MATEMATIKA 2

Skripta

Marko Skakun

22. maj 2017

Napomena: u svesci trenutno nisu ubačeni primeri jer se veoma sporo kucaju, ali je sva teorija proverena za sada dva puta. U slučaju da pronađete neku grešku (slovnu, konceptualnu,...), ili imate neku preporuku pošaljite je na mail: skalesms@gmail.com

Sadržaj

1 Neodređeni integrali

1.1 Uvod

Definicija 1. *Neka je funkcija f definisana na proizvoljnom intervalu $I = (a, b) \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Ako postoji funkcija $F(x)$ koja je definisana na I i za koju važi*

$$(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$$

*tada kažemo da je $F(x)$ **primitivna funkcija** funkcije $f(x)$ na intervalu I.*

Teorema 1. *Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije f na intervalu I, tada je i $F(x) + c; \quad c \in \mathbb{R}$ takođe primitivna funkcija funkcije f na intervalu I.*

Dokaz.

$$(\forall x \in I)(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

□

Teorema 2. *Ako su $F_1(x)$ i $F_2(x)$ neke dve primitivne funkcije funkcije f na intervalu I, tada:*

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in I)\ F_1(x) - F_2(x) = c$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x) \\
&\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \\
&(\forall x \in \mathbb{R})\ \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = c
\end{aligned}$$

* Teorema iz diferencijalnog računa $(\exists c \in \mathbb{R})(\varphi(x) = c)$ □

Teorema 3. *Ako je funkcija neprekidna na intervalu I tada ona ima primitivnu funkciju na intervalu I.*

Definicija 2. *Skup svih primitivnih funkcija funkcije f na intervalu I naziva se **neodređeni integral** funkcije f na intervalu I.*
Oznaka:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x; \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Po dogovoru: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c; \quad c \in \mathbb{R}$

Teorema 4. *Neka funkcije f i g imaju primitivne funkcije na intervalu I, i neka je*
$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c; \quad c \in \mathbb{R}$*, tada važi:*

1. $\mathrm{d}\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)dx$
2. $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \dfrac{d\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)}{dx} = f(x)$
3. $\displaystyle\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + c$

Dokaz. 1. $d\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = d(F(x) + c) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

2. $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

3. $\displaystyle\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$

□

1.2 Osnovni metodi integracije

1.2.1 Tablica

Tablica neodređenih integrala

1) $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \neq -1$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c; \quad x \neq 0$

3) $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c; \quad a > 0, a \neq 1$

4) $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c$

5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c_1$

6) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c_1; \quad (|x| < 1)$

7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c = \begin{cases} \operatorname{arsh} x + c & za + \\ \operatorname{arch} x + c & za - i\ x > 1 \end{cases}$

8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c & za|x| < 1 \\ \operatorname{arcth} x + c & za|x| > 1 \end{cases}$

9) $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$

10) $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$

11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

13) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + c$

14) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + c$

15) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} \operatorname{th} x + c$

16) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c$

Smenom izvedeni neodređeni integrali

1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + c$

2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$

4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

1.2.2 Korišćenjem teoreme o linearnosti integrala

Teorema 5. *Ako funkcije f i g imaju primitivne funkcije na intervalu I, i ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada važi sledeće (na intervalu I):*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x + c$$

Dokaz.

$$(\forall x \in I)\left(\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

$$(\forall x \in I)\left(\alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \alpha\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' + \beta\left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

$$\implies \int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x + c$$

□

1.2.3 Metod smene promenljive

Teorema 6. *Neka je data funkcija f koja je neprekidna na intervalu I i neka za funkciju $\varphi : I_1 \to I$ (gde je I_1 interval) važi:*

1. φ *i* φ' *neprekidne na intervalu* I_1
2. $(\forall t \in I_1)\varphi'(t) \neq 0$
3. $\exists \varphi^{-1}$

Tada je $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, *smena* $x = \varphi(t);\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$

Dokaz.

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) = L$$

$$\begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} \quad \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \frac{d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right)}{dx} =$$

$$= \frac{d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right)}{dx}\frac{dx}{dt}\frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x) = D$$

$$L = D$$

□

Posledica 6.1. *1) Poznato je* $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$

Traži se $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

$x = \varphi(t)$

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c$

2) Poznato je $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + c_1$

Traži se $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

$x = \varphi(t)$

$t = \varphi^{-1}(x)$

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + c_1$

1.2.4 Svođenje kvadratnog trinoma na kanonski oblik

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2+\frac{2b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)= \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)= \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \\
\text{smena: } x+\frac{b}{2a}&=t
\end{aligned}
$$

Opšti slučaj:

1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$

2) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

5) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}$

1.2.5 Parcijalna integracija

Teorema 7. *Neka su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne na intervalu I, tada važi:*

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x) + c$$

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(u(x)v(x)) &= \mathrm{d}u(x)v(x)+u(x)\mathrm{d}v(x) \\
\int \mathrm{d}(u(x)v(x)) &= \int \mathrm{d}u(x)v(x) + \int u(x)\,\mathrm{d}v(x) \\
u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x) &= \int u(x)\,\mathrm{d}v(x)
\end{aligned}
$$

□

1.2.6 Metod rekurentnih formula

$$
\begin{aligned}
I(n) &= \int f(x,n)\,\mathrm{d}x \\
I(n-1) &= \int f(x,n-1)\,\mathrm{d}x \\
I(n-2) &= \int f(x,n-2)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Primer 1.

$$\begin{aligned}
I(n) &= \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \\
n=1\ :\ I(n) &= \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c \\
n=2\ :\ I(n) &= ? \\
n=3\ :\ I(n) &= ?
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(n) &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\mathrm{d}x - \int \frac{xx}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \begin{bmatrix} u(x)=x & du=dx \\ dv(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^n}dx & v=\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(1-n)}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{-x}{(1+x^2)^{n-1}}\frac{1}{2(1-n)} + \frac{1}{2(1-n)}\underbrace{\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x}_{I(n-1)} + \underbrace{\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x}_{I(n-1)} = \\
I(n) &= I(n-1)\left(1+\frac{1}{2(1-n)}\right) - \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} \\
n=1\ :\ I(1) &= \operatorname{arctg} x + c \\
n=2\ :\ I(2) &= \operatorname{arctg} x\left(1+\frac{1}{2(1-2)}\right) - \frac{x}{2(1-2)(1+x^2)^{1-2}} = \frac{-\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{x(1+x^2)}{2} + c
\end{aligned}$$

1.2.7 Metod neodređenih koeficijenata

Koristi se kada možemo da pretpostavimo analitički oblik primitivne funkcije

Primer 2.

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = (Ax+B)e^x + c \Big/ \frac{d}{dx}$$

-Polinom prvog stepena sa neodređenim koeficijentima A i B

$$\begin{gathered}
xe^x = Ae^x + (Ax+B)e^x \\
xe^x = (Ax+A+B)e^x \\
A=1 \ \wedge\ A+B=0 \\
A=1 \ \wedge\ B=-A=-1 \\
(A,B)=(1,-1) \implies \int xe^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + c
\end{gathered}$$

Primer 3.

$$\begin{gathered}
\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = (Ax^2+Bx+C)e^x + c\Big/\frac{d}{dx} \\
x^2e^x = (Ax^2+Bx+C+2Ax+B)e^x \\
x^2e^x = (Ax^2+(2A+B)x+B+C)e^x \\
A=1 \ \wedge\ 2A+B=0 \ \wedge\ B+C=0 \\
A=1 \ \wedge\ B=-2A=-2 \ \wedge\ C=-B=2 \\
(A,B,C)=(1,-2,2) \implies \int x^2e^x\,\mathrm{d}x = (x^2-2x+2)e^x + c
\end{gathered}$$

1.3 Posebne metode integracije

1.3.1 Integracija racionalnih funkcija

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = ?$$

$R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad dgP_n = n \geq dgQ_m = m \implies R(x)$ je **neprava** racionalna funkcija,
za $n < m \implies R(x)$ je **prava** racionalna funkcija.
Svaka neprava racionalna funkcija može da se prikaže kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije:

$$R(x) = T(x) + \frac{S_l(x)}{Q_m(x)} \quad dgS_l = l < dgQ_m = m$$
$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = \int T(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{S_l(x)}{Q_m(x)}\,\mathrm{d}x$$

