第6次课

3月11日

1. 课堂讨论题

① 状态反馈形成的控制能力要远远强于输出反馈。在经典控制理论中，因传递函数模型只能描述输入与输出关系，反馈信号也仅只能使用输出信号；在现代控制理论之中，可以用状态变量刻画系统的内部信息，而输出信号可以看作是状态的一种组合。状态反馈使用的信息远远多于输出，故其控制能力显然要强于单纯的输出反馈。

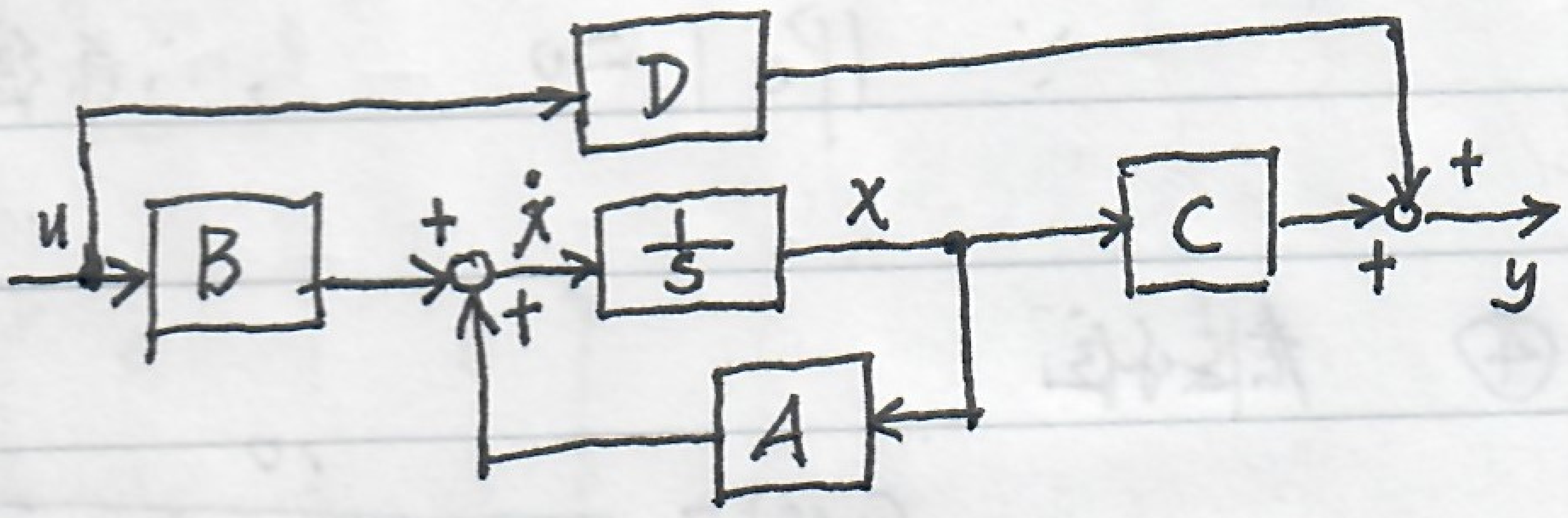
② 当系统完全能控时，状态反馈可任意配置闭环系统的极点；但系统若不完全能控，无法任意配置闭环极点。

反馈控制无法配置系统零点；但在某些情况下，因闭环系统配置的极点与零点相同，产生对消（约分）而导致零点变少，但这种现象本质上跟零点配置无关。

2. 状态空间模型、状态反馈、观测器方框图.

