

**KRYSTYNA JEŻOWIECKA-KABSCH
HENRYK SZEWCZYK**

MECHANIKĄ PŁYNÓW



**OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
WROCŁAW 2001**

Wydanie podręcznika jest dotowane przez Ministra Edukacji Narodowej

Recenzenci
ALICJA JARŻA
ZDZISŁAW KABZA

Opracowanie redakcyjne
ALICJA KORDAS

Korekta
ALEKSANDRA WAWRZYNKOWSKA-DWOJAK

Projekt okładki
ZOFIA i DARIUSZ GODLEWSKY

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001

ISBN 83-7085-597-0

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 896/2001.

W podręczniku przedstawiono podstawowe wiadomości z mechaniki płynów oraz omówiono problemy ważne z punktu widzenia potrzeb zarówno studentów, jak i inżynierów zajmujących się zagadnieniami przepływów w maszynach, instalacjach, urządzeniach cieplno-przepliwowych oraz ich elementach.

Material zawarty w podręczniku podzielono na dwie części: część pierwsza „Podstawy mechaniki płynów” obejmuje rozdziały 1.–5., część druga „Przepływy płynów lepkich” obejmuje rozdziały 6.–9.; rozdział 10. zawiera natomiast ważniejsze tabele i wykresy do obliczeń z mechaniki płynów. Taki układ umożliwia poznanie zalożeń teoretycznych, równań i metod stosowanych w mechanice płynów oraz podstawowych badań doświadczalnych parametrów hydrodynamicznych. Starano się wykazać, że wszystkie zagadnienia mechaniki płynów wywodzą się z podstawowych zasad zachowania masy, pędu i energii. Omówione zastosowania poznanej teorii do konkretnych zagadnień wskazują, iż umożliwia ona ilościowy opis zjawisk przepływowych zachodzących w urządzeniach, systemach i maszynach stosowanych w praktyce inżynierskiej.

Książka jest przeznaczona przede wszystkim dla studentów wydziałów: mechaniczno-energetycznych i inżynierii środowiska oraz inżynierów–projektantów instalacji i urządzeń cieplno-przepliwowych.

**Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
„Politechnika”
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
budynek A-1 PWr., tel. (0-71) 320-25-34,
„Tech”
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. (0-71) 320-32-52
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową**

ISBN 83-7085-597-0

SPIS RZECZY

PRZEDMOWA	9
ZESTAWIENIE WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ.....	10
CZĘŚĆ PIERWSZA. PODSTAWY MECHANIKI PŁYNÓW	13
1. PODSTAWOWE POJĘCIA I ZAŁOŻENIA. PŁYNY I NIEKTÓRE ICH WŁAŚCIWOŚCI.....	13
1.1. Określenie i podział mechaniki płynów	13
1.1.1. Przedmiot mechaniki płynów.....	13
1.1.2. Określenie płynu	13
1.1.3. Płyny jako ośrodek ciągły	14
1.2. Właściwości płynów	14
1.2.1. Gęstość, ciężar właściwy, objętość właściwa	14
1.2.2. Ściśliwość.....	16
1.2.3. Rozszerzalność cieplna	18
1.2.4. Lepkość	18
1.2.5. Rozpuszczalność gazów w cieczach oraz parowanie cieczy.....	21
1.3. Siły działające w płynach.....	22
1.3.1. Siły masowe	23
1.3.2. Siły powierzchniowe.....	24
1.3.3. Stan naprężeń w punkcie.....	25
1.3.4. Ciśnienie jako wielkość skalarowa.....	27
1.3.5. Rodzaje i jednostki ciśnienia.....	29
1.4. Koncepcje podstawowe	30
1.4.1. Pola fizyczne i ich klasyfikacja	30
1.4.2. Opis przepływu i jego klasyfikacja	31
1.4.3. Rodzaje przepływów	32
1.4.4. Podział mechaniki płynów	35
2. PODSTAWOWE POJĘCIA I TWIERDZENIA KINEMATYKI PŁYNÓW	36
2.1. Metody badań ruchu płynu.....	36

2.1.1. Metoda Lagrange'a	36
2.1.2. Metoda Eulera	38
2.2. Tor elementu płynu i linia prądu	40
2.3. Strumień objętości i strumień masy	42
2.4. Cyrkulacja wektora prędkości. Twierdzenie Stokesa.....	43
2.5. Ruch lokalny płynu. Pierwsze twierdzenie Helmholtza.....	45
2.5.1. Ruch elementu płynu.....	45
2.5.2. Prędkość kątowa i prędkość deformacji elementu płynu	48
2.6. Przepływ potencjalny (bezwirowy) płynu.....	53
2.6.1. Przestrzenny przepływ potencjalny.....	53
2.6.2. Przykłady przestrzennych pól potencjalnych.....	55
2.6.3. Płaski ruch potencjalny	58
2.6.4. Przykłady płaskich pól potencjalnych.....	60
2.7. Ruch wirowy płynu. Drugie twierdzenie Helmholtza	63
3. PODSTAWOWE RÓWNANIA MECHANIKI PŁYNÓW	67
3.1. Zasada zachowania masy	67
3.1.1. Ogólna postać równania ciągłości.....	67
3.1.2. Równanie ciągłości ruchu jednowymiarowego.....	69
3.1.3. Strumień przepływu i prędkość średnia	71
3.2. Zasada zachowania pędu	72
3.2.1. Ogólna postać zasad zachowania pędu	72
3.2.2. Równanie zachowania pędu płynu nielepkiego i nieściśliwego (cieczy doskonałej)	73
3.3. Zasada zachowania momentu pędu	74
3.4. Zasada zachowania energii.....	76
3.4.1. Ogólna postać zasady zachowania energii całkowitej	76
3.4.2. Równanie zachowania energii płynu nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła	77
4. STATYKA PŁYNÓW	80
4.1. Równowaga płynu	80
4.1.1. Warunki równowagi płynów. Prawo Pascala.....	80
4.1.2. Równowaga w potencjalnym polu sił masowych	82
4.1.3. Równowaga cieczy w ziemskim polu grawitacyjnym	82
4.1.4. Równowaga cieczy w naczyniach połączonych.....	85
4.1.5. Zasada pomiaru ciśnień statycznych. Manometry cieczowe.....	86
4.1.6. Równowaga atmosfery ziemskiej.....	89
4.1.7. Równowaga względna cieczy podczas postępowego i obrotowego ruchu naczynia	93
4.2. Napór płynów na ściany naczyń.....	98
4.2.1. Napór hydrostatyczny na ściany płaskie	98

4.2.2. Wyznaczanie naporu metodą wykresową	101
4.2.3. Napor hydrostatyczny na ściany zakrzywione	102
4.2.4. Napor gazu	104
4.3. Napor płynów na ciała w nich zanurzone.....	104
4.3.1. Wypór hydrostatyczny. Prawo Archimedesa	104
4.3.2. Równowaga ciał zanurzonych.....	106
4.3.3. Stateczność równowagi ciał pływających	107
5. DYNAMIKA PŁYNU NIELEPKIEGO I NIEPRZEWODZĄCEGO CIEPŁA ...	111
5.1. Podstawowe równanie ruchu płynu doskonałego.....	111
5.1.1. Równanie Eulera w postaci ogólnej	112
5.1.2. Równanie Eulera w formie Lamba i Gromeki	112
5.2. Całkowanie równań Eulera.....	113
5.2.1. Całka Cauchy'ego–Lagrange'a	114
5.2.2. Całka Bernoulliego.....	116
5.3. Niektóre zastosowania równania Bernoulliego	118
5.3.1. Graficzna interpretacja równania Bernoulliego	118
5.3.2. Zastosowanie równania Bernoulliego w zagadnieniach pomiaru prędkości i strumienia objętości.....	120
5.3.3. Zastosowanie równania Bernoulliego w zagadnieniach wypływu przez otwory i przystawki	129
5.3.4. Zjawiska towarzyszące przepływowi przez przewężenia	140
5.3.5. Opływ walca o przekroju kołowym. Siła nośna.....	145
5.4. Zastosowanie zasady zachowania pędu i momentu pędu.....	152
5.4.1. Reakcja hydrodynamiczna w przewodach	153
5.4.2. Reakcja płynu wypływającego	155
5.4.3. Reakcja strugi swobodnej na przegrodę nieruchomą	155
5.4.4. Reakcja strugi swobodnej na przegrodę ruchomą	159
5.4.5. Zmiana momentu pędu strugi.....	160
CZEŚĆ DRUGA. PRZEPŁYWY PŁYNÓW LEPKICH	163
6. DYNAMIKA PŁYNÓW LEPKICH	163
6.1. Związek między odkształceniami elementu płynu i naprężeniami	163
6.1.1. Związki między odkształceniami i naprężeniami stycznymi	163
6.1.2. Związki między odkształceniami i naprężeniami normalnymi	165
6.2. Równanie Naviera–Stokesa.....	166
6.3. Podobieństwo i modelowanie przepływów	168
6.3.1. Podstawowe pojęcia analizy wymiarowej.....	168
6.3.2. Przestrzeń liniowa, przestrzeń wymiarowa i przestrzeń wymiarów	170
6.3.3. Funkcje wymiarowe	179
6.3.4. Postać funkcji wymiarowej	180

6.3.5. Podobieństwo modelowe.....	189
6.4. Przepływ laminarny.....	196
6.4.1. Istota przepływu laminarnego	196
6.4.2. Dokładne rozwiązań równania Naviera–Stokesa	200
6.5. Podstawy teorii warstwy przyściennej	207
6.5.1. Pojęcie warstwy przyściennej	207
6.5.2. Równania przepływu w laminarnej warstwie przyściennej	209
6.5.3. Zmiana pędu w warstwie przyściennej	213
6.6. Przejście przepływu laminarnego w turbulentny. Doświadczenie Reynoldsa ...	214
6.7. Elementy teorii przepływu turbulentnego	217
6.7.1. Istota przepływu turbulentnego i definicje parametrów uśrednionych	217
6.7.2. Równania ruchu w przepływie turbulentnym	220
6.7.3. Naprężenia turbulentne	224
6.8. Półempiryczne metody obliczania przepływów turbulentnych.....	227
6.8.1. Turbulentna warstwa przyścienna.....	227
6.8.2. Przepływy swobodne.....	230
6.8.3. Przepływy przyścienne.....	237
6.9. Oderwanie warstwy przyściennej.....	243
6.10. Opływ ciała stałego płynem. Czynniki wpływające na opór ciał.....	245
 7. PRZEPŁYW PŁYNÓW W PRZEWODACH POD CIŚNIENIEM.....	251
7.1. Przepływ w przewodzie zamkniętym o przekroju kołowym.....	251
7.1.1. Przepływ turbulentny w przewodzie zamkniętym – profil prędkości ..	251
7.1.2. Równanie ustalonego ruchu płynu nieściśliwego	255
7.2. Straty hydrauliczne wywołane tarciem	258
7.2.1. Opory liniowe podczas przepływu płynów	258
7.2.2. Straty energii w przepływie nieizotermicznym	264
7.2.3. Zmniejszanie liniowych strat hydraulicznych w przepływie turbulentnym.....	264
7.3. Straty hydrauliczne wywołane oporami miejscowymi.....	266
7.3.1. Przepływ przez przewód prosty rozszerzający się	267
7.3.2. Przepływ przez przewód prosty zwężający się	271
7.3.3. Przepływ ze zmianą kierunku	273
7.3.4. Przepływ przez urządzenie dławiące.....	276
7.3.5. Łączenie i dzielenie się strug	278
7.3.6. Przepływ przez przewody spawane.....	279
7.3.7. Zależność współczynnika oporu lokalnego od liczby Reynoldsa...	280
7.3.8. Wzajemne oddziaływanie oporów miejscowych	282
7.4. Ustalony przepływ płynów w systemach hydraulicznych.....	283
7.4.1. Przepływ płynu nieściśliwego w systemie szeregowym	283
7.4.2. Charakterystyka przepływu przewodu (szeregowego systemu hydraulicznego).....	287

7.4.3. Wykres Ancony.....	290
7.4.4. Przepływ płynu nieściśliwego w systemach z węzłami	292
7.5. Nieustalony przepływ płynów w przewodach.....	301
7.5.1. Nieustalony przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej	302
7.5.2. Uderzenie hydrauliczne	306
8. PRZEPŁYW CIECZY W PRZEWODACH OTWARTYCH.....	317
8.1. Podstawowe pojęcia	317
8.2. Klasyfikacja ruchu cieczy w kanałach otwartych.....	318
8.2.1. Ruchy równomierne i nierównomierne.....	318
8.2.2. Przepływy spokojne i rwące.....	318
8.3. Ruch równomierny w przewodach otwartych.....	318
8.3.1. Równanie Bernoulliego.....	318
8.3.2. Równanie hydrodynamiczne ruchu równomiernego.....	320
8.3.3. Formuły określające prędkość i współczynnik oporu	321
8.3.4. Rozkład prędkości w przekrojach: poziomym i pionowym	321
8.3.5. Najkorzystniejszy przekrój poprzeczny kanału.....	323
8.3.6. Przepływ w rurach niecałkowicie wypełnionych cieczą.....	324
8.4. Ruch nierównomierny w przewodach otwartych	325
8.4.1. Równanie nierównomiernego ruchu ustalonego	325
8.4.2. Energia rozporządzalna w przekroju przepływowym kanału	327
8.4.3. Przepływ spokojny i rwący	329
8.4.4. Próg wodny	330
9. RUCH PŁYNÓW W OŚRODKACH POROWATYCH	334
9.1. Opis przepływu w ośrodku porowatym.....	334
9.1.1. Podstawowe pojęcia	334
9.1.2. Filtracja wód gruntowych.....	335
9.1.3. Podstawowe zagadnienie filtracji. Doświadczenie Darcy'ego.....	336
9.2. Równania ruchu wód gruntowych.....	339
9.2.1. Równanie zachowania pędu w ruchu filtracyjnym	339
9.2.2. Równanie ciągłości przepływu w ośrodku porowatym.....	341
9.3. Niektóre rozwiązania równań filtracji wód gruntowych	343
9.3.1. Warunki brzegowe w zagadnieniach filtracji wód gruntowych	343
9.3.2. Równomierna filtracja wód gruntowych	344
9.3.3. Dopływ wody gruntowej do rowu.....	345
9.3.4. Dopływ wody gruntowej do studni	347
9.3.5. Współdziałanie zespołu studni	352
9.3.6. Współczynnik filtracji	354
10. WAŻNIEJSZE TABELE I WYKRESY DO OBLCIĘŃ Z MECHANIKI PŁYNÓW	356

10.1. Dane pomocnicze	356
10.2. Właściwości fizyczne cieczy	357
10.3. Właściwości fizyczne gazów.....	363
10.4. Tabele współczynników przepływu i liczb ekspansji.....	366
10.5. Wypływ przez otwory i przystawki.....	369
10.6. Straty liniowe i miejscowe	371
LITERATURA	385

PRZEDMOWA

W podręczniku przedstawiono podstawowe wiadomości z mechaniki płynów oraz omówiono problemy ważne z punktu widzenia potrzeb zarówno studentów, jak i inżynierów zajmujących się zagadnieniami przepływów w maszynach, instalacjach, urządzeniach cieplno-przepływowych oraz ich elementach. Książka jest przeznaczona przede wszystkim dla studentów wydziałów: mechaniczno-energetycznych i inżynierii środowiska oraz inżynierów-projektantów instalacji i urządzeń cieplno-przepływowych. Została ona opracowana na podstawie prowadzonych przez nas wykładów, rozważań własnych oraz treści zawartych w skryptach (których współautorami byli dr inż. Zdzisław Bechtold i mgr inż. Władysław Siuta) wydanych przez Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej.

Materiał zawarty w podręczniku podzielono na dwie części: część pierwsza „Podstawy mechaniki płynów” obejmuje rozdziały 1.–5., część druga „Przepływy płynów lepkich” obejmuje rozdziały 6.–9.; rozdział 10. zawiera natomiast ważniejsze tabele i wykresy do obliczeń z mechaniki płynów. Taki układ umożliwia poznanie założeń teoretycznych, równań i metod stosowanych w mechanice płynów oraz podstawowych badań doświadczalnych parametrów hydrodynamicznych. Starano się wykazać, że wszystkie zagadnienia mechaniki płynów wywodzą się z podstawowych zasad zachowania masy, pędu i energii. Omówione zastosowania poznanej teorii do konkretnych zagadnień wskazują, iż umożliwia ona ilościowy opis zjawisk przepływowych zachodzących w urządzeniach, systemach i maszynach stosowanych w praktyce inżynierskiej.

Autorzy dziękują Recenzentom za wnikliwe uwagi, które umożliwiły lepszą prezentację omawianych zagadnień. Dziękują również Ministerstwu Edukacji Narodowej za przyznaną dotację i władzom Politechniki Wrocławskiej za dofinansowanie wydania pozycji.

Serdeczne słowa podziękowania przekazują także swoim współpracownikom za życzliwe uwagi, a mgr. inż. Jarosławowi Fydrychowi za komputerowe opracowanie rysunków.

Wrocław, listopad 2001

*Krystyna Jeżowiecka-Kabsch
Henryk Szewczyk*

ZESTAWIENIE WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

a	– pole powierzchni elementarnej, przyśpieszenie
b	– szerokość
c	– szybkość rozchodzenia się fal ciśnienia
c_x	– współczynnik oporu
d	– średnica
e_p	– wysokość energii potencjalnej (jednostkowej)
f	– jednostkowa siła masowa
g	– przyśpieszenie ziemskie
h	– wysokość ciśnienia, wysokość napełnienia, wysokość położenia
Δh	– wysokość spadku ciśnienia, wysokość różnicy ciśnienia
Δh^s	– wysokość straty hydraulicznej
i	– entalpia
k	– chropowatości bezwzględna, współczynnik filtracji
l	– długość
m	– masa, wysokość metacentryczna, współczynnik porowatości
p	– ciśnienie
p_b	– ciśnienie barometryczne (atmosferyczne)
p_n	– nadciśnienie
p_{st}	– ciśnienie statyczne
p_v	– podciśnienie
p_w	– ciśnienie wrzenia
Δp	– różnica ciśnień, ciśnienie dynamiczne
Δp^i	– ciśnienie bezwładności
Δp^s	– strata ciśnienia
q	– strumień przepływu, jednostkowy strumień objętości
q_m	– strumień masy
q_v	– strumień objętości
r	– promień
s	– długość łuku krzywej, droga
t	– czas, temperatura
v	– prędkość, objętość właściwa

x, y, z	– współrzędne układu prostokątnego
z	– wysokość niwelacyjna, wysokość położenia
Δz	– różnica wysokości słupa cieczy
A	– pole przekroju, powierzchnia
B	– szerokość kanału
C	– stała, współczynnik de Chezy'ego
D	– średnica
E	– wysokość energii, moduł sprężystości
E_0	– moduł sprężystości cieczy
E_p	– wysokość energii potencjalnej
E_v	– wysokość energii kinetycznej
Fr	– liczba Froude'a
Eu	– liczba Eulera
G	– ciężar
H	– wielkość fizyczna, wysokość rozporządzalna
I	– spadek hydrauliczny, moment bezwładności
L	– długość
M	– moment siły
N	– napór
P	– siła
Q	– siła masowa
R	– promień, stała gazowa
Re	– liczba Reynoldsa
R_h	– promień hydrauliczny
S	– kontur
St	– liczba Strouhala
T	– siła tarcia, temperatura bezwzględna
U	– obwód; obwód zwilżony, potencjał jednostkowych sił masowych
W	– opory ruchu; wirowość, wypór hydrostatyczny
V	– objętość
X, Y, Z	– współrzędne jednostkowej siły masowej
α	– kąt, współczynnik Coriolisa
β	– kąt, przewężenie zwężki, współczynnik rozszerzalności objętościowej, współczynnik Boussinesqua
δ	– grubość warstwy przyściennej
ε	– liczba ekspansji, chropowatość względna
ζ	– współczynnik oporów miejscowych
ϕ	– kąt, współczynnik prędkości
κ	– napięcie powierzchniowe, współczynnik kontrakcji (zwężenia); współczynnik przesączalności gruntu, wykładnik adiabaty
λ	– współczynnik oporów liniowych

μ	– dynamiczny współczynnik lepkości, współczynnik wypływu lub przepływu
ν	– kinematyczny współczynnik lepkości
ξ	– współczynnik ściśliwości
ρ	– gęstość
σ	– naprężenie
τ	– naprężenie styczne
ω	– prędkość kątowa
Φ	– potencjał prędkości
Γ	– cyrkulacja wektora prędkości
Ψ	– funkcja prądu

CZĘŚĆ PIERWSZA

PODSTAWY MECHANIKI PŁYNÓW

*We wszystkich swych ruchach woda ma
wielkie podobieństwo z powietrzem.*
Leonardo da Vinci
(przel. L. Staff)

1. PODSTAWOWE POJĘCIA I ZAŁOŻENIA. PŁYNY I NIEKTÓRE ICH WŁAŚCIWOŚCI

1.1. OKREŚLENIE I PODZIAŁ MECHANIKI PŁYNÓW

1.1.1. PRZEDMIOT MECHANIKI PŁYNÓW

Mechanika plynów jest działem fizyki ośrodków ciągłych obejmującym zagadnienia równowagi i ruchu plynów, a także działanie plynów na ściany ograniczające oraz na zanurzone w nich ciała.

Jako dyscyplinę teoretyczną, mechanikę plynów rządzą te same prawa co mechaniką ciała stałego. Zagadnienia ruchu i równowagi plynów są jednak bardziej złożone niż zagadnienia mechaniki ciała stałego. Wynika to przede wszystkim z właściwości plynów rzeczywistych. W tym przypadku metody teoretyczne muszą być uzupełnione metodami doświadczalnymi. Doświadczenie odgrywa zatem w mechanice plynów doniosłą rolę, ponieważ analiza matematyczna opisująca przepływ plynów rzeczywistych umożliwia jedynie bardzo ogólne poznanie ich natury.

Zakres zastosowań teoretycznej i doświadczalnej mechaniki plynów w wielu dziedzinach techniki jest bardzo szeroki. Z przepływami takich czynników, jak gaz, woda, olej, para, spotykamy się w energetyce, maszynach energetycznych, inżynierii chemicznej i środowiska (wodociągi, kanalizacja, ogrzewnictwo, wentylacja, klimatyzacja, odpylanie i in.), lotnictwie, okrętownictwie, przepływowej aparaturze przemysłowej, urządzeniach chłodniczych, transporcie rurowym cieczy i gazów, układach hydraulicznych. Mechanika plynów tworzy podstawy teoretyczne i doświadczalne wymienionych dziedzin specjalistycznych.

1.1.2. OKREŚLENIE PŁYNU

Pojęciem *plunu* obejmujemy zarówno ciecze, jak i gazy. Są to ciała o wspólnej cechę *niezdolności utrzymania kształtu* (mające bardzo małą sprężystość postaciową), a więc wielką łatwość zmiany wzajemnego położenia poszczególnych elementów płynu

w obrębie jego rozpatrywanej masy. Cechą ta odróżnia płyny od ciał stałych, które mogą zmieniać swój kształt jedynie pod działaniem dużych sił zewnętrznych (charakteryzują się zarówno sprężystością postaciową, jak i objętościową).

Ciecze różnią się od gazów tym, że nie przejawiają tendencji do nieograniczonego rozszerzania się; mają zatem samoistną objętość, nieznacznie zmieniającą się pod wpływem sił zewnętrznych, charakteryzują się więc sprężystością objętościową. *Ciecze są bardzo mało ściśliwe, gazy natomiast odznaczają się dużą ściśliwością* i w zwykłych warunkach zajmują całą przestrzeń, w której się znajdują (brak zarówno sprężystości postaciowej, jak i objętościowej). Czasami można również i gazy uważać za płyny nieściśliwe, a mianowicie podczas przepływu gazów z małymi i umiarkowanymi prędkościami w stosunku do prędkości dźwięku. W tym przypadku zachodzą niewielkie zmiany ciśnień w odniesieniu do średniej wartości, zmiany zaś objętości, a zatem i gęstości, są tak małe, że zwykle się je pomija. Zawsze, kiedy nie występuje swobodna powierzchnia cieczy i można nie uwzględniać ściśliwości gazu, równania mechaniki płynów rządzące ich ruchem i równowagą są *te same dla cieczy i gazów*.

1.1.3. PŁYNY JAKO OŚRODEK CIĄGŁY

W mechanice płynów, podobnie jak w mechanice ciała stałego, płyn rzeczywisty zastępuje się modelem teoretycznym. Przez nieuwzględnianie struktury cząsteczkowej i nieuporządkowanych ruchów cząsteczek przyjmuje się, że model teoretyczny płynu jest *ośrodkiem ciągłym* (continuum). Rozumie się przez to, że płyn ten jest materią ciągłą, wypełniającą przestrzeń w sposób doskonale ciągły (tzn. dowolnie małe otoczenie punktu w tej przestrzeni zachowuje jej właściwości). Założenie ciągłości wprowadza jednak pewne ograniczenia dotyczące najmniejszej masy płynu (dopuszczalnie małego otoczenia), w której obowiązują ogólne prawa mechaniki. Najmniejsza objętość musi być dostatecznie wielka w stosunku do długości swobodnych dróg międzycząsteczkowych, a równocześnie dużo mniejsza w stosunku do wymiarów liniowych ciał stałych ograniczających rozpatrywaną masę płynu lub poruszających się w płynie. Objętość ta będzie nazywana *elementem płynu*.

Przy założeniu *makroskopowego modelu płynu* jako ośrodka ciągłego ustalonego podstawowe równania klasycznej mechaniki płynów.

1.2. WŁAŚCIWOŚCI PŁYNÓW

1.2.1. GĘSTOŚĆ, CIĘŻAR WŁAŚCIWY, OBJĘTOŚĆ WŁAŚCIWA

Gęstością średnią elementu płynu, o masie Δm , ograniczonej objętością ΔV , zawierającego punkt $M(x, y, z)$ w chwili t (rys. 1.1), nazywa się iloraz

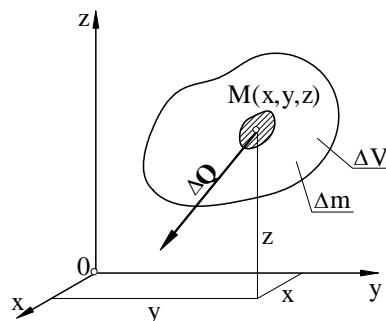
$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (1.1)$$

Gęstością płynu w punkcie $M(x, y, z)$ w chwili t nazywa się granicę ilorazu $\Delta m/\Delta V$, gdy objętość ΔV dąży do zera,

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

czyli

$$\rho = \frac{dm}{dV}. \quad (1.1')$$



Rys. 1.1. Obszar przestrzenny i element płynu

W ogólnym przypadku gęstość płynu zależy od czasu, temperatury i ciśnienia. Płyn poddany temu samemu ciśnieniu ma gęstość w każdym punkcie jednakową i równą

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1.1'')$$

Rzadziej używane jest pojęcie *ciężaru właściwego*, który jest ilorazem gęstości i przyśpieszenia ziemskiego

$$\gamma = \rho g. \quad (1.2)$$

Podstawową jednostką gęstości jest kg/m^3 , natomiast ciężaru właściwego N/m^3 .

Odwrotność gęstości, czyli

$$v = \frac{dV}{dm} = \frac{1}{\rho}, \quad (1.3)$$

jest nazywana *objętością właściwą* i podawana w m^3/kg .

Gęstość zmniejsza się zwykle ze wzrostem temperatury (dla wody poniżej 4°C zależność ta jest anormalna), a zwiększa z podwyższeniem ciśnienia.

Zależność ta dla gazu doskonałego jest określona równaniem stanu

$$\frac{P}{\rho} = RT, \quad (1.4)$$

a dla cieczy układem równań empirycznych

$$\rho = \rho_0 (1 + a(p - p_0) + b(p - p_0)^2), \quad (1.5')$$

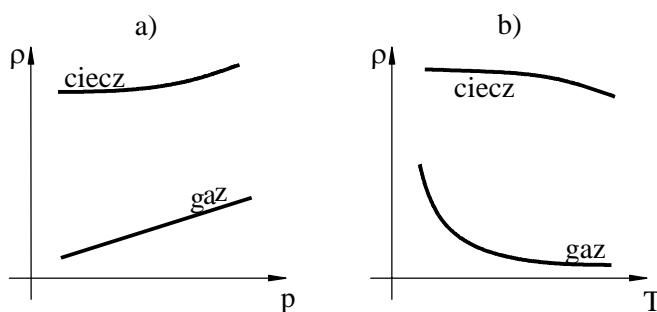
$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_{\text{sr}}(T - T_0))^{-1}, \quad (1.5'')^{1)}$$

w których:

a, b i β_{sr} – stałe doświadczalne, zależne od budowy molekularnej cieczy,

ρ_0 – gęstość cieczy w temperaturze $T_0 = 273$ K, $p_0 \equiv p_b = 0,1013$ MPa.

Na rysunku 1.2 przedstawiono jakościowe zmiany gęstości płynów w zależności od ciśnienia i temperatury.



Rys. 1.2. Jakościowe zmiany gęstości płynów w zależności od ciśnienia (a) i temperatury (b)

Gęstość cieczy w szerokim zakresie wartości ciśnienia i temperatury zmienia się nieznacznie, co w wielu przypadkach pozwala przyjmować $\rho = \text{const}$.

Gęstość gazu jest funkcją ciśnienia i temperatury oraz dodatkowo zależy od prędkości gazu, lecz wpływ ten uwidacznia się dopiero przy dużych prędkościach. Przy małych prędkościach i niewielkich jej zmianach $\rho = \text{const}$ przyjmuje się również w przypadku gazu.

Plyn, którego gęstość jest stała lub zależy tylko od ciśnienia, czyli $\rho = \rho(p)$, jest nazywany *płynem barotropowym*, jego przeciwnieństwem jest *płyn baroklinowy*. Gęstość niektórych płynów przedstawiono w tabelach 10.2.1–10.2.6 oraz 10.3.1–10.3.2.

1.2.2. ŚCIŚLIWOŚĆ

Ściśliwość płynu charakteryzuje jego podatność na odkształcenie objętościowe przy zmianie ciśnienia.

Niech masa płynu o objętości V , w temperaturze T , znajduje się pod ciśnieniem p . Zmiana ciśnienia o wartość Δp powoduje zmianę objętości płynu o ΔV .

¹⁾ Zależność (1.5'') jest słuszna tylko dla niezbyt dużych zmian temperatury.

Średnim współczynnikiem ściśliwości jest nazywany iloraz względnej zmiany objętości do zmiany ciśnienia, czyli

$$\xi = \frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{1}{\Delta p}. \quad (1.6)$$

Po przejściu granicznym współczynnik ściśliwości płynu znajdującego się pod ciśnieniem p wynosi

$$\xi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}. \quad (1.7)^1)$$

Jednostką współczynnika ściśliwości jest $1/\text{Pa}$ (Pa^{-1}).

Odwrotność współczynnika ściśliwości jest nazywana *modułem sprężystości płynu*

$$E = \frac{1}{\xi} = -V \frac{dp}{dV}. \quad (1.8)$$

Współczynnik ściśliwości można również przedstawić w postaci związku między gęstością i ciśnieniem. Rozpatrzmy określona masę m cieczy poddaną ciśnieniu p . Ponieważ

$$\rho = m/V,$$

więc

$$V = m/\rho \quad \text{i} \quad dV = -m d\rho/\rho^2,$$

a stąd, po podstawieniu do (1.7),

$$\xi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}. \quad (1.9)$$

Po uwzględnieniu równań (1.4) lub (1.5') wyznacza się zależność współczynnika ściśliwości od ciśnienia:

➤ dla gazów (przy ściskaniu izotermicznym)

$$\xi = \frac{1}{p},$$

➤ dla cieczy

$$\xi = \frac{a + 2b(p - p_0)}{1 + a(p - p_0) + b(p - p_0)^2}.$$

Jak widać, istnieje związek między wartością ciśnienia i wartością współczynnika ściśliwości. Ściśliwość cieczy jest tak mała, że w większości przypadków technicznych może być pominięta.

W tabelach 10.2.7 i 10.2.8 przedstawiono wartości współczynników ściśliwości niektórych cieczy, a w tabeli 10.3.3 wartości ξ dla powietrza.

¹⁾ Objętość maleje ze wzrostem ciśnienia, dlatego: $\Delta V = V_1 - V_2$, $\Delta p = -(p_1 - p_2)$ (zob. def. pochodnej funkcji w zastosowaniu do funkcji nieujemnej malejącej).

1.2.3. ROZSZERZALNOŚĆ CIEPLNA

Rozszerzalność cieplna płynu charakteryzuje jego podatność na odkształcenie objętościowe przy zmianie temperatury. Miarą tej odkształcalności jest współczynnik rozszerzalności cieplnej, wyrażający wzonną zmianę objętości przy zmianie temperatury o 1 K

$$\beta = \frac{\Delta V}{V} \frac{1}{\Delta T} \quad (1.10)$$

lub po przejściu do granicy przy $\Delta T \rightarrow 0$

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}. \quad (1.11)$$

Współczynnik rozszerzalności cieplnej jest funkcją temperatury, jednak gdy zmiany temperatury nie są zbyt duże, przyjmuje się $\beta = \beta_{sf} = \text{const}$ w rozpatrywanym przedziale wartości temperatury.

Po wprowadzeniu do wzoru (1.11), w miejsce wzonnnej zmiany objętości, wzonnnej zmiany gęstości (podobnie jak to zrobiono w przypadku zależności (1.7) i (1.9)) otrzymuje się

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \quad (1.12)$$

lub zależność przybliżoną

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T}. \quad (1.13)$$

Wynika stąd, że przyrostowi temperatury towarzyszy zmniejszenie gęstości¹⁾. Ta właściwość płynów jest często wykorzystywana w technice, np. do wywołania cyrkulacji w instalacjach c.o., usuwania produktów spalania, wietrzenia.

W tabeli 10.2.9 przedstawiono współczynniki rozszerzalności cieplnej wody.

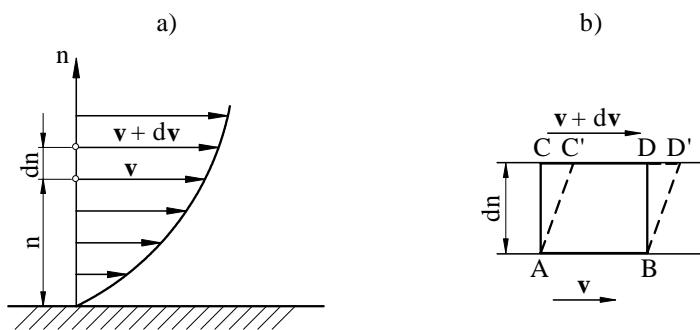
1.2.4. LEPKOŚĆ

Jedną z istotnych właściwości każdego płynu rzeczywistego jest lepkość, która występuje tylko w czasie ruchu wzonnego sąsiednich warstw płynu i zanika wraz z ustaniem ruchu. *Lepkość* jest to zdolność płynów do przenoszenia naprężeń stycznych przy wzajemnym przemieszczaniu elementów poruszających się z różnymi prędkościami. Powstają przy tym siły styczne, które można traktować jako siły tarcia podczas wzajemnego przesuwania warstw płynu po sobie.

¹⁾ Nie dotyczy cieczy w przedziale temperatury [0,4] °C.

Rozpatrując przepływ płynu lepkiego wzdłuż nieruchomej płaskiej ściany, zakładamy, że prędkość elementów płynu znajdujących się bezpośrednio na ścianie jest równa零u (zasada przylegania, braku poślizgu na ścianie). Przy oddalaniu się od ściany w kierunku normalnym (\mathbf{n}) obserwuje się wzrost prędkości (rys. 1.3), przy czym na skutek lepkości każda warstwa płynu w tym obszarze ma inną prędkość. Oznaczając przez dn odległość dwu sąsiednich warstw o polu dA , z których jedna porusza się z prędkością v , a druga z prędkością $v + dv$, określono (zgodnie z hipotezą Newtona) wartość siły stycznej dT przeciwdziałającej postaciowemu odkształceniu elementarnego prostopadłościanu o polu podstawy dA

$$dT = \mu \frac{dv}{dn} dA. \quad (1.14)$$



Rys. 1.3. Przepływ płynu lepkiego w pobliżu płaskiej płytki:
a) rozkład prędkości, b) odkształcenie prostopadłościennego elementu płynu

Naprężenie styczne

$$\tau = \frac{dT}{dA} = \mu \frac{dv}{dn} \quad (1.15)$$

jest więc proporcjonalne do gradientu prędkości.

Płyny, dla których słuszna jest powyższa relacja, są nazwane *niutonowskimi*, natomiast płyny, w których naprężenia styczne nie są liniową funkcją gradientu prędkości – *nieniutonowskimi*. Wiele płynów, szczególnie w zakresie niezbyt dużych prędkości, można z dużym przybliżeniem uważać za płyny niutonowskie.

Występujący we wzorze (1.15) współczynnik proporcjonalności μ jest nazywany *dynamicznym współczynnikiem lepkości* lub krótko – lepkością dynamiczną. Jest to miara lepkości płynu w przepływie, podczas którego występuje pewien gradient prędkości. W układzie SI jednostką dynamicznego współczynnika lepkości jest Pa·s lub kg/(m·s). Praktyczne zastosowanie znajdują jeszcze jednostki:

poise (puaz)

$1 \text{ poise} \equiv 1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s},$

centipoise

$1 \text{ cP} = 10^{-2} \text{ P}.$

Iloraz dynamicznego współczynnika lepkości przez gęstość nazywa się *kinematycznym współczynnikiem lepkości* (krótko – lepkością kinematyczną)

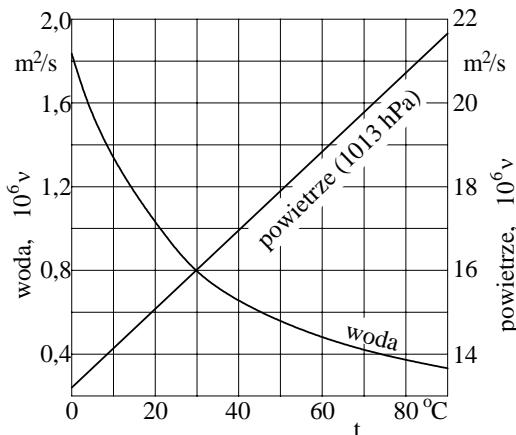
$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.16)$$

Jednostką kinematycznego współczynnika lepkości jest m^2/s . W praktyce spotyka się też jednostki:

stokes	$1 \text{ stokes} \equiv 1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s},$
centistokes	$1 \text{ cSt} = 10^{-2} \text{ St}.$

Lepkość zależy od rodzaju płynu, jego temperatury i nieznacznie od ciśnienia, nie zależy natomiast (dla płynu niutonowskiego) od prędkości ani od gradientu prędkości. Z badań wynika, że dla cieczy ze wzrostem temperatury lepkość maleje, natomiast dla gazów rośnie. W cieczach wzrost temperatury powoduje powiększenie się odległości pomiędzy cząsteczkami, wskutek czego maleją siły spójności, czemu towarzyszy zmniejszenie się sił tarcia wewnętrznego. Wzrost temperatury gazu zmniejsza średnią drogę swobodną cząstek i powiększa liczbę zderzeń pomiędzy cząsteczkami, co prowadzi do zwiększenia sił tarcia wewnętrznego.

Na rysunku 1.4 podano wykres zależności kinematycznego współczynnika lepkości wody i powietrza od temperatury.



Rys. 1.4. Lepkość wody i powietrza
w zależności od temperatury

W tabelach 10.2.10÷10.2.12 oraz 10.3.4 i 10.3.5 przedstawiono wartości lepkości niektórych płynów.

Współczynniki lepkości wyznacza się doświadczalnie za pomocą *lepkościomierzy* (wiskozymetrów). Najbardziej są rozpowszechnione lepkościomierze następujących systemów:

➤ *wypływowe*, działające na zasadzie pomiaru czasu laminarnego wypływu cieczy lepkiej z pojemnika o określonej objętości przez pionową rurkę włoskowatą i porównanie tego czasu z czasem wypływu tej samej objętości wody destylowanej (lepkościomierz Englera). Znając lepkość cieczy w stopniach Englera, można określić kinematyczny współczynnik lepkości (ν w St) z doświadczalnego wzoru

$$\nu = 0,0731 \cdot {}^{\circ}\text{E} - \frac{0,0631}{{}^{\circ}\text{E}} ; \quad (1.17)$$

➤ *rotacyjne*, działające na zasadzie pomiaru momentu oporu występującego przy obrocie jednego z dwóch współosiowych cylindrów, między którymi znajduje się warstwa cieczy lepkiej (lepkościomierz Couette'a, Hatscheka), bądź między obracającym się stożkiem a płaszczyzną. Mierząc wartość siły oporu cieczy znajdującej się w szczelinie między tymi cylindrami albo stożkiem i płaszczyzną, określa się wartość współczynnika lepkości;

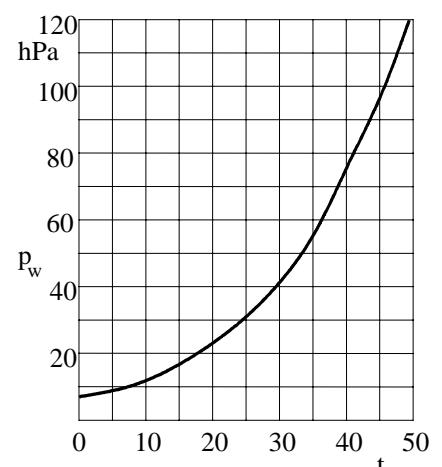
➤ *kulkowe*, których zasada działania polega na pomiarze czasu opadania kulki o znanej średnicy i gęstości w cieczy o wyznaczanej lepkości (lepkościomierz Hopple-ra). Czas opadania zależy od oporu stawianego przez ciecz;

➤ *kapilarne*, których zasada działania jest oparta na pomiarze spadku ciśnienia na określonej długości przewodu o znanej średnicy i znany laminarnym przepływie. Wartość tego spadku ciśnienia zależy (zgodnie z zależnością podaną przez Poisseuille'a) od lepkości płynu.

1.2.5. ROZPUSZCZALNOŚĆ GAZÓW W CIECZACH ORAZ PAROWANIE CIECZY

Ciecz, stykając się z gazami, mają zdolność *pochłaniania gazów*. Ilość rozpuszczonego w cieczy gazu zależy od temperatury i ciśnienia; wyższe ciśnienie gazu oraz niższa temperatura cieczy intensyfikują proces wnikania cząstek gazu w obszar cieczy.

Podczas przepływu cieczy nasyconej gazem, np. wody o pewnej zawartości powietrza, może wystąpić zjawisko wyzwalania się cząstek powietrza w tych miejscach, gdzie zachodzi spadek ciśnienia, spowodowany np. nagłą zmianą przekroju przepływowego.



Rys. 1.5. Ciśnienie wrzenia (parowania) wody w zależności od temperatury

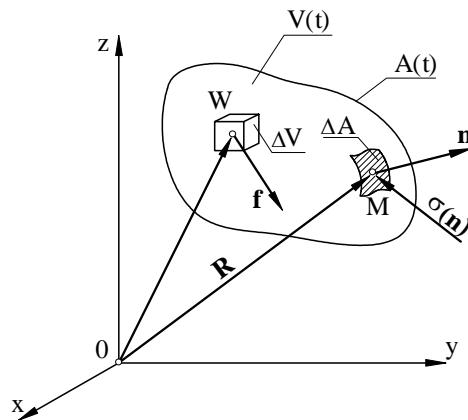
Zjawisko wytwarzania pary na powierzchni swobodnej cieczy, zachodzące niezależnie od temperatury i ciśnienia, jest nazywane *parowaniem*.

Gwałtowne parowanie, zwane wrzeniem, polegające na ustawicznym przechodeniu cząstek cieczy przez powierzchnię swobodną cieczy z prędkościami zwróconymi na zewnątrz obszaru ciekłego, może zachodzić tylko przy określonym ciśnieniu i temperaturze, nazywanych *ciśnieniem wrzenia* p_w i *temperaturą wrzenia* t_w . Im wyższe jest ciśnienie, tym wyższa jest temperatura wrzenia i odwrotnie. Szczegółowe informacje na ten temat czytelnik może znaleźć w podręcznikach termodynamiki.

Na rysunku 1.5 przedstawiono zależność ciśnienia wrzenia wody od jej temperatury, a wartości ciśnienia wrzenia wody dla różnych temperatur podano w tabeli 10.2.13.

1.3. SIŁY DZIAŁAJĄCE W PŁYNACH

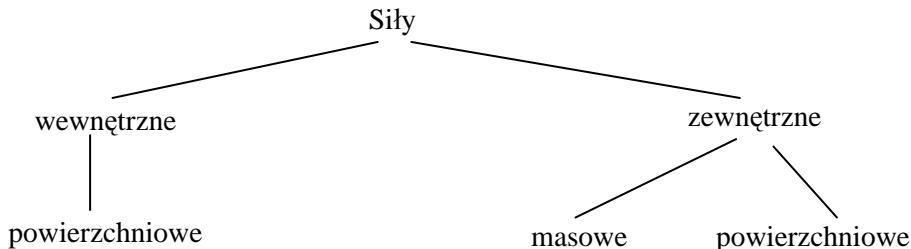
W obszarze wypełnionym płynem wydziela się pewną jego część o objętości $V(t)$ ograniczoną powierzchnią $A(t)$ i rozpatruje działające nań siły (rys. 1.6). Zależnie od źródła ich pochodzenia mogą to być siły wewnętrzne lub zewnętrzne.



Rys. 1.6. Elementarna siła masowa i powierzchniowa

Siły wewnętrzne są wywołane wzajemnym oddziaływaniem elementów mas leżących wewnątrz wydzielonej części obszaru i bezpośrednio sąsiadujących ze sobą. Występują one parami jako dwie siły o wspólnej linii działania i przeciwnych zwrotach. Siły wewnętrzne są siłami *powierzchniowymi*, są bowiem przyłożone bezpośrednio do powierzchni oddzielającej dwa sąsiednie elementy płynu.

Siły zewnętrzne są wynikiem działania mas nie należących do wydzielonego obszaru na poszczególne masy tego obszaru. Siły zewnętrzne mogą być: *masowe* lub *powierzchniowe*.



1.3.1. SIŁY MASOWE

Siły *masowe* albo *objętościowe* są to siły wywierane bezpośrednio na płyn zawarty w rozważanym obszarze płynnym nie związane z powierzchnią ograniczającą ten obszar.

Do sił masowych zalicza się (na przykład):

- siłę grawitacyjną występującą, gdy płyn porusza się w polu grawitacyjnym,
- siłę magnetoelektryczną występującą m.in. wówczas, gdy płyn będący przewodnikiem elektryczności (plastyczny metal, gaz zjonizowany) porusza się w polu elektrycznym,
- siłę bezwładności występującą przy ruchu zmiennym.

Siły masowe działaniem swoim obejmują każdy element płynu i są proporcjonalne do masy elementu Δm , na który działają. Jednostkową siłę masową f w punkcie $W(x, y, z)$ obszaru płynnego nazywa się granicą, do której dąży stosunek siły masowej ΔQ (działającej na masę $\Delta m = \rho \Delta V$, zawartą w elemencie objętościowym ΔV) do masy elementu, gdy wymiary (a zatem i masa) dążą do 0 (rys. 1.6), a zatem

$$f(x, y, z, t) = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta m} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad (1.18)$$

gdzie:

X, Y, Z – współrzędne siły f ,

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – wektory jednostkowe.

Dalej oddziennie będą rozważane siły bezwładności, a nazwa sił masowych zostanie zachowana dla wszystkich pozostałych rodzajów sił czynnych, związanych z masą elementu. Ponadto rozważania ograniczy się do takich sił masowych jednostkowych, które tworzą pole

$$\mathbf{f} = f(x, y, z, t) \quad (1.19)$$

niezależnie od ruchu płynu. Pominięte zatem będzie np. oddziaływanie pola magnetycznego na poruszający się nieobojętny elektrycznie płyn, w tym bowiem przypadku

siła zależałaby dodatkowo od ruchu elementu względem pola magnetycznego, a nie tylko od jego natężenia.

Wektor \mathbf{f} jednostkowej czynnej siły masowej ma wymiar przyśpieszenia

$$[|\mathbf{f}|] = LT^{-2} \Rightarrow \text{m/s}^2.$$

Wektor główny sił masowych działających na rozpatrywaną objętość jest określony całką objętościową

$$\rho \int_V \left(\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dV. \quad (1.20)$$

Drugi jej składnik przedstawia siłę bezwładności.

Gdy jednostkowa siła masowa \mathbf{f} nie zależy od czasu, pole sił nazywa się *konserwatywnym*. Jeżeli istnieje funkcja skalarna U , nazwana potencjałem pola sił masowych, spełniająca warunek $\mathbf{f} = -\text{grad } U$, to pole sił masowych nazywane jest *potencjalnym*.

1.3.2. SIŁY POWIERZCHNIOWE

Siły powierzchniowe są to siły przyłożone na powierzchni płynnej¹⁾ (zmiennej w czasie) i wywierane przez płyn znajdujący się na zewnątrz obszaru płynnego $V(t)$ ograniczonego tą powierzchnią (np. reakcje hydro- czy aerodynamiczne między płynem a poruszającym się w nim ciałem stałym).

Cechą charakterystyczną sił powierzchniowych jest to, że ich *natężenie* w danym punkcie jest wprost proporcjonalne do pola danej powierzchni, na którą działają.

Niech $\Delta\mathbf{P}$ oznacza wektor główny sił działających na element powierzchni o polu ΔA , znajdujący się w punkcie $M(x, y, z)$ na powierzchni $A(t)$ (rys. 1.6).

Granicę stosunku $\Delta\mathbf{P}/\Delta A$, gdy $\Delta A \rightarrow 0$, nazywa się *jednostkową siłą powierzchniową* lub *naprężeniem* i oznacza przez $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta A}. \quad (1.21)$$

Należy zwrócić uwagę na istotną różnicę między wektorami \mathbf{f} i $\boldsymbol{\sigma}$. Jeśli \mathbf{f} jest jednoznaczna funkcją wektorową współrzędnych punktu $M(x, y, z)$ oraz czasu t , to naprężenie $\boldsymbol{\sigma}$ w płynie może przybierać w każdym punkcie ośrodka nieskończenie wiele wartości (gdyż przez punkt M można przeprowadzić nieskończenie wiele powierzchni). Kierunek elementu powierzchniowego otaczającego punkt M określony jest przez jednostkowy wektor normalny zewnętrzny $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$, czyli

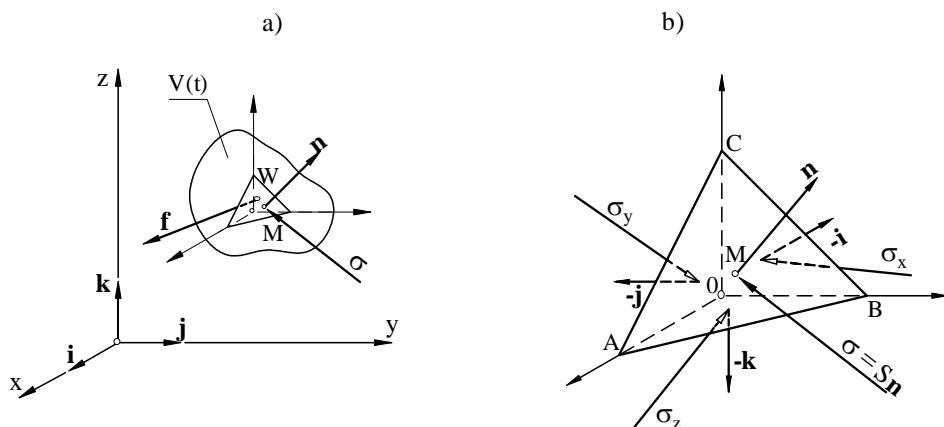
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, y, z, n_x, n_y, n_z, t), \quad (1.22)$$

przy czym n_x, n_y, n_z są współrzędnymi wektora \mathbf{n} ($\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = |\mathbf{n}| = 1$).

¹⁾ Powierzchnię płynną tworzą zawsze te same elementy płynu.

1.3.3. STAN NAPRĘŻEN W PUNKCIE

Celem rozważań jest określenie zależności wektora naprężenia σ (wektora jednostkowej siły powierzchniowej) od jednostkowego wektora n normalnego do powierzchni $A(t)$ w punkcie $M(x, y, z)$ i w chwili t ¹⁾ (rys. 1.6). W tym celu z objętości $V(t)$ wyodrębnia się elementarny czworościan zawierający, w chwili t , punkt M (rys. 1.7). Wektorami normalnymi zewnętrznymi orientującymi ściany tego czworościanu będą: $n, -i, -j, -k$.



Rys. 1.7. Jednostkowe siły w otoczeniu punktu M :
 a) siła powierzchniowa i masowa, b) siły powierzchniowe

Na element płynu działają następujące siły:

➤ powierzchniowe (proporcjonalne do pola powierzchni)

$$a \sigma(n), \quad a_r \sigma(-m) \quad (r \in \{x, y, z\}, \quad m \in \{i, j, k\}),$$

➤ masowe (proporcjonalne do masy)

$$\rho f dV \quad \text{i} \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV,$$

gdzie:

a – pole elementu należącego do powierzchni $A(t)$ (trójkąta ABC),

a_x, a_y, a_z – odpowiednio pola powierzchni trójkątów BCD, ACD, ABD , które są rżutami pola a na płaszczyzny yz, xz, xy (rys. 1.7).

Ponieważ element o polu a i cały czworościan są małe, można przyjąć, że siły przypadające na jednostkę pola oraz ρ, f i \mathbf{v} można w nim uważać za stałe.

¹⁾ Badany jest związek naprężen z wektorem n w ustalonym punkcie i chwili t , dlatego zastosowano skrócony zapis $\sigma(n), \sigma(-m)$ ($m = i, j, k$).

Drugą zasadę Newtona odniesioną do płynu zawartego w czworościanie można więc zapisać w postaci równości wektorowej

$$a\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) + a_x\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{i}) + a_y\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{j}) + a_z\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{k}) + \rho f dV = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV. \quad (1.23)$$

Jak wiadomo jednak z geometrii, współrzędne n_x, n_y, n_z wektora \mathbf{n} są równe kosinusom kierunkowym odpowiednich osi układu współrzędnych, stąd

$$a_x = a n_x, \quad a_y = a n_y, \quad a_z = a n_z. \quad (1.24)$$

Gdy objętość czworościanu dąży do zera (otoczenie punktu M jest dowolnie małe), długości krawędzi rozpatrywanego czworościanu elementarnego maleją również do zera, wówczas siły masowe, łącznie z siłą bezwładności, stają się nieskończonymi małymi trzeciego rzędu (jako proporcjonalne do objętości), a siły powierzchniowe nieskończonymi małymi drugiego rzędu (jako proporcjonalne do pola powierzchni). Po pominięciu sił masowych i uproszczeniu równanie (1.23) ma postać

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) + n_x \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{i}) + n_y \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{j}) + n_z \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{k}) = \mathbf{0}. \quad (1.25)$$

Wynika stąd, że siły powierzchniowe są w *lokalnej*¹⁾ równowadze.

Ta lokalna równowaga jest zachowana dla wszystkich możliwych wektorów \mathbf{n} , a więc i wektorów: $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ (wtedy $n_x = 1$), $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ (wtedy $n_y = 1$), $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ ($n_z = 1$), zatem

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{i}) + \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{i}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{j}) + \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{j}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}) + \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{k}) = \mathbf{0}. \quad (1.25')$$

Wzór (1.25) można wobec tego zapisać w postaci

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) = n_x \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{i}) + n_y \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{j}) + n_z \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}), \quad (1.25'')$$

co, wobec $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$, oznacza, że $\boldsymbol{\sigma}$ jest liniową funkcją wektora \mathbf{n} , która nazywa się tensorem.

Wektory $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{m})$ ($\mathbf{m} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$) nie muszą być prostopadłe do ścian elementu płynu, a zatem (rys. 1.8) można je rozłożyć na składowe w kierunkach $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{i}) &= \sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{xy} \mathbf{j} + \sigma_{xz} \mathbf{k} \equiv \boldsymbol{\sigma}_x, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{j}) &= \sigma_{yx} \mathbf{i} + \sigma_{yy} \mathbf{j} + \sigma_{yz} \mathbf{k} \equiv \boldsymbol{\sigma}_y, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}) &= \sigma_{zx} \mathbf{i} + \sigma_{zy} \mathbf{j} + \sigma_{zz} \mathbf{k} \equiv \boldsymbol{\sigma}_z. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Stan naprężeń w punkcie M jest więc określony, gdy znana jest następująca macierz

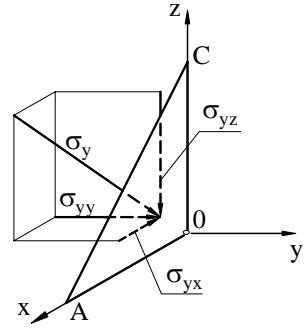
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = S. \quad (1.27)$$

¹⁾ To znaczy w dowolnie małym otoczeniu punktu M .

Rys. 1.8. Składowe naprężenia działającego na ścianę elementu płynu

Współrzędne wektorów naprężzeń, zawarte w macierzy S z jednakowymi wskaźnikami są *naprężeniami normalnymi*, a dalej będą nazywane *ciśnieniami* ($\sigma_{xx} \equiv p_{xx}$, $\sigma_{yy} \equiv p_{yy}$, $\sigma_{zz} \equiv p_{zz}$), współrzędne o wskaźnikach różnych są naprężeniami stycznymi ($\sigma_{xy} \equiv \tau_{xy}$, $\sigma_{yx} \equiv \tau_{yx}$, $\sigma_{xz} \equiv \tau_{xz}$, $\sigma_{zx} \equiv \tau_{zx}$, $\sigma_{yz} \equiv \tau_{yz}$, $\sigma_{zy} \equiv \tau_{zy}$). Stąd stan naprężenia (wzór (1.25'')), w zapisie macierzowym, jest teraz napisany następująco

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) = [\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}] \begin{bmatrix} p_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & p_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = [\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}] S [n_x n_y n_z]^T. \quad (1.28)$$



Siłę powierzchniową otrzymuje się po scałkowaniu funkcji $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ po całym polu powierzchni $A(t)$

$$\int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) dA = \mathbf{i} \int_{A(t)} (n_x \sigma_{xx} + n_y \sigma_{yx} + n_z \sigma_{zx}) dA + \mathbf{j} \int_{A(t)} (n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \sigma_{zy}) dA + \mathbf{k} \int_{A(t)} (n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz}) dA. \quad (1.29)$$

Wyrażenia podcałkowe są iloczynami skalarnymi pewnych wektorów i wektora \mathbf{n} . Można więc zastosować do nich twierdzenie Gaussa o dywergencji; po przekształceniach otrzymuje się

$$\int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) dA = \int_{A(t)} [\mathbf{i} \mathbf{j} \mathbf{k}] S \mathbf{n} dA \stackrel{\text{df}}{=} \int_{V(t)} [\text{Div } S] dV, \quad (1.30)$$

gdzie wyrażenie zawarte w nawiasie jest nazywane dywergencją tensorową tensora o macierzy S i definiowane analogicznie do dywergencji wektora

$$\text{Div } S = \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\sigma}_x + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\sigma}_y + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{\sigma}_z. \quad (1.31)$$

1.3.4. CIŚNIENIE JAKO WIELKOŚĆ SKALAROWA

Niech obszar płynny będzie w spoczynku względem pewnego układu odniesienia. Wskutek braku odkształceń postaciowych, w płynie nie będą występować naprężenia

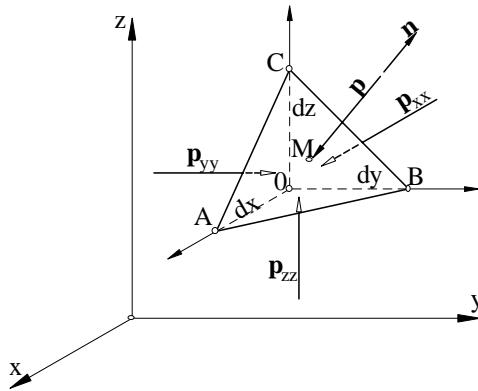
styczne, wobec czego naprężenie $\sigma(\mathbf{n})$ jest normalne do powierzchni, czyli jest współliniowe z wektorem \mathbf{n} , ale o kierunku przeciwnym do niego (rys. 1.9). Najczęściej jest to naprężenie ściskające, wówczas macierz (1.27) przybiera postać

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

natomiast

$$\sigma(\mathbf{n}) = -p\mathbf{n}, \quad (1.33)$$

gdzie skalar p jest nazywany *ciśnieniem* (statycznym).



Rys. 1.9. Jednostkowe siły powierzchniowe działające na element płynu doskonalego

Po uwzględnieniu zależności (1.28), (1.32) i (1.33)

$$-p\mathbf{n} = -p(n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}) = [\mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k}] \begin{bmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad (1.33')$$

skąd, na podstawie definicji równości wektorów, otrzyma się

$$p = p_{xx}, \quad p = p_{yy}, \quad p = p_{zz} \quad \Rightarrow \quad (1.34)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -p\mathbf{I},$$

gdzie \mathbf{I} – macierz jednostkowa.

Oznacza to, że ciśnienie p działające w dowolnym punkcie płynu (przy braku naprężeń stycznych) nie zależy od orientacji elementu powierzchniowego przechodzącego przez ten punkt.

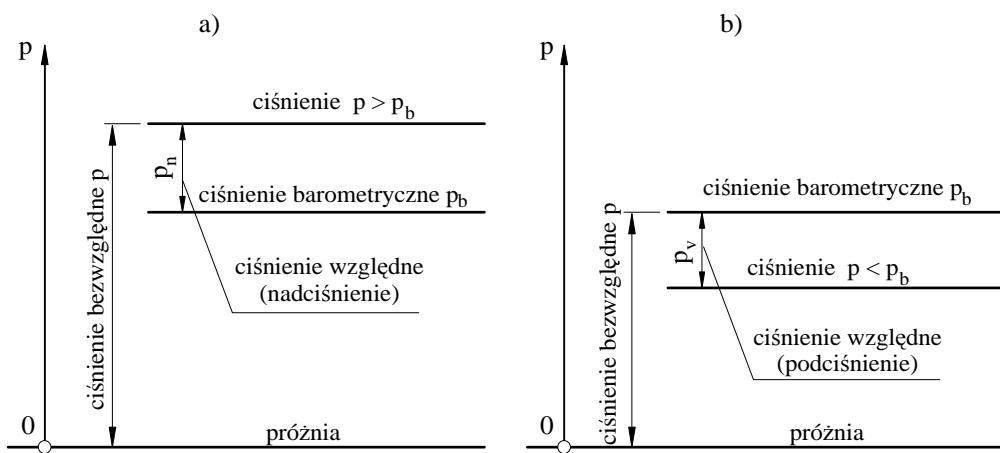
Z treści tego prawa, sformułowanego przez Eulera, wynika, że ciśnienie jest skalową funkcją (ciągłą i różniczkowalną) miejsca i czasu, czyli $p = p(\mathbf{R}, t)$.

Prawo to jest słuszcze w przypadku płynu idealnego, będącego zarówno w ruchu, jak i w spoczynku, w przypadku natomiast płynu rzeczywistego tylko wówczas, gdy pozostaje on w spoczynku lub porusza się jak ciało sztywne.

1.3.5. RODZAJE I JEDNOSTKI CIŚNIENIA

Ciśnienie wywierane przez atmosferę ziemską nazywane jest *ciśnieniem atmosferycznym* lub *barometrycznym* i oznaczane symbolem p_b .

W zależności od tego, względem jakiego ciśnienia mierzone jest dane ciśnienie, różni się (rys. 1.10) ciśnienie (absolutne lub bezwzględne) p , mierzone względem próżni, oraz ciśnienia względne, mierzone w odniesieniu do ciśnienia barometrycznego.



Rys. 1.10. Ilustracja do określenia ciśnień bezwzględnych i względnych:
a) ciśnienie większe od barometrycznego, b) ciśnienie mniejsze od barometrycznego

Ciśnienie względne to:

➤ nadciśnienie p_n , będące nadwyżką ciśnienia absolutnego ponad ciśnienie barometryczne

$$p_n = p - p_b, \quad (1.35)$$

➤ podciśnienie p_v , stanowiące różnicę między ciśnieniem barometrycznym a ciśnieniem absolutnym

$$p_v = p_b - p. \quad (1.36)$$

Jednostką ciśnienia jest paskal ($\text{Pa} = \text{N/m}^2$) lub jednostki krotne ($\text{hPa} = 10^2 \text{ Pa}$, $\text{kPa} = 10^3 \text{ Pa}$, $\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa}$, $\text{dPa} = 10^{-1} \text{ Pa}$, ...).

1.4. KONCEPCJE PODSTAWOWE

1.4.1. POLA FIZYCZNE I ICH KLASYFIKACJA

Polem nazywany jest w fizyce obszar, w którym każdemu punktowi odpowiada pewna wielkość fizyczna H , będąca funkcją czasu i miejsca.

Zależnie od tego, czy H jest wielością skalarową, wektorową lub tensorową, w mechanice płynów mogą występować odpowiednio *pola skalarowe*, *wektorowe* i *tensorowe*. Można zatem mówić np. o skalarowym polu temperatur, wektorowym polu prędkości, tensorowym polu naprężeń.

Pola ustalone i nieustalone

Jeżeli w każdym punkcie pola wielkość fizyczna H zależy tylko od współrzędnych położenia x, y, z , a nie zależy od czasu t , pole nazywa się *ustalonym* lub *stacjonarnym*, wówczas

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \wedge H = H(x, y, z). \quad (1.37)$$

Pole nieustalone (niestacjonarne) istnieje wówczas, gdy

$$\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \wedge H = H(x, y, z, t). \quad (1.38)$$

Pola jednorodne i niejednorodne

Pole jest *jednorodne*, jeżeli wielkość fizyczna H nie zależy od położenia x, y, z , choćby nawet zależała od czasu. Jeżeli wielkość H zależy od położenia, to pole tej wielkości jest polem *niejednorodnym*.

Pola trój-, dwu- i jednowymiarowe

Jeżeli wielkość H jest funkcją współrzędnych przestrzennych w układach:

- prostokątnym $H = H(x, y, z, t)$,
- cylindrycznym $H = H(r, \varphi, z, t)$,
- kulistym $H = H(r, \varphi, \theta, t)$,
- naturalnym $H = H(s, n, b, t)$,

to takie pole jest nazwane *trójwymiarowym* lub *przestrzennym*. Jeżeli wielkość H jest funkcją tylko dwu spośród wymienionych współrzędnych przestrzennych, pole nazywa się *dwuwymiarowym*.

Pola dwuwymiarowe dzielą się na *plaskie* i *osiowo-symetryczne*. Gdy

$$\partial H / \partial z = 0 \wedge H = H(x, y, t),$$

pole jest *plaskie*,

jeżeli natomiast

$$\partial H / \partial \varphi = 0 \quad \wedge \quad H = H(r, z, t),$$

to jest polem *osiowo-symetrycznym*.

Pole jest jednowymiarowe wówczas, gdy wielkość H jest funkcją tylko jednej współrzędnej przestrzennej, np.

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad \wedge \quad H = H(x, t)$$

lub

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad \wedge \quad H = H(r, t).$$

Wszystkie wymienione pola mogą być oczywiście ustalone lub nieustalone.

1.4.2. OPIS PRZEPŁYWU I JEGO KLASYFIKACJA

Ponieważ odtworzenie za pomocą równań matematycznych zjawisk ruchu płynów rzeczywistych jest niezwykle trudne, a niekiedy wręcz niemożliwe, starano się zatem uprościć je przez pominięcie w ich opisie niektórych właściwości fizycznych, ale takich, które nie mają istotnego wpływu na przebieg zjawiska. Ograniczenia te, wprowadzone w mechanice płynów, dotyczą przede wszystkim *ściśliwości i lepkości* płynów.

Z rozważań przedstawionych w p. 1.2.2 wynika, że w opisie przepływów cieczy (bez żadnych ograniczeń) oraz gazów, pod warunkiem występowania umiarkowanych prędkości, można przyjąć stałą wartość gęstości. Wynika z tego, że pominięcie ściśliwości (analogia doskonalej sztywności), a zatem przyjęcie *modelu płynu niesciśliwego*, pozwoli na ustalenie pewnych praw obowiązujących zarówno dla cieczy, jak i gazów.

Wszystkie płyny rzeczywiste wykazują zdolność przenoszenia naprężeń stycznych przy ruchu względnym sąsiednich warstw płynu (p. 1.2.4). Wynika z tego, że w zagadnieniach ruchu jednostajnego całej masy oraz spoczynku płynu przyjęcie *modelu płynu niesciśliwego* zupełnie odpowiada rzeczywistości. Prawa i równania wyprowadzone jednak na podstawie tego modelu mogą wymagać uzupełnień wówczas, kiedy poszczególne warstwy płynu rzeczywistego będą się poruszać z różnymi prędkościami.

Należy jednak podkreślić, że ograniczenia rzeczywistych właściwości fizycznych płynów są dopuszczalne jedynie w określonych warunkach i zależności ustalone na ich podstawie są uwarunkowane określonym zakresem zastosowań.

Z przedstawionych rozważań wynika klasyczny podział mechaniki płynów na *mechanikę płynów doskonałych* (nieściśliwych i nielepkich) i *mechanikę płynów rzeczywistych*. Zasadniczy podział mechaniki płynów wynika jednak z przyjętego modelu płynu, który można dobrać w zależności od występujących warunków przepływu.

Wyróżnia się następujące modele płynu:

- płyn nielepki i nieściśliwy, zwany cieczą doskonałą,
- płyn nielepki i ściśliwy,
- płyn lepki i nieściśliwy,
- płyn lepki i ściśliwy, czyli płyn rzeczywisty.

W mechanice płynów wszystkie zagadnienia równowagi i ruchu płynów są rozpatrywane po przyjęciu jednego z wymienionych modeli i z tego wynika istotny podział mechaniki płynów. Jako umowny może być zatem traktowany historyczny podział na *hydromechanikę* – mechanikę cieczy i *aeromechanikę* – mechanikę gazów.

Mechanika ośrodków ściśliwych (dynamika gazów, aerodynamika dużych prędkości) zazębia się z termodynamiką poprzez zagadnienia przemian cieplnych zachodzących w przepływającym gazie, a hydromechanika i aeromechanika umiarkowanych prędkości łączy się z modelem płynu nieściśliwego i w tych zagadnieniach zjawiska cieplne odgrywają rolę drugorzędną.

Obecnie, mówiąc o *hydromechanice* mamy na myśli mechanikę nieściśliwych płynów nielepkich i lepkich.

Należy jeszcze wspomnieć o *hydraulice*, która początkowo stanowiła zbiór formuł doświadczalnych oraz teorii hydraulicznych dotyczących głównie przepływu w rurach i kanałach otwartych, a także podstawowych wiadomości z hydrostatyki; obecnie tym mianem określane są raczej tzw. przepływy jednowymiarowe przez przewody zamknięte i otwarte.

1.4.3. RODZAJE PRZEPŁYWÓW

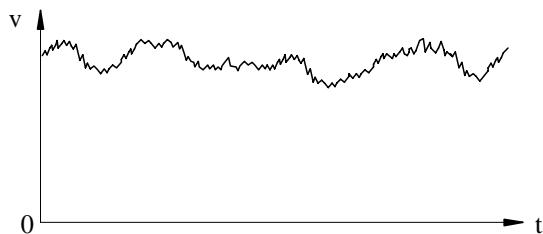
Wstępnie zostaną omówione pewne rodzaje przepływów, których analityczny opis podano w dalszych rozdziałach.

Przepływ laminarny i turbulentny

Przepływ jest *laminarny* (uwarstwiony), gdy elementy płynu poruszają się w warstwach. W przepływie *turbulentnym* (burzliwym), oprócz ruchu głównego (w kierunku przepływu), występują fluktuacje parametrów hydrodynamicznych (prędkości, ciśnienia). Te dwa rodzaje przepływów mogą być obserwowane np. przy wypływie struzki wody przez wylewkę z zaworem. Kiedy prędkość wypływu jest niewielka, wypływ jest uporządkowany (laminarny), po zwiększeniu prędkości wypływu zauważa się fluktuacje wypływającej struzki wokół położenia średniego, a przepływ jest nieregularny (turbulentny). Dobrze znane jest również zjawisko konwekcji swobodnej wokół smugi dymu papierosowego. Dym unoszący się z papierosa wizualizuje charakter jego ruchu; smugi dymu są najpierw laminarne, później tracą swoją stabilność, a wreszcie przechodzą w nieregularny ruch turbulentny.

Analizę przejścia przepływu laminarnego w turbulentny przeprowadził Reynolds (1883), obserwując przepływ w przewodzie kołowym. Reynolds badał właściwości przepływu laminarnego i turbulentnego, wprowadzając strugę barwnika (aniliny)

wzdłuż osi rury, którą przepływała woda z niewielką prędkością. W przepływie laminarnym nierożmyta struga barwnika poruszała się wzdłuż osi, natomiast w przepływie turbulentnym barwnik był szybko rozpraszany. Pomiary składowych prędkości osiowej (wykonane np. termoanemometrem) wykazują, że zmieniają się one w czasie i przestrzeni (rys. 1.11). Reynolds zauważył, że na charakter przepływu wpływają następujące parametry: prędkość średnia (v), gęstość (ρ) i lepkość (μ) cieczy oraz średnica rury (d). Kryterium decydującym o rodzaju ruchu jest bezwymiarowa liczba $\rho v d / \mu$ utworzona z tych parametrów i nazwana później liczbą Reynolds'a (Re). Ta liczba pozwala scharakteryzować przepływ w przewodzie kołowym. Jeżeli $Re < 2300$, przepływ pozostaje laminarny, a zatem są tłumione ewentualne lokalne niestabilności przepływu. Szczegółowo oba rodzaje przepływów omówiono i analitycznie opisano w dalszych rozdziałach.



Rys. 1.11. Zależność prędkości chwilowej od czasu

Przepływ ustalony i nieustalony

Przepływ jest *ustalony*, jeśli wszystkie parametry ruchu są niezależne od czasu. Oznacza to, że ciśnienie, prędkość, gęstość przepływu ustalonego w dowolnym punkcie przestrzeni nie zmieniają się z upływem czasu.

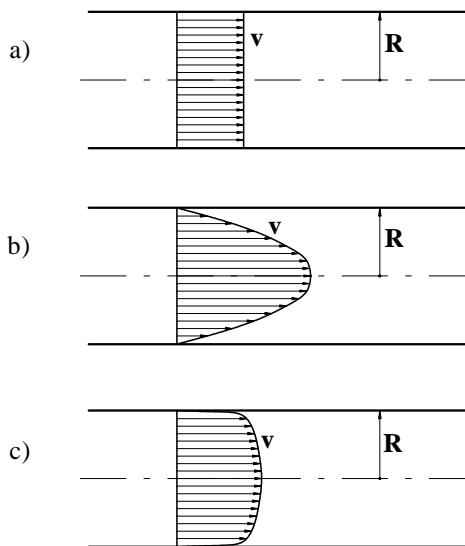
W przepływie *nieustalonym* parametry ruchu zależą od czasu. Do tej kategorii przepływów należą wszystkie zjawiska rozprzestrzeniania się fal w płynie oraz przepływy w atmosferze.

Również przepływy turbulentne są w swej istocie przepływami nieustalonymi, ale przyjmuje się, że ruch turbulentny jest *quasi-ustalony*, gdy tzw. średnie czasowe obliczone w ustalonym punkcie przestrzeni nie zmieniają się z upływem czasu.

Przepływ jednowymiarowy

Przepływ określa się jako *jednowymiarowy*, gdy w przekroju poprzecznym strugi charakteryzujące go parametry są stałe. Oznacza to, że wartości tych parametrów zależą tylko od jednej współrzędnej położenia. Koncepcja przepływu jednowymiarowego, umożliwiająca uproszczenie wielu opisów przepływu, jest koncepcją bardzo użyteczną w zagadnieniach technicznych.

Na rysunku 1.12 przedstawiono schematycznie profile prędkości przy jednowymiarowym przepływie przez przewód kołowy o promieniu R .



Rys. 1.12. Schematy profili prędkości w przepływie przez przewód kołowy:
 a) równomierny, b) paraboliczny, c) w pełni turbulentny

Przedstawione profile dotyczą przepływów jednowymiarowych:

- a) o płaskim rozkładzie prędkości (jak w modelu płynu nielepkiego, przyjmowany najczęściej w koncepcji przepływu jednowymiarowego),
- b) o parabolicznym rozkładzie prędkości (przy przepływie laminarnym),
- c) o w pełni uformowanym profilu turbulentnym.

Koncepcja przepływu jednowymiarowego jest dość dobrze weryfikowalna przy w pełni rozwiniętym przepływie turbulentnym, ponieważ wówczas profil prędkości jest stosunkowo płaski i wielkości globalne, jak strumień masy, objętości, energii kinetycznej praktycznie nie zależą od rozkładu prędkości.

Dokładne wyjaśnienia i opis rozkładu prędkości w rurze przedstawiono dalej.

Warstwa przyścienna

Rozważając w pełni rozwinięty przepływ płynu w rurociągu (kanale), należy zwrócić uwagę na rozkład (profil) prędkości w dowolnym przekroju poprzecznym (rys. 1.12c). Na skutek działania sił przylegania (adhezji) prędkości na powierzchni ściany są równe zeru. Oddalając się od ściany w głąb strugi prędkości te gwałtownie rosną, a w części środkowej zmieniają się one łagodnie. Wobec tego w analizowanym przepływie można wydzielić dwa charakterystyczne obszary:

- obszar warstw przyściennych, charakteryzujący się dużym gradientem prędkości,
- obszar leżący poza warstwami przyściennymi, w którym gradient prędkości jest zdecydowanie mniejszy.

Biorąc pod uwagę wzór (1.15), określający naprężenia styczne, można sformułować następujące wnioski:

➤ w obszarze warstwy przyściennej naprężenia styczne, ze względu na duże wartości gradientu prędkości, uzyskują zawsze znaczne wartości, niezależnie od tego, jaki jest współczynnik lepkości płynu,

➤ poza zasięgiem warstwy przyściennej, jeżeli lepkość przepływającego płynu nie jest duża (jak powietrze, woda), to – ze względu na występujące niewielkie gradienty prędkości – naprężenia styczne są małe i często można je pominąć.

W przepływach płynów o niewielkiej lepkości w obszarach poza warstwami przyścieniennymi, gdy gradienty prędkości $\partial v / \partial n$ są niewielkie, można zatem przyjąć, że płyn jest nielepki, co jest bliskie przepływowi rzeczywistemu.

1.4.4. PODZIAŁ MECHANIKI PŁYNÓW

Mechanikę płynów można dzielić w zależności od rodzaju użytych kryteriów. Podział na *teoretyczną*, *doświadczalną* i *numeryczną* mechanikę płynów ustaloną na podstawie kryterium metody badania.

Do mechaniki płynów można zastosować kryteria podziału obowiązujące w mechanice ciał stałych. Wyróżnia się zatem:

➤ *kinematykę* – zajmującą się badaniem ruchu ciał bez uwzględnienia sił występujących podczas ruchu,

➤ *dynamikę* – badającą stan spoczynku lub ruchu ciał, będącą wynikiem oddziaływania sił na ciało. Częścią dynamiki, dotyczącą stanu spoczynku ciał, jest *statyka*.

Inny podział mechaniki płynów wynika z przyjętego modelu płynu, którego kryterium są właściwości płynów. Uwzględniając spośród cech fizycznych płynów ściśliwość i lepkość, można wyodrębnić różne modele płynu. *Mechanika płynu doskonałego* wykorzystuje model płynu nielepkiego i nieściśliwego, a *mechanika płynu rzeczywistego* – model płynu lepkiego i ściśliwego. Model płynu lepkiego i nieściśliwego jest zbliżony do właściwości cieczy, model płynu nielepkiego i ściśliwego odpowiada natomiast warunkom przepływu gazu z dużymi prędkościami.

Różnica pomiędzy płynem doskonałym i rzeczywistym występuje tylko w ruchu, a więc w kinematyce i w dynamice (poza statyką) płynu. W zagadnieniach statyki równania równowagi w odniesieniu do płynu doskonałego i rzeczywistego są jednakowe.

Istnieje wiele innych kryteriów podziału, jak zakres prędkości przepływu, charakter przepływu itd. Omówiono je w dalszych rozdziałach, po wprowadzeniu niezbędnych do tego pojęć.

2. PODSTAWOWE POJĘCIA I TWIERDZENIA KINEMATYKI PŁYNÓW

2.1. METODY BADAŃ RUCHU PŁYNU

Ruch płynu względem układu odniesienia będzie opisany, jeżeli znane będą położenia każdego elementu płynu względem tego układu w dowolnej chwili t oraz zmiany różnych wielkości wektorowych i skalarnych, charakteryzujących ruch elementu płynu (np. prędkość, przyśpieszenie, gęstość). Zmiany tych wielkości mogą zachodzić z biegiem czasu i wraz ze zmianą położenia danego elementu w przestrzeni (ruch nieustalony), mogą też być niezależne od czasu (ruch ustalony).

Ruch płynu można badać i opisywać pod dwoma, zasadniczo różnymi, kątami widzenia; w związku z tym rozróżnia się dwie metody badania ruchu, zwane – od nazwisk ich twórców – *metodą Lagrange'a* i *metodą Eulera*.

2.1.1. METODA LAGRANGE'A

Metoda Lagrange'a opisuje zmianę różnych wielkości hydrodynamicznych zachodzącą podczas przepływu indywidualnie dla każdego elementu płynu; w metodzie tej bada się ich historię. Jeżeli w chwili t_0 element płynu zajmuje położenie określone promieniem – wektorem $\mathbf{r}_0 (x_0, y_0, z_0)$, to z czasem położenie to będzie ulegało zmianie. Podobnie będą się zmieniały inne parametry związane z wybranym elementem płynu. Można to zapisać następująco:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), \quad p = p(\mathbf{r}_0, t), \quad \rho = \rho(\mathbf{r}_0, t), \dots \quad (2.1)$$

lub ogólnie

$$H = H(\mathbf{r}_0, t), \quad (2.2)$$

gdzie H jest rozpatrywaną wielkością, natomiast (\mathbf{r}_0, t) są *współrzędnymi* albo *zmianami Lagrange'a*.

Zmiana samego tylko t w tych wyrażeniach określa zmianę wielkości H w elemencie płynu podczas jego ruchu, natomiast zmiana \mathbf{r}_0 odpowiada przejściu do innego elementu płynu i określa związaną z takim przejściem zmianę wielkości H .

W dowolnej chwili t współrzędne wybranego elementu płynu będą zależały (zgodnie z (2.1)) od współrzędnych początkowych i czasu, czyli:

$$\begin{aligned}x &= x(x_0, y_0, z_0, t), \\y &= y(x_0, y_0, z_0, t), \\z &= z(x_0, y_0, z_0, t).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Znając równania toru danego elementu, można wyznaczyć jego prędkości i przyśpieszenia. Niech \mathbf{v} oznacza wektor prędkości, wówczas

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

(x_0, y_0, z_0) dla danego elementu są ustalone)

lub w postaci współrzędnych prędkości

$$v_x = \frac{\partial x(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial y(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial z(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Po zróżniczkowaniu prędkości względem czasu otrzyma się przyśpieszenie danego elementu

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

lub jego współrzędne

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}, \\a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}, \\a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Jak widać, metoda Lagrange'a opisuje zmiany różnych wielkości H (np. prędkości, przyśpieszenia, ciśnienia, gęstości), które zachodzą dla poszczególnych elementów podczas ich ruchu i dlatego metoda ta zwana jest *analizą wędrowną płynów*.

Z metodą Lagrange'a jest związane pojęcie *powierzchni płynnej*, czyli dowolnej (otwartej lub zamkniętej) powierzchni ruchomej, utworzonej z tych samych poruszających się elementów płynu, traktowanych jako punkty materialne. Kształt tej powierzchni może zmieniać się z biegiem czasu. Obszar ograniczony zamkniętą powierzchnią płynną jest nazywany *obszarem płynnym*. Przedstawiona metoda w prak-

tycznych zastosowaniach nadaje się do badania tylko niewielu szczególnych przypadków ruchu.

2.1.2. METODA EULERA

W praktyce większe zastosowanie znalazła druga metoda badań ruchu płynu, zwana metodą Eulera. Polega ona na tym, że w stałym układzie współrzędnych wydziela się pewien obszar wypełniony płynem i bada się zmianę wielkości charakteryzujących przepływ w zadanym punkcie. W metodzie tej rozpatruje się więc zmianę wielkości charakteryzujących przepływ w zależności od czasu t i od położenia punktu.

Pole prędkości przepływu w metodzie Eulera opisuje funkcja

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.8)$$

lub

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Jeżeli w tych równaniach czas t jest ustalony, a współrzędne x, y, z będą zmienne, to równania (2.9) określą prędkości elementów płynu znajdujących się w przestrzeni w danej chwili t . Jeżeli zaś przyjmie się współrzędne x, y, z za ustalone, a czas t za zmienny, to równania (2.9) będą określały prędkości elementów płynu przechodzących przez dany punkt w chwili t .

Podobnie i inne wielkości określające przepływ będą funkcjami czterech zmiennych x, y, z, t , np. ciśnienie i gęstość

$$p = p(x, y, z, t); \quad \rho = \rho(x, y, z, t).$$

Przyśpieszenie elementu płynu, traktowanego jako punkt, jest pochodną prędkości elementu względem czasu i może być określone wzorem

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}(x, y, z, t)}{dt}. \quad (2.10)$$

Zmianę prędkości elementów przepływających w czasie przez punkt M (rys. 2.1) z prędkością $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ określają pochodne cząstkowe prędkości względem czasu t :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_z}{\partial t}.$$

Są to zmiany lokalne prędkości w czasie i dlatego te pochodne nazywa się *pochodnymi lokalnymi* lub *miejscowymi*.

Jakie będzie przyśpieszenie elementu płynu przechodzącego przez punkt $M(x, y, z)$ do punktu $N(x + dx, y + dy, z + dz)$? W czasie dt element płynu przemieści się o $v_x dt, v_y dy, v_z dz$ odpowiednio w kierunkach osi x, y, z , a zarazem prędkość tej cząstki po czasie $(t + dt)$ będzie wynosiła $\mathbf{v}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, przy czym $dx = v_x dt, dy = v_y dt, dz = v_z dt$.

Po rozwinięciu funkcji \mathbf{v} w szereg potęgowy $\mathbf{v}(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t + dt)$ wokół punktu (x, y, z) (wyrazy zawierające potęgi wyższe od pierwszej odrzucono, gdyż $v_x dt, \dots, v_z dt$ są wielkościami dowolnie małymi)

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t + dt) \\ &= \mathbf{v}(x, y, z, t) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Przyśpieszenie \mathbf{a} , które jest przyrostem prędkości w czasie dt wyniesie

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{v}(x + v_x dt, \dots, z + v_z dt, t + dt) - \mathbf{v}(x, y, z)}{dt} \\ &= v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Związek można zapisać w postaci operatorowej

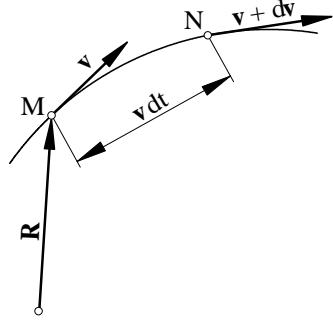
$$\mathbf{a} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

gdzie przez ∇ rozumie się operator różniczkowy Hamiltona

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2.14)$$

Współrzędne wektora przyśpieszenia, w zmiennych Eulera, będą zatem następujące:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.15)$$



Rys. 2.1. Element toru cząstki

Jak widać, przyśpieszenie α jest pochodną zupełną prędkości względem czasu $d\mathbf{v}/dt$. Będzie ona nazywana *pochodną substancialną*. Ma to określony sens fizyczny, gdyż pochodna d/dt oznacza zmiany dla tego samego poruszającego się elementu płynu, czyli zmiany związane z jego „substancją”. Przyśpieszenie α jest sumą części, która wynika z zależności wektora \mathbf{v} od czasu ($\partial\mathbf{v}/\partial t$) i części wynikającej ze zmiany wektora \mathbf{v} w przestrzeni ($\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$). Pochodna $\partial/\partial t$ określa zmiany zachodzące z upływem czasu w ustalonym punkcie przestrzeni i stanowi, omówioną już poprzednio, pochodną lokalną. Zależność $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ określa zmiany wektora prędkości \mathbf{v} po przejściu z punktu o współrzędnych x, y, z do jego najbliższego otoczenia, co jest związane z polem prędkości w otoczeniu tego punktu. Stąd nazwa tej pochodnej – *konwekcyjna* (dotycząca przesunięcia elementu płynu w inne położenie).

Pojęcia pochodnej substancialnej, lokalnej i konwekcyjnej zostały podane powyżej w odniesieniu do prędkości płynu. Są to jednak pojęcia ogólne i mogą być odniesione do dowolnej funkcji H (skalarowej lub wektorowej). Analogicznie do (2.13) pochodna substancialna funkcji H może być określona

$$\frac{dH}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) H + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Znikanie pochodnej lokalnej świadczy o stacjonarności pola H , zerowa zaś wartość pochodnej konwekcyjnej o jego jednorodności.

Jeżeli H jest skalarem, to pochodna substancialna

$$\frac{dH}{dt} = \mathbf{v} \cdot \text{grad } H + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Z metodą Eulera jest związane pojęcie *powierzchni kontrolnej*, czyli otwartej lub zamkniętej nieruchomej powierzchni, utworzonej przez te same nieruchome punkty przestrzeni. Obszar ograniczony zamkniętą powierzchnią kontrolną nazywamy *obszarem kontrolnym*.

W dalszych rozważaniach ruch płynu będzie opisywany metodą Eulera. Prędkość cząstek płynu jest pojęciem podstawowym w metodzie Eulera, gdyż określenie wielkości H wymaga znajomości wektora prędkości \mathbf{v} . Wszystkie wielkości hydrodynamiczne są więc opisywane na tle pola prędkości.

2.2. TOR ELEMENTU PŁYNU I LINIA PRĄDU

Torem elementu płynu nazywa się krzywą opisywaną przez poruszającą się cząstkę.

Po oznaczeniu elementu toru przez $d\mathbf{r} \equiv (dx, dy, dz)$ ¹⁾, a czasu potrzebnego na przebycie drogi $d\mathbf{r}$ przez dt otrzyma się równanie toru przez całkowanie następującego równania różniczkowego

¹⁾ Jest to krótko zapisany wektor $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(x, y, z, t). \quad (2.18)$$

Po wprowadzeniu współrzędnych elementu toru równanie (2.18) można przedstawić w postaci

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} = dt. \quad (2.19)$$

Linią prądu nazywa się linię wektorowego pola prędkości, a zatem linię, która w każdym swym punkcie jest styczna do wektora prędkości odpowiadającego temu punktowi. Niech wektorowe pole prędkości

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) \quad (2.20)$$

ma składowe, odpowiednio

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_x(x, y, z, t), \mathbf{v}_y = \mathbf{v}_y(x, y, z, t), \mathbf{v}_z = \mathbf{v}_z(x, y, z, t), \quad (2.21)$$

a element linii prądu $d\mathbf{r}$ współrzędne dx, dy, dz .

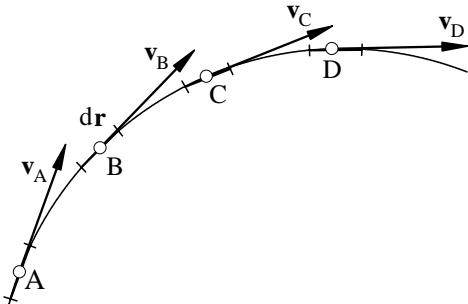
Równanie linii prądu, wyrażające warunek równoległości wektorów \mathbf{v} i $d\mathbf{r}$ ¹⁾ w każdym punkcie pola dla dowolnej chwili, można zapisać w postaci (rys. 2.2)

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \quad (2.23)$$

W równaniu tym czas występuje jako parametr, od którego zależą wartości v_x, v_y, v_z , ale nie jest zmienną niezależną.

Istotna różnica między równaniami toru i linii prądu polega na tym, że czas w równaniu (2.19) jest zmienną niezależną taką samą, jak x, y, z , a w równaniu (2.23) tylko parametrem. W ogólnym zatem przypadku ruchu tory i linie prądu nie pokrywają się. Każdy tor jest związany z jednym elementem płynu, natomiast linia prądu wskazuje prędkości różnych częstek w tej samej chwili. Jedynie w przypadku przepływu stacjonarnego (ustalone-



Rys. 2.2. Linia prądu

¹⁾ Wektory są równoległe, gdy ich iloczyn wektorowy równa się zeru.

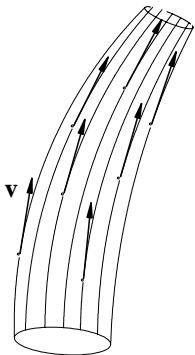
go) linie prądu i tory elementów płynu są identyczne. Również w ruchu po liniach prostych równoległych tor elementu pokrywa się z linią prądu.

Linie prądu nie powinny się przecinać, w punkcie przecięcia bowiem prędkość nie jest określona jednoznacznie. Może się zdarzyć, że przez jeden punkt przechodzi kilka (a nawet nieskończonie dużo) linii prądu. Jest to tzw. *punkt osobliwy*.

Punkt na linii prądu, w którym cząstka ma prędkość równą zeru, nazywa się *punktem stagnacji* (krytycznym) pola prędkości.

Jeżeli przez zamknięty kontur poprowadzi się linie prądu, to w rezultacie otrzyma się powierzchnię prądu zwaną rurką prądu (rys. 2.3). Zbiór linii prądu wypełniających w sposób ciągły rurkę prądu nazywa się *strugą*.

Elementarną strugą będzie nazywana taka struga, której pole przekroju poprzecznego jest nieskończonie małe.



Rys. 2.3. Rurka prądu

2.3. STRUMIEŃ OBJĘTOŚCI I STRUMIEŃ MASY

Strumień objętości q_V (nazywany jeszcze objętościowym natężeniem przepływu) jest to strumień wektora prędkości \mathbf{v} przechodzący przez powierzchnię A . Jest to więc całka z iloczynu skalarnego wektora \mathbf{v} i wektora zorientowanego wycinka pola przekroju dA , a zatem

$$q_V = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (2.24)$$

Zgodnie z oznaczeniami podanymi na rysunku 2.4 oraz po uwzględnieniu, że $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$, strumień objętości

$$\begin{aligned} q_V &= \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A v_n dA \\ &= \int_A (v_x dA_x + v_y dA_y + v_z dA_z), \end{aligned} \quad (2.25)$$

gdzie:

v_n – moduł składowej prędkości w kierunku wektora jednostkowego, dA_x, dA_y, dA_z – rzuty powierzchni dA na płaszczyzny odpowiednio prostopadłe do x, y, z .

Na podstawie twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego można napisać

$$\int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV. \quad (2.26)$$

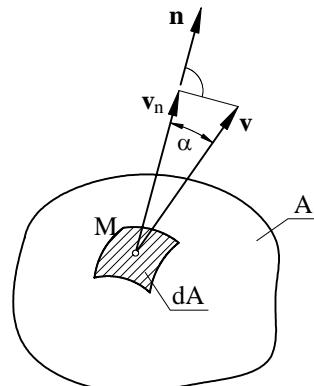
Oznacza to, że strumień wektora prędkości (strumień objętości) przez zamkniętą powierzchnię A jest równy całce objętościowej z $\operatorname{div} \mathbf{v}$.

Jeżeli zamiast strumienia \mathbf{v} rozpatrzy się strumień $\rho\mathbf{v}$, to wyrażenie

$$q_m = \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.27)$$

określa *strumień masy* (dawniej masowe natężenie przepływu), przy czym

$$\int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV. \quad (2.28)$$



Rys. 2.4. Ilustracja pojęcia elementarnego strumienia objętości

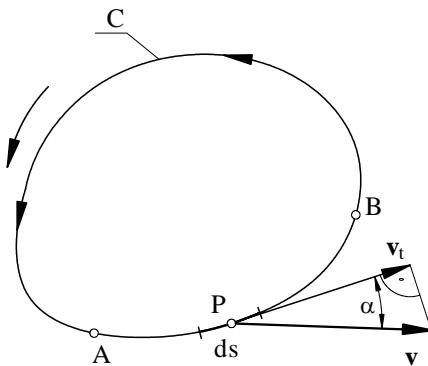
2.4. CYRKULACJA WEKTORA PRĘDKOŚCI. TWIERDZENIE STOKESA

W poruszającym się płynie rozpatrywany jest odcinek krzywej C , nie będącej linią prądu. Każdy element płynu znajdujący się na nim ma prędkość \mathbf{v} .

Cyrkulacją Γ_{AB} wektora prędkości wzduż łuku AB krzywej C nazywa się całkę

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \mathbf{v} ds, \quad (2.29)$$

w której: ds oznacza skierowany element łuku AB , przy czym α jest kątem zawartym między wektorem prędkości \mathbf{v} a styczną do odcinka AB w rozpatrywanym punkcie (rys. 2.5), a zatem



Rys. 2.5. Cyrkulacja prędkości

$$\begin{aligned}\Gamma_{AB} &= \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B v \cos \alpha \, ds = \int_A^B v_t \, ds \\ &= \int_A^B (v_x \, dx + v_y \, dy + v_z \, dz),\end{aligned}\quad (2.30)$$

gdzie: $\mathbf{v}_t \equiv (v_x, v_y, v_z)$ – rzut wektora \mathbf{v} na kierunek $d\mathbf{s}$ (dx, dy, dz).

W przypadku całki krzywoliniowej po krzywej zamkniętej C , czyli całki \square , cyrkulacja prędkości

$$\Gamma = \square \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \square v_t \, ds. \quad (2.31)$$

Gdy wartość cyrkulacji (2.31) jest dodatnia, elementy płynu, znajdujące się na konturze C , wykazują tendencję do ruchu zgodnego z kierunkiem całkowania i na odwrót, gdy cyrkulacja (2.31) jest ujemna, tendencja jest przeciwna do kierunku całkowania.

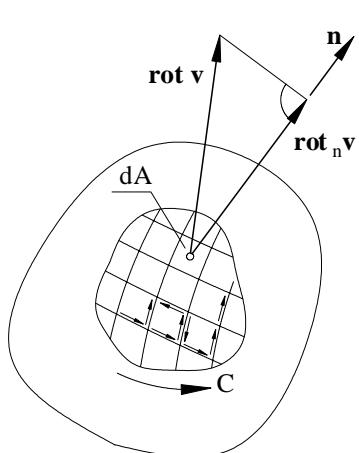
Do całki określającej cyrkulację można zastosować poznane w teorii pola twierdzenie Stokesa, które dotyczy związku między całką liniową i powierzchniową. Dla różniczkowalnych pól wektorowych \mathbf{v} ma ono postać

$$\square \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_A (\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dA. \quad (2.32)$$

Inaczej twierdzenie Stokesa można zapisać

$$\Gamma = \square \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_A \operatorname{rot}_n \mathbf{v} \, dA. \quad (2.33)$$

Prawa strona wzoru (2.33) określa natężenia strumienia wirowości (rotacji) przechodzącego przez powierzchnię A , której brzegiem jest krzywa C , stąd można sformułować następujące twierdzenie:



Cyrkulacja prędkości wzduż zewnętrznej linii konturowej równa się sumie cyrkulacji wzduż zewnętrznych boków konturów składowych (cyrkulacje wzduż przylegających do siebie boków konturów elementarnych mają znaki przeciwe – rys. 2.6). Suma cyrkulacji elementarnych równa się zatem cyrkulacji wzduż konturu C , ograniczającego poletka brzegowe.

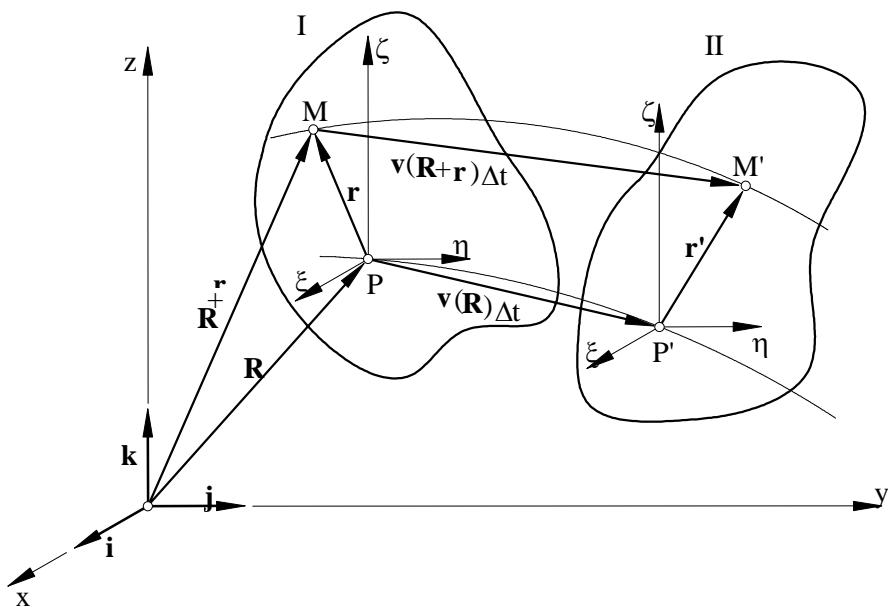
Rys. 2.6. Ilustracja do twierdzenia Stokesa

2.5. RUCH LOKALNY PŁYNU. PIERWSZE TWIERDZENIE HELMHOLTZA

2.5.1. RUCH ELEMENTU PŁYNU

Ruchem lokalnym płynu nazywa się ruch punktów elementu płynu względem do wolnie wybranego bieguna zawartego w tym elemencie.

W obszarze wypełnionym płynem poruszającym się z prędkością $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ wprowadza się ortogonalny układ odniesienia o osiach x, y, z (rys. 2.7). Zakłada się, że prędkość jest funkcją ciągłą i różniczkowalną zmiennych x, y, z . W położeniu, oznaczonym cyfrą I, w chwili $t = t_1$ w obszarze przepływu wybiera się płynny element objętościowy ośrodka (spełniający warunki omówione w p. 1.1.3), w którym wyróżnia się punkt P – biegun o promieniu wodzącym \mathbf{R} oraz dowolny punkt M , o promieniu wodzącym $\mathbf{R} + \mathbf{r} \neq \mathbf{R}$. Plyn jest w ruchu, element przesuwa się zatem względem układu odniesienia, równocześnie zmieniając swój kształt. W chwili $t = t_2$, tj. po upływie czasu Δt , element znajdzie się w położeniu oznaczonym cyfrą II, w którym biegun znajdzie się w punkcie P' , a punkt M zajmie położenie M' .



Rys. 2.7. Ruch lokalny elementu płynu

Zgodnie z definicją ruchu lokalnego, w celu zbadania przemieszczeń i prędkości poszczególnych punktów poruszającego się płynu, zajmiemy się ruchem punktu M względem bieguna P .

Prędkość punktu M względem przyjętego układu odniesienia traktujemy jako sumę prędkości bieguna P oraz prędkości punktu M względem tego bieguna. Można ją zatem określić wzorem¹⁾

$$\frac{d(\mathbf{R} + \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.34)$$

Oznacza to, że wystarczy określić ruch punktu M względem układu współrzędnych poruszającego się wraz z punktem P i równoległego do przyjętego uprzednio układu odniesienia. Wówczas, w chwili $t = t_1$ (położenie I), promieniem wodzącym punktu M będzie wektor $\mathbf{r} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$, a omawiany ruch wzajemny określa prędkość zmian tego wektora w czasie.

Prędkości wybranych punktów wybranego elementu płynu są w każdej chwili funkcjami promienia wodzącego, a zatem

$$\mathbf{v}(\mathbf{R}) = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{R} + \mathbf{r}). \quad (2.35)$$

Zakładając, że przyrost czasu $\Delta t = t_2 - t_1 = dt$ jest nieskończonie mały, drogi przebyte przez oba punkty są następujące

$$MM' = \mathbf{v}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) dt, \quad PP' = \mathbf{v}(\mathbf{R}) dt.$$

Wobec tego przesunięcie punktu M względem punktu P

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) dt - \mathbf{v}(\mathbf{R}) dt, \quad (2.36)$$

gdzie w przyjętym układzie odniesienia i ruchomym układzie współrzędnych współrzędne wektorów położenia punktów \mathbf{R} i \mathbf{r} oraz prędkości \mathbf{v} i $d\mathbf{r}/dt$ są określone następująco:

$$\mathbf{R} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k},$$

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\eta}{dt} \mathbf{j} + \frac{d\zeta}{dt} \mathbf{k}. \quad (2.37)$$

Prędkość $d\mathbf{r}/dt$ punktu M względem bieguna P w ustalonej chwili t wyniesie zatem

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}(\mathbf{R} + \mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{R}) \\ &= \mathbf{v}((x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) + (\xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k})) - \mathbf{v}(x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \\ &\equiv \mathbf{v}(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - \mathbf{v}(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.38)$$

a jej współrzędne

¹⁾ Chwila t jest ustalona, dlatego stosuje się zapis skrótny $\mathbf{R}, \mathbf{v}(\mathbf{R}), \dots$ zamiast $\mathbf{R}(t), \mathbf{v}(\mathbf{R}, t), \dots$

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= v_x(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - v_x(x, y, z), \\ \frac{d\eta}{dt} &= v_y(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - v_y(x, y, z), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= v_z(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - v_z(x, y, z).\end{aligned}\quad (2.39)$$

Z definicji elementu płynu wynika, że jego wymiary liniowe są dopuszczalnie małe w porównaniu z wymiarami obszaru, w którym zachodzi przepływ, wobec tego (w tym sensie) moduł wektora \mathbf{r} jest też mały. Rozwija się zatem pierwsze wyrazy prawej strony równań (2.39) w szereg Taylora wokół punktu o współrzędnych (x, y, z) , pomijając składniki zawierające ξ, η, ζ w potędze wyższej niż pierwsza, jako małe wyższych rzędów. Po redukcji i uproszczeniu równania (2.39) można przedstawić w formie następującego równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d\zeta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Oznacza to, że wektor prędkości względnej $d\mathbf{r}/dt$ o współrzędnych $(d\xi/dt, d\eta/dt, d\zeta/dt)$ jest w danej chwili t wartością pewnego przekształcenia liniowego, zwanego *tensemorem prędkości względnej*. Można zatem napisać

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\eta}{dt} \mathbf{j} + \frac{d\zeta}{dt} \mathbf{k}. \quad (2.41)$$

Wzór ten można zapisać, po wykorzystaniu związku (2.40), następująco

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}] \begin{bmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d\zeta}{dt} \end{bmatrix} = [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}] \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Macierz tego przekształcenia jest następująca

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \quad (2.43)$$

i można ją jednoznacznie rozłożyć na macierze:

➤ symetryczną

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

➤ antysymetryczną

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Wyrażenie (2.42) można zatem zapisać w postaci zwykle stosowanej

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{G}\mathbf{r} = (\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega})\mathbf{r} = \mathbf{D}\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}. \quad (2.46)$$

2.5.2. PRĘDKOŚĆ KĄTOWA I PRĘDKOŚĆ DEFORMACJI ELEMENTU PŁYNU

W celu wyjaśnienia kinematycznego znaczenia podanych elementów macierzy rozważa się elementarny obszar płynu w kształcie prostopadłościanu (rys. 2.8) w chwili $t = t_0$. Długości jego krawędzi wynoszą ξ, η, ζ . Znaczenie poszczególnych składowych wyrażenia (2.46) można określić na podstawie badania ruchu dowolnej ściany rozważanego obszaru płynnego.

Zbadamy najpierw sens kinematyczny części antysymetrycznej tensora prędkości względnej, zwracając uwagę, że elementy macierzy $\boldsymbol{\Omega}$ są równe połowie składowych wektora rot \mathbf{v} . Wiadomo bowiem, że

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix},$$

skąd współrzędne $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{i} \text{ rot}_x \mathbf{v} + \mathbf{j} \text{ rot}_y \mathbf{v} + \mathbf{k} \text{ rot}_z \mathbf{v}$ są następujące:

$$\text{rot}_x \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \text{rot}_y \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \text{rot}_z \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (2.47)$$

Można zatem napisać drugi składnik sumy (2.46) w postaci iloczynu następujących trzech macierzy:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r} &= [\mathbf{ijk}] \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \text{rot}_z \mathbf{v} & \frac{1}{2} \text{rot}_y \mathbf{v} \\ \frac{1}{2} \text{rot}_z \mathbf{v} & 0 & -\frac{1}{2} \text{rot}_x \mathbf{v} \\ -\frac{1}{2} \text{rot}_y \mathbf{v} & \frac{1}{2} \text{rot}_x \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} ((-\eta \text{rot}_z \mathbf{v} + \zeta \text{rot}_y \mathbf{v}) \mathbf{i} + (\xi \text{rot}_z \mathbf{v} - \zeta \text{rot}_x \mathbf{v}) \mathbf{j} + (-\xi \text{rot}_y \mathbf{v} + \eta \text{rot}_x \mathbf{v}) \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

co oznacza prędkość, z jaką poruszałby się punkt M , gdyby cały element objętościowy obracał się jako ciało sztywne z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$.

Otrzymane wyrażenie jest iloczynem wektorowym wektorów

$$(\mathbf{i} \text{ rot}_x \mathbf{v} + \mathbf{j} \text{ rot}_y \mathbf{v} + \mathbf{k} \text{ rot}_z \mathbf{v})/2 = \text{rot } \mathbf{v}/2 \quad \text{oraz} \quad \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \zeta \mathbf{k} = \mathbf{r},$$

natomiast prędkość kątowa elementu poruszającego się jako ciało sztywne jest równa połowie rotacji prędkości. Na przykład podczas obrotu elementu wokół osi nieruchomego układu prostokątnego z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$, współrzędne prędkości w dowolnym punkcie elementu, określonym w rozpatrywanej chwili współrzędnymi x, y, z , wynoszą $v_x = -\omega y, v_y = \omega x$, wobec czego jedyna różna od zera współrzędna wektora rotacji

$$\text{rot}_z \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \omega - (-\omega) = 2\omega.$$

Objaśniono w ten sposób sens kinematyczny części antysymetrycznej tensora prędkości względnej; teraz należy omówić jego część symetryczną. Dla związków zapisu wprowadza się następujące oznaczenia elementów macierzy \mathbf{D} :

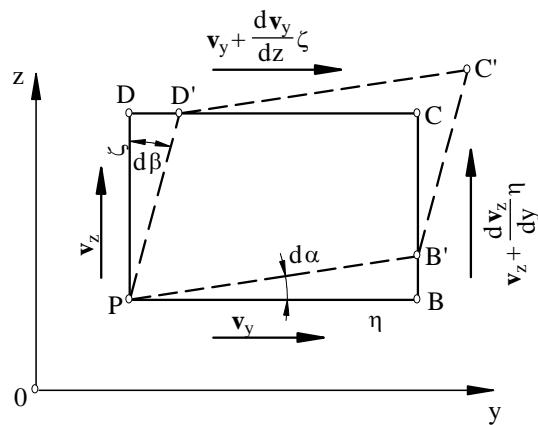
$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &\equiv \varepsilon_{xx}, & \frac{\partial v_y}{\partial y} &\equiv \varepsilon_{yy}, & \frac{\partial v_z}{\partial z} &\equiv \varepsilon_{zz}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &\equiv \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) &\equiv \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) &\equiv \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

a następnie oblicza się \mathbf{Dr} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Dr} &= [\mathbf{i j k}] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \\
 &= [\mathbf{i j k}] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + [\mathbf{i j k}] \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \\
 &= [\varepsilon_{xx} \xi \mathbf{i} + \varepsilon_{yy} \eta \mathbf{j} + \varepsilon_{zz} \zeta \mathbf{k}] + [(\varepsilon_{xy} \eta + \varepsilon_{xz} \zeta) \mathbf{i} + (\varepsilon_{xy} \xi + \varepsilon_{yz} \zeta) \mathbf{j} + (\varepsilon_{xz} \xi + \varepsilon_{yz} \eta) \mathbf{k}] \\
 &\equiv \mathbf{v}_{do} + \mathbf{v}_{dp} = \mathbf{v}_d.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Otrzymany wektor pewnej prędkości \mathbf{v}_d , który jest przedstawiony w postaci dwóch składowych \mathbf{v}_{do} i \mathbf{v}_{dp} , pomnożony przez przyrost czasu dt daje przesunięcie punktu M , powstałe na skutek odkształcenia (deformacji) rozpatrywanego elementu. Dlatego wyrażenie $\mathbf{Dr} = \mathbf{v}_d$ jest nazwane *prędkością odkształcenia (deformacji)*, a jej składowe (we wzorze (2.50) podane w nawiasach prostokątnych) kolejno: \mathbf{v}_{do} – *prędkością odkształcenia objętościowego*, \mathbf{v}_{dp} – *prędkością odkształcenia postaciowego*. Elementy macierzy D tensora deformacji, oznaczone ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , odnoszą się do odkształcenia objętościowego, natomiast elementy ε_{xy} , ε_{xz} , ε_{yz} dotyczą odkształcenia postaciowego.

Interpretację fizyczną poszczególnym składnikom wzoru (2.50) można nadać, rozpatrując odkształcenie prostopadłościennego elementu o początkowych wymiarach ξ , η , ζ (rys. 2.8), gdzie dla prostoty narysowano tylko odkształcenie w płaszczyźnie yz .



Rys. 2.8. Odkształcenie postaciowe elementu płynu

Na skutek różnic prędkości prostokątny element płynu ($PBCD$) odkształca się, przyjmując po upływie czasu dt kształt równoległoboku $PB'C'D'$. Na rysunku 2.8 nanie- siono kształt ściany elementu płynnego w chwili początkowej ($PBCD$) oraz po czasie dt ($PB'C'D'$)¹⁾. Bok PB (odpowiadający ścianie o długości elementarnej η) obrócił się wo- kół chwilowej osi przechodzącej przez punkt P i równoległą do osi x , o kąt $d\alpha$; bok PD o długości ζ obrócił się wokół tej samej osi o kąt $d\beta$. W związku z tym kąt prosty DPB po odkształceniu elementu zmniejszy się o $(d\alpha + d\beta)$.

W celu wyznaczenia kątów $d\alpha$ i $d\beta$ należy określić przesunięcia BB' i DD' .

W mierze łukowej wartość przesunięcia $BB' = \eta d\alpha$. Odcinek BB' jest równy róż- nicy dróg, jakie w czasie dt przemierzą punkty B i P w kierunku równoległym do osi z

$$BB' = \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} \eta \right) dt - v_z dt = \frac{\partial v_z}{\partial y} \eta dt,$$

czyli kąt utworzony między odcinkami PB i PB' wynosi

$$d\alpha = \frac{\partial v_z}{\partial y} dt.$$

Analogicznie

$$d\beta = \frac{\partial v_y}{\partial z} dt,$$

wobec tego kąt utworzony między bokami PB i PD zmienia się z prędkością

$$\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

Otrzymane wyrażenie stanowi podwojoną współrzędną prędkości odkształcenia postaciowego w płaszczyźnie prostopadłej do osi x . Współrzędne te są natomiast na- stępujące:

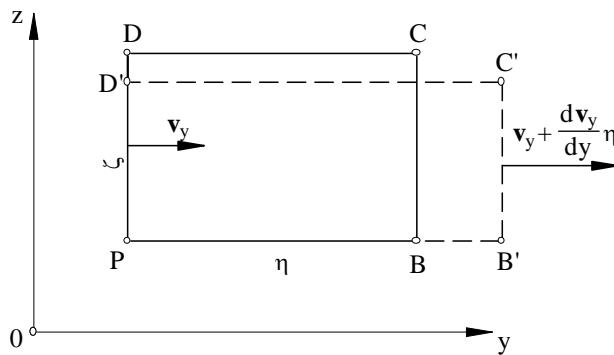
$$\begin{aligned} \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

¹⁾ Element jest obserwowany w układzie (ξ, η, ζ) poruszającym się z punktem P (rys. 2.8).

Sześć składowych macierzy D tensora prędkości odkształcenia (wzory (2.50) i (2.51)) przedstawia *odkształcenie postaciowe elementu płynu*.

Oprócz odkształcenia postaciowego elementu płynu występuje również jego *odkształcenie objętościowe* (zmiana długości boków elementu – rys. 2.9). Na skutek różnicy prędkości ($\partial v_y / \partial y$) η między punktami P i B , punkt B przesunie się do punktu B' . Odkształcenie elementu będzie zależało od długości tego przesunięcia. Zmiana długości elementu w kierunku y wynosi

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \eta dt.$$



Rys. 2.9. Odkształcenie objętościowe elementu płynu

Względna zmiana długości w stosunku do długości pierwotnej η wynosi $(\partial v_y / \partial y) dt$, natomiast prędkość tej zmiany $\partial v_y / \partial y \equiv \varepsilon_{yy}$.

Po podobnych rozważaniach dla pozostałych kierunków otrzymuje się

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (2.52)$$

Są to miary *prędkości wzelnego odkształcenia długości* boków elementu.

Suma składowych tensora prędkości deformacji (2.50) leżących na przekątnej głównej wynosi zatem

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.53)$$

Po uwzględnieniu tego wzoru stwierdzamy, że *prędkość v_{do} odkształcenia objętościowego* wyraża się *dywergencją prędkości*. Odkształcenie objętościowe jest równe zeru wówczas, gdy suma składowych prędkości deformacji objętościowej równa się zeru, czyli gdy $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Z przedstawionych rozważań wynika, że prędkość punktu M można ostatecznie zapisać

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_d, \quad (2.54)$$

gdzie:

- \mathbf{v}_M – prędkość punktu M względem układu odniesienia (nieruchomego),
- \mathbf{v} – prędkość bieguna względem układu odniesienia, czyli prędkość ruchu translacyjnego,
- $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_{do} + \mathbf{v}_{dp}$ – prędkość deformacji (odkształcenia),
- $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_d$ – prędkość ruchu lokalnego.

Wzór (2.54) wyraża *pierwsze twierdzenie Helmholtza* (zwane też twierdzeniem Cauchy'ego–Helmholtza) o rozłożeniu ruchu płynu: *ruch elementu płynu składa się z ruchów: translacyjnego, obrotowego i deformacji elementu*. Jest to najważniejsze twierdzenie kinematyki płynów. Dalej istotne znaczenie będzie miał tensor deformacji, który jest związany z tensorem naprężeń występujących w płynie lepkim.

2.6. PRZEPŁYW POTENCJALNY (BEZWIROWY) PŁYNU

2.6.1. PRZESTRZENNY PRZEPŁYW POTENCJALNY

W trakcie rozważań dotyczących ruchu płynu wyodrębnia się tę składową ruchu elementu płynu, która wynika z jego obrotu dookoła chwilowej osi przechodzącej przez biegun P . W ten sposób każdemu punktowi obszaru objętego przepływem płynu można przyporządkować wektor prędkości kątowej ruchu obrotowego

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (2.55)$$

lub wektor wiru (wirowości).

Wirem pola nazywa się rotację wektora prędkości

$$\mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{v}_x & \mathbf{v}_y & \mathbf{v}_z \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Współrzędne wektora wiru są równe

$$W_x = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad W_y = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad W_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (2.57)$$

Po porównaniu zależności (2.55) z wzorem (2.47) stwierdza się, że

$$\mathbf{W} = 2\boldsymbol{\omega}. \quad (2.58)$$

Wektor wiru jest zatem równy *podwojonym wektorowi prędkości kątowej obrotu elementu płynu* i – podobnie jak $\boldsymbol{\omega}$ – jest wektorem leżącym stale na chwilowej osi obrotu elementu.

Jeżeli podczas przepływu elementy płynu doznają tylko przesunięcia i odkształceń, nie doznają natomiast obrotów, tzn. jeżeli w każdym punkcie obszaru zajętego przez płyn spełniony jest warunek

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{W} = 2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad (2.59)$$

to przepływ taki jest *niewirowy*. Przepływy takie, nazwane *przepływami potencjalnymi*, ze względu na możliwość stosunkowo prostego ujęcia matematycznego, znajdują dość obszerne zastosowania. Analitycznie warunek (2.59) można zapisać

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (2.60)$$

Warunki te powodują istnienie w obszarze bezwirowego przepływu pewnej funkcji $\Phi(x, y, z)$ lub $\Phi(x, y, z, t)$ dla przepływów nieustalonych, takiej że

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (2.61)$$

czyli $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$.

