No.

Date

第13次课

4月6日

1. 课堂讨论题

如何确定数字控制系统根轨迹与单位圆的交点坐标？

答：在离散控制系统中，其稳定性判断据为：系统极点应位于单位圆内。

因此，复z平面上，单位圆是系统稳定与不稳定的边界（相当于s平面虚轴）。

有三种方法可以确定其根轨迹与单位圆的交点坐标参数：

① 基于双线性变换：$z=\frac{w+1}{w-1}$ $\quad w=u+jv \xrightarrow{u=0} w=jv$

令 $z=\frac{jv+1}{jv-1}$ 代入根轨迹方程，令实部与虚部分别为零，解出参数 v^*，k^*，注意 $v^*\in R$，$k^*\geq 0$。

$1+KG(z)D(z)=0$

$\Downarrow$

$1+KL(z)=0$

故根轨迹交点坐标：$z^*=\frac{jv^*+1}{jv^*-1}$ （由对称性，直接写出另外一个）

根轨迹增益：K^*

② 由单位圆定义求：$|z|=1$，令 $z=e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$，$\theta\in R$

代入根轨迹方程，求出 $\theta^*\in R$，$K^*\geq 0$，得到根轨迹与单位圆交点坐标：$z^*=e^{j\theta^*}=\cos\theta^*+j\sin\theta^*$

根轨迹增益：K^*

③ 计算机根轨迹绘图求之：

a) 定义函数：$L(z)=G(z)D(z)=\frac{num}{den}$

Sys_L = tf (num, den);

b) 绘制根轨迹：rlocus (Sys_L);

c) 确定单位圆交点：rlocfind (Sys_L);

d) 跟踪点求出 K^*和交点坐标。

2. 关于根轨迹增益K的位置不同，如何变换得到标准形式的根轨迹方程？

$1+KD(z)G(z)=0$ $\quad$ K：根轨迹增益，$K\geq 0$

$$\begin{cases}1+f(z,K)=0\\ f(z,K)=0\end{cases}$$

→ 将含有K的根轨迹方程作等效变换，分离出K。

→ $1+KD'(z)G'(z)=0$

No.

Date

如：① $z^2+z+k+1=0 \to (z^2+z+1)+k=0 \to 1+k\frac{1}{z^2+z+1}=0$

② $z^3+5kz^2+6z+5=0 \to (z^3+6z+5)+5z^2k=0 \to 1+k\frac{5z^2}{z^3+6z+5}=0$

$1+\bar{k}\frac{z^2}{z^3+6z+5}=0 \leftarrow \bar{k}=5k$

3. 课堂练习题

① 某闭环采样控制系统其闭环传递函数为

$$T(z)=\frac{z^2+2z}{z^2+0.2kz-0.5}$$

其中 $k\geq0$，请用根轨迹方法确定使闭环系统稳定的K值范围。

解：系统闭环特征方程为

$$z^2+0.2kz-0.5=0$$

化为根轨迹标准方程有：

等效开环脉冲传递函数，分子阶次 $m=1$，分母阶次 $n=2$

$$1+\bar{K}\boxed{\frac{z}{z^2-0.5}}=0,\quad \bar{K}=0.2K$$

① 根轨迹开始于开环极点 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，终止于开环零点：0，∞（$n-m=1$，有一个无穷零点）

