的非线性系统: $r(t) = v_0 t$

当  $r(t) = 0.4t$  时, 分段线性方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0.4 & e(t) > 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0.4 & |e(t)| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0.4 & e(t) < -0.2 \end{cases}$$

- ① 区域  $e > 0.2$ , 无奇点, 直线  $\dot{e} = -0.4$  为特解, 方向向量为  $\alpha = -\frac{0.4 + \dot{e}}{\dot{e}}$ , 等倾线为  $\dot{e} = -\frac{0.4}{\alpha + 1}$ .
- ② 区域  $|e| \leq 0.2$ ,  $(0.1, 0)$  为稳定的**实焦点**.
- ③ 区域  $e < -0.2$ , 无奇点, 直线  $\dot{e} = 1.2$  为特解,  $\alpha = \frac{1.2 - \dot{e}}{\dot{e}}$ , 等倾线为  $\dot{e} = \frac{1.2}{\alpha + 1}$ .
- ④  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.1$ .



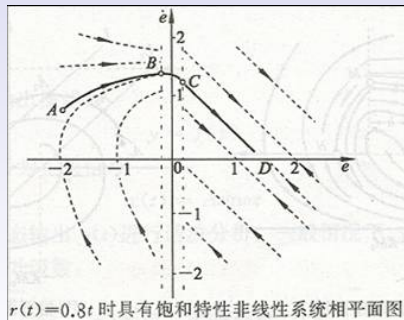
$r(t) = 0.4t$  时具有饱和特性非线性系统相平面图

# 例1: 具有饱和特性的非线性系统: $r(t) = v_0 t$

当  $r(t) = 0.8t$  时, 分段线性方程为

$$\begin{cases} \ddot{e} + \dot{e} + 0.8 = 0.8 & e(t) > 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} + 4e = 0.8 & |e(t)| \leq 0.2 \\ \ddot{e} + \dot{e} - 0.8 = 0.8 & e(t) < -0.2 \end{cases}$$

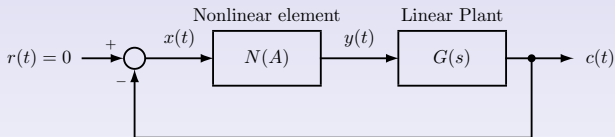
- ① 区域  $e > 0.2$ ,  $e < -0.2$  的横轴均为奇点, 方向向量为  $\alpha = -1$ .
- ② 区域  $|e| \leq 0.2$ ,  $(0.2, 0)$  为稳定的半实焦点.
- ③ 区域  $e < -0.2$ , 无奇点, 直线  $\dot{e} = 1.6$  为特解,  $\alpha = \frac{1.6 - \dot{e}}{\dot{e}}$ , 等倾线为  $\dot{e} = \frac{1.6}{\alpha + 1}$ .
- ④  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  与初值有关.



# 描述函数法基本概念

## Definition: 描述函数法

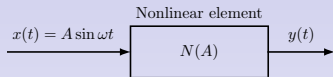
在一定条件下，将非线性环节在正弦输入信号作用下的输出信号用一次谐波分量来近似，导出非线性系统等效的近似频率特性，然后采用频域法研究该系统的稳定性和自激振荡问题。



描述函数法的应用条件：

- ① 非线性环节数学描述： $f(-x) = -f(x)$ ，保证正弦输入信号响应无恒定分量。
- ②  $G(s)$  具有良好的低通性，保证应用描述函数而忽略掉的高频信号，不会导致很大的误差。

# 描述函数的数学定义



设输入信号为  $x(t) = A \sin \omega t$ , 非线性环节  $N(A)$  的输出  $y(t)$  的 Fourier (傅立叶) 级数为

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d(\omega t), \quad n = 0, 1, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d(\omega t), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \phi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$$

其中  $\omega t$  是积分变量。

# 描述函数的数学定义

由于  $f(x)$  是奇函数, 所以  $A_0 = 0$ , 输出  $y(t)$  的一次谐波近似为

$$y(t) \approx A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

其中

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t \, d(\omega t)$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t \, d(\omega t)$$

称

$$N(A) \triangleq |N(A)| e^{j\angle N(A)} = \frac{Y_1}{A} e^{j\phi_1} = \frac{B_1 + jA_1}{A}$$

