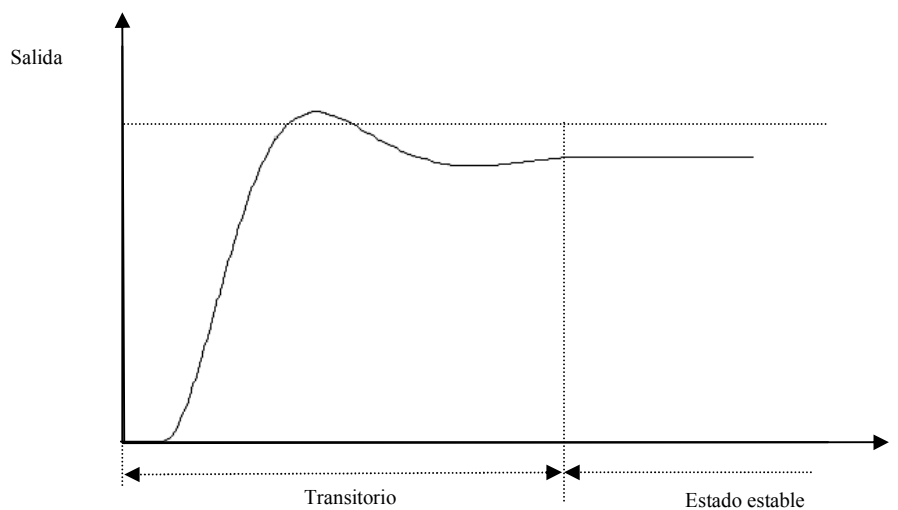


Respuesta en el tiempo de un Sistema de Control

La respuesta de un sistema de control, o de un elemento del sistema, está formada de dos partes: la respuesta en estado estable y la respuesta transitoria.

La respuesta transitoria es la parte de la respuesta de un sistema que se presenta cuando hay un cambio en la entrada y desaparece después de un breve intervalo.

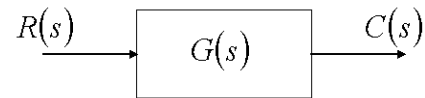
La respuesta en estado estable es la respuesta que permanece después de que desaparecen todos los transitorios.



Señales de prueba típicas. Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidales, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, dado que las señales son funciones del tiempo muy simples.

Respuesta en el tiempo de un sistema de control

Sea el siguiente sistema de control



La función de transferencia del sistema es

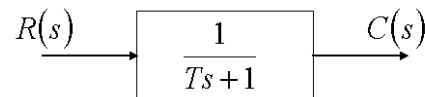
$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s)$$

$$C(s) = G(s)R(s)$$

La respuesta en el tiempo $C(t)$ es obtenida tomando la transformada de Laplace inversa de $C(s)$

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1} C(s) = \mathcal{L}^{-1} [G(s)R(s)]$$

\mathcal{L}^{-1}

Respuesta en el tiempo de un sistema de primer orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} R(s)$$

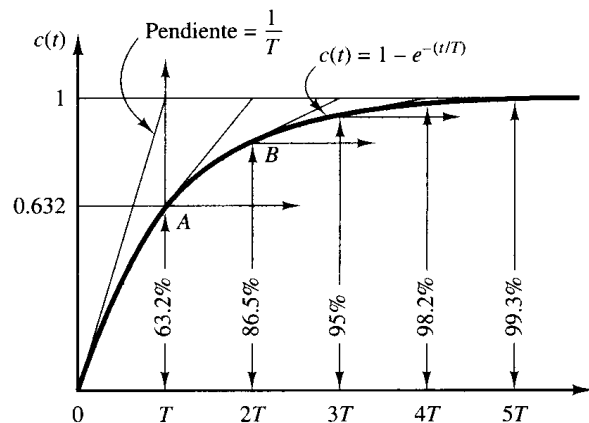
Respuesta al escalón unitario

La entrada escalón unitario es

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

La respuesta en el tiempo es

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{s} \right] = 1 - e^{-\frac{1}{T}t}$$



Constante de tiempo, es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar del 63.2% de su cambio total.

$$t = T$$

Conforme más pequeña es la constante de tiempo la respuesta del sistema es más rápida.