Funkcja Φ o takich własnościach nazywana jest *potencjałem prędkości*, a taki bezwirowy przepływ jest *potencjalny*.

Jeżeli pole prędkości jest polem bezródłowym, czyli gdy $\text{div } \mathbf{v} = 0$, to potencjał Φ spełnia równanie Laplace'a $\nabla^2 \Phi = 0$, czyli

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.62)$$

W każdym punkcie pola potencjału prędkości ma zazwyczaj inną wartość. Całkowita zmiana potencjału dwóch sąsiednich częstek jest określona różniczką zupełną $d\Phi$, czyli

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz. \quad (2.63)$$

Miejsce geometryczne punktów, w których Φ ma wartość stałą, nazywa się *powierzchnią jednakowego potencjału*. Na niej $\Phi = \text{const}$, czyli $d\Phi = 0$.

Równanie

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0 \quad (2.64)$$

lub, po uwzględnieniu związków (2.61),

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0 \quad (2.65)$$

jest równaniem powierzchni jednakowego potencjału. Stanowi ono równocześnie warunek prostopadłości wektora \mathbf{v} do powierzchni jednakowego potencjału w danym miejscu. Jak zatem widać, linie prądu tworzą z powierzchniami ekwipotencjalnymi układ ortogonalny.

Jaka jest wartość cyrkulacji prędkości w ruchu potencjalnym? Jak widać, funkcja podcałkowa w równaniu (2.30) stanowi różniczkę zupełną potencjału

$$d\Phi = v_x dx + v_y dy + v_z dz,$$

czyli cyrkulacja

$$\Gamma = \iint_C d\Phi = \int_A \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \mathbf{0} \cdot \mathbf{n} dA = 0,$$

a zatem: *w ruchu potencjalnym cyrkulacja prędkości nie istnieje*.

Opisywanie ruchu potencjalnego sprowadza się w zasadzie do wyznaczenia funkcji Φ , która jednoznacznie określa pole prądu.

2.6.2. PRZYKŁADY PRZESTRZENNYCH PÓŁ POTENCJALNYCH

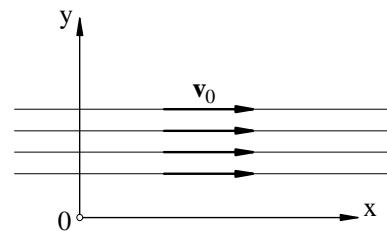
Podamy kilka typowych przykładów przestrzennych ruchów potencjalnych.

1. Ruch płasko-równoległy

Tak nazywany jest przepływ strugi ze stałą prędkością v_0 , równolegle do pewnej prostej, np. osi $0x$ (rys. 2.10). Pole prędkości jest określone równaniami

$$v_x = v_0, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Ruch jest potencjalny, gdyż składowe wektora wiru są równe zeru. Z zależności (2.61) otrzymuje się



Rys. 2.10. Ruch płasko-równoległy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

czyli

$$\frac{d\Phi}{dx} = v_0,$$

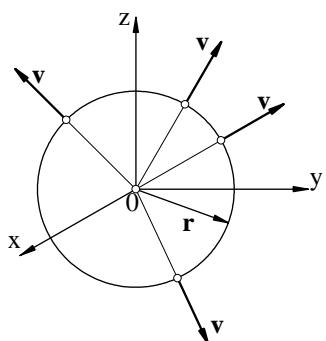
stąd

$$\Phi = v_0 x.$$

Powierzchnie jednakowego potencjału są płaszczyznami prostopadłymi do osi $0x$. Linie prądu są liniami równoległymi do tej osi.

2. Źródło (upust)

Tak nazywa się punkt w przestrzeni, z którego stale wypływa (źródło) lub do którego stale wpływa (upust) płyn. Dla źródła przyjmuje się strumień objętości q_V , a dla upustu ($-q_V$).



Rys. 2.11. Źródło pojedyncze (upust)

Prędkość cząstek na powierzchni kuli o promieniu r (rys. 2.11) jest równa

$$v = \frac{q_V}{4\pi r^2}$$

lub

$$v = \frac{C}{r^2},$$

przy czym stała $C = \frac{q_V}{4\pi}$ jest nazywana natężeniem źródła.

Potencjał prędkości określmy z równania

$$\frac{d\Phi}{dr} = v = \frac{C}{r^2} \Rightarrow d\Phi = C \frac{dr}{r^2},$$

czyli¹⁾

$$\Phi = -C \frac{1}{r}.$$

Powierzchnie jednakowego potencjału prędkości $\Phi = \text{const}$ są powierzchniami kulistymi, linie prądu natomiast – prostymi przechodzącymi przez źródło.

Współrzędne prędkości wynoszą

$$v_x = v \frac{x}{r} = C \frac{x}{r^3} = C \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3},$$

$$v_y = v \frac{y}{r} = C \frac{y}{r^3} = C \frac{y}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3},$$

$$v_z = v \frac{z}{r} = C \frac{z}{r^3} = C \frac{z}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3},$$

¹⁾ Stałą całkowania przyjęto równą 0, gdyż – wobec tego, że $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ – nie ma ona znaczenia.

gdzie: x, y, z – współrzędne dowolnego punktu na powierzchni kuli o promieniu $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Można sprawdzić, że ruch ten jest potencjalny, gdyż składowe wektora wiru są równe zeru.

3. Para: źródło–upust

Rozpatrywany jest ruch spowodowany jednocześnie źródłem i upustem o jednakowych strumieniach objętości. Z powodu symetrii względem osi $0x$, wystarczy wyjaśnić to zagadnienie w płaszczyźnie $0xy$ (rys. 2.12).

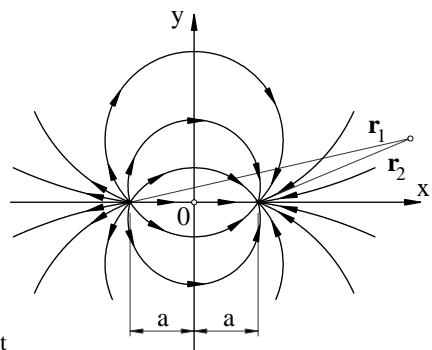
Jeżeli a jest odlegością źródła i upustu od początku układu, to dla

➤ źródła

$$r_1 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2},$$

➤ upustu

$$r_2 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$



Rys. 2.12. Para: źródło–upust

Potencjał przepływu będzie sumą potencjału źródła i upustu, a więc

$$\Phi = C \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

czyli

$$\Phi = C \left(\frac{1}{\sqrt{(x - a)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + a)^2 + y^2}} \right).$$

Składowe prędkości będą równe

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{C(x - a)}{\left(\sqrt{(x - a)^2 + y^2} \right)^3} - \frac{C(x + a)}{\left(\sqrt{(x + a)^2 + y^2} \right)^3},$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{C y}{\left(\sqrt{(x - a)^2 + y^2} \right)^3} - \frac{C y}{\left(\sqrt{(x + a)^2 + y^2} \right)^3},$$

i można wówczas łatwo sprawdzić, że wektor wiru jest równy zeru. Rozkład linii prądu tego przepływu przedstawiono na rysunku 2.12.

2.6.3. PŁASKI RUCH POTENCJALNY

W *ruchu płaskim* wszystkie elementy płynu leżące na normalnej do pewnej niero-
chomej płaszczyzny poruszają się jednakowo. Do określenia tego ruchu wystarczy
opisać ruch nieskończenie cienkiej warstwy płynu po stałej płaszczyźnie (np. Oxy).
Wszystkie poznane dotychczas związki uproszczają się, gdyż $z = 0$ oraz $v_z = 0$.

Warunkiem istnienia płaskiego ruchu potencjalnego jest znikanie wektora wiru.
Dwie składowe wektora wiru (wzór (2.57)) są w tym ruchu stale równe zeru ($W_x = 0$
i $W_y = 0$), czyli w płaskim ruchu potencjalnym stale musi być spełniona zależność

$$W_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.66)$$

Potencjałem prędkości ruchu płaskiego nazywa się skalarną funkcję spełniającą
zależności

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_y. \quad (2.67)$$

Miejsce geometryczne punktów, w którym potencjał jest jednakowy, nazywa się
linią jednakowego potencjału.

Dla przepływu płaskiego równanie linii prądu (2.23) przyjmuje postać

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y},$$

czyli

$$-v_y dx + v_x dy = 0.$$

Lewa strona tego równania przedstawia różniczkę zupełną pewnej funkcji $\Psi(x, y)$,
spełniającej zależności

$$-v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}. \quad (2.68)$$

Funkcję $\Psi(x, y)$ charakteryzującą linię prądu (funkcja ta jest stała dla każdej linii
prądu) nazywa się *funkcją prądu*.

Weźmy pod uwagę dwie linie prądu, dla których funkcja prądu ma odpowiednio
wartości C_1 i C_2 , oraz obliczymy strumień objętości przez odcinek łączący dwa dowolne
punkty leżące na tych liniach prądu A i B (w ruchu płaskim jest to objętość płynu
przepływającej w jednostce czasu przypadająca na jednostkę długości). Strumień objętości wynosi więc (rys. 2.13)

$$q_V = \int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_A^B v_n ds,$$

co można również przedstawić w postaci

$$q_V = \int_A^B (-v_y dx + v_x dy) = \int_A^B \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy \right)$$

lub

$$q_V = \int_A^B d\Psi = C_2 - C_1.$$

Różnica wartości funkcji prądu w dwóch dowolnych punktach pola prędkości jest więc równa jednostkowemu strumieniowi objętości płynu między dwiema liniami prądu przechodzącymi przez obrane punkty.

Biorąc pod uwagę zależności (2.67) i (2.68), można znaleźć związek pomiędzy potencjałem prędkości i funkcją prądu. Będzie więc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (2.69)$$

Po pomnożeniu tych równań stronami przez siebie, dochodzi się do związku

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0.$$

Związki (2.69) są nazywane *zależnościami Cauchy'ego–Riemanna*. Wiadomo, że jeżeli dwie funkcje spełniają związki Cauchy'ego–Riemanna, to można je przedstawić w postaci funkcji zmiennej zespolonej $f(z)$, w której jedna z nich jest częścią rzeczywistą, a druga urojoną

$$f(z) = \Phi + \Psi i, \quad (2.70)$$

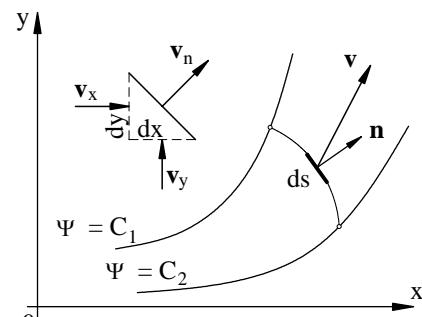
przy czym

$$z = x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}.$$

Funkcję $f(z)$ nazywa się *potencjałem zespolonym*.

Słuszne jest również twierdzenie odwrotne, że każda funkcja zmiennej zespolonej przedstawia pewien ruch płaski potencjalny, jej część rzeczywista i urojona oznaczają kolejno potencjał prędkości i funkcję prądu.

Każdemu ruchowi płaskiemu odpowiada więc pewna funkcja $f(z)$ i każdej funkcji $f(z)$ odpowiada pewien ruch płaski. Znając więc tę funkcję, można łatwo określić wszystkie wielkości kinematyczne charakteryzujące dany ruch.



Rys. 2.13. Interpretacja przepływową funkcji prądu

Pochodna funkcji $f(z)$ jest równa

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} i = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} i,$$

a więc

$$\frac{df(z)}{dz} = v_x - v_y i. \quad (2.71)$$

Pochodna ta nosi nazwę *prędkości zespolonej*.

Moduł prędkości zespolonej jest równy modułowi prędkości \mathbf{v}

$$\frac{df(z)}{dz} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v.$$

2.6.4. PRZYKŁADY PŁASKICH PÓŁ POTENCJALNYCH

Rozpatrzmy kilka najprostszych przypadków płaskiego ruchu potencjalnego. Z przepływów tych następnie można składać przepływy bardziej złożone.

1. Ruch równoległy

Rozpatrywany jest ruch określony następującą funkcją charakterystyczną

$$f(z) = a z,$$

w której $a = \text{const.}$

Będzie kolejno

$$f(z) = a(x + yi) = ax + ayi,$$

stąd

$$\Phi = ax \quad i \quad \Psi = ay,$$

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = a, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

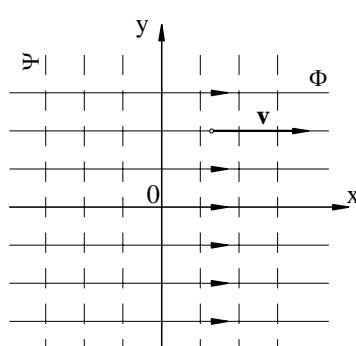
Wartość prędkości można również określić za pomocą prędkości zespolonej

$$\frac{df(z)}{dz} = v_x - v_y i = a,$$

stąd

$$v_x = a, \quad v_y = 0.$$

Linie $\Phi = ax = \text{const}$ oraz $\Psi = ay = \text{const}$ tworzą siatkę hydrodynamiczną przedstawioną na rysunku 2.14.



Rys. 2.14. Przepływ równoległy

2. Źródło płaskie

Przyjmijmy potencjał zespolony

$$f(z) = C \ln z,$$

w którym $C = \text{const.}$

Podstawmy $z = r e^{\varphi i}$

$$f(z) = C \ln (r e^{\varphi i}),$$

$$f(z) = C \ln r + C \varphi i,$$

stąd

$$\Phi = C \ln r \quad \text{i} \quad \Psi = C \varphi$$

oraz

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = C \frac{1}{r}, \quad v_\varphi = \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi} = 0.$$

Składowe prędkości w układzie kartezjańskim można określić za pomocą prędkości zespolonej. Będzie wtedy

$$\frac{df(z)}{dz} = C \frac{1}{z} = C \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i \right),$$

a więc

$$v_x = C \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_y = -C \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Liniami jednakowego potencjału

$$\Phi = C \ln r = \text{const}$$

są okręgi,

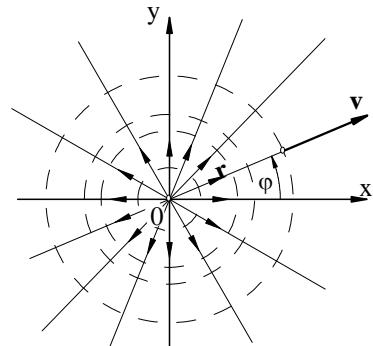
liniami prądu

$$\Psi = C \varphi = \text{const}$$

jest pęk prostych wychodzących ze źródła (rys. 2.15).

Samo źródło (punkt początkowy układu współrzędnych) jest punktem osobliwym, w którym prędkość staje się nieskończoność duża.

Rys. 2.15. Źródło płaskie



3. Źródło wirowe (wir płaski)

Dana jest funkcja charakterystyczna

$$f(z) = \frac{C}{i} \ln z.$$

Po przekształceniu otrzymuje się kolejno

$$\Phi + \Psi i = \frac{C}{i} \ln (r e^{\varphi i}) = C \varphi - C i \ln r,$$

stąd

$$\Phi = C \varphi \quad \text{i} \quad \Psi = -C \ln r$$

oraz

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \text{i} \quad v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{C}{r}.$$

Linie prądu są okręgami, linie potencjału tworzą pęk prostych (rys. 2.16).

Składowe prędkości w układzie kartezjańskim otrzyma się z prędkości zespolonej

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{C}{i} \frac{1}{z},$$

skąd, po przekształceniu,

$$v_x = -C \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = C \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Rys. 2.16. Źródło wirowe (wir płaski)

4. Dipol płaski

Rozpatruje się następującą funkcję charakterystyczną

$$f(z) = \frac{C}{z}.$$

Postępując podobnie jak w poprzednich przykładach, otrzymuje się

$$\Phi + \Psi i = \frac{C}{x + y i} = C \frac{x - y i}{x^2 + y^2},$$

tak więc

$$\Phi = \frac{C x}{x^2 + y^2}, \quad \Psi = -\frac{C y}{x^2 + y^2}.$$

Składowe prędkości

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

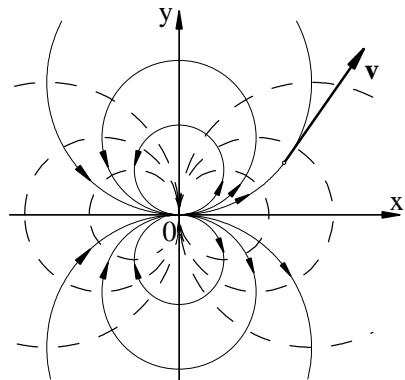
Linie prądu przedstawiają okręgi styczne do osi x w początku układu. Linie jednakowego potencjału są również okręgami stycznymi, ale do osi y w początku układu (rys. 2.17).

5. Superpozycja pól przestrzennych

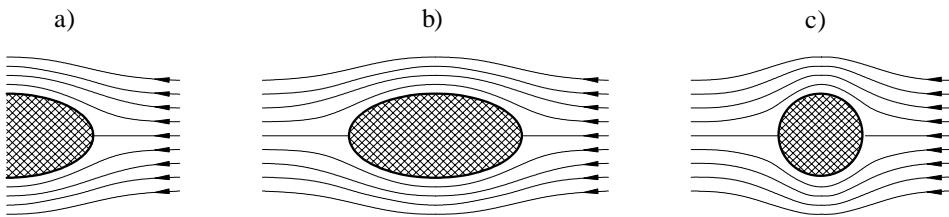
Omówiono potencjały i funkcje prądu kilku typowych ruchów płaskich. Po złożeniu ich można otrzymać opis ruchów bardziej złożonych, ilustrujących niektóre ważne w technice przepływy. Składając na przykład przepływ równoległy i źródło, otrzymuje się przepływ jak na rysunku 2.18a. Potencjał tego ruchu ma postać

$$\Phi = a x + C \ln r,$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Rys. 2.17. Dipol płaski



Rys. 2.18. Superpozycja przepływów: a) przepływ równoległy i źródło, b) ruch równoległy i para: źródło-upust, c) przepływ równoległy i dipol

Ruch równoległy i para źródło–upust opisują przepływ pokazany na rysunku 2.18b. Potencjał takiego ruchu jest następujący

$$\Phi = a x + C (\ln r_1 - \ln r_2).$$

Po złożeniu przepływu równoległego i dipolu otrzyma się opływ przekroju kołowego (rys. 2.18c). Potencjał tego przepływu

$$\Phi = a x + C \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

2.7. RUCH WIROWY PŁYNU. DRUGIE TWIERDZENIE HELMHOLTZA

Przepływ wirowy jest przypadkiem najogólniejszej formy ruchu określonego pierwszym twierdzeniem Helmholtza (2.54). Charakteryzuje się tym, że wektor prędkości kątowej chwilowego obrotu jest różny od zera, a zatem $\omega \neq 0$.

Ruch wirowy jest określony polem wektorowym prędkości kątowej chwilowego obrotu $\boldsymbol{\omega}$, zwanym *polem wirowym*. Z polem wirowym łączą się pojęcia *linii wirowej* i *rurki wirowej*.

Linią wirową nazywa się linię pola wektorowego rotacji. Ponieważ

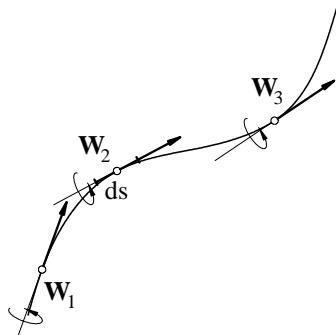
$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W}, \quad (2.72)$$

jest ona linią, do której w każdym jej punkcie styczny jest wektor wirowości (rys. 2.19).

Równanie linii wirowej ma postać $\mathbf{W} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}^1$

lub

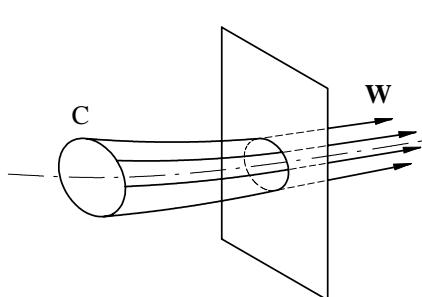
$$\frac{dx}{W_x} = \frac{dy}{W_y} = \frac{dz}{W_z}. \quad (2.73)$$



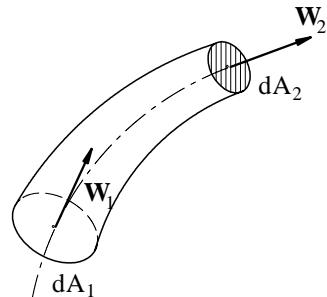
Rys. 2.19. Linia pola wektorowego rotacji prędkości

Podobnie jak linie prądu tworzą powierzchnię prądu, linie wirowe tworzą *powierzchnię wirową*. Jeżeli przez każdy punkt krzywej zamkniętej poprowadzi się linie wirowe, to linie te utworzą *rurkę wirową* (rys. 2.20). W przypadku nieskończenie małego pola przekroju rurki wirowej nazywa się ją *elementarną rurką wirową* lub włóknem wirowym.

Rurkę wirową wraz z liniami wirowymi znajdującymi się wewnątrz niej nazywa się *strugą wirową*. Jeżeli krzywa jest zamknięta nieskończenie małym konturem, linie wirowe przechodzące przez ten kontur tworzą *elementarną strugę wirową* (rys. 2.21).



Rys. 2.20. Rurka wirowa



Rys. 2.21. Elementarna struga wirowa

Strumieniem wiru nazywa się strumień wektora wiru przechodzący przez powierzchnię A . Jest to całka z iloczynu skalarnego wektora wiru \mathbf{W} i zorientowanego wycinka pola przekroju $d\mathbf{A}$ (rys. 2.22).

Elementarny strumień wiru

$$dq_W = \mathbf{W} \cdot d\mathbf{A} = W \cos \alpha dA. \quad (2.74)$$

¹⁾ $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \equiv (dx, dy, dz), |d\mathbf{r}| = ds.$

W przypadku dowolnej powierzchni skończonej A , strumień wektora wiru przez tę powierzchnię

$$q_W = \int_A \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dA. \quad (2.75)$$

Zgodnie z twierdzeniem Gaussa–Ostrogradskiego

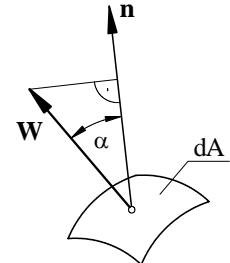
$$\int_A \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_V \operatorname{div} \mathbf{W} \, dV. \quad (2.76)$$

Omówimy teraz *drugie twierdzenie Helmholtza*, które mówi, że strumień wiru w cieczy doskonalej zachowuje niezmienną wartość wzduż całej długości strugi wirowej.

W celu jego udowodnienia zauważmy, że – zgodnie z (2.76) – strumień wiru

$$q_W = \int_V \operatorname{div} \mathbf{W} \, dV.$$

Rys. 2.22. Ilustracja pojęcia elementarnego strumienia wirowości



Pochodne cząstkowe współrzędnych W_x, W_y, W_z wektora wiru (wzór (2.57)) kolejno po x, y, z są następujące

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial W_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial W_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Po dodaniu ich stronami otrzymuje się

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = 0 \quad (2.78)$$

lub – ponieważ $\mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ –

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0. \quad (2.79)$$

Oznacza to, że w ustalonym ruchu wirowym dywergencja (rozbieżność linii wirowych) w całym obszarze płynu równa jest zeru, a zatem strumień wiru pozostaje stały. Stanowi to treść drugiego twierdzenia Helmholtza.

W szczególnym przypadku dla elementarnej rurki wirowej twierdzenie to przyjmuje postać

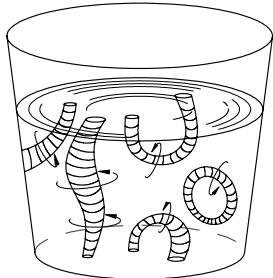
$$W dA = \text{const.} \quad (2.80)$$

Związek (2.80) mówi, że strumień wirowości przez dowolny przekrój elementarnej rurki wirowej jest stały. Dla rurki o przekroju skończonym natomiast

$$\tilde{W} A = \text{const}, \quad (2.81)$$

stąd wniosek, że średnia wartość wirowości \tilde{W} jest odwrotnie proporcjonalna do pola powierzchni przekroju poprzecznego.

Z zastosowania drugiego twierdzenia Helmholtza do pól prędkości płynu wynikają następujące wnioski:



➤ przekrój strugi wirowej nie może stać się zerem w obrębie rozpatrywanego obszaru płynu (wówczas $W \rightarrow \infty$), a zatem strugi wirowe tworzą pierścienie zamknięte w obszarze płynu,

➤ w postaci niezamkniętej strugi wirowe występują jedynie przy zetknięciu z powierzchniami ograniczającymi obszar płynu (rys. 2.23).

Rys. 2.23. Interpretacja drugiego twierdzenia Helmholtza

3. PODSTAWOWE RÓWNANIA MECHANIKI PŁYNÓW

3.1. ZASADA ZACHOWANIA MASY

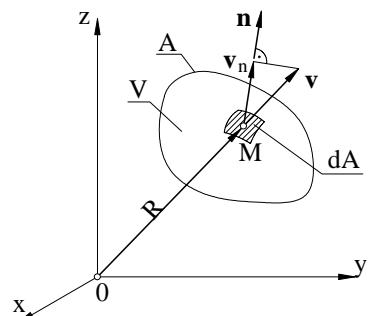
3.1.1. OGÓLNA POSTAĆ RÓWNANIA CIĄGŁOŚCI

Zgodnie z zasadą zachowania masy, w *żadnym punkcie pola masa nie może się tworzyć ani zniknąć*. W płynie nieściśliwym ($\rho = \text{const}$) tylko takie pole prędkości będzie spełniało tę zasadę, w którym w każdej chwili do obszaru ograniczonego powierzchnią kontrolną będzie wpływało tyle płynu, ile w tej samej chwili wypływa. Warunek ten jest zatem identyczny dla przepływów ustalonych i nieustalonych. Podczas przepływu płynu ścisłego ($\rho \neq \text{const}$) w ruchu ustalonym musi być zachowany powyższy warunek, bo masa zawarta we wnętrzu powierzchni kontrolnej jest niezmienna w czasie. W przepływie nieustalonym, z upływem czasu gęstość może ulegać lokalnym zmianom, co może wywołać zmianę masy płynu objętej powierzchnią kontrolną.

W przestrzeni wypełnionej poruszającym się płynem wyodrębnijmy obszar o objętości V ograniczony powierzchnią kontrolną A (rys. 3.1) o normalnej zewnętrznej \mathbf{n} w punkcie M .

Zmiana masy w objętości V może być wywołana:

- dopływem poprzez ścianę powierzchni kontrolnej,
- lokalną zmianą gęstości.



Rys. 3.1. Ilustracja do zasady zachowania masy. Obszar przestrzenny V o brzegu A

W czasie dt przez powierzchnię A przepłynie

$$\int_A \rho \mathbf{v} \mathbf{n} \, dA \, dt = \int_A \rho v_n \, dA \, dt. \quad (3.1)$$

W tym samym czasie przyrost masy wywołany zmianą gęstości płynu w objętości V wyniesie

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV, \quad (3.2)$$

przy czym $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

Masa nie może powstawać ani zanikać w obszarze kontrolnym, dlatego bilans dopływu i przyrostu masy musi być równy zeru, a zatem

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho v_n dA = 0. \quad (3.3)$$

Jest to całkowa postać równania wynikającego z zasady zachowania masy, zwanej *równaniem ciągłości*.

Na mocy twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego druga całka we wzorze (3.3) może być przedstawiona w postaci

$$\int_A \rho v_n dA = \int_A (\rho \mathbf{v})_n dA = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV.$$

Po podstawieniu otrzymuje się

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0. \quad (3.4)$$

Ponieważ całka we wzorze (3.4) ma być równa zeru dla dowolnie wybranej objętości V , stąd wniosek, że funkcja podcałkowa musi być równa zeru w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru, a więc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.5)$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

Równania (3.5) i (3.6) są różniczkową postacią równania ciągłości.

Po wykonaniu różniczkowania otrzyma się równanie (3.5) w postaci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.7)$$

a następnie, po uwzględnieniu pojęcia pochodnej substancialnej (2.16), otrzymuje się

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.8)$$

Jeżeli ruch jest ustalony, to równanie ciągłości (3.5) uprości się do postaci

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.9)$$

Dla płynu nieściśliwego ($\rho = \text{const}$) równanie to przybiera postać

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.10)$$

W ruchu potencjalnym płynu, kiedy istnieje potencjał prędkości Φ , równanie ciągłości płynu nieściśliwego przybiera postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi = 0. \quad (3.11)$$

Jak widać, tylko takie potencjały prędkości mogą przedstawać przepływy ciągłe płynów nieściśliwych, które spełniają równanie Laplace'a. Odwrotnie, każda funkcja spełniająca równanie Laplace'a przedstawia potencjał jakiegoś pola prędkości płynu nieściśliwego z zachowaniem postulatu ciągłości.

3.1.2. RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI RUCHU JEDNOWYMIAROWEGO

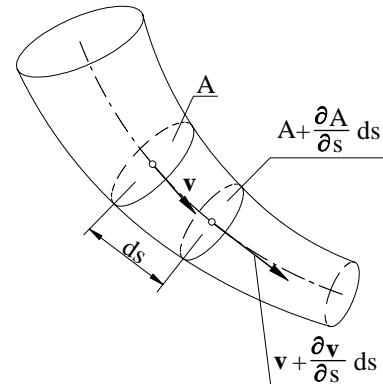
Weźmy pod uwagę część strugi zawartą pomiędzy dwoma przekrojami A i $\left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds\right)$ normalnymi do osi strugi, oddalonymi od siebie o element ds (rys. 3.2).

Przyjmijmy, że w obrębie elementu płynu o podstawie A i wysokości ds prędkości podczas przejścia od przekroju A do przekroju sąsiedniego zmieniają się tylko w kierunku ds . Dlatego taki przepływ, w którym można przyjąć, że prędkość \mathbf{v} (która w strudze nieelementarnej jest prędkością średnią) zależy tylko od jednego wymiaru, nazywa się *przepływem jednowymiarowym*.

Rozpatrzmy masę płynu wpływającą i wypływającą z elementu, ograniczonego przekrojami A i $\left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds\right)$ ¹⁾, w czasie dt .

Masa płynu dopływającego z prędkością \mathbf{v} przez przekrój A w czasie dt wynosi

$$\rho A v dt,$$



Rys. 3.2. Objętość kontrolna ograniczona rurką prądu i powierzchniami czołowymi

¹⁾ Przez pobocznicę elementu ciecz nie przenika, bo tworzą ją linie prądu, składowe normalne do nich są więc równe zera.

a wypływającego z prędkością $\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right)$ przez przekrój $\left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds\right)$ w tym samym czasie

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds\right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) dt.$$

Różnica mas płynu wpływającego i wypływającego z elementu równa się przyrostowi masy w czasie dt

$$\rho A v dt - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds\right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} ds\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt A ds. \quad (3.12)$$

Po wykonaniu mnożenia, uproszczeniach i pominięciu wielkości małych, rzędu wyższego od pierwszego, otrzymuje się

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v \frac{\partial A}{\partial s} + A v \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho A \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad (3.13)$$

lub po uwzględnieniu zasady różniczkowania iloczynu

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A v)}{\partial s} = 0. \quad (3.14)$$

Dla płynu nieściśliwego ($\rho = \text{const}$) równanie to przybiera postać

$$\frac{\partial(A v)}{\partial s} = 0. \quad (3.15)$$

Równanie (3.14) można zapisać w postaci

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + A \frac{\partial(\rho v)}{\partial s} + \rho v \frac{\partial A}{\partial s} = 0. \quad (3.16)$$

W przypadku ruchu ustalonego (żadna wielkość nie zależy od czasu) równania powyższe przechodzą w następujące:

➤ dla płynuściśliwego

$$\rho A v = \text{const}, \quad (3.17)$$

➤ dla płynu nieściśliwego

$$A v = \text{const}, \quad (3.18)$$

które można również napisać w postaci:

➤ dla płynuściśliwego

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \quad (3.19)$$

➤ dla płynu nieściśliwego

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (3.20)$$

gdzie:

v_1 – prędkość wpływu przez powierzchnię o polu A_1 ,

v_2 – prędkość wypływu przez powierzchnię o polu A_2 .

Ponieważ z zasady zachowania masy wynika, że gęstość płynu nie może stać się zerem, a równocześnie prędkość nie może osiągnąć wartości nieskończoności wielkiej, zatem z równania (3.17) wypływa następujący wniosek:

Wewnątrz płynu ściśliwego, poruszającego się ruchem ustalonym, struga nie może zaczynać się ani kończyć, a więc albo jest zamknięta, albo zaczyna się i kończy w nieskończoności lub na ścianach ruchomych ograniczających ten płyn.

3.1.3. STRUMIEŃ PRZEPŁYWU I PRĘDKOŚĆ ŚREDNIA

Z równań (3.17)–(3.20) wynika, że w przepływie ustalonym strumień masy (lub strumień objętości płynu nieściśliwego) przepływający w jednostce czasu przez dowolny przekrój poprzeczny rurki prądu jest jednakowy.

Występujący w tych równaniach iloczyn Av przedstawia objętość płynu przepływającego przez pole przekroju A w jednostce czasu. Iloczyn ten będziemy nazywali *strumieniem objętości* (objętościowym natężeniem przepływu) – patrz p. 2.3. Jeśli w polu A prędkość nie jest jednakowa¹⁾, to strumień objętości wyniesie

$$q_V = \int_A v \, dA = Av_{\text{sr}}, \quad (3.21)$$

przy czym wykorzystano tu twierdzenie o wartości średniej całki, wprowadzając pojęcie prędkości średniej przepływu v_{sr} .

Po pomnożeniu strumienia objętości przez gęstość płynu otrzymuje się *strumień masy* (masowe natężenie przepływu)

$$q_m = \int_A \rho v \, dA = A\rho_{\text{sr}}v_{\text{sr}}. \quad (3.22)$$

Prędkość średnią można więc obliczyć z zależności

$$v_{\text{sr}} = \frac{q_V}{A} = \frac{q_m}{\rho_{\text{sr}} A}. \quad (3.23)$$

Strumień objętości lub masy, zwany ogólnie *strumieniem przepływu* (dawniej było to objętościowe lub masowe natężenie przepływu lub krótko natężenie przepływu), i średnia prędkość przepływu należą do najczęściej występujących wielkości hydro-mechanicznych. W obliczeniach inżynierskich najczęściej operuje się właśnie prędkością średnią, sprowadzając ruch w rurach i kanałach do przepływu jednowymiarowego i wtedy w p. 3.1.2 prędkość v będzie utożsamiana z v_{sr} .

¹⁾ Występuje nierównomierny rozkład prędkości.

3.2. ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

3.2.1. OGÓLNA POSTAĆ ZASADY ZACHOWANIA PĘDU

Rozpatruje się ruch pewnej masy płynnej ograniczonej zamkniętą powierzchnią płynną wyciętą (myślowo) z całej jego masy (p. rys. 1.6). Objętość tej masy płynu w chwili t niech wynosi $V(t)$, a pole powierzchni, stanowiące brzeg bryły płynnej, $A(t)$.

Zgodnie z zasadą zachowania pędu: *prędkość zmiany pędu płynu zawartego w poruszającej się objętości $V(t)$ równa się wypadkowej sił zewnętrznych działających na ten płyn*. Przypomnijmy najpierw znane z fizyki równania ruchu układu wielu punktów materialnych zawartych w obszarze V odciętym od reszty otoczenia powierzchnią A . Równania ruchu jednej (i -tej) cząstki można zapisać następująco

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{P}_{io} + \sum_j \mathbf{P}_{ij}, \quad (3.24)$$

gdzie:

\mathbf{P}_{io} – siła zewnętrzna działająca na i -tą cząstkę o masie m_i i przyśpieszenie \mathbf{a}_i ,

\mathbf{P}_{ij} – siła wewnętrzna, z jaką j -ta cząstka działa na i -tą.

Wybierzmy teraz cząstki, które znajdują się w obszarze V i zsumujmy równania (3.24), których jest tyle, ile cząstek zawiera obszar V , wtedy

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{P}_{io} + \sum_{i,j} \mathbf{P}_{ij}. \quad (3.25)$$

Założymy teraz, że spełniona jest III zasada dynamiki (zasada akcji i reakcji), wtedy we wzorze (3.25) znikają siły oddziaływania cząstek leżących wewnątrz obszaru V , a powstają te siły \mathbf{P}_{ij} , które odpowiadają oddziaływaniu cząstek spoza obszaru V .

Wracając do obszaru $V(t)$, ograniczonego powierzchnią płynną $A(t)$, napiszemy równanie ruchu ośrodka ciągłego analogiczne do równania (3.25), ale tutaj sumy zostaną zastąpione całkami, gdyż zamiast zbioru punktów materialnych występuje ośrodek ciągły, zatem

$$\int_{V(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho dV = \int_{V(t)} \mathbf{f} \rho dV + \int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma} dA, \quad (3.26)$$

gdzie:

$d\mathbf{v}/dt$ – przyśpieszenie elementu o masie ρdV ,

\mathbf{f} i $\boldsymbol{\sigma}$ – jednostkowe siły: masowa i powierzchniowa (p. 1.3).

Elementarna siła powierzchniowa $\boldsymbol{\sigma} dA$ wyraża tutaj oddziaływanie ośrodka spoza obszaru $V(t)$ na element dA powierzchni $A(t)$ otaczającej badany obszar.

Równanie (3.26) przedstawia zasadę zachowania pędu w niutonowskiej mechanice ośrodków ciągłych, które orzeka, że zmiana pędu w czasie jest spowodowana przez siły masowe i powierzchniowe.

Do wyprowadzenia równania (3.26) można zastosować również zasadę d'Alemberta, która wymaga, aby w każdej chwili suma sił czynnych (masowych oraz powierzchniowych) i sił bezwładności była równa zeru. Siła bezwładności wyniesie

$$\int_{V(t)} -\mathbf{a} \rho dV = \int_{V(t)} -\frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho dV, \quad (3.27)$$

gdzie \mathbf{a} – przyśpieszenie masy elementarnej ρdV , po odpowiednich podstawieniach otrzymuje się zatem równanie równoważne wyrażeniu (3.26)

$$\int_{V(t)} -\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV + \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma} dA = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Ale, zgodnie z zależnością (1.30),

$$\int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma} dA \equiv \int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) dA = \int_{V(t)} \operatorname{Div} \mathbf{S} dV. \quad (3.29)$$

Po uwzględnieniu tej zależności będzie najpierw

$$\int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV - \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV - \int_{V(t)} \operatorname{Div} \mathbf{S} dV = \mathbf{0}, \quad (3.30)$$

a następnie

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{f} - \operatorname{Div} \mathbf{S} \right) dV = \mathbf{0}. \quad (3.31)$$

Stąd, wobec prawdziwości (3.31) dla każdego $V(t)$, można napisać

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{Div} \mathbf{S} \quad (3.32)$$

lub w postaci rozwiniętej

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\sigma}_x + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\sigma}_y + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{\sigma}_z. \quad (3.33)$$

W przedstawionych równaniach (3.32) oraz (3.33) opisany jest ruch *dowolnego ośrodka ciągłego*, którego rodzaj określa macierz \mathbf{S} tensora naprężzeń. Za pomocą tych równań przedstawiono najogólniejszą różniczkową postać równania wynikającego z zasady zachowania pędu.

3.2.2. RÓWNANIE ZACHOWANIA PĘDU PŁYNU NIELEPKIEGO I NIEŚCIŚLIWEGO (CIECZY DOSKONAŁEJ)

Ciecz doskonała jest *nieściśliwa i nielepka*, a zatem nie występują w niej naprężenia styczne (zob. p. 1.4.2). Wobec tego naprężenie $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ jest normalne do powierzchni

ni, czyli jest współliniowe z wektorem \mathbf{n} , ale o kierunku przeciwnym do niego (p. 1.3.4). Wówczas, dla stanu naprężenia określonego zależnością (1.34), równanie zachowania pędu ma postać

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \text{grad } p , \quad (3.34)$$

która jest *równaniem ruchu cieczy doskonalej*, zwanym *równaniem Eulera*.

Należy zwrócić uwagę, że również w nieruchomym płynie macierz naprężeń jest w takiej samej postaci, gdyż wtedy także nie występują naprężenia styczne, ale ponadto $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{0}$.

3.3. ZASADA ZACHOWANIA MOMENTU PĘDU

Do masy ośrodka ciągłego zawartej w zamkniętej powierzchni płynnej $A(t)$ (rys. 1.6) zastosujmy zasadę zachowania momentu pędu (krętu). Mówiąc o niej, że *prędkość zmiany momentu pędu równa się sumie momentów wszystkich sił działających na ciało*.

Zachowując zasadę akcji i reakcji w odniesieniu do bryły ograniczonej powierzchnią płynną, zauważmy, że wyrażenia podcałkowe we wzorze (3.26) przedstawiają kolejno: prędkość zmiany pędu elementarnej masy ρdV , elementarną siłę masową działającą na tę masę elementarną oraz elementarną siłę powierzchniową działającą na element dA powierzchni płynnej. Po wektorowym pomnożeniu (lewostronnym) tych wyrażeń przez promień wodzący \mathbf{R} otrzymamy odpowiednie momenty elementarne, dlatego

$$\int_{V(t)} \mathbf{R} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \quad (3.35)$$

jest prędkością zmiany momentu pędu bryły ciekłej $V(t)$,

$$\int_{V(t)} \mathbf{R} \times \mathbf{f} \rho dV \quad (3.36)$$

to moment sił masowych bryły ciekłej,

$$\int_{A(t)} \mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma} dA \quad (3.37)$$

jest momentem sił powierzchniowych.

Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu napiszemy

$$\int_{V(t)} \rho \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{f} dV + \int_{A(t)} \mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma} dA . \quad (3.38)$$

Obliczając moment sił powierzchniowych, uwzględnimy wzór (1.25'') (przy czym oznaczamy: $\sigma(\mathbf{i}) \equiv \sigma_x$, $\sigma(\mathbf{j}) \equiv \sigma_y$, $\sigma(\mathbf{k}) \equiv \sigma_z$, $\sigma(\mathbf{n}) \equiv \sigma$)

$$\begin{aligned} \int_{A(t)} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}) dA &= \int_{A(t)} \mathbf{R} \times (n_x \boldsymbol{\sigma}_x + n_y \boldsymbol{\sigma}_y + n_z \boldsymbol{\sigma}_z) dA \\ &= \int_{A(t)} (n_x (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}_x) + n_y (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}_y) + n_z (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}_z)) dA. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Zauważmy, że wektory $\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}_x$, $\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}_y$, $\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}_z$ można przedstawić za pomocą wektorów bazy $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ przyjętego układu odniesienia. Otrzymamy wówczas wyrażenia analogiczne do (1.29) (występowały tam wektory $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_z$ oraz ich składowe, tu zaś są one mnożone przez \mathbf{R}). Postępując zatem podobnie jak w (1.29), po zastosowaniu wzoru Gaussa (zob. (1.30), (1.31)), a następnie wykonaniu różniczkowania, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \int_{A(t)} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}) dA &= \int_{V(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\sigma}_z) \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \boldsymbol{\sigma}_x + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \times \boldsymbol{\sigma}_y + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z} \times \boldsymbol{\sigma}_z \right) dV + \int_{V(t)} \left(\mathbf{R} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_x}{\partial x} + \mathbf{R} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y}{\partial y} + \mathbf{R} \times \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_z}{\partial z} \right) dV \\ &= \int_{V(t)} (\mathbf{i} \times \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_z) dV + \int_{V(t)} (\mathbf{R} \times \operatorname{Div} \mathbf{S}) dV, \end{aligned} \quad (3.40)$$

gdziż

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{R} &= \frac{\partial}{\partial x} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = \mathbf{i}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial x} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = \mathbf{j}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{R} &= \frac{\partial}{\partial x} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu wzoru (3.40) napiszemy w miejsce (3.38)

$$\int_{V(t)} \left(\mathbf{R} \times \left[\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{f} - \operatorname{Div} \mathbf{S} \right] - (\mathbf{i} \times \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_z) \right) dV = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

Na mocy (3.32) wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest zerem, czyli

$$\mathbf{i} \times \boldsymbol{\sigma}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{0}, \quad (3.42)$$

skąd, po uwzględnieniu (1.25'') i wymnożeniu,

$$(k\sigma_{xy} - j\sigma_{xz}) + (-k\sigma_{yx} + i\sigma_{yz}) + (j\sigma_{zx} - i\sigma_{zy}) = \mathbf{0}. \quad (3.43)$$

Na podstawie zaś definicji równości wektorów

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad (3.44)$$

co oznacza, że macierz (1.27) jest symetryczna i mówimy wówczas, że *tensor naprężeń jest symetryczny*. Dowiedliśmy zatem, że – przy zachowaniu równania ruchu (3.32) – z zasady zachowania momentu pędu wynika *symetria tensora naprężen*. Można również udowodnić twierdzenie odwrotne: z symetrii tensora naprężen, spełnienia równania ciągłości (3.5) i równania ruchu (3.32), wynika, że zasada zachowania momentu pędu jest prawdziwa.

3.4. ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

3.4.1. OGÓLNA POSTAĆ ZASADY ZACHOWANIA ENERGII CAŁKOWITEJ

Energia przypadająca na jednostkę masy jest sumą *energii kinetycznej* $\mathbf{v}^2/2$ oraz *energii wewnętrznej* e .

Energia całkowita płynu zawartego w obszarze płynnym $V(t)$ jest zatem w danej chwili równa

$$\int_{V(t)} \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) dV. \quad (3.45)$$

Zmiana tej energii w czasie może nastąpić na skutek działania sił zewnętrznych (powierzchniowych i masowych) podczas przemieszczania się obszaru płynnego oraz wskutek doprowadzenia z zewnątrz do obszaru energii cieplnej (np. przez przewodnictwo cieplne).

Praca sił zewnętrznych w czasie dt będzie równa

$$\left(\int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} dA + \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} \mathbf{v} dV \right) dt. \quad (3.46)$$

Energia cieplna doprowadzona do powierzchni $A(t)$ w tym czasie

$$\left(\int_{A(t)} (\lambda \operatorname{grad} T) \mathbf{n} dA \right) dt, \quad (3.47)$$

gdzie:

T – temperatura płynu,

λ – przewodność cieplna.

Zasadę zachowania energii można więc zapisać następująco

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) dV = \int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} dA + \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} \mathbf{v} dV + \int_{A(t)} (\lambda \operatorname{grad} T) \mathbf{n} dA. \quad (3.48)$$

Przekształćmy poszczególne całki występujące w równaniu (3.48)

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) dV = \int_{V(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) dV + \int_{V(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) dV ,$$

a po uwzględnieniu wzoru (3.8)

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) dV = \int_{V(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) dV . \quad (3.49)$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego, zamieńmy całki powierzchniowe na objętościowe (uwzględniając zależność (1.28))

$$\int_{A(t)} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} dA = \int_{A(t)} \mathbf{S} \mathbf{n} \mathbf{v} dA = \int_{V(t)} \operatorname{Div}(\mathbf{S} \mathbf{v}) dV , \quad (3.50)$$

$$\int_{A(t)} (\lambda \operatorname{grad} T) \mathbf{n} dA = \int_{V(t)} \operatorname{Div}(\lambda \operatorname{grad} T) dV . \quad (3.51)$$

Równanie zachowania energii (3.48) da się zatem sprowadzić do postaci

$$\int_{V(t)} \left[\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) - \operatorname{Div}(\mathbf{S} \mathbf{v}) - \rho \mathbf{f} \mathbf{v} - \operatorname{Div}(\lambda \operatorname{grad} T) \right] dV = 0 , \quad (3.52)$$

z czego wynika, że funkcja podcałkowa (w nawiasie kwadratowym) powinna być równa零 w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru (ze względu na dowolność obszaru całkowania), a zatem

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + e \right) = \operatorname{Div}(\mathbf{S} \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \mathbf{v} + \operatorname{Div}(\lambda \operatorname{grad} T) . \quad (3.53)$$

Jest to *różniczkowa forma równania wynikającego z zasady zachowania energii całkowitej*.

3.4.2. RÓWNANIE ZACHOWANIA ENERGII PŁYNU NIELEPKIEGO I NIEPRZEWODZĄCEGO CIEPŁA

Wyprowadzimy dwie szczególne postacie równania (3.53) wyrażające zasadę zachowania energii, odpowiednio: gazu doskonałego i cieczy doskonałej. Dla gazu doskonałego w sensie termodynamicznym, tzn. spełniającego równanie stanu (Clapeyrona),

$$e = c_V T, \quad c_V = \text{const}, \quad (3.54)$$

gdzie:

c_V – ciepło właściwe w stałej objętości,

T – temperatura gazu.

W przypadku cieczy doskonałej będziemy zakładać tę samą, co dla gazu doskonałego, zależność (3.54) dotyczącą energii wewnętrznej. Gdy założy się, że płyn jest nielepki i nie przewodzi ciepła oraz uwzględni się zależność (3.54), równanie zachowania energii (3.53) przyjmie postać

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + c_v T \right) = \operatorname{Div}(p \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.55)$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{div}(p \mathbf{v}) = p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} p$$

oraz

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{dp}{dt},$$

a po uwzględnieniu zależności (3.8)

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{dp}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Wynika stąd, że

$$-\operatorname{div}(p \mathbf{v}) + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{dp}{dt} - \mathbf{v} \operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.56)$$

Równanie energii można zatem przedstawić w postaci

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + c_v T + \frac{p}{\rho} \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.57)$$

Jeśli założymy, że energia wewnętrzna elementu cieczy nielepkiej i nieprzewodzącej ciepła jest niezmienna

$$\frac{d}{dt} (c_v T) = 0, \quad (3.58)$$

to równanie (3.57) przyjmie postać

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.59)$$

W przypadku gazu doskonałego (w sensie termodynamicznym), ale nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła, energia wewnętrzna elementu gazu może ulegać zmianom.

Zmiany te są wywołane pracą sił powierzchniowych pochodzących od ciśnienia i uwzrakowane ściśliwością gazu, a zatem

$$\frac{d}{dt} (c_V T) \neq 0 . \quad (3.60)$$

Po wprowadzeniu entalpii gazu

$$i = c_V T + \frac{p}{\rho}, \quad (3.61)$$

otrzymamy równanie energii w postaci

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + i \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial p}{\partial t} . \quad (3.62)$$

4. STATYKA PŁYNÓW

4.1. RÓWNOWAGA PŁYNU

Statyka płynów to dział mechaniki płynów obejmujący prawa równowagi płynów znajdujących się w spoczynku oraz zagadnienia praktycznego zastosowania tych praw.

Równowaga płynu może mieć charakter *bezwzględny* i *względny*. W obu przypadkach poszczególne elementy płynu nie zmieniają swego położenia względem siebie i względem otaczających ścian. W przypadku równowagi bezwzględnej nie zmieniają również swego położenia względem Ziemi.

4.1.1. WARUNKI RÓWNOWAGI PŁYNÓW. PRAWO PASCALA

Równanie równowagi płynu otrzymuje się bezpośrednio z równań ruchu (3.33) lub (3.34) po uwzględnieniu, że w rozpatrywanych zagadnieniach prędkość jest równa zeru ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), a pozostałe wielkości nie zależą od czasu ($\partial H/\partial t = 0$).

Równanie równowagi płynu przyjmuje zatem postać

$$\rho f = \text{grad } p \quad (4.1)$$

lub w formie trzech równań

$$\rho X = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho Z = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.2)$$

Równanie to jest *podstawowym równaniem równowagi płynów* i nosi nazwę *równania równowagi Eulera*.

Mnożąc poszczególne równania układu (4.2) kolejno przez dx , dy , dz i dodając stronami, otrzymamy

$$\rho(X dx + Y dy + Z dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Ponieważ ciśnienie nie zależy od czasu, prawa strona tego równania jest zatem różniczką zupełną funkcji $p = p(x, y, z)$:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz,$$

czyli

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz). \quad (4.3)$$

Jest to tak zwane *podstawowe równanie hydrostatyki*, określające zależność między ciśnieniem i jednostkowymi siłami masowymi działającymi na płyn znajdujący się w spoczynku. Gdy na płyn nie działają siły masowe, z równania równowagi (4.2) wynika, że

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \Rightarrow \text{grad } p = \mathbf{0} \Rightarrow p = \text{const}, \quad (4.4)$$

a zatem

gdyby na płyn działały wyłącznie siły powierzchniowe, ciśnienie miałoby wówczas jednakową wartość w każdym punkcie płynu.

Stanowi to treść *prawa Pascala*, zwanego *prawem równomiernego rozchodzenia się ciśnienia w płynie*.

Brak sił masowych oznacza, że płyn jest nieważki. Ten warunek w polu sił ciężkości spełniają w przybliżeniu gazy i wszystkie płyny w stanie nieważkości. Prawo Pascala stosuje się również w przybliżeniu do płynów znajdujących się pod działaniem pola sił masowych, jeżeli są one pomijalnie małe w porównaniu z siłami pochodzący od ciśnień. Warunki te zachodzą w urządzeniach zawierających płyny pod dużymi ciśnieniami (sprężarki tłokowe, akumulatory wodne, prasy hydrauliczne itp.).

Podczas rozwiązywania podstawowego równania hydrostatyki (4.3), oprócz określonych warunków brzegowych, należy wziąć pod uwagę równanie stanu płynu

$$\rho = \rho(p, T) \quad (4.5)$$

opisujące zmianę gęstości w zależności od ciśnienia i temperatury.

Określenie związku między ciśnieniem i jednostkowymi siłami masowymi jest jednym z dwu charakterystycznych zagadnień statyki plynów. Drugim jest znalezienie równania powierzchni izobarycznej

$$p = \text{const} \Rightarrow dp = 0,$$

równanie różniczkowe powierzchni izobarycznej ma więc postać

$$X dx + Y dy + Z dz = 0. \quad (4.6)$$

Lewa strona tego równania jest iloczynem skalarnym wektorów $\mathbf{f} \equiv (X, Y, Z)$ i $d\mathbf{r} \equiv (dx, dy, dz)$, wobec tego wynika z niego, że wektor siły masowej, w każdym punkcie obszaru płynnego, jest prostopadły do powierzchni izobarycznej przechodzącej przez ten punkt. Powierzchnie izobaryczne w jednorodnym polu sił masowych są więc płaszczyznami.

4.1.2. RÓWNOWAGA W POTENCJALNYM POLU SIŁ MASOWYCH

Jeżeli lewa strona równania (4.3) jest różniczką zupełną, to wyrażenie w nawiasie po prawej stronie tego równania również jest różniczką zupełną pewnej funkcji U współrzędnych przestrzennych, a więc

$$X \, dx + Y \, dy + Z \, dz = -dU, \quad (4.7)$$

z czego wynika, że

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.8)$$

Funkcję U spełniającą te warunki nazywamy *potencjałem sił masowych*.

Po podstawieniu zależności (4.7) do równania równowagi (4.3) otrzymamy

$$dp = -\rho \, dU. \quad (4.9)$$

Wobec tego równowaga płynu jest możliwa tylko w potencjalnym polu sił.

Z równania powierzchni izobarycznych wynika

$$dp = 0 \Rightarrow dU = 0 \Rightarrow U = \text{const},$$

powierzchnia izobaryczna jest zatem zarazem *powierzchnią jednakowego potencjału* (powierzchnią ekwipotencjalną).

Powierzchnie ekwipotencjalne charakteryzują się również stałą gęstością, a zatem są *powierzchniami izosterycznymi* w płynach ściśliwych. Gęstość bowiem można określić z równania (4.9)

$$\rho = \left| \frac{dp}{dU} \right|, \quad (4.10)$$

z którego wynika, że gęstość w płynie ściśliwym jest funkcją potencjału sił masowych U , a zatem gęstość płynu będzie jednakowa na powierzchni $U = \text{const}$. Ma to istotne znaczenie, gdyż niespełnienie tego warunku świadczy o braku równowagi płynu. Wypływa stąd wniosek, że powierzchnie rozdziału dwu nie mieszających się cieczy o różnych gęstościach są powierzchniami ekwipotencjalnymi.

4.1.3. RÓWNOWAGA CIECZY W ZIEMSKIM POLU GRAWITACYJNYM

Rozpatrzmy równowagę cieczy w ziemskim polu grawitacyjnym. Ciecz ta wypełnia ograniczoną przestrzeń o wymiarach małych w porównaniu z promieniem Ziemi. Pole grawitacyjne można w takim przypadku uważać za jednorodne, a linie tego pola za równoległe i pionowe.

W prostokątnym układzie współrzędnych, zorientowanym w ten sposób, że płaszczyzna $0xy$ jest pozioma, a osa z skierowana pionowo w dół (rys. 4.1), współrzędne jednostkowej siły masowej są następujące:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g. \quad (4.11)$$

Po podstawieniu tych wartości do równania powierzchni izobarycznej (4.6) otrzymamy

$$g dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow z = C. \quad (4.12)$$

Wynika stąd, że powierzchnie izobaryczne są płaszczyznami poziomymi.

Jedną z powierzchni izobarycznych jest powierzchnia zetknięcia cieczy i gazu, nazywana *powierzchnią swobodną lub zwierciadłem cieczy*, której równanie ma postać

$$z = z_0. \quad (4.13)$$

Rozkład ciśnienia w cieczy wyznaczmy po podstawieniu warunków (4.11) do równania (4.3)

$$dp = \rho g dz. \quad (4.14)$$

Po całkowaniu tego równania, przy założeniu nieściśliwości cieczy ($\rho = \text{const}$), otrzymamy

$$p = \rho g z + C. \quad (4.15)$$

Stała całkowania wynika z warunku, że na powierzchni swobodnej ($z = z_0$) panuje ciśnienie $p = p_0$, skąd

$$C = p_0 - \rho g z_0.$$

Ciśnienie w dowolnym punkcie M

$$p = p_0 + \rho g(z - z_0) = p_0 + \rho g h. \quad (4.16)^1$$

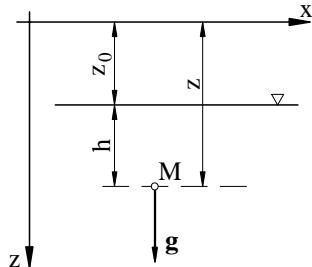
Różnica $z - z_0 = h$ jest głębokością zanurzenia punktu M , a zatem *ciśnienie w dowolnym punkcie cieczy równe się ciśnieniu na powierzchni swobodnej, powiększoneemu o ciśnienie słupa cieczy o wysokości odpowiadającej głębokości zanurzenia tego punktu*.

Różnicę ciśnień

$$p - p_0 = \rho g h \quad (4.17)$$

nazywamy *ciśnieniem hydrostatycznym*.

¹⁾ Zauważmy, że prawo Pascala (4.4) podane w formie warunkowej można zapisać w postaci ogólniejszej po przekształceniu wzoru (4.16): $p_0 = p - \rho gh$ i wtedy różnica między ciśnieniem i ciśnieniem hydrostatycznym w nieruchomej cieczy ma wartość stałą, wynoszącą p_0 .



Rys. 4.1. Ciecz w ziemskim polu grawitacyjnym

Ciśnienie hydrostatyczne w jednorodnym polu grawitacyjnym jest więc liniową funkcją głębokości zanurzenia pod zwierciadłem cieczy.

Po przekształceniu wzoru (4.17) otrzymamy

$$\frac{p - p_0}{\rho g} = h, \quad (4.18)$$

a zatem wysokość ciśnienia hydrostatycznego jest równa głębokości. Wynika stąd, że w punktach położonych na jednakowej głębokości panuje jednakowe ciśnienie.

Równanie (4.14) scałkowano przy założeniu, że $\rho = \text{const}$. Stosownalność otrzymywanych zależności jest więc ograniczona do jednej warstwy cieczy o stałej gęstości.

W przypadku przestrzeni wypełnionych kilkoma warstwami cieczy nie mieszających się, o gęstościach spełniających warunek

$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots$$

całkowanie równania (4.14) przeprowadzamy dla każdej warstwy oddzielnie, a stałe całkowania dla kolejnych rozwiązań wyznaczamy z warunków na powierzchniach rozdziału dwu cieczy. W wyniku otrzymujemy

$$p = p_0 + \rho_1 g h_1 + \dots + \rho_i g h_i + \dots + \rho_n g z_n \quad (4.19)$$

lub

$$p = p_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i g h_i + \rho_n g z_n, \quad (4.20)$$

gdzie:

h_i – całkowita grubość warstwy,

z_n – głębokość zanurzenia w n -tej warstwie.

Wysokość ciśnienia hydrostatycznego jest często odnoszona do gęstości wody, a więc

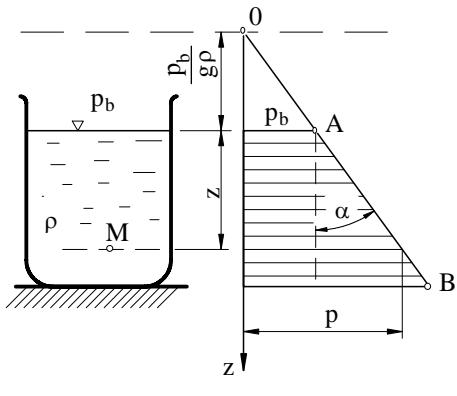
$$\frac{p - p_0}{\rho_w g} = \frac{\rho_1}{\rho_w} h_1 + \dots + \frac{\rho_i}{\rho_w} h_i + \dots + \frac{\rho_n}{\rho_w} z_n. \quad (4.21)$$

Zależność (4.20) stanowi podstawę do sporządzania wykresów ciśnień, obrazujących rozkład ciśnienia wzdłuż osi pionowej z (rys. 4.2). Kąt nachylenia linii wykresu rośnie wraz z gęstością cieczy. Jak wynika z wzoru (4.21), w najogólniejszym przypadku wykres wysokości ciśnienia jest linią łamaną składającą się z odcinków prostych o współczynnikach kierunkowych określonych stosunkiem ρ_i/ρ_w . Na rysunku 4.3 przedstawiono przykład rozkładu wysokości ciśnienia wywieranego na ścianę zbiornika wypełnionego dwoma nie mieszającymi się cieczami o gęstościach spełniających warunek

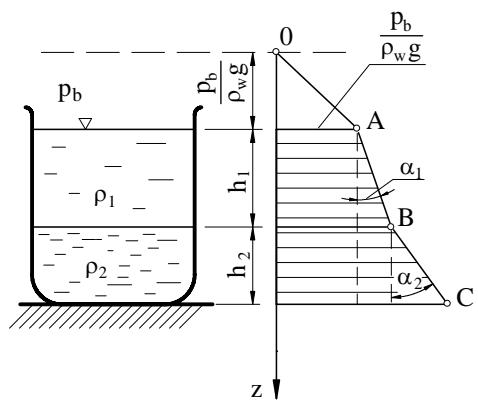
$$\rho_1 < \rho_2.$$

Kąty nachylenia poszczególnych odcinków określają zależności:

$$\alpha_1 = \arctg(\rho_1/\rho_w), \quad \alpha_2 = \arctg(\rho_2/\rho_w).$$



Rys. 4.2. Rozkład ciśnienia w cieczy jednorodnej znajdującej się w ziemskim polu grawitacyjnym

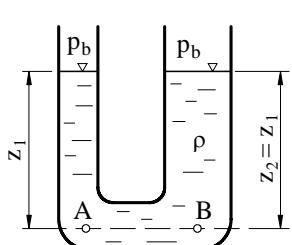


Rys. 4.3. Rozkład ciśnienia wywieranego na ścianę zbiornika wypełnionego dwiema nie mieszającymi się cieczami

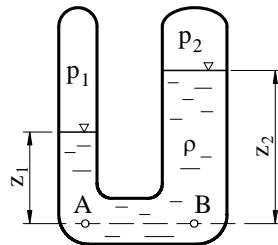
4.1.4. RÓWNOWAGA CIECZY W NACZYNIACH POŁĄCZONYCH

Naczyniami połączonymi nazywamy dwa lub więcej naczyni połączonych ze sobą przewodem lub przewodami. Przekroje naczyni powinny być tak duże, by siły adhezyjne, działające między ich ścianami przewodów a częstekami cieczy, nie odgrywały wyczuwalnej roli.

Rozpatrzymy kilka przypadków równowagi cieczy w naczyniach połączonych. Najprostszym przypadkiem jest naczynie połączone otwarte, w którym znajduje się ciecz jednorodna (rys. 4.4). Poziom cieczy w naczyniach znajduje się na tej samej wysokości, ponieważ powierzchnie izobaryczne są płaszczyznami poziomymi.



Rys. 4.4. Naczynia połączone otwarte



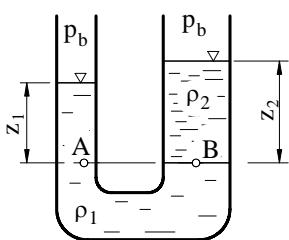
Rys. 4.5. Naczynia połączone zamknięte

Gdy ciecz jednorodna znajduje się w zamkniętych naczyniach połączonych (rys. 4.5), wówczas poziom cieczy zależy od ciśnień na powierzchniach swobodnych. Ciśnienie na dowolnym poziomie wynosi

$$p_A = p_1 + \rho g z_1, \quad p_B = p_2 + \rho g z_2. \quad (4.22)$$

Ponieważ ciśnienie $p_A = p_B$, różnicę ciśnień panujących na powierzchniach swobodnych mierzymy różnicą poziomów cieczy w naczyniach

$$p_1 - p_2 = \rho g (z_2 - z_1). \quad (4.23)$$



Rys. 4.6. Równowaga dwóch cieczy nie mieszających się w naczyniach połączonych

Jeżeli otwarte naczynia połączone zawierają dwie różnorodne, nie mieszające się cieczy o gęstościach $\rho_1 > \rho_2$, to powierzchnie swobodne tych cieczy znajdują się na różnych poziomach (rys. 4.6). Prawo wynikające z zależności (4.17) i (4.18), mówiące, że w punktach położonych na jednakowej głębokości panuje jednakowe ciśnienie, należy w przypadku naczyń połączonych uściślić.

Uściślone brzmienie tego prawa, noszącego nazwę *prawa naczyń połączonych*, jest następujące:
w punktach należących do jednej i tej samej nieprzerwanej masy ciekłej i znajdujących się na tej samej płaszczyźnie poziomej panuje jednakowe ciśnienie.

Powierzchnią ekwipotencjalną izobaryczną wspólną w obu naczyniach będzie płaszczyzna zetknięcia się obu cieczy oraz wszystkie płaszczyzny leżące poniżej, ponieważ przechodzą one przez tę samą ciecz jednorodną, a zatem $p_A = p_B$, czyli $p_b + \rho_1 g z_1 = p_b + \rho_2 g z_2$, stąd

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (4.24)$$

a więc w naczyniach połączonych stosunek wysokości słupów dwu nie mieszających się z sobą cieczy ponad płaszczyzną ich zetknięcia jest równy odwrotnemu stosunkowi ich gęstości.

4.1.5. ZASADA POMIARU CIŚNIEŃ STATYCZNYCH. MANOMETRY CIECZOWE

Prawo równowagi cieczy w naczyniach połączonych jest stosowane do pomiaru ciśnień za pomocą manometrów hydrostatycznych (cieczowych). Manometry cieczowe budowane są najczęściej w kształcie litery U z przezroczystych rurek o niezbyt małych średnicach. Cechuje je prosta konstrukcja i dobra dokładność pomiarów. Główną zaletą manometrów hydrostatycznych jest to, że nie trzeba ich wzorcować. Mierzone ciśnienia są obliczane na podstawie praw fizycznych i równań matematycznych. Za pomocą manometrów cieczowych można mierzyć ciśnienie bezwzględne oraz ciśnienia względne (nadciśnienia i podciśnienia).

1. Zasada pomiaru ciśnień bezwzględnych

Jeżeli jedna z rurek manometru U (rys. 4.7) jest tak połączona z atmosferą, że panuje w niej ciśnienie atmosferyczne $p_1 = p_b$, a druga jest rurką zamkniętą, wypełnioną parą

nasyconą cieczy manometrycznej pod ciśnieniem p_2 , to po zastosowaniu równania (4.16) dla płaszczyzny przechodzącej przez dolną powierzchnię swobodną cieczy otrzymujemy

$$p_b = \rho g z - p_2. \quad (4.25)$$

Wysokość z słupa cieczy wypełniającej manometr (najczęściej rtęci) jest wysokością ciśnienia atmosferycznego, pod warunkiem, że $p_2 \approx 0$.

Manometr służący do pomiaru ciśnienia atmosferycznego nosi nazwę *barometru*. Jeżeli lewe ramię nie będzie połączone z atmosferą, to wysokość z jest wysokością ciśnienia bezwzględnego.

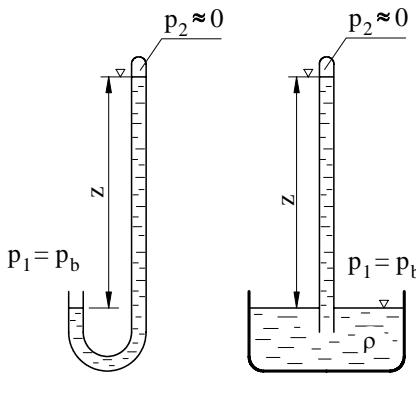
2. Zasada pomiaru ciśnień względnych

Założymy, że ramiona manometru wykonanego w kształcie litery U, napełnionego cieczą manometryczną o gęstości ρ_m , są połączone ze zbiornikami zawierającymi ciecz o gęstości ρ . Po połączeniu manometru z obszarem mierzonych ciśnień ustali się stan równowagi jak na rysunku 4.8. Zgodnie z prawem naczyń połączonych $p_A = p_B$, czyli

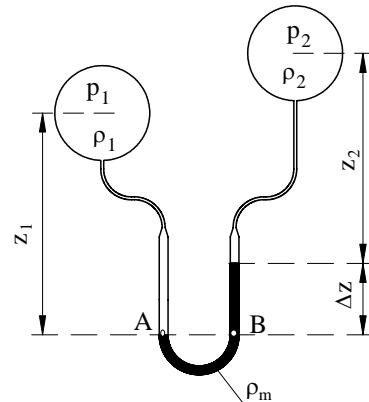
$$p_1 + \rho_1 g z_1 = p_2 + \rho_2 g z_2 + \rho_m g \Delta z. \quad (4.26)$$

Jeśli $z_1 - z_2 = \Delta z$ i $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, to

$$p_1 - p_2 \equiv \Delta p = (\rho_m - \rho) g \Delta z. \quad (4.26')$$



Rys. 4.7. Schematy barometru



Rys. 4.8. Schemat manometru różnicowego dwuramiennego

Miarą różnicy ciśnień w takim manometrze jest różnica wysokości słupów cieczy manometrycznej w jego ramionach – stąd nazwa przyrządu manometr różnicowy dwuramienny.

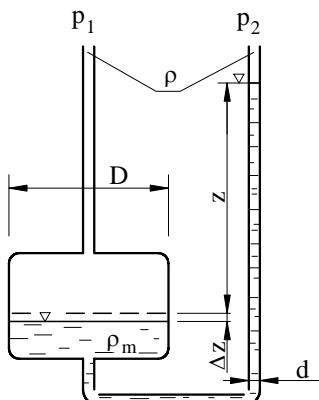
Jeżeli jedno z ramion manometru jest połączone z atmosferą, to na podstawie równania (4.26) można wyznaczyć ciśnienie względne w jednym ze zbiorników. Gdy jest ono większe od atmosferycznego, nazywamy je *nadcisnieniem*, jeśli zaś niższe – *podciśnieniem*.

Jeżeli $\rho_m \gg \rho$, tzn. kiedy zbiorniki wypełnia gaz, to

$$\Delta p \approx \rho_m g \Delta z. \quad (4.27)$$

Zaletą manometrów wykonanych w kształcie litery U jest prostota konstrukcji. Zamiast manometrów dwuramiennych stosowane są *manometry jednoramienne*, w których jedna z rurek manometru U jest zastąpiona naczyniem o dużym przekroju w porównaniu z wewnętrznym przekrojem rurki (rys. 4.9). Posługując się takim manometrem, odczytujemy długość słupa cieczy tylko w rurce i obliczamy różnicę ciśnień z zależności (4.26)¹⁾

$$\Delta p = g (\rho_m - \rho) (z + \Delta z) = g \rho_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) \left(1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right) z. \quad (4.28)$$

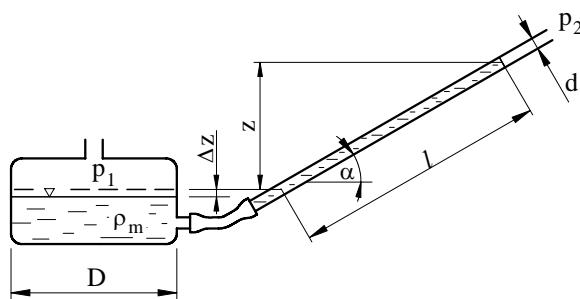


Rys. 4.9. Schemat manometru jednoramionego (naczyniowego)

W pomiarach technicznych, gdy stosunek średnicy naczynia D do średnicy rurki d jest dostatecznie duży ($(d/D)^2 \rightarrow 0$) i mierzymy różnicę ciśnień gazów, możemy korzystać z uproszczonej zależności

$$\Delta p = \rho_m g z. \quad (4.29)$$

Do dokładnych pomiarów małej różnicy ciśnień gazów stosujemy *mikromanometr*. Najprostszym mikromanometrem jest manometr jednoramienny z pochyłą rurką – *mikromanometr Recknagla* (rys. 4.10).



Rys. 4.10. Schemat mikromanometru z rurką pochyłą

¹⁾ Uwzględniamy, że $\Delta z(\pi D^2/4) = z(\pi d^2/4)$.

Różnicę ciśnień, mierzoną za pomocą manometru z rurką pochyłą, określa zależność
 $\Delta p = \rho_m g (l \sin \alpha + \Delta z)$,

przy czym, z bilansu objętości cieczy manometrycznej, otrzymamy

$$\Delta z = \left(\frac{d}{D} \right)^2 l,$$

a zatem

$$\Delta p = \rho_m g l \left(\sin \alpha + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right). \quad (4.30)$$

Jeżeli $(d/D)^2 / \sin \alpha \ll 1$, to $\Delta p = \rho_m g l \sin \alpha$.

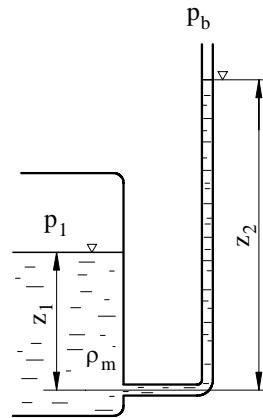
Dzięki dobraniu odpowiedniego pochylenia rurki możemy uzyskać żądaną dokładność odczytu.

We wszystkich przedstawionych typach manometrów ciecz manometryczna jest dobierana zależnie od wartości mierzonych ciśnień. Przy dużych ciśnieniach jest stosowana rtęć, przy małych – ciecz o gęstości nieznacznie większej lub mniejszej od wody (np. czterochlorek węgla, alkohol).

Manometry, w których cieczą manometryczną jest ciecz podlegająca pomiarowi ciśnienia nazywamy *piezometrami* (rys. 4.11). Mierząc wysokość z_2 słupa cieczy w piezometrze, obliczymy np. nadwyżkę ciśnienia p_1 w zbiorniku ponad ciśnieniem barometrycznym z zależności

$$p_1 - p_b = \rho g (z_2 - z_1). \quad (4.31)$$

Piezometry są używane do pomiaru niewielkich ciśnień względnych, ponieważ stosowanie zbyt długiej rurki manometrycznej jest niedogodne.



Rys. 4.11. Schemat piezometru

4.1.6. RÓWNOWAGA ATMOSFERY ZIEMSKIEJ

Równanie różniczkowe równowagi w polu potencjalnym można również stosować do płynów ściśliwych, podlegających równaniu stanu gazu

$$p = \rho RT. \quad (4.32)$$

Rozważanie to ograniczymy do rozpatrzenia równowagi płynu ściśliwego, jakim jest powietrze atmosferyczne znajdujące się w jednorodnym ziemskim polu grawitacyjnym.

W wielu przypadkach, gdy masa gazu zajmuje przestrzeń o niewielkiej wysokości, można jej gęstość przyjąć za stałą ($\rho = \rho_0 = \text{const}$). Wówczas stosuje się równanie (4.14), tzn. że powietrze może być traktowane jako ośrodek jednorodny zwany *atmosferą jednorodną*. Nie odnosi się to jednak do przypadków, gdy warstwa powietrza ma

znaczną grubość. Różnice ciśnienia na różnych wysokościach są tak duże, że wskutek ścisłowości wystąpią znaczne różnice gęstości w górnych i dolnych warstwach. Poważną rolę często odgrywają także różnice temperatury na różnych wysokościach.

Wyprowadzimy zależności między ciśnieniem p i temperaturą T a wzniesieniem z ponad powierzchnię Ziemi w przypadku następujących modeli:

1. atmosfera jednorodnej ($\rho = \text{const}$),
2. atmosfera izotermicznej ($T = \text{const}$),
3. atmosfera adiabatycznej ($p/\rho^\kappa = \text{const}$).

Przyjmiemy, że osie x i y prostokątnego układu współrzędnych wyznaczają powierzchnię poziomą, a oś z jest skierowana ku górze, wówczas współrzędne jednostkowej siły masowej są następujące:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g. \quad (4.33)$$

Po podstawieniu tych zależności do równania (4.3) otrzymamy

$$dp = -\rho g dz. \quad (4.34)$$

Jest to *różniczkowe równanie równowagi gazu w ziemskim polu grawitacyjnym*.

1. Atmosfera jednorodna; $\rho = \text{const}$

Po rozwiązaniu równania (4.34) z warunkiem brzegowym

$$z = z_0, \quad p = p_0,$$

otrzymamy równanie analogiczne do (4.16)

$$p = p_0 - \rho g (z - z_0). \quad (4.35)$$

Jak widać, ciśnienie maleje liniowo ze wzrostem wysokości. Taka zmiana ciśnienia z wysokością będzie występowała w dwóch przypadkach:

a) jeżeli w pewnym przedziale wysokości powietrze może być uważane za płyn nieściśliwy,

b) jeżeli wraz ze wzrostem wysokości maleje temperatura; z tym że temperatura maleje zgodnie z równaniem przemiany izochorycznej $p/RT = \rho = \text{const}$, a zatem

$$T = T_0 - \frac{g}{R} (z - z_0). \quad (4.36)$$

2. Atmosfera izotermiczna; $T = \text{const}$, $p/\rho = RT = \text{const}$

Po uwzględnieniu podanych zależności różniczkowe równanie równowagi (4.34) przyjmuje postać

$$dp = -\frac{p}{RT} g dz$$

lub

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} dz.$$

Po całkowaniu

$$\ln p = -\frac{g}{RT} z + C.$$

Z warunku brzegowego

$$(z = z_0 \Rightarrow p = p_0) \Rightarrow C = \ln p_0 + \frac{g}{RT} z_0,$$

a więc

$$\ln \frac{P}{p_0} = - \frac{g}{RT} (z - z_0) \quad (4.37)$$

Zależność ta może być również przedstawiona w postaci

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{RT} (z - z_0)}, \quad (4.38)$$

z której wynika, że ze wzrostem wysokości ciśnienie maleje wykładniczo i na wysokości $(z - z_0) \rightarrow \infty$ ciśnienie $p \rightarrow 0$.

Jeżeli zmiany wysokości nie są zbyt duże, często zamiast wzoru (4.38) jest stosowany wzór (4.35); popełniany przy tym błąd jest niewielki. Możemy przekonać się o tym, rozkładając zależność (4.38) w szereg Taylora

$$p = p_0 \left(1 - \frac{g}{RT} (z - z_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{RT} \right)^2 (z - z_0)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{g}{RT} \right)^3 (z - z_0)^3 + \dots \right).$$

Dwa pierwsze składniki sumy szeregu tworzą równanie o postaci (4.35), a mianowicie

$$p = p_0 - \frac{p_0}{RT} g (z - z_0) = p_0 - \rho_0 g (z - z_0).$$

Wobec tego, podczas wyznaczania zmian ciśnienia w gazie ściśliwym za pomocą zależności (4.35), popełniany błąd bezwzględny nie przewyższa trzeciego składnika sumy szeregu

$$\frac{1}{2} p_0 \left(\frac{g}{RT} \right)^2 (z - z_0)^2,$$

dlatego bezwymiarowa¹⁾ różnica między ciśnieniem według wzorów (4.35) i (4.38) spełnia relację

$$\Delta \frac{p}{p_0} < \frac{1}{2} \left(\frac{g}{RT} \right)^2 (z - z_0)^2.$$

Jeśli na przykład dopuścimy w obliczeniu $\Delta(p/p_0) = 1\%$, to dla powietrza o temperaturze $T = 293$ K, pod ciśnieniem normalnym ($p_0 = 101,3$ kPa), do wysokości

$$z - z_0 = \sqrt{2 \Delta \frac{p}{p_0} \frac{RT}{g}} \approx 1210 \text{ m},$$

można obliczać rozkład ciśnienia w powietrzu za pomocą wzoru (4.35).

¹⁾ p/p_0 to ciśnienie bezwymiarowe na wysokości $z - z_0$.

Dlatego powszechnie stosowanie zależności (4.35) w wielu zagadnieniach technicznych, takich jak: zaopatrzenie w gaz, wentylacja czy ochrona środowiska, w których mamy do czynienia ze znacznie mniejszymi wysokościami, jest w pełni uzasadnione.

3. Atmosfera adiabatyczna; $p/\rho^\kappa = \text{const}$

W tym przypadku różniczkowe równanie równowagi (4.34) przyjmuje postać

$$dp = - \frac{\rho_0}{p_0^{1/\kappa}} p^{1/\kappa} g dz,$$

a po przekształceniu

$$p^{-1/\kappa} dp = - \rho_o p_o^{-1/\kappa} g dz.$$

Po rozwiązaniu tego równania różniczkowego, z warunkiem

$$z = z_0 \Rightarrow p = p_0,$$

otrzymamy

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} p^{1-1/\kappa} = - \rho_0 p_0^{-1/\kappa} gz + \frac{\kappa}{\kappa-1} p_0^{1-1/\kappa} + \rho_0 p_0^{-1/\kappa} gz_0,$$

a stąd

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\rho_0 g}{p_0} (z - z_0) \right) \frac{\kappa}{\kappa-1} \quad (4.39)$$

lub po uwzględnieniu, że

$$\frac{p_0^{1/\kappa}}{\rho_0} = \frac{p^{1/\kappa}}{\rho}$$

i przekształceniach

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + gz = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} + gz_0. \quad (4.40)$$

Po podstawieniu do równania (4.40) zależności wynikających z równania stanu gazu

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad \text{i} \quad \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0,$$

otrzymamy

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} RT + gz = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_0 + gz_0,$$

a następnie

$$T = T_0 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{g}{R} (z - z_0). \quad (4.41)$$

Jest to prawo rozkładu temperatury w atmosferze adiabatycznej. Jak widać, ze wzrostem wysokości temperatura liniowo maleje. Warto zwrócić uwagę, że spadek temperatury jest wolniejszy niż przy przemianie izochorycznej (p. (4.36)).

Podobnie jak w przypadku atmosfery izotermicznej, przy niezbyt dużych zmianach wysokości, do wyznaczenia rozkładu ciśnienia można stosować zależność (4.35).

Bezwymiarowa różnica między wynikami według wzorów (4.35) i (4.39) spełnia relację¹⁾

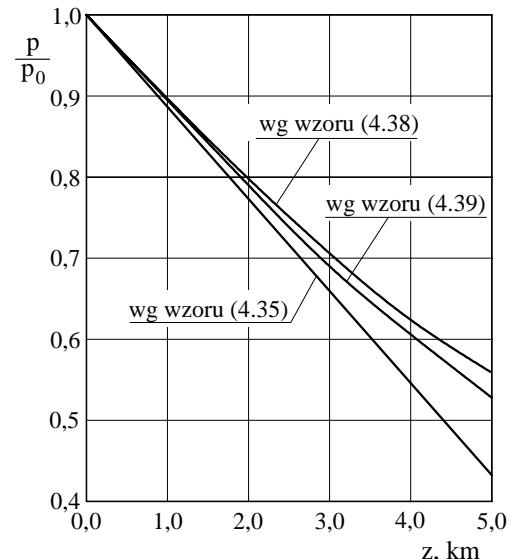
$$\Delta \frac{p}{p_0} < \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{g}{RT_0} \right)^2 (z - z_0)^2.$$

Dla danych jak w p. 2., wysokość, przy której $\Delta(p/p_0)$ nie przekracza 1%, wynosi

$$z - z_0 \approx 1440 \text{ m.}$$

W celu zobrazowania zmiany ciśnienia z wysokością, w przypadku rozpatrzonych modeli atmosfery, na rysunku 4.12 przedstawiono krzywe p/p_0 w zależności od wysokości z nad Ziemią ($z_0 = 0$) obliczone na podstawie zależności (4.35), (4.38) i (4.39) dla następujących danych:

- wysokość odniesienia $z_0 = 0$,
- ciśnienie na poziomie odniesienia $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$,
- gęstość powietrza na poziomie odniesienia $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$,
- temperatura powietrza na poziomie odniesienia $T_0 = 293 \text{ K}$,
- stała gazowa powietrza $R = 287 \text{ J/(kg K)}$,
- wykładnik adiabaty $\kappa = 1,41$.



Rys. 4.12. Rozkład ciśnienia w atmosferze ziemskiej

4.1.7. RÓWNOWAGA WZGLEDNA CIECZY PODCZAS POSTĘPOWEGO I OBROTOWEGO RUCHU NACZYNIA

Równowagą względną cieczy nazywamy taki przypadek jej ruchu, podczas którego poszczególne elementy cieczy są nieruchome względem siebie i naczynia, czyli cała masa cieczy wraz z naczyniem porusza się jak ciało stałe.

Podstawowymi zagadnieniami wymagającymi rozwiązania w przypadku równowagi względnej są:

¹⁾ Otrzymuje się ją po rozłożeniu prawej strony równania (4.39) w szereg Taylora.

➤ określenie równania powierzchni izobarycznej, w szczególności równania powierzchni swobodnej,

➤ wyznaczenie rozkładu ciśnienia w całej objętości cieczy.

Rozpatrzmy trzy przypadki równowagi względnej cieczy:

1. w ruchu postępowym jednostajnie przyśpieszonym;

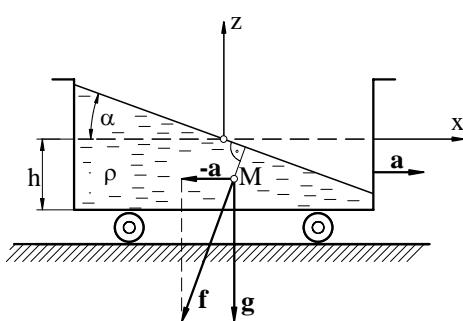
2. w ruchu obrotowym wokół osi pionowej;

3. w ruchu obrotowym wokół osi poziomej, w którym przy dostatecznie dużej prędkości kątowej występuje stan zbliżony do stanu równowagi względnej.

Wymienione zagadnienia rozwiązuje się przez całkowanie równań (4.3) i (4.6), po uprzednim określaniu współrzędnych jednostkowej siły masowej działającej na element płynu znajdujący się w poruszającym się naczyniu.

1. Postępowy ruch naczynia

Niech naczynie zawierające ciecz o gęstości ρ porusza się ruchem postępowym jednostajnie przyśpieszonym z przyśpieszeniem \mathbf{a} (rys. 4.13).



Rys. 4.13. Ciecz w naczyniu poruszającym się z przyśpieszeniem \mathbf{a}

Układ współrzędnych prostokątnych przyjęto tak, by płaszczyzna x_0y była pozioma, a osią z skierowaną do góry. Rozpatrywany układ znajduje się w polu sił ciężkości i bezwładności, składowe jednostkowej siły masowej są zatem określone następującymi zależnościami

$$X = -a, \quad Y = 0, \quad Z = -g. \quad (4.42)$$

Z równania (4.6) otrzymamy równanie powierzchni izobarycznej

$$-a dx - g dz = 0, \\ \text{a po całkowaniu}$$

$$a x + g z = C. \quad (4.43)$$

Jest to równanie płaszczyzny nachylonej do poziomu pod kątem

$$\alpha = \arctan(-a/g). \quad (4.44)$$

Wszystkie powierzchnie ekwipotencjalne są płaszczyznami równoległymi do powierzchni swobodnej, a jednostkowa siła masowa f jest do nich prostopadła.

Analogicznie można określić równanie powierzchni swobodnej dla dowolnego kierunku przyspieszenia \mathbf{a} i takiego samego kąta pochylenia płaszczyzny, po której porusza się zbiornik.

Rozkład ciśnienia w rozważanej objętości cieczy obliczymy po podstawieniu zależności (4.42) do równania równowagi płynu (4.3)

$$dp = -\rho(a dx + g dz).$$

Po całkowaniu otrzymamy

$$p = -\rho(a x + g z) + C,$$

a po uwzględnieniu warunku brzegowego: dla $x = 0$ i $z = 0$, $p = p_b$

$$p = p_b - \rho(a x - g z). \quad (4.45)$$

Jest to równanie określające ciśnienie w dowolnym punkcie M cieczy w naczyniu poruszającym się ze stałym przyśpieszeniem poziomym a .

2. Obrót wokół osi pionowej

Niech ciecz znajdująca się w naczyniu cylindrycznym o promieniu R obraca się wraz z nim ruchem jednostajnym z prędkością kątową ω wokół pionowej osi (rys. 4.14). Na dowolny element płynu działa jednostkowa siła masowa, która jest sumą wektorową przyśpieszenia ziemskiego i odśrodkowego. Współrzędne jednostkowej siły masowej mają więc postać:

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g. \quad (4.46)$$

Równanie powierzchni izobarycznej otrzymamy z równania (4.6)

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0.$$

Po całkowaniu

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - g z = C,$$

a ponieważ

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (4.47)$$

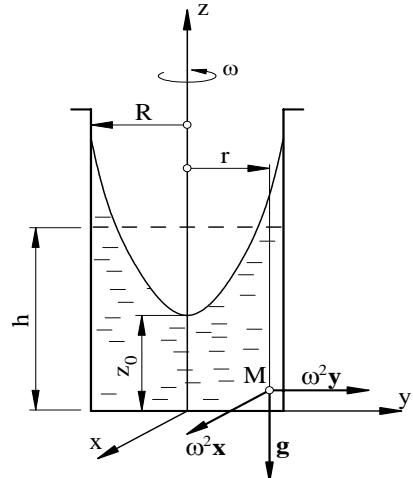
więc ostatecznie

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - g z = C. \quad (4.48)$$

Powierzchnie izobaryczne są paraboloidami obrotowymi o osiach pokrywających się z osią obrotu naczynia.

Równanie powierzchni swobodnej wyznaczmy, dobierając stałą C tak, aby dla $r = 0$ było $z = z_0$, zatem $C = -g z_0$ i

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2 g}. \quad (4.49)$$



Rys. 4.14. Ciecz w naczyniu obracającym się wokół osi pionowej

Odległość z_0 wierzchołka paraboloidy od dna naczynia wyznaczamy z warunku jednakowej objętości cieczy w spoczynku i w ruchu

$$\pi R^2 h = \int_0^R 2 \pi r z dr.$$

Gdy podstawimy w miejsce z wyrażenie (4.49), wówczas po scałkowaniu otrzymamy

$$R^2 h = z_0 R^2 + \frac{\omega^2 R^4}{4 g},$$

a stąd

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4 g}.$$

Równanie powierzchni swobodnej ma zatem ostatecznie postać

$$z = h + \frac{\omega^2}{2 g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right). \quad (4.50)$$

Ciśnienie w dowolnym punkcie wyznaczamy po podstawieniu zależności (4.46) do równania (4.3)

$$dp = \rho \omega^2 (x dx + y dy) - \rho g dz.$$

Po scałkowaniu

$$p = \rho \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z + C,$$

i po uwzględnieniu związku (4.47)

$$p = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + C.$$

Stałą całkowania obliczamy z warunku, że dla $r = 0$ i $z = z_0$ ciśnienie $p = p_0$, stąd $C = p_0 + \rho g z_0$.

Po podstawieniu otrzymamy równanie

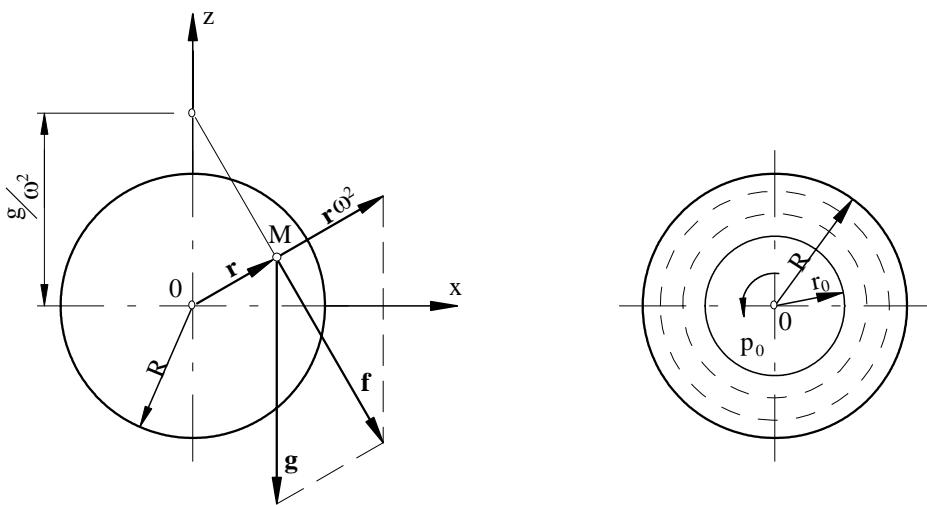
$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \rho g (z_0 - z) \quad (4.51)$$

umożliwiające obliczenie ciśnienia w dowolnym punkcie cieczy.

Widać, że w płaszczyźnie poziomej ciśnienie wzrasta proporcjonalnie do kwadratu odległości od osi obrotu, a największą wartość osiąga w płaszczyźnie dna na obwozie (tzn. dla $z = 0$ i $r = R$).

3. Obrót wokół osi poziomej

Niech naczynie cylindryczne o promieniu R wypełnione cieczą obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół własnej poziomej osi. Na rysunku 4.15a widać, że siła masowa, działająca na element płynu umieszczony w punkcie M , zależy od położenia tego punktu i zmienia się okresowo, co $2\pi/\omega$, przechodząc przez dwa ekstrema – minimum o wartości $g - \omega^2 r$ i maksimum o wartości $g + \omega^2 r$. W takim przypadku równowaga względna nie jest możliwa.



Rys. 4.15. Ciecz w naczyniu obracającym się wokół osi poziomej

Rozpatrzmy jednak chwilowy warunek równowagi. W dowolnej chwili t na element płynu znajdujący się w punkcie M działa jednostkowa siła masowa o współrzędnych

$$X = \omega^2 x, \quad Y = 0, \quad Z = \omega^2 z - g. \quad (4.52)$$

Po podstawieniu do (4.6) otrzymamy równanie powierzchni izobarycznej

$$\omega^2 x dx + (\omega^2 z - g) dz = 0,$$

które po całkowaniu przyjmuje postać

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 z^2}{2} - g z = C \quad (4.53')$$

lub

$$x^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = C, \quad (4.53'')$$

a po sprowadzeniu do postaci kanonicznej

$$x^2 + \left(z - \frac{g}{\omega^2} \right)^2 = C_1. \quad (4.53''')$$

Jest to równanie powierzchni cylindrycznych współosiowych, przy czym oś tych walców jest przesunięta względem osi obrotu równolegle w góre osi z o odległość g/ω^2 . Odległość między osiami jest wyłącznie funkcją prędkości kątowej ω i wraz ze wzrostem prędkości kątowej odległość ta maleje. Przy

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow g/\omega^2 \rightarrow 0$$

powierzchnie izobaryczne są walcami o osi pokrywającej się z osią obrotu naczynia (rys. 4.15). I tylko w takim przypadku można mówić o równowadze względnej w naczyniu wirującym wokół osi poziomej.

Jeżeli $\omega^2 r >> g$, to jednostkowa siła masowa działająca na dowolny element płynu jest w przybliżeniu równa przyśpieszeniu odśrodkowemu i jest prawie niezależna od czasu; rozwiązanie równania (4.3) z warunkiem brzegowym $r = r_0$, $p = p_0$ ma więc postać

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2}{2} (r^2 - r_0^2). \quad (4.54)$$

4.2. NAPÓR PŁYNÓW NA ŚCIANY NACZYŃ

Znając rozkład ciśnienia w cieczy będącej w spoczynku, możemy określić siły hydrostatyczne działające na ścianę zbiornika zawierającego ciecz lub też na powierzchnię ciała stałego zanurzonego w cieczy. Zagadnienie to w ogólnym przypadku sprowadza się do wyznaczenia siły wypadkowej, zwanej dalej naporem hydrostatycznym (jej wartości, kierunku działania, współrzędnych punktu przyłożenia), oraz jej momentu.

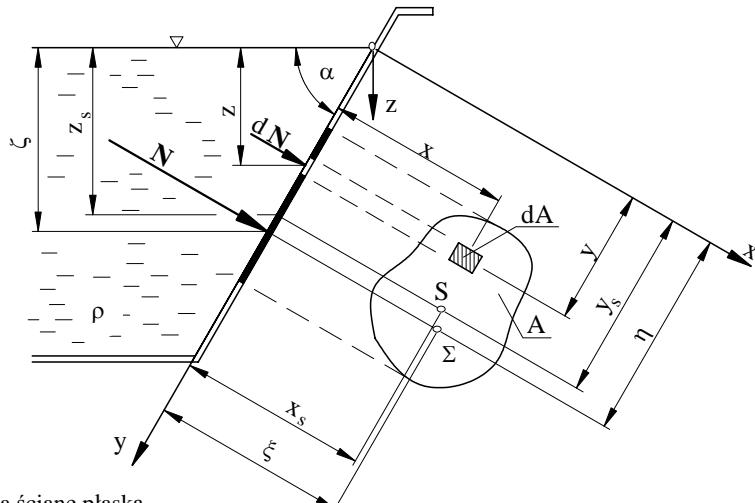
4.2.1. NAPÓR HYDROSTATYCZNY NA ŚCIANY PŁASKIE

Niech ciecz jednorodna o gęstości ρ wypełnia naczynie o dowolnych ścianach płaskich. W celu wyznaczenia naporu hydrostatycznego na jedną ze ścian tego naczynia bierzemy pod uwagę część ściany o polu A , leżącą na płaszczyźnie nachylonej do powierzchni swobodnej cieczy pod kątem α (rys. 4.16). Przyjmijmy następujący układ współrzędnych ukośnokątnych: oś x wzdłuż krawędzi przecięcia ściany z powierzchnią swobodną cieczy, oś y wzdłuż linii największego spadku ściany, oś z pionowo w dół. Obracając ścianę płaską dookoła osi y , wykonamy kład rozważanej powierzchni na płaszczyznę rysunku.

Załóżmy dla uproszczenia, że zbiornik jest otwarty, a ciśnienie na powierzchni swobodnej cieczy w zbiorniku i na zewnętrznej, nie zwilżonej ciecą stronie ściany

zbiornika, jest jednakowe. Ciśnienie hydrostatyczne w dowolnym punkcie cieczy, znajdującym się na głębokości z , określmy z równania (4.17)

$$p = \rho g z.$$



Rys. 4.16. Napór cieczy na ścianę płaską

Moduł naporu elementarnego

$$dN = \rho g z dA, \quad (4.55)$$

a moduł naporu hydrostatycznego prostopadłego do ściany o polu A

$$N = \rho g \int_A z dA = \rho g z_s A, \quad (4.56)$$

ponieważ

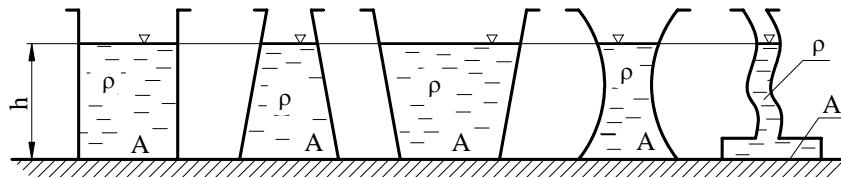
$$\int_A z dA = z_s A,$$

przy czym z_s – głębokość zanurzenia środka ciężkości rozpatrywanej ściany A .

Ze wzoru (4.56) wynika, że *napór hydrostatyczny na ścianę płaską o dowolnym konturze i dowolnie nachyloną do płaszczyzny poziomej ma bezwzględną wartość równą ciężarowi słupa cieczy, którego podstawą jest dana ściana, a wysokością głębokość jej środka geometrycznego pod zwierciadłem cieczy*.

Twierdzenie to jest również słusze wtedy, gdy napór płynu działa na ścianę od dołu ku górze.

Z twierdzenia tego wynika tzw. *paradoks hydrostatyczny Stevina*, odnoszący się do naporu na poziome dno zbiornika: *napór na poziome dno zbiornika zależy tylko od pola powierzchni dna i od odległości od zwierciadła cieczy, nie zależy zupełnie od kształtu naczynia ani od ilości zawartej w nim cieczy*. Napór na dno we wszystkich naczyniach przedstawionych na rysunku 4.17, napełnionych cieczą o jednakowej gęstości, będzie zatem taki sam, jeżeli wysokość napełnienia i powierzchnie den będą jednakowe.



Rys. 4.17. Napór cieczy na dno naczynia

Mając wyznaczoną wartość i kierunek naporu hydrostatycznego, określmy teraz położenie *środka naporu*, tzn. punktu Σ , w którym linia działania naporu przebiją pole ściany A . Współrzędne $\Sigma(\xi, \eta, \zeta)$ środka naporu wyznaczymy z warunku równości momentów siły wypadkowej i sił składowych względem osi przyjętego układu.

Z warunku równości momentu naporu N i sumy momentów naporów elementarnych dN względem osi x wynika, że

$$N \eta = \int_A \rho g z dA \cdot y .$$

Równanie to, po uwzględnieniu zależności (4.56) oraz $z = y \sin \alpha$, przyjmuje postać

$$\rho g \sin \alpha \int_A y dA = \rho g \sin \alpha \int_A y^2 dA ,$$

skąd

$$\eta = \frac{\int_A y^2 dA}{\int_A y dA} = \frac{I_x}{M_x} , \quad (4.57)$$

gdzie:

I_x – moment bezwładności pola A względem osi x ,

M_x – moment statyczny pola A względem osi x .

Z wzoru Steinera określającego transformację równoległą momentu bezwładności

$$I_x = I_s + A y_s^2 ,$$

w którym I_s – moment bezwładności pola A względem osi przechodzącej przez środek ciężkości S i równoległej do osi x ,
oraz zależności

$$M_x = \int_A y dA = y_s A$$

otrzymamy

$$\eta = y_s + \frac{I_s}{y_s A} . \quad (4.58)$$

Współrzedną ξ wyznaczamy podobnie jak poprzednio. Z warunku momentów względem osi y

$$N \xi = \int_A \rho g z dA x .$$

Po podobnych przekształceniach otrzymamy

$$\xi = \frac{\int_A x y dA}{\int_A y dA} = \frac{D_{xy}}{M_x}, \quad (4.59)$$

przy czym D_{xy} – moment dewiacji pola A względem osi x, y.

Z wzoru określającego transformację równoległą momentu dewiacji

$$D_{xy} = D_{x_s y_s} + A x_s y_s$$

otrzymamy

$$\xi = x_s + \frac{D_{x_s y_s}}{y_s A} . \quad (4.60)$$

Trzecią współrzędną środka naporu ζ (głębokość środka naporu) wyznaczamy z zależności

$$\zeta = \eta \sin \alpha .$$

Po podstawieniu równania (4.58) oraz $y_s \sin \alpha = z_s$ otrzymamy

$$\zeta = z_s + \frac{I_s}{z_s A} \sin^2 \alpha . \quad (4.61)$$

Z zależności tej wynika, że środek naporu na ścianę pochyłą lub pionową leży zawsze poniżej środka ciężkości ($\zeta > z_s$). W przypadku powierzchni poziomych ($\alpha = 0$) położenie środka naporu pokrywa się z położeniem środka ciężkości. W przypadku ścian pionowych $\alpha = 90^\circ$

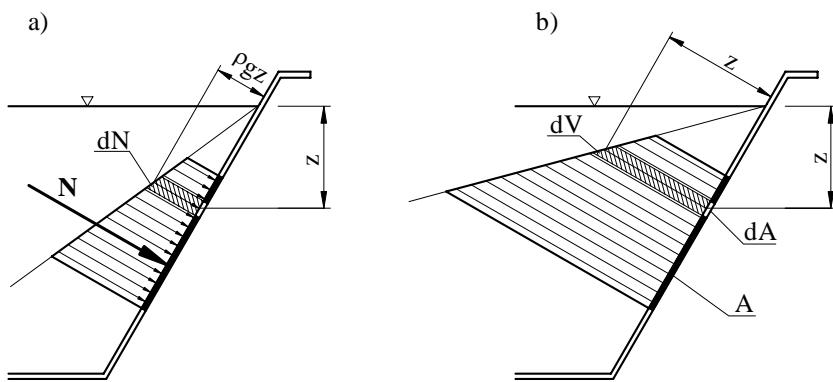
$$\zeta = z_s + \frac{I_s}{z_s A} . \quad (4.61')$$

4.2.2. WYZNACZANIE NAPORU METODĄ WYKREŚLNA

Rozkład nadciśnienia panującego na ścianie płaskiej, na którą działa napór hydrostatyczny, można przedstawić graficznie w postaci wykresu ciśnienia, które zmienia się liniowo od zera na powierzchni swobodnej cieczy, do $p = \rho g z$ – na głębokości z (rys. 4.18a).

Wykres wysokości ciśnienia (rys. 4.18b) panującego na rozważanym polu A stanowi podstawę do obliczania zarówno wartości naporu hydrostatycznego, jak i poło-

żeniu środka naporu. Wyrażenie $z dA$ jest elementem objętościowym dV wykresu wysokości ciśnień, zbudowanego na polu A . Jak widać, ciężar elementu objętości wykresu $\rho g z dA$ jest równy modułowi naporu elementarnego dN (4.55), czyli

$$N = \int_A \rho g z dA.$$


Rys. 4.18. Ilustracja do wyznaczania naporu metodą wykreślną

Napór hydrostatyczny N na ścianę płaską jest co do wartości równy ciężarowi objętości V wykresu wysokości ciśnień (zwanego objętością zastępczą) zbudowanego na rozważanej powierzchni A . Napór wypadkowy przechodzi przez środek ciężkości bryły wykresu wysokości ciśnień, którego rzut na powierzchnię A wyznacza środek naporu.

Metoda objętości zastępczej naporu pozwala na geometryczne rozwiązywanie zadań z tego zakresu.

4.2.3. NAPÓR HYDROSTATYCZNY NA ŚCIANY ZAKRZYWIONE

Napór na element powierzchni ściany zakrzywionej można przedstawić jako sumę geometryczną wektorów naporów elementarnych działających w wybranych kierunkach. Najczęściej obliczenie naporu sprowadza się do określenia jego składowych działających w kierunkach poziomym i pionowym.

Rozważmy ślad KL powierzchni walcowej, której tworzące są prostopadłe do płaszczyzny xz (rys. 4.19). Skierujmy układ współrzędnych tak, że osie x i y leżą na powierzchni swobodnej, a os z jest zwrócona pionowo ku dołowi.

Na głębokości z pod zwierciadłem cieczy obierzmy element powierzchni dA , położony na powierzchni walcowej A . Napór elementarny w kierunku prostopadłym do powierzchni elementu ma wartość

$$dN = \rho g z dA, \quad (4.62)$$

a jego współrzędne w kierunku osi x i z

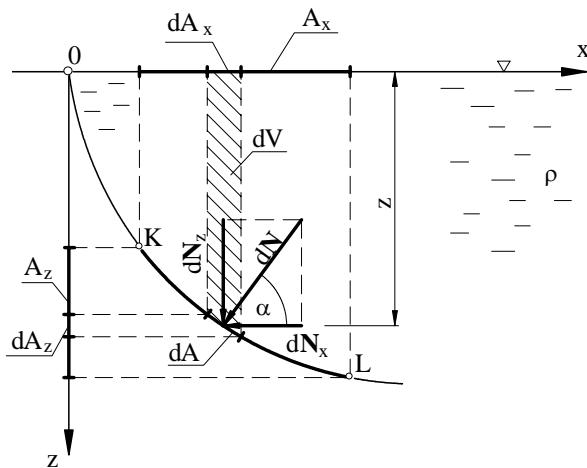
$$dN_x = \rho g z dA \cos \alpha, \quad dN_y = \rho g z dA \sin \alpha. \quad (4.63)$$

Rzuty elementu powierzchniowego dA na płaszczyznę pionową i poziomą są równe

$$dA \cos \alpha = dA_z \quad \text{oraz} \quad A \sin \alpha = dA_x,$$

otrzymamy więc

$$dN_x = \rho g z dA_z, \quad dN_y = \rho g z dA_x. \quad (4.64)$$



Rys. 4.19. Napór cieczy na powierzchnię walcową

Po scałkowaniu współrzędne (pozioma N_x oraz pionowa N_z) naporu N na ścianę zakrzywioną, będącą pod działaniem sił ciężkości, wyniosą:

$$N_x = \rho g \int_{A_z} z dA_z = \rho g z_s A_z, \quad (4.65)$$

$$N_z = \rho g \int_{A_x} z dA_x = \rho g \int_V dV = \rho g V, \quad (4.66)$$

gdzie:

$\int_{A_z} z dA_z = z_s A_z$ – moment statyczny pola A_z względem zwierciadła cieczy,

z_s – głębokość położenia środka ciężkości pola A_z ,

dV – elementarna objętość cieczy ograniczonej od dołu powierzchnią dA , tworzącymi pionowymi i poziomem,

V – całkowita objętość cieczy nad rozważaną powierzchnią.

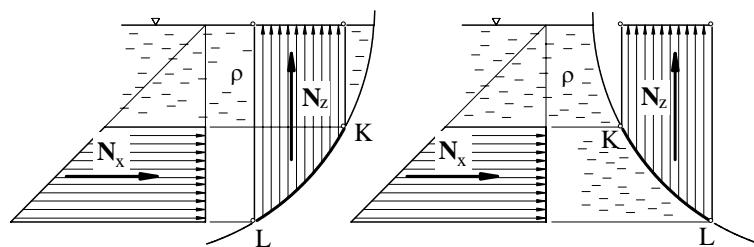
Stwierdzamy zatem, że składowa pozioma naporu na ścianę zakrzywioną jest równa naporowi na ścianę płaską, której pole jest równe rzutowi pola rozpatrywanej ściany zakrzywionej na płaszczyznę prostopadłą do obranego kierunku lub krótko – jest równa naporowi na rzut pionowy ściany. Obliczenie tej składowej sprowadza się zatem do obliczenia naporu na figurę płaską o polu powierzchni A_z .

Składowa pionowa naporu na ścianę zakrzywioną jest równa ciężarowi cieczy ograniczonej od dołu rozpatrywaną powierzchnią, tworzącymi pionowymi i powierzchnią swobodną (niezależnie od tego, czy słup cieczy jest realny czy fikcyjny).

Gdy powierzchnia zakrzywiona ma pionową płaszczyznę symetrii lub gdy jest powierzchnią walcową o tworzącej poziomej, składowe naporu obliczamy z wzorów (4.65) i (4.66), a jej moduł i kierunek działania z zależności

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_z^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = N_z / N_x. \quad (4.67)$$

Środek naporu znajduje się w punkcie przecięcia linii działania wektorów N_x i N_z (rys. 4.20).



Rys. 4.20. Wykres składowych naporu na powierzchnie zakrzywione

4.2.4. NAPÓR GAZU

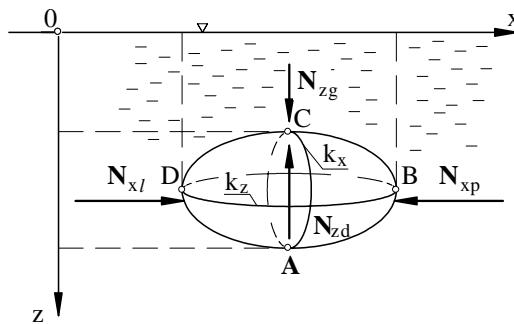
Podczas obliczania naporu gazu na ściany stałe korzysta się również z ogólnych wzorów (4.55) i (4.56). Ponieważ gęstość gazu jest znacznie mniejsza od gęstości cieczy, zmiany ciśnienia w gazach, spowodowane jednostkowymi siłami masowymi, można więc pominąć. Składowa naporu w dowolnym kierunku jest wówczas iloczynem ciśnienia i rzutu powierzchni na płaszczyznę prostopadłą, ponieważ ciśnienie gazu przyjmuje się niezmienne w całym rozpatrywanym obszarze.

4.3. NAPÓR PŁYNÓW NA CIAŁA W NICZ ZANURZONE

4.3.1. WYPÓR HYDROSTATYCZNY. PRAWO ARCHIMEDESA

Rozpatrzmy równowagę ciała sztywnego o dowolnych kształtach, całkowicie zanurzonego w płynie, które znajduje się w stanie spoczynku. Na ciało to działa siła objętościowa (ciężar G) oraz siła powierzchniowa. Przeanalizujmy najpierw siłę powierzchniową, która jest naporem na powierzchnię zakrzywioną, a zatem można ją obliczyć na podstawie równań (4.65) i (4.66).

Układ osi współrzędnych $0xyz$ obieramy tak, że osie $0y$ i $0x$ są zorientowane do wolnie w płaszczyźnie zwierciadła, oś $0z$ jest pionowo skierowana w dół (rys. 4.21).



Rys. 4.21. Napór cieczy na ciało stałe całkowicie zanurzone

Do wyznaczenia składowej poziomej wektora naporu hydrostatycznego wykreślmy na powierzchni ciała tzw. linię styczności k_x , która jest linią zetknięcia ciała z walem o tworzących poziomych, równoległych do $0x$ i stycznych do konturu ciała. Wartości bezwzględne poziomych składowych naporu na powierzchnię ABC i ADC o tym samym konturze są równe, a ich zwroty przeciwnie, ponieważ pola rzutów na płaszczyzny pionowe są jednakowe i położone są na jednakowych głębokościach, a zatem

$$N_{xl} = N_{xp} \quad \Rightarrow \quad N_x = 0,$$

czyli *składowa pozioma naporu na ciało zanurzone w płynie nie istnieje*.

W celu obliczenia składowej pionowej naporu poprowadźmy na powierzchni ciała odpowiednią krzywą styczności k_z , która rozgranicza płyn znajdujący się ponad ciałem od płynu znajdującego się pod ciałem zanurzonym. Składowa pionowa naporu N_z jest równa różnicy dwóch naporów pionowych działających na dwie części powierzchni: dolną BAD i górną BCD , czyli

$$N_{zg} = \rho g V_g,$$

$$N_{zd} = \rho g V_d,$$

przy czym V_g i V_d – objętości płynu ograniczonego odpowiednio przez górną powierzchnię BCD (leżącą powyżej k_z) i dolną BAD (leżącą poniżej k_z), przez tworzące pionowe oraz zwierciadło cieczy.

Różnica objętości $V_d - V_g$ jest objętością ciała V lub objętością płynu wypartego przez to ciało.

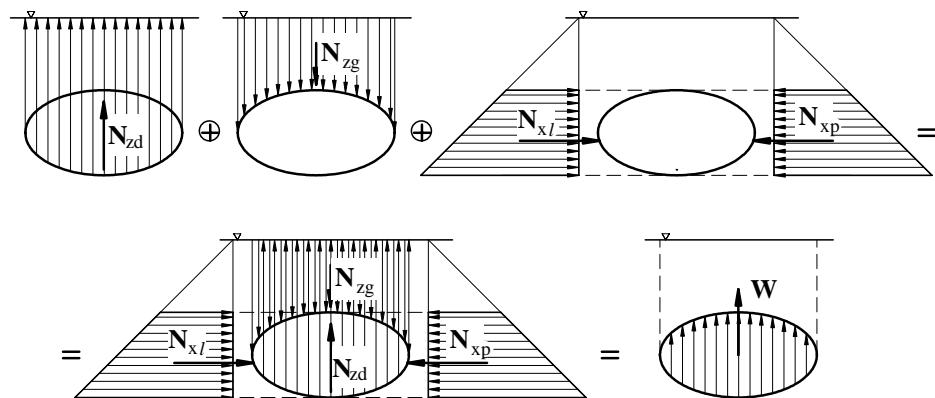
Kierunki tych naporów są przeciwnie, a więc wypór wypadkowy ma wartość

$$N_z = N_{zg} - N_{zd} = -\rho g (V_d - V_g) = -\rho g V, \quad (4.68)$$

a zatem wektor naporu hydrostatycznego działającego na ciało zanurzone w płynie jest siłą, której moduł jest równy ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało.

Linia działania jest pionowa i przechodzi przez środek ciężkości płynu wypartego przez ciało, nazwany *środkiem wyporu*. Zwrot jego jest przeciwny do zwrota siły ciężkości (rys. 4.22). Tę wypadkową siłę powierzchniową nazywamy *wyporem hydrostatycznym* \mathbf{W} , czyli

$$|\mathbf{W}| = N_z. \quad (4.69)$$



Rys. 4.22. Wykresy składowych naporu na ciało zanurzone

Oprócz wyporu działa na ciało jego ciężar \mathbf{G} , którego punktem zaczepienia jest środek masy S , zatem siła wypadkowa działająca na ciało zanurzone w płynie jest równa sile

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G} + \mathbf{W}, \quad (4.70)$$

będącej *ciężarem pozornym* ciała.

Wzór ten wyraża prawo (zasadę) Archimedesa: *ciało zanurzone w płynie traci porownie tyle na ciężarze, ile waży płyn wyparty przez to ciało*.

4.3.2. RÓWNOWAGA CIAŁ ZANURZONYCH

Na podstawie prawa Archimedesa można wyprowadzić warunki opadania i unoszenia się ciał swobodnych zanurzonych w płynie.

W zależności od wartości siły \mathbf{G} w porównaniu z przeciwdziałającym wyporem \mathbf{W} można rozważyć trzy przypadki:

1. Jeżeli wypór $\mathbf{W} = -\rho \mathbf{g} V$ jest równy ciężarowi ciała $\mathbf{G} = \rho_c \mathbf{g} V_c$, przy czym ρ i ρ_c oznaczają gęstości właściwe płynu i ciała (średnie), a V i V_c ich objętości, to z równania (4.70) otrzymujemy

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \rho \mathbf{g} V = \rho_c \mathbf{g} V_c \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_c}{\rho} = \frac{V}{V_c}. \quad (4.71)$$

Z zależności tej wynikają następujące wnioski:

- jeżeli $\rho_c = \rho$, to $V_c = V$, a zatem ciało pływa całkowicie zanurzone;
- jeżeli $\rho_c < \rho$, to $V_c > V$, a zatem ciało pływa, wynurzając się częściowo ponad powierzchnię swobodną cieczy.

2. Jeżeli $G < W$, to siła wypadkowa $W + G$ wypiera ciało w góre do osiągnięcia stanu równowagi określonego zależnością (4.71), tj. gdy wypór zanurzonej części ciała będzie równy jego ciężarowi.

3. Jeżeli $G > W$, to ciało tonie.

Mówimy, że ciało pływa w cieczy, gdy pozostawione swobodnie wynurza się częściowo nad jej swobodną powierzchnią lub gdy zanurzone całkowicie utrzymuje określone położenie.

