Introduction à la Programmation

Benoit Donnet

Année Académique 2022 - 2023

Agenda

Agenda

- Chapitre 3: Méthodologie de Développement
  - Schéma Méthodologique
  - Définition du Problème
  - Analyse du Problème
  - Invariant de Boucle
  - Fonction de Terminaison

Agenda

- Chapitre 3: Méthodologie
  - Schéma Méthodologique
  - Définition du Problème
  - Analyse du Problème
  - Invariant de Boucle
  - Fonction de Terminaison

Schéma Méthodo

- Il est (très) difficile d'écrire un programme correct du premier coup, de la première à la dernière ligne
- Il est préférable d'adopter une *démarche méthodologique*
- **Schéma méthodologique**

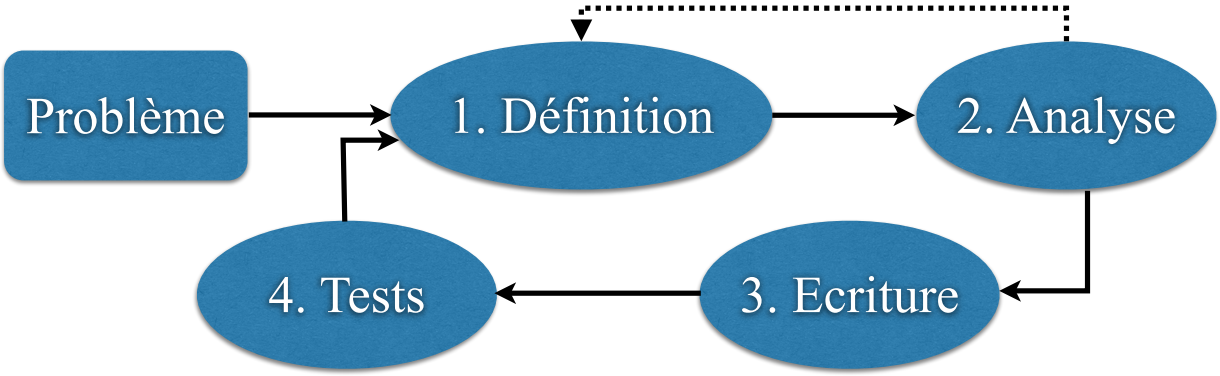


Schéma Méthodo (2)

- 1ère étape: *Définition du problème*
  - définir précisément ce qu'on attend du programme
  - prendre connaissance des informations nécessaires à la résolution du problème
    - ✓ quelles sont les données en entrée?
      - **Input**
    - ✓ quels sont les résultats attendus et sous quelle forme?
      - **Output**
    - ✓ que dois-je manipuler comme données?
      - **Objet(s) Utilisé(s)**
      - lien(s) avec l'Input
  - Slides 9 → 13

Schéma Méthodo (3)

- 2ème étape: *Analyse du problème*
  - découper le problème en parties plus petites et plus faciles à appréhender
    - **découpe en sous-problèmes** (ou **approche systémique**)
      - chaque sous-problème pourra être résolu indépendamment
      - un sous-problème peut admettre plusieurs solutions
      - il est possible de généraliser un sous-problème (cfr. Chap. 6)
  - structurer le problème
    - comment les sous-problèmes s'emboîtent
  - cette étape revient à penser *l'architecture* du programme
  - Slides 14 → 49

Schéma Méthodo (4)

- 3ème étape: *Ecriture du code*
  - implémentation des différents sous-problèmes
    - **Invariant** et **Fonction de Terminaison**
      - si le sous-problème fait intervenir une boucle
  - mise en commun des sous-problèmes
  - Slides 51 → 112
- 4ème étape: *Tests*
  - vérifier que l'implémentation résout bien le problème
  - peut nécessiter de revenir à une étape précédente en cas d'erreur
  - cfr. INFO0030, Partie 2, Chap. 3

Agenda

- Chapitre 3: Méthodologie
  - Schéma Méthodologique
  - Définition du Problème
    - ✓ Principe
    - ✓ Exemple
  - Analyse du Problème
  - Invariant de Boucle
  - Fonction de Terminaison

Principe

- Il s'agit de définir
  - les données en entrée
    - ✓ **Input**
  - les données en sortie
    - ✓ **Output**
  - les données utilisées
    - ✓ **Objet(s) Utilisé(s)**

Principe (2)

- Pour chacun des objets utilisés, il faut
  - décrire son utilité
  - donner un nom *évocateur* de ce qu'il représente
  - donner un *type*
    - `int`
    - `double`
    - `float`
    - `char`
    - ...
- Cette étape est à faire *avant* d'écrire la moindre ligne de code

Exemple

- Calculer a^b et afficher le résultat sur la sortie standard
- Définition du problème
  - Input
    - la *base* et l'*exposant*, lus au clavier
  - Output
    - le résultat de l'*exponentiation* est affiché à l'écran
  - Objets Utilisés
    - `base`, la base
      - `base` $\in \mathbb{N}$
      - `unsigned int base;`
    - `exp`, l'exposant
      - `exp` $\in \mathbb{N}$
      - `unsigned int exp;`

Exemple (2)

- Canevas général du code

```
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int base, exp;

  //déclaration de variables supplémentaires

  //code

}//fin programme
```


Agenda

- Chapitre 3: Méthodologie
  - Schéma Méthodologique
  - Définition du Problème
  - Analyse du Problème
    - ✓ Découpe en Sous-Problèmes
    - ✓ Impression de Chiffres
    - ✓ Nombre Parfait
  - Invariant de Boucle
  - Fonction de Terminaison

Découpe en SPs

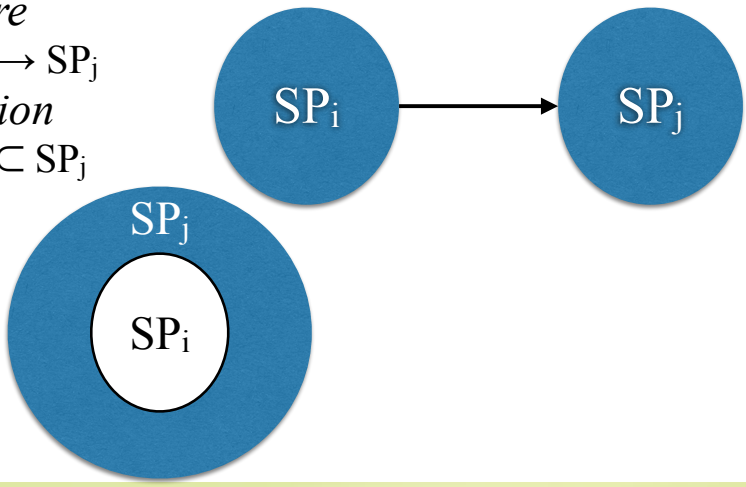
- Une fois les données déterminées et les résultats explicités
  - Etape 1 (Définition) de la méthodologie
  - il reste à trouver la méthode permettant d'obtenir les résultats à partir des données
- Quid si la solution n'est pas évidente du 1er coup d'oeil?
  - essai/erreur?
  - coder comme une bête jusqu'à arriver à une "solution"?
- Solution
  - découper le problème en **sous-problèmes** (SPs)
  - les structurer

Découpe en SPs (2)

- Lorsque le problème est trop complexe
  - il faut le découper en tâches distinctes
    - ✓ les différents SPs
- Chaque SP doit avoir un nom significatif
  - objectif?
    - ✓ le problème général doit paraître résolu avec les différents SPs et leurs interactions
- Chaque SP peut être divisé en plusieurs SPs
  - jusqu'à obtenir des SPs évidents à résoudre
  - on peut donc appliquer la méthodologie générale sur chaque SP

Découpe en SPs (3)

- La structuration consiste à organiser les SPs
  - comment les SPs s'emboîtent-ils?
- L'agencement doit répondre effectivement au problème posé
- Différents types d'agencement
  - *linéaire*
    - ✓ $SP_i \rightarrow SP_j$
  - *inclusion*
    - ✓ $SP_i \subset SP_j$



Découpe en SPs (4)

- Au Chapitre 6, nous verrons comment généraliser un SP pour l'utiliser "à la demande"

Impression Chiffres

- Comment produire le résultat suivant?
  - afficher, sur la sortie standard, une suite de chiffres, avec la limite *n* introduite au clavier

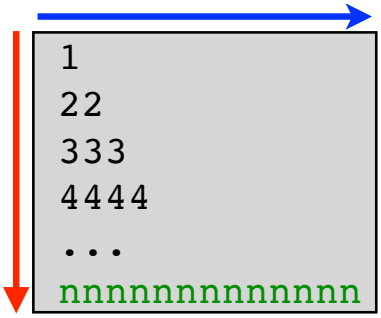
```
1
22
333
4444
...
nnnnnnnnnnnn
```


Impression Chiffre (2)

- Etape 1: Définition du Problème
  - Input
    - ✓ le nombre de lignes, lu au clavier
  - Output
    - ✓ l'affichage à l'écran, tel que formaté dans l'énoncé du problème
  - Objet Utilisé
    - ✓ `n`, le nombre de lignes
      - `n`$\in \mathbb{N}$
      - `unsigned int n;`

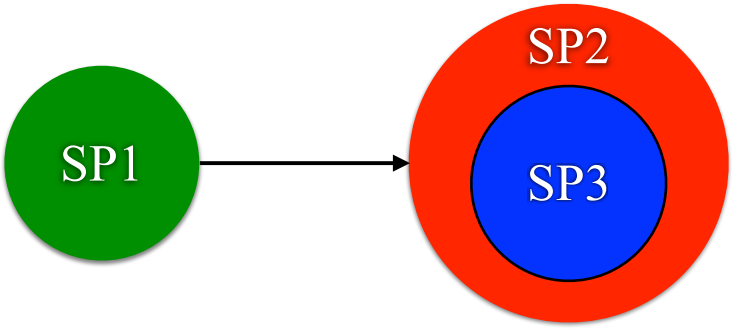
Impression Chiffres (3)

- Etape 2: Analyse
- On peut envisager 3 SPs
  - SP1: Lecture au clavier
    - ✓ lire la valeur de `n` au clavier
  - SP2: Gestion des lignes
    - ✓ énumération de chaque ligne dans l'intervalle [1, **`n`**] et affichage de ces lignes
  - SP3: Gestion des suites de chiffres
    - ✓ impression, pour une ligne donnée **`i`**, de la suite de chiffre correspondante



Impression Chiffres (4)

- Comment s'emboîtent les 3 SPs?
  - SP1 → (SP3 ⊂ SP2)



Impression Chiffres (5)

- Etape 3: Ecriture du Code
- On peut se focaliser sur chaque SP indépendamment l'un de l'autre
- Canevas général du code

```
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int n;

  //déclaration de variables supplémentaires

  //résolution des 3 SPs

}//fin programme
```


Impression Chiffres (6)

