No. 第16次课

Date 4月15日

1. 课堂讨论题

典型二阶系统相轨迹的奇点类型有哪些？如何判定？

答：二阶系统的相轨迹有三种形式：

① 奇点： $f(0, x_e)=0$ 对应的解：$(x_e, 0)$ 位于相平面横轴上

② 周期解：
- 一般封闭曲线
- 极限环（孤立封闭曲线） 稳定极限环、不稳定极限环、半稳定极限环。

③ 一般相轨迹（普通相轨迹）：除奇点和周期解之外的相轨迹。

由奇点定义可知，二阶系统的奇点即为其平衡点或平衡状态，其类型有：

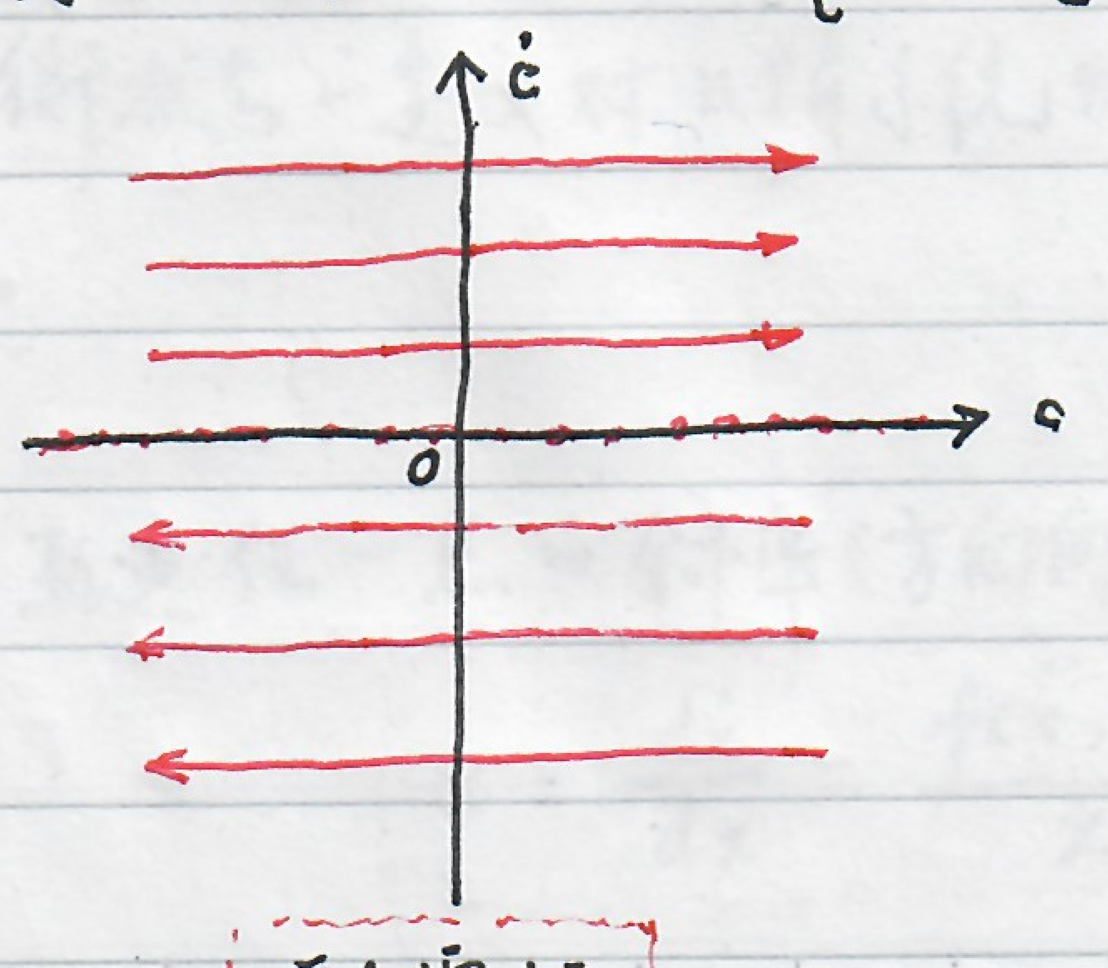
奇点（特征根分类判定）
- 中心点：一对纯虚根
- 焦点：
  - 稳定焦点：一对具有负实部的共轭复根
  - 不稳定焦点：一对具有正实部的共轭复根
- 节点（结点）：
  - 稳定结点
    - 一般稳定结点：二个互不相等的负实根
    - 稳定的退化结点：二个相等的负实根
  - 不稳定结点
    - 一般不稳定结点：二个互不相等的正实根
    - 不稳定的退化结点：二个相等的正实根
- 鞍点：二个符号相反的实根（一正一负）

