现代控制理论基础
Fundamentals of Modern Control Theory

第九章　Lyapunov稳定性分析

LI YIN-YA

SCHOOL OF AUTOMATION
NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

November 8, 2019

Contents

1.1 平衡状态

相关概念与约定

考虑不受外部作用的自由运动状态，描述系统动态特性的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

定义$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ 的范数

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$表示向量$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$的距离。
- $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, t_0)$表示方程(1)初始值为$\boldsymbol{x}_0$的解。

1.1 平衡状态

平衡状态

对所有时间t，满足

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e, t) = 0$$

的状态$\boldsymbol{x}_e$，称为平衡状态。

1.1 平衡状态

线性定常系统平衡状态的解法

对于线性定常系统的平衡状态的方程为

$$A\boldsymbol{x}_e = 0$$

1. 当A为非奇异矩阵，存在唯一的平衡状态$\boldsymbol{x}_e = 0$;
2. 当A为奇异矩阵，存在无穷多个平衡状态.

非线性系统平衡状态的解法

非线性系统的平衡状态方程为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e, t) = 0$$

上述方程组的解，即是非线性系统的平衡状态。非线性系统可能有一个或多个平衡状态。

1.2 稳定性定义

Lyapunov意义下的稳定性

设系统初始状态位于以平衡状态$\boldsymbol{x}_e$为球心、δ为半径的闭球域$S(\delta)$内，即

$$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e\| \leq \delta, \quad t = t_0$$

若能使系统状态方程的解$\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, t_0)$在$t \to \infty$的过程中，都位于$\boldsymbol{x}_e$为球心、任意规定的半径为$\varepsilon$的闭球域$S(\varepsilon)$内，即

$$\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, t_0) - \boldsymbol{x}_e\| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

则称系统的平衡状态$\boldsymbol{x}_e$在Lyapunov意义下是稳定的。

1.2 稳定性定义

渐近稳定性

若系统的平衡状态$\boldsymbol{x}_e$不仅具有Lyapunov意义下的稳定性，且有

$$\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)-\boldsymbol{x}_e\| = 0$$

则称此平衡状态$\boldsymbol{x}_e$是渐近稳定的。

大范围（全局）渐近稳定性

当初始条件扩展至整个状态空间，且平衡状态均具有渐近稳定性，则称此平衡状态$\boldsymbol{x}_e$是大范围渐近稳定的。

1.2 稳定性定义

不稳定性

如果对于某个实数$\varepsilon > 0$和任一个实数$\delta > 0$，不管这两个实数多么小，在$S(\delta)$内，总存在一个状态$\boldsymbol{x}_0$，使得由这一状态出发的轨迹超出$S(\varepsilon)$，则系统的平衡状态$\boldsymbol{x}_e$是不稳定的。

1.3 零解的稳定性与渐近稳定性

当系统的平衡状态$\boldsymbol{x}_e$是孤立的，则总可以通过坐标变换，将该孤立的平衡状态变换到状态空间原点。下面我们研究状态空间原点（零解）的稳定性定义。

定义1.1

零解的稳定性: 考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{f}(0) = 0 \tag{3}$$

对于任选的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$\|\boldsymbol{x}_0\| = \|\boldsymbol{x}_0 - 0\| \leq \delta$时，有$\|\boldsymbol{x}(t)\| = \|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - 0\| \leq \varepsilon$，$t \geq 0$，则称零解$\boldsymbol{x}_e = 0$是稳定的。

定义1.2

零解的渐近稳定性:

1. 零解$\boldsymbol{x}_e = 0$是稳定的,
2. 对于某个$\delta_0 > 0$, 当$\|\boldsymbol{x}_0\| \leq \delta_0$时, 有

$$\lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - 0\| = 0$$

则称零解$\boldsymbol{x}_e = 0$是渐近稳定的。

1.4 稳定性相关概念区别与联系

区别

1. Lyapunov意义下稳定指的是当系统初始状态在平衡状态的一个小范围内时，其之后的状态也一定在平衡状态附近。
2. 渐近稳定性首先要求是稳定的，而且随着时间的推移，系统的状态回复到平衡状态。
3. 大范围渐近稳定不再要求初始状态在平衡状态附近，而可以是任意的。因此，对任意初始状态出发的轨线都逼近于平衡状态，当然，系统的平衡状态也是唯一的。