为该非线性环节的**描述函数**。

## 描述函数

描述函数定义在正弦信号作用下, 非线性环节的稳态输出中一次谐波分量和输入信号的复数比。



# 描述函数的数学定义

由于 $f(x)$ 是奇函数, 则

$$\begin{aligned}y(t) &= f[A \sin \omega t] = f[-A \sin(\omega t + \pi)] \\&= -f[A \sin(\omega t + \pi)] = -y(t + \frac{\pi}{\omega})\end{aligned}$$

称 $y(t)$ 为奇对称函数, 若 $y(t)$ 又为 $t$ 的奇函数, 则

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t \, d(\omega t) = 0$$

因此具有奇函数特性的非线性环节的描述函数为

$$N(A) \triangleq \frac{B_1}{A}$$

## 求非线性环节 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3$ 的描述函数 $N(A)$

由于  $y(A \sin \omega t)$  是奇函数, 所以  $A_0 = A_1 = 0$ , 又

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2}A \sin \omega t + \frac{1}{4}A^3 \sin^3 \omega t \right) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2}A \sin^2 \omega t + \frac{1}{4}A^3 \sin^4 \omega t \right) d(\omega t) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{3}{16}A^3 \end{aligned}$$

所以描述函数为

$$N(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16}A^2$$

其中用到  $\int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$ ,  $\int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{3\pi}{8}$ .

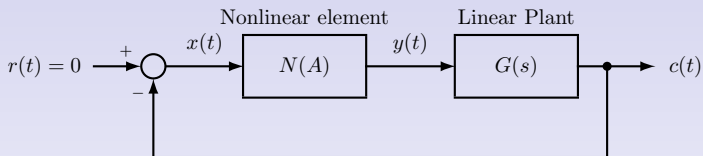
### 注释

根据描述函数法, 非线性环节可看做一个变增益的线性放大器, 其增益与输入信号的幅值有关.

# 描述函数法的物理意义

	线性系统	非线性系统
输入信号 $x(t)$	$A \sin \omega t$	$A \sin \omega t$
输出信号 $y(t)$	$A G(j\omega)  \sin(\omega t + \varphi)$	$A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$
物理意义	系统稳态输出中与输入同频率的分量的幅值和相位相对于输入的变化	系统输出一一次谐波分量的幅值和相位相对于输入的变化(忽略高次谐波分量, 仅考虑基波)
注意	输出幅值、相位变化与幅值 $A$ 无关, 仅与 $\omega$ 有关	输出与幅值 $A$ 有关, 描述函数也是与幅值 $A$ 有关的复变增益放大器

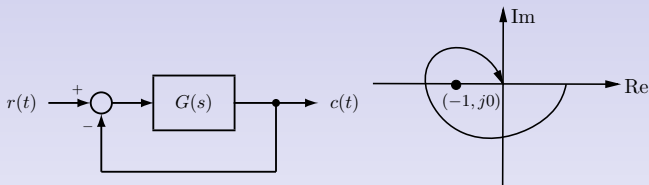
# 非线性系统的稳定性分析



## 基本思想

对于如图所示的带有非线性环节的系统，若非线性环节满足描述函数法的应用条件，根据描述函数法，非线性环节可以近似地等效为一个与输入增益  $A$  有关的放大环节来处理，因此可利用线性系统频域方法分析整个系统的稳定性。

# 奈奎斯特稳定判据

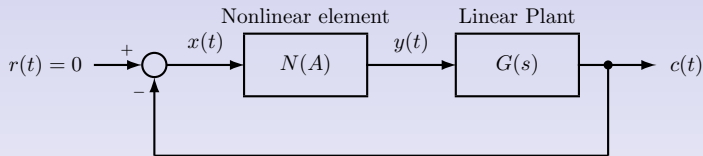


## 定理 ( $P = 0$ 情形)

设单位负反馈系统开环传函为  $G(s)$ ，则闭环特征方程为  $1+G(s) = 0$ ，

- ① 若系统开环奈奎斯特曲线  $G(j\omega)$  包围  $(-1, j0)$  时，闭环系统不稳定；
- ② 若系统开环奈奎斯特曲线  $G(j\omega)$  穿越  $(-1, j0)$  时，闭环系统不稳定（临界稳定）；
- ③ 若系统开环奈奎斯特曲线  $G(j\omega)$  不包围  $(-1, j0)$  时，闭环系统稳定；

# 非线性系统的稳定性分析-描述函数法



闭环系统的特征方程  $1 + N(A)G(s) = 0$  或  $G(j\omega) = -1/N(A)$  .

