Bartosz Sekuta, grupa 3, II rok Informatyki Stosowanej

(1) Stosując metodę Fouriera znaleźć rozwiązanie równania $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<l$, $t>0$

spełniającego warunki $u(0,t)=u(l,t)=0$, $t>0$

oraz

$X(0)=X(l)=0$

$u(x,0)=f(x)$, gdzie $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le \frac{l}{2} \\ l-x, & \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$

Szukam rozwiązania w postaci

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

wstawiając tę funkcję do zadanego równania:

$$X(x)T'(t) = a^2 \cdot X''(x)T(t)$$

$$a^2\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad \lambda>0$$

Aby znaleźć λ i X należy rozwiązać problem brzegowy $X(0)=X(l)=0$ oraz

(*) $\underline{X''+\lambda X=0}$

Można zauważyć, że gdyby λ było niedodatnie to jedynym rozwiązaniem byłoby rozwiązanie zerowe, więc $\lambda>0$, wówczas rozwiązanie równania * jest następujące $X(x)=C\cos\sqrt{\lambda}x + D\sin\sqrt{\lambda}x$, z warunków brzegowych mamy, że skoro $X(0)=0$ to $C=0$ bo $\underset{0}{\underset{\parallel}{X(0)}} = \underset{0}{\underset{\parallel}{C}}\cdot \underset{1}{\underset{\parallel}{\cos 0}} + \underline{D\sin 0}$

oraz $D\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$

ale $D \neq 0$ więc wartości własne λ_n są:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

A ciąg funkcji własnych

$$X_n(x) = D_n \sin\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \cdot x = \underline{D_n \sin\frac{n\pi}{l} x} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Funkcja T_n spełnia równanie

$$T_n'(t) + a^2 \frac{n\pi}{l} T_n(t) = 0$$

więc

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \frac{n\pi}{l} t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad ; C_n \text{ – dowolne stałe}$$

więc

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = D_n \sin\frac{n\pi}{l} x \cdot C_n e^{-a^2 \frac{n\pi}{l} t}$$

$$= A_n e^{-a^2 \frac{n\pi}{l} t} \cdot \sin\frac{n\pi}{l} x \quad , \underline{A_n = D_n C_n}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 \frac{n\pi}{l} t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

mamy, że

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = f(x)$$

Rozwijając $f(x)$ w ~~sz~~ niepełny szereg trygonometryczny Fouriera wg. sinusów.

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = \frac{2}{l}\Big[\underbrace{\int_0^{\frac{l}{2}} x \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx}_{} +$$

$$+ \int_{\frac{l}{2}}^{l} (l - x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx\Big] = \frac{4l}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}$$

rozw. na dodatkowej kartce

więc

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 2k \\ \frac{4l(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} & \text{dla } n = (2k+1) \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Rozwiązanie

$$\boxed{u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \exp\left[-a^2 \frac{(2k+1)\pi t}{l}\right] \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEN DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIAC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Bartosz Sekuta

Zad 2

Dla jakiej krzywej spełniającej warunek $y(1)=0, y(e)=1$ funkcjonał $J[y] = \int_1^e [x(y'^2) + yy']\,dx$ może osiągnąć ekstremum?

$$f(x) = x(y'^2) + yy'$$

Korzystamy z równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial f'}(x, y(x), y'(x)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}(x, y(x), y'(x))\, y'(x) -$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(x, y(x), y'(x))\, y''(x) = 0$$

$$y' - 2y' - y' - 2xy'' = 0$$

$$-2y' - 2xy'' = 0$$

$$y''x + y' = 0$$

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{x}$$

całkując po dx mamy

$$\ln y' = -\ln x + \ln A$$

$$y' = \frac{A}{x}$$

całkując po raz drugi

$$y = A\ln x + \ln B$$

$$y = \ln x^A + \ln B$$

$$y = \ln Bx^A$$

z warunków początkowych

$$y(1) = 0 \quad \wedge \quad y(e) = 1$$

WAZNE NOW

$\ln B = 0 \quad \wedge \quad \ln Be^{A} = 1$

$B = 1 \quad \wedge \quad Be^{A} = e$

$e^{A} = e \Rightarrow A = 1$

Odp. Rozwiązaniem jest $f(x) = \ln x$

Bartosz Sekuła

③ Wyznaczyć w obszarze $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ rozwiązanie równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$ spełniające warunek brzegowy $$\lim_{x_2 \to 0} u(x_1, x_2) = F(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x_1| \le a \\ 0 & \text{dla } |x_1| > a \end{cases}$$