Teorema 8. *Svaka prava, nesvodljiva racionalna funkcija može se na jedinstven način razložiti na zbir parcijalnih razlomaka.*

$$\frac{S_l(x)}{Q_m(x)} = \frac{1}{a_m}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\right)$$

gde je $Q_m(x) = a_m(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\ldots(x-x_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$
-Opšti oblik parcijalnih razlomaka:

$$\frac{A}{(x-a)^k};\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m};\ k, m \in \mathbb{N};\ p^2 - 4q < 0$$

1.3.2 Integracija nekih iracionalnih funkcija

1.) $\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)\mathrm{d}x$ gde je $ad - bc \neq 0$

- Ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije smenom:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{NZS(q_1,q_2,\ldots,q_n)}$$

2.) Ojlerove smene: $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$

- Ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije smenom:

I Ojlerova smena:

$$a > 0 \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$$

II Ojlerova smena:

$$c > 0 \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

III Ojlerova smena:

$$(x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \neq x_2) \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1) \vee t(x-x_2)$$

Napomena: Ojlerove smene treba izbegavati kada je god to moguće jer dovode do integrala racionalnih funkcija koji nisu baš zgodni za rešavanje

3.) Integracija binomnog diferencijala $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$

gde su $a, b \in \mathbb{R};\ m, n, p \in \mathbb{Q};\ m = \dfrac{m_1}{m_2};\ n = \dfrac{n_1}{n_2};\ p = \dfrac{p_1}{p_2};\ ab \neq 0;\ np \neq 0$

- Rešenje se može predstaviti elementarnim funkcijama (i to svođenjem na integrale racionalnih funkcija) **samo** u sledećim slučajevima

I Ako je $p \in \mathbb{Z}$

a) za $p > 0$ razlaganje po binomnoj formuli svodi se na zbir tabličnih integrala

b) za $p < 0$ koristi se smena $x = t^{NZS(m_2,n_2)}$

II Ako je $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ koristi se smena $a + bx^n = t^{p_2}$

III Ako je $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ koristi se smena $ax^{-n} + b = t^{p_2}$

4.) U integrale koji sadrže $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ često je pogodno uvesti trigonometrijsku smenu:

a) $\sqrt{a^2 - x^2}$ uvodi se smena $x = a\sin t \quad dx = a\cos t dt \quad t = \arcsin\dfrac{x}{a}$

b) $\sqrt{x^2 + a^2}$ uvodi se smena $x = a\operatorname{tg} t \quad dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt \quad t = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$

c) $\sqrt{x^2 - a^2}$ uvodi se smena $x = \dfrac{a}{\cos t} \quad dx = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt \quad t = \arccos\dfrac{a}{x}$

Napomena:

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x;\ \int x^{2n}e^{\pm x^2}\,\mathrm{d}x;\ \int \cos(x^2)\,\mathrm{d}x;\ \int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{\sin x}{x^n}\,\mathrm{d}x;\ \int \frac{\cos x}{x^n}\,\mathrm{d}x;/;\int \frac{e^a x}{x^n}\,\mathrm{d}x;\ \int \frac{x^n}{\ln x}\,\mathrm{d}x;\ \ldots$$

Ovo su neke od funkcija koje se ne mogu izraziti preko elementarnih funkcija.

1.3.3 Integracija trigonometrijskih funkcija

Integral oblika $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ gde je $R(\sin x, \cos x)$ racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$ svodi se na integral racinalne funkcije na sledeći način:

1.) Ako je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ uvodi se smena

$$t = \operatorname{tg} x \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

2.) Ako je $R(+\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ uvodi se smena

$$t = \sin x$$
$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \cos x = \sqrt{1-t^2}$$

3.) Ako je $R(-\sin x, +\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ uvodi se smena

$$t = \cos x$$
$$dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \sin x = \sqrt{1-t^2}$$

4.) Univerzalna trigonometrijska smena može se uvek primeniti

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

-**Napomena:** izbegavati univerzalnu trigonometrijsku smenu.

2 Određeni integrali

2.1 Uvod

Definicija 1. *Neka je data funkcija f definisana na segmentu $[a,b]$ gde su $a,b \in \mathbb{R} \wedge a < b$. Uređena m-torka $d = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ takva da je $a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_n \equiv b \;\wedge\; x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1};\ i = \overline{0, n-1}$ nazivamo* ***podelom*** *segmenta $[a,b]$*

Definicija 2. *Suma $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ naziva se* ***Rimanova (integralna) suma*** *funkcije f na segmentu $[a,b]$ za datu podelu d.*
Oznaka:

$$S(f,d,a,b)$$

Definicija 3. ***Norma*** *podele d je $||d|| = max(x_{i+1} - x_i);\ i = \overline{0, n-1}$.*
Napomena: *Iz ove definicije sledi da ako $||d|| \to 0$ tada $(\forall i) x_{i+1} - x_i \to 0 \wedge n \to \infty$*

Definicija 4. *Neka je data funkcija f definisana na segmentu $[a,b]$ gde su $a,b \in \mathbb{R} \wedge a < b$. Ako postoji realan broj I takav da važi:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall d) \left(||d|| < \delta(\epsilon) \implies \left| I - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right| < \varepsilon \right)$$

$$tj. \ \lim_{||d|| \to 0} S(f,d,a,b) = I$$

tada se broj I naziva ***određeni (Rimanov) integral*** *funkcije f na segmentu $[a,b]$.*
Oznaka:

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definicija 5. *Ako postoji broj $I \in \mathbb{R}$ takav da je $\lim\limits_{||d|| \to 0} S(f,d,a,b) = I$ kažemo da je funkcija f* ***integrabilna*** *na segmentu $[a,b]$.*

2.2 Potrebni i dovoljni uslovi za integrabilnost funkcija

Definicija 6. *(Darbuove sume funkcije f na segentu $[a,b]$)*
Neka je funkcija f ograničena na segmentu $[a,b]$. Ako segment $[a,b]$ podelimo tačkama $a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_n \equiv b$ i formiramo sume

$$\underline{S}(f,d,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \quad i \quad \overline{S}(f,d,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

gde m_i i M_i označavaju infinum i supremum funkcije f na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$; $i = \overline{0, n-1}$, $\underline{S}$ i $\overline{S}$ se nazivaju ***donja*** *i* ***gornja Darbuova suma*** *funkcije f na segmentu $[a,b]$.*
Napomena: *Ako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$ onda f na segmentima $[x_i, x_{i+1}]$ (u nekim tačkama ξ_i) dostiže svoj infinum m_i i supremum M_i, pa su sume $\underline{S}$ i $\overline{S}$ specijalni slučajevi opšteg pojma integralne sume.*

Teorema 1. ***Ograničena*** *funkcija f je* ***integrabilna*** *na $[a,b]$ ako i samo ako je:*

$$\lim_{||d|| \to 0} \left(\overline{S}(f,d,a,b) - \underline{S}(f,d,a,b) \right) = 0$$

Teorema 2. *Ako je funkcija f* ***integrabilna*** *na segmentu $[a,b]$ tada je f* ***ograničena*** *na $[a,b]$*
Napomena: *obrnuto ne važi*

Teorema 3. *Ako je funkcija f* ***neprekidna*** *na segmentu $[a,b]$ tada je* ***integrabilna*** *na $[a,b]$*

Teorema 4. *Ako je funkcija f* ***definisana*** *i* ***ograničena*** *na segmentu $[a,b]$ i ako na $[a,b]$ ima* ***konačno mnogo*** *tačaka prekida, tada je f* ***integrabilna*** *na $[a,b]$*

Teorema 5. *Ako je funkcija f* ***monotona*** *na segmentu $[a,b]$ tada je f* ***integrabilna*** *na $[a,b]$.*

2.3 Svojstva određenog (Rimanovog) integrala

1.)

Teorema 6. *Ako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a, b]$ gde je $a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b$ onda*

$$\exists \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.) Linearnost integrala

Teorema 7. *Neka su funkcije f i g integrabilne na segmentu $[a, b]$ i neka je funkcija $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ gde su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ integrabilna na $[a, b]$*

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz. Funkcija f je integrabilna $\implies \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{||d|| \to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$

Funkcija g je integrabilna $\implies \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{||d|| \to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) g(\xi_i)$

Funkcija h je integrabilna $\implies \int\limits_a^b h(x)\,\mathrm{d}x =$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{||d|| \to 0} \sum (x_{i+1} - x_i)(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) = \\
&= \lim_{||d|| \to 0} \Big(\sum (x_{i+1} - x_i) \alpha f(\xi_i) + \sum (x_{i+1} - x_i) \beta g(\xi_i) \Big) = \\
&= \lim_{||d|| \to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) \alpha f(\xi_i) + \lim_{||d|| \to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) \beta g(\xi_i) = \\
&= \alpha \lim_{||d|| \to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) + \beta \lim_{||d|| \to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) g(\xi_i) = \\
&= \alpha \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

3.) Aditivnost integrala

Teorema 8. *Za bilo koje $c \in [a, b]$ važi*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4.) Modularna nejednakost

Teorema 9. *Funkcija $|f(x)|$ je integrabilna na $[a, b]$ i važi:*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

5.)

