解：由性能指标 $J=\int_0^\infty x^T x\,dt$ 知 $Q=I$.

解如下矩阵方程：

$$H^T P + PH = -Q = -I$$

其中 $P=\begin{bmatrix} p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{bmatrix}$，代入可解得

$$p_1=\frac{1+2k}{2k},\quad p_2=\frac{1+k}{2k^2},\quad p_3=\frac{1}{2k}$$

对于初始条件： $x(0)=[1,-1]^T$，有

$$J=\int_0^\infty x^T x\,dt = x(0)^T P x(0) = [1\ \ -1]\begin{bmatrix}p_1&p_3\\p_3&p_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$= p_1-2p_3+p_2 = 1+\frac{1}{2k^2}$$

显然当 $k\to\infty$ 时，$J_{min}=1$.

闭环系统特征多项式：

$$|sI-A+Bk| = \begin{vmatrix} s & -1\\ k & s+k\end{vmatrix} = s^2+ks+k$$

故当 $k>0$ 时，系统是稳定的。因 $k\to\infty$，在实际工程中无法实现。实际操作时，可取一个容许的值，如 $k=100$ 等，此时 $J\approx 1.0$.

答案［B］

内模原理 —— 输出调节问题及方法

1. 输出调节问题：处理有参考输入和干扰信号的系统输出问题（实现对参考输入渐近跟踪）。一般将参考输入和干扰信号的系统称为外系统（信号外源信号）。输出调节产生首先解决外系统为 $\dot{x}=A_r x$ 类线性自治时不变系统的输出渐近跟踪问题。

内模控制(IMC)

2. 方法：① 直接运用调节器综合，合成一个将反馈控制与前馈控制组合起来的控制器；
② 将输出调节问题转化为增广系统的稳定性问题，使用一个动态补偿器，即内模。这种方法称之为内模原理。把外部作用信号的动力学模型植入控制器，来构成高精度反馈控制系统的一种设计原理。

3. 目的：在有外部扰动信号时，对干扰进行抑制，对参考信号进行渐近跟踪（闭环系统稳定）。
做法：在控制回路中放入一个与外部信号（参考输入）相同的模型（内模）构成增广系统。

No. 第9次课

Date 3月23日

1. 课堂讨论题

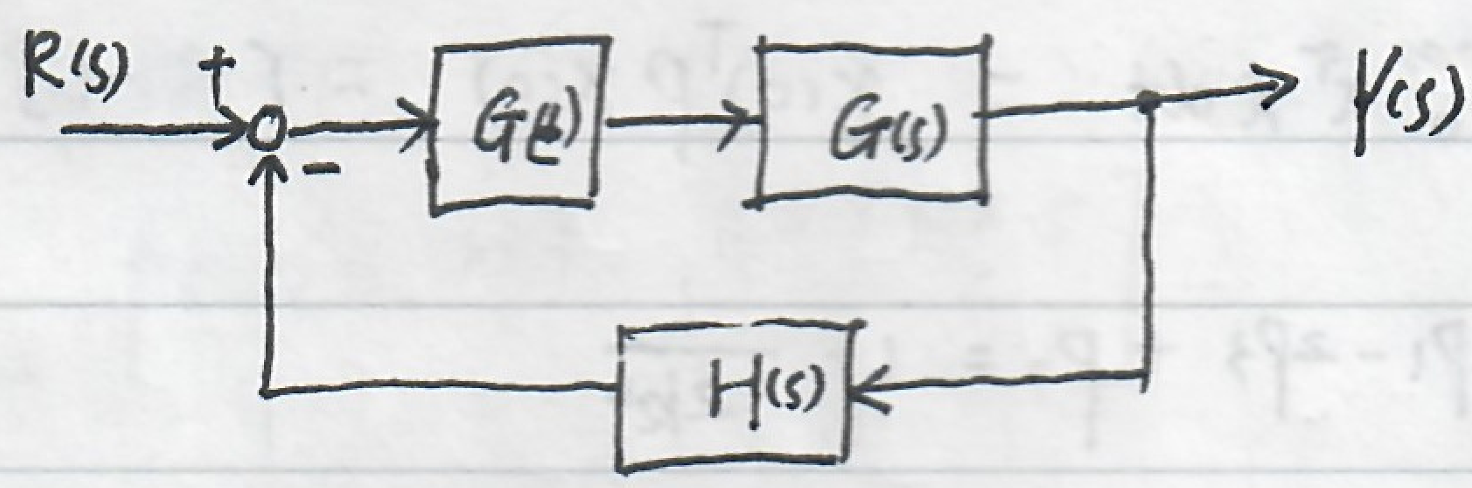
依据你在经典控制理论中学到的知识，如果使系统输出能够分别渐近地跟踪阶跃和斜坡输入信号（即稳态误差为零），对原系统和控制装置有什么要求？

