第四次课　3月4日

1. 课堂练习题：

一SISO系统的状态变量模型如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}} x + \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} u \\ y = \underset{C}{\begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}} x \end{cases}$$

则该系统的传递函数为 $T(s) = Y(s)/U(s)$ 是 (B)

解：根据由状态空间模型求系统传递函数公式：

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C\Phi(s)B = C(sI-A)^{-1}B$$

$$\because \quad \Phi(s) = (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+10 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+10)+5}\begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+10s+5}\begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad T(s) = C\Phi(s)B = \left(\begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\cdot\frac{1}{s^2+10s+5}$$

$$= \frac{-50}{s^2+10s+5}$$

正确答案选(B)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ 二阶求逆公式

2. 本章知识点总结及能力测试题汇总讲解.

① 状态变量的概念：
- 个数的确定：独立储能元件个数；微分方程或传递函数的阶次
- 状态变量的选取：易于测量的物理量；有时没有物理概念.

② 状态空间模型：状态微分方程 + 输出方程

(状态变量模型)
(状态空间表达式)
(动态方程)

↓

$\boxed{\text{不唯一}}$！

弹簧阻尼器系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}} x + \underset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}} u \\ y = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} x + \underset{D}{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}} u \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$ 位移 速度

定义新的状态变量

$$z = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \rightarrow z_1 = y + \dot{y} \ ?$$

P ↓ 非奇异线性变换矩阵.

No.

Date

③ 状态响应(输出响应)

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \rightarrow$$

状态响应 $x(t) = \begin{cases} \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t) B u(t-\tau)d\tau \\ \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) B u(\tau)d\tau \end{cases}$

零输入响应　　零状态响应

$y = Cx(t) + Du(t)$

输出响应

$\Phi(t)$：状态转移矩阵(时域)

$\Phi(s)$：(复频域)

$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$

$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\Phi(s)\right]$

$\Phi(s)$：依据状态流图确定

性质

$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A \Rightarrow \dot{\Phi}(0) = A$　求状态矩阵

$\Phi(0) = I$

$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$

$\Phi(t_1 \pm t_2) = \Phi(t_1) \pm \Phi(t_2)$

$\Phi(mt) = [\Phi(t)]^m$

④ 依据信号流图求状态空间模型

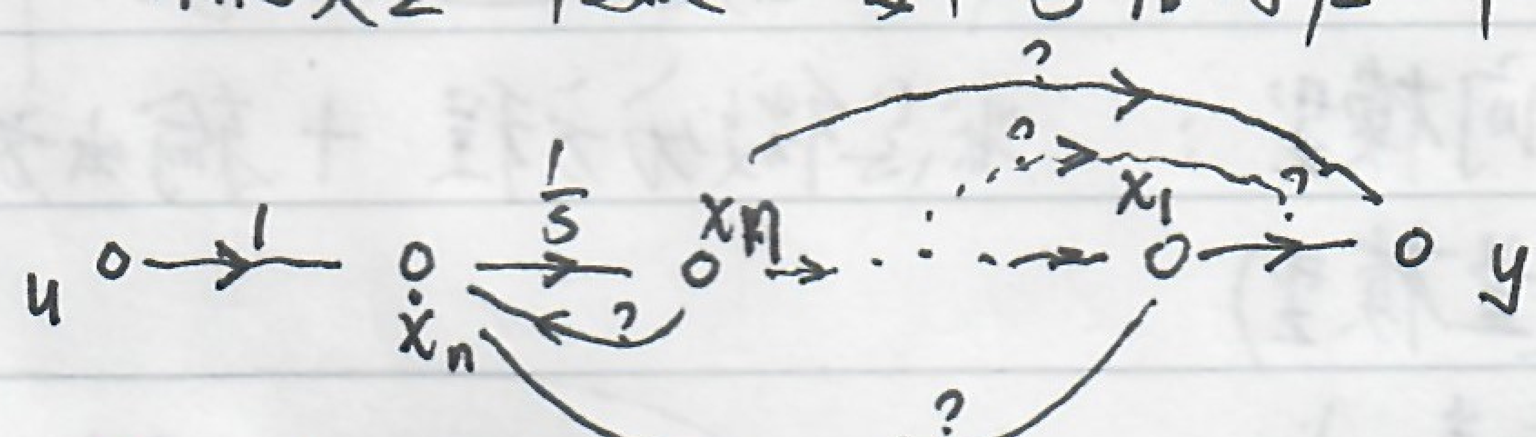
相变量标准型：节点个数 $(n+3)$

(n阶系统)

→ 1个是 $\dot{x}_n$，1个是输入 u，1个是输出 y.