Teorema 10. *Funkcija $f(x)g(x)$ je integrabilna na $[a,b]$.*

6.)

Teorema 11. *Funkcija $f(x)$ je integrabilna na $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$*

7.)

Teorema 12. *Ako je funkcija f integrabilna i $(\forall x\in[a,b])f(x)=f_1(x)$ osim u konačno mnogo tačaka $c_1,c_2,\ldots,c_n\in[a,b]$ gde $f(c_i)\neq f_1(c_i)$ $i=\overline{1,n}$ tada je funkcija $f_1(x)$ integrabilna na $[a,b]$ i važi:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz. Pretpostavimo da se f i f_1 razlikuju u jednoj tački $c\in[a,b]$

$$(\forall x\in[a,b])x\neq c\implies f(x)=f_1(x)$$

Izaberimo proizvoljnu podelu d segmenta $[a,b]$

$$d=(x_0,x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$$

Posmatrajmo integralne sume $S(f,d,a,b)$ i $S(f_1,d,a,b)$ Ako tačka c nije tačka podele d, tj. $(\forall\xi\in d)\xi\neq c$ onda su obe sume jednake. Sume se razlikuju za f i f_1 samo u slučaju da je $(\exists\xi\in d)\xi=c$ i tada bi se razlika ogledala u sledećem sabirku:

$$f(c)(x_i-x_{i-1})\text{ i }f_1(c)(x_i-x_{i-1})$$

Oba sabirka međutim teže nuli kada norma podele teži nuli $||d||\to 0$

$$\implies \lim_{||d||\to 0}S(f,d,a,b)=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}dx=\lim_{||d||\to 0}S(f_1,d,a,b)=\int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}dx$$

Ako imamo konačan broj tačaka za koje se f i f_1 razlikuju na $[a,b]$ tada za svaku od njih ponovimo isti postupak kao za tačku c

$$\implies \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$$

□

8.)

Teorema 13. *1)* $(\forall x\in[a,b])f(x)\geq 0\implies\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq 0$

2) $(\forall x\in[a,b])f(x)>0\implies\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$

9.) Monotonost integrala

1) $(\forall x\in[a,b])f(x)\leq g(x)\implies\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

2) $(\forall x\in[a,b])f(x)<g(x)\implies\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

10.)

Teorema 14. ***(Stav o srednjoj vrednosti)***
Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ i neka $(\forall x \in [a,b]) m \leq f(x) \leq M$. Tada:

$$(\exists \mu \in [m,M]) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$$

Dokaz.

$$(\forall x \in [a,b]) m \leq f(x) \leq M$$
$$\int\limits_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b M\,\mathrm{d}x$$
$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a) \text{ gde je } m \leq \mu \leq M$$

□

Posledica 14.1. *Ako je f neprekidna na $[a,b]$ tada:*

$$(\exists c \in [a,b]) f(c) = \mu \implies \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

Ako je funkcija integrabilna na $[a,b]$ srednja vrednost funkcije na $[a,b]$ je

$$f_s = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz. Iz diferencijalnog računa: f je neprekidna na $[a,b]$

$$\implies c \in [a,b] f(c) = \mu$$

□

2.4 Geometrijske primene određenog integrala

2.4.1 Površine ravnih likova

Teorema 15. *Površina P koja je ograničena neprekidnom funkcijom $f(x) \geq 0$ i odsečcima pravih $x = a$, $x = b$ i $y = 0$ određena je formulom:*

$$P = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.4.2 Dužina luka krive

Teorema 16. *Neka je u ravni data kriva $(a \leq x \leq b) y = f(x)$ i neka su $f(x)$ i $f'(x)$ neprekidne na $[a,b]$. Dužina luka krive nad segmentom $[a,b]$ je:*

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$$

2.4.3 Zapremina obrtnog tela

Teorema 17. *???????????????"—————————-????????????????"'*

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \,\mathrm{d}$$

2.4.4 Površina obrtnoh tela

Teorema 18. *Neka su funkcije f i f' neprekidne na odsečku $[a,b]$. Ako se krivoliniski trapez, čije su stranice segment $[a,b]$, delovi pravih $x=a$, $x=b$ i kriva $(a \leq x \leq b) y = f(x)$ obrće oko x-ose, dobija se obrtno telo. Površina tog tela je:*

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

2.5 Veza između određenog i neodređenog integrala

Teorema 19. *Neka je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ i neka je $x \in [a,b]$ i, prema tome, neka je funkcija $\varphi = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Pod ovim uslovima važi:*

1) Funkcija $\varphi(x)$ je neprekidna na $[a,b]$.

2) Ako je f neprekidna na $[a,b]$ tada $(\forall x \in [a,b])\varphi'(x) = f(x)$ (φ je jedna primitivna funkcija funkcije f na $[a,b]$)

Dokaz. 1) Neka je $x \in [a,b]$ i neka je Δx takvo da je $x + \Delta x \in [a,b]$.
Ako je $\Delta x > 0$ (analogno se pokazuje za $\Delta x < 0$, tada $[x+\Delta x] \subset [a,b]$) posmatrajmo segment $[x, x+\Delta x] \subset [a,b]$

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Na osnovu teorema sa kojima smo se već upoznali važi sledeći niz implikacija:
f je integrabilna na $[a,b] \implies f$ je integrabilna na $[x, x+\Delta x] \subset [a,b] \implies f$ je ograničena na $[x, x+\Delta x] \implies (\exists m, M)(\forall t \in [x, x+\Delta x]) m \leq f(t) \leq M$ Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti za određeni integral sledi: $(\exists \mu) m \leq \mu \leq M$ takvo da je

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = \mu \Delta x$$

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \mu \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \mu \Delta x = \mu \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)) = 0$$

$$\implies F \text{ je neprekidna funkcija } \forall x \in [a,b]$$

2) f je neprekidna na $[a,b] \implies f$ je neprekidna i na $[x, x+\Delta x] \in [a,b]$

$$\begin{gathered}
\implies (\exists c \in [x, x+\Delta x]) f(c) = \mu \\
c = x + \theta\Delta x;\ \theta \in [0,1] \\
\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \mu\Delta x \\
\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = f(c) = f(x+\theta\Delta x) \\
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\theta\Delta x) \\
\varphi'(x) = f(x);\ \forall x \in [a,b]
\end{gathered}$$

Posledica 19.1. *$\varphi(x)$ je jedna primitivna funkcija funkcije f*

$$(\exists c \in \mathbb{R}) \varphi(x) = F(x) + c$$

Za $x = a\ :\ \varphi(a) = F(a) + c = \int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies c = -F(a)$

Za $x = b\ :\ \varphi(b) = F(b) + c = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\underbrace{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b}_{\text{Njutn-Lajbnicova formula}}$$

$\square$

Teorema 20. *Ako je funkcija f neprekidna tada važi:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

gde je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f.