Tiempo de estabilización, o tiempo de respuesta es el tiempo que necesita la curva de respuesta para alcanzar la línea de 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo.

$$t_s = 4 T$$

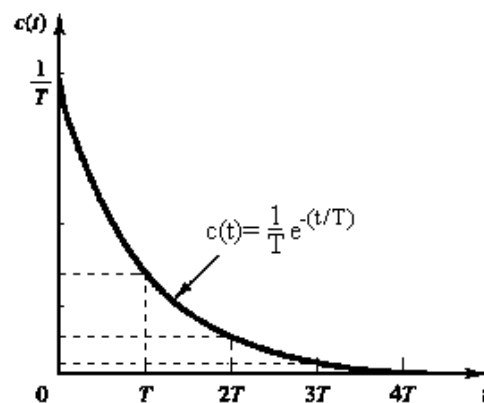
Respuesta al impulso unitario de un sistema de primer orden

La entrada impulso unitario es

$$R(s) = 1$$

La respuesta en el tiempo es

$$C(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{Ts + 1} \right] = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



Forma general de la función de transferencia de primer orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(T_1 s + 1)}{Ts + 1}$$

Donde G es la ganancia del sistema.

Polos Son los valores de s que hacen que el polinomio del denominador sea cero.
Son las raíces del polinomio del denominador.

Ceros Son los valores de s que hacen que el polinomio del numerador sea cero.
Son las raíces del polinomio del numerador.

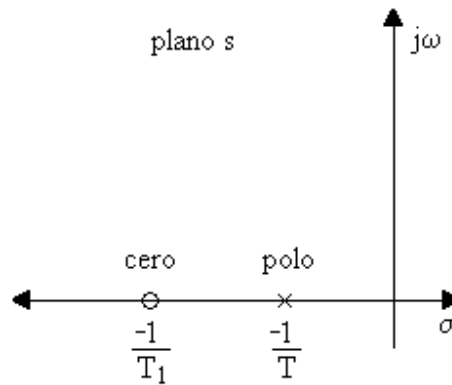
El Polo de la función es

$$s = -\frac{1}{T}$$

El cero de la función es

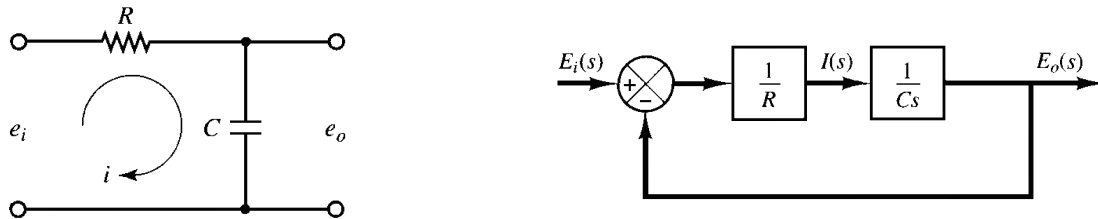
$$s = -\frac{1}{T_1}$$

Ubicación del polo y cero del sistema en el plano s .



Ejemplo

Un circuito eléctrico RC representado a continuación tiene las siguientes funciones de transferencia.



Las funciones de transferencias considerando $e_o(t)$, $i(t)$, $e_R(t)$ como salidas y $e_i(t)$ como entradas son:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad \frac{I(s)}{E_i(s)} = \frac{Cs}{RCs + 1} \quad \frac{E_R(s)}{E_i(s)} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

Si el valor de la resistencia es $R = 100 \text{ K}\Omega$ y el valor del capacitor es $C = 1 \mu\text{f}$ y se le aplica un voltaje de entrada $e_i = 10\text{V}$. Obtener la respuesta en el tiempo para cada salida.

La constante de tiempo del circuito es:

$$RC = 100\,000 * 0.000001 = 0.1 \text{ seg}$$

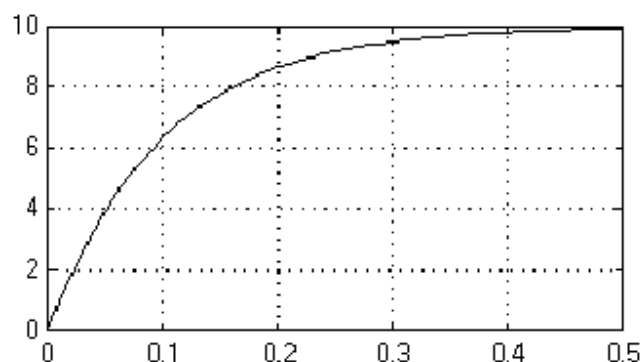
El voltaje de entrada aplicado es $E_i(s) = \frac{10}{s}$

