第7次课

3月 16日

1. 课堂讨论题

① 在形成状态反馈时，为何要用观测器去估计系统的状态？

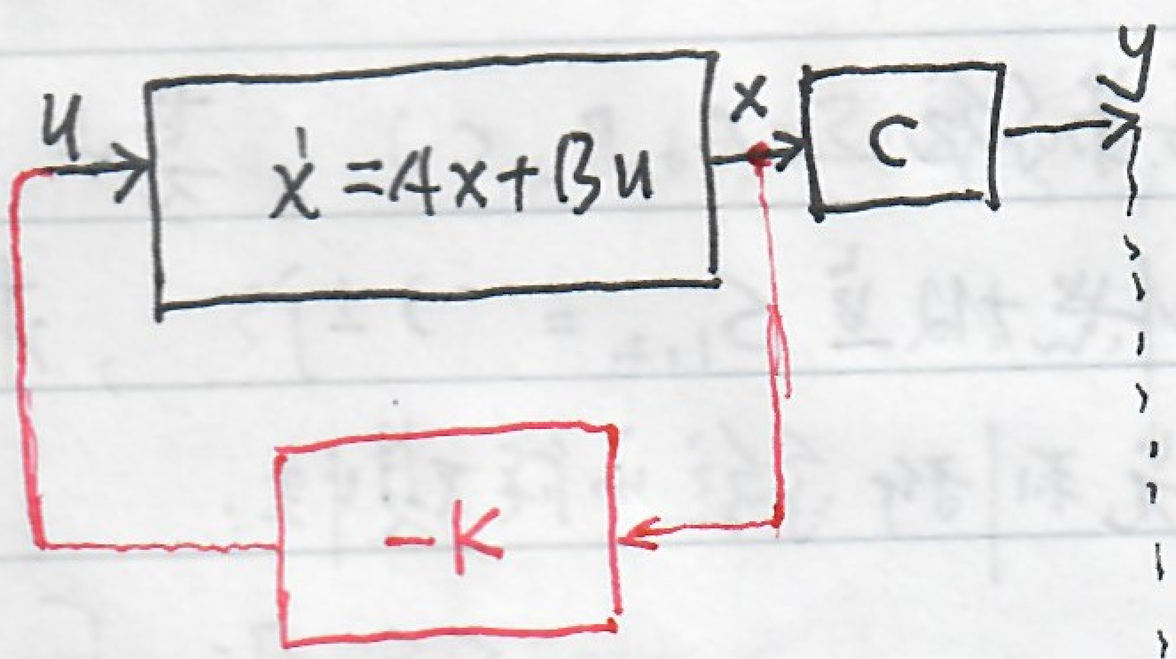
当系统状态不可测量或不完全可测量时，如果要用状态形成反馈控制，必须用观测器去"重构"系统的状态。当系统完全可观时，估计的状态可以无限逼近实际的状态。

② 观测器的极点配置跟状态反馈的极点配置相比，有何特别要求？为什么？

在实际工程中，观测器所配置的极点要远小于状态反馈配置的极点，即：观测器的极点更位于复平面左侧区域，一般要求与状态反馈配置极点的距离在2~10倍。这是因为，观测器需要更快的动态性能，才能更好更快地估计出系统的状态，先有"估计"的状态后才有"状态"反馈，闭环系统才能保证较好的控制精度、快速性和平稳性等性能指标。