2.6 Parcijalna integracija i smena promenljive kod određenog integrala

Teorema 21. ***(Parcijalna integracija kod određenog integrala)***
Ako su funkcije $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ i $v'(x)$ neprekidne na $[a,b]$ tada je:

$$\int\limits_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$$

Teorema 22. ***(Smena promenljivo kod određenog integrala)***
Ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) funkcija $f(x)$ je neprekidna na segmentu $[a,b]$

b) funkcije $x = \varphi(t)$ i $\varphi'(t)$ su neprekidne na segmentu $[\alpha,\beta]$ gde je $a = \varphi(\alpha)$ i $b = \varphi(\beta)$ tada važi:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Napomena: *U navedenoj teoremi formula smene promenljive izvedena je pod pretpostavkom da je funkcija f neprekidna, što je i najčešći slučaj u primenama. U slučaju da je funkcija φ strogo monotona formula važi i pod slabijom pretpostavkom da je f integrabilna na $[a,b]$.*

Teorema 23. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i periodična funkcija sa periodom T, tada važi:*

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz. ————???????????????"———— □

Teorema 24. *Ako je funkcija f neprekidna na $[-a, a]$ tada važi:*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \textit{ako je } f \textit{ neparna funkcija} \\ 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{ako je } f \textit{ parna funkcija} \end{cases}$$

Dokaz. ————???????????????"———— □

2.7 Nesvojsveni integral

Postoje dva razloga zbog kojih integral nije Rimanov:

1.) Oblast integracije je $\pm\infty$

2.) Integral ima singularne tačke u intervalu

Definicija 7. *1) Neka je f definisana na intervalu $[a, +\infty)$, i integrabilna na svakom konačnom $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty)$. Tada je $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ integral koji zovemo nesvojstvenim (nepravim) i definiše se kao:*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2) $$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\alpha \to -\infty} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

3) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\alpha \to -\infty} \int\limits_{\alpha}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_{c}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definicija 8. *a) Neka je f definisana na segmentu $[a, b)$ i integrabilna na svakom konačnom $[\alpha, \beta] \subset [a, b)$ tada važi:*

$$\underbrace{\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\textit{Nesvojstven}} = \underbrace{\lim_{\beta \to b_-} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\textit{Konačan, beskonačan ne postoji}}$$

b) Neka je f definisana na segmentu $(a, b]$ i integrabilna na svakom konačnom $[\alpha, \beta] \subset (a, b]$ tada važi:

$$\underbrace{\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\textit{Nesvojstven}} = \underbrace{\lim_{\alpha \to a_+} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\textit{Konačan, beskonačan ne postoji}}$$

3 Diferencijalne jednačine

- Principijalno ne znamo da ih rešavamo
- Neke i možemo da rešimo (obratiti pažnju na klasifikaciju)

3.1 Obične diferencijalne jednačine

Definicija 1. *Implicitan izraz $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ gde je $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ nepoznata, n puta diferencijabilna funkcija nezavisno promenljive x, naziva se* ***obična diferencijabilna jednačina*** *reda n ako u njoj efektivno učestvuje izvod $y^{(n)}$.*
Napomena: *nije obavezno pojavljivanje svih članova, ali je obavezno pojavljivanje n-tog izvoda.*

Definicija 2. ***Rešenje*** *diferencijalne jednačine na intervalu I je svaka funkcija y definisana na I koja jednačinu svodi na identitet.*

Definicija 3. ***Opšte rešenje*** *diferencijalne jednačine n-tog reda je svaka funkcija y definisana sa $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n)$ gde su $c_1, c_2, \dots, c_n$ proizvoljne konstante iz $\overline{\mathbb{R}}$, tako da:*

1) y jeste rešenje jednačine

2) Polazna jednačine se može dobiti iz izraza G

Napomena: *Opšte rešenje ne sadrži sva rešenja diferencijalne jednačine*

Definicija 4. ***Partikularno rešenje*** *diferencijalne jednačine n-tog reda je svako njeno rešenje koje je obuhvaćeno opštim rešenjem, tj. koje se može dobiti iz opšteg rešenja za neke konkretne vrednosti konstanti.*

Definicija 5. ***Singularno rešenje*** *diferencijalne jednačine n-tog reda je svako rešenje koje nije obuhvaćeno opštim rešenjem.*

Definicija 6. *Partikularno rešenje diferencijalne jednačine n-tog reda određeno uslovima:*

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \\ y^{(n)}(x_0) &= y_n \end{aligned}\right\} \text{Košijevi (početni) uslovi}$$

naziva se ***Košijevo rešenje*** *diferencijalne jednačine za početne uslove.*
Napomena: *Ovaj problem drugačije se naziva Košijev problem ili problem početnih uslova. Rešava se n jednačina (n uslova) sa n nepoznatih (n konstanti). Ukoliko je problem korektno zadat onda ima jedinstveno rešenje.*

3.2 Diferencijalne jednačine prvog reda

3.2.1 Diferencijalne jednačina kod kod kojih promenljive mogu da se razdvoje

Opšti izraz:

$$f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y = 0$$
$$y' = \varphi(x)\xi(y)$$

gde su funkcije f, g, φ i ξ definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine. **Opšte rešenje:**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(y)\,\mathrm{d}y = c$$

Partikularno rešenje Košijevog problema:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} g(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Napomena: Na kraju rešavanja broj konstanti mora biti jednak redu diferencijalne jednačine.

3.2.2 Diferencijalne jednačine oblika $y' = g(ax+by)$

Opšti izraz:

$$y' = g(ax+by)$$

gde su funkcije y i g definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine.
Opšte rešenje:

a) $b = 0 \implies$ ovo je jednačina kod koje promenljive mogu da se razdvoje

b) $b \neq 0 \implies$ u ovoj jednačini se uvodi smena zavisno promenljive y:

$$\begin{aligned} ax + by &= z \\ by &= z - ax \\ y &= \frac{z - ax}{b} \\ y' &= \frac{z' - a}{b} \\ y' &= g(z) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{z' - a}{b} &= g(z) \\ z' &= bg(z) + a \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= bg(z) + a \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}z}{bg(z) + a} \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{bg(z)+a} &= \int \mathrm{d}x + c \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}z}{bg(z)+a} = x + c}_{\text{Rešavanjem dobija se opšte rešenje}}$$

3.2.3 Homogena diferencijalna jednačina prvog reda

Opšti izraz:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

gde je funkcija f definisana na intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine. I $f(u) \not\equiv u \implies$ nije identičko preslikavanje
Opšte rešenje:

$$\begin{aligned} z &= \frac{y}{x} \\ y &= xz \\ y' &= z + z'x \\ y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z'x + z &= f(z) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x &= f(z) - z \\ \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + c \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z} = \ln|x| + c}_{\text{Rešavanjem dobija se opšte rešenje}}$$

3.2.4 Diferencijalna jednačina prvog reda oblika $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Opšti izraz:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

gde je funkcija f definisana i neprekidna na nekom intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine
Opšte rešenje:

a) $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ - Nije poželjno da istovremeno budu jednake nuli.

b) $a_1 = a_2 = 0 \vee b_1 = b_2 = 0 \vee a_1 = b_2 = 0 \vee b_1 = a_2 = 0 \implies$ Diferencijalna jednačina kod koje promenljive mogu da se razdvoje.

c) $c_1 = c_2 = 0 \implies$ Homogena diferencijalna jednačina.

d) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \implies \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \implies$ Koeficijenti a_1, a_2, b_1 i b_2 su proporcionalni $\implies$ uvođenjem smene $a_1x + b_1y = z$ svodi se na diferencijalnu jednačinu oblika $y' = g(a_1x + b_1y)$ koju znamo da rešimo.

e) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \implies$ Koeficijenti a_1, a_2, b_1 i b_2 nisu proporcionalni $\implies$ smetaju c_1 i c_2, pa se uvode dve smene:

1) smena nezavisno promenljive $x = u + \alpha$
2) smena zavisno promenljive $y = v + \beta$

gde su α i β konstante, rešenja sistema linearnih jednačina:

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{aligned}\right\} a_i,\ b_i,\ c_i \text{ su koeficijenti iz polazne jednačine}$$

det $\neq 0 \implies$ sistem ima jedinstveno rešenje, α i β daju nove promenljive i jednačina se svodi na homogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda.

3.2.5 Linearna diferencijalna jednačina prvog reda

Opšti izraz:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

gde su P i Q funkcije definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine
Opšte rešenje:

a) Homogena
$Q(x) = 0 \implies$ promenljive mogu da se razdvoje

$$\begin{aligned} -P(x)y &= y' \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -P(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int P(x)\,\mathrm{d}x + c \\ \ln|y| &= -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln c \end{aligned}$$

$$y = ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

b) Nehomogena

$$\begin{aligned} y' + P(x)y &= Q(x) \\ y'e^{\int P(x)\mathrm{d}x} + yP(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} &= Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \\ \left(ye^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)' &= Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \int \left(ye^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)' &= \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \\ ye^{\int P(x)\mathrm{d}x} &= \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c \end{aligned}$$

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(c + \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)$$

Košijev problem, opšte rešenje za linearnu nehomogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} Q(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)$$

3.2.6 Bernulijeva diferencijalna jednačina

Opšti izraz:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m$$

gde je $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, funkcije P i Q definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se rešava jednačina.