El voltaje de salida $E_o(s)$ sería

$$E_o(s) = \left(\frac{1}{0.1s + 1} \right) \left(\frac{10}{s} \right) = \left(\frac{10}{s + 10} \right) \left(\frac{10}{s} \right)$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace

$$e_o(t) = 10(1 - e^{-10t}) \text{ volts}$$



El tiempo de estabilización para una banda del 2% sería

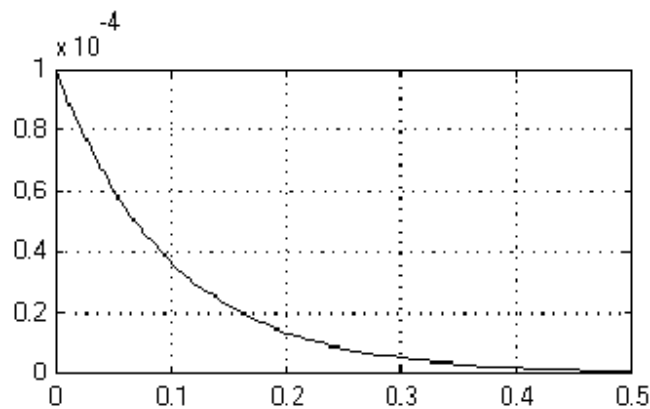
$$t_s = 0.4 \text{ seg}$$

La corriente $I(s)$ sería.

$$I(s) = \left(\frac{1 \cdot 10^{-6} s}{0.1s + 1} \right) \left(\frac{10}{s} \right) = \left(\frac{10 \cdot 10^{-6} s}{s + 10} \right) \left(\frac{10}{s} \right)$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace

$$i(t) = 0.1 \cdot 10^{-3} (e^{-10t}) \text{ amperes}$$

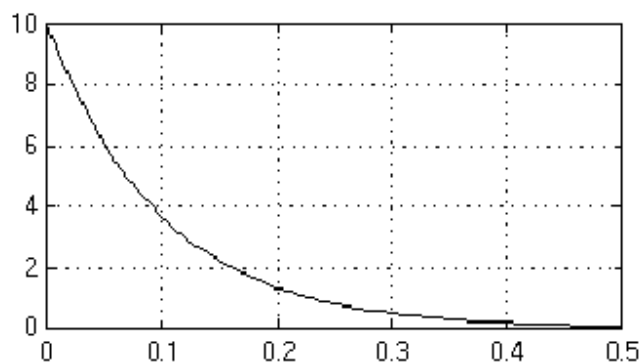


El voltaje $E_R(s)$ sería.

$$E_R(s) = \left(\frac{0.1s}{0.1s + 1} \right) \left(\frac{10}{s} \right) = \left(\frac{s}{s + 10} \right) \left(\frac{10}{s} \right)$$

Obteniendo la transformada inversa de Laplace

$$e_R(t) = 10(e^{-10t})$$

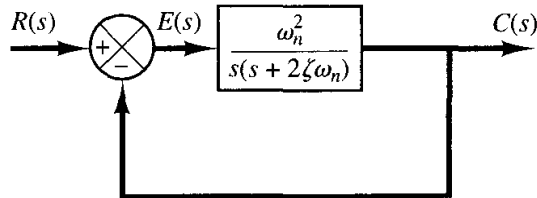


El tiempo de estabilización para una banda del 2% sería

$$t_s = 0.4 \text{ seg}$$

Respuesta en el tiempo de un sistema de segundo orden

El diagrama de bloques de un sistema de segundo orden en términos de la relación de amortiguamiento ζ y frecuencia natural no amortiguada ω_n es



La función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La ecuación característica nos da información sobre el comportamiento dinámico del sistema.