2. 其他特殊形式的相轨迹（二阶系统）

① $\ddot{c} = 0$

奇点：整个横轴 $(\dot{c}=0)$

非奇点处方向向量：$\alpha = \frac{f(\dot{c}, c)}{\dot{c}} = \frac{0}{\dot{c}} = 0$

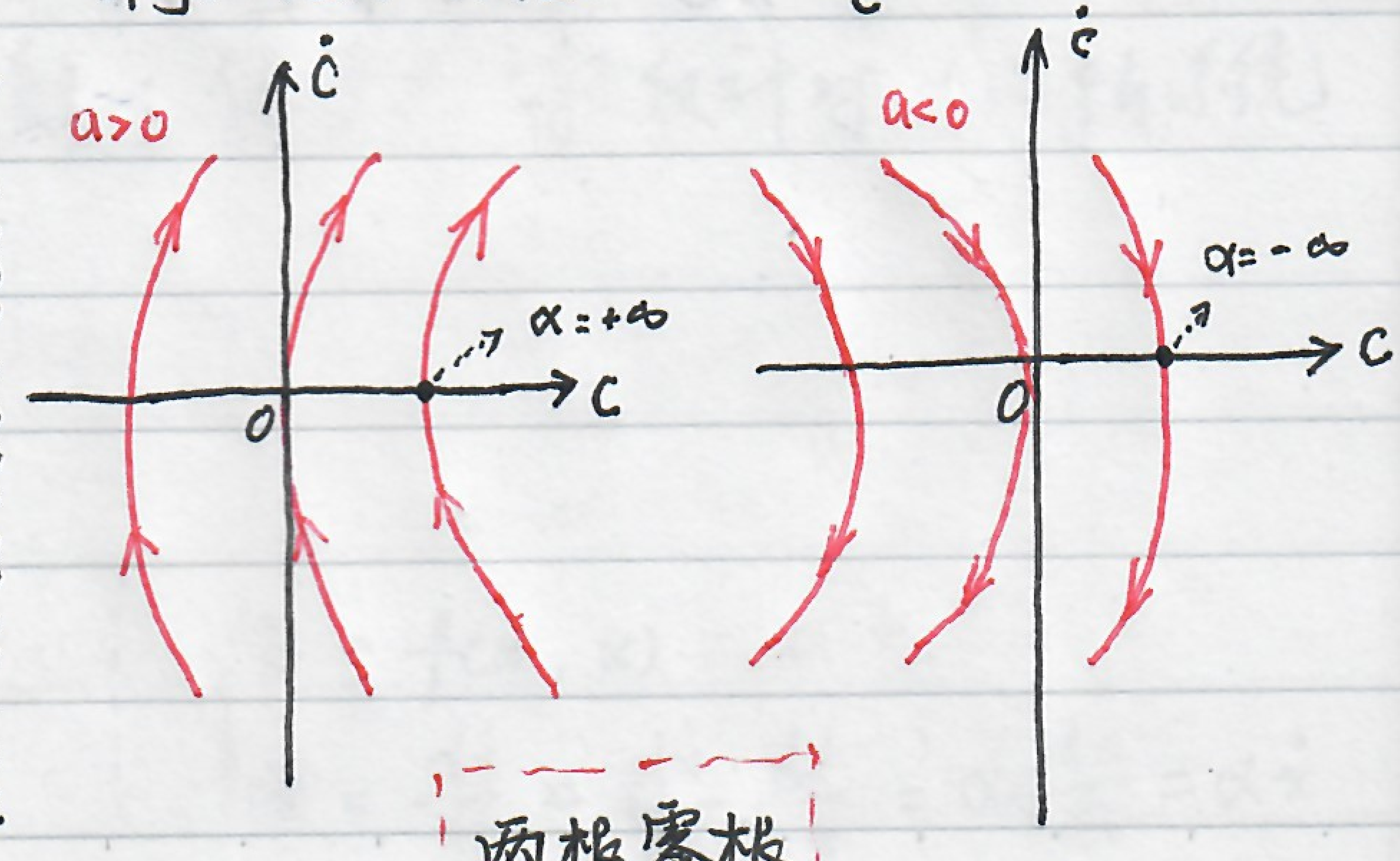