Opšte rešenje:

$$\begin{aligned} z &= y^{1-m} \\ z' &= (1-m)y^{-m}y' \\ y' + P(x)y &= Q(x)y^m \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{y'}{y^m} + P(x)y^{1-m} &= Q(x) \\ (1-m)y^{-m}y' + P(x)y^{1-m} &= (1-m)Q(x) \end{aligned}$$

$$z' + z\underbrace{P(x)}_{P_1(x)} = \underbrace{(1-m)Q(x)}_{Q_1(x)}$$

- linearna diferencijalna jednačina prvog reda

3.2.7 Rikatijeva jednačina

Opšti izraz:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

gde su funkcije P, Q i R definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se rešava jednačina.
Opšte rešenje: Izaberimo takvu smenu da uklonimo $R(x)$ i dobijamo Bernulijevu diferencijalnu jednačinu za $m = 2$
$y^2 \implies m = 2 \implies$ potrebno nam je jedno partikularno rešenje, od toga polazimo (y_p)
$y = y_p + \dfrac{1}{z} \implies$ smena zavisno promenljive
$y' = y_p' - \dfrac{z'}{z^2} \implies$ izvod nije nula

$$\begin{aligned} y_p' - \frac{z'}{z^2} &= ((y_p)^2 + \frac{2y_p}{z} + \frac{1}{z^2})P(x) + Q(x)(y_p + \frac{1}{z}) + R(x) \\ y_p' - \frac{z'}{z^2} &= y_p^2P(x) + 2P(x)\frac{y_p}{z} + \frac{P(x)}{z^2} + Q(x)y_p + \frac{Q(x)}{z} + R(x) \\ y_p' &= P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x) \\ z' &= -2zP(x)y_p - P(x) - zQ(x) \implies \\ z' + 2zP(x)y_pz + zQ(x) &= -P(x) \\ z' + z\underbrace{(2P(x)y_p + Q(x))}_{P_1} &= \underbrace{-P(x)}_{Q_1} \end{aligned}$$

- linearna diferencijalna jednačina prvog reda

3.3 Diferencijalne jednačine drugog reda

Opšti izraz:

$$F(x, y, y', y'')$$

gde je F funkcija definisana i dva puta diferencijabilna na nekom intervalu I na kom se jednačina rešava.

3.3.1 Nepotpune diferencijalne jednačine drugog reda

1. slučaj $F(y', y'') = 0$ ili $y'' = f(y')$
- uvodi se smena zavisno promenljive $p = y$

$$\begin{aligned} y' &= p \\ y'' &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ y'' &= f(p) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= f(p) \\ \int \frac{\mathrm{d}p}{f(p)} &= x + c \implies \varphi(x, p, c_1) = 0 \end{aligned}$$

Dolazi se do diferencijalne jednačine prvog reda $\varphi(x, y, c_1) = 0$, i na kraju rešavanjem te diferencijalne jednačine dolazi se do: $\psi(x, y, c_1, c_2) = 0$

2. slučaj $F(x, y, y'')$
- uvodi se smena zavisno promenljive $p = y'$

$$\begin{aligned} y' &= p \\ y'' &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \end{aligned} \implies F(x, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}) = 0$$

Dolazi se do diferencijalne jednačine prvog reda $\varphi(x, y', c_1) = 0$, i na kraju rešavanjem te diferencijalne jednačine dolazi se do: $\psi(x, y, c_1, c_2) = 0$

3. slučaj $F(y, y', y'') = 0$
- uvodi se smena zavisno promenljive $y' = p$ (gubimo x tokom smene)

$$\begin{aligned} y' &= p \\ y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = y'\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} &= p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \end{aligned} \implies F(y, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}) = 0$$

Dolazi se do diferencijalne jednačine prvog reda $\varphi(y, p, c_1) = 0$, i na kraju rešavanjem te diferencijalne jednačine dolazi se do: $\psi(x, y, c_1, c_2) = 0$

3.4 Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

Definicija 7. *Diferencijalna jednačina oblika $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y = F(x)$ naziva se **linearna diferencijalna jednačina n-tog reda**. Pri tome podrazumevamo da su $f_i(x)$ i $F(x)$ definisane i neprekidne na posmatranom intervalu I.*

1.) $F(x) \equiv 0$ - homogena jednačina

2.) $F(x) \not\equiv 0$ - nehomogena jednačina

Napomena: *ako su $f_i(x)$ gde je $i = \overline{1, n}$ konstante jednačina je sa konstantnim koeficijentima (u suprotnom je sa gunkcionalnim).*

3.4.1 Homogena linearna diferencijalna jednačina

Definicija 8. *$L^n(y) = y^n + d_1(x)y^{n-1} + \ldots + f_n(x)y = 0$ naziva se **linearni diferencijalni operator n-tog reda***

Jedno rešenje (trivijalno) diferencijalne jednačine $L^n(y)$ je $y = 0$, ali mi tražimo netrivijalna. Takođe se vidi: ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja, tada je i $c_1 y_1(x) + x_2 y_2(x)$ takođe rešenje date diferencijalne jednačine. Što se može uopštiti na proizvoljan broj rešenja.

$$L^n(y_1) = 0 \land L^n(y_2) = 0 \tag{1}$$

$$L^n(y_1 c_1 + y_2 c_2) = c_1 L^n(y_1) + x_2 L^n(y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \tag{2}$$

Definicija 9. *Funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ definisane na intervalu I mogu biti:*

1.) Linearno zavisne na I

- ako postoje konstante $c_2, c_2, \ldots, c_n$ takve da $\sum_{k=0}^{n} c_k^2$ ∅ i da važi da je $\forall x \in I) c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$

2.) Linearno nezavisne na I
- u suprotnom

Napomena: *u slučaju $n = 2$ linearna nezavisnost se sodi na $\frac{y_1}{y_2} \not\in onst$*

Teorema 1. *Ako su $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ rešenja jednačine $L^n(y) = 0$ i ako su funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ linearno nezavisne, tada je opšte rešenje date jednačine:*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

gde su c1 za $i = \overline{1, n}$ konstante

3.4.2 Homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

Opšti izraz:

$$L^2(y) = 0 \ \vee \ y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Teorema 2. *Liuvilova formula: Ako je $y_1(x)$ jedno netrivijalno partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine $y'' + P(x)y + Q(x)y = 0$ tada je:*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

takođe partikularno rešenje date jednačine linearno nezavisno od y_1.

Dokaz.

$$\begin{gathered} y = y_1 z \\ y' = y_1' z + y_1 z' \\ y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + z'' y_1 \\ y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' + P(x)y +_1 z + P(x)y_1 z' + Q(x)y_1 z = 0 \\ (y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1) + z'(2y_1' + P(x)y_1) + z'' y_1 = 0 \\ y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \text{ partikularno, netrivijalno} \\ z'' + z'(\frac{2y_1'}{y_1}) + P(x)) = 0 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} z' &= x_1 e^{-\int (\frac{2y_1'}{y_1} + P(x))\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= c_1 e^{-2\ln|y_1| - \int P(x)\,\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= c_1 e^{\ln \frac{1}{y_1^2} - \int P(x)\,\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= c_1 \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \\ \mathrm{d}z &= \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\ z &= \int \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c_2 \\ y &= y_1 c_2 + c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

□

3.4.3 Nehomogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda

$$L^n(y) = F(x)$$

U slučaju $n = 2$ snižavanje reda pomožu jednog partikularnog rešenja dovodi do linearne nehomogene jednačine prvog reda.

Teorema 3. *Neka je y_h opšte ređenjee homogene jednačine $L^n(y) = 0$ i y_p jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine $L^n(y) = F(x)$. Tada je opšte rešenje nehomogene jednačine $L^n(y) = F(x)$ dato sa*

$$y = y_h + y_p$$

Dokaz. Neposredno se proverava da je $L^n(y_h + y_p) = L^n(y_h) + L^n(y_p) = 0 + F(x) = F(x)$ jer je $F(x) = L^n(y_p)$ i $0 = L^n(y_h)$ □

Teorema 4. ***Metod varijacije konstanti (Lagranžov):*** *Neka je $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ opšte rešenje homogene jednačine $L^n(y) = 0$ tada je opšte rešenje nehomogene jednačine $L^n(y) = F(x)$ dato sa $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$ gde su $c_1(x)$, $c_2(x)$, …, $c_n(x)$ funkcije čiji se izvodi nalaze rešavanjem sistema jednačina:*

$$\begin{gathered} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n)}(x) = F(x) \end{gathered}$$

a zatim se same funkcije $c_1(x)$, $c_2(x)$, …, $c_n(x)$ nalaze integracijom:

$$\int c_1'(x)\,\mathrm{d} = c_1(x) + c_1^*$$
$$\int c_2'(x)\,\mathrm{d} = c_2(x) + c_2^*$$
$$\vdots$$
$$\int c_n'(x)\,\mathrm{d} = c_n(x) + c_n^*$$

Opšte rešenje se dobija kao $y = y_p + y_h$ gde je jedno partikularno rešenje $y_p = y_1c_1(x) + y_2c_2(x) + \ldots + y_nc_n(x)$.

