Metody badawcze w mechanice
Plan wykładu:

I. Badania wytrzymałości materiałów.

1. Metody statyczna: próby rozciągania, ściskania, zginania i skręcania.
2. Twardość (metody: Brinella, Vickersa, Rockwella).
3. Matody dynamiczne: próby udarowe, badania zmęczeniowa.

II. Metody badania naprężeń i odkształceń.

1. Podstawowe alementy stanu naprężenia i odkształcania. Związki pomiędzy naprężaniem i odkształceniem, uogólnione prawo Hooka.
2. Taneomatria: podstawy matody tensometrycznaj, rodzaje tansometrów. Tansometry oporowe: zaseda działania, rodzaja i własności, układy pomiarowe, aparatura tensometryczna i jej dobór.
3. Elaetooptyka: właściwości światła wykorzystywane w elastooptyca, działanie polaryskopów, techniki badań elaetooptycznych, przykłady badań modelowych.
4. Matoda kruchych pokryć: podetawy matody i przykłady.
5. Metoda mory (metoda interferencji geometrycznej): podatawy metody i przykłady zaatosowań.
6. Metody holograficzna: podatawy holografii, interfarometria holograficzna i plamkowa, przykłedy badań intarferomatrycznych.

III. Nieniszczące badanie materiałów.

1. Ultrasonografia: defektoskopia ultredźwiękowa, ultradźwiękowa wyznaczania naprężeń. Urządzenia i metody.
2. Radiografia: podstawy matody, aparatura rentganowska i izotopowa, przykłady zastoaowań.

Metody badawcze w mechanice

Cel zajęć:

1. Zapoznanie z podstawowymi wielkościami mechanicznymi charakteryzującymi materiały konstrukcyjne.
2. Poznanie metod wyznaczania tych wielkości.
3. Przedstawienie problemów i zjawisk związanych z wytrzymałością stałyczną i dynamiczną.

4. Wprowadzenie podstawowych wielkości charakteryzujących stan naprężenia i odkształcenia elementów konstrukcyjnych.
5. Zapoznanie z problematyką doświadczainego wyznaczania rozkładów i wartości naprężeń oraz odkształceń w najprostszych elementach i układach.

6. Zapoznanie z metodami wykrywania wad materiałowych (defektoskopia) metodami nieniszczącymi.

Metody badawcze w mechanice

Literatura:

Problematyka wytrzymałości materiałów:

1. A. Skorupa, M. Skorupa
   Wytrzymałość materiałów
   Skrypt dla studentów wydziałów niemechanicznych
   AGH Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków 2000

2. S. Wolny (red.)
   Eksperyment w wytrzymałości materiałów
   Wytrzymałość materiałów (IV),
   Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, AGH, Kraków 2002

3. S. Mazurkiewicz (red.)
   Ćwiczenia laboratoryjne z wytrzymałości materiałów
   Politechnika Krakowska, 1999

4. K. Przybyłowicz
   Metody badawcze w metaloznawstwie
   Wydawnictwa AGH, Kraków 1991

5. L. A. Dobrzański
   Podstawy nauki o materiałach i metaloznawstwo, rozdz. 5
   WNT, Warszawa 2002

Metody badawcze w mechanice

Literatura:

Problematyka wyznaczania odkaztałceń i naprężeń elementów konstrukcyjnych:

6. Z. Orłoś (red.)
   Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń
   PWN, Warszawa 1977

7. W. Szczepiński (red.)
   Metody doświadczalne mechaniki ciała stałego
   PWN, Warszawa 1984

8. J. Kapkowski
   Podstawy doświadczalnej analizy naprężeń i odkształceń
   Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1996

9. A. Siemieniec
   Elastooptyka
   Skrypt uczelniany nr 615, AGH, 1977

10. Z. Roliński
    Tensometria oporowa
    WNT, Warszawa 1981

11. W. Styburski
    Przetworniki tensometryczne
    WNT, Warszawa 1976

Defektoakopia:

12. A. Lewińska-Romicka
    Badania nieniszczące. Podstawy defektoskopii
    WNT, Warszawa 2001

13. Z. Pawłowski
    Badania nieniszczące. Poradnik
    Stowarzyszenie Inżynierów i Techników Mechaników Polskich, Warszawa 1984

Skutki działania sił (obciążeń):

1. **Odkształcenie:**

- **sprężyste** – ciało powraca do pierwotnego kształtu po ustąpieniu działania siły
- **plastyczne** – ciało pozostaje odkształcone po ustąpieniu działania siły

2. **Zniszczenie spójności materiału** (pękanie, łamanie, kruszenie, itd.)

wytrzymałość ≡ właściwość przeciwstawienia się niszczącemu działaniu sił

Cel wytrzymałości materiałów:

1. **Określenie warunku bezpieczeństwa** - czy element konstrukcyjny nie ulegnie zniszczeniu pod wpływem przewidzianych obciążeń.

2. **Określenie warunku sztywności** – czy element nie będzie ulegał na tyle dużym odkształceniom, które utrudnią lub uniemożliwią jego należyte funkcjonowanie.

3. **Określenie warunku ekonomiczności konstrukcji** – wybór materiału konstrukcyjnego najbardziej odpowiedniego ze względu na rodzaj obciążenia z równoczesnym pełnym wykorzystaniem własności wytrzymałościowych tworzywa.

Mechanika ogólna ≡ Mechanika ciała stałego sztywnego

Statyka, kinematyka i dynamika bryły sztywnej

Mechanika klasyczna, zasady Newtona

Założenie:

Odległość dwóch dowolnych punktów ciała stałego nie zmienia się pod wpływem działających sił

Mechanika ciała stałego odkształcalnego ≡ Wytrzymałość materiałów

Ciała rzeczywiste pod wpływem oddziałujących na nie sił odkształcają się a przy odpowiednio dużej sile spójność materiału ulega zniszczeniu (łamanie, pękanie, kruszenie itd.)

Ogólne prawa mechaniki obowiązują w dalszym ciągu.

Zasada zesztywnienia:

Jeśli ciało odkształcalne pozostaje pod działaniem sił w równowadze, to układ tych sił musi spełniać takie same warunki, jakie obowiązują w statyce ciała sztywnego.

Zasada ta pozwala pominąć przemieszczenia punktów przyłożenia sił wywołane deformacją ciała przyjmując, że punkty te mają położenia takie same jak w ciele nieodkształconym.

Rodzaje obciążeń i związane z tym własności materiałów:

1. **Obciążenia statyczne – Własności statyczne**
siła (obciążenie) działająca na badane ciało zmienia się z czasem powoli

2. **Obciążenia dynamiczne – Własności dynamiczne**
gwałtownie (uderzeniowo, udarowo) działające obciążenie

3. **Obciążenie cykliczne – Własności zmęczeniowe**

4. **Obciążenie stałe i długotrwałe**

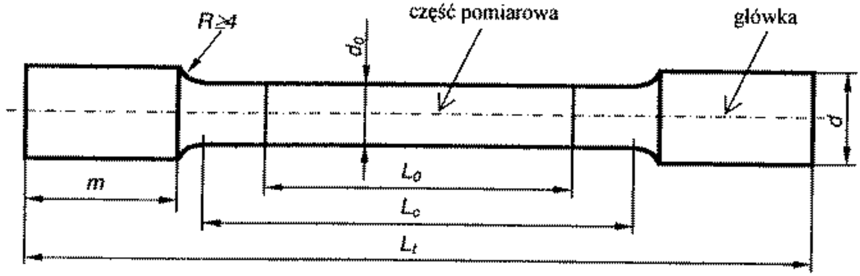
UWAGI:

1. **Własności materiałów wyznaczone metodami mechanicznymi nie są wielkościami fizycznymi** – gdyż zależą od warunków, w których je określono (od kształtu i wymiaru próbek, metodologii badań: rodzaj maszyny wytrzymałościowej, rodzaje uchwytów, prędkość narastania obciążeń)

2. **Własności materiałów wyznaczone metodami mechanicznymi mają charakter umowny** – wiele prób i badań jest znormalizowanych, określone są warunki przeprowadzania tych prób np. wymiary próbek, pozwala to na porównywanie własności materiałów i stanowi podstawę do obliczeń inżynierskich

Próba statyczna rozciągania

Przykład znormalizowanej próbki proporcjonalnej



$$L_0 = p \cdot d_0$$

$$L_0 = p \cdot \sqrt{4 \cdot S_0 / \pi}$$

p = 5 – próbki krótkie

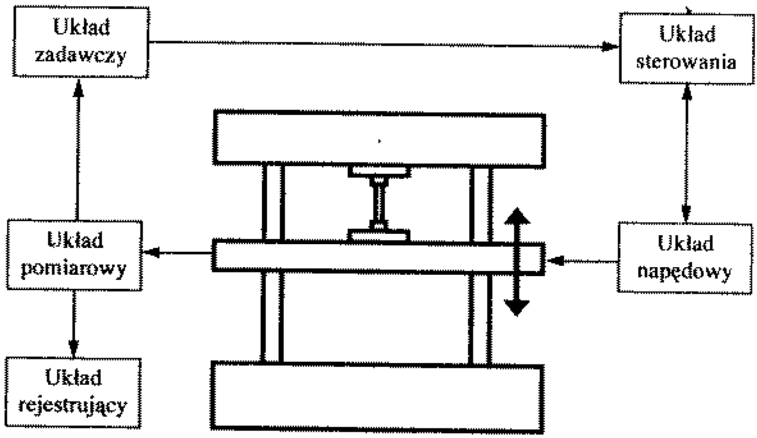
p = 10 – próbki długie

$$L_c = L_0 + 2 \cdot d_0$$

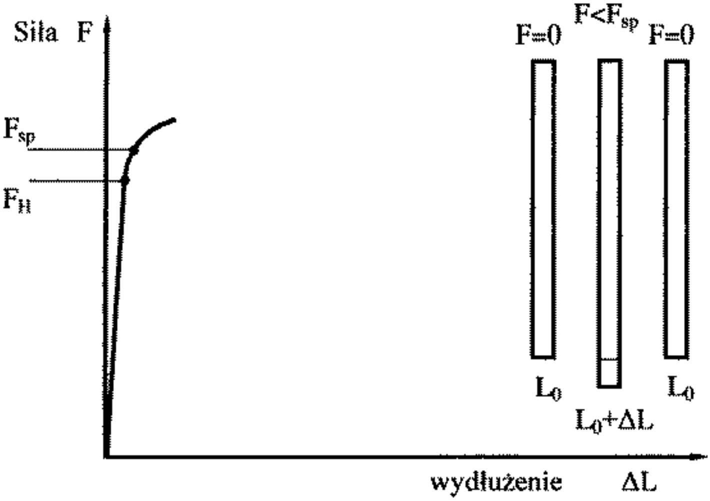
S_0 – pole przekroju poprzecznego

Próba statyczna rozciągania

Maszyna wytrzymałościowa – schemat blokowy



Próba statyczna rozciągania



$$R_H = \frac{F_H}{S_0}$$ - granica proporcjonalności

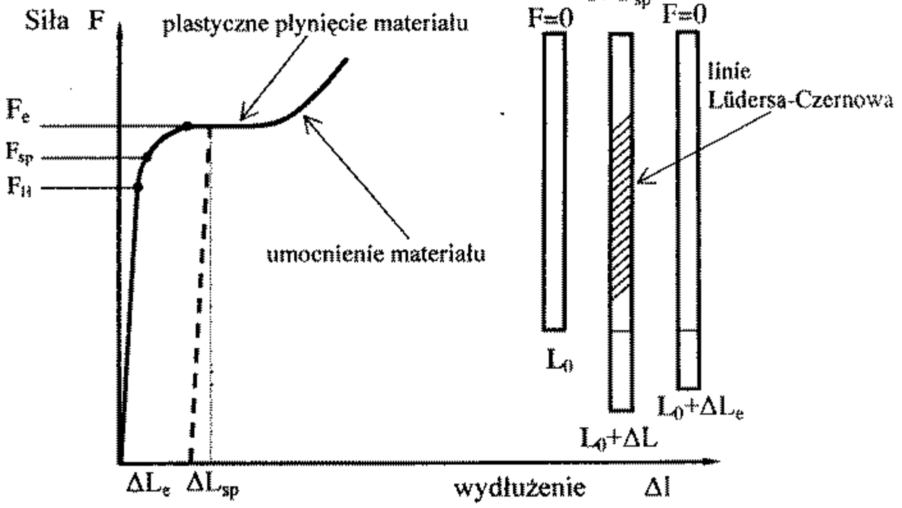
$$R_{sp} = \frac{F_{sp}}{S_0}$$ - granica sprężystości

$$R_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{S_0}$$ - umowna granica sprężystości

$F_{0,05}$ - siła wywołująca w próbce wydłużenie trwałe równe 0,05% początkowej długości pomiarowej próbki

S_0 - początkowe pole powierzchni przekroju

Próba statyczna rozciągania



$$\Delta L = \Delta L_{sp} + \Delta L_e$$

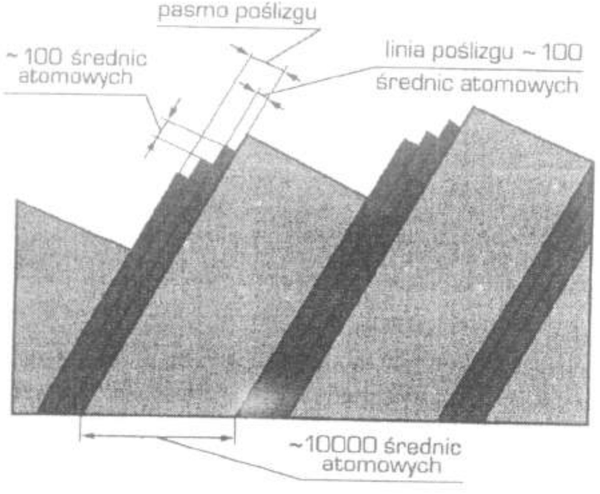
ΔL - wydłużenie całkowite

ΔL_{sp} - wydłużenie sprężyste

ΔL_e - wydłużenie plastyczne

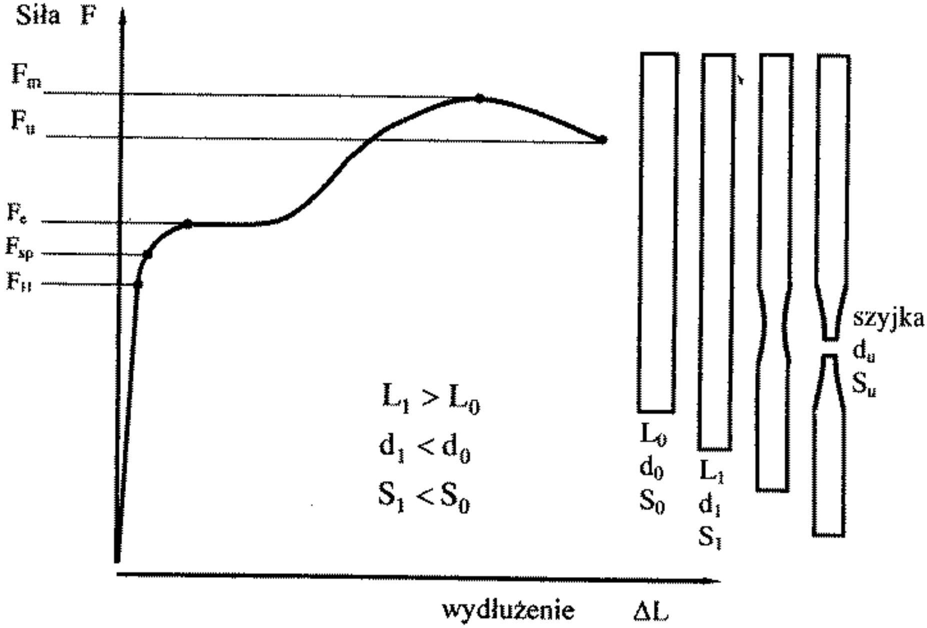
$$R_e = \frac{F_e}{S_0}$$ - granica plastyczności

S_0 - początkowe pole powierzchni przekroju



Schemat powstawania linii Lüdersa-Czernowa

Próba statyczna rozciągania



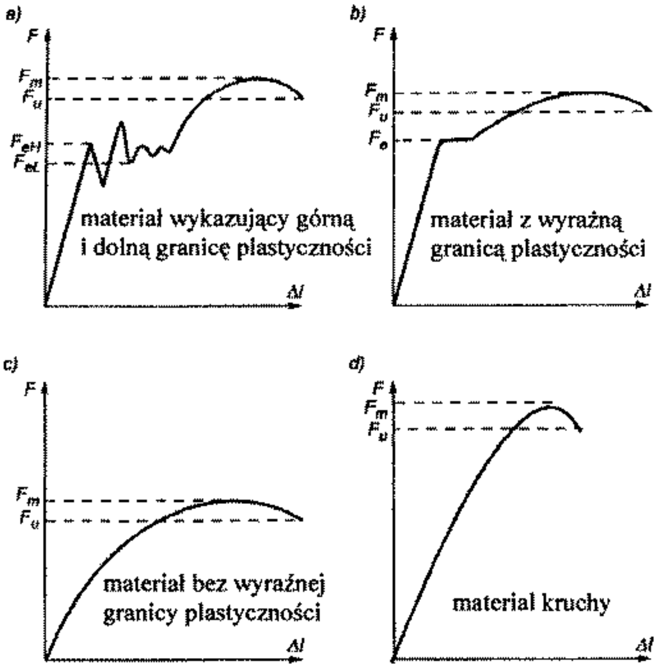
$$R_m = \frac{F_m}{S_0}$$ - wytrzymałość na rozciąganie

S_0 - początkowe pole powierzchni przekroju

$$R_u = \frac{F_u}{S_u}$$ - naprężenie rozrywające

S_u - pole powierzchni przekroju szyjki tuż przed rozerwaniem

Próba statyczna rozciągania

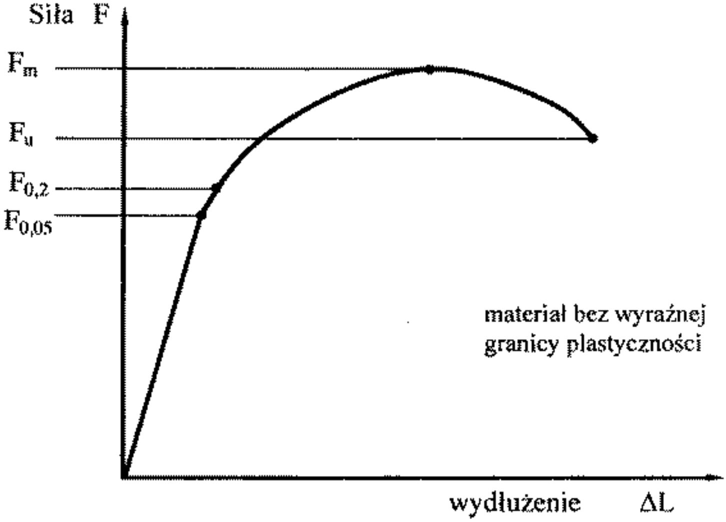


Wykresy rozciągania dla różnych typów materiałów.

F_{eH} – górna granica plastyczności

F_{eL} – dolna granica plastyczności

Próba statyczna rozciągania



$$R_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{S_0}$$ - umowna granica sprężystości

$F_{0,05}$ - siła wywołująca w próbce wydłużenie trwałe równe 0,05% początkowej długości pomiarowej próbki

$$R_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{S_0}$$ - umowna granica plastyczności

$F_{0,2}$ - siła wywołująca w próbce wydłużenie trwałe równe 0,2% początkowej długości pomiarowej próbki

S_0 - początkowe pole powierzchni przekroju

Próba statyczna rozciągania

Naprężenie:

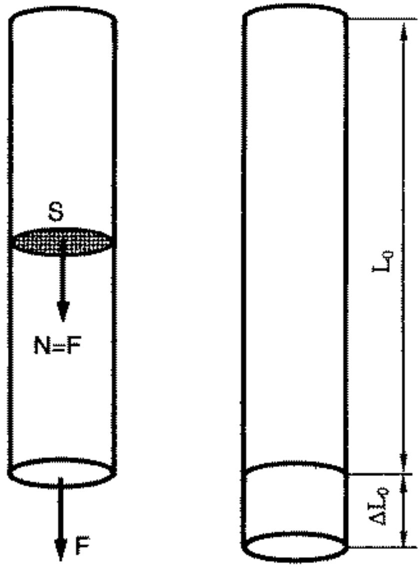
F – obciążenie zewnętrzne

N – rozciągająca siła wewnętrzna

$\sigma = \frac{F}{S}$ - naprężenie

Wydłużenie względne:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L_0}{L_0}$$

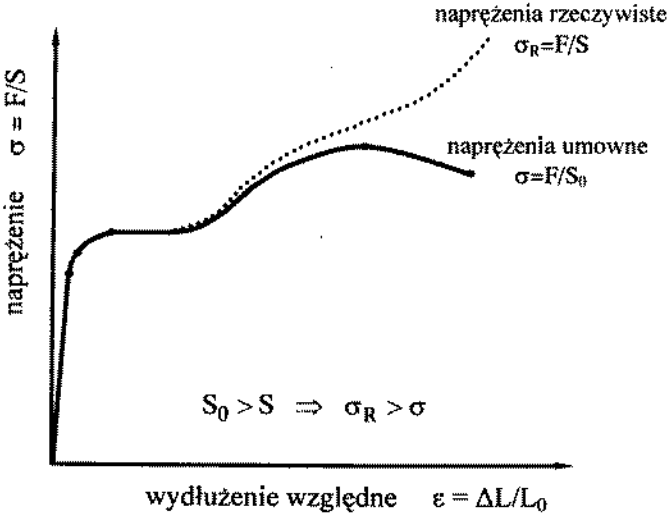


Jednostki

wielkość	układ SI	dawne jednostki	przelicznik
siła	newton [N]	kilogram siła [kG]	1 N = 0.102 kG
długość, wydłużenie	metr [m]	centymetr [cm]	1 m =100 cm
pole powierzchni	metr^2 [m^2]	centymetr^2 [cm^2]	1 m^2 = 10^4 cm^2
naprężenie	paskal [Pa] 1 Pa = 1 N / 1 m^2	1 kG/cm^2	1 Pa = 1.02×10^{-5} kG/cm^2

$$1\ \text{MPa} = 1\times10^6\ \text{Pa} = 10.2\ \text{kG/cm}^2$$

$\varepsilon = \Delta L/L_0$ – wydłużenie względne, wielkość niemianowana

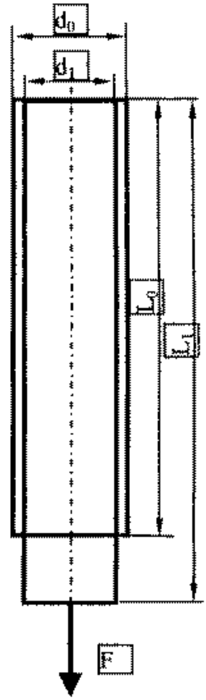


Zalecane szybkości rozciągania:

3-30 MPa/s – do górnej granicy plastyczności

0.4 mm/min – po przekroczeniu górnej granicy plastyczności

Prawo Hooka



$$\Delta L = \frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot L_0}{S_0}$$

$$\varepsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$ - względne wydłużenie

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma = \frac{\sigma}{E}}$$

E - moduł Younga, moduł sprężystości podłużnej, [MPa]

$$\varepsilon' = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$$ - względne poprzeczne wydłużenie

$\varepsilon' = -\nu \cdot \varepsilon$ - zależność między wydłużeniami względnymi

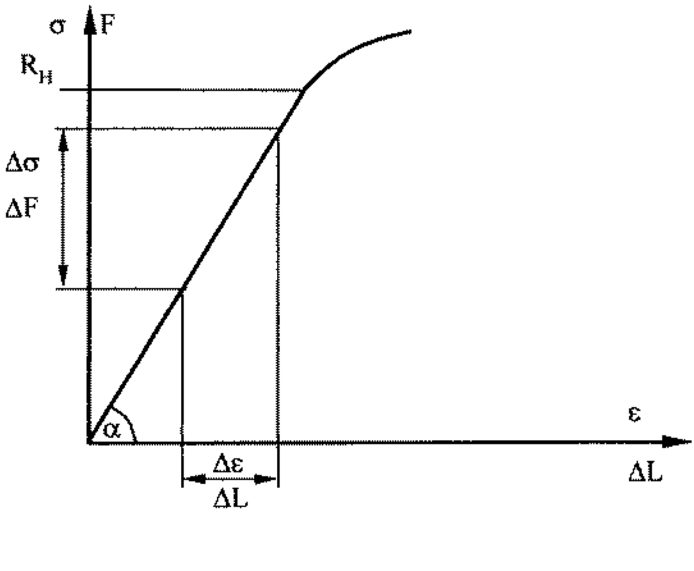
ν – współczynnik (liczba) Poissona, można wykazać, że $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{6} < \nu < \frac{1}{2}$ - dla większości materiałów

Stałe sprężystości wybranych materiałów

Materiał	Moduł Younga, MPa	Liczba Poissona
Stale węglowe konstrukcyjne	$2{,}05 \cdot 10^5$	0,24 , 0,30
Stal sprężynowa	$2{,}11 \cdot 10^5$	0,24 , 0,30
Żeliwo	$(1{,}15 \text{ , } 1{,}6) \cdot 10^5$	0,23 , 0,27
Stopy aluminium	$0{,}72 \cdot 10^5$	0,26 , 0,36
Stopy tytanu	$1{,}12 \cdot 10^5$	—
Beton	$(0{,}18 \text{ , } 0{,}44) \cdot 10^5$	0,16 , 0,18
Szkło	$0{,}6 \cdot 10^5$	0,25 , 0,30

Metoda wyznaczenia modułu Younga

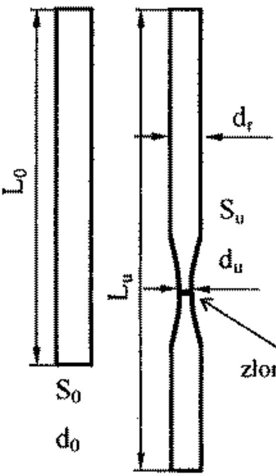


$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \frac{\Delta F \cdot L_0}{\Delta L \cdot S} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Analiza odkształceń próbki
Właściwości plastyczne materiału

1. Trwałe wydłużenie względne:

$$A_p = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100\%$$



złom (przełom) – przekrój próbki po jej rozerwaniu

2. Względne wydłużenie równomierne

$$A_r = \frac{d_0^2 - d_r^2}{d_r^2} \cdot 100\%$$

d_r – średnica w połowie dłuższej części po zerwaniu

3. Trwałe przewężenie w miejscu złomu

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100\%$$

dla próbek o przekroju kołowym

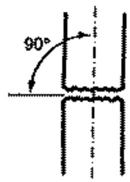
$$S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} \qquad Su = \frac{\pi d_u^2}{4}$$

$$Z = \left[1 - \left(\frac{d_u}{d_0}\right)^2\right] \cdot 100\%$$

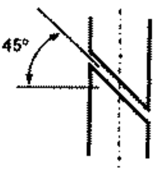
Przykład dla miękkiej stali niskowęglowej: $A_5 \approx 33\%$, $Z \approx 60\%$.

Rodzaje złomów (przełomów):

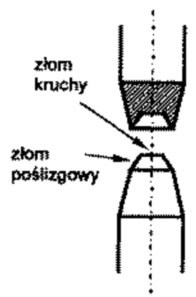
1. **Złom rozdzielczy kruchy** – nie jest poprzedzony widocznymi odkształceniami plastycznymi materiału, charakter przełomu jest wynikiem posiadania wewnętrznych sił spójności materiału w płaszczyźnie prostopadłej do osi próbki, powierzchnia złomu jest nierówna, szorstka i pozwala wyodrębnić poszczególne ziarna materiału, występuje dla materiałów kruchych (żeliwo, ceramika)



2. Złom **poślizgowy** – powstaje przez zniszczenie materiału poprzez poślizg w płaszczyznach krystalograficznych pod kątem 45° do kierunku obciążenia, powierzchnia złomu jest bardzo gładka poprzez silne odkształcenia plastyczne, zamazany jest obraz ziarn, występuje dla materiałów plastycznych (ołów, złoto)



3. Złom **pośredni (mieszany, rozdzielczy wiązki)** – poprzedzony odkształceniem plastycznym i powstaniem szyjki, które wywołuje umocnienie materiału i wymaga dalszego zwiększenia obciążenia, które w efekcie doprowadza do złomu rozdzielczego kruchego, złom ma charakter kielicha: złom plastyczny pobocznicy nachylony 45° względem osi i rozdzielczo kruchy rdzenia prostopadły do osi, złom charakterystyczny dla materiałów sprężysto-plastycznych (stal niskowęglowa)



Okoliczności, w których należy unieważnić próbę statyczną rozciągania:

1. Na próbce tworzy się więcej niż jedna szyjka
2. Próbka rozerwała się poza długością pomiarową
3. Przełom nastąpił w miejscu rysy
4. Próbka rozerwała się na wskutek miejscowej wady wewnętrznej materiału.

