Daniela Bugeda Reyes 174308
Examen Parcial Análisis Aplicado 1

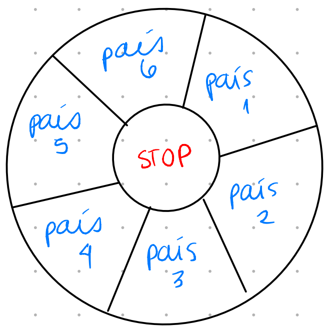
1. Teoría

1.1. ELI5

- Explica el algoritmo de búsqueda lineal a un niño de 5 años.

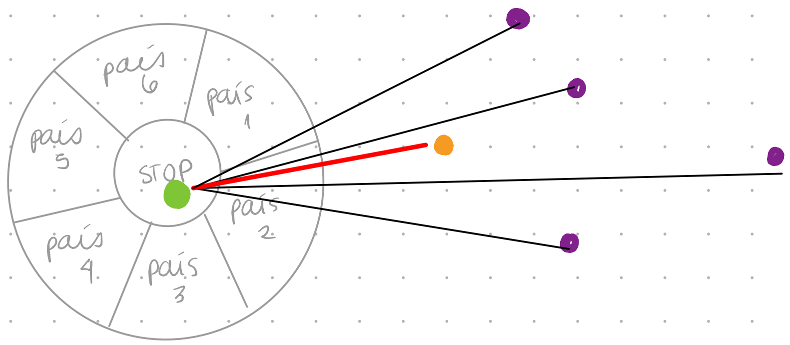
Búsqueda Lineal:

Imaginemos que estamos jugando el juego de stop.



Cada jugador escoge un país. Por turnos, cada jugador declarará la guerra a uno de los países. Si tu país no fue mencionado, entonces corres hacia afuera del círculo. Si tu país sí fue mencionado, entonces debes pararte al centro del círculo y gritar STOP!

Supongamos que se mencionó tu país. Ahora debes escoger a otro de los jugadores - llamaremos después a eso una dirección - y después escoger cuanto debes avanzar para llegar desde el centro del círculo hasta donde está él - a esto lo llamaremos tamaño del paso -.



En la figura tú estás representado por el punto verde, el resto de los jugadores por puntos morados y finalmente, el jugador que elegiste por el punto naranja. En el dibujo también puedes ver que la distancia que debes recorrer es la marcada por una línea roja.

El juego consiste entonces en que, una vez que escogiste a qué punto avanzarás, digas con cuántos pasos piensas llegar hasta él. Una idea puede ser escoger el más cercano y calcular menos distancia en pasos, pero también podrías escoger un punto intermedio y hacer un mejor cálculo de la distancia.
El chiste es que no te puedes equivocar, pues si te pasas o te quedas corto, pierdes.

Entonces, los pasos a seguir serían:

1. Escoger el punto al que te diriges
2. Calcular la distancia y cuántos pasos vas a necesitar para llegar hasta ahí
3. Avanzar con la cantidad de pasos y dirección que escogiste y ver si llegas
4. Si llegas, ¡ganaste! No se te asigna un punto de castigo. Si no llegas, ¡perdiste! Se te asigna un punto de castigo.
5. El juego vuelve a empezar y se juegan varias rondas.

Como verás, para ganar TODO el juego (y no solo una ronda) debes acumular la menor cantidad de puntos posibles. A esto lo llamamos: MINIMIZAR.

El algoritmo de Búsqueda Lineal es eso: una serie de pasos (como los de tu juego) que sirven para minimizar (acumular pocos puntos). Si enumeráramos los pasos, serían iguales a los de tu juego, pero con otros nombres:

Juego	Búsqueda lineal
① Escoger el punto al que quieres ir (escoges la que te ayude a acumular pocos puntos)	① Escoger una dirección en la cual moverte (escoges la que te ayude a minimizar, digamos "de descenso"). p_k
② Calcular el número de pasos que necesitas para recorrer esa distancia	② Calculas cuánto vas a avanzar en esa dirección, es decir, el tamaño del paso. α_k
③ Avanzas para saber si ganaste o perdiste.	③ Te mueves en la dirección para ver si minimizaste correctamente (o llegaste a un mínimo)
④ Vuelves a empezar	④ Repites los pasos anteriores

¡Y así es como funciona! Es muy parecido a tu juego de stop! ⚓

1.2 Demostración

Si tenemos f una cuadrática convexa $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$. Demuestra que el minimizador de una dimensión sobre la línea $x_k + \alpha p_k$ es:

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

<u>Demostración:</u>

Tenemos $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$. cuadrática convexa
Buscamos el paso α_k que minimice $f(x_k + \alpha p_k)$ pues de esa forma minimizamos f sobre la línea $x_k + \alpha p_k$:

Definamos entonces:

$$\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$$
$$\Rightarrow \phi'(\alpha) = f'(x_k + \alpha p_k)\, p_k = \nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k$$

Ahora, tenemos $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}Qx) - b = Qx - b \quad (*)1$$

$$\therefore \nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k = [Q(x_k + \alpha p_k) - b]^T p_k$$

Sabemos que $\hat{\alpha}_k$ será minimizador $\Leftrightarrow [Q(x_k + \hat{\alpha}_k p_k) - b]^T p_k = 0$
Entonces:

$$[Q(x_k + \hat{\alpha}_k p_k) - b]^T p_k = 0$$
$$[Qx_k + Q\hat{\alpha}_k p_k - b]^T p_k = 0$$
$$(Qx_k)^T p_k + (Q\hat{\alpha}_k p_k)^T p_k - b^T p_k = 0$$
$$(Qx_k - b)^T p_k = -\hat{\alpha}_k (Qp_k)^T p_k$$
$$(Qx_k - b)^T p_k = -\hat{\alpha}_k (p_k^T Q^T p_k) \quad (*)$$

$\hat{\alpha}_k$ es un escalar (1 dimensión)

Ahora, por $(*)1$ $(Qx_k - b)^T = \nabla f_k^T$
por hipótesis $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$ es cuadrática convexa

$$\Rightarrow Q \text{ es simétrica} \quad \therefore Q^T = Q \quad (*)2$$
$$\text{y} \Rightarrow Q \text{ es definida positiva} \quad \therefore p_k^T Q p_k > 0 \quad (*)3$$
$$\Rightarrow p_k^T Q p_k \neq 0$$

Entonces sustituyendo $(*)1$ y $(*)2$ en $(*)$:

$$(\nabla f_k^T) p_k = -\alpha_k (p_k^T Q p_k)$$

Finalmente, por $(*)3$

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

2. código.

Buscamos optimizar la función Rosenbrock por el método de Newton sin considerar α y con el método de búsqueda lineal, en este caso, utilice máximo descenso.

(*) Nota: implemente el caso típico de dos variables con $a=1$ y $b=100$ pero esos parámetros pueden moverse cambiando los valores de a y b dentro de la misma función.

En ambos casos llego a que el mínimo global es aproximadamente el punto $(1,1)$. Sin embargo, tarda mucho en correr pues si vemos la gráfica, tiene un valle muy largo y por eso es difícil llegar al mínimo.

En Newton tomamos $\alpha=1$
con búsqueda lineal sí utilizamos el código de generar un alpha cada vez.

(*) código en parcial1.py ↓