两个零根

② $\ddot{c} = a$（常数），$a \neq 0$

奇点：无

非奇点处方向向量：$\alpha = \frac{a}{\dot{c}}$



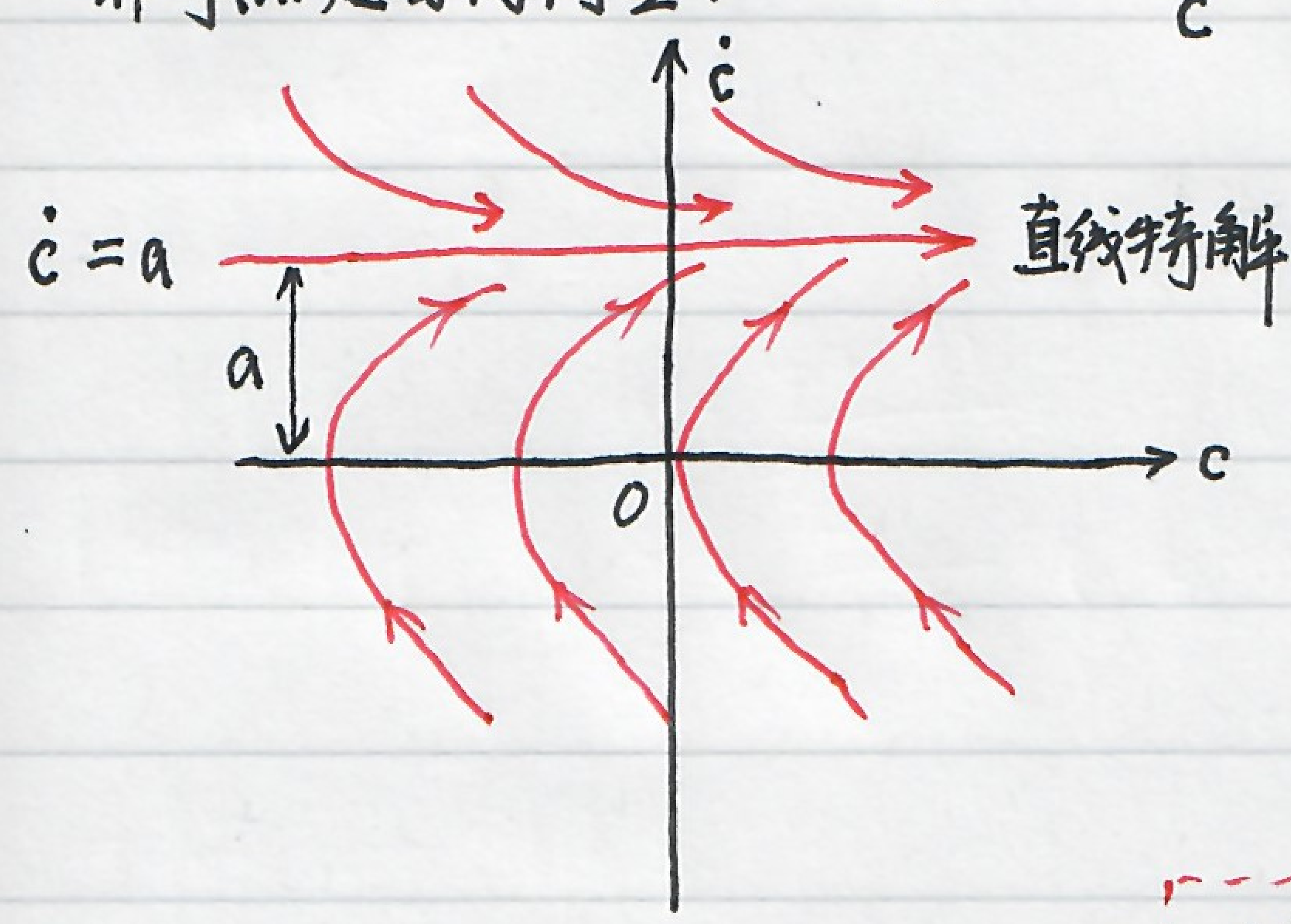
两根零根

③ $\ddot{c}+\dot{c}=a$（常量），$a\neq 0$