Próba statyczna rozciągania
Podsumowanie

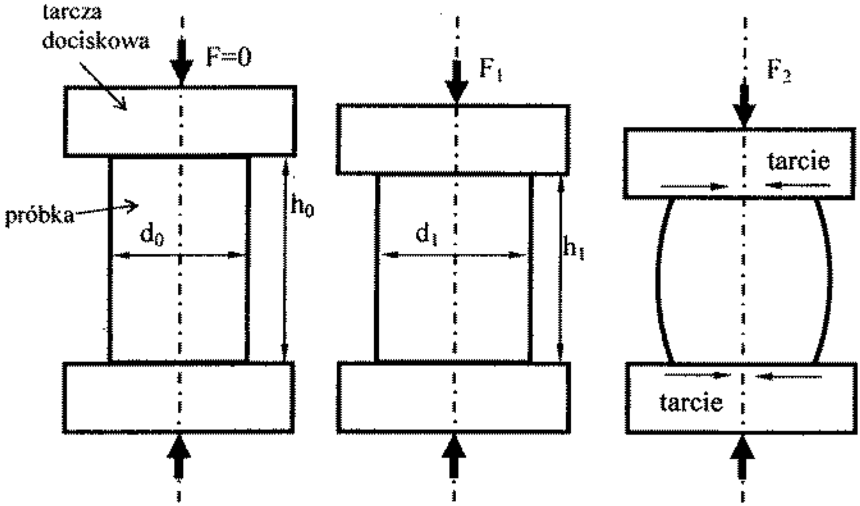
Celem próby jest wyznaczenie jednej lub kilku poniższych wielkości:

1. umownej granicy sprężystości $R_{0,05}$ [MPa]
2. umownej granicy plastyczności $R_{0,2}$ [MPa]
3. modułu Younga [MPa]
4. wyraźnej granicy sprężystości R_e [MPa] – jeżeli materiał ją wykazuje
5. wytrzymałości na rozciąganie R_m [MPa]
6. naprężenia rozrywającego R_u [MPa]
7. względnego wydłużenia A_p [%]
8. względnego wydłużenia równomiernego A_r [%]
9. względnego przewężenia Z [%]

Zalety statycznej próby rozciągania:

1. Możliwość uzyskania jednoosiowego i jednorodnego stanu naprężeń w przekrojach poprzecznych części pomiarowej próbki. Zaburzenie tego stanu zachodzi dopiero w końcowej fazie rozciągania.
2. Możliwość uzyskania wielu parametrów charakteryzujących właściwości mechaniczne materiału.
3. Możliwość klasyfikacji materiałów konstrukcyjnych na podstawie właściwości mechanicznych materiału.
4. Łatwość obserwacji reakcji próbki na proces obciążenia siłą rozciągającą aż do momentu jej zniszczenia.
5. Stosunkowo duża łatwość przeprowadzenia próby.

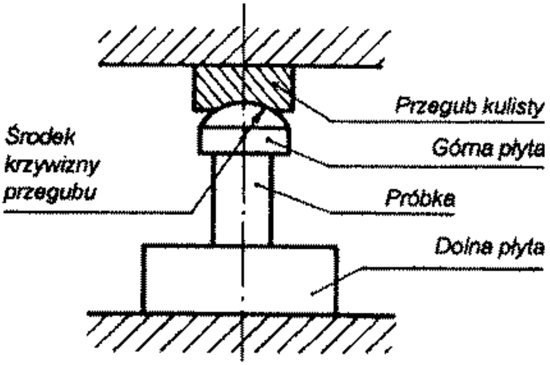
Próba statyczna ściskania



Warunki poprawności przeprowadzenia próby statycznego ściskania:

1. **Oś próbki powinna pokrywać się z osią obciążenia.**
2. **Powierzchnie czołowe próbek powinny być bardzo dokładnie obrobione: gładkie (polerowane) i prostopadłe do osi próbki.**
3. **Powierzchnie płyt dociskowych powinny być gładkie (polerowane) i wykonane z materiału twardszego niż materiał badany.**
4. **W celu zmniejszenia siły tarcia należy zastosować smarowanie powierzchni płyt dociskowych.**

Próba statyczna ściskania



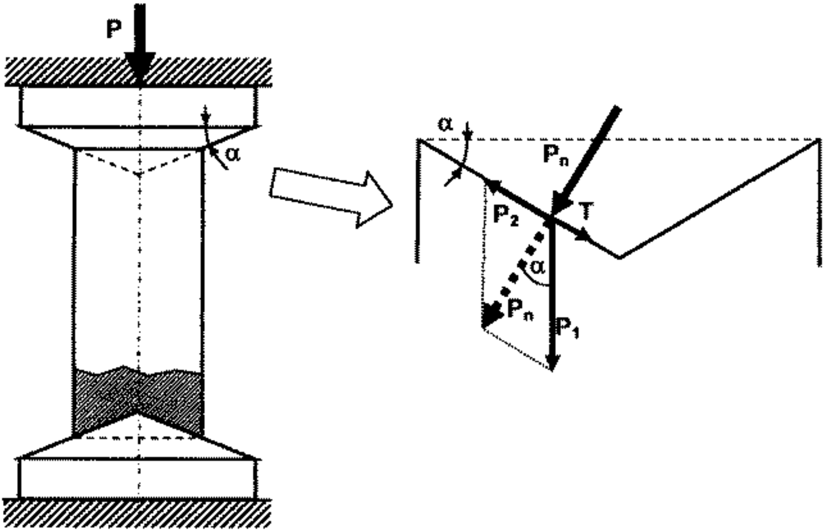
Schemat ustawienia próbki między płytami naciskowymi maszyny wytrzymałościowej lub prasy

Przegub kulisty:

- **eliminuje punktowy styk między płytą a podstawą próbki**
- **ułatwia ich bardziej równomierne przyleganie**

Próba statyczna ściskania

Ściskanie próbek między stożkowymi płytami dociskowymi



P_n –siła prostopadła do tworzącej stożka

$T = \mu \cdot P_n$ – siła tarcia μ **- współczynnik tarcia**

P_2 – składowa siły P_n skierowana zgodnie z tworzącą stożka

$$P_2 = P_n \cdot tg\alpha$$

P_1 – składowa siły P_n równoległa do osi próbki

$$P_2 = P_n \cdot tg\alpha = \mu \cdot P_n = T$$

$\alpha = arc\ tg\ \mu$ **- zapewnia jednoosiowe ściskanie**

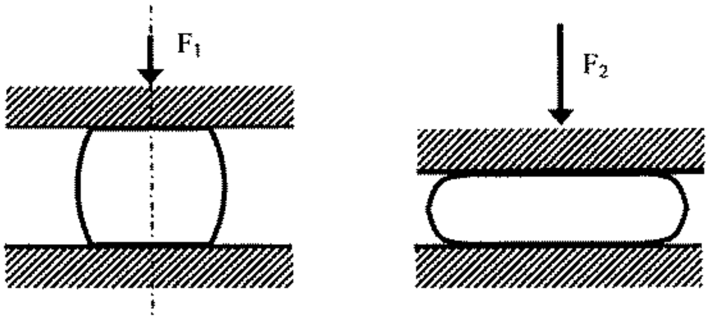
Wada metody:

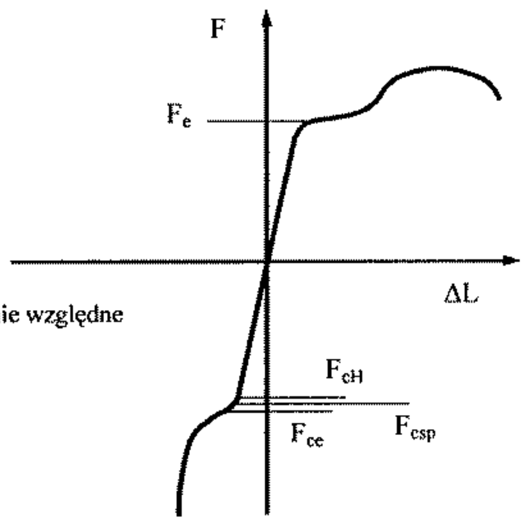
- nierównomierne osiowe odkształcenie próbki ε, tym większe im większy kąt α

- powstanie spiętrzenia naprężeń w pobliżu przy wierzchołku stożka

Próba statyczna ściskania

Materiał sprężysto-plastyczny (np. stal niskowęglowa)





$$A_c = \frac{h_0 - h_1}{h_0}$$ - skrócenie względne

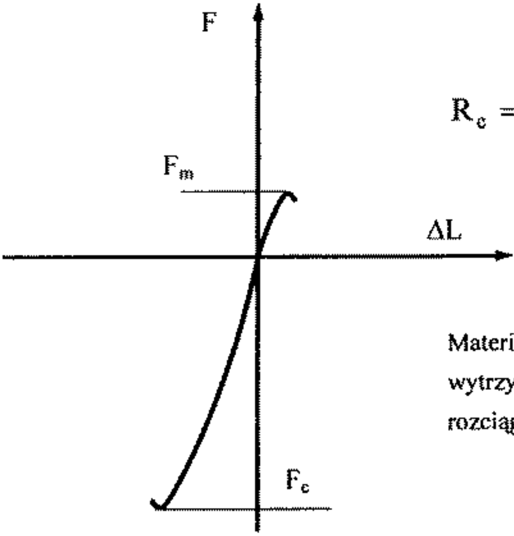
$$R_{c0.01} = \frac{F_{c0.01}}{S_0} \quad \text{[MPa]}$$ - umowna granica sprężystości

$$R_{c0.2} = \frac{F_{c0.2}}{S_0} \quad \text{[MPa]}$$ - umowna granica plastyczności

$F_{c0.01}$, $F_{c0.2}$ – siła wywołująca stałe (plastyczne) względne skrócenie pręta o 0.01% i 0.2%, odpowiednio

Próba statyczna ściskania

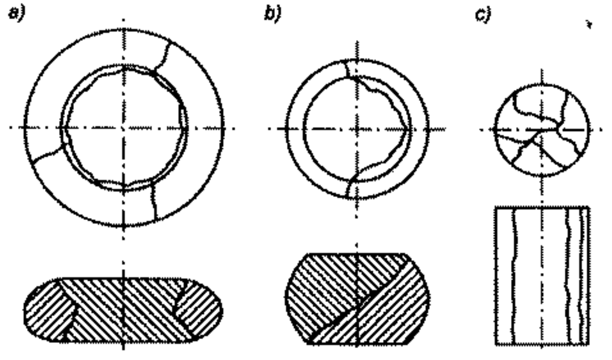
Materiał kruchy (np. żeliwo, beton)



$$R_c = \frac{F_c}{S_0}$$ - wytrzymałość na ściskanie

Materiały kruche wykazują większą wytrzymałość na ściskanie niż na rozciąganie.

Próba statyczna ściskania



Typy złomów próbek metalowych

a) złom plastyczny z uwidocznieniem stożków

b) złom plastyczny

c) złom kruchy

1. **Złom kruchy** – niewidoczne są makroskopowe odkształcenia plastyczne, płaszczyzny pęknięć są równoległe do osi próbki, pęknięcia są wywołane obwodowymi naprężeniami rozciągającymi
2. **Złom plastyczny (włóknisty, poślizgowy)**–poprzedzony jest makroskopowym odkształceniem plastycznym, wywołanym przez poślizgi pod kątem 45° do osi próbki

Próba statyczna ściskania

Rodzaje prób:

1. **Próba zwykła:** - skrócenie względne
   - wyraźna granica plastyczności
   - wytrzymałość na ściskanie
   - wykres ściskania

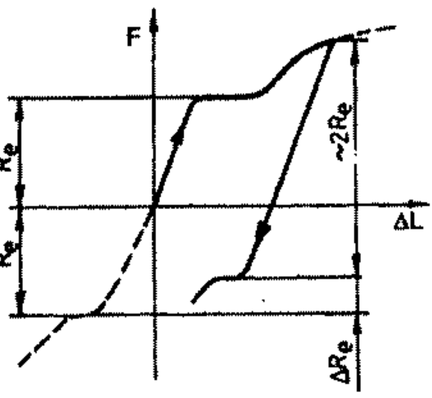
2. **Próba ścisła:** - współczynnik sprężystości podłużnej przy ściskaniu (moduł Younga dla ściskania, E_c)
   - umowna granicy sprężystości
   - umowna granicy plastyczności

Wymiary próbek:

1. **średnica:** d_0 = 10, 20 lub 30 mm
2. **wysokość:** $h_0 = p \cdot d_0$; p = 1.5 dla próby zwykłej
   p = 3 dla próby ścisłej bez wyznaczenia E_c
   p = 10 gdy próbę przeprowadza się w celu wyznaczenia E_c

Zjawisko wyboczenia pręta:

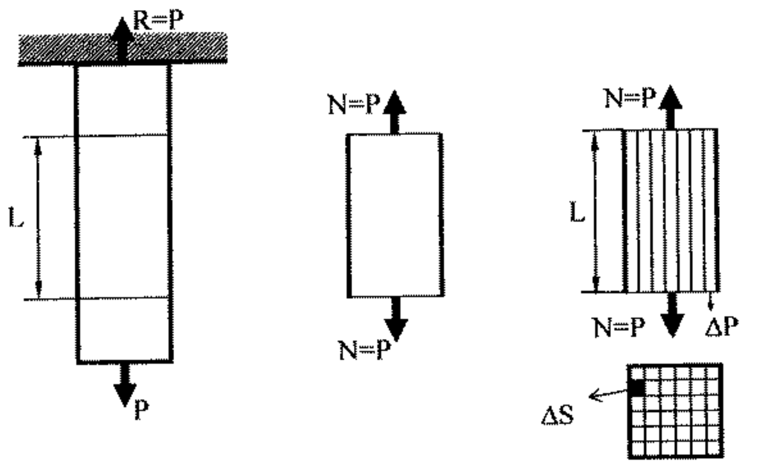
Efekt Bauschingera



Umocniony materiał poddany działaniu naprężeń przeciwnego znaku wykazuje obniżona granicę plastyczności.

Równomierność naprężeń w pręcie pryzmatycznym

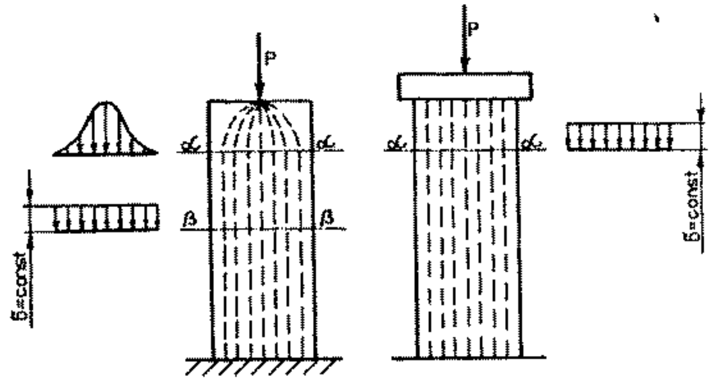
(o stałym przekroju poprzecznym)



$\Delta L = \text{const}$

$$\Delta L = \frac{\Delta P \cdot L}{E \cdot \Delta S} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{\Delta S} = \sigma = \text{const}$$

Zasada de Saint-Venanta

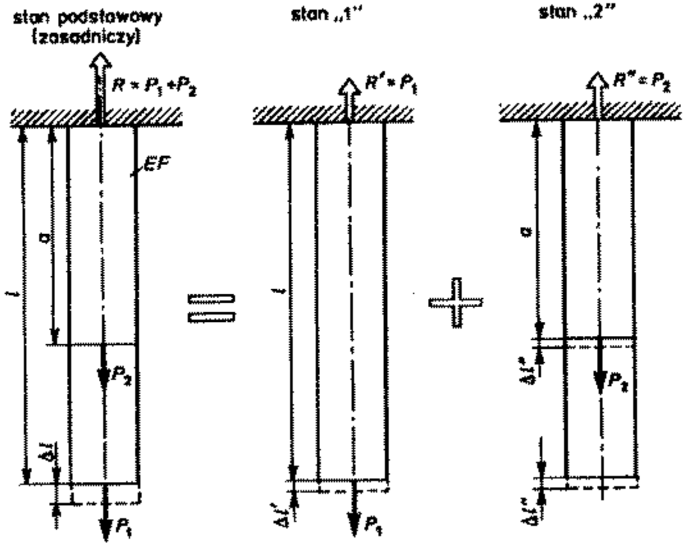


Zjawisko równomiernego rozkładu naprężeń, niezależnie od sposobu przyłożenia obciążenia, w dostatecznej odległości od miejsca przyłożenia siły.

Dla pręta o średnicy d_0, ta odległość wynosi około $1.5 \cdot d_0$.

Zasada superpozycji

W przypadku złożonego układu obciążeń, można go rozbić na układy proste, których suma daje ten układ złożony.



Zasady obliczeń wytrzymałościowych na rozciąganie i ściskanie. Naprężenia dopuszczalne. Współczynnik bezpieczeństwa.

K – naprężenie niszczące: np.: R_e dla materiałów sprężysto-plastycznych

R_m dla materiałów kruchych

k – naprężenie dopuszczalne

$$k = \frac{K}{n}$$ gdzie n – warunek bezpieczeństwa

$$k_r = \frac{R_e}{n_e} = \frac{R_m}{n_m}, \qquad R_m > R_e \Rightarrow n_m > n_e$$

$$\sigma_r = \frac{P}{S} \le k_r$$

Rozwiązywanie statycznie niewyznaczalnych układów prętowych

1. Warunki równowagi (sił i momentów sił – uproszczenie: pomija się wpływ przemieszczeń)

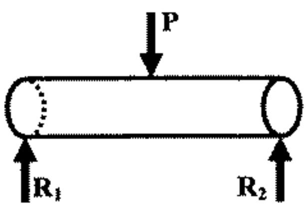
2. Warunki geometryczne (nierozdzielność przemieszczeń)

3. Warunki fizyczne (np. prawo Hooka, rozszerzalność termiczna)

Klasyfikacja obciążeń prostych

rozciąganie

ściskanie



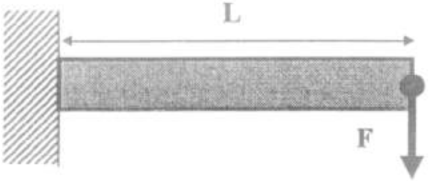
zginanie

moment gnący

skręcanie

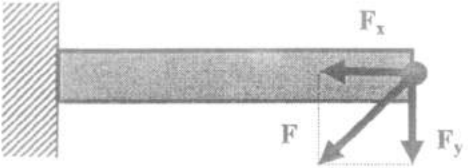
moment skręcający

Własności wytrzymałości przy zginaniu



Moment siły, moment gnący
w miejscu przytwierdzenia pręta

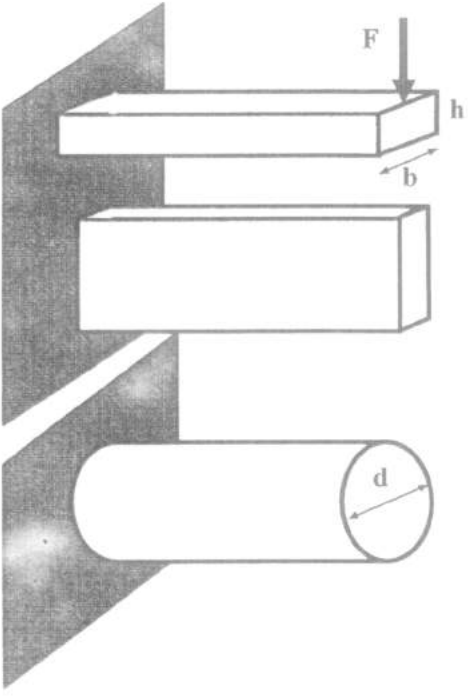
$M = F \cdot L$ [N·m]



F_x – składowa siły ściskająca

F_y – składowa siły zginająca

$M = F_y \cdot L$



Wskaźnik przekroju przy zginaniu

dla belki o przekroju prostokątnym

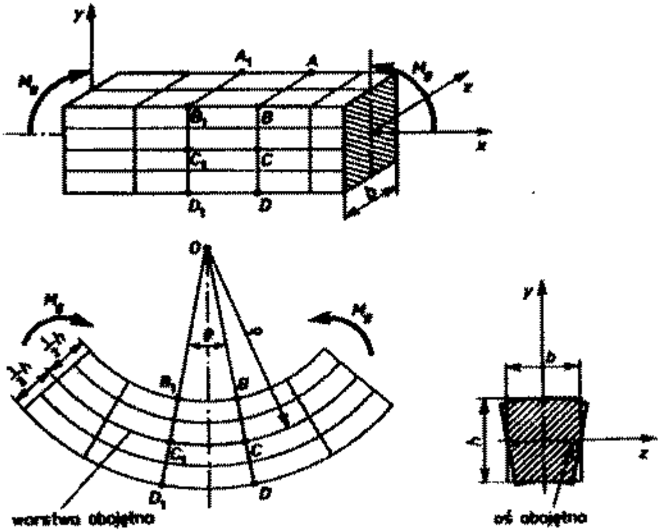
$$W_g = \frac{b \cdot h^2}{6} \qquad [m^3]$$

dla belki o przekroju kołowym

$$W_g = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \qquad [m^3]$$

Własności wytrzymałości przy zginaniu

Opis odkształceń zginanego pręta o przekroju prostokątnym



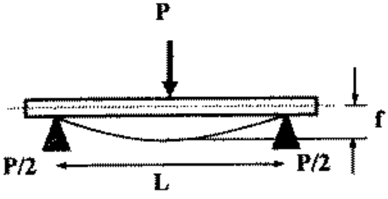
W zakresie stosowalności prawa Hooka dla czystego zginania:

1. końcowe przekroje pręta pozostają płaskie – wszystkie przekroje poprzeczne pręta pozostają także płaskie (*hipoteza płaskich przekrojów*)
2. względne odkształcenia poprzecze pręta są w każdym punkcie ν razy mniejsze od odkształceń wzdłużnych – poszczególne warstwy równolegle do osi pręta nie wywierają na siebie nacisków poprzecznych
3. stan naprężenia w zginanym pręcie jest jednoosiowy, ale nie jednorodny

Uwaga: niejednorodny stan naprężenia utrudnia analizę wyników próby zginania, zwłaszcza dla metali ciągliwych – stosuje się ją zatem głównie do badania materiałów kruchych

Własności wytrzymałości przy zginaniu
Statyczna próba zginania

Trójpunktowa próba zginania:

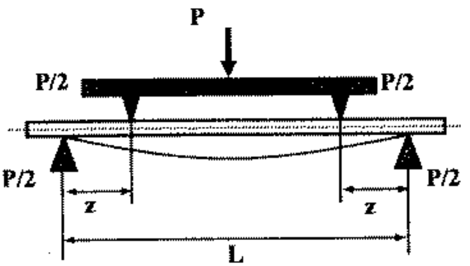


f – strzałka ugięcia

$$M_g = \frac{P \cdot L}{4} \qquad [Nm]$$

$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_g} = \frac{P \cdot L}{4 \cdot W_g} \qquad [Pa]$$

Czteropunktowa próba zginania



$$M_g = \frac{P \cdot z}{2} \qquad [Nm]$$

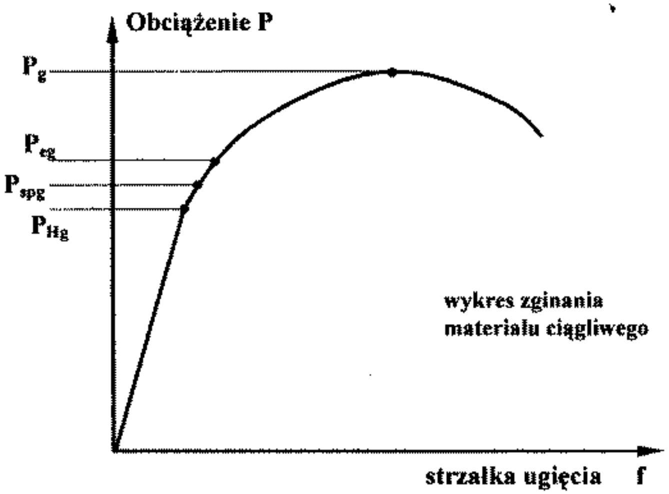
$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_g} = \frac{P \cdot z}{2 \cdot W_g} \qquad [Pa]$$

Wskaźniki przekroju belki

$W_g = \frac{b \cdot h^2}{6}$ - dla belki o przekroju prostokątnym (h –wysokość w kierunku F)

$W_g = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ - dla belki o przekroju kołowym o średnicy d

Własności wytrzymałości przy zginaniu
Statyczna próba zginania



R_g – wytrzymałość na zginanie (jest to naprężenie wyliczone ze wzoru M_g/W_g dla obciążenia P_g

R_{Hg} – granica sprężystości liniowej przy zginaniu (naprężenie dla P_{Hg})

R_{spg} – granica sprężystości przy zginaniu (naprężenie dla P_{spg})

$R_{g0.2}$ – umowna granica plastyczności przy zginaniu (naprężenie dla $P_{g0.2}$)

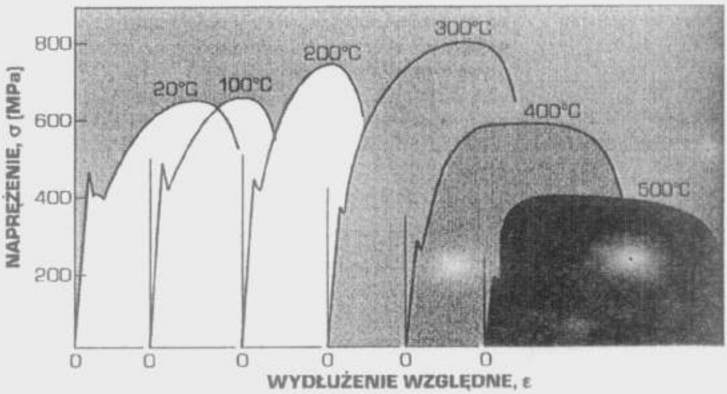
Własności wytrzymałości przy zginaniu
Statyczna próba zginania

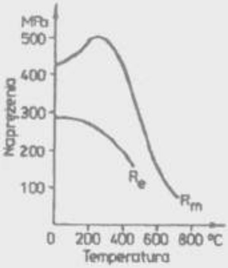
Umowną granicę plastyczności przy zginaniu $R_{g0.2}$ oblicza się przyjmując, że skrajne włókna próbki ulegają względnemu wydłużeniu $\varepsilon = 0.2\%$.

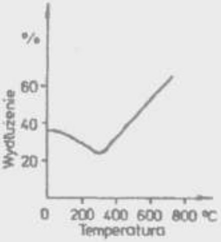
Strzałkę ugięcia $f_{g0.2}$ odpowiadającą temu wydłużeniu oblicza się z tabeli.

