MATEMATIKA 2

Skripta

Marko Skakun

19. april 2017

Napomena: u slučaju da pronađete neku grešku, ili imate neku preporuku pošaljite je na mail: skalesms@gmail.com

Sadržaj

1 Neodređeni integrali

1.1 Uvod

Definicija 1. *Neka je funkcija f definisana na proizvoljnom intervalu $I = (a, b) \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Ako postoji funkcija $F(x)$ koja je definisana na I i za koju važi*

$$(\forall x \in I)\ F'(x) = f(x)$$

tada kažemo da je $F(x)$ ***primitivna funkcija*** *funkcije $f(x)$ na intervalu I.*

Teorema 1. *Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije f na intervalu I, tada je i $F(x) + c; \quad c \in \mathbb{R}$ takođe primitivna funkcija funkcije f na intervalu I.*

Dokaz.

$$(\forall x \in I)(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

□

Teorema 2. *Ako su $F_1(x)$ i $F_2(x)$ neke dve primitivne funkcije funkcije f na intervalu I, tada:*

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in I)\ F_1(x) - F_2(x) = c$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x) \\
&\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \\
&(\forall x \in \mathbb{R})\ \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = c
\end{aligned}$$

* Teorema iz diferencijalnog računa $(\exists c \in \mathbb{R})(\varphi(x) = c)$ □

Teorema 3. *Ako je funkcija neprekidna na intervalu I tada ona ima primitivnu funkciju na intervalu I.*

Definicija 2. *Skup svih primitivnih funkcija funkcije f na intervalu I naziva se* ***neodređeni integral*** *funkcije f na intervalu I.*
Oznaka:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x; \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Po dogovoru: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c; \quad c \in \mathbb{R}$

Teorema 4. *Neka funkcije f i g imaju primitivne funkcije na intervalu I, i neka je $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c; \quad c \in \mathbb{R}$, tada važi:*

1. $\mathrm{d}\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)dx$
2. $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \dfrac{d\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)}{dx} = f(x)$
3. $\displaystyle\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + c$

Dokaz. 1. $d\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = d(F(x) + c) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

2. $\left(\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

3. $\displaystyle\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$

□

1.2 Osnovni metodi integracije

1.2.1 Tablica

Tablica neodređenih integrala

1) $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + c; \quad x \neq 0$

3) $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c; \quad a > 0, a \neq 1$

4) $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c$

5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arcctg} x + c_1$

6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c_1; \quad (|x| < 1)$

7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + c = \begin{cases} \operatorname{arsh} x + c & za \, + \\ \operatorname{arch} x + c & za - i \; x > 1 \end{cases}$

8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c = \begin{cases} \operatorname{arth} x + c & za |x| < 1 \\ \operatorname{arcth} x + c & za |x| > 1 \end{cases}$

9) $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$

10) $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$

11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$

13) $\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + c$

14) $\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + c$

15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} \operatorname{th} x + c$

16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + c$

Smenom izvedeni neodređeni integrali

1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| + c$

2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$

1.2.2 Korišćenjem teoreme o linearnosti integrala

Teorema 5. *Ako funkcije f i g imaju primitivne funkcije na intervalu I, i ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada važi sledeće (na intervalu I):*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x + c$$

Dokaz.

$$(\forall x \in I) \left(\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x \right)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

$$(\forall x \in I) \left(\alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x \right)' = \alpha \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x \right)' + \beta \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x \right)' = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

$$\implies \int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x + c$$

□

1.2.3 Metod smene promenljive

Teorema 6. *Neka je data funkcija f koja je neprekidna na intervalu I i neka za funkciju $\varphi : I_1 \to I$ (gde je I_1 interval) važi:*

1. *φ i φ' neprekidne na intervalu I_1*
2. *$(\forall t \in I_1)\varphi'(t) \neq 0$*
3. *$\exists \varphi^{-1}$*

Tada je $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, *smena* $x = \varphi(t);\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$

Dokaz.

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x \right)' = f(x) = L$$

$$\begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} \quad \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \right)' = \frac{d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right)}{dx} =$$

$$= \frac{d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right)}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x) = D$$

$$L = D$$

□

Posledica 6.1. *1) Poznato je* $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$

Traži se $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

$x = \varphi(t)$

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c$

2) Poznato je $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + c_1$

Traži se $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

$x = \varphi(t)$

$t = \varphi^{-1}(x)$

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + c_1$

1.2.4 Svođenje kvadratnog trinoma na kanonski oblik

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2+\frac{2b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)= \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)= \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \\ \text{smena: } x+\frac{b}{2a}&=t \end{aligned}$$

Opšti slučaj:

1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$

2) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

5) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}$

1.2.5 Parcijalna integracija

Teorema 7. *Neka su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne na intervalu I, tada važi:*

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x) + c$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(u(x)v(x)) &= \mathrm{d}u(x)v(x) + u(x)\mathrm{d}v(x) \\ \int \mathrm{d}(u(x)v(x)) &= \int \mathrm{d}u(x)v(x) + \int u(x)\,\mathrm{d}v(x) \\ u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x) &= \int u(x)\,\mathrm{d}v(x) \end{aligned}$$

□

1.2.6 Metod rekurentnih formula

$$\begin{aligned} I(n) &= \int f(x,n)\,\mathrm{d}x \\ I(n-1) &= \int f(x,n-1)\,\mathrm{d}x \\ I(n-2) &= \int f(x,n-2)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Primer 1.