① 状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Leftrightarrow$$



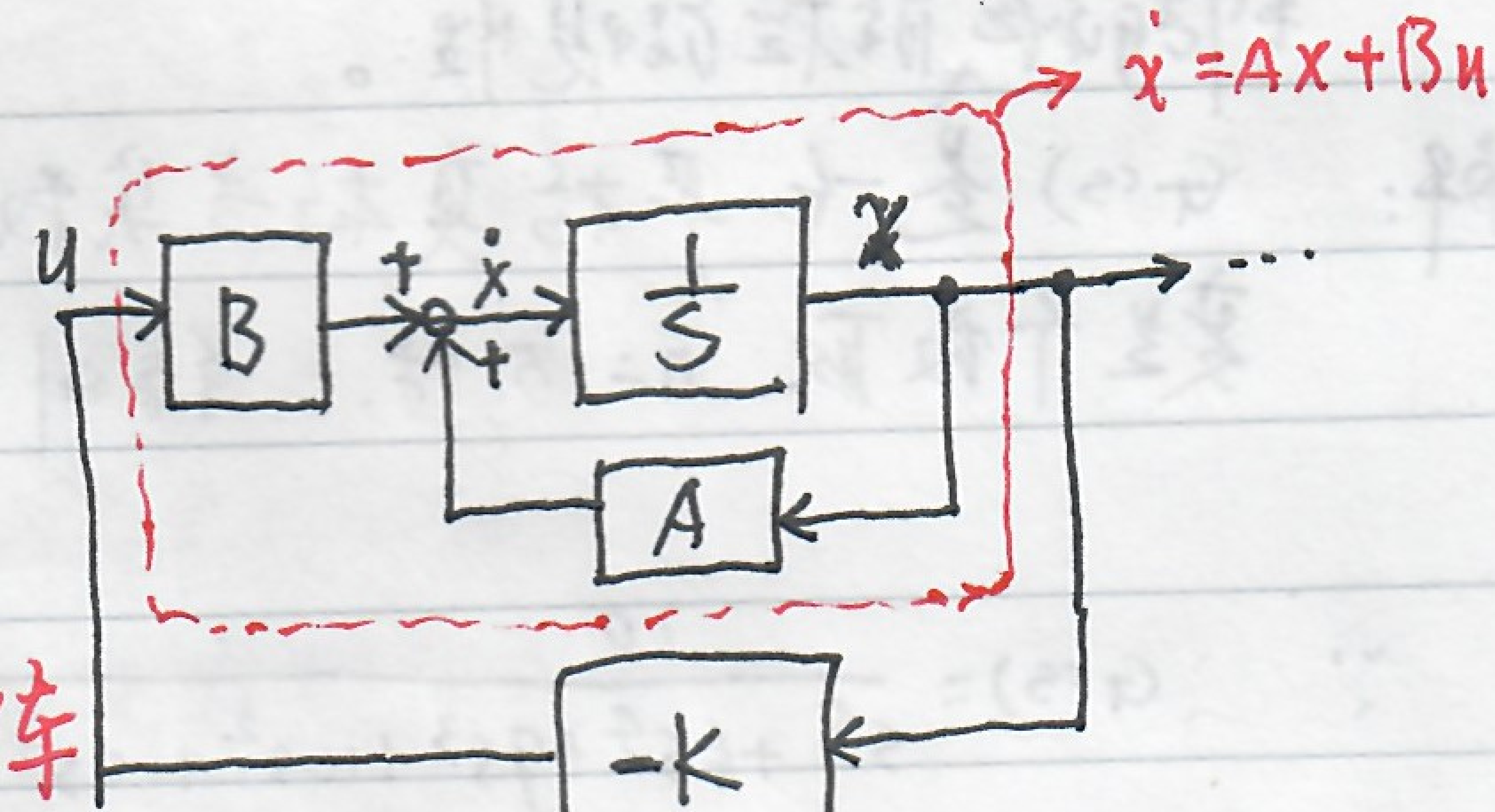
② 状态反馈

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = -Kx \end{cases} \Leftrightarrow$$

