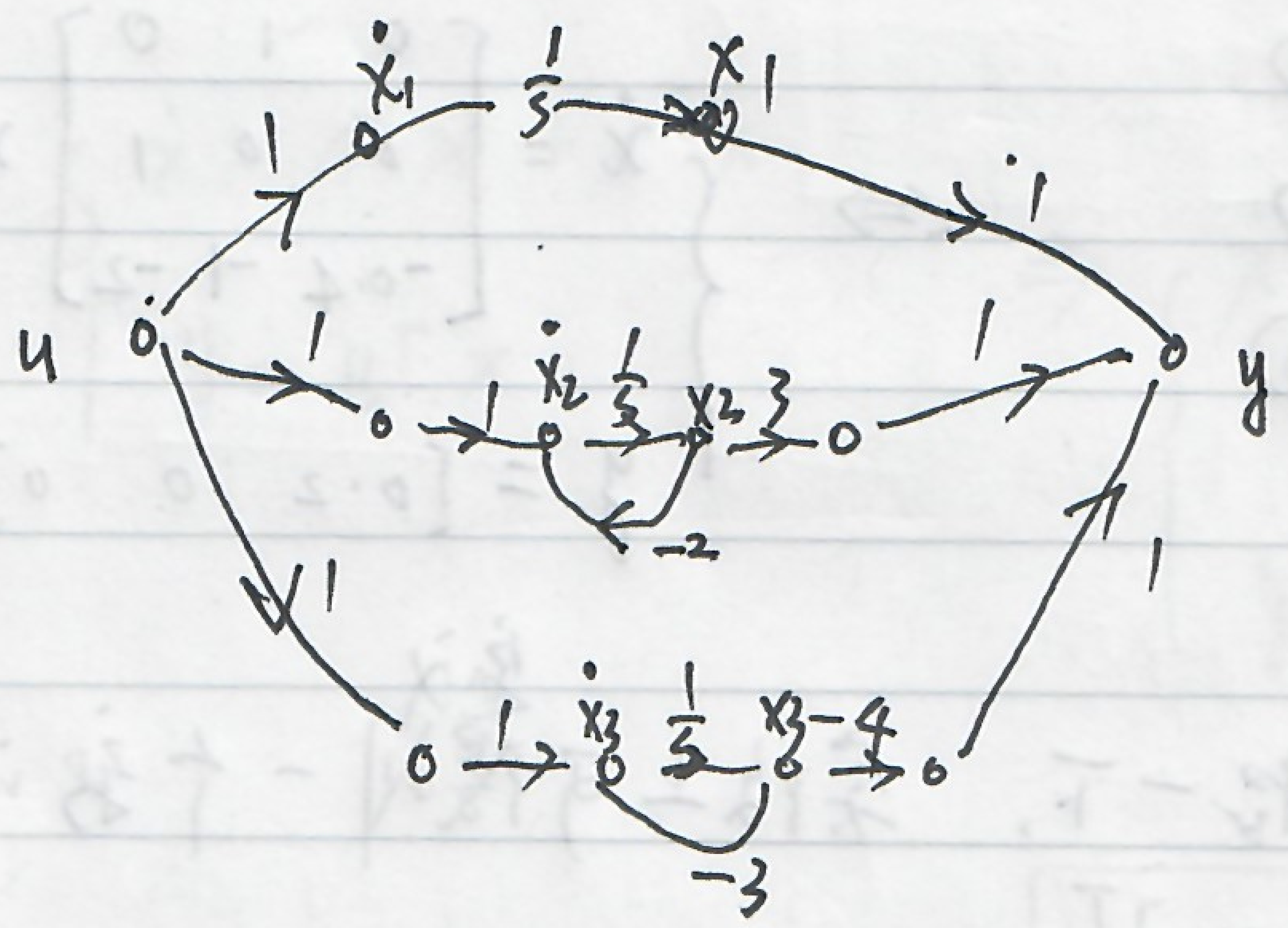
(2) 并联分解: $G(s)=\frac{1}{s}+\frac{3}{s+2}+\frac{-4}{s+3}$



$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = -2x_2+u \\ \dot{x}_3 = -3x_3+u \\ y = x_1+3x_2-4x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

第三次课　3月2日.