4.3.3. STATECZNOŚĆ RÓWNOWAGI CIAŁ PŁYWAJĄCYCH

Pojęcie stateczności pływania obejmuje zdolność powrotu ciała pływającego, wychylonego ze stanu równowagi, do położenia pierwotnego. Przy analizowaniu stateczności ciał pływających wprowadzamy następujące pojęcia:

- *osią pływania* nazywamy prostą przechodzącą przez środek masy S i środek wyporu Σ ;
- *linią pływania* nazywamy linię przecięcia zwierciadła cieczy z powierzchnią ciała w niej częściowo zanurzonego;
- *polem pływania* nazywamy płaskie pole ograniczone linią pływania.

1. Stateczność ciał całkowicie zanurzonych

Niech ciało o dowolnym kształcie, nieruchome względem cieczy, znajduje się na dowolnej głębokości pod powierzchnią swobodną. Aby zachodziła równowaga powinien być spełniony warunek $W = -G$, a więc siły te muszą mieć:

- jednakowe moduły $|W| = |G|$,
- wspólną linię działania.

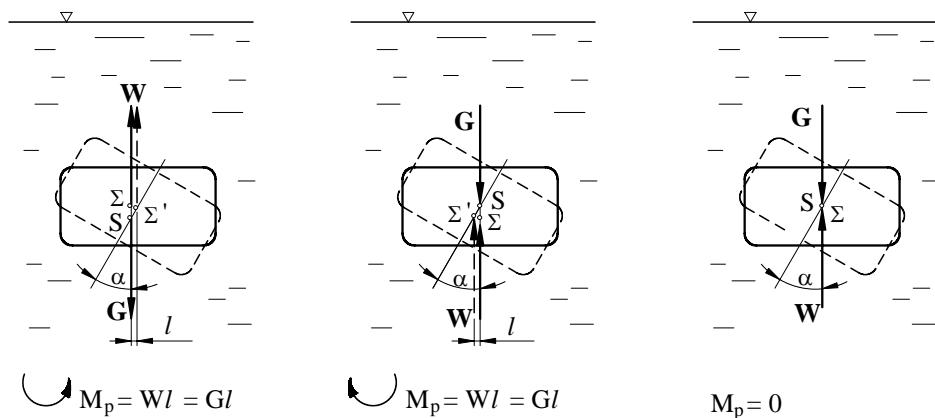
Linia ta, zwana *osią pływania*, powinna przechodzić przez środek masy ciała S i wyporu Σ .

Rozpatrzmy zachowanie stateczności pływania ciała w trzech przypadkach początkowego położenia układu sił G i W (rys. 4.23):

1. Jeżeli środek ciężkości S leży powyżej środka wyporu Σ , to po wychyleniu ciała o niewielki kąt α powstaje moment pary sił M_p , który przeciwdziała wychyleniu i przywraca pierwotne położenie. W tym przypadku ciało zanurzone jest *stateczne* (równowaga trwała).

2. Jeżeli środek ciężkości S leży powyżej środka wyporu Σ , to po wychyleniu ciała z położenia układ sił G i W wywoła moment M_p o zwrocie zgodnym z wychyleniem, a zatem uniemożliwiającym powrót do pierwotnego położenia. W tym przypadku ciało jest *niestateczne* (równowaga chwiejna).

3. Jeżeli środek ciężkości leży w środku wyporu (punkty S i Σ pokrywają się), to w każdym położeniu po wychyleniu ze stanu równowagi moment $M_p = \mathbf{0}$ i ciało nie będzie miało tendencji powrotu do początkowego stanu równowagi. Jest to przypadek równowagi *obojętnej*.



Rys. 4.23. Równowaga ciała pływającego całkowicie zanurzonego

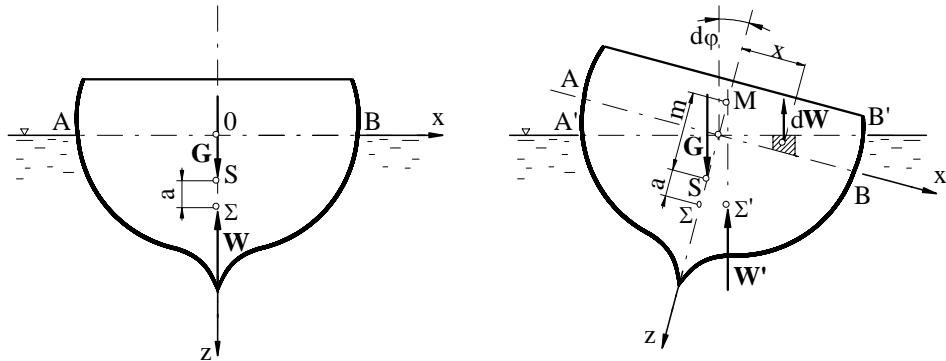
Podczas rozpatrywania stateczności ciała w odniesieniu do przesunięć względem zwierciadła cieczy oraz w odniesieniu do obrotu dookoła dowolnej osi pionowej (w przypadku traktowania tych przesunięć i obrotów jako niezmiernie powolnych – stateczność statyczna) nie zmienia się wzajemne położenie wektorów W i G . W tych przypadkach, niezależnie od położenia środka ciężkości względem środka wyporu, równowaga ciała jest *obojętna*.

2. Stateczność ciał pływających na powierzchni swobodnej

Rozpatrzmy stateczność ciała pływającego na powierzchni w odniesieniu do elementarnie małych wychyleń ze stanu równowagi (rys. 4.24). Niech środek ciężkości S leży nad środkiem wyporu Σ . Przyjmijmy prostokątny układ osi współrzędnych, którego początek znajduje się w geometrycznym środku pola pływania tak, że oś pionowa pokrywa się z osią pływania, a osie x , y wyznaczają płaszczyznę pokrywającą się z powierzchnią swobodną cieczy.

Dowolne wychylenie ciała jest wypadkową trzech przesunięć i trzech obrotów względem osi x , y , z . Zarówno przesunięcie ciała w kierunku poziomym (x i y), jak i obrót dookoła osi pionowej (z) nie wpływają na zmianę równowagi ciała – jest to więc *równowaga obojętna*. Ciało jest również stateczne względem przesunięć normalnych do zwierciadła cieczy (wzdłuż osi z), ponieważ przy wymuszonej zmianie głębokości zanurzenia zostaje naruszona równowaga pomiędzy ciężarem ciała G i wyporem W . Wywołuje to zmianę zanurzenia i powrót do stanu początkowego po wykonaniu wielu zanikających wahnień.

Rozważmy stateczność ciała w odniesieniu do obrotu wokół osi poziomej przy założeniu, że objętość zanurzonej części ciała pozostała nie zmieniona po wychyleniu (rys. 4.24).



Rys. 4.24. Równowaga ciała pływającego na powierzchni swobodnej

Wychylmy ciało z położenia początkowego przez obrót o kąt $d\varphi$ względem osi poziomej. Ponieważ objętość zanurzonej części nie uległa zmianie (objętości klinów OAA' i OBB' są równe z założenia), zatem wypór w położeniu pływania jest równy wyporowi po odchyleniu: $|W| = |W'|$.

Zmienia się jednak kształt części zanurzonej, co powoduje zmianę położenia środka wyporu do położenia Σ' , a zatem zmianę położenia linii działania wyporu. Wypór W' tworzy wraz z ciężarem G parę sił.

Jeżeli moment ten, zwany *momentem prostującym*, ma zwrot przeciwny do kąta obrotu, to *ciało jest stateczne*. Jeżeli moment ma zwrot zgodny z kątem obrotu, to *ciało jest niestateczne*. Gdy moment jest równy零 – *ciało znajduje się w równowadze obojętnej*.

Po wychyleniu ciała z położenia równowagi wektor W' przecina osią pływania w punkcie M , zwanym *metacentrum*. Odległość punktu M od środka ciężkości ciała S oznaczamy m i nazywamy *wysokością metacentryczną*. Położenie punktu M w stosunku do środka ciężkości S wskazuje na znak momentu prostującego.

Jeżeli jako dodatnią wartość wysokości metacentrycznej m przyjmiemy położenie M ponad S , to:

- $m > 0 \Rightarrow$ ciało stateczne,
- $m < 0 \Rightarrow$ ciało niestateczne,
- $m = 0 \Rightarrow$ równowaga obojętna,

a zatem *stateczność ciała pływającego wymaga, aby metacentrum leżało powyżej środka ciężkości*.

Spróbujmy określić wartość m w zależności od parametrów geometrycznych ciała pływającego, zakładając, że środek ciężkości S leży powyżej środka wyporu Σ . Po

wychyleniu ciała o kąt $d\varphi$ pojawia się moment chwilowego wyporu względem środka wyporu Σ odpowiadającego położeniu równowagi

$$M = W' (m + a) \sin d\varphi. \quad (4.72)$$

Moment ten można przedstawić jako całkę momentów od naporów elementarnych $dW = \rho g x \sin d\varphi dA$ wywołanych zmianą kształtu części zanurzonej¹⁾

$$M = \int_A x dW = \rho g \sin d\varphi \int_A x^2 dA, \quad (4.73)$$

przy czym dA jest elementem pola pływania.

Po uwzględnieniu, że:

$$W' = W = \rho g V$$

$$\text{i} \quad \int_A x^2 dA = I_y,$$

otrzymamy

$$m = \frac{I_y}{V} - a. \quad (4.74)$$

I_y oznacza moment bezwładności pola pływania względem poziomej osi pływania. Ponieważ istnieją dwie takie osie, ciało będzie stateczne wtedy, gdy wysokość metacentryczna będzie dodatnia dla minimalnego momentu bezwładności I_{\min} .

Warunek stateczności jest podawany z tego względu w postaci

$$m = \frac{I_y}{V} - a > 0. \quad (4.75)$$

Z warunku tego wynika między innymi, że ciało pływające na powierzchni jest zawsze stateczne, w zakresie małych wychyleń, gdy jego środek ciężkości leży poniżej środka wyporu, ponieważ wtedy

$$a < 0.$$

¹⁾ Kąt $d\varphi$ jest elementarny, dlatego ramię siły elementarnej dW jest prawie równe x .

5. DYNAMIKA PŁYNU NIELEPKIEGO I NIEPRZEWODZĄCEGO CIEPŁA

5.1. PODSTAWOWE RÓWNANIE RUCHU PŁYNU DOSKONAŁEGO

Równania dynamiki mają na celu określenie ruchu płynów, będą więc uwzględniały działanie na płyn sił masowych i powierzchniowych. Podstawowym zadaniem dynamiki jest ustalenie związków zachodzących pomiędzy działającymi siłami a wielkościami charakteryzującymi ruch płynu.

W niniejszym rozdziale rozpatrzymy przepływy cieczy i gazów nielepkich i nieprzewodzących ciepła.

Podstawowe zasady zachowania (omówione w rozdz. 3.) sprowadzają się do układu następujących równań:

➤ równanie zachowania masy (3.5)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0;$$

➤ równanie zachowania pędu (3.33), które dla płynu nielepkiego i nieściśliwego ma postać (3.34), nazywaną równaniem Eulera

$$\rho \frac{d \mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} p;$$

➤ równanie zachowania energii (3.52), które dla płynu nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła ma postać (3.55) lub (3.62)

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + i \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Do powyższego układu, w celu jego zamknięcia, trzeba dołączyć odpowiednie równanie stanu

$$\rho = \rho(p, T), \quad (5.1)$$

zakładając, że $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z, t)$ jest funkcją zadaną.

5.1.1. RÓWNANIE EULERA W POSTACI OGÓLNEJ

Równanie (3.34), noszące nazwę równania Eulera, jest podstawowym równaniem określającym ruch płynu nielepkiego. Można je przedstawić w postaci wektorowej

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}, \quad (5.2)$$

lub w postaci trzech równań skalarowych

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

albo w zapisie wskaźnikowym (Einstaina)

$$f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.4)$$

5.1.2. RÓWNANIE EULERA W FORMIE LAMBA I GROMEKI

Różniczkowe równania Eulera, będące bilansem sił bezwładności, ciśnienia i sił masowych, można stosować zarówno do ruchu potencjalnego, jak i wirowego. Przydatne jest zatem przekształcenie ich do takiej postaci, w jakiej występują wyraźnie składowe wektora wiru. Jeżeli składowe te przyrównamy do zera, otrzymamy równanie ruchu potencjalnego, jeżeli zaś będą one różne od zera, otrzymujemy równanie ruchu wirowego.

Korzystając z tożsamości wektorowej $(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{a} = \operatorname{grad}(\mathbf{a}^2/2) + \operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{a}$, równanie Eulera (5.2) możemy przekształcić do postaci

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (5.5)$$

któreą nazywa się postacią Lamba i Gromeki.

Tę samą postać równania Eulera można uzyskać, jeżeli do prawej strony układu równań (5.3) dodamy i równocześnie odejmiemy¹⁾ kolejno następujące wyrażenia:

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} v_y - \frac{\partial v_z}{\partial x} v_z \right), \quad \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} v_z - \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x \right), \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} v_x - \frac{\partial v_y}{\partial z} v_y \right),$$

¹⁾ Czyli dodamy zero.

a zatem

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} = & v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ & + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} v_y - \frac{\partial v_z}{\partial x} v_z \right) - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} v_y - \frac{\partial v_z}{\partial x} v_z \right).\end{aligned}$$

Po przekształceniu i uwzględnieniu (2.57) otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} = & v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (v_z W_y - v_y W_z) + \frac{\partial v_x}{\partial t},\end{aligned}$$

przy czym

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}.$$

Podobnie można obliczyć pozostałe składowe pochodnej substancialnej prędkości \mathbf{v} i wówczas

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{W} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

co jest równe lewej stronie równania (5.5) ($\mathbf{W} \equiv \text{rot } \mathbf{v}$ – p. 2.7).

5.2. CAŁKOWANIE RÓWNAŃ EULERA

Nieliniowość równań Eulera jest powodem, dla którego nie dają się one całkować w postaci ogólnej. W następujących dwóch przypadkach można jednak wyznaczyć całki tych równań: gdy przepływ jest potencjalny lub gdy przepływ jest wirowy, ale ustalony. W pierwszym przypadku otrzymujemy tzw. całkę Cauchy'ego–Lagrange'a, w drugim – całkę lub równanie Bernoulliego. Obie całki określają związki między prędkością, ciśnieniem i gęstością płynu i można je znaleźć po założeniu, że:

1. Pole jednostkowych sił masowych jest potencjalne, czyli istnieje potentjał $U(x, y, z, t)$ spełniający równanie

$$\mathbf{f}(x, y, z, t) = -\text{grad } U(x, y, z, t), \quad (5.6)$$

a zatem

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

2. Plyn jest barotropowy, czyli istnieje związek między gęstością płynu i ciśnieniem

$$\rho = \rho(p), \quad (5.7)$$

można zatem wprowadzić tzw. funkcję ciśnienia

$$P \stackrel{\text{df}}{=} \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad ^{1)}, \quad (5.8)$$

której

$$\operatorname{grad} P = \frac{dP}{dp} \operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (5.9)$$

Po całkowaniu zależności (5.8) funkcja ciśnienia ma postać:

➤ dla cieczy nieściśliwej ($\rho = \text{const}$)

$$P(p) = \frac{p}{\rho}, \quad (5.10)$$

➤ dla gazów – przemiana izotermiczna $\left(p = p_0 \frac{\rho}{\rho_0} \right)$

$$P(p) = \frac{p}{\rho} \ln p, \quad (5.11)$$

➤ dla gazów – przemiana adiabatyczna $\left(p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa \right)$

$$P(p) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho}. \quad (5.12)$$

5.2.1. CAŁKA CAUCHY'EGO–LAGRANGE'A

Jeżeli $\mathbf{W} = \mathbf{0}$, to ruch płynu jest potencjalny i pole prędkości jest określone zależnością $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi$ (p. 2.6), a zatem

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \Phi) = \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right).$$

Wówczas, po uwzględnieniu założeń 1. i 2., z równania Eulera w formie Lamba i Gromekiego (5.5), otrzymamy

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = -\operatorname{grad} U - \operatorname{grad} P, \quad (5.13)$$

¹⁾ $P = P(p(x, y, z, t)) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} P = \frac{dP}{dp} \frac{\partial p}{\partial x}, \dots, \frac{dP}{dp} = \frac{1}{\rho}.$

czyli

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + P \right) = 0. \quad (5.13')$$

Jeżeli gradient pewnej funkcji znika, to funkcja ta może zależeć tylko od czasu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + P = F(t). \quad (5.14)$$

Funkcja $F(t)$ musi być wyznaczona z warunków początkowych zagadnienia. Równanie (5.14) nazywa się całką Cauchy'ego–Lagrange'a równania Eulera.

Po dołączeniu do równania (5.14) równania ciągłości w postaci (3.11)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

otrzymujemy układ dwóch równań, umożliwiający określenie potencjału prędkości i ciśnienia przy znanym potencjale sił masowych i gęstości. Jest to wyjściowy układ równań w teorii opływów i w teorii ruchu falowego cieczy.

Do oznaczenia funkcji Φ potrzebne są warunki brzegowe. Na ścianie nieruchomej składowa normalna prędkości musi być równa zeru, czyli $v_n = 0$, a więc $\partial \Phi / \partial n = 0$. Na ruchomej ścianie granicznej $\partial \Phi / \partial n = v(x, y, z, t)$, gdzie v – prędkość na danej powierzchni. Po obliczeniu Φ znajdziemy rozkład ciśnień, uwzględniając również inne warunki brzegowe, np. ciśnienie na powierzchni nieruchomej, na powierzchni swobodnej itp.

Napiszmy jeszcze równanie (5.13), ale odniesione do ruchu jednowymiarowego w kierunku współrzędnej krzywoliniowej s , uwzględniając zależność (2.61)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(-U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5.15)$$

lub po pomnożeniu przez ds

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(-U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} \right) ds - \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0.$$

Po całkowaniu (dla płynu nieściśliwego) otrzymamy

$$U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{\partial v}{\partial t} ds = C, \quad (5.16)$$

uwzględniając zaś, że $U = gz$, możemy napisać

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g} \int \frac{\partial v}{\partial t} ds = c = \text{const}. \quad (5.16')$$

Jest to całka Cauchy'ego–Lagrange'a jednowymiarowego ruchu nieustalonego. Stała c w tym równaniu jest jednakowa w całym obszarze poruszającego się płynu.

5.2.2. CAŁKA BERNOULLIEGO

Jeżeli ruch płynu jest ustalony, czyli $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ i obowiązują założenia 1. i 2., to równanie Eulera w formie Lamba i Gromeki (5.5) przyjmuje postać

$$\operatorname{grad} \left(-U - P - \frac{v^2}{2} \right) = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (5.17)$$

lub, po uwzględnieniu zależności (2.57),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-U - P - \frac{v^2}{2} \right) &= v_z W_y - v_y W_z, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-U - P - \frac{v^2}{2} \right) &= v_x W_z - v_z W_x, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-U - P - \frac{v^2}{2} \right) &= v_y W_x - v_x W_y. \end{aligned} \quad (5.17')$$

Po skalarnym pomnożeniu równania (5.17) przez element linii prądu $d\mathbf{r} \equiv (dx, dy, dz)$ i dodaniu stronami otrzymamy

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \left(-U - P - \frac{v^2}{2} \right) d\mathbf{r} &\equiv (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{r} \\ &= (v_z W_y - v_y W_z) dx + (v_x W_z - v_z W_x) dy + (v_y W_x - v_x W_y) dz \end{aligned} \quad (5.18)$$

lub też w postaci

$$\operatorname{grad} \left(-U - P - \frac{v^2}{2} \right) d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ W_x & W_y & W_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (5.18')$$

Prawą stronę równania (5.18') przedstawiono tu w postaci wyznacznika, a równanie to można scałkować, jeżeli

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ W_x & W_y & W_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0. \quad (5.19)$$

Otrzymamy wówczas

$$\operatorname{grad} \left(-U - P - \frac{v^2}{2} \right) = 0,$$

skąd, biorąc pod uwagę definicję operacji grad, wynika, że

$$U + P + \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (5.20)$$

Równanie (5.20), które jest całką równania Eulera zwaną *równaniem (całką) Bernoulliego*, wyraża zasadę zachowania energii.

Należy przypomnieć, że równanie Bernoulliego (5.20) otrzymaliśmy po scałkowaniu równania (5.18), przy założeniu, że wyznacznik (5.19) jest równy zeru. To założenie ogranicza zakres stosowalności równania (5.20) do takich przepływów, gdy spełniony będzie jeden z następujących warunków¹⁾:

$$\begin{aligned} W_x &= W_y = W_z = 0, \\ \frac{dx}{v_x} &= \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \\ \frac{dx}{W_x} &= \frac{dy}{W_y} = \frac{dz}{W_z}, \\ \frac{W_x}{v_x} &= \frac{W_y}{v_y} = \frac{W_z}{v_z}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Warunek $W_x = W_y = W_z = 0$ określa przepływ potencjalny (niewirowy), a zatem stała w równaniu Bernoulliego jest stała dla całego pola przepływu i równanie (5.20) może być stosowane dla ustalonego przepływu potencjalnego w całej rozciągłości po uwzględnieniu założení 1. i 2.

Warunki $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$ oraz $\frac{dx}{W_x} = \frac{dy}{W_y} = \frac{dz}{W_z}$ przedstawiają kolejno równanie

linii prądu (2.23) i równanie linii wirowej (2.73). Stała w równaniu Bernoulliego będzie zatem inna dla każdej linii prądu (lub linii wirowej), zachowując tę samą wartość jedynie wzdłuż danej linii.

Zgodnie z warunkiem $\frac{W_x}{v_x} = \frac{W_y}{v_y} = \frac{W_z}{v_z}$ równanie Bernoulliego można stosować

dla całego pola przepływu wówczas, gdy kierunek linii wirowej jest zgodny z kierunkiem linii prądu (linie te się pokrywają), a zatem w ruchu śrubowym.

¹⁾ Wyznacznik jest równy zeru, gdy w wierszu lub kolumnie wyrazy są zerami albo gdy dwa wiersze są proporcjonalne.

W polu sił ciężkości ($U = g z$) dla adiabatycznego przepływu gazu, zgodnie z (5.12), równanie (5.20) przyjmuje postać

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + g z = \text{const} \quad (5.22)$$

lub po pominięciu sił masowych¹⁾

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (5.23)$$

Dla cieczy ($\rho = \text{const}$) w polu sił ciężkości

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \text{const}. \quad (5.24)$$

Jak widać, występujące w tych równaniach poszczególne wyrazy przedstawiają różne rodzaje energii poruszającego się płynu, odniesione do jednostki masy. Pierwszy wyraz $v^2/2$ oznacza energię kinetyczną jednostki masy płynu, drugi – p/ρ – energię ciśnienia (wewnętrzna), trzeci zaś – $g z$ – energię potencjalną pola zewnętrznych sił masowych (ównież odniesione do jednostki masy). A zatem:

w ruchu ustalonym płynu nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła, odbywającym się w jednorodnym polu sił ciężkości, całkowita energia jednostki masy płynu, składająca się z energii kinetycznej, energii ciśnienia (wewnętrznej) i energii potencjalnej, jest stała w każdym punkcie danej linii prądu.

Twierdzenie to jest szczególną postacią ogólnej zasady zachowania energii mechanicznej.

5.3. NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA RÓWNANIA BERNOULLIEGO

5.3.1. GRAFICZNA INTERPRETACJA RÓWNANIA BERNOULLIEGO

Najczęściej równanie Bernoulliego, odniesione do strugi cieczy doskonałej, jest przedstawiane w postaci

$$\frac{v^2}{2 g} + \frac{p}{\rho g} + z = H = \text{const}, \quad (5.25)$$

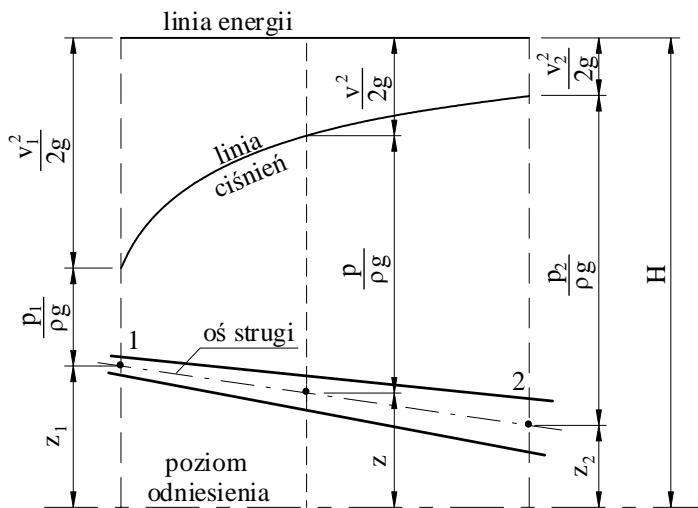
która otrzymujemy po podzieleniu zależności (5.24) przez przyśpieszenie ziemskie g .

Ponieważ każdy ze składników równania (5.25) ma wymiar długości, noszą one odpowiednio nazwę wysokości prędkości, wysokości ciśnienia i wysokości położenia. Sumę wspomnianych wysokości nazywamy wysokością rozporządzalną.

¹⁾ W gazach zwykle $\rho g z / p \ll 1$.

Na rysunku 5.1 przedstawiono wykres obrazujący zmianę wysokości położenia, wysokości ciśnienia i wysokości prędkości w strudze o zmiennym przekroju. Wykres ten stanowią trzy linie:

- oś strugi leżąca na wysokości z ponad poziomem odniesienia,
- linia ciśnień leżąca o $p/\rho g$ ponad osią strugi,
- linia energii leżąca o $v^2/2g$ ponad linią ciśnień.



Rys. 5.1. Graficzna interpretacja równania Bernoulliego

Linia energii, zgodnie z zależnością (5.25), jest prostą poziomą, przebieg osi strugi i linii ciśnień zależy natomiast od położenia strugi względem poziomu odniesienia oraz kształtu strugi.

Równanie (5.25) odniesione do dwu przekrojów poprzecznych jednej i tej samej strugi ma postać

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2, \quad (5.26)$$

stosowaną najczęściej do rozwiązywania konkretnych zadań.

Równanie Bernoulliego określa *przemiany energetyczne wzdłuż strugi elementarnej o przekroju poprzecznym nieskończenie małym* i jest szczególnym przypadkiem zasady zachowania energii w przepływie płynu nielepkiego. Mimo wyraźnej rozbieżności tego twierdzenia z doświadczeniem, stwierdzającym powstawanie strat energetycznych podczas przepływów płynów rzeczywistych, znaczenie i zakres zastosowań równania Bernoulliego są rozległe. Można je stosować z przybliżeniem do zjawisk ruchu swobodnego cieczy rzeczywistych, w których poruszająca się masa ciekła graniczny z powietrzem (np. wypływy przez otwory).

W przepływach płynów rzeczywistych ograniczonych ścianami stałymi (przepływy przez przewody pod ciśnieniem, kanały otwarte itd.) twierdzenie Bernoulliego prowadzi natomiast do wyników niezgodnych z doświadczeniem. Ale i w tych przypadkach posługujemy się tym równaniem, powiększonym o składnik, którego wartość liczbową odpowiada wysokości strat energetycznych. Uogólnione w ten sposób równanie Bernoulliego stanowi jedno z podstawowych równań hydrauliki (p. 7.1.2).

W zagadniach praktycznych, gdy odległość między przekrojami strugi jest niewielka i nie ma znacznego rozpraszania energii na drodze przepływu, pojawiające się rozbieżności między wynikami teoretycznymi i doświadczalnymi korygujemy, wprowadzając odpowiednie współczynniki.

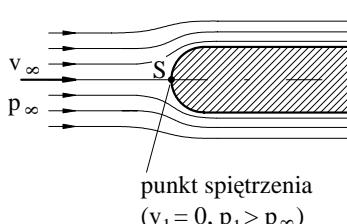
Wiele tych zagadnień wymaga równoczesnego zastosowania równania Bernoulliego i równania ciągłości, które w odniesieniu do jednowymiarowych ustalonych przepływów płynów ma następujące postacie:

- w przypadku płynu ściśliwego (3.17) $\rho v A = \text{const}$,
- w przypadku płynu nieściśliwego (3.18) $v A = \text{const}$.

5.3.2. ZASTOSOWANIE RÓWNANIA BERNOULLIEGO W ZAGADNIENIACH POMIARU PRĘDKOŚCI I STRUMIENIA OBJĘTOŚCI

1. Pomiar prędkości miejscowej

W obszarze przepływu mogą znajdować się punkty, w których prędkość przepływu $v = 0$. W punktach tych występujących przy opływie ciał od strony napływającej cieczy lub gazu i nazywanych *punktami spiętrzenia* (stagnacji), ciśnienie statyczne przybiera wartości ciśnienia całkowitego, zwanego *ciśnieniem spiętrzenia*. W celu określenia ciśnienia spiętrzenia rozważmy opływ bryły (rys. 5.2).



Rys. 5.2. Punkt spiętrzenia

Jeżeli płyn poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością v_∞ pod ciśnieniem p_∞ ¹⁾ napotyka na przeszkodę w postaci ciała zanurzonego, to przed przeszkodą (wobec istniejącej symetrii przepływu) następuje spiętrzenie w punkcie S oraz opływ rozdzielonych strug dookoła tej przeszkody.

Równanie Bernoulliego dla poziomej linii prądu przechodzącej przez ten punkt ma postać

$$\frac{p_\infty}{\rho g} + \frac{v_\infty^2}{2g} = \frac{p_1}{\rho g},$$

¹⁾ Prędkość v_∞ i ciśnienie p_∞ są nazywane odpowiednio prędkością i ciśnieniem przepływu niezakłóconego.

stąd

$$p_1 = p_\infty + \rho \frac{\mathbf{v}_\infty^2}{2}. \quad (5.27)$$

Sumę ciśnienia statycznego p_∞ i ciśnienia dynamicznego $\rho v_\infty^2/2$ nazywamy *ciśnieniem całkowitym*. Wynika stąd, że ciśnienie spiętrzenia jest równe ciśnieniu całkowitemu w przepływie niezakłóconym.

Jeżeli w punkcie spiętrzenia przeszkody wywiercony zostanie niewielki otwór o osi równoległej do kierunku przepływu, to wewnątrz tego otworu będzie panowało ciśnienie spiętrzenia p_1 . Wyznaczenie prędkości miejscowej (lokalnej) można zatem sprowadzić do zagadnienia pomiaru ciśnienia spiętrzenia oraz ciśnienia statycznego w obszarze przepływu niezakłóconego lub różnicę tych ciśnień, ponieważ z wzoru (5.27) wynika

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_\infty)}{\rho}}. \quad (5.28)$$

Rurka Pitota

Najprostszym przyrządem służącym do pomiaru prędkości lokalnej jest tzw. rurka Pitota. Jest to rurka zagięta pod kątem 90° i zwrócona wlotem pod prąd. Pionowe ramię rurki jest otwarte lub połączone z manometrem.

W przypadku pomiaru miejscowych prędkości przepływu wody w przewodach otwartych (rys. 5.3) wzór (5.28) przyjmuje postać

$$v_\infty = \sqrt{2gh}, \quad (5.29)$$

w której: h – wysokość spiętrzenia cieczy ponad powierzchnię swobodną, ponieważ ciśnienie w punkcie spiętrzenia

$$p_1 = p_b + \rho g (h + z),$$

a ciśnienie statyczne przepływu niezakłóconego na głębokości z

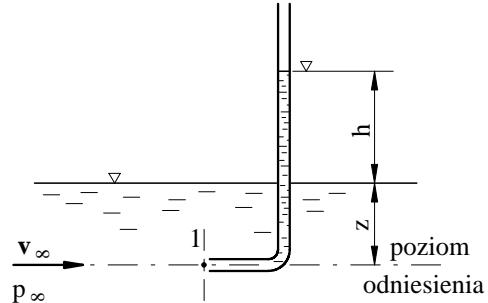
$$p_\infty = p_b + \rho g z.$$

Podczas pomiaru lokalnej prędkości przepływu powietrza w tzw. otwartej przestrzeni pomiarowej (rys. 5.4) o ciśnieniu $p_\infty = p_b$ na najniższym poziomie cieczy w manometrze ustali się ciśnienie spiętrzenia

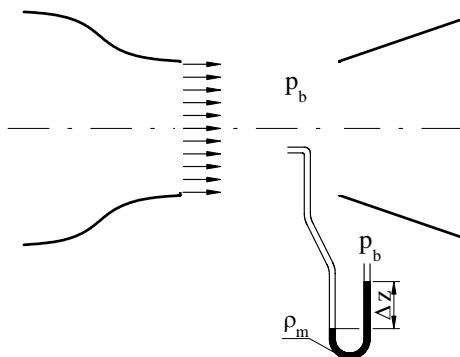
$$p_1 = p_b + \rho_m g \Delta z,$$

a zatem

$$v_\infty = \sqrt{2 g \Delta z \frac{\rho_m}{\rho}}. \quad (5.30)$$



Rys. 5.3. Pomiar prędkości lokalnej w przewodzie otwartym



Rys. 5.4. Pomiar prędkości w otwartej przestrzeni pomiarowej

We wszystkich przypadkach, gdy $p_\infty \neq p_b$, w celu określenia prędkości przepływu v_∞ należy oprócz ciśnienia spiętrzenia p_1 zmierzyć ciśnienie statyczne p_∞ w obszarze przepływu niezakłóconego.

Rurka Prandtla

Przyrządem pomiarowym umożliwiającym bezpośredni pomiar różnicy ciśnień spiętrzenia i ciśnienia statycznego przepływu niezakłóconego jest rurka Prandtla (rys. 5.5). Odbiór ciśnienia statycznego p_∞ odbywa się na pobocznicy rurki za pośrednictwem otwórków, których położenie zależy od rozkładu ciśnienia wzdłuż poziomej gałęzi rurki. Jak wynika z wykresu (rys. 5.5), ciśnienie przed rurką wzrasta, osiągając maksimum bezpośrednio u wlotu do rurki, potem raptownie maleje nieco poniżej wartości p_∞ , a następnie łagodnie wzrasta, osiągając w odległości $(6-8)d$ od wlotu¹⁾ wartość p_∞ . W tym przekroju powinien następować odbiór ciśnienia statycznego.

Jeżeli różnica ciśnień jest mierzona za pomocą manometru różnicowego, to

$$p_1 - p_\infty = g \Delta z_m (\rho_m - \rho)$$

i zależność (5.28) przyjmie postać

$$v_\infty = \sqrt{2g \Delta z_m \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right)}. \quad (5.31)$$

Pomiary prędkości miejscowej wykonywane za pomocą rurki Prandtla są dość dokładne. Zastosowanie do pomiaru różnicy ciśnienia dokładnego przyrządu, np. mikromanometru z rurką pochyłą, zapewnia niedokładność pomiaru nie większą niż 1%.

¹⁾ Odległość podana zgodnie z PN-81/M-42364.

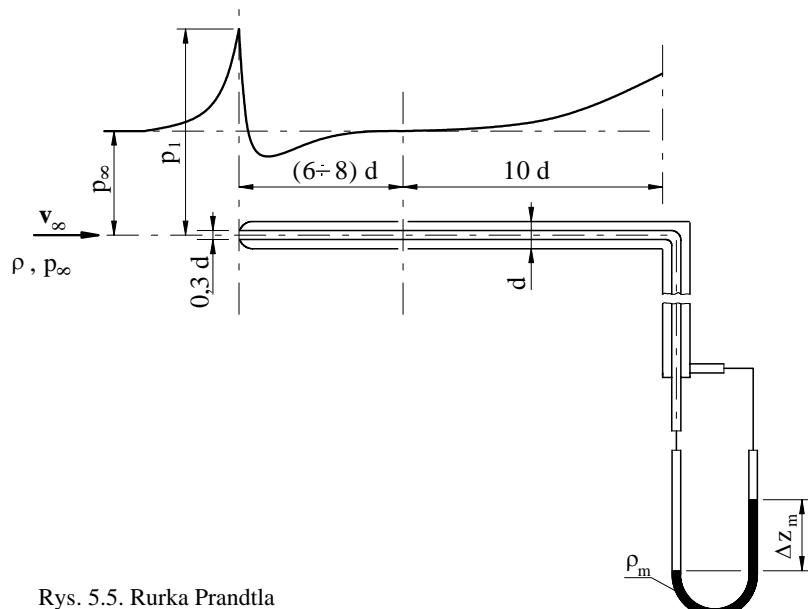
Jeżeli kształt i proporcje rurki różnią się od podanych na rysunku, należy wykonać wzorcowanie rurki. W wyniku tego otrzymuje się współczynnik wzorcowania α . Ostatecznie

$$v_\infty = \alpha \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} \quad (5.32)$$

lub w przypadku pomiarów prędkości płynów ściśliwych

$$v_\infty = \alpha (1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}, \quad (5.32')$$

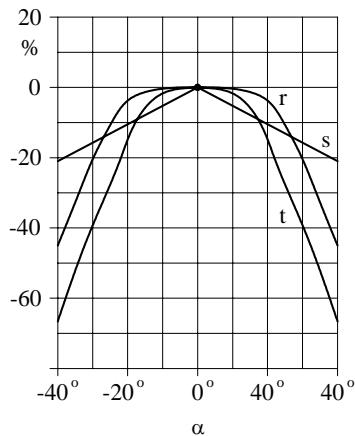
gdzie: ε – współczynnik ekspansji¹⁾ (rozprężania) dla gazów zależny od wykładnika adiabaty κ oraz stosunku ciśnienia dynamicznego do ciśnienia statycznego $\Delta p/p$.



Rys. 5.5. Rurka Prandtla

Rurki Prandtla są przeznaczone do pomiaru prędkości miejscowej w strudze jednowymiarowej o znany kierunku przepływu. W praktyce są stosowane do pomiaru prędkości miejscowych przepływu cieczy i gazów w rurociągach. Przekrój pomiarowy powinien się znajdować na prostym odcinku, gdzie kierunek przepływu jest zgodny z kierunkiem osi przewodu. Nie można natomiast stosować rurki Prandtla do pomiarów prędkości za takimi elementami, jak: kolana, zawory, nagle zmiany średnicy rurociągu itp.

¹⁾ Wartość współczynnika rozprężania podaje PN-81/M-42367.



Rys. 5.6. Krzywa błędu rurki Prandtla (r), sondy do pomiaru ciśnienia statycznego (s) i rurki Pitota (t)

zostanie prędkość w innym miejscu niż przewidywano, nosy normalnych rurek piętrzących są bowiem stosunkowo długie.

Podczas pomiarów, których celem jest nie tylko wyznaczenie wartości miejscowej prędkości przepływu, lecz również jej kierunku, stosuje się cylindry piętrzące (w przepływie dwuwymiarowym) oraz kule piętrzące (w przepływie trójwymiarowym).

2. Pomiar prędkości średniej i strumienia objętości metodą prędkościomierzową

Bryłą przepływu lub prędkości nazywamy bryłą ograniczoną przekrojem hydrodynamicznym przewodu oraz powierzchnią będącą obwiednią końców wektorów prędkości miejscowych.

W przepływach przez prostooosiowe rury o kołowym przekroju (o średnicy R) bryła prędkości jest bryłą obrotową o osi pokrywającej się z osią przewodu i wówczas strumień objętości

$$q_V = 2\pi \int_0^R v(r) dr, \quad (5.33)$$

gdzie: $v(r)$ – miejscowa prędkość przepływu prostopadła do elementu $dA = 2\pi r dr$ przekroju poprzecznego przewodu w odległości r od osi.

W prostooosiowym kanale prostokątnym o polu powierzchni A objętość bryły przepływu, a zatem strumień objętości

$$q_V = \int_A v dA, \quad (5.33')$$

gdzie: v – prędkość miejscowa w polu elementarnym $dA = 2\pi dr$ przekroju hydrometrycznego A (prostopadła do dA).

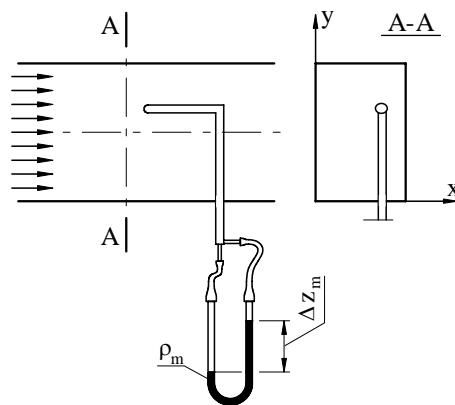
Niezbędnym warunkiem uzyskania wysokiej dokładności pomiarów jest właściwe ustawienie rurki Prandtla względem kierunku przepływu. Na rysunku 5.6 pokazano, w jaki sposób zmieniają się wskazania rurki Prandtla (r), sondy do pomiaru ciśnienia statycznego (s) oraz rurki Pitota (t) w zależności od kąta α zawartego między osią przyrządów a kierunkiem prędkości strugi niezakłóconej. Jak z niego wynika, odchylenia rurki Prandtla od kierunku strugi (o stałej prędkości w całym jej przekroju poprzecznym) o $\pm 10^\circ$ nieznacznie wpływają na dokładność pomiarów. Nie należy sądzić, że można ustawać rurki piętrzące niedbałe również w strugach o silnie zmieniającym się profili prędkości. Każde odchylenie rurki od kierunku osi strugi powoduje, że pomierzona

Prędkość średnia w tym przekroju jest ilorazem strumienia objętości i pola przekroju poprzecznego

$$v_{\text{sr}} = \frac{q_V}{A} \equiv \frac{1}{A} \int_A v dA. \quad (5.34)$$

W praktyce bryłę prędkości wyznaczamy następująco: dzielimy przekrój hydrodynamiczny na pola częściowe, mierzymy za pomocą prędkościomierzy (np. rurek piętrzących) miejscowe prędkości przepływu w odpowiednich miejscach tych pól $v = v(x, y)$, a następnie wyznaczamy metodą rachunkową lub wykreślną objętość bryły przepływu.

Na rysunku 5.7 pokazano schemat pomiaru rozkładu prędkości w przewodzie o przekroju prostokątnym (np. wentylacyjnym) za pomocą rurki Prandtla.



Rys. 5.7. Schemat pomiaru rozkładu prędkości strugi w przewodzie o przekroju prostokątnym za pomocą rurki Prandtla

3. Pomiar strumienia objętości metodą zwężkową

Prześledźmy ustalony ruch płynu nielepkiego i nieściśliwego w poziomej rurze, w której pewien odcinek zastąpiono przewężeniem – zwężką (rys. 5.8).

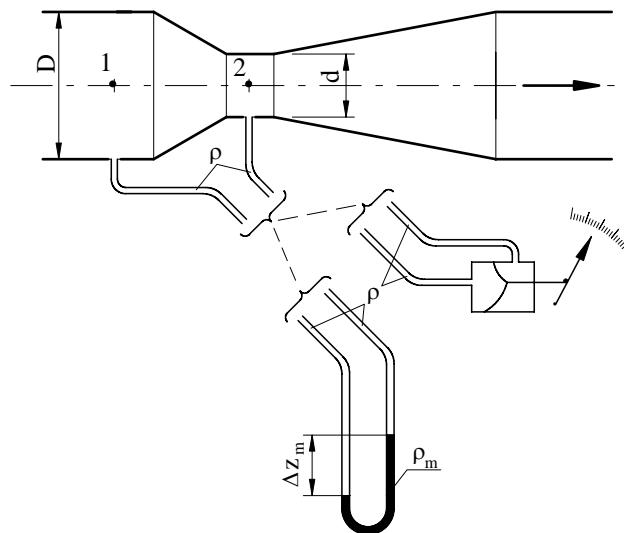
Równanie Bernoulliego dla przekrojów 1. i 2. ma postać (5.26')

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}.$$

Z równania ciągłości (3.19) wiadomo, że

$$v_1 = v_2 (d/D)^2 = \beta^2 v_2.$$

Stosunek średnicy otworu (gardzieli) zwężki (d) do średnicy wewnętrznej rurociągu (D) nazywamy przewężeniem – $\beta = d/D$.



Rys. 5.8. Odbiór ciśnień w zwężce pomiarowej

Po rozwiązaniu układu równań względem v_2 , otrzymamy

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g}{1-\beta^4}} \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho g}}, \quad (5.35)$$

a zatem:

miarą średniej prędkości przepływu przez zwężkę jest spadek ciśnienia ($\Delta p = p_1 - p_2$) między jej przekrojami mierniczymi, zwany ciśnieniem różnicowym.

W przypadku pomiaru ciśnienia różnicowego za pomocą manometru różnicowego zależność (5.35) przyjmuje postać

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g}{1-\beta^4}} \sqrt{\Delta z \left(\frac{\rho_m}{\rho} - 1 \right)}. \quad (5.36)$$

Na podstawie wartości prędkości średniej obliczamy strumień objętości przy znanych wartościach bezwzględnych ciśnień statycznych w obu przekrojach (lub ich różnicy)

$$q_V' = A_2 v_2 = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^4}} \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}}, \quad (5.37)$$

lub strumień masy

$$q_m' = \rho A_2 v_2 = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^4}} \sqrt{2 \Delta p \rho}. \quad (5.38)$$

Zależności te nie uwzględniają zjawisk występujących podczas przepływu płynów lepkich, konieczne jest zatem wprowadzenie współczynnika korygującego C , zwanego *współczynnikiem przepływu*, charakteryzującego zależność między rzeczywistym a teoretycznym strumieniem objętości lub masy. Współczynnik ten zależy jedynie od liczby Reynoldsa $C = C(\text{Re}_D)$ ¹⁾ dla danego typu zwężki pomiarowej.

Jeśli ponadto płyn jest ściśliwy, to trzeba wprowadzić następny współczynnik ε_l (wyznaczony doświadczalnie i podany w normie), zwany *liczbą ekspansji*. Liczba ta (odniesiona do przekroju przepływowego przed zwężką) uwzględnia zmianę gęstości przepływającego płynu wskutek spadku ciśnienia w przewężeniu. Liczba ekspansji nie zależy od liczby Reynoldsa, a dla danego przewężenia zwężki pomiarowej zależy wyłącznie od ilorazu ciśnienia różnicowego i ciśnienia absolutnego przed zwężką $\Delta p/p_1$ oraz od wykładnika izentropy danego gazu. Dla praktycznie nieściśliwych cieczy $\varepsilon_l = 1$; dla płynów ściśliwych $\varepsilon_l < 1$.

Ostatecznie strumień objętości płynów rzeczywistych określa wzór

$$q_V = \varepsilon_l \frac{C}{\sqrt{1-\beta^4}} \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho_1}}, \quad (5.39)$$

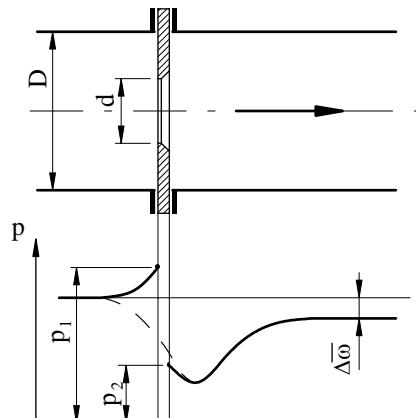
gdzie:

$\Delta p \equiv \Delta p_{12}$ – jest ciśnieniem różnicowym pomierzonym przed i za zwężką w miejscach ustalonych odpowiednią normą (PN-93/M-53950/01) – rys. 5.8,

ρ_1 – gęstość płynu w przekroju mierniczym przed zwężką (dla cieczy $\rho_1 = \rho_2 = \rho$),

ε_l – liczba ekspansji odniesiona do warunków przed zwężką.

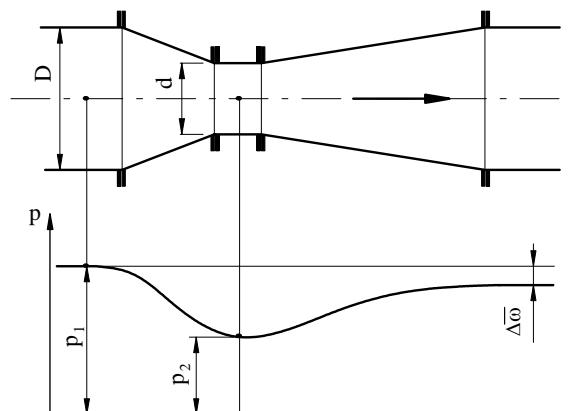
Zależność $q_V = q_V(\Delta p)$ określona wzorem (5.39) jest zwana *charakterystyką zwężki*. Na rysunkach 5.9 i 5.10 przedstawiono schematy dwóch rodzajów zwężek pomiarowych: kryzy pomiarowej i klasycznej zwężki Venturiego oraz pokazano rozkład ciśnienia wzdłuż osi przewodu (linią przerywaną) i w pobliżu ścian (linią ciągłą).



Rys. 5.9. Rozkład ciśnienia podczas przepływu przez rurę z kryzą pomiarową

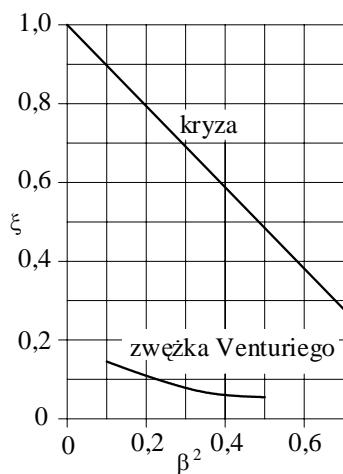
¹⁾ $\text{Re}_D = vD/\nu$.

Przepływowi płynu rzeczywistego przez zwężkę towarzyszy strata energii. Wartość tej straty zależy przede wszystkim od przewężenia zwężki (β) oraz od sposobu dławienia strugi przepływającego czynnika, czyli od rodzaju zwężki. Najmniejszymi stratami energii charakteryzuje się zwężka Venturiego, w której nie ma gwałtownych zmian pola przekroju przepływowego. Największe straty wywołuje wbudowanie kryzy.



Rys. 5.10. Rozkład ciśnienia wzdłuż klasycznej zwężki Venturiego

Na rysunku 5.11 podano orientacyjne zależności względnej trwałej straty ciśnienia ξ (iloraz straty ciśnienia $\Delta\sigma$ i ciśnienia różnicowego Δp) od przewężenia β przedstawionych typów zwężek.



Rys. 5.11. Zależność względnej trwałej straty ciśnienia od przewężenia dla kryzy i zwężki Venturiego

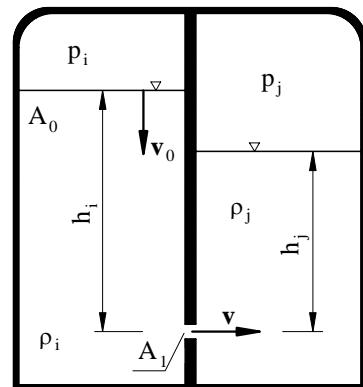
W praktyce są stosowane zwężki pomiarowe znormalizowane o kształtach i wymiarach określonych w PN-93/M-53950/01. Norma podaje tok obliczenia zwężek, określa warunki wbudowania, podaje wartości współczynników C i ε_1 .

5.3.3. ZASTOSOWANIE RÓWNANIA BERNOULLIEGO W ZAGADNIENIACH WYPŁYWU PRZEZ OTWORY I PRZYSTAWKI

1. Wypływ ustalony przez mały otwór

Rozpatrzmy przepływ cieczy przez mały otwór¹⁾, znajdujący się w pionowej ścianie oddzielającej dwa zbiorniki wypełnione cieczami o gęstościach ρ_i oraz ρ_j przy wysokościach cieczy h_i oraz h_j (rys. 5.12). Nad cieczami znajdują się gazy o ciśnieniach odpowiednio p_i oraz p_j . Zakładamy, że przepływ jest ustalony, tzn. wysokości h_i oraz h_j i ciśnienia p_i oraz p_j – podczas przepływu nie ulegają zmianie.

Rys. 5.12. Wypływ przez mały otwór



W przypadku dowolnej strugi o gęstości ρ_i , zaczynającej się na powierzchni cieczy i kończącej w otworze, po przyjęciu poziomu odniesienia w osi otworu, równanie Bernoulliego ma postać

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_i}{\rho_i g} + h_i = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_j + \rho_j g h_j}{\rho_i g}. \quad (5.40)$$

W przypadku otworu małego ($A_0 \gg A_1 \Rightarrow A_1/A_0 \approx 0 \Rightarrow v_0 \approx 0$), prędkość wypływu (przepływu) ze zbiornika (i) określa zależność

$$v = \sqrt{2g \left(\left(\frac{p_i}{\rho_i g} + h_i \right) - \left(\frac{p_j}{\rho_i g} + \frac{\rho_j}{\rho_i} h_j \right) \right)}. \quad (5.41)$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$\frac{p_i}{\rho_i g} + h_i = H_i; \quad \frac{p_j}{\rho_i g} + \frac{\rho_j}{\rho_i} h_j = H_j,$$

gdzie H_i oraz H_j nazywamy *wysokościami rozporządzalnymi*, wzór (5.41) przyjmie postać

$$v = \sqrt{2g(H_1 - H_2)}, \quad (5.42)$$

¹⁾ Mały otwór to taki, którego pole jest znacznie mniejsze od pola przekroju zbiornika ($A_1/A_0 \ll 1$), a wysokość otworu mniejsza od 0,1 głębokości jego zanurzenia.

a zatem *prędkość przepływu (wyplwu) cieczy nielepkiej zależy od różnicy wysokości rozporządzalnych w obu zbiornikach.*

Przeanalizujmy szczególne przypadki wypływów:

a) $(\rho_i = \rho_j) \wedge (p_i = p_j = p_b) \Rightarrow H_i - H_j = h_i - h_j$,
a zatem prędkość przepływu cieczy

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (5.43)$$

zależy tylko od różnicy poziomów zwierciadła cieczy w obu zbiornikach;

b) $(\rho_i >> \rho_j) \wedge (p_j = p_b) \Rightarrow H_i = \frac{p_i}{\rho_i g} + h_i = \frac{p_i^n + p_b}{\rho_i g} + h_i, \quad H_j = \frac{p_b}{\rho_i g},$

a zatem prędkość wypływu cieczy ze zbiornika (w którym nad powierzchnią cieczy panuje nadciśnienie p_i^n) do atmosfery

$$v = \sqrt{2g H_i^n}, \quad (5.44)$$

przy czym $H_i^n = \frac{p_i^n}{\rho_i g} + h_i$;

c) $(\rho_i >> \rho_j) \wedge (p_i = p_j = p_b) \Rightarrow H_i - H_j = h_i$,
a zatem prędkość wypływu ze zbiornika otwartego o napełnieniu $h_i = h$

$$v = \sqrt{2g h}. \quad (5.45)$$

Zależność ta jest znana pod nazwą *wzoru Torricellego*.

Prędkość wypływu cieczy ze zbiornika przez mały otwór określaliśmy z równania Bernoulliego, pomijając opory w płynie lepkim oraz straty przy wypływie płynu z otworu. Rzeczywista prędkość wypływu jest więc mniejsza od teoretycznej. Wyznaczony doświadczalnie współczynnik φ , nazwany *współczynnikiem prędkości* (zależny przede wszystkim od lepkości i prędkości wypływającego płynu oraz od wymiarów otworu, a więc od liczby Reynoldsa $Re = vd/v$ – p. 6.3.5), jest stosunkiem prędkości rzeczywistej do teoretycznej

$$\varphi = \frac{V_r}{V}. \quad (5.46)$$

Obserwując strugę wypływającą przez otwór ostrobrzeżny (rys. 5.13), stwierdzamy, że pole przekroju strugi A_c w pewnej odległości (na ogólniej równej połowie średnicy) od otworu wylotowego jest mniejsze od pola otworu A . Zjawisko to, spowodowane siłami bezwładności, nosi nazwę *kontrakcji strugi*. Stosunek pola przekroju strugi w miejscu przewężenia do pola otworu nazywamy *współczynnikiem kontrakcji* (zwężenia)

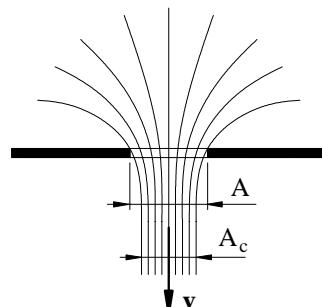
$$\kappa = \frac{A_c}{A}. \quad (5.47)$$

Wartość tego współczynnika zależy przede wszystkim od liczby Reynoldsza, a także od kształtu i usytuowania otworu wypływowego.

Rzeczywisty strumień objętości obliczamy z zależności

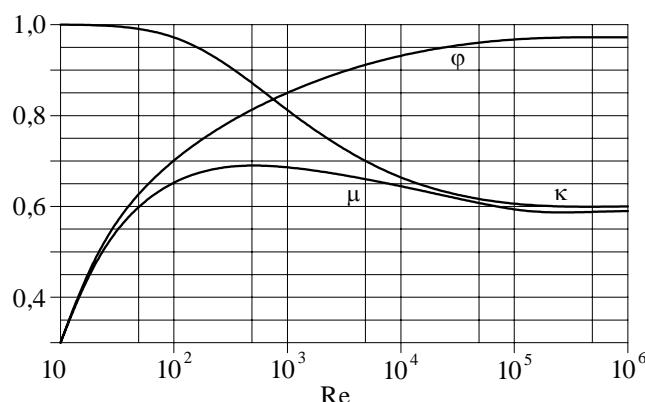
$$q_v = v_r A_c = \varphi \kappa v A = \mu v A, \quad (5.48)$$

w której $\varphi \kappa = \mu$ jest *współczynnikiem wypływu*.



Rys. 5.13. Wypływ strugi przez otwór ostrobrzeżny

Na rysunku 5.14 przedstawiono wyznaczone doświadczalnie zależności współczynników prędkości φ , kontrakcji κ oraz wypływu μ otworów kołowych ostrobrzeżnych od liczby Reynoldsza.

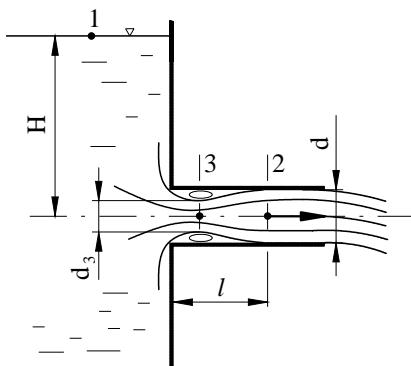


Rys. 5.14. Zależności współczynnika prędkości φ , kontrakcji κ i wypływu μ od liczby Reynoldsza

2. Wypływ ustalony przez przystawki

W celu uzyskania spoistej struktury strugi wypływającej cieczy, nadania jej kierunku oraz zwiększenia ilości wypływającej cieczy stosuje się przystawki. Są to krótkie rurowe, tworzące obramowanie otworu wypływowego lub zakończenia przewodu. Mogą być umieszczone na zewnątrz lub wewnętrz zbiornika. Przekrój przepłybowy wzduż osi przystawki może być zmienny lub stały, ich oś może być pozioma, pionowa lub ukośna.

Rozpatrzmy przepływ przez zewnętrzną przystawkę poziomą o przekroju kołowym (rys. 5.15). Wskutek kontrakcji struga odrywa się na wlocie od ścian przystawki, a następnie, jeżeli $l \geq 2d$ i $H < H_{kr}$, struga rozszerza się i płynie całym przekrojem przystawki. Pole przekroju strugi wypływającej z przystawki jest więc równe polu



Rys. 5.15. Przepływ przez zewnętrzną przystawkę cylindryczną

otworu; zatem $\kappa = 1$, a $\mu = \varphi$, czyli w czasie wypływu cieczy przez przystawkę współczynnik wypływu jest równy współczynnikowi prędkości. Oczywiście współczynnik prędkości przystawki jest mniejszy (z powodu większych strat energii) od współczynnika prędkości otworu, np. w rozpatrywanym przypadku $\varphi = 0,82$. Wobec tego, dla jednakowych wartości H oraz d , prędkość wypływu z przystawki zmniejsza się, strumień przepływu natomiast wzrasta.

W przekroju 3. wytwarza się podciśnienie, którego wartość można obliczyć z równania Bernoulliego i równania ciągłości odniesionych do przekrojów przewężenia 3. i wylotowego 2.

$$p_b - p_3 = \frac{\rho v_2^2}{2} \left(\left(\frac{d}{d_3} \right)^4 - 1 \right), \quad (5.49)$$

ale prędkość wypływu z przystawki $v = \varphi \sqrt{2gH}$, a stosunek $(d_3/d)^2 = \kappa_1$ jest równy kontrakcji we wnętrzu przystawki, więc zależność (5.49) przyjmuje postać

$$p_b - p_3 = \varphi^2 \left(\frac{1}{\kappa_1^2} - 1 \right) \rho g H. \quad (5.49')$$

Podciśnienie powstające w przystawce jest wobec tego wprost proporcjonalne do wysokości rozporządzalnej w zbiorniku.

Dla pewnej wartości wysokości rozporządzalnej $H = H_{kr}$ ciśnienie w obszarze przewężenia obniży się do ciśnienia parowania i wystąpi zjawisko kawitacji (p. 5.3.4), prowadzące do zmiany charakteru wypływu. Po wystąpieniu kawitacji przystawka przestaje spełniać swoje zadanie, gdyż struga wypływa tak, jak z małego otworu.

Wartość krytyczną wysokość rozporządzalnej dla przystawki walcowej możemy wyznaczyć z zależności (5.49'), przyjmując $p_3 = p_w$ (p_w – ciśnienie parowania cieczy)

$$H_{kr} = \frac{p_b - p_w}{\rho g \varphi^2 (1/\kappa_1^2 - 1)}. \quad (5.50)$$

Wartości współczynnika wypływu μ , prędkości φ i kontrakcji κ różnych przystawek stosowanych w praktyce podano w tabeli 10.5.3.

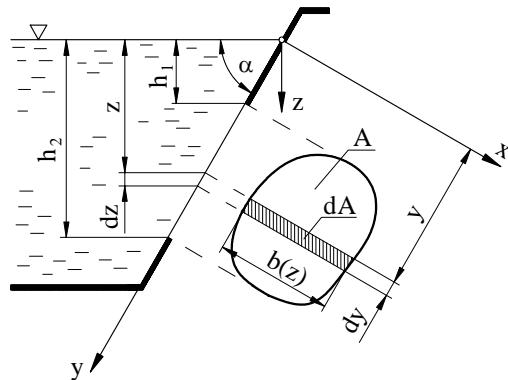
Porównując wartości współczynników wypływu przystawek o różnych kształtach, można zauważyć, że – dla tych samych wartości d i H – największy strumień wypływu zapewnia przystawka z wlotem zaokrąglonym, w której straty przepływu są najmniejsze. W przystawkach stożkowych rozbieżnych przy znacznych kątach ich roz-

warcia możliwe jest oderwanie strugi od ścian i wypływ bezpośrednio z otworu. Optymalny kąt rozwarcia przystawek wynosi $\alpha = 5\div 7^\circ$. Stożkowe przystawki rozbieżne stosuje się wtedy, gdy wymagane jest zmniejszenie prędkości wypływu cieczy (rury ssące turbin, dyfuzory pomp itp.). Przystawki stożkowe zbieżne umożliwiają uzyskiwanie spoistej struktury strugi na znacznej długości. Zwiększa się dzięki temu zasięg strugi i dlatego są stosowane jako końcówki węży strażackich (np. prądownic). Optymalny kąt zbieżności, przy którym współczynnik wypływu osiąga maksimum wynosi $\alpha = 13\div 14^\circ$.

3. Wypływ ustalony przez duży otwór

Jeżeli wymiary otworu (wymiar pionowy) są wielkościami tego samego rzędu co głębokość zanurzenia jego środka, to prędkości wypływu strug na różnych głębokościach są rozmaite.

Niech A oznacza pole otworu (o dowolnym konturze) znajdującego się w płaskiej ścianie nachylonej do poziomu pod kątem α (rys. 5.16).



Rys. 5.16. Wypływ przez duży otwór
w bocznej ścianie

Układ współrzędnych przyjmujemy jak na rysunku. Prędkość wypływu przez powierzchnię elementarną dA na głębokości z wynosi

$$v = \varphi \sqrt{2 g z} ,$$

pole powierzchni elementarnej

$$dA = b(z) dy = b(z) \frac{dz}{\sin \alpha} ,$$

a zatem elementarny strumień objętości

$$dq_V = \kappa \frac{b(z)}{\sin \alpha} \varphi \sqrt{2 g z} dz . \quad (5.51)$$

Całkowity rzeczywisty strumień objętości

$$q_V = \int_A dq_V = \frac{\mu \sqrt{2 g}}{\sin \alpha} \int_{h_1}^{h_2} b(z) \sqrt{z} dz . \quad (5.52)$$

Przeanalizujmy niektóre przypadki wypływu przez duże otwory. W otworze prostokątnym umieszczonym w ścianie pionowej:

$$\text{a)} \quad (b(z) = b = \text{const}) \wedge (\sin \alpha = 1)$$

$$\Rightarrow q_V = \mu b \sqrt{2 g} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2 g} (h_2^{3/2} - h_1^{3/2}), \quad (5.53)$$

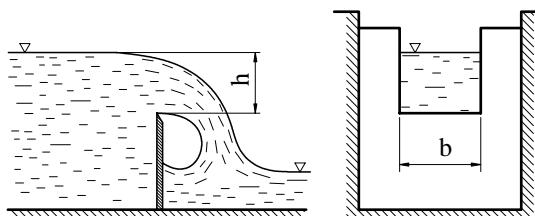
$$\text{b)} \quad (b(z) = b = \text{const}) \wedge (\sin \alpha = 1) \wedge (h_1 = 0) \wedge (h_2 = h)$$

$$\Rightarrow q_V = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2 g h}, \quad (5.54)$$

a zatem *strumień objętości wypływającej cieczy zależy od wysokości jej spiętrzenia nad dolną krawędzią otworu*. Gdy powierzchnia swobodna cieczy znajduje się poniżej górnej krawędzi otworu, otwór staje się *przelewem*. Przelewy są stosowane jako przyrządy do pomiaru strumienia objętości wody w przewodach otwartych.

Przelewy miernicze (rys. 5.17) charakteryzują się:

- ostrością krawędzi przelewowej (korony przelewu),
- odrywaniem się strugi przepływającej od przegrody (niezatopieniem przelewu),
- przepływem nad przegrodą całą jej szerokością,
- rozmaitymi kształtami wycięcia przelewu (możliwie proste geometrycznie kształty).



Rys. 5.17. Przelew mierniczy prostokątny ze zwężeniem bocznym

Dla każdego przelewu może być sporządzona krzywa określająca zależność strumienia objętości od wysokości spiętrzenia

$$q_V = f(h),$$

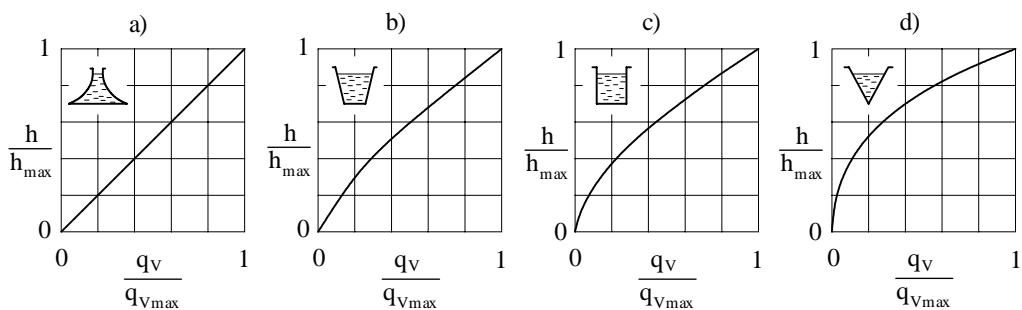
zwana *charakterystyką przepływu*, tradycyjnie rysowana w postaci

$$h = f^{-1}(q_V). \quad (5.55)$$

Na rysunku 5.18 przedstawiono bezwymiarowe charakterystyki przepływu kilku najczęściej stosowanych w przelewach mierniczych kształtów otworów, w których

współczynniki A , B i C są stałymi zależnymi od rozmiarów przelewu, ostrości krawędzi przelewowej oraz kąta, jaki tworzą boki przelewu z jego osią symetrii:

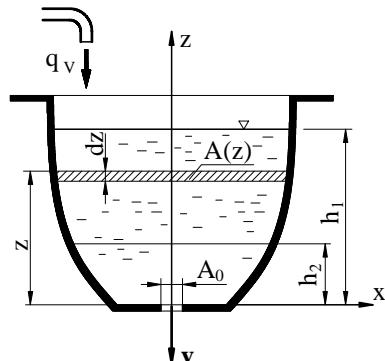
- a) przelew o liniowej charakterystyce przepływu, w którym jest zachowana proporcjonalność strumienia objętości od wysokości spiętrzenia $q_V = A h$;
- b) przelew trapezowy o charakterystyce określonej równaniem $q_V = B h^{3/2} + C h^{5/2}$;
- c) przelew prostokątny o charakterystyce $q_V = B h^{3/2}$, wynikającej z równania (5.54);
- d) przelew trójkątny o charakterystyce $q_V = C h^{5/2}$.



Rys. 5.18. Charakterystyki przepływu przelewów: a) przelew o liniowej charakterystyce przepływu, b) przelew trapezowy, c) przelew prostokątny, d) przelew trójkątny

4. Wypływ przez mały otwór dla zmiennej wysokości napełnienia (wypływ quasi-ustalony)

Rozpatrzmy wypływ cieczy przez mały otwór ze zbiornika o zmiennym polu powierzchni przekroju poziomego $A = A(z)$, podczas którego poziom zwierciadła cieczy w zbiorniku zmienia się (rys. 5.19). W tym przypadku wysokość napełnienia oraz prędkość i strumień objętości wypływającej cieczy są zależne od czasu. Do rozwiązania tego zagadnienia należałyby zastosować równanie ruchu nieustalonego, ponieważ jednak – przy małej prędkości zmiany poziomu cieczy – przyśpieszenia są pomijalnie małe, można przyjąć, że ruch jest prawie ustalony (quasi-ustalony).



Rys. 5.19. Wypływ quasi-ustalony przez mały otwór

Przyjmując układ współrzędnych i oznaczenia jak na rysunku 5.19, zakładamy, że w chwili początkowej opróżniania zwierciadło cieczy znajdowało się na wysokości h_1 nad otworem. Po upływie pewnego czasu opadło ono do wysokości z , a odpowiadającej tej wysokości strumień objętości (wypływu) wynosi

$$q_V(z) = \mu A_0 \sqrt{2gz}. \quad (5.56)$$

W czasie dt przez otwór wypływa ciecz o elementarnej objętości $dV_1 = \mu A_0 \sqrt{2gz} dt$, do zbiornika dopływa przewodem zasilającym $dV_2 = q_V dt$, poziom cieczy natomiast opada o $-dz$, a zatem ubywa ze zbiornika $dV_3 = -A(z) dz$.

Różnica między ilością wypływającą i dopływającą jest równa ubytkowi cieczy ze zbiornika. Bilans objętości przyjmuje więc postać równania

$$\mu A_0 \sqrt{2gz} dt - q_V dt = -A(z) dz, \quad (5.57)$$

a stąd

$$dt = - \frac{A(z) dz}{\mu A_0 \sqrt{2gz} - q_V}. \quad (5.58)$$

Czas wypływu (opróżniania) zbiornika

$$t = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{A(z) dz}{\mu A_0 \sqrt{2gz} - q_V} = \int_{h_2}^{h_1} \frac{A(z) dz}{\mu A_0 \sqrt{2gz} - q_V}. \quad (5.59)$$

Przeanalizujmy kilka przypadków szczególnych zmiany położenia zwierciadła cieczy w zbiorniku:

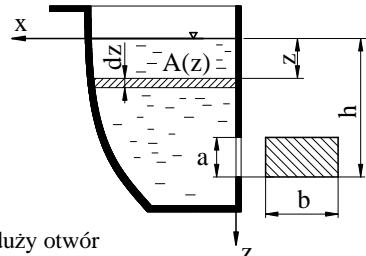
- a) $q_V > \mu A_0 \sqrt{2gh_1}$ – napełnianie zbiornika; zwierciadło cieczy w czasie t , określonym zależnością (5.59), podniesie się od poziomu h_1 do $h = q_V^2 / 2g \mu^2 A_0^2$;
- b) $q_V = \mu A_0 \sqrt{2gh_1}$ – zwierciadło cieczy nie zmienia położenia;
- c) $q_V < \mu A_0 \sqrt{2gh_1}$ – opróżnianie zbiornika; zwierciadło cieczy opada do chwili, gdy strumień dopływu i wypływu osiągną taką samą wartość, tzn. do chwili, gdy poziom cieczy $z = h_2 = q_V^2 / 2g \mu^2 A_0^2$;
- d) $q_V = 0$ – możliwe jest całkowite opróżnienie zbiornika; czas całkowitego opróżnienia zbiornika

$$t = \int_0^{h_1} \frac{A(z) dz}{\mu A_0 \sqrt{2gz}}. \quad (5.60)$$

5. Wypływ przez duży otwór przy zmiennej wysokości napełnienia (wypływ quasi-ustalony)

Rozpatrzmy wypływ quasi-ustalony cieczy przez duży otwór prostokątny o wymiarach $a \times b$, znajdujący się w pionowej ścianie zbiornika (rys. 5.20).

Na czas opadania zwierciadła od położenia początkowego $z = 0$ do dolnej krawędzi otworu $z = h$ składa się czas opadania od $z = 0$ do $z = h - a$, a zatem do górnej krawędzi otworu oraz czas opadania od $z = h - a$ do $z = h$ (opadanie zwierciadła podczas wypływu przez przelew).



Rys. 5.20. Wypływ quasi-ustalony przez duży otwór

Chwilowy strumień wypływu przy dowolnym położeniu powierzchni zwierciadła $A(z)$, obliczony ze wzoru (5.53), wynosi

$$q_V = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left((h-z)^{3/2} - (h-a-z)^{3/2} \right). \quad (5.61)$$

Założymy, że w czasie dt nastąpiło obniżenie zwierciadła cieczy $A(z)$ o dz , co odpowiada wypływowi objętości $q_V dt$, a zatem

$$q_V dt = A(z) dz,$$

po podstawieniu (5.61)

$$\frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left((h-z)^{3/2} - (h-a-z)^{3/2} \right) dt = A(z) dz,$$

stąd po całkowaniu otrzymamy czas opróżniania zbiornika do poziomu górnej krawędzi otworu

$$t_1 = \frac{1}{\frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g}} \int_0^{h-a} \frac{A(z) dz}{(h-z)^{3/2} - (h-a-z)^{3/2}}. \quad (5.62)$$

Chwilowy strumień wypływu (objętości) w przypadku przelewu prostokątnego obliczony ze wzoru (5.54)

$$q_V = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (h-z)^{3/2}, \quad (5.63)$$

a zatem

$$\frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (h-z)^{3/2} dt = A(z) dz,$$

stąd

$$t_2 = \frac{1}{\frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g}} \int_{h-a}^h \frac{A(z) dz}{(h-z)^{3/2}} \quad (5.64)$$

jest czasem potrzebnym na obniżenie się poziomu cieczy od górnej do dolnej krawędzi.

6. Wypływ gazu przez otwór zaokrąglony (dyszę zbieżną)

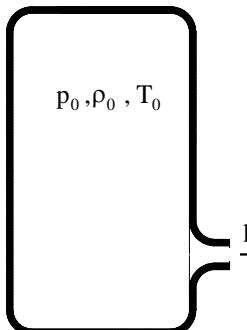
Rozważmy wypływ gazu (pliku ściśliwego) ze zbiornika, w którym panuje wysokie ciśnienie, do obszaru o niższym ciśnieniu przez otwór zaokrąglony, w przypadku którego współczynnik kontrakcji ma wartość 1 (rys. 5.21). Zakładamy, że wypływ przebiega zgodnie z przemianą adiabatyczną o równaniu

$$\frac{p_0}{\rho_0^\kappa} = \frac{p}{\rho^\kappa}, \quad (5.65)$$

wtedy równanie Bernoulliego przyjmuje postać (5.23)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = C,$$

(w której pominięto już siły masowe, przyjmując, że ciśnienie hydrostatyczne wywierane przez gaz jest porównanie małe w stosunku do ciśnienia statycznego p).



Rys. 5.21. Wypływ gazu przez otwór zaokrąglony

Otwór jest mały, można więc przyjąć, że gaz w zbiorniku jest nieruchomy, przy czym parametry stanu nieruchomego gazu (ciśnienie – p_0 , temperatura – T_0) nazywamy *parametrami spiętrzenia*. Równanie (5.23) dla przekrojów położonych wewnątrz zbiornika i tuż za wylotem przyjmuje wówczas postać

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho}, \quad (5.66)$$

stąd prędkość wypływu ze zbiornika

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right)}. \quad (5.67)$$

Z zależności (5.65)

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa},$$

a zatem

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0 \frac{p}{p_0}}{\rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa}} = \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

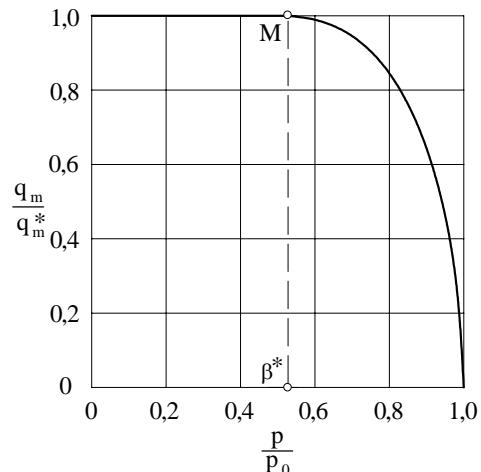
Po uwzględnieniu tego we wzorze (5.67), otrzymamy wzór Saint-Venanta i Wantzela w postaci

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}. \quad (5.68)$$

Strumień masy gazu wypływającego przez dyszę z zaokrąglonym wlotem rozprężającego się bez wymiany ciepła w dyszy (przemiana adiabatyczna) wynosi

$$q_m = \rho A v = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\kappa} A v = A \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_0 \rho_0 \left(\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)}. \quad (5.69)$$

Zmianę strumienia masy wypływającego gazu w zależności od ciśnienia p , w układzie współrzędnych bezwymiarowych p/p_0 , q_m/q_m^* , przedstawiono na wykresie (rys. 5.22). Zależność (5.69) przedstawia tzw. elipsę przepływu, przy czym q_m^* oznacza maksymalny strumień masy, odpowiadający przepływowi gazu z prędkością dźwięku a^* . Zjawisko to, zwane paradoksem Saint-Venanta–Wantzela, wynika ze zmiany charakteru przepływu z chwilą osiągnięcia w wylocie ciśnienia $p = p^*$. Gaz wypływa wówczas z prędkością dźwięku i żadne zmiany ciśnienia zewnętrzne, dochodzące się z prędkością dźwięku, a więc z prędkością zerową względem gazu w wylocie, nie mogą wpływać na przepływ. Po zmniejszeniu p poniżej p^* prędkość wypływu nie ulega zmianie i zachowuje stałe wartość krytyczną – obrazem tego na wykresie (rys. 5.22) jest prosta pozioma.



Rys. 5.22. Zależność strumienia masy od ciśnienia przy wypływie przez dyszę zbieżną

Gdy oznamy $p/p_0 = \beta$ oraz $(2\kappa/(\kappa-1)) p_0 \rho_0 = B^2$, wówczas równanie (5.69) przyjmie postać

$$\frac{q_m}{A} = \dot{q}_m = B \sqrt{\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}}, \quad (5.70)$$

gdzie:

\dot{q}_m – jednostkowy strumień masy,
 B – wartość stała dla danych warunków początkowych.

Funkcja \dot{q}_m osiąga wartość maksymalną, gdy wyrażenie

$$\xi = \beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{-\frac{\kappa+1}{\kappa}}$$

osiągnie również wartość maksymalną, co z kolei zostanie spełnione, gdy $d\xi/d\beta = 0$.

Z warunku tego wynika, że ξ osiąga maksimum, gdy

$$\beta = \beta^* = \left(\frac{p}{p_0} \right)^* = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2\kappa}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (5.71)$$

Stosunek β^* , zależny tylko od wykładnika izentropy κ , nazywamy *krytycznym stoseunkiem ciśnienia*. W przypadku powietrza o wykładniku izentropy $\kappa = 1,4$, $\beta^* = 0,528$.

Punkt M jest punktem charakterystycznym odpowiadającym krytycznemu stosunkowi ciśnienia $\beta^* = p^*/p_0$, przy którym $q_m/q_m^* = 1$. W zakresie ciśnień $\beta^* \leq p/p_0 \leq 1$ gaz rozpręża się w dyszy do ciśnienia $p = p_{zewn.}$. Odpowiada temu prędkość wypływu $a^* \geq v \geq 0$ oraz strumień masy $q_m^* \geq q_m \geq 0$. W zakresie ciśnień $0 \leq p/p_0 \leq \beta^*$ gaz rozpręża się w dyszy tylko do ciśnienia $p = p^*$, dalsze rozprężenie do ciśnienia p_{zewn} zachodzi natomiast poza dyszą, co jest połączone z dużymi stratami. Prędkość wypływu z dyszy jest stała i równa prędkości $v = a^*$, a strumień masy wynosi q_m^* .

5.3.4. ZJAWISKA TOWARZYSZĄCE PRZEPŁYWOWI PRZEZ PRZEWĘŻENIA

1. Kawitacja

Podczas przepływu cieczy przez zwężkę (rys. 5.8) ciśnienie w przekroju przewężenia może teoretycznie przyjmować dowolnie małe wartości, praktycznie jednak wartość ciśnienia jest ograniczona i nie może spaść poniżej ciśnienia parowania (wrzenia) odpowiadającego temperaturze przepływającej cieczy. Obniżeniu ciśnienia do wartości bliskich ciśnieniu parowania towarzyszy wydzielanie się gazów i par z cieczy, czyli *zjawisko kawitacji*.

Na ogół kawitacja występuje wówczas, gdy ciśnienie absolutne, w jakimś obszarze cieczy, spadnie poniżej pewnej krytycznej wartości ciśnienia p_{cav} , przy którym pojawiają się przerwania ciągłości cieczy i tworzą się obszary (tzw. kawerny) zapełnione gazami lub parami wydzielonymi z cieczy (rys. 5.23a). Często ciśnienie p_{cav} pokrywa się z ciśnieniem parowania p_w w danej temperaturze i pojawienie się kawitacji można traktować jako zjawisko wrzenia cieczy wywołane wzrostem temperatury lub zmniejszeniem ciśnienia.

Ogólnie biorąc, kawitacji sprzyjają następujące okoliczności:

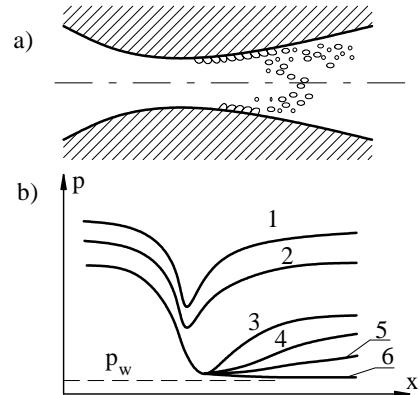
➤ zbyt niskie ciśnienie w stosunku do ciśnienia parowania cieczy w danej temperaturze,

➤ nadmierny wzrost prędkości przepływu i związany z tym spadek ciśnienia,

➤ raptowne zmiany kierunku i prędkości przepływu.

Przybliżone zależności wiążące ciśnienie i strumień przepływu w warunkach kawitacji można określić za pomocą równania Bernoulliego (5.24) i równania ciągłości przepływu (3.20).

Rys. 5.23. Zjawisko kawitacji; a) przekrój przez przewód,
b) wykres ciśnienia



Rozpatrzmy przepływ przez przewód z przewężeniem (rys. 5.24). Równanie Bernoulliego dla przekrojów 1. i 2. ma postać

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2},$$

skąd, po uwzględnieniu, że

$$v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_2 \frac{\pi d^2}{4} = q_v$$

otrzymujemy

$$p_2 = p_1 - \frac{8 \rho q_v^2}{\pi^2 d^4} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) \quad (5.72)$$

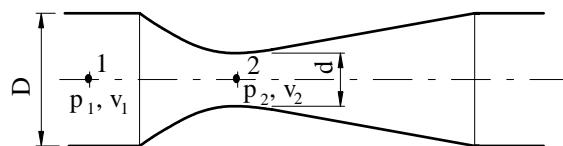
lub

$$q_v = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_1 - p_2}{1 - (d/D)^4}}. \quad (5.73)$$

Jeśli dla przepływającej cieczy znana jest wartość p_{cav} , to z równania (5.73) określmy strumień objętości

$$q_v = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_1 - p_{cav}}{1 - (d/D)^4}}, \quad (5.74)$$

przy którym w przewężeniu przewodu wystąpi kawitacja.



Rys. 5.24. Przepływ przez przewód z przewężeniem

Bezpośrednio za przewężeniem podstawowa masa cieczy płynie w postaci strugi swobodnej otoczonej mieszaniną pęcherzyków pary i cieczy. Po przejściu w obszar wyższego ciśnienia pęcherzyki pary skraplają się i w pewnej odległości za przewężeniem ciecz znów zapiełnia cały przekrój przewodu.

Długość strefy kawitacji zależy od ciśnienia w części odpływowej przewodu, czyli tzw. przeciwiśnienia. Na rysunku 5.23b przedstawiono ciśnienie na ścianach przewodu z rysunku 5.23a w przypadku, gdy strumień objętości jest stały, lecz zmienia się ciśnienie statyczne nastawiane za pomocą zaworu. Dla ciśnienia przedstawionego krzywymi 1 i 2 kawitacja nie występuje; dla tych dostatecznie dużych przeciwiśnień w najmniejszym przekroju zwężki ciśnienie osiąga minimalną wartość, po czym wzrasta do wartości bliskiej wartości początkowej. Zjawisko kawitacji pojawi się podczas przepływu o rozkładzie ciśnienia 3, lecz ma wówczas zasięg lokalny. Dalsze zmiany oporu zaworu nie powodują zmniejszania ciśnienia w gardzieli zwężki, gdzie $p = p_w$, lecz zwiększają zasięg kawerty (krzywe 4, 5, 6), a ciśnienia na wlocie i wylocie różnią się dość znacznie. Ogólna strata energii cieczy, wyrażona spadkiem ciśnienia wzduż przewężenia, a nazywana *kawitacyjną stratą ciśnienia*, jest tłumaczną niedwralnością przemian energetycznych występujących podczas parowania i skraplania cieczy oraz wydzielania się i ponownego rozpuszczania gazu w cieczy.

Znalezione doświadczalnie (rzeczywiste) wartości ciśnienia kawitacji (p_{cav}) różnią się od wartości ciśnienia p_w wziętych z tablic własności fizycznych cieczy. Mierzone ciśnienie jest większe od ciśnienia p_w z tablic, bo pomiarowi podlega (zgodnie z prawem Daltona) suma ciśnień pary nasyconej cieczy i gazów zawsze w niej rozpuszczonych. Ciśnienie p_w musi być mniejsze od ciśnienia p_{cav} , gdyż jest ciśnieniem tylko parowania cieczy w określonej temperaturze.

Kawitacja powstaje nie tylko w przepływie cieczy przez przewody, ale i podczas opływu ciał, a zwłaszcza na łopatkach śrub okrętowych, wirników turbin i pomp. W wyniku dużych prędkości obrotowych wirników i śrub, w niektórych obszarach, prędkości przepływu cieczy osiągają takie wartości, że ciśnienie spada do wartości p_{cav} i pojawia się kawitacja.

Z występowaniem kawitacji jest związany zawsze wzrost strat energii, niszczenie materiału (tzw. erozja kawitacyjna) oraz pojawienie się charakterystycznych efektów dźwiękowych (tzw. szum kawitacyjny).

Erozja kawitacyjna najintensywniej występuje w końcowej części kawerty, w obszarze podwyższonego ciśnienia, gdzie zanikowi każdego pęcherzyka pary towarzyszy wy promieniowanie impulsu kompresji (podobnie jak podczas implozji). Są to mi-

krouderzenia o dużej częstotliwości i dużej jednostkowej energii zdolne do niszczenia nawet bardzo gładkich powierzchni. Oczywiście, ze wzrostem chropowatości lub powrowatości powierzchni efekt działania erozji kawitacyjnej rośnie.

Gwałtowne zmniejszenie objętości pęcherzyków w obszarze wyższego ciśnienia jest również źródłem szumu kawitacyjnego (o zakresie częstotliwości od kilkuset herców do kilkuset kiloherców), który z kolei może być przyczyną wibracji oddzielnych elementów urządzeń, prowadzących do ich niestabilnej pracy, a nawet zniszczenia.

W technice kawitacja zmniejsza sprawność maszyn i urządzeń, w medycynie ujemnie działa na układ krążenia, w biologii powoduje rozkład czerwonych ciałek krwi i bakterii.

Nie można w zasadzie zapobiec tym niekorzystnym zjawiskom związanym z wystąpieniem kawitacji; jedyną radą jest niedopuszczenie do jej pojawienia się, tzn. utrzymanie

$$p_{\min} > p_{\text{cav}}. \quad (5.75)$$

Można tego dokonać następującymi sposobami:

- tak ukształtować przewód, aby nie występowało w nim zbyt małe ciśnienie,
- podwyższyć poziom ciśnienia statycznego,
- zmniejszyć ciśnienie wrzenia cieczy przez obniżenie jej temperatury.

Kryterium oceny możliwości lokalnego wystąpienia kawitacji jest określone stosunkiem różnicy ciśnień $p - p_w$ (p – ciśnienie w obszarze niezakłóconym przez zwężenie, p_w – ciśnienie wrzenia odpowiadające danej temperaturze cieczy) do ciśnienia dynamicznego $\rho v^2/2$. Stosunek ten

$$\sigma = \frac{p - p_w}{\rho v^2/2} \quad (5.76)$$

nosi nazwę *współczynnika (liczby) kawitacji*.

Ostatnio próbuje się również wykorzystać kawitację do celów pozytecznych, jak np. mieszanie, odgazowanie, wytwarzanie emulsji, rozdrabnianie ciał stałych, cięcie materiałów stałych strugą cieczy.

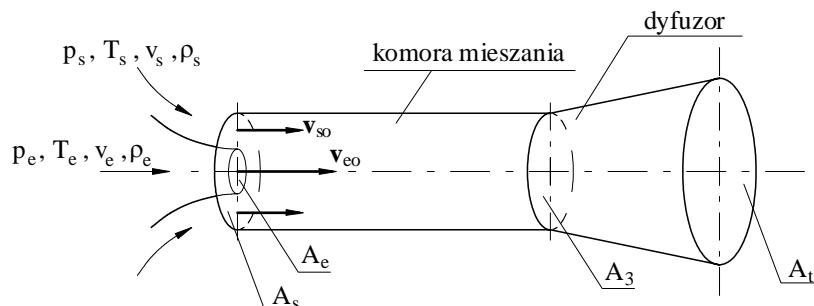
2. Ejekcja

Z analizy przepływu przez przewód z przewężeniem wynika, że na odcinku, na którym przekrój przewodu zmniejsza się, ciśnienie również maleje, osiągając najmniejszą wartość w minimalnym przekroju przewężenia. Gdy dobierze się odpowiednio prędkość przepływu oraz stosunek przekrojów zwężki, można wytworzyć w przewężeniu dowolne (ale wyższe od p_{cav}) ciśnienie określone zależnością analogiczną do (5.72)

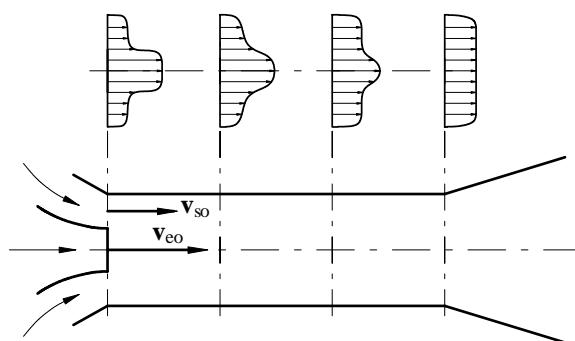
$$p_2 = p_1 - \frac{\rho v^2}{2} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right).$$

Po połączeniu obszaru obniżonego ciśnienia z obszarem o ciśnieniu wyższym zaobserwujemy zjawisko zasysania płynu. Zjawisko to, zwane *efektem ssącego działania strugi*, jest podstawą działania *strumienic* (ejektorów), służących do wytwarzania podciśnienia w kondensatorach turbin, podnoszenia i przenoszenia cieczy, odwadniania szybów górniczych itp.

Na rysunku 5.25 przedstawiono schemat strumienicy. Struga zasilająca (robocza) o parametrach oznaczonych indeksami e , wypływającą przez dyszę o polu przekroju wypływowego A_e do komory mieszania (wywołując w zwężce podciśnienie), porywa cząstki płynu dopływające do komory mieszania przez przekrój o polu A_s (parametry tej strugi są oznaczone indeksami s). W komorze mieszania następuje połączenie się obu strug, w trakcie którego zachodzi wymiana energii oraz wyrównanie prędkości, ciśnienia, gęstości, temperatury. Przebieg wyrównywania się profilu prędkości pokazano na rysunku 5.26.



Rys. 5.25. Schemat strumienicy



Rys. 5.26. Wyrównywanie się profilu prędkości w komorze mieszania strumienicy

Obliczanie strumienic jest złożone ze względu na trudny do analitycznego ujęcia proces mieszania. Wszystkie obliczenia, których celem jest na ogół określenie parametrów w przekroju wylotowym (t) strumienicy – przy znajomości parametrów po-

czątkowych obu płynów (e i s) – wykonujemy, korzystając z równania ciągłości przepływu

$$\rho_e q_{Ve} + \rho_s q_{Vs} = \rho_t q_{Vt}, \quad (5.77)$$

równania zachowania pędu

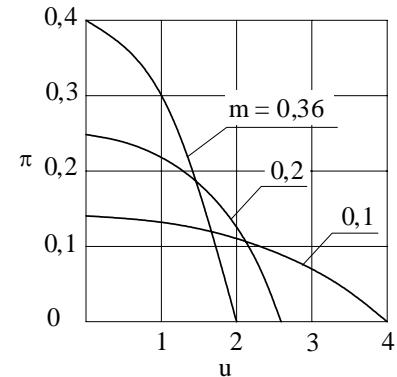
$$\rho_e q_{Ve} v_{eo} + \rho_s q_{Vs} v_{so} - \rho_t q_{Vt} v_3 = p_3 A_3 - p_o (A_e + A_s) \quad (5.78)$$

oraz równania zachowania energii

$$\rho_e q_{Ve} e_e + \rho_s q_{Vs} e_s = \rho_t q_{Vt} e_t, \quad (5.79)$$

w którym $e = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$.

Badania doświadczalne strumienic sprowadzają się najczęściej do ilościowego określenia przemian energetycznych, zachodzących w strumienicy, traktowanej jako całość i w poszczególnych jej elementach. Na podstawie pomiaru średnic, strumieni objętości i ciśnień można sporządzić charakterystyki (rys. 5.27), ujmując zależności między stopniem wykorzystania ciśnienia $\pi = (p_t - p_s)/(p_e - p_s)$, stopniem zasysania (ejekcji) $u = \rho_s q_{Vs}/\rho_e q_{Ve}$ i wyroźnikiem konstrukcyjnym (modułem) strumienicy $m = A_{eo}/A_3$.



Rys. 5.27. Charakterystyki strumienicy

5.3.5. OPŁYW WALCA O PRZEKROJU KOŁOWYM. SIŁA NOŚNA

Siły działające na ciało, poruszające się w płynie, są spowodowane przede wszystkim ciśnieniem i tarciem. W przypadku ruchu ciała w płynie doskonałym zjawisko tarcia nie występuje.

1. Opływ bezcyrkulacyjny

Opływ walca kołowego jest przykładem płaskiego opływu ciała osiowo-symetrycznego, o osi normalnej do kierunku strugi. Rozpatrzmy zatem opływ takiego nieskończenie długiego walca ($R/l \ll 1$) o promieniu R , płaskorównoległą strugą płynu nielepkiego poruszającą się z prędkością v_∞ . Przepływ taki otrzymuje się przez superpozycję przepływu równoległego o stałej prędkości $v_\infty = \text{const}$ i dipola znajdującego się w początku układu (p. 2.6.4, przy czym $C \equiv m$ – cecha źródła podwójnego o strumieniu objętości q_V).

Potencjał prędkości i funkcja prądu tego ruchu będą równe

$$\Phi = v_\infty x + m \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (5.80)$$

$$\Psi = v_\infty y - m \frac{y}{x^2+y^2} . \quad (5.81)$$

Równanie linii prądu $\Psi(x, y) = C$ ma postać

$$v_\infty y - m \frac{y}{x^2+y^2} = C \quad (5.82)$$

lub

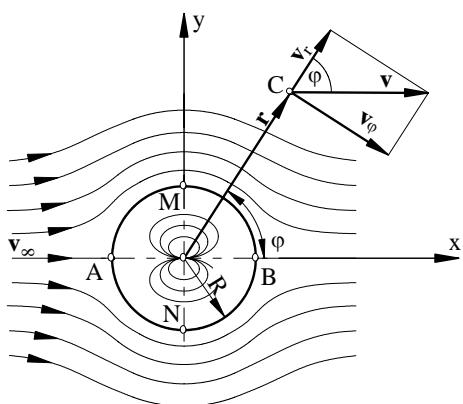
$$v_\infty y \left(1 - \frac{m}{v_\infty} \frac{1}{x^2+y^2} \right) = C . \quad (5.82')$$

Równanie to jest spełnione dla

a) $y = 0$,

$$\text{b)} \quad 1 - \frac{m}{v_\infty} \frac{1}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{lub} \quad x^2+y^2 = \frac{m}{v_\infty} .$$

Wówczas warunek (a) wyznacza oś x , a (b) – okrąg ze środkiem w początku układu o promieniu $R = \sqrt{m/v_\infty}$ (rys. 5.28).



W rozważanym ruchu płynu istnieje więc struga przepływająca wzdłuż osi x , natomiast w punkcie A struga rozdziela się na dwa odgałęzienia opływające okrąg o promieniu R . Wszystkie linie prądu znajdujące się w pobliżu dipola są zawarte we wnętrzu okręgu $AMB\bar{N}$. Obraz ruchu na zewnątrz okręgu traktowany jest jako opływ dookoła walca o promieniu R .

Rys. 5.28. Linie prądu w ruchu złożonym z przepływu równoległego i dipola

Znając promień $R = \sqrt{m/v_\infty}$, możemy wyznaczyć $m = v_\infty R^2$. Po uwzględnieniu tego związku określmy we współrzędnych biegunkowych potencjał prędkości i funkcję prądu

$$\Phi = v_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2} \right) = v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \varphi , \quad (5.83)$$

$$\Psi = v_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2} \right) = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) r \sin \varphi . \quad (5.84)$$

Współrzędne prędkości w kierunku promienia wodzącego r i w kierunku do niego prostopadłym są równe

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \varphi \right) = v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \varphi, \quad (5.85)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(v_\infty r \cos \varphi + \frac{R^2 v_\infty}{r} \cos \varphi \right) = -v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \varphi. \quad (5.86)$$

Na powierzchni walca ($r = R$), zgodnie z (5.85) i (5.86),

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = -2 v_\infty \sin \varphi.$$

Z zależności tych wynika, że prędkość płynu nielepkiego na powierzchni walca jest zawsze skierowana stycznie

$$v = v_\varphi = -2 v_\infty \sin \varphi. \quad (5.87)$$

Punkty, w których prędkość przyjmuje wartości zerowe, tzn. punkty spiętrzenia, odpowiadają kątom $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$ (punkty A i B) na rysunku 5.28.

Maksymalną wartość $v = 2v_\infty$ osiąga prędkość w punktach o współrzędnej kątowej $\varphi = \pi/2$ i $\varphi = 3\pi/2$, tzn. w przekroju prostopadłym do osi strugi.

Znając pole prędkości, obliczymy rozkład ciśnienia na powierzchni walca o promieniu R , wokół którego istnieje bezcyrkulacyjny przepływ płynu nieściśliwego. Z równania Bernoulliego (5.24) – napisanego dla dwóch przekrojów strugi płynu: w strudze niezakłóconej i na powierzchni walca – obliczymy ciśnienie na powierzchni walca

$$p = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}, \quad (5.88)$$

skąd, po uwzględnieniu zależności (5.87),

$$p - p_\infty = \rho \frac{v_\infty^2}{2} \left(1 - 4 \sin^2 \varphi \right). \quad (5.89)$$

Stosunek różnicy ciśnień do ciśnienia dynamicznego strugi niezakłóconej

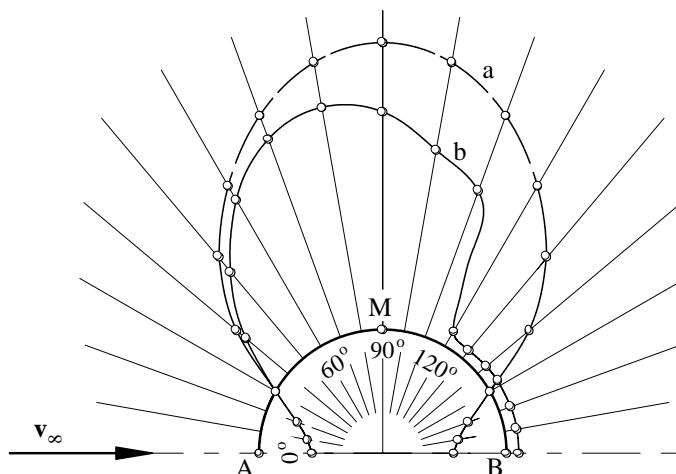
$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho v_\infty^2 / 2} = 1 - 4 \sin^2 \varphi, \quad (5.90)$$

nazywany *współczynnikiem ciśnienia*, jest wyłącznie funkcją kąta φ , nie zależy natomiast od gęstości, ciśnienia i prędkości strugi niezakłóconej oraz od promienia walca.

Określmy teraz rozkład ciśnienia na powierzchni walca. Dla $\varphi = \pi$ i $\varphi = 0$ cała energia strugi zamienia się w energię potencjalną ciśnienia statycznego, ciśnienie jest wówczas maksymalne, a współczynnik ciśnienia równy 1. Przy zmniejszaniu się kąta φ od π do $\pi/2$ zmniejsza się również ciśnienie, które przy $\varphi = (5/6)\pi$ osiąga wartość ciśnienia barometrycznego, a wyróżnik ciśnienia wartość 0. Dla wszystkich wartości φ pomiędzy $(5/6)\pi$ i $\pi/2$ występuje podciśnienie. Dla $\varphi = \pi/2$ maksymalna wartość podciśnienia wynosi $-3(\rho v_\infty^2/2)$, a odpowiadający mu współczynnik ciśnienia -3. Bez względna wartość podciśnienia jest zatem 3-krotnie większa niż nadciśnienia w punkcie A. Ponieważ $p - p_\infty$ jest zależne tylko od $\sin^2 \varphi$ i występuje symetria względem osi poziomej i pionowej, rozkład ciśnienia w pozostałych ćwiartkach przekroju poprzecznego walca jest taki sam jak dla omówionej części.

Omawiany bezcirkulacyjny opływ płynem doskonałym jest symetryczny względem obu osi. Taka symetria rozkładu prędkości i ciśnienia wskazuje na brak oddziaływanego płynu na ciało opływanego, a zatem wypadkowa siła działająca na walec pochodząca od ciśnień jest równa zeru, czyli opór działający na ciało jest równy zeru (*paradoks d'Alemberta*). W rzeczywistości nie istnieje symetria opływu względem osi pionowej, gdyż za ciałem przebieg linii prądu zostaje zmieniony wskutek istnienia lepkości.

Na rysunku 5.29 przedstawiono rozkład ciśnienia obliczony z wzoru (5.89) oraz rozkład uzyskany z doświadczeń przy opływie płynem rzeczywistym (lepkim). Jak widać, wyniki doświadczeń zgadzają się dość dobrze w przedniej części walca, natomiast w tylnej jego części rzeczywiste wartości ciśnień są mniejsze od obliczonych. Ta różnica jest spowodowana głównie oderwaniem strug od powierzchni walca i powstawaniem wirów.



Rys. 5.29. Teoretyczny (a) i rzeczywisty (b) rozkład ciśnień na walcu o przekroju kołowym

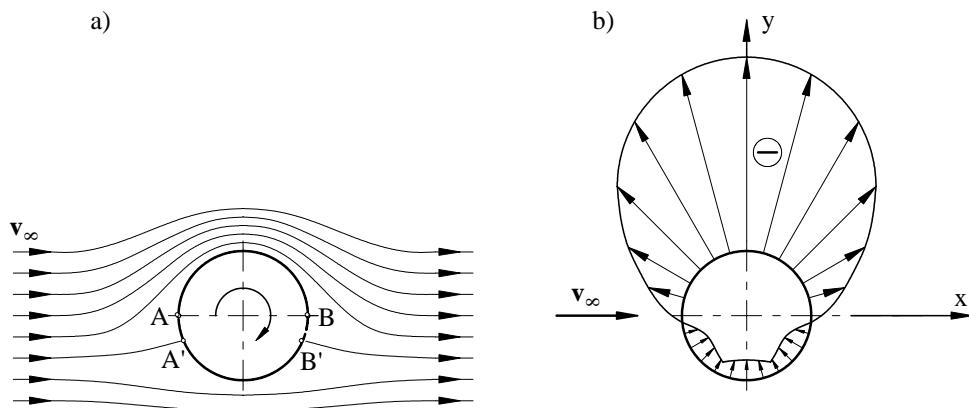
2. Opływ cyrkulacyjny

Rozpatrzmy opływ walca kołowego płynem nielepkim będący przepływem wy-
padkowym powstającym z nałożenia dotychczas rozpatrywanego opływu bezcyrkulacyj-
nego i wiru płaskiego, którego oś znajduje się w osi walca. Taki przepływ będziemy
nazywali opływem walca z cyrkulacją (rys. 5.30).

Potencjał prędkości dla takiego opływu (przy założeniu ruchu w polu wiru w kie-
runku zgodnym z ruchem wskazówek zegara) będzie równy (p. 2.6.4)

$$\Phi = v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) r \cos \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi, \quad (5.91)$$

gdzie Γ – cyrkulacja prędkości (p. 2.4).



Rys. 5.30. Opływ walca z cyrkulacją; a) pole prędkości i punkt spiętrzenia,
b) rozkład nad- i podciśnień na powierzchni walca

Współrzędne prędkości w kierunku promienia wodzącego r i w kierunku do niego
prostopadłym są równe

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \varphi, \quad (5.92)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = - v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (5.93)$$

Na powierzchni walca, gdy $r = R$, otrzymamy

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = -2 v_\infty \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi R}. \quad (5.94)$$

Jak widać, prędkość jest sumą prędkości przepływu bezcyrkulacyjnego oraz prędkości wywołanej wirkiem. Naruszona została więc symetria strugi względem osi poziomej, bowiem – po dodaniu prędkości przepływu cyrkulacyjnego – nad walcem powstanie obszar prędkości zwiększych, natomiast pod walcem obszar prędkości zmniejszonych (prędkości te się odejmują). Punkty krytyczne A' i B' będą leżały na powierzchni walca poniżej osi poziomej w ćwiartce trzeciej i czwartej (przy $\Gamma > 0$). Położenie punktów krytycznych można określić, przyrównując prędkość na konturze do zera.

Wskutek symetrii rozkładu prędkości i ciśnienia względem osi pionowej składowa siły pochodzącej od ciśnień w kierunku poziomym jest równa零. Natomiast względem osi poziomej nie ma symetrii rozkładów prędkości i ciśnienia, a zatem istnieje składowa siły w kierunku pionowym (prostopadły do wektora prędkości), którą nazywamy *siłą nośną*.

W przypadku cyrkulacyjnego opływu dowolnego kształtu siłę \mathbf{P} , z jaką płyn działa na ciało, można rozłożyć na siłę oporu czołowego P_x , skierowaną wzdłuż wektora prędkości \mathbf{v}_∞ oraz siłę nośną P_v , skierowaną prostopadle do wektora \mathbf{v}_∞ .

Siła oporu czołowego jest definiowana jako

$$P_x = c_x \frac{\rho v_\infty^2}{2} A, \quad (5.95)$$

gdzie:

c_x – bezwymiarowy współczynnik oporu profilowego (czołowego),

A – pole powierzchni rzutu ciała na płaszczyznę prostopadłą do wektora \mathbf{v}_∞ .

W celu obliczenia siły nośnej P_y , działającej na opływany walec kołowy o osi prostopadłej do kierunku prędkości \mathbf{v}_∞ , zakładamy, że płyn jest nielepki i nieściśliwy (doskonały), a opływ profilu następuje bez oderwania strugi. Siła $d\mathbf{P}$, działająca na element powierzchni (rys. 5.31), pochodząca od rozkładu ciśnienia ma wartość

$$dP = (p - p_\infty) z dl, \quad (5.96)$$

gdzie z – długość walca.

Współrzędna pionowa siły $d\mathbf{P}$ wynosi

$$dP_y = dP \cos (\mathbf{P}, \mathbf{y}) = (p - p_\infty) z dl \cos \varphi. \quad (5.97)$$

Siła nośna działająca na całą powierzchnię walca

$$P_y = \iint_K (p - p_\infty) z dl \cos \varphi, \quad (5.98)$$

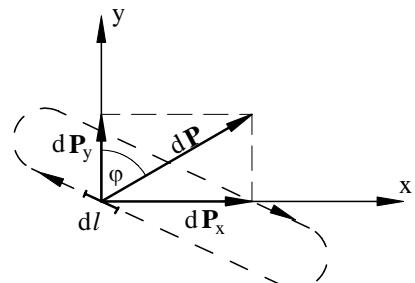
gdzie K oznacza kontur poprowadzony wokół przekroju poprzecznego walca.

Po podstawieniu do wzoru (5.98) wartości $p - p_\infty$ z zależności (5.88) otrzymamy

$$P_y = z \left(p_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \right) \iint_K \cos \varphi dl - \frac{\rho z}{2} \iint_K v^2 \cos \varphi dl. \quad (5.99)$$

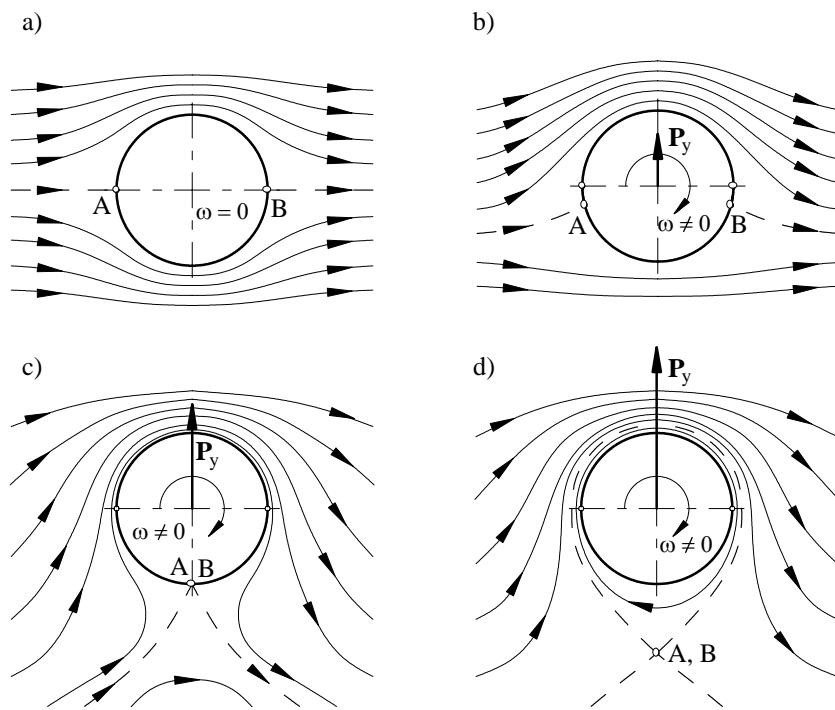
Przy obliczaniu całki zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara $dl \cos \varphi = -dx$. Pierwszy zatem składnik, zawierający x , czyli całkę po konturze zamkniętym z różniczki zupełnej funkcji ciągłej, jest równy零, stąd

$$P_y = -\rho \frac{z}{2} \int_K v^2 \cos \varphi dl. \quad (5.100)$$



Rys. 5.31. Siła elementarna działająca na profil

Powstanie siły nośnej jest uwarunkowane asymetrią opływu. Dla ciał przedstawionych na rysunkach 5.30 i 5.31 ciśnienie w górnej części jest niższe niż w dolnej. Podobna sytuacja występuje wtedy, gdy na okrągły walec napływa struga płynu lepkiego (rys. 5.32), a walec został wprawiony w ruch obrotowy i przez ruch z coraz większą prędkością obrotu oddziałuje na płyn (rys. 5.32b, c, d).



Rys. 5.32. Opływ obracającego się walca kolowego: a) walec nieruchomy, b, c, d) walec obracający się z różnymi prędkościami obrotowymi

Opływ obracającego się walca jest asymetryczny i pojawia się cyrkulacja¹⁾ niezerowa. Na walec działa siła nośna P_y , skierowana od dołu ku górze (przy obrocie walca i kierunku napływu jak na rysunku 5.32). Wartość siły nośnej może być obliczona na podstawie twierdzenia Źukowskiego, według którego *siła ta jest proporcjonalna do gęstości płynu, prędkości przepływu niezakłóconego oraz do cyrkulacji wokół tego profilu*. Ostatycznie

$$P_y = \rho v_\infty \Gamma. \quad (5.101)$$

Wartość cyrkulacji Γ zależy od kształtu i wymiarów profilu, a także od kąta jego ustawienia względem przepływu (jest to tzw. kąt natarcia). Twierdzenie Źukowskiego ma podstawowe znaczenie w lotnictwie (aerodynamice płata nośnego). Znajduje ono również zastosowanie w teorii przepływu przez palisadę łopatek w turbinie lub sprężarce osiowej. Umożliwia ono również wyznaczenie cyrkulacji, która odpowiada danej sile nośnej, a więc umożliwia określenie strumienia (natężenia) wirowości.

Wartość siły nośnej otrzymana za pomocą pomiarów okazuje się mniejsza od wartości teoretycznej. Różnica wynika stąd, że ruch cyrkulacyjny w płynie rzeczywistym, spowodowany obrotem walca, nie jest identyczny z cyrkulacyjnym opływem walca płynem doskonałym, a zatem występują różnice w wartościach siły nośnej. Poza tym inne rozkłady ciśnienia na powierzchni walca opływanego płynem rzeczywistym, w porównaniu z teoretycznym opływem bezcyrkulacyjnym (rys. 5.29), są źródłem pojawienia się również składowej poziomej siły P , zwanej siłą oporu czołowego (P_x), która przy założeniu nielepkości płynu i symetrii rozkładu ciśnień po stronie napływowej i odpływowej walca jest równa zeru (paradoks d'Alemberta).

Efekt działania siły nośnej obserwowano już w osiemnastym wieku. Kule wystrzeliane z gładkolufowych moździerzy obracały się wokół swojej osi poziomej i zbaczały z toru. Zjawisko to, wyjaśnione w 1852 roku przez Magnusa, nosi nazwę efektu Magnusa. Na podstawie tego efektu próbowano wykorzystać siłę wiatru bocznego do napędu statku, na którym – zamiast żagli – ustawiono szybko wirujące pionowe walce (rotory Flettnera); ten rodzaj napędu okazał się jednak mniej efektywny od napędu śrubą podwodną.

5.4. ZASTOSOWANIE ZASADY ZACHOWANIA PĘDU I MOMENTU PĘDU

Zajmiemy się obecnie niektórymi zagadnieniami związanymi ze zmianą pędu i momentu pędu płynącej strugi. W szczególności omówimy reakcję płynu przepływającego przez przewód, reakcję płynu wypływającego ze zbiornika, reakcję strugi swo-

¹⁾ Calka okrężna $\int_K (...) ds$ jest równa cyrkulacji prędkości (2.31).

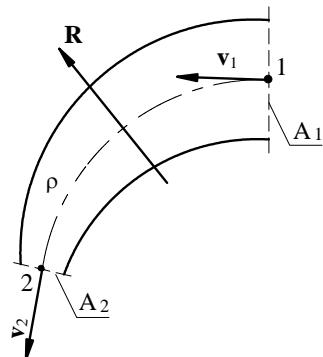
bodnej uderzającej o przegrodę stałą i ruchomą oraz przepływ strugi przez łopatki obracającego się wirnika. Reakcje, o których będzie mowa, są tylko siłami dynamicznymi wywołanymi zmianą pędu strugi płynu.

5.4.1. REAKCJA HYDRODYNAMICZNA W PRZEWODACH

Weźmiemy pod uwagę dowolny odcinek nieruchomego zakrzywionego przewodu i określmy reakcję dynamiczną, jaką przepływający płyn wywiera na ściany przewodu. Oznaczymy przez A_1 i A_2 pola powierzchni poprzecznych przekrojów na dopływie i wypływie płynu, przez v_1 i v_2 średnie prędkości przepływu w tych przekrojach, przez q_V strumień objętości, a przez ρ gęstość płynu (rys. 5.33).

Pęd masy elementarnej w przekroju dopływowym wynosi $\rho q_V v_1 dt$, a w przekroju wypływowym $\rho q_V v_2 dt$.

Rys. 5.33. Schemat do obliczania reakcji hydrodynamicznej w przewodzie



Z zasady zachowania pędu wynika, że zmiana wektora pędu w czasie jest równa sile działającej (w naszym przypadku reakcji hydrodynamicznej), czyli

$$\mathbf{R} = \rho q_V (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2). \quad (5.102)$$

Jest to siła, z jaką struga płynu działa na ściany przewodu. Po zmianie w nawiasie kolejności prędkości otrzymamy reakcję, z jaką ściany przewodu oddziałują na płyn.

Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że reakcja hydrodynamiczna zależy tylko od zmiany wektora prędkości na dopływie i odpływie z rozważanego odcinka przewodu.

Wartość i punkt przyłożenia reakcji możemy określić wykreślnie lub analitycznie. Wykreślnie możemy znaleźć tę reakcję za pomocą wieloboku sił, jej punkt położenia (jako wektora związanego) określa punkt przecięcia się linii działania prędkości na dopływie i wypływie z przewodu (rys. 5.34).

Analitycznie możemy określić tę reakcję za pomocą zasady redukcji sił. Najpierw należy znaleźć składowe wektora głównego i moment główny układu sił ($\rho q_V v_1$; $-\rho q_V v_2$; \mathbf{R})

$$R \cos \alpha = \rho q_V v_1 \cos \alpha_1 - \rho q_V v_2 \cos \alpha_2,$$

$$R \sin \alpha = \rho q_V v_1 \sin \alpha_1 + \rho q_V v_2 \sin \alpha_2.$$

Moment M , będący sumą momentów sił składowych względem dowolnego punktu 0, ma wartość

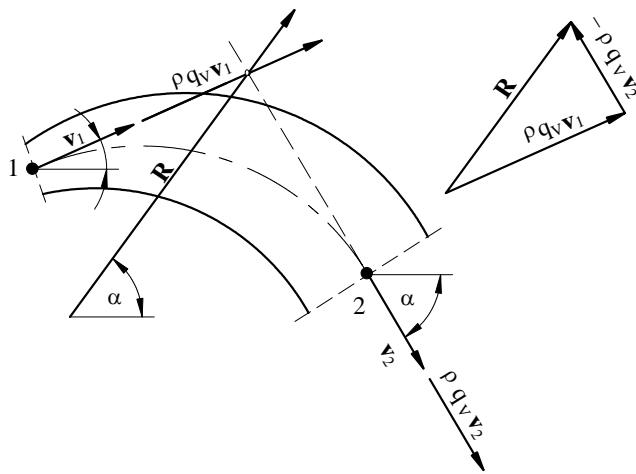
$$M = \rho q_V v_2 a - R x = 0,$$

gdzie:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ – kąty nachylenia poszczególnych sił do poziomu,
 a i x – odległości sił od obranego bieguna.