- Résolution SP2 (énumération et affichage des lignes)
- Définition
  - Input
    - `n`, le nombre total de lignes à considérer
      - fourni par le SP 1
  - Output
    - les lignes de 1 à `n` ont été énumérées et affichées à l'écran
  - Objet Utilisé
    - `n`
    - obtenu via le SP1

Impression Chiffres (7)

- Il faut écrire une boucle
  1. déclaration compteur
     - `unsigned int i = 1;`
  2. nombre de tours dans la boucle?
     - `n`
  3. Gardien de Boucle?
     - `i<=n`
  4. Corps de Boucle
     - afficher `i` fois le chiffre `i`
       - écrire la `i`ème ligne
       - SP 3!!
     - faire un retour à la ligne
     - incrémenter `i`

Impression Chiffres (8)

- Code SP2

```
unsigned int i=1;

while(i<=n){
  //application du SP3

  printf("\n");
  i++;
}//fin while - i
```

Impression Chiffres (9)

- Résolution SP3 (impression des chiffres d'une ligne donnée)
- Définition
  - Input
    - ✓ `i`, le numéro de la ligne courante
  - Output
    - ✓ le chiffre `i` a été affiché `i` fois à l'écran
  - Objet Utilisé
    - ✓ `i`
    - ✓ obtenu via le SP2

Impression Chiffres (10)

- Il faut écrire une boucle
  1. déclaration compteur
     - ✓ `unsigned int j = 1;`
  2. nombre de tours dans la boucle?
     - ✓ `i`
  3. Gardien de Boucle?
     - ✓ `j<=i`
  4. Corps de Boucle
     - ✓ écrire le chiffre `i` à l'écran
     - ✓ incrémenter `j`

Impression Chiffres (11)

- Code SP3

```
unsigned int j = 1;

while(j<=i){
  printf("%u", i);
  j++;
}//fin while - j
```


Impression Chiffres (12)

- Résolution SP1 (lecture au clavier)
- Définition
  - Input
    - ✓ /
  - Output
    - ✓ `n` a été lu au clavier
  - Objet Utilisé
    - ✓ /
- Code SP1

```
printf("Entrez une valeur pour n: ");
scanf("%u", &n);
```

Impression Chiffres (13)

```
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int n;
  unsigned int i=1, j;

  printf("Entrez une valeur pour n: ");
  scanf("%u", &n);

  while(i<=n){
    j = 1;
    while(j<=i){
      printf("%u", i);
      j++;
    }//fin while - j

    printf("\n");
    i++;
  }//fin while - i
}//fin programme
```

SP1

SP2

SP3

Nombre Parfait

- Un **nombre parfait**
  - entier positif égal à la somme de ses diviseurs (excepté lui-même)
  - exemple: 28 = 1 + 2 + 4 + 7 +14
- Problème
  - rechercher tous les nombres parfaits appartenant à un intervalle donné ([1, nMax[)

Nombre Parfait (2)

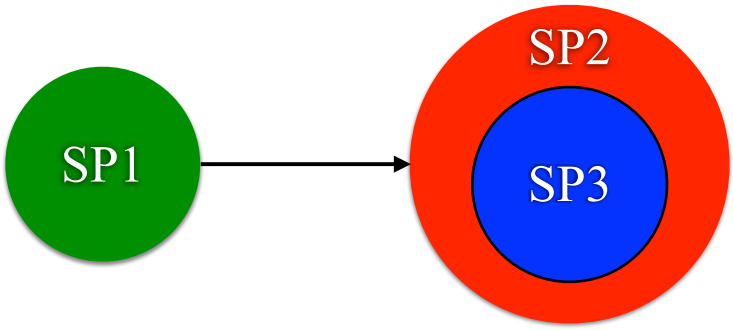
- Etape 1: Définition du Problème
  - Input
    - ✓ la borne supérieure de l'intervalle de recherche, lue au clavier
  - Output
    - ✓ l'affichage à l'écran de tous les nombres parfaits $\in$ [1, `nMax`[
  - Objet Utilisé
    - ✓ `nMax`, la borne supérieure de l'intervalle de recherche
      - ✓ `nMax` $\in \mathbb{N}$
      - ‣ `unsigned int nMax;`

Nombre Parfait (3)

- Etape 2: Analyse
- On peut envisager 3 SPs
  - SP1: Lecture au clavier
    - ✓ lire la valeur de `nMax` au clavier
  - SP2: Enumération
    - ✓ énumérer tous les valeurs de `n` $\in$ {1, 2, 3, ..., **`nMax`**-1} et afficher les nombres parfaits
  - SP3: Vérification
    - ✓ vérifier, pour une valeur **`n`** donnée, si elle constitue ou non un nombre parfait

Nombre Parfait (4)

- Comment s'emboîtent les 3 SPs?
  - SP1 → (SP3 ⊂ SP2)



Nombre Parfait (5)

- Etape 3: Ecriture du code
- Canevas général du code

```
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int nMax;

  //déclaration de variables supplémentaires

  //résolution des 3 SPs

}//fin programme
```

Nombre Parfait (6)

- Résolution SP2 (énumération)
- Définition
  - Input
    - `nMax`
      - fourni par le SP 1
  - Output
    - tous les nombres `n` ∈ [1, `nMax`[ont été énumérés et affichés
  - Objet Utilisé
    - `nMax`
      - donné par le SP1

Nombre Parfait (7)

- Il faut faire une boucle pour l'itération

1. déclaration compteur
   - `unsigned int n = 1;`
2. nombre de tours dans la boucle?
   - `nMax-1`
3. Gardien de Boucle?
   - `n < nMax`
4. Corps de Boucle
   - vérifier si `n` est un nombre parfait
     - SP 3!!
   - incrémenter `n`

Nombre Parfait (8)

- Code SP2

```
unsigned int n;

for(n=1; n<nMax; n++){
  //application du SP3
}//fin for - n
```


Nombre Parfait (9)

- Résolution SP3 (vérification)
- Définition
  - Input
    - ✓ `n`, le nombre à vérifier
  - Output
    - ✓ afficher `n` à l'écran si c'est un nombre parfait
    - ✓ rien sinon
  - Objet Utilisé
    - ✓ `n`
      - donné par le SP2
- Idée de solution
  - énumérer tous les diviseurs `div` de `n`
    - ✓ envisager tous les cas de `1` à `n-1`
    - ✓ boucle!
  - calculer la somme `som` de ces diviseurs
  - comparer `som` avec `n`

Nombre Parfait (10)

- Code SP3

```
unsigned int div, som=0;

for(div=1; div<n; div++){
  if(!(n % div))
    som += div;
}//fin for - div

if(som==n)
  printf("%u\n", n);
```


Nombre Parfait (11)

- Résolution SP1 (lecture au clavier)
- Définition
  - Input
    - ✓ /
  - Output
    - ✓ `nMax` a été lu au clavier
  - Objet Utilisé
    - ✓ /
- Code SP1

```
printf("Entrez une valeur pour nMax: ");
scanf("%u", &nMax);
```

Nombre Parfait (12)

```
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int nMax, n , som, div ;

  printf("Entrez une valeur pour nMax: ");
  scanf("%u", &nMax);

  for(n=1; n<nMax; n++){
    som = 0;

    for(div=1; div<n; div++){
      if(!(n % div))
        som += div;
    }//fin for - div
    if(som==n)
      printf("%u\n", n);
  }//fin for - n
}//fin programme
```

SP1

SP2

SP3

Nombre Parfait (13)

- Peut-on améliorer (i.e., rendre plus efficace) le SP3 (vérification)?
- Objectif: réduire "l'espace de recherche"
- Idée
  - tous les nombres entiers sont divisibles par 1
    - ✓ énumération des diviseurs à partir de `div`=2
    - ✓ commencer la recherche à partir de `n`=2 (1 ≠ parfait)
  - pour une valeur donnée de `n`
    - ✓ plus grand diviseur à considérer est égal à ⌊n/2⌋
  - quand `som > n`
    - ✓ arrêt énumération des diviseurs pour la valeur courante de `n`

Nombre Parfait (14)

```
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int nMax, n, som, div;

  printf("Entrez une valeur pour nMax: ");
  scanf("%u", &nMax);

  for(n=2; n<nMax; n++){
    som = 1;

    for(div=2; div<=n/2 && som <=n; div++){
      if(!(n % div))
        som += div;
    }//fin for - div
    if(som==n)
      printf("%u\n", n);
  }//fin for - n
}//fin programme
```


Nombre Parfait (15)

- Peut-on encore faire mieux?
  - observation
    - ✓ Si `div` est un diviseur de `n`, alors `n/div` l'est également
  - on peut dès lors énumérer les diviseurs de `n` (sauf 1 et `n`) de la façon suivante
    - ✓ considérer toutes les valeurs de `div` $\in [2, \lfloor \sqrt{n} \rfloor]$ qui divisent `n`
    - ✓ pour chacune de ces valeurs, aussi considérer `div' = n/div`
  - Attention
    - ✓ si `n` est un *carré parfait*, alors ne pas considérer deux fois le diviseur `div = div' =` $\sqrt{n}$

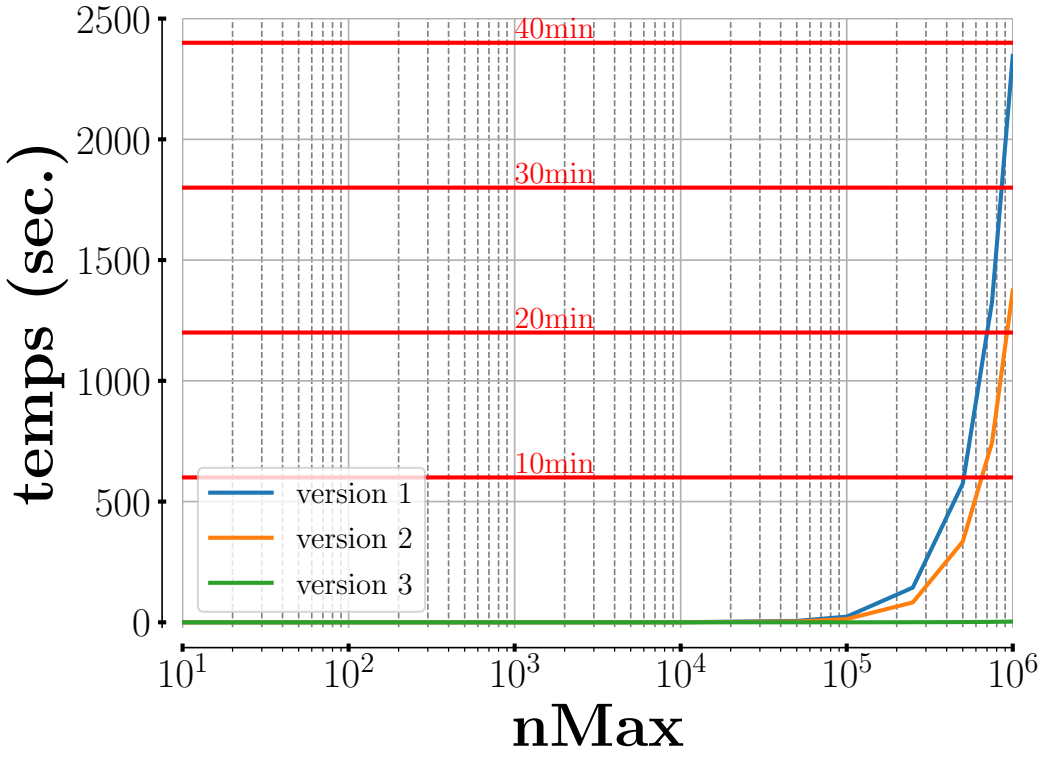
Nombre Parfait (16)

```
#include <stdio.h>
int main(){
  unsigned int nMax, n, som, div, div2;
  printf("Entrez une valeur pour nMax: ");
  scanf("%u", &nMax);
  for(n=2; n<nMax; n++){
    som = 1;
    for(div=2; div * div <= n && som <= n; div++){
      if(!(n % div)){
        som += div;
        div2 = n/div;
        if(div2 != div)
          som += div2;
      }
    }//fin for - div
    if(som==n)
      printf("%u\n", n);
  }//fin for - n
}//fin programme
```