$$\begin{aligned}
&& I(n) &= \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \\
n=1 &: & I(n) &= \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c \\
n=2 &: & I(n) &= ? \\
n=3 &: & I(n) &= ?
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(n) &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\mathrm{d}x - \int \frac{xx}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left[\begin{array}{rl} u(x) = x & du = dx \\ dv(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}dx & v = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(1-n)}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \end{array} \right] = \\
&= \frac{-x}{(1+x^2)^{n-1}}\frac{1}{2(1-n)} + \frac{1}{2(1-n)} \underbrace{\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x}_{I(n-1)} + \underbrace{\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,\mathrm{d}x}_{I(n-1)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&& I(n) &= I(n-1)\left(1+\frac{1}{2(1-n)}\right) - \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} \\
n=1 &: & I(1) &= \operatorname{arctg} x + c \\
n=2 &: & I(2) &= \operatorname{arctg} x\left(1+\frac{1}{2(1-2)}\right) - \frac{x}{2(1-2)(1+x^2)^{1-2}} = \frac{-\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{x(1+x^2)}{2} + c
\end{aligned}$$

1.2.7 Metod neodređenih koeficijenata

Koristi se kada možemo da pretpostavimo analitički oblik primitivne funkcije

Primer 2.

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = (Ax+B)e^x + c \Big/ \frac{d}{dx}$$

-Polinom prvog stepena sa neodređenim koeficijentima A i B

$$\begin{gathered}
xe^x = Ae^x + (Ax+B)e^x \\
xe^x = (Ax+A+B)e^x \\
A = 1 \ \wedge \ A+B = 0 \\
A = 1 \ \wedge \ B = -A = -1 \\
(A,B) = (1,-1) \implies \int xe^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + c
\end{gathered}$$

Primer 3.

$$\begin{gathered}
\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = (Ax^2+Bx+C)e^x + c \Big/ \frac{d}{dx} \\
x^2e^x = (Ax^2+Bx+C+2Ax+B)e^x \\
x^2e^x = (Ax^2+(2A+B)x+B+C)e^x \\
A = 1 \ \wedge \ 2A+B = 0 \ \wedge \ B+C = 0 \\
A = 1 \ \wedge \ B = -2A = -2 \ \wedge \ C = -B = 2 \\
(A,B,C) = (1,-2,2) \implies \int x^2e^x\,\mathrm{d}x = (x^2-2x+2)e^x + c
\end{gathered}$$

1.3 Posebne metode integracije

1.3.1 Integracija racionalnih funkcija

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = ?$$

$R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $\quad dgP_n = n \geq dgQ_m = m \implies R(x)$ je **neprava** racionalna funkcija,
za $n < m \implies R(x)$ je **prava** racionalna funkcija.
Svaka neprava racionalna funkcija može da se prikaže kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije:

$$R(x) = T(x) + \frac{S_l(x)}{Q_m(x)} \quad dgS_l = l < dgQ_m = m$$
$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = \int T(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{S_l(x)}{Q_m(x)}\,\mathrm{d}x$$

Teorema 8. *Svaka prava, nesvodljiva racionalna funkcija može se na jedinstven način razložiti na zbir parcijalnih razlomaka.*

$$\frac{S_l(x)}{Q_m(x)} = \frac{1}{a_m}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}\right)$$

gde je $Q_m(x) = a_m(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\dots(x-x_k)^{r_k}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}$
-Opšti oblik parcijalnih razlomaka:

$$\frac{A}{(x-a)^k};\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m};\ k, m \in \mathbb{N};\ p^2 - 4q < 0$$

1.3.2 Integracija nekih iracionalnih funkcija

1.) $\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)\mathrm{d}x$ gde je $ad - bc \neq 0$

- Ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije smenom:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^{NZS(q_1,q_2,\dots,q_n)}$$

2.) Ojlerove smene: $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$

- Ovaj integral se svodi na integral racionalne funkcije smenom:

I Ojlerova smena:

$$a > 0 \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$$

II Ojlerova smena:

$$c > 0 \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$$

III Ojlerova smena:

$$(x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \neq x_2) \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1) \vee t(x-x_2)$$

Napomena: Ojlerove smene treba izbegavati kada je god to moguće jer dovode do integrala racionalnih funkcija koji nisu baš zgodni za rešavanje

3.) Integracija binomnog diferencijala $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x$

gde su $a, b \in \mathbb{R};\ m, n, p \in \mathbb{Q};\ m = \dfrac{m_1}{m_2};\ n = \dfrac{n_1}{n_2};\ p = \dfrac{p_1}{p_2};\ ab \neq 0;\ np \neq 0$

- Rešenje se može predstaviti elementarnim funkcijama (i to svođenjem na integrale racionalnih funkcija) **samo** u sledećim slučajevima

I Ako je $p \in \mathbb{Z}$

a) za $p > 0$ razlaganje po binomnoj formuli svodi se na zbir tabličnih integrala

b) za $p < 0$ koristi se smena $x = t^{NZS(m_2,n_2)}$

II Ako je $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ koristi se smena $a + bx^n = t^{p_2}$

III Ako je $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ koristi se smena $ax^{-n} + b = t^{p_2}$

4.) U integrale koji sadrže $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ često je pogodno uvesti trigonometrijsku smenu:

a) $\sqrt{a^2 - x^2}$ uvodi se smena $x = a \sin t \quad dx = a \cos t dt \quad t = \arcsin \dfrac{x}{a}$

b) $\sqrt{x^2 + a^2}$ uvodi se smena $x = a \operatorname{tg} t \quad dx = \dfrac{a}{\cos^2 t} dt \quad t = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$

c) $\sqrt{x^2 - a^2}$ uvodi se smena $x = \dfrac{a}{\cos t} \quad dx = \dfrac{a \sin t}{\cos^2 t} dt \quad t = \arccos \dfrac{a}{x}$

Napomena:

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x; \int x^{2n} e^{\pm x^2}\,\mathrm{d}x; \int \cos(x^2)\,\mathrm{d}x; \int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin x}{x^n}\,\mathrm{d}x; \int \frac{\cos x}{x^n}\,\mathrm{d}x; /; \int \frac{e^a x}{x^n}\,\mathrm{d}x; \int \frac{x^n}{\ln x}\,\mathrm{d}x; \ldots$$

Ovo su neke od funkcija koje se ne mogu izraziti preko elementarnih funkcija.