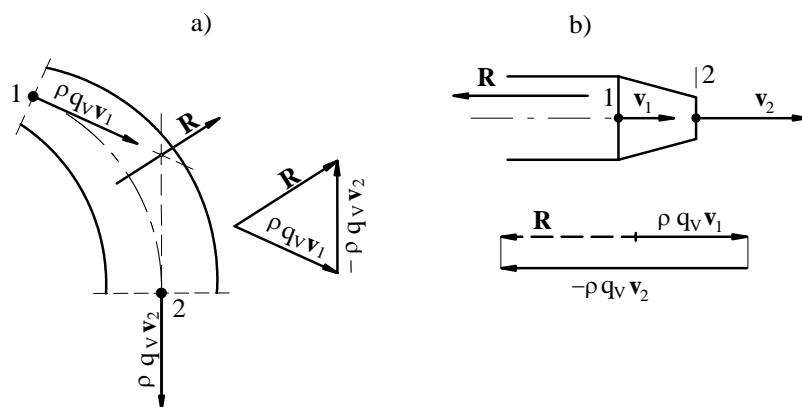
Z tych trzech równań można określić wartość i położenie reakcji hydrodynamicznej.

W omawianym zagadnieniu występowała zmiana wartości i kierunku pędu strugi.



Rys. 5.34. Wykresne wyznaczenie reakcji hydrodynamicznej w przewodzie o zmiennie wielkości i kierunku pędu strugi

Na rysunku 5.35 przedstawiono takie przypadki, kiedy zmienia się tylko kierunek pędu (rys. 5.35a) lub tylko jego wartość (rys. 5.35b) i dla nich wykresnie wyznaczono reakcje hydrodynamiczne.



Rys. 5.35. Wykresne wyznaczenie reakcji hydrodynamicznej w przewodzie o zmiennym kierunku (a) oraz zmiennej wielkości (b) pędu strugi

5.4.2. REAKCJA PŁYNU WYPŁYWAJĄCEGO

Weźmy pod uwagę zbiornik o polu przekroju poziomego A wypełniony cieczą. Na głębokości h pod zwierciadłem cieczy znajduje się otwór o polu przekroju a (rys. 5.36).

Przyrost pędu strugi wypływającej będzie równy

$$\rho q_V \mathbf{v}_0 dt - \rho q_V \mathbf{v} dt, \quad (5.103)$$

ale zmiana pędu w czasie jest równa sile działającej. Oznaczmy ją przez \mathbf{R} , wówczas

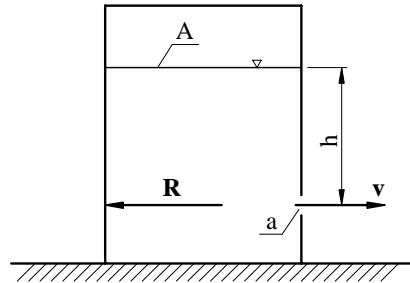
$$\mathbf{R} = \rho q_V (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}). \quad (5.104)$$

Początkowa prędkość $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}^1$, a zatem

$$\mathbf{R} = -\rho q_V \mathbf{v}. \quad (5.105)$$

Siłę tę nazywamy *reakcją hydrodynamiczną* strugi wypływającej. Znak „minus” wskazuje, że zwrot tej siły jest przeciwny do prędkości wypływu. Jest to więc siła, z jaką masa cieczy wypływająca ze zbiornika działa na ścianę zbiornika przeciwległą do otworu.

Rys. 5.36. Schemat do wyznaczenia reakcji płynu wypływającego



5.4.3. REAKCJA STRUGI SWOBODNEJ NA PRZEGRODĘ NIERUCHOMĄ

Omówimy teraz uderzenie strugi o stałą przegrodę. Pęd masy elementarnej strugi swobodnej jest równy $\rho q_V \mathbf{v} dt$. Po uderzeniu struga rozdziela się, a jej części mają pędy równe odpowiednio $\rho q_V \mathbf{v}_1 dt$ i $\rho q_V \mathbf{v}_2 dt$ (rys. 5.37).

Bilans strumieni objętości

$$q_V = q_{V1} + q_{V2}, \quad (5.106)$$

pola przekrojów tych strug niech spełniają warunek

$$A = A_1 + A_2, \quad (5.107)$$

wtedy dochodzimy do wniosku, że prędkości wszystkich strug są jednakowe, czyli

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2. \quad (5.108)$$

Według zasady zachowania pędu, zmiana pędu w czasie równa się szukanej reakcji strugi na nieruchomą przegrodę.

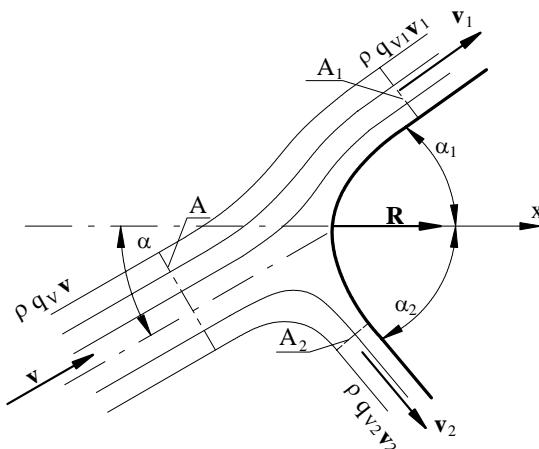
¹⁾ \mathbf{v}_0 to prędkość opadania zwierciadła, więc $a/A \ll 1 \Rightarrow v_0/v \rightarrow 0$.

Matematycznym wyrazem tej zasady w odniesieniu do osi x (normalnej do przegrody w środku uderzenia) jest równanie

$$\frac{\rho q_v v dt \cos \alpha - \rho q_{v1} v dt \cos \alpha_1 - \rho q_{v2} v dt \cos \alpha_2}{dt} = R, \quad (5.109)$$

stąd reakcja hydrodynamiczna ma wartość

$$R = \rho q_v v \cos \alpha - \rho q_{v1} v \cos \alpha_1 - \rho q_{v2} v \cos \alpha_2. \quad (5.110)$$



Rys. 5.37. Schemat do wyznaczenia reakcji strugi swobodnej na przegrodę nieruchomą

Rozpatrzmy kilka przypadków szczególnych. Za każdym razem będziemy przyjmować, że nieruchomo przegroda (ściana) jest gładka, a w związku z tym reakcja będzie miała zawsze kierunek prostopadły do przegrody.

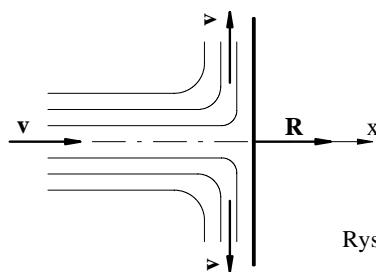
1. Duża płaska przegroda ustawiona prostopadle do strugi

W tym przypadku we wzorze (5.110) należy podstawić (rys. 5.38)

$$\alpha = 0 \quad \text{oraz} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ.$$

W wyniku otrzymujemy

$$R = \rho q_v v. \quad (5.111)$$



Rys. 5.38. Reakcja na dużą nieruchomo przegrodę prostopadłą do osi strugi

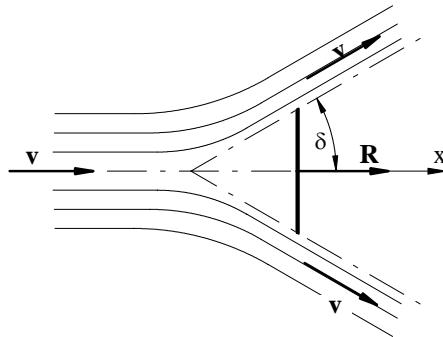
2. Mała płaska przegroda ustawiona prostopadłe do strugi (rys. 5.39)

We wzorze (5.110) podstawimy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \delta \quad \text{oraz} \quad \alpha = 0.$$

Reakcja strugi będzie równa

$$R = \rho q_V v (1 - \cos \delta). \quad (5.112)$$



Rys. 5.39. Reakcja na małą nieruchomą przegrodę prostopadłą do osi strugi

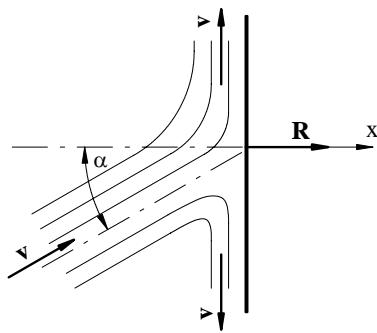
3. Przegroda płaska, nachyloną pod pewnym kątem do osi strugi (rys. 5.40)

Do wzoru (5.110) podstawiamy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$$

i otrzymujemy

$$R = \rho q_V v \cos \alpha. \quad (5.113)$$



Rys. 5.40. Reakcja na płaską przegrodę, nachyloną pod pewnym kątem do osi strugi

4. Przegroda walcowa zwrócona wypukłością w stronę strugi (rys. 5.41)

W tym przypadku

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \delta \quad \text{oraz} \quad \alpha = 0^\circ,$$

zaś

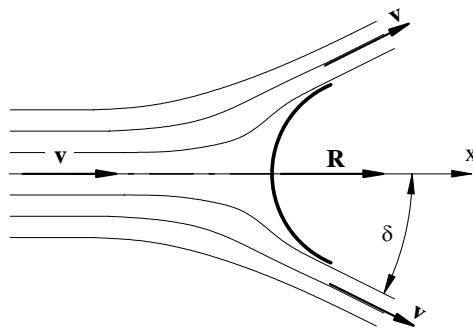
$$q_{V1} = q_{V2} = q_V/2,$$

wtedy reakcja strugi będzie równa

$$R = \rho q_V v (1 - \cos \delta). \quad (5.114)$$

W przypadku gdy $\delta = 0^\circ$ (czasza półkolista), otrzymamy

$$R = 0. \quad (5.115)$$



Rys. 5.41. Reakcja na przegrodę walcową zwróconą wypukłością w stronę strugi

5. Przegroda walcowa zwrócona wklęsłością w stronę strugi (rys. 5.42)

Do wzoru (5.110) podstawimy

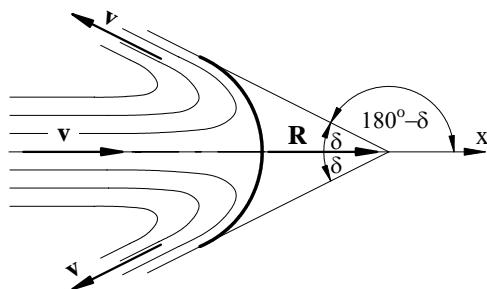
$$\alpha_1 = \alpha_2 = (180^\circ - \delta) \quad \text{oraz} \quad \alpha = 0^\circ,$$

natomiast

$$q_{V1} = q_{V2} = q_V/2,$$

będzie więc

$$R = \rho q_V v (1 + \cos \delta). \quad (5.116)$$



Rys. 5.42. Reakcja na przegrodę walcową zwróconą wklęsłością w stronę strugi

W przypadku czaszy półkolistej $\alpha_1 = \alpha_2 = 180^\circ$, czyli $\delta = 0^\circ$, otrzymamy

$$R = 2 \rho q_v v. \quad (5.117)$$

6. Reakcja strugi na nieruchomą łopatkę (rys. 5.43)

Po podstawieniu

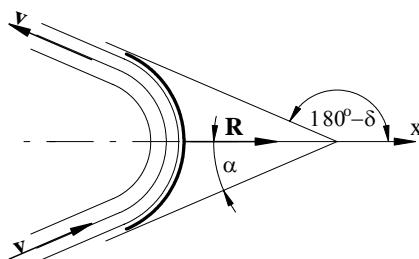
$$\alpha_1 = \alpha_2 = (180^\circ - \alpha)$$

oraz

$$q_{v1} = q_{v2} = q_v,$$

otrzymamy

$$R = 2 \rho q_v v \cos \alpha. \quad (5.118)$$



Rys. 5.43. Reakcja strugi na nieruchomą łopatkę

5.4.4. REAKCJA STRUGI SWOBODNEJ NA PRZEGRODĘ RUCHOMĄ

Rozważmy dwa przypadki.

1. Przegroda porusza się ruchem postępowym wzduż strugi ze stałą prędkością v_w

W tym przypadku prędkość strugi względem przegrody jest równa ($v \pm v_w$). Znak „-”, gdy zwroty wektorów v i v_w są jednakowe, a znak „+”, gdy ich zwroty są przeciwe.

Strumień objętości strugi przepływającej względem ruchomej przegrody jest równy

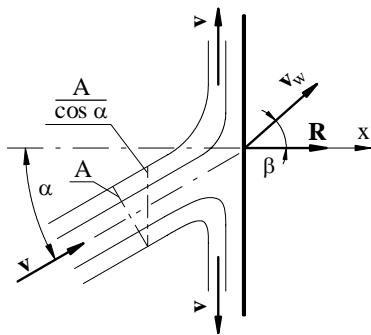
$$q_v = A (v \pm v_w), \quad (5.119)$$

gdzie A – pole przekroju strugi przed uderzeniem o przegrodę.

Gdy przegroda porusza się wzduż strugi, do wzorów podanych w poprzednim punkcie należy więc, zamiast iloczynu $q_v v$, podstawić $A (v - v_w)^2$.

2. Przegroda porusza się w dowolnym kierunku

Na rysunku 5.44 przedstawiono przegrodę poruszającą się z prędkością v_w w kierunku nachylonym pod kątem β do osi x .



Z zasad zachowania pędu można określić reakcję strugi na ściankę (wzór (5.110))

$$R = \rho q_V (v \cos \alpha - v_w \cos \beta). \quad (5.120)$$

Strumień objętości względem ruchomej przegrody

$$q_V = \frac{A}{\cos \alpha} (v \cos \alpha - v_w \cos \beta). \quad (5.121)$$

Rys. 5.44. Reakcja strugi na przegrodę poruszającą się w dowolnym kierunku

Po podstawieniu do zależności (5.121) otrzymamy

$$R = \rho \frac{A}{\cos \alpha} (v \cos \alpha - v_w \cos \beta)^2. \quad (5.122)$$

Jeżeli przyjmiemy, że $v_w = 0$, to otrzymamy poprzednio wyprowadzony wzór (5.113). Jeżeli kąt $\beta = \alpha$ (przegroda porusza się wzdłuż strugi), reakcja jest równa

$$R = \rho A (v - v_w)^2 \cos \alpha. \quad (5.123)$$

5.4.5. ZMIANA MOMENTU PĘDU STRUGI

Omówimy przepływ strugi przez łopatki wirnika maszyny przepływowej.

Plyn jest doprowadzony równolegle do osi wirnika i tuż przed nim zmienia kierunek przepływu o $\pi/2$, wpadając w kanały utworzone przez łopatki, które przekazują płynowi energię ruchu obrotowego wirnika.

Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, *pochodna momentu pędu po czasie przepływającej strugi jest równa momentowi obrotowemu wału wirnika*.

Na rysunku 5.45 przedstawiono schematycznie przepływ płynu przez kanał utworzony przez sąsiednie łopatki wirnika.

Oznaczmy przez: \mathbf{v}_{u1} i \mathbf{v}_{u2} – prędkości unoszenia na początku i końcu łopatki, gdzie

$$\mathbf{v}_{u1} = r_1 \boldsymbol{\omega} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{v}_{u2} = r_2 \boldsymbol{\omega}, \quad (5.124)$$

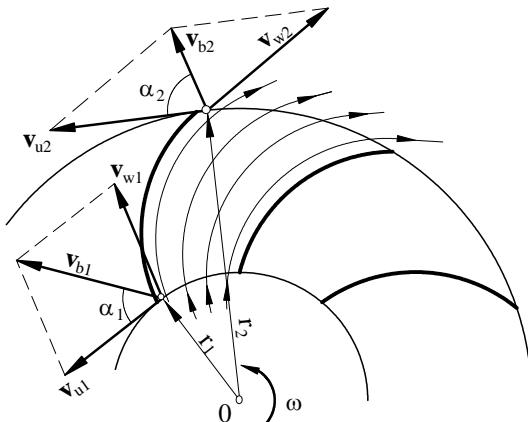
$\boldsymbol{\omega}$ – prędkość kątowa wirnika,

przy czym

$$\mathbf{v}_{b1} = \mathbf{v}_{u1} + \mathbf{v}_{w1} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{v}_{b2} = \mathbf{v}_{u2} + \mathbf{v}_{w2}, \quad (5.125)$$

\mathbf{v}_{b1} i \mathbf{v}_{b2} – prędkości bezwzględne przy wejściu i rejściu z łopatki.

Kąty nachylenia prędkości bezwzględnych do prędkości unoszenia oznaczymy przez α_1 i α_2 (rys. 5.45).



Rys. 5.45. Przepływ przez wirnik maszyny przepływowej

Współrzędna wektora momentu pędu (zrzucona na kierunek normalny do promienia r_1) płynu wpływającego, względem osi wirnika, wynosi

$$K_1 = r_1 \rho q_V v_{b1} \cos \alpha_1 dt, \quad (5.126)$$

a płynu wypływającego z kanału łopatki odpowiednio

$$K_2 = r_2 \rho q_V v_{b2} \cos \alpha_2 dt. \quad (5.127)$$

Składowe prędkości bezwzględnych w kierunku promieniowym nie wpływają na wartość momentu pędu, gdyż ich moment jest równy零 (linie działania przechodzą przez 0).

Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu

$$M = \frac{K_2 - K_1}{dt}, \quad (5.128)$$

stąd moment obrotowy wału wirnika

$$M = \rho q_V (r_2 v_{b2} \cos \alpha_2 - r_1 v_{b1} \cos \alpha_1). \quad (5.129)$$

Moc maszyny będzie równa

$$N = M \omega. \quad (5.130)$$

W przypadku silnika (np. turbiny) mamy do czynienia z zagadnieniem odwrotnym. Energia przepływającej strugi płynu zostaje wówczas przekazana poprzez wirnik na wał silnika.

Moment na wale wynosi więc

$$M = \rho q_V (r_1 v_{b1} \cos \alpha_1 - r_2 v_{b2} \cos \alpha_2). \quad (5.131)$$

W wirnikowych maszynach przepływowych moment obrotowy na wale powiększa moment pędu przepływającego przez łopatki płynu.

W silniku moment pędu płynu powoduje powstanie momentu obrotowego na wale silnika.

W obu przypadkach zmiana momentu pędu przepływającego płynu jest równa momentowi obrotowemu.

CZĘŚĆ DRUGA

PRZEPŁYWY PŁYNÓW LEPKICH

6. DYNAMIKA PŁYNÓW LEPKICH

6.1. ZWIĄZEK MIĘDZY ODKSZTAŁCENIAMI ELEMENTU PŁYNU I NAPRĘŻENIAMI

Podczas ruchu płynu lepkiego powstają naprężenia styczne, jako opory odkształceń jego elementów. Wartość tych oporów zależy od prędkości zmiany kształtów elementów płynu i jego rodzaju.

Wiadomo, że podczas ruchu płynu nielepkiego, a także podczas spoczynku zarówno płynu nielepkiego, jak i lepkiego, występują jedynie naprężenia normalne. Jeżeli nastąpi ruch względny elementów płynu lepkiego, to w miejscach, gdzie będzie istniała różnica prędkości sąsiednich elementów, pojawią się naprężenia styczne, będące źródłem tarcia wewnętrznego w płynie. Inaczej można powiedzieć, że na element płynu lepkiego w ruchu, oprócz sił objętościowych, działają siły powierzchniowe, które mają składową normalną i styczną. Należy podkreślić, że wpływ lepkości przejawia się nie tylko w powstawaniu naprężen stycznych, ale również w zmianie wartości naprężen normalnych (ciśnień) w porównaniu do ich wartości występujących w przypadku ruchu płynu nielepkiego, a zatem zarówno *naprężenia styczne, jak i normalne zależą od lepkości płynu*.

Uwzględnienie lepkości w płynie spowoduje pojawienie się dodatkowego składnika, którego postać ustalimy na drodze uproszczonych rozważań.

6.1.1. ZWIĄZKI MIĘDZY ODKSZTAŁCENIAMI A NAPRĘŻENIAMI STYCZNYMI

Rozpatrzmy dwa modele odkształcenia elementu płynu lepkiego, nazwane odpowiednio: ogólnym (rys. 2.8), gdy przepływ ma charakter przestrzenny, oraz niutonowskim (rys. 1.3) – podczas ruchu dwóch warstw przesuwających się względem siebie równolegle ze stałą prędkością.

Założymy, że naprężenia styczne w poruszającym się płynie lepkim są związane z odkształceniami postaciowymi (kątowymi) elementu płynu (p. 2.5.2, rys. 2.8).

Model ogólny

Współrzędne prędkości odkształcenia postaciowego (2.51) wynoszą:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right),$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Model niutonowski

W modelu Newtona

$$v_z = v_x = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

a zatem wszystkie współrzędne tensora prędkości deformacji sprowadzają się zgodnie ze wzorami (2.51) do postaci

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

Zgodnie z hipotezą Newtona naprężenie styczne wynosi w tym przypadku

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial z}.$$

Jest ono proporcjonalne do prędkości odkształcenia o współczynniku proporcjonalności równym 2μ (podwojony dynamiczny współczynnik lepkości)

$$\tau_{yz} = \beta \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad (6.1)$$

gdzie $\beta = 2\mu$.

W trójwymiarowym stanie naprężenia, w przypadku płynów niutonowskich, macierz naprężen S (1.27) jest liniowo zależna od macierzy deformacji D (2.44) ze współczynnikiem proporcjonalności $\beta = 2\mu$. Zależności określające związki naprężenia stycznego z polem prędkości są więc następujące:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.1.2. ZWIĄZKI MIĘDZY ODKSZTAŁCENIAMI A NAPRĘŻENIAMI NORMALNYMI

Przyjmijmy, że naprężenie normalne w płynie lepkim można przedstawić w postaci sumy dwóch składników: ciśnienia $-p$ ¹⁾, jakie panowałyby w danym punkcie, gdyby płyn był nieleplki i nieściśliwy, oraz dodatkowych ciśnień spowodowanych lepkością i ściśliwością, czyli

$$p_{xx} = -p + p'_{xx}, \quad p_{yy} = -p + p'_{yy}, \quad p_{zz} = -p + p'_{zz}. \quad (6.3)$$

Załóżmy, że naprężenia normalne spowodowane lepkością są proporcjonalne do prędkości odkształceń postaciowych (2.52), spowodowane zaś ściśliwością (zmianą objętości) są proporcjonalne do prędkości zmiany objętości (2.53), czyli do $\operatorname{div} \mathbf{v}$, a zatem

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \beta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ p_{yy} &= -p + \beta \frac{\partial v_y}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ p_{zz} &= -p + \beta \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

β i λ są współczynnikami proporcjonalności.

Z równań tych, po ich dodaniu stronami, otrzymamy

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = -3p + \beta \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + 3\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Przyjmijmy, że średnia arytmetyczna naprężen normalnych jest równa ciśnieniu (1.33), czyli

$$\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} = -p.$$

Po podstawieniu i uproszczeniu będzie więc $\beta + 3\lambda = 0$. Jeżeli przyjmiemy $\beta = 2\mu$, to $\lambda = -(2/3)\mu$. Ostatecznie związki naprężen normalnych z ciśnieniem i polem prędkości są następujące:

¹⁾ Minus bierze się stąd, że ciśnienie jest współrzędną naprężenia normalnego w kierunku \mathbf{n} (rys. 1.9), który jest wektorem normalnym *zewnętrznym*; ciśnienie jest zawsze skierowane *do* powierzchni.

$$\begin{aligned}
 p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v}, \\
 p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v}, \\
 p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v}.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

6.2. RÓWNANIE NAVIERA–STOKESA

Przy wprowadzeniu równań ruchu płynu lepkiego postępujemy podobnie jak przy wprowadzeniu równań Eulera (5.3), z tym że oprócz naprężen normalnych musimy uwzględnić naprężenia styczne występujące na ścianach elementu płynu lepkiego. Równanie ruchu, które otrzymamy z podstawowego równania (3.34), po uwzględnieniu zależności (6.2) i (6.5), nazywa się równaniem Naviera–Stokesa (N–S).

Rozpatrzmy przepływ izotermiczny (wówczas $\mu = \text{idem w całym obszarze płynu}$) płynu rzeczywistego. Ponieważ stan naprężenia w takim płynie jest określony zależnością (1.28), różniczkowe równanie ruchu płynu (3.34) przyjmie więc postać:

$$\begin{aligned}
 X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{dv_x}{dt}, \\
 Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) &= \frac{dv_y}{dt}, \\
 Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) &= \frac{dv_z}{dt}.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Podstawmy do niego związki naprężen z polem prędkości i ciśnień (6.2) i (6.5).

Dla pierwszego z równań (6.6) w wyniku drobnych przekształceń otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
 + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{dv_x}{dt},
 \end{aligned}$$

stąd po zredukowaniu i uporządkowaniu

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{dv_x}{dt}. \tag{6.7}$$

Analogicznie, dla pozostałych kierunków, równania można zapisać w postaci:

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_y + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{dv_y}{dt}, \quad (6.7')$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_z + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{dv_z}{dt}. \quad (6.7'')$$

A w formie wektorowej napiszemy:

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (6.8)$$

gdzie:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – operator Laplace'a,}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \text{ – pochodna substancialna (2.13).}$$

W przypadku zastosowania zapisu wskaźnikowego (p. 5.1) równanie Naviera–Stokesa przyjmie postać

$$f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (6.9)$$

$$(1) \qquad (2) \qquad (3) \qquad (4) \qquad (5) \qquad (6)$$

gdzie:

$i, j = 1, 2, 3$ – dla przepływu trójwymiarowego,

$i, j = 1, 2$ – dla przepływu dwuwymiarowego.

Poszczególne wyrazy równania N–S oznaczają siły jednostkowe (przypadające na jednostkę masy):

- (1) masową czynną,
- (2) powierzchniową normalną,
- (3) powierzchniową styczną wywołaną lepkością płynu,
- (4) powierzchniową styczną wywołaną ściśliwością płynu,
- (5) i (6) masową bierną (bezwładności).

Równanie Naviera–Stokesa stosuje się podczas badania przepływów płynów rzeczywistych. Ze względu na nieliniowość tych równań dokładne rozwiązanie można znaleźć jedynie w niewielu prostszych przypadkach. W większości konkretnych zagadnień konieczne jest stosowanie metod przybliżonych. Założenia przyjęte w takich przypadkach prowadzą zwykle do pomijania niektórych składników w równaniu N–S. Jeżeli weźmiemy pod uwagę np. przepływ płynu nieściśliwego, gdzie $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, to otrzymamy równanie (6.8) w postaci

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (6.10)$$

Z otrzymanych równań, łatwiejszych do rozwiązań, otrzymuje się nie zawsze dokładne wyniki.

6.3. PODOBIĘŃSTWO I MODELOWANIE PRZEPŁYWÓW

Złożoność problemów mechaniki płynów powoduje, że wiele praktycznych zagadnień nie może znaleźć rozwiązania analitycznego. Doświadczenie pozostaje inspirującym i skutecznym narzędziem badawczym weryfikującym wyniki rachunkowe. W dodatku nie istnieje dotychczas wystarczająco ogólny i jednoznaczny teoretyczny opis przepływów turbulentnych; tutaj też doświadczenie pozostaje jedynym wiarygodnym narzędziem badawczym. Rozwiązań numerycznych równań przepływu turbulentnego są dotychczas pracochłonne i niepewne. Dlatego konieczne jest prowadzenie badań modelowych, których istota polega na doświadczalnym zbadaniu przebiegu zjawiska modelowego i przeniesieniu wyników badań na zjawisko podstawowe (zjawisko rzeczywiste lub oryginał). Do tego potrzebna jest znajomość kryteriów podobieństwa, z których wyznacza się skale podobieństwa modelu do oryginału. Problematyki tymi zajmuje się teoria podobieństwa.

Ustalenie kryteriów i skali podobieństwa jest możliwe, gdy znane są równania opisujące badane zjawisko albo tylko argumenty funkcji opisującej to zjawisko i wtedy posługujemy się analizą wymiarową.

6.3.1. PODSTAWOWE POJĘCIA ANALIZY WYMIAROWEJ

Wartość określonej wielkości fizycznej jest iloczynem liczby przez jednostkę miary. Ciśnienie $p = 105$ paskali jest więc iloczynem liczby 105 i jednostki miary, którą jest pascal, czyli $p = 105 \text{ Pa}$. Ogólnie zapiszemy to w postaci

$$W \stackrel{\text{df}}{=} \{W\}[W] \in \Pi \quad (6.11)$$

gdzie:

- $\{W\} \in \mathbf{R}^{1)}$ – wartość liczbową,
- $[W]$ – jednostka miary wielkości fizycznej W ,
- Π – przestrzeń wymiarowa.

Symbol w nawiasie $\{\cdot\}$ oznacza więc tylko wartość liczbową wielkości fizycznej W , $[\cdot]$ – tylko jednostkę miary, dopiero ich iloczyn staje się wartością wielkości fizycznej W . Wielkości we wzorze (6.11) będziemy nazywać *wielkościami wymiarowymi*. Zbiór wielkości wymiarowych postaci (6.11) stanowi przestrzeń wymiarową Π .

¹⁾ \mathbf{R} – zbiór liczb rzeczywistych.

Wielkość wymiarowa W pozostaje ta sama niezależnie od przyjętej jednostki miary; zmienia się tylko jej wartość liczbową $\{W\}$. Dlatego, w ogólności, operacji $[\cdot]$ nie musimy ograniczać do określonego systemu jednostek miar, rozszerzając ją do pojęcia wymiaru wielkości należących do przestrzeni Π . Wymiar $[\cdot]$ określamy więc następująco

$$[W] = [V] \Leftrightarrow WV^{-1} \in \mathbf{R}, \quad W, V \in \Pi, \quad (6.12)$$

przy czym dla $W, V \in \Pi$, $a, b \in \mathbf{R}$ postulujemy, że

$$\begin{aligned} [WV] &= [W][V], \\ [W^a] &= [W]^a, \end{aligned} \quad (6.13)$$

stąd i z (6.11) wynika

$$\begin{aligned} [b[W]] &= [W] \\ [b] &= 1. \end{aligned}$$

Wielkość o wymiarze równym 1 jest nazywana wielkością bezwymiarową. Dodać i odejmować można, oczywiście, tylko wielkości o tym samym wymiarze. W przestrzeni wymiarowej Π zawsze znany jest układ jednostek miar podstawowych wielkości fizycznych. W układzie SI są to: $\{m, kg, s, A, K, cd\}$ ¹⁾ (jednostki: długości, masy, czasu, natężenia prądu, temperatury termodynamicznej i światłości), ale w mechanice ograniczają się do zbioru $\{m, kg, s\}$. Wszystkie inne wielkości mają jednostki utworzone z iloczynów potęgowych układu jednostek podstawowych. Wymiary wielkości podstawowych są zwyczajowo oznaczane symbolami, mianowicie:

- L – wymiar długości,
- M – wymiar masy,
- T – wymiar czasu,
- I – wymiar natężenia prądu,
- θ – wymiar temperatury,
- J – wymiar światłości.

Na przykład wymiarem 2 lb, 11 dag, 5,1 Mg jest wymiar masy – M.

W miejsce symboli można podstawić symbole jednostek miar dowolnego, spójnego układu jednostek miar (np. SI, anglosaskiego), który składa się z tej samej liczby podstawowych jednostek wielkości fizycznych. Każdą wartość W dowolnej wielkości mechanicznej można zapisać w układzie SI następująco

$$W = \alpha m^a kg^b s^c \text{ } ^2), \quad \alpha, a, b, c \in \mathbf{R}, \quad (6.14)$$

w dowolnym układzie spójnych jednostek miar natomiast

$$W = \beta L^a M^b T^c, \quad \beta, a, b, c \in \mathbf{R}. \quad (6.15)$$

¹⁾ Uzupełniają je: rad, sr (jednostki kąta płaskiego i brylowego).

²⁾ Nie wolno stąd wyciągać fałszywego wniosku, że poprawnie zapisana wartość wielkości musi być wyrażona w jednostkach podstawowych. Należy stosować krotności jednostek podstawowych właściwie dobranych do wartości liczbowej. Na przykład zapis $q_V = 0,000012 \text{ m}^3/\text{s}$ jest zupełnie nieczytelny, lepiej napisać $q_V = 12 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Spójny układ jednostek miary to taki, którego jednostki pochodne tworzą wyłącznie iloczyny potęgowe jednostek podstawowych wielkości fizycznych bez mnożników liczbowych.

6.3.2. PRZESTRZEŃ LINIOWA, PRZESTRZEŃ WYMIAROWA I PRZESTRZEŃ WYMIARÓW

Elementy przestrzeni wymiarowej Π , zgodnie ze wzorami (6.11), (6.14), (6.15), są iloczyńami liczby i jednostki miary, a te są potęgami jednostek miary podstawowych wielkości fizycznych. Powiemy więc (bez precyzowania układu jednostek miary), że przestrzeń wymiarową Π stanowi zbiór elementów, które są iloczynem liczby przez wymiar. Utwórzmy zbiór $[\Pi] \subset \Pi$ wszystkich wielkości wymiarowych o wartości liczbowej równej 1. Wobec tego, zgodnie ze wzorem (6.11), napiszemy

$$[\Pi] = \{[W] : W \in \Pi\}. \quad (6.16)$$

Jak widać, warunkiem koniecznym i wystarczającym do utworzenia przestrzeni wymiarowej Π jest znajomość zbioru $[\Pi]$ ¹⁾, gdyż relacja między nimi jest prosto określona wzorem (6.11).

W algebrze rozpatruje się zbiory abstrakcyjne niczego nie zakładając o naturze ich elementów. W zbiorach tych rozpatruje się działania na elementach spełniających pewne aksjomaty (postulaty, pewniki) i bada odwzorowania takich zbiorów w powiązaniu z tymi działaniami. W ten sposób twierdzenia otrzymywane dla zbiorów abstrakcyjnych pozostają słusze w każdej realizacji, w której spełnione są wymagane aksjomaty. Rzecz w tym, że przestrzeń liniowa to jedno z najbardziej udanych pojęć algebry abstrakcyjnej, dlatego warto przypomnieć znane czytelnikowi podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące abstrakcyjnej przestrzeni liniowej, którą oznaczymy M . Wykażemy, że jej realizacją jest zbiór $[\Pi]$, czyli że struktura $([\Pi], \cdot, ^\wedge)$ tworzy przestrzeń liniową podobnie jak struktura $(M, +, \cdot)$; różnią je tylko działania, którymi w M są dodawanie i mnożenie $(+, \cdot)$, w $[\Pi]$ zaś mnożenie i potęgowanie $(\cdot, ^\wedge)$. Wszystkie pary uporządkowane (\mathbf{v}, \mathbf{w}) , (a, \mathbf{v}) i pary uporządkowane $([V], [W])$, $(a, [V])$ są więc odwzorowywane przez działania $+$, \cdot lub \cdot , $^\wedge$ odpowiednio w przestrzeniach M i $[\Pi]$:

$$\begin{aligned} M \times M &\ni (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \xrightarrow{+} (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in M, \\ \mathbf{R} \times M &\ni (a, \mathbf{v}) \xrightarrow{\cdot} a \cdot \mathbf{v} \in M, \\ [\Pi] \times [\Pi] &\ni ([V], [W]) \xrightarrow{\cdot} [V] \cdot [W] \in [\Pi] \\ \mathbf{R} \times [\Pi] &\ni (a, [\Pi]) \xrightarrow{\wedge} [V]^\wedge a \in [\Pi]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

¹⁾ Zbiór ten można nazwać przestrzenią wymiarów.

W algebrze abstrakcyjnej działanie oznaczone $+$ nie musi być rozumiane jako zwykłe dodawanie, podobnie jak działanie \cdot nie musi być zwykłym mnożeniem. Ważne jest, by były zdefiniowane dwa działania, które spełnią wymagane postulaty. Dlatego działania $+$, \cdot w przestrzeni M zamieniliśmy na \cdot , a w przestrzeni $[\Pi]$; pozostało tylko sprawdzić, czy przestrzeń $[\Pi]$ z tymi działaniami spełnia aksjomaty przestrzeni liniowej.

W tabeli 6.1 zestawiono postulaty przestrzeni liniowej M z działaniami oznaczonymi $+$, \cdot , tak jak w literaturze oraz z działaniami \cdot , a w przestrzeni $[\Pi]$, którymi są zwykłe mnożenie i potęgowanie.

Tabela 6.1. Aksjomaty przestrzeni liniowej M z działaniami $+$, \cdot i $[\Pi]$ z działaniami \cdot , a (znak mnożenia \cdot pominięto tam, gdzie nie ma wątpliwości, a zastąpiono notacją tradycyjną)

Lp.	$(M, +, \cdot)$	$([\Pi], \cdot, ^a)$
	$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in M, a, b \in \mathbf{R}$	$[V], [W], [Z] \in [\Pi], a, b \in \mathbf{R}$
1	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$	$[V][W] = [W][V]$
2	$\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z}$	$[V]([W][Z]) = ([V][W])[Z]$
3	$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$	$[V] \cdot 1 = [V]$
4	$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$	$[V][V]^{-1} = 1$
5	$a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$	$([V][W])^a = [V]^a[W]^a$
6 ¹⁾	$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$	$[V]^{(a+b)} = [V]^a[V]^b$
7	$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$	$([V]^b)^a = [V]^{ab}$
8	$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$	$[V]^1 = [V]$

Jak widać, $[\Pi]$ jest przestrzenią liniową z działaniami \cdot , a o współczynnikach liczbowych (więc nad ciałem \mathbf{R}), gdyż spełnia wszystkie wymagane postulaty. Elementem neutralnym i jednością jest w niej liczba 1; w przestrzeni abstrakcyjnej M odpowiednio wektor zerowy $\mathbf{0}$ i liczba 1 (postulaty 3, 4, 8). Weźmy pod uwagę dwa zbiory elementów

$$B_M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset M, B_{[\Pi]} = \{[V_1], \dots, [V_k]\} \subset [\Pi] \quad (6.18)$$

oraz k liczb $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{R}$. Mówimy, że wektory ze zbioru B_M są liniowo niezależne, a ze zbioru $B_{[\Pi]}$ wymiarowo niezależne, jeśli spełniona jest implikacja

$$a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_k \equiv 0,$$

$$[V_1]^{a_1} \dots [V_k]^{a_k} = 1 \Rightarrow a_1 = \dots = a_k \equiv 0, \quad (6.19)$$

¹⁾ Dodawanie (+) w M zastąpimy mnożeniem (\cdot) w $[\Pi]$, ale tylko elementów należących odpowiednio do M i $[\Pi]$; dodawanie elementów $a, b \in \mathbf{R}$ pozostało nie zmienione w M i $[\Pi]$ (bo odbywa się w \mathbf{R}).

przy czym $\mathbf{0}$ w przestrzeni M zostało zastąpione przez 1 w $[\Pi]$, gdyż są one elementami neutralnymi tych przestrzeni. Każdy *układ n wektorów liniowo (w M) albo wymiarowo (w $[\Pi]$) niezależnych tworzy bazę przestrzeni, którą w $[\Pi]$ nazwiemy bazą wymiarową.*

Jeśli, odpowiednio, układ

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}, \quad \{[V_1], \dots, [V_n], [V]\} \quad (6.20)$$

jest liniowo albo wymiarowo zależny (jest więc przeciwieństwem układu liniowo albo wymiarowo niezależnego), implikacja (6.19) jest zaś prawdziwa dla $k = n$, to przestrzeń ma wymiar równy n .

Jeśli układ wektorów odpowiednio B_M i $B_{[\Pi]}$

$$B_M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset M, \quad B_{[\Pi]} = \{[V_1], \dots, [V_n]\} \subset [\Pi] \quad (6.21)$$

jest bazą przestrzeni M lub $[\Pi]$, to dla każdego $\mathbf{v} \in M$, $[V] \in [\Pi]$ istnieje dokładnie jeden układ liczb $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, którego kombinacja liniowa w M albo iloczyn potęgowy w $[\Pi]$ równa się wektorowi \mathbf{v} lub $[V]$, czyli

$$a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v} \in M, \quad [V_1]^{a_1} \dots [V_n]^{a_n} = [V] \in [\Pi]. \quad (6.22)$$

Wszystkie kombinacje (6.22) składają się na elementy wypełniające całkowicie przestrzeń liniową M lub $[\Pi]$.

Przestrzeń liniowa może mieć wiele baz, które tworzą zbiory n liniowo (wymiarowo) niezależnych elementów przestrzeni, ale *wszystkie te bazy są równoliczne*. Przy czym jeśli zbiór B_M lub $B_{[\Pi]}$ (wzór (6.21)) jest bazą, to również bazą jest $\{\alpha_1\mathbf{v}_1, \dots, \alpha_n\mathbf{v}_n\}$ lub $\{[V_1]^{\alpha_1}, \dots, [V_n]^{\alpha_n}\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Zbiór $m < n$ wektorów liniowo (wymiarowo) niezależnych tworzy podprzestrzeń m -wymiarową (tab. 6.1, wzór (6.22)).

Przykład 1.

W przestrzeni liniowej \mathbf{R}^3 powszechnie stosowaną bazę stanowią wektory jednostkowe $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, w mechanice trzy wymiary $\{L, M, T\}$ tworzą bazę przestrzeni wymiarów $[\Pi]^3 \subset [\Pi]$ (jeśli ograniczymy się do układu SI, to są to: $\{m, kg, s\}$). Podprzestrzenie dwuwymiarowe można rozpiąć np. na wektorach $\{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$, $\{-\mathbf{i}, 2\mathbf{k}\}$, ..., a w zagadnieniach kinematyki zbiory $\{L, T\}$, $\{L^{-1}, T^2\}$, ... są bazami podprzestrzeni wymiarów $[\Pi]^2$, a więc o wymiarze równym 2.

Dalej jako oznaczenie podprzestrzeni wymiarów będzie używany symbol $[\Pi]^r$, gdzie r jest wymiarem tej podprzestrzeni.

Niech M, N z działaniami $+, \cdot$, a $[\Pi]^m, [\Pi]^n$ z działaniami $\cdot, ^\wedge$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem \mathbf{R} (wymiary przestrzeni M, N to m, n , a $[\Pi]^m$ i $[\Pi]^n$ również m i n)

$$f: M \rightarrow N, \quad f: [\Pi]^m \rightarrow [\Pi]^n$$

jest przekształceniem liniowym, jeśli:

$$\begin{aligned} 1. \quad f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}), & f([\mathbf{V}] [\mathbf{W}]) &= f([\mathbf{V}]) f([\mathbf{W}]), \\ 2. \quad f(a\mathbf{v}) &= af(\mathbf{v}), & f([\mathbf{V}]^a) &= (f([\mathbf{V}]))^a, \\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in M, \quad a \in \mathbf{R}, & & [\mathbf{V}], [\mathbf{W}] \in [\Pi]^m, \quad a \in \mathbf{R}, & \end{aligned} \quad (6.23)$$

jeśli ponadto:

$$\begin{aligned} 3. \quad f &\in 1-1 \text{ (} f \text{ jest różnowartościowe),} \\ 4. \quad f(M) &= N, \quad f([\Pi]^m) = [\Pi]^{n-1}, \end{aligned}$$

to f jest izomorfizmem.

Pokażemy, że istnieje izomorfizm $\omega : [\Pi] \rightarrow M$, dzięki czemu dowody dotyczące działań liniowych przeprowadzane w przestrzeni M można od razu przenieść do przestrzeni $[\Pi]$ i odwrotnie.

Niech bazami obydwu przestrzeni będą odpowiednio zbiory:

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}, \quad \{[\mathbf{V}_1], \dots, [\mathbf{V}_m]\},$$

wtedy, jak wiemy, dla dowolnych wektorów $\mathbf{v} \in M$, $[\mathbf{V}] \in [\Pi]^m$ istnieje dokładnie jeden układ $a_1, \dots, a_m \in \mathbf{R}$ taki, że:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_m\mathbf{v}_m \equiv (a_1, \dots, a_m)^2, \quad [\mathbf{V}] = [\mathbf{V}_1]^{a_1} \dots [\mathbf{V}_m]^{a_m}.$$

Definiujemy przekształcenie $\omega : [\Pi]^m \rightarrow M$ następująco

$$\omega([\mathbf{V}]) = \omega([\mathbf{V}_1]^{a_1} \dots [\mathbf{V}_m]^{a_m}) \stackrel{\text{df}}{=} (a_1, \dots, a_m) \in M. \quad (6.24)$$

Funkcja ω jest izomorfizmem, bowiem:

$$\begin{aligned} 1. \quad \omega([\mathbf{V}][\mathbf{W}]) &= \omega(([V_1]^{a_1} \dots [V_n]^{a_m})([V_1]^{b_1} \dots [V_n]^{b_m})) = \omega(V_1^{a_1+b_1} \dots V_n^{a_m+b_m}) \\ &= (a_1+b_1, \dots, a_m+b_m) = (a_1, \dots, a_m) + (b_1, \dots, b_m) = \omega([\mathbf{V}]) + \omega([\mathbf{W}]) \in M, \\ 2. \quad \omega([\mathbf{V}]^a) &= \omega(([V_1]^{a_1} \dots [V_n]^{a_m})^a) = \omega([V_1]^{aa_1} \dots [V_n]^{aa_m}) = (aa_1, \dots, aa_m) \\ &= a(a_1, \dots, a_m) = a\omega([\mathbf{V}]) \in M. \end{aligned}$$

Nietrudno spostrzec, że również:

3. $\omega([\Pi])^m = M$,
4. $\omega \in 1-1$.

W przypadkach 1. i 2. zastosowano definicję (6.24), reguły dodawania i mnożenia wektorów w M oraz mnożenie wektora przez liczbę (tab. 6.1).

Z definicji izomorfizmu wynika, że każda przestrzeń liniowa nad ciałem \mathbf{R} wymiaru n jest izomorficzna z dowolną przestrzenią liniową (nad ciałem \mathbf{R}) tego samego wymiaru. Wystarczy bowiem zdefiniować przekształcenie podobnie jak w (6.24), gdzie $[\mathbf{V}] \in [\Pi]^m$ trzeba zastąpić elementem dowolnej przestrzeni liniowej. Wniosek

¹⁾ $f(M) = \{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in M\}$ (odpowiednio w $[\Pi]^m$) jest obrazem przekształcenia f , dlatego p. 4. oznacza, że f jest przekształceniem przestrzeni M na przestrzeń N .

²⁾ Wektor $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_m\mathbf{v}_m$, w danej bazie, jest często zapisywany w krótszej formie jako $\mathbf{v} = (a_1, \dots, a_m)$, z czego tu skorzystaliśmy.

stąd, że dobrze znana przestrzeń \mathbf{R}^n jest izomorficzna z każdą przestrzenią liniową o wymiarze n . Będziemy więc odtąd badać przestrzeń \mathbf{R}^n , której bazą kanoniczną jest $\{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \equiv E^n$, a zwyczajna $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \equiv \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \equiv E^3 \subset \mathbf{R}^3$. Inne bazy w \mathbf{R}^n można więc zapisać w bazie kanonicznej.

Za bazę kanoniczną w $[\Pi]$ będziemy uważali zbiór $\{L, M, T, I, \theta, J, R, S\} \equiv [E]^8$, a w mechanice wystarczy zbiór $\{L, M, T\} \equiv [E]^3$, który w termodynamice trzeba rozszerzyć do $\{L, M, T, \theta\} \equiv [E]^{4 \text{ } 1)}$ (oznaczenia objaśniono w p. 6.3.1 i 6.3.2).

Opierając się na izomorfizmie przestrzeni \mathbf{R}^n z każdą przestrzenią liniową wymiaru n , rozstrzygniemy ważną kwestię zależności albo niezależności wymiarowej zbioru $\{[V_1], \dots, [V_m]\} \subset [\Pi]^n, [V_i] \neq 1, i = 1, \dots, m, m \leq n$, badając zależność albo niezależność liniową zbioru wektorów

$$B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, m, m \leq n.$$

Utwórzmy kombinację liniową wektorów ze zbioru B ze współczynnikami $b_1, \dots, b_m \in \mathbf{R}$ i przedstawmy te wektory w bazie kanonicznej $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, wtedy otrzymamy

$$\begin{aligned} & b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + \dots + b_m \mathbf{v}_m \\ &= b_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n1}\mathbf{e}_n) \\ &+ b_2(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n2}\mathbf{e}_n) \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &+ b_m(a_{1m}\mathbf{e}_1 + a_{2m}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{nm}\mathbf{e}_n) \tag{6.25} \\ &= (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1m}b_m)\mathbf{e}_1 \\ &+ (a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2m}b_m)\mathbf{e}_2 \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &+ (a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \dots + a_{nm}b_m)\mathbf{e}_n, \\ & a_{ij} \in \mathbf{R}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Powróźmy do definicji (6.19) liniowej niezależności wektorów i załóżmy, że kombinacja (6.25) jest wektorem zerowym, czyli ma wszystkie współrzędne, a więc współczynniki przy wektorach bazy $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ równe zeru. Fakt ten zapiszemy w postaci równania macierzowego

¹⁾ W układzie SI będą to: {m, kg, s, A, K, cd, rad, sr}, {m, kg, s}, {m, kg, s, K}, ale nie oznacza to, że wartości wielkości fizycznych muszą być zapisywane w tych jednostkach. Konieczne jest stosowanie krotności jednostek podstawowych dobranych do wartości liczbowej.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Po oznaczeniu symbolami $A_{n \times m}$, b i o macierzy w kolejności ich występowania we wzorze (6.26), można krótko napisać

$$A_{n \times m} b = o. \quad (6.27)$$

Równanie (6.26) jest układem $n \geq m$ jednorodnych równań liniowych ze względu na b_1, \dots, b_m .

Definicja (6.19) liniowej niezależności wektorów wymaga, by rozwiązywanie układu (6.26) było tożsamościowo zerowe. Zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy $A_{n \times m}$ wynosi m , co wiadomo z algebry od dawna (wzory Cramera, twierdzenie Kroneckera–Capelli z XIX w.). Ponieważ, jak można sprawdzić (wzory (6.23)), operacje (6.25) są liniowe, natychmiast sformułujemy warunek wymiarowej niezależności elementów zbioru $\{[V_1], \dots, [V_m]\} \subset [\Pi]^n$:

$$([\Pi]^n \ni [V_1], \dots, [V_m] - \text{wymiarowo niezależne}) \Leftrightarrow \text{rz } A_{n \times m} = m. \quad (6.28)$$

Trzeba tylko pamiętać, że i -tą kolumnę macierzy $A_{n \times m}$ tworzą wykładniki potęgowe a_{ij} w iloczynie

$$[V_i] = D_1^{a_{1i}} \dots D_n^{a_{ni}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad n \leq 8, \quad (6.29)$$

przy czym D_i , $i = 1, \dots, n$ należą do bazy kanonicznej $\{L, M, T, \dots, S\} \equiv [E]^8$ ($8 = n \geq m$ jest wymiarem przestrzeni $[\Pi]$).

Przykład 2.

Zbadać, czy wymiary wielkości Δp , q_V (różnica ciśnienia i strumień objętości) są wymiarowo niezależne.

Tworzymy macierz $A_{3 \times 2}$ w bazie kanonicznej $\{m, kg, s\}^1$ (więc: $n = 3$, $m = 2$), zatem

$$\left. \begin{aligned} [\Delta p] &= [Pa] = [N/m^2] = m^{-1}kg^1s^{-2} \\ [q_V] &= m^3/s = m^3kg^0s^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (i)$$

Łatwo już obliczyć rząd macierzy $A_{3 \times 2}$ (czyli najwyższy stopień niezerowego wyznacznika macierzy kwadratowej utworzonej z $A_{3 \times 2}$), który wynosi

¹⁾ W mechanice ogólnie bazą jest $\{L, M, T\}$, ale operowanie jednostkami z układu SI jest praktyczniejsze, gdyż wymiary wielkości są konkretne, a nie abstrakcyjne.

$$\text{rz } A_{3 \times 2} = \text{rz} \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{3} \\ 1 & \mathbf{0} \\ -2 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} = 2, \quad (\text{ii})$$

tzn., że $[\Delta p]$, $[q_V]$ są wymiarowo niezależne i można na nich rozpięć podprzestrzeń $[\Pi]^2$ (a więc wymiaru 2) przestrzeni wymiarów o wymiarze 3.

Przykład 3.

Postawiono hipotezę, że: naprężenie styczne τ_t w przepływie turbulentnym zależy od gęstości płynu ρ , gradientu prędkości dv/dy , odległości od ściany y . Należy sprawdzić, czy $[\rho]$, $[dv/dy]$, $[y]$ są wymiarowo niezależne.

Tutaj, jak poprzednio, zagadnienie pochodzi z dziedziny mechaniki, więc $n = 3$ oraz $m = n = 3$.

Macierz $A_{3 \times 3}$ jest następująca:

$$\left. \begin{array}{l} [\rho] = \text{kg/m}^3 \\ [dv/dy] = (\text{m/s})/\text{m} = \text{m}^0 \text{kg}^0 \text{s}^{-1} \\ [y] = \text{m} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -3 & \mathbf{0} & I \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{iii})$$

stąd

$$\text{rz } A_{3 \times 3} = \text{rz} \begin{bmatrix} -3 & \mathbf{0} & I \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} = 3. \quad (\text{iv})$$

Zbiór $\{[\rho], [dv/dy], [y]\}$ jest więc jedną z trójwymiarowych baz przestrzeni $[\Pi]^3$.

Jak widać na przykładach, sprawdzenie wymiarowej niezależności elementów przestrzeni wymiarów jest nieskomplikowane i sprowadza się do utworzenia macierzy $A_{n \times m}$ i obliczenia wyznaczników.

Przestrzeń wymiarów ma wiele baz. Dlatego potrzebna jest znajomość wzorów przejścia od dowolnej bazy $B = \{[V_1], \dots, [V_n]\}$ do innej bazy, a szczególnie do bazy złożonej z podzbiorów bazy kanonicznej $\{L, M, T, \dots\}$. W tym przypadku także wykorzystamy izomorfizm $\omega : [\Pi]^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, gdyż obliczenia w \mathbf{R}^n wydają się łatwiejsze z uwagi na ich powszechnie stosowanie.

Weźmy wektor $\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_n\mathbf{v}_n \in \mathbf{R}^n$, przy czym $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ jest bazą w \mathbf{R}^n . Zapiszemy ten wektor kolejno w bazie $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ i w bazie kanonicznej $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \equiv \mathbf{E}^n$ (analogicznie do wzoru (6.25), ale tutaj zastosowano oszczędniejszą formę zapisu):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_n\mathbf{v}_n \\
 &= b_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{e}_n) \\
 &\quad + \dots \dots \dots \\
 &\quad + b_n(a_{1n}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{e}_n) \\
 &= (a_{11}b_1 + \dots + a_{1n}b_n)\mathbf{e}_1 \\
 &\quad + \dots \dots \dots \\
 &\quad + (a_{n1}b_1 + \dots + a_{nn}b_n)\mathbf{e}_n \\
 &= c_1\mathbf{e}_1 + \dots + c_n\mathbf{e}_n
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Ostatnia z ciągu równości wynika tylko z oznaczenia $(a_{i1}b_1 + \dots + a_{in}b_n) \equiv c_i$, $c_i \in \mathbf{R}$, $i=1, \dots, n$.

W postaci macierzowej równość (6.30) będzie następująca

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1 \ \dots \ \mathbf{e}_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1 \ \dots \ \mathbf{e}_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

Z ostatnich dwóch równań ciągu równości (6.31) wynika od razu równanie macierzowe

$$\mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{b} = \mathbf{c}, \tag{6.31a}$$

równoważne z przekształceniem liniowym f wektora \mathbf{v} na ten sam wektor, ale zapisany w bazie kanonicznej \mathbf{E}^n , zatem

$$f(\mathbf{v}) = f(b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{E}^n \mathbf{A}_{n \times n} \mathbf{b} = \mathbf{E}^n \mathbf{c} = \mathbf{v}, \tag{6.31b}$$

gdzie:

$$\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T \text{¹⁾},$$

$$\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]^T,$$

$$\mathbf{E}^n = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n].$$

¹⁾ T oznacza transpozycję macierzy; tej formy zapisu użyto ze względu na jego zwięzłość.

Macierz $A_{n \times n}$ jest już natomiast znana ze wzoru (6.26), (tam jej rozmiar wynosił $n \times m$, $m \leq n$) i jest macierzą przekształcenia liniowego f , które tutaj oznacza zmianę bazy z $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ na $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \equiv \mathbf{E}^n$.

Ponieważ operacja według wzoru (6.31) jest liniowa (w $[\Pi]^n$ można ją nazwać przekształceniem wymiarowym), co wnioskujemy z definicji przekształcenia liniowego f (wzór (6.23)) i ciągu przekształceń (6.30), wzór (6.31) przenosimy więc na przestrzeń $[\Pi]^n$. Elementy a_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$ macierzy $A_{n \times n}$ określają wzór (6.29).

Równanie (6.31a) wyznacza potęgi c_1, \dots, c_n , przedstawiające wektor $[V] \in [\Pi]^n$ w bazie kanonicznej $\{L, M, T, \dots\}$, jeśli jego współrzędnymi w innej bazie były liczby b_1, \dots, b_n , przy czym kolumny macierzy $A_{n \times n}$ przekształcenia wymiarowego f składają się ze współrzędnych wektorów bazy $[V_1], \dots, [V_n]$ zapisanych w bazie kanonicznej.

Przykład 4.

Postawiono hipotezę, że

$$\tau_t = \kappa^2 \rho^{b_1} \left(\frac{dv}{dy} \right)^{b_2} y^{b_3}, \quad b_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{v})$$

gdzie $\kappa^2 \in \mathbf{R}$ – stały współczynnik, pozostałe oznaczenia jak w przykładzie 3.

Zbiór $\{[\rho], [dv/dy], [y]\} \subset [\Pi]^3$ stanowi bazę w $[\Pi]^3$ (przykład 3., wzory (iii) i (iv)). Zapisać $[\rho^{b_1} (dv/dy)^{b_2} y^{b_3}]$ w bazie $\{m, kg, s\}$, a więc w postaci $m^{c_1} kg^{c_2} s^{c_3}$.

Z przykładu 3. znana jest już macierz $A_{3 \times 3}$, dlatego

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3b_1 + b_3 \\ b_1 \\ -b_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{vi})$$

Równanie

$$[\tau_t] = m^{-3b_1 + b_3} kg^{b_1} s^{-b_2} \quad (\text{vii})$$

jest więc rozwiązaniem zadania.

Wartości liczbowe wykładników we wzorze (v) można ustalić, gdyż jednostka naprężenia turbulentnego jest znana bezpośrednio w bazie kanonicznej układu SI: $[\tau_t] = [\text{Pa}] = [\text{N/m}^2] = m^{-1} kg^1 s^{-2}$, zatem

$$m^{-1} kg^1 s^{-2} = m^{-3b_1 + b_3} kg^{b_1} s^{-b_2}, \quad (\text{viii})$$

skąd, po przyrównaniu potęg przy m, kg, s, lewej do prawej strony równania dostaje się układ trzech równań z trzema niewiadomymi b_1, b_2, b_3 łatwy nawet do ręcznego rozwiązania.

6.3.3. FUNKCJE WYMIAROWE

Wartości wielkości fizycznych w otaczającej nas rzeczywistości udaje się zwykle przedstawić jako wartości funkcji argumentów stanowiących zbiór wartości innych wielkości fizycznych. Wobec tego wszystkie te wielkości są elementami przestrzeni wymiarowej Π (wzór (6.11)), jej podzbiorem zaś jest przestrzeń wymiarów $[\Pi]$ opisana w poprzednich punktach. Funkcję

$$\Phi : \Pi \times \dots \times \Pi \rightarrow \Pi \quad (6.32)$$

argumentów wymiarowych $Z_1, \dots, Z_s \in \Pi$ o wartościach $\Phi(Z_1, \dots, Z_s) \in \Pi$ nazywamy funkcją wymiarową, jeśli spełnia następujące warunki:

$$1. \quad \Phi(f(Z_1), \dots, f(Z_s)) = f(\Phi(Z_1, \dots, Z_s)), \quad (6.33a)$$

$$2. \quad \Phi(\alpha_1 Z_1, \dots, \alpha_s Z_s) = \alpha \Phi(Z_1, \dots, Z_s), \quad (6.33b)$$

gdzie f jest przekształceniem wymiarowym (wzór (6.31)) $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbf{R}$.

Warunek 1. to *niezmienniczość wymiarowa* funkcji Φ , której wartości, dla tych samych argumentów, muszą być sobie równe w różnych bazach; te zaś można zmieniać w argumentach albo wartościach funkcji.

Warunek 2. to *jednorodność wymiarowa*, dzięki której zmiana wartości liczbowej argumentów skutkuje tylko zmianą jej wartości liczbowej; postać i wymiar pozostają takie same.

Funkcja wymiarowa spełniająca postulaty 1. i 2. nie obejmuje więc zależności opisanych tzw. wzorami liczbowymi, które są ważne tylko dla określonych jednostek. Przykładem jest tu wzór określający prędkość liniową v ciała poruszającego się po okręgu o średnicy d z prędkością obrotową n , zapisany w postaci

$$v = \frac{\pi d n}{6000}. \quad (\text{ix})$$

Wzór (ix) jest słuszny wyłącznie dla d w centymetrach i prędkości obrotowej n w obrotach na minutę. Prędkość v otrzyma się wtedy w metrach na sekundę.

Tego rodzaju wzory uznajemy za niepoprawne, bo dobry wzór to taki, w którym w miejsca symbolu można wstawić wartości odpowiadającej mu wielkości w dowolnych ale spójnych jednostkach, otrzymując wynik w jednostkach tego układu i to bez stosowania mnożników liczbowych.

Jeśli wartość wielkości Z jest wyrażona przez wartość funkcji wymiarowej Φ argumentów wymiarowych Z_1, \dots, Z_s , to

$$Z = \Phi(Z_1, \dots, Z_s), \quad Z, Z_1, \dots, Z_s \in \Pi, \quad (6.34)$$

wówczas wymiar lewej strony równania, czyli wielkości Z , jest znany i określony w kanonicznej bazie wymiarowej¹⁾ $[E]^n \subset [E]^8 = \{L, M, T, \dots\}$. Prawa strona równo-

¹⁾ Wymiar n przestrzeni w badanym problemie określa liczba jednostek podstawowych wielkości fizycznych ze zbioru: {m, kg, s, A, K, cd, rad, sr}, za pomocą których są wyrażone jednostki miary wielkości Z, Z_1, \dots, Z_s (ogólnie będą to odpowiednie wymiary).

ści może być natomiast zapisana w różnych bazach. Często w obliczeniach trzeba więc przedstawić wartość funkcji $\Phi(Z_1, \dots, Z_s)$ w bazie kanonicznej, stosując przekształcenie wymiarowe f określone wzorami (6.31).

6.3.4. POSTAĆ FUNKCJI WYMIAROWEJ

Rozważamy funkcję wymiarową Φ argumentów $Z_1, \dots, Z_s \in \Pi$. Niech wymiar przestrzeni wymiarów $[\Pi]^n \subset [\Pi]$ (wzór (6.16)) wynosi n , wtedy wśród wymiarów argumentów funkcji Φ znajdzie się $m \leq n$ elementów wymiarowo niezależnych. Rozpatrzymy więc dwa przypadki, gdy:

1. $[\Pi]^n \supset \{[Z_1], \dots, [Z_m]\}$, $m \leq n$ – zbiór wymiarowo niezależny,
 2. $[\Pi]^n \supset \{[Z_1], \dots, [Z_m], [V_1], \dots, [V_r]\}$, $m \leq n$, $r \geq 1$,
- $\{[Z_1], \dots, [Z_m]\}$ – zbiór argumentów wymiarowo niezależnych,
 $\{[V_1], \dots, [V_r]\}$ – zbiór argumentów wymiarowo zależnych.

PRZYPADEK 1.

Szukamy postaci funkcji Φ o $m \leq n$ argumentach Z_1, \dots, Z_m , których zbiór $\{[Z_1], \dots, [Z_m]\} = [B]_m$ jest wymiarowo niezależny.

Na podstawie definicji (6.11), wzorów (6.12), (6.13)–(6.16) i (6.22) przewidujemy, że wartość funkcji jest postaci

$$\Phi(Z_1, \dots, Z_m) = \varphi Z_1^{b_1} \dots Z_m^{b_m} X_1^{x_1} \dots X_r^{x_r}, \quad r + m = n, \quad (6.35)$$

gdzie: $\varphi, b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_r \in \mathbf{R}$,

zbiór $\{[X_1], \dots, [X_r]\} = [B]_r$ jest z założenia wymiarowo niezależny i dobrany tak, aby uzupełniał zbiór $[B]_m$ do bazy w $[\Pi]^n$.

Rzeczywiście tak jest, bo stosując do (6.35) operację $[\cdot]$, uzyskuje się

$$[\Pi]^n \ni [\Phi(Z_1, \dots, Z_m)] = [Z_1]^{b_1} \dots [Z_m]^{b_m} [X_1]^{x_1} \dots [X_r]^{x_r} \in [\Pi]^n, \quad (6.36)$$

co nie budzi wątpliwości, bowiem zbiór $\{[Z_1], \dots, [Z_m], [X_1], \dots, [X_r]\} = [B]$ stanowi n -elementową bazę przestrzeni $[\Pi]^n$, przy czym $\{[X_1], \dots, [X_r]\} = [B]_r$ to zbiór r -elementowy uzupełniający bazę do n elementów (gdyby było $m < n$).

Z tego wynika, że istnieje dokładnie jeden zbiór $\{b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_r\} \subset \mathbf{R}$ wykładników potęgowych (wzór (6.21) i komentarz). Zauważmy przy okazji, że $\{b_1, \dots, b_m, x_1, \dots, x_r\}$ nie mogą zależeć od wartości liczbowej argumentów, gdyż operacja $[\cdot]$ zna wartość liczbową, więc w $[\Pi]^n$ nie ma ona żadnego znaczenia.

Ponieważ funkcja Φ ma być niezmiennica wymiarowo (wzór (6.33a)), zmienimy więc bazę $[B]$ na $[B]^\alpha = [B]_m \cup \{[X_1]^{\alpha_1}, \dots, [X_r]^{\alpha_r}\}$, $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Wolno utworzyć taką bazę, bowiem potęgi elementów zbioru wymiarowo niezależnego są dalej wymiarowo niezależne (komentarz do wzoru (6.22)). Wprowadzimy teraz przekształcenie f zmieniające bazę w argumentach funkcji, wtedy

$$[\Phi((f(Z_1), \dots, f(Z_m))] = [Z_1]^{b_1} \dots [Z_m]^{b_m} [X_1]^{x_1} \dots [X_r]^{x_r} \equiv L, \quad (6.37)$$

gdyż $[Z_1], \dots, [Z_m]$ nie zostały zmienione.

Obliczmy teraz

$$\begin{aligned} [f((\Phi(Z_1, \dots, Z_m))] &= [f(\varphi Z_1^{b_1} \dots Z_m^{b_m} X_1^{x_1} \dots X_r^{x_r})] \\ &= [Z_1]^{b_1} \dots [Z_m]^{b_m} [X_1]^{x_1/\alpha_1} \dots [X_r]^{x_r/\alpha_r} \equiv P. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Wobec tego, że $L = P$:

$$x_1 = x_1/\alpha_1, \dots, x_r = x_r/\alpha_r \Rightarrow x_1 = \dots = x_r \equiv 0, \quad (6.39)$$

czyli wzór (6.35) przyjmie postać

$$\Phi(Z_1, \dots, Z_m) = \varphi Z_1^{b_1} \dots Z_m^{b_m}. \quad (6.40)$$

Nie można jeszcze mieć pewności, że φ ma wartość stałą. Założymy nie wprost, że:

$$\varphi = \varphi(d_1 Z_1, \dots, d_m Z_m, g_1 X_1, \dots, g_r X_r), \quad d_1, \dots, d_m, g_1, \dots, g_r \in \mathbf{R}, \quad (6.41)$$

zatem φ jako funkcja wymiarowa musi mieć postać (6.35), ale że jest liczbą, to jej wymiar wynosi 1. Stąd wniosek, że wszystkie potęgi wymiarów argumentów funkcji muszą być równe zeru, co jest równoważne ze stwierdzeniem, że φ nie zależy od $d_1 Z_1, \dots, d_m Z_m, g_1 X_1, \dots, g_r X_r$, przecząc założeniu.

Zwróćmy uwagę, że postać (6.40) można było przewidzieć od razu, ponieważ $[Z_1], \dots, [Z_m]$ tworzą bazę podprzestrzeni $[\Pi]^m \subset [\Pi]^n$.

Ostatecznie wartość funkcji wymiarowej Φ , argumentów Z_1, \dots, Z_m , gdzie $\{[Z_1], \dots, [Z_m]\}$, baza podprzestrzeni wymiarów $[\Pi]^m \subset [\Pi]^n$, $m \leq n$, jest postaci

$$\Phi(Z_1, \dots, Z_m) = \varphi Z_1^{b_1} \dots Z_m^{b_m}, \quad \mathbf{R} \ni \varphi, b_1, \dots, b_m - \text{stałe}. \quad (6.42)$$

Wzór (6.42) spełnia postulat jednorodności wymiarowej, ponieważ

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha_1 Z_1, \dots, \alpha_m Z_m) &= \varphi(\alpha_1 Z_1)^{b_1} \dots (\alpha_m Z_m)^{b_m} = \varphi \alpha_1^{b_1} \dots \alpha_m^{b_m} Z_1^{b_1} \dots Z_m^{b_m} \\ &= \varphi \alpha Z_1^{b_1} \dots Z_m^{b_m} = \alpha \Phi(Z_1, \dots, Z_m), \end{aligned} \quad (6.43)$$

ale pod warunkiem wykonalności potęgowania liczb $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{R}$.

Zajmiemy się teraz sposobem obliczania wykładników b_1, \dots, b_m . Niech więc wartość funkcji Φ według wzoru (6.42) stanowi związek wielkości Z ze zmiennymi wymiarowymi Z_1, \dots, Z_m , $m \leq n$, których wymiary $[Z_1], \dots, [Z_m]$ tworzą bazę podprzestrzeni $[\Pi]^m \subset [\Pi]^n$ (są bowiem wymiarowo niezależne). Wobec tego, zgodnie z zależnością (6.42), napiszemy

$$Z = \varphi Z_1^{b_1} \dots Z_m^{b_m}, \quad \varphi, b_1, \dots, b_m \in \mathbf{R}. \quad (6.44)$$

Lewa strona tego równania jest znaną wielkością fizyczną, a więc jej jednostki miary oraz wymiar jest również znany. Dlatego, podobnie jak we wzorze (6.15) i zgodnie z oznaczeniami w równaniu (6.29), napiszemy

$$Z = \zeta D_1^{c_1} \dots D_n^{c_n}, \quad \zeta = \{Z\}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}, \quad (6.45)$$

$\{D_1, \dots, D_n\} \subset \{L, M, T, I, \theta, J, R, S\}$ ¹⁾, $k = 1, \dots, n \leq 8$, przy czym liczby c_1, \dots, c_n są znane ($\{\cdot\}$ – jak w (6.11)).

Prawa strona równania (6.44) może być, na razie, zapisana jedynie w bazie $\{[Z_1], \dots, [Z_m]\}$, $m \leq n$, czyli

$$\varphi Z_1^{b_1} \dots Z_m^{b_m} = \varphi \{Z_1\}^{b_1} \dots \{Z_m\}^{b_m} [Z_1]^{b_1} \dots [Z_m]^{b_m} = \varphi \alpha [Z_1]^{b_1} \dots [Z_m]^{b_m}, \\ \varphi, \alpha, b_1, \dots, b_m \in \mathbf{R}, \quad (6.46)$$

ale tutaj właśnie liczby b_1, \dots, b_m są niewiadomymi. Rozwiązywanie zadania będzie możliwe dopiero po przedstawieniu wyrażenia (6.46) w bazie $\{D_1, \dots, D_n\}$, z zastosowaniem znanych już przekształceń wymiarowych, tak jak to robiliśmy poprzednio (wzory (6.30)÷(6.30b), przykład 4.). Skonstruujemy więc macierz $A_{n \times m}$, której kolumny tworzą wykładniki w iloczynach potęgowych

$$[Z_1] = D_1^{a_{11}} \dots D_n^{a_{1n}}, \\ \dots \dots \dots \\ [Z_m] = D_1^{a_{m1}} \dots D_n^{a_{mn}}. \quad (6.47)$$

Zauważmy, że liczby a_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ są znane, gdyż znamy jednostki wielkości Z_1, \dots, Z_m , i zależą tylko od $\{Z_1, \dots, Z_m\}$. Ponieważ wszystkie wymiary argumentów funkcji Φ tworzą bazę, więc w tym zagadnieniu macierz $A_{n \times m}$ przekształcenia wymiarowego jest jedyna

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

Postępowanie jest takie samo jak we wzorach (6.30)–(6.31b) i w przykładzie 4., ale tutaj macierz może być prostokątna, gdyż $m \leq n$. Jeśli oznaczyć

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

¹⁾ Jest to baza kanoniczna w [Π], którą oznaczyliśmy $[E]^8$ (R, S – wymiary kąta i kąta bryłowego, inne symbole jak poprzednio); w SI symbole zastąpią jednostki $\{m, kg, s, A, K, cd, rad, sr\}$.

to, z porównania (6.45) z (6.46), otrzymamy następujące równanie macierzowe o $m \leq n$ niewiadomych współczynnikach b_1, \dots, b_m

$$c = A_{n \times m} b. \quad (6.50)$$

To samo równanie w formie rozwiniętej wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

Wiemy już, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego równania, gdy rząd $A_{n \times m} = m$, pod warunkiem, że układ równań opisany wzorami (6.48)–(6.51) jest niesprzeczny. Jeśli zaś układ równań (6.51) jest sprzeczny, to zadanie zostało źle postawione.

Wynika stąd cenna informacja dla eksperymentatora, który podjął się znalezienia związku $Z = \Phi(Z_1, \dots, Z_m)$. Postawiona przez niego hipoteza o związku funkcyjnym Z z Z_1, \dots, Z_m nie jest bowiem prawdziwa, gdy układ (6.51) jest sprzeczny. Ale niesprzeczność układu (6.51) nie dowodzi poprawności założenia, że $Z = \Phi(Z_1, \dots, Z_m)$. Jeśli natomiast eksperymentator trafnie wybrał zbiór argumentów poszukiwanej funkcji, ich wymiary są zaś wymiarowo niezależne, to dzięki zastosowaniu analizy wymiarowej doświadczenie sprowadzi się do wyznaczenia stałej wartości φ z równania (6.44). Natomiast eksperymentator, który nie zastosuje analizy wymiarowej, jest skazany na identyfikację funkcji m zmiennych wymiarowych, co jest zadaniem jeśli nie skomplikowanym, to na pewno kosztownym i pracochłonnym. W dodatku tak otrzymana funkcja jest zwykle opisana wzorem liczbowym ważnym tylko dla określonych jednostek miary, czyli związkiem niepoprawnie określonym. Wyprowadzone wzory i metodykę obliczania wykładników b_1, \dots, b_m najlepiej jest zilustrować przykładami.

Przykład 5.

Ustalić postać wzoru określającego stratę ciśnienia spowodowaną umieszczeniem w przewodzie kryzy dławiącej o określonej średnicy. Założono, że strata ciśnienia Δp^s zależy od średniej prędkości przepływu v przez rurę i gęstości płynu ρ .

Poszukiwana funkcja to związek

$$\Delta p^s = \Phi(v, \rho). \quad (x)$$

1. Określmy najpierw wymiar przestrzeni wymiarów, więc

$$\left. \begin{array}{l} [\Delta p^s] = [\text{Pa}] = \text{m}^{-1} \text{kg}^1 \text{s}^{-2} \\ [v] = \text{m}^1 \text{kg}^0 \text{s}^{-1} \\ [\rho] = \text{m}^{-3} \text{kg}^1 \text{s}^0 \end{array} \right\} \Rightarrow n = 3. \quad (xi)$$

Przestrzeń ma wymiar $n = 3$ (bo użyto jednostek m, kg, s) wobec liczby argumentów $m = 2$.

2. Konstruujemy macierz przekształcenia wymiarowego i sprawdzamy jejrząd

$$\begin{aligned} [v] &= m^1 k g^0 s^{-1} \\ [\rho] &= m^{-3} k g^1 s^0 \end{aligned} \Rightarrow A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 \\ \mathbf{0} & 1 \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rz } A_{3 \times 2} = 2 \Rightarrow \{[v], [\rho]\} - \text{baza.} \quad (\text{xii})$$

3. Ustalamy ogólną postać funkcji wymiarowej 2 argumentów wymiarowych

$$\Delta p^s = \varphi v^{b_1} \rho^{b_2}. \quad (\text{xiii})$$

4. Układamy równanie macierzowe z niewiadomymi wykładnikami b_1, b_2 .

Zgodnie z (6.51) i (xi), (xii) napiszemy

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 \\ \mathbf{0} & 1 \\ -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{xiv})$$

5. Obliczamy wykładniki b_1, b_2 ; w tym przypadku zadanie jest bardzo łatwe

$$-1 = b_1 - 3b_2 \Rightarrow -1 = 2 - 3,$$

$$1 = b_2 \Rightarrow b_2 = 1,$$

$$-2 = -b_1 \Rightarrow b_1 = 2. \quad (\text{xv})$$

Układ (xiv) jest niesprzeczny, więc

$$\Delta p^s = \varphi v^2 \rho. \quad (\text{xvi})$$

Wzór ten jest znany w postaci

$$\Delta p^s = \zeta \frac{v^2}{2} \rho, \quad (\text{xvii})$$

gdzie ζ to współczynnik oporu miejscowego.

Wnikliwy eksperymentator, badając problem w szerokim zakresie prędkości, wykryje niestałość ζ . Trzeba wtedy zwiększyć zbiór argumentów funkcji wymiarowej, uwzględniając wpływ lepkości (v) i średnic (D, d).

Przykład 6.

Ustalimy postać wzoru z przykładów 3. i 4.

$$\tau_i = \Phi(\rho, dv/dy, y). \quad (\text{xviii})$$

Znamy już wymiar przestrzeni, który wynosi $n = 3$ oraz wiemy, że $[\rho]$, $[dv/dy]$, $[y]$ są wymiarowo niezależne, więc $m = 3$, a macierz przekształcenia wymiarowego jest następująca (wzór (iii))

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -3 & \mathbf{0} & I \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{iii})$$

Ogólna postać poszukiwanego wzoru

$$\tau_t = \varphi \rho^{b_1} \left(\frac{dv}{dy} \right)^{b_2} y^{b_3},$$

przy czym $[\tau_t]$ także znamy (wzór (viii)). Dlatego

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \mathbf{0} & I \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{xix})$$

stąd: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$.

Poszukiwany wzór, zapisany z zastosowaniem tradycyjnej symboliki ($\varphi \equiv \kappa^2$), zapiszemy w postaci

$$\tau_t = \kappa^2 \rho y^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2. \quad (\text{xx})$$

PRZYPADEK 2.

Szukamy postaci funkcji Φ o s argumentach, wśród których jest co najwyżej $m \leq n$ (n – wymiar przestrzeni) argumentów o wymiarach wymiarowo niezależnych i r wymiarowo zależnych od poprzednich, a więc $s = m + r$. Chcemy więc ustalić postać związku

$$\Phi(Z_1, \dots, Z_m, V_1, \dots, V_r), \quad m \leq n, r \geq 1, \quad (6.52)$$

gdzie:

- $\{[Z_1], \dots, [Z_m]\} = [\mathbf{B}]$ – baza podprzestrzeni wymiarów, gdyż są to wymiary wielkości niezależne wymiarowo,
- $[V_1], \dots, [V_r]$ – elementy wymiarowo zależne od wektorów bazy.

W związku z tym, korzystając z wywodów 1. przypadku, napiszemy od razu

$$\Phi(Z_1, \dots, Z_m, V_1, \dots, V_r) = \psi Z_1^{b_1} \dots Z_m^{b_m}, \quad \psi, b_1, \dots, b_m \in \mathbf{R}, \quad (6.53)$$

ale liczba ψ może zależeć od wszystkich argumentów, więc

$$\psi = \psi(Z_1, \dots, Z_m, V_1, \dots, V_r). \quad (6.54)$$

Skorzystamy z tego, że jest to funkcja wymiarowa i jej wartość można zapisać tak samo jak (6.53), więc

$$[\psi(Z_1, \dots, Z_m, V_1, \dots, V_r)] = [Z_1]^{k_1} \dots [Z_m]^{k_m} \Rightarrow k_1 = \dots = k_m = 0, \quad (6.55)$$

bowiem ψ to liczba, ma więc wymiar równy 1.

Znaczy to, że może być tylko

$$\psi = \psi(V_1, \dots, V_r) \quad (6.56)$$

Wielkości V_1, \dots, V_r są wymiarowo zależne od Z_1, \dots, Z_m , napiszemy więc

$$V_1 = \pi_1 Z_1^{d_{11}} \dots Z_m^{d_{m1}}, \quad \pi_1, d_{11}, \dots, d_{m1} \in R, \quad (6.57)$$

a stąd i z (6.56) wynika

$$\psi = \psi(V_1, \dots, V_r) = \varphi(Z_1, \dots, Z_m, \pi_1, \dots, \pi_r), \quad (6.58)$$

ale ψ nie jest funkcją wymiarową Z_1, \dots, Z_m , co już wykazaliśmy, więc

$$\psi = \varphi(\pi_1, \dots, \pi_r) \quad (6.59)$$

Postać funkcji Φ , $m + r$ argumentów, z których m ma wymiary niezależne wymiarowo, jest więc następująca

$$\Phi(Z_1, \dots, Z_m, V_1, \dots, V_r) = \varphi(\pi_1, \dots, \pi_i) Z_1^{b_1} \cdots Z_m^{b_m}, \quad (6.60)$$

gdzie liczby π_1, \dots, π_r są związane z argumentami $Z_1, \dots, Z_m, V_1, \dots, V_r$ przez równania (6.57).

Wzór (6.60) wyraża tzw. zasadnicze twierdzenie analizy wymiarowej sformułowane przez Buckingham, zwane krótko twierdzeniem pi.

Wzór (6.60) ma doniosłe znaczenie dla eksperymentatorów, którzy zamiast badać funkcję $m + r$ zmiennych wymiarowych identyfikują funkcję φ tylko r zmiennych bezwymiarowych π_1, \dots, π_r , których postać wynika z (6.57). Trzeba podkreślić, że wartość argumentu π_i ($i = 1, \dots, r$) może być zmieniona przez zmianę nawet jednego spośród argumentów V_i, Z_1, \dots, Z_m , co istotnie ułatwia badania doświadczalne.

Sposób wyznaczania wykładników potęgowych we wzorach (6.60), (6.57) jest taki sam jak w przypadku funkcji o wymiarach niezależnych wymiarowo. Najlepiej zilustrujemy go wyprowadzając wzór Darcy'ego-Weisbacha. Przy okazji poruszony zostanie problem wyboru bazy przestrzeni wymiarów. Musimy bowiem pamiętać, że w zbiorze $\{Z_1, \dots, Z_m, V_1, \dots, V_r\}$ argumentów funkcji wymiarowej może być wiele baz, wtedy uzyska się wiele wzorów postaci (6.60) i wiele bezwymiarowych zbiorów liczb π_1, \dots, π_r . Wyboru właściwego zestawu dokonują eksperymentatorzy, kierując się kryteriami, które narzucają swoim doświadczeniom. Mogą więc wybrać bazę, która

będzie optymalna ze względu na dokładność aproksymacji funkcji φ argumentów π_1, \dots, π_r , ale kryteria takie mogą być różne, zależne od konkretnej potrzeby.

Przykład 7.

Wyznaczyć stratę energii przypadającą na jednostkę długości rury o średnicy d podczas przepływu płynu o gęstości ρ i kinematycznym współczynnikiem lepkości ν . Średnia prędkość płynu wynosi v , a rura ma chropowatość k .

Rozważymy więc funkcję wymiarową pięciu zmiennych wymiarowych

$$\frac{\Delta p^s}{l} = \Phi(\rho, v, \nu, d, k),$$

gdzie Δp^s – strata ciśnienia na rurze długości l .

1. Jednostki wszystkich występujących tu wielkości dają się przedstawić jako iloczyny potęgowe m, kg, s, więc wymiar przestrzeni $n = 3$. Bazy będą więc miały nie więcej niż $n = 3$ elementy.

2. Tworzymy macierz przekształcenia wymiarowego. Wybierzemy dwa podzbiory ze zbioru wymiarów argumentów (po trzy elementy w każdym) i sprawdzimy, czy tworzą one bazy. Dalsze obliczenia przeprowadzimy równolegle dla dwóch baz:

$$\frac{\Delta p^s}{l} = \Phi(\rho, v, \nu, d, k)$$

$\{[\rho], [d], [v]\}$ – baza?

$$\left. \begin{array}{l} [\rho] = m^{-3} kg^1 s^0 \\ [d] = m^1 kg^0 s^0 \\ [\nu] = m^1 kg^0 s^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow rz \begin{bmatrix} -3 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} = rz A_{3 \times 3} = 3;$$

$$\frac{\Delta p^s}{l} = \Phi(\rho, v, \nu, d, k)$$

$\{[\rho], [d], [\nu]\}$ – baza?

$$\left. \begin{array}{l} [\rho] = m^{-3} kg^1 s^0 \\ [d] = m^1 kg^0 s^0 \\ [\nu] = m^2 kg^0 s^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow rz \begin{bmatrix} -3 & \mathbf{1} & 2 \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & -1 \end{bmatrix} = rz A_{3 \times 3} = 3$$

$\{[\rho], [d], [v]\}, \{[\rho], [d], [\nu]\}$ – bazy.

3. Ogólna postać wzoru

$$\frac{\Delta p^s}{l} = \varphi(\pi_1, \pi_2) \rho^{b_1} d^{b_2} v^{b_3}, \quad \frac{\Delta p^s}{l} = \varphi(\pi_1, \pi_2) \rho^{b_1} d^{b_2} v^{b_3},$$

$$b = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T.$$

4. Wymiar wielkości $\Delta p^s/l$: $[\Delta p^s/l] = m^{-2} \text{ kg}^I \text{ s}^{-2}$, stąd

$$c = [-2 \ I \ -2]^T,$$

równanie macierzowe o niewiadomej macierzy kolumnowej b

$$c = A_{3 \times 3} b$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ I \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ I \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

skąd po obliczeniach

$$b = [1 \ -1 \ 2]^T, \quad b = [1 \ -3 \ 2]^T,$$

$$\frac{\Delta p^s}{l} = \varphi(\pi_1, \pi_2) \rho^1 d^{-1} v^2, \quad \frac{\Delta p^s}{l} = \varphi(\pi_1, \pi_2) \rho^1 d^{-3} v^2.$$

5. Liczby π_1, π_2

$$\nu = \pi_1 \rho^{d_{11}} d^{d_{21}} v^{d_{31}} \Rightarrow d_1 = [d_{11} \ d_{21} \ d_{31}]^T, \quad \nu = \pi_1 \rho^{d_{11}} d^{d_{21}} v^{d_{31}} \Rightarrow d_1 = [d_{11} \ d_{21} \ d_{31}]^T,$$

$$k = \pi_2 \rho^{d_{12}} d^{d_{22}} v^{d_{32}} \Rightarrow d_2 = [d_{12} \ d_{22} \ d_{32}]^T, \quad k = \pi_2 \rho^{d_{12}} d^{d_{22}} v^{d_{32}} \Rightarrow d_2 = [d_{12} \ d_{22} \ d_{32}]^T,$$

$$[\nu] = m^2 kg^0 s^{-1} \Rightarrow e_1 = [2 \ 0 \ -1]^T, \quad [\nu] = m^1 kg^0 s^{-1} \Rightarrow e_1 = [1 \ 0 \ -1]^T,$$

$$[k] = m^1 kg^0 s^0 \Rightarrow e_2 = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad [k] = m^1 kg^0 s^0 \Rightarrow e_2 = [1 \ 0 \ 0]^T.$$

Równania na niewiadome d_{ij}

$$e_i = A_{3 \times 3} d_i, \quad i = 1, 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{bmatrix}.$$

skąd

$$\begin{aligned} d_1 &= [0 \ 1 \ 1]^T, & d_1 &= [0 \ -1 \ 1]^T, \\ d_2 &= [0 \ 1 \ 0]^T, & d_2 &= [0 \ 1 \ 0]^T, \\ \pi_1 &= \frac{\nu}{\rho^0 d^1 v^1}, & \pi_1 &= \frac{\nu}{\rho^0 d^{-1} v^1}, \\ \pi_2 &= \frac{k}{\rho^0 d^1 v^0}, & \pi_2 &= \frac{k}{\rho^0 d^1 v^0}. \end{aligned}$$

Po podstawieniach i uporządkowaniu

$$\frac{\Delta p^s}{l} = \varphi\left(\frac{\nu}{vd}, \frac{k}{d}\right) \frac{v^2}{d} \rho, \quad \frac{\Delta p^s}{l} = \varphi\left(\frac{vd}{v}, \frac{k}{d}\right) \frac{v^2}{d^3} \rho.$$

Obydwa wzory są formalnie poprawne, ale na uwagę zasługuje tylko ten z nich, w którym jawnie występuje zależność strat energetycznych od prędkości. Z codziennych obserwacji wynika, że straty energetyczne rosną z prędkością ruchu, więc wzór, który tę prostą prawdę odzwierciedla, wybieramy jako wynik poszukiwania postaci wzoru określającego straty energetyczne. Jest to powszechnie stosowany wzór Darcy'ego–Weisbacha, który zapiszemy z zastosowaniem tradycyjnej symboliki w postaci

$$\Delta p^s = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \rho, \quad \lambda = \lambda(\text{Re}, \varepsilon), \quad (6.61)$$

gdzie:

$\text{Re} = vd/\nu$ – liczba Reynoldsa,

λ – liniowy współczynnik oporu,

$\varepsilon = k/d$ – chropowatość względna rurociągu.

W miejsce więc funkcji Φ o pięciu zmiennych wymiarowych pozostała do wyznaczenia doświadczalnego funkcja λ zaledwie dwu zmiennych bezwymiarowych.

6.3.5. PODOBIĘSTWO MODELOWE

Przepływy nazywamy dynamicznie podobnymi, jeśli w odpowiadających sobie punktach obu zjawisk (rzeczywistego i modelowego) oraz odpowiadających sobie chwilach dowolna wartość określonego parametru fizycznego w przepływie rzeczywistym jest proporcjonalna do analogicznego parametru w przepływie modelowym. Zjawiska uważamy za podobne, gdy:

- przebiegają w obszarach geometrycznie podobnych,

¹⁾ Zauważmy, że było: $\varphi(v/dv, k/d) = \varphi(1/\text{Re}, k/d)$, stąd: $\varphi(1/\text{Re}, k/d) = \lambda(\text{Re}, k/d)$.

➤ pola wszystkich wielkości fizycznych, opisujących dane zjawisko, są do siebie podobne.

Najistotniejsza jest sprawa wykorzystania wyników badań modelowych i tutaj niezwykle pomocna jest *teoria podobieństwa przepływów*, na podstawie której można ustalić warunki podobieństwa, jakie muszą być spełnione dla zachowania podobieństwa zjawisk przepływowych. Warunki te mają charakter geometryczny, kinematyczny i dynamiczny.

Podobieństwo geometryczne polega na podobieństwie wymiarów i kształtów obiektu rzeczywistego i modelowego. Gdy oryginał i jego model są geometrycznie podobne, wówczas odpowiadające sobie wymiary liniowe są proporcjonalne. Stosunek tych wymiarów nazywamy skalą podobieństwa liniowego – ξ .

Podobieństwo kinematyczne polega przede wszystkim na podobieństwie pól prędkości. Zachodzi ono wtedy, gdy przebieg linii prądu w przepływie rzeczywistym i modelowym jest podobny. Ten warunek jest najczęściej spełniony wraz ze spełnieniem odpowiednich warunków podobieństwa dynamicznego.

Problem *podobieństwa dynamicznego* zjawisk można rozwiązać dwoma sposobami:

1. Za pomocą analizy wymiarowej opartej na twierdzeniu Buckinghama (pi); podejście to opiera się na znajomości zbioru wielkości fizycznych koniecznych i dośćatecznych do pełnego opisu przebiegu zjawisk. Znajomość równań określających zjawisko nie jest tu potrzebna.

2. Na podstawie analizy równań określających zjawisko (nie ich rozwiązania, lecz postać) w przepływie rzeczywistym i modelowym.

W wyniku każdego z tych sposobów otrzymuje się bezwymiarowe *liczby podobieństwa* (zwane niekiedy liczbami kryterialnymi), które mogą mieć znaczenie fizyczne.

1. Modelowanie zjawiska opisanego za pomocą funkcji wymiarowych

Rozpatrzmy zjawisko rzeczywiste opisane za pomocą funkcji wymiarowej, wymiarowo niezmienniczej i jednorodnej (wzór (6.52))

$$Z = \Phi(Z_1, \dots, Z_m, V_1, \dots, V_r), \quad (6.62)$$

w której:

Z_i ($i = 1, \dots, m$) – argumenty wymiarowo niewzależne,

V_j ($j = 1, \dots, r$) – argumenty wymiarowo zależne od Z_i .

Analogiczne zjawisko modelowe opisane jest tą samą funkcją Φ , ale o argumentach $Z'_1, \dots, Z'_m, V'_1, \dots, V'_r$, których wymiary są odpowiednio równe wymiarom argumentów ze wzoru (6.62), różnią się natomiast wartościami liczbowymi. Napiszmy zatem

$$Z_i = \xi_i Z'_i \quad V_j = \lambda_j V'_j \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, r), \quad (6.63)$$

ξ_i, λ_j – liczby dodatnie zwane skalami.

W odniesieniu do modelu można więc napisać

$$Z' = \Phi(Z'_1, \dots, Z'_m, V'_1, \dots, V'_r). \quad (6.64)$$

Wzory (6.62) i (6.64) określają dwie wersje tego samego zjawiska; pierwszą z nich (Z) będziemy nazywać *zjawiskiem rzeczywistym* (oryginałem), drugą (Z') – *zjawiskiem modelowym* (modelem).

Zgodnie z twierdzeniem pi (wzór (6.60)) i po skorzystaniu z zależności (6.63) piszemy

$$\begin{aligned} Z &= \varphi(\pi_1, \dots, \pi_r) (\xi_1 Z'_1)^{b_1} \dots (\xi_m Z'_m)^{b_m} \\ &= \varphi(\pi_1, \dots, \pi_r) \xi_1^{b_1} \dots \xi_m^{b_m} (Z'_1)^{b_1} \dots (Z'_m)^{b_m}, \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$Z' = \varphi(\pi'_1, \dots, \pi'_r) (Z'_1)^{b_1} \dots (Z'_m)^{b_m}, \quad (6.66)$$

przy czym (wzory (6.57), (6.63))

$$\pi_i = \frac{V_i}{Z_1^{d_{1i}} \dots Z_m^{d_{mi}}}, \quad \pi'_i = \frac{V'_i}{(Z'_1)^{d_{1i}} \dots (Z'_m)^{d_{mi}}}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (6.67)$$

Interesuje nas skala przejścia od oryginału do modelu

$$\xi_z = \frac{Z}{Z'} = \frac{\varphi(\pi_1, \dots, \pi_r)}{\varphi(\pi'_1, \dots, \pi'_r)} \left(\frac{Z_1}{Z'_1} \right)^{b_1} \dots \left(\frac{Z_m}{Z'_m} \right)^{b_m}. \quad (6.68)$$

Jeśli model i doświadczenie będzie zaprojektowane tak, że możliwe będzie spełnienie warunków

$$\pi_i = \pi'_i, \quad (i = 1, \dots, r), \quad (6.69)$$

to z (6.65)–(6.68) wynika, że skala ξ_z przejścia od oryginału do modelu nie zależy od postaci funkcji φ i wynosi

$$\xi_z = \xi_1^{b_1} \dots \xi_m^{b_m}. \quad (6.70)$$

Z równań (6.67), (6.69) i po uwzględnieniu wzoru (6.63) wynika, że skale ξ_1, \dots, ξ_m oraz λ_j muszą spełniać następujący układ równań

$$\lambda_j = \xi_1^{d_{1j}} \dots \xi_m^{d_{mj}} \quad (j = 1, \dots, r). \quad (6.71)$$

Dwa zjawiska rzeczywiste (oryginał) i modelowe (model) będące uważać za podobne, jeśli wielkości bezwymiarowe π_i (w zjawisku rzeczywistym) i π'_i (w zjawisku modelowym) są sobie równe. Liczby bezwymiarowe π_i, π'_i będziemy nazywać *liczbami podobieństwa*, a warunki (6.69) *kryteriami podobieństwa*.

W praktyce nie zawsze udaje się stworzyć model, który zapewni równość wszystkich liczb podobieństwa i zmuszeni jesteśmy zadowolić się podobieństwem częściowym, spełniającym równość tylko ważniejszych, w danym zjawisku, liczb podobieństwa.

Warto zwrócić uwagę, że do opisania zjawiska jest potrzebna znajomość funkcji φ . Doświadczenie trzeba zatem tak zorganizować, aby – zmieniając argumenty π_i funkcji φ , w możliwie szerokich granicach – otrzymać taką liczbę wyników pomiarów, która pozwoli na dostatecznie dokładną aproksymację funkcji

$$\varphi: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R} \supset \frac{Z}{(Z'_1)^{b_1} \dots (Z'_m)^{b_m}}. \quad (6.72)$$

Powróćmy teraz do przykładu 7. z p. 6.3.4 i wyprowadzonego wzoru Darcy'ego–Weisbacha, który zapiszemy w postaci

$$\Delta p^s = \lambda \left(\text{Re}, \frac{k}{d} \right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \rho.$$

Oznaczmy poszczególne skale:

$$\xi_\rho = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \xi_d = \frac{d}{d'}, \quad \xi_v = \frac{v}{v'}, \quad \lambda_v = \frac{v}{v'}, \quad \lambda_k = \frac{k}{k'} = \frac{d}{d'} = \xi_d \equiv \xi_l^{(1)}.$$

Skala przejścia od oryginału do modelu będzie następująca

$$\xi_{\Delta p^s/l} = \frac{\Delta p^s/l}{\Delta p^{s'}/l'} = \frac{\xi_v^2 \xi_\rho}{\xi_l},$$

pod warunkiem, że są spełnione następujące kryteria podobieństwa

$$\frac{v d}{v} = \frac{v' d'}{v'} = \text{Re} \quad \wedge \quad \frac{k}{d} = \frac{k'}{d'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\xi_v \xi_d}{\xi_v} = 1 \quad \wedge \quad \frac{\lambda_k}{\xi_d} = 1.$$

We wzorze tym otrzymaliśmy warunek podobieństwa geometrycznego, wyrażony przez to, że skale λ_k i ξ_d muszą być sobie równe (zakładamy podobieństwo kształtów nierówności). Jak widać, podobieństwo geometryczne nie wymaga zachowania skali długości rur l i l' , ponieważ strata ciśnienia jest odniesiona do jednostki długości.

W badaniach modelowych wpływ wymiarów liniowych uwzględniamy, podając we wzorze (6.62) najczęściej jeden wymiar charakterystyczny, a wyniki pomiarów na modelu przenosimy na geometrycznie podobne obiekty rzeczywiste zgodnie z wzorami (6.68) i (6.69).

2. Modelowanie zjawiska opisanego za pomocą równań

W wielu zagadnieniach przepływowych dysponujemy równaniami opisującymi zjawisko, ale występują trudności z ich rozwiązyaniem albo pojawia się potrzeba wery-

¹⁾ Jest to skala liniowa, stąd oznaczenie ξ_l .

fikacji poprawności rozwiązań (zwykle numerycznych). Wówczas również odwołujemy się do badań modelowych. Kryteria podobieństwa i skale można otrzymać z równań opisujących rozważane zjawisko.

W celu pokazania sposobu wyznaczania kryteriów podobieństwa na podstawie równania różniczkowego, rozważmy równanie Naviera–Stokesa (6.7), określające przepływ płynu o gęstości $\rho = \text{const}$, w obiekcie rzeczywistym i jego modelu. Zakładamy, że podobieństwo warunków brzegowych dla tego zagadnienia jest spełnione.

Napiszmy zatem równanie N–S dla zjawiska rzeczywistego (ponieważ równania (6.7) są formalnie takie same – więc tylko dla wspólnej x)

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (6.73)$$

Przepływ w modelu musi określać takie samo równanie, ponieważ zjawiska mają być podobne (mogą się różnić tylko wartości liczbowe w oryginale i modelu)

$$X' - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu'}{\rho'} \nabla^2 v'_x = \frac{\partial v'_x}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'}. \quad (6.74)$$

Podobnie jak we wzorze (6.63), wprowadźmy odpowiednie skale wielkości występujących w równaniach N–S. Są to skale:

sił masowych	$-\xi_f = X/X' = \dots = a/a' = \xi_a$,
gęstości	$-\xi_\rho = \rho/\rho'$,
liniowa	$-\xi_x = x/x' = \dots l/l' \equiv \xi_l$ (l – liniowy wymiar charakterystyczny),
ciśnienia	$-\xi_p = p/p'$,
lepkości	$-\xi_\mu = \mu/\mu' = \nu \rho/\nu' \rho' = \xi_\nu \xi_\rho$,
prędkości	$-\xi_v = v_x/v'_x = \dots = v/v'$,
czasu	$-\xi_t = t/t'$.

Skale wszystkich składowych wektorów muszą być sobie równe, co jest konieczne dla zachowania podobieństwa pól wektorowych. Skalę liniową przyjmujemy dla całego obiektu, stąd równość skal dla dowolnego wymiaru liniowego i dla każdej wspólnej.

Po podstawieniu w miejsce wielkości występujących w modelu wartości z oryginału podzielonych przez odpowiednie skale otrzymamy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi_a} X - \xi_\rho \frac{1}{\rho} \frac{\xi_l}{\xi_p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\xi_\rho}{\xi_\mu} \frac{\mu}{\rho} \frac{\xi_l^2}{\xi_v} \nabla^2 v_x \\ &= \frac{\xi_t}{\xi_v} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\xi_l}{\xi_v^2} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Równanie (6.75), które określa przepływ w modelu, różni się od równania (6.79), opisującego przepływ w oryginale tylko współczynnikami liczbowymi, złożonymi z iloczynów potęgowych skal, przy poszczególnych składnikach sumy.

Jeśli przyjąć

$$\frac{1}{\xi_a} = \xi_\rho \frac{\xi_l}{\xi_p} = \frac{\xi_\rho}{\xi_\mu} \frac{\xi_l^2}{\xi_v} = \frac{\xi_t}{\xi_v} = \frac{\xi_l}{\xi_v^2} = \text{const}, \quad (6.76)$$

to równania (6.73) i (6.75) stają się równoważne¹⁾, opisują więc te same zjawiska. Jak widać, w celu uzyskania pełnego podobieństwa fizycznego siedem skal poszczególnych wielkości nie może być dowolnych, lecz muszą być tak dobrane, by spełniały równość (6.76). Porównując między sobą poszczególne wielkości (tradycyjnie każdy wyraz przymierza się do ξ_l/ξ_v^2), otrzymuje się następujące związki między skalami:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi_a} = \frac{\xi_l}{\xi_v^2} &\Leftrightarrow \frac{\xi_a \xi_l}{\xi_v^2} = 1, \\ \frac{\xi_\rho \xi_l}{\xi_p \xi_v} = \frac{\xi_l}{\xi_v^2} &\Leftrightarrow \frac{\xi_\rho \xi_v^2}{\xi_p} = 1, \\ \frac{\xi_\rho \xi_l^2}{\xi_\mu \xi_v} = \frac{\xi_l}{\xi_v^2} &\Leftrightarrow \frac{\xi_v \xi_l}{\xi_\nu} = 1, \\ \frac{\xi_t}{\xi_v} = \frac{\xi_l}{\xi_v^2} &\Leftrightarrow \frac{\xi_v \xi_t}{\xi_l} = 1. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Po uwzględnieniu wyrażeń definiujących skale, zależności (6.77) łatwo sprowadzić do postaci bezwymiarowych, zwanych *liczbami podobieństwa*:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{a l} = \frac{v'^2}{a' l'} &= \text{Fr} - \text{liczba Froude'a}, \\ \frac{\rho v^2}{p} = \frac{\rho' v'^2}{p'} &= \text{Eu} - \text{liczba Eulera}, \\ \frac{v l}{v} = \frac{v' l'}{v'} &= \text{Re} - \text{liczba Reynoldsa}, \\ \frac{v t}{l} = \frac{v' t'}{l'} &= \text{St} - \text{liczba Strouhal}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

¹⁾ Każde równanie wolno pomnożyć przez liczbę różną od zera.

Kryteria podobieństwa zjawisk opisanych równaniem Naviera–Stokesa są więc równościami liczb Froude'a, Eulera, Reynoldsa i Strouhala w przepływie rzeczywistym i modelowym. Każda z tych liczb ma określone znaczenie fizyczne.

Liczba Froude'a Fr określa stosunek siły bezwładności do siły ciężkości

$$\text{Fr} = \frac{v^2}{g l} . \quad (6.79)$$

Kryterium to dotyczy zjawisk odbywających się pod przeważającym wpływem sił ciężkości (przepływy w kanałach otwartych, ruch falowy itp.).

Liczba Eulera Eu określa stosunek siły bezwładności do siły wywołanej działaniem ciśnienia (zwykle różnicy ciśnień). Liczba ta może wyrażać również stosunek ciśnienia dynamicznego do różnicy ciśnień między dwoma punktami

$$\text{Eu} = \frac{\rho v^2}{p} . \quad (6.80)$$

Kryterium to jest najczęściej stosowane w przepływach gazów z dużymi prędkościami (w dynamice gazów). W tych zagadnieniach ściśliwość gazu wpływa na zmiany gęstości, a zatem istotną rolę odgrywa ten wyraz równości (6.76).

Liczba Reynoldsa Re wyraża stosunek siły bezwładności do siły lepkości (tarcia)

$$\text{Re} = \frac{v l}{\nu} . \quad (6.81)$$

W przepływach, w których główną rolę odgrywa lepkość (przepływy w przewodach zamkniętych, opływy itp.) nabierają znaczenia te wyrazy równości (6.76), które określają siłę lepkości. Gdy wymiary modelu są mniejsze od obiektu rzeczywistego, wówczas w przypadku stosowania tego samego płynu, dla zachowania równości liczb Re, należy odpowiednio zwiększyć prędkość. Małym wartościami liczb Reynoldsa odpowiadają przepływy, w których dominują siły lepkości, nazwane przepływami laminarnymi. Duże wartości liczby Re są natomiast związane z przepływami, w których siły lepkości są małe w porównaniu z siłami bezwładności – nazwanymi przepływami turbulentnymi.

Liczba Strouhala St jest parametrem charakteryzującym przepływy nieustalone, w których dominującą rolę odgrywają przyśpieszenia lokalne

$$\text{St} = \frac{v t}{l} . \quad (6.82)$$

Liczba ta, interpretowana jako bezwymiarowy czas ($\text{St} = t/(l/v)$), jest parametrem w zjawiskach zależnych od czasu.

Równoczesne spełnienie równań choćby dwóch liczb kryterialnych nie zawsze jest możliwe. Uwzględniając tylko liczby Fr i Re, otrzymamy

$$\frac{v^2}{g l} = \frac{v'^2}{a' l'} \quad \wedge \quad \frac{v l}{\nu} = \frac{v' l'}{\nu'} , \quad (6.83)$$

skąd wynika następująca zależność między skalami

$$\xi_l = \left(\sqrt[3]{\frac{\xi_v}{\sqrt{\xi_a}}} \right)^2, \quad (6.84)$$

która dla obiektu i modelu znajdującego się w polu przyciągania ziemskiego ($\xi_a = 1$) przyjmuje postać

$$\xi_l = \xi_v^{2/3}, \quad (6.85)$$

wobec tego, w wielu przypadkach gdy $\xi_l \neq 1$, nie można zrealizować badań modelowych, posługując się płynem występującym w oryginale. Dobranie odpowiedniego płynu modelowego może być trudne, ponieważ płyty nadające się do badań modelowych mają określone właściwości, które nie jest łatwo zmieniać.

W badaniach modelowych na ogół nie udaje się uzyskać podobieństwa zupełnego. Zachowuje się tylko niektóre kryteria podobieństwa, kierując się interpretacją fizyczną liczb kryterialnych. Mówimy wówczas o *podobieństwie częściowym*.

Należy zaznaczyć, że omówione liczby kryterialne wywodzą się z równania Naviera–Stokesa, a więc dotyczą warunków podobieństwa przepływów bez wymiany ciepła. W przypadku ruchu ciepła w grę wchodzą dalsze liczby, np. liczba Prandtla – Pr czy liczba Nusselta – Nu , które omówiono w innych podręcznikach.

6.4. PRZEPŁYW LAMINARNY

6.4.1. ISTOTA PRZEPŁYWU LAMINARNEGO

W ruchu laminarnym elementy płynu poruszają się po torach prostych lub łagodnie zakrzywionych, w zależności od kształtu ścian sztywnych, które nadają kształt wszystkim liniom prądu. Sprawia to wrażenie, jakby płyn poruszał się warstwami, miedzy którymi nie odbywa się wymiana płynu (stąd nazwa przepływ uwarstwiony). W rzeczywistości wymiana taką nie odbywa się tylko w skali makroskopowej, wiadomo natomiast, że poszczególne molekuły płynu wykonują bezładny ruch, dzięki któremu zmieniają swoje położenie (dyfuzja molekularna). W ruchu laminarnym mamy zatem do czynienia z wymianą masy, a z nią i pędu w skali mikroskopowej, co jest przyczyną występowania naprzeczeń stycznych, określonych wzorem Newtona (1.15).

Podczas przepływu laminarnego, charakteryzującego się przewagą sił lepkości nad siłami bezwładności, wszelkie powstające przypadkowo zaburzenia są tłumione, zatem przepływ ten jest stateczny (stabilny).

Jednym z najprostszych przypadków ruchu płynu lepkiego nieściśliwego jest ustalony ruch laminarny w rurze o stałym przekroju, podczas którego linie prądu są prostymi równoległymi do osi rury. Liczne doświadczenia wskazują, że ruch taki może zachodzić, jeśli tylko liczba Reynoldsa nie przekracza krytycznej wartości

$$\text{Re}_{\text{kr}} = \frac{v d_z}{\nu} \leq 2300, \quad (6.86)$$

gdzie:

v – średnia prędkość płynu w przewodzie,

d_z – średnica lub średnica zastępcza obliczana z zależności

$$d_z = 4 A/U \quad (A - \text{przekrój przepływowaty}, U - \text{obwód zwilżony}),$$

ν – kinematyczny współczynnik lepkości.

Gdy przekroczena zostanie wartość Re_{kr} , przepływ może utracić stateczność i prowadzone tu rozważania go nie obejmują.

Analizowane w dalszym ciągu przypadki przepływu mogą znaleźć praktyczne zastosowanie podczas rozpatrywania przepływów płynów z małymi prędkościami, przepływów w kapilarach lub też przepływów cieczy o dużej lepkości.

Rozpatrzmy ustalony, laminarny przepływ izotermiczny płynu nieściśliwego przewodem walcowym¹⁾ w kierunku osi ξ . Przekrój przewodu nie zmienia się więc wzdłuż osi, a przewód jest nachylony do poziomu pod kątem α . Początek układu współrzędnych ξ, η, ζ leży w przekroju poprzecznym 1. i w odległości l za nim (idąc w kierunku ruchu) umieścimy przekrój 2. (rys. 6.1). Równanie Naviera–Stokesa (6.8) w postaci wektorowej jest następujące

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (6.87)$$

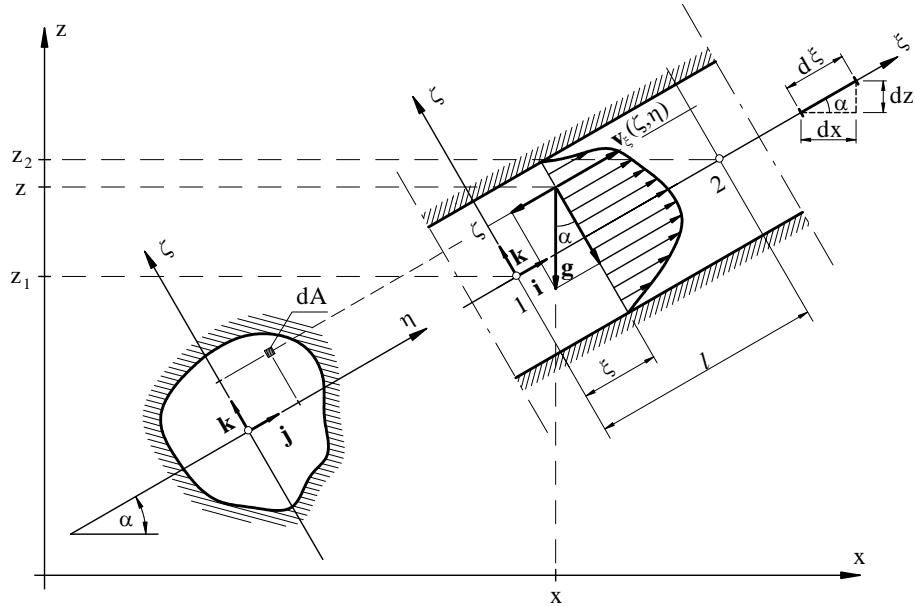
Po uwzględnieniu przyjętych założeń poszczególne wektory składowe (w układzie ξ, η, ζ) będą następujące:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (0, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (-g \sin \alpha, 0, -g \cos \alpha), \\ \text{grad } p &= \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}, \frac{\partial p}{\partial \eta}, \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right), \\ \nabla^2 \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \zeta^2}, 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (6.88)$$

Uwzględniono więc, że ruch jest ustalony ($\partial H / \partial t = 0$ ($H \in \{\mathbf{v}, p\}$)), prędkość nie zmienia się wzdłuż ξ ($\partial \mathbf{v} / \partial \xi \equiv \mathbf{0}$), istnieje tylko składowa prędkości \mathbf{v}_ξ równoległa do ściany rury, ruch odbywa się w polu sił ciężkości ($\mathbf{f} \equiv \mathbf{g}$), jest izotermiczny ($\mu = \text{const}$), a płyn jest nieściśliwy ($\rho = \text{const}$).

¹⁾ Walec jest powierzchnią o tworzących równoległych. Rury są walcami, np. rura o przekroju kołowym to rura cylindryczna, są rury prostokątne, eliptyczne itd.



Rys. 6.1. Przepływ laminarny w przewodzie

Odpowiadający równaniu (6.87) układ trzech równań skalarnych będzie miał formę

$$\begin{aligned} 0 &= -g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \zeta^2} \right), \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \\ 0 &= -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Ponieważ $\partial p / \partial \eta = 0$, p pozostaje funkcją tylko zmiennych ξ, ζ , więc

$$p = p(\xi, \zeta), \quad (6.90)$$

zatem

$$-\rho g \sin \alpha - \frac{\partial p}{\partial \xi} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v_\xi}{\partial \zeta^2} \right) = 0, \quad (6.91)$$

$$-\rho g \cos \alpha - \frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0.$$

Oznaczmy energię potencjalną płynu w punkcie o współrzędnych ξ, ζ albo x, z , przypadającą na jednostkę objętości, symbolem e_p , wtedy

$$e_p = p + \rho g z. \quad (6.92)$$

Po uwzględnieniu prostych zależności geometrycznych między współrzędnymi ξ, ζ i x, z , a wynikających wprost z rysunku, będzie

$$e_p = p + (z_1 + \xi \sin \alpha + \zeta \cos \alpha) \rho g = e_p(\xi, \zeta), \quad (6.93)$$

skąd, po obliczeniu pochodnych cząstkowych $p(\xi, \zeta)$ względem ξ, ζ otrzyma się:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial \xi} &= -\frac{\partial e_p}{\partial \xi} + \rho g \sin \alpha, \\ -\frac{\partial p}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial e_p}{\partial \zeta} + \rho g \cos \alpha. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Podstawienie tego wyniku do (6.91) daje

$$\begin{aligned} -\frac{\partial e_p}{\partial \xi} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_{\xi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v_{\xi}}{\partial \zeta^2} \right) &= 0, \\ -\frac{\partial e_p}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Z ostatniego równania wynika bardzo ważny wniosek. Mianowicie

$$e_p = e_p(\xi) \Rightarrow \frac{\partial e_p}{\partial \xi} = \frac{de_p}{d\xi}, \quad (6.96)$$

co oznacza, że w całym przekroju poprzecznym przewodu jednostkowa energia potencjalna $e_p = p + \rho g z$ jest ustalona. Można ją więc obliczyć w dowolnym punkcie przekroju poprzecznego rury, prostopadłego do osi ξ , gdyż jej zmiany zachodzą tylko wzdłuż kierunku ruchu. Zmiany te, wynikające ze strat energetycznych, są skutkiem tarcia lepkiego między równoległymi warstwami płynu poruszającego się ruchem laminarnym. Energia ta musi więc spadać w kierunku ruchu, tzn.

$$\frac{de_p}{d\xi} < 0. \quad (6.97)$$

Dwa równania (6.95) redukują się zatem do jednego

$$\frac{de_p}{d\xi} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_{\xi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v_{\xi}}{\partial \zeta^2} \right), \quad (6.98)$$

w którym lewa strona jest funkcją ξ , prawa pozostałych zmiennych η i ζ . Stąd wniosek, że lewa i prawa strona tego równania są równe tej samej stałej, czyli spadek energii następuje liniowo wzduż ξ .

Pochodną energii e_p względem ξ można więc zastąpić ilorazem różnicowym, ale trzeba pamiętać o warunku (6.97), wtedy

$$\frac{de_p}{d\xi} = -\frac{(p_1 - p_2) + \rho g(z_1 - z_2)}{l}, \quad (6.99)$$

przy czym

$$\frac{\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2)}{l} \equiv I \quad (6.100)$$

jest nazywany spadkiem hydraulicznym. Obliczyliśmy go, biorąc rzędne z_1 , z_2 i ciśnienie p_1 , p_2 na osi rury, gdyż energia w każdym punkcie przekroju poprzecznego jest jednakowa. Ostatecznie poszukiwane równanie ruchu jest postaci

$$-I = \frac{v}{g} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \right), \quad (6.101)$$

gdzie jedyną współrzędną prędkości oznaczono w skrócie literą v (zamiast v_ξ).

Jak widać, prędkość $v_\xi \equiv v = v(\eta, \zeta)$ zależy od spadku hydraulicznego I (wzór (6.100)), czyli dla określonego spadku hydraulicznego; danej rury i płynu, bryła prędkości będzie taka sama w rurze poziomej, jak i pochylonej czy pionowej.

W dalszym ciągu można ograniczyć rozważania do rur poziomych, nie umniejszając ich ogólności¹⁾. Założenia o pomijaniu sił masowych, spotykane powszechnie w literaturze, sprowadzające zastosowanie takich rozwiązań do nierealnych w praktyce (z wyjątkiem statków kosmicznych) przypadków nieważkości, nie są więc potrzebne.

6.4.2. DOKŁADNE ROZWIĄZANIA RÓWNANIA NAVIERA-STOKESA

Laminarny przepływ płaski

Rozpatrzmy laminarny, ustalony przepływ cieczy nieściśliwej między dwiema nieruchomoymi, równoległymi ścianami, oddalonymi od siebie o $2h$ (rys. 6.2). Jest to szczególny przypadek przepływu przez przewód o przekroju prostokątnym o bokach odpowiednio równych $2h$ oraz ∞ , ale jest on także przepływem przez szczególny walc, którego kierownicą są dwie proste równoległe (a więc przecinające się w nieskończoności).

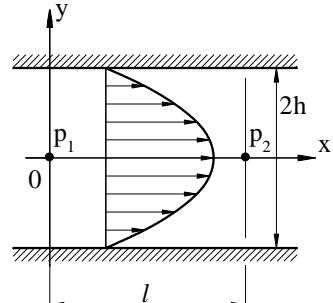
¹⁾ W równaniu (6.101) liczy się tylko I , niezależnie od tego czy uzyskane w wyniku różnicy ciśnień, pochylenia rury, czy obydwoj tych przyczyn łącznie.

czoności)¹⁾. Taki przepływ jest nazywany płaskim przepływem Poiseuille'a. Wówczas $\partial v / \partial \eta = 0$ i równanie (6.101) staje się zwyczajnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu, w którym przyjęto tradycyjnie oznaczenia osi: x, y

$$\frac{v}{g} \frac{d^2 v}{dy^2} = -I. \quad (6.102)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu równania (6.102) otrzymamy

$$v = -\frac{I g}{2v} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (6.103)$$



Rys. 6.2. Płaski przepływ laminarny Poiseuille'a

Z warunku zanikania prędkości na ścianie ($y = \pm h \Rightarrow v = 0$) wyznaczamy stałe całkowania

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{I g}{2v} h^2.$$

Równanie (6.103) przyjmuje więc ostatecznie postać

$$v = \frac{I g}{2v} h^2 \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right), \quad (6.104)$$

określającą rozkład prędkości w szczelinie płaskiej podczas przepływu laminarnego.