Nombre Parfait (17)

- Intérêt de se prendre la tête?
  - Après tout, la version 1 fonctionne très bien et la solution est assez intuitive
- Evaluation expérimentale des performances des 3 versions
  - Intel i7, 2Ghz
    - ✓ quadcore
  - 8Go RAM
  - implémentation C
    - ✓ `nMax` $\in [10, 10^6]$
    - ✓ le temps nécessaire à chaque version est obtenu grâce à `time.h`
      - cfr. INFO0030

Nombre Parfait (18)



Exercice

- Ecrire un programme qui affiche la table de multiplication des nombres de 1 à 10 sous la forme suivante:
  - note: découpe en sous-problèmes requise

	I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	I	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	I	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	I	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	I	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	I	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	I	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	I	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	I	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	I	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Agenda

- Chapitre 3: Méthodologie
  - Schéma Méthodologique
  - Définition du Problème
  - Analyse du Problème
  - Invariant de Boucle
    - ✓ Intuition
    - ✓ Définition
    - ✓ Règles pour un Invariant Graphique
    - ✓ Bestiaire
    - ✓ Comment Trouver un Invariant Graphique?
    - ✓ Construction par Invariant Graphique
    - ✓ Exemple Complet 1: Factorielle
    - ✓ Exemple Complet 2: Renversement d'un Nombre
  - Fonction de Terminaison

Intuition

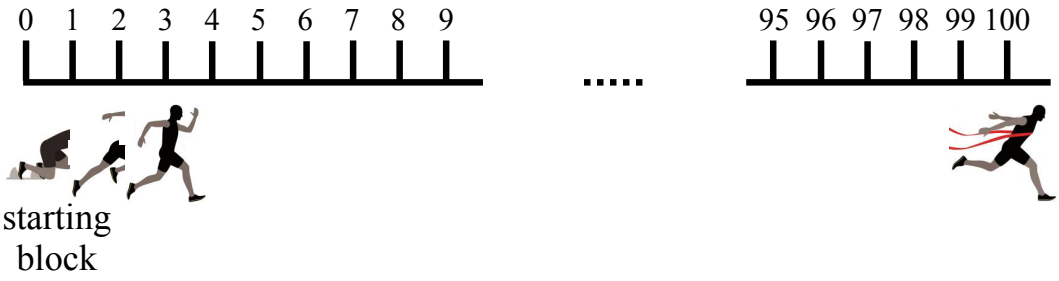
- On cherche à modéliser une course de Usain Bolt
  - 100m
- Une course est composée
  - d'une position de départ
    - ✓ starting block
  - la course proprement dite
    - ✓ chaque pas fait avancer le coureur d'un mètre
    - ✓ modélisation discrète
  - l'arrivée

© LORFM

Intuition (2)

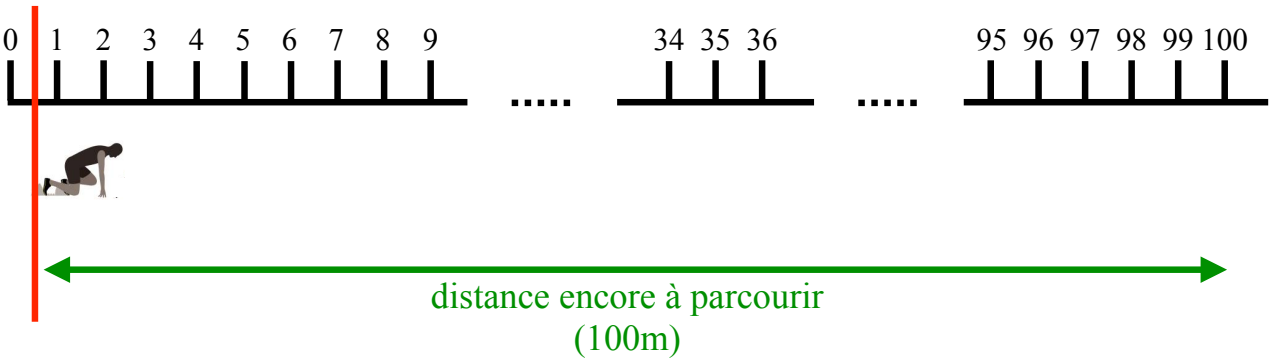
- Anatomie d'un sprint sur 100m

signal de départ



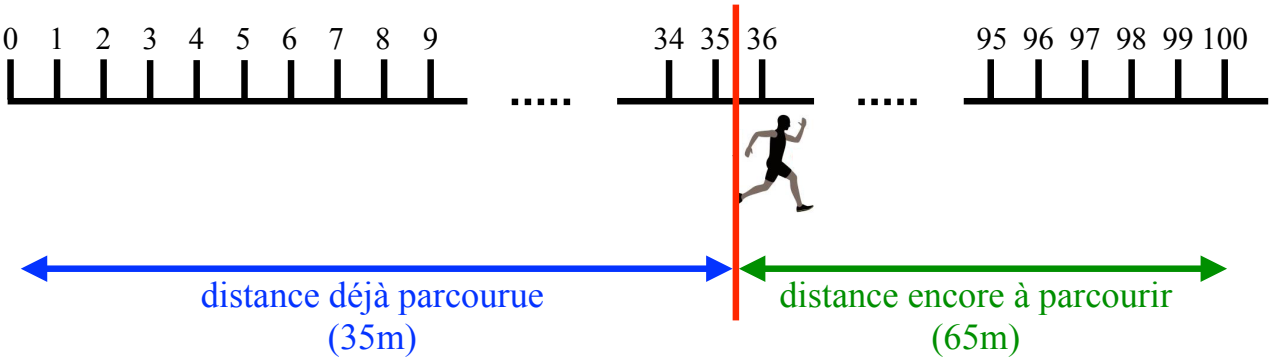
Intuition (3)

- Analyse de la course par un journaliste sportif
  - **photo** prise en cours de sprint



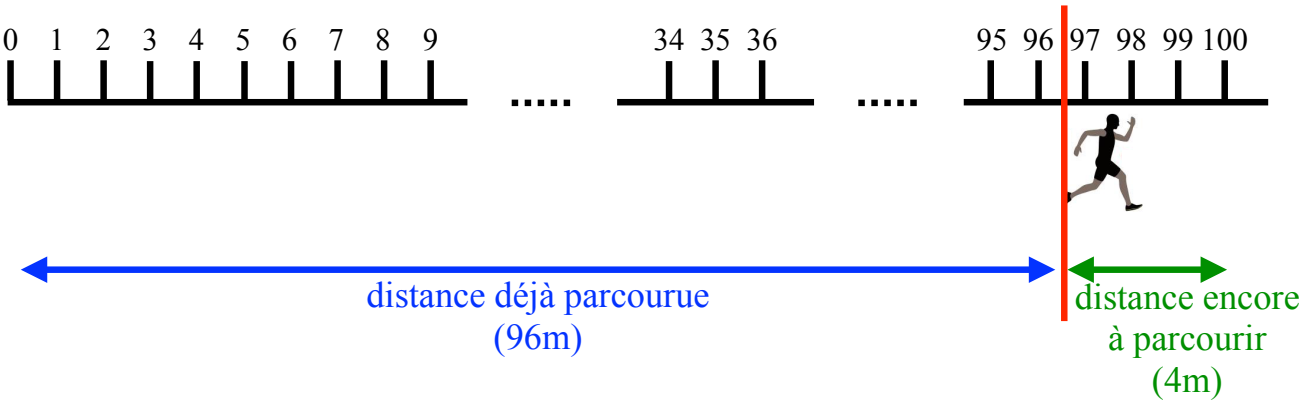
Intuition (4)

- Analyse de la course par un journaliste sportif (cont')
  - **photo** prise en cours de sprint



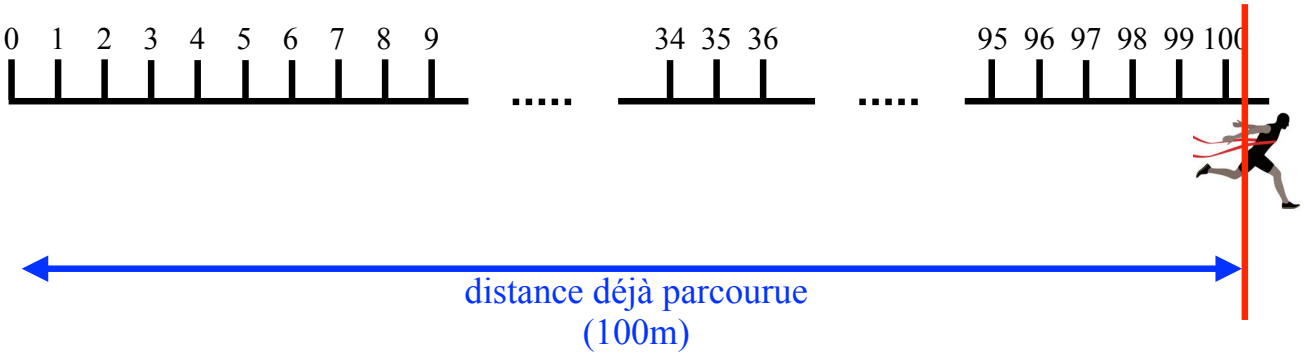
Intuition (5)

- Analyse de la course par un journaliste sportif (cont')
  - **photo** prise en cours de sprint