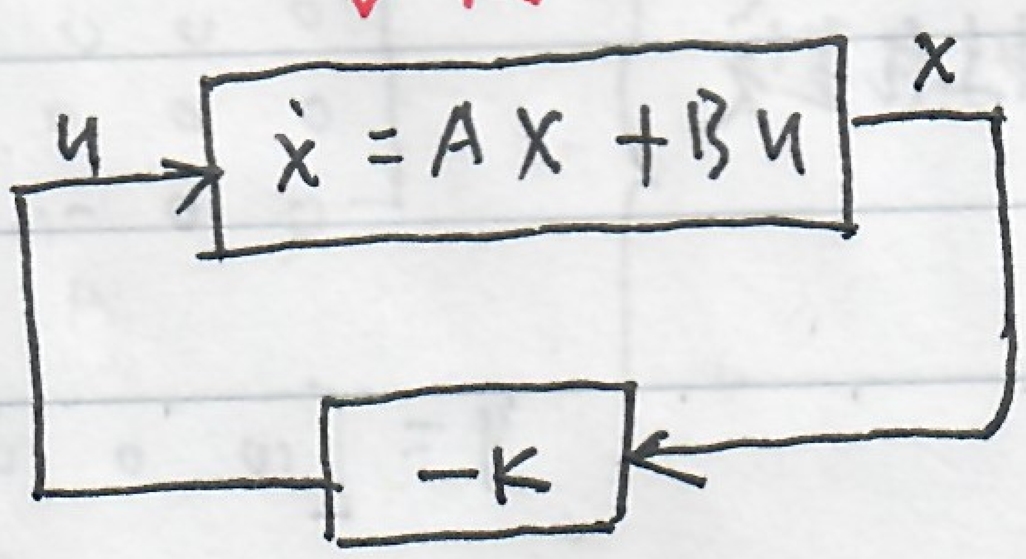
反馈信号

反馈增益矩阵

负反馈

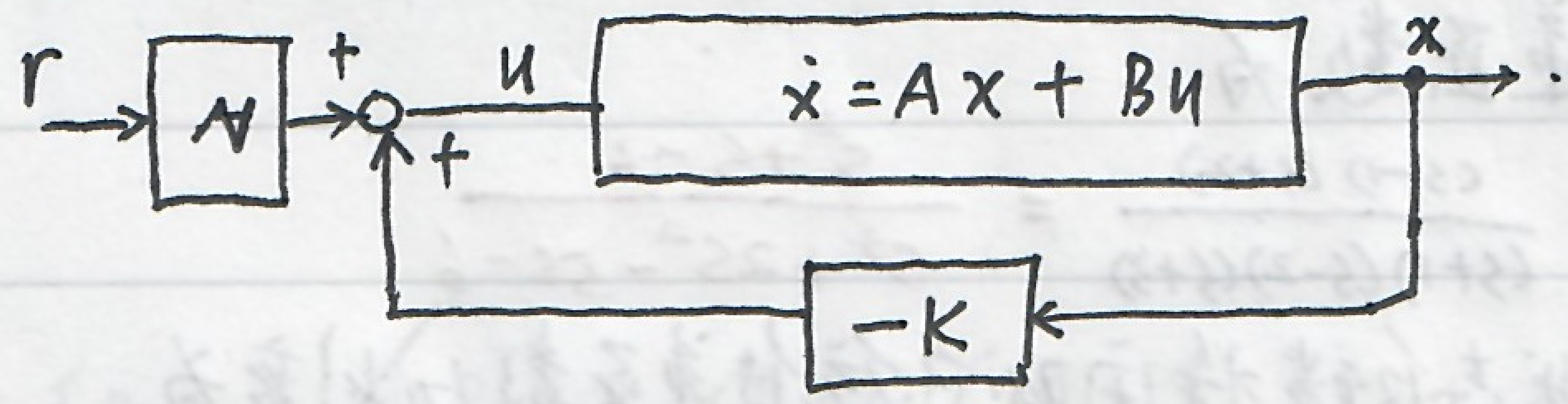


⇓ 简化



带参考输入的状态反馈：

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ u = -Kx + Nr\end{cases} \Leftrightarrow$$