② 实轴上的根轨迹：$[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

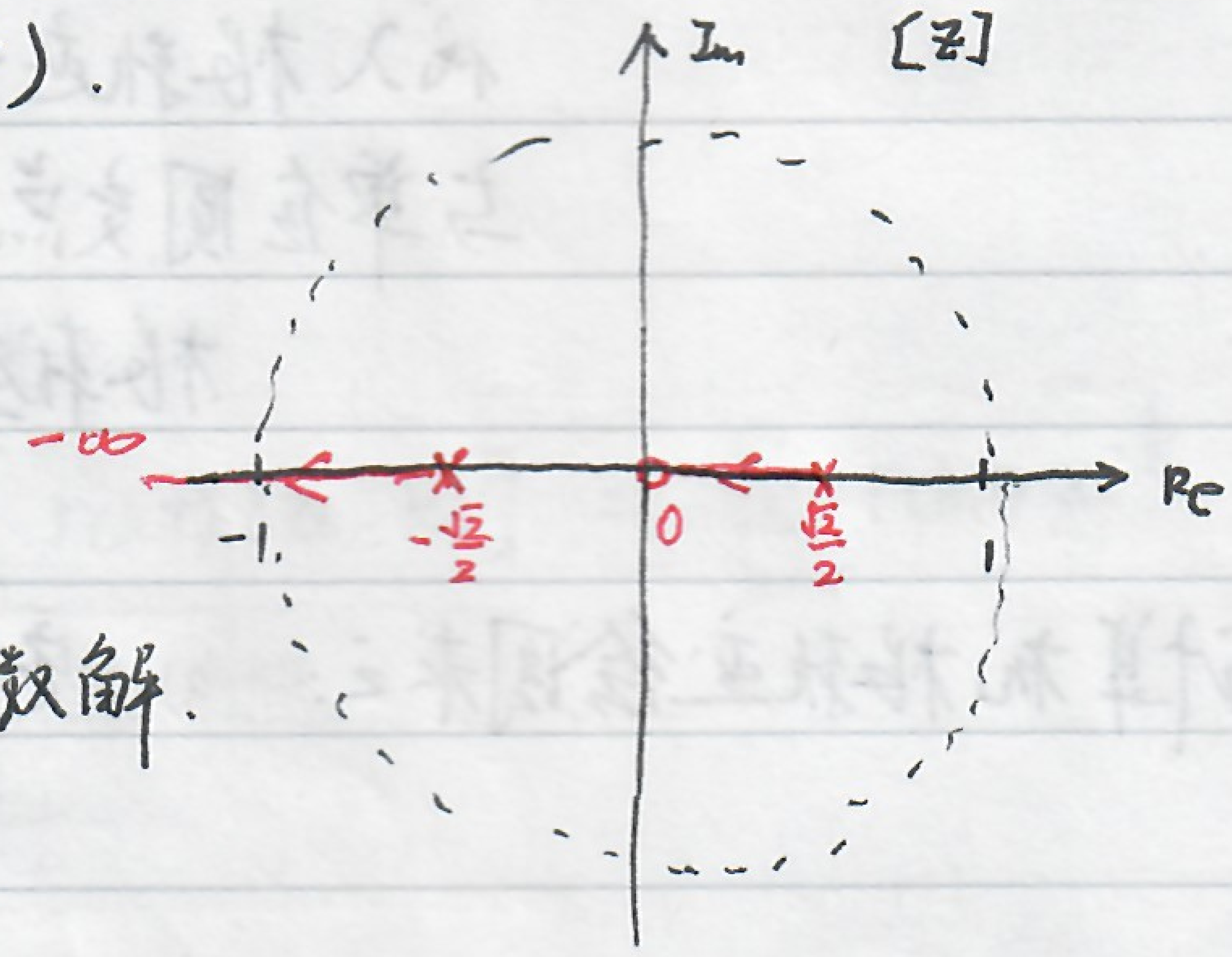
③ 根轨迹关于实轴对称.

④ 根轨迹的分离点与汇合点：

$$\bar{K}=-\frac{z^2-0.5}{z}=F(z)$$

令 $\frac{dF(z)}{dz}=0 \Rightarrow z^2+0.5=0$，无实数解.

故根轨迹无分离点和汇合点。



⑤ 根轨迹渐近线：

渐近线倾角：$\varphi_A=\frac{(2q+1)\pi}{n-m}=\pi$，$n-m=1$，$q=0$

渐近线交点：$\sigma_A=\frac{\sum p_j-\sum z_i}{n-m}=0$.（有限零极点）

⑥ 根轨迹与单位圆交点坐标：

方法一：令 $z=\frac{jv+1}{jv-1}$ 代入原方程：$z^2+0.2kz-0.5=0 \Rightarrow v^*=0,\ z^*=-1,\ K^*=2.5$

方法二：从根轨迹图很容易看出 $z=-1$ 在根轨迹之上，即为交点坐标。

令 $z=-1$ 代入根轨迹方程：$z^2+0.2kz-0.5=0 \Rightarrow K^*=2.5$

故交点坐标：$z^*=-1$，$K^*=2.5$.