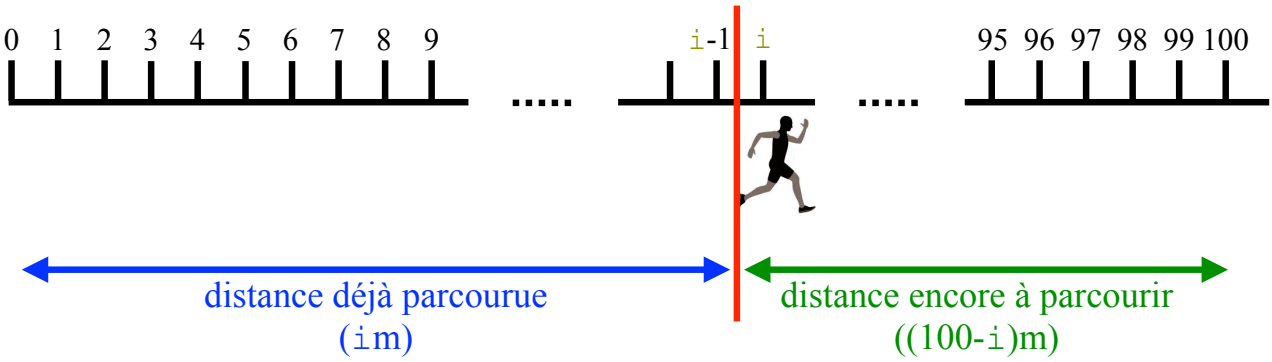
Intuition (6)

- Analyse de la course par un journaliste sportif (cont')
  - **photo** prise en cours de sprint



Intuition (7)

- Analyse de la course par un journaliste sportif (cont')
  - **photo** prise en cours de sprint
  - généralisation



Intuition (8)

- Cette photo généralisée décrivant la distance déjà parcourue par Usain Bolt est l'**Invariant de la Boucle**

Définition

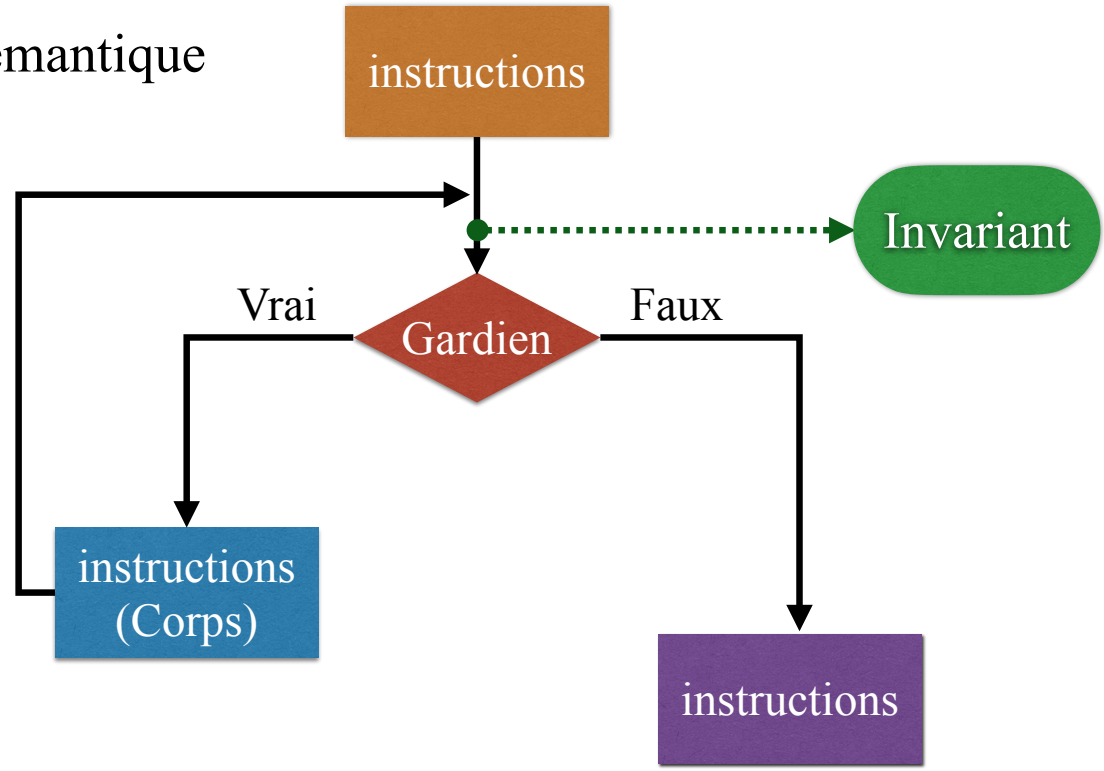
- **Invariant de Boucle**
  - *propriété* vérifiée à chaque exécution de la boucle
  - résumé de tout ce qui a déjà été calculé *jusqu'à maintenant*
  - R. W. Floyd. *Assigning Meanings to Programs*. In Proc. Symposium on Applied Mathematics. 1967.
  - C. A. R. Hoare. *An Axiomatic Basis for Computer Programming*. In Communications of the ACM, 12(10), pg.576-580. 1969.
- Raisonnement sur la boucle avant de l'écrire
  - Invariant *informel*
    - ✓ Invariant Graphique
      - O. Astrachan. *Pictures as Invariants*. In Proc. ACM Technical Symposium on Computer Science Education (SIGCSE). March 1991.
      - S. Liénardy. *Automatic Assessment Providing Feedback of Programs based upon Graphical Loop Invariants and its Integration in a CS1 Course*. Ph. D. Thesis (Université de Liège). September 2021.
    - ✓ Invariant en français
      - W. C. Tam. *Teaching Loop Invariants to Beginners by Examples*. In Proc. ACM Technical Symposium on Computer Science Education (SIGCSE). March 1992.
  - Invariant *formel*
    - ✓ prédicat
    - ✓ cfr. INFO0947

Définition (2)

- L'Invariant de Boucle exprime/résume ce qui a déjà été calculé par la boucle *jusqu'à maintenant*
  - à chaque évaluation du Gardien de Boucle

Définition (3)

- Sémantique



Règles

- Règles pour un bon Invariant Graphique
  1. réaliser un dessin pertinent et le nommer
  2. placer sur le dessin les bornes de début et de fin
     - on peut aussi identifier la taille de la structure
  3. placer une (ou plusieurs) ligne(s) de démarcation qui sépare(nt) ce qui a déjà été calculé dans les itérations précédentes et ce qu'il reste à faire
  4. étiqueter chaque ligne de démarcation avec une variable d'itération
     - à gauche ou à droite
  5. décrire ce que les itérations précédentes ont déjà calculé en utilisant des variables
     - ces variables devront se retrouver dans le programme
     - questions à se poser
       - où est stocké ce résultat?
       - comment peut-on décrire ce résultat (forcément partiel)?
  6. identifier ce qu'il reste à faire dans les itérations suivantes
  7. toutes les structures et variables identifiées sont présentes dans le code.

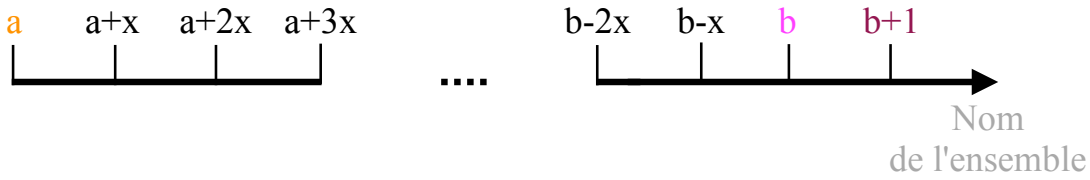
Bestiaire

- Code couleur

Éléments du dessin	Code Couleur	Règle(s) Associée(s)
Nom de la structure		Règle 1
Borne minimale		Règle 2
Borne maximale		
Taille de la structure		
Lignes de démarcation		Règle 3
Étiquette des lignes de démarcation		Règle 4
Ce qui a été réalisé jusqu'à maintenant		Règle 5
zones "à faire"		Règle 6
Propriétés qui sont conservées		Règle 5 + Règle 6

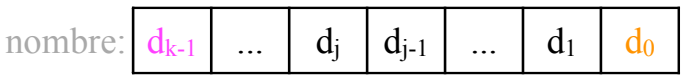
Bestiaire (2)

- Ligne graduée
  - permet la représentation d'un ensemble ordonné
  - $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$
- Construction
  - chaque tiret représente une valeur
  - chaque valeur est décalée d'un même pas
  - la flèche indique l'ordre croissant des valeurs



Bestiaire (3)

- Représentation d'un nombre
  - peu importe la base
  - binaire, décimal, hexadécimal, ...
- Construction
  - cfr. Introduction (Système de Numération)
  - séquence de symboles d_j
  - le symbole de poids faible est à droite
  - le symbole de poids fort est à gauche



Bestiaire (4)

- Tableau
  - cfr. Chap. 5
- Matrice
  - cfr. Chap. 5
- Fichier
  - cfr. INFO0947
- Liste
  - cfr. INFO0947
- Pile
  - cfr. INFO0947
- File
  - cfr. INFO0947

Bestiaire (5)

- Outil GLIDE
  - https://cafe.uliege.be
  - développé par Simon Liénardy & Lev Malcev
    - ✓ S. Liénardy, L. Malcev, B. Donnet. *Graphical Loop Invariant Based Programming for a CS1 Course*. August 2020.
  - permet la création et la manipulation d'un Invariant Graphique
- Vous êtes invités à utiliser l'outil
  - en séance de répétition
  - à la maison, pour vous exercer/travailler le cours
    - ✓ préparation interro
    - ✓ préparation examen
  - à la maison, pour vous aider dans les Challenges

Trouver un Invariant Graphique

- Comment trouver un Invariant Graphique?
- Il existe plusieurs techniques
  - intuition
  - raisonnement inductif
  - combiner Input et Output
  - travailler sur l'Output pour en tirer une situation générale
    - ✓ **éclatement de la Postcondition**

Trouver un Invariant Graphique (2)

- Éclatement de la Postcondition
  1. faire un dessin représentant l'Output
  2. appliquer les 7 règles sur le dessin pour faire apparaître une situation générale

Trouver un Invariant Graphique (3)