③ 观测器（龙伯格状态观测器）

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

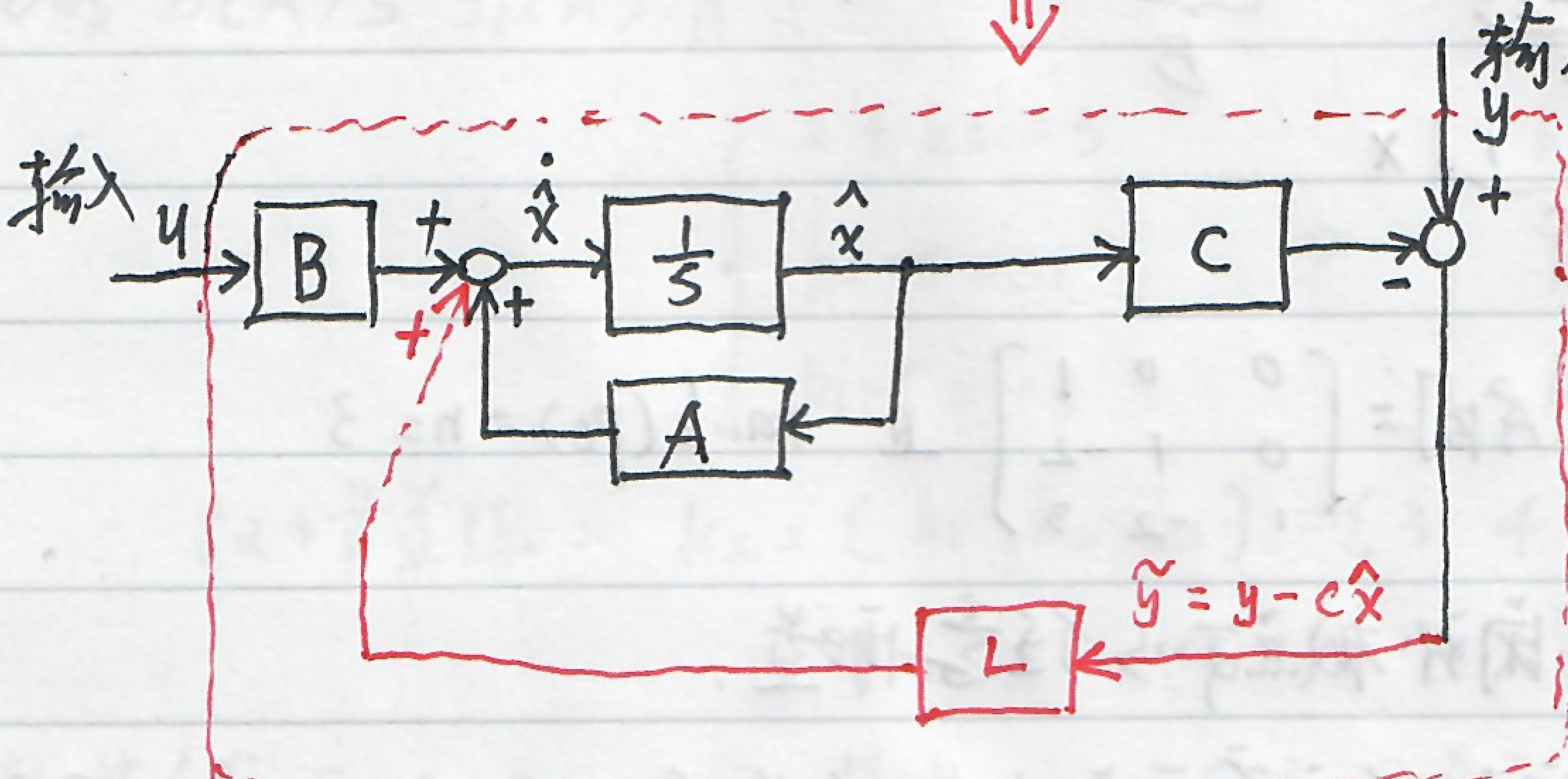
L → 观测器增益阵

$\hat{x}$ → 状态 x 的估计状态（值）

$y - C\hat{x} = \tilde{y}$ → 观测器输出与实际的输出之差

目的：从输入 u 和输出 y 重构系统的状态 x.