1.3.3 Integracija trigonometrijskih funkcija

Integral oblika $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ gde je $R(\sin x, \cos x)$ racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$ svodi se na integral racinalne funkcije na sledeći način:

1.) Ako je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ uvodi se smena

$$t = \operatorname{tg} x \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

2.) Ako je $R(+\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ uvodi se smena

$$t = \sin x$$
$$dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \cos x = \sqrt{1-t^2}$$

3.) Ako je $R(-\sin x, +\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ uvodi se smena

$$t = \cos x$$
$$dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \sin x = \sqrt{1-t^2}$$

4.) Univerzalna trigonometrijska smena može se uvek primeniti

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

-Napomena: izbegavati univerzalnu trigonometrijsku smenu.

2 Određeni integrali

2.1 Uvod

Definicija 1. *Neka je data funkcija f definisana na segmentu $[a,b]$ gde su $a,b \in \mathbb{R} \wedge a < b$. Uređena m-torka $d = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ takva da je $a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_n \equiv b \ \wedge \ x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$; $i = \overline{0, n-1}$ nazivamo* ***podelom*** *segmenta $[a,b]$*

Definicija 2. *Suma $\sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ naziva se* ***Rimanova (integralna) suma*** *funkcije f na intervalu $[a,b]$ za datu podelu d.*
Oznaka:

$$S(f,d,a,b)$$

Definicija 3. ***Norma*** *podele d je $||d|| = max(x_{i+1} - x_i)$; $i = \overline{0, n-1}$.*
Napomena: *Iz ove definicije sledi da ako $||d|| \to 0$ tada $(\forall i) x_{i+n} - x_i \to 0 \wedge n \to \infty$*

Definicija 4. *Neka je data funkcija f definisana na segmentu $[a,b]$ gde su $a,b \in \mathbb{R} \wedge a < b$. Ako postoji realan broj I takav da važi:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall d) \left(||d|| < \delta(\epsilon) \implies \left| I - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right| < \varepsilon \right)$$

$$\text{tj. } \lim_{||d|| \to 0} S(f,d,a,b) = I$$

tada se broj I naziva ***određeni (Rimanov) integral*** *funkcije f na segmentu $[a,b]$.*
Oznaka:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Definicija 5. *Ako postoji broj $I \in \mathbb{R}$ takav da je $\lim_{||d|| \to 0} S(f,d,a,b) = I$ kažemo da je funkcija f* ***integrabilna*** *na segmentu $[a,b]$.*

2.2 Potrebni i dovoljni uslovi za integrabilnost funkcija

Definicija 6. *(Darbuove sume funkcije f na segentu $[a,b]$)*
Neka je funkcija f ograničena na segmentu $[a,b]$. Ako segment $[a,b]$ podelimo tačkama $a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_n \equiv b$ i formiramo sume

$$\underline{S}(f,d,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+q} - x_i) \quad i \quad \overline{S}(f,d,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+q} - x_i)$$

gde m_i i M_i označavaju infinum i supremum funkcije f na segmentu $[x_i, x_{i+1}]$; $i = \overline{0, n-1}$, $\underline{S}$ i $\overline{S}$ se nazivaju ***donja*** *i* ***gornja Darbuova suma*** *funkcije f na segmentu $[a,b]$.*
Napomena: *Ako je f neprekidna funkcija na $[a,b]$ onda f na segmentima $[x_i, x_{i+1}]$ (u nekim tačkama ξ_i) dostiže svoj infinum m_i i supremum M_i, pa su sume $\underline{S}$ i $\overline{S}$ specijalni slučajevi opšteg pojma integralne sume.*

Teorema 1. *Ograničena funkcija f je integrabilna na $[a,b]$ ako i samo ako je:*

$$\lim_{||d|| \to 0} \left(\overline{S}(f,d,a,b) - \underline{S}(f,d,a,b) \right) = 0$$

Teorema 2. *Ako je funkcija f* ***integrabilna*** *na segmentu $[a,b]$ tada je f* ***ograničena*** *na $[a,b]$*
Napomena: *obrnuto ne važi*

Teorema 3. *Ako je funkcija f* ***neprekidna*** *na segmentu $[a,b]$ tada je* ***integrabilna*** *na $[a,b]$*

Teorema 4. *Ako je funkcija f* ***definisana*** *i* ***ograničena*** *na segmentu $[a,b]$ i ako na $[a,b]$ ima* ***konačno mnogo*** *tačaka prekida, tada je f* ***integrabilna*** *na $[a,b]$*

Teorema 5. *Ako je funkcija f* ***monotona*** *na segmentu $[a,b]$ tada je f* ***integrabilna*** *na $[a,b]$.*

2.3 Svojstva određenog (Rimanovog) integrala

1.)