Krzywa rozkładu prędkości jest parabolą kwadratową. Maksymalna prędkość występuje w płaszczyźnie symetrii ($y = 0$) i wynosi

$$v_{\max} = \frac{I g h^2}{2v}. \quad (6.105)$$

Znając rozkład prędkości w przekroju poprzecznym, możemy określić strumień objętości przypadający na jednostkę szerokości szczeliny

$$q_v = \int_{-h}^{+h} v \, dy = \frac{2 I g h^3}{3v}, \quad (6.106)$$

¹⁾ Nie tracimy na ogólności, rozważając kanał poziomy, gdyż po prawej stronie równania występuje spadek hydrauliczny I według wzoru (6.100).

a następnie średnią prędkość przepływu

$$v_{\text{sr}} = \frac{q_V}{2h} = \frac{Ig h^2}{3v} = \frac{2}{3} v_{\max}. \quad (6.107)$$

W zagadnieniach technicznych często jest potrzebna znajomość zależności spadku ciśnienia od strumienia objętości lub prędkości średniej. Możemy ją wyznaczyć, przekształcając wzór (6.107)

$$\Delta p = \frac{3\mu l v_{\text{sr}}}{h^2}, \quad (6.108)$$

przy czym tutaj $I = \Delta p / \rho g l$. A zatem: *spadek ciśnienia jest wprost proporcjonalny do pierwszej potęgi prędkości średniej, dynamicznego współczynnika lepkości i długości, na której występuje ten spadek oraz odwrotnie proporcjonalny do drugiej potęgi wysokości szczeliny.*

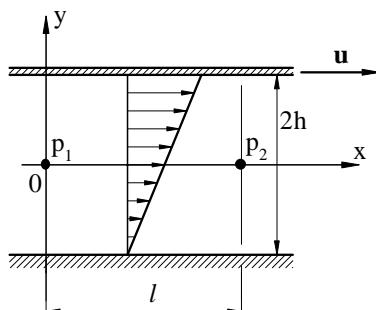
Po wprowadzeniu współczynnika λ (nazywanego współczynnikiem strat liniowych) oraz średnicy zastępczej d_z możemy określić spadek ciśnienia wzdłuż szczeliny według formuły Darcy'ego–Weisbacha

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d_z} \frac{\rho v_{\text{sr}}^2}{2}, \quad (6.109)$$

w której $d_z = 4(2h b)/(2h + 2b) = 4h/(h/b + 1) = 4h$, wobec $h/b \rightarrow 0$.

Liczba Reynoldsa natomiast $Re = v_{\text{sr}} d_z / v$ i wtedy liniowy współczynnik oporu $\lambda = 96/Re$.

W dalszym ciągu rozpatrzmy ustalony przepływ między dwiema poziomymi równoległymi płaszczyznami oddalonymi od siebie o $2h$, z których jedna jest nieruchoma, a druga porusza się ze stałą prędkością u (rys. 6.3) pod działaniem zewnętrznej siły stycznej \mathbf{T} , która pokonuje opory ruchu. W ruchu tym (nazywanym płaskim przepływem Couette'a) nie występuje spadek ciśnienia ($\Delta p = p_1 - p_2 \equiv 0$), a zatem $dp/dx = 0$ ($I = 0$), równanie (6.101) sprowadza się więc do



Rys. 6.3. Płaski przepływ laminarny Couette'a

W wyniku całkowania otrzymamy

$$v = C_1 y + C_2.$$

Stałe całkowania wyznaczone z warunków przylegania:

$$y = -h \Rightarrow v = 0, \quad y = h \Rightarrow v = u^1,$$

wynoszą

$$C_1 = \frac{u}{2h}, \quad C_2 = \frac{u}{2},$$

a zatem rozkład prędkości w szczelinie

$$v = u \left(\frac{y}{2h} + \frac{1}{2} \right) \quad (6.111)$$

jest liniowy.

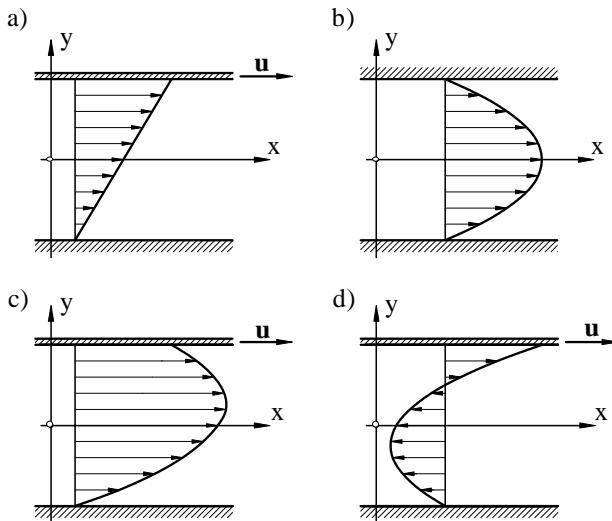
Gdy w przepływie między dwiema poziomymi płaskimi ścianami jest $u \neq 0$ oraz $I \neq 0$ (a więc $dp/dx \neq 0$ i $\Delta p \neq 0$), to przepływ jest superpozycją obu omówionych przepływów.

Profil prędkości określa zależność

$$v = \frac{\Delta p h^2}{2\mu l} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) + u \left(\frac{y}{2h} + \frac{1}{2} \right). \quad (6.112)$$

Profile prędkości w płaszczyźnie pionowej, określone wzorem (6.112), przedstawione na rysunku 6.4 dla następujących przypadków:

- | | |
|---------------------|-----------|
| a) $\Delta p = 0$, | $u > 0$, |
| b) $\Delta p > 0$, | $u = 0$, |
| c) $\Delta p > 0$, | $u > 0$, |
| d) $\Delta p < 0$, | $u > 0$. |



Rys. 6.4. Profile prędkości w laminarnym przepływie między ścianami:

- a) $\Delta p = 0, u > 0$,
- b) $\Delta p > 0, u = 0$,
- c) $\Delta p > 0, u > 0$,
- d) $\Delta p < 0, u > 0$

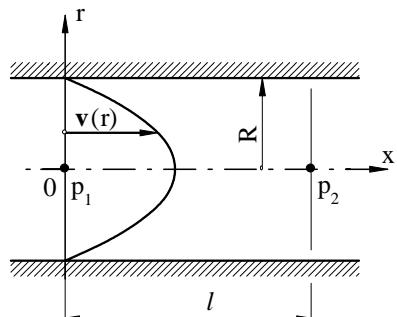
Jednostkowy strumień objętości oraz średnią prędkość przepływu można obliczyć według wzoru (6.106), uwzględniając jednak rozkład prędkości określony zależnością (6.112).

¹⁾ Częstki przylegające do ścian mają prędkość ściany, czyli u .

Laminarny przepływ osiowo-symetryczny

Rozważmy teraz ustalony przepływ płynu lepkiego nieściśliwego przez rurę długości l i stałym przekroju kołowym o promieniu R (rys. 6.5) pod działaniem różnicy ciśnień $\Delta p = p_1 - p_2$ ¹⁾, występującej na długości rury l (przepływ Hagena-Poiseuille'a).

Rys. 6.5. Osiowo-symetryczny przepływ laminarny Hagena-Poiseuille'a



Ponieważ $v = v(x, y)$, przepływ ten jest określony równaniem (6.101), które zapiszemy jako

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = -\frac{\Delta p}{l}. \quad (6.113)$$

Jest to przepływ osiowo-symetryczny, zatem współrzędne prostokątne zastępujemy cylindrycznymi. Ze względu na osiową symetrię ruchu (prędkość zależy tylko od współrzędnej r), lewa strona wzoru (6.113) będzie następująca

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right),$$

zatem

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{l}. \quad (6.114)$$

Po dwukrotnym całkowaniu zależność (6.114), zapiszemy jako

$$v = -\frac{r^2}{4} \frac{\Delta p}{\mu l} + C_1 \ln r + C_2. \quad (6.115)$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 określmy tak, aby równanie (6.115) spełniało warunek symetrii (na osi) i przylegania (na ścianie rury), zatem

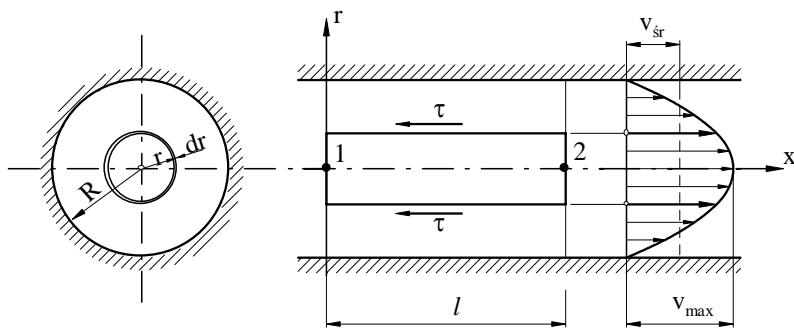
$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} \Big|_{r=0} &= 0 \Rightarrow C_1 = 0, \\ v \Big|_{r=R} &= 0 \Rightarrow C_2 = \frac{R^2}{4} \frac{\Delta p}{\mu l}, \end{aligned}$$

¹⁾ Na rozkład prędkości nie wpływa pochylenie rury, lecz tylko spadek hydrauliczny (wzór (6.101)). W przypadku ogólnym trzeba wstawić: $\Delta p = I\rho gl$.

wobec tego

$$v = \frac{1}{4} \frac{\Delta p}{\mu l} (R^2 - r^2). \quad (6.116)$$

Rozkład prędkości w ustalonym przepływie osiowo-symetrycznym można także wyznaczyć, rozpatrując równowagę dwu sił powierzchniowych występujących w tym przepływie, a mianowicie sił ciśnieniowych wywołujących przepływ i sił tarcia, które je równoważą. Rozpatrzmy więc równowagę ciekłego walca o promieniu r i długości l (rys. 6.6).



Rys. 6.6. Równowaga sił powierzchniowych w osiowo-symetrycznym przepływie laminarnym

Siły tarcia to

$$\tau 2\pi r dz = \mu \frac{dv}{dr} 2\pi r dz,$$

a siły ciśnieniowe wynoszą $(p_1 - p_2) \pi r^2 = \pi r^2 \Delta p$.

Suma tych sił wynosi zero (równoważą się), po uporządkowaniu otrzymamy więc

$$\frac{dv}{dr} = - \frac{r}{2\mu} \frac{\Delta p}{l}.$$

Po całkowaniu i uwzględnieniu warunku przylegania otrzymuje się zależność (6.116).

Rozkład prędkości w rurze o przekroju kołowym jest więc paraboliczny (rys. 6.6). Maksymalna prędkość występuje w osi rury ($r = 0$)

$$v_{\max} = \frac{1}{4} \frac{\Delta p}{\mu l} R^2. \quad (6.117)$$

Objętość paraboloidy, której przekrój pokazano na rysunku 6.6, jest strumieniem objętości. Weźmy pod uwagę element powierzchniowy przekroju poprzecznego

w kształcie pierścienia o promieniach r i $r + dr$. Elementarny strumień objętości określmy równaniem

$$dq_V = \nu 2\pi r dr, \quad (6.118)$$

a więc całkowity strumień objętości wyniesie

$$q_V = \frac{\pi \Delta p}{2\mu l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr, \quad (6.119)$$

skąd

$$q_V = \frac{\pi \Delta p}{8\mu l} R^4. \quad (6.120)$$

Jest to tzw. prawo Hagena-Poiseuille'a: *w ustalonym ruchu laminarnym nieściśliwego płynu lepkiego strumień objętości jest wprost proporcjonalny do jednostkowego spadku ciśnienia i do czwartej potęgi promienia rury, a odwrotnie proporcjonalny do lepkości.*

Na podstawie strumienia objętości można określić średnią prędkość przepływu w rurze z zależności

$$v_{\text{sr}} = \frac{q_V}{A} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2, \quad (6.121)$$

a po uwzględnieniu (6.117) dochodzimy do wniosku, że

$$v_{\text{sr}} = \frac{1}{2} v_{\text{max}}. \quad (6.122)$$

W wyniku przekształcenia równania (6.120) otrzymamy wzór określający spadek ciśnienia w przepływie laminarnym ($d = 2R$)

$$\Delta p = \frac{8 \mu q_V l}{\pi R^4} = \frac{128 \mu q_V l}{\pi d^4} \quad (6.123)$$

lub, na podstawie wzorów (6.121) i (6.109),

$$\Delta p = \frac{8 \mu v_{\text{sr}} l}{R^2} = \frac{32 \mu v_{\text{sr}} l}{d^2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v_{\text{sr}}^2}{2}, \quad (6.124)$$

przy czym, wobec $\text{Re} = v_{\text{sr}} d / \nu$, współczynnik strat liniowych $\lambda = 64/\text{Re}$.

Po uwzględnieniu, że $\Delta p = \rho g \Delta h$ otrzymamy wzór na wysokość Δh spadku ciśnienia

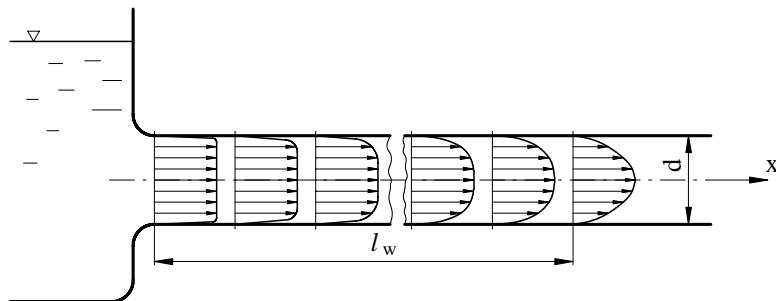
$$\Delta h = \frac{128 v q_V l}{\pi g d^4} = \frac{32 v v_{\text{sr}} l}{g d^2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{sr}}^2}{2 g}. \quad (6.125)$$

Wzory te wskazują, że strata ciśnienia (wysokości ciśnienia) w przypadku przepływu laminarnego jest proporcjonalna do pierwszej potęgi prędkości średniej.

Liczne doświadczenia, dotyczące przepływów w rurach o małych przekrojach i o niewielkich prędkościach przepływu, bardzo dobrze potwierdziły poprawność wzoru (6.123). Wzór ten umożliwia również określenie współczynnika lepkości na podstawie pomiaru strumienia objętości q_V cieczy przepływającej przez rurkę o znanej średnicy d i znanej różnicy ciśnień Δp na określonej długości l .

Należy jednak pamiętać, że wszystkie wyprowadzone w tym punkcie wzory dotyczą tzw. w pełni uformowanego przepływu laminarnego, tzn. takiego, w którym prawdziwa jest zależność $dp/dx = \Delta p/l = C$. W rzeczywistości na pewnym odcinku początkowym, zwany odcinkiem wstępny, spadek ciśnienia nie jest liniowy. Na odcinku tym obserwujemy zjawisko formowania się profilu prędkości (rys. 6.7). Na wlocie do przewodu rozkład prędkości jest prostokątny (równomierny), a dopiero wzdłuż odcinka wstępnego, wskutek działania sił stycznych pochodzących od warstw płynu położonych w bezpośredniej bliskości ścian, przenoszonego na warstwy leżące bliżej osi przewodu, formuje się typowy dla ruchu laminarnego rozkład paraboliczny. Wzory (6.116), (6.117) i (6.120)–(6.125) można więc stosować z wyłączeniem odcinka wstępnego o długości określonej wzorem empirycznym

$$l_w = 0,03 \operatorname{Re} d^{\text{1)}} \quad (6.126)$$



Rys. 6.7. Odcinek wstępny przewodu

6.5. PODSTAWY TEORII WARSTWY PRZYŚCIENNEJ

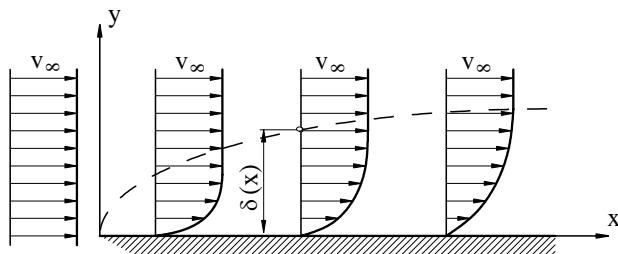
6.5.1. POJĘCIE WARSTWY PRZYŚCIENNEJ

Występujące w technice przepływy płynów lepkich są przepływami, w których siły tarcia są małe w porównaniu z siłami bezwładności. Woda i powietrze – płyny, z którymi najczęściej spotykamy się w różnych zagadnieniach technicznych – odznaczają się małą lepkością, a zatem już przy stosunkowo niewielkich prędkościach

¹⁾ PN-76/M-34034 podaje $l_w = (0,029 \dots 0,06)d \operatorname{Re}$.

otrzymujemy podczas ich przepływów duże wartości liczby Reynoldsa. W równaniach Naviera–Stokesa (6.7), w miarę zwiększania się liczby Reynoldsa, wyrazy zależne od lepkości stają się coraz mniejsze w porównaniu z wyrazami bezwładnościowymi, a dla liczb Reynoldsa $Re \rightarrow \infty$, wyrazy te dążą do zera, a równania ruchu nie różnią się już od równań dotyczących płynu doskonałego.

W odróżnieniu od płynu doskonałego (a więc nielepkiego), w którym tylko składowa normalna prędkości musi znikać na nieprzepuszczalnej ścianie, w płynie lekim również składowe styczne prędkości znikają na tego rodzaju ścianie. Warunki te nie zależą od prędkości płynu w punktach odległych od granicy. Oznacza to, że podczas przepływu płynu pseudodoskonałego (tzn. z dużą prędkością) siły lepkości są dominujące w pobliżu ściany sztywnej (lub granicy różnych płynów), chociaż w głównej masie płynu dominują siły bezwładności. Rozwiążanie tego problemu polega na podziale całego obszaru poruszającego się płynu na dwa nierówne podobszary (rys. 6.8) i prowadzeniu rozważań osobno dla każdego z nich. Podział ten – zaproponowany przez Prandtla – polega na wprowadzeniu podobszaru, w którym *siły lepkości są całkowicie pomijalne*, oraz drugiego, w którym *ich wpływ jest decydujący*.



Rys. 6.8. Obraz warstwy przyściennej

Warstwę płynu poruszającą się blisko granicy ośrodków (np. ściany) nazywa się warstwą przyścienną. Przez to pojęcie rozumiemy zarówno warstwę przyścienną tworzącą się na opływanej nieprzenikliwej powierzchni, jak i warstwę graniczną tworzącą się w przepływie swobodnym otoczonym przepływem potencjalnym (struga zatopiona, ślad za opływanym ciałem).

W warstwie przyściennej występują intensywne zmiany prędkości od zera na ścianie do wartości równej prędkości płynu poza nią. Między warstwą przyścienną a główną masą płynu nie ma wyraźnego rozgraniczenia, toteż nie można ściśle zdefiniować zasięgu warstwy. Zwykle przyjmuje się, że warstwa przyścienna sięga do miejsca, w którym prędkość jest o 1% mniejsza od prędkości przepływu potencjalnego, tj. prędkości, jaka ustaliłaby się w tym punkcie podczas przepływu płynu doskonałego.

Grubością δ warstwy przyściennej nazywa się taką odległość od powierzchni ciała, dla której zmiana prędkości przepływu w kierunku prostopadłym do powierzchni ściany jest w przybliżeniu równa zera. Grubość tej warstwy narasta stopniowo w mia-

rę oddalania się (w kierunku przepływu) od krawędzi natarcia (miejsca podziału strug opływających ciało) – rys. 6.8.

Poza warstwą przyścienną leży podobszar, w którym siły masowe (bezwładności) dominują nad siłami lepkości i w związku z tym płyn uważa się za doskonały. Podczas rozważania przepływu wokół ścian o kształtach regularnych przyjmuje się, że poza warstwą przyścienną przepływ kształtuje się tak jak w ruchu potencjalnym.

6.5.2. RÓWNANIA PRZEPŁYWU W LAMINARNEJ WARSTWIE PRZYŚCIENNEJ

W celu wyznaczenia parametrów przepływu w pobliżu ścian należy uwzględnić lepkość płynu i rozwiązać równanie ruchu w postaci Naviera–Stokesa. Wobec małej grubości warstwy przyściennej, w porównaniu z długością opływanej ściany ($\delta/l \ll 1$), równania Naviera–Stokesa sprowadza się w rozważanym przypadku do uproszczonej postaci, zwanej *równaniami Prandtla*.

Zakłada się płaski ustalony przepływ płynu nieściśliwego wokół gładkiej nieruchomej ściany, opływanej przez płyn z prędkością v_∞ . Pomija się siły ciężkości, a przepływ poza warstwą traktuje jako potencjalny.

Rozważmy opływ płaskiej poziomej ściany o skończonej długości l – w kierunku osi x (rys. 6.8), będącym kierunkiem przepływu swobodnego – i nieskończonej, w poprzecznym kierunku z , tzn. $-\infty < z < +\infty$. Wtedy dla $x < 0$ przepływ nie jest zaburzony obecnością ściany.

Równania Naviera–Stokesa (6.7) oraz ciągłości przepływu (3.10) przybierają postać

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (6.127)$$

gdzie prędkość nie zmienia się w kierunku osi z .

Oszacujemy rzad wielkości poszczególnych składników w tych równaniach, w podobszarze warstwy przyściennej, zakładając małą grubość warstwy $\delta/l \ll 1$.

Zakresy zmienności: $y \in [0, \delta]$,
 $x \in [0, l]$,

a zatem v_x jest rzędu co najwyżej v_∞ , czyli

$$v_x = 0 (v_\infty). \quad (6.128)$$

Rzędy wielkości pochodnych¹⁾ prędkości v_x są następujące:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \left(\frac{v_\infty}{l} \right), \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \left(\frac{v_\infty}{\delta} \right). \quad (6.129)$$

Z równania ciągłości wynika, że

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

a zatem

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \left(\frac{v_\infty}{l} \right).$$

Obliczamy stąd współrzędną v_y prędkości przepływu $\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y)$ na granicy warstwy przyściennej

$$v_y = \int_0^\delta \frac{\partial v_y}{\partial y} dy, \quad (6.130)$$

a zatem

$$v_y = 0 \left(\frac{v_\infty}{l} \delta \right) \ll v_x, \quad (6.131)$$

gdzie $\delta/l \ll 1$, a v_x jest rzędu v_∞ , a więc wynosi on $0(v_\infty)$.

Po uwzględnieniu zależności (6.128), (6.129) i (6.131) możemy określić rzad wielkości każdego z wyrazów w równaniach Naviera–Stokesa (6.127).

W pierwszym z równań układu po lewej stronie wszystkie składniki sumy są tego samego rzędu $0(v_\infty \cdot v_\infty / l)$, po prawej zaś stronie wyraz $\partial^2 v_x / \partial y^2 = 0(v_\infty / \delta^2)$ przewyższa swoim rzędem $\partial^2 v_x / \partial x^2 = 0(v_\infty / l^2)$, możemy zatem przyjąć, że wyrazy reprezentujące siły bezwładności są tego samego rzędu, co siły lepkości, a więc

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = 0 \left(\frac{v_\infty^2}{l} \right). \quad (6.132)$$

Stanowi to, omówione już na wstępnie, podstawowe założenie teorii warstwy przyściennej.

Na podstawie równania Eulera (3.34) i po przyjęciu założeń omawianego zagadnienia otrzymamy

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \left(\frac{v_\infty^2}{l} \right). \quad (6.133)$$

¹⁾ Zobacz definicję pochodnej funkcji.

Po oszacowaniu wyrazów drugiego równania układu (6.127), ze względu na małą wartość v_y , okazuje się, że wszystkie członki są małe w porównaniu z $0(v_\infty^2/l)$, a zatem układ równań po odrzuceniu członów niższego rzędu przyjmie postać

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (6.134)$$

Drugie z równań układu (6.134) umożliwia sformułowanie wniosku, że *ciśnienie w warstwie przyściennej jest stałe wzdłuż normalnej do opływanej powierzchni*, ma więc tę samą wartość na powierzchni, co i na granicy warstwy. Wynika stąd dalszy wniosek, że w podobszarze warstwy przyściennej ciśnienie jest wyłącznie funkcją zmiennej x , identyczną z funkcją określającą ciśnienie na powierzchni opływanej płynem doskonałym. Wnioski te, sformułowane na podstawie rozważań teoretycznych, zostały potwierdzone licznymi doświadczeniami.

Po uwzględnieniu drugiego równania układu (6.127) otrzymamy ostatecznie

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (6.135)$$

Są to właśnie równania Prandtla. Równania te, choć wyprowadzono je jako odnoszące się do płaskiej płyty, są słuszne i w bardziej ogólnych przypadkach dwuwymiarowych przepływów, z tym jednak, że promień krzywizny ściany w każdym jej punkcie jest wielokrotnie większy od grubości warstwy przyściennej w tym punkcie.

Z drugiego równania (6.134) wynika, że ciśnienie nie zmienia się w poprzek warstwy przyściennej, a zatem, mimo jej istnienia, ciśnienie statyczne można mierzyć bezpośrednio na opływaną powierzchnię.

Metoda rozwiązywania zagadnień przepływów płynów lepkich, z wykorzystaniem koncepcji warstwy przyściennej i równania Prandtla, polega na:

1. Wyznaczeniu przepływu płynu nielepkiego wokół ciała, a szczególnie rozkładu ciśnienia $p(x)$ na ścianie.

2. Rozwiążaniu równań Prandtla z uwzględnieniem wyznaczonego rozkładu ciśnienia i odpowiednich warunków brzegowych.

Taka droga postępowania jest wprawdzie dokładna, ale dość uciążliwa. Nie będzie zatem przedstawione rozwiązanie układu równań Prandtla, a jedynie zostaną naszkicowane tylko główne wyniki tego rozwiązania.

Rozwiązanie układu równań (6.135) umożliwia znalezienie rozkładu prędkości w warstwie przyściennej, a stąd naprężenia stycznego

$$\tau_{\text{lam}} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (6.136)$$

którego znajomość umożliwia obliczenie oporu przepływu. Jest to względnie łatwe wtedy, kiedy $\partial p / \partial x = 0$ (rys. 6.9), tj. w przypadku opływu ściany płaskiej (lub o niewielkiej krzywiźnie). Wówczas grubość laminarnej warstwy przyściennej, obliczona dla bieżącej wartości liczby Reynoldsza

$$Re_x = \frac{V_\infty x}{v} \quad (6.137)$$

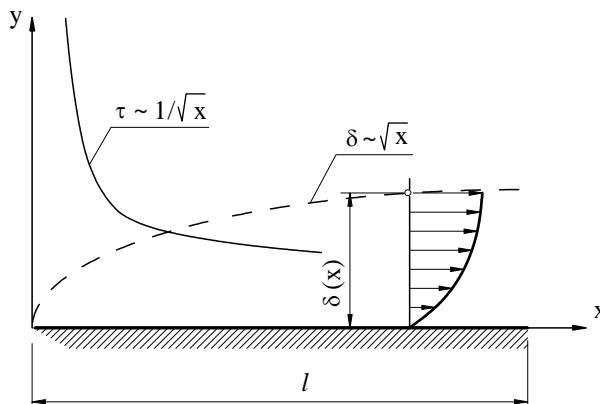
wynosi

$$\delta = 5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}, \quad (6.138)$$

laminarne zaś naprężenie styczne na ścianie

$$\tau_{\text{lam}} = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu v_\infty^3}{x}}. \quad (6.139)$$

Przebieg zmian δ i τ_{lam} pokazano na rysunku 6.9, przy czym dla $x = 0$ istnieje punkt osobliwy przebiegu krzywej τ_{lam} .



Rys. 6.9. Laminarna warstwa przyścienna na płaskiej płycie

Naprężenie styczne w warstwie laminarnej dla ustalonego x jest stałe, wobec czego po całkowaniu równania (6.138) względem y otrzymuje się liniową zależność między v_x i y .

6.5.3. ZMIANY PĘDU W WARSTWIE PRZYŚCIENNEJ

Istnieją również inne metody przybliżonego rozwiązania zagadnień dotyczących warstwy przyściennej. Metody te wykorzystują tzw. związki całkowe i stają się użyteczne, gdy znane są (np. z pomiarów) wielkości δ^* i δ^{**} , służące do bilansowych charakterystyk warstw przyściennych. Wielkość δ^* , zwana *liniową miarą zmniejszenia strumienia masy* (przedstawiona na rys. 6.10), jest miarą grubości warstwy przyściennej (odległośćą przesunięcia). Oznacza ona, że wskutek tarcia płynu o ścianę maleje prędkość i zmniejsza się strumień masy, przy czym miarą tego zmniejszenia jest umowna grubość δ^* . Gdyby opływana powierzchnia była pogrubiona o δ^* , a pole prędkości nie byłoby zmienione przez naprężenia styczne, wówczas strumień masy byłby taki sam. Bilans strumienia masy¹⁾ wynosi zatem

$$\delta^* v_\infty = \int_0^\delta (v_\infty - v_x) dy$$

a

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty} \right) dy. \quad (6.140)$$

Podobnie można zdefiniować wielkość δ^{**} , nazywaną *liniową miarą zmniejszenia strumienia pędu*. Stratę pędu płynu w warstwie przyściennej w jednostce czasu, wywołaną przepływem ze zmniejszoną prędkością, równoważy się całkowitą utratą pędu warstwy płynu o grubości δ^{**} poruszającego się z prędkością v_∞ . Zachodzi zatem równość

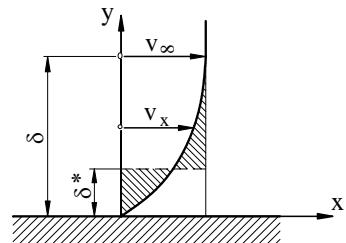
$$\rho v_\infty^2 \delta^{**} = \int_0^\delta \rho v_x (v_\infty - v_x) dy,$$

z której wynika

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{v_x}{v_\infty} \left(1 - \frac{v_x}{v_\infty} \right) dy. \quad (6.141)$$

Po scałkowaniu równania Prandtla (6.135) dla $0 \leq y \leq \delta$ i zastosowaniu zależności (6.140) i (6.141) otrzymuje się wzór całkowy Kármána

¹⁾ Dokładnie jest to bilans strumienia objętości przypadający na jednostkę szerokości szczeliny, ale wobec $\rho = \text{const}$ jest on równoważny ze strumieniem masy.



Rys. 6.10. Liniowa miara zmniejszenia strumienia masy

$$\tau_{\text{lam}} = \rho_\infty^2 \frac{d}{dx} \delta^{**} + \rho v_\infty (\delta^* + 2\delta^*) \frac{dv_\infty}{dx}. \quad (6.142)$$

Umożliwia on przy znanej prędkości przepływu potencjalnego v_∞ , jeżeli znane są δ^* i δ^{**} , określenie wartości naprężenia stycznego τ_{lam} na ścianie.

Przedstawiona metoda jest, jak już wspomniano, metodą przybliżoną, gdyż w celu określenia δ^* i δ^{**} niezbędne jest założenie rozkładu prędkości $v_x(y)$ w warstwie przyściennej. Ze względu na małą grubość warstwy przyściennej może to być dowolna funkcja spełniająca jedynie odpowiednie warunki brzegowe, a mianowicie:

a) dla $y = 0$; $v_x = v_y = 0$ (na podstawie (6.135))

$$v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6.143)$$

b) dla $y = \delta$; $v_x = v_\infty$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \dots = 0.$$

Otrzymane wyniki są tym bardziej ścisłe, im założona funkcja rozkładu prędkości jest bliższa rzeczywistemu rozkładowi prędkości w warstwie przyściennej.

6.6. PRZEJŚCIE PRZEPŁYWU LAMINARNEGO W TURBULENTNY. DOŚWIADCZENIE REYNOLDSA

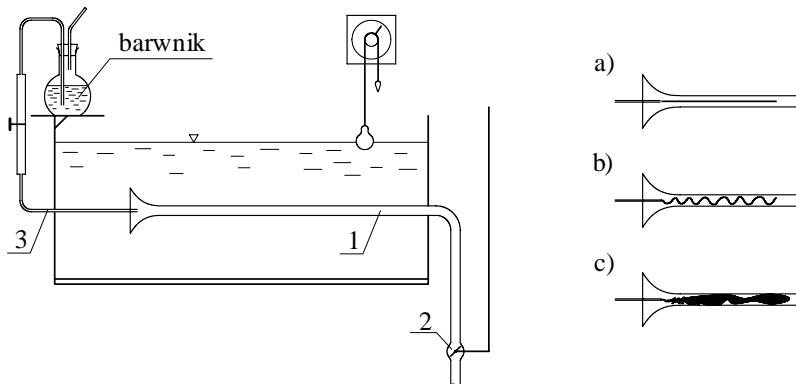
Obserwacje przepływów płynów lepkich wskazują na możliwość istnienia w przepływach (wewnętrznych i opływach) dwóch odmiennych struktur pola prędkości: jednej – o regularnym przebiegu torów częstek i drugiej o przebiegu chaotycznie nieregularnym.

Charakter ruchu płynów lepkich wyraźnie naświetliły badania Reynoldsa przeprowadzone w 1883 roku na stanowisku pokazanym schematycznie na rysunku 6.11.

Obserwując przepływ cieczy w rurze (1) Reynolds stwierdził, że podczas małych prędkości przepływu wody (regulowanych zaworem (2)), barwnik – doprowadzany cienką rurką (3) – płynie wzduż osi rury, tworząc prostoliniową smugę (rys. 6.11a). Przy większych prędkościach barwna smuga zaczyna oscylować (fluktuować), tworząc linię falistą (rys. 6.11b). Na pewnych odcinkach pojawiają się rozproszenia, barwna struga traci swoją wyraźną formę i ostatecznie przy pewnej prędkości, zwanej prędkością krytyczną, miesza się całkowicie ze strugą główną (rys. 6.11c).

Na podstawie opisanego doświadczenia Reynolds wprowadził podział na dwa zasadnicze rodzaje przepływów:

- *laminarne (uwarstwione)*,
- *turbulentne (burzliwe)*.



Rys. 6.11. Doświadczenie Reynoldsa: a) przepływ laminarny, b) przepływ przejściowy, c) przepływ turbulentny

Przejście ruchu laminarnego w turbulentny następuje wskutek utraty stateczności przepływu laminarnego. Drobne wszechobecne zaburzenia generujące fluktuacje elementów płynu występują zawsze podczas przepływu. W przepływie laminarnym, w którym siły bezwładności są małe w porównaniu z siłami lepkości, są one jednak tłumione przez te ostatnie. Wzrost sił bezwładności, np. wskutek przyrostu prędkości przepływu, powoduje, że tłumiące działanie lepkości jest niewystarczające, co wywołuje utratę stateczności ruchu laminarnego i jego przejście w ruch turbulentny.

Zmieniając średnicę d rury oraz prędkość v , Reynolds stwierdził, że stan krytyczny występuje na ogół dla tej samej wartości wyrażenia $vd/v = Re$ (obecnie nazywanego liczbą Reynoldsa). Jeśli tę wartość oznaczymy Re_{kr} , to przepływ laminarny występuje w przypadku $Re < Re_{kr}$. Zagadnienie określenia konkretnych wartości Re_{kr} komplikuje fakt, że przejście przepływu laminarnego w turbulentny następuje przy większej wartości liczby Reynoldsa niż proces odwrotny. W związku z tym rozróżnia się dolną wartość krytyczną liczby Reynoldsa $Re_{kr\,d}$ (poniżej której nigdy nie występuje ruch turbulentny) i górną wartość krytyczną liczby Reynoldsa $Re_{kr\,g}$ (powyżej której nie występuje ruch laminarny), przy czym tylko pierwsza z nich jest dość dokładnie określona, np. w przypadku przepływu przez długą cylindryczną rurę o przekroju kołowym $Re_{kr\,d} \approx 2300$.

Górna wartość krytyczna liczby Reynoldsa zależy od wielu czynników ubocznych, jak np. kształtu wlotu do przewodu, wstępnych zaburzeń mechanicznych płynu wpływającego do przewodu, stopnia gładkości ścian przewodu, drgań przewodu. Wszystkie te czynniki mogą spowodować, że przejście przepływu laminarnego w turbulentny może nastąpić przy różnych wartościach liczby Reynoldsa. Dzięki daleko posuniętej staranności w zachowaniu odpowiednich warunków przepływu udało się utrzymać przepływ laminarny nawet do wartości $Re = 80\,000$ (Fortier). Ta wartość jest nazywana górną wartością $Re_{kr\,g}$. Najczęściej między $Re_{kr\,d}$ i $Re_{kr\,g}$ istnieje wstępna faza roz-

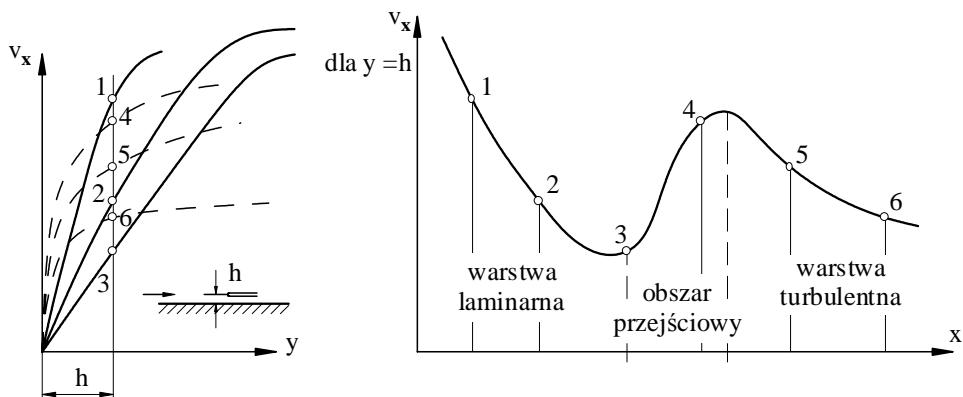
woju ruchu turbulentnego (przepływ przejściowy), a przepływ powyżej $Re_{kr,g}$ jest często nazywany *w pełni rozwiniętym ruchem turbulentnym*.

Z rozważań tych wynika, że jedynie dolna wartość krytyczna liczby Reynoldsa może być kryterium przejścia ruchu laminarnego w turbulentny. Tezę tę potwierdzają w całej rozciągłości badania eksperimentalne, z których wynika, iż poniżej dolnej wartości krytycznej liczby Reynoldsa przepływ turbulentny nie może się utrzymać. Wprowadzenie sztucznych zaburzeń przez jakiekolwiek elementy zakłócające przepływ lub przez nadawanie ścianom rury drgań wymuszonych nie spowodowało powstania przepływu turbulentnego poniżej dolnej wartości krytycznej liczby Reynoldsa.

W miarę jak zwiększamy średnią prędkość przepływu, utrzymanie ruchu laminarnego jest coraz trudniejsze. Gdy liczba Reynoldsa przekroczy znacznie wartość $Re_{kr,d}$ przejście z ruchu laminarnego w turbulentny występuje nagle i obejmuje całą masę płynu. Fakt ten przypomina zjawiska przekroczenia znane z innych działów fizyki, jak np. zjawiska przechłodzenia lub przegrzania.

Należy jednak podkreślić, że w zagadnieniach technicznych przyjmuje się, iż w zakresie $Re > Re_{kr,d}$ istnieje zawsze przepływ turbulentny, a zatem dla przewodów o przekroju kołowym przepływ taki zachodzi dla $Re > 2300$.

Podobną sytuację obserwujemy w podobszarze warstwy przyściennej. Jeżeli będziemy mierzyć składową prędkości v_x w odległości h od ściany, to otrzymamy obraz pokazany na rysunku 6.12.



Rys. 6.12. Rozkłady prędkości w warstwie przyściennej

Profile prędkości w obszarze przepływu turbulentnego (krzywe 4–6) są bardziej wypełnione. Początkowo laminarny odcinek warstwy przyściennej przechodzi poprzez obszar przejściowy w turbulentną warstwę przyścienną. Długość odcinka przejścia jest zależna od stopnia turbulencji strugi na zewnątrz warstwy. Okazuje się, że minimalna liczba Reynoldsa w warstwie przyściennej (obliczana na podstawie grubości δ warstwy $Re = v_\infty \delta / v$), która gwarantuje stabilną laminarną warstwę przyścienną, jest tego

samego rzędu co i dla rury o kołowym przekroju. Przy małych zaburzeniach zewnętrznego przepływu możliwe jest i tutaj przekroczenie wartości krytycznej Re .

6.7. ELEMENTY TEORII PRZEPŁYWU TURBULENTNEGO

6.7.1. ISTOTA PRZEPŁYWU TURBULENTNEGO I DEFINICJE PARAMETRÓW UŚREDNIONYCH

Większość występujących w przyrodzie i interesujących nas pod względem technicznym typów przepływów stanowią *przepływy turbulentne*. Najbardziej znamienną i dominującą cechą tych przepływów jest chaotyczny i nieregularny ruch elementów płynu, wskutek czego wszystkie wielkości, charakteryzujące dany przepływ, wykazują zmienność zarówno w czasie, jak i w przestrzeni. Elementy płynu przemieszczają się zgodnie z głównym kierunkiem transportu masy, wykonując równocześnie nieuporządkowane ruchy fluktuacyjne, poprzeczne w stosunku do kierunku ruchu głównego, wywołujące wymianę masy i pędu między poszczególnymi rurkami prądu. Zachodzi tutaj, w skali makroskopowej, wymiana elementów płynu – zjawisko podobne do mechanizmu tarcia wewnętrznego. *Turbulencja* jest zatem zjawiskiem charakteryzującym się występowaniem w przepływającym płynie *chaotycznych fluktuacji parametrów hydro- i termodynamicznych* (prędkości przepływu, ciśnienia, gęstości, temperatury). Duża intensywność procesów transportu wynika ze złożonego ruchu wirów o różnej skali i energii. Największe wiry, charakteryzujące się najniższą częstotliwością, pobierają energię od przepływu średniego, a następnie przekazują ją wirom coraz mniejszym (kaskady energii). W wirach o najmniejszych rozmiarach występują największe zmiany prędkości oraz największe naprężenia styczne.

Badanie ruchu turbulentnego opiera się zwykle na hipotezie Reynoldsa, według której przepływ turbulentny może być przedstawiony jako superpozycja przepływu uśrednionego i fluktuacyjnego.

Jeżeli $f(x, y, z, t)$ jest dowolnym chwilowym parametrem ruchu (np. prędkością, ciśnieniem), to jego wartość uśrednioną w przedziale czasu Δt określamy jako

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(x, y, z, t) dt = \bar{f}(x, y, z), \quad (6.144)$$

przy czym Δt jest przedziałem czasu dużym w porównaniu ze średnim okresem fluktuacji, a małym w porównaniu z zakresem zmienności funkcji uśrednianej (rys. 6.13). Kreska nad symbolem funkcji będzie oznaczać operację uśredniania zdefiniowaną zależnością (6.144).

W szczególnym przypadku, gdy pole wielkości fizycznej f jest jednorodne, a proces losowy jest ustalony (stacjonarny), wartość oczekiwana obliczona przez

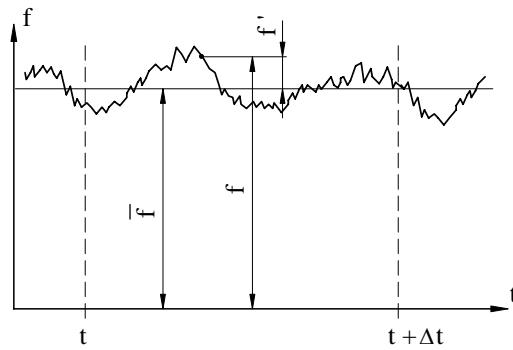
uśrednianie czasowe (6.144) jest wówczas równa wartości otrzymanej przez uśrednianie przestrzenne

Dowolny parametr $f(x, y, z, t)$ ruchu turbulentnego można przedstawić w postaci sumy

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(x, y, z) + f'(x, y, z, t), \quad (6.145)$$

w której:

- $\bar{f}(x, y, z)$ – wartość uśredniona funkcji f ,
- $f'(x, y, z, t)$ – fluktuacja będąca wielkością małą i szybkozmienną w porównaniu z \bar{f} .



Rys. 6.13. Przebieg wielkości f w tym samym punkcie przestrzeni (pojedyncza realizacja)

Dla turbulentnego przepływu płynu nieściśliwego możemy więc zapisać

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', \quad p = \bar{p} + p'. \quad (6.146)$$

Powtórne uśrednianie funkcji \bar{f} , zgodnie z definicją (6.144), nie zmienia funkcji uśrednianej

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}, \quad (6.147)$$

wobec czego

$$\bar{f}' = 0. \quad (6.148)$$

Odnosi się to do wszystkich parametrów, a więc

$$\bar{\mathbf{v}'} = 0, \quad \bar{p}' = 0. \quad (6.149)$$

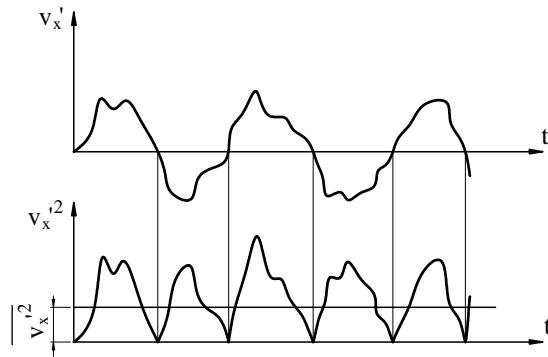
Wobec tego miarą fluktuacji np. prędkości mogą być uśrednione czasowo kwadraty prędkości pobocznych (rys. 6.14)

$$\overline{v'_x^2}, \quad \overline{v'_y^2}, \quad \overline{v'_z^2}. \quad (6.150)$$

Jeżeli w danym punkcie przestrzeni

$$\overline{v'_x^2} = \overline{v'_y^2} = \overline{v'_z^2} = \text{const}, \quad (6.151)$$

to taki przepływ turbulentny nazywamy *izotropowym*. Jeżeli w całym rozpatrywanym obszarze wartość ta jest jednakowa, to taka turbulencja izotropowa jest *homogeniczna*.



Rys. 6.14. Przebieg składowej fluktuacji prędkości oraz jej kwadratu od czasu

Miarą wielkości fluktuacji jest stosunek pierwiastka kwadratowego ze średniej arytmetycznej uśrednionych czasowo kwadratów prędkości fluktuacyjnej do prędkości ruchu głównego, zwany intensywnością (stopniem) turbulencji

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{v'_x^2} + \overline{v'_y^2} + \overline{v'_z^2})}}{|\bar{v}|}, \quad (6.152)$$

której składowe w kierunkach osi x, y, z wynoszą

$$\varepsilon_x = \frac{\sqrt{\overline{v'_x^2}}}{\bar{v}_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sqrt{\overline{v'_y^2}}}{\bar{v}_y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\sqrt{\overline{v'_z^2}}}{\bar{v}_z}. \quad (6.153)$$

W przypadku występowania turbulencji izotropowej wzór (6.152) sprowadzi się do postaci

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\overline{v'_x^2}}}{|\bar{v}|} = \frac{\sqrt{\overline{v'_y^2}}}{|\bar{v}|} = \frac{\sqrt{\overline{v'_z^2}}}{|\bar{v}|}. \quad (6.154)$$

Na ogólny istnieją związki między fluktuacjami prędkości i innymi parametrami turbulentnego przepływu płynu. Składowe fluktuacyjne wyznacza się w różnych punktach strugi oraz w różnych chwilach. W badaniach wewnętrznej struktury turbulencji stosowane są przestrzenno-czasowe koreacje prędkości, określające statystyczną zależność poszczególnych składowych wektora fluktuacji prędkości, mierzonych na ogólny w różnych chwilach i różnych miejscach obszaru przepływu. Analizuje się również inne wielkości fizyczne i koreacje między nimi (jak koreacje pulsacji prędkości, ciśnienia, gęstości) określone w jednym miejscu, na podstawie przebiegów fluktuacji zachodzących w czasie.

Struktury wirowe w przepływie turbulentnym opisuje się za pomocą mikro- (λ) i makroskali (Λ) przestrzennej turbulencji. Wielkości te charakteryzują poprzeczny rozmiar struktur wirowych występujących w przepływie.

Dla orientacji należy podać, że prędkości ruchu fluktuacyjnego występują w granicach od 0,01 m/s do 10 m/s, intensywność turbulencji w warunkach naturalnych nie przekracza zazwyczaj 10% ($\varepsilon < 0,1$). W przepływie laminarnym stopień turbulencji jest równy零. W przepływie turbulentnym stopień turbulencji nie jest wielkością stałą, lecz zależy od położenia. Wprowadzenie pojęcia ruchu głównego znacznie uproszczyło rozważania dotyczące przepływów turbulentnych, ponieważ w przedziale czasu Δt wielkości należące do przepływu głównego można uważać za stałe, dlatego zaśmiast rozpatrywać w przepływie turbulentnym pole wielkości chwilowych, rozpatrujemy pole wielkości średnich czasowych¹⁾. Choć więc ruch turbulentny jest w swej istocie nieustalony, to gdy pochodna lokalna prędkości ruchu głównego jest równa zero, mówimy o *ustalonym ruchu turbulentnym* (czasem nazywanym quasi-ustalonym).

Jak już wspomniano, w ruchu turbulentnym zachodzi intensywna wymiana masy i pędu. Powodują ją w głównej mierze ruchy poboczne (fluktuacyjne), a ponadto ruchy molekularne. Wskutek tego między sąsiednimi rurkami prądu wystąpią znaczne naprężenia styczne

$$\tau = \tau_t + \tau_l, \quad (6.155)$$

gdzie:

τ_t – naprężenia spowodowane wymianą pędu pod wpływem ruchu pobocznego,

τ_l – naprężenia spowodowane wymianą pędu pod wpływem ruchu molekularnego.

Wzrostowi naprężen stycznych towarzyszy zmiana rozkładu prędkości w przekroju przepływowym oraz zwiększenie oporów ruchu.

6.7.2. RÓWNANIA RUCHU W PRZEPŁYWIE TURBULENTNYM

Równanie Naviera–Stokesa (6.7) i równanie ciągłości (3.10) odnoszą się zarówno do ruchu laminarnego, jak i turbulentnego. Chcąc jednak wyznaczyć rozwiązanie

¹⁾ Zwanych dalej uśrednionymi.

układu równań przepływu turbulentnego (6.7) i (3.10), nie możemy wprowadzić żadnego założenia upraszczającego, prowadzącego do zmniejszenia liczby zmiennych niezależnych, którymi zawsze są trzy współrzędne przestrzenne i czas. Nie można więc znaleźć analitycznego rozwiązania układu równań opisującego ruch turbulentny.

Pewne uproszczenia równania Naviera–Stokesa otrzymujemy, rezygnując z określenia chwilowych parametrów przepływu, a zadowalając się okresem ich wartości uśrednionych.

Podstawowym postulatem, umożliwiającym wyprowadzenie różniczkowych równań uśrednionego ruchu turbulentnego, jest rozkład dowolnego parametru na składową ruchu głównego i składową ruchu fluktuacyjnego.

Należy stosować następujące reguły uśredniania:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}, & \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, & \overline{f + \varphi} &= \bar{f} + \bar{\varphi}, \\ \overline{\bar{f}} &= \bar{f}, & \overline{f'} &= 0, & \overline{f \varphi} &= \bar{f} \bar{\varphi} + \overline{f' \varphi'}, \end{aligned} \quad (6.156)$$

które wynikają z definicji (6.144), założenia (6.148) i właściwości całki.

Zastosujmy teraz podane reguły uśredniania do układu równań (6.7) i (3.10). W celu uproszczenia rozważań założymy, że $\rho = \text{const}$ i $\nu = \text{const}$, a układ równań przyjmie postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (6.157)$$

Dodając do lewej strony pierwszego z równań powyższego układu równanie ciągłości pomnożone przez v_x ¹⁾, możemy nadać mu postać

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial(v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x. \quad (6.158)$$

¹⁾ $\text{div } \mathbf{v} = 0 \Rightarrow v_x \text{div } \mathbf{v} = 0$, zero można dodać do każdego równania.

Wykonując po obydwu stronach tego równania uśrednianie, po wykorzystaniu reguł (6.156), otrzymamy

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{v}_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}_x v_z)}{\partial z} = \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v \nabla^2 \bar{v}_x. \quad (6.159)$$

Określmy teraz wartości średnie poszczególnych składników równania (6.159). Zastąpimy w tym celu współrzędne prędkości v_x , v_y i v_z oraz ciśnienie p sumą ich wartości uśrednionych i fluktuacyjnych zgodnie z (6.146). Uwzględnijmy reguły uśredniania (6.156), z których wynika

$$\bar{v}_x = \overline{\bar{v}_x + v'_x} = \bar{\bar{v}}_x + \overline{v'_x} = \bar{v}_x,$$

$$\overline{v_x v_x} = \bar{v}_x \bar{v}_x + \overline{v'_x v'_x} = \bar{v}_x^2 + \overline{v'_x^2},$$

$$\overline{v_x v_y} = \bar{v}_x \bar{v}_y + \overline{v'_x v'_y},$$

$$\overline{v_x v_z} = \bar{v}_x \bar{v}_z + \overline{v'_x v'_z},$$

$$\bar{p} = \overline{\bar{p} + p'} = \bar{\bar{p}} + \overline{p'} = \bar{p}.$$

Po wstawieniu tych zależności do równania (6.159) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_x^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_x \bar{v}_z}{\partial z} \\ = \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v \nabla^2 \bar{v}_x - \frac{\partial \bar{v}_x^2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}_x \bar{v}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_x \bar{v}_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.160)$$

Uśrednienie równania ciągłości prowadzi do wyrażenia

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (6.161)$$

(co łatwo sprawdzić po zastosowaniu reguł (6.156)), wobec czego równanie (6.160) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \\ = \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + v \nabla^2 \bar{v}_x - \frac{\partial \bar{v}_x^2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}_x \bar{v}_y}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_x \bar{v}_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.162)$$

Powtarzając analogiczne operacje i przekształcenia w przypadku dwóch pozostałych równań układu (6.157), otrzymamy poszukiwany układ *różniczkowych równań uśrednionego ruchu turbulentnego* (nazywanych *równaniami Reynoldsa*)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) &= \rho \bar{X} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{v}_x \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \bar{v}_x'^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \bar{v}_x' \bar{v}_y' \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \bar{v}_x' \bar{v}_z' \right), \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} \right) &= \rho \bar{Y} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v}_y \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \bar{v}_x' \bar{v}_y' \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \bar{v}_y'^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \bar{v}_y' \bar{v}_z' \right), \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) &= \rho \bar{Z} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{v}_z \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho \bar{v}_x' \bar{v}_z' \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho \bar{v}_y' \bar{v}_z' \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \bar{v}_z'^2 \right), \\ \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (6.163)$$

Jeśli wprowadzimy wskaźnikowe oznaczenia osi i współrzędnych prędkości, czyli $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $v_x = v_1$, $v_y = v_2$, $v_z = v_3$ oraz zastosujemy umowę sumacyjną, to układ równań (6.163) możemy zapisać w postaci

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{v}_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\rho \bar{v}_i' \bar{v}_j' \right), \quad (6.164)$$

równanie ciągłości natomiast

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (6.165)$$

Z porównania układu równań Reynoldsa (6.164) z układem równań Naviera–Stokesa (6.9), określającym ruch płynu nieściśliwego, zapisanym również z zastosowaniem umowy sumacyjnej

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i \quad (6.166)$$

widzimy, że ruch uśredniony określają równania formalnie bardzo podobne do opisujących ruch chwilowy, z tą jednak różnicą, że w równaniach ruchu uśrednionego wy-

stępują pewne dodatkowe naprężenia, zwane *naprężeniami turbulentnymi*, określone ostatnim składnikiem prawej strony równania (6.164). Naprężenia te, spowodowane przekazywaniem pędu w ruchu fluktuacyjnym, mogą być określone następującą macierzą \mathbf{T} naprżeń turbulentnych

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \overline{v'_x^2} & -\rho \overline{v'_x v'_y} & -\rho \overline{v'_x v'_z} \\ -\rho \overline{v'_x v'_y} & -\rho \overline{v'_y^2} & -\rho \overline{v'_y v'_z} \\ -\rho \overline{v'_x v'_z} & -\rho \overline{v'_y v'_z} & -\rho \overline{v'_z^2} \end{bmatrix}. \quad (6.167)$$

Jest ona symetryczna, podobnie jak macierz naprżeń \mathbf{S} (p. 1.3.3).

Układ równań Reynoldsa możemy zatem zapisać w postaci wektorowej

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \operatorname{grad} \bar{p} = \bar{\mathbf{f}} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}} - \operatorname{Div} \mathbf{T}, \quad (6.168)$$

w której wielkości $\bar{\mathbf{v}}$ i \bar{p} są uśrednione lub też

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \right) = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}, \quad (6.169)$$

gdzie

$$\tau_{ij} = (\tau_{ij})_l + (\tau_{ij})_t, \quad (6.170)$$

przy czym

$$(\tau_{ij})_l = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.171)$$

$$(\tau_{ij})_t = -\rho \overline{v'_i v'_j}. \quad (6.172)$$

6.7.3. NAPRĘŻENIA TURBULENTNE

Równania Reynoldsa nie stanowią układu zamkniętego, brak jest bowiem do jego zamknięcia sześciu równań, określających elementy macierzy \mathbf{T} , będące współrzędnymi tensora naprżeń turbulentnych, w postaci

$$\overline{v'_i v'_j} = f_{ij}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{p}, x_i). \quad (6.173)$$

Dotychczas brak jest racjonalnych przesłanek, które umożliwiłyby konstrukcję zależności (6.173), a związki – spotykane w literaturze – opierają się na hipotezach.

Z historycznego punktu widzenia jedną z pierwszych jest hipoteza Boussinesqa (1877). Przez analogię do hipotezy Newtona (1.14), Boussinesq zaproponował

$$\tau_t = - \rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad (6.174)$$

gdzie μ_t nazwał współczynnikiem lepkości turbulentnej.

Wielkość ta charakteryzuje stan ruchu turbulentnego w danym punkcie, nie charakteryzuje natomiast płynu. W pobliżu ściany, na której fluktuacje turbulentne są równe zeru, współczynnik $\mu_t = 0$, w pewnej odległości od ściany może natomiast przybierać wartości wielokrotnie większe od dynamicznego współczynnika lepkości.

W przypadku ruchu płaskiego w płaszczyźnie xy , podczas przepływu płynu w kierunku osi x z prędkością uśrednioną \bar{v} , prawo tarcia Newtona (1.14) można rozszerzyć następująco

$$\tau_{xy} = \mu \frac{d\bar{v}}{dy} = \rho \overline{v'_i v'_j} = (\mu_l + \mu_t) \frac{d\bar{v}}{dy}. \quad (6.175)$$

Przyjmując koncepcję lepkości turbulentnej, Reynolds zaproponował zależność

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.176)$$

w której $\mu_t \neq \text{const.}$

Na podstawie kinetycznej teorii gazów Prandtl wysunął propozycję określania lepkości turbulentnej zależnością

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|, \quad (6.177)$$

w której l jest drogą mieszania.

Koncepcja Prandtla określa turbulencję jako rezultat przemieszczenia poprzecznego cząstki płynu, podczas którego cząstka zachowuje swoją prędkość oraz pęd. Długość l przemieszczenia poprzecznego została nazwana *drogą mieszania*. W celu wyjaśnienia tej koncepcji rozpatrzymy przepływ, w którym prędkość zmienia się w kierunku poprzecznym do głównego kierunku ruchu (rys. 6.15). Założymy, że cząstka płynu położona w punkcie A , poruszająca się z prędkością $\bar{v}_x(y_1)$, przemieszcza się do punktu B , a zatem do warstwy, w której uśredniona prędkość jest równa $\bar{v}_x(y_1 + l)$. Przypuśćmy, że rozpatrywana jednostkowa masa płynu podczas przemieszczania zachowuje swoją prędkość $\bar{v}_x(y_1)$ oraz pęd $\rho \bar{v}_x$. Uśredniona w czasie zmiana pędu wzduż osi x , wywołana odsunięciem cząstki o odległość l (od położenia y_1 do y_2) jest wywołana wzdużną składową prędkości fluktuacyjnej, a zatem

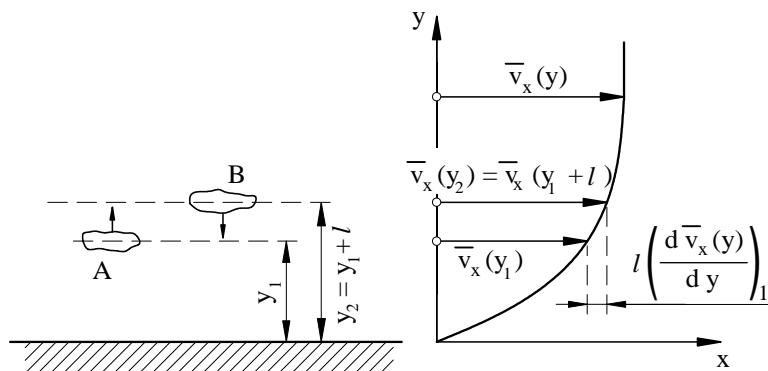
$$\rho v'_x = \rho (\bar{v}_x(y_1) - \bar{v}_x(y_2)),$$

czyli

$$\rho v'_x = (y_1 - y_2) \frac{d}{dy} (\rho \bar{v}_x) = l \frac{d}{dy} (\rho \bar{v}_x). \quad (6.178)$$

Gdy pomnoży się (6.178) przez v'_y (chwilową składową poprzeczną prędkości fluktuacyjnej) oraz uśredni w krótkim przedziale czasu, otrzymamy iloczyn określający naprężenia turbulentne w postaci

$$\tau_t = -\rho \bar{v}'_x \bar{v}'_y = v'_y l \frac{d}{dy} (\rho \bar{v}_x). \quad (6.179)$$



Rys. 6.15. Ilustracja drogi mieszania

W celu określenia składowej v'_y prędkości fluktuacyjnej rozpatrzymy następujący schemat: dwie płynne cząstki, wchodzące do rozpatrywanej warstwy z dwóch stron (od góry i od dołu), będą się poruszać w tej warstwie, zbliżając się lub oddalając wzajemnie z prędkością względną $2l(d\bar{v}_x/dy)$. Daje to podstawę do założenia, że składowa v'_y powinna również mieć wartość rzędu $l(d\bar{v}_x/dy)$. Gdy przystępujemy wreszcie do określenia średniej wartości ilocznego $\bar{v}'_x \bar{v}'_y$, należy ustalić, jakie znaki mają pary wartości v'_x i v'_y . Łatwo zauważać, że elementy płynu podczas przejścia przez powierzchnię kontrolną równoległą do ściany, wykonując przejście w kierunku od ściany, spóźniają się w stosunku do otaczających elementów, i odwrotnie – elementy wykonujące przejście w kierunku do ściany wyprzedzają otaczające elementy. Wynika z tego, że dodatniej składowej fluktuacji v'_y odpowiada ujemna składowa v'_x i odwrotnie.

Teoria Prandtla pozwala zatem przypuszczać, że istnieje korelacja między składowymi prędkości fluktuacyjnej w postaci

$$\overline{v'_x v'_y} = \overline{v'^2_x} = \overline{v'^2_y}. \quad (6.180)$$

Uwzględniając zależność (6.178) oraz (6.179), otrzymamy

$$-\rho \overline{v'_x v'_y} = -\rho \overline{v'^2_x} = \rho (y_2 - y_1)^2 \left(\frac{d\bar{v}_x}{dy} \right)^2,$$

czyli

$$\tau_t = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|. \quad (6.181)$$

Wzór (6.181) – przybliżony – wskazuje, że dodatkowe naprężenia, pojawiające się w ruchu turbulentnym, zmieniają się proporcjonalnie do kwadratu prędkości.

Z porównania zależności (6.174) i (6.181) wynika, że lepkość turbulentna może być określona zależnością

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{v}_x}{dy} \right|. \quad (6.182)$$

Dołączenie zależności (6.181) do układu równań Reynoldsa (6.163) lub (6.164) daje zamknięty układ równań, ale pod warunkiem, że wprowadzi się założenia dotyczące drogi mieszania l .

W literaturze dotyczącej dynamiki przepływów turbulentnych, a ściślej zagadnień turbulencji, spotykamy też inne hipotezy umożliwiające określenie naprężen turbulentnych na podstawie koncepcji lepkości turbulentnej (von Karmana, Taylora, Prandtla-Reicharda, Kołmogorowa, Spaldinga, Hinzeego), jak również tzw. modele turbulencji, których celem jest bezpośrednie wyznaczenie naprężen Reynoldsa $\overline{v'_i v'_j}$.

Modele te (np. Bradshawa, Laundera, Rotta, Harlowa i innych), umożliwiające określenie $\overline{v'_i v'_j}$ w wyniku numerycznego rozwiązywania układów równań zachowania, opierają się na koncepcji, że w ruchu turbulentnym energia ruchu makroskopowego jest „przepompowywana” dzięki wirom makroskopowym przez proces ich rozpadu do wirów o skali mikroskopowej, określonej skalą turbulencji, których energia z kolei ulega dyssypacji (kaskady energii).

6.8. PÓŁEMPIRYCZNE METODY OBLCZANIA PRZEPŁYWÓW TURBULENTNYCH

6.8.1. TURBULENTNA WARSTWA PRZYŚCIENNA

Obecnie teoria turbulencji jest jeszcze daleka od formalnej doskonałości. Dotychczas opracowane hipotezy i modele nie zawsze są w pełni zgodne z doświadczeniem, dlatego też nie będziemy zajmować się ścisłymi rozwiązaniami równań Reynoldsa (6.163) nawet w takim zakresie, jak zajmowaliśmy się rozwiązaniami równań Naviera-Stokesa (p. 6.4.2). Opracowywane są zatem półempirykczne metody obliczania

przepływów turbulentnych, które dają dostatecznie dokładne rozwiązania potwierdzone wynikami pomiarów. Ponieważ większość spotykanych przepływów ma pewien uprzywilejowany kierunek, parametry charakteryzujące ich ruch mogą być wyznaczone z uproszczonych równań ruchu w warstwie przyściennej, przy czym rozpatrywana tutaj warstwa przyścienienna jest płaska i turbulentna.

Warunki brzegowe układu równań, dotyczące wielkości uśrednionych, są takie same, jak dla laminarnej warstwy przyściennej. W szczególności stawiamy warunek, aby wielkości uśrednione przybierały na granicy warstwy wartości odpowiadające potencjalnemu przepływowi płynu nielepkiego. Warunki te uzupełniamy postulatem znikania fluktuacji turbulentnych zarówno na ścianie

$$v'_x(x, 0) = v'_y(x, 0) = v'_z(x, 0) = 0,$$

jak i na granicy warstwy przyściennej

$$v'_x(x, \delta) = v'_y(x, \delta) = v'_z(x, \delta) = 0.$$

Płaski, ustalony ruch uśredniony płynu nieściśliwego (przy założeniu, że $f = \mathbf{0}$) można opisać równaniami Reynoldsa (6.163) w następującej postaci

$$\begin{aligned} \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_x'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_x' v_y'}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} \right), \\ \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_x' v_y'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y'^2}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (6.183)$$

oraz równaniem ciągłości

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0. \quad (6.184)$$

Oceńmy poszczególne składniki sumy w równaniach (6.183), podobnie jak podczas wyprowadzania równań Prandtla (6.135), przyjmując dodatkowe założenie dotyczące rzędu składowych prędkości fluktuacyjnych

$$\frac{\bar{v}_x'^2}{\bar{v}_x} = \frac{\bar{v}_y'^2}{\bar{v}_x} = \frac{\bar{v}_x' v_y'}{\bar{v}_x} = 0 \left(\frac{v_\infty \delta}{l} \right).$$

Drugie z równań (6.183) jest następujące

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_x' v_y'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y'^2}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2}, \quad (6.185)$$

a rzędy wielkości poszczególnych składników równają się kolejno

$$0 \left(\frac{v_\infty^2 \delta}{l^2} \right) 0 \left(\frac{v_\infty^2 \delta}{l^2} \right) 0 \left(\frac{v_\infty^2 \delta}{l^2} \right) 0 \left(\frac{v_\infty^2}{l} \right) 0 \left(\frac{v_\infty^2}{l} \right) 0 \left(\frac{v_\infty v_\infty \delta}{l^3} \right) 0 \left(\frac{v_\infty v_\infty}{l \delta} \right). \quad (6.186)$$

Po odrzuceniu członów niższego rzędu w stosunku do $0(v_\infty^2/l)$, równanie (6.185) przyjmie postać

$$\frac{\partial \overline{v_y'^2}}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad (6.187)$$

stąd, po całkowaniu względem y , będzie

$$\bar{p} + \rho \overline{v_y'^2} = p_0(x). \quad (6.188)$$

Stała całkowania $p_0(x)$ jest ciśnieniem na zewnątrz warstwy przyściennej.

Po uwzględnieniu zależności (6.188) pierwsze z równań ruchu (6.183) przyjmuje postać

$$\overline{v}_x \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \overline{v}_y \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{v_x'^2} - \overline{v_y'^2} \right) + \frac{\partial \overline{v_x' v_y'}}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v}_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v}_x}{\partial y^2}, \quad (6.189)$$

a oszacowania kolejnych składników sumy (6.189)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \left(\frac{v_\infty^2}{l} \right) & 0 \left(\frac{v_\infty^2}{l} \right) & 0 \left(\frac{v_\infty^2 \delta}{l^2} \right) & 0 \left(\frac{v_\infty^2}{l} \right) & 0 \left(\frac{v_\infty^2}{l} \right) & 0 \left(\nu \frac{v_\infty}{l^2} \right) & 0 \left(\nu \frac{v_\infty}{\delta^2} \right) \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} & \text{VII} \end{array}. \quad (6.190)$$

Stąd widać, że wyrazy I, II, IV i V mają ten sam rząd wielkości. Spośród dwóch wyrazów, w których występuje lepkość, ostatni – VII – jest większy (należy zwrócić jednak uwagę, że poza warstwą przyścienną jego wartość byłaby mała).

Przyjmiemy zatem następującą przybliżoną postać równania (6.189)

$$\overline{v}_x \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \overline{v}_y \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} - \overline{v_x' v_y'} \right) \quad (6.191)$$

lub

$$\overline{v}_x \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} + \overline{v}_y \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (6.192)$$

gdzie

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau_{xy}}{\rho} = \nu \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial y} - \overline{v_x' v_y'}. \quad (6.193)$$

Określone w ten sposób naprężenia styczne mogą być wywołane obecnością ściany, jak również pojawić się na skutek mieszania jednego płynu z innym otaczającym go.

W celu omówienia metod obliczania wielkości charakteryzujących przepływ turbulentny należy wyodrębnić dwie klasy przepływów:

- *swobodne*, zachodzące w dość znacznej odległości od ścian i podlegające prawom tzw. *turbulencji swobodnej*,
- *przyścienne*, rozwijające się w pobliżu ścian ograniczających je i podlegające prawom tzw. *turbulencji przyściennej*.

6.8.2. PRZEPŁYWY SWOBODNE

Pojęcie *turbulencja swobodna* odnosi się do tych przepływów, które nie są ograniczone żadną ścianą oraz w których istnieją naprężenia styczne powstałe na skutek mieszania się jednego płynu z innym otaczającym go. Dwoma zasadniczymi rodzajami tych przepływów są: *strugi swobodne* oraz *ślady* pojawiające się za opływanymi przeszkodami. Praktyczne zastosowania teorii strug turbulentnych w technice są tak rozległe (komory spalania, układy cieplne i wentylacyjne, aparatura chemiczna), że stanowi ona oddzielny dział stosowanej mechaniki płynów i została opracowana w wielu monografiach.

Problemami interesującymi technikę są: szybkość rozprzestrzeniania się jako funkcja odległości, ewolucja maksymalnej prędkości, profile prędkości w przekrojach poprzecznych oraz sposób, w jaki mieszają się inne wielkości przenoszone. Badania doświadczalne wskazują, że struktura przepływów swobodnych jest niezależna od lepkości, jeśli nie jest ona zbyt duża, a zatem przepływy podobne geometrycznie są hydrodynamicznie podobne przy dostatecznie dużych wartościach liczb Reynoldsa.

Rozpatrzmy uśredniony przepływ turbulentny w warstwie granicznej – tworzącej obszar mieszania – strugi płaskie z otaczającym płynem o tej samej gęstości.

Z obserwacji doświadczalnych wynika, że izotermiczna struga płaska rozprzestrzenia się w ośrodku będącym w spoczynku poprzez obszary wirowe wychodzące ze źródeł A i B oraz łączące się w punkcie C na osi strugi (rys. 6.16).

Te dwa obszary, stanowiące *obszar mieszania strugi*, charakteryzują się:

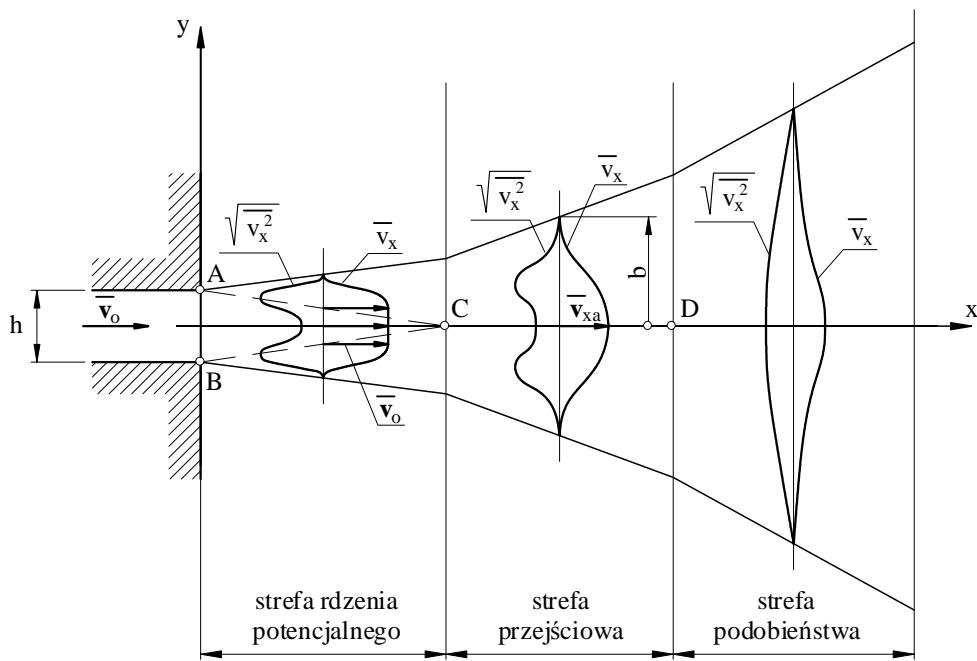
- przekazywaniem energii i transportem pędu między strukturami fluktuacji turbulentnych i wielkości uśrednionych,

➤ porywaniem cząstek płynu otaczającego,

➤ rozpraszaniem energii strugi w miarę oddalania się od wylotu.

Obszar mieszania strugi obejmuje trzy strefy podstawowe:

1. *Strefę rdzenia potencjalnego*, w której prędkość wewnętrz $\Delta ABC = v_o = \text{const.}$ Tworzące stożka ograniczają obszary zawirowań, w których $0 < \bar{v}_x < \bar{v}_{xo}$, a profile prędkości fluktuacyjnej (składowej wzdużnej $\sqrt{v_x'^2}$) mają dwie wypukłości symetryczne względem osi wylotu.



Rys. 6.16. Turbulentna struga swobodna

2. *Strefę przejściową* (ograniczoną przekrojami poprzecznymi przechodzącymi przez punkty C i D), w której prędkość v_a w osi strugi szybko spada ($\bar{v}_{xa} \propto 1/\sqrt{x}$). W tej strefie profile prędkości uśrednionej można sprowadzić do profilu uniwersalnego, w wyniku doboru odpowiedniej skali prędkości i długości, ale profile składowej wzdużnej prędkości fluktuacyjnej nadal nie są podobne.

3. *Strefa podobieństwa*, zwana też strefą przepływu uporządkowanego (poza przekrojem przechodzącym przez punkt D), charakteryzująca się tym, że krzywe prędkości, fluktuacji i naprężeń turbulentnych można zastąpić ich profilami zredukowanymi¹⁾. Zostaje wobec tego osiągnięta w tym przypadku równowaga dynamiczna. Jeśli w dowolnym przekroju poprzecznym weźmiemy pod uwagę półprofil prędkości miejscowych o szerokości b , to stanem równowagi przepływu nazwiemy taki stan, dla którego możemy napisać

¹⁾ Pole prędkości zarówno uśrednionej, jak i fluktuacyjnej może być określone za pomocą jednej skali prędkości v^* , jednej skali długości l^* oraz odpowiednich, uniwersalnych funkcji bezwymiarowych współrzędnej $\eta = y/l^*(x)$. Jako skalę prędkości wybiera się w strudze z reguły \bar{v}_{\max} , za skalę zaś długości w przepływach z symetrią osiową przyjmuje się z zasady tzw. połówkową szerokość strugi $y_{1/2}$, określającą współrzędną poprzeczną, przy której prędkość \bar{v} równa jest połowie odpowiedniej wartości maksymalnej, czyli $\bar{v}(y_{1/2}) = 1/2 (\bar{v}_{\max})$.

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{xa}} = f\left(\frac{y}{b}\right) = f(\eta), \quad (6.194)$$

gdzie funkcja $f(\eta)$ jest jednakowa dla wszystkich przekrojów, \bar{v}_{xa} i b zmieniają się natomiast w kolejnych przekrojach. Stan taki można uważać przynajmniej za asymptotyczną postać zachowania się przepływu w określonych warunkach. Występowanie takiego stanu powoduje uporządkowanie zjawiska w wyniku pominięcia wpływów warunków w początkowym obszarze przepływu oraz ustala quasi-równowagę schakteryzowaną lokalnymi skalami. W strefie podobieństwa ekspansja strugi jest odwrotnie proporcjonalna do prędkości w osi $\bar{v}_{xa} \propto 1/x$.

Jak widać, na granicy strugi i otaczającego płynu tworzy się przepływ typu warstwy przyściennej.

Przyjmując wypływ ustalony ($\partial \bar{v}_x / \partial t = 0$) oraz $\partial p / \partial x = 0$ i pomijając działanie sił masowych ($f \equiv 0$), otrzymamy równanie ruchu (6.192) w postaci

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (6.195)$$

oraz równanie ciągłości

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0. \quad (6.196)$$

Po scałkowaniu równania (6.195) po przekroju poprzecznym strugi swobodnej i przyjęciu, że na granicy strugi naprężenie znika, otrzymujemy (dla strugi płaskiej) wyrażenie

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \bar{v}_x^2 dy = \text{const} \quad \text{lub} \quad \frac{dJ}{dx} = \text{const}, \quad (6.197)$$

$$\text{gdzie } J = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \bar{v}_x^2 dy.$$

Zależność (6.197) stanowi zasadę zachowania pędu – *pęd (odniesiony do jednostkowej szerokości b) jest stały i równy pędowi płynu w przekroju wylotowym*

$$J = J_o = \rho \bar{v}_{xo}^2 h. \quad (6.198)$$

Oczywiście, ta stała wartość J charakteryzuje ruch strugi w strefie podobieństwa.

Rozważmy ten obszar strugi – strefę przejściową – w którym zachodzi podobieństwo profili prędkości uśrednionych. Dla dowolnego przekroju poprzecznego możemy określić stosunek składowej \bar{v}_x – uśrednionej prędkości miejscowej do prędkości w osi \bar{v}_{xa} w zależności od stosunku współrzędnej y (ortogonalnej do osi wylotu) do szerokości charakterystycznej danego profilu b w postaci (6.194)

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{xa}} = f(\eta) ,$$

gdzie $\eta = y/b$.

Sprawdzamy, czy istnieje takie rozwiązanie równania (6.194), które ma niezmieniony profil zredukowany $f(\eta)$, podczas gdy wielkości \bar{v}_{xa} oraz b ulegają zmianom wraz z odległością od wylotu z dyszy. Po zamianie zmiennych, uwzględnieniu zależności (6.194) i (6.196) oraz scałkowaniu w granicach od osi do η otrzymamy równanie weryfikujące tę strefę w postaci

$$-\frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2} = -\frac{(\bar{v}_{xa}^2 b)' }{\bar{v}_{xa}^2} \int_0^\eta f^2 d\eta + \frac{(\bar{v}_{xa}^2 b)'}{\bar{v}_{xa}^2} F f , \quad (6.199)$$

gdzie:

$$F = F(\eta) = \int_0^\eta f(\eta) d\eta ,$$

$(\dots)'$ –różniczkowanie po x .

Po scałkowaniu rozciągniętym poza obszar strugi, na skutek zanikania tarcia,

$$(\bar{v}_{xa}^2 b)' = 0 , \quad (6.200)$$

co jest zgodne z zależnością (6.197). Wobec tego równanie (6.199) uprości się do postaci

$$-\frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2} = \frac{(\bar{v}_{xa}^2 b)'}{\bar{v}_{xa}^2} F f , \quad (6.201)$$

z której – gdy uwzględni się (6.200) – wynika

$$-\frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2} = \frac{b'}{2} F f \quad \text{lub} \quad -\frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2 b'} = \frac{F f}{2} . \quad (6.202)$$

Profile naprężeń mogą więc być sprowadzone do profilu uniwersalnego, a podobieństwo naprężeń można sprowadzić do podobieństwa profili prędkości.

Po ponownym scałkowaniu zależności (6.202) otrzymamy

$$\int_0^\eta -\frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2} d\eta = \frac{b'}{4} F^2 . \quad (6.203)$$

Dokonujemy wyboru szerokości charakterystycznej b tak, by struga o zastępczej prędkości $\bar{v}_x = \bar{v}_{xa}$ miała ten sam strumień objętości, co struga rzeczywista:

$$\int_0^\infty \bar{v}_x dy = \bar{v}_{xa} b \quad \text{lub} \quad \int_0^\infty f d\eta = F(\infty) = 1 . \quad (6.204)$$

Przy takim wyborze b oraz założeniu, że

$$\int_0^\infty -\frac{\tau}{\rho \bar{V}_{xa}^2} d\eta = \frac{b'}{4} \equiv \sigma, \quad (6.205)$$

otrzymamy równanie (6.203) w postaci

$$b' = 4 \sigma. \quad (6.206)$$

Po przyjęciu

$$-\frac{\tau}{\rho \bar{V}_{xa}^2} = \frac{\overline{V'_x V'_y}}{\bar{V}_{xa}^2} = \varphi(y/b) = \varphi(\eta), \quad (6.207)$$

co dla strugi turbulentnej jest założeniem dokładniejszym niż wymagane przez podobieństwo profili prędkości, otrzymamy

$$\sigma = \int_0^\infty -\frac{\tau}{\rho \bar{V}_{xa}^2} d\eta = \int_0^\infty \varphi(\eta) d\eta. \quad (6.208)$$

Ponieważ zredukowane profile naprężeń stycznych są podobne, powyższa całka jest więc stałą i ekspansja strugi jest liniowa, zgodnie z zależnością (6.205) albo nawet (6.203), a zatem

$$b = 4 \sigma x. \quad (6.209)$$

Współczynnik σ , reprezentujący wartość średnią tarcia jednostkowego wewnątrz strugi, nazwano *współczynnikiem tarcia*. Jego wartość w strefie przejściowej zależy od x , wobec czego w tym obszarze funkcja rozprzestrzeniania się strugi jest nielinowa. W strefie podobieństwa natomiast, w której została osiągnięta równowaga dynamiczna, współczynnik tarcia ma wartość stałą, w wyniku czego ekspansja strugi jest liniowa. Wnioski powyższe w pełni potwierdzają omówione już obserwacje doświadczalne.

Znając pęd strugi

$$J = 2\rho \int_0^{+\infty} \bar{V}_x^2 dy = 2\rho k_1 \bar{V}_{xa}^2 b, \quad (6.210)$$

$$\text{gdzie } k_1 = \int_0^{+\infty} f^2 d\eta,$$

prędkość w osi możemy określić następująco

$$\bar{V}_{xa} = \left(\frac{1}{8 k_1} \frac{J}{\rho} \frac{1}{\sigma x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.211)$$

a jednostkowy jednostronny strumień objętości

$$q_V = \bar{v}_{xa} b = \left(\frac{2}{k_1} \frac{J}{\rho} \frac{1}{\sigma x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.212)$$

Badania doświadczalne turbulentnej strugi swobodnej wskazują, że naprężenia Reynoldsa w strefie podobieństwa są związane z ruchem uśrednionym. Hipoteza bardziej szczegółowa polega na założeniu, że

$$-\frac{\tau}{\rho} = \overline{v'_x v'_y} = -\varepsilon \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\bar{v}_{xa}}{b} f' \quad (6.213)$$

lub też

$$-\frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2} = \frac{\overline{v'_x v'_y}}{\bar{v}_{xa}^2} = -\frac{\varepsilon}{\bar{v}_{xa} b} f', \quad (6.214)$$

gdzie ε – współczynnik lepkości turbulentnej $\varepsilon = \mu_t / \rho$.

W tym przypadku powinna być spełniona równość

$$\frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2} = \frac{\varepsilon}{\bar{v}_x b} = \varphi(\eta). \quad (6.215)$$

Jeżeli funkcja $\varphi(\eta)$ jest stała, to $\varepsilon \propto \bar{v}_{xa} b$, lub po uwzględnieniu zależności (6.205)

$$\varepsilon = \sigma \bar{v}_{xa} b. \quad (6.216)$$

Współczynnik ε odgrywa rolę pozornego współczynnika lepkości, może on zmieniać się wraz z \bar{v}_{xa} oraz b wraz ze zmianą odciętej. Badania doświadczalne wykazują, że mało zmienia się w centralnym obszarze strugi, zmniejsza się natomiast ku jej brzegowi.

W wyniku całkowania zależności (6.214) otrzymano

$$\int_0^\eta \frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2} d\eta = \frac{\varepsilon}{\bar{v}_{xa} b} (f(\eta) - f(0)), \quad (6.217)$$

ponieważ $f(0) = 1$, więc

$$\int_0^\eta \frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2} d\eta = \frac{\varepsilon}{\bar{v}_{xa} b} (1 - f). \quad (6.218)$$

Ale $f(\infty) = 0$, a zatem wzór (6.205) przyjmuje postać

$$\sigma = \int_0^\infty \frac{\tau}{\rho \bar{v}_{xa}^2} d\eta = \frac{b'}{4} = \frac{\varepsilon}{\bar{v}_{xa} b}. \quad (6.219)$$

Po uwzględnieniu zależności (6.219) równanie (6.203) przyjmuje postać

$$\frac{\varepsilon}{\bar{v}_{xa} b} (1-f) = \frac{\varepsilon}{\bar{v}_{xa} b} F^2. \quad (6.220)$$

Profil prędkości może być zatem określony równaniem

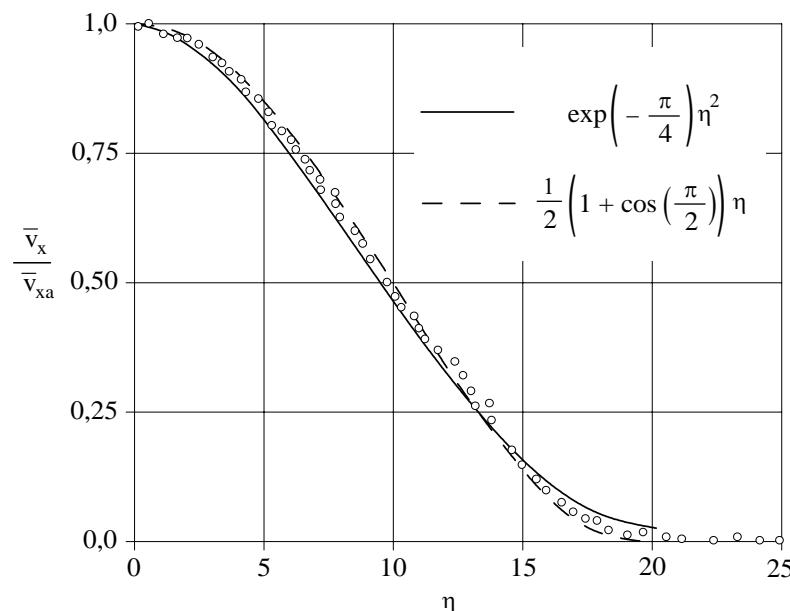
$$F' + F^2 = 1, \quad (6.221)$$

którego rozwiązanie po uwzględnieniu warunku $F'(0) = 1$ przyjmuje postać

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{xa}} = f(\eta) = \frac{1}{\cos h^2 \eta}. \quad (6.222)$$

Rozwiązanie to, podane przez Görtlera, daje prędkości nieco zawyżone, ponieważ wartości współczynnika ε zmniejszają się ku brzegowi strugi.

Rozwiązanie bardziej zgodne z doświadczeniem może być opisane krzywą Gaussa $f = \exp\left(-\frac{\pi}{4}\eta^2\right)$ lub krzywą kosinusów $f = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)\right)$ – przykładowo przedstawionymi na rysunku 6.17 lub też zależnością $f = \exp\left(-\eta^2 \ln 2\right)$.



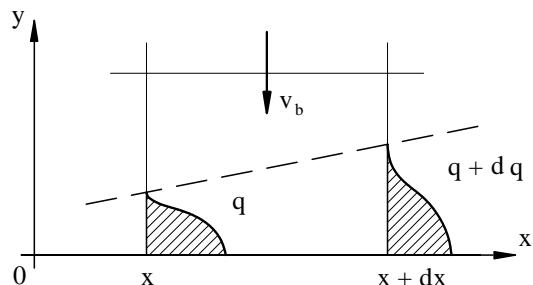
Rys. 6.17. Bezwymiarowe profile prędkości uśrednionych w strefach ich podobieństwa w strudze swobodnej

Miarą procesu mieszania jest przyrost strumienia objętości w kolejnych przekrojach poprzecznych strugi. Rozpatrzmy dwa przekroje oddalone od siebie o dx (rys. 6.18). Prędkość wnikania v_b cząstek płynu otaczających wypływającą strugę można określić zależnością

$$v_b = \frac{dq_v}{1dx} = \frac{dq}{dx}, \quad (6.223)$$

w której q – jednostkowy strumień objętości.

Taylor wysunął hipotezę, iż przy liniowej ekspansji strugi prędkość wnikania v_b powinna być proporcjonalna do prędkości średniej charakterystycznej dla danej strefy mieszania.



Rys. 6.18. Schemat zasysającego działania strugi swobodnej

Zakładając, że szerokość strugi równa jest $2b$, możemy tak dobrąć prędkość w osi $v_{xa}/2$, by iloczyn obu wielkości był równy strumieniowi objętości q_v w odległości x od wylotu strugi. Korzystając z tego założenia, możemy określić stosunek prędkości wnikania v_b do prędkości $v_{xa}/2$, który definiuje współczynnik wnikania

$$E = \frac{v_b}{v_{xa}/2} = 4\sigma, \quad (6.224)$$

a zatem: *w strefie podobieństwa, w której współczynnik tarcia ma wartość stałą, niezmiana jest również wartość współczynnika wnikania; w strefach, w których równowaga dynamiczna nie jest zachowana, współczynnik wnikania E jest zmienny.*

6.8.3. PRZEPŁYWY PRZYŚCIENNE

Zagadnienia przepływów przyściennych znacznie różnią się od omówionych pośrednio przepływów swobodnych. Nie można tutaj pomijać wpływu lepkości molekularnej, przede wszystkim w pobliżu ścian.

Aby omówić zasadnicze własności tego typu przepływów, rozpatrzmy płaski przepływ turbulentny, ustalony w odniesieniu do parametrów uśrednionych. Linie prądu uśrednionego przepływu stanowią rodzinę prostych, równoległych do płaskiej nieograniczonej ściany (rys. 6.19), na której leży osa x .

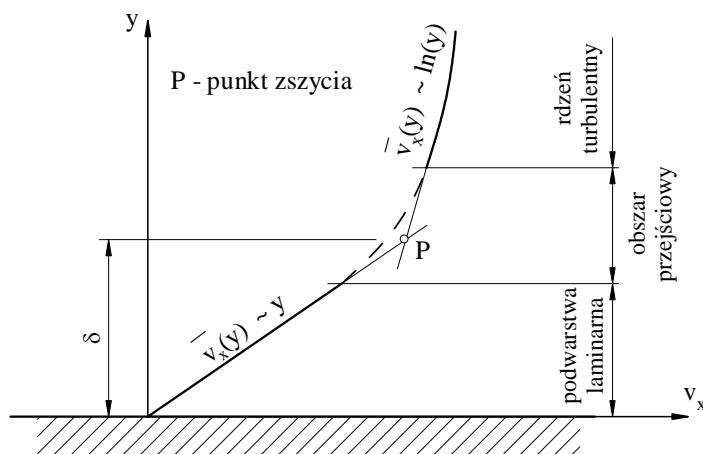
Zakładamy, że przepływ nie zależy już od zmiennej x , a zatem

$$\bar{v}_x = \bar{v}_x(y), \quad \bar{v}_y = 0, \quad p = p(y).$$

Równanie płaskiej ustalonej warstwy przyściennej (6.192) przyjmuje wówczas postać

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \Rightarrow \tau(y) = \text{const} = \tau_0, \quad (6.225)$$

gdzie τ_0 – naprężenie na ścianie.



Rys. 6.19. Rozkład prędkości w turbulentnej warstwie przyściennej

Jeśli $\tau(y)$ określmy jako sumę naprężenia wywołanego lepkością molekularną, zwanego dalej *laminarnym*, oraz naprężenia wynikającego z fluktuacji prędkości – *turbulentnego*

$$\tau_0 = \tau_l + \tau_t \quad (6.226)$$

i uwzględnimy hipotezy Newtona (1.15) oraz drogi mieszania Prandtla ((6.177), (6.181)), otrzymamy, zgodnie z (6.225),

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2. \quad (6.227)$$

Składniki prawej strony zmieniają się z odległością y od ściany. Ściana tłumi bowiem fluktuacje turbulentne, w związku z czym drugi składnik, reprezentujący naprężenia turbulentne, jest w jej pobliżu mały. W większej odległości od ściany odwrotnie – turbulencja jest w pełni rozwinięta i naprężenia laminarne są małe w porównaniu z turbulentnymi. Powstała zatem koncepcja (zaproponowana przez Prandtla) rozbicia ostatniego równania na prostsze, z których jedno będzie określać ruch płynu w pobliżu ściany, drugie – w pewnej odległości od niej.

Równania te będą miały postać:

$$\mu \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} = \tau_0 \quad (6.228)$$

– obszar, w którym obowiązuje, nazwano *podwarstwą* (strefą) *laminarną* (lepką);

$$\rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2 = \tau_0 \quad (6.229)$$

– obszar jego obowiązywania nazwano *rdzeniem turbulentnym*.

Pomiędzy podwarstwą lepką i rdzeniem turbulentnym jest *obszar przejściowy*, w którym naprężenie laminarne jest tego samego rzędu co turbulentne. W pierwszym przybliżeniu pominiemy istnienie tego obszaru, a ruch płynu określmy funkcją, będącą rezultatem połączenia rozwiązań równań (6.228) i (6.229).

W podwarstwie lepkiej, gdy $\bar{v}_x(0) = 0$, rozwiązaniem równania (6.228) jest

$$\bar{v}_x \equiv \bar{v} = \frac{\tau_0}{\mu} y, \quad (6.230)$$

czyli *rozkład prędkości jest liniowy*.

Rozwiązanie równania (6.229) w rdzeniu turbulentnym wymaga wprowadzenia określenia drogi mieszania l . Prandtl założył, że w warstwie przyściennej

$$l = \kappa y. \quad (6.231)$$

Oznacza to, że stosunek składowej poprzecznej fluktuacji prędkości v'_y do przyrostu prędkości uśrednionej $\partial \bar{v}_x / \partial y$ rośnie liniowo wraz z y , co wynika z omówionej hipotezy Prandtla. Współczynnik κ należy wyznaczyć doświadczalnie. Po podstawieniu równania (6.231) do zależności (6.229), otrzymamy

$$\frac{d\bar{v}_x}{dy} = \frac{1}{\kappa y} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}. \quad (6.232)$$

Taki sam wzór otrzymano również w wyniku zastosowania analizy wymiarowej (por. p. 6.3.4), ale $\tau_t = \tau_0$.

Wprowadzając oznaczenie $\sqrt{\tau_0 / \rho} = v_*$, nazwane *prędkością tarcia* lub *prędkością dynamiczną*, otrzymamy w wyniku całkowania

$$\bar{v}_x(y) = \frac{v_*}{\kappa} \ln y + C. \quad (6.233)$$

Stałą C wyznaczamy z warunku zszycia; żądamy, aby prawe strony wyrażeń określających rozkłady prędkości w obszarze podwarstwy lepkiej (6.230) i rdzenia turbulentnego (6.233) były sobie równe w punkcie P o rzędnej δ , stanowiącej grubość podwarstwy. Grubość ta może być wyznaczona metodą analizy wymiarowej,

pod warunkiem, że jest ona funkcją wymiarową dynamicznego współczynnika lepkości μ , gęstości ρ płynu oraz naprężenia stycznego τ_0 w podwarstwie laminarnej, czyli

$$\delta = \delta(\mu, \rho, \tau_0).$$

Wobec tego, że wymiary wielkości wymiarowych $\{\mu, \rho, \tau_0\}$ są wymiarowo niezależne, łatwo uzyskuje się wzór na grubość podwarstwy δ (p. 6.3.4)

$$\delta = \beta \frac{\mu}{\sqrt{\rho \tau_0}} = \beta \frac{v}{\sqrt{\tau_0 \rho}} = \beta \frac{v}{v_*}, \quad (6.234)$$

w którym β jest liczbą, a zatem

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{v_*}{\kappa} \ln y + C \quad \text{dla } y \geq \delta, \\ \bar{v} &= \frac{\tau_0}{\mu} y = \frac{\tau_0}{v \rho} y = \frac{v_*^2}{v} y \quad \text{dla } 0 \leq y \leq \delta, \\ \delta &= \beta \frac{v}{v_*}, \end{aligned}$$

czyli w punkcie P dla $y = \delta$

$$\frac{v_*}{\kappa} \ln \beta \frac{v}{v_*} + C = \frac{v_*^2}{v} \beta \frac{v}{v_*} \Rightarrow C = -\frac{v_*}{\kappa} \ln \beta \frac{v}{v_*} + \beta v_*.$$

Wzór określający rozkład prędkości w rdzeniu turbulentnym przyjmuje więc postać

$$\bar{v} = v_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{v} + \beta - \frac{1}{\kappa} \ln \beta \right). \quad (6.235)$$

Stałe κ i β mogą być wyznaczone tylko doświadczalnie.

Pomiary przepływów typu turbulentnej warstwy przyściennej wykazują, że postać wzorów (6.235) jest uniwersalna dla tych przepływów. Zmieniają się tylko wartości stałych doświadczalnych. Wyróżniamy zawsze *cienką podwarstwę lepką* (laminarną o grubości δ i rdzeń turbulentny o logarytmicznym rozkładzie prędkości $\bar{v}_x(y)$).

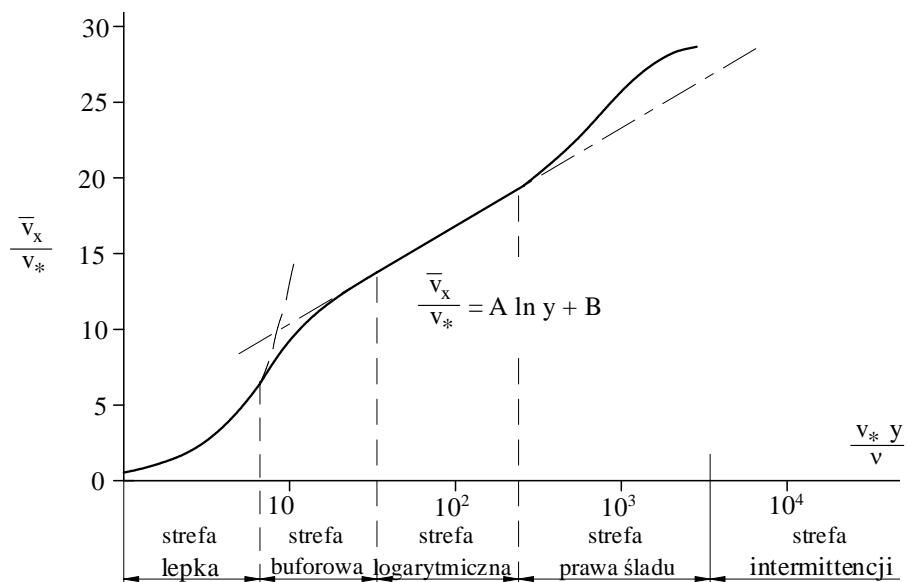
Nowsze badania doświadczalne doprowadziły do wyróżnienia kilku subwarstw (podwarstw, stref) turbulentnej warstwy przyściennej. Zwykle rozważa się je w układzie współrzędnych, w którym na osi odciętych nanosi się bezwymiarową współrzędną prostopadłą do powierzchni ściany

$$v_* y / v, \quad (6.236)$$

w której, jak poprzednio, v_* oznacza prędkość tarcia $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$.

Zgodnie z rysunkiem 6.20, w turbulentnej warstwie przyściennej na płaskiej, gładkiej powierzchni wyróżnia się następujące podwarstwy:

- strefę lepką $\frac{v_* y}{v} \leq 3 \div 5$,
- strefę pośrednią (buforową) $3 \div 5 \leq \frac{v_* y}{v} \leq 30 \div 40$,
- strefę logarytmicznego profilu prędkości $30 \div 40 \leq \frac{v_* y}{v} \leq 10^2 \div 10^3$,
- strefę „prawa śladu” $10^2 \div 10^3 \leq \frac{v_* y}{v} \leq 2 \cdot 10^3$,
- strefę intermittencji $\frac{v_* y}{v} > 2 \cdot 10^3$.



Rys. 6.20. Struktura turbulentnej warstwy przyściennej

Strefy lepką i buforową określa się często wspólną nazwą *strefa lepka*, ponieważ w obszarze tym naprężenia lepkie stanowią znaczną część całkowitych naprężen stycznych i lepkość molekularna odgrywa tu decydującą rolę. Ta *subwarstwa lepka* wspólnie z *subwarstwą logarytmicznego profilu prędkości* tworzą wewnętrzny obszar turbulentnej warstwy przyściennej, a *strefy prawa śladu* i *intermittencji* składają się na jej *obszar zewnętrzny*.

Charakter przepływu w wewnętrznym obszarze warstwy zależy od odległości od ściany (y), od naprężenia na ścianie (τ_0) oraz od właściwości fizycznych płynu (v, ρ). Warunki zewnętrzne, jak wzdużny gradient ciśnienia statycznego lub intensywność

turbulencji przepływu poza obrębem warstwy, nie odgrywają tutaj roli. *Wewnętrzny obszar warstwy*, zwany niekiedy *strefą stałej wartości naprężen*, zajmuje w przybliżeniu 20% całkowitej grubości warstwy.

Zewnętrzne strefy (logarytmiczna, prawa śladu i intermittencji) obszaru turbulentnej warstwy przyściennej charakteryzują się *znacznie większą grubością* – łącznie około 80% udziału grubości warstwy przyściennej. Tę część obszaru warstwy charakteryzuje obecność struktur wirowych o rozmiarach znacznie większych niż w obszarze wewnętrznym, położonym bliżej ściany.

Profil prędkości uśrednionej w obszarze zewnętrznym warstwy przyściennej, który można określić zależnością

$$\frac{v_\infty - \bar{v}_x}{v_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (6.237)$$

przypomina kształtem odpowiedni profil w przepływie swobodnym (śladzie), stąd też pochodzi nazwa tego podobszaru jako *strefy prawa śladu*. Tego typu opis rozkładu prędkości może być również rozszerzony i na przyścienny obszar warstwy (z wyjątkiem warstwy lepkiej).

W obszarze obu zewnętrznych stref warstwy przyściennej stosuje się różne wzory aproksymujące profil prędkości, np.:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}, \quad (6.238)$$

gdzie $n = 7,0 - 7,7$

$$\frac{v_\infty - \bar{v}_x}{v_*} = D \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2, \quad (6.239)$$

gdzie $D = 9,6$.

Podział pełnej grubości warstwy w stosunku: część wewnętrzna – 20% i zewnętrzna – 80% może się zmienić w przepływach o znacznej wartości wzdużnego gradientu ciśnienia statycznego. W przepływach tych, w miarę zbliżania się do tzw. punktu oderwania (p. 6.9), udział obszaru oderwania zmniejsza się przed wszystkim kosztem strefy logarytmicznego rozkładu prędkości.

Chropowatość występująca na ścianie istotnie wpływa na przepływ w obszarze warstwy przyściennej, a także poza nią. Wyniki badań doświadczalnych, ze względu na istnienie geometrycznych różnych form chropowatości (wysokości nierówności i ich rozmieszczenia), znacznie się różnią między sobą. Ogólne rozważania mogą zatem dotyczyć szczególnego rodzaju tzw. chropowatości piaskowej, która została uzyskana w sposób sztuczny przez przyklejanie do powierzchni ziaren piasku o w miarę jednorodnej granulacji. Oddziaływanie chropowatości na warstwę przyścienną można scharakteryzować liczbą $k v_*/v$ (podobną do liczby Reynolds), w której k jest średnią wysokością mikronierówności na ścianie.

Jeżeli $k v_*/v < 5$, ściana jest *hydraulicznie gładka*; nierównomierności jej pokryte są przez subwarstwę lepką i nie wpływają na przepływ w obszarze rozwiniętego przepływu turbulentnego. Gdy $5 < k v_*/v < (50 \div 70)$, wtedy, w zakresie przejściowym, nierówności powierzchni ściany przenikają przez strefę buforową i zakłócają przepływ w subwarstwie o logarytmicznym profilu prędkości. Jeśli natomiast $k v_*/v > (50 \div 70)$, to przy ścianie o w pełni rozwiniętej chropowatości powierzchni zanika subwarstwa lepka i nie ma wyraźnego podziału warstwy na obszar przepływu lepkiego i turbulentnego.

Doświadczalnie wyznaczono również rozkłady uśrednionych fluktuacji prędkości, turbulentnych naprężeń stycznych i innych wielkości turbulentnych w poprzecznym przekroju warstwy. Z przeprowadzonych badań wynika, że w obszarze wewnętrznym turbulentnej warstwy przyściennej istnieje *anizotropia turbulencji*. W związku z tym, że energia turbulencji jest przekazywana z przepływu średniego bezpośrednio do podłużnej składowej prędkości fluktuacyjnej, a dopiero później do pozostałych składowych, największą wartość mają uśrednione fluktuacje prędkości w kierunku przepływu. Maksymalne wartości fluktuacji turbulentnych występują w strefie buforowej, a minimalne – w kierunku prostopadłym w pobliżu ściany. Turbulentne naprężenia styczne rosną wraz z odległością od ściany i osiągają wartość stałą w subwarstwie buforowej. W obszarze zewnętrznej części warstwy przyściennej maleją one monotonicznie wraz z odległością i na granicy warstwy naprężenia styczne znikają.

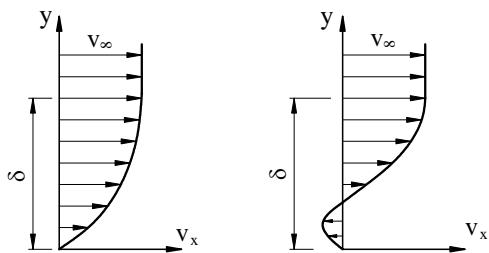
6.9. ODERWANIE WARSTWY PRZYŚCIENNEJ

Podczas ustalonego równoległego opływu płaskiej płytki, w tworzącej się na takiej ścianie warstwie przyściennej nie obserwujemy ani przepływu wstecznego, ani oderwania warstwy. Wynika to z tego, że w obszarze poza warstwą przyścienną w przepływie potencjalnym ciśnienie jest stałe, a zatem nie zmienia się również w poprzek warstwy (p. wzór (6.134)). Równość ciśnień w przepływie zewnętrznym i w poprzek warstwy przyściennej występuje także podczas opływu ścian zakrzywionych, z tym że wtedy w przepływie potencjalnym będą panowały różne wartości ciśnienia. Gradient ciśnienia $\partial p / \partial x$ istniejący poza warstwą przyścienną będzie zatem decydował o charakterze przepływu w niej i o jej oderwaniu. W celu określenia wpływu wzdużnego gradientu ciśnienia na charakter rozkładu prędkości w warstwie przyściennej przeanalizujemy równanie Prandtla (6.135).

Ponieważ na opływanej powierzchni ($y = 0$) obie składowe prędkości znikają, a pierwsze z równań (6.135) przybiera postać

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right)_{y=0}, \quad (6.240)$$

znak drugiej pochodnej na ścianie i profil prędkości przy niej zależą zatem od znaku gradientu ciśnienia. Dla ujemnego gradientu ciśnienia ($\partial p / \partial x < 0$) profil prędkości



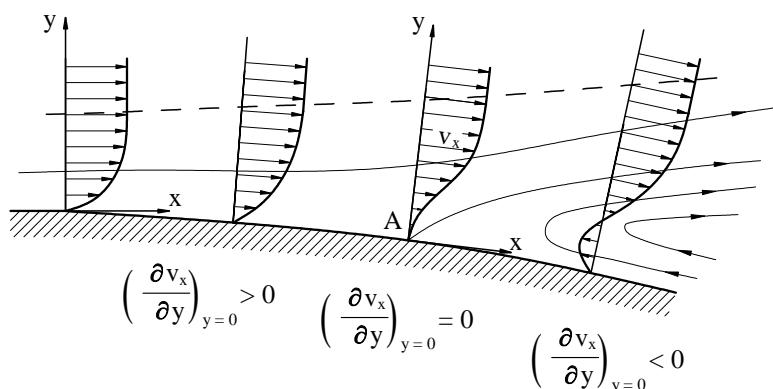
Rys. 6.21. Profil prędkości w pobliżu ściany:
a) wypukły dla $\partial p / \partial x < 0$,
b) wklęsły dla $\partial p / \partial x > 0$

w pobliżu ściany jest wypukły (rys. 6.21a), a w przypadku dodatniego – wklęsły (rys. 6.21b), przy czym zmienia się on na wypukły w poprzek warstwy przyściennej. W tym drugim przypadku pierwsza pochodna prędkości przy ścianie ($y = 0$) może być dodatnia, równa零 lub ujemna. Dla ujemnej wartości tej pochodnej, prędkości v_x w obszarze profilu wklęsłego mają kierunek przeciwny do kierunku przepływu potencjalnego (głównego) – nastąpiło zatem oderwanie warstwy przyściennej. Z przedstawionych rozważań wynikają więc kryteria oderwania warstwy przyściennej. Punkt oderwania charakteryzuje się warunkiem

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} > 0, \quad (6.241)$$

a oderwanie strugi jest spowodowane odwróceniem kierunku przepływu w pobliżu ściany bez zmiany kierunku przepływu głównego.

Zjawisko oderwania nie tylko powoduje zniszczenie rozkładu prędkości, charakterystycznego dla warstwy przyściennej, ale wywołuje również wystąpienie powiększającej się strefy zawirowań (rys. 6.22).



Rys. 6.22. Oderwanie warstwy przyściennej

Oderwanie warstwy wystąpi, gdy energia kinetyczna elementów płynu w pobliżu ściany zmala się do zera. Na prędkość elementu płynu w warstwie przyściennej (dla $y \rightarrow 0$) wpływają dwie siły: siła wywołana różnicą ciśnień działającą na przednią i tylną część elementu oraz siła tarcia. Gdy obie te siły są zwrócone w kierunku prze-

ciwnym do kierunku przepływu, element się zatrzymuje; wówczas nie tylko $v_x = 0$, ale również

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (6.242)$$

W tym punkcie, zwanym *punktem oderwania*, pojawia się linia prądu oddzielająca strefę przepływu, którego kierunek jest zgodny z kierunkiem ruchu głównego (potencjalnego), od strefy przepływu wstecznego (linią przerywaną zaznaczono granicę warstwy przyściennej). *Zjawisku oderwania towarzyszy więc powstawanie wirów formujących się okresowo i spływających z powierzchni ciała.*

Zjawisko oderwania zależy również od charakteru ruchu w warstwie przyściennej. W ruchu turbulentnym, podczas intensywnej wymiany elementów płynu, warstwę bezpośrednio przylegającą do powierzchni opływanego ciała zasilają elementy płynu o większej energii kinetycznej z warstw bardziej odległych, dzięki czemu wyczerpanie tej energii na pokonanie sił tarcia następuje wolniej. Należy podkreślić, że w tym ruchu cała warstwa przyścienienna wymienia ponadto elementy o mniejszej energii kinetycznej na elementy o energii większej, przenikające spoza obszaru tej warstwy. Dlatego też w tym przypadku zjawisko oderwania następuje później.

Dodatni gradient ciśnienia statycznego, czyli jego wzrost, i związane z tym oderwanie strugi może wystąpić w przepływie z malejącą prędkością, a zatem w odcinkach przewodów zwanych dyfuzorami (prostkami rozbieżnymi) lub po stronie spływu z opływanego elementu. Dla przepływów z ujemnym gradientem ciśnienia $\partial p / \partial x < 0$, kiedy jego prędkości wzrastają, a występuje to w tzw. konfuzorach (prostkach zbieżnych) lub po stronie napływu, oderwanie warstwy przyściennej nie występuje.

6.10. OPŁYW CIAŁA STAŁEGO PŁYNEM. CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA OPÓR CIAŁ

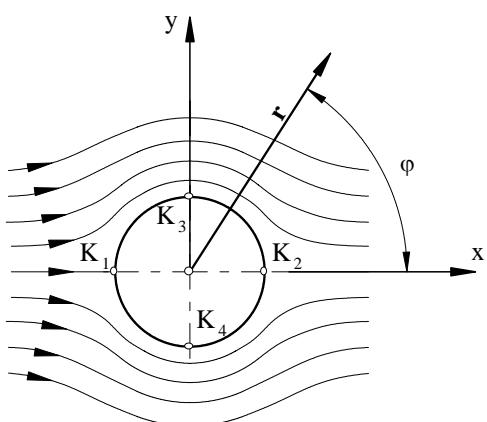
Na ciało (opływanie lub poruszające się w płynie lepkim) działają siły ciśnienia i naprężeń stycznych. Podczas opływu płynem nielepkim naprężenia styczne nie występują.

Opływ walca jest przykładem płaskiego opływu osiowo-symetrycznego, o osi normalnej do kierunku strugi. W celu porównania zakładamy początkowo potencjalny opływ walca o promieniu R i długości l (przy czym $l/R \gg 1$) płasko-równoległą strugą płynu nielepkiego. Przepływ taki otrzymuje się przez superpozycję przepływu równoległego i dipola (p. 5.3.5). Prędkość płynu nielepkiego na powierzchni walca, zgodnie z (5.87),

$$v = -2v_\infty \sin \varphi$$

jest zawsze skierowana stycznie. Prędkość przepływu jest różna od zera we wszystkich punktach powierzchni walca, oprócz tzw. punktów krytycznych, które odpowia-

dają kątom $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$ (punkty K_1 i K_2 na rys. 6.23). Po stronie napływowej prędkość przepływu wzrasta, a ciśnienie maleje, po spływowej – odwrotnie.



Gdy znane jest pole prędkości, można na podstawie równania Bernoulliego wyznaczyć pole ciśnień i otrzymujemy wówczas zależność (5.89)

$$p - p_\infty = \rho \frac{v^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \varphi),$$

w której p_∞ , v_∞ są wartościami odnoszącymi się do przepływu niezakłóconego.

Rys. 6.23. Potencjalny opływ profilu kołowego

Stosunek różnicy ciśnień do ciśnienia dynamicznego (5.90) strugi niezakłóconej, zwany *współczynnikiem ciśnienia*

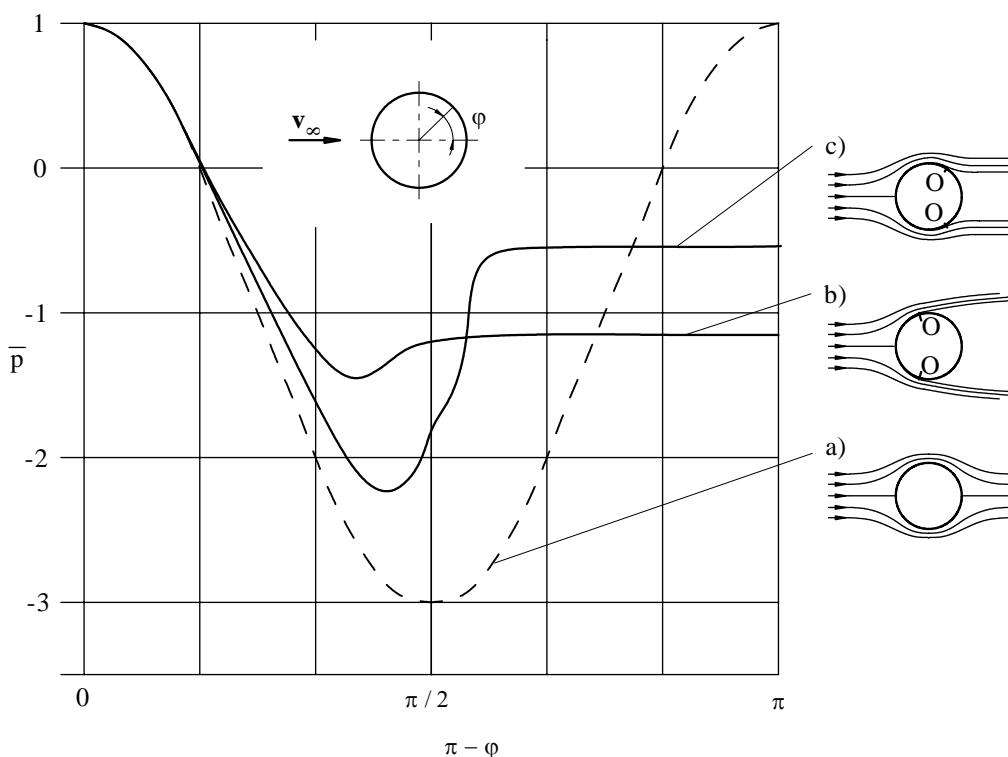
$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{\rho v_\infty^2 / 2} = 1 - 4 \sin^2 \varphi,$$

nie zależy zatem od wymiarów geometrycznych walca ani parametrów przepływu strugi, a jedynie jest funkcją kąta φ (rys. 6.24a – linia przerywana). Osiaga on wartość maksymalną w punktach krytycznych K_1 i K_2 , a minimalną w punktach K_3 i K_4 . Symetryczny rozkład ciśnień względem obu osi, wzdłużnej i poprzecznej do kierunku przepływu powoduje, że wypadkowa siła działająca na opływanego ciało jest równa zeru (wzór (5.98)).

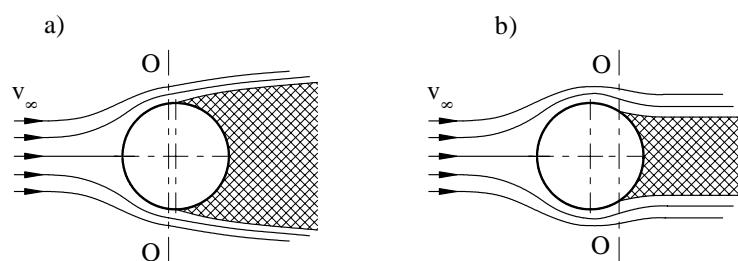
Jeżeli walec opływany jest płynem lepkim, pola prędkości i ciśnień w napływowej (przedniej) stronie walca są na ogół zbliżone do pól obliczanych dla opływu potencjalnego, ale po stronie spływowej (tylnej) występuje wyraźna rozbieżność między opływem nielepkim i lepkim (rys. 6.23 i 6.24). Również doświadczenia wskazują, że każde ciało opływanie strugą płynu lepkiego znajduje się pod działaniem znacznych sił oporu. Te rozbieżności można wyjaśnić na podstawie teorii warstwy przyściennej (p. 6.9).