由根轨迹图与单位圆交点坐标可知：当 $0 \leq K < 2.5$ 时，$|z|<1$，系统稳定。

※ 因是二阶系统，若是用朱利判据，可运用 $|q(0)|<1$，$q(1)>0$，$q(-1)>0$ 求 K 范围：

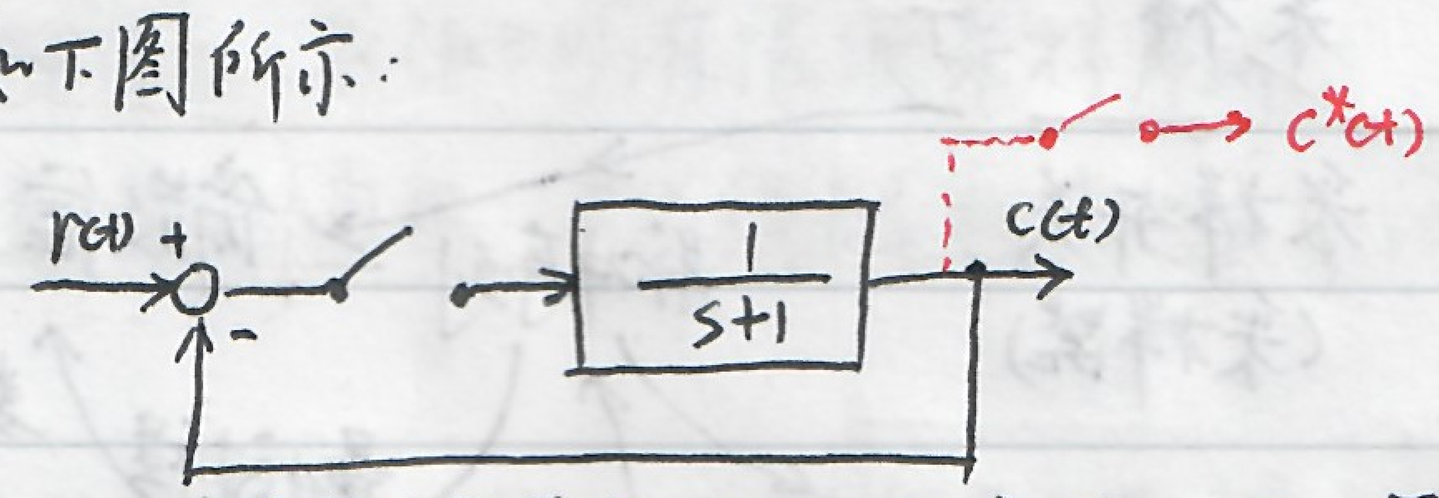
$$q(z) = z^2 + 0.2Kz - 0.5$$

$$\left\{\begin{array}{l} |q(0)| = |-0.5| < 1 \\ q(1) = 1 + 0.2K - 0.5 > 0 \\ q(-1) = 1 - 0.2K - 0.5 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{0 \leq K < 2.5}$$

※ 如果是高阶系统，运用双线性变换和劳斯判据求之。

② 补充例题

某采样控制系统如下图所示：



其中采样周期为 T=1s，试求系统单位阶跃响应前四次的采样值 $c(kT)$，$k=0,1,2,4$.

解：传递函数 $G(s)$ 的 z 变换：

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z}{z-0.368}$$

故闭环脉冲传递函数为：

$$T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{z}{2z-0.368}$$

当输入 $R(z)=\frac{z}{z-1}$ 时，系统输出的采样信号为

$$\frac{1}{2}\,\frac{z^2}{(z-0.184)(z-1)}, \quad |z|>1 \text{ 右边序列}$$

$$C(z) = T(z)R(z) = \frac{z}{2z-0.368}\cdot\frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{2z^2-2.368z+0.368}$$

$$= 0.5 + 0.592z^{-1} + 0.609z^{-2} + 0.612z^{-3} + 0.613z^{-4} + \cdots$$

故前4次的采样值为：$c(0)=0.5$，$c(1T)=0.592$，$c(2T)=0.609$，$c(3T)=0.612$.

或利用留数定理求得表达式 $c(kT)$：

$k+1 \geq 0 \to k \geq -1$ 有效

$$c(kT) = \lim_{z\to 0.184}(z-0.184)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{k+1}}{(z-0.184)(z-1)} + \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{2}\,\frac{z^{k+1}}{(z-0.184)(z-1)}$$

$(k \geq 0)$

$$= -\frac{1}{1.632}\times 0.184^{k+1} + \frac{1}{1.632} = \frac{1}{1.632}\left(1-0.184^{k+1}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} c(0) = \frac{1}{1.632}(1-0.184) = 0.5 \\ c(1) = \frac{1}{1.632}(1-0.184^2) = 0.592 \quad \cdots \end{array}\right.$$