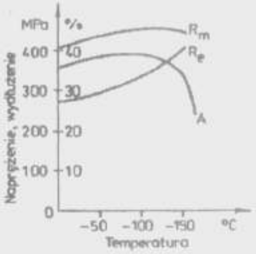
Sposób obciążenia	**Przekrój próbki**	
	kołowy	**prostokątny**
w środku siłą P	$f_{g0.2} = \frac{L^2 \cdot \varepsilon}{6 \cdot d}$	$f_{g0.2} = \frac{L^2 \cdot \varepsilon}{6 \cdot h}$
dwiema siłami P/2	$f_{g0.2} = \frac{(L-2z)^2 \cdot \varepsilon}{4 \cdot d}$	$f_{g0.2} = \frac{(L-2z)^2 \cdot \varepsilon}{4 \cdot h}$

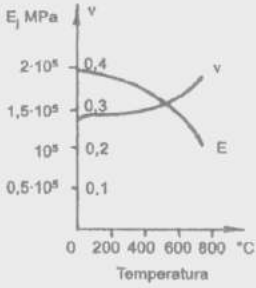
Krzywe rozciągania stali węglowej w różnych temperaturach





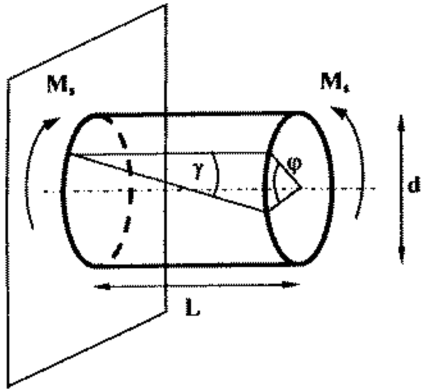






Własności mechaniczne przy skręcaniu

Opis odkształceń skręcanego pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężystości liniowej



Stan odkształcenia próbki charakteryzuje jednostkowy kąt skręcania

M_s – moment skręcający

$$\varphi' = \frac{\varphi}{L}$$

φ - kąt skręcenia pręta [rad]

L – długość pręta

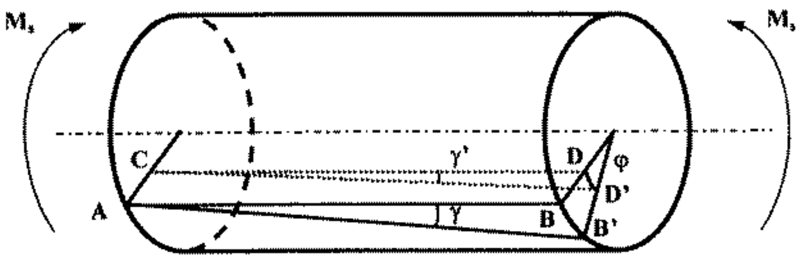
d – średnica pręta

γ - kąt odkształcenia postaciowego [rad]

1. **Przekroje końcowe pręta pozostają płaskie, długość oraz średnica pręta nie ulegają zmianie**
2. **Linie obwodowe pozostają nadal płaskie i zachowują kształt kołowy**
3. **Promień przekroju końcowego obraca się w trakcie skręcania o kąt φ, pozostając cały czas liniowym**
4. **Hipoteza płaskich przekrojów – każdy przekrój poprzeczny pręta pozostaje płaski, a każdy promień pomyślany w środku pozostaje odcinkiem prostym**
5. **W przekrojach poprzecznych nie występują naprężenia normalne (ani rozciągające ani ściskające) tylko równoległe do tych płaszczyzn (tzw. ścinające lub tnące)**
6. **Nie zachodzi zmiana objętości pręta, tylko zmiana postaciowa (kąty proste odkształcają się o kąt γ)**
7. **Warstwy równoległe do osi próbki po skręceniu układają się wzdłuż linii śrubowej**

Własności mechaniczne przy skręcaniu

Opis odkształceń skręcanego pręta o przekroju kołowym w zakresie sprężystości liniowej



Związek pomiędzy kątem skręcenia φ a kątem odkształcenia postaciowego γ:

$$\gamma \cdot L = \varphi \cdot r$$

L – długość próbki **r** – odległość od osi próbki

1. Kąt odkształcenia postaciowego γ wzrasta wraz z odległością od osi próbki

$$\gamma > \gamma'$$

2. Naprężenia tnące (ścinające) wzrastają od zera na osi próbki do wartości maksymalnej na powierzchni próbki w sposób liniowy

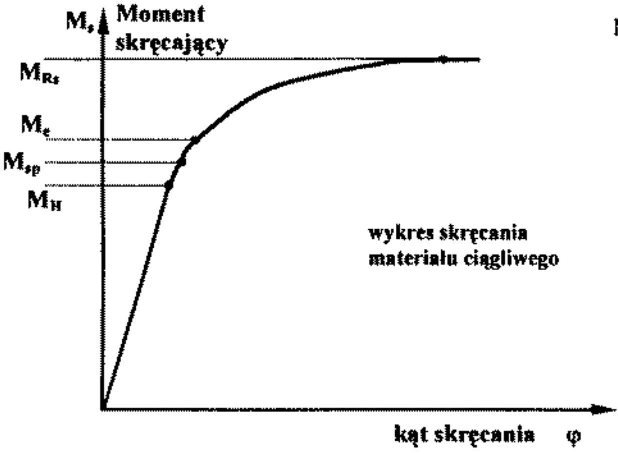
Dla pręta o przekroju kołowym:

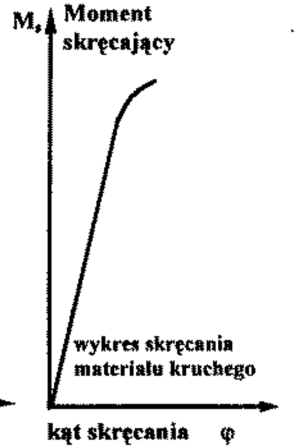
$$\varphi = \frac{32 \cdot M \cdot L}{\pi \cdot d^4 \cdot G}$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$ - moduł (współczynnik) sprężystości poprzecznej

(lub moduł sprężystości postaciowej lub moduł Kirchhoffa)

Własności wytrzymałości przy skręcaniu
Statyczna próba skręcania





Wskaźnik na skręcanie dla próbek o przekroju poprzecznym kołowym:

$$W_S = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad [m^3]$$

dla próbek rurowych o średnicy zewn. d_z i wew. d_w: $$W_S = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{d_z^4 - d_w^4}{d_z} \quad [m^3]$$

$R_H = \frac{M_H}{W_S}$ - granica sprężystości przy skręcaniu

$R_{sp} = \frac{M_{sp}}{W_S}$ - granica sprężystości

$R_e = \frac{M_e}{W_S}$ - granica plastyczności przy skręcaniu

$R_{Rs} = \frac{M_{Rs}}{W_S}$ - wytrzymałość na skręcanie dla materiałów kruchych

$R_{Rs} = \frac{3 \cdot M_{Rs}}{4 \cdot W_S}$ - wytrzymałość na skręcanie dla materiałów ciągliwych

Własności wytrzymałości przy skręcaniu
Statyczna próba skręcania

Umowna granica plastyczności:

$$\gamma_{max} = 1.5 \cdot \varepsilon_{0.2}$$

$\varepsilon_{0.2}$ – umowna granica plastyczności przy rozciąganiu odpowiadająca trwałemu odkształceniu względnemu podłużnemu 0.2%

$$\varphi_{max} = \gamma_{max} \cdot \frac{L}{r} = \frac{1.5 \cdot L \cdot \varepsilon_{0.2}}{r}$$

φ_{max} – dopuszczalny kąt skręcenia

Dla próbek ciągliwych po przekroczeniu granicy plastyczności pojawia się odkształcenie trwałe polegające na:

- **zmianie kierunku przebiegu krzywej skręcania**
- **niewielkiemu wydłużeniu próbek**
- **cechy granicy plastyczności nie pojawiają się tak wyraźnie jak w próbie rozciągania, gdyż odkształcenia plastyczne pojawiają się najpierw w warstwach zewnętrznych, a zatem nie pojawiają się jednocześnie w całym przekroju**

Pomiary twardości (statyczne)

Twardość - miara umowna, określa odporność materiału na powstanie odkształcenia trwałego (plastycznego) wskutek oddziaływania na jego powierzchnię innego twardszego przedmiotu – **wgłębnika**.

Metody pomiaru twardości dzielą się na:

- **statyczne:** polegają na powolnym wciskaniu wgłębnika w materiał przy działaniu stałej lub stopniowo wzrastającej siły do określonej wartości
- **dynamiczne:** polegają na uderzeniowym oddziaływaniu twardego elementu na powierzchnię badanego materiału, są mniej dokładne i mniej jednoznacznie określone w porównaniu do metod statycznych, używane są rzadziej

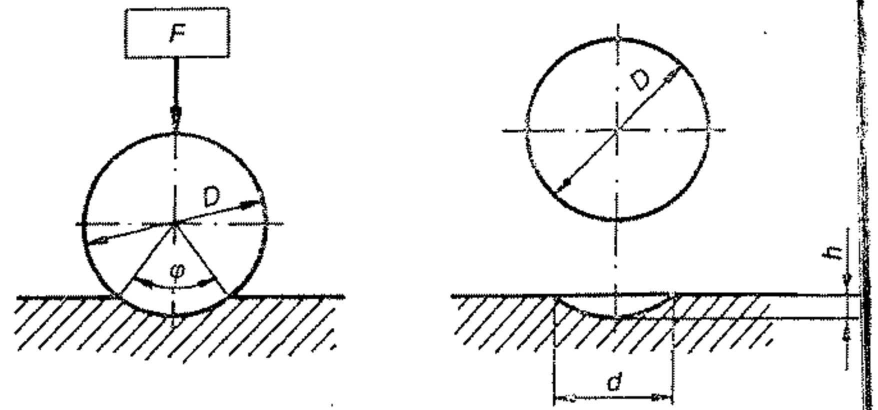
Uwagi:

1. Twardość nie jest stałą materiałową, bardzo zależy ona od metody jej wyznaczenia.
2. Porównywanie twardości jest możliwe zasadniczo w zakresie jednej metody i z wieloma zastrzeżeniami: podobieństwo geometryczne odcisków.
3. Istnieje korelacja pomiędzy twardością a innymi właściwościami mechanicznymi materiału (wytrzymałością na rozciąganie, sprężystością, własnościami plastycznymi), np.:

dla stali węglowej nie hartowanej: $R_m \approx 0.35 \cdot HB$

WYKŁAD III

Pomiary twardości – metoda Brinella



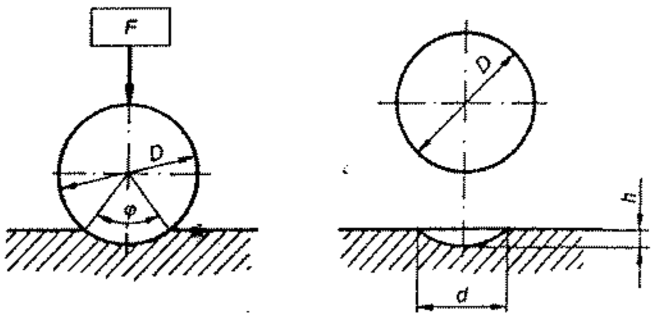
Zasada metody: wciskanie w badany materiał twardej kulki o średnicy **D** pod działaniem siły **F** zależnej od średnicy kulki i twardości badanego materiału oraz pomiar średnicy **d** trwałego odcisku po odciążeniu, w celu określenia pola powierzchni odcisku.

Twardość Brinella: $HB = 0.102 \cdot \frac{F}{S}$ (miana nie podaje się)

F – siła obciążająca [N], **S** – pole powierzchni odcisku (czaszy) [mm^2]

Współczynnik **0.102** wynika z przeliczenia niutonów na kilogramy.

Pomiary twardości – metoda Brinella

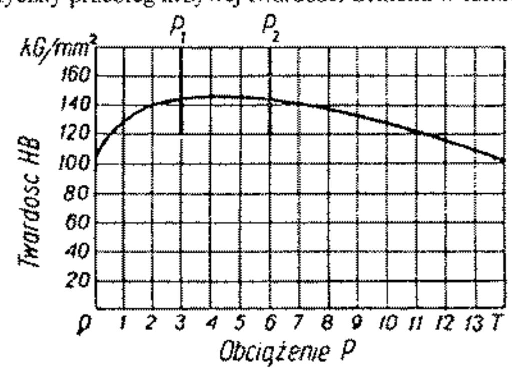


$$S = \pi \cdot D \cdot h, \qquad h = \frac{1}{2} \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2}), \qquad S = \pi \cdot \frac{D}{2} \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2})$$

$$HB = \frac{0.204 \cdot F}{\pi \cdot D \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2})}$$

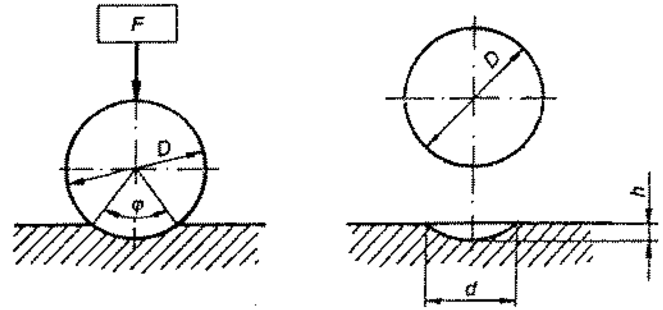
Twardość Brinella zależy od F, D oraz d.

Charakterystyczny przebieg krzywej twardości Brinella w funkcji obciążenia



W pewnym zakresie obciążeń ($P_1 < P < P_2$) wokół maksimum krzywej twardość Brinella jest wielkością w przybliżeniu stałą.

Pomiary twardości – metoda Brinella



Obserwacja: w pewnym zakresie obciążeń dla danego materiału, wartość **HB** nie ulega większym zmianom. Zachodzi to, gdy spełniony jest warunek:

$$0.24 \cdot D \le d \le 0.6 \cdot D$$

Wniosek: aby mierzone twardości były porównywalne powinno być zachowane podobieństwo geometryczne odcisków, tzn.:

$$\varphi = \text{const}$$

Zależność między φ, **D** oraz **d**: $$d = D \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$$

Pomiary twardości – metoda Brinella

$$HB = \frac{0.204 \cdot F}{\pi \cdot D \cdot \left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} \qquad \leftarrow \qquad d = D \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$HB = \frac{F}{D^2} \cdot \frac{0.204}{\pi \cdot \left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{F}{D^2} \cdot \mathrm{const}$$

$$\frac{F_1}{D_1^{\,2}} = \frac{F_2}{D_2^{\,2}} = \frac{F_3}{D_3^{\,2}} = \ldots = \frac{F_n}{D_n^{\,2}} = K \cdot 9.807$$

Wartości współczynnika **K** są znormalizowane i wynoszą:
30, 15, 10, 5, 2.5, 1.25, 1.

Pomiary twardości – metoda Brinella

Wartość **K** dobiera się tak, aby spełniony był warunek:

$$0.24 \cdot D \leq d \leq 0.6 \cdot D$$

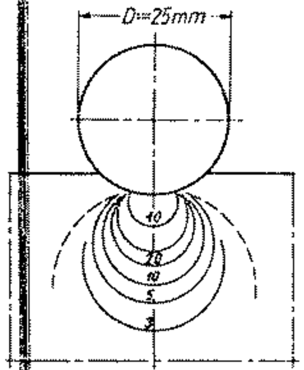
Wielkość siły obciążającej *F* w zależności od średnicy kulki *D* i współczynnika *K*

Współczynnik *K*	Średnica kulki *D*, mm					Zalecenia dotyczące wyboru współczynnika *K* w zależności od materiału i jego twardości	
	10	5	2.5	2	1	Rodzaj materiału	Twardość *HB* (*HBS* lub *HBW*)
	Siła obciążająca *F*, N (kG)						
30	29420 (3000)	7355 (750)	1839 (187,5)	1177 (120)	294,2 (30)	stal niezależnie od twardości oraz żeliwo i stopy Ni,Co,Ti itd. o twardości powyżej 140 *HB*, stopy miedzi i innych metali o twardości powyżej 200 *HB*	96 ÷ 650
15	14710 (1500)	–	–	–	–	miedź i jej stopy o twardości 50 ÷ ÷ 300 *HB*, metale lekkie i ich stopy oraz stopy łożyskowe o twardości powyżej 50 *HB*	50 ÷ 325
10	9807 (1000)	2452 (250)	612.9 (62,5)	392.3 (40)	98,07 (10)	żeliwo i stopy Ni, Co, Ti itd. o twardości poniżej 140 *HB*, stopy miedzi o twardości 3 do 200 *HB*, stopy aluminium o twardości powyżej 80 *HB*	32 ÷ 200
5	4903 (500)	1226 (125)	306,5 (31,25)	196.1 (20)	49.03 (5)	miedź i jej stopy o twardości poniżej 35 *HB*, stopy aluminium, stopy łożyskowe oraz magnez, cynk i ich stopy o twardości 35 do 80 *HB*	16 ÷ 100
2.5	2452 (250)	612.9 (62,5)	153,2 (15.625)	98.07 (10)	24.52 (2,5)	aluminium i jego stopy oraz stopy łożyskowe o twardości poniżej 35 *HB*	8 ÷ 50
1.25	1226 (125)	306.5 (31,25)	76.61 (8.125)	49,03 (5)	12.26 (1.25)	ołów, cyna, stopy łożyskowe i inne metale o twardości poniżej 20 *HB*	4 ÷ 25
1	980,7 (100)	245.2 (25)	61,29 (6,25)	39,23 (4)	9.807 (1)	stopy łożyskowe, cyna, ołów oraz inne metale i ich stopy o twardości poniżej 20 *HB*	3,2 ÷ 20

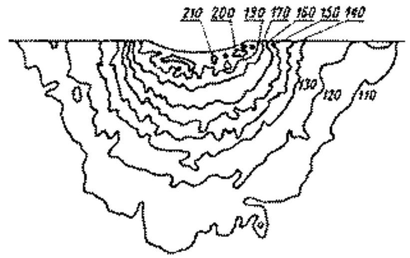
Twardość Brinella

Zmiany występujące w materiale pod wpływem wgniatania wgłębnika

Wyniki eksperymentalnego określenia zgniotu materiału pod wciskaną kulką:

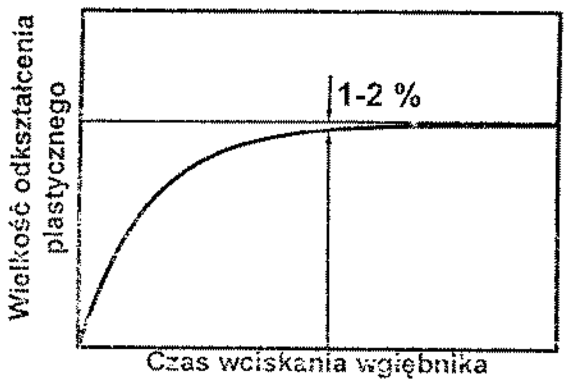


Utwardzenie materiału pod kulką otrzymane w badaniach wciskania kulki w próbkę składającą się z szeregu zlutowanych blaszek.



Utwardzenie materiału po kulką o średnicy D = 50 mm i pod obciążeniem $P = 30 \cdot D^2$, odcisk d = 28.8 mm. Wynik otrzymany metodą elastooptyczną

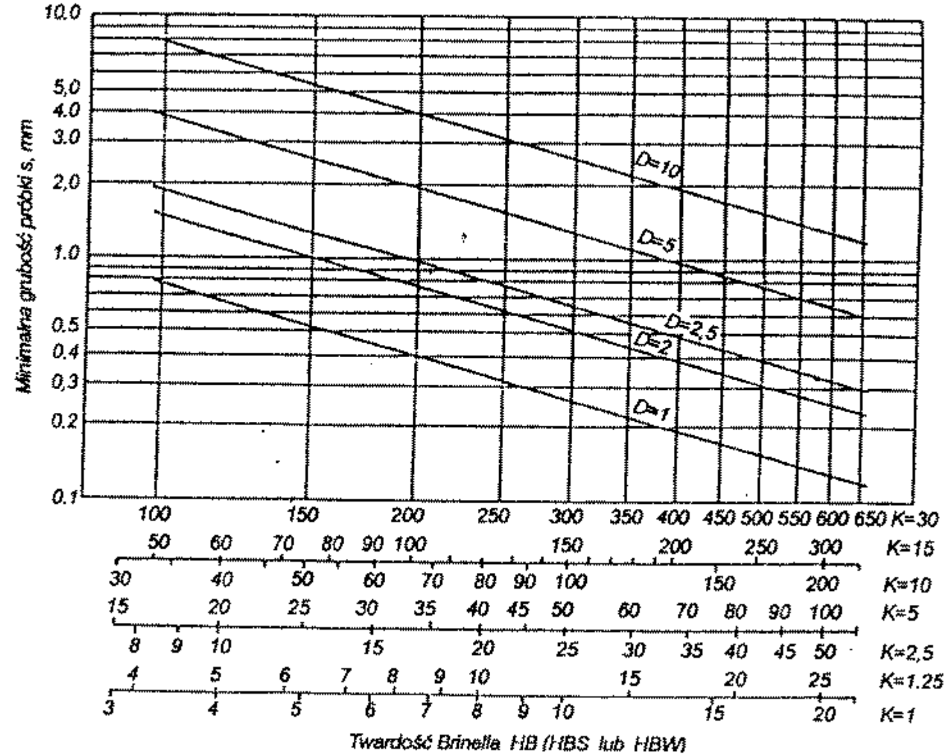
Określenie czasu potrzebnego do wciśnięcia wgłębnika



Pomiary twardości – metoda Brinella

Grubość próbki – powinna być co najmniej **8** razy większa od głębokości odcisku **h**.

$$h = \frac{F \cdot 0.102}{\pi \cdot D \cdot HB}$$

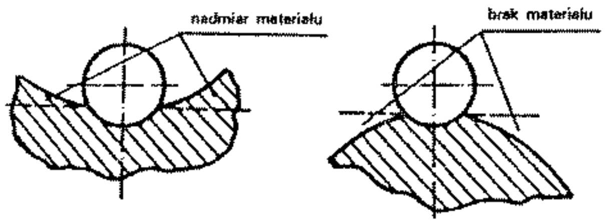


Minimalna grubość badanej próbki w zależności od twardości *HB*

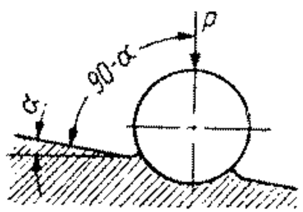
Dla metali nieżelaznych i ich stopów wyznaczoną z wykresu minimalną grubość należy pomnożyć przez 1.5.

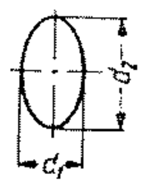
Metoda Brinella

Wpływ krzywizny badanej powierzchni na powstawanie błędu:



Wpływ nieprostopadłości powierzchni (lub nie prostopadłe wciskanie kulki) na kształt odcisku





Pomiary twardości – metoda Brinella

1. Zakres stosowania:

- do badania twardości mniejszej od 450 HB używano kulek stalowych o twardości min. 850 HV 10
- do badania twardości do 650 HB używa się kulek wykonanych z węglików spiekanych

Dawniej dla materiałów o twardości **> 350 HB** zmierzonych przy użyciu kulki stalowej używano oznaczenia **HBS**, a wartości twardości otrzymane przy użyciu kulki z węglików spiekanych oznaczano **HBW**. Obecnie używa się wyłącznie kulek z węglików spiekanych.

2. Wymagania, które należy spełnić w metodzie Brinella:

- **kształt badanego przedmiotu** – możliwie płaski, umożliwiający nieruchome ustawienie przedmiotu tak, aby badana powierzchnia była prostopadła do kierunku działania siły obciążającej; dopuszcza się przeprowadzenie próby twardości na powierzchni, której najmniejszy promień krzywizny jest większy od trzykrotnej średnicy kulki
- **jakość powierzchni** – gładka i oczyszczona ze zgorzeliny oraz smarów, przy wygładzaniu należy zachować ostrożność, aby nie zmienić twardości poprzez nagrzanie lub zgniot
- **odstęp środków odcisków** – co najmniej 4-krotnie większy od średnicy odcisku
- **temperatura** – dla próby kontrolnej i odbiorczej 20±15°C, a dla próby rozjemczej 23±5°C
- **czas działania siły obciążającej** – próbkę należy obciążyć bez wstrząsów równomiernie do żądanej siły w czasie od 2 do 8 s; czas działania siły powinien wynieść:

  dla HB > 100 - 10÷15 s
  100 ≥ HB ≥ 35 - 30 s
  35 ≥ HB ≥ 10 - 120 s
  HB < 10 - 180 s
- **pomiar odcisku** – w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, a przy odciskach wzdłużnych i nieregularnych mierzy się najmniejszą i największą średnicę; średnia arytmetyczna służy do wyznaczenia HB

Pomiary twardości – metoda Brinella

3. Oznaczenie twardości Brinella:

dla kulki 10 mm i siły obciążającej 29420 N (3000 kG) działającej przez 10÷15 s oznaczenie wygląda:

***wartość* HBW**

w innych przypadkach:

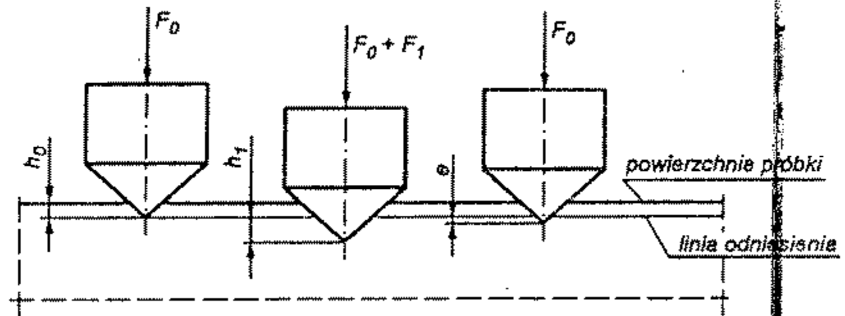
***wartość* HBW D/0.102·F/τ**

D – średnica kulki [mm]
F – wielkość obciążenia [N]
τ - czas działania obciążenia [s]

3. Dokładność podawania wyników:

twardość > 100 HB, dokładność 1 HB
twardość 10÷100 HB, dokładność 0.1 HB
twardość < 10 HB, dokładność 0.01 HB

Pomiary twardości – metoda Rockwella

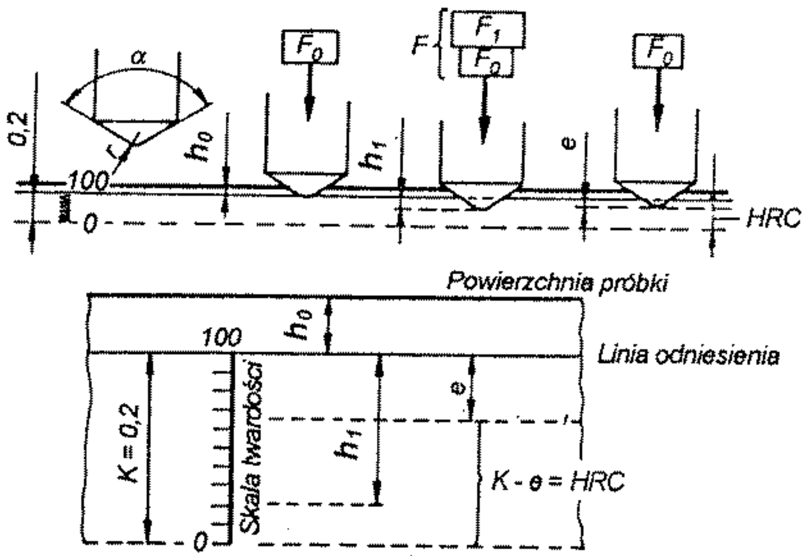


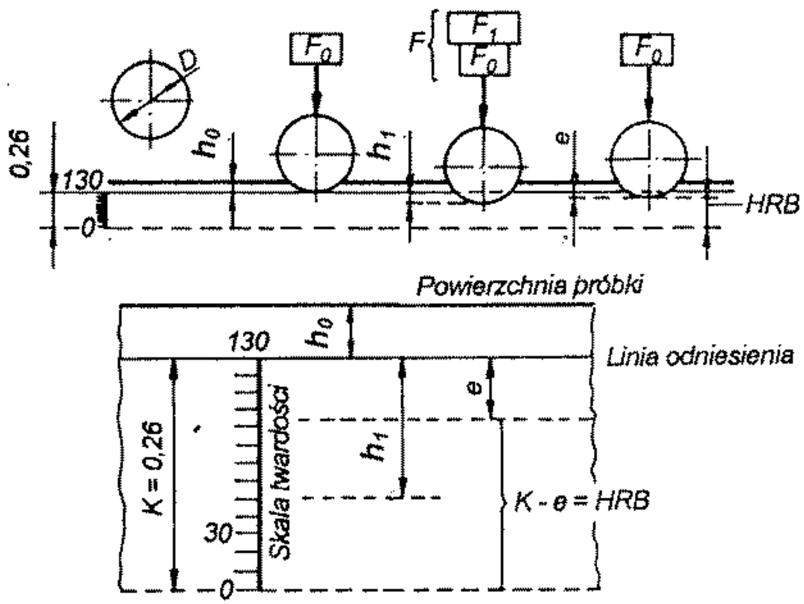
Zasada metody: dwustopniowe wciskanie stożka diamentowego o kącie wierzchołkowym $\alpha = 120°$ lub kulki stalowej o twardości nie mniejszej niż 850 HB i średnicy 1.588 mm (1/16 cala) lub 3.175 mm (2/16 cala)

Etapy pomiaru:

1. $\mathbf{F_0}$ – obciążenie wstępne, wciska wgłębnik na głębokość $\mathbf{h_0}$
2. $\mathbf{F_1}$ – obciążenie główne, $\mathbf{F_0 + F_1}$ wciska wgłębnik na głębokość h_1
3. Odciąża się $\mathbf{F_1}$ ($\mathbf{F_0}$ pozostaje) wgłębnik cofa się nieco (o część sprężystą odkształcenia) i pozostaje w położeniu na głębokości $\mathbf{h_0 + e}$
4. e - trwały przyrost głębokości
5. **HR = K – e** — **K** – stała = 0.2 mm tj. 100 jednostek dla stożka
   = 0.26 mm tj. 130 jednostek dla kulki
   e – podaje się w jednostkach 0.002 mm

Pomiary twardości – metoda Rockwella





Pomiary twardości – metoda Rockwella

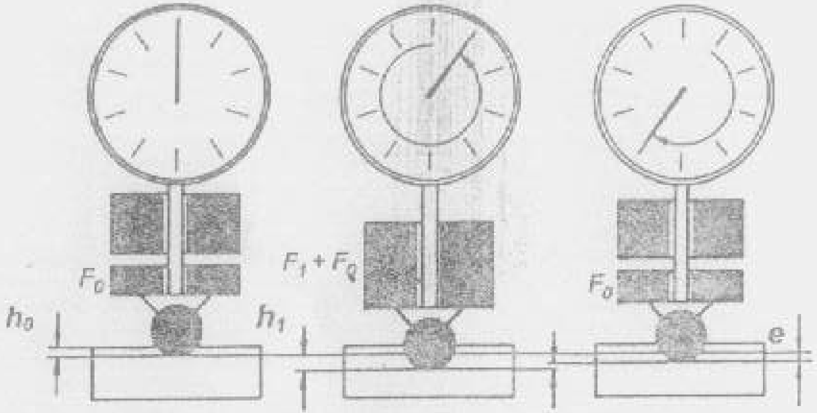
Skale twardości Rockwella

Skala	Rodzaj wgłębnika	Obciążenie wstępne F_0 N (kg)	Obciążenie całkowite F N (kG)	Stała K	Oznaczenie twardości
A	stożek diamentowy o kącie wierzchołkowym 120°	98.07 (10)	588.4 (60)	0,2 mm = 100j	HRA
C			1471 (150)		HRC
D			980.7 (100)		HRD
B	kulka stalowa ϕ 1.588 mm	98.07 (10)	980.7 (100)	0,26 mm = 130j	HRB
F			588.4 (60)		HRF
G			1471 (150)		HRG
E	kulka stalowa ϕ 3.175 mm	98.07 (10)	980.7 (100)	0.26 mm = 130j	HRE
H			588.4 (60)		HRH
K			1471 (150)		HRK

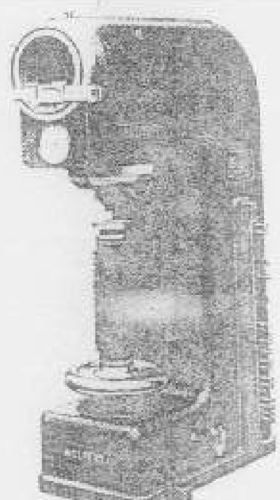
Zakresy stosowania skal:

HRC	20-70	stale ulepszone cieplnie, twarde żeliwa
HRA	20-88	cienkie blachy, węgliki spiekane
HRD	40-77	
HRB	20-100	metale nieżelazne, stale nieulepszone cieplnie
HRG	30-94	
HRF	60-100	miękkie stale, miedź i metale nieżelazne
HRH	80-100	aluminium, cynk, ołów
HRE	70-100	żeliwa, aluminium, stopy magnezu, cynku, łożyskowe oraz inne miękkie materiały
HRK	40-100	

Pomiary twardości – metoda Rockwella



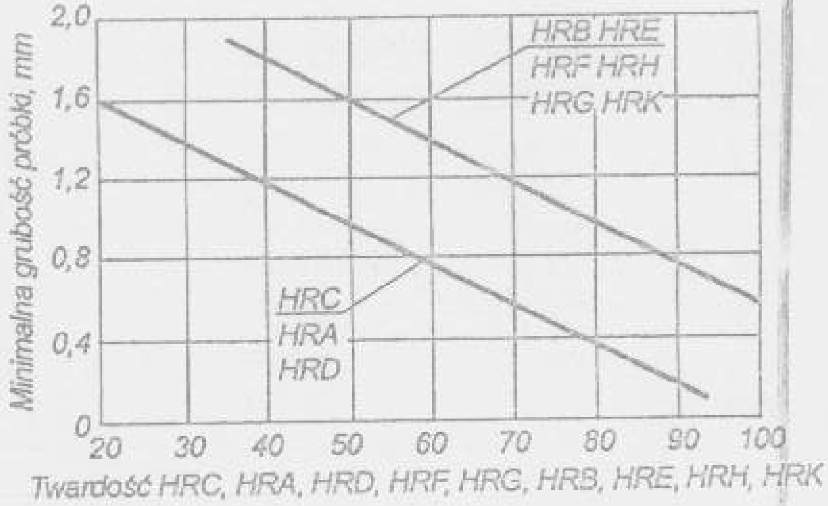
Wskazania czujnika pomiarowego w trakcie wykonywania pomiaru twardości metodą Rockwella



Uniwersalny twardościomierz umożliwiający pomiary metodami: Brinella, Vickersa i Rockwella.

Pomiary twardości – metoda Rockwella

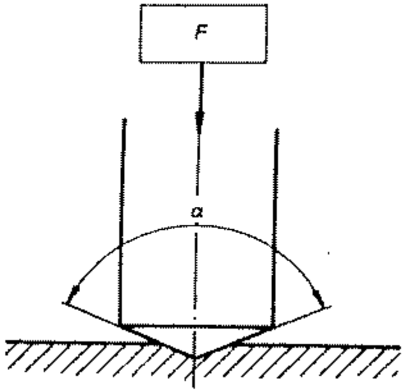
Grubość próbki: powinna być nie mniejsza od 10·e



Czas działania siły obciążającej – po przyłożeniu obciążenia wstępnego i wyzerowaniu czujnika należy przyłożyć obciążenie główne bez wstrząsów, równomiernie w czasie od 2 do 8 s; obciążenie główne zdejmuje się po czasie:

- nie mniejszym niż 1÷3 s po zatrzymaniu się wskazówki czujnika w przypadku metali nie wykazujących widocznych odkształceń plastycznych
- nie mniejszym niż 1÷5 s po zatrzymaniu się wskazówki czujnika w przypadku metali wykazujących nieznaczne odkształcenie
- nie mniejszym niż 10÷15 s po zatrzymaniu się wskazówki czujnika w przypadku metali wykazujących znaczne stopniowe odkształcenie plastyczne

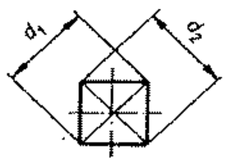
Pomiary twardości – metoda Vickersa



Zasada metody:

Wciskanie w badany materiał, pod obciążeniem F, foremnego ostrosłupa diamentowego o podstawie kwadratowej i wierzchołkowym kącie pomiędzy przeciwległymi ścianami $\alpha = 136°$.

Po odciążeniu mierzy się przekątne odcisku d_1 i d_2 w celu obliczenia jego powierzchni.



Twardość Vickersa:

$$HV = 0.102 \cdot \frac{F}{S}$$ (miana nie podaje się)

F – siła obciążająca [N], S – pole powierzchni odcisku [mm^2]

$$S = \frac{d^2}{2 \cdot \sin\frac{136°}{2}} \qquad d = \frac{d_1 + d_2}{2} \qquad h \approx \frac{d}{7}$$ - głębokość odcisku

$$\mathbf{HV = \frac{0.204 \cdot F \cdot \sin 68°}{d^2} = 0.18915 \cdot \frac{F}{d^2}}$$

Powierzchnie odcisków dla wgłębnika w postaci ostrosłupa, niezależnie od wielkości obciążenia, są geometrycznie podobne, tzn. **twardość HV nie zależy od obciążenia**.

Kąt wierzchołkowy wynosi **136°**, gdyż dla tej wartości kąta wyniki pomiarów twardości metodą Vickersa są porównywalne do wyników pomiarów twardości metodą Brinella dla odcisków równych **d = 0.375 D**. Do wartości 350 HB praktycznie się pokrywają. Odchyłki pojawiające się dla większych twardości wynikają z odkształceń sprężystych kulki w metodzie Brinella.

Pomiary twardości – metoda Vickersa

1. Stosowane obciążenia:

1.961	2.942	4.903	9.807	19.61	24.52	29.42	49.03	98.07	196.1	294.2	490.3	980.7	N
0.2	0.3	0.5	1	2	2.5	3	5	10	20	30	50	100	kG

2. Wymagania metody Vickersa:

- **kształt badanego przedmiotu** – możliwie płaski, umożliwiający nieruchome ustawienie przedmiotu tak, aby badana powierzchnia była prostopadła do kierunku działania siły obciążającej; dopuszcza się przeprowadzenie próby twardości na powierzchniach kulistych lub cylindrycznych (należy użyć poprawek)
- **jakość powierzchni** – gładka (chropowatość mniejsza niż 2.5 μm wg parametru R_a) i oczyszczona ze zgorzeliny oraz smarów, przy wygładzaniu należy zachować ostrożność, aby nie zmienić twardości poprzez nagrzanie lub zgniot
- **odstęp środków odcisków** – od co najmniej 3d dla materiałów twardych (stal) aż do 6d dla materiałów miękkich (ołów, cyna)
- **temperatura** – dla próby kontrolnej i odbiorczej 10±35°C, a dla próby rozjemczej 23±5°C
- **czas działania siły obciążającej** – próbkę należy obciążyć bez wstrząsów równomiernie do żądanej siły w czasie 15 s; czas działania siły powinien wynieść: 10÷15 s, dopuszcza się dłuższy czas
- **pomiar przekątnych odcisku** – różnica może wynieść najwyżej 2% dla materiałów izotropowych

3. Oznaczenie twardości Vickersa:

wartość **HV** *obciążenie [kG]* *np. 600* **HV** *30*

jeśli czas działania obciążenia jest większy, to należy go podać

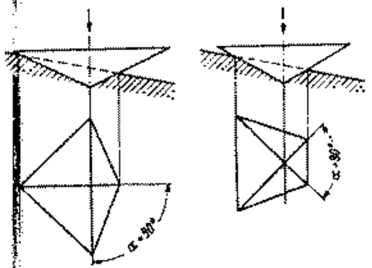
wartość **HV** *obciążenie / czas* *np. 600* **HV** *10/30*

4. Dokładność podawania wyników:

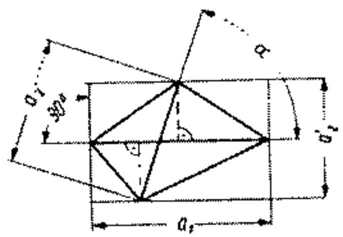
twardość > 100 HV, dokładność 1 HV
twardość 10÷100 HV, dokładność 0.1 HV
twardość < 10 HV, dokładność 0.01 HV

Pomiary twardości – metoda Vickersa

Wpływ braku prostopadłości osi ostrosłupa Vickersa względem powierzchni

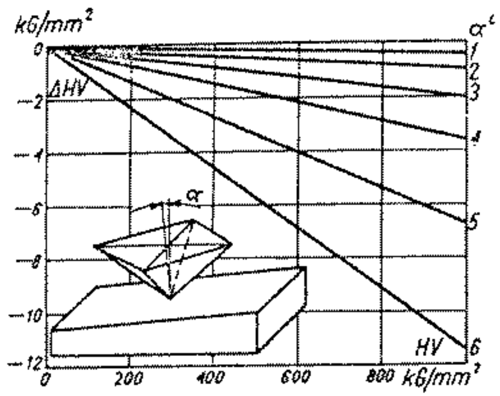


Przypadki zachowania prostopadłości przekątnych odcisku

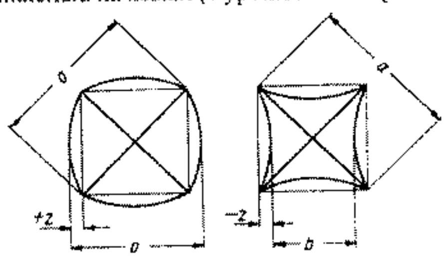


Przypadek braku zachowania prostopadłości przekątnych odcisku

Wpływ kąta odchylenia osi ostrosłupa Vickersa względem powierzchni na wartość błędu pomiaru



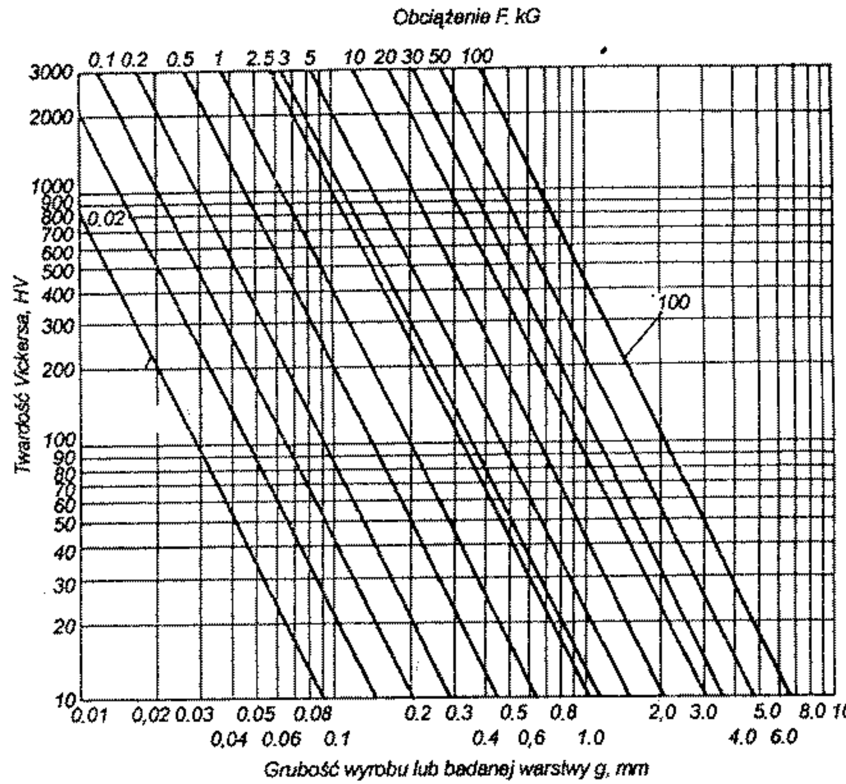
Wpływ anizotropii materiału na kształt (wypukłości i wklęsłości) krawędzi odcisku



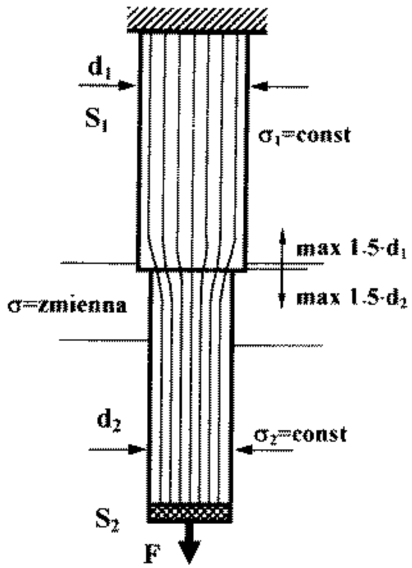
Pomiary twardości – metoda Vickersa

5. **Grubość** badanego przedmiotu lub badanej warstwy powinna wynosić co najmniej 1.5d, na odwrotnej stronie próbki nie powinno być śladów odkształceń

6. **Dobór siły obciążającej**



Rozkład naprężenia w pręcie o zmiennym przekroju poprzecznym



d_1, d_2 – średnice pręta

S_1, S_2 – pola przekroju poprzecznego pręta

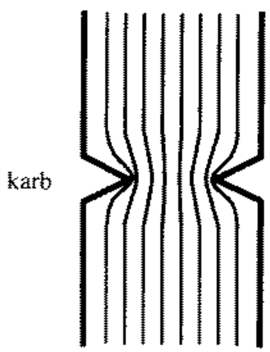
F – jednoosiowe obciążenie pręta

odległości wynikające z zasady de Saint Venanta

$$\sigma_1 = \frac{F}{S_1} \qquad \sigma_2 = \frac{F}{S_2}$$

$$\sigma_1 < \sigma_2 \quad \text{bo} \quad S_1 > S_2$$

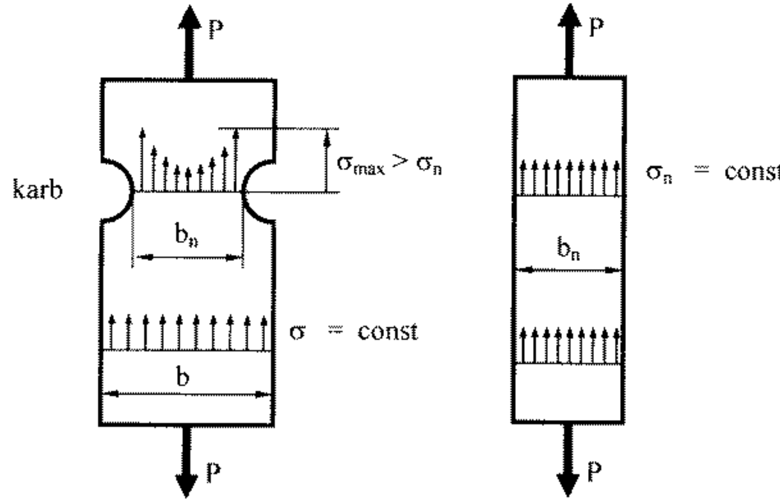
Karb - nagła zmiana przekroju poprzecznego elementu maszyny lub konstrukcji (np. nacięcie, rowek)



Naprężenia w pobliżu karbu mają rozkład niejednorodny, którego **wartość maksymalna** pojawia się na dnie karbu.

Spiętrzenie naprężeń. Współczynnik kształtu.

Przykład płaskownika o szerokości **b** i grubości **g**



$\sigma = \frac{P}{b \cdot g}$ - naprężenie dla płaskownika o szerokości **b** i grubości **g**

$\sigma_n = \frac{P}{b_n \cdot g}$ - **naprężenie nominalne** dla płaskownika o szerokości b_n

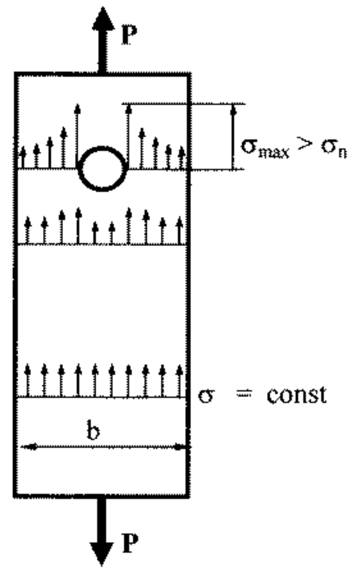
Naprężenia w pobliżu karbu mają rozkład niejednorodny, którego **wartość maksymalna** pojawia się na dnie karbu.

$$\sigma_{max} > \sigma_n$$

$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$ **współczynnik kształtu** (jego wartość zależy od geometrii i wielkości karbu)

Spiętrzenie naprężeń.
Współczynnik kształtu.

Przykład płaskownika o szerokości **b** i grubości **g**



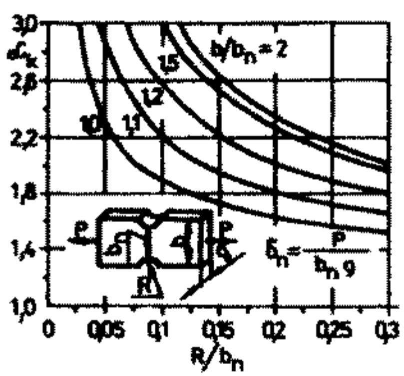
d – średnica otworu

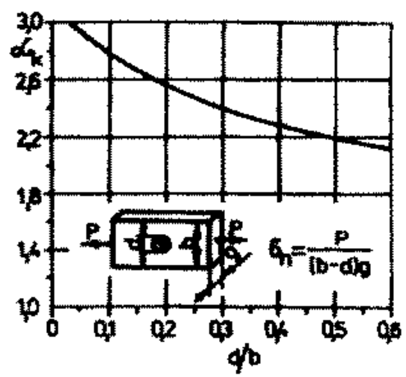
$$\sigma_n = \frac{P}{(b-d)\cdot g}$$

- naprężenie nominalne w przekroju przechodzącym przez średnicę otworu

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$

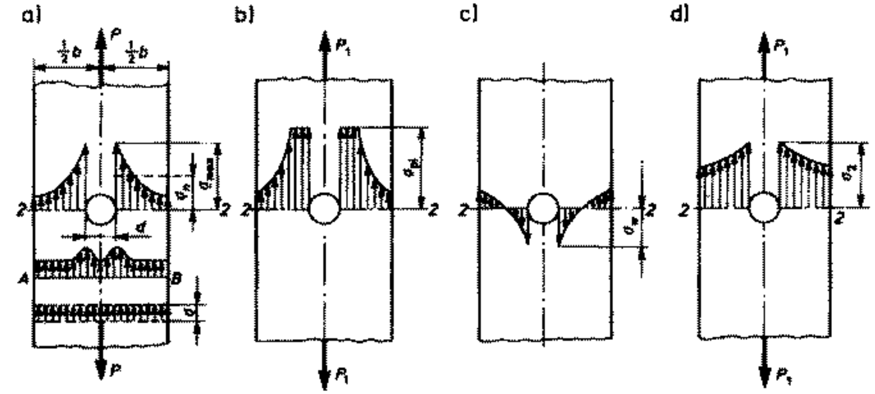
Wartości współczynników α_k dla dwóch rodzajów karbu w płaskownikach obciążonych siłą osiową.





Spiętrzenie naprężeń.
Współczynnik kształtu.

Przykład płaskownika o szerokości **b** i grubości **g**



a) Obciążenie **P** wywołuje spiętrzenie naprężeń blisko karbu $\sigma_{max} > \sigma_n > \sigma$

b) Większe obciążenie $\mathbf{P_1}$ wywołuje spiętrzenie naprężeń, które osiąga granicę plastyczności $\sigma_{max} = \sigma_{pl} = \mathbf{R_e}$ – wokół karbu zachodzi odkształcenie plastyczne (trwałe), w pozostałej części płaskownika (daleko od karbu) naprężenia są poniżej granicy plastyczności (w zakresie sprężystości)

c) Po odciążeniu płaskownika wokół karbu pozostają naprężenia wstępne: ujemne (ściskające) przy dnie karbu, dodatnie (rozciągające) dalej od niego

d) Ponowne przyłożenie obciążenia $\mathbf{P_1}$ wywołuje inny rozkład naprężeń wokół karbu (w reszcie płaskownika daleko od karbu naprężenia są identyczne jak poprzednio) – tym razem naprężenia są mniejsze przy dnie karbu a większe przy brzegach płaskownika ze względu na istnienie naprężeń wstępnych - w całej próbce naprężenia są poniżej granicy plastyczności.

Dla materiałów **sprężysto-plastycznych** (z granicą plastyczności) nie uwzględnia się spiętrzenia naprężeń w obliczeniach wytrzymałościowych dotyczących **obciążeń stałych** ze względu na powyższy efekt.

Spiętrzenie naprężeń odgrywa kluczową rolę dla wytrzymałości materiałów działających pod **zmiennymi obciążeniami** (efekty zmęczeniowe).

Próba udarności

Udarowa próba zginania próbek z karbem

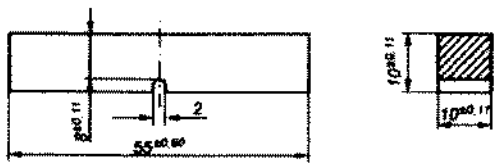
Udarność – odporność materiału na działanie obciążeń dynamicznych, wyrażona ilością pracy potrzebnej do złamania określonej próbki przypadającej na jednostkę powierzchni jej przekroju poprzecznego w miejscu złamania

$$KC = \frac{K}{S_0} \qquad [J/cm^2]$$

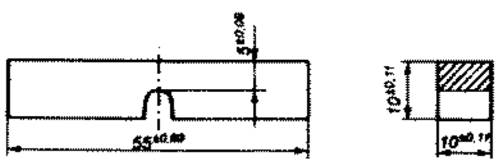
przelicznik na stare jednostki:

$1\ J/cm^2 = 0.102\ kGm/cm^2$

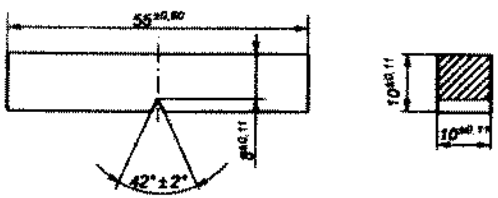
Próbki



Karb w kształcie U



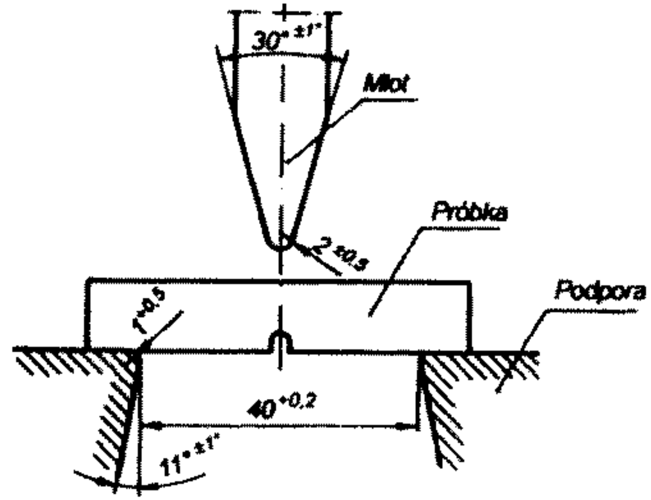
Karb w kształcie U



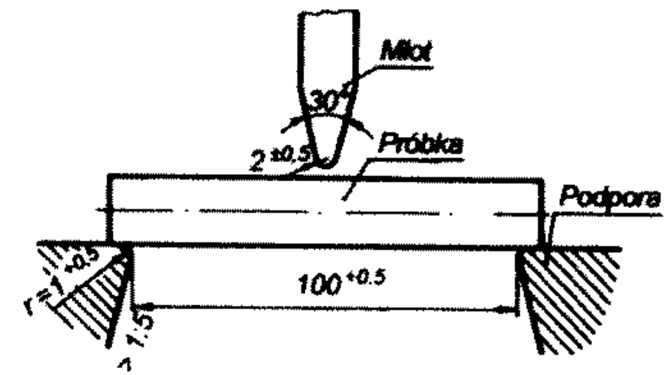
Karb w kształcie V

Zastosowanie karbu ma na celu zlokalizowanie pęknięcia i stworzenie warunków do powstania kruchego pęknięcia w materiałach ciągliwych.

Próba udarności

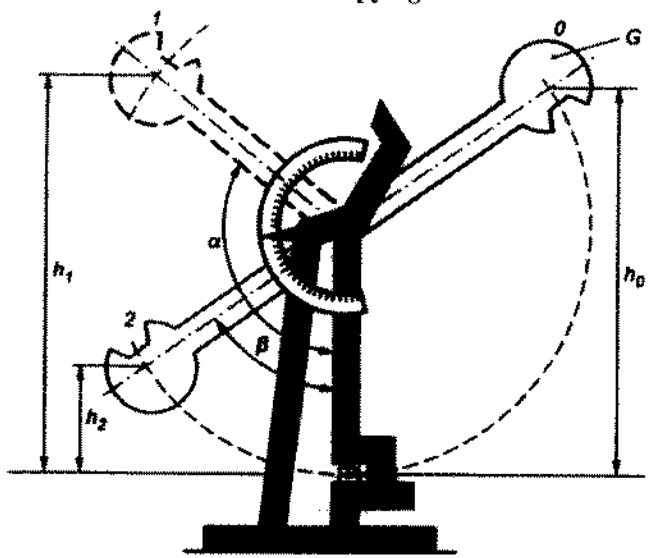


Próba udarności dla żeliwa szarego (brak karbu)



Próba udarności

Młot Charpy'ego



$$KC = \frac{K}{S_0} \qquad [J/cm^2]$$

$$K = EP_{h1} - EP_{h2} = G \cdot (h_1 - h_2)$$

G – ciężar młota
EP_{h1}, EP_{h2} – energia potencjalna młota na wysokości h_1 i h_2
h_1 – wysokość podniesienia młota swobodnego, puszczonego z wysokości h_0
h_2 – wysokość podniesienia młota, puszczonego z wysokości h_0, po złamaniu próbki

$$K = m \cdot g \cdot R \cdot (\cos\beta - \cos\alpha) \qquad [J]$$

m – masa młota w kg
g – przyspieszenie ziemskie 9.81 m/s^2
R – odległość od osi wahadła młota do środka powierzchni zetknięcia noża wahadła z próbką
α, β – kąty wzniesienia wahadła młota przed uderzeniem i po złamaniu próbki

Próba udarności

Warunki przeprowadzania próby udarności:

1. Konstrukcja młota powinna być sztywna, ciężka i trwale przymocowana do podłoża.
2. Początkowa energia uderzenia młota powinna wynosić:
   300, 150, 100, 50, 10 lub 5 J
   Straty energii na skutek tarcia powinny być mniejsze niż 0.5%.
3. Prędkość ostrza wahadła w chwili uderzenia powinna zawierać się w przedziale: 5.0 ÷ 5.5 m/s
   $$v \approx \sqrt{2 \cdot g \cdot R \cdot (1 - \cos\alpha)} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$$
4. Próba udarności polega na złamaniu próbki z karbem za pomocą jednego uderzenia.
5. Czas niszczenia próbki wynosi od ok. 0.01 s dla próbek z metali plastycznych do ok. 0.001 s dla próbek metali kruchych.
6. Próbki powinny być obrobione skrawaniem.
7. Oznaczenie udarności danej próbki o szerokości 10 mm dla energii młota 300 J i karbu U o głębokości 5 mm lub karbu V o głębokości 2 mm.