Z analizy wzoru (5.90) wynika, że w przedziale $0 < \varphi < \pi/2$ gradient ciśnienia jest ujemny, natomiast w przedziale $\pi/2 < \varphi < \pi$ – dodatni. Ten rozkład ciśnienia sugeruje, że po stronie spływowej walca może wystąpić oderwanie strugi w przekroju O–O (rys. 6.25). Położenie przekroju O–O zależy od charakteru przepływu w warstwie przyściennej. Dla laminarnej warstwy przyściennej to oderwanie, zwane dalej *oderwaniem laminarnym*, występuje wcześniej (rys. 6.25a), a dla warstwy turbulentnej – zwane *oderwaniem turbulentnym* – później (rys. 6.25b). Linie prądu rzeczywistego (lepkiego) opływu walca do przekroju oderwania pokrywają się w przybliżeniu z liniami prądu przepływu potencjalnego, a od przekroju oderwania biegą równolegle do

kierunku prędkości strugi napływającej. Na liniach rozgraniczających obszar oderwania od przepływu potencjalnego panuje w przybliżeniu stała prędkość, a zatem ciśnienia też będą stałe. Również w warstwie przyściennej, w kierunku normalnym do powierzchni opływanej, ciśnienia na tych liniach nie ulegają zmianie, a zatem w całym obszarze panuje stałe ciśnienie.



Rys. 6.24. Rozkład współczynnika ciśnienia na obwodzie walca:
 a) opływ potencjalny, b) opływ z oderwaniem laminarnej warstwy przyściennej,
 c) opływ z oderwaniem turbulentnej warstwy przyściennej



Rys. 6.25. Rzeczywisty opływ walca: a) z oderwaniem laminarnym, b) z oderwaniem turbulentnym

Jeżeli, w przypadku rzeczywistych rozkładów ciśnienia, obliczymy siłę działającą w kierunku osi x , to przekonamy się, że siła oporu ciśnieniowego

$$P = \int_0^\pi 2R p \cos\varphi \, d\varphi \quad (6.243)$$

jest większa od zera. Wynika to z tego, że w tylnej części walca, zwłaszcza w obszarze oderwania, ciśnienia są dużo mniejsze niż w części przedniej i wobec tego nie równoważą się one tak, jak w przepływie potencjalnym. Z analizy rozkładów ciśnienia wynika, że *opór ciśnieniowy jest tym większy, im większy jest obszar oderwania*, a więc w przepływie z oderwaniem laminarnym opór ten jest większy niż w przepływie z oderwaniem turbulentnym.

Całkowita siła oporu składa się z oporu ciśnieniowego i oporu tarcia

$$P = P_c + P_t. \quad (6.244)$$

Odnosząc poszczególne składniki powyższego równania do $1/2(\rho v_\infty^2 A)$, przy czym A jest polem przekroju charakterystycznego ciała opływanego, otrzymamy zależność

$$c_x = c_{xp} + c_{xt}, \quad (6.245)$$

w której:

$$c_x = P / \left(\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 A \right) \quad \text{– współczynnik oporu profilowego,}$$

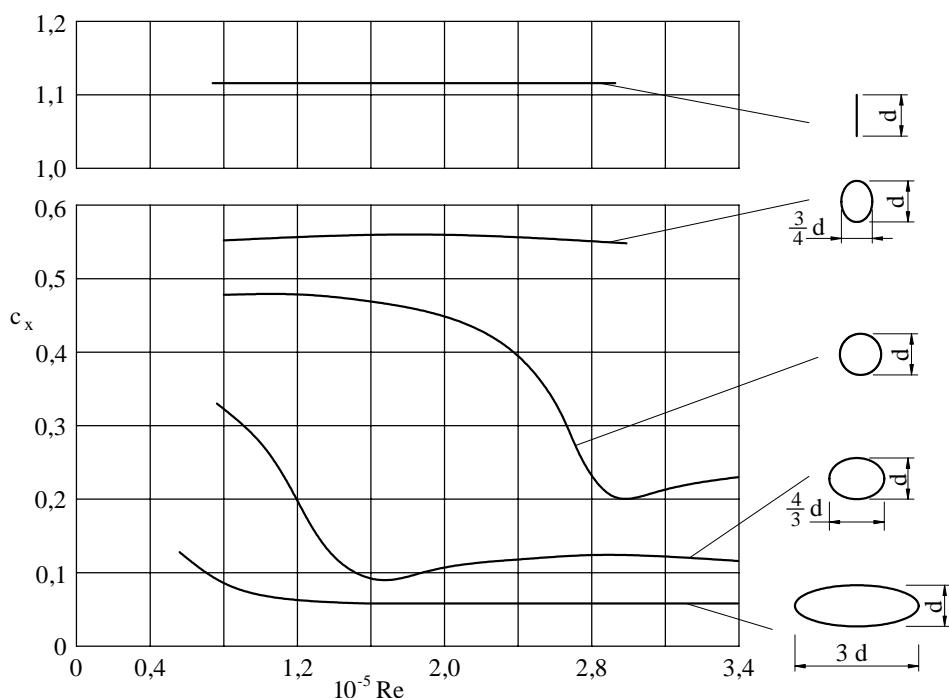
$$c_{xp} = P_c / \left(\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 A \right) \quad \text{– współczynnik oporu ciśnieniowego,}$$

$$c_{xt} = P_t / \left(\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 A \right) \quad \text{– współczynnik oporu tarcia.}$$

Opór tarcia jest proporcjonalny do gradientu prędkości w kierunku normalnym do opływanej powierzchni; jest więc stosunkowo mały w przepływie laminarnym, a znacznie większy w turbulentnym. Zmiana charakteru przepływu wywołuje więc znaczące zmiany wartości oporu ciśnieniowego i oporu tarcia. W opływach ciał, w których występują wyraźne obszary oderwania, decydujący wpływ na opór całkowity wywiera opór ciśnieniowy i przeciwnie, w opływach tzw. ciała aerodynamicznych, w których nie ma oderwania albo występuje na znikomej powierzchni, decydującą rolę odgrywają opory tarcia.

Powyższe rozważania, dotyczące oporu ciśnieniowego i oporu tarcia, przeprowadzone w odniesieniu do opływu walca, mają znaczenie ogólne. Potwierdzają to zależności podane na rysunku 6.26. Przedstawiają one współczynniki oporu profilowego rodziny elipsoid obrotowych (o różnych stosunkach ich średnic d do długości l) w zależności od liczby Reynoldsa. W takich opływach również w jego przednich częściach przepływ jest przyspieszany, a w tylnych – opóźniany, przy czym stopień tego

opóźniania zależy od smukłości profilu, tj. stosunku l/d . Najmniejszy zatem obszar oderwania, i tym samym najmniejszy opór ciśnieniowy, wystąpi podczas opływu elipsoidy najbardziej wysmukłej ($l/d = 3$) i będzie on stopniowo rósł w miarę zmniejszania się parametru l/d . Najmniejsze opory tarcia są natomiast w przypadku opływu elipsoidy o smukłości $l/d = 0$, ponieważ wówczas jest najmniejsza powierzchnia, na którą działają naprężenia styczne. Współczynniki oporu profilowego, przedstawione na rysunku 6.26 przebiegają tak, jak współczynniki oporu ciśnieniowego, należy zatem sądzić, że w omawianej grupie przepływów, w których występuje oderwanie strugi, decydującą rolę odgrywają opory ciśnieniowe.



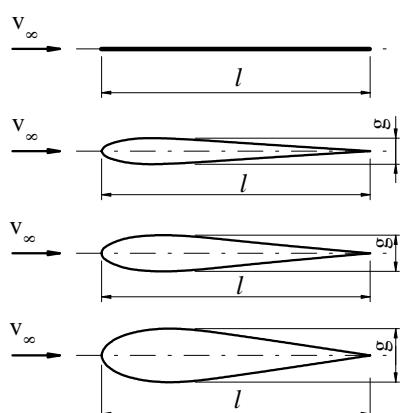
Rys. 6.26. Zależność współczynnika oporu profilowego rodzin elipsoid obrotowych od liczby Reynolds'a

Przeanalizujemy teraz wpływ liczby Reynolds'a na wartości współczynnika oporu profilowego. Podobnie jak w przypadku opływu płytki, występuje następująca zależność: *im większa liczba Reynolds'a, tym mniejsza powierzchnia ciała jest pokryta laminarną warstwą przyścienną i tym mniejsza jest grubość tej warstwy*. W opływach z oderwaniem pojawienie się turbulencji powoduje zasilanie warstwy przyściennej w energię kinetyczną i w konsekwencji przesunięcie się punktu oderwania do tyłu. Ze wzrostem więc liczby Reynolds'a, w zakresie, w jakim wzrasta również turbulencja, maleje współczynnik oporu profilowego. Analizując przebieg linii $c_x(\text{Re})$ (rys. 6.26), dotyczący kuli ($l/d = 1$), widzimy, że w zakresie $\text{Re} < 2,4 \cdot 10^5$ następuje oderwanie

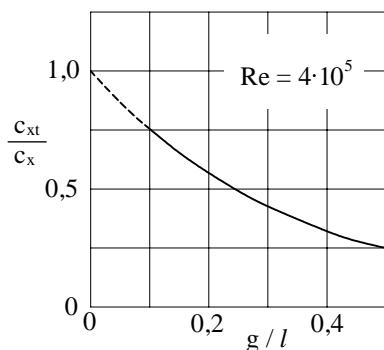
laminarne i współczynnik oporu ma duże wartości. W zakresie $2,4 \cdot 10^5 < Re < 3,0 \cdot 10^5$, w jakim turbulencja rozwija się stopniowo, obszar oderwania zmniejsza się i współczynnik oporu maleje oraz w zakresie $Re > 3,0 \cdot 10^5$, w jakim turbulencja w warstwie przyściennej jest w pełni rozwinięta, wartość współczynnika c_x nieznacznie rośnie i dalej ustala się. Zjawiska oderwania i powstawania turbulencji w pewnych warunkach oddziałują na siebie, jeśli mianowicie w laminarnej warstwie przyściennej następuje oderwanie, to zaburzenia spowodowane oderwaniem mogą przyczynić się do powstania warstwy turbulentnej, a wtedy – dzięki transportowi energii kinetycznej do tej warstwy – może ona ponownie przylgnąć do powierzchni opływanego ciała.

Podczas opływu ciał o kształtach nieaerodynamicznych, np. krążka ustawionego poprzecznie względem płynącej strugi, oderwanie wystąpi zawsze na jego krawędzi, niezależnie od wartości Re . Dlatego też wartości współczynników c_x , w przypadku elipsoid o smukłościach $l/d = 0$ i $l/d = 3/4$ (rys. 6.26), są stałe, niezależne od Re .

Inaczej wyglądają opływy brył o tzw. kształtach opływowych (aerodynamicznych). Na rysunku 6.27 przedstawiono rodzinę symetrycznych profili opływowych o różnych grubościach względnych. Określmy zależność udziału oporu tarcia w oporze całkowitym, którego miarą jest stosunek c_{xt}/c_x , od grubości względnej bryły (rys. 6.28). W opływie płytki ($g/l \approx 0$) opór ciśnieniowy jest równy零, zatem wartość analizowanego stosunku $c_{xt}/c_x = 1$. W miarę zwiększania grubości względnej profilu rośnie udział oporu ciśnieniowego i dlatego stosunek c_{xt}/c_x maleje.



Rys. 6.27. Rodzina symetrycznych profili opływowych o różnych grubościach względnych



Rys. 6.28. Zależność udziału oporu tarcia w oporze całkowitym (stosunku c_{xt}/c_x) od grubości względnej (g/l) brył o kształtach aerodynamicznych

7. PRZEPŁYW PŁYNÓW W PRZEWODACH POD CIŚNIENIEM

7.1. PRZEPŁYW W PRZEWODZIE ZAMKNIĘTYM O PRZEKROJU KOŁOWYM

7.1.1. PRZEPŁYW TURBULENTNY W PRZEWODZIE ZAMKNIĘTYM – PROFIL PRĘDKOŚCI

Przepływy turbulentne w przewodach o dowolnym kształcie, które najczęściej występują w praktyce inżynierskiej, zaliczamy do grupy *przepływów przyściennych*. Na ich charakter, i wynikające z tego kształtu profili prędkości uśrednionych i fluktuacyjnych, wywiera decydujący wpływ obecność ścian ograniczających strugę.

Podstawowym zadaniem technicznym tego rodzaju przepływów, zwanyim *hydrauliką*, jest ustalenie zależności umożliwiających wyznaczenie rozkładu prędkości uśrednionych (średnioczasowych), prędkości maksymalnych i średnich, strumienia przepływu (objętości lub masy) oraz spadku ciśnienia w przewodzie podczas transportu przepływającego czynnika.

Rozważa się średnio ustalony turbulentny przepływ płynu lepkiego, nieściśliwego w przewodzie prostoosiowym, daleko od przekroju wlotowego. Przepływ (w kierunku osi x) jest wywołany gradientem ciśnienia $\partial p / \partial x \neq 0$. Strumień objętości oraz prędkość średnia są stałe w czasie, a pole prędkości zależy od położenia i czasu. Zgodnie z przyjętym modelem ruchu

$$\bar{v}_y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \bar{v}_y'^2 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \bar{v}_x'^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \bar{v}_x' v_y' \right) = 0,$$

a zatem $\bar{v}_x = \bar{v}_x(y)$.

Jest to więc przepływ typu *turbulentnej warstwy przyściennej* (omówiony już w p. 6.8.1), przy czym stałe empiryczne zależą od warunków przepływu.

Drugie z równań Reynoldsa (6.183) redukuje się zatem do postaci

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0,$$

wobec czego cały układ sprowadza się do równania

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{d\tau(y)}{dy}, \quad (7.1)$$

w którym

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} + \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} \right)^2.$$

Ponieważ każda ze stron równania (7.1) zależy od innej zmiennej

$$\frac{dp}{dx} = C, \quad \frac{d\tau}{dy} = C,$$

a ciśnienie spada liniowo wzdłuż rury, czyli

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l},$$

gdzie l – długość odcinka rury, na którym występuje różnica ciśnień Δp .

W celu uzyskania zależności między spadkiem ciśnienia i wielkościami, które rządzają tym przepływem, zastosowano twierdzenie pi (przykład 7. z p. 6.3.4), z którego wynika

$$\Delta p = \lambda \left(\text{Re}, \frac{k}{d} \right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \rho. \quad (7.2)$$

Liczba $\lambda(\text{Re}, k/d)$ nosi nazwę *współczynnika oporów liniowych* lub *współczynnika tarcia*, przy czym dla rury gładkiej $k/d = 0$.

Wartość współczynnika oporów liniowych dla przepływu laminarnego

$$\lambda = \frac{64 v}{\nu d} = \frac{64}{\text{Re}} \quad (7.3)$$

wynika z prawa Hagena–Poiseuille'a (por. wzory (6.124) i (7.2)).

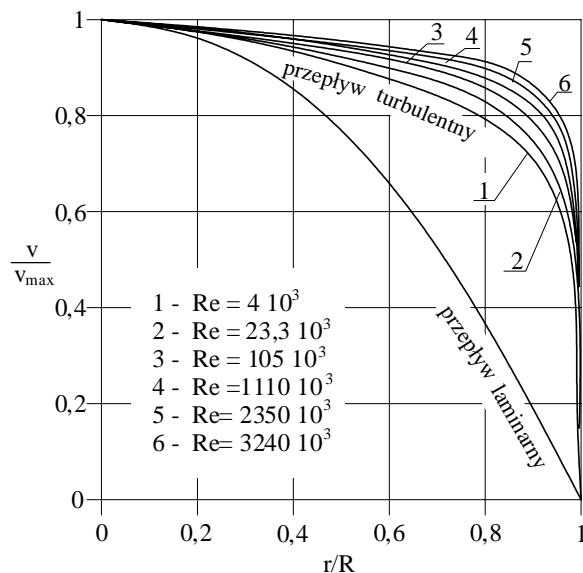
Wartość λ dla ruchu turbulentnego jest natomiast współczynnikiem empirycznym tego samego rodzaju, co β oraz κ występujące w p. 6.8.3.

Jeżeli założyć, że wzór logarytmiczny (6.235) stosuje się do przepływu przewodem osiowo-symetrycznym, to w wyniku szczegółowej analizy pomiarów przepływów turbulentnych przez rury o przekroju kołowym otrzyma się $\kappa = 0,40$ i $\beta = 11,5$ w szerokim zakresie liczb Reynoldsa. Ostatecznie więc w przedziale $\delta \leq y \leq R$ otrzymujemy

$$v = v_* \left(2,5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5,5 \right). \quad (7.4)$$

Fakt, że stałe κ i β mają wartość uniwersalną, w sensie niezależności od liczby Reynoldsa, jest bardzo istotny i korzystnie odróżnia logarytmiczny profil prędkości od wielu innych profili zaproponowanych przez rozmaitych badaczy. Z tego powodu bywa on także nazywany *uniwersalnym profilem prędkości*.

Należy jednak podkreślić, iż rzeczywiste profile prędkości w przepływach turbulentnych przez rurę zależą od liczby Reynoldsa. Znajduje to swój wyraz również we wzorze (7.4), w którym prędkość tarcia v_* zależy od liczby Reynoldsa. Na rysunku 7.1 są przedstawione profile prędkości zmierzone przez Nikuradsego w przepływach turbulentnych w rurach gładkich dla $4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 3,24 \cdot 10^6$ oraz obliczony z wzoru (6.116) profil dla przepływu laminarnego. Na osi odciętych naniesione są promienie bezwymiarowe r/R , a na osi rzędnych odpowiadające im wartości bezwymiarowych prędkości v/v_{\max} . Ze wzrostem liczby Reynoldsa profil prędkości staje się, jak widać, bardziej płaski i bardziej wypełnia przekrój niż podczas przepływu laminarnego.



Rys. 7.1. Rozkład prędkości w gładkim przewodzie przy różnych liczbach Reynoldsa
(według badań Nikuradsego)

W przybliżeniu rozkład prędkości miejscowych w turbulentnym przepływie w rurze można określić wzorem potęgowym Prandtla

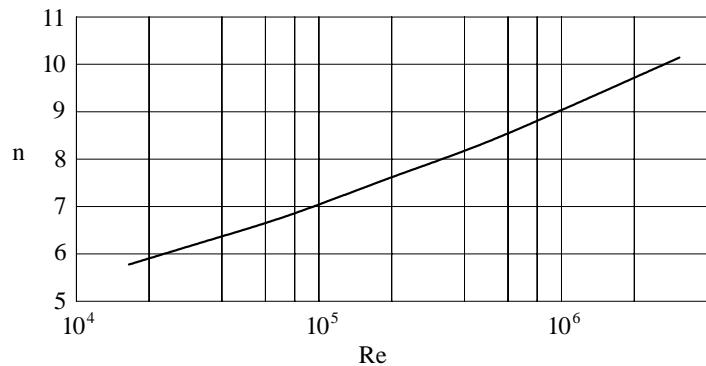
$$v = v_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (7.5)$$

w którym:

R – promień rury, $r \in [0, R]$,

n – współczynnik zależny od liczby Reynoldsa.

Zależność współczynnika n od liczby Reynolds przedstawiono na rysunku 7.2. Badania Nikuradsego wykazały dobrą zgodność między profilami obliczonymi według zależności (7.5) i profilami otrzymanymi na podstawie pomiarów.



Rys. 7.2. Zależność n od liczby Reynolds

Strumień objętości obliczamy tylko w odniesieniu do rdzenia przepływu, a więc z pominięciem znikomo małego przepływu w podwarstwie lepkiej. Postępując podobnie jak podczas wyprowadzania wzoru (6.119) oraz uwzględniając, że $r = R - y$, otrzymamy

$$q_V = 2\pi \int_0^{R-\delta} r v(r) dr = 2\pi \int_{\delta}^R (R-y) v(y) dy = 2\pi v_* \int_{\delta}^R \left(2,5 \ln \frac{v_* y}{v} + 5,5 \right) (R-y) dy.$$

Po całkowaniu i pominięciu wyrazów małych (proporcjonalnych do δ)

$$q_V = \pi R^2 v_* \left(2,5 \ln \frac{v_* R}{v} + 1,75 \right). \quad (7.6)$$

Znając strumień objętości, możemy określić prędkość średnią

$$v_{\text{sr}} = \frac{q_V}{A} = v_* \left(2,5 \ln \frac{v_* R}{v} + 1,75 \right). \quad (7.7)$$

Prędkość zaś maksymalną obliczymy z wzoru (7.4) dla $y = R$

$$v_{\text{max}} = v_* \left(2,5 \ln \frac{v_* R}{v} + 5,5 \right). \quad (7.8)$$

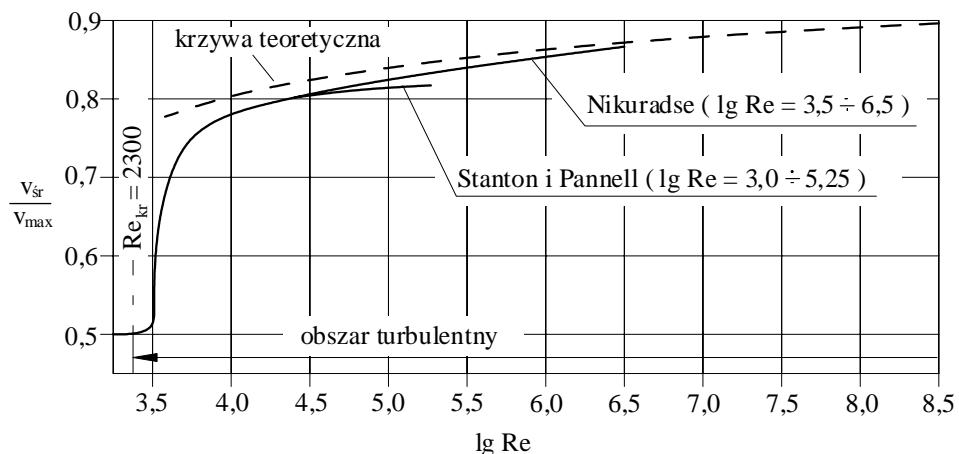
Po odjęciu stronami (7.7) od (7.8) otrzymujemy, po uporządkowaniu, zależność

$$v_{\text{sr}} = v_{\text{max}} - 3,75 v_*. \quad (7.9)$$

We wstępnych obliczeniach przyjmujemy

$$v_{\text{sr}} = (0,80 - 0,88) v_{\text{max}}. \quad (7.10)$$

Na wykresie (rys. 7.3) porównano wyniki uzyskane na podstawie pomiarów przeprowadzonych przez Stanton i Pannella oraz Nikuradsego. Dla przepływu laminarnego $v_{\text{sr}}/v_{\text{max}} = 0,5$, co jest zgodne z wynikami rozważań teoretycznych (p. 6.4.2). Przy wzroście liczby Reynoldsa stosunek ten gwałtownie się zwiększa, a następnie stopniowo zbliża się do wartości 0,9. Krzywa obliczona dla małych liczb Re leży ponad krzywą pomiarową, a przy większych ich wartościach obie krzywe się pokrywają.



Rys. 7.3. Zależność $v_{\text{sr}}/v_{\text{max}}$ od liczby Reynoldsa

Podobnie jak w przypadku przepływu laminarnego, również podczas przepływu turbulentnego występuje zjawisko formowania się profilu prędkości na odcinku wstępnym. Na odcinku tym (schematycznie przedstawionym na rys. 6.7) tracą ważność podane wyżej zależności. Długość odcinka wstępnej w przepływie turbulentnym jest znacznie krótsza niż w przepływie laminarnym i wynosi według pomiarów Kirstena ($50 \div 100)d$, a według badań Nikuradsego ($25 \div 40)d$ ¹⁾.

7.1.2. RÓWNANIE USTALONEGO RUCHU PŁYNU NIEŚCIŚLIWEGO

Przepływy w przewodach pod ciśnieniem (w przewodach zamkniętych) omawianych w dalszych częściach tego rozdziału będąemy traktować jako jednowymiarowe i ustalone przepływy płynu lepkiego i nieściśliwego.

Do określenia takiego przepływu wystarczają dwie podstawowe zależności:

- równanie ciągłości (3.20) w postaci $q_V = vA = \text{const}$,
- równanie określające przemiany energetyczne w płynie, uwzględniające dodatkowe rozpraszanie energii spowodowane lepkością oraz zmienność prędkości w po-

¹⁾ PN-76/M-34034 podaje $l_w = (7,88 \lg Re - 4,35) d$.

przecznym przekroju przewodu. Równanie to, którego postać określmy w dalszych rozważaniach, nosi nazwę *równania Bernoulliego dla płynu rzeczywistego lub uogólnionego równania Bernoulliego*.

Równanie Bernoulliego (5.26), odnoszące się do płynu nielepkiego i nieściśliwego, charakteryzuje się tym, że wartość energii całkowitej wzdłuż dowolnej linii prądu jest stała. Wysokość prędkości $v^2/2g$ jest miarą energii kinetycznej w odpowiednich przekrojach, co przy założeniu równomiernego rozkładu prędkości jest jednoznaczne z jednakową wartością energii kinetycznej wszystkich elementów płynu w danym przekroju.

Podczas przepływu płynu lepkiego prędkość w przekroju poprzecznym zmienia się, natomiast jednostkowa energia potencjalna w całym przekroju poprzecznym jest taka sama (podobnie jak wykazano w p. 6.4.1 wzór (6.96)). Dlatego też w dalszych rozważaniach jako prędkość przepływu jednowymiarowego przyjmujemy prędkość średnią określoną zależnością

$$v_{\text{sr}} = \frac{q_v}{A} = \frac{q_m}{\rho A} = \frac{1}{A} \int_A v \, dA, \quad (7.11)$$

a zatem rzeczywistą strugę (złożoną ze strug elementarnych) zastępujemy strugą uśrednioną.

Energia kinetyczna płynu E_k^{sr} obliczona dla prędkości średniej jest jednak na ogół różna od energii kinetycznej rzeczywistej E_k^{rz} , będącej całką energii kinetycznej strug elementarnych. Energia kinetyczna masy $q_m \Delta t$ poruszającej się z prędkością v_{sr}

$$E_k^{\text{sr}} = q_m \Delta t \frac{v_{\text{sr}}^2}{2} = \rho A \frac{v_{\text{sr}}^3}{2} \Delta t, \quad (7.12)$$

gdzie Δt to czas.

Energia kinetyczna strugi elementarnej

$$dE_k^{\text{rz}} = \rho v \, dA \Delta t \frac{v^2}{2} = \rho \frac{v^3}{2} \Delta t \, dA,$$

skąd

$$E_k^{\text{rz}} = \Delta t \rho \int_A \frac{v^3}{2} \, dA. \quad (7.13)$$

Stosunek

$$\alpha = \frac{E_k^{\text{rz}}}{E_k^{\text{sr}}} = \frac{1}{A} \frac{\int_A v^3 \, dA}{v_{\text{sr}}^3} \quad (7.14)$$

nazywany jest *współczynnikiem Coriolisa*. Dla przepływu laminarnego przez przewody o kołowym przekroju, dla których rozkład prędkości w przekroju poprzecznym jest określony wzorem (6.116)

$$\alpha = \frac{8v_{\text{sr}}^2}{\pi R^2} \frac{\int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^3 2\pi r dr}{v_{\text{sr}}^3} = \frac{16}{R^2} \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^3 r dr = 2. \quad (7.15)$$

W przypadku ruchu turbulentnego, o profilu prędkości określonym zależnością (7.5)

$$\alpha = \frac{1}{\pi R^2} \left(\frac{v_{\max}}{v_{\text{sr}}}\right)^3 \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{n}} 2\pi r dr = \frac{(n+1)^3 (2n+1)^3}{4 n^4 (n+3) (2n+3)}. \quad (7.16)$$

Można zatem stwierdzić, że w przepływach turbulentnych wartość α maleje wraz ze zwiększeniem n , a więc ze wzrostem liczby Reynoldsa.

Zależność (7.16) pozwala wyznaczyć wartości współczynnika α . Mieszącą się one w przedziale wartości $\alpha = 1,1 \div 1,3$, przy czym dla w pełni uformowanego profilu prędkości przepływu turbulentnego α nie przekracza wartości 1,1. Najczęściej przyjmowanej wartości $n = 7$ odpowiada $\alpha = 1,06$.

Rzeczywistą energię kinetyczną w przekrojach przepływowych możemy zatem określić następująco

$$E_k^{\text{rz}} = \alpha E_k^{\text{sr}}, \quad (7.17)$$

a jej wysokość wyrażeniem $\alpha v_{\text{sr}}^2 / 2g$.

Podczas przepływu płynu lepkiego w wyniku działania sił tarcia (wywołanych lepkością) następuje nieodwracalna przemiana części energii mechanicznej w ciepło, a zatem zgodnie z rysunkiem 7.4¹⁾

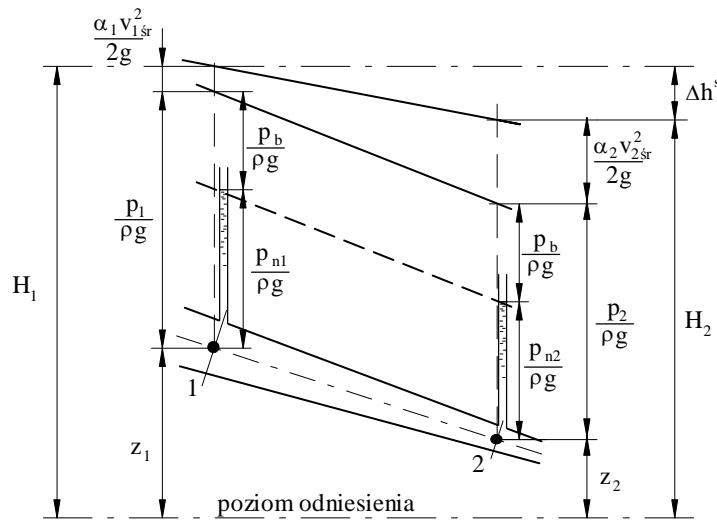
$$H_1 = \frac{\alpha_1 v_{1\text{sr}}^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 > \frac{\alpha_2 v_{2\text{sr}}^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = H_2,$$

gdzie H_1, H_2 – odpowiednie wysokości rozporządzalne.

Wysokość strat ciśnienia Δh_{12}^s (rys. 7.4), będąca różnicą lewej i prawej strony nierówności, nazywamy *wysokością strat hydraulicznych (energetycznych)* w przepływie od przekroju 1. do przekroju 2. Po dodaniu Δh_{12}^s do prawej strony nierówności otrzymamy *uogólnione równanie Bernoulliego* w postaci

$$\frac{\alpha_1 v_{1\text{sr}}^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_{2\text{sr}}^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta h_{12}^s. \quad (7.18)$$

¹⁾ Przyjmujemy zawsze kierunek przepływu od przekroju 1. do przekroju 2.



Rys. 7.4. Przebiegi linii energii i ciśnień w ustalonym przepływie cieczy lepkiej

Wysokość strat ciśnienia

$$\Delta h_{12}^s = \frac{\Delta p_{12}^s}{\rho g} = \Delta h_{12}^{sl} + \Delta h_{12}^{sm} \quad (7.19)$$

jest sumą wysokości strat ciśnienia wywołanych tarciem na długości – Δh_{12}^{sl} i strat wskutek oporów miejscowych – Δh_{12}^{sm} .

Spadek hydrauliczny (średni) określmy (podobnie jak poprzednio w p. 6.4.1) jako stosunek straconej wysokości ciśnienia do długości l przewodu

$$I = \frac{\Delta h_{12}^s}{l}. \quad (7.20)$$

Gdy energia kinetyczna przepływającego płynu jest mała w porównaniu ze stratami energii przepływu (szczególnie w przypadku długich przewodów) we wzorze (7.18) – z wystarczającą w praktyce dokładnością – możemy przyjąć $\alpha = 1$.

Ponieważ w zagadnieniach, w których przepływ jest traktowany jako jednowymiarowy, występuje tylko prędkość średnia, w dalszej części tego rozdziału będziemy pomijali indeks „sr” i pisali v zamiast v_{sr} .

7.2. STRaty HYDRAULICZNE WYWoŁANE TARCIEM

7.2.1. OPORY LINIOWE PODCZAS PRZEPŁYWU PŁYNÓW

W rozdziale 6. (p. 6.3.4) wykazano, że wartość strat energii wywołanych tarciem (liniowych strat energii) określa zależność

$$\Delta p^{sl} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \rho,$$

która można również przedstawić w postaci

$$\Delta h^{sl} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (7.21)$$

znanej pod nazwą wzoru *Darcy'ego–Weisbacha*,
w której:

l – długość przewodu,

d – średnica przewodu,

v – średnia prędkość przepływu,

λ – współczynnik oporu liniowego (strat tarcia).

Współczynnik oporu liniowego jest w ogólnym przypadku funkcją liczby Reynolds Re i chropowatości względnej k/d (k – średnia wysokość nierówności na ścianie rury). Wartość tego współczynnika bywa najczęściej wyznaczana z wykresów opracowanych na podstawie badań doświadczalnych, z formuł empirycznych lub półempirycznych. Jedynie w przypadku przepływu laminarnego można teoretycznie (ze wzoru (7.3)) wyznaczyć zależność między λ i Re. Wynika stąd, że w przepływie laminarnym przez przewody o przekroju kołowym współczynnik oporu liniowego jest odwrotnie proporcjonalny do liczby Reynoldsa. Zależność (7.3) została potwierdzona licznymi wynikami doświadczalnymi.

Zależność określającą współczynnik oporu liniowego w przypadku przepływu turbulentnego można wyznaczyć, jeżeli znane jest prawo rozkładu prędkości. Korzystając zatem ze wzorów (7.4) i (7.7) oraz ze związku między różnicą ciśnienia w dwu przekrojach a naprężeniem stycznym na ścianie, wyprowadzimy zależność $\lambda = f(\text{Re})$ dla przepływu turbulentnego.

W przypadku ustalonego przepływu przez przewód prostoliniowy o stałym przekroju siła pochodząca od różnicy ciśnienia jest równoważona siłą tarcia na ścianie

$$\Delta p \frac{\pi d^2}{4} = \tau_0 l \pi d, \quad (7.22)$$

stąd

$$\Delta p = 4\tau_0 \frac{l}{d}. \quad (7.23)$$

Uwzględniając zależność (7.2) i pamiętając, że $\tau_0/\rho = v_*^2$ (p. 6.8.3), otrzymamy

$$\frac{v_*}{v} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}}, \quad (7.24)$$

gdzie v jest prędkością średnią.

Porównując powyższą zależność z (7.7), otrzymamy po przekształceniach

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,9. \quad (7.25)$$

Na podstawie wyników badań doświadczalnych zależność ta została skorygowana i wynosi

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,8. \quad (7.26)$$

Jest to poszukiwana zależność $\lambda = f(\operatorname{Re})$, z tym że ze względu na uwiklaną postać nie zawsze dogodna w zastosowaniach.

Dlatego równolegle z półempirycznymi zależnościami logarytmicznymi powszechnie są stosowane empiryczne zależności potęgowe. Jedną z najbardziej rozpowszechnionych jest tzw. formuła Blasiusa

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\operatorname{Re}}} \approx (100 \operatorname{Re})^{-1/4}, \quad \operatorname{Re} \leq 10^5, \quad (7.27)$$

będąca szczególnym przypadkiem ogólnej zależności potęgowej

$$\lambda = A/\operatorname{Re}^m, \quad (7.28)$$

przy czym $m < 1$ ze wzrostem liczby Reynoldsa maleje. Wartość $m = 1/4$, występująca w formule Blasiusa, odpowiada empirycznemu potęgowemu rozkładowi prędkości określonej wzorem (7.5).

Przytoczone wzory dotyczą współczynnika oporu liniowego w przewodach gładkich. Przewody stosowane w praktyce mają często ściany wewnętrzne chropowate. Nie znaczy to jednak, że podane wzory nie mają praktycznego znaczenia.

Chropowatość jest bowiem, w hydraulice, pojęciem względnym. Wiąże się to z istnieniem podwarstwy laminarnej, która wygładza wewnętrzne nierówności przewodu. Ale jak wynika z zależności (6.234)

$$\delta = \beta \frac{v}{v_*} = \beta \frac{v}{v} \sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \beta \frac{2\sqrt{2}d}{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}}, \quad (7.29)$$

grubość podwarstwy zależy od średniej prędkości przepływu, a ściślej od liczby Reynoldsa.

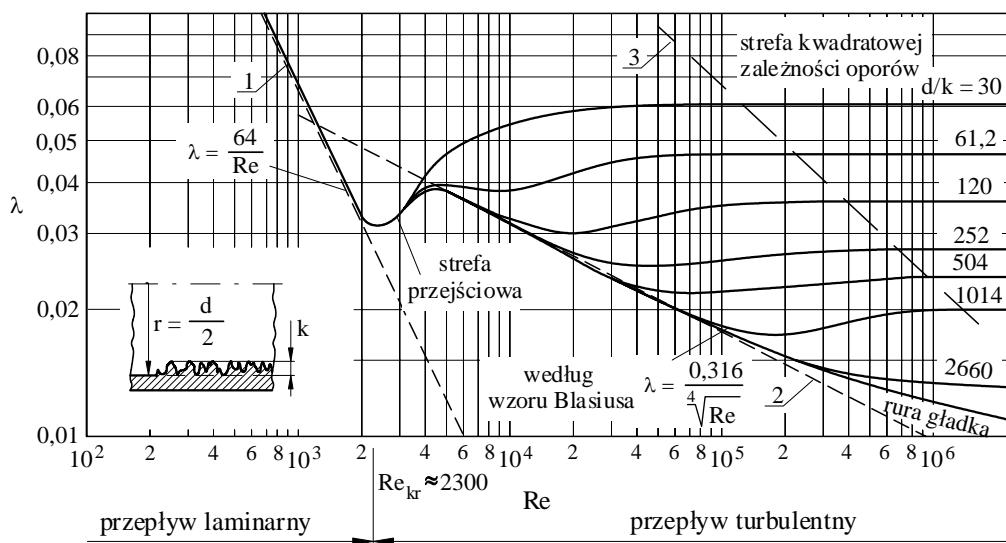
Ze wzrostem liczby Reynoldsa grubość podwarstwy laminarnej maleje. Dopóki grubość ta jest większa od chropowatości bezwzględnej k , dopóty przewód ma cechy gładkości, mówimy wówczas, że przewód jest *hydraulicznie gładki*. Warunek $\delta > k$ będzie spełniony, gdy $v_*k/v < 5$ ¹⁾.

¹⁾ Wartość $\beta = 5$ (a nie $\beta = 11,5$) wynika z tego, iż przejście od jednego obszaru do drugiego odbywa się stopniowo (rys. 6.19), a nie nagle w punkcie P .

W praktyce posługujemy się pojęciem *chropowatości względnej k/d*. Na podstawie wzorów (7.27) i (7.29) (w których przyjmiemy $\beta = 5$) oszacujemy graniczną wartość chropowatości względnej, poniżej której przewód może być traktowany jako hydraulycznie gładki. Otóż w przypadku granicznym dla $\delta = k_{\text{gr}}$

$$\left(\frac{k}{d}\right)_{\text{gr}} = \frac{\delta}{d} = \frac{10\sqrt{2}}{\text{Re}} \left(\frac{\sqrt[4]{\text{Re}}}{0,3164}\right)^{1/2} \approx \frac{25}{\text{Re}^{7/8}}. \quad (7.30)$$

Obszerne badania dotyczące wpływu chropowatości względnej i liczby Reynoldsa na opory przepływu przeprowadził Nikuradse (we Wrocławiu w latach trzydziestych ubiegłego wieku). Ponieważ nierówności wewnętrznej powierzchni przewodów tworzące chropowatość naturalną mają zarys nieregularnej powierzchni falistej, w badaniach stosowana była tzw. chropowatość sztuczna (regularna) wytwarzana przez nalepienie ziaren piasku o określonej granulacji. W tym przypadku można było chropowatość określić bardziej precyzyjnie niż chropowatość naturalną. Wyniki badań przedstawiono na rysunku 7.5, nazywanym *wykresem (harfą) Nikuradsego*.



Rys. 7.5. Zależność współczynnika oporu liniowego od liczby Reynoldsa – wykres (harfa) Nikuradsego

Na wykresie sporządzonym w logarytmicznym układzie współrzędnych λ -Re przepływovi laminarnemu odpowiada prosta 1. o równaniu $\lambda = 64/\text{Re}$ (a właściwie $\lg \lambda = \lg 64 - \lg \text{Re}$ – dlatego prosta). Przepływovi turbulentnemu w przewodzie hydraulycznie gładkim odpowiada prosta 2., poprowadzona zgodnie ze wzorem Blasiusa (7.27) ($\lg \lambda = \lg 0,3164 - (1/4)\lg \text{Re}$). Wpływ chropowatości staje się zauważalny do

piero przy liczbach Reynoldsa na tyle dużych, że $\delta < k$. Początkowo liczba Reynoldsa jeszcze wpływa na wartość λ , wówczas, gdy $5 \leq v_* k / v \leq 70$. Na wykresie λ -Re odpowiada temu obszar zawarty między prostą 2., a krzywą graniczną 3. Każdej chropowatości względnej odpowiada tu inna krzywa, wychodząca z prostej 2. Widać zatem, że podział przewodów na chropowate i gładkie jest względny, bo uzależniony od wartości liczby Reynoldsa. Im większa jest ta liczba, tym mniejsze nierówności powierzchni wewnętrznej przewodu są objęte zasięgiem rdzenia przepływu, aż do osiągnięcia stanu w pełni rozwiniętego wpływu chropowatości. Następuje to wtedy, gdy $v_* k / v > 70$. Na wykresie Nikuradsego punkty wyznaczone doświadczalnie układają się wówczas na prostych poziomych, co oznacza zanik wpływu liczby Reynoldsa na wartość współczynnika oporu. Jest to obszar leżący na prawo od krzywej granicznej 3. Współczynnik λ zależy w tym obszarze wyłącznie od chropowatości względnej k/d , a więc wysokość straty energii jest proporcjonalna do kwadratu średniej prędkości. Dlatego obszar ten często jest nazywany *strefą kwadratowej zależności oporów od prędkości*.

Z przedstawionych rozważań wynika, że na wykresie Nikuradsego można wyodrębnić trzy strefy:

1. hydraulicznej gładkości przewodów, w której $\lambda = f(\text{Re})$,
2. częściowego wpływu chropowatości na opory przepływu, w której $\lambda = f(\text{Re}, k/d)$,
3. w pełni rozwiniętego wpływu chropowatości, w której $\lambda = f(k/d)$.

Wyniki pomiarów współczynnika λ odnoszących się do przewodów o chropowatości naturalnej różnią się nieznacznie od omówionych. Wszechstronne badania współczynnika λ w rurach stalowych i żeliwnych o średnicach $20 \div 600$ mm, przy różnych chropowatościach naturalnych ścian, zostały wykonane przez Colebrooka i White'a i mają przebieg zgodny z formułą

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,5}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,7d} \right), \quad (7.31)$$

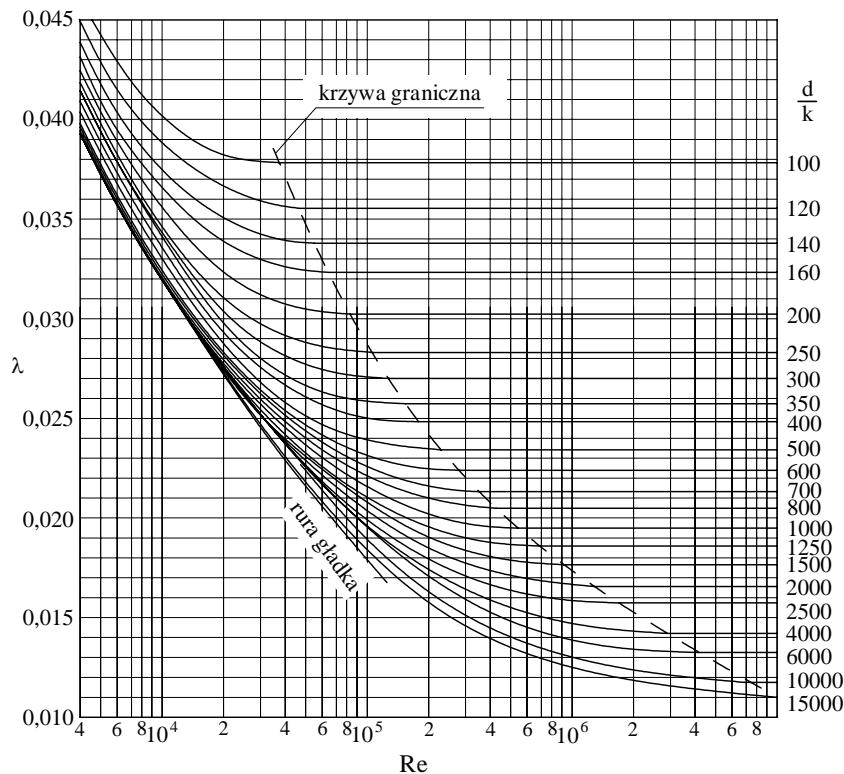
która dla $k/d = 0$ przechodzi w formułę (7.26).

Zależność (7.31) przedstawiono wykreślnie na rysunku 7.6. Na prawo od krzywej granicznej, wartości λ nie zależą od liczby Re, co odpowiada strefie kwadratowej zależności oporów od prędkości.

W zagadnieniach technicznych dogodniejsza do stosowania jest formuła empiryczna Altšula

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{68}{\text{Re}} + \frac{k}{d} \right)^{0,25}. \quad (7.32)$$

Wartości chropowatości bezwzględnej k w formułach (7.31) i (7.32) zależą od materiału i stanu powierzchni rury i wynoszą od $k = 0,005$ mm (w przypadku rur szklanych) do $k = 9$ mm (dla przewodów betonowych chropowatych).



Rys. 7.6. Zależność współczynnika oporu liniowego od liczby Reynoldsa
– wykres Colebrooka–White'a

Omówione wartości współczynnika λ odnoszą się do przepływów tylko w tych przewodach, w których rozkład prędkości jest już w pełni uformowany. Uformowanie rozkładu prędkości następuje na pewnej długości przewodu l_w , zwanej długością wstępnią, określoną w ruchu laminarnym zależnością (6.126), a w przypadku ruchu turbulentnego zależnościami Kirstena lub Nikuradsego (p. 7.1.1). Na długości wstępnej wartość współczynnika λ ulega zmianie, ale w zagadnieniach technicznych tę zmianę się pomija.

Podeczas obliczania wysokości strat hydraulicznych przez przewody o niekołowym przekroju korzysta się również z zależności (7.21) oraz z podanych wykresów, podając $d = d_z$, gdzie d_z – nazwana średnicą zastępczą – jest poczwórną wartością stosunku przekroju przepływowego A do obwodu zwilżonego U , czyli $d_z = 4A/U$. Zależność (7.21) przyjmuje więc postać

$$\Delta h^{sl} = \lambda \left(\text{Re}, \frac{k}{d_z} \right) \frac{l}{d_z} \frac{v^2}{2g}, \quad (7.33)$$

przy czym $\text{Re} = v d_z / \nu$.

7.2.2. STRaty ENERGII W PRZEPŁYWIE NIEIZOTERMICZNYM

Podane w poprzednim punkcie zależności są słuszne tylko w przypadku przepływów izotermicznych, w których temperatura płynu, a zatem i jego lepkość oraz gęstość w całej strudze są takie same.

Jeżeli przepływowi towarzyszy wymiana ciepła¹⁾, to temperatura zmienia się zarówno w przekroju poprzecznym, jak i wzduż przewodu. Zmiana temperatury pociąga za sobą zmianę gęstości i lepkości, co prowadzi do zmiany profilu prędkości i ostatecznie do zmiany współczynnika oporu liniowego.

Najbardziej rozpowszechniona metoda obliczania strat hydraulicznych w przepływach nieizotermicznych polega na wprowadzeniu mnoźnika poprawkowego do wartości współczynnika oporu liniowego określonego dla przepływu izotermicznego. Dla cieczy stosowana jest zależność

$$\lambda_n/\lambda_o = (\mu_s/\mu_c)^{0,14}, \quad (7.34)$$

w której:

λ_n i λ_o – odpowiednio współczynniki oporu liniowego, w przepływie nieizotermicznym i izotermicznym²⁾,

μ_s i μ_c – dynamiczne współczynniki lepkości cieczy odpowiadające temperaturze ściany przewodu T_s i średniej temperaturze cieczy T_c .

Podczas chłodzenia cieczy $T_s < T_c \Rightarrow \mu_s/\mu_c > 1$ i z zależności (7.34) wynika, że współczynnik oporu liniowego wzrasta w porównaniu z przepływem izotermicznym. Odwrotnie podczas nagrzewania cieczy – $T_s > T_c \Rightarrow \mu_s/\mu_c < 1$ i współczynnik oporu maleje w porównaniu z przepływem izotermicznym.

Do określenia współczynnika tarcia w nieizotermicznym turbulentnym przepływie cieczy w przewodach hydralicznie gładkich stosuje się też formułę

$$\lambda_n = \left(1,82 \lg \left(\sqrt{\mu_s / \mu_c} \right) - 1,64 \right)^{-2}. \quad (7.35)$$

Wyniki obliczeń według tej formuły w zakresie $2,8 \cdot 10^4 \leq \text{Re} \leq 4,5 \cdot 10^5$ oraz $0,83 \leq \mu_s/\mu_c \leq 2,5$ różnią się od danych doświadczalnych średnio o 2÷3%.

Do obliczania współczynnika oporu liniowego w turbulentnym przepływie nieizotermicznym gazu można stosować przybliżoną zależność podaną przez Kutateładze

$$\mu_n/\mu_o = \sqrt{T_c/T_s}. \quad (7.36)$$

7.2.3. ZMNIEJSZANIE LINIOWYCH STRAT HYDRAULICZNYCH W PRZEPŁYWIE TURBULENTNYM

Badania prowadzone w ostatnich dziesięcioleciach wskazują na możliwość znacznego zmniejszenia liniowych strat energii w przewodach w wyniku praktycznego za-

¹⁾ Zagadnienia takie w praktyce występują bardzo często, np. przepływy w wymiennikach ciepła, w instalacjach c.o. i c.w., w urządzeniach energetycznych.

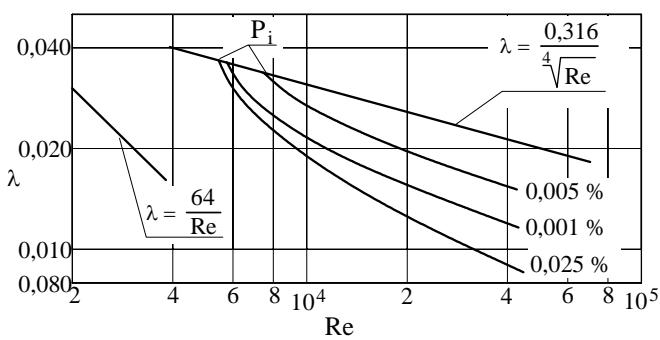
²⁾ Przy określaniu λ_o gęstość i lepkość cieczy przyjmuje się dla średniej temperatury cieczy.

stosowania tzw. efektu Tomsa. Efekt ten polega na tym, że po dodaniu do wody (a także innych cieczy) niewielkiej ilości (koncentracja objętościowa rzędu $10^{-4} \div 10^{-5}$) niektórych polimerów makromolekularnych, rozpuszczalnych w wodzie (np. poliakryloamid, polioksyetylen), straty tarcia w przepływie turbulentnym zmniejszają się kil-kakrotnie (o 60÷80%)¹⁾.

Mechanizm tego zjawiska nie jest jeszcze w pełni wyjaśniony. Przypuszcza się, że dodatki polimerów o dużej masie molekularnej zmieniają strukturę strugi (szczególnie w pobliżu ściany), wpływając thumiąco na fluktuacje turbulentne. Maleją więc naprężenia turbulentne $\tau_t = -\rho v'_x v'_y$, co prowadzi do zmniejszenia strat tarcia.

Na rysunku 7.7 przedstawiono wyniki badań przeprowadzonych dla różnych koncentracji rozpuszczonego w wodzie poliakryloamidu. Widać, że dodanie polimeru wpływa na obniżenie wartości współczynnika oporu liniowego od punktów P_i , którym odpowiada tzw. wartość progowa liczby Reynoldsa. Ze wzrostem koncentracji wartość progowa liczby Reynoldsa maleje, a stopień obniżenia współczynnika oporu rośnie.

Rys. 7.7. Zależność współczynnika oporu liniowego od liczby Reynoldsa dla różnych koncentracji poliakryloamidu rozpuszczonego w wodzie



Istnieje jednak pewna optymalna koncentracja polimeru (rzędu 10^{-4}), po przekroczeniu której obserwuje się ponowny wzrost oporu tarcia. Wartość współczynnika oporu liniowego w rurach w przypadku przepływu wody z dodatkiem polimeru można wyznaczyć z formuły

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\left(\frac{v_{*pr}}{v_*} \right)^{\varepsilon/5,75} \left(\frac{2,5}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,7d} \right) \right), \quad (7.37)$$

w której:

- v_{*pr} – wartość prędkości tarcia (tzw. wartość progowa, zależna od rodzaju polimeru), po przekroczeniu której opór tarcia maleje,
- ε – współczynnik zależny od rodzaju polimeru i jego koncentracji.

¹⁾ Podobny efekt uzyskuje się również po dodaniu niektórych substancji powierzchniowocząźnych do cieczy lub cząstek stałych do gazu.

Dla poliakryloamidu (najczęściej obecnie stosowanego polimeru) przyjmuje się $v_{*pr} = 0,05 \text{ m/s}$ i $\varepsilon = 1000 c$ przy koncentracji objętościowej polimeru $5 \cdot 10^{-5} < c < 1,2 \cdot 10^{-4}$.

Jeżeli koncentracja polimeru $c = 0$, to formuła (7.37) przyjmuje postać (7.31).

7.3. STRaty HYDRAULICZNE WYWOŁANE OPORAMI MIEJSCOWYMI

Oprócz strat wywołanych tarciem występujących w przewodach prostoliniowych lub łagodnie zakrzywionych, o niezmiennym przekroju, podczas przepływu spotyka się z dodatkowymi stratami powstałymi wskutek zmiany pola przekroju poprzecznego przewodu, zmiany kierunku przepływu lub wbudowania urządzeń dławiących przepływ. Straty te, spowodowane przez lokalne przeszkody, znajdujące się na drodze przepływającej strugi, nazywamy *stratami miejscowymi* lub *lokalnymi*, a elementy wywołujące te straty – *oporami miejscowymi*.

Wysokość spadku ciśnienia możemy określić ze wzoru Darcy'ego–Weisbacha (7.21). Ponieważ stosunek długości l do średnicy d jest wielkością stałą dla danego źródła straty, więc $\lambda(\text{Re}, k/d) l/d = \zeta(\text{Re})$, a wzór (7.21) przyjmuje postać

$$\Delta h^s = \Delta h^{sm} = \zeta(\text{Re}) \frac{V^2}{2g}, \quad (7.38)$$

w której ζ – współczynnik strat miejscowych, zależny od rodzaju przeszkody i od liczby Reynoldsa, odniesiony najczęściej do średniej prędkości za przeszkodą.

Wartość współczynnika ζ tylko w niektórych przypadkach przepływów została wyznaczona teoretycznie. Na ogół jego wartości są określone doświadczalnie.

Niekiedy podczas określania miejscowych strat przepływu wprowadza się tzw. *równoważną (ekwiwalentną) długość danego oporu miejscowego* l_e . Jest to długość odcinka prostoosiowej rury o oporze równym oporowi danej przeszkody miejscowości, a zatem

$$\zeta \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{l_e}{d} \frac{V^2}{2g}, \quad (7.39)$$

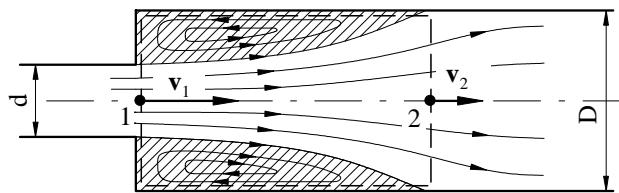
stąd

$$l_e = \frac{\zeta}{\lambda} d. \quad (7.40)$$

Współczynnik oporu liniowego λ zależy jednak od liczby Reynoldsa i chropowatości względnej, wobec tego jednej wartości ζ w ogólnym przypadku odpowiadają różne długości ekwiwalentne. Dopiero kiedy $\lambda \neq \lambda(\text{Re})$, tzn. w obszarze kwadratowej zależności oporu tarcia od prędkości, długość ekwiwalentna określonego oporu miejscowości jest stała.

7.3.1. PRZEPŁYW PRZEZ PRZEWÓD PROSTY ROZSZERZAJĄCY SIĘ

Rozpatrzmy najpierw przepływ przez przewód z gwałtownym rozszerzeniem przekroju (rys. 7.8). Struga wypływająca z przewodu węższego o polu przekroju A_1 z prędkością v_1 stopniowo rozszerza się i w pewnej odległości od miejsca gwałtownej zmiany przekroju obejmuje cały przekrój rurociągu o polu A_2 . Podczas przepływu pojawiają się obszary oderwania strugi oraz związane z tym obszary przepływów powrotnych (strefy recyrkulacji). Ponieważ energia kinetyczna przepływów powrotnych jest czerpana z energii strugi głównej, przepływy takie związane są ze znacznymi stratami energii.



Rys. 7.8. Nagłe rozszerzenie przewodu

Straty te można dostatecznie dokładnie określić, traktując przepływ jako jednowymiarowy. W tym celu wydzielimy powierzchnię kontrolną ograniczającą obszar między przekrojami 1. oraz 2. i wyznaczmy wartość straty energii strugi przepływającej przez te przekroje.

Z uogólnionego równania Bernoulliego (przy założeniu $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) dla przekrojów 1. i 2. otrzymamy

$$\Delta h^s = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}. \quad (7.41)$$

Z zasady zachowania pędu (*zmiana pędu w czasie równa się sumie sił w objętości kontrolnej*) wynika natomiast

$$\frac{d}{dt} \rho q_v dt (v_2 - v_1) = p_1 A_1 - p_2 A_2 \text{¹⁾,} \quad (7.42)$$

¹⁾ Ze względu na małą odległość między przekrojami 1. i 2. siłę tarcia na ścianach pominięto. Pęd obliczono, podobnie jak w literaturze, przyjmując jednakową prędkość w przekroju poprzecznym. Aby uwzględnić zmienność rozkładu prędkości, trzeba wprowadzić współczynnik analogiczny do współczynnika Coriolisa α (wzór (7.14)), zwany współczynnikiem pędu (Boussinesqa) $\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{v_{sr}} \right)^2 dA$.

skąd po przekształceniach

$$p_1 - p_2 = \frac{q_v}{A_2} (v_2 - v_1) \rho = v_2 (v_2 - v_1) \rho. \quad (7.43)$$

Po podstawieniu zależności (7.43) do równania (7.41) otrzymamy

$$\Delta h^s = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (7.44)$$

Wzór ten nosi nazwę *wzoru Bordy* i jest podobny do wzoru określającego stratę energii kinetycznej przy niesprzystym zderzeniu ciał stałych. Dlatego strata podczas nagłego rozszerzenia jest często mylnie nazywana stratą uderzenia.

Po uwzględnieniu równania ciągłości wzór (7.44) można przedstawić w postaci

$$\Delta h^s = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}, \quad (7.45)$$

z której wynika, że współczynnik oporu miejscowego odniesiony do prędkości za przeszkodą wynosi

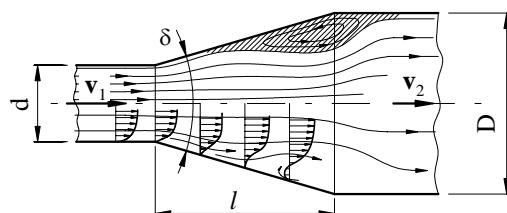
$$\zeta = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2. \quad (7.46)$$

Jeśli odnieść go do prędkości przed rozszerzeniem, to

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2. \quad (7.47)$$

Wzór (7.46) wykazuje wystarczającą zgodność z wynikami doświadczalnymi w zakresie przepływu turbulentnego.

Oprócz elementów, w których następuje gwałtowne rozszerzenie przekroju, często stosuje się elementy z płynną zmianą przekroju. Są to tzw. *difuzory* (rys. 7.9). Stratę energii w dyfuzorze można rozpatrywać jako sumę straty miejscowej spowodowanej zmianą przekroju strugi i straty liniowej wynikającej z tarcia cieczy o ściany dyfuzora.



Rys. 7.9. Dyfuzor stożkowy

Wartość współczynnika ζ oporu miejscowego dyfuzora zależy od kształtu tworzących, od kąta rozwarcia δ , od smukłości dyfuzora l/d , od chropowatości jego ścian oraz od liczby Reynoldsa, a zatem

$$\zeta = \zeta\left(\delta, \frac{l}{d}, \frac{k}{d}, \text{Re}\right). \quad (7.48)$$

Z doświadczeń wynika, że współczynniki oporu ζ zależą od Re do jej granicznej wartości ($\text{Re}_{gr} \approx 3 \cdot 10^5$), a powyżej już nie.

W przypadku dyfuzorów krótkich strać miejscową określa wzór (7.45) po wprowadzeniu do niego współczynnika poprawkowego α zależnego od kąta rozwarcia dyfuzora, określonego na podstawie doświadczeń, a zatem

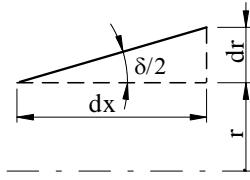
$$\Delta h^{sm} = \alpha \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g}, \quad (7.49)$$

w którym dla kąta rozwarcia $\delta = 7^\circ$, $\alpha = 0,14$, dla $\delta = 10^\circ$, $\alpha = 0,20$, a dla $\delta = 14^\circ$, $\alpha = 0,30$.

W przypadku kątów rozwarcia dyfuzora $\delta > 25^\circ$ straty energii w przepływie przez dyfuzor są równe stratom wynikłym z nagłego rozszerzenia rury.

W przypadku dyfuzorów długich, o niewielkich kątach rozwarcia $\delta \leq 10^\circ$, oprócz strat wywołanych zmianą pędu (7.49), należy również uwzględnić straty spowodowane tarciem.

Zgodnie z zależnością (7.21) strata liniowa na elementarnym odcinku o długości dx (rys. 7.10)



Rys. 7.10. Schemat do obliczeń

$$d(\Delta h^{sl}) = \lambda \frac{dx v^2}{2r 2g}, \quad (7.50)$$

ponieważ

$$dx = \frac{dr}{\operatorname{tg} \delta/2} \quad \text{oraz} \quad v = v_2 \left(\frac{r_2}{r} \right)^2,$$

gdzie $r_2 = D/2$, otrzymamy

$$d(\Delta h^{sl}) = \frac{\lambda}{2r \operatorname{tg}(\delta/2)} \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{r_2}{r} \right)^4 dr, \quad (7.51)$$

a po całkowaniu w granicach od $r_1 = d/2$ do $r_2 = D/2$ i uwzględnieniu równania ciągłości

$$\Delta h^{sl} = \frac{\lambda}{8r \operatorname{tg} \delta/2} \left(\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right) \frac{v_2^2}{2g}, \quad (7.52)$$

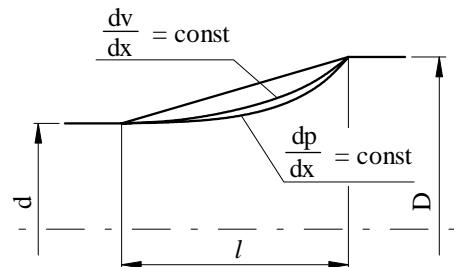
przyjęto stałą wartość współczynnika oporu liniowego $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, gdzie λ_1, λ_2 odpowiadają średnicom d i D .

Sumaryczny współczynnik oporu dyfuzorów, o kątach rozwarcia $\delta \leq 14^\circ$ można zatem określić wzorem

$$\zeta = \frac{\lambda}{8r \operatorname{tg} \delta/2} \left(\left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 - 1 \right) + \sin \delta \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2, \quad (7.53)$$

w którym dla $\delta \leq 20^\circ$ przyjmuje się $\alpha \approx \sin \delta$.

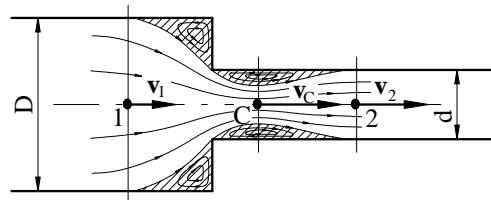
W dyfuzorach stożkowych kąt rozwarcia nie powinien być większy niż 14° ; przy większych bowiem kątach może zajść zjawisko oderwania strugi od ścian, powodujące znaczny wzrost oporów. Im większy jest przyrost ciśnienia wzdłuż dyfuzora, czyli im większy jest gradient ciśnienia dp/dx , tym bliżej przekroju wlotowego następuje oderwanie warstwy przyściennej. Podczas projektowania układów hydraulicznych dąży się do takiego kształtu dyfuzora, aby zmniejszyć straty wywołane oderwaniem strugi od ściany. Przy danym stosunku przekrojów: wypływowego do dopływowego A_2/A_1 wartość gradientu dp/dx zależy przede wszystkim od długości dyfuzora, a zatem od kąta δ . Gradient ciśnienia dp/dx , dla zadanego stopnia rozwarcia A_2/A_1 i kąta δ , a zatem dla zadanej smukłości dyfuzora, można regulować kształtem jego ścian. Z doświadczeń wynika, że przy ustalonej optymalnej smukłości $l/d = 5 \div 7$ najmniejsze straty ciśnienia występują w dyfuzorach stożkowych o kątach rozwarcia $\delta < 14^\circ$, a zatem w przypadkach większych gradientów ciśnienia w początkowej części dyfuzora. Dla większych wartości kąta rozwarcia $\delta > 14^\circ$ najmniejsze straty wywołuje wbudowanie dyfuzorów o tworzących krzywoliniowych (izogradientowych), opisanych równaniami $dp/dx = \text{const}$ lub $dv/dx = \text{const}$ (rys. 7.11), w których występuje równomierny przyrost ciśnienia lub prędkości. Dzięki takiemu ukształtowaniu ścian dyfuzora straty ulegają zmniejszeniu, gdyż miejsce oderwania przemieszcza się do przodu (bliżej przekroju wypływowego). Chropowatość ścian wewnętrznych dyfuzora podczas przepływu bez oderwania zwiększa opory przepływu, zmniejsza je natomiast w przepływie przez dyfuzory o większych kątach rozwarcia, gdyż przesuwa punkt oderwania dalej od przekroju wlotowego.



Rys. 7.11. Dyfuzor izogradientowy

7.3.2. PRZEPŁYW PRZEZ PRZEWÓD PROSTY ZWĘŻAJĄCY SIĘ

Podczas przepływu przez gwałtowne zwężenie przekroju (rys. 7.12) struga, wpływając do przewodu o mniejszym przekroju, ulega dodatkowemu przewężeniu (kontrakcji)¹⁾, a następnie rozszerza się, wypełniając cały przekrój przewodu. Doświadczenia wykazują, że straty energii w przepływie przez zwężenia są znacznie mniejsze niż podczas przepływu przez rozszerzenie o tym samym stosunku powierzchni pól przekrojów.



Rys. 7.12. Nagłe zwężenie przewodu

Struga między przekrojami 1. i 2. może być podzielona na dwa odcinki 1–C i C–2 (w przekroju C występuje największa kontrakcja strugi; prędkość v_C jest największa, bo jej średnica d_C jest najmniejsza).

Strata energetyczna Δh_C^s na odcinku C–2 może być obliczona według wzoru Borda (7.44)

$$\Delta h_C^s = \frac{(v_C - v_2)^2}{2g},$$

gdź struga jest tam przyśpieszana podobnie jak w przypadku rozważanym w punkcie 7.3.1 (rys. 7.8). Po zastosowaniu równania ciągłości i oznaczeniu $\kappa = (d_C/d)^2$

$$\Delta h_C^s = \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow \zeta_C = \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)^2. \quad (7.54)$$

Po zdefiniowaniu całej wysokości strat energetycznych jako

$$\Delta h^s = \zeta \frac{v_2^2}{2g}$$

można obliczyć stratę na odcinku 1–C

$$\Delta h_{1C}^s = \left(\zeta - \left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right)^2 \right) \frac{v_2^2}{2g}. \quad (7.55)$$

Z doświadczeń wiadomo, że $(1/\kappa - 1)^2$ ma przeważający udział w całym współczynniku oporu, czyli straty energetyczne na odcinku C–2, gdzie struga jest opóźnia-

¹⁾ Ciecz wypełnia cały przekrój poprzeczny przewodu, ale na pewnym odcinku transport masy wzduż osi strugi odbywa się częścią przekroju poprzecznego; resztę zajmują strefy recyrkulacji, w których strumień objętości jest zerowy.

na, przeważają nad stratami na odcinku, w którym przyśpiesza. Oznacza to, że sposobem istotnego obniżenia strat energetycznych na nagłym zwężeniu przewodu jest zlikwidowanie strefy recyrkulacji za zwężeniem. Według badań Hamiltona, zaokrąglenie ostrych krawędzi promieniem dłuższym niż $0,12d$ sprowadza współczynnik oporu do wartości $\zeta \approx 0,1$.

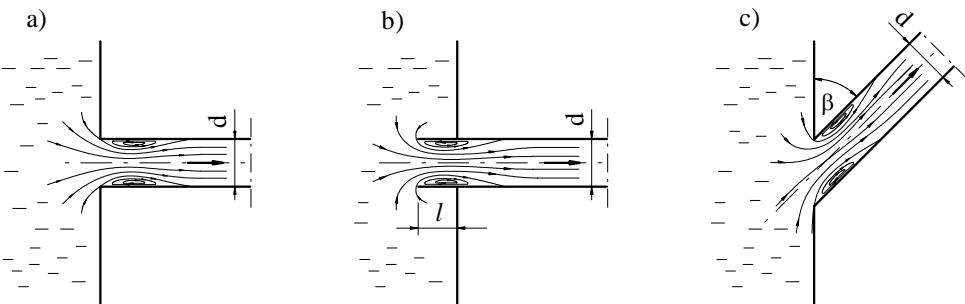
W tabeli podano wartości współczynników kontrakcji κ , $(1/\kappa - 1)^2 = \zeta_C$, ζ w zależności od stosunku A_2/A_1 według badań Weisbacha.

A_1/A_2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
κ	0,617	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,00
$(1/\kappa - 1)^2$	0,38	0,36	0,34	0,34	0,27	0,22	0,16	0,10	0,05	0,02	0
ζ	0,50	0,46	0,41	0,36	0,30	0,24	0,18	0,12	0,06	0,02	0
$0,5(1 - A_2/A_1)$	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	0

Wynika stąd, że dla $A_2/A_1 = 0$ (ostrokrawędziowy wlot do rury ze zbiornika – rys. 7.13a) współczynnik oporu wynosi 0,5. W przypadku dobrze zaokrąglonego wlotu ze zbiornika do rury jest możliwe teoretyczne obliczenie współczynnika oporu na podstawie teorii warstwy przyściennej. Niektóre źródła (np. polska norma) podają wzór na współczynnik oporu nagłego zwężenia w postaci

$$\zeta = 0,5 \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right), \quad (7.56)$$

który, jak wynika z tabeli, może być stosowany w praktycznych obliczeniach, gdyż wystarczająco dokładnie zgadza się z wynikiem doświadczeń.



Rys. 7.13. Różne kształty wlotu ze zbiornika do przewodu:
a) wlot zewnętrzny, b) wlot wewnętrzny, c) wlot pod kątem

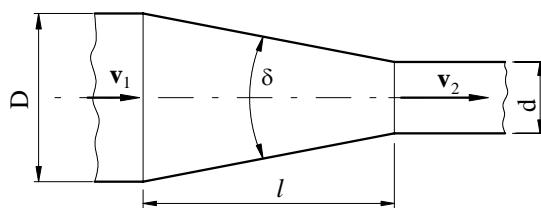
Jeżeli wlot do przewodu nie pokrywa się z powierzchnią ściany zbiornika (rys. 7.13b), to opór wzrasta i dla $1/d > 0,5$ współczynnik oporu osiąga wartość $\zeta = 1$.

W przypadku połączenia przewodu ze zbiornikiem pod kątem β (rys. 7.13c) współczynnik oporu miejscowego określa się z zależności

$$\zeta = 0,5 + 0,3 \cos \beta + 0,2 \cos^2 \beta. \quad (7.57)$$

W przepływie przez stożkowe zwężające się odcinki przewodu, tzw. konfuzory (rys. 7.14), występują tylko niewielkie straty energii wywołane tarciem na długości, które możemy obliczyć z zależności¹⁾

$$\Delta h^{sl} = \frac{\lambda}{8 \operatorname{tg} \delta / 2} \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right) \frac{v_2^2}{2g}. \quad (7.58)$$



Rys. 7.14. Konfuzor stożkowy

7.3.3. PRZEPŁYW ZE ZMIANĄ KIERUNKU

Podczas przepływu plynu przez elementy zakrzywione (kolana, łuki, załamania), oprócz strat wywołanych tarciem i oderwaniem strugi, występują dodatkowe straty wynikające z powstawania wirów indukowanych. Struktura przepływu (a zatem rozkłady prędkości i ciśnień) w kanale zakrzywionym jest podobna do rozkładu prędkości i ciśnień w wirze swobodnym. W przekroju poprzecznym (rys. 7.15), leżącym poza obrębem warstw przyściennych, ciśnienie w pobliżu wewnętrznej ściany zakrzywionej (punkt A) jest mniejsze niż ciśnienie w pobliżu ściany zewnętrznej (punkt B). Różnicę ciśnień $p_B - p_A$ równoważą siły odśrodkowe przepływającego czynnika. Zgodnie z równaniem Bernoulliego

$$(p_B > p_A) \Rightarrow v_A > v_B.$$

W warstwach przyściennych prędkości przepływu maleją do zera i siły odśrodkowe nie równoważą różnice $p_B - p_A$, a zatem wzdłuż ściany przewodu powstaje ruch w kierunku od B do A, wywołujący powstanie dwóch wirów (rys. 7.15). Wiry indukowane zwiększą straty w przewodach zakrzywionych.

Całkowite straty wysokości energii w przepływie przez przewód zakrzywiony określa zależność

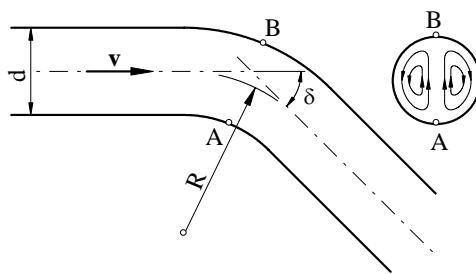
¹⁾ Wyprowadzenie jak dla dyfuzora.

$$\Delta h^{sm} = \Delta h^{sf} + \Delta h^{sz}, \quad (7.59)$$

w której:

$$\Delta h^{sf} = \zeta^f \frac{v^2}{2g} - \text{straty tarcia,}$$

$$\Delta h^{sz} = \zeta^z \frac{v^2}{2g} - \text{straty wywołane powstaniem wiru i oderwaniem.}$$



Rys. 7.15. Przepływ w kolanie

Współczynnik oporu całkowitego jest sumą

$$\zeta = \zeta^f + \zeta^z$$

i zależy od następujących parametrów

$$\zeta = \zeta \left(\frac{d}{R}, \delta, \text{Re}, \frac{k}{d} \right),$$

przy czym:

d – średnica rury,

R – promień krzywizny,

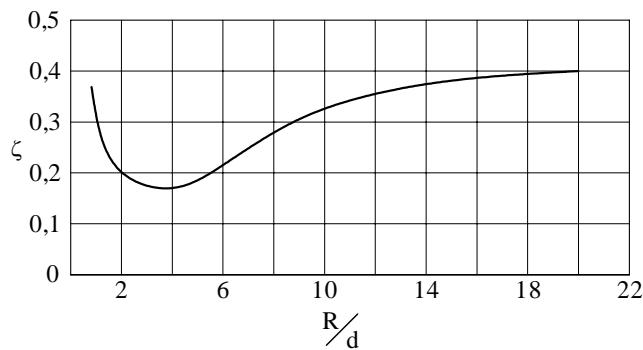
δ – kąt zmiany kierunku przepływu,

Re – liczba Reynoldsa,

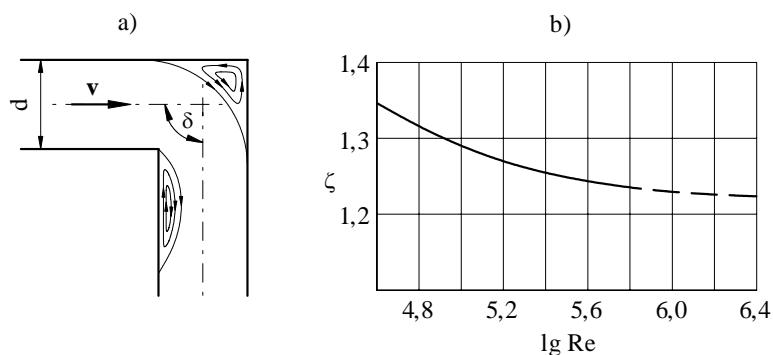
k – chropowatość bezwzględna.

Jeśli zakrzywienie przewodu jest zbyt gwałtowne (małe R/d), to powstają oderwania strugi, co zwiększa wartość ζ^z . Dla łagodnych zakrzywień (duże R/d) oderwania mogą nie wystąpić, zwiększą się natomiast straty tarcia. Istnieje więc optymalne, ze względu na minimalizację strat, zakrzywienie przewodu. Na rysunku 7.16 przedstawiono $\zeta = \zeta(R/d)$ dla gładkiej rury zgłejtej pod kątem $\delta = 90^\circ$ (kolano). Wartości ζ w przypadku rur bardzo chropowatych są dwukrotnie większe niż rur gładkich.

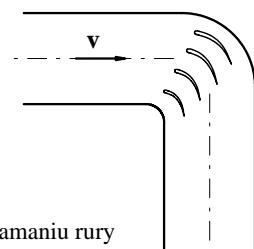
Dla $\text{Re} > 1,5 \cdot 10^5$ wartości ζ nie zależą od Re . Należy zwrócić uwagę, że ukształtowanie się profilu prędkości następuje dopiero w odległości $(50 \div 70)d$ za kolanem i tylko w takich przypadkach dozwolone jest sumowanie doświadczalnie wyznaczonych wartości współczynników ζ .

Rys. 7.16. Zależność współczynnika ζ od R/d w przepływie przez kolano

Przewód zakrzywiony, w którym $R/d = 0$, nazywamy *załamaniem* (rys. 7.17a). Przepływ przez załamanie jest podobny do przepływu przez kolano, z tym że straty wywołane oderwaniem są większe. Dla załamań $\zeta = \zeta^z$. Wartości współczynnika ζ zależą od kąta załamania δ i liczby Re. Na rysunku 7.17b przedstawiono $\zeta = \zeta(\text{Re})$ podczas przepływu przez załamanie pod kątem prostym, w przypadku zwykłej rury stalowej o $d = 50$ mm. Wartości współczynnika ζ są większe niż w przypadku kolana. Dla $\text{Re} > 6 \cdot 10^5$ wartość ζ prawie nie zależy od Re.

Rys. 7.17. Przepływ przez przewód z załamaniem:
a) schemat, b) zależność współczynnika ζ od liczby Reynoldsa

Znaczne zmniejszenie strat przepływu w załomie i w przewodzie zakrzywionym o małym R/d uzyskuje się przez wprowadzenie wzdłuż przekątnej naroża palisady łopatek (rys. 7.18). Powoduje to zmniejszenie współczynnika ζ od wartości $\zeta \approx 1,2$ w przypadku przepływu bezłopatkowego do wartości $\zeta \approx 0,2 \div 0,3$.

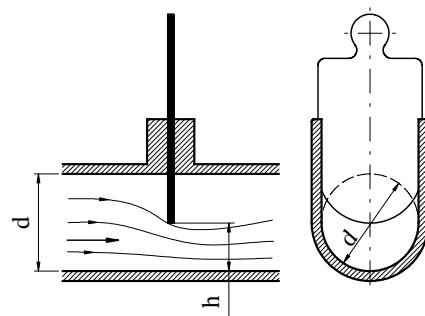


Rys. 7.18. Palisada łopatek (kierownica) zmniejszająca straty przepływu w załamaniu rury

7.3.4. PRZEPŁYW PRZEZ URZĄDZENIA DŁAWIĄCE

Zasuwy, zawory, przepustnice itp. zaliczamy do urządzeń dławiących przepływ. Wartości Δh^s , zależne od ukształtowania części przepływowej urządzenia, wyznaczamy doświadczalnie. Odnosimy je do prędkości za przeszkodą.

Zasuwa (rys. 7.19). Wartość współczynnika strat zależy od stosunku h/d , tj. od stopnia otwarcia zasuwy.



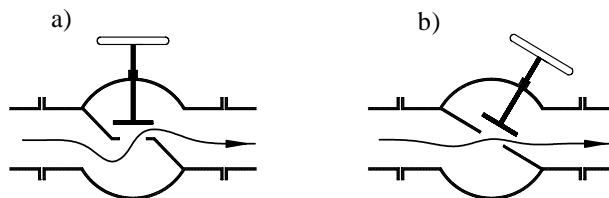
Rys. 7.19. Schemat zasuwy

Wartości ζ wynoszą:

h/d	1	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8	1/8
ζ	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

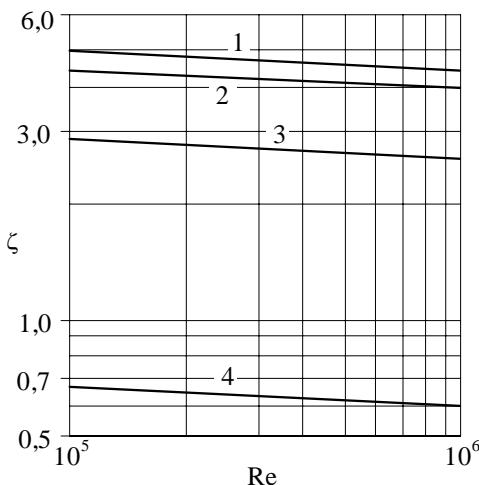
Zawór. Wartości współczynników strat energetycznych w zaworach przepływoowych w zależności od konstrukcji są następujące:

1. W przypadku zaworu prostego, przedstawionego na rysunku 7.20a dla otwarcia całkowitego $\zeta = 3 \div 5,5$.
2. W przypadku zaworu skośnego (rys. 7.20b) $\zeta = 2 \div 3$.



Rys. 7.20. Schemat przepływu przez zawór: a) prosty, b) skośny

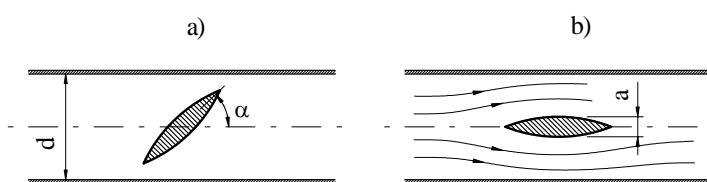
Na rysunku 7.21 podano charakter zmienności $\zeta = \zeta(\text{Re})$ typowych zaworów w obszarze przepływu turbulentnego.



Rys. 7.21. Zależność współczynnika ζ od liczby Reynoldsa w przepływie przez zawory:

- 1, 2 – zawory zwykłe, 3 – zawór z ukośnym zamknięciem,
- 4 – zawór o przepływie prostoliniowym

Przepustnica. Współczynnik strat ζ w przepływie przez przepustnicę (rys. 7.22a) zależy od stopnia jej otwarcia, a zatem od kąta α .



Rys. 7.22. Schemat przepustnicy: a) uchylonej, b) otwartej

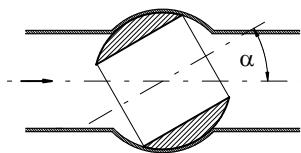
Wartości $\zeta = \zeta(\alpha)$ wynoszą:

α°	ζ	α°	ζ	α°	ζ
5	0,24	30	3,91	55	58,8
10	0,52	35	6,22	60	118
15	0,90	40	10,8	65	256
20	1,54	45	18,7	70	751
25	2,51	50	32,6	90	∞

Dla całkowitego otwarcia (rys. 7.22b), w zależności od stosunku a/d , wartości są następujące:

a/d	0,10	0,15	0,20	0,25
ζ	0,05÷0,10	0,10÷0,16	0,17÷0,24	0,25÷0,35

Kurek. Współczynnik oporu przy przepływie przez kurek (rys. 7.23) zależy od kąta α określającego stopień otwarcia kurka.



Rys. 7.23. Schemat kurka

Współczynnik oporu ζ przyjmuje wartości:

α°	ζ	α°	ζ	α°	ζ
5	0,05	25	3,10	45	31,2
10	0,29	30	5,47	50	52,6
15	0,75	35	9,68	55	106,0
20	1,56	40	17,3		

7.3.5. ŁĄCZENIE I DZIELENIE SIĘ STRUG

Miejsca, w których przewód rozgałęzia się albo przewody łączą się w jeden przewód zbiorczy, nazywamy *węzłami*. W układach najczęściej występują zagadnienia łączenia dwóch strug lub rozdzielania jednej strugi na dwie. Kształtki, w których zachodzą te zjawiska, nazywamy *trójknikami*.

Każdy trójknik zastosowany do podziału strugi, a następnie, przy zachowaniu tych samych strumieni objętości w przewodzie głównym i odgałęzieniach, do łączenia się strug w obydwu przypadkach spowoduje inną stratę energii. Dlatego też współczynniki oporów miejscowych należy wyznaczać oddzielnie $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ dla każdego odgałęzienia.

Współczynnik oporu miejscowego przy łączeniu i dzieleniu się strug

$$\zeta = \zeta \left(\frac{q_{V1}}{q_{VC}}, \frac{q_{V2}}{q_{VC}}, \dots, \frac{q_{Vn}}{q_{VC}}, \frac{A_1}{A_C}, \frac{A_2}{A_C}, \dots, \frac{A_n}{A_C}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \right), \quad (7.60)$$

przy czym:

$q_{V1}, q_{V2}, \dots, q_{Vn}$ – strumień objętości w odgałęzieniach,
 q_{VC} – strumień objętości w przewodzie głównym,

- A_1, A_2, \dots, A_n – pole powierzchni przekroju odgałęzień,
 A_C – pole powierzchni przekroju przewodu głównego,
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – kąty zawarte między osiami poszczególnych odgałęzień i osią przewodu głównego.

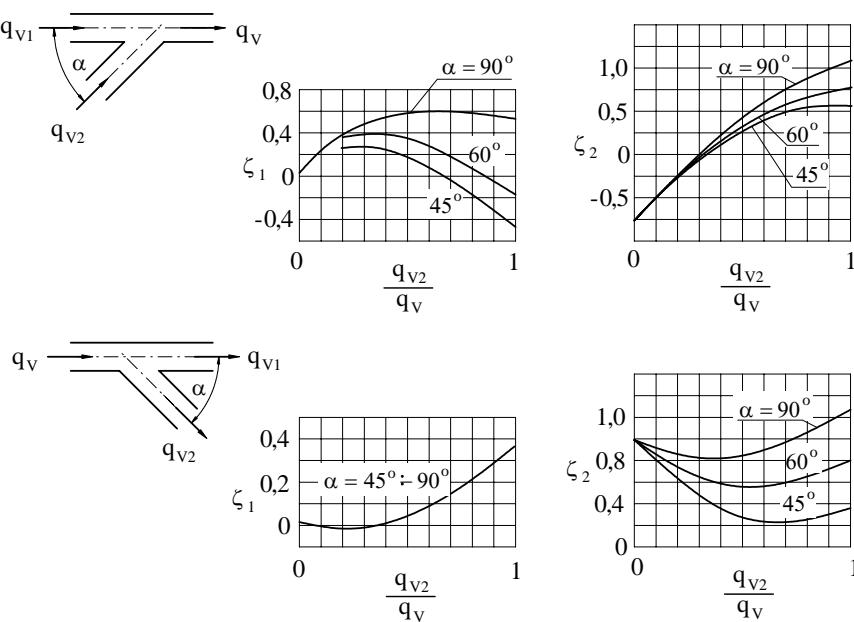
Straty przepływu należy liczyć oddzielnie dla każdej z dwu strug o strumieniach objętości q_{V1} i q_{V2} na podstawie wzorów

$$\Delta h_1^s = \zeta_1 \frac{v^2}{2g}, \quad \Delta h_2^s = \zeta_2 \frac{v^2}{2g}, \quad (7.61)$$

w których v – prędkość w przewodzie głównym określona zależnością

$$v = \frac{4(q_{V1} + q_{V2})}{\pi d^2}.$$

Współczynniki ζ_1 i ζ_2 są zwykle wyznaczane doświadczalnie. Orientacyjne wartości podano na wykresach (rys. 7.24).



Rys. 7.24. Zależności współczynników ζ_1 i ζ_2 od liczby Reynoldsa w przepływie przez trójkinki

Ujemna wartość współczynnika wskazuje, że występuje ejekcja strugi.

7.3.6. PRZEPŁYW PRZEZ PRZEWODY SPAWANE

W praktycznych obliczeniach rurociągów występuje potrzeba uwzględnienia strat powstających w miejscach połączeń (zwłaszcza spawanych) poszczególnych odcin-

ków rurociągu. Badania oporów odcinków ze spoinami wykazały wzrost strat hydraulycznych w stosunku do strat na takich samych odcinkach, ale bez spoin, z tym że krzywe $\lambda = \lambda(\text{Re}, k/d)$ zachowały swoją postać. Na rysunku 7.25 przedstawiono wpływ połączeń spawanych na współczynnik oporu liniowego. Krzywa 1. dotyczy przewodu bez spoin, krzywa 4. – przewodu hydraulicznie gładkiego, a pozostałe – przewodów z połączeniami spawanymi co 2 m (krzywa 2.) i co 4 m (krzywa 3.). Wzrost oporu spowodowany połączeniami spawanymi można określić z zależności

$$K = 1 + \frac{\zeta_s}{\lambda} \frac{d}{l}, \quad (7.62)$$

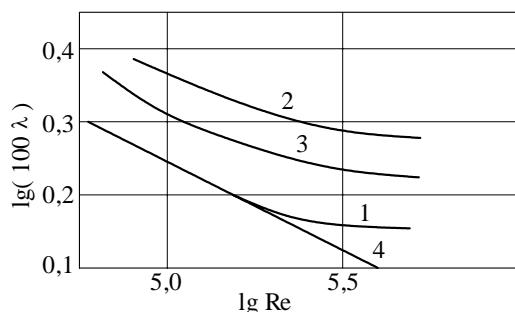
w której:

$K = \zeta_s/\lambda$ – względny przyrost wartości współczynnika oporu liniowego przewodu ze spoinami w stosunku do przewodu bez spoin,

l – odległość między połączeniami spawanymi,

d – średnica przewodu,

λ – współczynnik oporu liniowego przewodu bez spoin.



Rys. 7.25. Zależność współczynnika λ od liczby Reynoldsa w przepływie przez przewody ze spoinami: 1 – bez spoin, 2 – spoiny co 2 m, 3 – spoiny co 4 m, 4 – hydraulicznie gładki

Wartość współczynnika ζ_s wyznaczamy, korzystając z empirycznej formuły

$$\zeta_s = 13,8 \left(\frac{s}{d} \right)^{3/2}, \quad (7.63)$$

w której s – wysokość spoiny.

7.3.7. ZALEŻNOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA OPORU MIEJSCOWEGO OD LICZBY REYNOLDSA

Podane dotychczas informacje o współczynnikach oporów miejscowych dotyczą przepływów turbulentnych z dużymi liczbami Reynoldsa. W przepływach płynu z małymi liczbami Reynoldsa współczynniki oporów miejscowych zależą nie tylko od parametrów geometrycznych oporu lokalnego, ale również od liczby Reynoldsa.

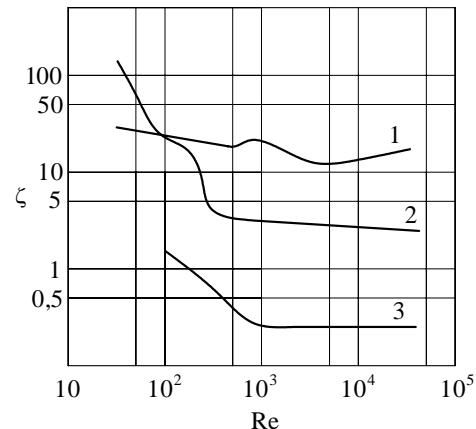
Na rysunku 7.26 przedstawiono zależności współczynnika ζ kilku oporów miejscowych (1 – zawór, 2 – zasuwa, 3 – trójkąt) od liczby Reynoldsa. W większości przypadków ze wzrostem Re wartość współczynnika oporu maleje.

Dla małych liczb Reynoldsa straty energii są związane bezpośrednio z siłami tarcia lepkiego i wobec tego proporcjonalne do prędkości w pierwszej potędze. Współczynnik oporu miejscowego, w tym przypadku, jest związany z liczbą Reynoldsa zależnością

$$\zeta = \frac{C}{Re}, \quad (7.64)$$

w której C – współczynnik zależny od rodzaju oporu miejscowego i jego parametrów geometrycznych.

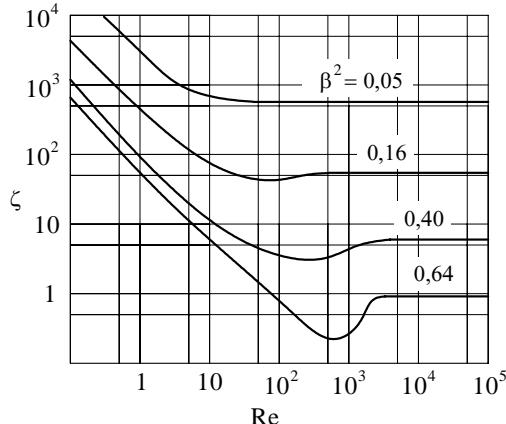
Rys. 7.26. Zależność współczynnika ζ od liczby Reynoldsa w przepływie przez zawór (1), zasuwę (2) i trójkąt (3)



Opór miejscowy	C
Gwałtowne rozszerzenie	30
Kolano	130
Trójkąt	150
Zawór prosty	3000
Zawór kątowy	400
Kryza	$\beta^2 = 0,64$ $\beta^2 = 0,40$ $\beta^2 = 0,16$ $\beta^2 = 0,05$
	70 120 500 3200

Ze wzrostem liczby Reynoldsa pojawiają się straty energii wywołane oderwaniem warstwy przyściennej i powstaniem obszarów przepływów powrotnych; im większa wartość Re , tym większy wpływ tych efektów na całkowitą stratę. Przy dostatecznie dużych liczbach Reynoldsa zjawiska oderwania, tworzenia się wirów i przepływów powrotnych odgrywają decydującą rolę; straty energii stają się wtedy proporcjonalne do kwadratu prędkości, ponieważ współczynnik oporu przestaje zależeć od Re i zależy tylko od geometrii strugi.

Rys. 7.27. Zależność współczynnika ζ od liczby Reynoldsa w przepływie przez kryzy o różnym przewężeniu



Charakterystyczne strefy zależności strat od prędkości (I – liniowa, II – zmienna, III – kwadratowa) i odpowiadające im strefy zmiany współczynnika ζ w zależności od liczby Reynoldsa można zaobserwować na rysunku 7.27, na którym przedstawiono wykresy $\zeta = \zeta(\text{Re})$ dla kryz o różnym przewężeniu. Warto zwrócić uwagę, że jakościowo krzywe te są podobne do krzywych $\lambda = \lambda(\text{Re})$ dla przewodów prostych.

Przebieg krzywych $\zeta = \zeta(\text{Re})$ jest zdeterminowany momentem oderwania strugi od ściany przewodu i tworzenia się wirów. Im większa jest deformacja strugi w opórze miejscowym, tym krótsze są strefy, w których $\zeta = \zeta(\text{Re})$ i $\zeta = \zeta(\text{Re, geometria})$, tzn. przy mniejszych liczbach Reynoldsa zaczyna się strefa kwadratowej zależności oporu od prędkości.

7.3.8. WZAJEMNE ODDZIAŁYWANIE OPORÓW MIEJSCOWYCH

Wbudowanie oporu miejscowego w przewód powoduje zmiany rozkładów ciśnienia, naprężeń statycznych, prędkości i intensywności turbulencji w góre i w dół strugi w porównaniu z rozkładami powyższych parametrów na tym samym odcinku przewodu bez oporu miejscowego. Odcinek, na którym rozkłady parametrów zmieniły się, nazywamy *długością oddziaływania oporu miejscowego*. Wartość tej długości (l_o) zależy od charakterystyk hydraulicznych oporu miejscowego oraz przewodu i może być w przybliżeniu wyznaczona ze wzoru

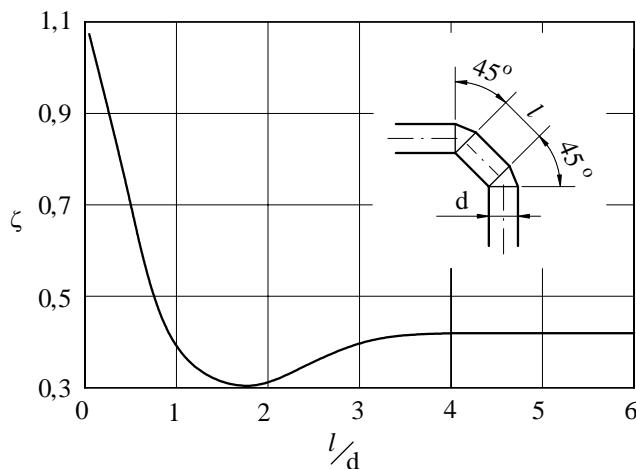
$$l_o = 0,5 \frac{\zeta}{\lambda} d = 0,5 l_e, \quad (7.65)$$

w którym l_e – długość ekwiwalentna oporu lokalnego.

Doświadczalne wartości współczynników oporów miejscowych są podawane dla przypadku w pełni uformowanego przepływu¹⁾ na wlocie do rozpatrywanego oporu. W praktyce opory miejscowe często są umieszczone w niewielkich odległościach od siebie tak, że struga między nimi nie zdoła się na powrót w pełni uformować. W takim przypadku sumaryczny współczynnik oporu nie jest równy sumie prostej poszczególnych współczynników.

Na rysunku 7.28 pokazano zmianę sumarycznej wartości współczynnika oporu dwóch kolan segmentowych o kącie 45° w zależności od odległości między nimi. Dla $l/d = 0$ sumaryczna wartość ζ jest równa wartości współczynnika oporu załamania o kącie 90° . Ze zwiększeniem długości odcinka łączącego oba kolana sumaryczna wartość ζ zmniejsza się, osiągając minimum przy $l/d \approx 2$, a następnie wzraszcza, dochodząc do wartości odpowiadającej podwojonej wartości ζ dla jednego kolana o kącie 45° .

¹⁾ Przepływ w pełni uformowany jest to przepływ przez przewód prosty za odcinkiem wstępny (p. 6.4.2).



Rys. 7.28. Zależność współczynnika ζ od względnej odległości między kolanami segmentowymi

Złożoność zjawiska zmian struktury strugi wywołanych wbudowaniem oporu miejscowego oraz zależność tego zjawiska od charakterystyk hydraulicznych oporu i przewodu są przyczyną, że ciągle jeszcze brak konkretnych wytycznych do określania wzajemnego oddziaływanie między oporami miejscowymi. W praktyce przyjmuje się następujący tok postępowania:

1. Odległość między rozpatrywanymi oporami miejscowymi porównuje się z wartością długości oddziaływania obliczoną ze wzoru (7.65).
2. Jeżeli odległość jest większa od długości oddziaływania, to sumaryczna wartość ζ jest równa sumie wartości współczynników poszczególnych oporów miejscowych.
3. Gdy odległość między oporami jest mniejsza od długości oddziaływania, sumaryczny współczynnik oporu należy określić na podstawie badań doświadczalnych.

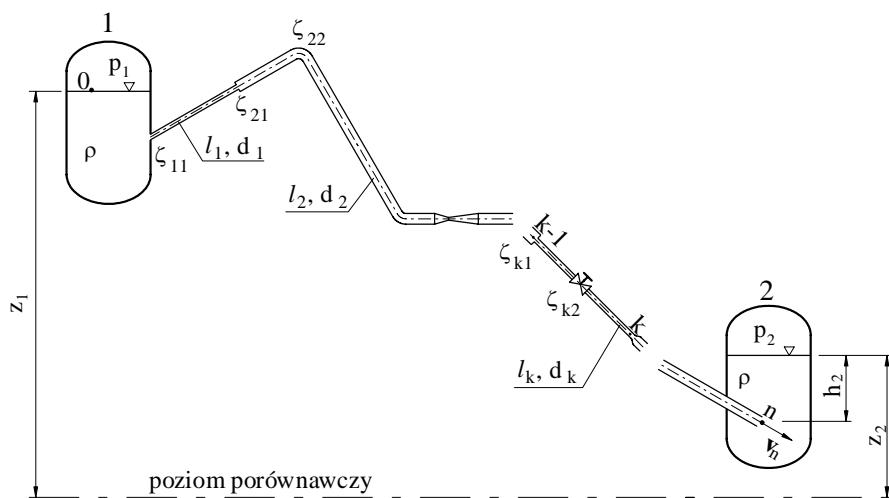
7.4. USTALONY PRZEPŁYW PŁYNÓW W SYSTEMACH HYDRAULICZNYCH

7.4.1. PRZEPŁYW PŁYNU NIEŚCIŚLIWEGO W SYSTEMIE SZEREGOWYM

Rozpatrzmy układ (system) hydrauliczny złożony ze zbiorników 1. i 2., połączonych przewodem wykonanym z n odcinków rur o średnicach d_1, d_2, \dots, d_n i długościach odpowiednio l_1, l_2, \dots, l_n , połączonych szeregowo. Przewód może być wyposażony w armaturę (np. zawory, zasuwy), mieć łuki, kolana, załamania, zwężki i inne opory miejscowe. Przypominamy, że współczynniki oporów miejscowych są zwykle odnoszone do prędkości za przeszkodą (jeśli jest inaczej – jest to specjalnie zaznaczono)

ne). Na rurze o jednej średnicy może znajdować się kilka takich oporów, wobec tego zakładamy, że są one tak rozmieszczone, iż można je sumować, otrzymując dla k -tej rury sumaryczny współczynnik oporów miejscowych ζ_k . Na przykład na rysunku 7.29 między przekrojami $k-1$, k są dwa opory miejscowe: ζ_{k1} (nagle zwężenie przewodu) oraz ζ_{k2} (zawór), znajdujące się na k -tej rurze (tj. o średnicy d_k i długości l_k). Sumaryczny współczynnik oporu wynosi zatem $\zeta_k = \zeta_{k1} + \zeta_{k2}$.

Przystępując do obliczeń, założymy, że poziomy cieczy w zbiornikach i ciśnienia nad jej powierzchniami są stałe¹⁾. Przyjmujemy zatem dowolny poziom porównawczy oraz dwa przekroje 0 i n strugi cieczy, zlokalizowane jak na rysunku 7.29, zakładając tymczasem, że przepływ odbywa się w kierunku zbiornika 2.



Rys. 7.29. Schemat szeregowego systemu przepływu między dwoma zbiornikami

Uogólnione równanie Bernoulliego (7.18) w tym przypadku przyjmie następującą postać

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2 + h_2 \rho g}{\rho g} + (z_2 - h_2) + \alpha_n \frac{v_n^2}{2g} + \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) \frac{v_i^2}{2g}, \quad (7.66)$$

gdzie v_i – prędkość średnia w i -tej rurze.

Z założenia o stałych poziomach cieczy w zbiornikach wynika, że prędkość opadania zwierciadła cieczy w zbiorniku 1. wynosi 0. Straty na odcinku między przekrojami 0 i n wyrażają się więc sumą strat liniowych i miejscowych na poszczególnych rurach (wzór (7.19)).

¹⁾ Zbiorniki mogą być ciągle uzupełniane lub mają tak duże rozmiary, że prędkość opadania (wznowienia) zwierciadeł cieczy jest niewielka.

Równanie ciągłości zapiszemy w postaci

$$q_V = \frac{\pi d_i^2}{4} v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.67)$$

gdzie q_V – strumień objętości.

Po uporządkowaniu równania (7.66) i podstawieniu w miejsce v_i , ze wzoru (7.67)

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) = \frac{1}{2g} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) \left(\frac{1}{d_i} \right)^4 + \alpha_n \left(\frac{1}{d_n} \right)^4 \right) q_V^2, \quad (7.68)$$

skąd

$$q_V = \frac{\pi d_n^2}{4} \sqrt{\frac{2g \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) \left(\frac{d_n}{d_i} \right)^4 + \alpha_n}}. \quad (7.69)$$

Trzeba zwrócić uwagę, że λ_i i ζ_i zależą od $Re_i = v_i d_i / \nu = 4q_V / \pi d_i v$ (v – kinematyczny współczynnik lepkości), a więc wzór (7.69) jest związkiem uwikłanym. Gdy oblicza się strumień objętości q_V , można stosować metodę kolejnych przybliżeń lub metodę graficzną.

Zwrócić uwagę, że wzór (7.69) ma sens fizyczny dla $h = (p_1 - p_2)/\rho g + (z_1 - z_2) > 0$ (dla $h = 0$ system jest układem naczyń połączonych), skąd łatwo sprawdzić, czy założony kierunek przepływu jest właściwy. Jeśli zapiszemy wzór (7.69) w postaci

$$q_V = \sqrt{\frac{\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2}{\left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) \left(\frac{1}{d_i} \right)^4 + \frac{\alpha_n}{d_n^4} \right) \frac{8}{\pi^2 g}}} \quad (7.70)$$

i oznaczymy

$$\begin{aligned} \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) &\equiv h, \\ \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) \left(\frac{1}{d_i} \right)^4 + \frac{\alpha_n}{d_n^4} \right) \frac{8}{\pi^2 g} &\equiv R^*, \end{aligned} \quad (7.71)$$

to otrzymamy

$$q_V = \sqrt{\frac{h}{R^*}} \quad (7.72)$$

lub

$$h = R^* q_V^2, \quad (7.73)$$

gdzie R^* nazwiemy opornością hydrometryczną układu (systemu).

Wzór (7.73) jest charakterystyką przepływu szeregowego systemu hydraulicznego przedstawionego na rysunku 7.29.

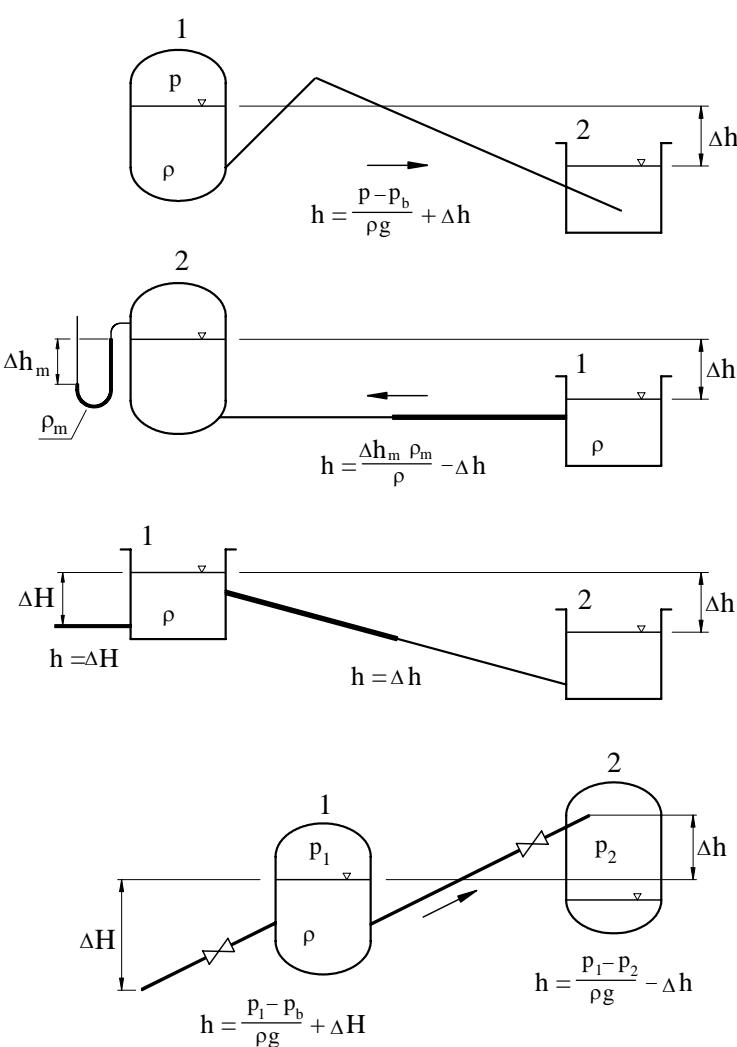
Powracając do wzoru (7.69), zwróćmy uwagę, że strumień objętości zależy od:

- wysokości różnicy ciśnień w zbiornikach i różnicy poziomów zwierciadeł cieczy,
- wymiarów geometrycznych przewodów,

oraz – w mniejszym stopniu –

- od parametrów fizycznych przepływającego płynu (λ_i, ζ_i zależą od $Re_i = v_i d_i / \nu$).

Strumień objętości nie zależy natomiast od głębokości zanurzenia wlotu i wylotu pod zwierciadłem cieczy.



Rys. 7.30. Przykłady przepływu między zbiornikami i wypływu ze zbiorników

Nietrudno zauważyć, że wzory (7.69)–(7.73) są ważne również dla zbiorników otwartych. Trzeba wtedy wstawić w miejsce p_i , $i \in \{1, 2\}$ ciśnienie atmosferyczne p_b . Wzór dla wypływu plynu do atmosfery będzie również taki sam, ale wtedy $p_2 = p_b$. Przepływ gazu o stałej (prawie) gęstości może być również określony wzorem (7.69), ale wówczas $z_1 - z_2 = 0$.

Przykłady przepływów między zbiornikami i wypływów ze zbiorników przedstawiono na rysunku 7.30.

7.4.2. CHARAKTERYSTYKA PRZEPŁYWU PRZEWODU (SZEREGOWEGO SYSTEMU HYDRAULICZNEGO)

Napiszemy teraz równanie (7.66) dla przekrojów $k-1$, k strugi cieczy przepływającej przez układ pokazany na rysunku 7.29

$$\frac{p_{k-1}}{\rho g} + z_{k-1} + \alpha_{k-1} \frac{v_{k-1}^2}{2g} = \frac{p_k}{\rho g} + z_k + \alpha_k \frac{v_k^2}{2g} + \left(\lambda_k \frac{l_k}{d_k} + \zeta_k \right) \frac{v_k^2}{2g}, \quad (7.74)$$

gdzie indeksy $k-1$, k odnoszą się do wielkości odpowiednio w przekrojach $k-1$ i k , a ζ_k jest sumarycznym współczynnikiem oporów miejscowych odcinka rury o długości l_k odniesionych do prędkości v_k (na rys. 7.29 przedstawiono przykładowo sytuację, kiedy $\zeta_k = \zeta_{k1} + \zeta_{k2}$). Po uporządkowaniu równania (7.74) i wykorzystaniu równania ciągłości analogicznie do (7.66) otrzymujemy

$$\frac{p_{k-1} - p_k}{\rho g} + (z_{k-1} - z_k) = \frac{8}{g\pi^2} \left(\left(\lambda_k \frac{l_k}{d_k^5} + \zeta_k \frac{1}{d_k^4} \right) + \left(\frac{\alpha_k}{d_k^4} - \frac{\alpha_{k-1}}{d_{k-1}^4} \right) \right) q_v^2. \quad (7.75)$$

Obustronne zsumowanie tego równania względem k w granicach od 1 do n daje

$$\frac{p_0 - p_n}{\rho g} + (z_0 - z_n) \equiv h = \frac{8}{g\pi^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i^5} + \zeta_i \frac{1}{d_i^4} \right) + \frac{\alpha_n}{d_n^4} - \frac{\alpha_0}{d_0^4} \right) q_v^2, \quad (7.76)$$

gdzie α_0 – współczynnik Coriolisa w przekroju poprzedzającym wlot do systemu.

W przypadku przepływu między zbiornikami $\alpha_0 = 0^{1)}$ (przy założeniu, że $v_0 = 0$), zaś $(p_0 - p_n)/\rho g + (z_0 - z_n) = (p_1 - p_2)/\rho g + (z_1 - z_2)$ (rys. 7.29), wobec czego (7.76) przechodzi w (7.70)–(7.73). Opierając się na wzorach (7.75) i (7.76), podamy sposób graficznego konstruowania zależności postaci (7.73), jeśli możemy opisać zależności

$$h_k = \frac{8}{g\pi^2} \left(\lambda_k \frac{l_k}{d_k^5} + \zeta_k \frac{1}{d_k^4} \right) q_v^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7.77)$$

i znane są współczynniki Coriolisa α_0 i α_n . Napiszemy wzór (7.76) w postaci

¹⁾ W ogólności może być $\alpha_0 \neq 0$.

$$h = \frac{8}{g\pi^2} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5} + \zeta_1 \frac{1}{d_1^4} - \alpha_0 \frac{1}{d_0^4} \right) + \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2^5} + \zeta_2 \frac{1}{d_2^4} \right) + \dots + \left(\lambda_{n-1} \frac{l_{n-1}}{d_{n-1}^5} + \zeta_{n-1} \frac{1}{d_{n-1}^4} \right) + \left(\lambda_n \frac{l_n}{d_n^5} + \zeta_n \frac{1}{d_n^4} + \alpha_n \frac{1}{d_n^4} \right) q_V^2 \equiv R^* q_V^2, \quad (7.78)$$

gdzie R^* – oporność hydrauliczna przewodu złożonego z n połączonych szeregowo odcinków rur (systemu szeregowego) o średnicach d_k i długościach l_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Zależność (7.78) będziemy nazywać *charakterystyką przepływu* tego *systemu* (przewodu). Poszczególne składniki sumy oznaczymy następująco:

$$\begin{aligned} & \frac{8}{g\pi^2} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5} + \zeta_1 \frac{1}{d_1^4} - \alpha_0 \frac{1}{d_0^4} \right) q_V^2 \equiv R_1^* q_V^2, \\ & \frac{8}{g\pi^2} \left(\lambda_m \frac{l_m}{d_m^5} + \zeta_m \frac{1}{d_m^4} \right) q_V^2 \equiv R_m^* q_V^2, \quad (m = 2, \dots, n-1), \\ & \frac{8}{g\pi^2} \left(\lambda_n \frac{l_n}{d_n^5} + \zeta_n \frac{1}{d_n^4} + \alpha_n \frac{1}{d_n^4} \right) q_V^2 \equiv R_n^* q_V^2, \end{aligned} \quad (7.79)$$

gdzie R_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$) – oporność hydrauliczna k -tego odcinka systemu (rys. 7.29), wówczas związek

$$h = R_k^* q_V^2, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7.80)$$

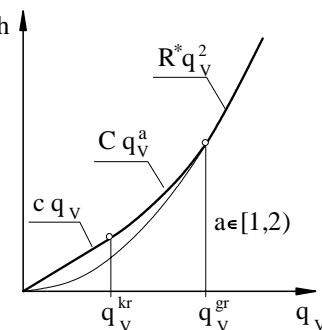
nazwiemy *charakterystyką przepływu k -tego odcinka* przewodu. Zwróćmy uwagę, że zależność funkcyjna dana wzorem (7.80) wyznacza, dla $k = 2, \dots, n-1$ i określonego q_V , straty energetyczne na dowolnej k -tej rurze tworzącej przewód. Dla $k = 1$ straty te są pomniejszone o wartość energii kinetycznej tuż przed wejściem do systemu, $h = R_k^* q_V^2$ jest zatem wartością mniejszą od strat energetycznych na pierwszej rurze o wartość prędkości przed wlotem do systemu. Dla $k = n$, $h = R_k^* q_V^2$ jest większa od straty energetycznej o wartość prędkości na wylocie z n -tej rury systemu.

Dla przepływu między zbiornikami (rys. 7.29) i dla wypływu ze zbiorników (rys. 7.30) wzory (7.79) określają straty energetyczne na k -tej rurze dla $k = 1, 2, \dots, n$, gdyż $\alpha_0 = 0$, $(8\alpha_n/\pi^2 g d_n^4) q_V^2$ należy zaliczyć do strat, bowiem energia ta zostaje rozproszona (bezużytecznie) w zbiorniku. Na ogół w przypadku przepływu cieczy (prędkość jest wtedy mała), prawdziwa jest implikacja

$$\frac{\left| \left(\frac{\alpha_n}{d_n^4} - \frac{\alpha_0}{d_0^4} \right) \right|}{\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i^5} + \zeta_i \frac{1}{d_i^4} \right)} \ll 1 \Rightarrow R^* \approx \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i^5} + \zeta_i \frac{1}{d_i^4} \right) \Rightarrow R_k^* = \lambda_k \frac{l_k}{d_k^5} + \zeta_k \frac{1}{d_k^4}, \quad (7.81)$$

$k = 1, 2, \dots, n.$

Jeśli rozważymy charakterystykę przepływu przewodu złożonego z jednej rury pozbawionej oporów miejscowych, to przedstawia ją krzywa pokazana na rysunku 7.31, którą można podzielić na trzy części. Pierwsza z nich obejmuje przedział ruchu laminarnego (wzór (6.125)) – straty energetyczne są liniowo zależne od strumienia objętości i mają wysokość $(\lambda l/d)v^2/2g = 128 v l q_v / \pi g d^4$ dla $q_v \in (0, q_{Vkr}]$ ($q_{Vkr} = \pi d v R_{kr}/4$, R_{kr} – krytyczna liczba Reynolds'a, v – kinematyczny współczynnik lepkości). W przedziale $(q_{Vkr}, q_{Vgr}]$ zależność ta jest bardziej skomplikowana i straty rosną szybciej niż poprzednio ze wzrostem q_v , aby dla $q_v > q_{Vgr}$ rosnąć proporcjonalnie do kwadratu prędkości ($q_v > q_{Vgr} \Rightarrow R^* = \text{idem}$). Podobny przebieg ma charakterystyka przepływu przewodu zawierającego opory miejscowe, z tym że przedział liniowej zależności oporów jest krótszy, a nawet (praktycznie) znika. W technice ruch laminarny występuje rzadko, dlatego na rzeczywistych charakterystykach przepływu odcinek prostej, zaznaczony wyraźnie na rysunku 7.31, nie jest praktycznie widoczny i krzywe mają kształt zbliżony do paraboli kwadratowej.



Rys. 7.31. Charakterystyka przepływu przewodu pojedynczego

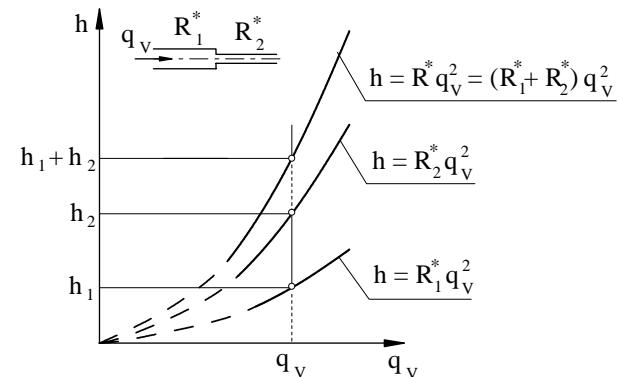
Powracając do wzorów (7.78), (7.79) widzimy, że mając poszczególne charakterystyki

$$h = R_k^* q_v^2, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.82)$$

łatwo uzyskać charakterystykę systemu szeregowego

$$h = R^* q_v^2.$$

Sposób skonstruowania tej charakterystyki przedstawiono (na przykładzie dwóch przewodów) na rysunku 7.32, skąd dla danego q_v można określić h ¹⁾ lub odwrotnie.