Las raíces de la ecuación característica $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ serían

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Si $\zeta > 1$ los polos de lazo cerrado son reales y diferentes, el sistema se denomina sobreamortiguado y su respuesta transitoria es exponencial

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Si $\zeta = 1$ los polos de lazo cerrado son reales e iguales, el sistema se denomina críticamente amortiguado y su respuesta es exponencial

$$s_1 = -\omega_n \qquad s_2 = -\omega_n$$

Si $0 < \zeta < 1$ los polos de lazo cerrado son complejos conjugados, el sistema se denomina subamortiguado y su respuesta es oscilatoria

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \qquad s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Si $\zeta = 0$ los polos de lazo cerrado son imaginarios, el sistema se denomina sin amortiguamiento y su respuesta tiene oscilaciones mantenidas

$$s_1 = j\omega_n \qquad s_2 = -j\omega_n$$

1. Caso sobreamortiguado $\zeta > 1$

Para una entrada escalón unitario $R(s) = 1/s$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

La transformada inversa de Laplace

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right), \quad s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \text{ y } s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n.$$

2. Caso críticamente amortiguado $\zeta = 1$

Para una entrada escalón unitario $R(s) = 1/s$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s}$$

La transformada inversa de Laplace

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t),$$

3. Caso subamortiguado $0 < \zeta < 1$

Para una entrada escalón unitario $R(s) = 1/s$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)s}$$

en donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la frecuencia natural amortiguada

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

La transformada inversa de Laplace

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right),$$

4. Caso sin amortiguamiento $\zeta = 0$

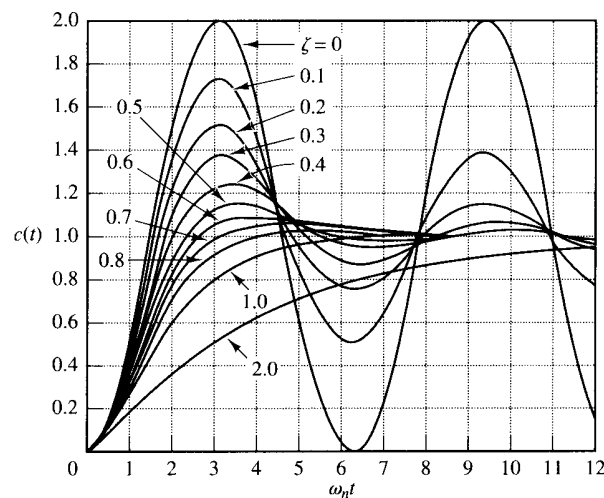
Para una entrada escalón unitario $R(s) = 1/s$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + j\omega_n)(s - j\omega_n)s}$$

La transformada inversa de Laplace

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

Familia de curvas $c(t)$ con diversos valores de ζ .

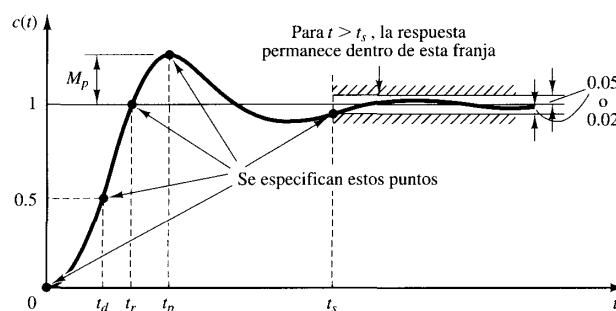


Definiciones de las especificaciones de respuesta transitoria.

Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario, dado que ésta es fácil de generar. (Si se conoce la respuesta a una entrada escalón, es matemáticamente posible calcular la respuesta para cualquier entrada.)

Al especificar las características de la respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario, es común especificar lo siguiente:

1. *Tiempo de retardo*, t_d
2. *Tiempo de levantamiento*, t_r
3. *Tiempo pico*, t_p
4. *Sobrepaso máximo*, M_p
5. *Tiempo de asentamiento*, t_s



1. *Tiempo de retardo*, t_d : es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.

2. *Tiempo de levantamiento, t_r* : es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final. Para sistemas subamortiguados de segundo orden, por lo común se usa el tiempo de levantamiento de 0 a 100%. Para sistemas sobreamortiguados, suele usarse el tiempo de levantamiento de 10 a 90%.

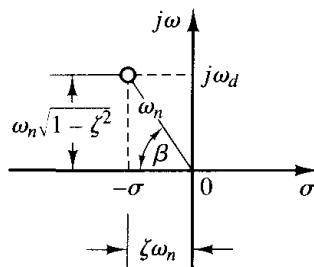
3. *Tiempo pico, t_p* : es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso.