→ 状态变量的个数：每个 $\frac{1}{s}$ 后对应一个状态变量

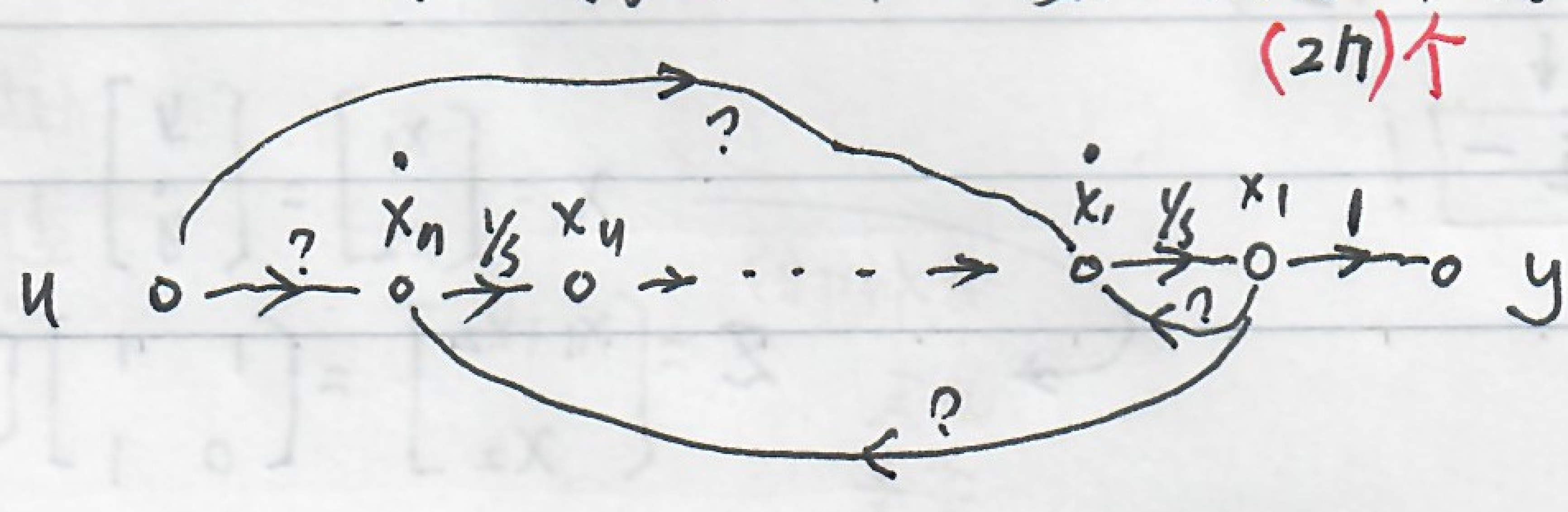
$G(s) = \frac{\sum P_k}{\Delta}$　条件 $\begin{pmatrix}\Delta_k = 1 \\ \Delta = 1 - \sum L_n\end{pmatrix}$



输入前馈标准型：节点个数：$2(n+1)$

(n阶系统)

→ 输入输出 2个；每个状态变量及其一阶导数 (2n)个



No.
Date

物理系统状态流图：$\begin{cases}\text{串联分解} \rightarrow \text{状态空间模型（相变量 + 输入前馈 形式混合）} \\ \text{并联分解} \rightarrow \text{可以得到对角标准型}\end{cases}$

↳ 当系统极点各不相同时，总可以通过适当变换得到。

⑤ 状态空间模型 → 求系统传递函数。

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \Rightarrow T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C\,\Phi(s)B + D$$

$$= C(sI - A)^{-1}B + D$$

关键是求 $\Phi(s)$

a) 非奇异线性变换不改变系统传递函数。 $z = Px$ → 可逆

$\Sigma(A, B, C)$ 一般可用来表示系统 $\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$

$D \neq [0]$ → $\Sigma(A, B, C, D)$

$D = [0]$ 零矩阵 → $\Sigma(A, B, C)$

$\Sigma(A^T, C^T, B^T)$ 表示 $\Sigma(A, B, C)$ 的对偶系统

b) $\Sigma(A^T, C^T, B^T)$ 与 $\Sigma(A, B, C)$ 的传递函数相等（仅是 SISO 系统时）

→ 互为转置关系（MIMO 系统）

c) 状态矩阵 A 的特征值：$|sI - A| = 0$

→ 系统的极点（根）

$T(s) \rightarrow SSR$ ： A 的特征值与 $T(s)$ 的极点一致

传递函数　状态空间模型

$SSR \rightarrow T(s)$ ： A 的特征值 $\underset{\text{子集.}}{\supseteq}$ $T(s)$ 的极点

↳ 一般情况下是传递函数矩阵。