课堂练习题(3月2日)

1、已知某系统的微分方程模型为

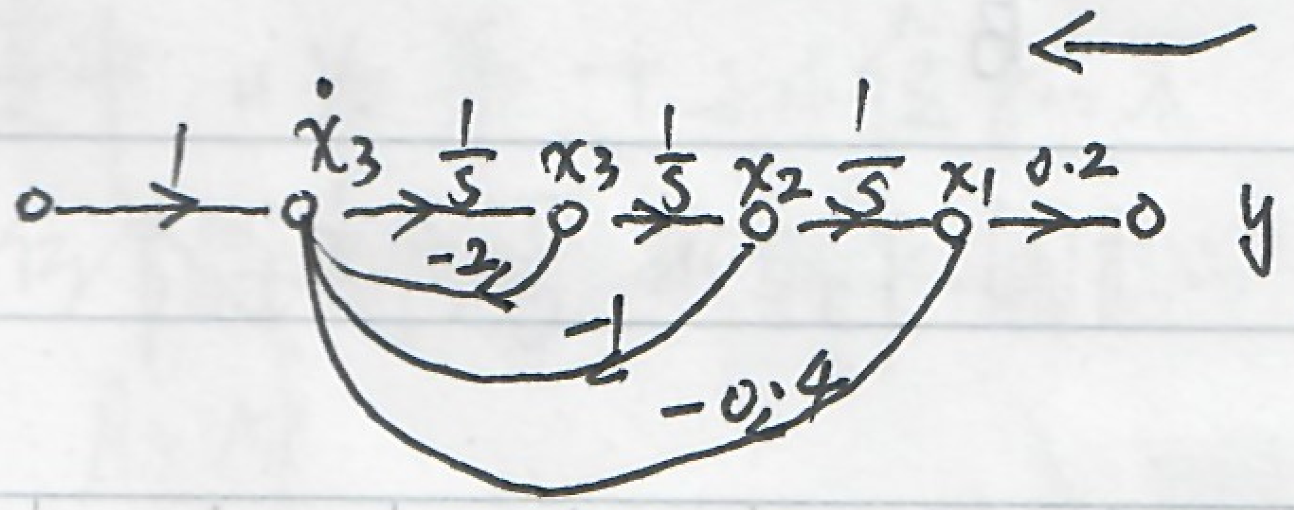
$$5\frac{d^3y}{dt^3}+10\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}+2y=u$$

则系统的状态空间模型为:

解 ①根据所学知识, 很容易得到系统的相变量标准型.

$$G(s)=\frac{1}{5s^3+10s^2+5s+2}=\frac{0.2}{s^3+2s^2+s+0.4}$$ (化成一般形式)

$$=\frac{0.2s^{-3}}{1+2s^{-1}+s^{-2}+0.4s^{-3}}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -0.4x_1-x_2-2x_3+u \\ y = 0.2x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.4 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

No.

Date

把相变量标准型的微分方程和输出方程重写如下：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 & ① \\
\dot{x}_2 = x_3 & ② \\
\dot{x}_3 = -0.4x_1 - x_2 - 2x_3 + u & ③ \\
y = 0.2x_1
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.4 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x
\end{cases}
$$

$\Downarrow$

将方程①②③的顺序调换一下，实际上可定义一个新的状态变量.

$$\boxed{\bar{x} = [x_3 \quad x_2 \quad x_1]^T}$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_3 = -0.4x_1 - x_2 - 2x_3 + u \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\dot{x}_1 = x_2 \\
y = 0.2x_1
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -0.4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}
\end{cases}
$$

$\Downarrow$

显然A是答案.