4. *Sobrepaso máximo (porcentaje), M_p* : es el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estable de la respuesta es diferente de la unidad, es común usar el porcentaje de sobrepaso máximo. La cantidad de sobrepaso máximo (en porcentaje) indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema.

$$M_p \% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} * 100\%$$

5. *Tiempo de asentamiento, t_s* : es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final (por lo general, de 2%) y permanezca dentro de él.

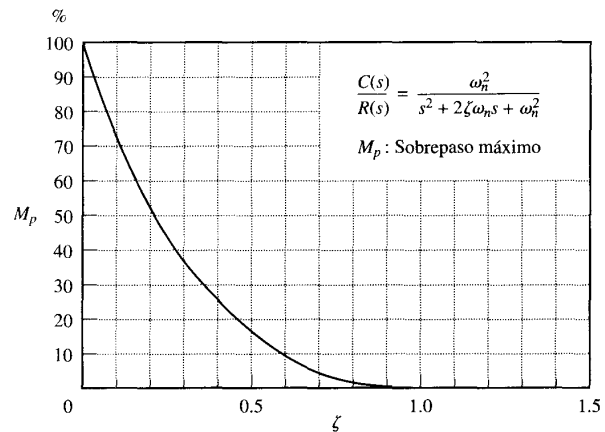
Especificaciones de la respuesta transitoria de un sistema subamortiguado



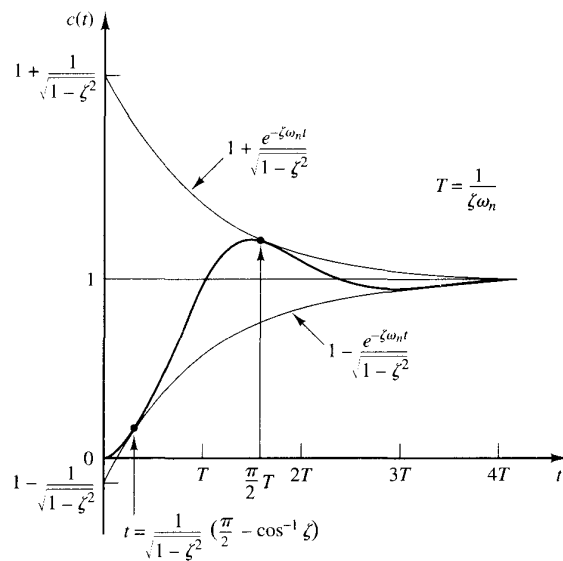
<i>Tiempo pico, t_p</i>	$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$
<i>Tiempo de levantamiento, t_r</i>	$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$
<i>Sobrepaso máximo porcentual, M_p</i>	$M_p \% = 100e^{\left(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)} = 100e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$
<i>Tiempo de asentamiento, t_s</i>	$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$ (banda del 2%)

La constante de tiempo del sistema es $1/\zeta\omega_n$

Curva de M_p contra ζ .



La curva de respuesta $c(t)$ para una entrada escalón unitario, siempre permanece dentro de un par de curvas envolventes.



La respuesta $c(t)$ se puede obtener por medio de las curvas envolventes

El número de picos en la respuesta

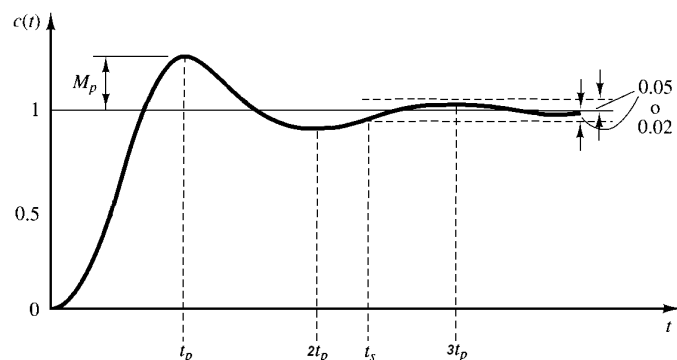
sería $N_{picos} = \frac{t_s}{t_p}$

las magnitudes de esos picos son

$$c(t_p) = \left(1 + e^{-\zeta\omega_n(t_p)} \right) c(\infty)$$

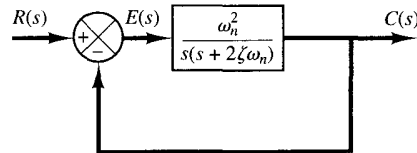
$$c(2t_p) = \left(1 - e^{-\zeta\omega_n(2t_p)} \right) c(\infty)$$

$$c(3t_p) = \left(1 + e^{-\zeta\omega_n(3t_p)} \right) c(\infty)$$



Ejemplo 1

Considere el sistema de la figura, en el que $\zeta = 0.6$ y $\omega_n = 5 \text{ rad/seg}$. Obtenga el tiempo de levantamiento t_r , el tiempo pico t_p , el sobrepaso máximo M_p y el tiempo de asentamiento t_s cuando el sistema está sujeto a una entrada escalón unitario.