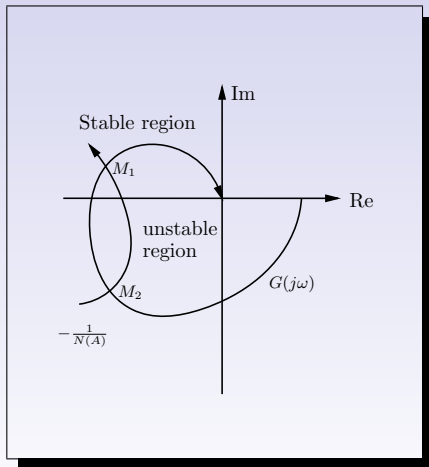
- ①  $-1/N(A)$ , 称为非线性特性的负倒描述函数。
- ②  $-1/N(A)$  相当于线性闭环系统中的  $(-1, 0j)$  临界点, 是该非线性闭环系统是否稳定、是否存在稳定的周期运动 (自激振荡) 的参数分界线。
- ③ 当  $N(A)$  为实函数时, 负倒描述函数退化为实轴上的射线。

# 推广的Nyquist稳定判据

定义  $G(j\omega)$  曲线包围的复平面区域，称为不稳定区域，其它部分区域称为稳定区域。

- ① 当  $G(j\omega)$  不包围  $-1/N(A)$  曲线时，非线性闭环系统稳定；
- ② 当  $G(j\omega)$  包围  $-1/N(A)$  曲线时，非线性闭环系统不稳定；
- ③ 当  $G(j\omega)$  曲线与  $-1/N(A)$  曲线相交时，非线性闭环系统存在周期运动。
- ④ 系统处于周期运动时，非线性环节的输入信号近似为等幅振荡：

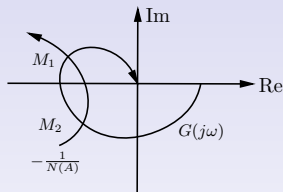
$$x(t) = A_x \sin(\omega_x t)$$



# 存在自激振荡的条件

$-1/N(A)$  曲线上的箭头表示随着  $A$  增加,  $-1/N(A)$  曲线的变化方向。

- ①  $-1/N(A)$  曲线**进入**不稳定区域的交点  $M_2$ , 产生**不稳定**的周期运动;
- ②  $-1/N(A)$  曲线**穿出**不稳定区域的交点  $M_1$ , 产生**稳定**的周期运动 (自激振荡);
- ③ 自激振荡为周期运动, 自激振荡的**频率**和**振幅**可由交点确定;
- ④ 当横截相交的角度越接近直角, 分析的结果越准确。

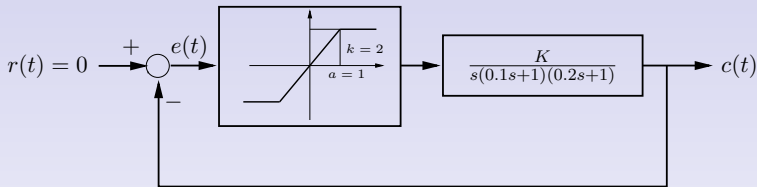


The arrow in the figure denotes the increase direction of  $-\frac{1}{N(A)}$  with the increase of  $A$ .



## 例8-6

系统如下图所示, 饱和特性  $k = 2$ ,  $a = 1$ , 确定



- ① 当  $K = 15$  时确定系统的运动特性;
- ② 确定  $K$  为何值时, 系统不出现自激振荡。

解: 饱和环节的描述函数为

$$N(A) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2} \right), \quad A \geq a$$

## 例8-6

当  $k = 2$ ,  $a = 1$ , 负倒描述函数为

$$-\frac{1}{N(A)} = \frac{-\pi}{4 \left( \arcsin \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} \right)}, A \geq 1$$

利用  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , 可以验证  $-\frac{1}{N(A)}$  在  $A \in [1, +\infty)$  严格单调递减。