方法(二). 在数学视角中：一个系统$\Sigma(A, B, C)$的对偶系统$\Sigma(A^T, C^T, B^T)$.

对单输入单输出系统而言，$\Sigma(A, B, C)$与$\Sigma(A^T, C^T, B^T)$对应的传递函数不变；故可由此性质求之.

原系统传递函数：$G(s) = \dfrac{0.2}{s^3 + 2s^2 + s + 0.4}$

其输入前馈标准型为：

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}}_{B} u \\
y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x
\end{cases}
$$

其对偶系统$\Sigma(A^T, C^T, B^T)$为：

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}^T x + C^T x \\ y = B^T x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -0.4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$\Downarrow$

(A)为正确答案.

方式(三)：对每个选项求传递函数：

$$\begin{cases} G(s) = C\Phi(s)B + D = C\Phi(s)B \\ \Phi(s) = (sI - A)^{-1} \end{cases}$$

A：选项：$G(s) = \dfrac{0.2}{s^3 + 2s^2 + s + 0.4}$

B：选项：$G(s) = \dfrac{0.2}{s^3 + 5s^2 + s - 0.7}$

C：选项：$G(s) = \dfrac{s}{s^2 + 2s + 1}$

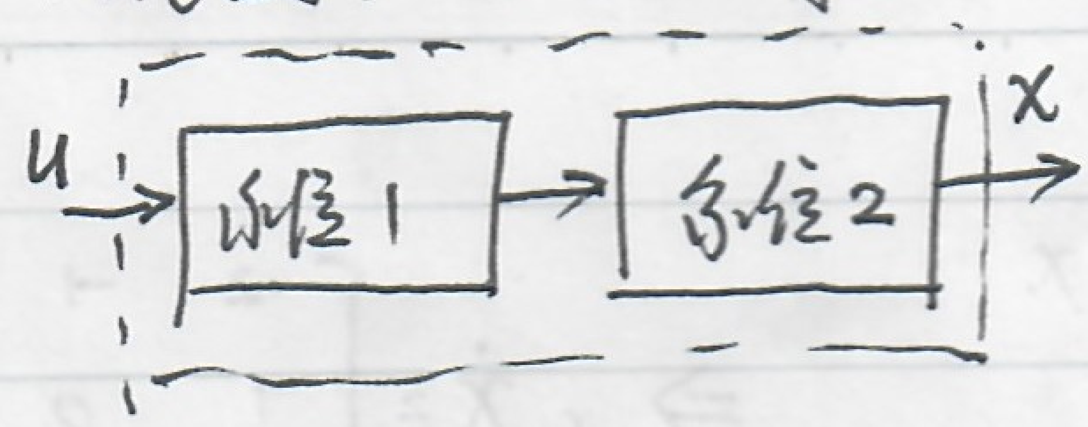
D：选项：$G(s) = \dfrac{0.2s^2}{s^3 + 2s^2 + s + 0.4}$

2. 某系统由二个一阶系统串联构成，其微分方程模型为：

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = u$$

其中u为第一个子系统输入，x为第二个子系统输出. 则该系统在单位~~阶跃~~脉冲信号$u(t)$作用下的响应$x(t)$为(零初始条件)：

解：由题意有：系统框图模型示意图为：



故该系统传递函数为：$G(s)=\dfrac{X(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s^2+4s+3}=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$

当 $u=\delta(t)$ 时，系统输出响应为：

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)U(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\cdot 1\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+3)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s+1}-\frac{\frac{1}{2}}{s+3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)$$

答案 C 为正确答案.

补充：

1. $\Sigma(A,B,C)$ 与其对偶系统 $\Sigma(A^T,C^T,B^T)$ 的传递函数对于 SISO 系统是一样的；对 MIMO 系统，是互为转置关系：

$$\begin{cases}\Sigma(A,B,C) & \text{传递函数：} & \boxed{T(s)} \\ \Sigma(A^T,C^T,B^T) & \cdots\ : & \boxed{T'(s)}\end{cases}$$

2. $\Sigma(A,B,C)$ 状态空间模型求系统传递函数(SISO)：

$T(s) \rightarrow \Sigma(A,B,C) \xrightarrow{\text{求传递}}$ $T(s)$ 与原系统一致.