2. 补充知识点

① 直接状态反馈控制

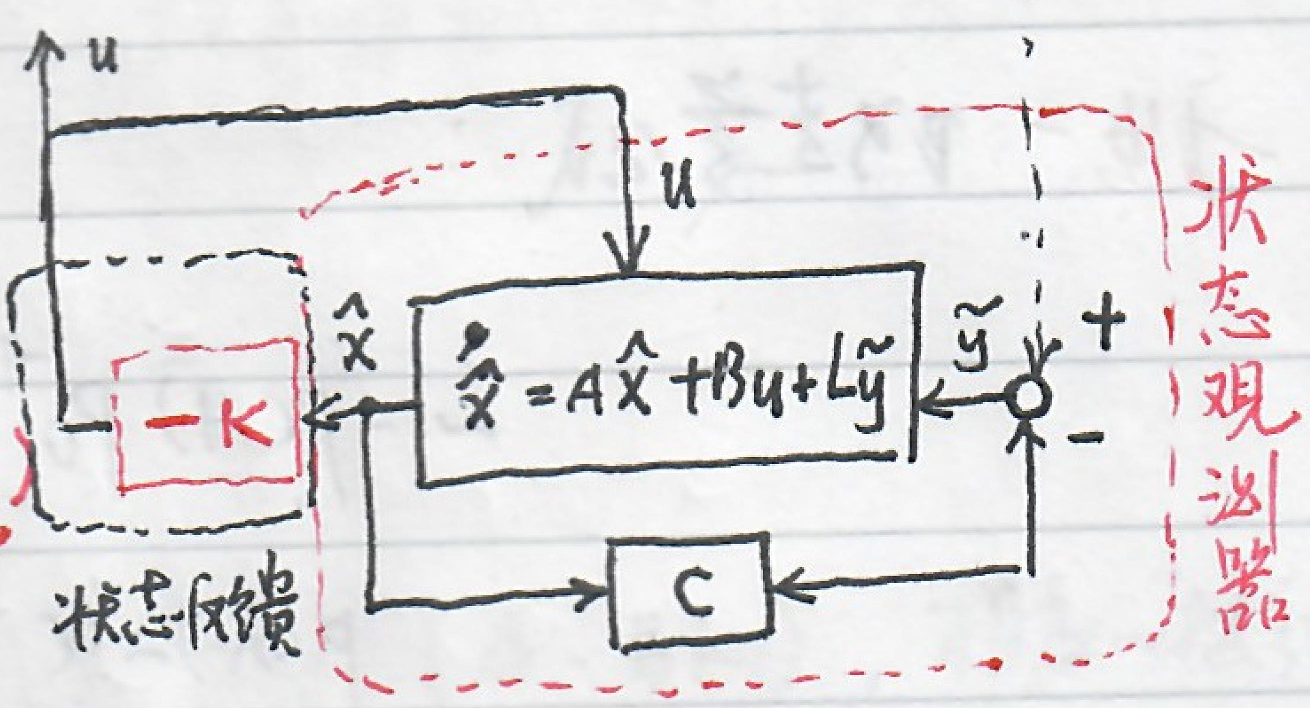


$$\begin{cases} \dot x = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad u = -Kx$$

闭环系统：$\begin{cases} \dot x = (A - BK)x \\ y = Cx \end{cases}$

② 观测器设计与状态反馈集成



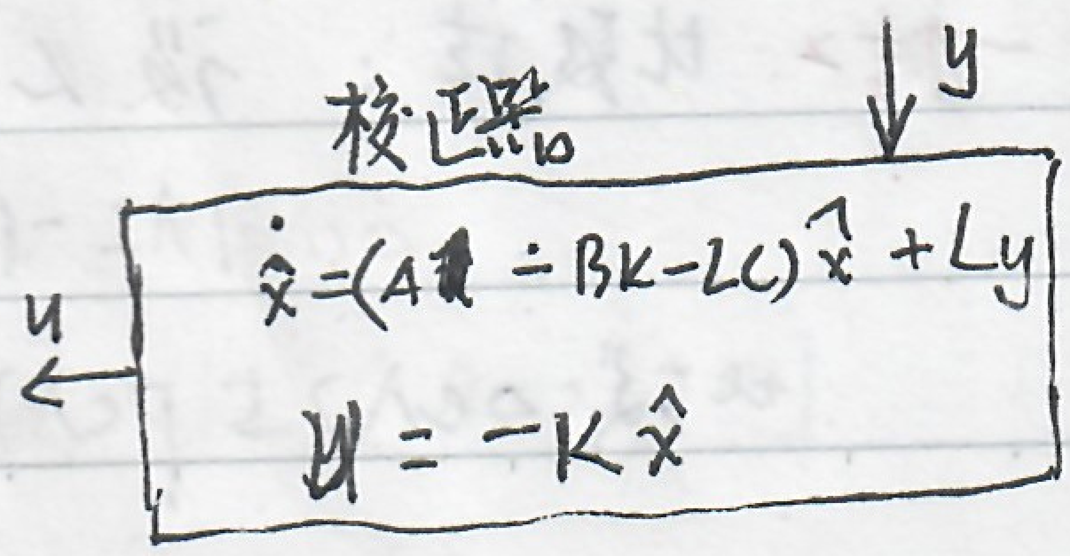
观测器：$\dot{\hat x} = A\hat x + Bu + L(\underbrace{y - C\hat x}_{\tilde y})$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\hat x} = (A - LC)\hat x + Bu + Ly$$