答：设输入为 $R(s)$，输出为 $Y(s)$，误差信号定义为

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

[$E(s)=Y(s)-R(s)$ 也是可以的]

a) 一般系统方框图如下：



$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

$$= R(s) - \underbrace{\frac{G_cG}{1+G_cGH}}_{T(s)} R(s) = \left[1-\frac{G_cG}{1+G_cGH}\right]R(s)$$

$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$

$e_{ss}=0$

⇒ ① $r(t)=A$，$R(s)=\frac{A}{s}$，$T(0)=1$

② $r(t)=At$，$R(s)=\frac{A}{s^2}$

$\lim_{s\to 0} \frac{A}{s}[1-T(s)]=0$

b) 当 $H(s)=1$，即为单位负反馈控制系统时

$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

$$= R(s) - \frac{G_cG}{1+G_cG}R(s) = \frac{1}{1+G_cG}R(s)$$

$r(t)=A$，$e_{ss}=0$ ⇒ $\lim_{s\to 0} G_cG=\infty$，Ⅰ型系统，含有一个积分环节 $\frac{1}{s}$

当系统为Ⅰ型及以上时，$e_{ss}=0$

$r(t)=At$，$e_{ss}=0$ ⇒ $\lim_{s\to 0} sG_cG=\infty$，Ⅱ型系统，含有二个积分环节 $\frac{1}{s^2}$

当系统为Ⅱ型及以上时，$e_{ss}=0$

由以上分析可知：① 对非单位负反馈控制系统，当 $r(t)=A$ 时（阶跃），当 $T(0)=1$ 时，$e_{ss}=0$；当 $r(t)=At$（斜坡），要求 $\lim_{s\to 0}\frac{A}{s}[1-T(s)]=0$，$e_{ss}=0$。

② 对单位负反馈控制系统，当 $r(t)=A$ 时，若 G_cG 组成Ⅰ型及以上系统，$e_{ss}=0$；当 $r(t)=At$ 时，若 G_cG 组成Ⅱ型及以上系统，$e_{ss}=0$。