Funkcja Greena dla obszaru D ma postać

$$G = \frac{1}{2} \ln \frac{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2+\xi_2)^2}, \qquad x = (x_1, x_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial D} \frac{dG(x,\xi)}{dn_\xi} a(\xi)\, dS_\xi, \qquad \omega_n = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} 2\pi^{\frac{1}{2}n}$$

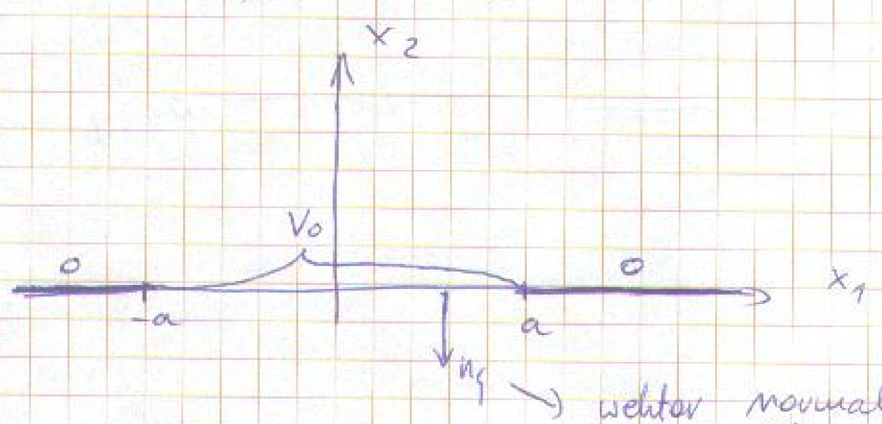
dla przestrzeni R^2

$$\omega_n = \frac{1}{\Gamma(1)} 2\pi^1 = 2\pi$$

więc

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{dG(x,\xi)}{dn_\xi} F(\xi_1)\, dl_\xi$$

$F(\xi_1) = V_0$; dla $[-a, a]$



→ wektor normalny do ∂D w punkcie $\xi(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \underline{\underline{n_\xi = [0, -\xi_2]}}$

czyli $$\frac{dG}{dn_\xi} = \frac{\partial G}{\partial \xi_2}$$

→ pochodna cząstkowa w kierunku wektora $[0, \xi_2]$

pochodna kierunkowa w kierunku wektora $[0, -\xi_2] = -[0, \xi_2]$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEN DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIAC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

więc

$$\mu(x_1,x_2) = \frac{V_0}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi_2}\right)\Bigg|_{\xi_2=0} d\xi_1$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_2}\Bigg|_{\xi_2=0} = \frac{1}{2}\,\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}{(x_1-\xi_1)^2+(x_2+\xi_2)^2}\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{2(x_2+\xi_2)(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+2(x_2-\xi_2)[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2]}{[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2]^2}\Bigg|_{\xi_2=0}$$

$$= \cancel{\frac{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2}{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2}}\cdot\frac{x_2[(x_1-\xi_1)^2+x_2^2]+}{[(x_1-\xi_1)^2+x_2^2]^2}$$

$$+\frac{x_2[(x_1-\xi_1)^2+x_2^2]}{} = \frac{2x_2[(x_1-\xi_1)^2+x_2^2]}{[(x_1-\xi_1)^2+x_2^2]^2} =$$

$$= \frac{2x_2}{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \xi_2}\Bigg|_{\xi_2=0} = \frac{2x_2}{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2}$$

więc

$$\mu(x_1,x_2) = \frac{V_0}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x_2}{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2}\,d\xi_1$$

Panta Plast

WAZNE NOW

Bartosz Sekuła

Zad 4

$y \in C^2[0,1]$

$y(0)=0, \quad y(1)=\frac{1}{e}$

$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 - y^2 - y)\, e^{2x} dx$

$f(x, y(x), y'(x)) = [(y'(x))^2 - y^2(x) - y(x)]\, e^{2x}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}(-2y(x)-1) \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = e^{2x}(2y'(x))$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2e^{2x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} = 2e^{2x}(2y'(x)) +$

$+ e^{2x}\, 2y''(x) = 4e^{2x}y'(x) + 2e^{2x}y''(x)$

Podstawiając do wzoru Eulera otrzymujemy

$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \cdot (y'(x)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\, y''(x) = 0$

$-2e^{2x}y(x) - e^{2x} - 4e^{2x}y'(x) - 2e^{2x}y''(x) - 0 \cdot y'(x)$
$- 2e^{2x}y''(x) = 0$

