Algebra – egzamin 2014, IS, WIMiIP, drugi termin. Prowadzący – dr. hab. Leonid Plachta.

1. (?) a) Niech $f: V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym przestrzeni liniowej V w przestrzeń W nad ciałem R. Podaj definicje jądra Kcr f x obrazu Im f odwzorowania f. (4p)

(?) b) Wiadomo jest, że $dim(V)mn$ oraz $dim(Kcr\ f)=k$. Czemu jest równy dim(Im f)? (3p)

2. a) Niech $f: R^3 \to R^2$ będzie odwzorowaniem liniowym, określone wzorem $f(x,y,z)=(2x-y-3z, 2x+y+z)$, a odwzorowanie $g: R^2 \to R^3$ określone wzorem $g(x,y)=(2x-y, 2x+y, x-y)$. Zapisz macierz odwzorowania $g^o f$ w bazie standardowej. Jaki jest rząd odwzorowania $g^o f$? (5 + 3p)

3. Podaj definicję grupy cyklicznej. Przedstaw przykład grupy niecyklicznej. (3 +3p)

4. a) Zdefiniuj postać algebraiczną liczby zespolonej $z \epsilon C$, wskaż geometryczną interpretację z. (3p)

b) Oblicz wartość $(2\sqrt{3}+2i)^{10}$. (5p)

5. a) Rozwiąż układ równań liniowych metodą eliminacji Jordana – Gaussa. (7p)

$$\begin{cases} 2x+y+4z+3u=0 \\ -3x-2y-8z-6u=0 \\ 10x+3y+12z+9u=0 \end{cases}$$

b) Czy tworzy zbiór V rozwiązań danego układu podprzestrzeni w przestrzeni wektorowej R_{xy}. Jeśli tak, to jaki jest wymiar V ? (4+3p)

c) Niech mamy dwie bazy B i B' w przestrzeni liniowej R^3 $B=(1,-1,0),(1,0,-1),(-1,1,1)$ i $B'=(1,0,1),(1,1,0),(1,0,-1)$. Niech P będzie macierzą przejścia od B do B'. Oblicz wyznacznik macierzy P. (8p)

6. a) Sformułuj warunek dostateczny na to by dane odwzorowanie liniowe $f: R^n \to R^n$ było diagonizowalnym. (3p)

b) Sprowadź macierz A do postaci diagonalnej. Znajdź wektory własne bazowe odpowiadające wartościom własnym macierzy A. (10p)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Niech dana jest przestrzeń wektorowa V wymiaru n, i niech V_1 i V_2 będą jej podprzestrzeniami. Jakie warunki powinny spełniać V_1 i V_2 aby przestrzeń V była sumą prostą V_1 i V_2 ? (4p)

8. a) Metodą ortogonalizacji Grama – Schmidta sprowadź układ wektorów u = {(1, 0, -1, 0), (1, -1, -1, 1), (3, -2, -3, 2)} w przestrzeni euklidesowej R^4 do układu ortogonalnego v. (7p)

b) Czy układy u i v generują tę samą podprzestrzeń przestrzeni R^4 ?