$$\Downarrow \quad u = -K\hat x$$

校正器



观测器+状态反馈：$\begin{cases} \dot{\hat x} = (A - BK - LC)\hat x + Ly \\ u = -K\hat x \end{cases}$

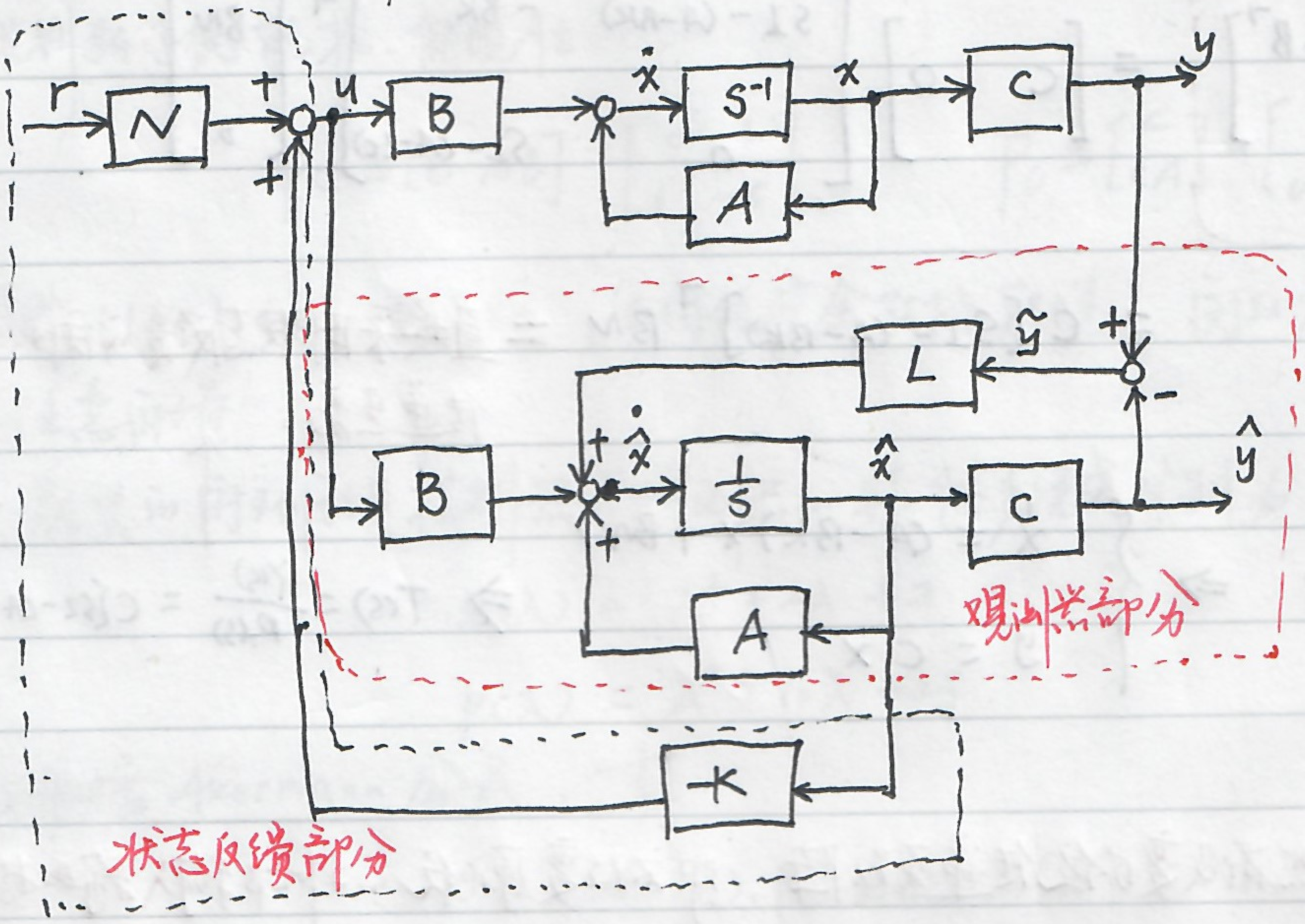
（校正器）

③ 观测器对整个闭环系统的特性影响

原系统：$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

观测器：$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$

状态反馈控制律：　$u = -K\hat{x} + \boxed{Nr}$ 参考输入



带状态观测器的闭环反馈系统方框图.

定义　$e = x - \hat{x}$，可得闭环系统状态空间模型：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} BN \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} r \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{cases}$$

由此可导出带观测器的闭环系统几大特性：

1)　分离特性：

$$\Delta(\lambda) = \underbrace{|\lambda I - [A-BK]|}_{\text{状态反馈极点}} \cdot \underbrace{|\lambda I - [A-LC]|}_{\text{观测器极点}} = |\lambda I - \bar{A}|$$

状态反馈极点 + 观测器极点 = 闭环极点.

No.

Date

2) 传递函数不变性： $R(s) \to Y(s)$

由闭环系统状态空间模型可知：

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\bar{C}[sI-\bar{A}]^{-1}\bar{B}$$

$$=\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\left[sI - \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix} BN \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

分块求逆

$$=\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI-(A-BK) & -BK \\ 0 & sI-(A-LC) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} BN \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=C[sI-(A-BK)]^{-1}BN$$ = 直接采用状态反馈的闭环传递函数。

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ u=-Kx+Nr \\ y=Cx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=(A-BK)x+BNr \\ y=Cx \end{cases} \Rightarrow T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=C[sI-(A-BK)]^{-1}BN$$

故状态观测器不改变系统传递函数阵，即不改变原系统的外部输入输出特性。