3.4.4 Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima

Definicija 10. *Homogena jednačina $L^n(y) = y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = 0$ gde su $p_i \in \mathbb{R}$ za $i = \overline{1,n}$ konstante, naziva se* ***homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima***

Ovaj tip diferencijalnih jednačina rešava se traženjem partikularnog rešenja u obliku $y = e^{\lambda x}$. Zamenom u jednačinu dobijamo $e^{\lambda x}(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n) = 0$

Definicija 11. *Algebarska jednačina $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$ zove se karakteristična jednačina prethodno navedene diferencijalne jednačine.*

Karakteristična jednačina ima n korena i svakom korenu odgovara po jedno partikularno rešenje, po sledećim pravilima:

1) Svakom realnom, jednostavnom korenu λ odgovara jedno partikularno rešenje $y_p = e^{\lambda x}$
2) Svakom realnom korenu λ kada $k > 1$ odgovara k partikularnih rešenja $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, …, $x^{k-1}e^{\lambda x}$
3) Svakom paru kompleksnih, jednostavnih korena $\alpha \pm i\beta$ odgovaraju partikularna rešenja $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$.
4) Svakom paru kompleksnih korena $\alpha \pm i\beta$ kada $k > 1$ odgovara $2k$ partikularnih rešenja:
$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

Primenom ovih pravila na sve korene karakteristične jednačine dobija se skup od ukupno n linearno nezavisnih rešenja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ diferencijalne jednačine pa je opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$

Definicija 12. *Nehomogena jednačina $L^n(y) = y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = F(x)$ gde su $p_i \in \mathbb{R}$ za $i = \overline{1,n}$ konstante, naziva se* ***nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima***

Rešavanje nehomogene jednačine sastoji se iz 2 koraka:

1) Reši se homogena jednačina (odredi se y_h)
2) Određuje se opšte rešenje nehomogene jednačine metodom varijacije konstantni

Napomena: ako je funkcija $F(x)$ specijalnog oblika (izvodi su istog oblika kao sama funkcija - polinomska/eksponencijalna/trigonometrijska funkcija, ili su zbirovi/proizvodi tih funkcija), partikularno rešenje y_p može se odrediti metodom neodređenih koeficijenata (više o tome u 3.4.5) tada je $y = y_h + y_p$

3.4.5 Metod neodređenih koeficijenata

Metod neodređenih koeficijenata astoji se u tome da se partikularno rešenje nehomogene jednačine pretpostavi u obliku koji je sličan obliku funkcije $F(x)$ ali sa neodređenim koeficijentima koji se određuju zamenom u diferencijalnu jednačinu. Kada se ovako nađe partikularno rešenje y_p, onda je, prema teoremi xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx, $y = y_h + y_p$. Ovaj metod primenjuje se samo u slučaju kada je $F(x)$:

1) $F(x) = e^{\alpha x} Pm(x)$ gde je $Pm(x)$ - polinom stepena m

   a) α nije koren karakteristične jednačine $y_p = e^{\alpha x} Qm(x)$

   b) α je koren reda k, $k \geq 1$ karakteristične jednačine $y_p = x^k e^{\alpha x} Qm(x)$

   Koeficijenti polinoma $Qm(x)$ nalaze se zamenom u nehomogenu diferencijalnu jednačinu, metodom neofređenih koeficijenata.

2) $F(x) = e^{\alpha x}(Pm_1(x) \cos \beta x + Pm_2???(x) \sin \beta x)$

   a) $\alpha \pm i\beta$ nije koren karakteristične jednačine $y_p = e^{\alpha x}(Qm(x) \cos \beta x + Rm(x) \sin \beta x) \quad dgQmdgRm = maxm_1, m_2$

   b) $\alpha \pm i\beta$ je koren reda k, $k \leq 1$ karakteristične jednačine $y_p = x^k e^{\alpha x}(Qm(x) \cos \beta x + Rm(x) \sin \beta x) \quad dgQmdgRm = maxm_1, m_2$

   koeficijenti polinoma $Qm(x)$, $Rm(x)$ nalaze se zamenom u nehomogenu diferencijalnu jednačinu metodom neodređenih koeficijenata

4 Kombinatorika

4.1 Osnovni kombinatorni principi

1.) Princip jednakosti
Ako između dva konačna skupa A i B postoji bijekcija $f : A \to B$ tada skupovi A i B imaju isti broj elemenata, tj.

$$|A| = |B|$$

2.) Princip zbira Ako su A i B konačni, disjunktni skupovi, tada je

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Napomena: Ili treba da asocira na zbir. Dakle kada su neka dva elementa u odnosu $\vee$ koristi se princip zbir

3.) Princip proizvoda Ako su A i B konačni skupovi, tada je

$$|A \times B| = |A||B|$$

4.2 Permutacije, varijacije i kombinacije

Definicija 1. ***Permutacija*** *skupa* $x_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *je bilo koja uređena* n*-torka različitih elemenata tog skupa*

Primer 1. *Permutacije skupa* $x_n = 1, 2, 3$ *su:*

$$\begin{array}{cc} (1,2,3) & (3,2,1) \\ (2,3,1) & (2,1,3) \\ (3,1,2) & (1,3,2) \end{array}$$

jer na prvom mestu može da bude bilo koji od članova skupa (3 mogućnosti), na drugom mestu mogu biti svi elementi osim jednog koji je na prvom mestu (2 mogućnosti), i na poslednjem samo jedan preostali element (1 mogućnost).
Ukupno mogućnosti: $3 * 2 * 1 = 3! = 6$

Teorema 1. ***Broj permutacija*** *skupa od n elemenata je*

$$n!$$

Definicija 2. ***Varijacija*** *k-te klase skupa x_n je bilo koja uređena k-torka različirih elemenata iz skupa x_n*

Primer 2. *Varijacije 3. klase skupa $x_n = a, b, c, d$ su:*

$$\begin{array}{cccc}
(a,b,c) & (b,a,c) & (c,a,b) & (d,a,b) \\
(a,b,d) & (b,a,d) & (c,a,d) & (d,a,c) \\
(a,c,b) & (b,c,a) & (c,b,a) & (d,b,a) \\
(a,c,d) & (b,c,d) & (c,b,d) & (d,b,c) \\
(a,d,b) & (b,d,a) & (c,d,a) & (d,c,a) \\
(a,d,c) & (b,d,c) & (c,d,b) & (d,c,b)
\end{array}$$

jer na prvom mestu može da bude bilo koji od članova skupa (4 mogućnosti), na drugom mestu mogu biti svi elementi osim jednoh koji je na prvom mestu (3 mogućnosti), i na poslednjem može biti neki od preostala dva (2 mogućnosti).
Ukupno mogućnosti: $4 * 3 * 2 = \frac{4!}{1!} = 24$

Teorema 2. ***Broj varijacija*** *k-te klase skupa od n elemenata je*

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definicija 3. ***Kombinacija*** *k-te klase skupa x_n je bilo koji njegov podskup sa k elemenata*

Primer 3. *Kombinacije 2. klase skupa $x_n = a, b, c, d$ su:*

$$\begin{array}{ccc}
\{a,b\} & \{a,d\} & \{b,d\} \\
\{a,c\} & \{b,c\} & \{c,d\}
\end{array}$$

jer jedan član može da bude bilo koji (4 mogućnosti), a drugi može da bude neki od preostalih (3 mogućnosti), međutim pošto redosled nije bitan, a broj permutacija skupa gde je $n = 2$ je $2! = 2 * 1 = 2$, ukupan broj kombinacija je 2 puta manji od broja varijacija 2. klase skupa x_n.
Ukupno mogućnosti: $\frac{4*3}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$
Kombinacije 3. klase skupa x_n su:

$$\{a,b,c\} \quad \{a,b,d\} \quad \{b,c,d\}$$

jer jedan član može da bude bilo koji (4 mogućnosti), drugi može da bude neki od preostalih (3 mogućnosti) i poslednji može da bude neki od preostala 2 (2 mogućnosti), međutim pošto redosled nije bitan, a broj permutacija skupa gde je $n = 3$ je $3! = 6$, ukupan broj kombinacija je 6 puta manji od broja varijacija 3. klase skupa x_n.
Ukupno mogućnosti: $\frac{4*3*2}{6} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4$