Rys. 7.32. Charakterystyka dwóch przewodów połączonych szeregowo

¹⁾ Dla przepływu między zbiornikami (rys. 7.29), jak wiemy, $h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2)$ (zob. również rys. 7.30).

7.4.3. WYKRES ANCONY

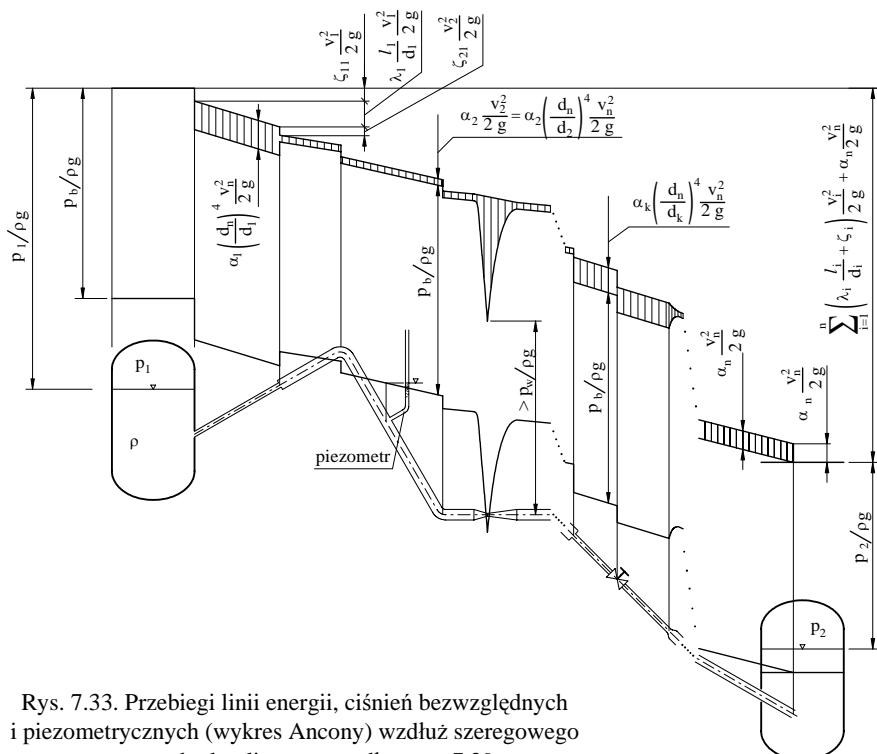
Wykresem Ancony nazywamy graficznie przedstawione przebiegi wysokości: energii rozporządzalnej, ciśnienia (absolutnego) i ciśnienia piezometrycznego wzdłuż strugi przepływającego płynu. Jak wiadomo, wysokość energii rozporządzalnej maleje¹⁾ w kierunku przepływu wzdłuż strugi cieczy na skutek strat energetycznych. Wobec tego w dwóch jej przekrojach i oraz j (rys. 7.33) oddalonych od siebie o $l_{ij} > 0$, z których – idąc w kierunku przepływu – i poprzedza j , wysokość energii rozporządzalnej spełnia nierówność

$$\frac{p_i}{\rho g} + z_i + \frac{\alpha_j v_i^2}{2g} > \frac{p_j}{\rho g} + z_j + \frac{\alpha_j v_j^2}{2g}, \quad (7.83)$$

która przechodzi w równanie

$$\frac{p_i}{\rho g} + z_i + \frac{\alpha_i v_i^2}{2g} = \frac{p_j}{\rho g} + z_j + \frac{\alpha_j v_j^2}{2g} + \Delta h_{ij}^s, \quad (7.84)$$

jeśli Δh_{ij}^s jest wysokością strat energetycznych na drodze l_{ij} .



Rys. 7.33. Przebiegi linii energii, ciśnień bezwzględnych i piezometrycznych (wykres Ancony) wzdłuż szeregowego systemu hydraulicznego według rys. 7.29

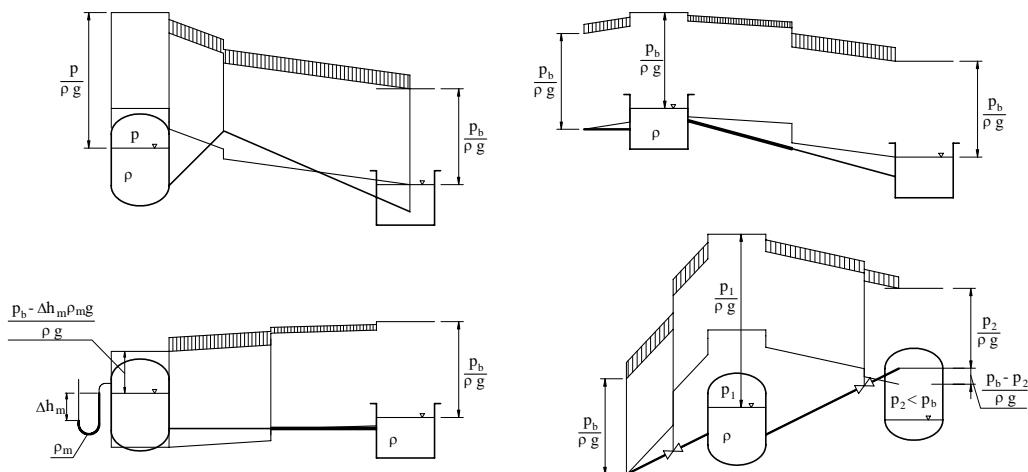
¹⁾ Dla cieczy doskonałej jest ona stała.

Znając zatem wartość energii w pewnym przekroju strugi, możemy znaleźć tę wartość w dowolnym jej przekroju, jeśli potrafimy obliczyć straty energetyczne między tymi przekrojami. Pozwoli to uzyskać linię energii, która nie może nigdzie wzrosnąć w kierunku przepływu płynu. Przeciwnie, podczas przepływu płynów lepkich linia energii zawsze opada w kierunku przepływu.

Wysokość ciśnienia (absolutnego) w dowolnym przekroju strugi otrzymujemy, odejmując – od wysokości energii – wysokość prędkości. Znając wysokość ciśnienia w każdym przekroju strugi, możemy wykreślić linię ciśnień i linię ciśnień piezometrycznych, która przebiega równolegle do linii ciśnień, ale niżej od niej o wysokość ciśnienia barometrycznego $p_b/\rho g$.

Linie ciśnień i ciśnień piezometrycznych kształtują się w zależności od wymiarów geometrycznych przewodu i strumienia objętości, ale nie muszą opadać w kierunku ruchu.

Na rysunku 7.33 przedstawiono wykres Ancony ilustrujący przebieg wysokości energii i ciśnień między zbiornikami rozważanymi w poprzednich punktach. Łatwo spostrzec, że linie energii i ciśnień nie mogą przecinać rurociągu¹⁾, a dla zapobieżenia odparowaniu cieczy ciśnienie w rurze musi przekraczać ciśnienie parowania p_w . Wynika stąd, że linia ciśnień piezometrycznych nie może przebiegać pod rurociągiem niżej niż $(p_b - p_w)/\rho g$. Przykłady wykresów Ancony naszkicowano na rysunku 7.34.



Rys. 7.34. Przykłady wykresów Ancony dla układów jak na rys. 7.30

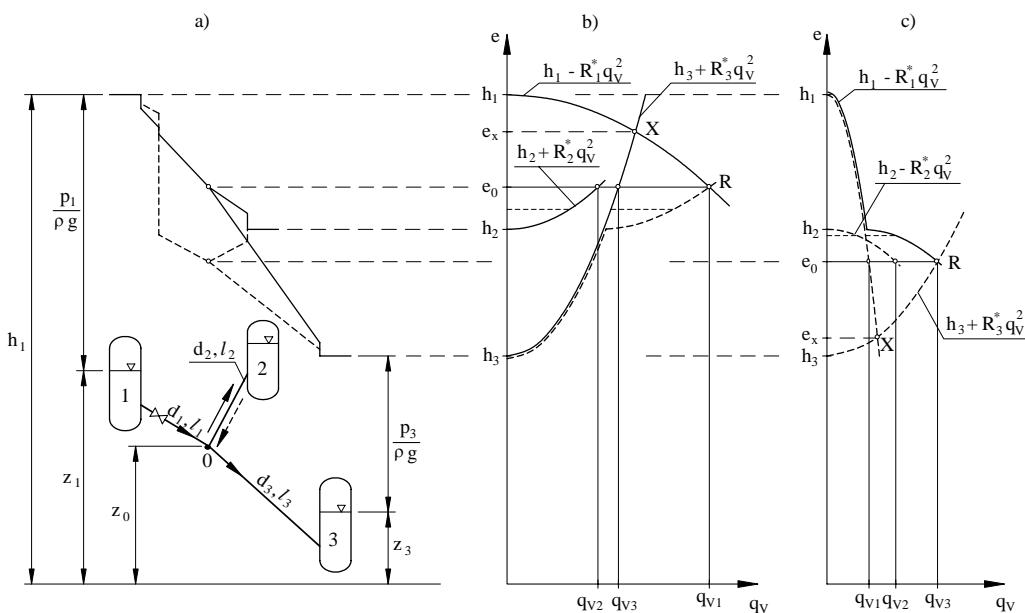
¹⁾ Ciśnienie jest nieujemne.

7.4.4. PRZEPŁYW PŁYNU NIEŚCIŚLIWEGO W SYSTEMACH Z WĘZŁAMI

Zajmiemy się teraz przepływem ustalonym lepkich płynów nieściśliwych przez systemy hydrauliczne złożone z przewodów (systemów szeregowych) zawierających węzły. Rozpatrzmy układ złożony z trzech zbiorników połączonych trzema przewodami w ten sposób, że zbiegają się one w węźle (zagadnienie trzech zbiorników) oraz układ $n \geq 2$ przewodów wychodzących ze wspólnego węzła i zbiegających się w innym węźle (równolegle połączenia przewodów).

Zagadnienie trzech zbiorników

Rozpatrzmy układ hydrauliczny przedstawiony na rysunku 7.35a, przy czym łatwo zauważać, że przedstawiony schemat obejmuje zbiorniki zamknięte i otwarte, gdyż wtedy przyjmiemy $p_i = p_b$ ($i \in \{1, 2, 3\}$).



Rys. 7.35. Zagadnienie trzech zbiorników: a) schemat układu i przebiegi linii energii (dla uproszczenia rysunku strat w węzle nie zaznaczono), b), c) ilustracje rozwiązań zagadnienia

Założymy, że wysokości rozporządzalne na poziomie zwierciadeł cieczy są różne¹⁾, tak że zachodzi

¹⁾ Może zachodzić jeszcze tylko równość energii rozporządzalnych w dwóch z trzech rozważanych zbiorników. Rozwiązanie takiego układu hydraulicznego możemy łatwo znaleźć, znając sposób rozwiązania (7.85).

$$p_1/\rho g + z_1 = h_1 > p_2/\rho g + z_2 = h_2 > p_3/\rho g + z_3 = h_3, \quad (7.85)$$

czym nie ograniczamy ogólności rozważań, gdyż zawsze można odpowiednio ponumerować zbiorniki tak, aby zachodziła relacja (7.85).

Założymy ponadto, że poziomy cieczy i ciśnienia w zbiornikach nie ulegają zmianie.

Z zależności (7.85) wynika, że ciecz wypływa ze zbiornika 1., ponieważ wysokość rozporządzalna jest w nim największa i dopływa do zbiornika 3., który ma najmniejszą wysokość rozporządzalną. Na odcinku 1–0 występują straty energetyczne i ciśnienie w węźle może być takie, że ciecz wypływa ze zbiornika 2., dopływa do niego lub też w przewodzie l_2 nie ma przepływu i wówczas zbiornik 2. zachowuje się jak manometr hydrostatyczny.

Przyjmijmy najpierw, że ciecz dopływa do zbiorników 2. i 3. Ułóżmy zatem równanie Bernoulliego dla przekroju leżącego na poziomie zwierciadła w zbiorniku 1. i przekroju położonego tuż przed węzłem, a następnie dla tego przekroju i przekrojów wlotowych w zbiornikach 2. i 3. Otrzymamy kolejno:

$$\begin{aligned} z_1 + \frac{p_1}{\rho g} &= z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \zeta_1 \right) \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow \\ z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} &= z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \zeta_1 \right) \frac{v_1^2}{2g} \\ z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} &= z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \zeta_2 + \alpha_2 \right) \frac{v_2^2}{2g}, \\ z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} &= z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \left(\lambda_3 \frac{l_3}{d_3} + \zeta_3 + \alpha_3 \right) \frac{v_3^2}{2g}, \end{aligned} \quad (7.86)$$

gdzie ζ_i ($i = 1, 2, 3$) – sumaryczny współczynnik oporów miejscowych na poszczególnych przewodach.

Po zastosowaniu wzoru

$$q_{Vi} = \pi \frac{d_i^2}{4} v_i \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.87)$$

wprowadzeniu oporności hydraulicznej

$$R_1^* = \frac{8}{g\pi^2} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5} + \zeta_1 \frac{1}{d_1^4} \right), \quad R_i^* = \frac{8}{g\pi^2} \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i^5} + (\zeta_i + \alpha_i) \frac{1}{d_i^4} \right), \quad i = 2, 3^{1)}, \quad (7.88)$$

¹⁾ W ogólności przewodami o oporności R_j^* ($j = 1, 2, 3$) mogą być szeregowo układy (systemy) hydrauliczne.

i oznaczeniu

$$e_0 = z_0 + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{8\alpha_1}{\pi^2 d_1^4 g} q_{V1}^2, \quad (7.89)$$

napiszemy następujący układ równań

$$e_0 = z_1 + \frac{P_1}{\rho g} - R_1^* q_{V1}^2,$$

$$e_0 = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + R_2^* q_{V2}^2, \quad (7.90)$$

$$e_0 = z_3 + \frac{P_3}{\rho g} + R_3^* q_{V3}^2.$$

Równania (7.90) uzupełnimy bilansem strumieni objętości w węźle 0, który w rozważanym przypadku dopływu do zbiorników 2. i 3. jest następujący

$$q_{V1} = q_{V2} + q_{V3}. \quad (7.91)$$

Jeśli celem obliczeń jest wyznaczenie strumieni objętości q_{Vi} ($i = 1, 2, 3$), to trzeba rozwiązać układ czterech równań (7.90) i (7.91), posługując się np. metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym przybliżeniu zakłada się wartości współczynników strat liniowych i miejscowych, przy czym współczynniki strat miejscowych na odgałęzieniach zależą od stosunków przepływów w przewodzie głównym i odgałęzieniach, a tego nie znamy. Ponieważ straty energetyczne podczas podziału strugi są zazwyczaj małe w porównaniu z pozostałymi stratami, można je w pierwszym przybliżeniu, a nawet w ogóle, pominąć. Nie zawsze jest to jednak do przyjęcia, gdyż zdarza się (np. w układach wentylacyjnych), że straty miejscowe stanowią istotny procent strat energetycznych.

Na rysunku 7.35a przedstawiono przebiegi linii energii. Linia ciągła odnosi się do przypadku, gdy do węzła dopływa ciecz tylko przewodem l_1 , linia przerywana dotyczy przypadku, gdy do węzła dopływa ciecz przewodami l_1 i l_2 .

Zastosujemy wykreslno-rachunkowy sposób rozwiązywania problemu, który ułatwia ponadto zrozumienie wzajemnych powiązań między charakterystykami przewodów, ciśnieniami i wysokościami położen zwierciadeł cieczy a strumieniami objętości w przewodach. Zauważmy, że wzory (7.90) określają wartości e_0 trzech funkcji strumienia objętości q_V , odpowiednio dla $q_V = q_{V1}$, $q_V = q_{V2}$ i $q_V = q_{V3}$, przy czym q_{V1} , q_{V2} , q_{V3} spełniają warunek (7.91). Wobec tego dla dowolnego q_V (różnego od q_{V1} , q_{V2} , q_{V3}) funkcje te będą miały wartość e różną od e_0 , przy czym dla uproszczenia powiemy, że e_0 określa wartość energii w węźle, mimo iż w rzeczywistości jest to energia tuż przed węzłem. Można zatem wykreślić każdą z krzywych obrazujących przebieg e w zależ-

ności od q_V i znaleźć rozwiązańe problemu wiedząc, że q_{V1} , q_{V2} , q_{V3} muszą spełnić (7.90) i (7.91). Napiszemy zatem następujące równania:

$$\begin{aligned} e &= z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - R_1^* q_V^2 = h_1 - R_1^* q_V^2, \\ e &= z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + R_2^* q_V^2 = h_2 + R_2^* q_V^2, \\ e &= z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + R_3^* q_V^2 = h_3 + R_3^* q_V^2, \end{aligned} \quad (7.92)$$

których obrazem są odpowiednie krzywe pokazane na rysunku 7.35b.

Jeśli teraz energia e osiągnie wartość e_0 , to strumień wypływu ze zbiornika 1. wyniesie q_{V1} , przy czym musi zachodzić warunek (7.91)¹⁾. Oznacza to, że punkt o współrzędnych (q_{V1} , e_0) leży na krzywej $e = h_1 - R_1^* q_V^2$. Z drugiej strony punkt ten leży na krzywej, która czyni zadość warunkowi $q_{V1} = q_{V2} + q_{V3}$. Krzywą tę otrzymujemy po zsumowaniu krzywych $e = h_3 + R_3^* q_V^2$ i $e = h_2 + R_2^* q_V^2$ w ten sposób, że biorąc dowolną wartość e dodajemy odpowiadający jej strumień objętości q_{V2} w rurze l_2 i q_{V3} w rurze l_3 (operację tę zaznaczono na rys. 7.35b, posługując się cienką linią kreskowaną). Dodawanie to, wykonane dla odpowiedniej liczby punktów, pozwoli uzyskać krzywą, którą oznaczono grubszą linią przerywaną, a która dla $e \leq h_2$ pokrywa się z krzywą $e = h_3 + R_3^* q_V^2$. Punkt R przecięcia się tej krzywej z krzywą $e = h_1 - R_1^* q_V^2$ ma współrzędne (q_{V1} , e_0), skąd łatwo znaleźć punkty (q_{V2} , e_0), (q_{V3} , e_0). Jak widać z rysunku 7.35b, jeśli $h_2 > e_x$, to krzywa otrzymana w wyniku opisanego sumowania nigdy nie przetnie się z krzywą $e = h_1 - R_1^* q_V^2$. Oznacza to, że warunkiem tego, aby zbiornik 1. zasilał zbiorniki 2. i 3. jest

$$h_2 = z_2 + p_2/\rho g < e_x. \quad (7.93)$$

Współrzędne (q_{Vx} , e_x) zaś punktu X przecięcia się krzywych $h_1 - R_1^* q_V^2$ oraz $h_3 + R_3^* q_V^2$ wyznaczamy, porównując pierwsze i trzecie równanie układu (7.92). Otrzymamy wówczas

$$q_{Vx} = \sqrt{\frac{(z_1 - z_3) + (p_1 - p_3)/\rho g}{R_1^* + R_3^*}}, \quad (7.94)$$

¹⁾ Przyjmiemy tymczasem, że parametry systemu zapewniają przyjęty rozdział strumienia objętości dany wzorem (7.91). Dla uproszczenia straty w węzłach pominięto.

(co jest zgodne z wzorami uzyskanymi w p. 7.4.2, gdyż $R_1^* + R_2^* \equiv R^*$ i oznacza oporność odcinka 1–0–3, ponieważ $q_{V1} = q_{V3} = q_{Vx}$, zaś $q_{V2} = 0$). Następnie

$$e_x = \frac{R_1^*(z_3 + p_3/\rho g) + R_3^*(z_1 + p_1/\rho g)}{R_1^* + R_3^*}. \quad (7.95)$$

Jeśli natomiast

$$h_2 = z_2 + p_2/\rho g = e_x, \quad (7.96)$$

to zbiornik 2. spełnia rolę naczynia wzbiorczego i przepływ przewodem l_2 nie zachodzi, a gdy

$$h_2 = z_2 + p_2/\rho g > e_x, \quad (7.97)$$

to zbiorniki 1. i 2. zasilają zbiornik 3.

Przypadek (7.97) pokazano na rysunku 7.35a linią przerywaną, a rozwiązanie zilustrowano na rysunku 7.35c.

Ponieważ ze zbiorników 1. i 2. ciecz wypływa, wartość energii w węźle jest mniejsza od wartości rozporządzalnej w zbiornikach (na skutek strat na drodze zbiornik–wężeł), a krzywe są wypukłe do góry. Do zbiornika 3. ciecz dopływa, zatem energia w węźle musi być większa niż wartość rozporządzalna w zbiorniku 3., dlatego odpowiednia krzywa jest wypukła do dołu. Układ równań (7.92) będzie teraz następujący:

$$\begin{aligned} e &= z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - R_1^* q_V^2 = h_1 - R_1^* q_V^2, \\ e &= z_2 + \frac{p_2}{\rho g} - R_2^* q_V^2 = h_2 - R_2^* q_V^2, \\ e &= z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + R_3^* q_V^2 = h_3 + R_3^* q_V^2. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Bilans strumieni objętości wyrazimy wzorem

$$q_{V1} + q_{V2} = q_{V3} \Leftrightarrow q_{V1} = q_{V3} - q_{V2}, \quad (7.99)$$

układy natomiast (7.91) i (7.92), (7.98) i (7.99) zastąpimy następującymi:

$$\begin{aligned} e &= z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - R_1^* q_V^2, \\ e &= z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \pm R_2^* q_V^2, \\ e &= z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + R_3^* q_V^2, \end{aligned} \quad (7.100)$$

oraz

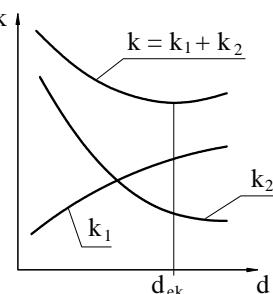
$$q_{V1} = q_{V3} \pm q_{V2}, \quad (7.101)$$

przy czym znakowi plus przy $R_2^*q_V^2$ odpowiada również znak plus przy q_{V2} . We wzorach (7.100) i (7.101) wstawiamy znak plus, gdy zachodzi zależność (7.93), minus zaś, gdy spełnione jest równanie (7.97). Jeśli przystępuje się do rozwiązywania zagadnienia trzech zbiorników, najlepiej przyjąć następujący tok postępowania:

- wykreślić krzywą $e = z_l + \frac{p_1}{\rho g} - R_l^* q_V^2$ (charakterystyka przewodu 1.),
- wykreślić krzywą $e = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + R_3^* q_V^2$ (charakterystyka przewodu 3.),
- wyznaczyć rzędną punktu X przecięcia się tych krzywych i określić, która relacja jest prawdziwa: $z_2 + p_2/\rho g < e_x$, $z_2 + p_2/\rho g = e_x$ lub $z_2 + p_2/\rho g > e_x$,
- wykreślić krzywą $e = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + R_2^* q_V^2$ lub $e = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} - R_2^* q_V^2$ (charakterystyka przewodu 2.) w zależności od tego, czy ciecz do zbiornika 2. dopływa lub z niego wypływa,
- wykreślić charakterystykę zastępczą przewodów 2. i 3. lub 1. i 3. przez odpowiednie dodawanie (równoległe) charakterystyk i znaleźć rozwiązanie jak na rysunkach 7.35.

Jeśli przedmiotem zadania jest znalezienie parametrów hydrodynamicznych rozpatrywanego układu hydraulycznego, a więc ciśnień p_i i wysokości położenia z_i ($i = 1, 2, 3$) zwierciadeł (lub niektórych z nich), to postępowanie musi być wtedy inne. Mianowicie, znając strumienie objętości q_{Vi} ($i = 1, 2, 3$), które musi zapewnić układ, dobrzymy sieć rurociągów, wychodząc z różnych kryteriów (np. ekonomicznego, technologicznego). Możliwe jest wówczas znalezienie charakterystyk $R_i^* q_V^2$ ($i = 1, 2, 3$), a następnie ustalenie poszukiwanych parametrów w wyniku skonstruowania wykresów przedstawionych na rysunkach 7.35 i poprowadzenia charakterystyk przez punkty o znanych odciętych q_{Vi} ($i = 1, 2, 3$) oraz ustalenia odpowiednio początku osi współrzędnych. Dzięki temu można już określić brakujące parametry układu.

Średnicę przewodu najodpowiedniejszą ze względów ekonomicznych – dla danego strumienia objętości – możemy dobrać, wyznaczając roczne koszty (k) budowy systemu hydraulycznego i jego eksploatacji w zależności od średnicy d ¹⁾ rurociągu, a następnie biorąc minimum tych kosztów po d . Koszty roczne k_1 budowy są większe dla większej średnicy, roczne zaś koszty eksploatacji k_2 są większe dla mniejszej średnicy (rys. 7.36, na którym $\min k(d) = k(d_{ek})$, a d_{ek} – średnica ekonomiczna).



Rys. 7.36. Zależność kosztów budowy i eksploatacji systemu hydraulycznego od średnicy rury

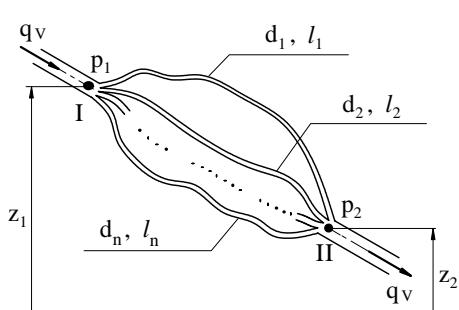
¹⁾ Może to być również średnica zastępcza, tj. taka, której oporność jest taka sama jak oporność szeregowego układu hydraulycznego (wzór (7.78)) o długości $l = l_1 + l_2 + \dots + l_n$.

Równoległe połączenie przewodów

Omówimy teraz system hydrauliczny otrzymany przez równoległe połączenie n przewodów o średnicach d_k i długościach l_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Przewody te wychodzą ze wspólnego węzła i zbiegają się w innym wspólnym węźle (rys. 7.37). Ukladając równanie Bernoulliego dla przekrojów I i II – napisane dla i -tego odgałęzienia i po wykorzystaniu wzoru $q_{Vi} = v_i \pi d_i^2 / 4$, otrzymamy

$$(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) \frac{1}{\rho g} = \frac{8}{g \pi^2} \left(\frac{\alpha_{II}}{d_{II}^4} - \frac{\alpha_I}{d_I^4} \right) q_V^2 + \frac{8}{g d_i^4 \pi^2} \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) q_{Vi}^2, \quad (7.102)$$

$i = 1, \dots, n$,



gdzie indeksy I i II odnoszą się do wielkości w przekrojach I i II.

Rys. 7.37. Schemat równoległego połączenia przewodów

Bilans strumieni objętości w węźle (prawo węzłów) będzie postaci

$$q_V = \sum_{i=1}^n q_{Vi}. \quad (7.103)$$

Zwykle wyraz $8(\alpha_{II}/d_{II}^4 - \alpha_I/d_I^4)/g\pi^2 q_V^2$ jest mały w stosunku do $(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2)/\rho g$ i można go pominąć, wówczas oporność i -tego przewodu

$$R_i^* = \frac{8}{g d_i^4 \pi^2} \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right), \quad (7.104)$$

wzór (7.102) zapiszemy zaś jako

$$(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) \frac{1}{\rho g} \equiv h = R_i^* q_{Vi}^2. \quad (7.105)$$

Jeśli różnice wysokości prędkości w węzłach (ściśle tuż przed węzłem I i za węzłem II) nie można pominąć, to równanie (7.102) również sprowadzimy do postaci (7.105), przyjmując

$$q_{Vi} = \varepsilon_i q_V, \quad (7.106)$$

gdzie ε_i jest względnym udziałem strumienia objętości q_{Vi} w stosunku do strumienia przepływu przez cały układ (system),

wobec tego otrzymamy

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) \frac{1}{\rho g} &\equiv h \\ = \frac{8}{g\pi^2} \left(\frac{\alpha_{II}}{d_{II}^4} - \frac{\alpha_I}{d_I^4} \right) \frac{1}{\varepsilon_i^2} q_{V_i}^2 + \frac{8}{g d_i^4 \pi^2} \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) q_{V_i}^2 &= R_i^* q_{V_i}^2, \end{aligned} \quad (7.107)$$

gdzie oporność R_i^* wynika z wzoru (7.88).

Strumienie objętości (dla danych z_j, p_j ($j = 1, 2$)) można wobec tego analitycznie obliczyć za pomocą metody kolejnych przybliżeń, której początkiem jest założenie we wzorze (7.105) λ_i, ζ_i (lub $\lambda_i, \zeta_i, \varepsilon_i$ w (7.106)), zależących, jak wiadomo, od $\text{Re}_i = 4 q_{Vi} / (\pi d_i v)$.

Rozwiążanie omawianego problemu zilustrowano na rysunku 7.38. Przedstawiono na nim równolegle połączenie dwóch przewodów o opornościach R_1^* oraz R_2^* ($h = (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2)/\rho g$). Sposób konstrukcji wynika ze wzorów (7.105) (lub (7.107)¹⁾) oraz (7.103) i na rysunku 7.38 pokazano ją dla dowolnej wartości h . W wyniku działania, które nazwiemy dodawaniem równoległym, otrzymaliśmy charakterystkę zastępczą $(R_1^* + R_2^*)q_V^2$, przedstawiającą zależność $(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2)/\rho g$ od strumienia objętości q_V , wchodzącego do węzła I. $R_1^* + R_2^*$ jest opornością zastępczą, którą uzyskamy w wyniku równoległego dodawania oporności ($\cdot + \cdot$ – symbolizuje działanie zwane równoległym dodawaniem) (rys. 7.38). Dysponując krzywymi $R_1^* q_V^2$, $R_2^* q_V^2$ oraz $(R_1^* + R_2^*)q_V^2$, łatwo znaleźć q_V, q_{V1}, q_{V2} lub dla danego q_V wyznaczyć $(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2)/\rho g$. Mając R_1^* i R_2^* , możemy wyznaczyć $R_1^* + R_2^*$ rachunkowo, opierając się na wzorach (7.107) i (7.103). Mamy mianowicie

$$h = R_1^* q_{V1}^2 = R_2^* q_{V2}^2, \quad (7.108)$$

$$q_V = q_{V1} + q_{V2}, \quad (7.109)$$

a po oznaczeniu

$$\varepsilon = q_{V1}/q_V, \quad (7.110)$$

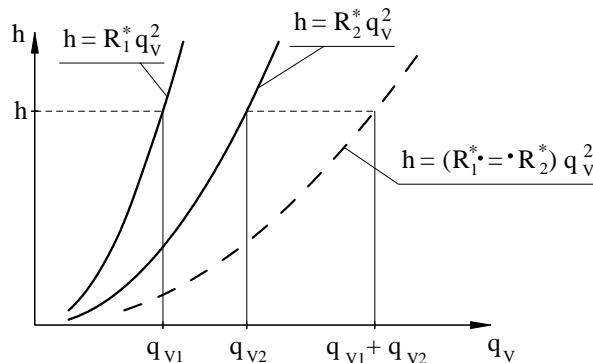
będziemy mieć

$$h = R_1^* \varepsilon^2 q_V^2 = R_2^* (1 - \varepsilon)^2 q_V^2, \quad (7.111)$$

skąd

$$R_1^* \varepsilon^2 = R_2^* (1 - \varepsilon)^2. \quad (7.112)$$

¹⁾ Nie znamy z góry ε_i , dlatego charakterystkę wg wzoru (7.105) można wykreślić dla założonych wartości ε_i i traktować uzyskane wykresy jako pierwsze przybliżenie. Następne wykresy wykonamy dla tak obliczonych wartości, powtarzając proces aż do uzyskania dostatecznej dokładności.



Rys. 7.38. Charakterystyka dwóch przewodów połączonych równolegle

Po obustronnym wyciągnięciu pierwiastka łatwo już obliczyć ε , które po wstawieniu z powrotem do (7.111) daje

$$h = \frac{R_1^* R_2^*}{\left(\sqrt{R_1^*} + \sqrt{R_2^*}\right)^2} q_v^2 = R^* q_v^2, \quad (7.113)$$

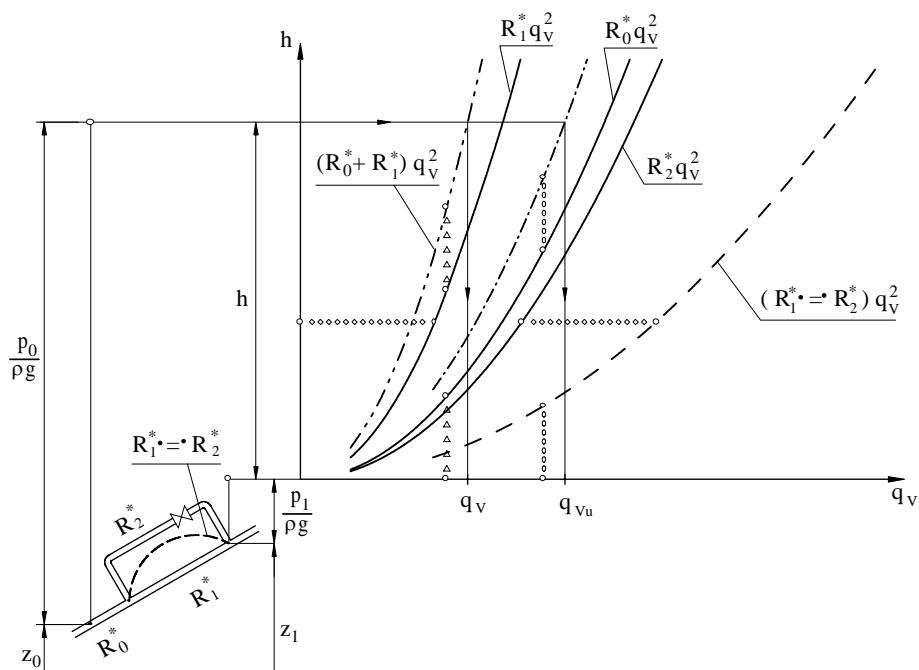
gdzie oporność R^* , nazwaną *opornością zastępczą*, można uważać za wynik działania, zwanego równoległym dodawaniem oporności ($\cdot = \cdot$) wykonanego na R_1^* i R_2^* .

$$R^* \equiv R_1^* \cdot = R_2^* = \frac{R_1^* R_2^*}{\left(\sqrt{R_1^*} + \sqrt{R_2^*}\right)^2} \Rightarrow h = (R_1^* \cdot = R_2^*) q_v^2. \quad (7.114)$$

Łatwo sprawdzić, że działanie to jest łączne (również przemienne) i można je zastosować do systemu równoległego złożonego z n przewodów, a pokazanego na rysunku 7.37.

Wyprowadzone wzory możemy zastosować do zaprojektowania systemu o z góry założonym rozdzielalnym strumieniu objętości w węzłach, dobierając odpowiednio oporności poszczególnych przewodów. Oporności te muszą być często sztucznie zwiększone w wyniku wprowadzania specjalnych elementów regulacyjnych o zmiennej (zawory) lub stałej oporności (kryzy dławiące, stosowane np. w instalacjach centralnego ogrzewania), gdyż nie zawsze istnieją potrzebne średnice rur. Nie trudno spostrzec, że układ (system) szeregowo-równoległy, którego przykład pokazano na rysunku 7.39, daje się sprowadzić do systemu szeregowego po wprowadzeniu oporności zastępczej według (7.114) lub rysunku 7.38. Warto podkreślić, że wprowadzenie do systemu szeregowego przewodu dodatkowego, jako odgałęzienia równoległego (gałąź R_2^* na rys. 7.39), spowoduje, że strumień objętości dla ustalonego $h = (z_0 - z_1) + (p_0 - p_1)/\rho g$, zwiększy się z q_v do q_{vu} . Część płynu przepływa

bowiem przewodem dodatkowym, w związku z czym prędkość w przewodzie o oporności R_l^* będzie mniejsza, straty energetyczne również mniejsze, a zatem strumień objętości zwiększy się, gdyż charakterystyka wypadkowa będzie bardziej płaska. Dołączenie przewodu dodatkowego do już istniejącego jest stosowane w technice, gdy chcemy uzyskać większy przepływ bez zwiększenia różnicy wysokości rozporządzalnych w zbiornikach $h = (z_0 - z_1) + (p_0 - p_1)/\rho g$, a wybudowanie takiego rurociągu jest bardziej opłacalne w porównaniu ze zwiększeniem h (wiąże się to z dodatkowymi nakładami energetycznymi).



Rys. 7.39. Szeregowo-równoległe połączenie przewodów

7.5. NIEUSTALONY PRZEPŁYW PŁYNÓW W PRZEWODACH

Obliczenia hydromechaniczne nieustalonego przepływu plynów w przewodach są bez porównania bardziej skomplikowane od takich obliczeń dla przepływów ustalonych. Mimo znacznych uproszczeń równań Naviera–Stokesa i ciągłości ruchu nie można osiągnąć równie prostych związków, jak równanie Bernoulliego dla płynów lepkich, stosowane w poprzednich podrozdziałach. W badaniu przepływów nieustalonych w przewodach

zakłada się jednowymiarowość ruchu¹⁾, a w przypadku gazów pomija się składnik reprezentujący siły ciężkości, jako nieistotny ze względu na małą gęstość gazów. Nie uwzględnia się ponadto sił bezwładności reprezentowanych przez pochodną cząstkową $\partial v/\partial t$, również z wymienionych przyczyn.

Następne uproszczenia wprowadza się w zależności od charakteru zjawiska i rodzaju układu (systemu) hydraulycznego. W odniesieniu zatem do systemów o niewielkich wymiarach i niedużej prędkości zmian parametrów hydrodynamicznych przyjmuje się model cieczy nieściśliwej, której ruch określa całka Cauchy'ego–Lagrange'a (p. 5.2.1) uzupełniona o człon reprezentujący straty energetyczne. Do układów większych lub o dużej szybkości zmian parametrów hydrodynamicznych model ten nie może być używany, gdyż propagacja fal ciśnienia odbywa się z określona prędkością, a zatem czas jej przebiegu może nie być dostatecznie mały w porównaniu z okresem zmian. Należy zatem uwzględnić ściśliwość cieczy, gdyż fale rozchodzą się tylko w ośrodku sprężystym, ale wtedy model zjawiska znacznie się skomplikuje. Często jest dopuszczalne pominięcie strat energetycznych przy uwzględnieniu tylko sprężystości cieczy, jak w badaniach zjawiska uderzenia hydraulycznego.

Dalej zajmiemy się krótko ruchem *nieustalonem cieczy nieściśliwej*, a następnie omówimy zjawisko *sprężystego* (tzn. z uwzględnieniem ściśliwości) *uderzenia hydraulycznego cieczy nielepkiej*.

7.5.1. NIEUSTALONY PRZEPŁYW LEPKIEJ CIECZY NIEŚCIŚLIWEJ

Równanie jednowymiarowego ruchu nieustalonego cieczy doskonalej (5.16') można napisać w postaci

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + \frac{1}{g} \int_s \frac{\partial v}{\partial t} ds = \text{const} , \quad (7.115)$$

gdzie s jest współrzędną biegnącą wzdłuż linii prądu.

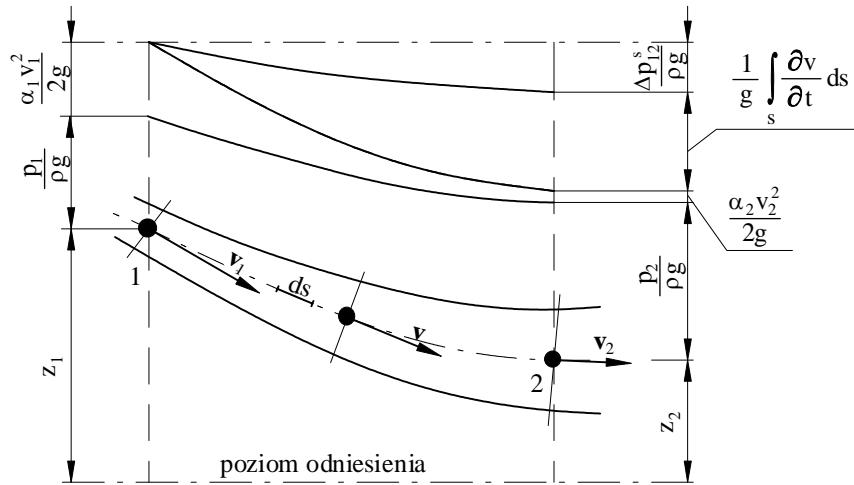
Jeśli pod uwagę weźmiemy strugę cieczy lepkiej, ale nieściśliwej, pokazaną na rysunku 7.40, to dla przekrojów 1. i 2. napiszemy równanie

$$\alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{1}{g} \int_s \frac{\partial v}{\partial t} ds + \Delta h_{12}^s , \quad (7.116)$$

które różni się od równania dla ruchu ustalonego (7.18) tylko składnikiem wyrażającym zmienność prędkości w czasie, a przedstawiającym ciśnienie bezwładności o wysokości

$$h_{12}^i = \frac{1}{g} \int_s \frac{\partial v}{\partial t} ds . \quad (7.117)$$

¹⁾ Straty energetyczne są najczęściej liczone jak dla przepływu ustalonego (wzór Darcy'ego–Weisbacha (7.21)).



Rys. 7.40. Przebiegi linii energii i ciśnień w nieustalonym przepływie strugi cieczy lepkiej

Równanie (7.116) uzupełnimy jeszcze równaniem ciągłości

$$Av = A_1v_1 = A_2v_2,$$

gdzie A_i , A – pola powierzchni przekroju poprzecznego strugi.

Dalej przyjmiemy, że:

1. A zależy tylko od miejsca i nie zmienia się w czasie.
2. Wysokość Δh_{12}^s strat energetycznych wyraża się za pomocą takich samych zależności jak w przepływie ustalonym.

Na podstawie tych założeń i po wprowadzeniu pojęcia oporności hydraulicznej R^* , analogicznie do wzoru (7.78), po uporządkowaniu, możemy równanie (7.116) zapisać w postaci

$$(z_1 - z_2) + \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right) = R^* q_V^2 \operatorname{sgn} q_V + I^* \frac{dq_V}{dt}, \quad (7.118)$$

gdzie:

$I^* = \frac{1}{g} \int_s \frac{ds}{A}$ – stała charakterystyczna przewodu, którą będziemy nazywać *bezwładnością strugi*,

$\operatorname{sgn} q_V \equiv \text{znak } q_V$.

Pojawienie się wielkości $R^* q_V^2 \operatorname{sgn} q_V \equiv R^* q_V |q_V|$ wynika stąd, że kierunek przepływu może zmieniać się w czasie, dlatego – w przyjętym układzie współrzędnych – będziemy przypisywać strumieniowi objętości znak plus dla przepływu zgodnego

z dodatnim kierunkiem osi s , minus – dla kierunku odwrotnego. Wyraz określający straty będzie się zatem pojawiał po prawej lub lewej stronie równania (7.116), (co odpowiada wartości sgn $q_V = 1$ lub sgn $q_V = -1$ w równaniu (7.118)).

Bezwładność hydrauliczna przewodu o długości l i średnicy d wyniesie

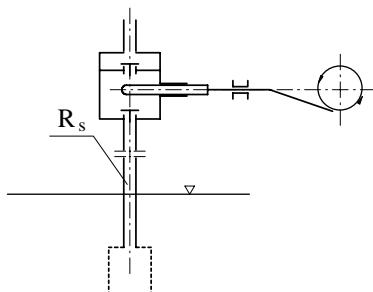
$$I^* = \frac{1}{g} \int_l \frac{dl}{A} = \frac{1}{g} \frac{4}{\pi d^2} \int_l dl = \frac{4l}{gd^2\pi}, \quad (7.119)$$

dla n szeregowo połączonych przewodów (rys. 7.29) natomiast

$$I^* = \frac{4}{g\pi} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{d_i^2}. \quad (7.120)$$

Znalezienie q_V z równania (7.118), nawet przy założeniu $R^* = \text{idem}$ (przy danym przebiegu $(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2)/\rho g = h(t)$, t – czas) nie jest łatwe ze względu na nieliniowość tego równania. Można uzyskać rozwiązanie przybliżone lub numeryczne.

Matematyczny model przebiegu zjawiska nieustalonego ruchu cieczy określony równaniem (7.118) może być z powodzeniem zastosowany do opisu ruchu cieczy w układach pokazanych na rysunkach 7.41 i 7.42. Na rysunku 7.41 przedstawiono schemat pompy nurnikowej zasysającej rurociągiem ssawnym R_s ciecz ze zbiornika.



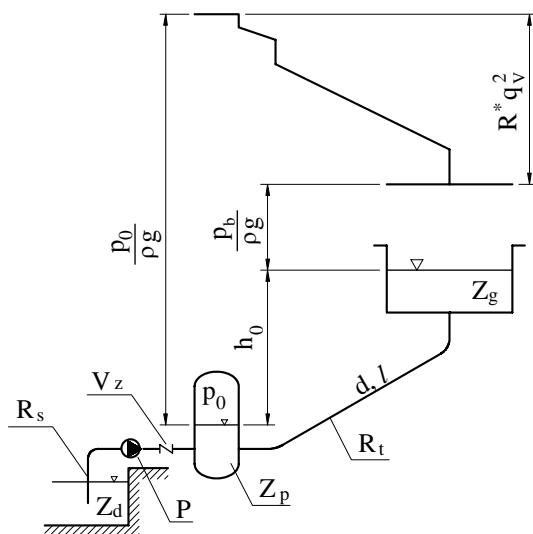
Ponieważ ruch nurnika jest harmoniczny (prawie), ciecz w tym rurociągu będzie poruszała się ruchem nieustalonym ze strumieniem objętości proporcjonalnym do prędkości nurnika, ale tylko w czasie jego wysuwania się z komory ssawnej (zmiana kierunku ruchu na przeciwny powoduje zamknięcie się zaworu ssawnego).

Rys. 7.41. Pompa nurnikowa

Na rysunku 7.42 pokazano układ pompowy, w którym pompa odśrodkowa P zasysa ciecz ze zbiornika dolnego Z_d za pośrednictwem rury ssawnej R_s i tłoczy ją przez rurociąg tłoczny R_t do zbiornika górnego Z_g . Na rurze tłocznej, za zaworem zwrotnym V_z , znajduje się zbiornik Z_p , zwany *powietrzniakiem*, gdyż jest on zawsze częściowo wypełniony powietrzem (rzadziej innym gazem). W warunkach normalnej pracy pompy ciśnienie w powietrzniaku wynosi $p_0 = p_b + (h_0 + R^* q_{V0}^2) \rho g$ (R^* – oporność hydrauliczna rury R_t , q_{V0} – strumień objętości, h_0 – zob. rys. 7.42), co wynika natychmiast z przebiegu linii energii wzdłuż R_t . Po raptownym zatrzymaniu pompy ciecz w przewodzie tłoczny porusza się na skutek rozprężania się powietrza w powietrzniaku i bezwładności masy ciekłej dopóty, dopóki energia ciśnienia i energia kinetyczna cieczy nie zużyje się na pracę podnoszenia i pokonanie oporów hydraulicznych w rurze R_t . Ponieważ na skutek zatrzymania się pompy zostaje zamknięty zawór

zrotny V_z , płynąca ciecz jest pobierana z powietrznika, wobec czego ciśnienie powietrza zmniejsza się, aby w chwili zatrzymania się słupa cieczy w rurze R_t osiągnąć wartość $p_{\min} < p_0$. Następnie ciecz zaczyna płynąć w kierunku powietrznika, powodując zmniejszanie się objętości wypełnionej powietrzem, czyli wzrost ciśnienia, które po pewnym czasie jest tak duże, że ruch cieczy zostanie zahamowany (ciśnienie ma wtedy wartość $p_{\max} > p_0$). Ruch cieczy powtarza się cyklicznie, aż do całkowitego wyłumienia drgań w rurociągu tlocznym. Przepływ taki można dośćcznie dobrze opisać równaniem postaci (7.118)¹⁾, ponieważ – dzięki spójstwu działania poduszki powietrznej – nie zachodzą gwałtowne zmiany ciśnienia, a tym samym uwzględnianie ściśliwości cieczy jest niepotrzebne.

Rys. 7.42. Układ pompowy z powietrznikiem

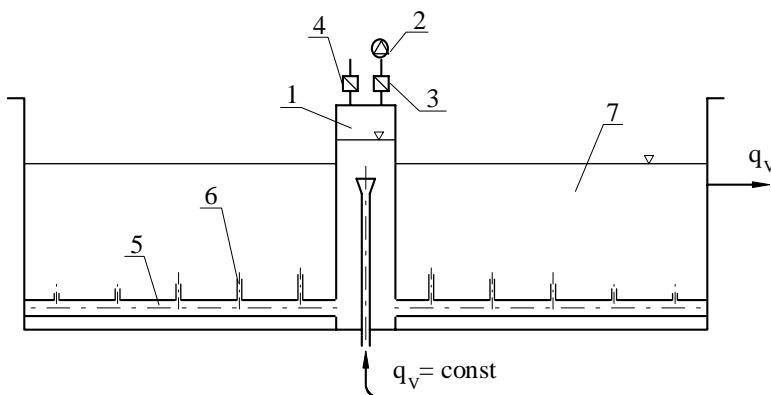


Obliczenie hydrauliczne przepływów nieustalonych cieczy nieściśliwej przez układy hydrauliczne z węzłami jest jeszcze trudniejsze. Pewne przypadki szczególnie systemów rozgałęzionych dają się jednak sprowadzić do równania postaci (7.118). Są to systemy szeregowo-równoległe o niezmiennym w czasie rozdziałie cieczy w węzłach. Przykład takiego systemu przedstawiono na rysunku 7.43. Jest to podstawowy element dużej stacji uzdatniania wody. Woda surowa ma być równomiernie rozprowadzona do zbiornika 7 za pośrednictwem rusztu 5. Nieustalony przepływ tej cieczy jest generowany za pomocą pompy próżniowej 2, która obniża ciśnienie w komorze 1 oraz cyklicznie otwieranych i zamkniętych zaworów motylkowych 3 i 4. Powoduje to okresowy wzrost i spadek ciśnienia w komorze 1, a w konsekwencji nieustalony wypływ cieczy przez króćce 6 do zbiornika 7. Celem tego zabiegu jest poprawienie warunków wytrącania się zanieczyszczeń.

Jak widać, króćce 6 mają długości malejące wraz z odległością od wlotu do rusztu 5, gdyż w celu zapewnienia jednakości przepływu przez wszystkie króćce muszą one mieć odpowiednio dobrane, zmieniające się, bezwładności. W nieustalonym ruchu cieczy równomierny rozdział przepływu przez ruszt nie może być zrealizowany przez odpowiednie dobranie średnic otworów nawierconych w ruszcie 6, jak w przepływie ustalonym, gdyż bezwładność rusztu wzrasta wraz z odległością od wlotu do niego.

¹⁾ Ciśnienie w zbiorniku, w ustalonej chwili t , obliczamy z równania stanu gazu, wykorzystując przy tym fakt, że objętość wody wypływającą (wpływającą) do powietrznika równa się przyrostowi (ubytkowi) objętości powietrza.

W celu wyrównania tej bezwładności wypływ musi odbywać się przez króćce o długości malejącej wraz z odległością od wlotu do rusztu.



Rys. 7.43. System szeregowo-równoległy o niezmiennym w czasie rozdzielaniu cieczy w węzłach

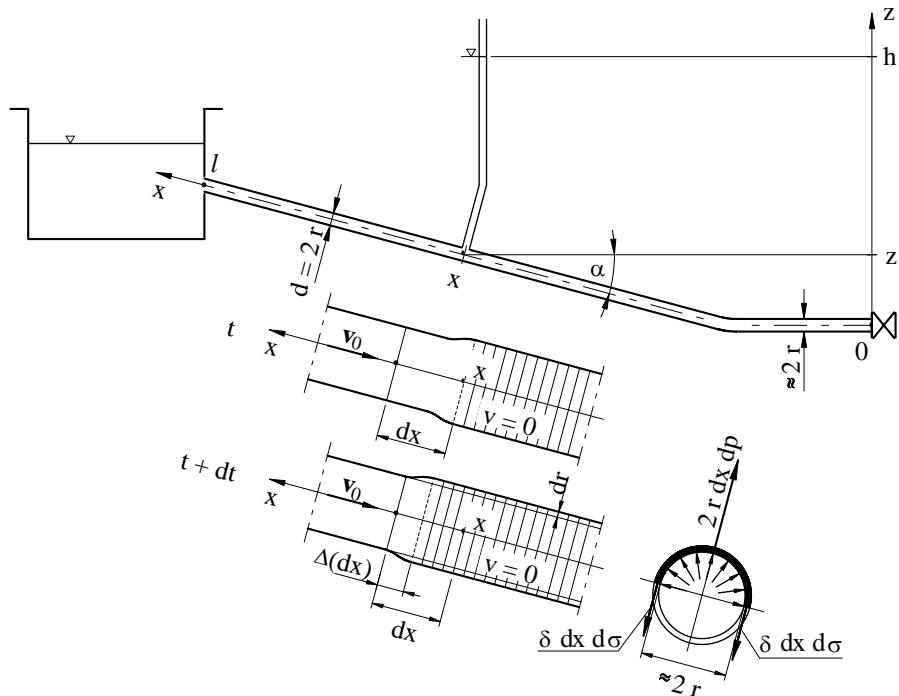
7.5.2. UDERZENIE HYDRAULICZNE

Opis zjawiska

Przez *uderzenie hydrauliczne* rozumiemy zjawisko nieustalonego ruchu cieczy w przewodzie zamkniętym, któremu towarzyszy gwałtowna przemiana energii kinetycznej zawartej w płynącej cieczy na energię ciśnienia.

Uderzenie hydrauliczne (wodne) występuje np. w przewodach wodociągowych w razie raptownego zamknięcia zaworu lub nagłego wstrzymania ruchu pompy.

Przebieg zjawiska uderzenia hydraulicznego przeanalizujemy na przykładzie prostego układu hydraulicznego pokazanego na rysunku 7.44. W normalnych warunkach przepływ cieczy przez rurę o średnicy d i długości l , zaopatrzoną u wylotu w zawór, odbywa się ruchem ustalonym ze średnią prędkością v_0 . Jeśli zawór zostanie nagle zamknięty (czas zamykania $t_z \rightarrow 0$), to ruch częstek wody przylegających do zaworu zostanie nagle wstrzymany. Gdyby ciecz płynąca przez rurociąg była nieściśliwa, a jego ściany sztywne, wówczas cała masa wody w rurze została zahamowana w czasie $t_z \rightarrow 0$, a ciśnienie – jak wynika to z wzoru (7.118) – wzrosłoby do nieskończoności. Z doświadczenia wiadomo jednak, że w takich przypadkach ciśnienie osiąga wartości skończone, model ruchu nieustalonego opisany wzorem (7.118) nie może zatem być tutaj stosowany. Należy wobec tego uwzględnić ściśliwość cieczy i sprężystość ścian rury. W celu jakościowego wyjaśnienia wpływu ściśliwości cieczy i sprężystości ścian rury na przebieg uderzenia hydraulicznego podzielimy – w myślach – ciecz zawartą w rurze na elementarne warstewki o jednakowej masie i rozpatrzymy ich zachowanie się po nagłym zahamowaniu przepływu. Przebieg zjawiska można podzielić na dwa okresy.



Rys. 7.44. Układ do analizy uderzenia hydraulicznego

Okres pierwszy rozpoczyna się w chwili zamknięcia zaworu, kiedy pierwsza warstewka zostanie ściśnięta na skutek przejęcia własnej energii kinetycznej w ciśnieniu¹⁾, a grubość jej się zmniejszy. Przyrost ciśnienia spowoduje rozszerzenie się części rury otaczającej warstawkę, ponownie zmniejszając jej grubość. W rezultacie warstewka zostanie zahamowana, grubość zmniejszona, ściana rury zaś rozciągnięta. Zmniejszenie grubości warstewki zależy od modułów sprężystości E ściany rury i E_0 cieczy. Za pierwszą warstawką podążają następne, które również zostaną ściśnięte i zatrzymane, a ściany rury sprężyste odkształcone (rozcięgnięte). W ten sposób w miarę upływu czasu przyrasta długość słupa zatrzymanej cieczy, znajdującej się pod zwiększonym ciśnieniem i otoczonej rurą o rozszerzonej średnicy, spowodowanej przez przyrost tego ciśnienia. Szybkość, z jaką przyrasta długość zatrzymanego słupa cieczy, jest równa prędkości rozprzestrzeniania się fali ciśnienia w rurze i jest ona przeciwna do kierunku przepływu cieczy, która w nierozszerzonej części rury ma nadal prędkość v_0 . Gdy ostatnia warstewka u wlotu zostanie ściśnięta, cała rura jest wypełniona cieczą w spoczynku i pod ciśnieniem wyższym od ciśnienia statycznego w płynącej cieczy (przyrost ciśnienia, jak już wspomnieliśmy, wystąpi w wyniku zamiany energii kine-

¹⁾ Jest to jedyna możliwość zamiany energii kinetycznej, gdyż prędkość warstewki staje się zerowa, wysokość położenia nie zmienia się; pozostaje zatem wzrost ciśnienia.

tycznej na ciśnienie). Ten przyrost ciśnienia powoduje ściśnięcie cieczy i rozciągnięcie ścian rury.

Okres drugi rozpoczyna się w chwili, gdy wystąpi ruch cieczy z rury do zbiornika, spowodowany tym, że energia potencjalna zgromadzona w cieczy i ścianach rury zostaje zamieniona na energię kinetyczną. Fala ciśnienia rozprzestrzenia się teraz w kierunku zaworu, ale jest to ciśnienie niższe od panującego w cieczy podczas przepływu ustalonego. Po dojściu do zaworu fala zmienia kierunek, a cykl powtarza się, aż do wyłumienia drgań. Zwróćmy uwagę, że zawór znajduje się pod zwiększonym ciśnieniem przez czas potrzebny do przebycia przez falę ciśnienia drogi $2l$ (l – długość rury) i jeśli prędkość fali wynosi v_p , to czas ten będzie następujący

$$T = \frac{2l}{v_p}. \quad (7.121)$$

Celem dalszych rozważań będzie obliczenie prędkości rozchodzenia się fali ciśnienia i przyrostu ciśnienia w rurze na skutek nagłego zamknięcia zaworu.

Pierwsze podstawowe równanie ruchu

Wyprowadzając równanie nieustalonego ruchu cieczy podczas uderzenia hydralicznego, założymy że:

- ruch jest jednowymiarowy,
- ciecz jest nielepka.

O ile założenie jednowymiarowości ruchu jest powszechnie w hydraulice i nie budzi większych sprzeciwów, o tyle pominięcie lepkości może sugerować nieprzydatność uzyskanego rozwiązania w praktyce. Tak jednak nie jest, gdyż pominięcie strat energetycznych powoduje, że obliczony przyrost ciśnienia jest większy od rzeczywistego, tj. występującego w cieczy lepkiej¹⁾, dzięki czemu rurociąg jest obliczany na ciśnienie wyższe od faktycznego. Należy zdawać sobie również sprawę, że uwzględnienie strat energetycznych tak znacznie komplikuje równanie ruchu, że jest wątpliwe uzyskanie jego rozwiązania analitycznego.

Weźmy pod uwagę układ hydrauliczny przedstawiony na rysunku 7.44. Początek układu współrzędnych x (krzywoliniowa) i z umieścimy na końcu rurociągu tuż przed zaworem, przy czym współrzędna x jest skierowana przeciwnie do kierunku prędkości przepływu v_0 ruchu ustalonego. Ruch cieczy w rurze opiszemy równaniem Eulera (5.2), które zgodnie z przyjętymi założeniami będzie następujące

$$\frac{dv}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (7.122)$$

¹⁾ Wynika to z pewnych twierdzeń o nierównościach różniczkowych i jest niesprzeczne z intuicją, gdyż należy się spodziewać mniejszego przyrostu ciśnienia w cieczy lepkiej, bo część energii prędkości może być zużyta na pokonanie oporów tarcia wewnętrznego.

przy czym ciśnienie p w odległości x od początku układu współrzędnych wyrazimy następująco

$$p = p_b + (h - z)\rho g, \quad (7.123)$$

gdzie:

h – rzędna wysokości ciśnienia piezometrycznego w tym przekroju,

p_b – ciśnienie barometryczne.

Ponieważ, jak wynika z rysunku 7.44,

$$X = -g \sin \alpha = -g \frac{dz}{dx}, \quad (7.124)$$

po dokonaniu podstawień do równania (7.122) otrzymamy

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{dv}{dt} = 0, \quad (7.125)$$

ale

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} \left(1 + v \frac{\partial t}{\partial x} \right), \quad (7.126)$$

przy czym

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_p \quad (7.127)$$

jest prędkością rozchodzenia się fali ciśnienia w rurze wypełnionej cieczą. Oznacza to, że

$$\frac{v}{v_p} \ll 1, \quad (7.128)$$

gdyż z doświadczenia wiadomo, że prędkość v_p jest wielokrotnie większa od prędkości przepływu cieczy w rurach. Zwróćmy uwagę, że $v \leq v_0$, gdyż w ruchu ustalonym ciecz ma prędkość v_0 , która po zamknięciu zaworu spada do zera. Równania (7.122)–(7.127) odnoszą się do strefy ruchu nieustalonego, która leży między nieruchomą cieczą w rozszerzonej części rury a cieczą płynącą jeszcze z prędkością v_0 (w pozostałej części rury równanie (7.122) jest trywialne, gdyż $\partial v / \partial t = 0$, $\partial v / \partial x = 0$). Ostatecznie

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \left(1 + \frac{v}{v_p} \right) \approx \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (7.129)$$

Równanie (7.125) napiszemy zatem teraz w formie

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (7.130)$$

i nazwiemy *pierwszym podstawowym równaniem ruchu*, podanym przez włoskiego hydraulika Lorenza Allieviego (1903).

Drugie podstawowe równanie ruchu

Równanie to uzyskamy na podstawie równania ciągłości ruchu, które będziemy również rozpatrywać w strefie między cieczą nieruchomą a cieczą płynącą jeszcze z prędkością v_0 .

Równanie ciągłości ruchu jednowymiarowego (3.5), napisane dla przyjętego na rysunku układu współrzędnych, ma postać

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v A) = 0. \quad (7.131)$$

Zmiana średnicy rury pod wpływem wzrostu ciśnienia jest mała w rurach nieelastycznych, ale sprząstych i przyjmiemy, że pole przekroju jest praktycznie stałe. Dlatego równanie (7.131) napiszemy jako

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (7.132)$$

Jak wiemy jednak, cieczce są mało ściśliwe i nawet bardzo duże wartości ciśnienia niewiele zmieniają objętość ustalonej masy cieczy. Przyjmiemy zatem, że – w dowolnej chwili czasu – gęstość wzduż rurociągu jest prawie stała, czyli $\partial \rho / \partial x \approx 0$. Wówczas zależność (7.132) uproscimy do postaci

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (7.133)$$

Zauważmy, że $\partial \rho / \partial t$ nie musi mieć małej wartości, mimo niewielkiego bezwzględnego przyrostu gęstości, ponieważ jest to prędkość zmian tej wielkości. Prędkość ta jest zerowa tylko w przedziale, gdzie słup cieczy jest zatrzymany i tam, gdzie prędkość ruchu jeszcze wynosi v_0 .

W dwóch otrzymanych dotychczas równaniach (7.130) i (7.133) występują trzy nieznane wielkości p , v , ρ zależne od miejsca x i czasu t , dlatego w celu zmniejszenia ich liczb wyrygujemy z równania (7.133) gęstość ρ , korzystając z jej związku z ciśnieniem¹⁾ p , z którym związane jest odkształcenie rury.

Niech zatem, w ustalonej chwili czasu t , długość zatrzymanego słupa cieczy wynosi x . Inaczej mówiąc, po czasie t czoło fali ciśnienia przebiegło drogę x i na tej drodze średnica rury jest powiększona na skutek przyrostu ciśnienia. Po czasie $t + dt$ ciśnienie, działające na element o długości dx w chwili t , wzrosnie o dp , w związku z czym element ten skróci się o wartość $\Delta(dx)$ na skutek sprężystości cieczy i ścian rury. Obliczymy teraz skrócenie tego elementu, zakładając, że odkształcenie zależy wyłącznie od ciśnienia. Skrócona część elementu będzie składała się z dwóch części $\Delta_1(dx)$ (wynik sprężystej deformacji elementu) i $\Delta_2(dx)$ (wynik

¹⁾ Założymy, że ciecz jest barotropowa.

sprężystej deformacji rury). W celu obliczenia $\Delta_1(dx)$ wykorzystamy wzór (1.8) przekształcony do postaci

$$-\frac{dp}{E_0} = \frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad (7.134)$$

gdzie E_0 – moduł sprężystości cieczy.

Przyjmiemy, że $E_0 = \text{idem}$, czyli moduł sprężystości cieczy jest niezmienny w przedziale ciśnień występującym w rozpatrywanym zjawisku.

Wielkości dV i V występujące we wzorze (7.134) są następujące:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\pi d^2}{4} \Delta_1(dx), \\ V &= \frac{\pi d^2}{4} dx. \end{aligned} \quad (7.135)$$

Po podstawieniu dają

$$\Delta_1(dx) = -\frac{dp}{E_0} dx. \quad (7.136)$$

Do obliczenia $\Delta_2(dx)$ zastosujemy prawo Hooke'a¹⁾, według którego obliczymy przyrost średnicy rury rozciągniętej pod wpływem przyrostu ciśnienia wynoszącego dp ; naprężenie w kierunku stycznym do obwodu rury wzrośnie wówczas o $d\sigma$, tak więc

$$d\sigma = \frac{2\pi(r+dr)-2\pi r}{2\pi r} E = \frac{dr}{r} E, \quad (7.137)$$

gdzie E – moduł Younga (sprężystości) materiału rury.

Naprężenie $d\sigma$ w ścianie rury zależy od sił powodujących jego wystąpienie, czyli przyrostu ciśnienia dp . W celu znalezienia związku między tymi wielkościami rozpatrzmy warunki równowagi sił powierzchniowych (ciśnienie) i sił wewnętrznych (naprężenie). Jeśli zatem rozetniemy (w myśl) rurę wzdłuż osi, to dla uniknięcia rozdzielenia się przeciętych części należałoby przyłożyć odpowiednie siły, jak to pokazano na rysunku 7.44. Musi zatem być spełnione równanie

$$(2r dx)dp = 2(\delta dx)d\sigma, \quad (7.138)$$

gdzie δ – grubość ściany rury.

Równanie (7.138) jest prawdziwe dla – zwykle używanych – rur cienkościennych, tj. takich, że $\delta/d < 1/10$ (dla rur grubościennych dochodzi jeszcze równanie równowagi momentów).

¹⁾ Prawo Hooke'a dla pręta rozciąganej (ścisanej) $\sigma = \varepsilon E$ (σ – naprężenie w przecie, ε – wydłużenie (skrócenie) względne, E – moduł sprężystości).

Przypominamy, że upraszczając równanie (7.131) założyliśmy, iż zwiększenie średnicy rury na skutek wzrostu ciśnienia w zatrzymanej części słupa cieczy w rurze jest pomijalne w stosunku do $2r$, założenie to konsekwentnie stosowaliśmy we wzorach (7.135)–(7.138) (również na rys. 7.44) i będzie ono stosowane dalej. Z wzoru (7.138) widać, że

$$d\sigma = \frac{r}{\delta} dp , \quad (7.139)$$

a po uwzględnieniu wzoru (7.137)

$$dr = \frac{r^2}{E\delta} dp . \quad (7.140)$$

Przed rozciągnięciem rury element miał średnicę $2r$ i długość $dx^{1)}$, po rozciągnięciu natomiast średnica jego wyniesie $2(r + dr)$, a długość $dx + \Delta_2(dx)$, zatem

$$\pi(r + dr)^2 (dx + \Delta_2(dx)) = \pi r^2 dx , \quad (7.141)$$

skąd, po odrzuceniu małych wyższych rzędów, otrzymamy

$$\Delta_2(dx) = -\frac{2drdx}{r} . \quad (7.142)$$

Ostatecznie, po podstawieniu w miejsce dr wyrażenia (7.140), mamy

$$\Delta_2(dx) = -\frac{2r}{\delta} \frac{dp}{E} dx = -\frac{d}{\delta} \frac{dp}{E} dx . \quad (7.143)$$

Skrócenie $\Delta(dx)$ elementu cieczy jest sumą $\Delta_1(dx)$ i $\Delta_2(dx)$, wobec tego

$$\Delta(dx) = -\left(\frac{1}{E_0} + \frac{d}{E\delta} \right) dp dx , \quad (7.144)$$

co po oznaczeniu

$$\frac{1}{k} \equiv \frac{1}{E_0} + \frac{d}{E\delta} , \quad (7.145)$$

zapiszemy w postaci

$$\Delta(dx) = -\frac{1}{k} dp dx , \quad (7.146)$$

gdzie k – zastępczy moduł sprężystości układu złożonego z rury napełnionej cieczą.

Skrócenie elementu dx o wartość $\Delta(dx)$ odbyło się w czasie dt . W chwili t przedkość przepływu w przekroju rury o odciętej x była równa zeru, gdyż zatrzymany słup

¹⁾ Zmiany długości $\Delta_1(dx)$ nie uwzględniamy, gdyż jest to wielkość mała w stosunku do dx (wzór (7.136)).

cieczy miał długość x . Natomiast w przekroju o odciętej $x + dx$ prędkość ta miała wartość v , wobec tego w czasie $dt \rightarrow 0$ przekrój $x+dx$ przebył drogę $dv dt = \Delta(dx)$, skąd

$$\Delta v = \frac{\Delta(dx)}{dt}. \quad (7.147)$$

Z drugiej strony różnica prędkości na drodze dx , w chwili t , wyniesie

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx = \Delta v. \quad (7.148)$$

Uwzględniając zatem wzory (7.146)–(7.148), otrzymamy (po uproszczeniu) następujący wzór

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (7.149)$$

przy czym pochodna cząstkowa pojawia się tutaj ze względu na zależność p od x i t .

Lewe strony równań (7.149) i (7.133) są identyczne, skąd wynika identyczność ich prawych stron. Wobec tego wyrażenie

$$\left(\frac{1}{E_0} + \frac{d}{E\delta} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (7.150)$$

równoważne z równaniem ciągłości uproszczonym do postaci (7.133)¹⁾ nazywamy *drugim podstawowym równaniem ruchu* sprężystego uderzenia hydraulicznego.

Powróćmy jeszcze do zjawiska skracania elementu dx i zauważmy, że równocześnie z przesuwaniem się przekroju $x+dx$ z prędkością Δv w ujemnym kierunku osi x , fala ciśnienia przesuwała się w kierunku przeciwnym (tzn. następował przyrost długości zatrzymanego słupa cieczy). Można więc dobrą taki czas dt bliski零u²⁾, że fala ta przebiegnie drogę $dx - |\Delta(dx)|$ (rys. 7.44) równą długości słupa cieczy zatrzymanego w czasie dt . Prędkość fali ciśnienia wyniesie zatem

$$v_p = \frac{dx - |\Delta(dx)|}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad (7.151)$$

przy czym $\Delta(dx)$ jest wielkością małą w stosunku do dx (wzór (7.146)) i dlatego zostało pominięte. Ze wzoru (7.151) wynika więc, że wielkość $\partial x / \partial t$ jest rzeczywiście prędkością fali ciśnienia, jak to napisaliśmy w (7.127).

¹⁾ Wzór (7.150) można napisać w postaci $\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial t}$, skąd po uwzględnieniu (7.127) mamy

$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v_p}{k} \frac{\partial p}{\partial t}$ (zob. (7.133)).

²⁾ Ponieważ $dx \rightarrow 0$ i prędkość fali $v_p < \infty$.

³⁾ x jest funkcją tylko czasu, stąd równość pochodnych.

Prędkość rozchodzenia się fali ciśnieniowej w przewodzie

Prędkość tę obliczamy, pisząc równania ruchu (7.130) i (7.150) w postaci

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = 0, \quad \left(\frac{1}{E_0} + \frac{d}{E\delta} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (7.152)$$

co po wykorzystaniu (7.151) przedstawimy jako

$$\frac{1}{\rho v_p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \left(\frac{1}{E_0} + \frac{d}{E\delta} \right) v_p \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (7.153)$$

skąd, po porównaniu współczynników przy $\partial p / \partial x$ w obydwu równaniach, mamy

$$v_p = \sqrt{\frac{\frac{E_0}{\rho}}{1 + \frac{d}{\delta} \frac{E_0}{E}}}, \quad (7.154)$$

gdzie $\sqrt{E_0/\rho} \equiv c$ – prędkość rozchodzenia się fali ciśnienia (prędkość dźwięku) w nieograniczonym ośrodku o gęstości ρ – i module sprężystości E_0 . Dla wody i rur cienkościennych ($\delta/d < 1/10$), zwykle stosowanych w technice, $v_p > 1000$ m/s, wobec czego założenie (7.127) jest w pełni uzasadnione ($v \leq v_p$, przy czym v_0 jest rzędu pojedynczych metrów na sekundę i nie przekracza w normalnych warunkach 5 m/s). Prędkość rozprzestrzeniania się dźwięku w wodzie o praktycznie nieograniczonych rozmiarach zbiornika (np. w jeziorze) $c = 1435$ m/s.

Ciśnienie bezwładności

Zapiszmy drugi z wzorów (7.153) w postaci

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{k}{v_p} v \right) = 0. \quad (7.155)$$

k/v_p jest wielkością stałą dla danej rury i cieczy ((7.145), (7.154)).

Po scałkowaniu równania (7.155) i wiedząc, że przed zamknięciem zaworu ciśnienie w rurze wynosiło p_0 ¹⁾, a prędkość przepływu v_0 , otrzymamy zależność

$$p = p_0 + \rho v_p (v_0 - v), \quad (7.156)$$

która wyznacza ciśnienie p w chwili t i w odległości $0 \leq x \leq x_0$ od zaworu, przy czym x_0 – odległość od zaworu, gdzie prędkość wynosi jeszcze v_0 .

¹⁾ Rozkład ciśnienia p_0 wzdłuż rury wyznaczamy, posługując się np. wykresem Ancony.

Zauważmy, że dla $x \leq v_p t$ prędkość $v = 0$, gdyż w tej odległości słup cieczy jest zatrzymany. W przedziale $v_p t \leq x \leq x_0$ prędkość przepływu spełnia relację $0 \leq v \leq v_0$. Ciśnienie dane wzorem (7.156) nazywa się *ciśnieniem bezwładności*; jest ono największe na czole fali ciśnieniowej i wynosi

$$p_{\max} = p_0 + \rho v_p v_0. \quad (7.157)$$

Przyrost ciśnienia po nagłym zamknięciu zaworu¹⁾ obliczymy zatem z wzoru

$$\Delta p_{\max} = p_{\max} - p_0 = \rho v_p v_0, \quad (7.158)$$

wysokość przyrostu ciśnienia wyniesie wobec tego

$$\Delta h_{\max} = \frac{p_{\max} - p_0}{\rho g} = \frac{v_p v_0}{g}. \quad (7.159)$$

Stąd wynika wniosek, że *ciśnienie bezwładności jest proporcjonalne do prędkości v_0 przepływu cieczy w rurociągu*.

Na jego wartość nie wpływa natomiast długość rurociągu, ale jego średnica d , grubość ściany δ i materiał, z jakiego jest wykonany (E), a ponadto gęstość ρ i moduł sprężystości cieczy E_0 .

Zauważmy, że Δh_{\max} może osiągnąć znaczne wartości zagrażające wytrzymałości rurociągu, ponieważ $v_p > 1000$ m/s, co przy $v_0 < 5$ m/s może dać przyrost wysokości ciśnienia około 500 m słupa cieczy.

Przebieg ciśnienia przy zaworze po jego nagłym zamknięciu

Przyrost ciśnienia po nagłym zamknięciu zaworu wyznacza wzór (7.158). Czas działania zwiększonego ciśnienia na zawór wyniesie

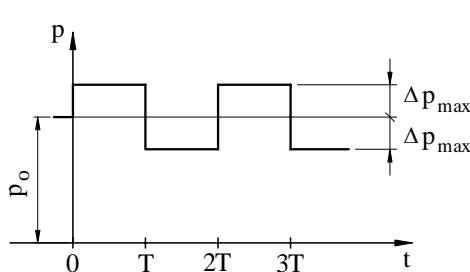
$$T = \frac{2l}{v_p}, \quad (7.160)$$

gdzie l – długość rury.

Składa się on z czasu $T/2$ potrzebnego na dotarcie fali ciśnienia do zbiornika oraz z czasu $T/2$ przebiegu fali obniżonego ciśnienia od zbiornika do zaworu, podczas gdy ciecz przylegająca do zaworu jest zatrzymana, a więc ciągle pod zwiększonym ciśnieniem. Jak wspominaliśmy wcześniej, po dotarciu fali ciśnienia do zbiornika cała ciecz zawarta w rurze jest nieruchoma, ale zawiera energię zmagazynowaną w sprężonej cieczy i rozcięgniętych ścianach rury. Energia ta jest większa od energii potencjalnej cieczy w zbiorniku, co powoduje wypływ cieczy do zbiornika i obniżenie ciśnienia w rurze. Fala tego obniżonego ciśnienia biegnie od zbiornika do zaworu, który po czasie T znajduje się pod obniżonym ciśnieniem znów na okres T . Następnie cały cykl

¹⁾ W zatrzymanej części słupa cieczy, tj. dla $x \leq v_p t$.

się powtarza. W cieczy rzeczywistej występuje rozpraszańie energii i amplituda ciśnienia maleje z upływem czasu, aż do zupełnego wyłumienia drgań.



Na rysunku 7.45 przedstawiono przebieg zmian ciśnienia na zaworze po nagłym jego zamknięciu i przy założeniu, że ciecz jest nielepka.

Rys. 7.45. Przebieg zmian ciśnienia na zaworze po nagłym jego zamknięciu

Jak już wspomnialiśmy poprzednio, mimo takiego uproszczenia otrzymane wyniki mają znaczenie praktyczne, ponieważ przyrost ciśnienia $\rho v_p v_0$ jest nie mniejszy od rzeczywistego. Umożliwia to znalezienie środków zapobiegawczych przeciwko uszkodzeniom rurociągów, jak np. montaż specjalnych zaworów upustowych otwierających się po przekroczeniu ciśnienia dopuszczalnego dla danego rurociągu. Stosuje się również urządzenia zapobiegające wystąpieniu zjawiska uderzenia hydraulicznego, jak np. opisany w p. 7.5.1 powietrznik (rys. 7.42). Rozważany przypadek uderzenia hydraulicznego, dla czasu zamknięcia zaworu $t_z = 0$, jest prostym uderzeniem hydraulicznym, które występuje również, gdy $t_z < 2l/v_p$. Tak zwane nieproste uderzenie hydrauliczne występuje wtedy, gdy $t_z > 2l/v_p$. Na podstawie badań Żukowski ustalił w tym przypadku następującą zależność między czasem zamykania zaworu t_z a przyrostem ciśnienia Δp w stosunku do $\Delta p_{\max} = \rho v_p v_0$

$$\frac{\Delta p}{p_{\max}} = \frac{2l/v_p}{t_z}. \quad (7.161)$$

Istnieją inne wzory lepiej ujmujące istotę zjawiska, np. wzór Morozowa

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{2\chi}{2-\chi} H, \quad (7.162)$$

w którym H – różnica poziomów między zwierciadłem cieczy a osią wylotu, przy czym

$$\chi = \frac{v_0 l}{g t_z H}.$$

Wzór (7.162) daje dobre wyniki dla $\chi < 0,5$. Z wzorów (7.161) i (7.162) wynika również sposób zapobiegania nadmiernemu wzrostowi ciśnienia. Jest nim odpowiednio długi czas zamykania zaworu. Nie można go jednak zastosować, gdy uderzenie hydrauliczne może powstać na skutek zatrzymania pomp. Stosuje się wtedy zwykle specjalne zawory lub powietrzniki.

8. PRZEPŁYW CIECZY W PRZEWODACH OTWARTYCH

8.1. PODSTAWOWE POJĘCIA

Płynącą ciecz w przewodach otwartych ograniczają częściowo ściany kanału, a częściowo styka się ona z powietrzem, tworząc z nim powierzchnię swobodną. Do przewodów otwartych zaliczamy zatem również rurociągi wypełnione częściowo płynącą cieczą. *Przewody otwarte* dzielimy na naturalne (rzeki, strumienie, potoki) i *sztuczne* (kanały komunikacyjne, melioracyjne itp.).

Dna i ściany boczne przewodu otwartego, które są lub mogą być zwilżone płynącą cieczą, tworzą *łożysko*. *Łożyskiem zwilżonym* jest dolna część przewodu, przez którą aktualnie płynie ciecz.

Część przekroju poprzecznego przewodu (tzn. przekroju prostopadłego do linii środkowej), przez którą przepływa ciecz, nazywamy *przekrojem przepływowym*. Jest on zarazem *przekrojem hydrometrycznym*. *Promień hydrauliczny* R_h określamy następująco

$$R_h = \frac{A}{U}, \quad (8.1)$$

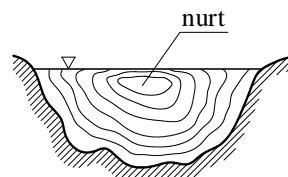
gdzie:

A – pole powierzchni przekroju przepływowego,

U – obwód zwilżony, tj. długość krzywej przecięcia przekroju poprzecznego ze ścianami zwilżonymi łożyska.

Obwiedni końców wektorów prędkości, których początki leżą na jednej prostej, nazywamy *krzywą rozkładu prędkości* wzdłuż tej prostej. Istotne znaczenia mają pionowa i pozioma krzywa rozkładu prędkości.

Punkty przekroju przepływowego, charakteryzujące się tą samą prędkością, tworzą na powierzchni prędkości (tj. obwiedni końców wektorów prędkości) linie jednakowej prędkości, zwane *izotachami* (rys. 8.1). Izotachą zerową jest obwód zwilżony, inne izotachy mogą być dowolnymi krzywymi płaskimi, których kształt, w miarę zbliżania się do obwodu zwilżonego, upodabnia się do niego.



Rys. 8.1. Linie jednakowej prędkości (izotachy) w kanale otwartym

Cząstki cieczy poruszające się najszybciej tworzą strugę, zwaną *nurtem*.

Objętość ograniczona przekrojem przepływowym, powierzchnią swobodną i powierzchnią prędkości, wyznacza strumień objętości.

Linię łączącą środki ciężkości przekrejów przepływowych nazywamy *osią geometryczną*. Linia łącząca rzuty na przekrój zwilżony środków ciężkości brył, ograniczonych powierzchnią prędkości, powierzchnią swobodną i przekrejem zwilżonym, jest *osią dynamiczną* (hydrauliczną). W przypadku kanałów prostoliniowych o stałym przekroju poprzecznym osie te leżą w jednej płaszczyźnie pionowej.

8.2. KLASYFIKACJA RUCHU CIECZY W KANAŁACH OTWARTYCH

8.2.1. RUCHY RÓWNOMIERNE I NIERÓWNOMIERNE

Ruch cieczy w przewodzie otwartym jest *równomierny*, jeżeli powierzchnia prędkości wzduż osi dynamicznej przewodu nie ulega zmianie. W ruchu *równomiernym* przekrój przepływowy i głębokość kanału nie ulegają zmianie (powierzchnia swobodna jest równoległa do dna). Musi on być zatem ruchem *ustalonym*.

W ruchu *nierównomiernym* przekrój przepływowy zmienia się wzduż osi hydraulicznej zależnie albo niezależnie od czasu. Ruch *nierównomierny* może więc być ruchem *ustalonym* lub *nieustalonym*.

8.2.2. PRZEPŁYWY SPOKOJNE I RWĄCE

Obserwacja przepływu wody przez kanały otwarte prowadzi do wniosku, że charakter przepływu zależy od tego, czy średnia prędkość przekracza szybkość c rozprzestrzeniania się fal płaskich powstających na powierzchni swobodnej cieczy płynącej przez kanał o średniej głębokości t_s

$$c = \sqrt{g t_s} . \quad (8.2)$$

Wzór ten, wyprowadzony przez Lagrange'a, jest podstawą podziału ruchów cieczy w kanałach otwartych na:

- a) przepływy *spokojne* (łagodne), odbywające się z prędkościami średnimi $v < c$,
- b) przepływy *rwące*, odbywające się z prędkościami średnimi $v > c$.

8.3. RUCH RÓWNOMIERNY W PRZEWODACH OTWARTYCH

8.3.1. RÓWNANIE BERNOULLIEGO

W przypadku ruchu ustalonego równanie Bernoulliego napisane dla przekrejów 1. i 2., oddalonych od siebie o l (rys. 8.2), przybiera postać

$$H_1 + \frac{p_1 + p_o}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2 + p_o}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h_{12}^s, \quad (8.3)$$

gdzie:

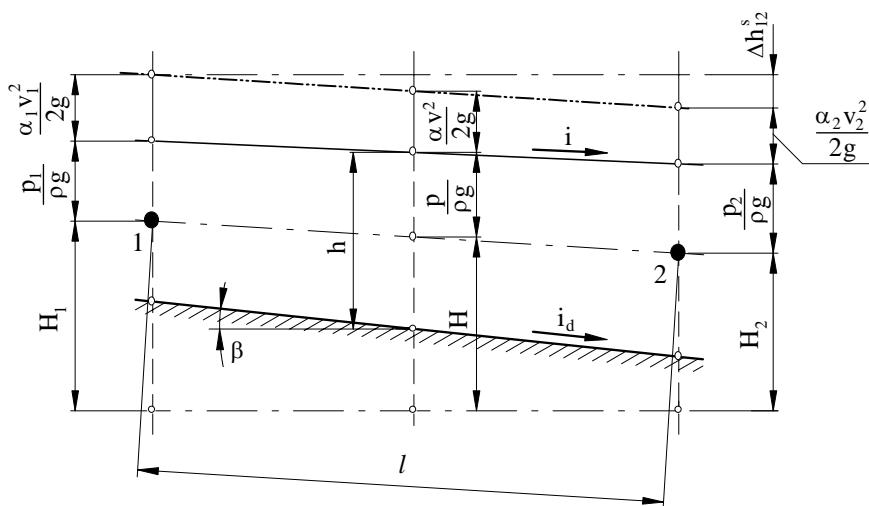
α_i ($i = 1, 2$) – współczynnik Coriolisa według wzoru (7.14),

v_i ($i = 1, 2$) – średnia prędkość przepływu,

p_i ($i = 1, 2$) – nadciśnienie¹⁾ w środku pola przekroju,

H_i ($i = 1, 2$) – wysokość niwelacyjna środka pola przekroju,

Δh_{12}^s – wysokość strat energetycznych na odcinku między przekrojami 1. i 2.



Rys. 8.2. Ruch cieczy w kanale otwartym

Jeśli teraz rozważania ograniczymy do ruchu równomiernego, to na podstawie jego definicji (p. 8.2.1) otrzymamy

$$v_1 = v_2 \wedge \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow p_1 = p_2 \wedge \Delta h_{12}^s = H_1 - H_2. \quad (8.4)$$

Spadek hydrauliczny natomiast

$$I = \frac{H_1 - H_2}{l} = i_d = i = \sin \beta \quad (8.5)$$

jest więc równy spadkowi niwelacyjnemu dna i zwierciadła swobodnego.

¹⁾ Ponieważ w kanale otwartym nad powierzchnią swobodną panuje takie samo ciśnienie p_o , na rys. 8.2 linię ciśnień tradycyjnie rysuje się na wysokości zwierciadła cieczy.

8.3.2. RÓWNANIE HYDRODYNAMICZNE RUCHU RÓWNOMIERNEGO

Za punkt wyjścia do rozważań obierzemy równanie Naviera–Stokesa (6.7). Jeżeli przyjmiemy układ współrzędnych, którego jedna z osi przebiega przez środki geometryczne przekrojów strugi cieczy pokazanej na rysunku 8.2, to w przypadku cieczy nieściśliwej

$$g \sin \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - W = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (8.6)$$

przy czym:

g – przyspieszenie ziemskie,

W – jednostkowa siła oporów ruchu.

W ruchu równomiernym $g \sin \beta = g I$, ciśnienie nad powierzchnią swobodną nie ulega zmianie i jego rozkład w strudze jest hydrostatyczny, czyli $\partial p / \partial s = 0$, a ponadto $\partial v / \partial t = 0 \wedge \partial v / \partial s = 0$, gdyż ruch jest ustalony, a struga ma niezmienne pole przekroju przepływowego.

Uzależniając opory ruchu od promienia hydraulicznego R_h i średniej prędkości przepływu v , po zastosowaniu analizy wymiarowej (p. 6.3.4) otrzymamy

$$W = \varphi R_h^{-1} v^2, \quad (8.7)$$

a po wprowadzeniu bezwymiarowego współczynnika oporu łożyska $\lambda = 2\varphi$ będzie

$$W = \lambda \frac{v^2}{2} \frac{1}{R_h}, \quad (8.8)$$

a zatem równanie ruchu (8.6) przyjmie postać

$$gI - \lambda \frac{v^2}{2} \frac{1}{R_h} = 0, \quad (8.9)$$

stąd średnia prędkość przepływu

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} \sqrt{IR_h}. \quad (8.10)$$

Oznaczając $\sqrt{2g/\lambda} = C$, otrzymamy zależność znaną pod nazwą *formuły de Chezy'ego*

$$v = C \sqrt{IR_h}. \quad (8.11)$$

Jest to wzór półempiryczny, ponieważ występujący w nim współczynnik C zależy od promienia hydraulicznego i chropowatości łożyska, a związku tego nie udało się opisać analitycznie.

8.3.3. FORMUŁY OKREŚLAJĄCE PRĘDKOŚĆ I WSPÓŁCZYNNIK OPORU

Średnią prędkość przepływu v można wyznaczyć ze wzorów (8.10) lub (8.11), w których współczynniki λ i C obliczamy za pomocą następujących, przykładowo podanych, empirycznych formuł:

Formuła Misesa – określa współczynnik oporu λ występujący we wzorze (8.10)

$$\lambda = 0,0024 + \sqrt{\kappa/2R_h}, \quad (8.12)$$

gdzie κ – współczynnik chropowatości, którego wartość zależy od rodzaju ścian łożyska, mający wartości ($0,2 \div 200 \mu\text{m}$), przy czym dolna wartość dotyczy ścian wykończeniowych gładką wyprawą cementową, górna natomiast ścian z ziemi.

Formuła Bazina

$$C = \frac{87}{1 + c/\sqrt{R_h}}, \quad (8.13)$$

w której współczynnik c zależy od rodzaju ścian łożyska. Ścianom wykończonym gładką wyprawą cementową przypisuje się liczbę $c = 0,06$, natomiast ścianom z głazów $c = 1,75$.

Formuła Manninga

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6}, \quad (8.14)$$

w której n jest współczynnikiem zależnym od rodzaju i chropowatości ścian kanału.

Współczynnik n może mieć wartości $0,009 \div 0,03$. Dolna wartość dotyczy wyjątkowo gładkich powierzchni pokrytych emalią lub glazurą. Wartość górna odnosi się do kanałów wyjątkowo źle utrzymanych o znacznych wyrwach i osypiskach, zarośniętych szuwarami z dużymi kamieniami na dnie itp.

Formuła Matakiewicza – pozwala obliczyć prędkość średnią w łożysku naturalnym

$$v = 35,4 t_s^{0,7} I^{0,493+10I}, \quad (8.15)$$

gdzie t_s – średnia głębokość cieczy w kanale.

8.3.4. ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W PRZEKROJACH: POZIOMYM I PIONOWYM

Rozkład prędkości w przekroju poziomym prostoosiowego kanału o niezmiennym polu przekroju poprzecznego A i szerokości B możemy określić wzorem przybliżonym

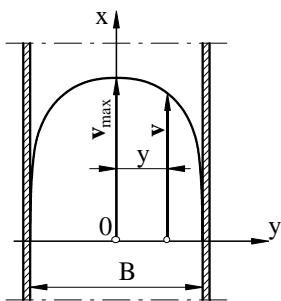
$$v = v_{\max} \left(\frac{B - 2y}{B} \right)^{\frac{1}{7}}, \quad (8.16)$$

w którym:

v_{\max} – prędkość maksymalna w osi przewodu,

y – odległość od osi.

Na rysunku 8.3 przedstawiono krzywą rozkładu prędkości w przekroju poziomym.



Rys. 8.3. Krzywa rozkładu prędkości w prostokątnym kanale otwartym w przekroju poziomym

Rozkład w dowolnym przekroju pionowym równoległym do osi hydraulicznej łożyska określa formuła Bazina (rys. 8.4).

$$v = v_{\max} - \xi z^2, \quad (8.17)$$

w której:

v – miejscowa prędkość przepływu na głębokości z pod zwierciadłem,

ξ – współczynnik zależny od głębokości kanału h i spadku hydralicznego I .

Jeżeli

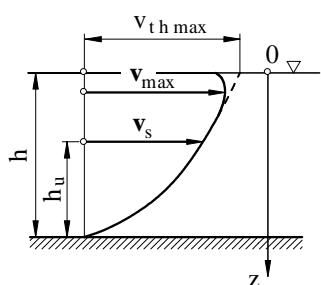
$$R_h \approx h \Rightarrow \xi = \frac{C}{h^2} \sqrt{Ih} \wedge v = v_{\max} - \frac{C}{h^2} \sqrt{Ih} z^2. \quad (8.18)$$

Wzór (8.18) jest zatem przydatny, gdy szerokość kanału jest duża w stosunku do głębokości ($R_h \approx h$). Współczynnik C zależy od chropowatości przewodu i wyznacza się go doświadczalnie. Jeśli prawdziwe jest (8.18), to napiszemy

$$v_s h = \int_0^h v dz = \int_0^h \left(v_{\max} - \frac{C}{h^2} \sqrt{Ih} z^2 \right) dz, \quad (8.19)$$

gdzie v_s – prędkość średnia wzdłuż prostej pionowej (rys. 8.4).

Po obliczeniu całki we wzorze (8.19), oznaczeniu przez h_u głębokość, na której $v = v_s$ i wobec $v_s = v_{\max} - C \sqrt{Ih} (h_u/h)^2$, otrzymamy



$$h_u = \frac{\sqrt{3}}{3} h \approx 0,58h. \quad (8.20)$$

Rys. 8.4. Rozkład prędkości w przekroju pionowym równoległym do osi hydraulicznej kanału

Zależność (8.20) jest stosowana w jednopunktowej metodzie pomiaru średniej prędkości przepływu w szerokim kanale.

Zwróćmy uwagę, że przytoczone wzory do wyznaczania prędkości średniej i rozkładu prędkości są formułami empirycznymi ((8.15), (8.16)) albo półempirycznymi ((8.10), (8.11), (8.18)). Istnieją jeszcze inne formuły do wyznaczania współczynników proporcjonalności we wzorach (8.10), (8.11) w zależności od chropowatości i R_h . Zwraca uwagę mało precyzyjne ujęcie wpływu chropowatości na współczynnik C w przytoczonych formułach empirycznych. Poszczególne wzory mogą dawać znacznie różniące się wyniki.

8.3.5. NAJKORZYSTNIEJSZY PRZEKRÓJ POPRZECZNY KANAŁU

Hydraulicznie najkorzystniejszy jest taki przekrój, przez który przy danych: spadku hydraulicznym I i polu powierzchni przekroju A , strumień objętości q_V cieczy płynącej ruchem jednostajnym jest maksymalny.

Z formuły de Chezy'ego (8.11) i wzorów (8.13), (8.14) wynika, że największą prędkość średnią uzyskamy przy największym R_h . Dla określonego pola powierzchni przekroju poprzecznego strugi maksymalny strumień objętości wystąpi więc przy minimalnym obwodzie zwilżonym (zob. (8.11)).

Ze względów technologicznych często stosuje się przekrój trapezowy. Rozpatrzmy więc, jaki warunek musi spełniać najkorzystniejszy przekrój trapezowy (rys. 8.5).

Niech będzie dany kanał trapezowy o kącie pochylenia skarp α i polu powierzchni przekroju A . Zatem

$$A = h(b + h \operatorname{ctg} \alpha). \quad (8.21)$$

Obwód zwilżony

$$U = b + \frac{2h}{\sin \alpha} = \frac{A}{h} + h \left(\frac{2}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right). \quad (8.22)$$

Warunek na minimum U

$$\frac{dU}{dh} = -\frac{A}{h^2} + \frac{2}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha = 0, \quad (8.23)$$

ale z równania (8.21) uzyskamy

$$\frac{A}{h^2} = \frac{b}{h} + \operatorname{ctg} \alpha,$$

co po podstawieniu do (8.23) daje

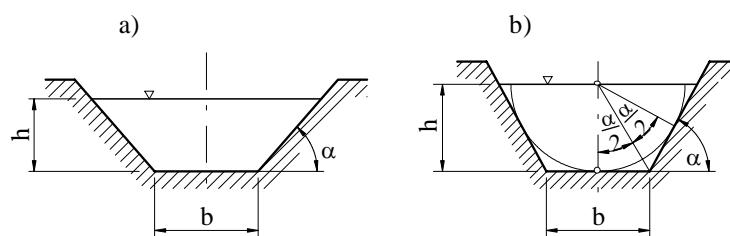
$$\frac{b}{h} = 2 \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) = \frac{2(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (8.24)$$

Warunek (8.23) spełnia trapez opisany na półkolu (rys. 8.5b). Stąd przy $\alpha = \pi/2$ (prostokąt) otrzymamy $h = b/2$. Oznacza to, że kanał o przekroju prostokątnym i polu $A = bh$ jest hydraulicznie najkorzystniejszy, gdy $h = b/2$.

Promień hydrauliczny, który odpowiada stosunkowi b/h , danemu wzorem (8.24), wynosi

$$R_h = \frac{A}{U} = \frac{h}{2}, \quad (8.25)$$

co otrzymamy ze wzorów (8.21), (8.22) oraz (8.24).



Rys. 8.5. Przekrój poprzeczny kanału otwartego: a) trapezowy, b) trapezowy najkorzystniejszy

Najkorzystniejszy kąt pochylenia skarp obliczamy ze wzoru (8.22), do którego wprowadzimy warunek (8.25) i otrzymamy

$$U = \frac{Uh}{2h} \frac{2A}{U} \left(\frac{2}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \Rightarrow U^2 = 4A \left(\frac{2}{\sin \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right).$$

Warunek na minimum U

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{2}{\sin \alpha} \operatorname{ctg} \alpha \right) = 0, \quad (8.26)$$

skąd

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad.} \quad (8.27)$$

Najdogodniejszym spośród przekrojów trapezowych jest trapez opisany na półkolu o skarpach pochylonych pod kątem $\pi/3$ rad względem poziomu.

8.3.6. PRZEPŁYW W RURACH NIECAŁKOWICIE WYPEŁNIONYCH CIECZĄ

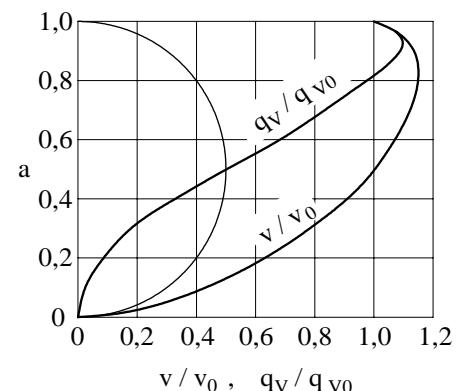
Z tego rodzaju ruchem spotykamy się najczęściej w urządzeniach kanalizacyjnych, których przewody są zazwyczaj rurami o przekroju kołowym, jajowym, gruszkowym. Bywają także budowane przewody kanalizacyjne z rur o innych przekrojach.

Strumień objętości wyznaczamy na podstawie wzoru de Chezy'ego (8.11) z zależności

$$q_V = A C \sqrt{I R_h} . \quad (8.28)$$

Jeśli głębokość cieczy będzie wynosić $h < d$, to stosunek $a = h/d$ nazwiemy *stopniem napełnienia*. Nietrudno spostrzec, że A i R_h zależą od a , zatem q_V oraz v zależą również od a . Oznaczając przez q_{V0} , v_0 strumień objętości i prędkość obliczoną dla całkowicie napełnionej rury, możemy wyznaczyć q_V/q_{V0} , v/v_0 w zależności od stopnia napełnienia h/d posługując się formułą de Chezy'ego, w której C można obliczyć ze wzorów (8.13), (8.14). Zależności te w przypadku przekroju kołowego przedstawiono na rysunku 8.6. Wartości q_{V0} można wyznaczyć ze wzoru (8.28) dla różnych średnic d i spadków hydraulicznych I , które w tym przypadku są równe spadkom dna (wzór (8.5)).

Rys. 8.6. Zależności bezwymiarowej prędkości i strumienia objętości od stopnia napełnienia kanału otwartego o przekroju kołowym



8.4. RUCH NIERÓWNOMIERNY W PRZEWODACH OTWARTYCH

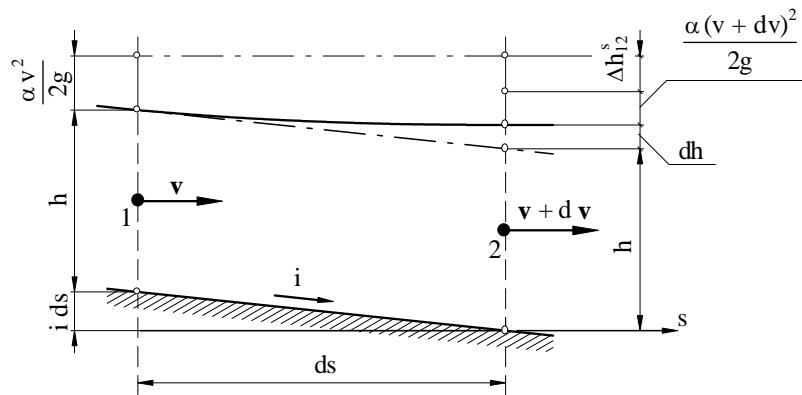
8.4.1. RÓWNANIE NIERÓWNOMIERNEGO RUCHU USTALONEGO

Weźmy pod uwagę dwa przekroje poprzeczne prostoliniowego kanału o niezmiennym przekroju łożyska i pochyleniu dna $i = \text{const}$ odległe od siebie o ds (rys. 8.7). Ruch w kanale będziemy traktowali jako wolnozmienny, tzn. taki, w którym krzywizna linii zwierciadła jest mała, a prędkości elementów cieczy są prawie prostopadłe do przekroju przepływowego i przy tym założeniu napiszemy równanie Bernoulliego dla przekrojów 1. i 2.

$$(h + i ds) + \frac{\alpha v^2}{2g} = (h + dh) + \frac{\alpha(v + dv)^2}{2g} + dh_{12}^s . \quad (8.29)$$

We wzorze (8.29) założyliśmy jednakowy współczynnik Coriolisa w obydwu przekrojach.

Straty hydrauliczne dh_{12}^s na drodze 1–2 wyznaczamy ze wzoru de Chezy'ego (8.11) i definicji spadku hydraulicznego (8.5). Po pominięciu wyrazów nieskończoności małych rzędu wyższego niż pierwszy otrzymamy



Rys. 8.7. Ruch nierównomierny w kanale otwartym

$$i \, ds = dh + \frac{\alpha v \, dv}{g} + \frac{v^2}{C^2 R_h} \, ds . \quad (8.30)$$

Ponieważ

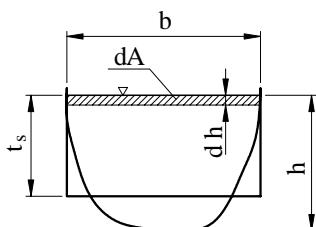
$$v = \frac{q_V}{A} \Rightarrow dv = \frac{-q_V}{A^2} dA , \quad (8.31)$$

więc

$$i \, ds = dh - \frac{\alpha q_V^2}{g A^3} dA + \frac{q_V^2}{C^2 R_h A^2} \, ds . \quad (8.32)$$

Uwzględniając fakt, że $dA = b \, dh$ (b – szerokość zwierciadła cieczy w przekroju 2. – rys. 8.8), otrzymamy

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - q_V^2/C^2 A^2 R_h}{1 - \alpha b q_V^2/g A^3} . \quad (8.33)$$



Równanie (8.33) jest równaniem *ustalonego ruchu nierównomiernego, wolnozmiennego* w kanałach otwartych. Po scalkowaniu równanie to daje możliwość określenia kształtu linii zwierciadła cieczy.

Rys. 8.8. Przyrost pola przekroju przepływowego na drodze ds

Zauważmy, że:

- a) $(ds/dh = 0) \Rightarrow$ ruch jest *równomierny*, wówczas $i - q_V^2/C^2 A^2 R_h = 0 \Rightarrow v = C \sqrt{IR_h}$,

- b) $(i - q_v^2/C^2 A^2 R_h) > 0 \wedge 1 - abq_v^2/gA^3 = 0 \Rightarrow dh/ds = \infty$ – powierzchnia swobodna tworzy pionowy próg wodny, zwany *progiem Bidone'a*,
c) $(i - q_v^2/C^2 A^2 R_h) > 0$ – powierzchnia swobodna cieczy wznosi się, tworząc tzw. *krzywą spiętrzenia*,
d) $(i - q_v^2/C^2 A^2 R_h) < 0$ – głębokość strugi maleje w kierunku przepływu.

8.4.2. ENERGIA ROZPORZĄDZALNA W PRZEKROJU PRZEPŁYWOWYM KANAŁU

Weźmy pod uwagę prostokątny kanał o niezmiennym przekroju łożyska. Linia energii jest wzniesiona ponad zwierciadło swobodne na wysokość $\alpha v^2/2g$. Ciśnienia statycznego nie bierzemy pod uwagę, ponieważ jest ono jednakowe wzdłuż całej strugi i równe ciśnieniu atmosferycznemu.

Jeśli głębokość strugi oznaczamy przez h , to linia energii leży na wysokości $\alpha v^2/2g + h$ ponad dnem kanału.

Wysokość energii rozporządzalnej E w rozpatrywanym przekroju wynosi zatem

$$E = h + \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (8.34)$$

Po wykorzystaniu równania ciągłości otrzymamy

$$E = h + \frac{1}{A^2} \frac{\alpha q_v^2}{2g}. \quad (8.35)$$

Ponieważ pole przekroju strugi zależy wyłącznie od napełnienia, więc

$$A = A(h),$$

a zatem

$$E = E(h).$$

Zwróćmy uwagę, że

$$\begin{aligned} h \rightarrow 0 \wedge A \rightarrow 0 &\Rightarrow E \rightarrow \infty, \\ h \in (0, \infty) &\Rightarrow E(0, \infty), \\ h \rightarrow \infty \wedge A \rightarrow \infty &\Rightarrow E \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Z (8.36) wynika wniosek, że istnieje $h \equiv h_{kr} \in (0, \infty)$, dla którego $E = E_{\min}$ (h_{kr} – wysokość krytyczna).

Warunek na minimum E ma postać

$$\frac{dE}{dh} = 0 = 1 - \frac{A'}{A^3} \alpha \frac{q_v^2}{g}. \quad (8.37)$$

Uzyskaliśmy go przez obliczenie pochodnej po h z (8.35).

Wzór (8.37) napiszemy w prostszej postaci, mianowicie

$$0 = 1 - \frac{b}{A^3} \alpha \frac{q_V^2}{g}, \quad (8.38)$$

gdzie $b = dA/dh = A'$ jest szerokością swobodnego zwierciadła cieczy (rys. 8.8).

Niech $E = \text{idem}$, parametrami zaś niech będą h i q_V . Zbadamy, jak zmienia się q_V podczas zmiany napełnienia, które może przybierać wartości $h \in (0, E)$ (zob. (8.34)).

Po przekształceniu równania (8.35) do postaci

$$q_V^2 = \frac{2g}{\alpha} A^2 (E - h),$$

widzimy, że

$$\begin{aligned} h \rightarrow 0 &\Rightarrow A \rightarrow 0 \Rightarrow q_V \rightarrow 0, \\ h \in (0, E) &\Rightarrow q_V \in (0, \infty), \\ h \rightarrow E &\Rightarrow q_V \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Z (8.39) wnioskujemy, że q_V musi mieć w $(0, E)$ maksimum.

Warunek na maksimum q_V jest następujący

$$2A A' (E - h) - A^2 = 0. \quad (8.40)$$

Po wprowadzeniu szerokości zwierciadła swobodnego b i skorzystaniu z równania (8.35) otrzymujemy wzór (8.38) w postaci

$$\frac{1}{A^2} \alpha \frac{q_V^2}{2g} = \frac{A}{2b}.$$

Ponieważ $A = A(h)$, istnieje więc głębokość $h = h_{kr}$, dla której warunek (8.38) jest spełniony. Stąd wniosek, że głębokość krytyczna h_{kr} to taka, że dla $q_V = \text{idem}$ energia strugi osiąga minimum, a dla $E = \text{idem}$ strumień objętości q_V osiąga maksimum.

Zapiszmy warunek (8.38) w postaci

$$1 = \alpha \left(\frac{q_V}{A} \right)^2 \frac{b}{g A} \quad (8.41)$$

i zauważymy, że

$$\left(\frac{q_V}{A} \right)^2 \frac{b}{g A} = \frac{v^2}{g t_s} = Fr, \quad (8.42)$$

przy czym:

$t_s = A/b$ – średnia głębokość cieczy,

Fr – liczba Froude'a (zob. wzór (6.79)), w której charakterystycznym wymiarom liniowym jest $l = t_s$;

stąd wynika związek między krytyczną liczbą Froude'a Fr_{kr} i odpowiadającą jej średnią głębokością t_{skr}

$$\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{q_V}{A} \right)^2 \frac{1}{g t_{\text{skr}}} = \frac{v^2}{g t_{\text{skr}}} = \text{Fr}_{\text{kr}}. \quad (8.43)$$

Oznacza to, że głębokość krytyczna występuje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba Froude'a wynosi $1/\alpha$. Z krytyczną wartością liczby Froude'a wiąże się prędkość krytyczna, którą wyznaczamy ze wzoru (8.43)

$$v = \sqrt{gt_{\text{skr}}} = v_{\text{kr}} \quad \text{dla } \alpha \approx 1. \quad (8.44)$$

Ruch krytyczny występuje w przyrodzie tam, gdzie struga musi gromadzić energię do przekroczenia pewnej przeszkody. Następuje wtedy spiętrzenie wody do minimalnego poziomu, wystarczającego do wywołania zadanego przepływu. Na przykład, gdy kanał jest zwężony na pewnym odcinku, a jego energia nie wystarcza do wywołania koniecznych prędkości w przewężeniu, następuje piętrzenie przed przeszkodą i akumulacja energii dopóty, dopóki nie wystarczy ona do zapewnienia właściwego przepływu. Z definicji będzie to ruch krytyczny, jako wymagający najmniejszej energii.

Druga właściwość ruchu krytycznego wynika ze wzoru (8.44). Wyrażenie $\sqrt{gt_s}$ określa prędkość rozchodzenia się fal i innych zaburzeń w kanałach o swobodnej powierzchni. W ruchu krytycznym i przepływach szybszych wszelkie zaburzenia nie mogą się więc przenosić w górę kanału. Znaczy to, że w tych przepływach przeszkody mają wpływ tylko na ruch w części kanału położonej poniżej.

8.4.3. PRZEPŁYW SPOKOJNY I RWĄCY

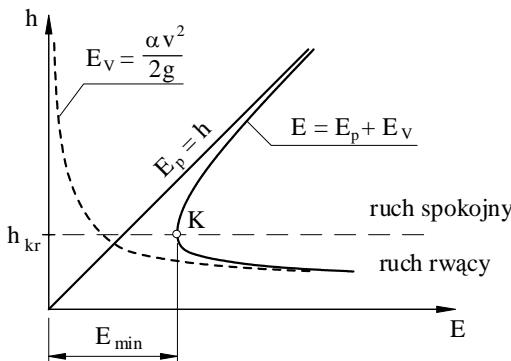
Rozpatrzmy ruch cieczy w kanale prostokątnym o szerokości b . Energia rozporządzalna w pewnym przekroju tego kanału jest przedstawiona wzorem (8.34). Niech będzie dany pewien przepływ o strumieniu objętości $q_V = \text{idem}$, wówczas, korzystając ze wzoru (8.35), energię E w kanale prostokątnym wyrazimy następująco

$$E = h + \frac{\alpha}{2g} \left(\frac{q_V}{b h} \right)^2. \quad (8.45)$$

Interpretację geometryczną wzoru (8.45) przedstawiono na rysunku 8.9. Powyżej punktu krytycznego K występuje obszar przepływów spokojnych, poniżej obszar przepływów rwących. Przepływy rwące charakteryzują się dużą wysokością energii kinetycznej E_v i mogą wywierać silne działanie erozyjne na kanał.

W celu stwierdzenia, czy określony ruch jest spokojny, czy rwący skorzystamy ze wzoru (8.41), który zapiszemy w postaci

$$1 = \alpha \frac{v^2}{2g} \frac{2}{t_s}.$$



Rys. 8.9. Zależność wysokości jednostkowej energii rozporządzalnej od głębokości strugi:
 E – energia całkowita, E_p – energia potencjalna, E_v – energia kinetyczna

Ponieważ $\alpha v^2/2g = E_v$ jest energią kinetyczną, ruch krytyczny występuje wówczas, gdy $t_s = t_{skr} = 2E_v$, natomiast

$$\begin{aligned} t_s < 2E_v &\Leftrightarrow \text{ruch rwący}, \\ t_s > 2E_v &\Leftrightarrow \text{ruch spokojny}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Zwróćmy uwagę, że (8.46) jest równoważne następującemu *kryterium podziału na przepływ spokojny i rwący*, wynikającemu z (8.44) (por. także p. 8.2.1):

$$\begin{aligned} v > \sqrt{gt_s} &\Leftrightarrow \text{ruch rwący}, \\ v < \sqrt{gt_s} &\Leftrightarrow \text{ruch spokojny}, \end{aligned}$$

przy czym:

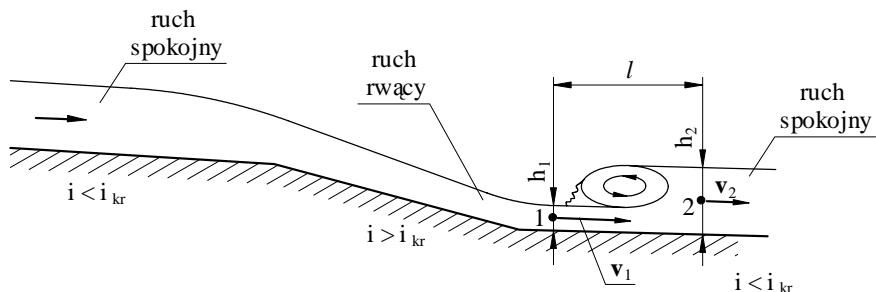
- v – średnia prędkość przepływu,
- $\sqrt{gt_s}$ – prędkość rozchodzenia się fali powierzchniowej na powierzchni cieczy o średniej głębokości wynoszącej t_s .

8.4.4. PRÓG WODNY

Rozważmy zjawiska przechodzenia przepływu spokojnego w rwący i rwącego w spokojny. Zjawiska występujące podczas takiego przejścia najłatwiej jest zaobserwować, gdy na pewnym odcinku kanał ma zmienny spadek (rys. 8.10) lub występuje wypływ cieczy spod zasuwy przedstawionej schematycznie na rysunku 8.11.

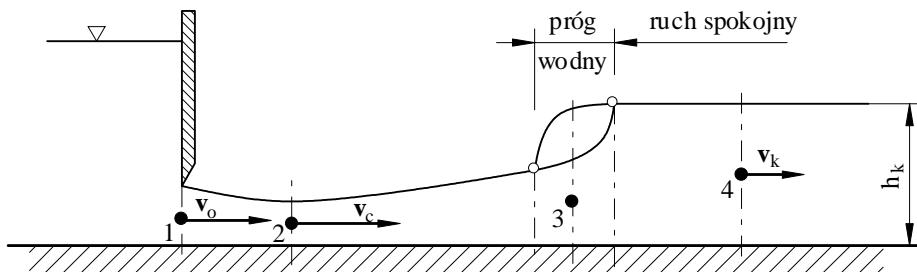
Podeczas przepływu przez kanał o zmiennym spadku, jak na rysunku 8.10, ruch jednostajny byłby odpowiednio spokojny, rwący i znów spokojny. Po pierwszej zmianie spadku przejście jest łagodne, prędkość wzrasta równomiernie, a zwierciadło płynne zmienia swoje położenie. Inaczej przedstawia się sytuacja podczas przejścia

z ruchu rwącego w spokojny. Obserwuje się tu strefę bardzo silnych zaburzeń, w której głębokość gwałtownie wzrasta, tworząc próg albo *odskok hydrauliczny* (Bidone'a). Również rozpatrując wypływ cieczy spod zasuwy (rys. 8.11) umieszczonej w prostokątnym, szerokim kanale ($R_h \approx h$) o małym spadku dna, zauważamy, że przy wypływie z prędkością średnią v_o istnieje przekrój (na rysunku jest to 2.), w którym prędkość jest maksymalna i wynosi v_c . Następnie prędkość maleje, aby osiągnąć wartość v_k (przekrój 4.) równą prędkości ruchu równomiernego w rozważanym przewodzie. Między przekrojami 2. i 4. powstaje odskok hydrauliczny, gdzie prędkość maleje z v_c do v_k . Przyczyną tego zjawiska jest stwierdzony doświadczalnie fakt, iż strata energii jest proporcjonalna do kwadratu prędkości (v^2), a wzrost głębokości do prędkości v .



Rys. 8.10. Przejście z ruchu spokojnego w rwący i z rwącego w spokojny

Zjawisko to obserwujemy również w innych przypadkach, np. w przepływie przez kanał mierniczy Venturiego o ruchu rwącym, poniżej jazów, zapór.



Rys. 8.11. Kształtowanie się odskoku hydraulicznego w wypływie spod zasuwy

Progiem (odskokiem) hydraulicznym będziemy zatem nazywać gwałtowne zwiększenie się głębokości strugi przy jednoczesnym zmniejszeniu prędkości.

W celu wyprowadzenia równania odskoku hydraulicznego wydzielimy objętość kontrolną strugi zawartą między dwoma przekrojami 1. i 2. (patrz rys. 8.10).

W rozważaniach założymy, że:

1. Składowa sił ciężkości, równoległa do dna, ma w porównaniu z innymi siłami na tyle małą wartość, że można ją pominać (spadki dna są małe).
2. Przekroje leżą blisko siebie, pomijamy więc siły tarcia.
3. Rozkłady prędkości w rozpatrywanych przekrojach są podobne, a współczynnik pędu $\beta \approx 1^1)$.

Przyjmując zatem założenia 1.–3., zastosujemy do rozważanego przypadku zasadę zachowania pędu (p. 3.2), skąd otrzymamy

$$\rho q(v_1 - v_2) = \rho g \left(\frac{h_2^2}{2} - \frac{h_1^2}{2} \right), \quad (8.47)$$

przy czym:

$q = qv/b$ (b – szerokość kanału),
 v_1, v_2 – prędkość w przekrojach 1. i 2.,
 h_1, h_2 – głębokość w przekrojach 1. i 2.

Wyrażenia $\rho gh_1^2/2$, $\rho gh_2^2/2$ to siły powierzchniowe działające w przekrojach 1. i 2., odniesione do jednostki szerokości i otrzymane przy założeniu hydrostatycznego rozkładu ciśnienia wzduż prostej pionowej. Są to więc napory na ścianę płaską odpowiednio o wysokości h_1 i h_2 i jednostkowej szerokości działające na pionowe płaszczyny objętości kontrolnej (stąd ich znaki są przeciwnie).