   ***wartość* KCU** lub ***wartość* KCV**

   np.: 175 KCU lub 155 KCV

   w innych przypadkach:

   wartość* KCU *energia / głębokość karbu / szerokość próbki

   w temperaturach różnych od temperatury pokojowej

   ***wartość* KCU$^{temp.}$**

Podsumowanie:

1. Celem prób udarności jest określenie wpływu prędkości obciążenia na właściwości mechaniczne materiałów przy obciążeniach dynamicznych.
2. Wpływ prędkości obciążenia wywołuje znaczne wewnętrzne siły bezwładności, które wpływają na stan naprężenia.
3. Podwyższona zostaje granica plastyczności i wytrzymałości materiału przy ograniczeniu odkształceń plastycznych. Mechanizm odkształceń plastycznych ulega zahamowaniu przy dużych prędkościach obciążenia.

Próba udarności
Typowe złomy próbek

Złom kruchy – brak widocznych odkształceń plastycznych

Złom rozdzielczy – przed pęknięciem próbka ulega zgięciu

Złom z rozwarstwieniem – wskazuje na dużą anizotropowość materiału, spowodowaną np. obróbką plastyczną

Badanie wytrzymałości zmęczeniowej

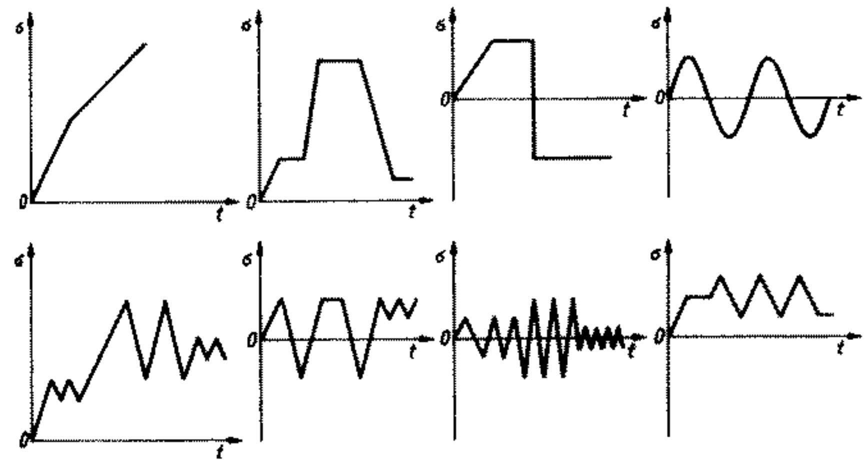
Zmęczenie materiału – zjawisko polegające na znacznym obniżaniu się wytrzymałości materiału przy naprężeniach zmiennych.

Zniszczenie elementu maszyny poddanego odpowiednio długo zmiennym naprężeniom zachodzi dla naprężeń **mniejszych** niż te wyznaczone w statycznych próbach wytrzymałości.

Dotyczy to prób rozciągania-ściskania, zginania, skręcania i ścinania, jak też ich kombinacji.

Pęknięcia materiału poddanego długotrwałym obciążeniom zmiennym (także takiego, który wykazuje własności plastyczne w próbach wytrzymałości statycznej) zachodzą bez żadnych dostrzegalnych odkształceń plastycznych.

Naprężenia zmienne i okresowo zmienne:



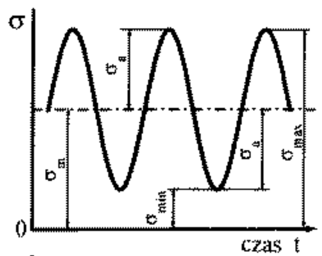
Badanie wytrzymałości zmęczeniowej

Pulsator – maszyna wytrzymałościowa do realizacji badań zmęczeniowych

Różnorodność pulsatorów:

- z wirującą niewyważoną masą
- z napędem serwo-hydraulicznym
- rezonansowe, drgania wywołują elektromagnesy
- wykorzystujące ultradźwięki

Podstawowe cykle naprężeń zmiennych sinusoidalnych:



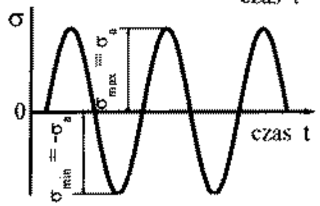
$$\boldsymbol{\sigma = \sigma_m + \sigma_a \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

σ_m - naprężenie średnie cyklu

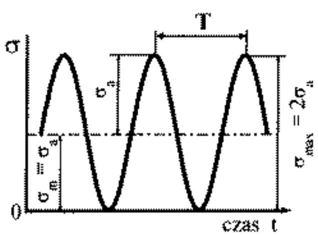
σ_a - amplituda zmian naprężeń

ω - prędkość kołowa (pulsacja zmian naprężeń)

Cykl sinusoidalny **dowolny**



Cykl sinusoidalny **obustronny**
- symetryczny wahadłowy



Cykl sinusoidalny **jednostronny**
- tętniący pulsujący

$$\boldsymbol{\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}} \qquad \boldsymbol{\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}}$$

f – częstotliwość zmian naprężeń

T – okres zmian naprężeń $\quad \boldsymbol{T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}} \qquad \boldsymbol{\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}}$

Badanie wytrzymałości zmęczeniowej

$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ - współczynnik asymetrii cyklu lub charakterystyka cyklu

$\kappa = \frac{\sigma_m}{\sigma_a}$ - współczynnik stałości obciążenia

$$\kappa = \frac{1 + R}{1 - R} \qquad R = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$$

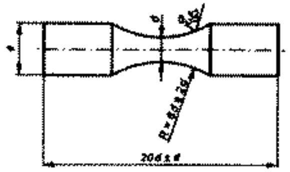
Podstawowe przypadki zmienności naprężeń (sinusoidalnych):

1. naprężenie stałe w czasie:	$R = 1$	$\kappa = \infty$
2. cykl tętniący:	$R = 0$	$\kappa = 1$
	$R = \infty$	$\kappa = -1$
3. cykl wahadłowy:	$R = -1$	$\kappa = 0$

Badanie wytrzymałości zmęczeniowej

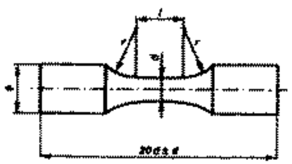
Próbki – na ogół posiadają znormalizowane kształty, wymagają bardzo starannej obróbki, zwłaszcza powierzchni, gdyż pęknięcia rozwijają się głównie od powierzchni

Przykładowe próbki:



próbka klepsydrowa o zmiennym kształcie

Próbki mogą mieć przekroje kołowe lub być płaskie, mogą posiadać karb (U, V lub otwór dla próbek płaskich)



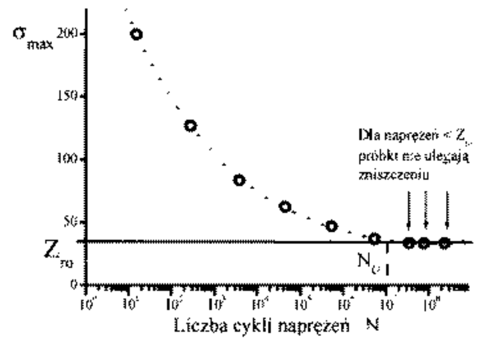
próbka walcowa

Rodzaje próbek do badań zmęczeniowych

Rodzaj próbki	Zastosowanie do badań	
Próbka okrągła o stałym przekroju	tętniące rozciąganie oraz	zginanie
Próbka okrągła o zmiennym przekroju	wahadłowe rozciąganie-ściskanie	płaskie
Próbka okrągła z karbem obrączkowym w kształcie litery V	tętniące rozciąganie, wahadłowe rozciąganie-ściskanie, tętniące ściskanie	i zginanie obrotowe
Próbka okrągła z karbem obrączkowym w kształcie literyU		
Próbka płaska z karbem w kształcie litery V		zginanie płaskie
Próbka płaska z karbem-otworem		
Próbka płaska o stałym przekroju	tętniące rozciąganie oraz	
Próbka płaska o zmiennym przekroju	wahadłowe rozciąganie-ściskanie	

Badanie wytrzymałości zmęczeniowej
Wykres Wöhlera

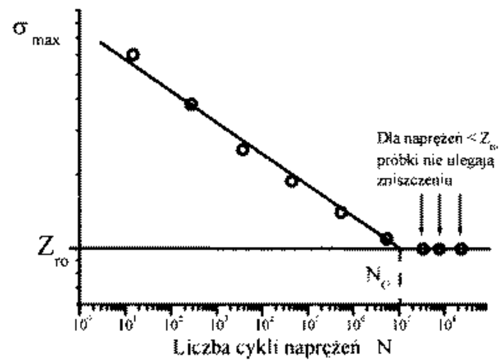
Zniszczenie elementu maszyny poddanego odpowiednio długo zmiennym naprężeniom zachodzi dla naprężeń **mniejszych** niż te wyznaczone w statycznych próbach wytrzymałości.



σ_{max} – największe naprężenie występujące w trakcie cyklu

Z_{ro} – wytrzymałość zmęczeniowa przy rozciąganiu ściskaniu dla cyklu obustronnego (symetrycznego)

Wykres półlogarytmiczny



N_G – podstawa próby zmęczeniowej

Wykres logarytmiczny

Dla naprężeń $\sigma_{max} < Z_{ro}$ próbka nie ulega zniszczeniu dla dowolnie dużej liczby cykli

Badanie wytrzymałości zmęczeniowej

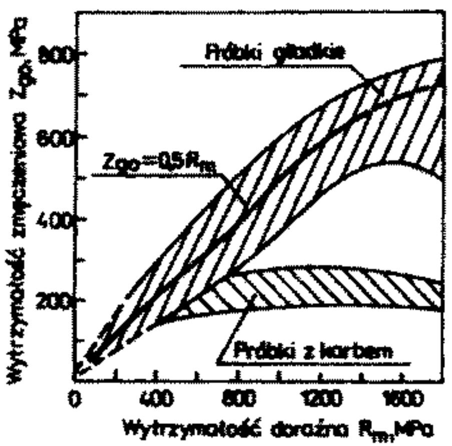
Stosowane oznaczenia w wytrzymałości zmęczeniowej oraz przybliżone zależności empiryczne pomiędzy odpowiednią wytrzymałością zmęczeniowa a wytrzymałością doraźną R_m dla bardzo gładkich próbek stalowych:

1. Dla cykli obustronnych-symetrycznych (wahadłowych)

Z_{rc} – rozciąganie-ściskanie	$Z_{rc} = 0.33\ R_m$
Z_{go} – zginanie	$Z_{go} = 0.5\ R_m$
Z_{so} – skręcanie	$Z_{so} = 0.25\ R_m$

2. Dla cykli odzerowo-tętniących

Z_{rj} – rozciąganie	$Z_{rj} = (0.55 \div 0.63)\ R_m$
Z_{gj} – zginanie	$Z_{gj} = 0.7\ R_m$
Z_{sj} – skręcanie	$Z_{sj} = (0.45 \div 0.5)\ R_m$
dla stopów aluminium	$Z_{go} = 0.4\ R_m$



Zależność wytrzymałości zmęczeniowej dla obustronnego zginania Z_{go} od wytrzymałości doraźnej R_m (otrzymanej w próbie statycznej rozciągania) dla próbek stalowych gładkich i z karbem.

Badanie wytrzymałości zmęczeniowej
Metodyka pomiaru:

Ze względów praktycznych badania zmęczeniowe prowadzi się do chwili, gdy próbka bez zniszczenia wytrzyma pewną liczbę cykli N_G, -zwaną graniczną lub bazową liczbą cykli.

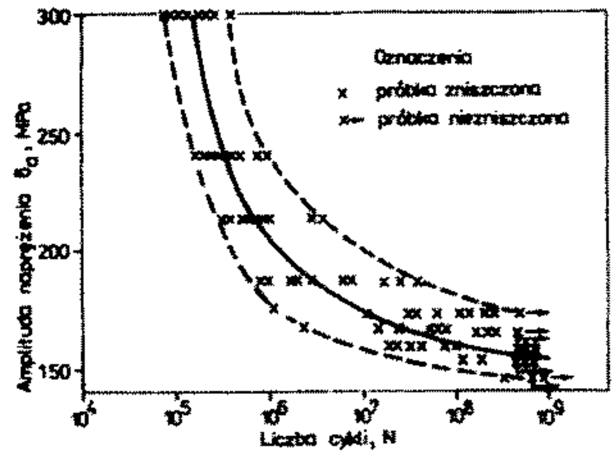
Dla stali:

$N_G = 10 \cdot 10^6$ **cykli**

Dla stopów metali nieżelaznych:

$N_G = 100 \cdot 10^6$ **cykli**

Wyniki badań stopu Al na obustronne zginanie - brak asymptoty.

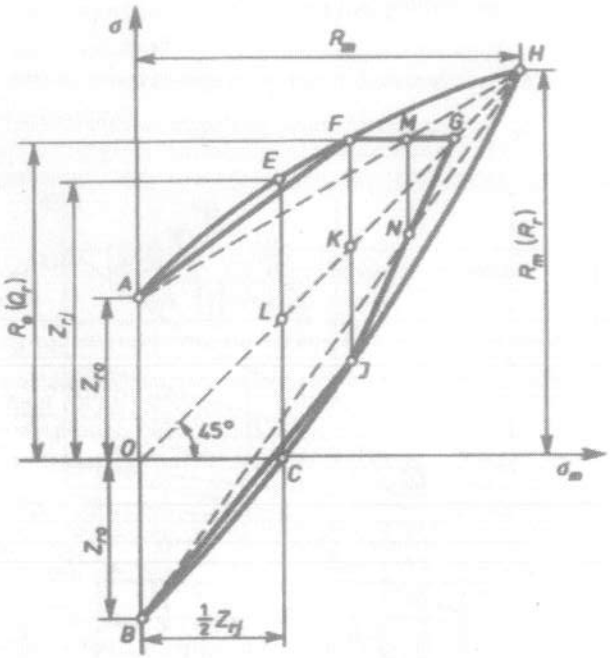


Wytrzymałość zmęczeniowa ma charakter statystyczny – bada się ją metodami statystycznymi

Trwała wytrzymałość zmęczeniowa – taka wartość wytrzymałości w cyklu, dla której więcej niż 50% próbek nie ulegnie zniszczeniu po przekroczeniu bazowej liczby cykli N_G.

Badanie wytrzymałości zmęczeniowej
Wykres Smitha

Wykres Smitha – zbiorcze zestawienie wartości wytrzymałości zmęczeniowej danego materiału dla różnych rodzajów cykli.

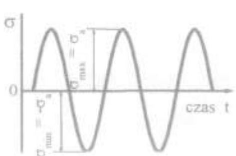


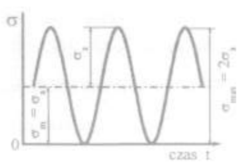
Oś pozioma – wartości σ_m

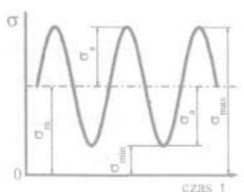
Oś pionowa – wartości σ_{max} i σ_{min}

R_e – granica plastyczności

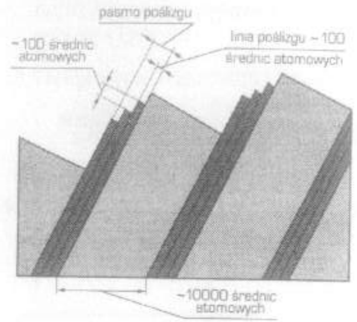
R_m – wytrzymałość doraźna



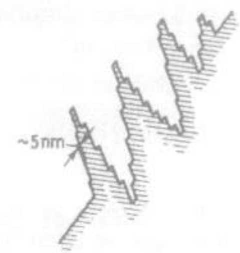




Badanie wytrzymałości zmęczeniowej
Złom zmęczeniowy

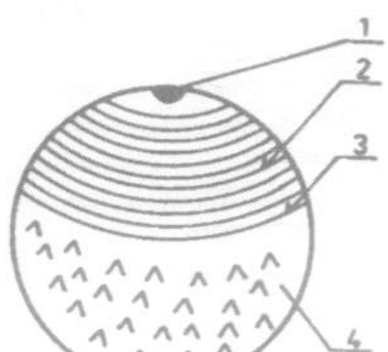


Linie poślizgu przy odkształceniu plastycznym



Tworzenie się mikropęknięć na powierzchni materiału cyklicznie obciążonego przez mechanizm poślizgów plastycznych

1. Istota zjawiska zmęczeniowego wynika z polikrystalicznej (ziarnistej) budowy materiałów.
2. Lokalne spiętrzenie naprężeń wywołane obecnością karbu lub wady materiałowej (wzrost odkształceń) wywołują powstanie wewnątrz materiału linii poślizgów, łączących się w pasma poślizgów.
3. W miarę wzrostu liczby cykli obciążeniowych pasma poślizgu przeradzają się w mikropęknięcia.
4. Powstawaniu mikropęknięć sprzyjają wtrącenia niemetaliczne (np. siarczki), które skoncentrowane są głównie w granicach ziarn.
5. Z czasem mikropęknięcia przekształcają się w szczeliny o wymiarach makroskopowych. Szczelina, rozszerzając się na dalsze obszary przekroju, doprowadza do całkowitego pęknięcia elementu.



Złom zmęczeniowy

1 – ognisko – miejsce zapoczątkowania procesu pęknięcia

2 – strefa zmęczeniowa – o gładkiej powierzchni o muszlowym wyglądzie

3 – linie zaznaczające przemieszczanie się **czoła pęknięcia**

4 – strefa resztkowa – obszar chropowaty, podobny do przełomu przy obciążeniu statycznym

Badanie wytrzymałości zmęczeniowej
Czynniki wpływające na wytrzymałość zmęczeniową

1. Wpływ kształtu elementu – istnienie karbów (wręby, występy, nacięcia, otwory itp.)

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$ - spiętrzenie naprężeń charakteryzuje **współczynnik kształtu**

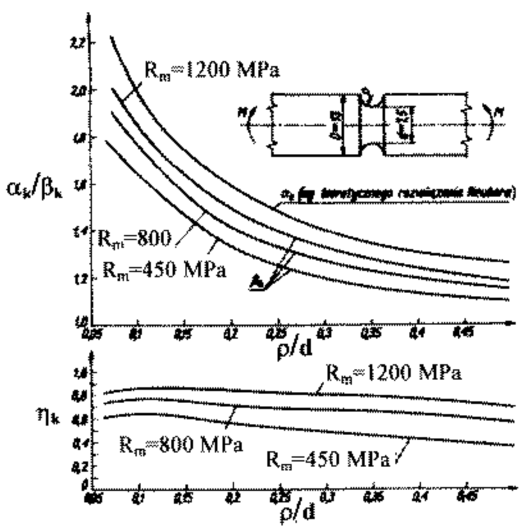
<u>Doświadczenie wykazuje, że:</u> materiały rzeczywiste nie są tak bardzo wrażliwe na spiętrzenie naprężeń jakby to wynikało z wartości współczynnika α_k

β_k – współczynnik działania karbu $$\beta_k = \frac{Z_r}{Z_{rk}}$$

Z_r – wytrzymałość zmęczeniowa próbki gładkiej

Z_{rk} – wytrzymałość zmęczeniowa próbki z karbem

$$\eta_k = \frac{\beta_k - 1}{\alpha_k - 1}$$ **- współczynnik wrażliwości na działanie karbu**



ρ - promień krzywizny karbu

d – średnica próbki w miejscu karbu

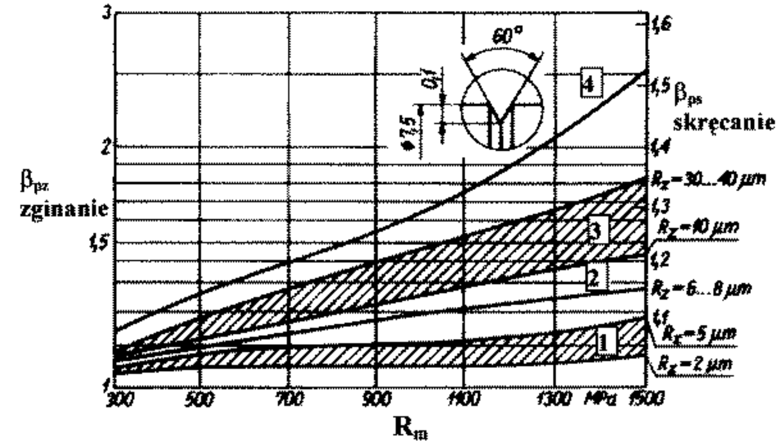
Badanie wytrzymałości zmęczeniowej
Czynniki wpływające na wytrzymałość zmęczeniową

2. Wpływ stanu powierzchni i warstwy podpowierzchniowej – nierówności powierzchni wynikające z np. różnej obróbki

$$\beta_p = \frac{Z}{Z_p}$$ - współczynnik stanu powierzchni

Z – wytrzymałość zmęczeniowa próbki polerowanej

Z_p – wytrzymałość próbki po danym rodzaju obróbki



1 – próbka szlifowana 2 – próbka toczona dokładnie 3 – próbka toczona zgrubnie
4 – próbka z karbem

Zależność współczynnika stanu powierzchni od wytrzymałości doraźnej
R_z – średnia wysokość nierówności powierzchni

Łączny wpływ działania karbu i stanu powierzchni: $\beta = \beta_k + \beta_p - 1$

Zabiegi technologiczne poprawiające wytrzymałość zmęczeniową (wywołują powstawanie naprężeń powierzchniowych ściskających):

1. obróbka mechaniczna powierzchni: młotkowanie, śrutowanie, nagniatanie
2. obróbka cieplno-chemiczna: nawęglanie, azotowanie, hartowanie

Obróbka powierzchni obniżająca wytrzymałość zmęczeniową: pokrycia galwaniczne: chromowanie, niklowanie.

Wektory. Siły i momenty sił.

Pojęcie wektora:

1. **Istnieją wielkości fizyczne, które określone są tylko jedną liczbą, są to wielkości skalarne, np.: masa, gęstość, temperatura, potencjał, energia**
2. **Istnieją inne wielkości fizyczne, które oprócz miary, posiadają także kierunek, są to wielkości wektorowe, np.: prędkość, przyspieszenie, <u>siła</u>, <u>moment siły</u>, natężenie pola**

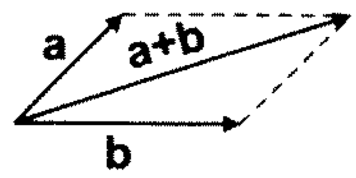
Wektor można przedstawić jako odcinek o pewnej długości i pewnym kierunku: jest to odcinek skierowany, wyznaczony przez punkt początkowy i punkt końcowy.

Wektory można podzielić na:

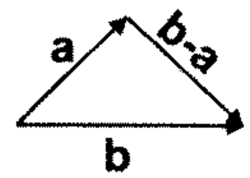
- **wektory związane lub umiejscowione: ich punkt początkowy musi leżeć w ściśle określonym miejscu, np. siły wewnętrzne odpowiedzialne za odkształcenie ciała elastycznego, gdyż odkształcenie elementów zależy od miejsca przyłożenia siły**
- **wektory ślizgające się: mogą być przesuwane wzdłuż prostych, na których leżą, np. siły działające na ciało doskonale sztywne, gdyż ich działanie nie zmieni się, jeśli przesuwa się ich punkty zaczepienia wzdłuż prostych, na których leżą**
- **wektory swobodne: można je względem siebie równoległe przesuwać bez zmiany ich znaczenia, nie zależą od punktu początkowego, np.: moment pary sił, gdyż względem każdego punktu w przestrzeni wektor ten ma tę samą wartość i kierunek**

Wektory. Siły i momenty sił.

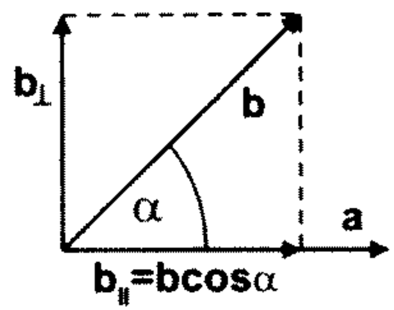
Dodawanie i odejmowanie wektorów (zasada równoległoboku)



suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$



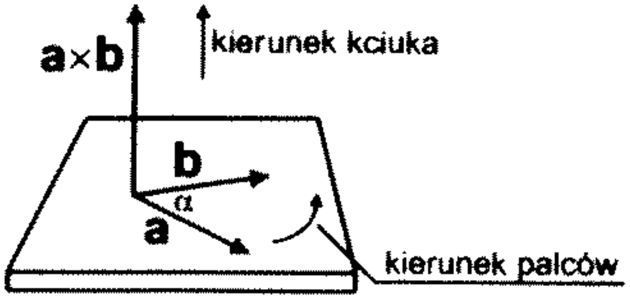
różnica wektorów $\vec{b}$ i $\vec{a}$



Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

np. praca (skalar) = siła (wektor) • droga (wektor)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\alpha)$$



Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

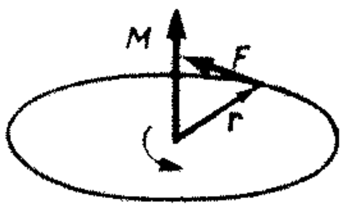
$$a \cdot b \cdot \sin(\alpha) = c$$

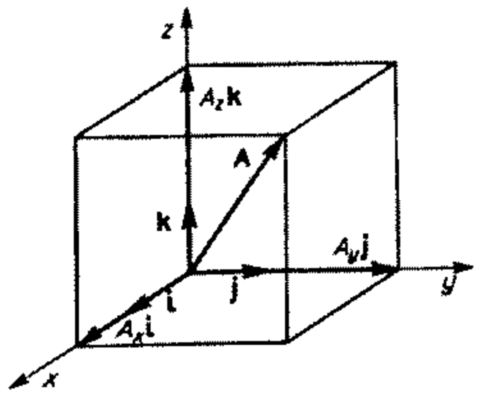
1. Punkt przyłożenia wektora $\vec{c}$ pokrywa się z początkami wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$
2. Kierunek wektora $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej $\vec{a}$ i $\vec{b}$
3. Zwrot wektora $\vec{c}$ określa reguła prawej ręki (śruby prawoskrętnej, korkociągu)

Przykład:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

np.: moment siły (wektor) = ramię (wektor) × siła (wektor)



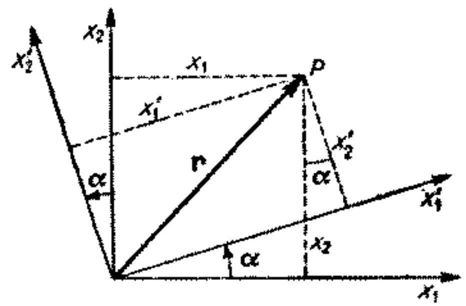


Rozkład wektora $\vec{A}$ na składowe w kartezjańskim układzie współrzędnych.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - wektory jednostkowe odpowiednio w kierunkach osi x, y, z

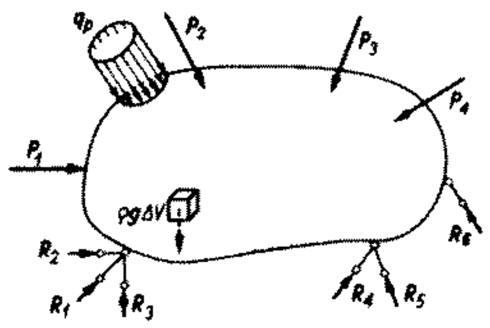
A_x, A_y, A_z - długości rzutów wektora $\vec{A}$ odpowiednio na osie x, y, z

$\vec{A}_x = A_x \cdot \vec{i}$, $\vec{A}_y = A_y \cdot \vec{j}$, $\vec{A}_z = A_z \cdot \vec{k}$, - składowe wektora $\vec{A}$ o kierunkach x, y, z



Wektor $\vec{r}$ w dwóch różnych płaskich układach współrzędnych

Siły zewnętrzne - powierzchniowe i objętościowe



$P_1, P_2, \ldots$ - **siły zewnętrzne czynne skupione** (przyłożone punktowo)

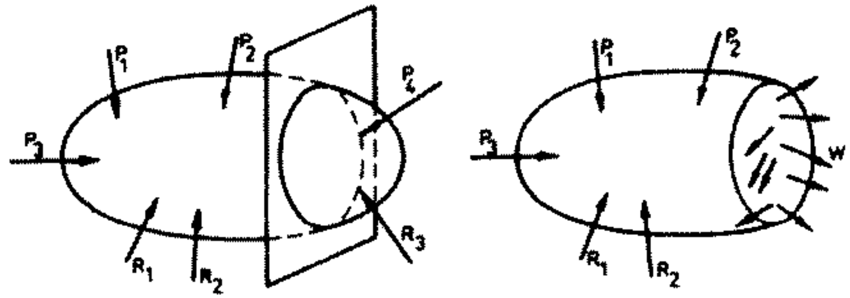
q_p - **siły zewnętrzne powierzchniowe, przyłożone w sposób ciągły** (np. ciśnienie gazu lub cieczy, obciążenie ośrodkiem sypkim, parcie wiatru, bezpośrednie oddziaływanie innych ciał na dużej powierzchni)

$\rho g \Delta V$ **siły objętościowe wynikające z masy ciała** (siły ciężkości, do tej grupy można zaliczyć także siły bezwładności)

$R_1, R_2, \ldots$ - **siły zewnętrzne bierne, reakcje podporowe**

Jeśli ciało znajduje się w stanie równowagi statycznej to suma wszystkich sił zewnętrznych oddziaływujących na to ciało oraz suma ich momentów względem dowolnego punktu w przestrzeni wynoszą zero

Siły wewnętrzne - przekrojowe



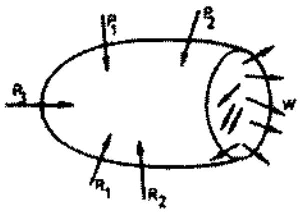
Myślowy przekrój ciała będącego w równowadze statycznej

Aby lewa część ciała nadal pozostawała w równowadze statycznej, na jej powierzchni, powstałej na wskutek przekroju myślowego, muszą istnieć siły W (wewnętrzne – istniejące wewnątrz tego ciała), które zrównoważą siły zewnętrzne działające na tę część.

