Pytania egzaminacyjne (na dole).

Algebra, I rok, IMiIP **(** Informatyka stosowana, 30 godz. wykładów +15 godz. ćwiczeń)

(1, 2 i 3 terminy).

1. Zbiory, działania na zbiorach, struktury algebraiczne.
2. Definicja grupy. Grupy przemienne i nieprzemienne. Podgrupy. Przykłady grup. Grupa $\boldsymbol{Z_n}$ reszt modulo n . Generatory grup. Homomorfizm grup. Wielomiany od jednej zmiennej.
3. Ciało. Ciała liczb rzeczywistych i wymiernych.
4. Ciało liczb zespolonych. Postać algebraiczna i trygonometryczna, moduł i argument liczby zespolonej. Wzór de Moivre'a. Pierwiastkowanie liczb zespolonych. Geometryczna interpretacja zbioru pierwiastków stopnia n.
5. Macierze rzeczywiste i zespolone, działania na macierzach. Różne rodzaje macierzy.
6. Wyznaczniki i ich własności. Wyznacznik iloczynu dwóch macierzy stopnia n. Obliczanie wyznaczników. Rozwinięcie Laplace'a.
7. Dopełnienie algebraiczne. Macierze zdegenerowane i niezdegenerowane. Macierz odwrotna do danej. Metoda bezwyznacznikowa i wyznacznikowa obliczania macierzy odwrotnej. Przykłady.
8. Przestrzenie wektorowe (liniowe) nad $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{C}$. Podprzestrzeń. Liniowa niezależność wektorów. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej. Wymiar przestrzeni wektorowej. Macierz przejścia od jednej bazy do innej.
9.Odwzorowania liniowe przestrzeni wektorowych. Jądro i obraz odwzorowania liniowego. Izomorfizm.
10. Macierz odwzorowania liniowego w wybranych bazach. Zmiana macierzy odwzorowania liniowego przy przejściu do innych baz.
11. Rząd macierzy i odwzorowania liniowego. Wzór dla wymiarów jądra i obrazu odwzorowania liniowego.
12. Układy równań liniowych. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Układ Cramera. Przykłady.
13. Rozwiązania bazowe układu jednorodnego równań liniowych. Ogólna postać rozwiązań układu niejednorodnego.
14. Algorytmy rozwiązywania układów równań liniowych . Metoda eliminacji Gaussa – Jordana.
15. Wartości własne i wektory własne macierzy i odwzorowań liniowych $\boldsymbol{R}^n$ w $\boldsymbol{R}^n$ .Wielomian charakretystyczny macierzy i odwzorowania liniowego.
16. Kryteria diagonalizowalności macierzy .
17. Iloczyn skalarny symetryczny (metryka) w przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{R}^n$. Macierz Grama metryki symetrycznej w wybranej bazie przestrzeni $\boldsymbol{R}^n$. Zmiana macierzy Grama przy przejściu do innej bazy. Sygnatura iloczynu skalarnego. Przestrzeń ortogonalna. Postać kanoniczna metryki symetrycznej w $\boldsymbol{R}^n$. Przestrzeń euklidesowa. Norma wektora, odległość wektorów w $\boldsymbol{R}^n$, kąt między wektorami.
18. Układy ortogonalne wektorów. Ortogonalizacja Grama-Schmidta układów wektorowych w przestrzeni euklidesowej. Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni.
20. Odległość wektora do podprzestrzeni w przestrzeni euklidesowej. Rzut wektora na podprzestrzeń.
21. Izometria. Operatory ortogonalne w przestrzeni euklidesowej. Macierze ortogonalne. Przykłady.
23. Formy kwadratowe nad $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{C}$**.** Postać kanoniczna (standardowa) formy kwadratowej. Związek z formami dwuliniowymi(biliniowymi). Sprowadzenie formy kwadratowej do postaci kanonicznej.

24. Macierze dodatnie określone, ujemnie określone i nieokreślone. Kryterium Sylvestera.

Przykładowe zadania egzaminacyjne z algebry:

1) Rozwiązać układ równań liniowych metodą eliminacji Jordana-Gaussa (lub Cramera).
2) Obliczyć pierwiastki k-ego stopnia z danej liczby zespolonej. Obliczyć wartośc liczby zespolonej $(a+bi)^k$
3) Sprawdzić czy dany układ wektorów $u_1, \ldots, u_k$ w przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{R}^k$ jest bazą.
4) Obliczyć wyznacznik macierzy A.
5) Dane jest odwzorowanie liniowe f przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{R}^k$ w $\boldsymbol{R}^k$ w bazie standardowej . Niech B będzie inną baza przestrzeni wektorowej $\boldsymbol{R}^k$. Zapisać macierz odwzorowania f w nowej bazie przestrzeni $\boldsymbol{R}^k$. Zapisać macierz odwzorowania odwrotnego do f w danej bazie.
6) Wyznaczyć macierz złożenia dwóch odwzorowań f: $\boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^n$ i g: $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ w wybranych bazach.
7) Sprowadzić daną macierz rzeczywistą do postaci diagonalnej.
8) Dana jest macierz kwadratowa A (odwzorowanie liniowe f). Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne macierzy A (odwzorowania liniowego f).
9) Sprowadzić dana formę kwadratową do postaci kanonicznej. Wyznaczyć sygnaturę danej formy.
10) W przestrzeni euklidesowej dane są dwa wektory u i v . Obliczyć kąt między u i v odległość u i v , normę wektora u .
11) Sprawdzić czy dana macierz kwadratowa rzeczywista jest ortogonalną.
12) W przestrzeni euklidesowej $\boldsymbol{R}^k$ dane są podprzestrzeń W (określona w postaci układu równań lub wektorów bazowych) i wektor u . Znaleźć rzut wektora u na W (odległość u do W).
13) Wyznaczyć czy dana macierz jest dodatnie (ujemnie) określona.
14) Zapisać permutację odwrotną do danej, zapisać daną permutacje w postaci cyklicznej. Wyznaczyć czy dane dwie grypy są izomorficzne, czy dana grupa jest przemienną, cykliczną.

LITERATURA PODSTAWOWA

1. T.Jurlewicz , Z.Skoczylas, Algebra liniowa 1,2. Definicje, twierdzenia, wzory, Oficyna wydawnicza GiS, Wrocław, 2005.
2. T.Jurlewicz, Z.Skoczylas, Algebra liniowa 1,2. Przykłady i zadania, Oficyna wydawnicza GiS, Wrocław, 2006
3. J.Gancarzewicz, Algebra liniowa z elementami geometrii, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 2001
4. A.Herdegen, Wykłady z algebry liniowej i geometrii, Wydawnictwo Discepto, Kraków, 2005.
5. Jerzy Rutkowski, Algebra liniowa w zadaniach, PWN, 2012