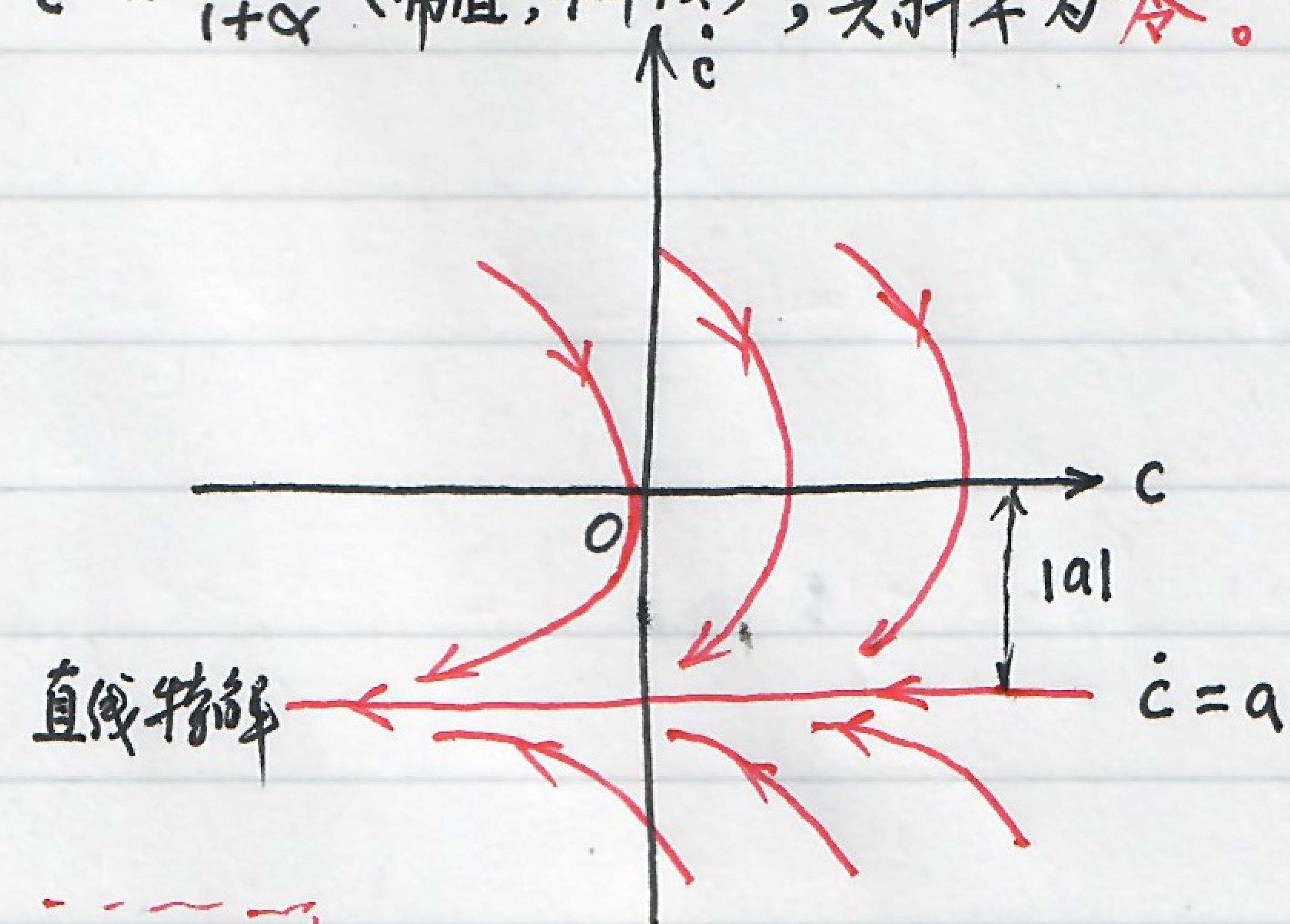
当 $\alpha=0$ 时，有
特解：$\boxed{\dot{c}=a}$

奇点：无

非奇点处方向向量：$\alpha=\dfrac{-\dot{c}+a}{\dot{c}}$ ⇒ 等倾线方程 $\dot{c}=\dfrac{a}{1+\alpha}$（常值，水平线），其斜率为零。