Ponieważ

$$v_i = \frac{q}{h_i}, \quad i = 1, 2, \quad (8.48)$$

otrzymamy

$$\frac{h_1^2}{2} + \frac{q^2}{gh_1} = \frac{h_2^2}{2} + \frac{q^2}{gh_2}. \quad (8.49)$$

Jeżeli głębokość h w kanale za odskokiem jest różna od głębokości h_2 sprężonej z h_1 , to następuje przesunięcie odskoku. Gdy:

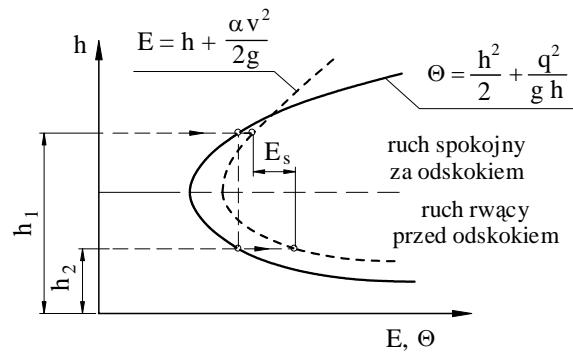
$h > h_2$ – odskok przesuwa się w kierunku zasuwy,
 $h < h_2$ – odskok przesuwa się w dół kanału dopóty, dopóki głębokość h_1 , rosnąca wskutek strat energii, nie osiągnie wartości sprężonej z h .

Dla danego przepływu q można określić funkcję Θ

$$\Theta(h) = \frac{h^2}{2} + \frac{q^2}{gh}, \quad (8.50)$$

¹⁾ Zob. odsyłacz do wzoru (7.42).

której wykres przedstawiono na rysunku 8.12. Dla obu głębokości sprężonych wartości $\Theta(h)$ są jednakowe i można je dobrać bezpośrednio z wykresu. Na rysunku tym przedstawiono również krzywą $E = E(h)$. Pozwala to na odczytanie wysokości energii straconej na odskoku. Jak widać z wykresu, obie krzywe $E = E(h)$ oraz $\Theta = \Theta(h)$ mają minimum przy tej samej głębokości $h = h_{kr}$.



Rys. 8.12. Zależność krzywej wysokości jednostkowej energii rozporządzalnej E oraz funkcji Θ od głębokości strugi

Długość odskoku, istotną ze względu na konieczność umocnienia dna kanału, można wyznaczyć ze wzorów doświadczalnych.

Systematyczne badania nad długością l progu wodnego prowadził Bachmietiew, a wyniki swych badań podał w postaci wykresu przedstawiającego zależność stosunku l/h_2 od liczby $Fr = v_1^2/g h_1$. Z przebiegu krzywej doświadczalnej wynika, iż długość progu wodnego jest zawarta w granicach

$$l = (4,3 \div 5,2) h_2. \quad (8.51)$$

Długość progu wodnego określa również wzór Wójcickiego

$$l = \left(8 - 0,05 \frac{h_2}{h_1} \right) (h_2 - h_1). \quad (8.52)$$

9. RUCH PŁYNÓW W OŚRODKACH POROWATYCH

9.1. OPIS PRZEPŁYWU W OŚRODKU POROWATYM

9.1.1. PODSTAWOWE POJĘCIA

Grunty naturalne lub sztuczne materiały ziarniste, a zatem ciała o dużej liczbie kanałków, otworów i szczelin, nazywamy *ośrodkiem porowatym*. W porach, tworzących nieregularny i rozgałęziony układ wielu kanalików o zmiennych wymiarach, może odbywać się ruch płynu (cieczy lub gazu) nazywany *filtracją*. Analiza teoretyczna takiego przepływu jest możliwa pod warunkiem, że cząstki będą jednakowe, zwykle kuliste i regularnie upakowane. Wtedy można obliczyć ich *porowatość* m . W rzeczywistości, ze względu na możliwą różnorodność zarówno kształtów ziaren, jak i ich rozmieszczenia, ośrodki porowate z dokładnością wystarczającą do zastosowań praktycznych wystarczy scharakteryzować: *współczynnikami porowatości i jednorodności*.

Podstawowym wskaźnikiem własności ośrodka filtracyjnego jest *współczynnik porowatości*, definiowany jako stosunek objętości porów V_p zajmowanej przez materiał warstwy ziarnistej do całkowitej objętości warstwy V

$$m = \frac{V_p}{V}. \quad (9.1)$$

Jest to porowatość *objętościowa*.

Porowatość m ośrodka zbudowanego z kulistych ziaren o tej samej średnicy zmienia się w zakresie od około 25 do 50% (w zależności od sposobu upakowania), ale w przypadku torfu sięga 80%.

Niekiedy stosowany jest *współczynnik porowatości powierzchniowej*, definiowany jako stosunek pola powierzchni A_p zajmowanej przez pory do pola powierzchni całego przekroju złoża

$$m_A = \frac{A_p}{A} = \frac{A_p}{A_p + A_z}, \quad (9.2)$$

gdzie A_z – pole powierzchni ziaren w danym przekroju.

Dla przypadkowo ułożonych ziaren porowatość powierzchniowa jest prawie równa porowatości objętościowej ($m_A \approx m$).

Rozmaitość form i wielkości ziaren złoż filtracyjnych wskazuje na ich *niednorodność*, przy czym w celu jej scharakteryzowania konieczne jest określenie jednej zastępczej średnicy dla danego ośrodka porowatego. Wprowadza się zatem pojęcie *średnicy miarodajnej*, która charakteryzuje się tym, że jednorodne złożo filtracyjne złożone z ziaren o tej średnicy ma takie same właściwości filtracyjne jak ośrodek naturalny. Rozkład wielkości ziaren w pewnej objętości ośrodka porowatego, a więc jego uziarnienie, uzyskuje się przez wykonanie analizy sitowej¹⁾. Na podstawie doświadczeń przyjęto, że za *miarodajną średnicę ośrodka porowatego* można przyjąć średnicę d_{10} , czyli średnicę odpowiadającą 10% na krzywej przesiewu. Oznacza to, że gdyby grunt składał się z kulek o średnicy d_{10} , współczynnik filtracji byłby taki sam jak dla rozpatrywanego złoża.

W zależności od struktury można umownie traktować złożo filtracyjne o zbliżonej wszędzie strukturze jako *jednorodne*, ich przeciwieństwem są złożo *niednorodne*.

9.1.2. FILTRACJA WÓD GRUNTOWYCH

Ruch wód gruntowych jest szczególnym przypadkiem ruchu cieczy w ośrodku porowatym. Odbiera się on w porach utworzonych przez przylegające do siebie ziarenka gruntu (np. piasku, żwiru). Grunty mogą być *niednorodne* lub *jednorodne* (w zależności od ich struktury), a ponadto *anizotropowe* (gdy ich właściwości filtracyjne zależą od kierunku ruchu wody) lub *izotropowe* (jeżeli nie zależą).

Woda może występować w gruncie jako:

- para wodna wypełniająca szczeliny,
- woda higroskopijna, utrzymująca się w szczelinach wskutek sił międzyczas- teczowych,
- woda kapilarna, utrzymująca się między ziarnami na skutek działania napięcia powierzchniowego,
- woda gruntowa, wypełniająca pory i szczeliny, która może poruszać się w tym ośrodku pod wpływem sił ciężkości.

W dalszym ciągu zajmiemy się filtracją wód gruntowych pod *wpływem siły ciężkości*.

Z uwagi na złożony kształt i zmienne przekroje kanalików określenie miejscowości prędkości cieczy w złożu filtracyjnym jest niemożliwe i bezcelowe z punktu widzenia praktycznego. W opisie i obliczeniach zagadnień filtracji wprowadza się model, zwany *przepływem filtracyjnym*, zakładając, że ten przepływ zachodzi w umownym obszarze filtracji nie zawierającym ziaren. W obszarze tym *umowna prędkość filtracji* v jest obliczana z zależności

$$v = \frac{q_v}{A}, \quad (9.3)$$

w której:

q_v – strumień objętości,

A – pole przekroju poprzecznego złoża (łącznie ziaren i porów).

¹⁾ Na podstawie przesiewu badanej próbki przez zestaw sit kalibrowanych.

Tak obliczona prędkość filtracji jest mniejsza od średniej prędkości rzeczywistej, która w rozważanym złożu filtracyjnym o całkowitym polu przekroju A wynosi

$$v_{rz} = \frac{q_v}{A_p} = \frac{Av}{A_p} = \frac{1}{m_A} v . \quad (9.4)$$

Prędkość filtracji jest więc związana ze średnią fizyczną prędkością płynu (w wolnych przestrzeniach) za pośrednictwem współczynnika porowatości złoża.

Wprowadzenie niefizycznej prędkości filtracji upraszcza sposób obliczania objętości płynu filtrowanego przez złoże.

Przepływy wód gruntowych, ze względu na ich niewielką prędkość oraz małe przekroje kanalików, mają charakter laminarny (z wyjątkiem przepływu przez grunt z grubego żwiru, złoże z kamieni itp.). Stan ruchu charakteryzuje liczba Reynolds, odniesiona do miarodajnej średnicy ziarna,

$$Re = \frac{v d_{10}}{\nu} ,$$

w której:

v – prędkość filtracji,

d_{10} – miarodajna średnica ziarna,

ν – kinematyczny współczynnik lepkości płynu filtrującego.

Doświadczalnie stwierdzono, że

$$\frac{vd_{10}}{\nu} \leq 1 \Rightarrow \text{przepływ laminarny}^1 .$$

9.1.3. PODSTAWOWE ZAGADNIENIE FILTRACJI. DOŚWIADCZENIE DARCY'EGO

Opiszmy przepływ cieczy w jednorodnym ośrodku porowatym, którym może być na przykład warstwa gruntu. Na rysunku 9.1 przedstawiono cylinder o polu przekroju poprzecznego warstwy A , wypełniony badanym gruntem, leżącym między dwiema siatkami S . Do cylindra od góry przewodem P doprowadzana jest ciecz, której zwierciadło jest utrzymywane na stałym poziomie (przelew B). W dolnej części kolumny (poniżej dolnej siatki) ciecz jest odprowadzana przewodem C do naczynia w celu pomiaru filtrującego strumienia objętości q_v .

Piezometry umieszczone w przekrojach 1. i 2. odległych o Δl mierzą spadek wysokości ciśnienia na tym odcinku złoża filtracyjnego.

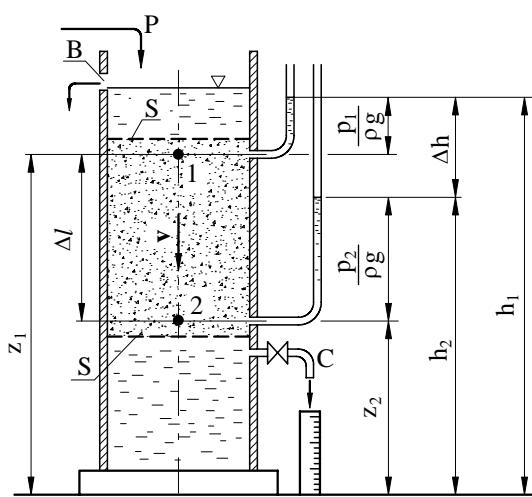
Doświadczenia, wykonane w 1856 r. przez Darcy'ego, pokazały, że strumień objętości²⁾ q_v jest proporcjonalny do pola powierzchni cylindra A i do spadku hydraulicznego I

¹⁾ Niektórzy autorzy dopuszczają $Re < 5$.

²⁾ Nazywany niekiedy wydatkiem filtracyjnym.

$$q_V = k A I, \quad (9.5)$$

gdzie k jest współczynnikiem filtracji zależnym od właściwości gruntu i przepływającej cieczy.



Rys. 9.1. Doświadczenie Darcy'ego

Wartości współczynnika filtracji w ogólnym przypadku mogą zależeć od kierunku przepływu w złożu filtracyjnym, dlatego właściwości filtracyjne gruntu w danym miejscu są określane przez współczynniki k_x , k_y , k_z . Dla ośrodka *izotropowego* współczynniki te są jednakowe, a w przypadku gruntu *jednorodnego* są sobie równe w poszczególnych punktach obszaru, zatem w całej przestrzeni ośrodka porowatego $k_x = k_y = k_z = k = \text{const.}$

Z uogólnionego równania Bernoulliego (7.18) wynika, że wysokość spadku ciśnienia między przekrojami 1. i 2. jest różnicą wskazań piezometrów

$$\Delta h = h_1 - h_2 = (z_1 + p_1/\rho g) - (z_2 + p_2/\rho g), \quad (9.6)$$

gdzie p_1 i p_2 są nadciśnieniami w tych przekrojach¹⁾.

Spadek hydrauliczny na długości Δl (zgodnie z p. 6.4.1) wynosi

$$I = \frac{\Delta h}{\Delta l}, \quad (9.7)$$

a wyrażenie

¹⁾ Wysokości prędkości redukują się, gdyż w obu przekrojach prędkość jest taka sama.

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \quad (9.8)$$

nazywamy *wysokością rozporządzalną strugi*.

Po podstawieniu związków (9.3) i (9.7) do zależności (9.5) otrzymamy

$$v = k \frac{\Delta h}{\Delta l} = k I . \quad (9.9)$$

Wzór ten, podany przez Darcy'ego, nazywamy *prawem filtracji ruchu równomiernego*.

W przypadku stałego spadku hydraulicznego przekroje 1. i 2. można obrać dowolnie (rys. 9.1). Gdy zależność ta jest nieliniowa, należy uwzględnić miejscowy spadek hydrauliczny

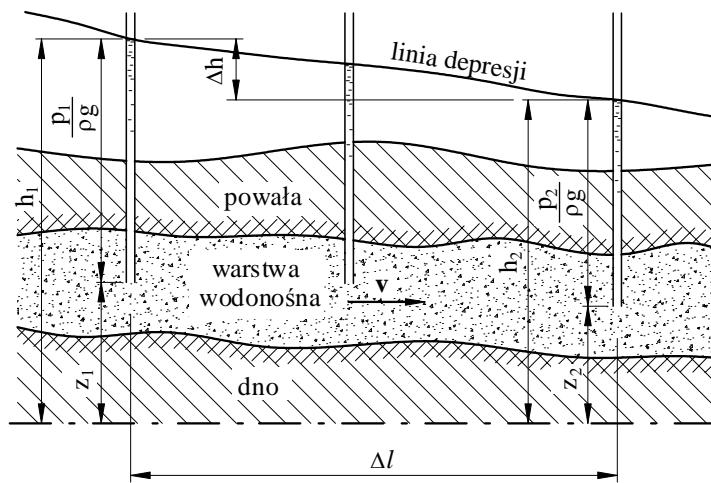
$$I = \frac{dh}{dl} , \quad (9.10)$$

a zależność (9.9) będzie teraz postaci

$$v = k \frac{dh}{dl} . \quad (9.11)$$

Wzór ten, podany przez Dupuita, nazywamy *prawem filtracji wolnozmiennego ruchu nierównomiernego*.

Na rysunku 9.2 pokazano wielkości charakterystyczne wchodzące do równania Darcy'ego w przypadku warstwy wodonośnej ograniczonej od dołu i góry powierzchniami nieprzepuszczalnymi – dnem i powałą.



Rys. 9.2. Warstwa wodonośna

Linia przechodząca przez wierzchołki cieczy w rurkach piezometrycznych nazywa się *linią depresji*. W układzie przestrzennym zamiast linii otrzymamy powierzchnie depresji wód gruntowych.

9.2. RÓWNANIA RUCHU WÓD GRUNTOWYCH

9.2.1. RÓWNANIE ZACHOWANIA PĘDU W RUCHU FILTRACYJNYM

Ruch poszczególnych cząstek wody gruntowej jest na tyle skomplikowany, że nie mamy możliwości opisania go za pomocą równań matematycznych. Można natomiast, z pewnym przybliżeniem, opisać *umowny ruch filtracyjny* w sensie makroskopowym. W tym celu weźmiemy pod uwagę równanie Eulera (5.2), które uzupełnimy składnikiem uwzględniającym siły oporu, ale odrzucimy z niego pochodne względem czasu. Jest to uzasadnione tym, że ruch filtracyjny jest z natury *wolnozmienny*, więc przyspieszenia będą znikome. Poprawione równanie Eulera napiszemy więc w postaci

$$\mathbf{f} + \mathbf{R} - \text{grad } p = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{R} – siła oporów ruchu filtracyjnego odniesiona do jednostki masy (podobnie jak pozostałe składniki równania).

Na podstawie prawa Darcy'ego wyznaczmy jednostkową siłę oporu \mathbf{R} . Weźmy pod uwagę pewne otoczenie punktu zlokalizowanego wewnątrz objętości kontrolnej, w której odbywa się ruch filtracyjny, scharakteryzowany współczynnikiem filtracji k . Jest to więc umowny ośrodek jednorodny, w którym można umieścić umowne linie prądu i tory cząstek poruszających się z fikcyjną prędkością filtracji. Przez rozpatrywany punkt przeprowadzamy najpierw linię prądu elementarnej długości dl , którą następnie otaczamy walcową powierzchnią prądu (rurką prądu) o elementarnym polu przekroju poprzecznego dA . Ponieważ otrzymana objętość elementarna otacza element linii prądu, wektor \mathbf{v} prędkości filtracji jest więc normalny do elementarnych pól dA . Można zatem zastosować prawo Darcy'ego, które tutaj odniesiemy do elementarnego walca o długości dl (i pola podstawy dA), przez który (wzdłuż dl) filtruje płyn z umowną miejscową prędkością filtracji \mathbf{v} . W doświadczeniu Darcy'ego pole filtracji nie było elementarne, a walec miał nieelementarną wysokość Δl , objętość $A \Delta l$ wypełniał natomiast materiał jednorodny, czyli o stałym wszędzie współczynniku k . Uogólnieniem prawa Darcy'ego jest więc przyjęcie, że w otoczeniu punktu leżącego wewnątrz obszaru filtracji materiał jest izotropowy i ma współczynnik k . Stąd, zgodnie ze wzorem (9.9), obliczymy spadek hydraliczny I i dalej z zależności (9.11) spadek ciśnienia dp^s na drodze dl

$$I = \frac{V}{k} \Rightarrow dp^s = \rho g \frac{V}{k} dl \text{¹⁾.$$

¹⁾ $dp = \rho g dh$.

Elementarna siła oporu działająca na element wyniesie wobec tego

$$\rho g \frac{-\mathbf{v}}{k} dl dA .$$

Jednostkową siłę \mathbf{R} obliczymy, dzieląc to wyrażenie przez masę $\rho g dA dl$ rozważanego elementu, zatem

$$\mathbf{R} = -\frac{g}{k} \mathbf{v} .$$

Zwróćmy uwagę na znak minus wynikający stąd, że wektor siły oporu jest przeciwnie skierowany do wektora prędkości \mathbf{v} .

Wektorowe równanie ruchu będzie teraz następujące

$$\mathbf{f} - \frac{g}{k} \mathbf{v} - \text{grad } p = \mathbf{0}, \quad (9.12)$$

przy czym w polu sił ciężkości mamy

$$\mathbf{f} = (0, 0, -g),$$

zaś

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (v_x, v_y, v_z), \\ \text{grad } p &= \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

czyli w miejsce wzoru (9.12) napiszmy układ trzech równań skalarnych

$$\begin{aligned} -\frac{g}{k} v_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ -\frac{g}{k} v_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ -g - \frac{g}{k} v_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Zauważmy, że równanie (9.13) można zapisać w następującej, równoważnej postaci

$$\begin{aligned} v_x &= -k \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right), \\ v_y &= -k \frac{\partial}{\partial y} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right), \\ v_z &= -k \frac{\partial}{\partial z} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right), \end{aligned} \quad (9.14)$$

która, po wprowadzeniu wysokości rozporządzalnej $z + \frac{p}{\rho g} = h$ strugi cieczy w rozpatrywanym punkcie otrzymuje formę

$$\begin{aligned} v_x &= -k \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-kh), \\ v_y &= -k \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-kh), \\ v_z &= -k \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-kh), \end{aligned} \quad (9.15)$$

pod warunkiem, że k nie jest funkcją miejsca.

Wobec tego jednak, że współrzędne v_x, v_y, v_z wektora prędkości filtracji \mathbf{v} są pochodnymi funkcji $-kh = \Phi$ stwierdzamy, że funkcja Φ jest potencjałem prędkości ruchu filtracyjnego.

Ruch wód gruntowych, w granicach stosowności prawa Darcy'ego i dla współczynnika filtracji jednakoowego w całym obszarze, jest więc przepływem potencjalnym. Tym samym potencjał tego ruchu musi spełniać równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 h = 0. \quad (9.16)$$

W przypadku filtracji dwuwymiarowej będzie

$$\begin{aligned} v_x &= -k \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ v_y &= -k \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (9.17)$$

i wtedy

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (9.18)$$

Rozwiązywanie zagadnienia filtracji wód gruntowych ($\text{Re} = v d_{10} / v \leq 1$, $k = \text{const}$) sprowadza się do rozwiązywania równania Laplace'a, do czego są potrzebne warunki brzegowe specyficzne dla danego problemu.

9.2.2. RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI PRZEPŁYWU W OŚRODKU POROWATYM

Założymy, że warstwa wodonośna o zmiennej wysokości h spoczywa na nieprzepuszczalnym podłożu (dnie), leżącym w płaszczyźnie Oxy układu współrzędnych (rys. 9.3). Wydzielimy w tej warstwie prostopadłościan o bokach dx, dy, h . Z założenia

przepływ jest możliwy tylko w kierunkach osi x i y , czyli $v_z = 0$. Przez ścianę $ABCD$, prostopadłą do osi x , w czasie dt , do wydzielonego prostopadłościanu dopływa masa

$$\rho h dy v_x dt,$$

przez ścianę do niej równoległą, w tym samym czasie, wypływa masa

$$\rho \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} dx \right) dy \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dt.$$

Różnica między wypływem i wpływem w kierunku osi x wynosi

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} (v_x h) dx dy dt.$$

Podobnie, różnica między wypływem i wpływem w kierunku osi y

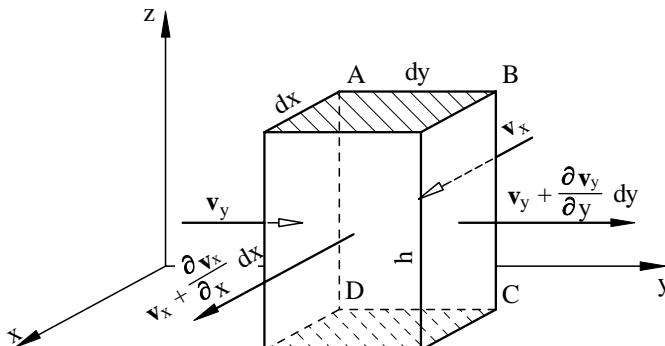
$$\rho \frac{\partial}{\partial y} (v_y h) dx dy dt.$$

Ich suma równa się zeru, czyli

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} (v_x h) dx dy dt + \rho \frac{\partial}{\partial y} (v_y h) dx dy dt = 0,$$

a więc

$$\frac{\partial (v_x h)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y h)}{\partial y} = 0.$$



Rys. 9.3. Elementarna objętość warstwy wodonośnej grubości h

Jak wynika z (9.15) i założenia $v_z = 0$, można napisać

$$v_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial h}{\partial y},$$

stąd

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial h}{\partial x} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k \frac{\partial h}{\partial y} h \right) = 0. \quad (9.19)$$

Ponieważ, wobec $k = \text{const}$, będzie

$$k h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k h^2}{2} \right), \quad k h \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k h^2}{2} \right),$$

otrzymamy w miejsce (9.19)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h^2 = 0. \quad (9.20)$$

Równanie to, w postaci wyprowadzonej przez Boussinesqa, jest *równaniem ciągłości poziomej filtracji cieczy w jednorodnym, izotropowym ośrodku porowatym*. Znajduje ono najczęściej zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień filtracji bezciśnieniowej.

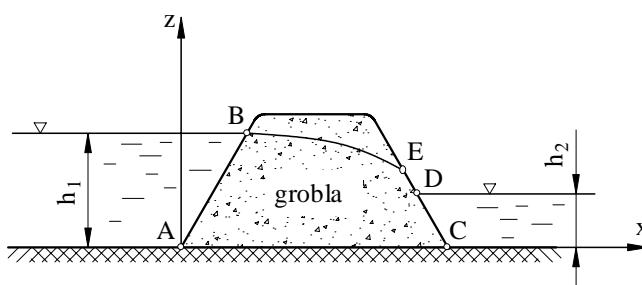
9.3. NIEKTÓRE ROZWIAZANIA RÓWNAŃ FILTRACJI WÓD GRUNTOWYCH

9.3.1. WARUNKI BRZEGOWE W ZAGADNIENIACH FILTRACJI WÓD GRUNTOWYCH

Równanie Laplace'a w postaci (9.16) ma wiele rozwiązań i w celu otrzymania właściwego rozwiązania należy uwzględnić warunki brzegowe tego zadania.

Powierzchnie ograniczające ruch wód gruntowych mogą być następujące:

1. Powierzchnia nieprzepuszczalna (AC na rys. 9.4). Prędkość filtracji w każdym punkcie jest styczna do niej, a więc $\partial \Phi / \partial n = 0$, przy czym n – kierunek normalnej do powierzchni.



Rys. 9.4. Powierzchnie ograniczające obszar filtracji

2. Powierzchnia przepuszczalna (skarpy grobli AB i DC na rys. 9.4). W związku z tym, że prędkości filtracji są małe, zakładamy hydrostatyczny rozkład ciśnienia:

➤ na odcinku AB : $h = h_1$ i $\Phi = -k h_1$,

➤ na odcinku CD : $h = h_2$ i $\Phi = -k h_2$.

3. Powierzchnie swobodne (BE i ED na rys. 9.4). Na tych powierzchniach wysokość nadciśnienia jest równa zeru oraz $\Phi = -k z$.

Przy ustalaniu warunków brzegowych należy odróżnić dwa rodzaje filtracji:

1. Jeżeli na powierzchni ograniczającej obszar filtracji istnieją obszary, gdzie panuje ciśnienie atmosferyczne, to mamy do czynienia z *filtracją bezciśnieniową*.

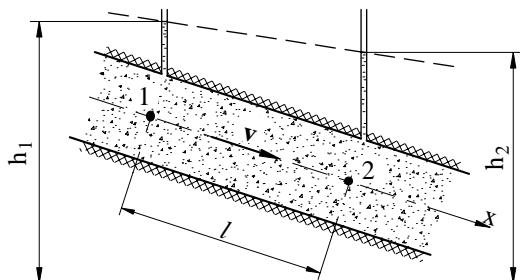
2. Jeżeli w każdym punkcie powierzchni ograniczającej obszar filtracji ciśnienie jest różne od atmosferycznego, jest to *filtracja pod ciśnieniem*.

Wielu zagadnień praktycznych związanych z filtracją nie da się rozstrzygnąć przez rozwijanie równania Laplace'a. Szukamy wtedy innych metod rozwiązywania, np. przez bezpośrednie całkowanie równań filtracji lub przez tzw. odwzorowania konforemne. Zagadnienia te są obszernie omawiane w pracach specjalistycznych.

9.3.2. RÓWNOMIerna FILTRACJA WÓD GRUNTOWYCH

Równomierną filtrację nazywamy taki ruch wód gruntowych, kiedy linie prądu w obszarze filtracji są prostymi równoległymi. Podczas takiej filtracji pola przekrojów poprzecznych strugi cieczy są jednakowe na całej jej długości.

Weźmy pod uwagę równomierną filtrację ciśnieniową w kierunku osi $0x$ równoległej do linii prądu (rys. 9.5).



Rys. 9.5. Przepływ równomierny wód gruntowych

Równanie Laplace'a ruchu jednowymiarowego ma postać

$$\frac{d^2h}{dx^2} = 0,$$

po całkowaniu zaś

$$h = C_1 x + C_2. \quad (9.21)$$

Przyjmiemy warunki brzegowe (dotyczące wysokości rozporządzalnych):

$$\begin{aligned} x = 0, \quad h = h_1 &\Rightarrow C_2 = h_1, \\ x = l, \quad h = h_2 &\Rightarrow C_1 = \frac{h_2 - h_1}{l}, \end{aligned}$$

a więc *równanie linii depresji* ma postać

$$h = \frac{h_2 - h_1}{l} x + h_1. \quad (9.22)$$

Powierzchnie jednakowych wysokości rozporządzalnych dla $x = \text{const}$ są płaszczyznami przekrójów poprzecznych strugi.

Uwzględniając, że

$$I = -\frac{dh}{dx} = \frac{h_1 - h_2}{l},$$

możemy określić prędkość filtracji

$$v = kI = k \frac{h_1 - h_2}{l}, \quad (9.23)$$

a następnie strumień objętości

$$q_V = A v = k A \frac{h_1 - h_2}{l}. \quad (9.24)$$

W przypadku równomiernej filtracji bezciśnieniowej spadek hydrauliczny I równa się spadkowi nieprzepuszczalnego podłoża, a zatem

$$I = i = \sin \alpha. \quad (9.25)$$

Prędkość filtracji

$$v = k i, \quad (9.26)$$

strumień objętości natomiast

$$q_V = A v = k A i. \quad (9.27)$$

9.3.3. DOPŁYW WODY GRUNTOWEJ DO ROWU

W warstwie wodonośnej o powierzchni swobodnej (filtracja bezciśnieniowa) znajduje się rów (dren) sięgający poziomo pokładu nieprzepuszczalnego (rys. 9.6). Długość rowu (mierzoną prostopadle do rysunku) oznaczymy przez b . Wskutek dopływu wody do rowu powierzchnia swobodna wody gruntowej opada w kierunku przepływu, a jej ślad na płaszczyźnie rysunku jest krzywą depresji.

Załóżmy jednowymiarowy przepływ ustalony, czyli przyjmiemy, że dopływ strugi do rowu (drenu) jest równy odpływowi wody z rowu. Z równania (9.20) jednowymiarowej filtracji bezciśnieniowej otrzymamy

$$\frac{d^2}{dx^2} h^2 = 0. \quad (9.28)$$

Całką tego równania jest

$$h^2 = C_1 x + C_2. \quad (9.29)$$

Przyjmujemy następujące warunki brzegowe:
 $x = 0, \quad h = h_0,$
 $x = L_0, \quad h = H_0,$
przy czym L_0 – zasięg depresji.

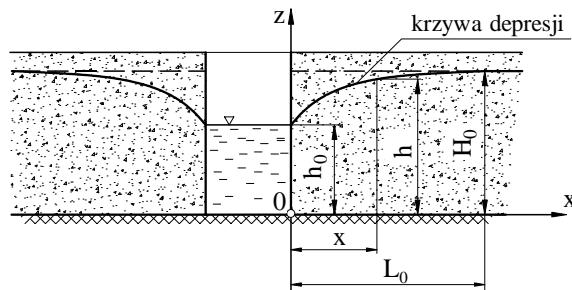
Stałe całkowania

$$C_1 = \frac{H_0^2 - h_0^2}{L_0}, \quad C_2 = h_0^2.$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie

$$h^2 = \frac{H_0^2 - h_0^2}{L_0} x + h_0^2. \quad (9.30)$$

Krzywa depresji jest więc parabolą.



Rys. 9.6. Dopływ wody gruntowej do rowu

Strumień objętości wyznaczamy z równania Dupuita (9.11)

$$q_V = A k \frac{dh}{dx}, \quad (9.31)$$

w którym $A = bh$, a więc

$$q_V = b h k \frac{dh}{dx} = \frac{bk}{2} \frac{dh^2}{dx}. \quad (9.32)$$

Po wyznaczeniu z równania (9.30) dh^2/dx , otrzymamy

$$q_V = \frac{bk}{2} \frac{H_0^2 - h_0^2}{L_0}. \quad (9.33)$$

Omawialiśmy dopływ wody gruntowej do rowu, znajdującej się po jednej stronie rowu. Obustronny dopływ wód gruntowych do rowu lub drenu

$$2q_V = bk \frac{H_0^2 - h_0^2}{L_0}. \quad (9.34)$$

9.3.4. DOPŁYW WODY GRUNTOWEJ DO STUDNI

Omówmy kilka praktycznych przykładów dotyczących dopływu wód gruntowych do różnych typów studni. Zagadnienie polega na określeniu rozkładu prędkości i ciśnienia, a przede wszystkim na wyznaczeniu strumienia objętości wód gruntowych. Wiele zagadnień można interpretować jako przepływy dwuwymiarowe, a te z kolei często łatwiej można opisać w układzie współrzędnych biegunkowych.

W układzie biegunkowym współrzędne prędkości filtracji

$$\mathbf{v}_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \mathbf{v}_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad (9.35)$$

natomaiast równanie Laplace'a (9.18) można przedstawić w postaci

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (9.36)$$

w przypadku zaś filtracji bezciśnieniowej (9.20)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (9.37)$$

Zajmiemy się przepływem osiowo-symetrycznym i takim, że prędkość filtracji zależy tylko od promienia, a więc $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r)$, wówczas $v_\varphi = 0$ i z równań (9.35) oraz (9.36) otrzymamy

$$v_r = \frac{d\Phi}{dr} \quad v_\varphi = 0 \quad (9.38)$$

oraz

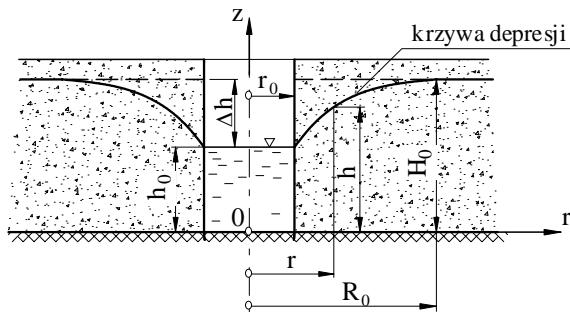
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad (9.39)$$

lub dla filtracji bezciśnieniowej

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} h^2 \right) = 0. \quad (9.40)$$

Studnia zwykła

Rozpatrzmy warstwę wodonośną o wysokości H_0 nad poziomą płaszczyzną nieprzepuszczalną (rys. 9.7). W warstwie tej znajduje się studnia o średnicy $2r_0$, sięgająca do pokładu nieprzepuszczalnego. Wskutek filtracji woda gruntowa przedostaje się do studni, powierzchnia swobodna wód gruntowych obniża się, jednocześnie tworząc wokół studni powierzchnię depresji w kształcie leja. Przekrój tej powierzchni płaszczyzną pionową, przechodzącą przez oś studni, przedstawia krzywą depresji.



Rys. 9.7. Dopływ wody gruntowej do studni zwykłej

Założymy, że filtracja jest ustalona (strumień filtracji jest równy strumieniowi objętości wypompowywanej wody). Po jednokrotnym scałkowaniu równania Laplace'a filtracji bezciśnieniowej (9.40) otrzymamy

$$r \frac{d}{dr} h^2 = C_1,$$

czyli

$$\frac{d}{dr} h^2 = \frac{1}{r} C_1,$$

a po kolejnym całkowaniu

$$h^2 = C_1 \ln r + C_2. \quad (9.41)$$

Przyjmujemy warunki brzegowe:

$$r = r_0, \quad h^2 = h_0^2,$$

$$r = R_0, \quad h = H_0^2.$$

Po podstawieniu do (9.41) otrzymujemy stałe całkowania

$$C_1 = \frac{H_0^2 - h_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}}, \quad C_2 = \frac{h_0^2 \ln R_0 - H_0^2 \ln r_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}}.$$

Stałe te wstawiamy do równania (9.41)

$$h^2 = \frac{H_0^2 - h_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln r + \frac{h_0^2 \ln R_0 - H_0^2 \ln r_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}},$$

czyli

$$h^2 = \frac{H_0^2 - h_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0} + h_0^2. \quad (9.42)$$

Jest to równanie krzywej depresji. Odległość R_0 , w której zwierciadło wody gruntowej jest praktycznie niezmienione, nazywamy *zasięgiem depresji*. W przypadku kiedy nie mamy możliwości doświadczalnego określenia zasięgu depresji, stosujemy formułę empiryczną Sichardta

$$R_0 = 3000 \Delta h \sqrt{k}, \quad (9.43)$$

z której dla $\Delta h = H_0 - h_0$ (depresji zwierciadła wody w studni podanej w metrach) oraz współczynnika filtracji k (w metrach na sekundę) otrzymujemy zasięg depresji w metrach.

Z równań (9.3) i (9.11) obliczymy strumień objętości

$$q_V = A k \frac{dh}{dr} = A k \frac{dh}{dr}, \quad (9.44)$$

który dla

$$A = 2\pi r h$$

wynosi

$$q_V = 2\pi r h k \frac{dh}{dr} = \pi k r \frac{dh^2}{dr}. \quad (9.45)$$

Po uwzględnieniu zależności (9.42) otrzymamy strumień dopływu wody gruntowej do studni

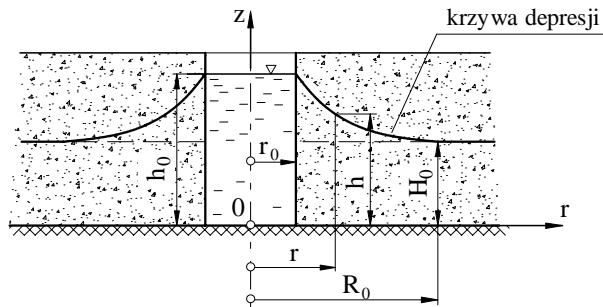
$$q_V = \pi k \frac{H_0^2 - h_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}}. \quad (9.46)$$

Studnia chłonna

Może się zdarzyć, że głębokość wody w studni h_0 jest większa od grubości warstwy wodonośnej H_0 . Mamy wtedy do czynienia ze studnią chłonną, służącą do wprowadzania wód powierzchniowych do gruntu (rys. 9.8).

Podobnie jak w przypadku studni zwykłej, otrzymamy równanie krzywej depresji w postaci analogicznej do przedstawionej w poprzednim punkcie (9.42). Ze względu

na to, że $h_0^2 > H_0^2$, krzywa depresji jest obrócona o kąt π około osi poziomej w porównaniu z krzywą depresji na rysunku 9.7.



Rys. 9.8. Dopływ wody gruntowej do studni chłonnej

Przyjmując równanie Dupuita (9.11) i uwzględniając, że

$$q_V = -Ak \frac{dh}{dr}$$

(gdyż dodatnim wartościom dr odpowiadają ujemne dh), otrzymamy wyrażenie, z którego obliczymy strumień dopływu do studni chłonnej

$$q_V = \pi k \frac{h_0^2 - H_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}}. \quad (9.47)$$

Studnia artezyjska

Założymy, że między dwoma poziomami nieprzepuszczalnymi pokładami oddalonymi od siebie o wielkość a znajduje się warstwa wodonośna pod ciśnieniem większym od atmosferycznego. Tak zasilaną studnię nazywamy *studnią artezyjską* (rys. 9.9).

Wskutek pobierania wody ze studni obniża się jej zwierciadło od poziomu N–N, a jednocześnie powierzchnia piezometryczna tworzy wokół studni powierzchnię w kształcie leja. Ślad tej powierzchni na płaszczyźnie przechodzącej przez osь studni jest krzywą depresji.

W punkcie 9.2.1 określiliśmy potencjał prędkości ruchu filtracyjnego

$$\Phi = -k h.$$

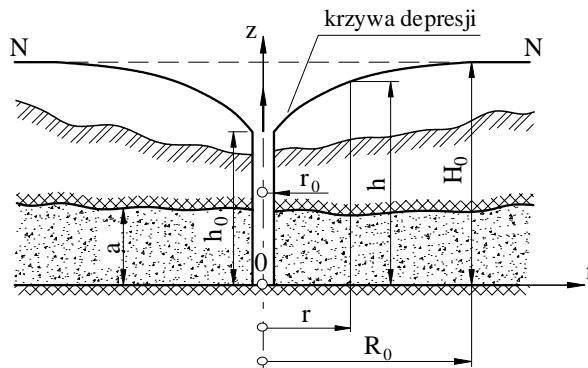
Z zależności (9.35) i (9.39) otrzymamy

$$v_r = -k \frac{\partial h}{\partial r} = -k \frac{dh}{dr}, \quad (9.48)$$

gdyż h zależy tylko od r .

Równanie Laplace'a dla $h = h(r)$ zapiszemy jako

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dh}{dr} \right) = 0. \quad (9.49)$$



Rys. 9.9. Dopływ wody gruntowej do studni artezyjskiej

Po scałkowaniu równania Laplace'a (podobnie jak dla studni zwykłej, lecz za- miast h^2 wystąpi wysokość rozporządzalna h) otrzymamy

$$r \frac{dh}{dr} = C_1, \quad h = C_1 \ln r + C_2. \quad (9.50)$$

Przyjmiemy następujące warunki brzegowe:

$$r = r_0, \quad h = h_0,$$

$$r = R_0, \quad h = H_0,$$

z których wyznaczymy stałe całkowania

$$C_1 = \frac{H_0 - h_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}}, \quad C_2 = \frac{h_0 \ln R_0 - H_0 \ln r_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}}.$$

Całką równania (9.49) jest więc równanie

$$h = \frac{H_0 - h_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0} + h_0, \quad (9.51)$$

przedstawiające krzywą depresji.

Podobnie jak w przypadku studni zwykłej, można określić strumień objętości (wydatek) studni artezyjskiej

$$q_V = A k \frac{dh}{dr}, \quad (9.52)$$

przy czym $A = 2\pi r a$, czyli

$$q_V = 2\pi r a k \frac{dh}{dr}. \quad (9.53)$$

Z równania (9.51) wyznaczamy dh/dr i po podstawieniu otrzymujemy

$$q_V = 2\pi r a k \frac{H_0 - h_0}{\ln \frac{R_0}{r_0}}. \quad (9.54)$$

9.3.5. WSPÓŁDZIAŁANIE ZESPOŁU STUDNI

W celu poprawienia zaopatrzenia w wodę lub do odwodnienia terenu stosujemy często zespół studni. Taki zespół dostatecznie blisko siebie położonych studni oddziaływa na siebie wzajemnie. Rozpatrzmy to zagadnienie na przykładzie studni zwykłych.

Z równania (9.46) wynika, że

$$\frac{H_0^2 - h_0^2}{\ln \frac{R_0}{r_0}} = \frac{q_V}{\pi k}.$$

Po podstawieniu do (9.42) otrzymamy równanie krzywej depresji wody gruntowej

$$h^2 = \frac{q_V}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0} + h_0^2, \quad (9.55)$$

w którym h – rzędna zwierciadła wody gruntowej w odległości r od osi studni.

Założymy układ n studni o promieniach r_{0i} , dopływach q_{Vi} , odległych od przyjętego punktu A o r_i (rys. 9.10). Rozpatrzmy, jaka będzie rzędna h wody gruntowej w przyjętym punkcie A . W przypadku każdej studni oddzielnie rzędna ta spełnia równanie

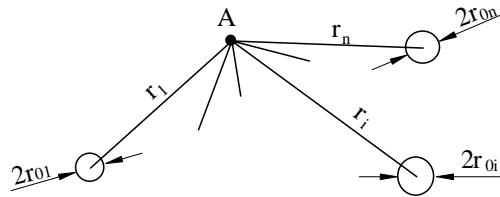
$$h_1^2 = \frac{q_{V1}}{\pi k} \ln \frac{r_1}{r_{01}} + h_{01}^2,$$

.....

$$h_i^2 = \frac{q_{Vi}}{\pi k} \ln \frac{r_i}{r_{0i}} + h_{0i}^2,$$

.....

$$h_n^2 = \frac{q_{Vn}}{\pi k} \ln \frac{r_n}{r_{0n}} + h_{0n}^2.$$



Rys. 9.10. Grupa studni

W przytoczonych równaniach h_{0i} jest głębokością wody w poszczególnych studniach.

Na zasadzie superpozycji

$$h^2 = \sum_1^n \frac{q_{Vi}}{\pi k} \ln \frac{r_i}{r_{0i}} + C, \quad (9.56)$$

przy czym C – stała, którą należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Upraszczając zagadnienie, przyjmiemy, że strumień objętości wody dopływającej do wszystkich studni są jednakowe

$$q_{V1} = q_{V2} = \dots = q_{Vn} = \frac{q_{V0}}{n},$$

przy czym q_{V0} – łączny strumień objętości wszystkich studni,
wtedy z (9.56) otrzymamy

$$h^2 = \frac{q_{V0}}{n\pi k} \ln \frac{r_1 r_2 \dots r_0}{r_{01} r_{02} \dots r_{0n}} + C.$$

Jeżeli jeszcze przyjmiemy, że punkt A znajduje się w dużej odległości od zespołu studni i wszystkie studnie mają średnice jednakowe, to

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 = \dots = r_n = r, \\ r_{01} &= r_{02} = \dots = r_{0n} = r_0, \end{aligned}$$

a wymienione równanie można zapisać

$$h^2 = \frac{q_{V0}}{\pi k} (\ln r - \ln r_0) + C. \quad (9.57)$$

Przyjmujemy następujący warunek brzegowy:

$$r = R_0, \quad h = H_0,$$

przy czym:

R_0 – zasięg depresji układu studni,

H_0 – początkowa grubość warstwy wodonośnej.

Po podstawieniu do (9.57) otrzymamy

$$C = H_0^2 - \frac{q_{V0}}{\pi k} (\ln R_0 - \ln r_0)$$

oraz

$$h^2 = H_0^2 - \frac{q_{V0}}{\pi k} \ln \frac{R_0}{r}. \quad (9.58)$$

Z zależności tej, znając łączny strumień objętości wszystkich studni, można wyznaczyć głębokość wody gruntowej w dowolnym punkcie.

Zasięg depresji określamy doświadczalnie lub ze wzoru empirycznego Kusakina

$$R_0 = 575 \Delta h \sqrt{k H_0},$$

w którym:

Δh – depresja zwierciadła wody w środku ciężkości zespołu studni, m,

k – współczynnik filtracji, m/s,

R_0, H_0 – w metrach.

9.3.6. WSPÓŁCZYNNIK FILTRACJI

Występujący w równaniach współczynnik filtracji k (podawany w jednostkach prędkości) jest wielkością charakterystyczną dla danego gruntu i przepływającej cieczy. Współczynnik ten zależy od struktury gruntu (od wielkości i orientacji ziaren oraz porowatości), a także od lepkości cieczy. Nawet w punktach leżących blisko siebie w gruncie, współczynnik ten może być różny, toteż najlepiej wyznaczyć go przez bezpośredni pomiar w potrzebnym miejscu warstwy wodonośnej.

Współczynnik k można wyznaczyć, wzorując się na doświadczeniu Darcy'ego, omówionym w p. 9.1.3. Polega to na pomierzeniu wysokości piezometrycznej Δh i strumienia objętości q_V . Znając te wielkości oraz odległość między piezometrami Δl i pole przekroju cylindra A , obliczamy współczynnik filtracji z zależności

$$k = \frac{V}{I} = \frac{q_V}{A} \frac{\Delta l}{\Delta h}.$$

Bezpośrednio w terenie określamy współczynnik filtracji za pomocą studni badawczej, np. studni zwykłej o ustalonym zwierciadle wody.

Mierzmy depresje zwierciadła Δh_1 i Δh_2 w dwóch miejscowościach oddalonych od osi studni o r_1 i r_2 (rys. 9.11). Z równania (9.42) po uwzględnieniu wzoru (9.46) będzie

$$h_1^2 = \frac{q_V}{\pi k} \ln \frac{r_1}{r_0} + h_0^2$$

oraz

$$h_2^2 = \frac{q_V}{\pi k} \ln \frac{r_2}{r_0} + h_0^2.$$

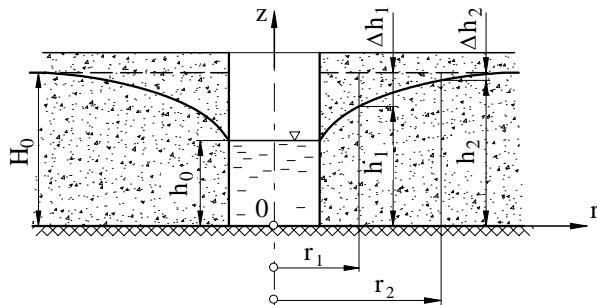
Po odjęciu stronami tych równań otrzymamy

$$h_1^2 - h_2^2 = \frac{q_v}{\pi k} \ln \frac{r_1}{r_2},$$

przy czym:

$$h_1 = H_0 - \Delta h_1,$$

$$h_2 = H_0 - \Delta h_2.$$



Rys. 9.11. Wyznaczanie współczynnika filtracji w terenie

Współczynnik filtracji możemy więc określić za pomocą wzoru

$$k = \frac{q_v}{\pi} \frac{\ln \frac{r_1}{r_2}}{h_1^2 - h_2^2}. \quad (9.59)$$

Warto zaznaczyć, że próbowało wyznaczyć współczynnik filtracji teoretycznie, wykorzystując analizę granulometryczną i porowatość gruntu.

10. WAŻNIEJSZE TABELE I WYKRESY DO OBLICZEŃ Z MECHANIKI PŁYNÓW

10.1. DANE POMOCNICZE

Tabela 10.1.1. Alfabet grecki

α A	β B	$\gamma \Gamma$	$\delta \Delta$	εE	ζZ	ηH	$\theta \Theta$
alpha	beta	gamma	delta	epsilon	dzeta	eta	theta
ι I	κ K	$\lambda \Lambda$	μM	νN	$\xi \Xi$	$\omicron O$	$\pi \Pi$
jota	kappa	lambda	mi	ni	ksi	omikron	pi
ρ P	$\sigma \Sigma$	τT	υY	$\phi \Phi$	χX	$\psi \Psi$	$\omega \Omega$
rho	sigma	tau	upsilon	phi	chi	psi	omega

Tabela 10.2. Nazwy przedrostków do tworzenia nazw jednostek wielokrotnych
w układzie SI i ich oznaczenia

Przedrostek	Oznaczenie	Mnożnik
eksa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hektó	h	10^2
deka	da	10
decy	d	10^{-1}
centy	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

10.2. WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNE CIECZY

Tabela 10.2.1. Gęstość cieczy w kg/m³
pod ciśnieniem normalnym (1013 hPa)

Lp.	Ciecz	K	273	288	293
		°C	0	15	20
1	Alkohol etylowy (C ₂ H ₅ OH)		806,3	793,6	789,5
2	Alkohol metylowy (CH ₃ OH)		810,2	795,8	791,5
3	Gliceryna (C ₃ H ₈ O ₃)	*		1264,1	1260,9
4	Terpentyna			875,0	870,0
5	Benzyna			680÷800	
6	Nafta			680÷720	
7	Ropa naftowa			830÷910	
8	Woda morska			1010÷1030	
9	Ciężka woda				1110

* W temperaturze 273 K (0 °C) gliceryna (100%) ma konsystencję pasty.

Tabela 10.2.2. Gęstość wody w temperaturze 277 K (4 °C)
w zależności od ciśnienia

Ciśnienie	MPa	0,1	1,0	5,0	10
Gęstość	kg/m ³	999,97	1000,42	1002,43	1004,94
Ciśnienie	MPa	20	30	40	50
Gęstość	kg/m ³	1010,02	1015,15	1020,33	1025,59

Tabela 10.2.3. Gęstość wody (czystej pozbawionej powietrza) w kg/m³
w zakresie temperatury 273÷305 K (w odstępach co 0,1 K) pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym

Temperatura		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
°C	K										
0	273	999,841	999,847	999,854	999,860	999,866	999,872	999,878	999,884	999,889	999,895
1	274	900	905	909	914	918	923	927	930	934	938
2	275	941	944	947	950	953	955	958	960	962	964
3	276	965	967	968	969	970	971	972	972	973	973
4	277	973	973	973	972	972	972	970	969	968	966
5	278	965	963	961	959	957	955	952	950	947	944
6	279	941	938	935	931	927	924	920	916	911	907
7	280	999,902	999,898	999,893	999,888	999,883	999,877	999,872	999,866	999,861	999,855
8	281	849	843	837	830	824	817	810	803	796	789
9	282	781	774	766	758	751	742	734	726	717	709
10	283	700	691	682	673	664	654	645	635	625	615
11	284	605	595	585	574	564	553	542	531	520	509
12	285	498	486	475	463	451	439	427	415	402	390
13	286	377	364	352	339	326	312	299	285	727	258
14	287	244	230	216	202	188	173	159	144	129	114
15	288	099	804	069	054	038	023	007	998,991	998,975	998,959
16	289	998,946	998,926	998,910	998,893	998,877	998,860	998,843	826	809	792
17	290	998,774	998,757	998,739	998,722	998,704	998,686	998,668	998,650	998,632	998,613
18	291	595	576	558	393	520	501	482	463	444	424
19	292	405	385	365	345	325	305	285	265	244	224
20	293	203	183	162	141	120	099	078	056	035	013
21	294	997,992	997,970	997,948	997,926	997,904	997,882	997,860	997,837	997,815	997,792
22	295	770	747	724	701	678	655	632	608	505	561
23	296	538	514	490	466	442	418	394	369	345	320
24	297	296	271	246	221	196	171	146	120	095	069
25	298	044	019	996,992	996,967	996,941	996,914	996,888	996,862	996,836	996,809
26	299	996,783	996,756	729	703	676	649	621	594	567	540
27	300	996,512	996,485	996,457	996,429	996,401	996,373	996,345	996,317	996,289	996,261
28	301	232	204	175	147	118	089	060	031	002	995,973
29	302	995,944	995,914	995,885	995,855	995,826	995,796	995,766	995,736	995,706	676
30	303	646	616	586	555	525	494	464	433	402	371
31	304	340	309	278	246	215	183	151	119	087	055
32	305	023	994,991	994,959	994,926	994,894	994,861	994,829	994,796	994,763	994,730

Uwaga: gęstość wody można obliczyć według wzoru

$$\rho = \rho_4 / \left(4,074 \cdot 10^{-6} (t - 4)^2 - \frac{0,0104}{\pi} \cos(\pi(t - 4)/104) + 1,0033 \right),$$

$$\rho_4 = 1000 \text{ kg/m}^3.$$

Tabela 10.2.4. Gęstość wody w kg/m³ w zakresie temperatury 270÷370 K (w odstępach co 1 K) pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym (w zakresie temperatury 273÷373 K) lub minimalnym, koniecznym do utrzymania wody w stanie ciekłym (w pozostałym zakresie temperatury)

Temperatura		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K	°C										
270	-3	999,55	999,67	999,76	999,84	999,90	999,94	999,96	999,97	999,96	999,94
280	7	999,90	999,85	999,78	999,70	999,60	999,50	999,37	999,24	999,10	998,94
290	17	998,77	998,59	998,40	998,20	997,99	997,77	997,53	997,29	997,04	996,78
300	27	996,51	996,23	995,94	995,64	995,34	995,02	994,70	994,37	994,03	993,68
310	37	993,33	992,96	992,21	992,21	991,83	991,44	991,04	990,63	990,22	989,79
320	47	989,37	988,93	988,49	988,04	987,59	987,12	986,66	986,18	985,70	985,30
330	57	984,8	984,3	983,8	983,2	982,7	982,2	981,7	981,1	980,5	980,1
340	67	979,5	978,9	978,4	977,8	977,3	976,7	976,1	975,5	974,9	974,3
350	77	973,7	973,1	972,5	971,8	971,2	970,6	970,0	969,3	968,6	968,0
360	87	967,4	966,7	966,0	965,3	964,7	964,0	963,3	962,6	961,9	961,2
370	97	960,5	959,8	959,0	958,3						

Tabela 10.2.5. Gęstość wody w kg/m³ w zależności od temperatury

Temperatura		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
K	°C										
300	27	996,5	993,3	989,4	984,8	979,5	973,7	967,4	960,5	953,2	945,6
400	127	937,6	929,3	920,4	910,8	900,8	890,0	878,3	866,2	853,2	840,3
500	227	826,8	812,7	798,3	783,0						

Tabela 10.2.6. Gęstość w kg/m³ niektórych cieczy manometrycznych w zależności od temperatury pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym

Ciecz	K	273	275	280	285	290	300	310
	°C	0	2	7	12	17	27	37
Bromoform	-	-	2925	2911	2898	2871	2845	
Czterochlorek węgla	1627	1624	1615	1606	1597	1579	1561	
Rtęć	13595	13590	13578	13565	13553	13529	13504	
Toluen	883	881	877	873	868	860	851	

Tabela 10.2.7. Współczynnik ścisliwości wody w zależności od ciśnienia i temperatury

Ciśnienie MPa	Temperatura		Współczynnik ścisliwości 1/GPa
	°C	K	
1	2	3	4
0,1÷2,5	0	273	53,54
	10	283	50,99
	20	293	50,07

1	2	3	4
2,5÷5,0	0	273	52,62
	10	283	50,17
	20	293	48,54
0,1÷10,0	0	273	52,11
	5	278	50,27
	10	283	49,25
	15	288	48,23
	20	293	47,72

Tabela 10.2.8. Współczynnik ściśliwości niektórych cieczy w zależności od ciśnienia i temperatury

Płyn	Ciśnienie MPa	Temperatura		Współczynnik ściśliwości 1/GPa
		K	°C	
Alkohol etylowy	0,1÷5,0	273	0	97,89
Alkohol metylowy	0,1÷50,0	273	0	80,97
Czterocholek węgla	0,1÷10,0	291	18	112,68
Gliceryna	0,1÷1,0	288	15	22,43
Rtęć	0,1÷50,0	296	23	38,75
Toluen	0,1÷0,5	283	10	80,56

Tabela 10.2.9. Współczynnik rozszerzalności cieplnej wody w zależności od ciśnienia i temperatury

Ciśnienie MPa	Temperatura, °C				
	4÷10	10÷20	40÷50	60÷70	90÷100
0,10	0,000014	0,000150	0,000422	0,000556	0,000719
10	0,000043	0,000165	0,000422	0,000548	0,000704
20	0,000072	0,000183	0,000426	0,000539	–
50	0,000149	0,000236	0,000429	0,000523	0,000661
90	0,000229	0,000289	0,000439	0,000514	0,000621

Tabela 10.2.10. Dynamiczny współczynnik lepkości niektórych cieczy w zależności od temperatury

Lp.	Ciecz	Temperatura		Dynamiczny współczynnik lepkości mPa·s
		K	°C	
1	2	3	4	5
1	Alkohol etylowy (C_2H_5OH)	270	-3	1,870
		273	0	1,773
		280	7	1,555
		290	17	1,288
		330	57	0,621

1	2	3	4	5
2	Alkohol metylowy (CH_3OH)	270	-3	0,842
		273	0	0,813
		290	17	0,622
		330	57	0,363
3	Czterocholek węgla (CCl_4)	273	0	1,329
		293	20	0,969
4	Gliceryna ($\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3$)	273	0	12110
		288	15	2323
		293	20	1490
5	Rtęć (Hg)	250	-23	1,886
		270	-3	1,707
		273	0	1,685
		290	17	1,570
		370	97	1,249
6	Terpentyna	270	-3	2,420
		273	0	2,248
		280	7	1,898
		290	17	1,560
		300	27	1,335
7	Toluen ($\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$)	273	0	0,772
		280	7	0,687
		290	17	0,607

Tabela 10.2.11. Dynamiczny współczynnik lepkości wody
w zależności od temperatury

Temperatura	°C	K	mPa·s									
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	273	1,791	17,32	16,75	16,21	15,70	15,21	14,75	14,31	13,88	13,48	
10	283	1,309	12,72	12,37	12,03	11,71	11,40	11,10	10,82	10,55	10,28	
20	293	1,003	9,788	9,555	9,330	9,115	8,908	8,708	8,514	8,327	8,148	
30	303	0,7975	7,808	0,7646	7,490	7,339	7,193	7,052	6,916	6,784	6,655	
40	313	6,531	6,411	6,295	6,182	6,072	5,965	5,862	5,762	5,664	5,569	
50	323	5,477	5,388	5,300	5,216	5,133	5,053	4,974	4,898	4,824	4,751	
60	333	4,680	4,611	4,544	4,478	4,414	4,352	4,290	4,231	4,172	4,115	
70	343	4,059	4,005	3,952	3,899	3,848	3,798	3,749	3,701	3,654	3,608	
80	353	3,563	3,519	3,476	3,433	3,392	3,351	3,311	3,272	3,233	3,195	
90	363	3,158	3,122	3,086	3,051	3,017	2,983	2,950	2,917	2,885	2,854	
100	373	2,823	2,793	2,763	2,734	2,705	2,676	2,649	2,621	2,595	2,658	

$$\mu = \mu_0 \exp \left(479 / (t + 118,6) + 2,6 \cdot 10^{-t} t \sin(\pi t / 100) - 4,0388 \right),$$

$$\mu_0 = 1,791 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

Tabela 10.2.12. Kinematyczny współczynnik lepkości wody
w zależności od temperatury

Temperatura		$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$									
K	°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
270	-3				1,789	1,725	1,670	1,615	1,565	1,516	1,486
280	7	1,425	1,385	1,345	1,306	1,272	1,239	1,206	1,172	1,142	1,112
290	17	1,086	1,060	1,033	1,006	0,9850	0,9650	0,9350	0,9160	0,8986	0,8685
300	27	0,8602	0,8419	0,8236	0,8054	0,7876	0,7717	0,7563	0,7413	0,7268	0,7131
310	37	0,6994	0,6862	0,6735	0,6610	0,6492	0,6376	0,6263	0,6155	0,6047	0,5944
320	47	0,5844	0,5747	0,5653	0,5560	0,5480	0,5396	0,5313	0,5229	0,5146	0,5073
330	57	0,5000	0,4927	0,4854	0,4781	0,4713	0,4646	0,4579	0,4512	0,4445	0,4386
340	67	0,4328	0,4270	0,4212	0,4154	0,4101	0,4049	0,3996	0,3944	0,3892	0,3845
350	77	0,3798	0,3752	0,3705	0,3659	0,3617	0,3575	0,3534	0,3492	0,3451	0,3412
360	87	0,3374	0,3335	0,3297	0,3259	0,3227	0,3195	0,3164	0,3132	0,3100	0,3069
370	97	0,3037	0,3005	0,2974	0,2942					0,272	
380	107				0,266					0,255	
390	117				0,244					0,235	
400	127				0,2265					0,218	
410	137				0,212					0,2055	
420	147				0,200					0,195	
430	157				0,189					0,185	

$$\nu = \nu_0 \exp(486/(t + 118,6) - 3,948), \quad \nu_0 = 1,791 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Tabela 10.2.13. Kinematyczny współczynnik lepkości niektórych cieczy

Ciecz	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	Temperatura	
		°C	K
Woda	1,00	20	293
Aceton	0,420	18	291
Alkohol etylowy	2,24	0	273
Alkohol etylowy	1,58	18	291
Alkohol metylowy	0,780	18	291
Benzen	0,743	20	293
Benzyna	0,830	20	293
Brom	3,20	16	289
Chloroform	0,381	20	293
Gliceryna	1430	18	291
Gliceryna	1200	20	293
Nafta	2,20	20	293
Olej maszynowy	60,0	40	313
Olej rycynowy	2500	10	283
Olej rycynowy	1020	20	293
Oliwa	150	10	283
Oliwa	91,3	20	293
Terpentyna	1,71	20	293

Tabela 10.2.14. Ciśnienie wrzenia (parowania) wody w zależności od temperatury

Temperatura		hPa									
°C	K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	273	6,108	6,567	7,056	7,578	8,133	8,723	9,351	10,02	10,73	11,48
10	283	12,28	13,13	14,03	14,98	15,99	17,05	18,18	19,38	20,64	21,97
20	293	23,38	24,87	26,44	28,10	29,84	31,68	33,62	35,66	37,80	40,06
30	303	42,44	44,93	47,55	50,31	53,20	56,23	59,42	62,76	66,26	69,92
40	313	73,76	77,79	82,00	86,40	91,01	95,83	100,9	106,1	111,6	117,4
50	323	123,4	129,6	136,1	142,9	150,0	157,4	165,1	173,1	181,5	190,1
60	333	199,2	208,6	128,4	228,5	239,1	250,1	261,5	273,3	285,6	298,4
70	343	311,6	325,3	339,6	354,3	369,6	385,5	401,9	418,9	436,5	454,7
80	353	473,6	493,1	513,3	534,1	555,7	578,0	601,0	624,8	649,4	674,8
90	363	701,0	728,1	756,0	784,8	814,6	845,2	876,8	909,4	943,0	977,6
100	373	1013	1050	1088	1127	1167	1208	1251	1294	1339	1385

$$p_w = p_{w0} \exp \left(17,174 - 4053,06 / (236 + t) + 6 \cdot 10^{-5} t \sin(\pi t / 100) \right),$$

$$p_{w0} = 610,8 \text{ Pa}.$$

10.3. WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNE GAZÓW

Tabela 10.3.1. Podstawowe właściwości fizyczne gazów rzeczywistych

Lp.	Gaz	Symbol chemiczny	Stała gazowa J kg · K	Parametry krytyczne		Gęstość 0,1013 MPa, 273 K kg/m³	Wykładnik adiabaty (izentropy)
				Temperatura K	Ciśnienie MPa		
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Acetylen	C ₂ H ₂	319,60	308,7	6,34	1,17	1,260
2	Amoniak	NH ₃	488,18	140,6	11,30	0,7714	1,310
3	Argon	Ar	208,20	150,6	4,86	1,7606	1,650
4	Azot	N ₂	296,75	125,9	3,28	1,2505	1,40
5	Bezwodnik węglowy	CO ₂	188,78	304,0	7,36	1,9768	1,300
6	n-Butan	C ₄ H ₁₀	143,18	425,0	3,49	2,703	1,14
7	Chlorometyl	CH ₃ Cl	164,65	416,1	6,68	2,227	1,29
8	Chlorowodór	HCl	228,00	324,4	8,40	1,6178	1,40
9	Dwutlenek siarki	SO ₂	129,84	430,3	7,88	2,888	1,270
10	Etan	C ₂ H ₆	276,74	308,0	4,96	1,356	1,200
11	Etylen	C ₂ H ₄	296,65	282,2	5,14	1,2440	1,25
12	Hel	He	2078,00	5,1	0,228	0,1768	1,660
13	Metan	CH ₄	518,67	190,5	4,63	0,7168	1,320
14	Para wodna	H ₂ O	461,50	236,5	7,25	0,768	1,330÷1,260*)
15	Powietrze suche	–	287,04	132,3	3,77	1,2928	1,400
16	Propan	C ₃ H ₈	188,88	176,2	4,26	2,004	1,140

1	2	3	4	5	6	7	8
17	Tlen	O ₂	259,78	154,2	5,04	1,4289	1,400
18	Tlenek węgla	CO	296,95	132,8	3,49	1,2500	1,400
19	Wodór	H ₂	4124,70	33,1	1,29	0,0898	1,410
20	Gaz ziemny „Jarosław”	–	510,10	191,0	4,616	0,7178	1,319

*) Wartości zmieniają się w zależności od stanu pary.

Tabela 10.3.2. Gęstość powietrza suchego pod ciśnieniem normalnym (1013 hPa)
w zależności od temperatury

Temperatura	K	273	293	373	473	773
	°C	0	20	100	200	500
Gęstość	kg/m ³	1,2930	1,2045	0,9458	0,7457	0,4564

Tabela 10.3.3. Współczynnik ściśliwości powietrza w zależności od temperatury i ciśnienia

Ciśnienie MPa	Temperatura K	Współczynnik ściśliwości	
		1/Pa	
0,1	273	1,000	
	323	1,000	
2,0	273	0,990	
	323	0,998	
4,0	273	0,981	
	323	0,998	
5,0	273	0,978	
	323	0,999	
8,0	273	0,971	
	323	1,002	
10,0	273	0,978	
	323	1,006	

Tabela 10.3.4. Dynamiczny współczynnik lepkości gazów w zależności od temperatury

Lp.	Temperatura		Amoniak C = 503	Azot C = 104	Metan C = 164	Powietrze C = 112	Tlen C = 125	Tlenek węgla C = 101,2	Wodór C = 84,4
			10 ⁻⁶ Pa·s						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	250	-25	8,272	15,418	9,457	15,919	17,774	15,490	7,821
2	255	-18	8,466	15,661	9,622	16,175	18,069	15,733	7,938
3	260	-13	8,659	15,903	9,790	16,429	18,361	15,974	8,054
4	265	-8	8,851	16,142	9,956	16,681	18,651	16,213	8,169
5	270	-3	9,044	16,379	10,122	16,931	18,939	16,449	8,282
6	273	0	9,160	16,520	10,220	17,080	19,110	16,590	8,350
7	275	2	9,237	16,614	10,285	17,179	19,224	16,484	8,395
8	280	7	9,429	16,847	10,448	17,424	19,507	16,916	8,507

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	285	12	9,622	17,078	10,610	17,668	19,707	17,146	8,617
10	288	15	9,737	17,215	10,706	17,813	19,954	17,283	8,683
11	290	17	9,814	17,307	10,770	17,909	20,065	17,374	8,727
12	293	20	9,929	17,443	10,866	18,053	20,231	17,510	8,792
13	295	22	10,006	17,534	10,929	18,149	20,342	17,600	8,836
14	300	27	10,197	17,759	11,088	18,386	20,615	17,825	8,943
15	305	32	10,386	17,908	11,245	18,622	20,887	18,048	9,050
16	310	37	10,580	18,203	11,401	18,856	21,157	18,268	9,156
17	315	42	10,770	18,423	11,556	19,087	21,425	18,487	9,261
18	320	47	10,961	18,641	11,710	19,317	21,690	18,704	9,365
19	325	52	11,151	18,857	11,863	19,546	21,954	18,920	9,468
20	330	57	11,341	19,072	12,015	19,772	22,216	19,134	9,571
21	335	62	11,530	19,285	12,166	19,997	22,476	19,346	9,672
22	340	67	11,719	19,496	12,316	20,220	22,733	19,556	9,773
23	345	72	11,908	19,706	12,465	20,442	22,990	19,765	9,873
24	350	77	12,097	19,914	12,613	20,662	23,244	19,973	9,973
25	360	87	12,473	20,326	12,907	21,097	23,747	20,383	10,169
26	370	97	12,847	20,732	13,196	21,526	24,244	20,778	10,362
27	373	100	12,959	20,852	13,282	21,653	24,391	20,908	10,420
28	380	107	13,220	21,132	13,482	21,949	24,733	21,186	10,553
29	390	117	13,591	21,527	13,765	22,367	25,217	21,508	10,741
30	400	127	13,406	21,916	14,044	22,779	25,694	21,968	10,927

Wartości μ obliczono ze wzoru Sutherlanda

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + C}{T + C} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2},$$

w którym:

μ_0 – dynamiczny współczynnik lepkości w temperaturze 273 K (0 °C),

C – stała Sutherlanda,

T – temperatura, K.

Tabela 10.3.5. Kinematyczny współczynnik lepkości powietrza pod ciśnieniem normalnym (1013 hPa)

Temperatura °C	K	10 ⁻⁶ m ² /s									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	273	13,21	13,3	13,39	13,47	13,56	13,65	13,74	13,82	13,91	14,00
10	283	14,09	14,18	14,27	14,36	14,45	14,54	14,63	14,72	14,81	14,90
20	293	14,99	15,08	15,17	15,26	15,35	15,44	15,54	15,63	15,72	15,81
30	303	15,91	16,00	16,09	16,19	16,28	16,37	16,47	16,56	16,66	16,75
40	313	16,85	16,94	17,04	17,13	17,23	17,32	17,42	17,51	17,61	17,71
50	323	17,80	17,90	18,00	18,10	18,19	18,29	18,39	18,49	18,59	18,68
60	333	18,78	18,88	18,98	19,08	19,18	19,28	19,38	19,48	19,58	19,68
70	343	19,78	19,88	19,98	20,08	20,18	20,29	20,39	20,49	20,59	20,69
80	353	20,80	20,90	21,00	21,11	21,21	21,31	21,42	21,52	21,62	21,73
90	363	21,83	21,94	22,04	22,15	22,25	22,36	22,46	22,57	22,67	22,78
100	373	22,88	22,99	23,10	23,20	23,31	23,42	23,52	23,63	23,74	23,85

10.4. TABELE WSPÓŁCZYNNIKÓW PRZEPŁYWU I LICZB EKSPANSJI

Tabela 10.4.1. Kryza z przytarczowym odbiorem ciśnienia – współczynnik przepływu C

Przewęż- nie β	Współczynnik przepływu C dla Re_D wynoszącej											
	$5 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^8$	∞
0,20	0,5997	0,5986	0,5979	0,5977	0,5975	0,5973	0,5973	0,5971	0,5970	0,5970	0,5970	0,5970
0,22	0,6006	0,5993	0,5984	0,5981	0,5978	0,5977	0,5976	0,5974	0,5973	0,5972	0,5972	0,5972
0,24	0,6018	0,6000	0,5990	0,5986	0,5982	0,5981	0,5979	0,5977	0,5975	0,5975	0,5975	0,5975
0,26	0,6031	0,6009	0,5996	0,5991	0,5987	0,5985	0,5983	0,5980	0,5978	0,5978	0,5977	0,5977
0,28	0,6044	0,6019	0,6003	0,5997	0,5992	0,5989	0,5987	0,5983	0,5982	0,5981	0,5981	0,5980
0,30	0,6060	0,6029	0,6011	0,6004	0,5997	0,5994	0,5992	0,5987	0,5985	0,5984	0,5984	0,5984
0,32	0,6077	0,6040	0,6019	0,6011	0,6003	0,6000	0,5997	0,5991	0,5989	0,5988	0,5987	0,5987
0,34	0,6095	0,6053	0,6028	0,6018	0,6010	0,6005	0,6002	0,5996	0,5993	0,5991	0,5991	0,5991
0,36	0,6115	0,6066	0,6037	0,6026	0,6016	0,6012	0,6008	0,6001	0,5997	0,5995	0,5995	0,5995
0,38	0,6136	0,6081	0,6048	0,6035	0,6024	0,6018	0,6014	0,6005	0,6002	0,6000	0,5999	0,5999
0,40	0,6159	0,6096	0,6059	0,6044	0,6031	0,6025	0,6020	0,6011	0,6006	0,6004	0,6003	0,6003
0,42	0,6184	0,6113	0,6070	0,6054	0,6039	0,6032	0,6026	0,6016	0,6011	0,6008	0,6008	0,6008
0,44	0,6110	0,6130	0,6082	0,6064	0,6047	0,6039	0,6033	0,6021	0,6016	0,6013	0,6012	0,6012
0,46	0,6138	0,6148	0,6095	0,6074	0,6056	0,6047	0,6040	0,6027	0,6021	0,6017	0,6017	0,6016
0,48	–	0,6167	0,6108	0,6085	0,6064	0,6055	0,6047	0,6032	0,6025	0,6021	0,6021	0,6021
0,50	–	0,6187	0,6121	0,6096	0,6073	0,6062	0,6053	0,6037	0,6030	0,6026	0,6025	0,6025
0,51	–	0,6197	0,6128	0,6101	0,6077	0,6066	0,6057	0,6040	0,6032	0,6027	0,6027	0,6026
0,52	–	0,6207	0,6135	0,6107	0,6082	0,6070	0,6060	0,6042	0,6034	0,6029	0,6028	0,6028
0,53	–	0,6217	0,6141	0,6112	0,6086	0,6073	0,6063	0,6044	0,6036	0,6031	0,6030	0,6030
0,54	–	0,6228	0,6148	0,6117	0,6090	0,6077	0,6066	0,6047	0,6037	0,6032	0,6031	0,6031
0,55	–	0,6238	0,6155	0,6123	0,6094	0,6080	0,6069	0,6049	0,6039	0,6034	0,6033	0,6032
0,56	–	0,6249	0,6162	0,6128	0,6098	0,6084	0,6072	0,6050	0,6040	0,6035	0,6034	0,6034
0,57	–	0,6259	0,6168	0,6133	0,6102	0,6087	0,6074	0,6052	0,6041	0,6036	0,6035	0,6034
0,58	–	0,6270	0,6175	0,6138	0,6105	0,6089	0,6077	0,6053	0,6042	0,6036	0,6035	0,6035
0,59	–	0,6280	0,6181	0,6143	0,6108	0,6092	0,6079	0,6054	0,6043	0,6036	0,6035	0,6035
0,60	–	0,6291	0,6187	0,6147	0,6111	0,6094	0,6080	0,6055	0,6043	0,6036	0,6035	0,6035
0,61	–	0,6301	0,6193	0,6151	0,6114	0,6096	0,6082	0,6055	0,6043	0,6036	0,6034	0,6034
0,62	–	0,6311	0,6198	0,6155	0,6116	0,6098	0,6083	0,6055	0,6042	0,6035	0,6033	0,6033
0,63	–	0,6320	0,6203	0,6158	0,6118	0,6099	0,6083	0,6054	0,6041	0,6033	0,6032	0,6032
0,64	–	0,6330	0,6208	0,6161	0,6119	0,6099	0,6083	0,6053	0,6039	0,6031	0,6030	0,6029
0,65	–	0,6339	0,6212	0,6164	0,6120	0,6099	0,6082	0,6051	0,6037	0,6028	0,6027	0,6027
0,66	–	0,6348	0,6216	0,6165	0,6120	0,6099	0,6081	0,6048	0,6033	0,6025	0,6023	0,6023
0,67	–	0,6356	0,6219	0,6167	0,6120	0,6097	0,6079	0,6045	0,6029	0,6021	0,6019	0,6019
0,68	–	0,6363	0,6222	0,6167	0,6118	0,6095	0,6076	0,6041	0,6025	0,6016	0,6014	0,6014
0,69	–	0,6370	0,6223	0,6167	0,6116	0,6092	0,6072	0,6036	0,6019	0,6010	0,6008	0,6008
0,70	–	0,6376	0,6224	0,6165	0,6113	0,6088	0,6067	0,6030	0,6012	0,6003	0,6001	0,6000
0,71	–	0,6382	0,6224	0,6163	0,6109	0,6083	0,6061	0,6023	0,6004	0,5994	0,5993	0,5992
0,72	–	0,6386	0,6222	0,6160	0,6103	0,6076	0,6054	0,6014	0,5995	0,5985	0,5983	0,5983
0,73	–	0,6389	0,6220	0,6155	0,6097	0,6069	0,6046	0,6004	0,5985	0,5974	0,5972	0,5972
0,74	–	0,6391	0,6216	0,6149	0,6089	0,6060	0,6036	0,5993	0,5973	0,5962	0,5960	0,5959
0,75	–	0,6392	0,6211	0,6141	0,6079	0,6049	0,6025	0,5980	0,5959	0,5948	0,5946	0,5945

Tabela 10.4.2. Kryza z odbiorem ciśnienia typu D i D/2 – współczynnik przepływu C

Przewężenie β	Współczynnik przepływu C dla Re_D wynoszącej											
	$5 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^8$	∞
0,20	0,5997	0,5985	0,5979	0,5976	0,5974	0,5973	0,5972	0,5970	0,5969	0,5969	0,5969	0,5969
0,22	0,6006	0,5992	0,5984	0,5980	0,5977	0,5976	0,5975	0,5973	0,5972	0,5971	0,5971	0,5971
0,24	0,6017	0,6000	0,5989	0,5985	0,5981	0,5980	0,5978	0,5976	0,5974	0,5974	0,5974	0,5974
0,26	0,6030	0,6008	0,5995	0,5990	0,5986	0,5984	0,5982	0,5979	0,5977	0,5977	0,5976	0,5976
0,28	0,6043	0,6017	0,6002	0,5996	0,5991	0,5988	0,5986	0,5982	0,5981	0,5980	0,5979	0,5979
0,30	–	0,6028	0,6010	0,6003	0,5996	0,5993	0,5991	0,5986	0,5984	0,5983	0,5983	0,5983
0,32	–	0,6039	0,6018	0,6010	0,6002	0,5999	0,5996	0,5990	0,5988	0,5987	0,5986	0,5986
0,34	–	0,6052	0,6027	0,6017	0,6009	0,6004	0,6001	0,5995	0,5992	0,5990	0,5990	0,5990
0,36	–	0,6066	0,6037	0,6026	0,6016	0,6011	0,6007	0,6000	0,5997	0,5995	0,5994	0,5994
0,38	–	0,6080	0,6047	0,6035	0,6023	0,6018	0,6013	0,6005	0,6001	0,5999	0,5999	0,5999
0,40	–	0,6096	0,6059	0,6044	0,6031	0,6025	0,6020	0,6011	0,6006	0,6004	0,6004	0,6003
0,42	–	–	0,6071	0,6054	0,6040	0,6033	0,6027	0,6017	0,6012	0,6009	0,6009	0,6008
0,44	–	–	0,6084	0,6065	0,6049	0,6041	0,6035	0,6023	0,6017	0,6014	0,6014	0,6014
0,46	–	–	0,6098	0,6077	0,6059	0,6050	0,6043	0,6030	0,6023	0,6020	0,6019	0,6019
0,48	–	–	0,6112	0,6189	0,6069	0,6059	0,6051	0,6036	0,6030	0,6026	0,6025	0,6025
0,50	–	–	0,6127	0,6102	0,6079	0,6068	0,6060	0,6043	0,6036	0,6032	0,6031	0,6031
0,51	–	–	0,6135	0,6108	0,6085	0,6073	0,6064	0,6047	0,6039	0,6035	0,6034	0,6034
0,52	–	–	0,6143	0,6115	0,6090	0,6078	0,6068	0,6051	0,6042	0,6038	0,6037	0,6037
0,53	–	–	0,6151	0,6122	0,6096	0,6083	0,6073	0,6054	0,6046	0,6041	0,6040	0,6040
0,54	–	–	0,6159	0,6129	0,6101	0,6088	0,6077	0,6058	0,6049	0,6044	0,6043	0,6043
0,55	–	–	0,6168	0,6136	0,6107	0,6093	0,6082	0,6061	0,6052	0,6047	0,6046	0,6045
0,56	–	–	0,6174	0,6143	0,6113	0,6098	0,6087	0,6065	0,6055	0,6049	0,6048	0,6048
0,57	–	–	–	0,6150	0,6118	0,6103	0,6091	0,6069	0,6058	0,6052	0,6051	0,6051
0,58	–	–	–	0,6157	0,6124	0,6108	0,6095	0,6072	0,6061	0,6055	0,6054	0,6054
0,59	–	–	–	0,6164	0,6130	0,6113	0,6000	0,6075	0,6064	0,6058	0,6056	0,6056
0,60	–	–	–	0,6171	0,6135	0,6118	0,6004	0,6079	0,6067	0,6060	0,6059	0,6059
0,61	–	–	–	0,6178	0,6141	0,6123	0,6008	0,6082	0,6069	0,6062	0,6061	0,6061
0,62	–	–	–	0,6185	0,6146	0,6128	0,6012	0,6085	0,6072	0,6065	0,6063	0,6063
0,63	–	–	–	0,6192	0,6151	0,6132	0,6016	0,6087	0,6074	0,6067	0,6065	0,6065
0,64	–	–	–	0,6198	0,6156	0,6136	0,6020	0,6090	0,6076	0,6068	0,6067	0,6067
0,65	–	–	–	0,6205	0,6161	0,6140	0,6023	0,6092	0,6078	0,6070	0,6068	0,6068
0,66	–	–	–	0,6211	0,6166	0,6144	0,6027	0,6094	0,6079	0,6071	0,6069	0,6069
0,67	–	–	–	0,6217	0,6170	0,6148	0,6030	0,6096	0,6080	0,6072	0,6070	0,6070
0,68	–	–	–	0,6223	0,6175	0,6151	0,6032	0,6097	0,6081	0,6072	0,6070	0,6070
0,69	–	–	–	0,6229	0,6178	0,6154	0,6034	0,6098	0,6081	0,6072	0,6070	0,6070
0,70	–	–	–	–	0,6182	0,6157	0,6036	0,6099	0,6081	0,6071	0,6070	0,6069
0,71	–	–	–	–	0,6185	0,6159	0,6038	0,6099	0,6081	0,6071	0,6069	0,6068
0,72	–	–	–	–	0,6187	0,6161	0,6039	0,6098	0,6080	0,6069	0,6067	0,6067
0,73	–	–	–	–	0,6190	0,6162	0,6039	0,6097	0,6078	0,6067	0,6065	0,6065
0,74	–	–	–	–	0,6191	0,6163	0,6039	0,6096	0,6076	0,6065	0,6063	0,6062
0,75	–	–	–	–	0,6193	0,6163	0,6038	0,6094	0,6073	0,6062	0,6059	0,6059

Tabela 10.4.3. Kryzy – liczba ekspansji ε_1

Przeweżenie		Liczba ekspansji ε_1 dla p_2/p_1 wynoszącego							
β	β^4	0,98	0,96	0,94	0,92	0,90	0,85	0,80	0,75
$\kappa = 1,2$									
0,000	0,000	0,993	0,986	0,980	0,973	0,966	0,949	0,932	0,915
0,562	0,100	0,993	0,985	0,978	0,970	0,963	0,944	0,926	0,907
0,669	0,200	0,992	0,984	0,976	0,968	0,960	0,940	0,920	0,900
0,740	0,300	0,991	0,983	0,974	0,966	0,957	0,936	0,914	0,993
0,750	0,316	0,991	0,983	0,974	0,965	0,957	0,935	0,913	0,992
$\kappa = 1,3$									
0,000	0,000	0,994	0,987	0,981	0,975	0,968	0,953	0,937	0,921
0,562	0,100	0,993	0,986	0,979	0,973	0,966	0,949	0,932	0,914
0,669	0,200	0,993	0,985	0,978	0,970	0,963	0,945	0,926	0,908
0,740	0,300	0,992	0,984	0,976	0,968	0,960	0,941	0,921	0,901
0,750	0,316	0,992	0,984	0,976	0,968	0,960	0,940	0,920	0,900
$\kappa = 1,4$									
0,000	0,000	0,994	0,988	0,982	0,977	0,971	0,956	0,941	0,927
0,562	0,100	0,994	0,987	0,981	0,975	0,968	0,952	0,936	0,921
0,669	0,200	0,993	0,986	0,979	0,973	0,966	0,949	0,931	0,914
0,740	0,300	0,993	0,985	0,978	0,971	0,963	0,945	0,926	0,908
0,750	0,316	0,993	0,985	0,978	0,970	0,963	0,944	0,926	0,907
$\kappa = 1,66$									
0,000	0,000	0,995	0,990	0,985	0,980	0,975	0,963	0,951	0,938
0,562	0,100	0,995	0,989	0,984	0,979	0,973	0,960	0,946	0,933
0,669	0,200	0,994	0,988	0,983	0,977	0,971	0,957	0,942	0,928
0,740	0,300	0,994	0,988	0,981	0,975	0,969	0,953	0,938	0,922
0,750	0,316	0,994	0,987	0,981	0,975	0,969	0,953	0,937	0,922

10.5. WYPŁYW PRZEZ OTWORY I PRZYSTAWKI

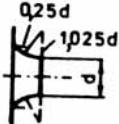
Tabela 10.5.1. Współczynniki wypływu przez małe, okrągłe otwory niezatopione

d, mm	6	10	15	20	30	60	180	300
H, m	1	2	3	4	5	6	7	8
0,15	–	–	0,627	–	0,615	0,600	0,529	–
0,20	0,652	0,636	0,622	0,618	0,611	0,601	0,594	0,590
0,30	0,644	0,630	0,617	0,614	0,608	0,600	0,595	0,591
0,40	0,638	0,625	0,613	0,611	0,606	0,600	0,596	0,593
0,50	0,635	0,622	0,611	0,609	0,605	0,600	0,596	0,594
0,60	0,632	0,620	0,610	0,608	0,604	0,599	0,597	0,595
1,00	0,625	0,615	0,609	0,605	0,603	0,599	0,597	0,596
1,50	0,620	0,613	0,606	0,604	0,601	0,598	0,597	0,596
2,00	0,618	0,610	0,604	0,603	0,600	0,598	0,597	0,596
3,00	0,611	0,605	0,602	0,600	0,598	0,597	0,596	0,595
6,00	0,601	0,600	0,598	0,597	0,596	0,596	0,596	0,594
15,00	0,597	0,596	0,595	0,595	0,594	0,594	0,594	0,593
30,00	0,593	0,593	0,593	0,592	0,592	0,592	0,592	0,592

Tabela 10.5.2. Współczynniki wypływu μ dużych otworów

Lp.	Rodzaj otworu	μ
1	Otwory o średnich rozmiarach z równomiernym dławieniem ze wszystkich stron	0,65
2	Otwory o dużych rozmiarach z nierównomiernym dławieniem, ale ze wszystkich stron	0,70
3	Otwory przydenne (bez dławienia przy dnie) ze znacznym dławieniem przez krawędzie boczne	0,65÷0,70
4	Otwory przydenne z niewielkim dławieniem przez krawędzie boczne	0,70÷0,75
5	Otwory przydenne ze znacznym dławieniem od góry i łagodnym wprowadzeniem strug z boków	0,80÷0,85
6	Otwory przydenne z łagodnym wprowadzeniem strug ze wszystkich stron	0,90

Tabela 10.5.3. Wartości współczynników przepływu przystawek
przy wysokich liczbach Reynoldsa według Altšula

Typ przystawki i warunki wypływu	Współczynniki		
	μ	φ	κ
a) 	Przystawka walcowa zewnętrzna		
a)	krawędź wlotowa ostra	0,82	0,82
b)	krawędź wlotowa zaokrąglona	0,95	0,95
c)	c) krawędź wlotowa ostra przy kącie odchylenia osi przystawki o		
b) 	$\beta = 10^\circ$	0,80	—
	$\beta = 20^\circ$	0,78	—
c) 	$\beta = 40^\circ$	0,75	—
	$\beta = 60^\circ$	0,72	—
	Przystawka z wlotem zaokrąglonym przy profilu jak na rysunku	0,97	0,97
			1,00
a) 	Przystawka stożkowa rozbieżna:		
b) 	a) o kącie rozwarcia średnio $5\text{--}7^\circ$	0,45÷0,50	0,45÷0,50
	b) o kształcie i wymiarach jak na rysunku i $\beta = 5^\circ$		
a)		0,483	0,483
b)			1,00

10.6. STRaty LINIOWE I MIEJSCOWE

Tabela 10.6.1. Orientacyjne zalecane prędkości przepływu wody w wybranych rurociągach wg PN-76/M-34034

Rodzaj rurociągu		v , m/s
Ssawny pompy	ogólne, w zależności od wysokości ssania, długości, temperatury dla pomp wirowych, przy niskiej temperaturze dla pomp specjalnych dla wody gorącej, pracujących z napływem	0,5–1,0 do 2,0 do 3,0
Tłoczny pompy	wodny, zapowietrzony, korodujący zasilający kotły zasilający, awaryjny, obejściowy magistrali cieplowniczej sieci cieplowniczej odgałęzionej sieci cieplowniczej przyłączeniowej magistrali wodociągowej miejscowej sieci wodociągowej	do 4,0 1,3–3,0 do 5,0 2,0–3,0 1,0–2,0 do 1,0 1,3–3,0 0,5–1,0

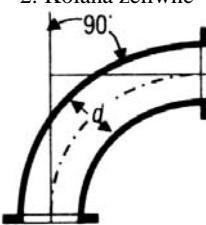
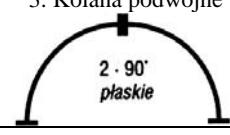
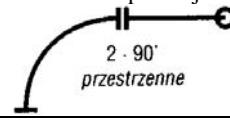
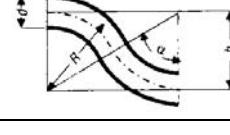
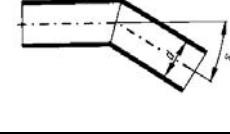
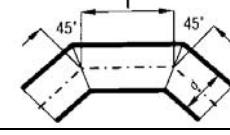
Tabela 10.6.2. Orientacyjne chropowatości zastępcze k rur według PN-76/M-34034

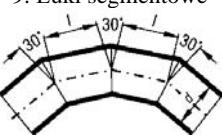
Materiał i rury	Stan powierzchni i warunki eksploatacji	k
		mm
1	2	3
Rury stalowe walcowane	nowe, nie używane oczyszczone, eksploatowane kilka lat bituminizowane przewody cieplownicze przewody naftowe dla średnich warunków eksploatacji przewody nieznacznie skorodowane przewody z niedużymi osadami kamienia przewody po kilku latach eksploatacji, skorodowane lub z niedużymi osadami przewody wody grzewczej, dla wody nieodgazowanej i niezmiękczonej przewody wodociągowe w eksploatacji przewody z większymi osadami kamienia przewody z powierzchnią w złym stanie	0,02–0,10 do 0,04 do 0,04 0,2 0,2 0,4 0,4 0,15–1,0 1,0 1,2–1,5 ~3,0 > 5,0
Rury stalowe spawane	nowe lub stare w dobrym stanie nowe, bituminizowane w eksploatacji, z powłoką częściowo usuniętą, skorodowane w eksploatacji, równomiernie skorodowane bez wgłębień w miejscach połączeń, pokryte powłoką, dobry stan powierzchni zanieczyszczone podczas eksploatacji z wodą, lecz nie skorodowane z podwójnym szwem poprzecznym, nieskorodowane, zanieczyszczone małe osady z podwójnym, poprzecznym szwem, silnie skorodowane znaczne osady powierzchnie w złym stanie, nierównomiernie ułożone połączenia	0,04–0,10 ~ 0,05 ~ 0,10 ~0,15 0,3–0,4 0,95–1,00 1,2–1,5 1,5 2,0 2,0–4,0 > 5,0

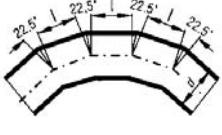
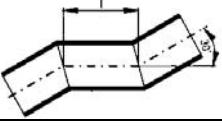
1	2	3
Rury stalowe ocynkowane	czyste ocynkowane, nowe zwyczajne ocynkowane	0,07–0,10 0,10–0,15
Rury żeliwne	nowe nowe bituminizowane asfaltowane wodociągowe, w eksploatacji w eksploatacji, skorodowane z osadami ze znacznymi osadami oczyszczone, po kilku latach eksploatacji silnie skorodowane	0,25–1,00 0,10–0,15 0,12–0,30 1,4 1,0–1,5 1,0–1,5 2,0–4,0 0,3–1,5 do 3,0
Rury betonowe	dobrze wygładzone powierzchnie średnia gładkość powierzchni szorstka powierzchnia	0,3–0,8 2,5 3,0
Rury żelbetowe		1,0–2,5
Rury z twardego PVC*		0,025
Rury z polietylenu PE*		0,05
Rury HOBAS z piasku kwarcowego, włókna szklanego i żywicy poliestrowej*		0,01

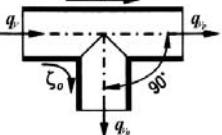
* **Uwaga:** dane według katalogów producentów rur.

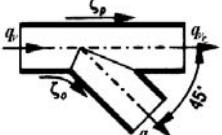
Tabela 10.6.3. Wartości liczbowe współczynnika oporu miejscowego ζ kształtek wodociągowych (według E. Mielcarzewicza, *Obliczenia hydrauliczne układów wodociągowych*, Warszawa 1965; zob. również PN-76/M-34034)

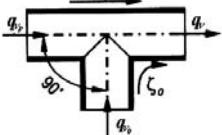
1	2																				
2. Kolana żeliwne 	<table> <thead> <tr> <th>d</th> <th>50</th> <th>100</th> <th>200</th> <th>300</th> <th>400</th> <th>500</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>ζ</td> <td>1,3</td> <td>1,5</td> <td>1,8</td> <td>2,1</td> <td>2,2</td> <td>-</td> </tr> </tbody> </table>							d	50	100	200	300	400	500	ζ	1,3	1,5	1,8	2,1	2,2	-
d	50	100	200	300	400	500															
ζ	1,3	1,5	1,8	2,1	2,2	-															
3. Kolana podwójne 	$\zeta = 2\zeta_{90^\circ}$																				
4. Kolana podwójne 	$\zeta = 3\zeta_{90^\circ}$																				
5. Kolana podwójne 	$\zeta = 4\zeta_{90^\circ}$																				
6. Łuk przemienny 	α	30°	45°	60°	90°																
	ζ dla $R = 15d$	0,12	0,17	0,20	0,26																
7. Łuki segmentowe 	δ	5°	10°	15°	$22,5^\circ$	30°	45°	60°	90°												
	ściany gładkie	0,016	0,034	0,042	0,07	0,11	0,24	0,47	1,13												
	ściany chropowate	0,024	0,044	0,062	0,11	0,17	0,32	0,68	1,27												
8. Łuki segmentowe 	l/d	0,71	0,943	1,174	1,42	1,86	2,56	3,72	6,28												
	ściany gładkie	0,51	0,35	0,33	0,28	0,29	0,36	0,36	0,40												
	ściany chropowate	0,51	0,41	0,38	0,38	0,39	0,43	0,44	0,46												

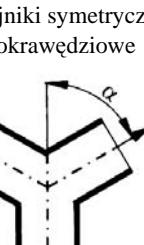
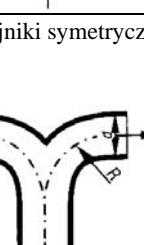
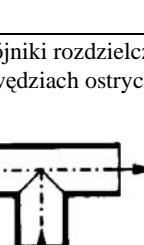
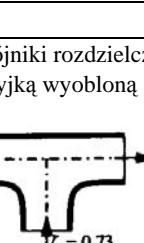
1	2							
9. Łuki segmentowe 	l/d	1,23	1,44	1,67	1,91	2,37	2,96	4,11
ściany gładkie		0,20	0,20	0,15	0,15	0,17	0,17	0,19
ściany chropowate		0,35	0,32	0,30	0,31	0,34	0,34	0,35

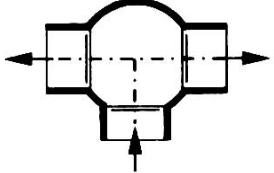
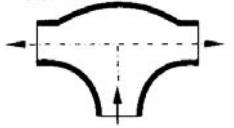
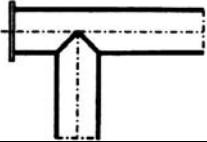
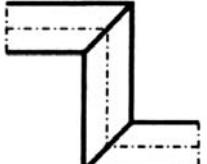
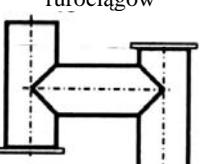
10. Łuki segmentowe 	l/d	1,186	1,40	1,63	2,33	2,91	$\frac{3,4}{9}$	4,65	6,05
ściany gładkie		0,12	0,13	0,12	0,10	0,11	$\frac{0,1}{3}$	0,15	0,14
ściany chropowate		0,29	0,25	0,27	0,32	0,32	$\frac{0,3}{2}$	0,31	0,31
11. Łuki segmentowe 	l/d	1,23		1,67		2,37		3,77	
ściany gładkie		0,16		0,16		0,14		0,16	
ściany chropowate		0,30		0,28		0,26		0,24	

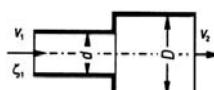
12. Trójkątki rozbieżne 	q_{v0}/q_V	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ζ_0	0,95	0,88	0,98	0,95	1,10	1,28	
ζ_p	0,04	-0,08	-0,05	0,07	0,21	0,35	

13. Trójkątki rozbieżne 	ζ_0	0,90	0,68	0,50	0,38	0,35	0,48
ζ_p	0,04	-0,06	-0,04	0,07	0,20	0,33	

14. Trójkątki zbieżne 	q_{v0}/q_V	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
ζ_0	-1,20	-0,4	0,08	0,47	0,72	0,91	
ζ_p	0,04	0,17	0,30	0,411	0,51	0,60	

1	2					
15. Trójkąki zbieżne 	ζ_0	-0,92	-0,38	0,00	0,22	0,37
	ζ_p	0,04	0,17	0,19	0,09	-0,17
16. Trójkąki symetryczne ostrokrąwędziowe 	α	10°	30°	45°	60°	90°
	ζ	0,1	0,4	0,7	1,0	1,4
17. Trójkąki symetryczne 	R/d	0,5	0,75	1	1,5	2
	ζ	1,1	0,6	0,4	0,25	0,2
18. Trójkąki rozdzielcze o krawędziach ostrych 	$\zeta = 1,3$					
19. Trójkąki rozdzielcze z szyjką wyobloną 	$\zeta = 0,73$					

1	2
20. Trójkątki rozdzielcze kulowe 	$\zeta = 4,87$
21. Trójkątki rozdzielcze kulowe z wyobloną szyjką 	$\zeta = 0,87$
22. Połączenia spawane rurociągów 	$\zeta = 2,0 \dots 2,5$
23. Połączenia spawane rurociągów 	$\zeta = 3,0$
24. Połączenia spawane rurociągów 	$\zeta = 4 \dots 5$

1	2											
25. Nagłe rozszerzenie przekroju	Wzory Bordy: $\zeta_1 = \left(\left(\frac{d}{D} \right)^2 - 1 \right)^2$, $\zeta_2 = \left(\left(\frac{D}{d} \right)^2 - 1 \right)^2$											
	Wartości ζ_1 podane przez A. Lencastra											
		$\frac{d}{D}$	~0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	v_1 m/s	0,6	1,00	1,00	0,96	0,86	0,74	0,60	0,44	0,29	0,15	0,04
		1,5	0,96	0,95	0,89	0,80	0,69	0,56	0,41	0,27	0,14	0,04
		3,0	0,93	0,91	0,86	0,77	0,67	0,54	0,40	0,26	0,13	0,04

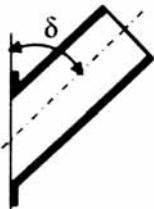
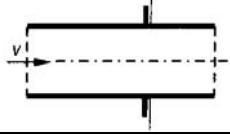
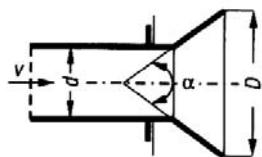
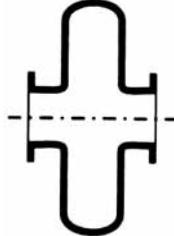
26. Nagłe zwężenie przekroju	d/D	0,316	0,447	0,548	0,632	0,707	0,775	0,837	0,894	1,000			
	ζ_2	0,45	0,42	0,375	0,330	0,29	0,25	0,20	0,15	0,00			
Wartości ζ_1 podane przez A. Lencastra													
27. Dyfuzor	D/d	2°	6°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	60°
	1,1	0,01	0,01	0,03	0,05	0,10	0,13	0,16	0,18	0,19	0,20	0,21	0,23
	1,2	0,02	0,02	0,04	0,09	0,16	0,21	0,25	0,29	0,31	0,33	0,35	0,37
	1,4	0,02	0,03	0,06	0,12	0,23	0,30	0,36	0,41	0,44	0,47	0,50	0,53
	1,6	0,03	0,04	0,07	0,14	0,26	0,35	0,42	0,47	0,51	0,54	0,57	0,61
	1,8	0,03	0,04	0,07	0,15	0,28	0,37	0,44	0,50	0,54	0,58	0,61	0,65
	2,0	0,03	0,04	0,07	0,16	0,29	0,38	0,46	0,52	0,56	0,60	0,63	0,68
	2,5	0,03	0,04	0,08	0,16	0,30	0,39	0,48	0,54	0,58	0,62	0,65	0,70
	3,0	0,03	0,04	0,08	0,16	0,31	0,40	0,48	0,55	0,59	0,63	0,66	0,71
	3,5	0,03	0,05	0,08	0,16	0,31	0,40	0,49	0,56	0,60	0,64	0,67	0,72
uproszczony wzór Fliegnera $\zeta_1 = k \left(\left(\frac{d}{D} \right)^2 - 1 \right)^2$													
	$\alpha/2$	2,5°	5°	7,5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	60°
	k	0,13	0,17	0,26	0,41	0,71	0,90	1,03	1,12	1,13	1,10	1,07	1,05

1	2									
28. Konfuzor	$\zeta_1 = \frac{\lambda l_0}{4d} \left(1 + \frac{D}{d} + \left(\frac{D}{d} \right)^2 + \left(\frac{D}{d} \right)^3 \right)$									
wartości K do wzoru $\zeta_2 = \lambda K$										
D/d	α	4°	6°	8°	20°					
1,2	$9,3$	$6,2$	$4,6$	$1,8$						
1,4	$6,7$	$4,5$	$3,3$	$1,3$						
1,8	$4,1$	$2,7$	$2,0$	$0,8$						
2,0	$3,4$	$2,3$	$1,7$	$0,7$						

s/d	b/d	0,00	0,002	0,005	0,0075	0,010	0,015	0,020	0,030
		0	0,50	0,57	0,63	0,66	0,68	0,71	0,73
0,008	0,50	0,53	0,55	0,57	0,58	0,60	0,62	0,64	
0,016	0,50	0,51	0,52	0,53	0,53	0,54	0,55	0,56	
0,024	0,50	0,50	0,52	0,51	0,52	0,52	0,53	0,53	
0,032	0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,52	0,52	
0,040	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	
0,048	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	
		0,050	0,075	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	$\geq 0,50$
0	0,50	0,81	0,84	0,86	0,90	0,93	0,96	0,98	1,00
0,008	0,50	0,68	0,72	0,74	0,78	0,81	0,84	0,86	0,89
0,016	0,50	0,58	0,63	0,64	0,68	0,70	0,73	0,75	0,77
0,024	0,50	0,54	0,57	0,58	0,60	0,62	0,64	0,66	0,67
0,032	0,50	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59
0,040	0,50	0,52	0,52	0,52	0,52	0,53	0,53	0,53	0,54
0,048	0,50	0,51	0,51	0,51	0,51	0,51	0,51	0,51	0,51

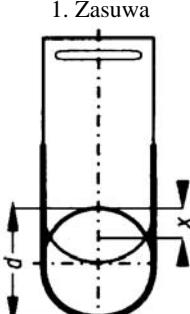
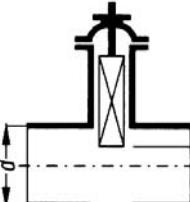
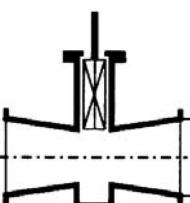
 30. Wloty do rurociągów	$\zeta = 0,25$
-----------------------------	----------------

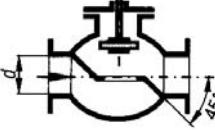
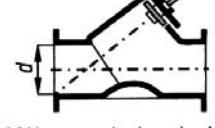
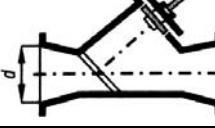
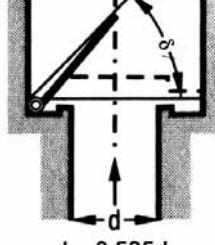
31. Wloty do rurociągów	$\zeta = 0,005 \div 0,1$; dla $R = 0,1d$ $\zeta = 0,1$; z siatką o wolnym przekroju $\zeta = 0,2$
-------------------------	--

1	2																																								
32. Wloty do rurociągów																																									
	$\zeta = 0,5 + 0,3 \cos \delta + 0,22 \cos^2 \delta$																																								
33. Wyloty ze swobodnym wypływem	$\zeta = 1,0$																																								
																																									
34. Wyloty ze swobodnym wypływem	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center; width: 15%;">D/d</th><th style="text-align: center;">0,95</th><th style="text-align: center;">0,90</th><th style="text-align: center;">0,85</th><th style="text-align: center;">0,80</th><th style="text-align: center;">0,70</th><th style="text-align: center;">0,60</th><th style="text-align: center;">0,50</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">ζ</td><td style="text-align: center;">1,43</td><td style="text-align: center;">1,92</td><td style="text-align: center;">2,25</td><td style="text-align: center;">2,54</td><td style="text-align: center;">3,20</td><td style="text-align: center;">4,14</td><td style="text-align: center;">5,51</td></tr> </tbody> </table>	D/d	0,95	0,90	0,85	0,80	0,70	0,60	0,50	ζ	1,43	1,92	2,25	2,54	3,20	4,14	5,51																								
D/d	0,95	0,90	0,85	0,80	0,70	0,60	0,50																																		
ζ	1,43	1,92	2,25	2,54	3,20	4,14	5,51																																		
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: center; width: 15%;">D/d</th><th style="text-align: center;">1,05</th><th style="text-align: center;">1,10</th><th style="text-align: center;">1,20</th><th style="text-align: center;">1,30</th><th style="text-align: center;">1,50</th><th style="text-align: center;">2,0</th><th style="text-align: center;">3,0</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">$\alpha = 8^\circ$</td><td style="text-align: center;">0,84</td><td style="text-align: center;">0,70</td><td style="text-align: center;">0,51</td><td style="text-align: center;">0,39</td><td style="text-align: center;">0,29</td><td style="text-align: center;">0,11</td><td style="text-align: center;">0,06</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\alpha = 15^\circ$</td><td style="text-align: center;">0,85</td><td style="text-align: center;">0,73</td><td style="text-align: center;">0,57</td><td style="text-align: center;">0,46</td><td style="text-align: center;">0,33</td><td style="text-align: center;">0,22</td><td style="text-align: center;">0,17</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\alpha = 30^\circ$</td><td style="text-align: center;">0,94</td><td style="text-align: center;">0,82</td><td style="text-align: center;">0,73</td><td style="text-align: center;">0,65</td><td style="text-align: center;">0,61</td><td style="text-align: center;">0,52</td><td style="text-align: center;">0,49</td></tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\alpha = 45^\circ$</td><td style="text-align: center;">1,00</td><td style="text-align: center;">0,86</td><td style="text-align: center;">0,81</td><td style="text-align: center;">0,76</td><td style="text-align: center;">0,75</td><td style="text-align: center;">0,64</td><td style="text-align: center;">0,61</td></tr> </tbody> </table>	D/d	1,05	1,10	1,20	1,30	1,50	2,0	3,0	$\alpha = 8^\circ$	0,84	0,70	0,51	0,39	0,29	0,11	0,06	$\alpha = 15^\circ$	0,85	0,73	0,57	0,46	0,33	0,22	0,17	$\alpha = 30^\circ$	0,94	0,82	0,73	0,65	0,61	0,52	0,49	$\alpha = 45^\circ$	1,00	0,86	0,81	0,76	0,75	0,64	0,61
D/d	1,05	1,10	1,20	1,30	1,50	2,0	3,0																																		
$\alpha = 8^\circ$	0,84	0,70	0,51	0,39	0,29	0,11	0,06																																		
$\alpha = 15^\circ$	0,85	0,73	0,57	0,46	0,33	0,22	0,17																																		
$\alpha = 30^\circ$	0,94	0,82	0,73	0,65	0,61	0,52	0,49																																		
$\alpha = 45^\circ$	1,00	0,86	0,81	0,76	0,75	0,64	0,61																																		
	$\zeta = 2,0$																																								

1	2
37. Kompensatory lirowe 	z rury gładkiej $\zeta = 0,7$ z rury falistej $\zeta = 1,4$

Tabela 10.6.4. Wartości liczbowe współczynnika oporu miejscowego ζ armatury wodociągowej (według E. Mielcarzewicza, *Obliczenia hydrauliczne układów wodociągowych*, Warszawa 1965; zob. również PN-76/M-34034 oraz katalogi producentów)

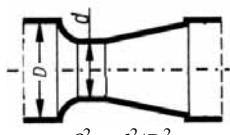
Schemat i nazwa elementu	Wartości liczbowe współczynnika ζ									
	2									
 1. Zasuwa	x/d	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8		
	ζ	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,00	97,80		
 2. Zasuwa płaska	x/d	0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75
	ζ	0,15	0,30	0,80	1,50	2,80	5,30	12,0	22,0	30,0
 3. Zasuwa przewężona	D/d	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
	ζ	0,35	0,5	0,75	1,15	1,55	2,2	2,95	3,8	4,75

1	2							
4. Zawór stożkowy 	δ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	65°
	ζ	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486
5. Zawór przepływowaty zwykły 	d_n	80	100	150	200	250	300	350
	ζ	4,0	4,1	4,4	4,7	5,1	5,4	5,5
6. Zawór półprzelotowy 	d_n	60	80	100	150	200	250	300
	ζ	2,7	2,4	2,2	1,86	1,65	1,50	1,40
7. Zawór przelotowy 	d_n	25	50	65	75	100	125	150
	ζ	11,0	0,73	0,65	0,60	0,50	0,46	0,42
8. Zawór odchylny klapowy  $d = 0,535d_0$	δ	15°	20°	30°	45°	60°	70°	
	ζ	90	62	30	9,5	3,2	1,7	

1	2								
9. Klapa zwrotna	d_n	40	70	100	200	300	500	700	800
	ζ	1,3	1,4	1,5	1,9	2,1	2,5	2,65	3,5
10. Kosz ssawny z klapą zwrotną	d_n	40	70	100	150	200	300	500	750
	ζ	12,0	8,5	7,0	6,0	5,2	3,7	2,5	1,6
11. Kosz ssawny żeliwny bez klapy zwrotnej	$\zeta = (0,675 + 1,575) \left(\frac{A}{A_0} \right)^2$ $A = \frac{\pi d^2}{4};$ $A_0 - \text{sumaryczna powierzchnia otworów smoka}$								

Tabela 10.6.5. Wartości liczbowe współczynnika oporu miejscowego ζ urządzeń mierniczych

Nazwa elementu	Wartości liczbowe współczynnika ζ							
1	2							
1. Kryza	β^2	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
	ζ	249	102	53	31	19	9	4

1	2							
2. Krótka rura Venturiego	β^2	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
 $\beta^2 = d^2/D^2$	ζ	17	7	3	2	1	0,5	0,3
3. Wodomierz skrzydełkowy	dla średnic $d_n = 15, 20, 25, 30, 40, 50$ mm $\zeta = 8 \div 10$							
4. Wodomierz śrubowy o osi poziomej (przybliżone wartości współczynnika ζ)	d_n	80	100	125	150	200	250	300
	ζ	1,01	0,98	0,77	0,80	0,74	0,66	0,52
5. Wodomierz studzienny (przybliżone wartości współczynnika ζ)	d_n	80	100	150	200	260	300	
	ζ	2,01	1,94	1,64	1,88	1,87	1,28	

LITERATURA

- [1] Altšul A.D., Kiselev P.G., *Gidravlika i aerodynamika*, Stroizdat, Moskva 1975.
- [2] Batchelor G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
- [3] Bechtold Z. (red.), *Mechanika płynów. Zbiór zadań*, Wyd. PWr., Wrocław 1979.
- [4] Błażejewski R., *100 prostych doświadczeń z wodą i powietrzem*, WNT, Warszawa 1991.
- [5] Bukowski J., Kijkowski P., *Kurs mechaniki płynów*, PWN, Warszawa 1980.
- [6] Burka E.S., Nalecz T.J., *Mechanika płynów w przykładach*, PWN, Warszawa 1994.
- [7] Cheremisinoff N.P., *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, Vol. 1, Flow Phenomena and Measurement, Houston 1986.
- [8] Czetwertyński E., Utrysko B., *Hydraulika i hydromechanika*, PWN, Warszawa 1969.
- [9] Duckworth R.A., *Mechanika płynów*, WNT, Warszawa 1983.
- [10] Dziubiński I., Świątkowski T. (red.), *Poradnik matematyczny*, cz. I, II, wyd. III, PWN, Warszawa 1982.
- [11] Elsner J., *Turbulencja przepływów*, PWN, Warszawa 1987.
- [12] Grabarczyk Cz., *Przepływy cieczy w przewodach. Metody obliczeniowe*, Envirotech, Poznań 1997.
- [13] Grybos R., *Mechanika płynów z hydrauliką*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1977.
- [14] Ideličík I.E., *Spravočník po gidravličeskim soprotivlenijam*, Mašinostroenie, Moskva 1975.
- [15] Jeżowiecka-Kabsch K. (red.), *Mechanika płynów*, Wyd. PWr., Wrocław 1976.
- [16] Jeżowiecka-Kabsch K. (red.), *Mechanika płynów. Teoria i zastosowanie*, Wyd. PWr., Wrocław 1984.
- [17] Jeżowiecka-Kabsch K., *Wpływ kształtów dyfuzorów na wysokość strat hydraulicznych*, Pr. Nauk. Inst. Tech. Ciepl. i Aparatury Przemysł. nr 3, seria Monografie nr 2, Wrocław 1971.
- [18] Kasprzak W., Lysik B., *Analiza wymiarowa w projektowaniu eksperymentu*, Wyd. PWr., Wrocław 1974.
- [19] Kordos M., Skwarzyński M., Zawadowski W. (red.), *Leksykon matematyczny*, wyd. II, Wiedza Powszechna, Warszawa 1995.
- [20] Landau L.D., Lifszyc E.M., *Hydrodynamika*, PWN, Warszawa 1994.
- [21] Laudański L., *15 wykładów aeromechaniki. Wstęp do specjalności lotniczych*, Ofic. Wyd. Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1999.
- [22] Leroux J.P., Bauduin Ph., *Mécanique des fluides*, Dunod, Paris 1972.
- [23] Lojcianskij L.G., *Mechanika żidkost i gaza*, Nauka, Moskva 1978.
- [24] Mathieu J., *Kilka zagadnień turbulencji swobodnej i przyściennej w powiązaniu z przenoszeniem ciepła*, PAN, Biuro Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych, Warszawa 1962.

- [25] Mielcarzewicz E., *Obliczenia hydrauliczne układów wodociągowych*, Arkady, Warszawa 1965.
- [26] Mitosek M., *Mechanika płynów w inżynierii środowiska*, Ofic. Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1997.
- [27] Munson B.R., Young D.F., Okiiski T.H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Wiley, NY, 1998.
- [28] Orzechowski Z., Prywer J., Zarzycki R., *Mechanika płynów w inżynierii środowiska*, WNT, Warszawa 1997.
- [29] Ouziaux R., Perrier J., *Mécanique des fluides appliquée*, Dunod, Paris 1978.
- [30] PN-EN 24006, PN-ISO 4006, *Pomiar strumienia płynu i objętości przepływającego płynu w przewodach. Terminologia i symbole*, PKNiM, Wyd. Normalizacyjne, Warszawa 1997.
- [31] PN-76/M-34034, *Rurociągi. Zasady obliczeń strat ciśnienia*, PKNiM, Wyd. Normalizacyjne, Warszawa 1976.
- [32] PN-93/M-53950/01, *Pomiar strumienia masy i strumienia objętości płynów za pomocą zwężek pomiarowych*, Wyd. Normalizacyjne Alfa-Wero sp. z o.o, Warszawa 1993.
- [33] PN-81/M-42367, *Pomiary przepływu płynu. Pomiary przepływu za pomocą rurek spiętrzających*, Wyd. Normalizacyjne, Warszawa 1981.
- [34] *Poradnik inżyniera. Matematyka*, t. I, II, wyd. drugie zmienione (praca zbiorowa), WNT, Warszawa 1986.
- [35] Prosnak W.J., *Mechanika płynów*, t. I, PWN, Warszawa 1970.
- [36] Puzyrewski R., Sawicki J., *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*, PWN, Warszawa 1987.
- [37] Schlichting H., *Grenzschnit-Theorie*, Verlag G. Braun, Karlsruhe, tłum. na jęz. rosyjski: *Teoriya pogranicznego sloja*, Nauka, Moskwa 1974.
- [38] Stefański W., Wyszkowski K., *Tablice i wykresy do obliczeń z mechaniki płynów*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1974.
- [39] Streeter V.L., *Handbook of Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, New York 1961.
- [40] Streeter V.L., Wylie E.B., Bedford K.W., *Fluid Mechanics*, WCB/McGraw-Hill, Boston 1999.
- [41] Szewczyk H. (red.), *Mechanika płynów. Ćwiczenia laboratoryjne*, Wyd. PWr., Wrocław 1979.
- [42] Szewczyk H., *Nieustalony przepływ cieczy nieściśliwej w szeregowo-równoległych systemach hydraulicznych*, Pr. Nauk. Inst. Techn. Ciepl. i Mech. Pł., 14, Seria: Studia i Materiały, 10, Wrocław 1977.
- [43] Troskolański A.T., *Hydromechanika techniczna*, t. III, *Pomiary wodne*, PWT, Warszawa 1957.
- [44] Troskolański A.T., *Hydromechanika*, WNT, Warszawa 1967.
- [45] Tuliszka E., *Mechanika płynów*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1974.
- [46] Wacławik J., *Mechanika płynów i termodynamika*, Wyd. AGH, Kraków 1993.
- [47] Walden H., Stasiak J., *Mechanika cieczy i gazów w inżynierii sanitarnej*, Arkady, Warszawa 1971.
- [48] Wierzcholski K., *Zastosowania elementów mechaniki płynów. Teoria i zadania*, Wyd. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1998.
- [49] Wróblewski A.K., Zakrzewski J.A., *Wstęp do fizyki*, t. I, PWN, Warszawa 1984.
- [50] Wróblewski A.K., Zakrzewski J.A., *Wstęp do fizyki*, t. II, PWN, Warszawa 1989.
- [51] Wysocki J., *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa 1967.