Teorema 6. *Ako je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ gde je $a < b \wedge a, b \in \mathbb{R}$ onda*

$$\exists \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.) Linearnost integrala

Teorema 7. *Neka su funkcije f i g integrabilne na segmentu $[a,b]$ i neka je funkcija $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ gde su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ integrabilna na $[a,b]$*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz. Funkcija f je integrabilna $\implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{||d||\to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$

Funkcija g je integrabilna $\implies \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{||d||\to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) g(\xi_i)$

Funkcija h je integrabilna $\implies \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x =$

$$\begin{gathered}
= \lim_{||d||\to 0} \sum (x_{i+1} - x_i)(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) = \\
= \lim_{||d||\to 0} \Big(\sum (x_{i+1} - x_i)\alpha f(\xi_i) + \sum (x_{i+1} - x_i)\beta g(\xi_i) \Big) = \\
= \lim_{||d||\to 0} \sum (x_{i+1} - x_i)\alpha f(\xi_i) + lim_{||d||\to 0} \sum (x_{i+1} - x_i)\beta g(\xi_i) = \\
= \alpha \lim_{||d||\to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) + \beta \lim_{||d||\to 0} \sum (x_{i+1} - x_i) g(\xi_i) = \\
= \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x
\end{gathered}$$

$\square$

3.) Aditivnost integrala

Teorema 8. *Za bilo koje $c \in [a,b]$ važi*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4.) Modularna nejednakost

Teorema 9. *Funkcija $|f(x)|$ je integrabilna na $[a,b]$ i važi:*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

5.)

Teorema 10. *Funkcija $f(x)g(x)$ je integrabilna na $[a, b]$.*

6.)

Teorema 11. *Funkcija $f(x)$ je integrabilna na $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$*

7.)

Teorema 12. *Ako je funkcija f integrabilna i $(\forall x \in [a, b])f(x) = f_1(x)$ osim u konačno mnogo tačaka $c_1, c_2, \ldots, c_n \in [a, b]$ gde $f(c_i) \neq f_1(c_i)$ $i = \overline{1, n}$ tada je funkcija $f_1(x)$ integrabilna na $[a, b]$ i važi:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz. Pretpostavimo da se f i f_1 razlikuju u jednoj tački $c \in [a, b]$

$$(\forall x \in [a, b])x \neq c \implies f(x) = f_1(x)$$

Izaberimo proizvoljnu podelu d segmenta $[a, b]$

$$d = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

Posmatrajmo integralne sume $S(f, d, a, b)$ i $S(f_1, d, a, b)$ Ako tačka c nije tačka podele d, tj. $(\forall \xi \in d)\xi \neq c$ onda su obe sume jednake. Sume se razlikuju za f i f_1 samo u slučaju da je $(\exists \xi \in d)c = \xi$ i tada bi se razlika ogčedača u sledećem sabirku:

$$f(c)(x_i - x_{i-1}) \text{ i } f_1(c)(x_i - x_{i-1})$$

Oba sabirka međutim teže nuli kada norma podele teži nuli $||d|| \to 0$

$$\implies \lim_{||d|| \to 0} S(f, d, a, b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}dx = \lim_{||d|| \to 0} S(f_1, d, a, b) = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}dx$$

Ako imamo konačan broj tačaka za koje se f i f_1 razlikuju na $[a, b]$ tada za svaku od njih ponovimo isti postupak kao za tačku c

$$\implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$$

□

8.)

Teorema 13. *1)* $(\forall x \in [a, b])f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

2) $(\forall x \in [a, b])f(x) > 0 \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

9.) Monotonost integrala

1) $(\forall x \in [a, b])f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

2) $(\forall x \in [a, b])f(x) < g(x) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

10.)

Teorema 14. ***(Stav o srednjoj vrednosti)***
Neka je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ i neka $(\forall x \in [a,b]) m \leq f(x) \leq M$. Tada:

$$(\exists \mu \in [m,M]) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$$

Dokaz.

$$(\forall x \in [a,b]) m \leq f(x) \leq M$$
$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a) \text{ gde je } m \leq \mu \leq M$$

□

Posledica 14.1. *Ako je f neprekidna na $[a,b]$ tada:*

$$(\exists c \in [a,b]) f(c) = \mu \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

Ako je funkcija integrabilna na $[a,b]$ srednja vrednost funkcije na $[a,b]$ je

$$f_s = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz. Iz diferencijalnog računa: f je neprekidna na $[a,b]$

$$\implies c \in [a,b] f(c) = \mu$$

□

2.4 Geometrijske primene određenog integrala

2.4.1 Površine ravnih likova

Teorema 15. *Površina P koja je ograničena neprekidnom funkcijom $f(x) \geq 0$ i odsečcima pravih $x = a$, $x = b$ i $y = 0$ određena je formulom:*

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.4.2 Dužina luka krive

Teorema 16. *Neka je u ravni data kriva $(a \leq x \leq b) y = f(x)$ i neka su $f(x)$ i $f'(x)$ neprekidne na $[a,b]$. Dužina luka krive nad segmentom $[a,b]$ je:*

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\,\mathrm{d}x$$

2.4.3 Površina obrtnoh tela

Teorema 17. *Neka su funkcije f i f' neprekidne na odsečku $[a,b]$. Ako se krivoliniski trapez, čije su stranice segment $[a,b]$, delovi pravih $x=a$, $x=b$ i kriva $(a \leq x \leq b) y = f(x)$ obrće oko x-ose, dobija se obrtno telo. Površina tog tela je:*

$$2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

2.5 Veza između određenog i neodređenog integrala

Teorema 18. *Neka je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ i neka je $x \in [a,b]$ i, prema tome, neka je funkcija $\varphi = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Pod ovim uslovima važi:*

1) Funkcija $\varphi(x)$ je neprekidna na $[a,b]$.