A partir de los valores dados de ζ y ω_n obtenemos $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$, y $\sigma = \zeta \omega_n = 3$.

Tiempo de levantamiento t_r es

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 0.93 \text{ rad} \quad t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - 0.93}{4} = 0.55 \text{ seg}$$

Tiempo pico t_p es

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{4} = 0.785 \text{ seg}$$

Sobrepaso máximo M_p es

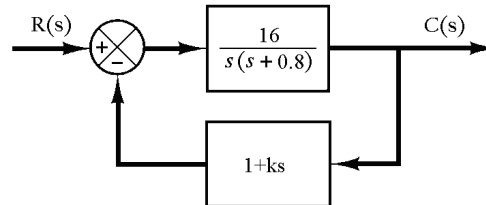
$$M_p = e^{(-\pi \sigma / \omega_d)} = e^{(-3\pi/4)} = 0.095 \quad M_p \% = 0.095 * 100 = 9.5\%$$

Tiempo de asentamiento t_s para el criterio del 2% es

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ seg}$$

Ejemplo 2

Considere el sistema de la figura. Determine el valor de k de modo que la relación de amortiguamiento ζ sea de 0.5. Luego obtenga el tiempo de crecimiento t_r , el tiempo pico t_p , el sobreimpulso máximo M_p y el tiempo de establecimiento t_s , en la respuesta a un escalón unitario.



Solución.

La función de transferencia de este sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{16}{s^2 + (0.8 + 16k)s + 16} \qquad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Comparándola con la función general de 2° orden

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + (0.8 + 16k)s + 16$$

lo que nos da que $2\zeta\omega_n = (0.8 + 16k)$ y $\omega_n^2 = 16$ la ganancia del sistema $G = 1$

La frecuencia natural no amortiguada ω_n .

$$\omega_n = 4 \text{ rad / seg}$$

Despejando k

$$k = \frac{2\zeta\omega_n - 0.8}{16} = \frac{2(0.5)(4) - 0.8}{16} = 0.2 \qquad k = 0.2$$

El máximo sobrepaso M_p %

$$M_p \% = 100 e^{\left(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)} = 100e^{\left(-0.5\pi/\sqrt{1-(0.5)^2}\right)} = 16.3\%$$

Frecuencia natural amortiguada ω_d

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4\sqrt{1 - 0.5^2} = 3.464 \text{ rad / seg}$$

El tiempo pico t_p

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{3.464} = 0.907 \text{ seg}$$

El tiempo de crecimiento (levantamiento) t_r

$$\beta = \cos^{-1}(\zeta) = \cos^{-1}(0.5) = 1.047 \text{ rad}$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - 1.047}{3.464} = 0.605 \text{ seg}$$

Tiempo de estabilización (asentamiento) t_s

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(0.5)(4)} = 2 \text{ seg}$$

Podemos calcular $c(\infty)$ para una entrada escalón unitario utilizando el teorema del valor final

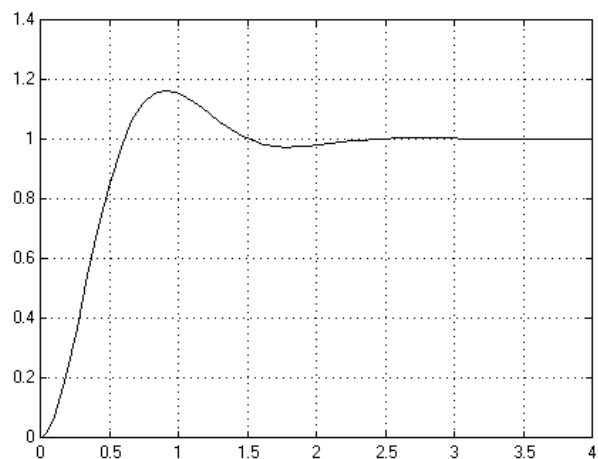
$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{16}{s^2 + (0.8 + 16k)s + 16} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = 1$$

Gráfica de respuesta $c(t)$ para una entrada escalón unitario, utilizando la envolvente.