$\Sigma(A,B,C) \xrightarrow{\text{求传递}}$ $T(s)$ 的阶次与状态空间模型的阶次可能不一样.

$\boxed{n_1 \geq n_2}$ → 有可能出现零极点对消！

3. 由 $\Sigma(A,B,C)$ 求 $T(s)$，一般情况下，$T(s)$ 是一个传递函数矩阵：$T(s)\in$ $p\times m$（p 为输出维数；m 为输入维数；）$u\in R^m$，$y\in R^p$

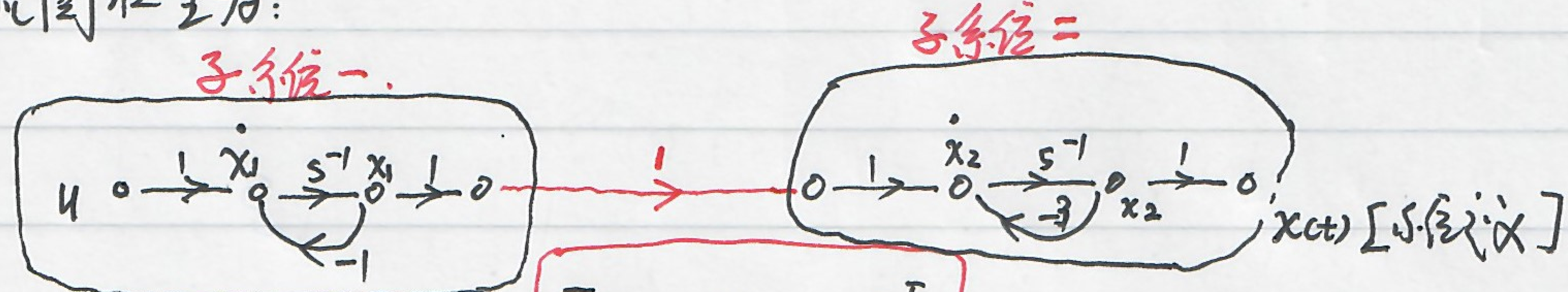
方法二：现代控制理论方法求解

我们应用状态空间模型的知识来求解.

① 系统传递函数为：

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+3)} \longrightarrow \text{串联分解：} G(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s+3}=\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}\cdot\frac{s^{-1}}{1+s^{-3}}$$

对应的状态流图模型为：



$$\boxed{\bar{x}(t)=[x_1\quad x_2]^T}$$

于是有：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+u\\ \dot{x}_2=x_1-3x_2\\ y=x(t)=x_2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-3\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u\\ y=[0\quad 1]\bar{x}\end{cases}$$

② 求系统状态转移矩阵 $\Phi(t)$.

$$\because\ \Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1&0\\-1&s+3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix}s+3&0\\+1&s+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}&0\\ \frac{1}{(s+1)(s+3)}&\frac{1}{s+3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}&0\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}\right)&\frac{1}{s+3}\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)]=\begin{bmatrix}e^{-t}&0\\ \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})&e^{-3t}\end{bmatrix}$$

③ 求输出响应：（为什么选这个表达式求状态响应？）

$$\therefore\ \bar{x}(t)=\Phi(t)\bar{x}(0)+\int_0^t\Phi(\tau)B\,u(t-\tau)d\tau$$

$$=\Phi(t)\bar{x}(0)+\int_0^t\Phi(\tau)B\,\delta(t-\tau)d\tau$$

零初始条件

$$=0+\int_0^t\Phi(\tau)B\,\delta(t-\tau)d\tau=\Phi(t)B=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ \frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \boxed{y=x(t)=x_2=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})}$$