2) Ako je f neprekidna na $[a,b]$ tada $(\forall x \in [a,b])\varphi'(x) = f(x)$ (φ je jedna primitivna funkcija funkcije f na $[a,b]$)

Dokaz. 1) Neka je $x \in [a,b]$ i neka je Δx takvo da je $x + \Delta x \in [a,b]$.
Ako je $\Delta x > 0$ (analogno se pokazuje za $\Delta x < 0$, tada $[x+\Delta x] \subset [a,b]$) posmatrajmo segment $[x, x+\Delta x] \subset [a,b]$

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_x^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Na osnovu teorema sa kojima smo se vež upoznali važi sledeći niz implikacija:
f je integrabilna na $[a,b] \implies f$ je integrabilna na $[x, x+\Delta x] \subset [a,b] \implies f$ je ograničena na $[x, x+\Delta x] \implies (\exists m_1, M_1)(\forall t \in [x, x+\Delta x]) m_1 \leq f(t) \leq M_1$ Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti za određeni integral sledi: $(\exists \mu) m_1 \leq \mu \leq M_1$ takvo da je

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = \mu\Delta x$$

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \mu\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)) = \lim_{\Delta x\to 0}\mu\Delta x = \mu \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)) = 0$$

$$\implies F \text{ je neprekidna funkcija } \forall x \in [a,b]$$

2) f je neprekidna na $[a,b] \implies f$ je neprekidna i na $[x, x+\Delta x] \in [a,b]$

$$\implies (\exists c \in [x, x+\Delta x]) f(c) = \mu$$

$$c = x + \theta\Delta x;\ \theta \in [0,1]$$

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \mu\Delta x$$

$$\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = f(c) = f(x+\theta\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\theta\Delta x)$$

$$\varphi'(x) = f(x);\ \forall x \in [a,b]$$

Posledica 18.1. *$\varphi(x)$ je jedna primitivna funkcija funkcije f*

$$(\exists c \in \mathbb{R})\varphi(x) = F(x) + c$$

$$\text{Za } x = a \ : \ \varphi(a) = F(a) + c = \int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies c = -F(a)$$

$$\text{Za } x = b \ : \ \varphi(b) = F(b) + c = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\underbrace{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b}_{\text{Njutn-Lajbnicova formula}}$$

□

Teorema 19. *Ako je funkcija f neprekidna tada važi:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

gde je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f.

2.6 Parcijalna integracija i smena promenljive kod određenog integrala

Teorema 20. ***(Parcijalna integracija kod određenog integrala)***
Ako su funkcije $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ i $v'(x)$ neprekidne na $[a, b]$ tada je:

$$\int\limits_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$$

Teorema 21. ***(Smena promenljivo kod određenog integrala)***
Ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) funkcija $f(x)$ je neprekidna na segmentu $[a, b]$

b) funkcije $x = \varphi(t)$ i $\varphi'(t)$ su neprekidne na segmentu $[\alpha, \beta]$ gde je $a = \varphi(\alpha)$ i $b = \varphi(\beta)$ tada važi:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Napomena: *U navedenoj teoremi formula smene promenljive izvedena je pod pretpostavkom da je funkcija f neprekidna, što je i najčešći slučaj u primenama. U slučaju da je funkcija φ strogo monotona formula važi i pod slabijom pretpostavkom da je f integrabilna na $[a, b]$.*

Teorema 22. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna i periodična funkcija sa periodom T, tada važi:*

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dokaz.

$$\ldots \quad ?$$

□

Teorema 23. *Ako je funkcija f neprekidna na $[-a,a]$ tada važi:*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \textit{ako je } f \textit{ neparna funkcija} \\ 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{ako je } f \textit{ parna funkcija} \end{cases}$$

Dokaz.

$$\ldots\ ?$$

□

2.7 Nesvojsveni integral

Postoje dva razloga zbog kojih integral nije Rimanov:

1.) Oblast integracije je $\pm\infty$

2.) Integral ima singularne tačke u intervalu

Definicija 7. *1) Neka je f definisana na intervalu $[a,+\infty)$, i integrabilna na svakom konačnom $[\alpha,\beta] \subset [a,+\infty)$. Tada je $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ integral koji zovemo nesvojstvenim (nepravim) i definiše se kao:*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\alpha\to-\infty} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\alpha\to-\infty} \int\limits_{\alpha}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_{c}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$

Definicija 8. *a) Neka je f definisana na segmentu $[a,b)$ i integrabilna na svakom konačnom $[\alpha,\beta] \subset [a,b)$ tada važi:*

$$\underbrace{\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\textit{Nesvojstven}} = \underbrace{\lim_{\beta\to b_-} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\textit{Konačan, beskonačan ne postoji}}$$

b) Neka je f definisana na segmentu $(a,b]$ i integrabilna na svakom konačnom $[\alpha,\beta] \subset (a,b]$ tada važi:

$$\underbrace{\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\textit{Nesvojstven}} = \underbrace{\lim_{\alpha\to a_+} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\textit{Konačan, beskonačan ne postoji}}$$

3 Diferencijalne jednačine

- Principijalno ne znamo da ih rešavamo
- Neke i možemo da rešimo (obratiti pažnju na klasifikaciju)

3.1 Obične diferencijalne jednačine

Definicija 1. *Implicitan izraz $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ gde je $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ nepoznata, n puta diferencijabilna funkcija nezavisno promenljive x, naziva se* ***obična diferencijabilna jednačina*** *reda n ako u njoj efektivno učestvuje izvod $y^{(n)}$.*
Napomena: *nije obavezno pojavljivanje svih članova, ali je obavezno pojavljivanje n-tog izvoda.*

Definicija 2. ***Rešenje*** *diferencijalne jednačine na intervalu I je svaka funkcija y definisana na I koja jednačinu svodi na identitet.*
Napomena (Manjkavost? ostaviti ili ne?): *Ne može rešenje jednačine uvek da se predstavi u eksplicitnom obliku*

Definicija 3. ***Opšte rešenje*** *diferencijalne jednačine n-tog reda je svaka funkcija y definisana sa $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n)$ gde su $c_1, c_2, \dots, c_n$ proizvoljne konstante iz $\overline{\mathbb{R}}$, tako da:*