a>0



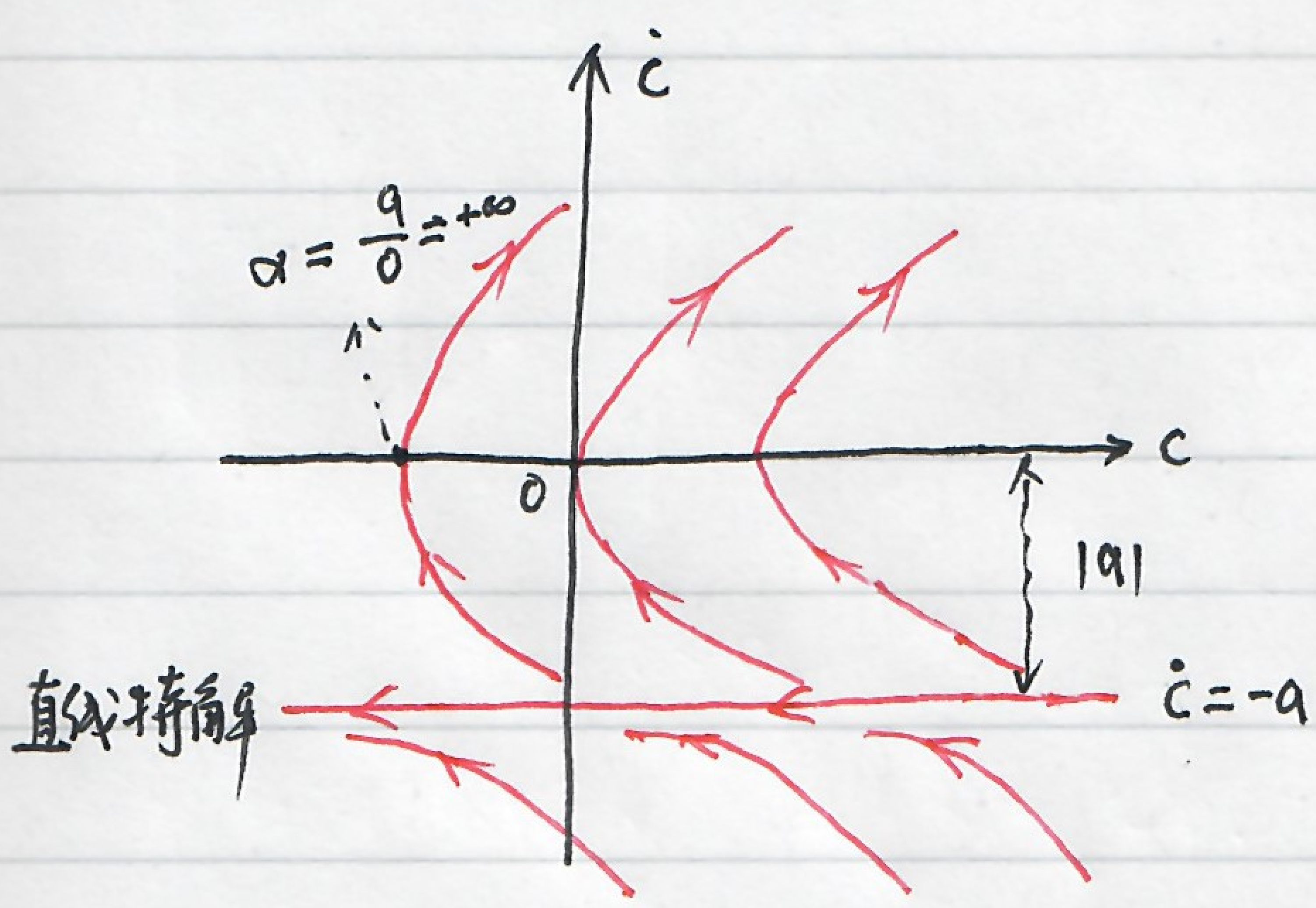
a<0

一个零根，一个负实根

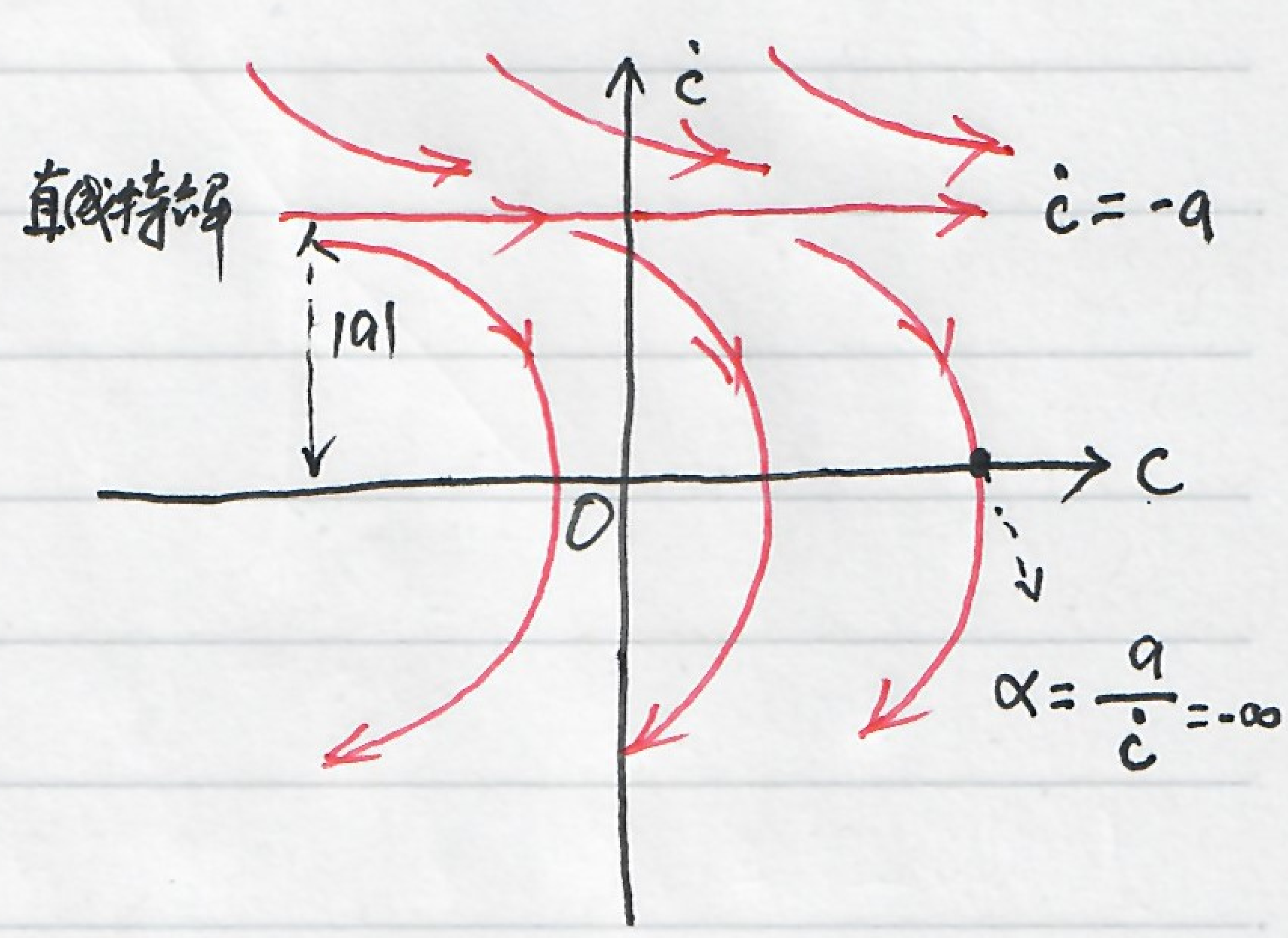
④ $\ddot{c}-\dot{c}=a$（常量），$a\neq 0$

奇点：无

非奇点处方向向量：$\alpha=\dfrac{\dot{c}+a}{\dot{c}}$ ⇒ $\dot{c}=\dfrac{a}{\alpha-1}$，等倾线斜率为零，直线特解：$\boxed{\dot{c}=-a}$