联系

李雅普诺夫意义下稳定、渐近稳定、大范围渐近稳定的联系是：大范围渐近稳定$\Rightarrow$渐近稳定$\Rightarrow$李雅普诺夫意义下稳定。

1.5 经典稳定性与Lyapunov稳定性的区别

1. 古典控制理论中的稳定指的是指输入输出稳定性，与系统状态无关；而Lyapunov意义下的稳定性是指系统的内部稳定性，反映了系统状态在偏离平衡状态后，是否仍能保持在平衡状态附近、甚至回到平衡状态的系统能力。
2. 对于古典控制理论中的稳定性是利用系统的传递函数定义的，因此必须要假定系统的初始条件为零。对象是线性时不变单输入单输出系统，采用的方法是判断系统的极点位置等，仅适用于系统稳定性分析。
3. Lyapunov稳定性理论适合于线性和非线性系统，时变和时不变系统，多变量系统；通过分析系统能量的变化来判断系统的稳定性；方法不仅适合于分析，而且更重要的是可用于控制系统的设计。

2.1 二次型函数$V(x)$

定义及其表达式

n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次多项式为

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}x_ix_j$$

称为二次型。p_{ij}为二次型系数。

用矩阵表示二次型，即

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

二次型函数$V(x)$的定号性

1. 正定$V(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{cases} V(\boldsymbol{x}) > 0, & \boldsymbol{x} \neq 0 \\ V(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

如$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$

2. 半正定$V(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{cases} V(\boldsymbol{x}) \geq 0, & \boldsymbol{x} \neq 0 \\ V(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

如$V(\boldsymbol{x}) = (x_1 + x_2)^2$

2.1 二次型函数$V(x)$

二次型函数$V(x)$的定号性

1. 负定$V(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{cases} V(\boldsymbol{x}) < 0, & \boldsymbol{x} \neq 0 \\ V(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

如$V(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - x_2^2$

2. 半负定$V(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{cases} V(\boldsymbol{x}) \leq 0, & \boldsymbol{x} \neq 0 \\ V(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

如$V(\boldsymbol{x}) = -(x_1 + x_2)^2$

2.1 二次型函数$V(x)$

二次型函数$V(x)$的定号性

1. 不定$V(\boldsymbol{x})$：$V(\boldsymbol{x})$既可为正值，也可为负值。如$V(\boldsymbol{x}) = x_1x_2 + x_2^2$
2. 若$V(\boldsymbol{x})$是正定的，则$-V(\boldsymbol{x})$是负定的
3. 若$V(\boldsymbol{x})$是半正定的，则$-V(\boldsymbol{x})$是半负定的

二次型函数$V(x)$的定号性判别准则

1. 正定：二次型标量函数$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}$为正定的充分必要条件是$P$矩阵的所有各阶主子行列式均大于零，即

$$\Delta_1=p_{11}>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{vmatrix}>0,\cdots,\Delta_n=\begin{vmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{vmatrix}>0$$

2. 负定：二次型标量函数$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}$为负定的充分必要条件是$P$矩阵的所有各阶主子行列式满足

$$(-1)^k\Delta_k>0,\quad k=1,2,\cdots,n$$

2.1 二次型函数$V(x)$

二次型函数$V(x)$的定号性判别准则

1. 半正定：二次型标量函数$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}$为半正定的充分必要条件是$P$矩阵的所有各阶主子行列式均是非负的，即

$$\Delta_k \geq 0, \quad k=1,2,\cdots,n$$

2. 半负定：二次型标量函数$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}$为半负定的充分必要条件是$P$矩阵的所有各阶主子行列式满足

$$(-1)^k\Delta_k \geq 0, \quad k=1,2,\cdots,n$$

Theorem 2.1

对于线性定常系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}(0) = 0, t \geq 0$ 有

1. 系统的每一平衡状态是在Lyapunov意义下稳定的充要条件是：A所有特征值均具有非正（负或零）实部，且具有零实部的特征值为A的特征多项式的单根。
2. 系统的唯一平衡状态$\boldsymbol{x}_e = 0$是渐近稳定的充要条件是：A所有特征值均具负实部。

Theorem 2.2

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{f}(0) = 0 \tag{9}$$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数$V(\boldsymbol{x}), V(0) = 0$满足

1. $V(\boldsymbol{x})$正定；
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$负定。

其中

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}\right] \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

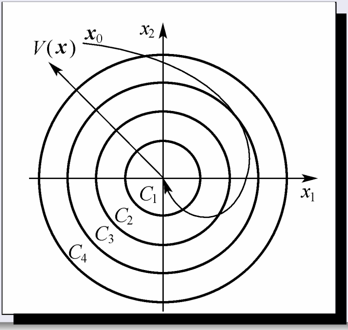
则方程(8)的零解是渐近稳定的。进一步地，若$V(\boldsymbol{x})$是径向无界的，即$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty, V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，则系统零解是全局（大范围）渐近稳定的。

2.3 稳定性判别定理：Lyapunov第二法

定理的几何意义

1. 设$V(\boldsymbol{x}) = C_i$,$0 < C_1 < C_2 < \cdots$，则$V(\boldsymbol{x}) = 0$与$V(\boldsymbol{x}) = C_i$描述了包围状态平面原点以半径为$\sqrt{C_i}$的一簇同心圆。

