No. 第8次课

Date 3月18日

1. 课堂讨论题

最优控制一定是最好的控制么？为什么？

※ 最优控制一般指的是使某项控制性能指标极达到最优（通常是极小化）的控制。相应的性能指标有时域指标、频域指标和综合积分类指标等。在实际工程中，衡量一个控制系统是否达到预期要求时，是以具体指标为准绳的，有经济类、技术类等多种指标要求，但这些指标之间往往存在竞争关系，一个方面的指标优化后，可能会带来其它性能指标恶化，从数学优化角度看，往往当某项指标达到极值时，一般另外某项指标处于临界满足边缘，一旦出现干扰或模型参数摄动（元件老化等），系统就会出现失稳或其他指标无法满足要求的情况。

因此，最优控制不一定是最好的控制。一个系统在满足各项要求指标的前提下，优化才是有效的。

2. 补充知识点

① 直接基于原系统的全状态反馈控制（带参考输入）

原系统：$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

控制律：$u = -Kx + Nr$

控制增益矩阵

控制信号

参考输入

参数（作用是使稳态跟踪误差为0或满足约束要求）

复合 $\begin{cases} \dot{x} = (A-BK)x + BNr \\ y = Cx \end{cases}$ 闭环系统状态空间模型：反馈控制设计同 $r=0$

闭环传递函数：$\boxed{T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C\left[sI - (A-BK)\right]^{-1}BN}$

※ 多输入多输出系统：$N \in R^{m\times m}$，可取 $m\times m$ 维对角阵。

$x \in R^n$，$u \in R^m$，$y \in R^p$，$K \in R^{m\times n}$，$A \in R^{n\times n}$，$B \in R^{n\times m}$，$C \in R^{p\times n}$

No.

Date

② 基于全维状态观测器的状态反馈控制（带参考输入）

原系统：$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$

观测器：$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$ 　$L \in R^{n\times p}$ (MIMO)；$L \in R^{n\times 1}$ (SISO)

控制律：$u = -K\hat{x} + Nr$

复合构成闭环控制系统：令 $e = x - \hat{x}$（状态估计误差）

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x-\hat{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}}_{\text{非奇异变换矩阵}} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

可将原闭环系统状态空间模型转换如下：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BN \\ BN \end{bmatrix} r \\ y = [C \quad 0]\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}\end{cases}$$

$P = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BN \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y = [C \quad 0]\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}\end{cases}$$

状态反馈控制设计
观测器设计一切同 r=0

闭环传递函数为：$\boxed{T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C[sI - (A-BK)]^{-1}BN}$

③ 一般积分二次型性能指标：

$$J = \int_0^\infty (x^T M x + u^T N u)\,dt \quad : \begin{cases} M \in R^{n\times n} \\ N \in R^{m\times m} \end{cases} \text{权矩阵}$$

当 $u = -Kx$ 时：$J = \int_0^\infty x^T \underbrace{(M + K^T N K)}_{Q} x\,dt = \int_0^\infty x^T Q x\,dt$

优化求解 P：$H^T P + PH = -Q$ 　后面步骤同 $\int_0^\infty (x^T I x + \lambda u^T u)dt = J$

No.

Date

3. 课堂习题

① 已知系统的动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u \\ y = \underbrace{[0 \quad 1]}_{C} x \end{cases}$$

试设计带参考输入的状态反馈，使得闭环系统极点为 -2, -2，且对单位阶跃信号作用下的稳态误差为 0. 其中 $u = -Kx + Nr$.

解: a) 判断原系统的能控性:

$$P_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0.5 & -2.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然 $|P_C| \neq 0$，故原系统能控，极点可任意配置.

b) 期望特征多项式为:

$$q(\lambda) = (\lambda+2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

由阿克曼公式有: $K = [0 \quad 1] P_c^{-1} q(A) = [-2 \quad 0]$

c) 闭环反馈控制系统的传递函数为:

$$T(s) = C[sI - (A-BK)]^{-1} BN = \frac{N}{s^2+4s+4}$$

误差信号: $E(s) = R(s) - T(s)R(s) = (1-T(s))R(s)$

故稳态误差为: $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = 1 - T(0) = 1 - \frac{N}{4}$

当 $1 - \frac{N}{4} = 0$，即 $N = 4$ 时，系统稳态误差为 0.　　【B】答案

② 考虑如下系统

$$\dot{x} = (A-BK)x = Hx$$

其中 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -k \end{bmatrix}$，确定反馈增益阵 K 极小化如下性能指标:

$$J = \int_0^{\infty} x^T x \, dt$$

其中 $x(0) = [1, -1]^T$.

No.

Date

解：由性能指标 $J=\int_0^\infty x^T x\,dt$ 知 $Q=I$.

解如下矩阵方阵：

$$H^T P + PH = -Q = -I$$

其中 $P=\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}$，代入可解得

$$p_1=\frac{1+2k}{2k},\quad p_2=\frac{1+k}{2k^2},\quad p_3=\frac{1}{2k}$$

对于初始条件：$x(0)=[1,-1]^T$，有

$$J=\int_0^\infty x^T x\,dt = x(0)^T P x(0) = [1\ \ -1]\begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= p_1-2p_3+p_2 = 1+\frac{1}{2k^2}$$

显然当 $k\to\infty$ 时，$J_{min}=1$.

闭环特征多项式：

$$|sI-A+Bk| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ k & s+k \end{vmatrix} = s^2+ks+k$$

故当 $k>0$ 时，系统是稳定的。因 $k\to\infty$，在实际工程中无法实现。实际操作时，可取一个容许的值，如 $k=100$ 等，此时 $J\approx1.0$。

答案【B】