El número de picos sería $N_{picos} = \frac{t_s}{t_p} = \frac{2}{0.907} = 2.2$ $c(\infty) = GR_1 = 1$

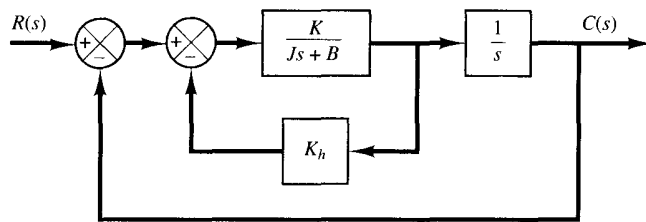
Los valores de la respuesta $c(t)$ son

$$\begin{aligned} c(t_p) &= c(0.907) = (1 + e^{-\zeta\omega_n(t_p)})c(\infty) \\ &= (1 + e^{-1.814})(1) = 1.163 \\ c(2t_p) &= c(1.814) = (1 - e^{-\zeta\omega_n(2t_p)})c(\infty) \\ &= (1 - e^{-3.628})(1) = 0.973 \end{aligned}$$



Ejemplo 3

Para el sistema de la figura, determine los valores de la ganancia K y la constante de realimentación de velocidad K_h para que el sobrepaso máximo en la respuesta al escalón unitario sea 0.2 y el tiempo pico sea 1 seg. Con estos valores de K y K_h , obtenga el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento. Suponga que $J = 1 \text{ Kg} - m$ y que $B = 1 \text{ N} - m / \text{rad} / \text{seg}$.



$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \\ &= \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \left(\frac{B + KK_h}{J}\right)s + \frac{K}{J}} \end{aligned}$$

Comparándola con la forma general del sistema de segundo orden, nos queda

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{B + KK_h}{J} \quad y \quad \omega_n^2 = \frac{K}{J}$$

la ganancia del sistema es $G = 1$

Como la ganancia del sistema es 1 y la entrada es un escalón de magnitud 1, la salida se estabiliza en 1, $c(\infty) = GR_1 = 1$.

Utilizando el teorema del valor final, se puede obtener la magnitud donde se estabiliza el sistema.

$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = 1$$

Como el máximo sobrepaso es 0.2, correspondería a un 20%, ($M_p \% = 20\%$)

$$M_p \% = 100e^{(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})} = 20\%$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{\left[\ln\left(\frac{M_p \%}{100}\right)\right]^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{[\ln(0.2)]^2} + 1}} = 0.456$$

el tiempo pico $t_p = 1 \text{ seg}$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1 \text{ seg}$$

$$\omega_d = \pi = 3.1416 \text{ rad} / \text{seg}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - (0.456)^2}} = 3.53 \text{ rad} / \text{seg}$$

como $\omega_n^2 = \frac{K}{J}$ entonces

$$K = J\omega_n^2 = (1)(3.53)^2 = 12.46 \text{ N} - m$$

$$\text{como } 2\zeta\omega_n = \frac{B + KK_h}{J} \quad K_h = \frac{2\zeta\omega_n J - B}{K} = \frac{2(0.456)(3.53)(1) - (1)}{12.46} = 0.178 \text{ seg}$$

El tiempo de levantamiento t_r

$$\beta = \cos^{-1}(\zeta) = \cos^{-1}(0.456) = 1.097 \text{ rad}$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - 1.097}{\pi} = 0.65 \text{ seg}$$

Tiempo de asentamiento t_s

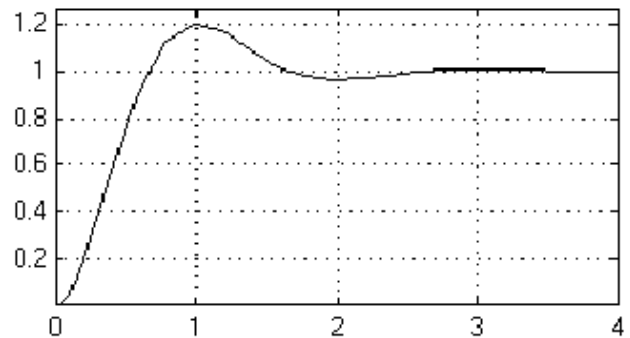
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{(0.456)(3.53)} = 2.485 \text{ seg}$$