- Exemple
  - calcul de la factorielle de n
  - notation: $n!$
  - $\forall n \in \mathbb{N},\ n! =$
    - ✓ 1 si $n \leq 1$
    - ✓ $n \times (n-1)!$ sinon

$$(n-1) \times (n-2)!$$

$$(n-2) \times (n-3)!$$

$$\ldots$$

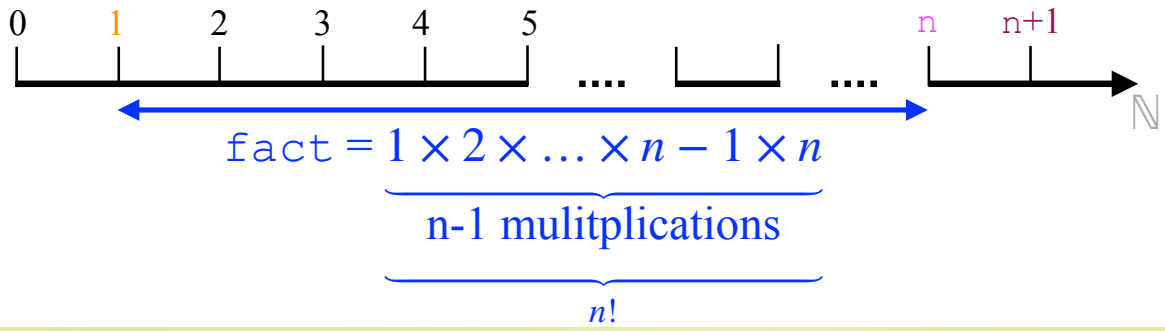
$$\underbrace{n \times n-1 \times \ldots \times 2 \times 1}_{\text{n-1 multiplications}}$$

Trouver un Invariant Graphique (4)

- Définition du problème
  - Input
    - ✓ le nombre pour lequel il faut calculer la factorielle, lu au clavier
  - Output
    - ✓ le résultat de la factorielle est affiché à l'écran
  - Objet Utilisé
    - ✓ `n`, le nombre pour lequel il faut calculer la factorielle
      - `n` $\in \mathbb{N}$
      - `unsigned int n;`
- Analyse
  - SP1: lecture de `n` au clavier
  - SP2: calcul de la factorielle de **`n`**
  - SP3: affichage la **factorielle** à l'écran
  - SP1 → SP2 → SP3

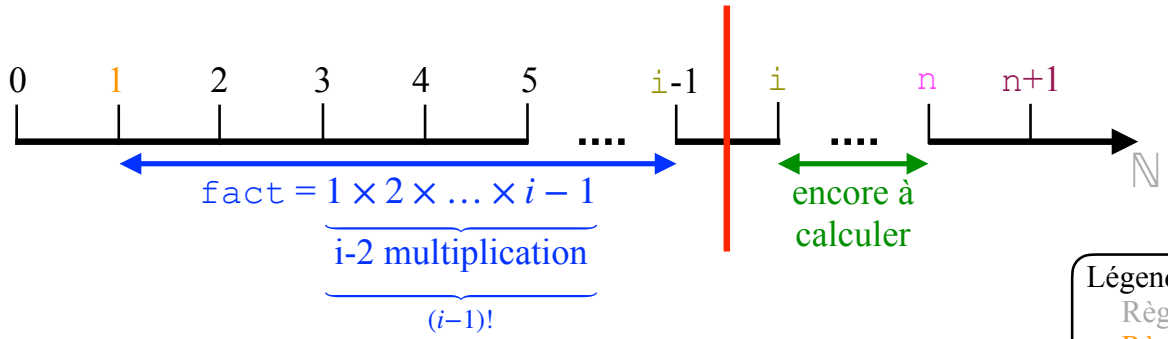
Trouver un Invariant Graphique (5)

- Définition SP2
  - Input
    - ✓ `n` (obtenu par le SP1)
  - Output
    - ✓ une variable `fact` contient `n`!
  - Objet Utilisé
    - ✓ `unsigned int n;`
- Représentation graphique de l'Output



Trouver un Invariant Graphique (6)

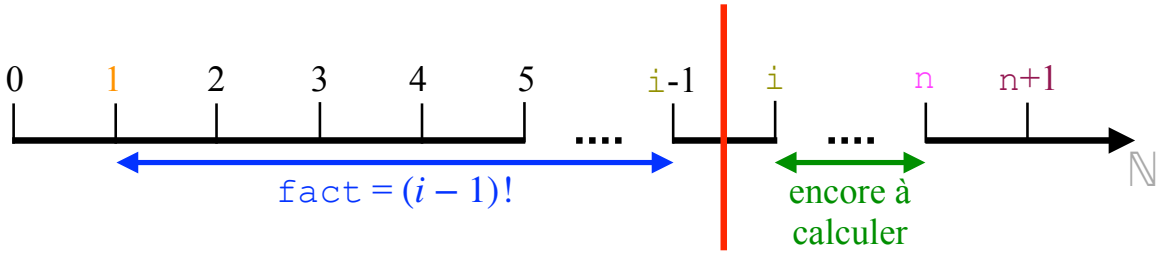
- De l'Output à l'Invariant Graphique



Légende:
Règle 1
Règle 2
Règle 3
Règle 4
Règle 5
Règle 6

Trouver un Invariant Graphique (7)

- Invariant Graphique SP2



Trouver un Invariant Graphique (8)

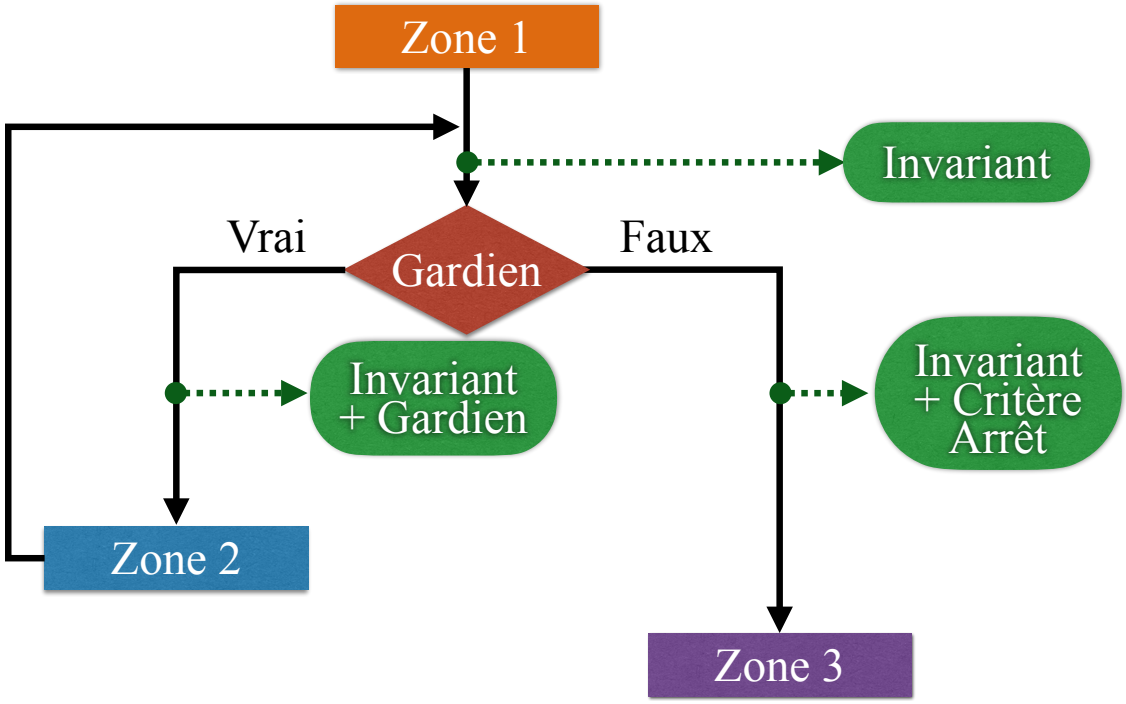
- Il est **obligatoire** que l'Invariant parle des variables "importantes" manipulées par la boucle
  - dans cet exemple, il s'agit
    - ✓ de l'indice de boucle, `i`
      - entre quelles bornes évolue `i`?
    - ✓ de la variable servant au produit cumulatif, `fact`
      - que vaut `fact` maintenant?

Construction par Invariant

- L'Invariant est la base d'une construction rigoureuse de programme
  - E. W. Dijkstra. *A Discipline of Programming*. Prentice-Hall, Inc. 1976.
  - B. Meyer. *A Basis for the Constructive Approach to Programming*. In Proc. IFIP Congress. October 1980.
  - D. Gries. *The Science of Programming*. Springer. 1987.
  - C. Morgan. *Programming from Specifications*. Prentice Hall. 1990.
  - S. Liénardy. *Automatic Assessment Providing Feedback of Programs based upon Graphical Loop Invariants and its Integration in a CS1 Course*. Ph. D. Thesis (Université de Liège). September 2021.
- Partant de la sémantique de l'Invariant de Boucle
  - on peut définir une *stratégie* de résolution du problème
    - ✓ stratégie == élaboration d'un plan
  - portant sur le comportement des instructions
    - ✓ avant la boucle
      - Zone 1
    - ✓ le corps de la boucle
      - Zone 2
    - ✓ après la boucle
      - Zone 3

Construction par Invariant (2)

- Invariant et Zones



Construction par Invariant (3)

- *Zone 1*
  - le code d'initialisation (avant la boucle) doit amener l'Invariant de Boucle
    - ✓ l'Invariant de Boucle sera vrai à la toute 1ère évaluation du Gardien de Boucle (i.e., avant d'entrer la 1ère fois dans le Corps de Boucle)
  - l'Invariant de Boucle indique donc
    - ✓ les variables dont j'ai besoin
    - ✓ comment les initialiser pour pouvoir aborder la boucle
  - l'Invariant donc bien une stratégie me permettant d'être dans les "starting blocks" pour la boucle

Construction par Invariant (4)

- *Zone 2*
  - j'entre dans le Corps de Boucle
    - ✓ le Gardien de Boucle vient d'être évalué à vrai
  - mon Invariant de Boucle est donc vrai et, en plus, le Gardien est vrai
  - sur base de ces 2 propriétés, il faut trouver une suite d'instructions qui permet de faire avancer le problème
  - après la dernière instruction du Corps de Boucle, le Gardien va être évalué
    - ✓ par définition, l'Invariant de Boucle doit de nouveau être vrai à ce moment là
    - ✓ la dernière instruction doit donc me permettre de restaurer l'Invariant de Boucle
  - l'Invariant de Boucle est bien une stratégie pour construire le Corps de Boucle

Construction par Invariant (5)

- *Zone 3*
  - le Gardien de Boucle vient d'être évalué à faux
    - ✓ je sors donc de la boucle
  - mon Invariant de Boucle doit toujours être vrai et, en plus, le Critère d'Arrêt est atteint
  - sur base de ces 2 propriétés, je dois trouver une suite d'instructions permettant de clôturer mon problème
  - l'Invariant de Boucle est bien une stratégie me permettant de résoudre mon problème

Construction par Invariant (6)