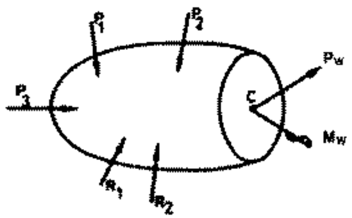
Siły wewnętrzne są rozłożone na powierzchni przekroju myślowego w sposób ciągły.

Siły wewnętrzne - przekrojowe

Redukcja sił wewnętrznych rozłożonych na płaszczyźnie przekroju myślowego do środka ciężkości przekroju C

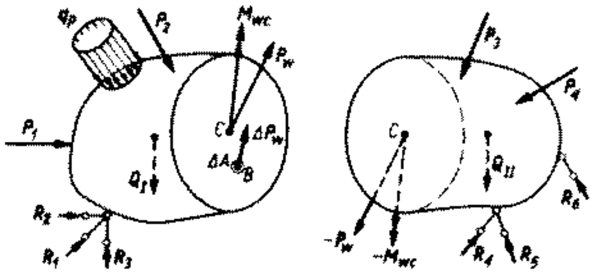


Redukcja sił



$\vec{P}_W$ - wektor główny sił wewnętrznych

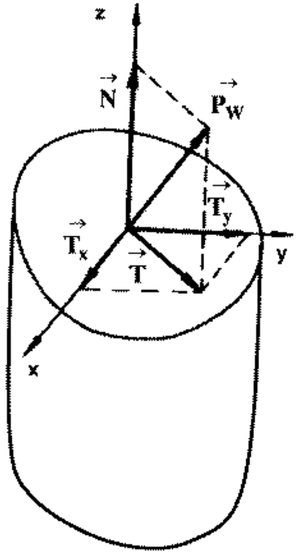
$\vec{M}_W$ - moment ogólny sił wewnętrznych



Na płaszczyźnie przekroju powierzchniowego drugiej części ciała występują takie same, co do wartości, lecz przeciwnie skierowane: wektor główny siły i moment ogólny, przyłożone do punktu ciężkości przekroju.

Siły wewnętrzne - przekrojowe

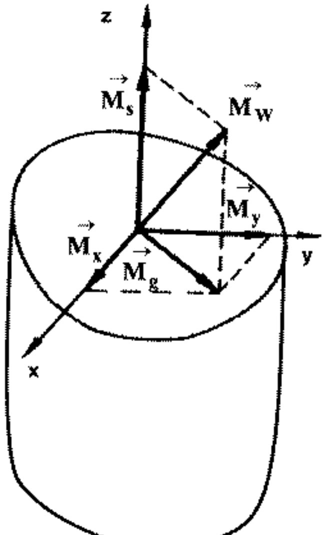
Rozkład wektorów $\vec{P}_W$ i $\vec{M}_W$ na składowe: w kierunku normalnym do płaszczyzny przekroju myślowego i na tej płaszczyźnie



$\vec{N}$ - siła osiowa lub podłużna

$\vec{T}$ - siła poprzeczna lub tnąca

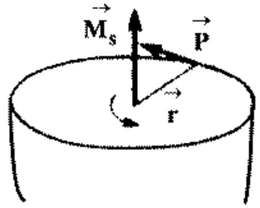
$\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$ - składowe siły tnącej w kierunkach x i y



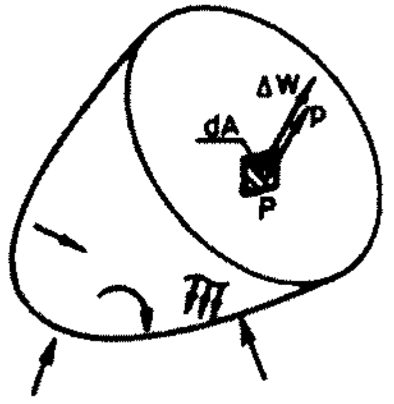
$\vec{M}_s$ - moment skręcający

$\vec{M}_g$ - moment zginający

$\vec{M}_x$, $\vec{M}_y$ - składowe momentu gnącego w kierunkach x i y



Naprężenie w punkcie
Definicja naprężenia w punkcie

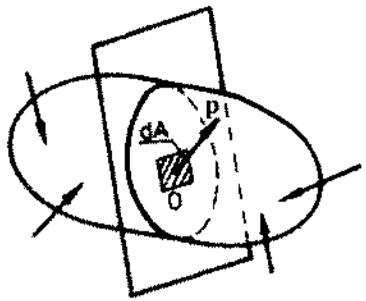


$\Delta\vec{W}$ - wypadkowa sił wewnętrznych z małego obszaru ΔA

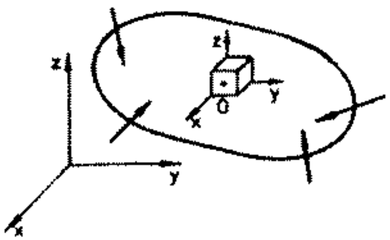
$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{W}}{\Delta A} = \frac{d\vec{W}}{dA}$$

jednostki $\left[Pa = \frac{N}{m^2}\right]$

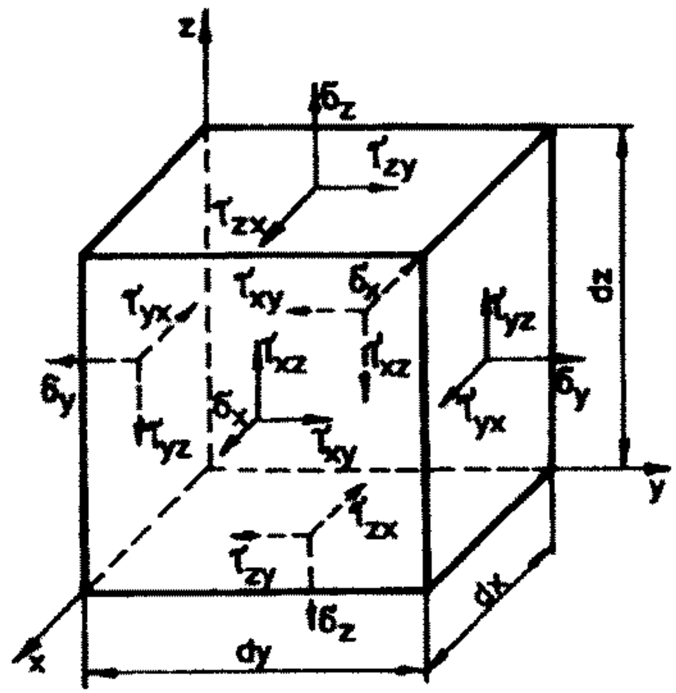
praktyczne jednostki [MPa]



Stan naprężenia w punkcie O jest określony przez naprężenia $\vec{p}$ na wszystkich możliwych płaszczyznach przechodzących przez punkt O.



Stan naprężenia w punkcie O najwygodniej jest wyznaczyć określając naprężenia na ścianach małego sześcianu otaczającego punkt O w kartezjańskim układzie współrzędnych. Krawędzie sześcianu zorientowane są równolegle do osi układu współrzędnych.



Naprężenia na każdej ścianie sześcianu rozkłada się na składowe: normalną (czyli prostopadłą do ściany) i dwie styczne, wzdłuż osi równoległych do danej ściany.

Oznaczenia:

σ_x – naprężenie normalne (prostopadłe) do ściany w płaszczyźnie y-Z

σ_y – naprężenie normalne (prostopadłe) do ściany w płaszczyźnie Z-X

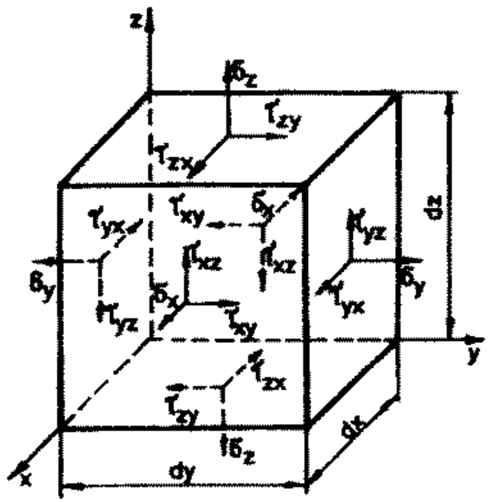
σ_z – naprężenie normalne (prostopadłe) do ściany w płaszczyźnie y-Z

τ_{xy}, τ_{xz} – naprężenia styczne leżące na ścianie prostopadłej do osi X i odpowiednio równoległe do kierunków osi y i Z

τ_{yx}, τ_{yz} – naprężenia styczne leżące na ścianie prostopadłej do osi y i odpowiednio równoległe do kierunków osi X i Z

τ_{zx}, τ_{zy} – naprężenia styczne leżące na ścianie prostopadłej do osi Z i odpowiednio równoległe do kierunków osi X i y

Naprężenie w punkcie



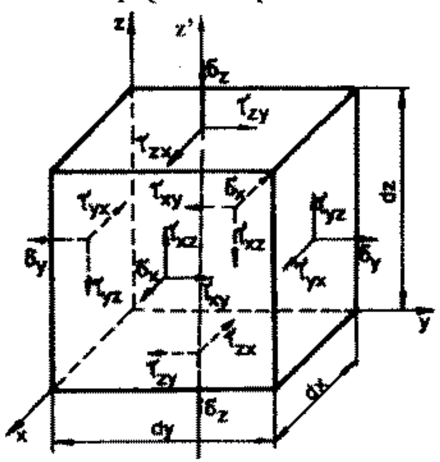
Z warunku sumy rzutów sił na osie X, y i Z określających równowagę sześcianu wynika, że: naprężenia normalne lub styczne na przeciwległych ścianach sześcianu muszą być sobie równe co do wielkości lecz przeciwnie skierowane.

Wniosek: stan naprężenia w punkcie, będącym środkiem sześcianu wyznaczony jest dziewięcioma naprężeniami:

- **trzema normalnymi σ_x, σ_y i σ_z**
- **sześcioma stycznymi τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zy}, τ_{zx}, i τ_{xz}**

Dalsze zmniejszenie liczby składowych stanu naprężenia następuje po uwzględnieniu równań momentów.

Naprężenie w punkcie



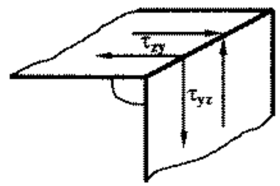
Równanie momentów względem osi z':

$$2\cdot(\tau_{xy}\cdot dy\cdot dz)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot dx-2\cdot(\tau_{yx}\cdot dx\cdot dz)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot dy=0$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

Po uwzględnieniu równań momentów względem pozostałych osi:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}\qquad\tau_{yz}=\tau_{zy}$$



Prawo równości odpowiadających sobie naprężeń:

Składowe naprężeń stycznych prostopadłe do krawędzi przecięcia się dwu przekrojów elementarnych wzajemnie prostopadłych są zawsze równe.

Ostatecznie:

Stan naprężenia w danym punkcie wyznacza sześć niezależnych składowych stanu naprężenia:

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{xz}$$

Naprężenie w punkcie

Składowe stanu naprężenia: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz} określają dowolny przestrzenny (trójosiowy) stan naprężenia.

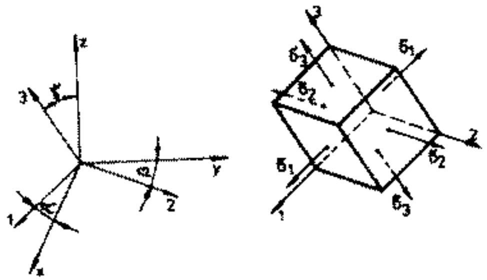
Stan naprężenia opisuje się macierzą (zwaną tensorem naprężeń T_σ), która ze względu na równowartość naprężeń stycznych jest symetryczna względem przekątnej:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{- tensor naprężeń}$$

Na gruncie teorii tensorów można udowodnić, że istnieje taki układ współrzędnych, w którym tensor naprężeń ma niezerowe wartości tylko na przekątnej głównej.

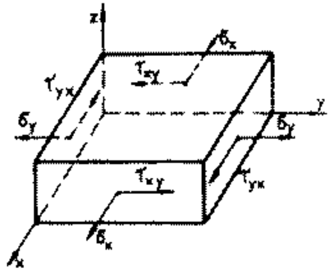
$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Taki układ współrzędnych powstaje przez takie przestrzenne zorientowanie osi, aby w płaszczyznach postopadłych do tych osi nie występują naprężenia styczne.



Osie tego układu nazywają się osiami głównymi i są oznaczone liczbami 1, 2, 3. Płaszczyzny prostopadłe do osi głównych noszą nazwę płaszczyzn głównych, a naprężenia normalne w tych płaszczyznach σ_1, σ_2 i σ_3, nazywają się naprężeniami głównymi.

Płaski (dwuosiowy) stan naprężenia

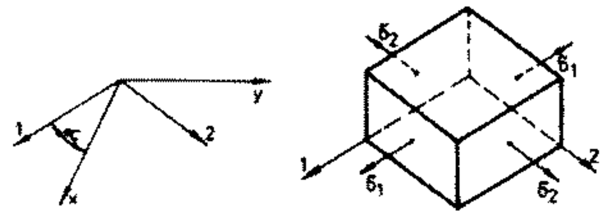


Wszystkie składowe stanu naprężenia leżą w jednej płaszczyźnie, np.: (x-y), w kierunku z nie ma żadnych naprężeń.

Tensor naprężeń dla płaskiego stanu naprężenia określają tylko trzy składowe: σ_x, σ_y i τ_{xy}

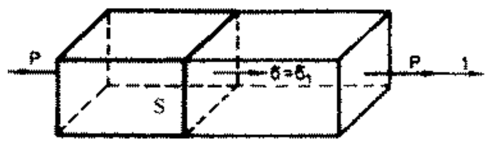
$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Naprężenia główne i kierunki główne w płaskim (dwuosiowym) stanie naprężeń



$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2$$

Jednoosiowy stan naprężenia



$$\sigma = \frac{P}{S}\,\sigma_1$$

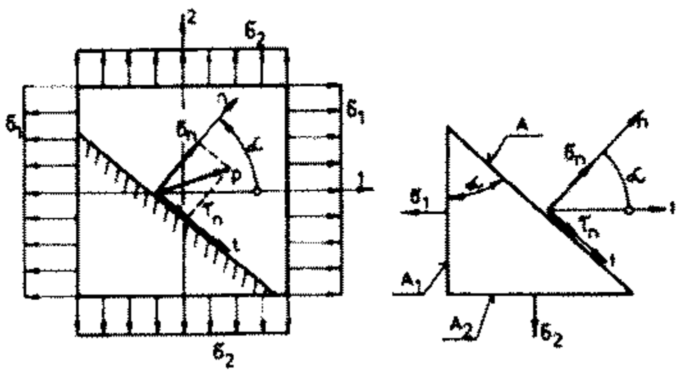
jedno naprężenie główne

Oś pręta pokrywa się z kierunkiem głównym. **(Rozciąganie i ściskanie)**

Płaski stan naprężenia

Wyprowadzenie wzorów transformacyjnych

pozwalających przejść z kierunków głównych na dowolne i odwrotnie



Warunek równowagi sił w kierunku normalnym przekroju:

$$\sigma_n \cdot A - \sigma_1 \cdot \cos(\alpha) \cdot A_1 - \sigma_2 \cdot \sin(\alpha) \cdot A_2 = 0$$

Warunek równowagi sił w kierunku naprężenia stycznego:

$$\tau_n \cdot A - \sigma_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot A_1 + \sigma_2 \cdot \cos(\alpha) \cdot A_2 = 0$$

Warunek geometryczny:

Warunek równowagi sił w kierunku normalnym przekroju:

$$A_1 = A \cdot \cos(\alpha) \qquad A_2 = A \cdot \sin(\alpha)$$

Rozwiązanie ze względu na σ_n i τ_n:

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot \cos^2(\alpha) + \sigma_2 \cdot \sin^2(\alpha)$$
$$\tau_n = (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

Płaski stan naprężenia

Wyprowadzenie wzorów transformacyjnych

Zależności trygonometryczne:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2 \cdot \alpha)}{2} \qquad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2 \cdot \alpha)}{2}$$

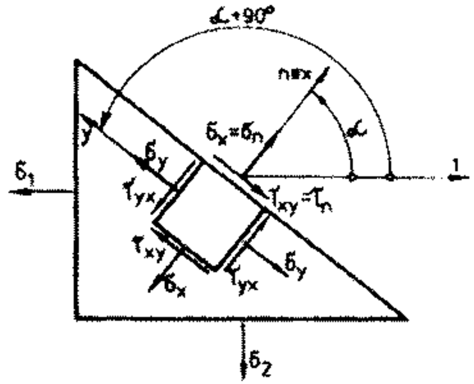
$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\sin(2 \cdot \alpha)}{2}$$

Ostatecznie:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$
$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

Płaski stan naprężenia

Wyprowadzenie wzorów transformacyjnych



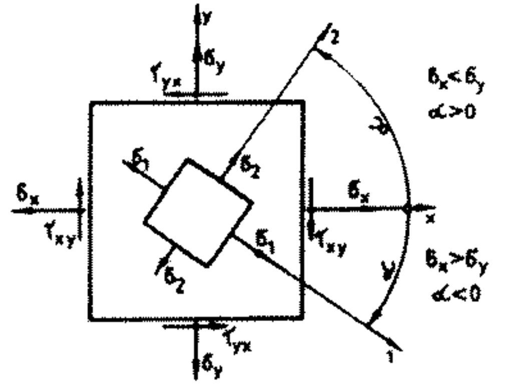
W układzie współrzędnych x-y:

$$\sigma_n = \sigma_x \qquad \tau_n = \tau_{xy}$$

Aby obliczyć naprężenie σ_y należy dokonać takich samych obliczeń dla przekroju obróconego o kąt $\alpha + 90°$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos[2 \cdot (\alpha + 90°)] = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

Płaski stan naprężenia



Wzory transformacyjne

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

$$\mathrm{tg}(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Płaski stan naprężenia

Wzory transformacyjne

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

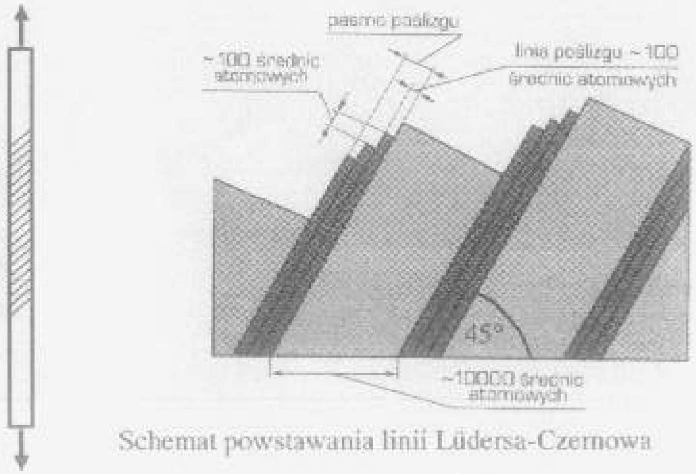
$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

Suma dwóch pierwszych równań daje:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$$

Z trzeciego wzoru wynika, że dla $\alpha = 45°$, tzn. dla przekroju myślowego nachylonego 45° względem kierunków głównych τ_{xy} przyjmuje wartość maksymalną

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$



Schemat powstawania linii Lüdersa-Czernowa

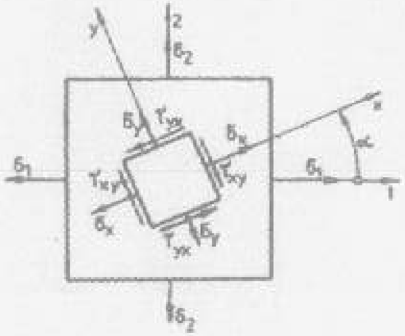
Płaski stan naprężenia
Koło naprężeń Mohra – odwzorowanie stanu naprężenia

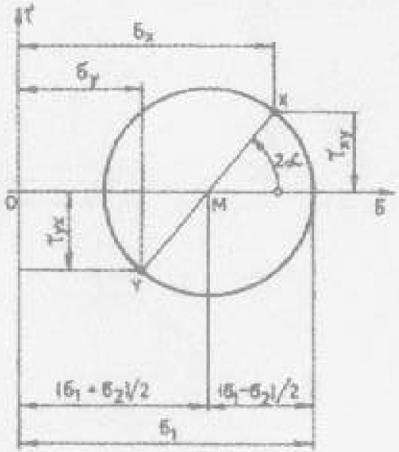
$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha) \qquad /(\,)^2 \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha) \qquad /(\,)^2 \end{aligned}\right] +$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

równanie okręgu we współrzędnych σ-τ

środek okręgu ma współrzędne $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$, a promień $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$



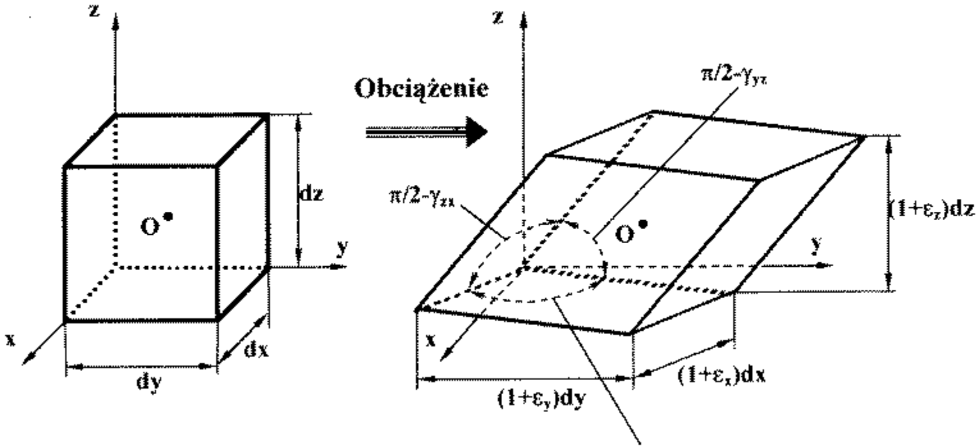


Konstrukcja wyznaczająca składowe stanu naprężenia dla dowolnego kąta α na podstawie znajomości naprężeń głównych σ_1 i σ_2.

Stan odkształcenia

obciążenie zewnętrzne ⇨ stan naprężenia ⇨ stan odkształcenia

Stan odkształcenia w punkcie O można przedstawić jako odkształcenie infinitezymalnie małego sześcianu elementarnego, którego środek stanowi punkt O Odkształcenie jest tak małe, że krawędzie odkształconej bryły są odcinkami.



Odkształcenie sześcianu elementarnego jest określone następującymi składowymi stanu odkształcenia:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - **wydłużenia względne**

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – **kąty odkształcenia postaciowego, zwane też odkształceniami poprzecznymi lub posunięciami**

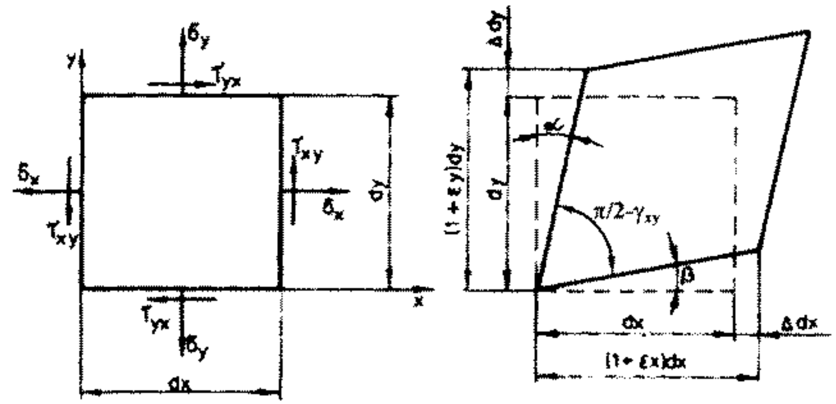
Odkształcenie sześcianu elementarnego składa się z:

- **odkształcenia objętościowego** (ε_x, ε_y, ε_z)
- **odkształcenia postaciowego** (γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx})

Wielkości ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} są małe << 1.

Stan odkształcenia

Płaski stan naprężenia: σ_x, σ_y, τ_{xy}



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \qquad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

Stan odkształcenia

Stan odkształcenia w punkcie O przedstawia się w postaci tensora stanu odkształcenia

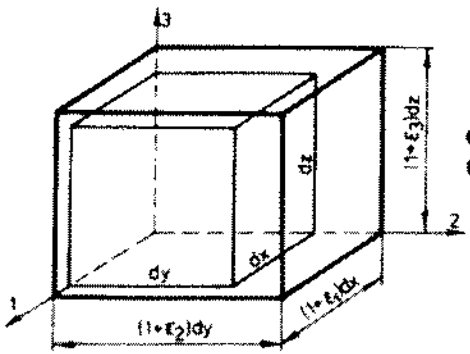
$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Można udowodnić, że w punkcie O istnieje prostokątny układ współrzędnych, w którym kąty odkształcenia postaciowego są równe zero.

Tensor stanu odkształcenia ma wówczas postać:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Osie tego szczególnego układu współrzędnych nazywa się osiami głównymi i oznaczane się liczbami 1, 2 i 3



Odkształcenie tylko objętościowe

Odkształcenia liniowe ε_1, ε_2, ε_3 wzdłuż osi głównych osiągają wartości ekstremalne i nazywane są odkształceniami głównymi.