2. 若$\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$,表示随着时间的推移，状态轨迹与等$V$圆不断相交，且从每个圆外向圆内穿越，当$t \to \infty$时，收敛于原点。



定理的物理意义

Lyapunov稳定性定理的物理意义是：

- 针对系统引入一个虚拟的能量函数(即Lyapunov函数)，其本身要求是正定的。
- 该能量函数沿系统轨线关于时间的导数是负定的表明了：当系统运动时，其能量随时间的推移而持续地减少，直至消耗殆尽，则系统的状态就回到平衡状态，从而系统是渐近稳定的。

Example 2.1

考虑方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

试确定零解的稳定性。

【解】： 取

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \boldsymbol{x} \neq 0$$

可见

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2) = -2\left\|x\right\|^2 < 0, \boldsymbol{x} \neq 0$$

满足渐近稳定性判别定理的条件，所以方程的零解是渐近稳定的。同时，$V(x)$是径向无界的，故该零解是全局渐近稳定的。

Theorem 2.3

考虑系统[a]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^n, \quad t \geq 0 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{f}(0) = 0 \tag{11}$$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数$V(\boldsymbol{x}), V(0) = 0$满足

1. $V(\boldsymbol{x})$正定；
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$半负定；
3. $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} \equiv 0$。

则方程(10)的零解是渐近稳定的。进一步地，若$V(\boldsymbol{x})$是径向无界的，即$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty, V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，则系统零解是全局（大范围）渐近稳定的。

[a] LaSalle's invariance principle: 拉萨尔不变集原理

Example 2.2

考虑方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - (1 + x_2)^2 x_2$$

试确定零解的稳定性。

【解】： 取$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$，有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2(1 + x_2)^2 x_2^2 \leq 0$$

故$\dot{V}(\boldsymbol{x})$是负半定的。同时根据$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \Rightarrow$

- $x_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0 \Rightarrow x_1 \equiv 0$;
- $x_2 \equiv -1 \Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 = -1$和$0 = \dot{x}_2 = -x_1$，显然矛盾。

故综合以上分析可知：$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x} \equiv 0$，同时$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty, V(\boldsymbol{x}) \to \infty$，故该系统零解是全局（大范围）渐近稳定的。

Theorem 2.4

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^n, \quad t \geq 0 \tag{12}$$

$$\boldsymbol{f}(0) = 0 \tag{13}$$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数$V(\boldsymbol{x})$,满足

1. $V(\boldsymbol{x})$正定；
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$半负定；
3. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x} \neq 0$时恒等于零。

则方程(12)的零解是稳定的。

Example 2.3

考虑方程

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1$$

试确定零解的稳定性。

【解】： 取

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \boldsymbol{x} \neq 0$$

则有

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1x_2 - x_1x_2) \equiv 0$$

可见，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$在$x \neq 0$时恒等于零，满足定理的条件，所以方程的零解是稳定的，但不是渐近稳定。

2.3 稳定性判别定理：Lyapunov第二法

Theorem 2.5

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{f}(0) = 0 \tag{15}$$

如果存在一个具有连续一阶偏导数的标量函数$V(\boldsymbol{x}), V(0) = 0$满足

1. $V(\boldsymbol{x})$正定；
2. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$正定。

则方程(14)的零解是不稳定的。

Example 2.4

考虑方程

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2$$

试确定零解的稳定性。

【解】： 取

$$V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

可见

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1^2 + x_2^2) > 0, \ \boldsymbol{x} \neq 0$$

故零解不稳定。

3.1 线性定常连续系统的稳定性

问题描述

线性定常系统非齐次方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \tag{16}$$

某个解$\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0^*)$的稳定性可以归结为齐次方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) \tag{17}$$

零解的稳定性。

Theorem 3.1

方程*(17)*的零解是渐近稳定的$\Longleftrightarrow$对于任意的正定对称矩阵$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$，*Lyapunov*方程

$$A^T P + PA = -Q$$

存在正定对称矩阵解$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Theorem 3.1

【证】：对正定对称矩阵$Q = I$，设P是Lyapunov方程的正定对称矩阵解，取

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$$

可见

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(\boldsymbol{x}(t)) &= \dot{\boldsymbol{x}}^T P \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T P \dot{\boldsymbol{x}} \\
&= \boldsymbol{x}^T A^T P \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T P A \boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{x}^T (A^T P + P A) \boldsymbol{x} \\
&= -\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} \\
&= -\|\boldsymbol{x}\|^2 < 0,\ \boldsymbol{x} \neq 0
\end{aligned}$$