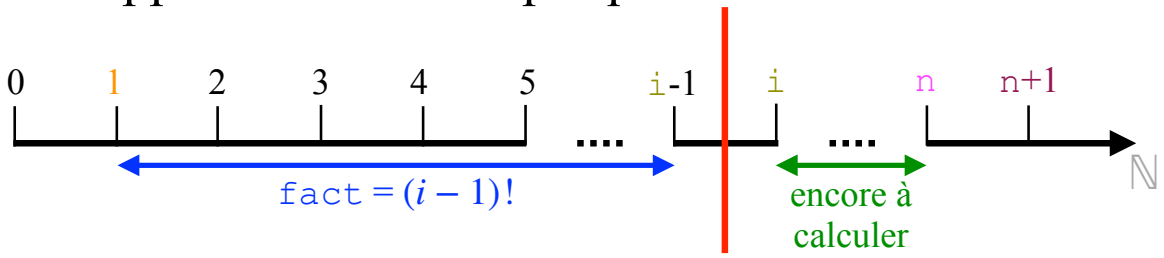
- En résumé, l'Invariant de Boucle
  - exprime ce qui a déjà été calculé, jusqu'à présent, par la boucle
- En particulier, l'Invariant de Boucle
  - décrit
    - ✓ une propriété respectée par
      - les variables du programme
      - les constantes
      - les structures de données
    - ✓ les liens qu'elles entretiennent ensemble

Construction par Invariant (7)

- Attention, l'Invariant de Boucle
  - n'est pas une instruction exécutée par l'ordinateur
  - n'est pas une directive comprise par le compilateur
  - n'est pas une preuve de correction du programme
  - est indépendant du Gardien
    - ✓ il doit être vrai pendant et après l'itération
  - ne garantit pas que la boucle se termine
    - ✓ Fonction de Terminaison
    - ✓ cfr. Slides 101 → 112
  - n'est pas une assurance de l'efficacité du programme

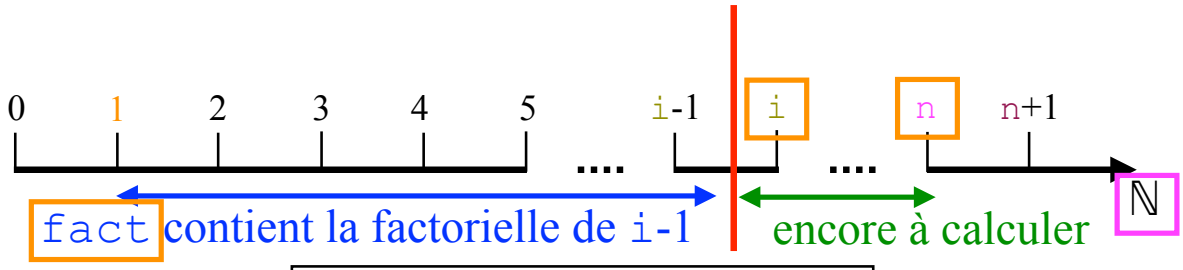
Factorielle

- Définition, analyse et Invariant Graphique déjà faits
  - cfr. Slides 70 → 74
- Rappel Analyse
  - SP1: lecture de `n` au clavier
  - SP2: calcul de la factorielle de **`n`**
  - SP3: affichage la **factorielle** à l'écran
  - SP1 → SP2 → SP3
- Rappel Invariant Graphique SP2



Factorielle (2)

- Construction du code sur base de l'Invariant
  - construction de la *Zone 1*
    - ✓ déclaration et initialisation des variables avant la boucle
      (1) quelles sont les variables dont j'ai besoin?



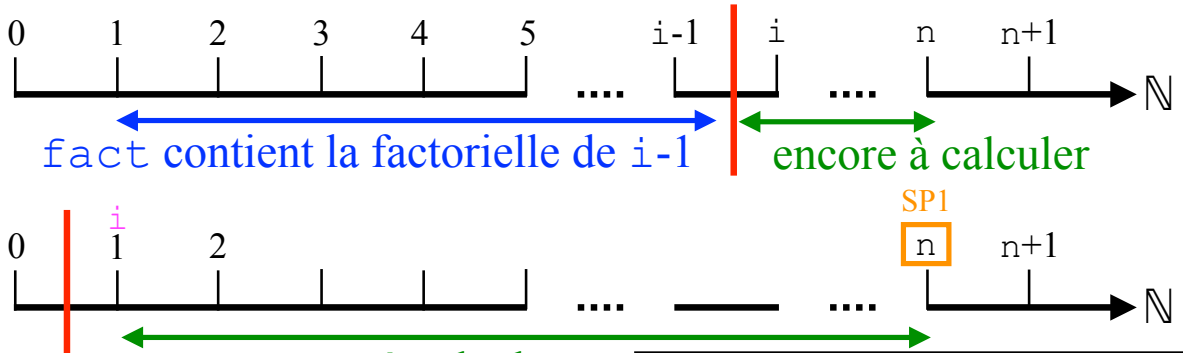

```
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int i, fact, n;

  //à suivre
}//fin programme
```


Factorielle (3)

- Construction du code sur base de l'Invariant
  - construction de la *Zone 1*
    - ✓ déclaration et initialisation des variables avant la boucle
      (2) quelles sont les valeurs initiales de ces variables?



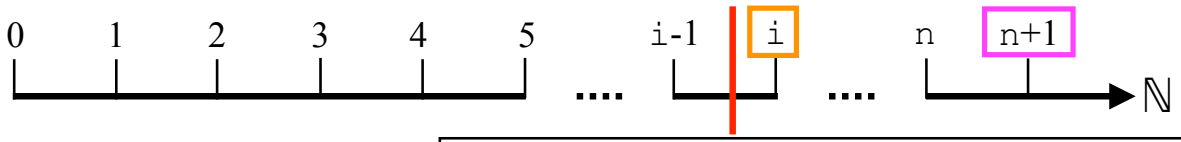
fact contient
la factorielle de i-1

0!

```
int main(){
  i = 1;
  fact = 1;
  scanf("%u", &n);
  //à suivre
}//fin programme
```

Factorielle (4)

- Construction du code sur base de l'Invariant (cont.)
  - construction du *Gardien de Boucle*
    - ✓ variable(s) d'itération et valeur(s) maximale(s) donnent le Critère d'Arrêt
    - ✓ le Gardien de Boucle est donné par la négation du Critère d'Arrêt
      (1) quelle est la variable d'itération?
      (2) quelle est sa valeur maximale?



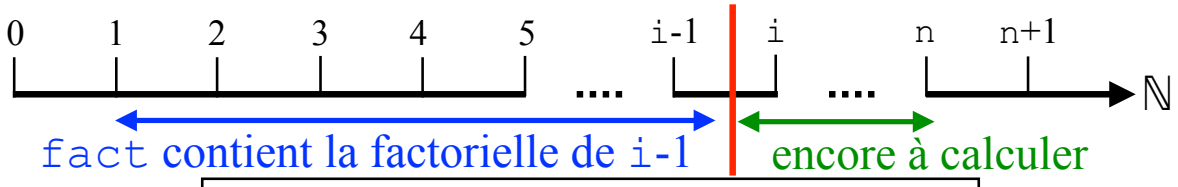
Condition d'arrêt:
i == n+1
⇒ !(i == n+1)
⇒ i <= n

```
int main(){
  //Zone 1

  while(i <= n){
    //à suivre
  }//fin while - i
  //à suivre
}//fin programme
```


Factorielle (5)

- Construction du code sur base de l'Invariant (cont.)
  - construction de la *Zone 2*
    - ✓ construire le Corps de la Boucle
      (1) l'Invariant est vrai
      (2) le Gardien de Boucle est vrai
      (3) dériver les instructions du Corps de la Boucle

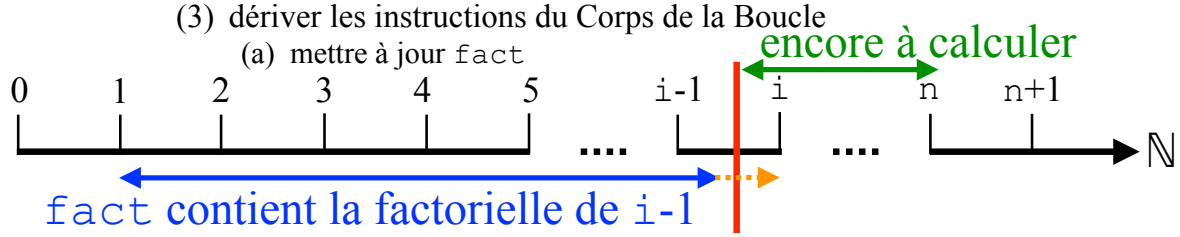



```
int main(){
  //Zone 1

  while(i <= n){
    //???
  }//fin while - i
  //à suivre
}//fin programme
```

Factorielle (6)

- Construction du code sur base de l'Invariant (cont.)
  - construction de la *Zone 2*
    - ✓ construire le Corps de la Boucle
      (1) l'Invariant est vrai
      (2) le Gardien de Boucle est vrai
      (3) dériver les instructions du Corps de la Boucle
        (a) mettre à jour `fact`

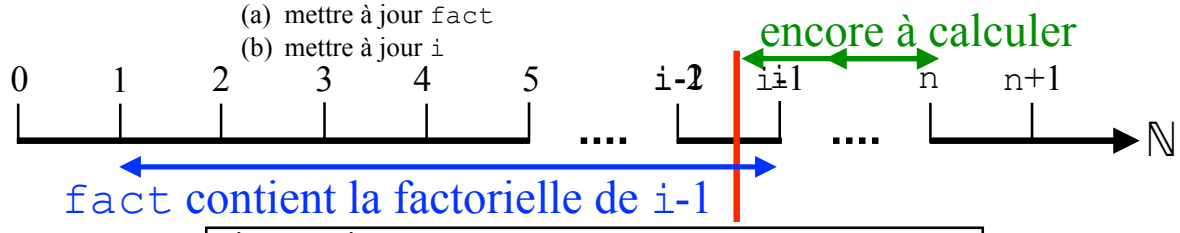



```
int main(){
  //Zone 1

  while(i <= n){
    fact *= i;
  }//fin while - i
  //à suivre
}//fin programme
```


Factorielle (7)

- Construction du code sur base de l'Invariant (cont.)
  - construction de la *Zone 2*
    - ✓ construire le Corps de la Boucle
      (1) l'Invariant est vrai
      (2) le Gardien de Boucle est vrai
      (3) dériver les instructions du Corps de la Boucle
        (a) mettre à jour `fact`
        (b) mettre à jour `i`

