

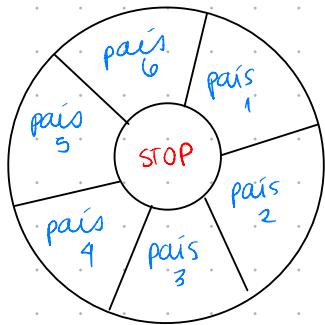
1. Teoría

1.1. ELIS

- Explica el algoritmo de búsqueda lineal a un niño de 5 años.

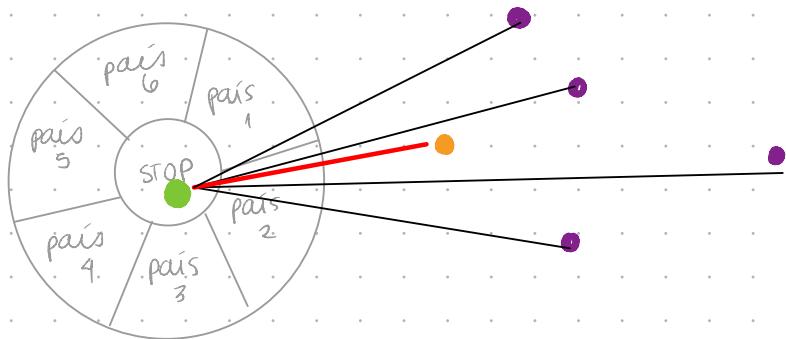
Búsqueda lineal

imaginemos que estamos jugando el juego de stop.



Cada jugador escoge un país. Por turnos, cada jugador declarará la guerra a uno de los países. Si tu país no fue mencionado, entonces corres hacia apunta al círculo. Si tu país sí fue mencionado, entonces debes pararte al centro del círculo y gritar STOP!

Supongamos que se mencionó tu país. Ahora debes escoger a otro de los jugadores - llamaremos después a eso una dirección - y después escoger cuantos pasos avanzar para llegar desde el centro del círculo hasta donde está el - a esto lo llamaremos tamaño del paso -.



En la figura tú estás representado por el punto verde ●, el resto de los jugadores por puntos morados ● y finalmente, el jugador que elegiste por el punto naranja ●. En el dibujo también puedes ver que la distancia que debes recorrer es la marcada por una linea roja —.

El juego consiste entonces en que, una vez que escogiste a qué punto avanzarás, digas con cuántos pasos piensas llegar hasta él. Una idea puede ser escoger el más cercano y calcular menos distancia en pasos, pero también podrías escoger un punto intermedio y hacer un mejor cálculo de la distancia. El aviste es que no te puedes equivocar, pues si te pasas o te quedas corto, pierdes.

Entonces, los pasos a seguir serían:

- ① Escoger el punto al que te diriges
- ② Calcular la distancia y cuantos pasos vas a necesitar para llegar hasta ahí
- ③ Avanzar con la cantidad de pasos y dirección que escogiste y ver si llegas
- ④ Si llegas, ¡ganaste! No se te asigna un punto de castigo. Si no llegas, ¡perdiste! Se te asigna un punto de castigo.
- ⑤ El juego vuelve a empezar y se juegan varias rondas.

Como verás, para ganar TODO el juego (y no solo una ronda) debes acumular la menor cantidad de puntos posibles. A esto lo llamamos: **MINIMIZAR**.

El algoritmo de **Busqueda Lineal** es eso: una serie de pasos (como los de tu juego) que sirven para minimizar (acumular pocos puntos). Si enumeráramos los pasos, serían iguales a los de tu juego, pero con otros nombres:

Juego

- ① Escoger el punto al que quieras ir (escoges la que te ayude a acumular pocos puntos)
- ② Calcular el numero de pasos que necesitas para recorrer esa distancia
- ③ Avanzas para saber si ganaste o perdiste
- ④ Vuelves a empezar

Busqueda lineal

- ① Escoger una dirección en la cual moverte (escoges la que te ayude a minimizar, digamos "de descenso"). **pt**
- ② Calculas cuánto vas a avanzar en esa dirección, es decir, el **tamaño del paso**. **dt**
- ③ Te mueves en la dirección para ver si **minimizaste** correctamente (o llegaste a un **mínimo**)
- ④ Repites los pasos anteriores

¡Y así es como funciona! Es muy parecido a tu juego de stop! ↴

1.2 Demostación

Si tenemos f una cuadrática convexa $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$.
Demuestra que el minimizador de esa dimensión sobre la recta $x_k + \alpha p_k$ es:

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

Demostación

Tenemos $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$ cuadrática convexa.

buscamos el paso α_k que minimice $f(x_k + \alpha p_k)$ pues de esa forma minimizamos f sobre la recta $x_k + \alpha p_k$.

Definimos entonces:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) &= f(x_k + \alpha p_k) \\ \Rightarrow \phi'(\alpha) &= f'(x_k + \alpha p_k) p_k = \nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k\end{aligned}$$

Ahora, tenemos $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \frac{1}{2}(2Qx) - b = Qx - b \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore \nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k = [Q(x_k + \alpha p_k) - b]^T p_k$$

Sabemos que $\hat{\alpha}_k$ será minimizador $\Leftrightarrow [Q(x_k + \hat{\alpha}_k p_k) - b]^T p_k = 0$

Entonces:

$$[Q(x_k + \hat{\alpha}_k p_k) - b]^T p_k = 0$$

$$[Qx_k + Q\hat{\alpha}_k p_k - b]^T p_k = 0$$

$$(Qx_k)^T p_k + (Q\hat{\alpha}_k p_k)^T p_k - b^T p_k = 0$$

$$(Qx_k - b)^T p_k = -\hat{\alpha}_k (Qp_k)^T p_k$$

$$(Qx_k - b)^T p_k = -\hat{\alpha}_k (p_k^T Q^T p_k) \quad \textcircled{2}$$

$\hat{\alpha}_k$ es un escalar
(1 dimensión)

Ahora, por $\textcircled{1}$ $(Qx_k - b)^T = \nabla f_k^T$

por hipótesis $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$ es cuadrática convexa

$\Rightarrow Q$ es simétrica $\therefore Q^T = Q$ $\textcircled{2}$

$\Rightarrow Q$ es definida positiva $\therefore p_k^T Q p_k > 0$ $\textcircled{3}$
 $\Rightarrow p_k^T Q^T p_k \neq 0$

Entonces sustituyendo $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$ en $\textcircled{2}$:

$$(\nabla f_k^T) p_k = -\hat{\alpha}_k (p_k^T Q p_k)$$

Finalmente, por $\textcircled{3}$:

$$\hat{\alpha}_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$