Można wykazać, że:

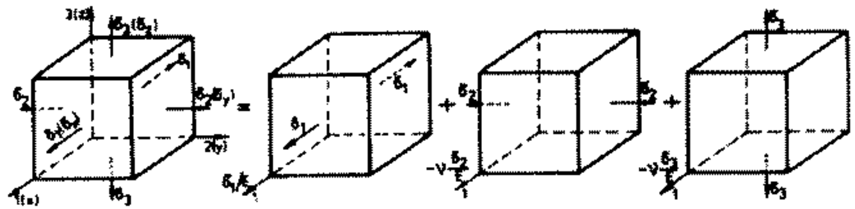
$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – **niezmiennik stanu odkształcenia**

Związki pomiędzy stanem naprężenia i stanem odkształcenia

W ośrodku izotropowym (tzn. mającym takie same własności we wszystkich kierunkach) kierunki osi głównych stanu naprężenia i stanu odkształcenia pokrywają się ze sobą.

Uogólnione prawo Hook'a

Odkształcenie objętościowe



Z prawa Hook'a dla jednoosiowej próby rozciągania wynika, że:

naprężenia główne σ_1, σ_2, σ_3 wywołują w kierunku odkształcenia głównego 1

następujące odkształcenia: $\dfrac{\sigma_1}{E},\ -\nu\cdot\dfrac{\sigma_2}{E},\ -\nu\cdot\dfrac{\sigma_3}{E}.$

Odkształcenie główne w kierunku 1 ma postać:

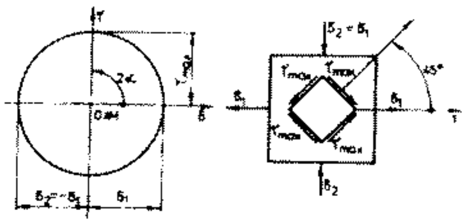
$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\cdot\frac{\sigma_2}{E} - \nu\cdot\frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_1 - \nu\cdot(\sigma_2+\sigma_3)\right]$$

Analiza odkształceń w pozostałych kierunkach 2 i 3 prowadzi do:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_2 - \nu\cdot(\sigma_1+\sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_3 - \nu\cdot(\sigma_1+\sigma_2)\right]$$

Uogólnione prawo Hook'a
Czyste ścinanie



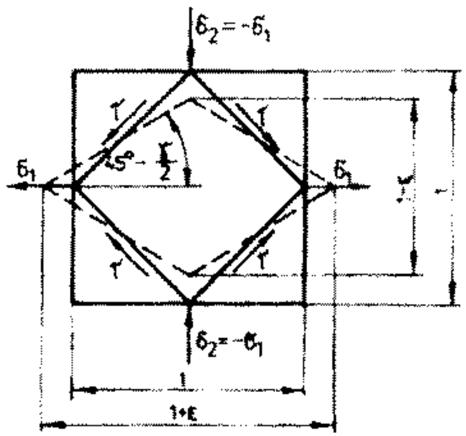
Dla płaskiego stanu naprężenia:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad \textbf{dla } \alpha = 45°$$

Czyste ścinanie:

$\sigma_1 = -\sigma_2$

$|\tau| = \sigma_1 = -\sigma_2$



Prawo Hook'a:

$$\varepsilon_1 = |\varepsilon_2| = \varepsilon = \frac{1}{E}\cdot(\sigma_1 - \nu\cdot\sigma_2)$$

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\cdot\sigma_1$$

Geometria:

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1-\varepsilon_2}{1+\varepsilon_1} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{tg(\frac{\pi}{4}) - tg(\frac{\gamma}{2})}{1 + tg(\frac{\pi}{4})\cdot tg(\frac{\gamma}{2})} = \frac{1 - tg(\frac{\gamma}{2})}{1 + tg(\frac{\gamma}{2})} \\ \textbf{dla } 0 \le \gamma << 1 \qquad tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) \approx \frac{\gamma}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}} \quad (2)$$

(1) i (2) $\rightarrow \qquad \varepsilon = \gamma/2$

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E}\cdot\sigma_1 = \frac{\gamma}{2} \quad\longrightarrow\quad \gamma = \frac{\sigma_1}{\frac{E}{2\cdot(1+\nu)}} = \frac{\tau}{\frac{E}{2\cdot(1+\nu)}}$$

Uogólnione prawo Hook'a
Czyste ścinanie

$\gamma = \frac{\tau}{\frac{E}{2\cdot(1+\nu)}}$ **kąt odkształcenia postaciowego γ wywołany naprężeniem tnącym τ**

$$G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)} \qquad \textbf{jednostka [MPa]}$$

G - moduł sprężystości postaciowej (lub poprzecznej) lub moduł Kirchhoffa

$\gamma = \frac{\tau}{G}$ **- prawo Hook'a dla czystego ścinania**

Dla trójosiowego stanu naprężenia:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

Z twierdzenia o równości naprężeń stycznych: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$,

wynika:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$$

Tensor stanu odkształcenia jest więc tensorem symetrycznym:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Związek pomiędzy stanem naprężenia i stanem odkształcenia
Uogólnione prawo Hook'a

Dotychczasowe rozważania prowadzą do uogólnionego prawa Hook'a, które obowiązuje w dowolnym układzie naprężenia trójosiowego

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_x - \nu\cdot(\sigma_y + \sigma_z\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_y - \nu\cdot(\sigma_z + \sigma_x\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_z - \nu\cdot(\sigma_x + \sigma_y\right] \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\cdot\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu}\cdot(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \qquad \tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\cdot\left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu}\cdot(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \qquad \tau_{yz} = G\cdot\gamma_{yz}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\cdot\left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu}\cdot(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \qquad \tau_{zx} = G\cdot\gamma_{zx}$$

W układzie osi głównych:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_1 - \nu\cdot(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_2 - \nu\cdot(\sigma_1 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_3 - \nu\cdot(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1+\nu}\cdot\left[\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu}\cdot(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right]$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1+\nu}\cdot\left[\varepsilon_2 + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu}\cdot(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right]$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{1+\nu}\cdot\left[\varepsilon_3 + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu}\cdot(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right]$$

Związek pomiędzy stanem naprężenia i stanem odkształcenia
Uogólnione prawo Hook'a

Przypadek płaskiego (dwuosiowego) stanu naprężenia (w układzie osi głównych)

$$\sigma_1 \neq 0, \qquad \sigma_2 \neq 0, \qquad \sigma_3 = 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\cdot(\sigma_1 - \nu\cdot\sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot(\sigma_2 - \nu\cdot\sigma_1)$$

- odkształcenia w trzech kierunkach

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\cdot(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Przypadek płaskiego (dwuosiowego) stanu odkształcenia (w układzie osi głównych)

$$\varepsilon_1 \neq 0, \qquad \varepsilon_2 \neq 0, \qquad \varepsilon_3 = 0$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_3 - \nu\cdot(\sigma_1 + \sigma_2)\right] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_3 = \nu\cdot(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Płaski stan naprężenia wywołać można odpowiednio dobranym przestrzennym układem naprężenia.

Płaski stan odkształcenia. Podstawy tensometrii

Wykorzystując wzory (wiążące naprężenia główne z dowolnie obróconym o kąt α układem naprężeń) otrzymane dla płaskiego stanu naprężenia:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

$$tg(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

i podstawiając do nich uogólnione równania Hook'a oraz wykorzystując niezmiennik stanu odkształcenia ($\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$) otrzymuje się:

$$\frac{E}{1+\nu} \cdot \left[\varepsilon_{1,2} + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[\varepsilon_x + \varepsilon_y + \frac{2\cdot\nu}{1+\nu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E^2}{(1+\nu)^2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4 \cdot G \cdot \gamma_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$tg(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot G \cdot \gamma_{xy}}{\frac{E}{1+\nu} \cdot \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - \varepsilon_x - \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]} =$$

$$= \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$tg(2 \cdot \alpha) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

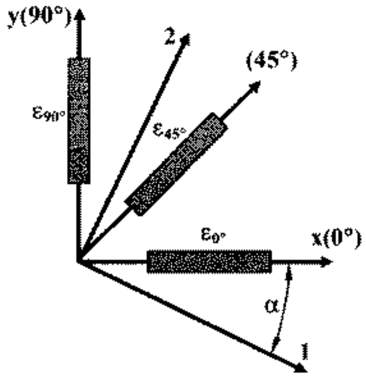
Płaski stan odkształcenia. Podstawy tensometrii

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$tg(2 \cdot \alpha) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

Układ równań pozwala wyznaczyć dla płaskiego stanu odkształceń kierunki główne odkształcenia ε_1, ε_2 oraz kąt α przy pomocy odkształceń liniowych ε_x, ε_y i kąta odkształcenia postaciowego γ_{xy} zmierzonych w dowolnym prostokątnym układzie współrzędnych (obróconym o kąt α względem układu osi głównych) - zadanie w praktyce bardzo trudne do zrealizowania ze względu na trudności pomiaru γ_{xy}.

W praktyce rozwiązuje się to stosując następujący układ pomiaru odkształceń liniowych w trzech kierunkach **$\varepsilon_{0°}$, $\varepsilon_{45°}$, $\varepsilon_{90°}$**



$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

$$\frac{\gamma_n}{2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

$$\varepsilon_{0°} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

$$\varepsilon_{45°} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos[2 \cdot (\alpha + 45°)]$$

$$\varepsilon_{45°} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos[2 \cdot (\alpha + 90°)]$$

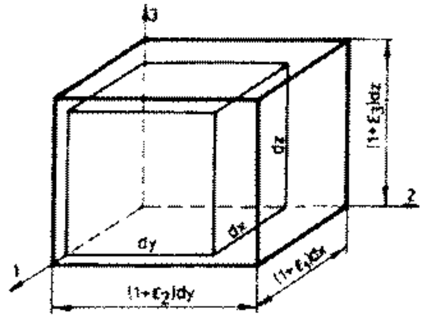
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{0°} + \varepsilon_{90°}}{2} \pm \frac{\varepsilon_{0°} - \varepsilon_{90°}}{2} \cdot \frac{1}{\cos(2 \cdot \alpha)}$$

$$tg(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \varepsilon_{45°} - \varepsilon_{0°} - \varepsilon_{90°}}{\varepsilon_{0°} - \varepsilon_{90°}}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{0°} + \varepsilon_{90°}}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{0°} - \varepsilon_{45°})^2 + (\varepsilon_{45°} - \varepsilon_{90°})^2}$$

Praktyczne wzory do doświadczalnego wyznaczania odkształceń głównych

Odkształcenia objętościowe
Moduł objętościowej ściśliwości sprężystej



Objętość początkowa $dV_0=dx\cdot dy\cdot dz$

Objętość końcowa
$dV=(1+\varepsilon_1)\cdot dx\cdot(1+\varepsilon_2)\cdot dy\cdot(1+\varepsilon_3)\cdot dz$

Względna zmiana objętości ϑ (przyrost jednostkowy objętości), wynosi

$$\vartheta=\frac{dV-dV_0}{dV_0}=\frac{(1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2)\cdot(1+\varepsilon_3)\cdot dx\cdot dy\cdot dz-dx\cdot dy\cdot dz}{dx\cdot dy\cdot dz}=$$
$$=(1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2)\cdot(1+\varepsilon_3)-1=$$
$$=1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_3\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3-1$$

Ponieważ $\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2,\ \varepsilon_2\cdot\varepsilon_3,\ \varepsilon_3\cdot\varepsilon_1,\ \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_3 \lll \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$; to

$$\vartheta=\frac{dV-dV_0}{dV_0}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

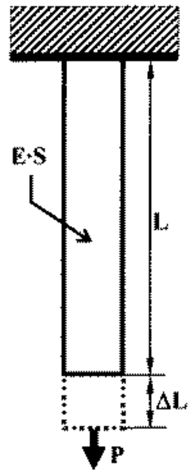
Dla hydrostatycznego ściskania (zewnętrzne ciśnienie p): $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=p$

$$\vartheta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\frac{1-2\cdot\nu}{E}\cdot(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{3\cdot(1-2\cdot\nu)}{E}\cdot p=\frac{p}{B}$$

$$B=\frac{E}{3\cdot(1-2\cdot\nu)}$$ **- moduł objętościowej ściśliwości sprężystej**

(moduł Helmholtza)

Energia sprężysta



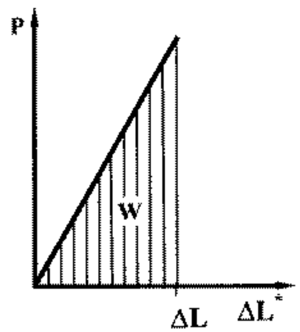
Quasi-statyczne rozciąganie pręta pryzmatycznego

Obciążenie P, narastając bardzo powoli od zera P(0)=0 do swojej końcowej wartości I [illegible] =P, wykonuje pracę, związaną z pokonaniem sił wewnętrznych w pręcie i rozciągnięciem go o długość ΔL.

Praca ta jest zmagazynowana w materiale pręta w postaci sprężystej energii potencjalnej.

Siła potrzebna do rozciągnięcia pręta o długość ΔL^* jest proporcjonalna do ΔL^*, tzn. zmienia się liniowo w trakcie rozciągania i wynosi:

$$P(\Delta L^*)=\frac{E\cdot S}{L}\cdot\Delta L^*$$



W **- praca wykonywana przez siłę P**

$\varepsilon=\frac{\Delta L}{L}$ **- względny przyrost długości**

$\sigma=\frac{P}{S}$ **- naprężenie**

$V=L\cdot S$ **- objętość pręta**

$\Phi=\frac{W}{V}$ **- energia przypadająca na jednostkę objętości pręta, czyli energia właściwa odkształcenia sprężystego**

Praca wykonana przez narastającą liniowo siłę $P(\Delta L^*)$:

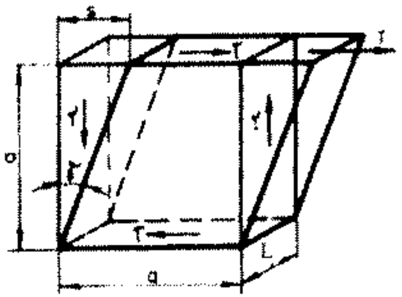
$$W=\sum_{\Delta L^*\to 0}P\cdot\Delta L^*=\int_0^{\Delta L}P\cdot d(\Delta L^*)=\frac{E\cdot S}{L}\cdot\int_0^{\Delta L}\Delta L^*\cdot d(L^*)=\frac{E\cdot S}{L}\cdot\frac{\Delta L^2}{2}$$

$$W=\frac{E\cdot S\cdot\Delta L^2}{2\cdot L}=\frac{E\cdot S\cdot\left(\frac{P\cdot L}{E\cdot S}\right)^2}{2\cdot L}=\frac{P^2\cdot L}{2\cdot E\cdot S}$$

$$\Phi=\frac{P^2\cdot L/2\cdot E\cdot S}{L\cdot S}=\frac{P^2}{2\cdot E\cdot S^2}=\frac{\sigma^2}{2\cdot E}$$

Korzystając z prawa Hook'a $E\cdot\varepsilon=\sigma$, otrzymuje się $\Phi=\frac{1}{2}\cdot\sigma\cdot\varepsilon$

Energia sprężysta – przypadek ścinania



Element o grubości L i bokach a × a

Pracę wykonuje siła
T = τ·a·L (naprężenie × pole powierzchni)
na drodze s = a·γ (ramię × kąt odkształcenia)

Praca wykonana przez narastającą liniowo siłę $T(\gamma^*)$:

$$W=\int_0^s T\cdot ds^*=\int_0^\gamma G\cdot\gamma^*\cdot a\cdot L\cdot a\cdot d\gamma^*=G\cdot a^2\cdot L\int_0^\gamma \gamma^*\,d\gamma^*=G\cdot a^2\cdot L\cdot\frac{\gamma^2}{2}$$

$$W=\frac{G\cdot a^2\cdot L\cdot\gamma^2}{2}=\frac{G\cdot a^2\cdot L\cdot\gamma\cdot\frac{\tau}{G}}{2}=\frac{a^2\cdot L\cdot\gamma\cdot\tau}{2}$$

$$\Phi=\frac{W}{V}=\frac{a^2\cdot L\cdot\gamma\cdot\tau}{2\cdot a^2\cdot L}=\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot\tau \qquad\qquad \Phi=\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot\tau$$

Uogólniając otrzymane wyniki do przestrzennego (trójosiowego) stanu naprężenia i wykorzystując zasadę superpozycji otrzymuje się wyrażenie na

energię właściwą odkształcenia sprężystego

w dowolnym układzie współrzędnych:

$$\Phi=\frac{1}{2}\cdot\left(\sigma_x\cdot\varepsilon_x+\sigma_y\cdot\varepsilon_y+\sigma_z\cdot\varepsilon_z+\tau_{xy}\cdot\gamma_{xy}+\tau_{yz}\cdot\gamma_{yz}+\tau_{zx}\cdot\gamma_{zx}\right)$$

oraz dla naprężeń głównych

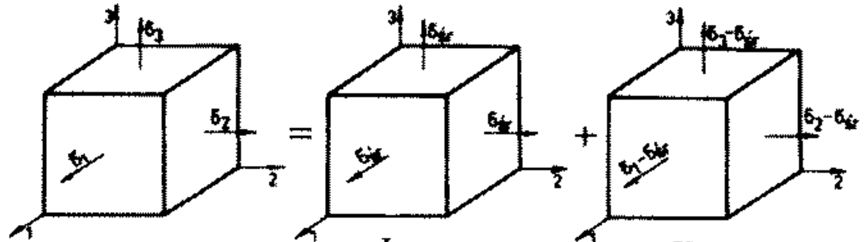
$$\Phi=\frac{1}{2}\cdot(\sigma_1\cdot\varepsilon_1+\sigma_2\cdot\varepsilon_2+\sigma_3\cdot\varepsilon_3)$$

Energia sprężysta

Φ_O – energia sprężysta odkształcenia objętościowego
Φ_P – energia sprężysta odkształcenia postaciowego

$$\Phi=\frac{1}{2}\cdot(\sigma_1\cdot\varepsilon_1+\sigma_2\cdot\varepsilon_2+\sigma_3\cdot\varepsilon_3)=\Phi_O+\Phi_P$$

Sześcian elementarny w układzie naprężeń głównych przedstawiony jako superpozycja dwóch rodzajów naprężeń I i II



I II

$$\sigma_{śr}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$ - średnie naprężenie

Zmiana objętości drugiego (II) rodzaju naprężenia:

$$\vartheta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\frac{1-2\cdot\nu}{E}\cdot\left[(\sigma_1-\sigma_{śr})+(\sigma_2-\sigma_{śr})+(\sigma_3-\sigma_{śr})\right]=$$
$$=\frac{1-2\cdot\nu}{E}\cdot(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-3\cdot\sigma_{śr})=0$$

Rodzaj naprężenia II odpowiada wyłącznie za zmianę kształtu

$$\Phi_O=\frac{3}{2}\cdot\sigma_{śr}\cdot\varepsilon_{śr}=\frac{3}{2}\cdot\sigma_{śr}\cdot\frac{1}{E}\left[\sigma_{śr}-\nu\cdot(\sigma_{śr}+\sigma_{śr})\right]=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-2\cdot\nu}{E}\cdot\sigma_{śr}^2$$

$$\Phi_O=\frac{1-2\cdot\nu}{6\cdot E}\cdot(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2=\frac{1-2\cdot\nu}{6\cdot E}\cdot(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2$$

$$\Phi_P=\Phi-\Phi_O=\frac{1+\nu}{6\cdot E}\cdot\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]=$$
$$=\frac{1+\nu}{6\cdot E}\cdot\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\cdot(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)\right]$$

Pojęcie wytężenia materiału

Naprężenie dopuszczalne w statycznej próbie rozciągania (ściskania)

K – naprężenie niszczące: np.: R_e dla materiałów sprężysto-plastycznych, R_m dla materiałów kruchych

k_r – naprężenie dopuszczalne (naprężenie, jakie dopuszcza się ze względu na bezpieczeństwo danego elementu urządzenia/konstrukcji)

$$k_r = \frac{K}{n}$$ gdzie $n > 1$ – warunek bezpieczeństwa

Przyjmując odpowiednią wartość n należy uwzględnić warunki pracy konstrukcji, możliwość pojawienia się wad materiałowych, niedokładność modelu obliczeniowego itp.)

Ważne praktyczne zagadnienie:

Jakie kryterium bezpieczeństwa przyjąć dla elementu konstrukcyjnego poddanego działaniu obciążeń złożonych, tzn. w dwu- lub trójwymiarowym stanie naprężeń?

Doświadczalne określanie naprężeń niszczących i określanie naprężeń dopuszczalnych dla złożonych stanów naprężeń jest zagadnieniem czasochłonnym i kosztownym. Należy znaleźć prostszą metodę.

Pojęcie wytężenia materiału: miara zbliżania się materiału do stanu niebezpiecznego (grożącego zniszczeniem)

Przyjmuje się, że wytężenie jest funkcją stanu naprężenia: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ oraz stałych materiałowych: $C_1, C_2, \ldots$

$$W = f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, C_1, C_2, \ldots)$$
$$W = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C_1, C_2, \ldots)$$

Pojęcie wytężenia materiału

Aby określić warunek odpowiadający stanowi niebezpiecznemu dla danego materiału w złożonym stanie naprężenia, przyrównuje się wytężenie tego materiału do wytężenia tego materiału dla jednoosiowego rozciągania naprężeniem równym σ_{red}, zwanym naprężeniem zredukowanym.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C_1, C_2, \ldots) = f(\sigma_{red}, C_1, C_2, \ldots)$$

$$\sigma_{red} = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C_1, C_2, \ldots)$$

σ_{red} charakteryzuje dany ogólny stan naprężenia pod względem wytężenia

Warunek wytrzymałościowy określa się, zatem jako:

$$\sigma_{red} \leq k_r = \frac{K}{n}$$

Postać funkcji $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C_1, C_2, \ldots)$ zależy od odpowiednio postawionej hipotezy wytężeniowej (wytrzymałościowej)

1. Hipoteza największego naprężenia rozciągającego (Galileusz)

O wytężeniu materiału decyduje wartość największego naprężenia rozciągającego lub ściskającego:

$$k_{rc} \leq \sigma_{red} = \sigma_1 \leq k_r$$

k_{rc}, k_r – naprężenia dopuszczalne dla jednoosiowego ściskania i rozciągania

Doświadczenie wykazuje, że hipoteza ta ma zastosowanie do materiałów kruchych. W przypadku materiałów sprężysto-plastycznych nie sprawdza się.

2. Hipoteza największego odkształcenia (de Saint-Venant)

O wytężeniu materiału decyduje największe wydłużenie względne:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$ **dla ogólnego trójosiowego stanu naprężenia**

$$\varepsilon_{red} = \frac{\sigma_{red}}{E}$$ **dla jednoosiowego stanu naprężenia przy rozciąganiu**

Prosty (jednoosiowy) oraz złożony stan naprężenia mają wywołać takie samo wytężenie, zatem $\varepsilon_{max} = \varepsilon_{red}$, a stąd warunek bezpieczeństwa

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \nu\cdot(\sigma_2 + \sigma_3) \leq k_r$$

Doświadczenie wykazuje, że hipoteza ta ma zastosowanie do materiałów kruchych, zwłaszcza niemetalicznych. W przypadku materiałów sprężysto-plastycznych nie sprawdza się.

3. Hipoteza największego naprężenia stycznego (Coulomb)

O wytężeniu materiału decyduje wartość największego naprężenia stycznego:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$ **dla ogólnego trójosiowego stanu naprężenia**

$$\tau_{red} = \frac{\sigma_{red}}{2}$$ **dla jednoosiowego stanu naprężenia przy rozciąganiu**

Prosty (jednoosiowy) oraz złożony stan naprężenia mają wywołać takie samo wytężenie, zatem $\tau_{max} = \tau_{red}$, a stąd warunek bezpieczeństwa

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r$$

Szczególne przypadki dla płaskiego stanu naprężeń (jedno z naprężeń głównych jest równe zero):

Ponieważ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, to:

a) **gdy dwa niezerowe naprężenia są rozciągające (tzn. większe od zera) $\sigma_3 = 0$ i**

$$\sigma_{red} = \sigma_1 \leq k_r$$

b) **gdy dwa niezerowe naprężenia są ściskające (tzn. ujemne) $\sigma_1 = 0$ i**

$$\sigma_{red} = -\sigma_3 \leq k_r$$

c) **gdy jedno niezerowe naprężenie jest rozciągające a drugie ściskające $\sigma_2 = 0$ i**

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq k_r$$

Doświadczenie wykazuje, że hipoteza ta ma zastosowanie do materiałów sprężysto-plastycznych zwłaszcza w płaskich stanach naprężeń.

Hipotezy wytężeniowe

4. Hipoteza, że o wytężeniu decyduje energia właściwa odkształcenia postaciowego (Huber).

Dla trójosiowego stanu naprężenia:

$$\Phi_P = \frac{1+\nu}{6\cdot E}\cdot\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$$

Dla jednoosiowego stanu naprężenia:

$$\Phi_{P\,red} = \frac{1+\nu}{6\cdot E}\cdot\sigma_{red}^2$$

Prosty (jednoosiowy) oraz złożony stan naprężenia mają posiadać taką samą energię właściwą odkształcenia postaciowego w stanie wytężenia:

$$\Phi_{P\,red} = \Phi_P$$

czyli

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\cdot\sigma_2} \le k_r$$

Hipoteza ta znalazła potwierdzenie dla materiałów sprężysto-plastycznych w zakresie sprężystości jak i plastyczności.

Podobne hipotezy, dotyczące całkowitej energii sprężystej oraz energii sprężystej odkształcenia objętościowego nie znalazły potwierdzenia doświadczalnego.

)ᴁ ▪ ◀ ↻

Tensometria

Tensometria (*łac.* tensus – napięty, *gr.* metreo – mierzę)

– metoda wyznaczania naprężeń na podstawie pomiarów odkształceń materiału badanej konstrukcji

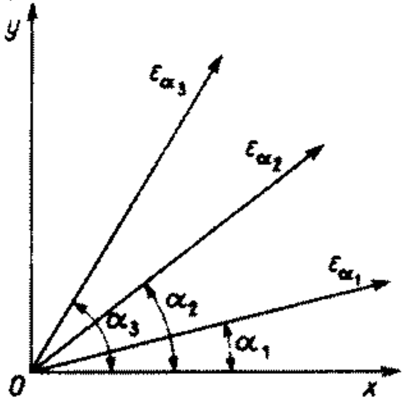
Tensometr (czujnik tensometryczny) – przyrząd do pomiaru odkształceń liniowych oraz za ich pośrednictwem naprężeń występujących przy obciążeniu badanego ciała.

1. Tensometria – metoda punktowa, gdyż pozwala wyznaczyć odkształcenie badanego ciała tylko w punkcie przyłożenia tensometru.
2. Czujnik tensometryczny – zasadnicza część urządzenia tensometrycznego, przylegająca do powierzchni badanego ciała w ten sposób, że jej odkształcenia są identyczne z odkształceniami tego ciała.
3. Baza – podstawowa cecha tensometru, długość pomiarowa L_0, do której odnosi się zmiana ΔL_0 długości pomiarowej wywołanej odkształceniem elementu, do którego przymocowany jest czujnik tensometryczny.
4. $\varepsilon = \dfrac{\Delta L_0}{L_0}$ - odkształcenie (względne wydłużenie) tensometru określa średnią odkształcenia na długości bazy tensometru. Dlatego:
   - w miejscach koncentracji naprężeń należy stosować tensometry o małej bazie (jak najkrótszej): 0.5-3 mm
   - w przypadku liniowej zmienności stanu naprężeń można stosować tensometry o średniej bazie: 5-30 mm
   - w przypadku badania cech mechanicznych materiału w warunkach jednorodnego stanu naprężenia można stosować tensometry o dużej bazie: > 30 mm.