Teorema 3. ***Broj kombinacija*** *k-te klase skupa od n elemenata je*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1)9}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

4.3 Varijacije i kombinacije sa ponavljanjem

Definicija 4. ***Varijacija sa ponavljanjem*** *k-te klase skupa x_n je bilo koja uređena k-torka njegovih elemenata*

Primer 4. *Varijacije sa ponavljanjem 2. klase skupa* $x_n = \{a, b, c, d\}$ *su:*

$$\begin{matrix} (a,a) & (b,a) & (c,a) & (d,a) \\ (a,b) & (b,b) & (c,b) & (d,b) \\ (a,c) & (b,c) & (c,c) & (d,c) \\ (a,d) & (b,d) & (c,d) & (d,d) \end{matrix}$$

jer da prvom mestu može biti bilo koji element (4 mogućnosti), a i na drugom mestu može biti bilo koji element jer su ponavljanja dozvoljena (4 mogućnosti).
Ukupno mogućnosti: $4 * 4 = 4^2 = 16$

Teorema 4. ***Broj varijacija sa ponavljanjem*** *k-te klase skupa od n elemenata je*

$$V_n^k = n^k$$

Definicija 5. *Dato je ukupno* n *objekata* k *različitih tipova,* $n_i (i = \overline{1,k})$ *je broj ponavljanja i-tog tipa objekta,* $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. ***Permutacija sa ponavljanjem*** *navedene familije je svaki raspored tih elemenata.*

Primer 5. *Neke od permutacija sa ponavljanjem familije* a, a, b, b, b, c *su:*

$$aabbbc,\ baabbc,\ baabcb,\ \ldots$$

Ukupan broj permutacija sa ponavljanjem je, slično kao kod kombinacija, jednak broju permutacija podeljenom sa brojem istih elemenata svakog tipa, jer se ne može odrediti razlika između dve permutacije gde su zamenjena mesta elementima istog tipa. Ukupan broj mogućnosti: $\frac{6!}{2!3!1!} = 60$

Teorema 5. ***Broj permutacija sa ponavljanjem*** *date familije je*

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Definicija 6. ***Kombinacija*** k ***te klase sa ponavljanjem*** *skupa* x_n *je bilo koja familija sastavljena od tačno* k *ne obavezno različitih elemenata skupa* x_n

Primer 6. *Kombinacije sa ponavljanjem 2. klase skupa* $x_n = a, b, c, d$ *su:*

$$\begin{matrix} (a,a) & (a,b) & (a,c) & (a,d) \\ & (b,b) & (b,c) & (b,d) \\ & & (c,c) & (c,d) \\ & & & (d,d) \end{matrix}$$

Po principu jednakosti možemo naći bijekciju skupa x_n *koju možemo lakše da prebrojimo. Jedan način koji dosta olakšava ovaj problem je da zamislimo da postoje 4 polja (jer postoje 4 elementa u skupu* x_n*) koja su odvojena pomoću 3 crtice. Pošto su kombinacije 2. klase, imamo i 2 kružića koja treba da se rasporede u polja (s tim da u isto polje može da se stavi i više kružića, ili ni jedan). Na taj način dobijamo skup od 5 elemenata (3 crtice i 2 kružića). Jedino što preostaje je da rasporedimo crtice i kružiće proizvoljno (jer ne postoje ograničenja). Broj mogućnosti je sada odabir 2 mesta od 5 mogućih za kružiće dok se ostala popunjavaju crticama (ili obrnuto). Naravno, isti princip važi i ako je broj klasa veći od broja elemenata skupa (broj kružića veći od broj crtica)*

Definicija 7. *Reprezentacija prirodnoh broja* n *u obliku* $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ *gde su* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ *naziva se* ***podela*** *ili* ***razbijanje*** *tog broja, ili preciznije* k***-podela***

Definicija 8. ***Kompozicija*** *broja* n *je bilo koja uređena podela, tj. podela kod koje je poredak bitan.*

Definicija 9. ***Particija*** *broja* n *je bilo koja neuređena podela, tj. podela kod koje poredak sabiraka nije bitan.*

Primer 7. *Particije i kompozicije broja* $n = 4$ *su:*

Kompozicije:	*Particije:*
4	4
$1+3,\ 3+1,\ 2+2$	$1+3,\ 2+2$
$1+1+2,\ 1+2+1,\ 2+1+1$	$1+1+2$
$1+1+1+1$	$1+1+1+1$

Primer 8. *Kompozicije broja $n = 7$ koje imaju $k = 4$ sabiraka mogu se prebrojati pomoću crtica i kružića. Zamislimo 7 kružića i između njih 6 polja, ako u neko polje stavimo crticu to je kao da smo stavili plus na to mesto. Samim tim, pošto želimo da odredimo broj kompozicija za 4 sabirka stavljam 3 crtice. Broj načina na koje ovo može da se uradi je jednak odabiru 3 mesta od 6.*

Teorema 6. *1. Broj kompozicija broja n koje imaju k sabiraka je $\binom{n-1}{k-1}$*

2. Uupan broj svih kompozicija broja n je 2^{n-1}

Dokaz. 1. Postoji n kružića $\implies$ postoji $(n-1)$ mesta na koja mogu da se stave crtice, kojih ima $(k-1)$. Samim tim ukupan broj mogućnosti je $\binom{n-1}{k-1}$

2. Ukupan broj kompozicija se može dobiti na dva načina:

   a) U svakom polju može da se pojavi crtica, ili ne mora, samim tim imamo 2 mogućnosti za svako polje (kojih ima $(n-1)$) pa je ukupan broj kompozicija $2^{(n-1)}$

   b) Ukupan broj kompozicija je $\sum_{k=1} n\binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0} n-1 = 2^{n-1}$

□

5 Bulova algebra

Definicija 1. *Skup B sa najmanje 2 elementa na kome su definisane 2 binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ je* ***Bulova algebra*** *ako važe sledeće aksiome:*

B_1: *Komutativnost*

$$(\forall a, b \in B)\ a \vee b = b \vee a$$
$$a \wedge b = b \wedge a$$

B_2: *Asocijativnost*

$$(\forall a, b, c \in B)\ (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

B_3: *Distributivnost*

$$(\forall a, b, c \in B)\ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

B_4: *Egzistencija neutralnoh elementa*

$$(\exists 0 \in B)(\forall x \in B)\ x \vee 0 = x$$
$$(\exists 1 \in B)(\forall x \in B)\ x \wedge 1 = x$$

B_5: *Egzistencija komplemnta*

$$(\forall x \in B)(\exists \overline{x} \in B)\ x \wedge \overline{x} = 0$$
$$x \vee \overline{x} = 1$$

Bulova algebra se označava sa $B = (B, \vee, \wedge)$ ili $B = (B, \vee, \wedge, \neg)$.
Napomena: *Ovaj sistem aksioma nije minimalan.*

5.1 Primeri Bulove algebre

5.1.1 Binarna (dvočlana) Bulova algebra

$B = \{0, 1\}$ i operacije $\wedge, \vee, \neg$ su definisane tablicama:

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

5.1.2 Algebra skupova

Definicija 2. *Algebra* $(\mathbb{P}(u), \cup, \cap)$ *gde je* $\mathbb{P}(I)$ *partitivni skup skupa* I $(I \neq \varnothing)$, $\cup$ *unija,* $\cap$ *presek i* ^{c} *komplement je Bulova algebra.*

Ovo sledi iz osobina koje važe za uniju i presek skupova:

1. $A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $A \cup \varnothing = A \quad A \cap I = A$
5. $A \cup A^c = I \quad A \cap A^c = \varnothing$

Teorema 1. *Za svaku konačnu Bulovu algebru* $V = (V, \vee, \wedge)$ *postoji skup* I *i bijekcija* $f : B \to \mathbb{P}(I)$ *tako da važe relacije:*

$$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$$
$$f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$$

Posledica 1.1.
- *Stounova teorema tvrdi da je svaka konačna Bulova algebra izomorfna nekoj algebri skupova* $(\mathbb{P}(I), \cup, \cap)$
- *Ova teorema omogućava da se u dokazivanju rezultata Bulove algebre koriste metode iz teorije skupova*
- *Bulova algebra može imati najviše* 2^n *elemenata, gde je* $n \in \mathbb{N}$, *jer je* $|\mathbb{P}(I)| = 2^n$, *za* $|I| = n$.