1) y jeste rešenje jednačine

2) Polazna jednačine se može dobiti iz izraza G

Napomena: *Opšte rešenje ne sadrži sva rešenja diferencijalne jednačine*

Definicija 4. ***Partikularno rešenje*** *diferencijalne jednačine n-tog reda je svako njeno rešenje koje je obuhvaćeno opštim rešenjem, tj. koje se može dobiti iz opšteg rešenja za neke konkretne vrednosti konstanti.*

Definicija 5. ***Singularno rešenje*** *diferencijalne jednačine n-tog reda je svako rešenje koje nije obuhvaćeno opštim rešenjem.*

Definicija 6. *Partikularno rešenje diferencijalne jednačine n-tog reda određeno uslovima:*

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \\ y^{(n)}(x_0) &= y_n \end{aligned}\right\} \text{Košijevi (početni) uslovi}$$

naziva se ***Košijevo rešenje*** *diferencijalne jednačine za početne uslove.*
Napomena: *Ovaj problem drugačije se naziva Košijev problem ili problem početnih uslova. Rešava se n jednačina (n uslova) sa n nepoznatih (n konstanti). Ukoliko je problem korektno zadat onda ima jedinstveno rešenje.*

3.2 Diferencijalne jednačine prvog reda

3.2.1 Diferencijalne jednačina kod kod kojih promenljive mogu da se razdvoje

Opšti izraz:

$$f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y = 0$$
$$y' = \varphi(x)\xi(y)$$

gde su funkcije f, g, φ i ξ definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine. **Opšte rešenje:**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(y)\,\mathrm{d}y = c$$

Partikularno rešenje Košijevog problema:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} g(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Napomena: Na kraju rešavanja broj konstanti mora biti jednak redu diferencijalne jednačine.

3.2.2 Diferencijalne jednačine oblika $y' = g(ax+by)$

Opšti izraz:

$$y' = g(ax+by)$$

gde su funkcije y i g definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine.
Opšte rešenje:

a) $b = 0 \implies$ ovo je jednačina kod koje promenljive mogu da se razdvoje

b) $b \neq 0 \implies$ u ovoj jednačini se uvodi smena zavisno promenljive y:

$$\begin{aligned} ax+by &= z \\ by &= z-ax \\ y &= \frac{z-ax}{b} \\ y' &= \frac{z'-a}{b} \\ y' &= g(z) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{z'-a}{b} &= g(z) \\ z' &= bg(z)+a \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= bg(z)+a \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}z}{bg(z)+a} \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{bg(z)+a} &= \int \mathrm{d}x + c \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}z}{bg(z)+a} = x+c}_{\text{Rešavanjem dobija se opšte rešenje}}$$

3.2.3 Homogena diferencijalna jednačina prvog reda

Opšti izraz:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

gde je funkcija f definisana na intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine. I $f(u) \not\equiv u \implies$ nije identičko preslikavanje
Opšte rešenje:

$$\begin{aligned} z &= \frac{y}{x} \\ y &= xz \\ y' &= z+z'x \\ y' &= f\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z'x+z &= f(z) \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x &= f(z)-z \\ \frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \int \frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + c \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z} = \ln|x|+c}_{\text{Rešavanjem dobija se opšte rešenje}}$$

3.2.4 Diferencijalna jednačina prvog reda oblika $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Opšti izraz:

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

gde je funkcija f definisana i neprekidna na nekom intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine
Opšte rešenje:

a) $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ - Nije poželjno da istovremeno budu jednake nuli.

b) $a_1 = a_2 = 0 \vee b_1 = b_2 = 0 \vee a_1 = b_2 = 0 \vee b_1 = a_2 = 0 \implies$ Diferencijalna jednačina kod koje promenljive mogu da se razdvoje.

c) $c_1 = c_2 = 0 \implies$ Homogena diferencijalna jednačina.

d) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \implies \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \implies$ Koeficijenti a_1, a_2, b_1 i b_2 su proporcionalni $\implies$ uvođenjem smene $a_1x + b_1y = z$ svodi se na diferencijalnu jednačinu oblika $y' = g(a_1x + b_1y)$ koju znamo da rešimo.

e) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \implies$ Koeficijenti a_1, a_2, b_1 i b_2 nisu proporcionalni $\implies$ smetaju c_1 i c_2, pa se uvode dve smene:

   1) smena nezavisno promenljive $x = u + \alpha$
   2) smena zavisno promenljive $y = v + \beta$

   gde su α i β konstante, rešenja sistema linearnih jednačina:

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{aligned}\right\} a_i,\ b_i,\ c_i \text{ su koeficijenti iz polazne jednačine}$$

   det $\neq 0 \implies$ sistem ima jedinstven rešenje α, β daju nove promenljive i jednačina se svodi na homogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda.