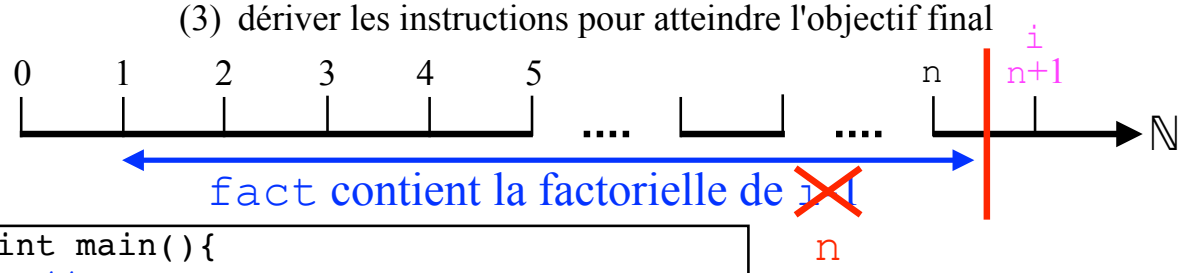



```
int main(){
  //Zone 1

  while(i <= n){
    fact *= i;
    i++;
  }//fin while - i
  //à suivre
}//fin programme
```

Factorielle (8)

- Construction du code sur base de l'Invariant (cont.)
  - construction de la *Zone 3*
    - ✓ construire le code après la boucle
      (1) l'Invariant est vrai
      (2) le Critère d'Arrêt est atteint
      (3) dériver les instructions pour atteindre l'objectif final




```
int main(){
  //Zone 1

  while(i <= n){
    //Zone 2
  }//fin while - i
  printf("factorielle: %u\n", fact);
}//fin programme
```


Factorielle (9)

- Code Complet

```
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int i=1, fact=1, n;
  scanf("%u", &n);

  while(i<=n){
    fact *= i;
    i++;
  }//fin while - i

  printf("factorielle: %u\n", fact);
}//fin programme
```

Zone 1

Zone 2

Zone 3

Renversement Nombre

- Problème
  - renverser les chiffres d'un entier positif en base 10 lu au clavier et afficher à l'écran le nombre renversé
- Exemples
  - 35276 → 67253
  - 19 → 91
  - 3 → 3
  - 0 → 0

Renversement Nombre (2)

- Définition du problème
  - Input
    - ✓ le nombre à renverser, lu au clavier
  - Output
    - ✓ un nombre correspondant au renversement du nombre en entrée est affiché à l'écran
  - Objet Utilisé
    - ✓ n, le nombre à renverser
      - $n \in \mathbb{N}$
      - `unsigned int n;`

Renversement Nombre (3)

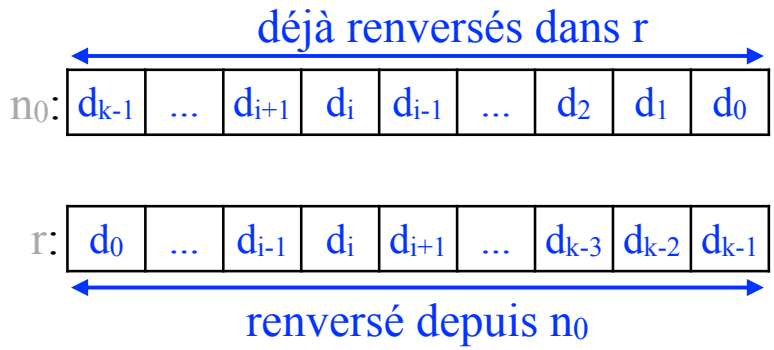
- Analyse du problème
  - SP1: lecture de `n` au clavier
  - SP2: renversement de **`n`** dans `r`
  - SP3: affichage de **`r`** à l'écran
  - SP1 → SP2 → SP3

Renversement Nombre (4)

- Le SP2 nécessite un traitement itératif
- Trouver un Invariant Graphique pour le SP2
  - éclatement de la PostCondition
- Définition du SP2
  - Input
    - ✓ `n`, le nombre à renverser
  - Output
    - ✓ `r` contient le renversement de `n`
  - Objets Utilisés
    - ✓ $n \in \mathbb{N}$
      - `unsigned int n;`
    - ✓ $r \in \mathbb{N}$
      - `unsigned int r;`

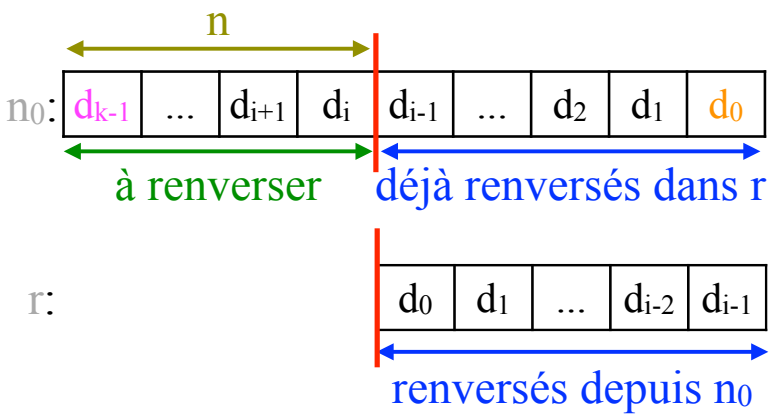
Renversement Nombre (5)

- Représentation graphique de l'Output du SP2



Renversement Nombre (6)

- Construction de l'Invariant Graphique



Légende:
Règle 1
Règle 2
Règle 3
Règle 4
Règle 5
Règle 6

Renversement Nombre (7)

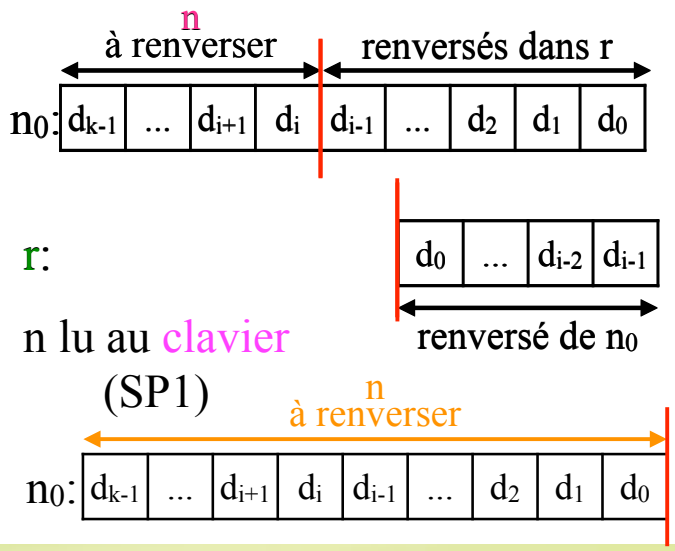
- Construction du code sur base de l'Invariant
  - *Zone 1*
    - ✓ déclaration et initialisation des variables avant la boucle
      (1) quelles sont les variables dont j'ai besoin?
      (2) quelles sont les valeurs initiales de ces variables?
      (a) `n`
      (b) `r`

```c
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int r;
  unsigned int n;

  scanf("%u", &n);
  r = 0;

  //à suivre
}//fin programme
```



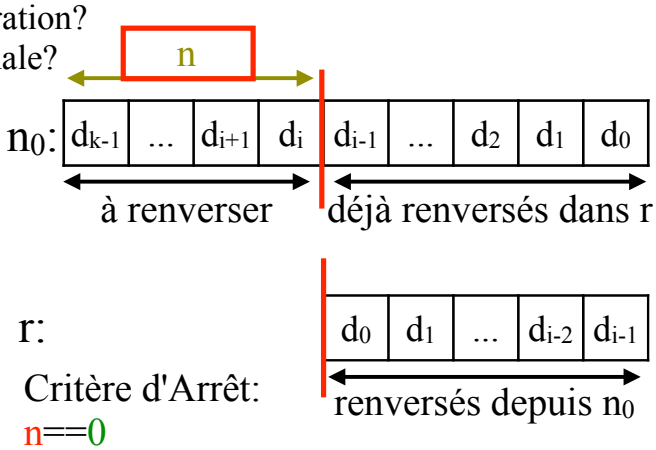
Renversement Nombre (8)

- Construction du code sur base de l'Invariant (cont.)
  - construction du *Gardien de Boucle*
    - ✓ variable(s) d'itération et valeur(s) maximale(s) donnent le Critère d'Arrêt
    - ✓ le Gardien de Boucle est donné par la négation du Critère d'Arrêt
      (1) quelle est la variable d'itération?
      (2) quelle est sa valeur minimale?

```c
#include <stdio.h>

int main(){
  //Zone 1

  while(n!=0){
    //à suivre
  }//fin while - n
  //à suivre
}//fin programme
```



Critère d'Arrêt:
n==0
⇒ !(n==0)
⇒ n!=0

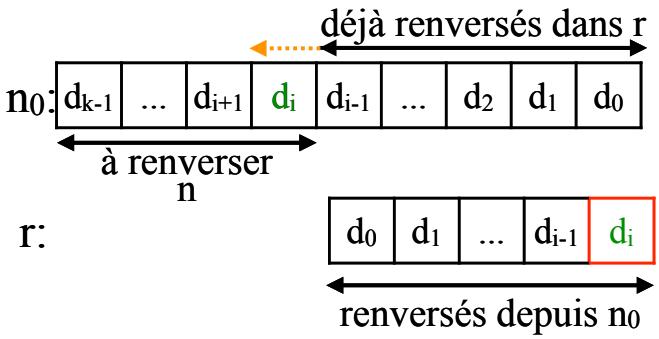
Renversement Nombre (9)

- Construction du code sur base de l'Invariant (cont.)
  - construction de la *Zone 2*
    - ✓ construire le Corps de Boucle
      (1) l'Invariant est vrai
      (2) le gardien de boucle est vrai
      (3) dériver les instructions du Corps de Boucle
        (a) mettre à jour `r`
        (b) mettre à jour `n`

```
#include <stdio.h>

int main(){
  //Zone 1

  while(n!=0){
    r = 10*r + n%10;
    //???
  }//fin while - n
  //à suivre
}//fin programme
```



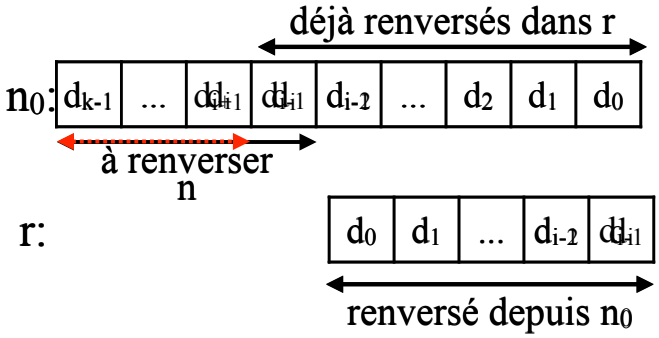
Renversement Nombre (10)

- Construction du code sur base de l'Invariant (cont.)
  - construction de la *Zone 2* (cont.)
    - ✓ construire le corps de la boucle
      (1) l'Invariant est vrai
      (2) le gardien de boucle est vrai
      (3) dériver les instructions du corps de la boucle
        (a) mettre à jour `r`
        (b) mettre à jour `n`

```
#include <stdio.h>

int main(){
  //Zone 1

  while(n!=0){
    r = 10*r + n%10;
    n = n/10;
  }//fin while - n
  //à suivre
}//fin programme
```