$\Updownarrow$



$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau \\ \hat{x}(t) = \Phi(t)\hat{x}(0) + \int_0^t \Phi(\tau)Bu(t-\tau)d\tau \end{cases}$$

初值不一样！

$$e = x - \hat{x}$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$= Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})]$$

$$= (A - LC)(x - \hat{x})$$

$$\boxed{\dot{e} = (A - LC)e}$$

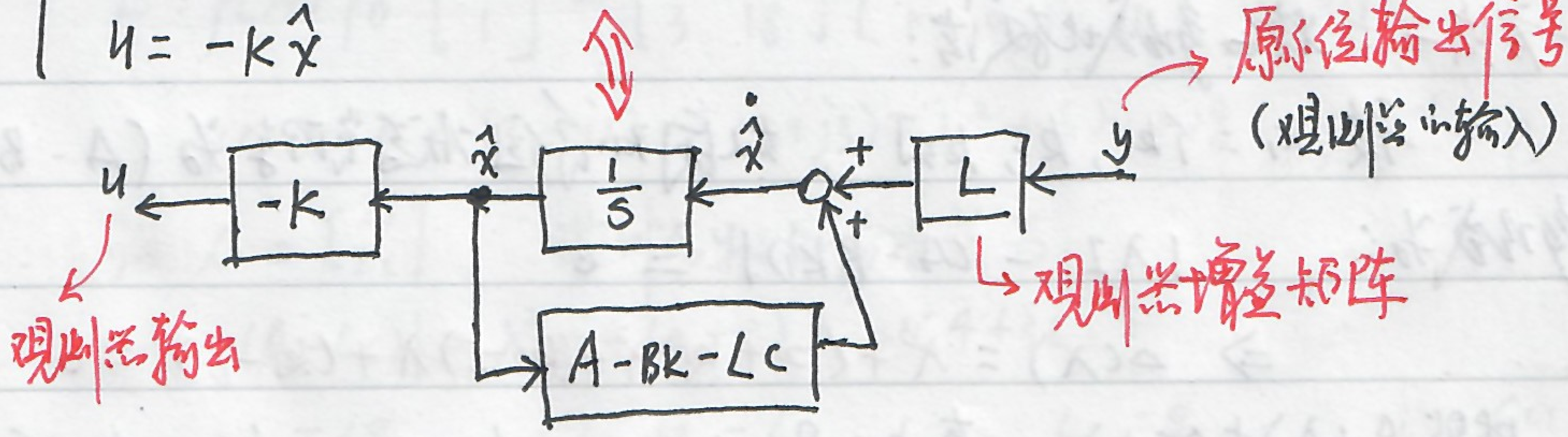
$(A - LC)$ 稳定，$e(\infty) \to 0$

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\ u = -K\hat{x}\end{cases}$$

$\Downarrow$

观测器
$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} + L(\overset{y}{\boxed{Cx}} - C\hat{x}) \\ \quad = (A - BK - LC)\hat{x} + Ly \\ u = -K\hat{x}\end{cases}$$

$\Updownarrow$



3. 课堂练习.

① 已知系统传递函数为

$$G(s)=\frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}=\frac{s^2+s-2}{s^3+2s^2-5s-6}$$

是否能够用状态反馈将闭环系统传递函数分别变为

$$G_1=\frac{(s-1)}{(s+2)(s+3)}\quad,\quad G_2=\frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

若可能，请设计相应的状态反馈增益矩阵 K（ $u=-Kx$ ）.