3.2.5 Linearna diferencijalna jednačina prvog reda

Opšti izraz:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

gde su P i Q funkcije definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se traži rešenje ove jednačine
Opšte rešenje:

a) Homogena
   $Q(x) = 0 \implies$ promenljive mogu da se razdvoje

$$\begin{aligned} -P(x)y &= y' \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -P(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int P(x)\,\mathrm{d}x + c \\ \ln|y| &= -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln c \end{aligned}$$

$$y = ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

b) Nehomogena

$$\begin{aligned} y' + P(x)y &= Q(x) \\ y'e^{\int P(x)\mathrm{d}x} + yP(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} &= Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \\ \left(ye^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)' &= Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \int \left(ye^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)' &= \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \\ ye^{\int P(x)\mathrm{d}x} &= \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c \end{aligned}$$

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(c + \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)$$

   Košijev problem, opšte rešenje za linearnu nehomogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)$$

3.2.6 Bernulijeva diferencijalna jednačina

Opšti izraz:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m$$

gde je $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, funkcije P i Q definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se rešava jednačina.
Opšte rešenje:

$$\begin{aligned} z &= y^{1-m} \\ z' &= (1-m)y^{-m}y' \\ y' + P(x)y &= Q(x)y^m \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{y'}{y^m} + P(x)y^{1-m} &= Q(x) \\ (1-m)y^{-m}y' + P(x)y^{1-m} &= (1-m)Q(x) \end{aligned}$$

$$z' + z\,\underbrace{P(x)}_{P_1(x)} = \underbrace{(1-m)Q(x)}_{Q_1(x)}$$

- linearna diferencijalna jednačina prvog reda

3.2.7 Rikatijeva jednačina

Opšti izraz:

$$y' = P(x)(y')^2 + Q(x)y + R(x)$$

gde su funkcije P, Q i R definisane i neprekidne na nekom intervalu I na kom se rešava jednačina.
Opšte rešenje: Izaberimo takvu smenu da uklonimo $R(x)$ i dobijamo Bernulijevu diferencijalnu jednačinu za $m = 2$
$y^2 \implies m = 2 \implies$ potrebno nam je jedno partikularno rešenje, od toga polazimo (y_p)
$y = y_p + \dfrac{1}{z} \implies$ smena zavisno promenljive

4 Kombinatorika

4.1 Osnovni kombinatorni principi

1.) Princip jednakosti
Ako između dva konačna skupa A i B postoji bijekcija $f : A \to B$ tada skupovi A i B imaju isti broj elemenata, tj.

$$|A| = |B|$$

2.) Princip zbira Ako su A i B konačni, disjunktni skupovi, tada je

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Napomena: Ili treba da asocira na zbir. Dakle kada su neka dva elementa u odnosu $\vee$ koristi se princip zbir

3.) Princip proizvoda Ako su A i B konačni skupovi, tada je

$$|A \times B| = |A||B|$$

Definicija 1. ***Permutacija*** *skupa* $x_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *je bilo koja uređena* n*-torka različitih elemenata tog skupa*

Primer 1. *Permutacije skupa* $x_n = 1, 2, 3$ *su:*

$$\begin{matrix} (1,2,3) & (3,2,1) \\ (2,3,1) & (2,1,3) \\ (3,1,2) & (1,3,2) \end{matrix}$$

jer na prvom mestu može da bude bilo koji od članova skupa (3 mogućnosti), na drugom mestu mogu biti svi elementi osim jednog koji je na prvom mestu (2 mogućnosti), i na poslednjem samo jedan preostali element (1 mogućnost).
Ukupno mogućnosti: $3 * 2 * 1 = 3! = 6$

Teorema 1. ***Broj permutacija*** *skupa od* n *elemenata je*

$$n!$$

Definicija 2. ***Varijacija*** *k-te klase skupa* x_n *je bilo koja uređena k-torka različirih elemenata iz skupa* x_n

Primer 2. *Varijacije 3. klase skupa* $x_n = a, b, c, d$ *su:*

$$\begin{array}{cccc}
(a,b,c) & (b,a,c) & (c,a,b) & (d,a,b) \\
(a,b,d) & (b,a,d) & (c,a,d) & (d,a,c) \\
(a,c,b) & (b,c,a) & (c,b,a) & (d,b,a) \\
(a,c,d) & (b,c,d) & (c,b,d) & (d,b,c) \\
(a,d,b) & (b,d,a) & (c,d,a) & (d,c,a) \\
(a,d,c) & (b,d,c) & (c,d,b) & (d,c,b)
\end{array}$$

jer na prvom mestu može da bude bilo koji od članova skupa (4 mogućnosti), na drugom mestu mogu biti svi elementi osim jednoh koji je na prvom mestu (3 mogućnosti), i na poslednjem može biti neki od preostala dva (2 mogućnosti).
Ukupno mogućnosti: $4 * 3 * 2 = \frac{4!}{1!} = 24$

Teorema 2. ***Broj varijacija*** *k-te klase skupa od* n *elemenata je*

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definicija 3. ***Kombinacija*** *k-te klase skupa* x_n *je bilo koji njegov podskup sa* k *elemenata*

Primer 3. *Kombinacije 2. klase skupa* $x_n = a, b, c, d$ *su:*

$$\begin{array}{ccc}
\{a,b\} & \{a,d\} & \{b,d\} \\
\{a,c\} & \{b,c\} & \{c,d\}
\end{array}$$

jer jedan član može da bude bilo koji (4 mogućnosti), a drugi može da bude neki od preostalih (3 mogućnosti), međutim pošto redosled nije bitan, a broj permutacija skupa gde je $n = 2$ *je* $2! = 2 * 1 = 2$*, ukupan broj kombinacija je 2 puta manji od broja varijacija 2. klase skupa* x_n*.*
Ukupno mogućnosti: $\frac{4 * 3}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$
Kombinacije 3. klase skupa x_n *su:*

$$\{a,b,c\} \quad \{a,b,d\} \quad \{b,c,d\}$$

jer jedan član može da bude bilo koji (4 mogućnosti), drugi može da bude neki od preostalih (3 mogućnosti) i poslednji može da bude neki od preostala 2 (2 mogućnosti), međutim pošto redosled nije bitan, a broj permutacija skupa gde je $n = 3$ *je* $3! = 6$*, ukupan broj kombinacija je 6 puta manji od broja varijacija 3. klase skupa* x_n*.*
Ukupno mogućnosti: $\frac{4 * 3 * 2}{6} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4$