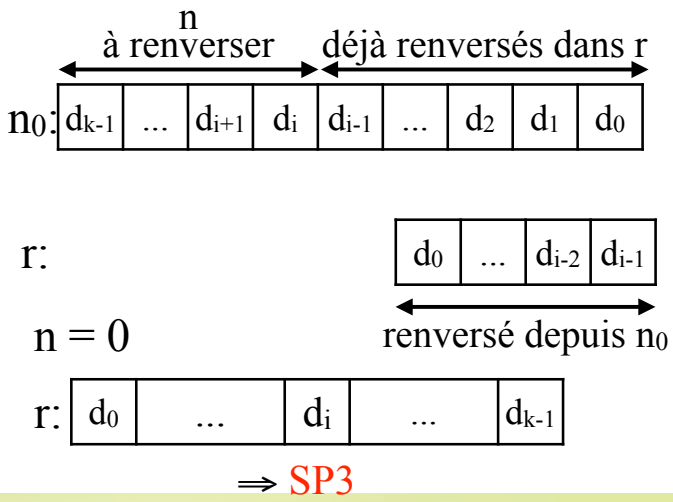
Renversement Nombre (11)

- Construction du code sur base de l'Invariant (cont.)
  - construction de la *Zone 3*
    - ✓ construire le code après la boucle
      (1) l'Invariant est vrai
      (2) le Critère d'Arrêt est atteint
      (3) dériver les instructions pour atteindre l'objectif final (Output)

```c
#include <stdio.h>

int main(){
  //Zone 1

  while(n!=0){
    //Zone 2
  }//fin while - n
  printf("%u\n", r);
}//fin programme
```



Renversement Nombre (12)

- Code complet

```c
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int r=0;
  unsigned int n;

  scanf("%u", &n);

  while(n!=0){
    r = 10*r + n%10;
    n = n/10;
  }//fin while - n

  printf("le nombre retourné: %u\n", r);
}//fin programme
```

Zone 1

Zone 2

Zone 3

Exercices

- Construire un Invariant Graphique pour
  - SP2 de l'impression de chiffres
    - ✓ cfr. Slide 21
  - SP3 de l'impression de chiffres
    - ✓ cfr. Slide 21
  - SP3 nombres parfaits (version 1)
    - ✓ cfr. Slide 34

Agenda

- Chapitre 3: Méthodologie
  - Schéma Méthodologique
  - Définition du Problème
  - Analyse du Problème
  - Invariant de Boucle
  - Fonction de Terminaison
    - ✓ Principe
    - ✓ Construction
    - ✓ Exemple

Principe

- L'Invariant permet de raisonner sur une boucle
- En outre, il permet de déterminer que la boucle est correcte
  - *à condition* que la boucle se termine
- Comment déterminer, formellement, qu'une boucle se termine?
  - **Fonction de Terminaison**

Principe (2)

- Fonction de Terminaison?
  - *fonction entière* portant sur des variables du programme
  - doit avoir une *valeur > 0* avant toute exécution du corps de la boucle
  - *décroît strictement* à chaque exécution du corps de la boucle
- Plus formellement, f une Fonction de Terminaison:
  - f: {valeurs des variables} $\rightarrow \mathbb{Z}$ t.q.
    - ✓ Invariant et gardien $\Rightarrow f > 0$
    - ✓ $f = f_0$ et Invariant et Gardien
      - itération
    - ✓ $f < f_0$
- Conséquence?
  - on est sûr que, partant de tout entier positif, après un nombre fini d'itérations, on doit sortir de la boucle!

Principe (3)

- Attention, une Fonction de Terminaison
  - n'est pas le Gardien de Boucle
  - n'est pas le Critère d'Arrêt
  - n'est pas l'Invariant de Boucle
  - n'a pas forcément une valeur négative ou nulle lorsque la boucle se termine
    - ce n'est pas demandé par les propriétés que doit respecter une Fonction de Terminaison

Construction

- Comment déterminer une Fonction de Terminaison?
  - **technique 1**: raisonnement sur base de l'Invariant Graphique
    - déterminer, graphiquement, la taille de la zone "encore à ..."
    - probablement la technique la plus simple
      - simple manipulation graphique
    - S. Liénardy, B. Donnet. *Graphical Loop Invariant Based Programming for a CS1 Course*. August 2020.
  - **technique 2**: raisonnement sur base du Gardien de Boucle
    - transformer le Gardien en une fonction qui doit être > 0
    - technique plus compliquée car nécessite d'avoir le Gardien
      - globalement, une simple manipulation mathématique

Exemple

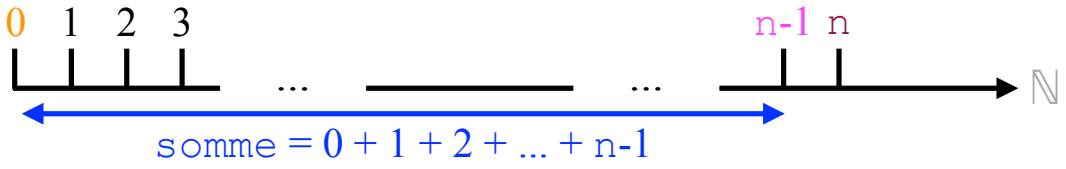
- Afficher la somme des *n* premiers entiers positifs
  - *n* donné par l'utilisateur
- Définition du problème
  - Input
    - ✓ `n`, lu au clavier
  - Output
    - ✓ la somme des `n` premiers entiers positifs est affichée sur la sortie standard
  - Objet Utilisé
    - ✓ $n \in \mathbb{N}$
    - ✓ `unsigned int n;`

Exemple (2)

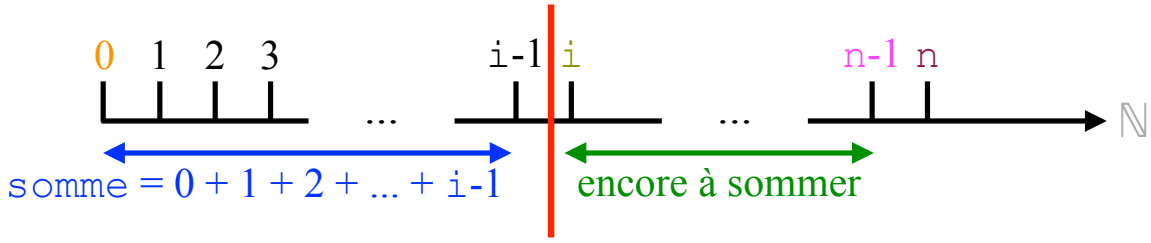
- Analyse du Problème
  - SP1: lecture au clavier
    - ✓ lire la valeur de `n` au clavier
  - SP2: calcul de la somme
    - ✓ énumérer toutes les valeurs `i` $\in \{0, \ldots, $ **`n`**$-1\}$ et en calculer la somme
  - SP3: affichage
    - ✓ affichage de **`somme`**
- Enchaînement des SPs
  - SP1 → SP2 → SP3

Exemple (3)

- Trouver un Invariant Graphique pour le SP2
- Représentation graphique de l'Output

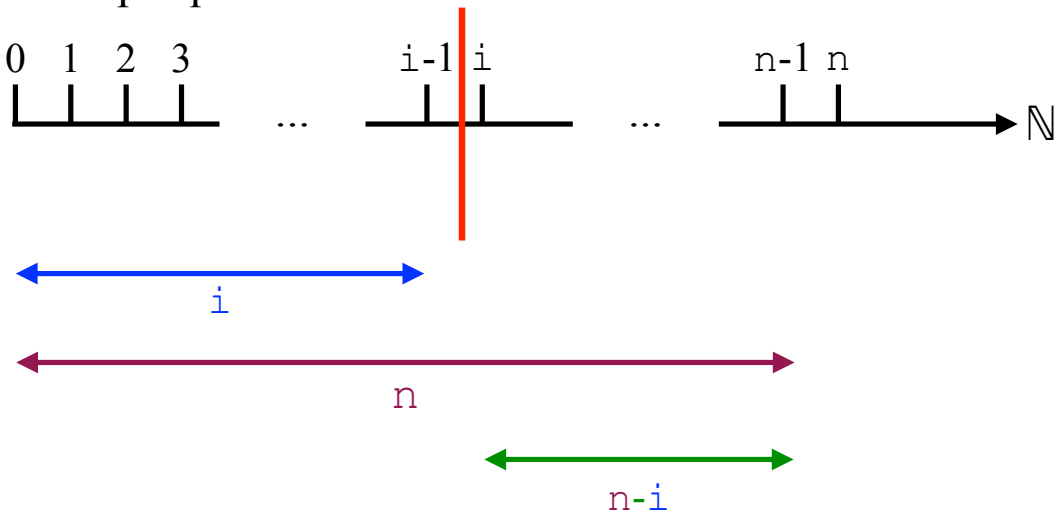


- Éclatement de la PostCondition



Exemple (4)

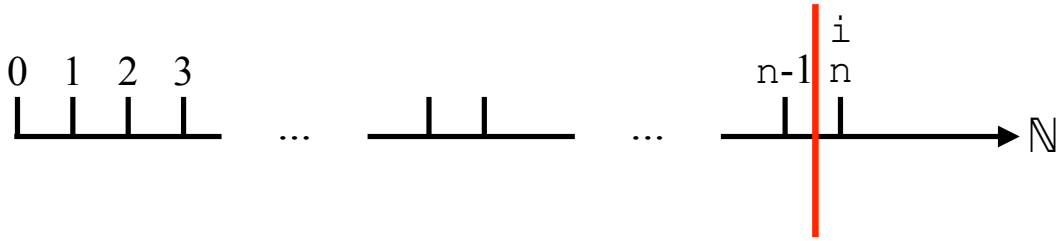
- Déterminer la Fonction de Terminaison
  - technique 1: raisonnement sur base de l'Invariant Graphique



⇒ Fonction de Terminaison: `n-i`

Exemple (5)

- Déterminer la Fonction de Terminaison (cont')
  - technique 2: raisonnement sur base du Gardien de Boucle



⇒ Critère d'Arrêt: `i == n`

⇒ Gardien de Boucle: `i < n`

⇒ `n - i > 0`

⇒ Fonction de Terminaison: `n-i`

Exemple (6)

- Code

```
#include <stdio.h>

int main(){
  unsigned int n, i, somme;

  scanf("%u", &n);

  somme = 0;
  i = 0;
  while(i<n){
    somme += i;
    i++;
  }//fin while - i

  printf("somme: %u\n", somme);
}//fin programme
```

Exercices

- Trouver la fonction de terminaison pour le renversement des chiffres d'un nombre en base 10
- Trouver la fonction de terminaison pour la recherche des nombres parfaits
  - version 1
  - version 2
  - version 3