Gráfica de respuesta $c(t)$ para una entrada escalón unitario, utilizando la envolvente.

$$\text{El número de picos sería } N_{\text{picos}} = \frac{t_s}{t_p} = \frac{2.485}{1} = 2.485 \approx 2 \quad c(\infty) = GR_1 = 1$$

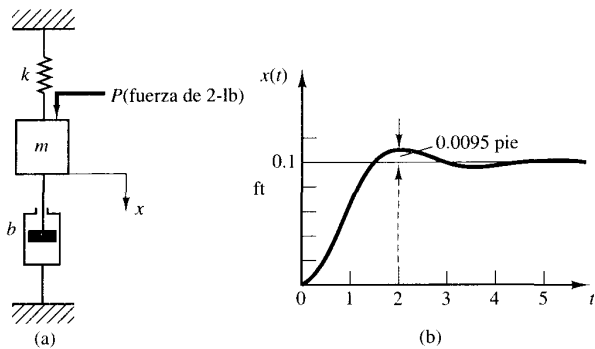
Los valores de la respuesta $c(t)$ son

$$\begin{aligned} c(t_p) &= c(1) = (1 + e^{-\zeta\omega_n(t_p)})c(\infty) \\ &= (1 + e^{-1.609})(1) = 1.2 \\ c(2t_p) &= c(2) = (1 - e^{-\zeta\omega_n(2t_p)})c(\infty) \\ &= (1 - e^{-3.219})(1) = 0.96 \end{aligned}$$



Ejemplo 4

La figura (a) muestra un sistema vibratorio mecánico. Cuando se aplica al sistema una fuerza de 2 lb (entrada escalón), la masa oscila como se aprecia en la figura (b). Determine m , b y k del sistema a partir de esta curva de respuesta. El desplazamiento x se mide a partir de la posición de equilibrio.



Solución.

La función de transferencia de este sistema es

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \qquad \frac{X(s)}{P(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Comparándola con la función general de 2º orden

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{tenemos que la ganancia } G = \frac{1}{k} \text{ y } s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}$$

$$\text{lo que nos da que } 2\zeta\omega_n = \frac{b}{m} \text{ y } \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

Dado que la entrada es un escalón de magnitud 2, tenemos

$$P(s) = \frac{2}{s}$$

sustituyendo en la función de transferencia del sistema

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \left(\frac{2}{s} \right)$$

utilizando el teorema del valor final para obtener el valor en el cuál se estabiliza el sistema.

de la gráfica de respuesta el valor donde se estabiliza el sistema es $x(\infty) = 0.1$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = X(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2}{s(ms^2 + bs + k)} = \frac{2}{k} = 0.1 \text{ pie}$$

Por tanto

$$k = 20 \text{ lb}_f / \text{pie}$$

Como el sistema se estabiliza en 0.1 y el sobrepaso es de 0.0095, entonces $M_p = 9.5\%$ que corresponde a $\zeta = 0.6$.

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{\left[\ln\left(\frac{M_p\%}{100}\right)\right]^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{[\ln(0.95)]^2} + 1}} = 0.6$$

El tiempo pico t_p se obtiene mediante

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{0.8\omega_n}$$

La respuesta experimental muestra que $t_p = 2 \text{ seg}$. Por tanto

$$\omega_n = \frac{3.1416}{(2)(0.8)} = 1.96 \text{ rad / seg}$$

Dado que $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, obtenemos

$$m = \frac{20}{\omega_n^2} = \frac{20}{(1.96)^2} = 5.2 \text{ slug} = 166 \text{ lb}$$

b se determina a partir de

$$2\zeta\omega_n = \frac{b}{m}$$

$$b = 2\zeta\omega_n m = (2)(0.6)(1.96)(5.2) = 12.2 \text{ lb}_f / \text{pie} / \text{seg}$$

Grafique la respuesta en el tiempo para el siguiente sistema de control, para una entrada escalón unitario, y determine el tiempo de levantamiento t_r , el tiempo pico t_p , el sobrepaso máximo M_p y el tiempo de asentamiento t_s .