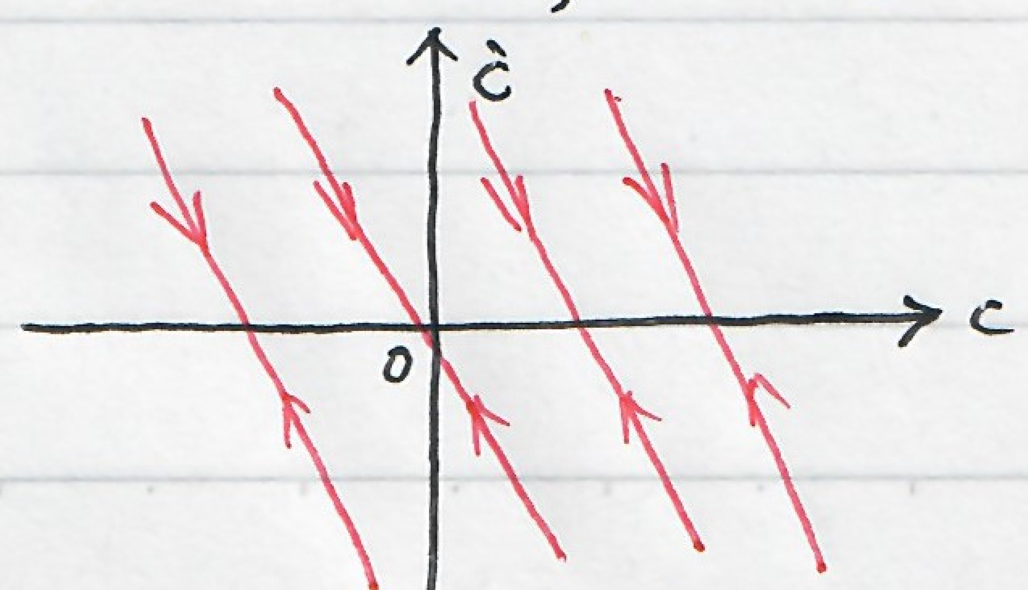
a>0



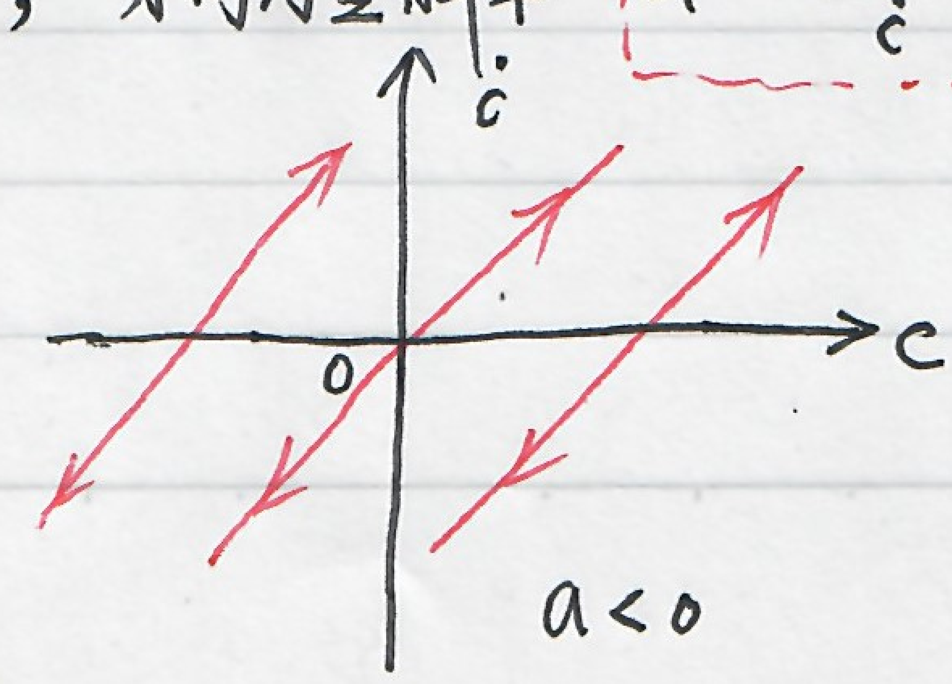
a<0

一个零根，一个正实根

⑤ $\ddot{c}+a\dot{c}=0$，$a\neq 0$ ⇒ 奇点：整个横轴；方向向量斜率：$\boxed{\alpha=\dfrac{-a\dot{c}}{\dot{c}}=\overset{\text{常值}}{-a}}$



a>0



a<0