5.2 Princip dualnosti

Definicija 3. *Ako je neka jednakost teorema Bulove algebre, tada zamenom operacija* $\wedge$ *i* $\vee$ *i elemenata* 0 *i* 1 *u toj relaciji dolazimo do tačne jednakosti. Ta jednakost naziva se* ***dualna teorema*** *date teoreme*

5.3 Neke važnije teoreme Bulove algebre

Teorema 2. ***1.)*** *Idempotentnost* $(\forall a \in B)\ a \vee a = a \quad a \wedge a = a$

2.) $(\forall a \in B)\ a \vee q = q \quad a \wedge 0 = 0$

3.) *Apsorpcija* $(\forall a, b \in B)\ a \vee (a \wedge b) = a \quad a \wedge (a \vee b) = a$

4.) *Involucija* $(\forall a \in B)\ \overline{(\overline{a})} = a$

5.) *Za neutralne elemente* 0 *i* 1 *važi* $\overline{0} = 1 \quad \overline{1} = 0$

6.) *U Bulovoj algebri elementi* 0 *i* 1 *su jedinstveni*

7.) *U Bulovoj algebri svaki element* $a \in B$ *ima jedinstveni komplement* $\overline{a}$

8.) *De Morganovi zakoni* $(\forall a, b \in B)\ \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{v} \quad \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

Dokaz. **1.)**

2.)

$$
\begin{aligned}
& a \vee 1 = 1 \\
& a \vee 1 = (a \vee 1) && (B_4) \\
& = 1 \wedge (a \vee 1) && (B_1) \\
& = (a \vee \overline{a}) \wedge (a \vee q) && (B_5) \\
& = a \vee (\overline{a} \wedge 1) && (B_3) \\
& = a \vee \overline{a} && (B_4) \\
& = 1 && (B_5)
\end{aligned}
$$

3.)

4.)

5.)
?? □

5.4 Binarna Bulova algebra

5.4.1 Bulovi izrazi u binarnoh Bulovoj algebri

$B = (\{0,1\}, \vee, \wedge, \neg)$

Definicija 4. *U skupu* $\{0,1\}$ *definišemo izraz:*

$$x^a = \begin{cases} \overline{x}, & a = 0 \\ x, & a = 1 \end{cases}$$

Definicija 5. *Bulovi izrazi su:*

1) Bulove konstante 0, 1
Bulove promenljive x, y, z,...

2) Ako su A *i* V *Bulovi izrazi, onda su i* $A \vee B$, $A \wedge B$, $\overline{A}$ *Bulovi izrazi*

3) Bulovi izrazi se mogu dobiti konačnim brojem primena tačaka 1) i 2)

Definicija 6. ***Elementarna konjukcija (EK)*** *promenljivih* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *je Bulov izraz oblika:*

$$x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \wedge x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}^{\alpha_{i_m}}$$

gde $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *i* $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_m} \in 0, 1$

Definicija 7. ***Kanonička elementarna konjukcija (KEK)*** *promenljivih* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *je Bulov izraz oblika:*

$$x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$$

gde $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n} \in 0, 1$ ***Napomena:*** *učestvuju sve promenljive.*

Definicija 8. ***Disjunktivna forma (DF)*** *je Bulov izraz oblika:*

$$\mathrm{EK_1} \vee \mathrm{EK_2} \vee \ldots \vee \mathrm{EK_m}$$

gde su $\mathrm{EK_1}, \mathrm{EK_2}, \ldots, \mathrm{EK_m}$ *elementarne konjukcije.*

Definicija 9. ***Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF)*** *u odnosu na promenljive* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *je Bulov izraz oblika:*

$$\mathrm{KEK_1} \vee \mathrm{KEK_2} \vee \ldots \vee \mathrm{KEK_m}$$

gde su $\mathrm{KEK_1}, \mathrm{KEK_2}, \ldots, \mathrm{KEK_m}$ *kanoničke elementarne konjukcije.*

Definicija 10. ***Elementarna disjunkcija (ED)*** *promenljivih* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *je Bulov izraz oblika:*

$$x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \vee x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \vee \ldots \vee x_{i_m}^{\alpha_{i_m}}$$

gde $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *i* $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_m} \in 0, 1$

Definicija 11. ***Kanonička elementarna disjunkcija (KED)*** *promenljivih* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *je Bulov izraz oblika:*

$$x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}$$

gde $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n} \in 0, 1$
Napomena: *učestvuju sve promenljive.*

Definicija 12. ***Konjuktivna forma (KF)*** *je Bulov izraz oblika:*

$$\mathrm{ED_1} \wedge \mathrm{ED_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{ED_m}$$

gde su $\mathrm{ED_1}, \mathrm{ED_2}, \ldots, \mathrm{ED_m}$ *elementarne disjunkcije.*

Definicija 13. ***Savršena konjuktivna normalna forma (SKNF)*** *u odnosu na promenljive* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *je Bulov izraz oblika:*

$$\mathrm{KED_1} \wedge \mathrm{KED_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{KED_m}$$

gde su $\mathrm{KED_1}, \mathrm{KED_2}, \ldots, \mathrm{KED_m}$ *kanoničke elementarne disjunkcije.*

5.5 Bulove funkcije

Definicija 14. *Preslikavanje* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *naziva se Bulova funkcija.*
Napomena: *Bulove funkcije najčešće se zadaju preko Bulovih izraza ili pomoću zablica.*

Teorema 3. *Broj različitih Bulovih funkcija* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *sa* n *promenljivih je* 2^{2^n}

Dokaz. Broj mesta u koloni jednak je broju redova. Pošto postoji n promenljivih i svaka može da ima neku od vrednosti 0 ili 1 broj redova je 2^n. U svakom redu funkcija može da ima neku od vrednosti 0 ili 1, što su dve mogućnosti, pa je ukupan broj funkcija jednak $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{2^n} = 2^{2^n}$. □

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	$\cdots$	0	y_1
0	0	$\cdots$	1	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	y_{2^n}

Teorema 4. *Svaka Bulova funkcija zadata pomoću Bulovog izraza može se izraziti pomoću tablice.*

Teorema 5. *Za svaku Bulovu funkciju, izuzev funkcije koja je identički jednaka nuli važi:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_2) = \vee \left[f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \wedge x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n} \right]$$

gde je $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in 0, 1$.

Teorema 6. *Za svaku Bulovu funkciju, izuzev funkcije koja je identički jednaka nuli važi:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_2) = \wedge \left[f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \vee x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n} \right]$$

gde je $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in 0, 1$.

5.6 Baze skupa Bulovih funkcija

Definicija 15. *Skup Bulovih funkcija* $\mathbb{F}$ *je* **generatorski skup** *skupa svih Bulovih funkcija ako se pomoću funkcija iz* $\mathbb{F}$ *mogu izraziti sve Bulove funkcije.*

Primer 1. *Skup* $\{\wedge, \vee, \neg\}$ *i svaki njegov nadskup su generatorski skupovi*

Definicija 16. *Skup Bulovih funkcija* $\mathbb{U}$ *je* **baza** *skupa svih Bulovih funkcija ako je:*

1) $\mathbb{U}$ *generatorski skup skupa svih Bulovih funkcija*

2) Nijedan pravi podskup skupa $\mathbb{U}$ *nije generatorski skup*

Primer 2. *Baze skupa svih Bulovih funkcija su:*

$$\{\vee, \neg\} \quad \{\wedge, \neg\} \quad \{\Rightarrow, \neg\} \quad \{\downarrow\} \quad \{\uparrow\}$$

Dokaz. Dovoljno je za skup $\{\downarrow\}$ dokazati da je generatorski skup.

$$\overline{x} = x \downarrow y = \overline{x \vee x} = x \downarrow$$
$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$$
$$x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{x} \downarrow \overline{y} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$

□

Definicija 17. *Iskazna formula koja za sve vrednosti iskaznih slova koja se u njoj pojavljuju dobija vrednost* 1 *naziba se* ***tautologija****.*