解：原系统的相变量标准型实现为（最小实现）：

$$\begin{cases}\dot{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&5&-2\end{bmatrix}}_{A}x+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{B}u\\[2ex] y=\underbrace{\begin{bmatrix}-2&1&1\end{bmatrix}}_{C}x\end{cases}$$

原系统能控性矩阵：

$$P_c=[B\ \ AB\ \ A^2B]=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-2\\1&-2&9\end{bmatrix}\ \text{且}\ \operatorname{rank}(P_c)=n=3$$

故系统完全能控，其闭环极点可以任意配置.

a) 比较 $G(s)$ 与 $G_1(s)$，则闭环系统应配置的极点为 $\{-2,-3,-2\}$，可运用二种方法求反馈增益矩阵 K_1.

方法一：阿克曼公式：

$$K_1=[0\ \ 0\ \ 1]\,P_c^{-1}\varphi_1(A)=[18\ \ 21\ \ 5]$$

其中：$P_c^{-1}=\begin{bmatrix}-5&2&1\\2&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$， $\varphi_1(\lambda)=(\lambda+2)^2(\lambda+3)=\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12$

方法二：特征多项式比较法：

设 $K_1=[k_1,k_2,k_3]$，故闭环系统状态矩阵为 $(A-BK_1)$，相应的特征多项式为： $|\lambda I-(A-BK_1)|=0$

$$\Rightarrow\ \Delta(\lambda)=\lambda^3+(2+k_3)\lambda^2+(k_2-5)\lambda+(k_1-6)=0$$

比较 $\varphi_1(\lambda)$ 与 $\Delta(\lambda)$，有 $k_1=18$， $k_2=21$， $k_3=5$， 故 $K_1=[18\ \ 21\ \ 5]$

No.

Date

b) 同理，比较 G_2 与 G，则闭环系统应配置的极点为 $\{-1,-3,1\}$，也可用二种方法求之.

方法一：阿克曼公式：

$$K_2=[0\ \ 0\ \ 1]P_c^{-1}\,g_2(A)=[3\ \ 4\ \ 1]$$

$$g_2(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+3)(\lambda-1)=\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-3$$

方法二：特征多项式比较法：

设反馈增益阵 $K_2=[k_1,k_2,k_3]$，故闭环系统特征多项式为

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-(A-BK_2)|=\lambda^3+(2+k_3)\lambda^2+(k_2-5)\lambda+(k_1-6)=0$$

比较 $\Delta(\lambda)$ 与 $g_2(\lambda)$ 有：

$$\begin{cases}2+k_3=3\\k_2-5=-1\\k_1-6=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_3=1\\k_2=4\\k_1=3\end{cases}$$

故增益阵：$K_2=[k_1\ \ k_2\ \ k_3]=[3\ \ 4\ \ 1]$. 答案 [B]

② 考虑系统 $\Sigma(A,B,C)$，其中 $A=\begin{bmatrix}-3&0\\1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$C=[0\ \ 1]$.

观测器极点 $S_{1,2}=-3\pm j3$，求观测器增益阵 L.

解：先判断系统的能观性：

$$P_o=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$，$|P_o|\neq0$，故系统是完全能观的，观测器极点可任意配置.

方法一：阿克曼公式：

$$L=p(A)P_o^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&0\\3&18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}$$

$$p(\lambda)=(\lambda+3-j3)(\lambda+3+j3)=\lambda^2+6\lambda+18$$，$P_o^{-1}=P_o=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

方法二：比较法：设 $L=\begin{bmatrix}L_1\\L_2\end{bmatrix}$，观测器特征多项式为：

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I-(A-LC)|=\lambda^2+(L_2+3)\lambda+(4+3L_2)$$

比较 $\Delta(\lambda)$ 与 $p(\lambda)$ 可得：$\begin{cases}L_2+3=6\\4+3L_2=18\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}L_1=9\\L_2=3\end{matrix}$，故 $L=\begin{bmatrix}L_1\\L_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\3\end{bmatrix}$

答案 [B]