14:45 下课休息【5:00】

No. 第15次课

Date 4月13日

1. 课堂讨论题

相平面中的相轨迹与状态空间中的状态轨迹有何区别和联系？

答：状态空间：对于一个n维系统，以其n个状态变量作为基底所张成的n维空间，称之为状态空间。

状态轨迹：系统状态向量在状态空间中随时间变化的轨迹。

相平面：对于一、二阶系统（$n \le 2$），以 x 为横轴，以 $\dot{x}$ 为纵轴所构成的二维直角坐标平面 $0x\dot{x}$．（取状态变量 $x_1 = x$，$x_2 = \dot{x}$，$\bar{x} = [x_1, x_2]^T$）

相轨迹：系统状态 $(x, \dot{x})$ [$\bar{x} = [x_1, x_2]^T$] 在相平面 $0x\dot{x}$ 上随时间变化的轨迹。

∴ 故由上述定义可知：

① 相平面及相轨迹概念仅针对一、二阶系统定义的，而状态空间、状态轨迹对n维系统定义均有效。

② 对 二阶系统而言，相平面就是其对应的一种状态空间，由 $x_1 = x$，$x_2 = \dot{x}$ 张成二维状态平面；其相轨迹就是对应的 二阶系统的状态轨迹。

2. 关于奇点、平衡点（平衡状态）

① 奇点：对于一、二阶系统，当输入为0且状态各阶导数为0时系统所处的平衡状态（平衡点），称为奇点。

② 平衡点（平衡状态）：对n维系统，当无外力作用（输入为0）且系统状态各阶导数为0时系统所处的状态，称为平衡状态（平衡点）．

∴ 故由上述定义可知：

一、二阶系统的奇点就是其对应的平衡点（平衡状态）；而平衡点或平衡状态的定义对n阶系统均有效；但奇点一般仅针对一、二阶系统定义。

3. 关于相轨迹任一点的斜率（方向向量）

$$\boxed{\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}}} \Leftarrow \begin{cases} \ddot{x} = f(\dot{x}, x) = \alpha\dot{x} \\ \ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \dfrac{d\dot{x}}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \alpha\dfrac{dx}{dt} = \alpha\dot{x} \end{cases}$$

② 对于一阶系统，所描述的微分方程即为相轨迹(相轨线)方程.

② 对于二阶系统，先将其化为如下标准形式的方程:

$$\ddot{x} = f(\dot{x}, x)$$

然后求得:

$$\alpha = \frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}}$$ (任一点，代入坐标值 $(x, \dot{x})$ 求 α)

对于奇点: $\alpha = \frac{f(0, x_0)}{0} = \frac{0}{0}$ (非确定值)

对于非奇点: $\alpha = \frac{f(\dot{x}, x)}{\dot{x}}$ (为一确定值，可取 $\pm\infty$，也可是一有限常量)

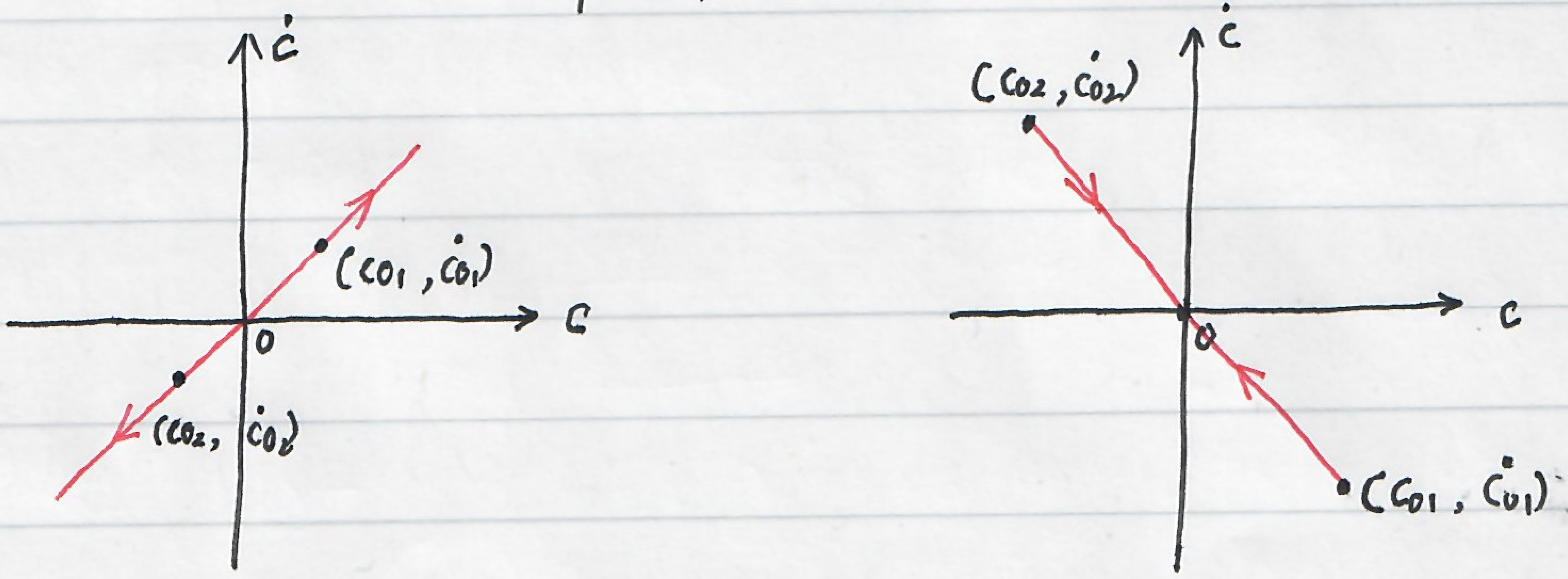
4. 一阶系统的相轨迹

① 一阶系统自由运动(无外界输入)微分方程为

$$T\dot{c} + c = 0$$ $\dot{c} = 0 \Rightarrow c = 0$，奇点 $(0,0)$

相轨迹方程

$$\dot{c} = -\frac{1}{T}c \ ; \qquad c(0) = c_0 , \quad \dot{c}(0) = -\frac{1}{T}c_0$$



(a) $T < 0$ (b) $T > 0$

※ 任一初始点出发，沿直线发散至无穷.　　※ 任一初始点出发，收敛至奇点(原点).