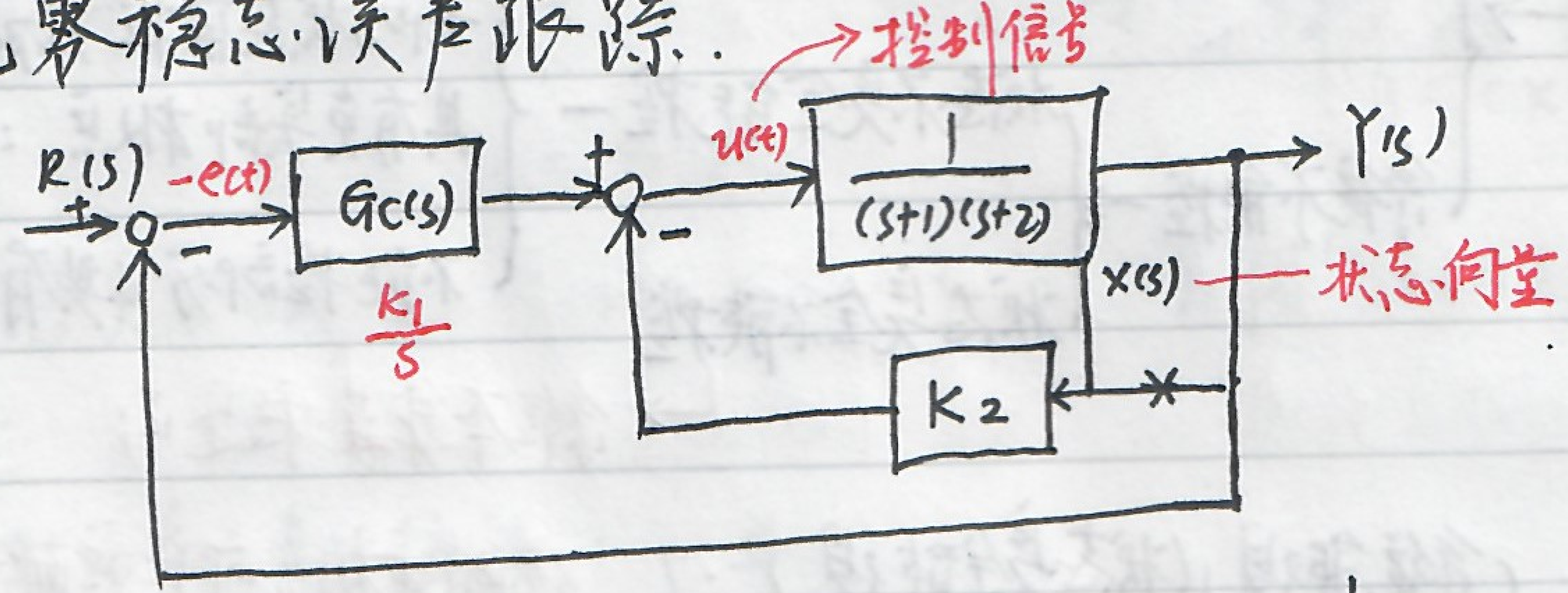
$$G_cG=\frac{K\prod(s+z_i)}{s^N\prod(s+p_i)}$$

N：系统型别参数（积分环节个数）

内模设计：零稳态跟踪误差：系统处于零初始状态（条件假设）

2、课堂练习题

确定如下系统的内模控制器 $G_c(s)$ 和参数（增益阵）K_2，将系统闭环极点配置到 $-2, -2, -2$，且对阶跃输入信号实现零稳态误差跟踪。



$G(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$

解：被控对象 $G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ 的状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}}_{A}x+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{B}u\\ y=\underbrace{[1\quad 0]}_{C}x\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}=A\dot{x}+B\dot{u}\\ \dot{y}=C\dot{x}\end{cases}$$

取中间变量 $z=\dot{x}$，$w=\dot{u}$，$e=y-r$，$\dot{e}=\dot{y}-\dot{r}=\dot{y}-0=\dot{y}=C\dot{x}=Cz$

有：

$$\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}}_{\bar{A}}\begin{bmatrix}e\\ z\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\bar{B}}w \qquad y=Cx$$

系统能控性矩阵：

$$P_c=[\bar{B}\quad \bar{A}\bar{B}\quad \bar{A}^2\bar{B}]=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-3\\1&-3&7\end{bmatrix}$$

，$|P_c|\neq 0$，完全能控，闭环极点可任意配置。

根据阿克曼公式有：$u=-k_1\int_0^t e(t)\,dt-k_2x(t)$

$$w=\dot{u}=-k_1e-k_2z=-\underbrace{[k_1\quad k_2]}_{\bar{K}}\begin{bmatrix}e\\ z\end{bmatrix}$$

$$\bar{K}=[0\ 0\ 1]P_c^{-1}\varphi(\bar{A})=[\underbrace{8}_{k_1}\ \vdots\ \underbrace{10\quad 3}_{k_2}]$$

其中：

$$P_c^{-1}=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\qquad \varphi(\lambda)=(\lambda+2)^3=\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8$$

$$\varphi(\bar{A})=\begin{bmatrix}8&10&3\\0&2&1\\0&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$u(t)=-8\int_0^t e(t)\,dt-[10\quad 3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\quad G_c(s)=\frac{8}{s},\quad K_2=[10\quad 3]$$