Teorema 3. ***Broj kombinacija*** *k-te klase skupa od* n *elemenata je*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1)9}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Definicija 4. ***Varijacija sa ponavljanjem*** *k-te klase skupa* x_n *je bilo koja uređena k-torka njegovih elemenata*

Primer 4. *Varijacije sa ponavljanjem 2. klase skupa* $x_n = \{a, b, c, d\}$ *su:*

$$\begin{array}{cccc}
(a,a) & (b,a) & (c,a) & (d,a) \\
(a,b) & (b,b) & (c,b) & (d,b) \\
(a,c) & (b,c) & (c,c) & (d,c) \\
(a,d) & (b,d) & (c,d) & (d,d)
\end{array}$$

jer da prvom mestu može biti bilo koji element (4 mogućnosti), a i na drugom mestu može biti bilo koji element jer su ponavljanja dozvoljena (4 mogućnosti).
Ukupno mogućnosti: $4 * 4 = 4^2 = 16$

Teorema 4. ***Broj varijacija sa ponavljanjem*** *k-te klase skupa od n elemenata je*

$$V_n^k = n^k$$

Definicija 5. *Dato je ukupno n objekata k različitih tipova, $n_i(i = \overline{1,k})$ je broj ponavljanja i-tog tipa objekta, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.* ***Permutacija sa ponavljanjem*** *navedene familije je svaki raspored tih elemenata.*

Primer 5. *Neke od permutacija sa ponavljanjem familije a, a, b, b, b, c su:*

$$aabbbc,\ baabbc,\ baabcb,\ \ldots$$

Ukupan broj permutacija sa ponavljanjem je, slično kao kod kombinacija, jednak broju permutacija podeljenom sa brojem istih elemenata svakog tipa, jer se ne može odrediti razlika između dve permutacije gde su zamenjena mesta elementima istog tipa. Ukupan broj mogućnosti: $\dfrac{6!}{2!3!1!} = 60$

Teorema 5. ***Broj permutacija sa ponavljanjem*** *date familije je*

$$P_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Definicija 6. ***Kombinacija** k **te klase sa ponavljanjem*** *skupa x_n je bilo koja familija sastavljena od tačno k ne obavezno različitih elemenata skupa x_n*

Primer 6. *Kombinacije sa ponavljanjem 2. klase skupa $x_n = a, b, c, d$ su:*

$$\begin{array}{cccc} (a,a) & (a,b) & (a,c) & (a,d) \\ & (b,b) & (b,c) & (b,d) \\ & & (c,c) & (c,d) \\ & & & (d,d) \end{array}$$

Po principu jednakosti možemo naći bijekciju skupa x_n koju možemo lakše da prebrojimo. Jedan način koji dosta olakšava ovaj problem je da zamislimo da postoje 4 polja (jer postoje 4 elementa u skupu x_n) koja su odvojena pomoću 3 crtice. Pošto su kombinacije 2. klase, imamo i 2 kružića koja treba da se rasporede u polja (s tim da u isto polje može da se stavi i više kružića, ili ni jedan). Na taj način dobijamo skup od 5 elemenata (3 crtice i 2 kružića). Jedino što preostaje je da rasporedimo crtice i kružiće proizvoljno (jer ne postoje ograničenja). Broj mogućnosti je sada odabir 2 mesta od 5 mogućih za kružiće dok se ostala popunjavaju crticama (ili obrnuto). Naravno, isti princip važi i ako je broj klasa veći od broja elemenata skupa (broj kružića veći od broj crtica)

Definicija 7. *Reprezentacija prirodnoh broja n u obliku $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ gde su $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ naziva se **podela** ili **razbijanje** tog broja, ili preciznije k-**podela***

Definicija 8. ***Kompozicija*** *broja n je bilo koja uređena podela, tj. podela kod koje je poredak bitan.*

Definicija 9. ***Particija*** *broja n je bilo koja neuređena podela, tj. podela kod koje poredak sabiraka nije bitan.*

Primer 7. *Particije i kompozicije broja $n = 4$ su:*

$$\begin{array}{cc} \textit{Kompozicije:} & \textit{Particije:} \\ 4 & 4 \\ 1+3,\ 3+1,\ 2+2 & 1+3,\ 2+2 \\ 1+1+2,\ 1+2+1,\ 2+1+1 & 1+1+2 \\ 1+1+1+1 & 1+1+1+1 \end{array}$$

Primer 8. *Kompozicije broja $n = 7$ koje imaju $k = 4$ sabiraka mogu se prebrojati pomoću crtica i kružića. Zamislimo 7 kružića i između njih 6 polja, ako u neko polje stavimo crticu to je kao da smo stavili plus na to mesto. Samim tim, pošto želimo da odredimo broj kompozicija za 4 sabirka stavljam 3 crtice. Broj načina na koje ovo može da se uradi je jednak odabiru 3 mesta od 6.*

Teorema 6. *1. Broj kompozicija broja n koje imaju k sabiraka je $\binom{n-1}{k-1}$*

2. Uupan broj svih kompozicija broja n je 2^{n-1}

Dokaz. 1. Postoji n kružića $\implies$ postoji $(n-1)$ mesta na koja mogu da se stave crtice, kojih ima $(k-1)$. Samim tim ukupan broj mogućnosti je $\binom{n-1}{k-1}$

2. Ukupan broj kompozicija se može dobiti na dva načina:

   a) U svakom polju može da se pojavi crtica, ili ne mora, samim tim imamo 2 mogućnosti za svako polje (kojih ima $(n-1)$) pa je ukupan broj kompozicija $2^{(n-1)}$

   b) Ukupan broj kompozicija je $\sum_{k=1} n\binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0} n - 1 = 2^{n-1}$

□