满足渐近稳定性判别定理的条件，所以方程的零解是渐近稳定的。

对Theorem 3.1的有关说明

1. 当A为非奇异常数矩阵时，系统仅存在唯一的平衡状态$\boldsymbol{x}_e = 0$。
2. 如果它在状态空间中包括$\boldsymbol{x}_e = 0$在内的某个域Ω上是渐近稳定的，则系统一定是大范围(全局)渐近稳定的。
3. 如果系统在$\boldsymbol{x}_e = 0$是渐近稳定的，对给定的任意一个正定实对称矩阵Q，则满足矩阵方程$A^TP + PA = -Q$的实对称矩阵P是唯一的。
4. 如果$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T(-Q)\boldsymbol{x}$沿任意一条轨迹都不恒等于零，则矩阵$Q$可取为半正定的，结论不变。
5. 矩阵Q只要选为正定的(或根据情况选为半正定的)，那么最终的判定结果将与矩阵Q的不同选取无关。
6. 为了便于计算，通常选取正定实对称矩阵Q为单位阵。

3.2 线性定常离散系统的稳定性

Theorem 3.2

设线性定常离散系统状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=G\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0;\ k=0,1,2,\cdots$$

其中G非奇异。该系统渐近稳定的充要条件是：给定任意正定对称矩阵Q,存在一个正定对称矩阵P使下式成立。

$$G^TPG-P=-Q$$

Example 3.1

试用*Lyapunov*方法，讨论下列线性方程稳定时k的取值范围。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -k \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \tag{18}$$

其中$f(t)$为已知函数.

Example 3.1

【解】： 方程(18)的稳定性等价于其齐次方程零解的稳定性

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -k \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{19}$$

设

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}$$

由Lyapunov方程

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

Example 3.1

即

$$\begin{bmatrix} -2p_1+4p_3+2 & 3p_1+2p_2-p_3-kp_3 \\ 3p_1+2p_2-p_3-kp_3 & 6p_3-2kp_2+2 \end{bmatrix}=0$$

解得

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{k+k^2-2}{k^2-5k-6}=\frac{(k-1)(k+2)}{(k+1)(k-6)} \\ p_2 &= \frac{4+k}{k^2-5k-6}=\frac{4+k}{(k+1)(k-6)} \\ p_3 &= \frac{2+3k}{k^2-5k-6}=\frac{2+3k}{(k+1)(k-6)} \end{aligned}$$

Example 3.1

如果P 为对称正定矩阵, 其顺序主子式大于零, 即

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{(k-1)(k+2)}{(k+1)(k-6)} > 0 \\ \det[P] &= \frac{2k+k^2+2}{(k+1)^2(k-6)} > 0 \end{aligned}$$

所以必有

$$k > 6$$

相关MATLAB命令

- `Q = eye(n);`
- `P = lyap(A,Q);`
- `P = dlyap(G,Q);`

Example 4.1

设线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试确定其平衡状态的稳定性。

Example 4.1

【解】:

```
>> A=[0,1; -16, -2];B=[0;0];C=[0,0];D=0;
>> Q=eye(size(A));
>> P=lyap(A,Q)
>> sys=ss(A,B,C,D);
>> x0=[0.15, 0.6]'
>> t=0:0.01:25;
>> [y,t,x]=initial(sys,x0,t);
```

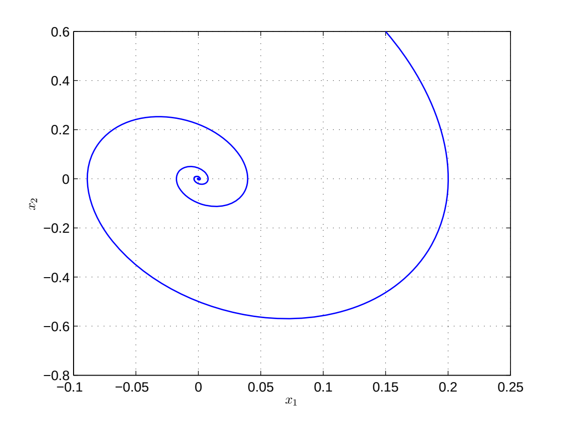
程序运行结果为

```
P =
4.3125   0.0313
0.0313   0.2656
```

4.2 算例

绘制系统状态变化轨迹:

Example 4.1



本章知识小结

知识小结

1. ▲★ 掌握Lyapunov意义下稳定性的概念；[a]
2. ▲★ 掌握利用Lyapunov稳定性定理判断一类非线性系统的零解稳定性；
3. ▲★ 掌握利用Lyapunov稳定性定理判断线性定常系统的零解稳定性；
4. 学会利用 MATLAB 进行线性定常系统的稳定性分析。

[a] ★表示难点内容；▲表示重点内容。

Thank you!

AUTHOR: LI Yin-Ya
ADDRESS: Room 6030
School of Automation
Nanjing University of Science & Technology
Nanjing, 210094, China
EMAIL: liyinya@njust.edu.cn
QQ: 181359670