3) 状态观测器的误差不能控

由闭环系统状态空间模型：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix}=\bar{A}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}+\bar{B}r \\ y=[\bar{C}]\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{cases} \to \dot{e}=(A-LC)e$$

可知观测器误差无法通过外部输入去影响它，是不能控的。

但：只要 $(A-LC)$ 的特征值具有负实部，不管输入信号如何，$e(t)=x-\hat{x}$ 则一定按 $(A-LC)$ 确定的衰减速度逼近零： $\hat{x}\to x$

3. 课堂练习题

设某系统状态空间模型为

$$\begin{cases}\dot{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&-5\end{bmatrix}}_{A}x+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{B}u\\ y=\underbrace{[1\quad 0]}_{C}x\end{cases}$$

试设计带观测器的状态反馈控制，使状态反馈闭环极点为 $-1\pm j1$，观测器极点为 $-5, -5$.

解：①先判断系统能控、能观性.

$$P_c=[B\ \ AB]=\begin{bmatrix}0&1\\1&-5\end{bmatrix}\qquad P_o=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

显然：$|P_c|\neq 0$，$|P_o|\neq 0$，故系统完全能控能观，闭环极点与观测器极点可任意配置.

② 期望的闭环反馈控制器与观测器的特征多项式分别为

$$\alpha(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+2$$

$$p(\lambda)=\lambda^2+10\lambda+25$$

故依据 Akermann 公式，有：

$$K=(0\quad 1)\,P_c^{-1}\,\alpha(A)=[2\quad -3]$$

$$L=p(A)\,P_o^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}=[5\quad 0]^T$$

故状态反馈控制为：

$$u=-K\hat{x}=-[2\quad -3]\,\hat{x}$$

观测器方程为：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}&=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly\\&=(A-BK-LC)\hat{x}+Ly\\&=\begin{bmatrix}-5&1\\-2&-2\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}y\end{aligned}$$

状态反馈闭环系统方程：

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu=Ax-BK\hat{x}=\begin{bmatrix}0&1\\0&-5\end{bmatrix}x-\begin{bmatrix}0&0\\2&-3\end{bmatrix}\hat{x}\\ y=Cx=[1\quad 0]\,x\end{cases}$$

答案 [C]