由于

$$-\frac{1}{N(1)} = -0.5, \quad -\frac{1}{N(+\infty)} \rightarrow -\infty$$

所以  $G(j\omega)$  与实轴上的  $-\frac{1}{N(A)}$  曲线可能相截一次, 且交点是穿出点, 从而可能存在唯一一个自激振荡。

## 例8-6

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)} \Big|_{s=j\omega} \\
 &= K \frac{-0.3\omega - j(1 - 0.02\omega^2)}{\omega(0.0004\omega^4 + 0.05\omega^2 + 1)}
 \end{aligned}$$

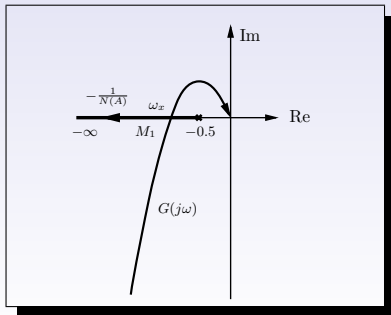
$G(j\omega)$  与  $-\frac{1}{N(A)}$  曲线相交实轴于  $M_1$ ，自振频率  $\omega_x$  满足

$$\text{Im}[G(j\omega_x)] = 0$$

即

$$1 - 0.02\omega_x^2 = 0$$

所以  $\omega_x = \sqrt{50} \approx 7.07 \text{ rad/s}$ .



## 例8-6

自振的振幅  $A_x$  满足

$$-\frac{1}{N(A_x)} = \operatorname{Re}[G(j\omega_x)]$$

由  $K = 15$ ,  $\omega_x = \sqrt{50}$  得

$$\operatorname{Re}G(j\omega_x) = K \frac{-0.3\omega_x}{\omega_x(0.0004\omega_x^4 + 0.05\omega_x^2 + 1)} = \frac{-0.3K}{4.5} = -1$$

所以

$$1 = N(A_x) = \frac{4}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{A_x} + \frac{1}{A_x} \sqrt{1 - \left( \frac{1}{A_x} \right)^2} \right)$$

解上述方程得

$$A_x \approx 2.475$$

## 例8-6

由于交点  $M_1$  是穿出点, 所以对应的是稳定的周期振荡, 自振函数为

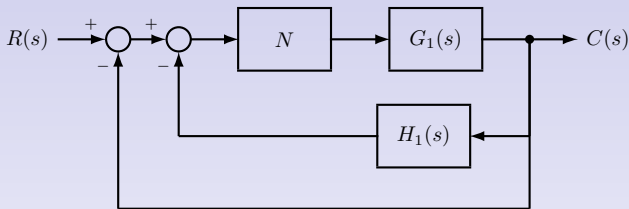
$$x(t) = 2.475 \sin \sqrt{50}t$$

如果系统不出现自振,  $-\frac{1}{N(A)}$  曲线应不被  $G(j\omega)$  包围。即

$$\frac{-0.3K}{4.5} > -0.5$$

所以  $K$  的临界稳定值为  $K < 7.5$ .

# 非线性系统的等效简化：例1



由方框图可知

$$\Phi(s) = \frac{NG_1(s)}{1 + NG_1(s)(1 + H_1(s))}$$

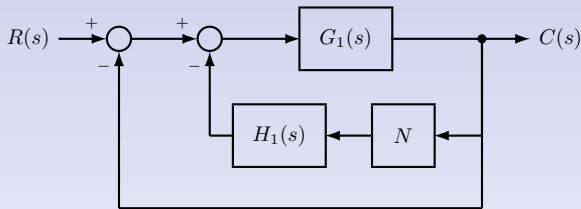
所以闭环系统特征方程

$$1 + NG_1(s)(1 + H_1(s)) = 0 \Leftrightarrow 1 + NG(s) = 0$$

等效的开环线性部分传递函数为

$$G(s) = G_1(s)(1 + H_1(s))$$

## 非线性系统的等效简化：例2



由方框图可知

$$\Phi(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)(1 + NH_1(s))}$$

所以闭环系统特征方程

$$1 + G_1(s)(1 + NH_1(s)) = 0 \Leftrightarrow 1 + NG(s) = 0$$

等效的开环线性部分传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s) = \frac{G_1(s)H_1(s)}{1 + G_1(s)}$$

# 本章知识小结

## 知识小结

- ① 理解非线性系统的特性和典型非线性环节及其特性；
- ② 能够运用相平面法分析二阶系统的动态特性；
- ③ 能够运用描述函数法对非线性系统进行分析。