$-4e^{2x}y''(x) - 4e^{2x}y'(x) - 2e^{2x}y(x) - e^{2x} = 0$

$4y''(x) + 4y'(x) + 2y(x) = -1$

$4r^2 + 4r + 2 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -16 < 0$

$r = \alpha + \beta i$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$

$\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\sqrt{4 \cdot 4 \cdot 2 - 16}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{16}}{8} = \frac{1}{2}$

$r = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{1}{2}x + C_2 \sin\frac{1}{2}x\right)$

$y_2(x) = a$

$y_2'(x) = 0 \qquad y_2''(x) = 0$

$4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot a = -1$

$a = -\frac{1}{2}$

$y_2(x) = -\frac{1}{2}$

$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right)$

Uwzględniając warunki mamy:

$y(0) = 0$

$y(0) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}\left(C_1 \cos\frac{1}{2}\cdot 0 + C_2 \sin\frac{1}{2}\cdot 0\right)$

$= -\frac{1}{2} C_1 \cdot 1 = -\frac{1}{2} C_1$

$-\frac{1}{2} C_1 = 0$

$C_1 = 0$

$y(1) = \frac{1}{e}$

$y(1) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}\left(C_2 \sin\frac{1}{2}\cdot 1\right) = -\frac{1}{2} C_2 e^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} C_2 e^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{2} = \frac{1}{e}$

$C_2 = -\frac{2}{e^{\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{2}}$

$y(x) = -\frac{2}{e^{\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{x}{2}$

Bartosz Sekuta

5. Obliczyć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = x_1 + x_2$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$$

$$u_{|\partial D} = 0$$

Wyznaczę funkcję Green'a $G(x, \xi)$ dla obszaru Ω

$$G(x, \xi) = E(x, \xi) - g(x, \xi)$$

rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a

f. harmoniczna względem $x \in D$ i $\xi \in D$

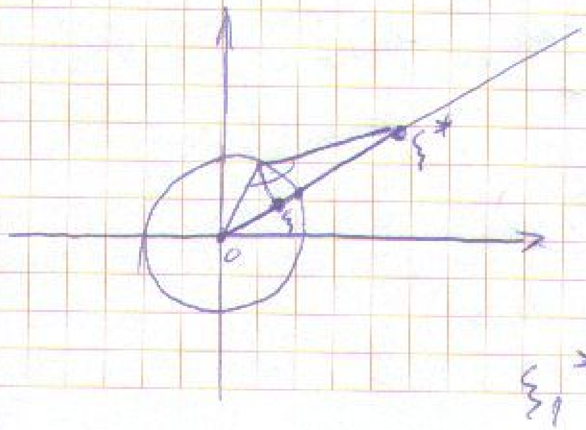
$$E(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} \|x - \xi\|^{2-n} & \text{dla } n > 2 \\ -\ln \|x - \xi\| & \text{dla } n = 2 \end{cases} \qquad x \neq \xi$$

$$\left\{ \|x\| \stackrel{def}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right\}$$

czyli dla $n = 2$

$$E(x, \xi) = -\ln \|x - \xi\| = -\frac{1}{2} \ln\left[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2\right]$$

Aby znaleźć $g(x, \xi)$ zastosuję metodę punktów symetrycznych



Niech $\xi \in \Omega$, $\xi^* \notin \Omega$

Ale oba punkty leżą na półprostej $O\xi$, oraz

$$d(0, \xi) d(0, \xi^*) = R^2 = 4$$

Zauważmy, że

$$\xi_1^* = \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad \xi_2^* = \frac{\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEN DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIAC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$g(x,\xi) = \ln \frac{1}{d(0,\xi)\, d(x,\xi^*)} = -\frac{1}{2}\ln(\xi_1^2+\xi_2^2)\left[(x_1-\xi_1^*)^2 + (x_2-\xi_2^*)^2\right] = -\frac{1}{2}\ln(\xi_1^2+\xi_2^2)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(x_1 - \frac{4\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{4\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)^2\right]$$

$$\rightarrow G(x,\xi) = \frac{1}{2}\ln(\xi_1^2+\xi_2^2)\left[\left(x_1 - \frac{4\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{4\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)\right] - \frac{1}{2}\ln\left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2\right]$$

Mając już funkcję Greena powierzchni Ω obliczamy $u(x_1,x_2)$

$f(\xi) = x_1 + x_2$

$\omega_n = 2\pi$

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_D G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

$$u(x_1,x_2) = -\frac{1}{2\pi}\cdot(x_1+x_2)\iint_D \left\{\frac{1}{2}\ln(\xi_1^2+\xi_2^2)\left[\left(x_1 - \frac{4\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{4\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)\right] - \frac{1}{2}\ln\left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2\right]\right\} d\xi_1\, d\xi_2$$

WAZNE NOW