Tensometria

1. Czujnik tensometryczny ma skończone rozmiary – nie może być dowolnie mały (najmniejsze tensometry ok. 0.1 mm) – pomiar w punkcie jest niemożliwy.
2. Pomiar nominalnie (z nazwy) w punkcie – tzn. pomiar w małym obszarze wokół tego punktu.
3. Dwuosiowy stan odkształcenia – określony jest przez trzy wydłużenia względne, w trzech dowolnych kierunkach, leżących w jednej płaszczyźnie. Należy dokonać trzech pomiarów (w wyjątkowym przypadku dwóch) odkształceń w różnych (dowolnych) kierunkach wokół badanego punktu.
4. **Rozeta tensometryczna** – układ kilku tensometrów, (co najmniej dwóch) ułożonych bardzo blisko siebie na powierzchni badanego ciała umożliwiający jednoczesny pomiar odkształceń.
5. Kształt rozety tensometrycznej (czyli ustawienie geometryczne czujników tensometrycznych względem siebie) powinien zredukować do minimum błąd pomiarowy wynikający ze skończonych wymiarów objętego pomiarem pola oraz uzyskać proste związki matematyczne pomiędzy odkształceniami mierzonymi a obliczanymi.
6. Wielkość błędu pomiarowego nie jest jednoznacznie związana z długością bazy pomiarowej tensometru, ponieważ wartość średnia odkształcenia, jaką rejestruje tensometr, jest ścisłą wartością w miejscu odpowiadającym połowie długości tej bazy.

Teoria rozet tensometrycznych.
Przypadek ogólny trzech tensometrów.



x-y – dowolny układ współrzędnych

α_1, α_2, α_3 – **dowolne kąty wyznaczające kierunki baz trzech tensometrów w danym układzie współrzędnych x-y**

$\varepsilon_{\alpha 1}$, $\varepsilon_{\alpha 2}$, $\varepsilon_{\alpha 3}$ – **wydłużenia względne tensometrów**

ε_x, ε_y, γ_{xy} – **wydłużenia względne wzdłuż osi układu współrzędnych x-y oraz odkształcenie kątowe w tym układzie**

Związki pomiędzy wydłużeniami tensometrów a wydłużeniami zdefiniowanymi w układzie współrzędnych x-y:

$$\varepsilon_{\alpha 1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\alpha_1) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\alpha_1)$$

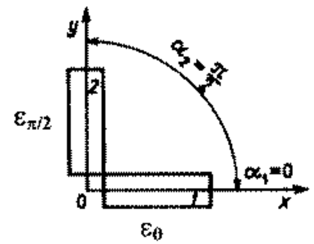
$$\varepsilon_{\alpha 2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\alpha_2) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\alpha_2)$$

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos(2\alpha_3) + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\alpha_3)$$

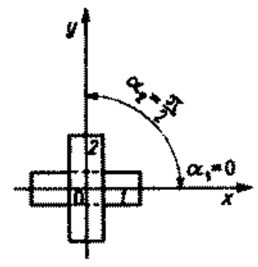
Teoria rozet tensometrycznych

Podstawowe typy rozet tensometrycznych

(rozety zgrupowane są w grupy identyczne pod względem obliczeniowym)



rozeta prostokątna



rozeta skrzyżowana prostokątna

Typ ten jest używany tylko w przypadku, gdy znany jest <u>jeszcze przed pomiarem</u> układ osi głównych (kierunki głównych odkształceń). Osie tensometrów (linie bazy) ustawia się wzdłuż tych kierunków.

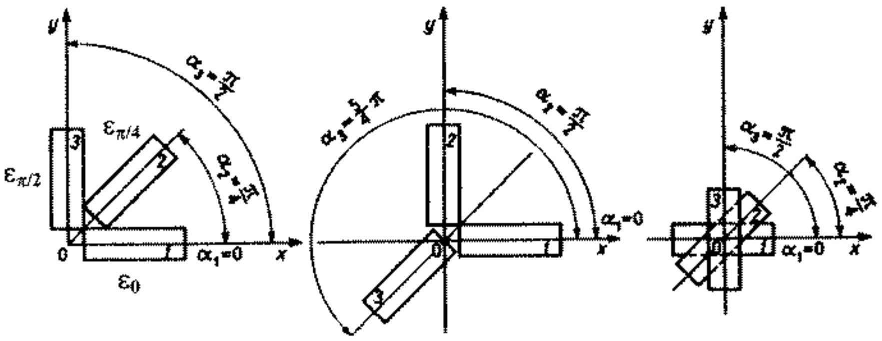
Związki pomiędzy odkształceniami zmierzonymi przy użyciu tensometrów a głównymi odkształceniami. Wyznaczenie naprężeń głównych:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_{\pi/2} = \varepsilon_2$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)$$

Typy rozet używanych, gdy nieznane są kierunki główne odkształceń



prostokątna złożona | gwiazdowa o jednej osi symetrii | prostokątna skrzyżowana (gwiazdowa)

Związki pomiędzy wydłużeniami wyznaczonymi przez tensometry a wydłużeniami względnymi i odkształceniem kątowym w układzie współrzędnych określonym przez układ tensometrów:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_{\pi/2}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_{\pi/4} - \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_{\pi/2})$$

Związki pomiędzy wydłużeniami wyznaczonymi przez tensometry a głównymi odkształceniami oraz kątem φ o jaki układ współrzędnych tensometru jest obrócony względem osi głównych odkształcenia:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{\pi/2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\pi/4})^2 + (\varepsilon_{\pi/4} - \varepsilon_{\pi/2})^2}$$

$$\mathrm{tg}(2\varphi) = \frac{2\varepsilon_{\pi/4} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{\pi/2})}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\pi/2}}$$

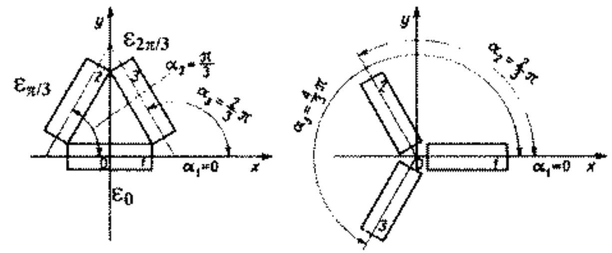
Naprężenia główne wynoszą:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \qquad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)$$

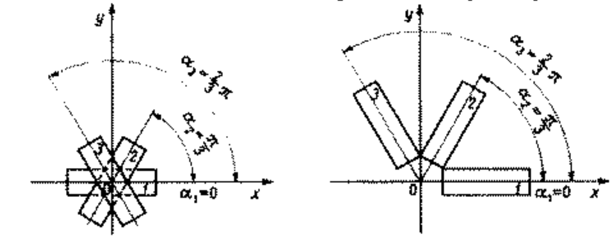
Maksymalne naprężenie styczne:

$$\tau_{max} = G\cdot\gamma_{max} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{max} = \frac{E}{2(1+\nu)}\sqrt{2}\sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\pi/4})^2 + (\varepsilon_{\pi/4} - \varepsilon_{\pi/2})^2}$$

Typy rozet używanych, gdy nieznane są kierunki główne odkształceń



„delta" | **gwiazdowa symetryczna**



skrzyżowana symetryczna | **wachlarzowa**

Związki pomiędzy odpowiednimi odkształceniami:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_y = \frac{-\varepsilon_0 + 2\varepsilon_{\pi/3} + 2\varepsilon_{2\pi/3}}{3}$$

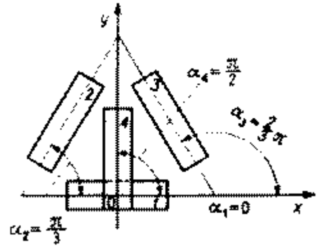
$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{(\varepsilon_{\pi/3} - \varepsilon_{2\pi/3})}{\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{\pi/3} + \varepsilon_{2\pi/3} \pm \sqrt{2}\cdot\sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\pi/3})^2 + (\varepsilon_{\pi/3} - \varepsilon_{2\pi/3})^2 + (\varepsilon_{2\pi/3} - \varepsilon_0)^2}}{3}$$

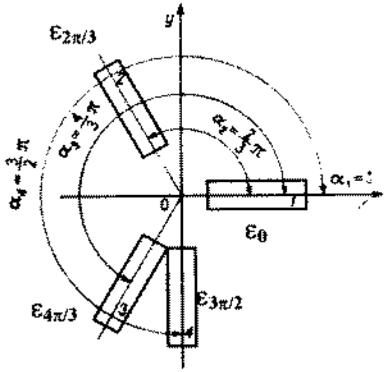
$$\mathrm{tg}(2\varphi) = \frac{\sqrt{3}\cdot(\varepsilon_{\pi/3} - \varepsilon_{2\pi/3})}{2\varepsilon_0 - (\varepsilon_{\pi/3} + \varepsilon_{2\pi/3})}$$

Teoria rozet tensometrycznych

Typy rozet używanych, gdy nieznane są kierunki główne odkształceń



"T-delta"



wachlarzowa

Dodatkowy czwarty tensometr (prostopadły do jednego z tensometrów z układu "delta") pełni rolę kontrolną (pomocniczą).

Związki pomiędzy odpowiednimi odkształceniami:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{\pi/2}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{(\varepsilon_{\pi/3} - \varepsilon_{2\pi/3})}{\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{\pi/2} \pm \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\pi/2})^2 + \frac{4}{3}(\varepsilon_{\pi/3} - \varepsilon_{2\pi/3})^2}}{2}$$

$$\mathrm{tg}(2\varphi) = \frac{2\sqrt{3}\cdot(\varepsilon_{\pi/3} - \varepsilon_{2\pi/3})}{3(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\pi/2})}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\pi/2})^2 + \frac{4}{3}(\varepsilon_{\pi/3} - \varepsilon_{2\pi/3})^2}$$

Rodzaje tensometrów

Wymagania wobec tensometrów (wielkości odkształceń są bardzo małe):

- **pomiar maksymalnie zbliżony do punktowego**
- **duża czułość**
- **minimalny błąd pomiaru**
- **dobra powtarzalność**

Rodzaje tensometrów:

1. Mechaniczne

- **mechaniczne,**
- **optyczno-mechaniczne**
- **strunowe**

2. Elektryczne

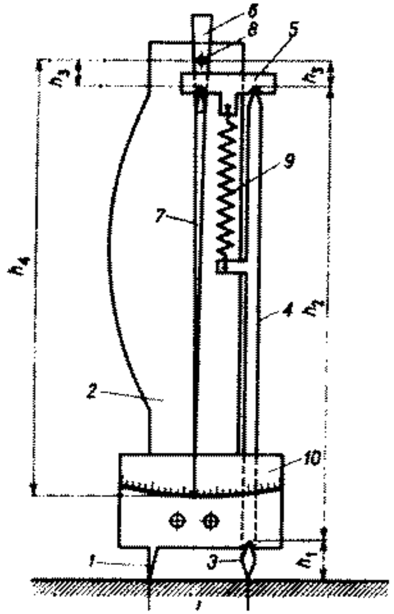
- **rezystancyjne (oporowe) – obecnie najpowszechniejsze**
- **indukcyjne**
- **elektrodynamiczne**
- **piezoelektryczne**
- **pojemnościowe**

Kryterium doboru odpowiedniego tensometru musi uwzględniać warunki i wymagania pomiaru związane z rodzajem materiału, kształtem elementu konstrukcyjnego, rodzajem obciążenia, temperaturą i innymi czynnikami. Kryteria te w dużej mierze zależą też od rodzaju tensometru i zasady jego działania.

Tensometry mechaniczne

Tensometr Huggenbergera

Używany w badaniach statycznych, przy stałych lub bardzo wolno zmieniających się silach



1- ostrze nieruchome
2- kadłub   3 – ostrze ruchome (h_1)
4 –dźwignia (h_2) 5 –beleczka pozioma
6 – dźwignia   7 – wskazówka (h_4)
8 – oś obrotu (h_3) 9 – sprężyna
10 - skala

$$k = \frac{h_2 \cdot h_4}{h_1 \cdot h_3} \qquad k = 300 \div 3700$$

baza $L_0 = 10 \div 100$ mm

$$\varepsilon = \frac{\Delta L_0}{L_0} = \frac{s}{k \cdot L_0}$$

s – wychylenie wskazówki na skali

Tensometr mocuje się na powierzchni przy użyciu przyssawek lub specjalnych uchwytów mechanicznych albo magnetycznych.

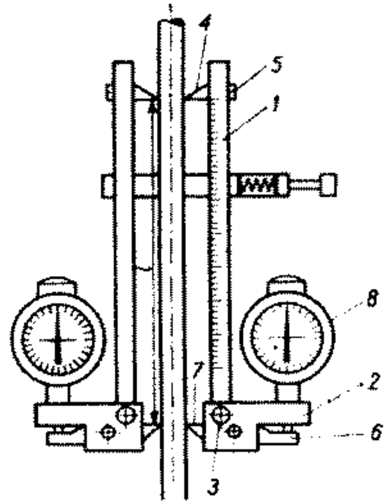
Zalety tensometru Huggenbergera:
- duża sztywność i lekkość
- duża dokładność
- niezawodność, latwość regulacji
- możliwość pomiaru na powierzchniach zakrzywionych

Wady:
- wysoka cena
- wrażliwość na wstrząsy i zmiany temperatury
- należy starannie dobierać nacisk na ostrze (zbyt mały – ślizganie się ostrzy po powierzchni, zbyt duży – uszkodzenie ostrzy i panewki)

Tensometry mechaniczne

Tensometr z czujnikiem zegarowym MK-3

Używany do mniej dokładnych pomiarów



1 – beleczka   2 – kadłub
3 – śruba zaciskowa
4 – ostrze nieruchome   5 – wkręt
6 – dźwignia   7 – ostrze ruchome
8 – czujnik zegarowy (z przekładnią zębatą o dużym przełożeniu)

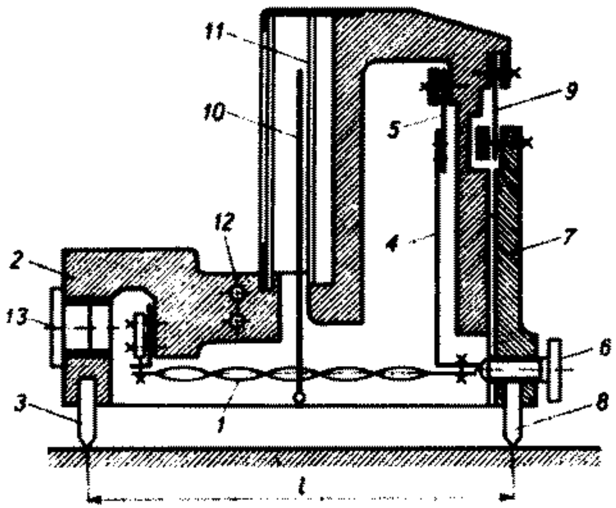
k = 100

Zalety: - prosta budowa i obsługa
- możliwość pomiarów do 3 mm

Wady: - mała czułość

Tensometry mechaniczne

Tensometr Johannsona – mikrokator



1 – taśma sprężysta skręcona (metalowa lub szklana) 2 – kadłuh
3 – ostrze nieruchome 4 – dźwignia napinająca 5 – sprężyna
6 – śruba regulująca 7 - dźwignia 8 – ostrze ruchome
9 – sprężyna 10 – wskazówka 11 – skala
12 – otwory do mocowania uchwytów 13 – korek

Zasada działania: ruch ostrza ruchomego przenosi się za pośrednictwem śruby regulacyjnej na dźwignię napinającą, która powoduje zmianę długości taśmy skręconej wywołującej ruch wskazówki bezpośrednio do niej przytwierdzonej.

Przełożenie k = 100÷5000 **długość bazy L_0 = 50÷250 mm**

Zastosowanie głównie do pomiarów statyrznych odkształceń konstrukcji.

Tensometry mechaniczne

Zasadnicze elementy tensorów mechanicznych:
- dźwignie
- przekładnie zębate
- pręty
- cięgna

Wymagania mechaniczne dotyczące elementów tensorów mechanicznych:
- sztywność
- brak luzów na przegubach

Cechy charakterystyczne tensorów mechanicznych:
- stosunkowo duże rozmiary
- duży ciężar
- wymagana precyzja wykonania
- duży koszt wytworzenia

Generalna zasada działania tensometru mechanicznego:

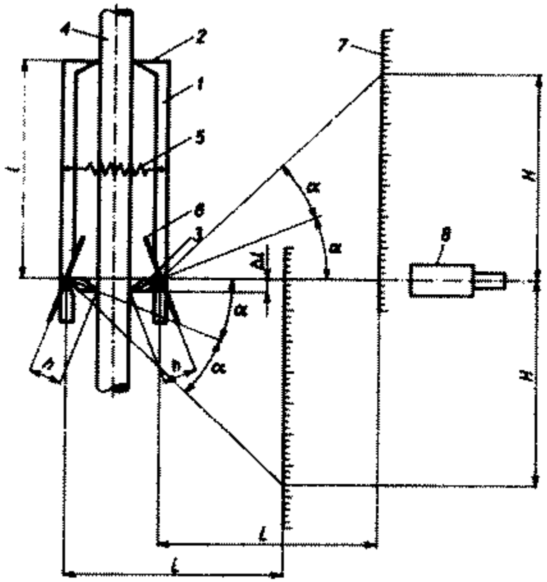
- baza tensometru – wyznaczona przez dwa ostrza pryzmatyczne, wykonane z bardzo twardej hartowanej stali, dociśnięte są do powierzchni badanego ciała
- długość bazy tensometrów mechanicznych może być zmieniana w zależności od celu i warunków badania
- jedno ostrze jest trwale połączone z korpusem tensometru a drugie ostrze połączone jest przegubowo i zazwyczaj uruchamia zespół dźwigni
- odkształcenie przedmiotu wywołuje zmianę odległości pomiędzy krawędziami obu ostrzy
- ostrze umocowane przegubowo obraca się wokół osi uruchamiając zespół dźwigni, które przemieszczają wskazówkę, której koniec przesuwa się po odpowiedniej skali, umożliwiają odczyt wielkości odkształcenia

Wielkości charakteryzujące tensometr:
- baza
- przełożenie

Przełożenie k:

$k = s/\Delta L_0$ - stosunek drogi s przebytej przez wskaźnik do przyrostu długości bazy, wielkość rzędu 1000

Tensometry optyczno-mechaniczne
Tensometr zwierciadlany Martensa



1 – beleczka
2 – ostrze stałe
3 – ostrze ruchome
4 – próbka
5 – zacisk
6 – zwierciadło
7 – listwa z podziałką
8 - lunetka

Zasada działania:

- ✓ Część mechaniczna spełnia taką samą rolę jak w tensometrach mechanicznych, jest to beleczka z dwoma ostrzami. Do ruchomego ostrza przytwierdzone jest zwierciadło.
- ✓ Część optyczna stanowi przekładnię tego układu. Obserwuje się przez lunetkę zmianę położenia plamki świetlnej na skali przed i po obciążeniu badanego elementu.

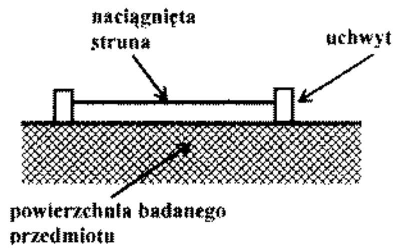
Przełożenie $k = \dfrac{L \cdot tg2\alpha}{h \cdot \sin\alpha} \approx \dfrac{2 \cdot L}{h}$ dla kąta α odpowiednio małego

Dla $L > 6$ m $\quad k = 3000 \div 5000$

Tensometr bardzo trudny i kosztowny w zastosowaniu, zajmuje dużo miejsca, stosowany jedynie w specjalnych warunkach laboratoryjnych. Bardzo czuły na wibracje i wstrząsy.

Tensometry strunowe

Zasada działania



Częstotliwość drgań swobodnych struny

$$f_s = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\sigma_s}{\rho}}$$

L - długość struny
σ_s – naprężenie struny
ρ - gęstość materiału struny

Odkształcenie materiału podłoża wywołuje zmianę odległości pomiędzy uchwytami co zmienia naprężenie struny. Zmiana naprężenia wywołuje zmianę częstotliwości drgań struny. Mierząc zmianę częstotliwości struny można wyznaczyć zmianę naprężenia materiału badanego:

$$\Delta\sigma \approx 8 \cdot \rho \cdot L^2 \cdot f_s \cdot \Delta f_s \cdot \frac{E_s}{E_m}$$

E_s, E_m – moduły Younga odpowiednio: materiału struny i badanego materiału

W metodzie strunowej pomiary zmiany naprężeń sprowadzają się do pomiarów zmiany częstotliwości drgań struny.

Główna zaleta metody strunowej:

Możliwość pomiaru zmian naprężeń nawet w bardzo wysokich temperaturach (nawet >600°C), gdzie nie można zastosować innych rodzajów tensometrów. Wynika to z możliwości użycia jako struny materiału wytrzymującego wysokie temperatury (np. stali).

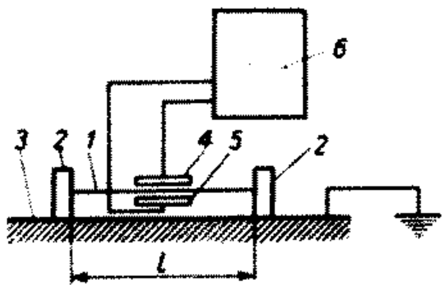
Konieczna jest znajomość współczynników rozszerzalności termicznej materiału struny α_s i badanego materiału α_m aby uwzględnić wpływ zmiany temperatury na zmianę naprężenia struny. Wszystkie elementy tensometru (struna, uchwyty, korpus, osłona, itd.) powinny być wykonane z tego samego materiału, aby zmiany temperatury samego tensometru nie wprowadzały dodatkowych naprężeń.

Tensometry strunowe

Podział tensometrów strunowych ze względu na sposób pobudzania drgań struny i sposobów pomiaru parametrów tych drgań:

1. **Magnetoelektryczne: zmienne pole magnetyczne wywołuje drgania struny. Struny muszą być wykonane z materiału magnetycznego. Wymagają stosowania dużych prądów zmiennych do wywoływania stosunkowo silnych pól zmiennych magnetycznych, potrzebna jest dobra izolacja, przewody są grube, rozmiary tensometru znaczne; sygnały odbierane z tensometru są bardzo słabe, wymagają układów eliminujących szumy.**
2. **Elektroakustyczne: drgania struny wymuszane są zmiennym polem elektrycznym; częstotliwość drgań wyznaczana jest na drodze pomiaru pojemności elektrycznej. Tensometry te są znacznie prostsze i lepsze od magnetoelektrycznych.**

Przykład tensometru elektroakustycznego

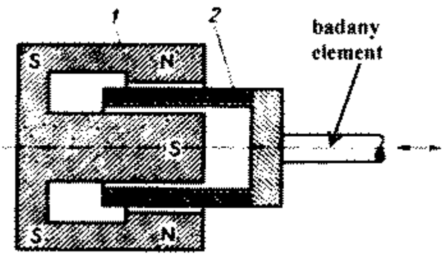


1 – struna 2 – uchwyty
3 – badany przedmiot
4, 5 – okładki kondensatora
6 - przetwornik

Zasada działania:

1. **Elektroda 4 wzbudzająca, wymusza drgania struny o zadanej częstotliwości.**
2. **Zmiana częstotliwości degań struny wywołana zmianą naprężenia struny powoduje zmiany pojemności kondensatora o okładkach 4, 5.**
3. **Przetwornik 6 przekształca sygnały pochodzące od zmienionej częstotliwości w napięcia zmienne, których ciągły pomiar pozwala obserwować zmiany naprężenia badanego materiału.**

Tensometry elektrodynamiczne (magnetoindukcyjne)
Schemat działania



1 – magnes stały
2 - uzwojenie

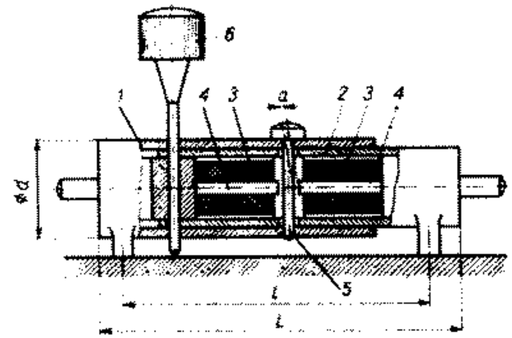
Pod wpływem ruchu uzwojenia w stałym polu magnetycznym, wywołanego zmianą długości badanego elementu, w uzwojeniu indukuje się siła elektromotoryczna wywołującą w uzwojeniu przepływ prądu, który można zmierzyć.

Wielkość siły motorycznej zależy od ilości zwojów oraz prędkości zmiany strumienia magnetycznego przechodzącego przez uzwojenie, co jest zależne od prędkości ruchu uzwojenia.

Zalety tensometrów elektrodynamicznych:
- **reaguje bezpośrednio na prędkość liniową i kątową**
- **prostota budowy, wymiary bazy pomiarowej mogą być bardzo małe**
- **możliwość badania procesów uderzeń itp.**

Wady:
- **duża czułość na zakłócenia elektromagnetyczne i zmiany temperatury**
- **nieprzydatność w badaniach statycznych i wolnozmiennych**

Przykład tensometru elektromagnetycznego (Langego)



1 – tuleja ochronna
2 – tuleja ruchoma
3 –uzwojenia
4 – magnesy stałe
5 – zwora
6 – kołek

Małe rozmiary tensometru
a = 0.1 mm
l=11÷15 mm d= 3.5÷5 mm

Zalety: **niewrażliwy na przeciążenia, mało czuły na wpływy zewnętrzne, prosty w obsłudze**

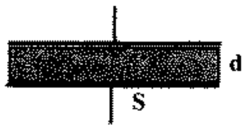
Tensometry pojemnościowe

Zasada działania

Elementem reagującym na odkształcenie badanego przedmiotn jest kondensator elektryczny, składający się z dwóch płytek metalowych o małych rozmiarach, łączących się z obu końcami bazy pomiarowej i oddzielonych od siebie warstwą powietrza o stałej lub zmiennej grubości.

Pojemność kondensatora płaskiego dwupłytkowego przy pominięciu efektów brzegowych:

$$C = 0.08859\,\frac{\varepsilon_{dielektr} \cdot S}{d} \qquad [pF]$$



$\varepsilon_{dielektr}$ – przenikalność elektryczna względna dielektryka ($\varepsilon_{dielektr}$ = 1.0005 dla powietrza w 0°C)
d – grubość warstwy dielektryka [cm]
S – pole powierzchni okładki [cm^2]

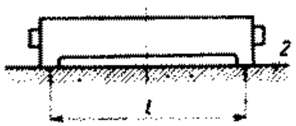
Rolę jednej z płytek (okładek) kondensatora może spełniać badana próbka. Gdy próbka jest nieprzewodząca, może pełnić rolę dielektryka.

Zalety tensometrów pojemnościowych:
- **duża czułość**
- **mała baza rzędu 10^{-6} mm**
- **badania statyczne i dynamiczne**

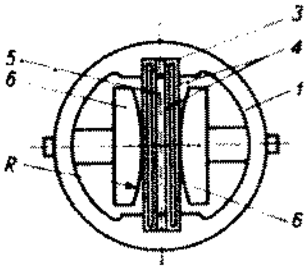
Wady:
- **wrażliwość na czynniki uboczne temperatura, wilgotność drgania i wstrząsy**

Przykład tensometru pojemnościowego

Tensometr Cartera i Shannona



1 – pierścień stalowy 2 – badany element
3 – wycięcia w górnej części pierścienia
4 – walcowe płytki metalowe
5 – sprężysta przekładka (dielektryk)



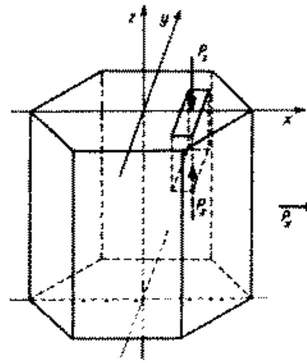
Odkształcenia bazy pomiarowej przekazywane są przez pierścień w postaci przemieszczeń docisków 6 względem płytek metalowych 4, przez co zmienia się kształt i grubość dielektryka, a więc i pojemność kondensatora.

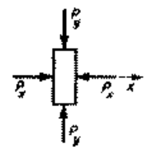
Zalety tensometru: prostota, duży zakres pomiarowy

Tensometry piezoelektryczne

Zjawisko piezoelektryczne (materiały piezoelektryczne – piezoelektryki):
Pewne związki występujące w postaci krystalicznej wykazują takie własności, że pod wpływem przyłożonego obciążenia, odkształcając się (sprężyście) na ich ściankach pojawiają się ładunki elektryczne. Ładunki te znikają po odciążeniu kryształu. Zjawisko to ma charakter odwracalny, tzn. przyłożone z zewnątrz napięcie do ścianek kryształu odkształca go.

Najważniejszym z technicznego punktu widzenia piezoelektrykiem jest kwarc (SiO_2), gdyż:
- **jest łatwy i tani w produkcji**
- **ma dużą wytrzymałość mechaniczną**
- **zależność zjawiska piezoelektrycznego od temperatury jest mała**





Własności kryształu kwarcu:

- **krystalizuje w układzie heksagonalnym**
- **moduł Younga $8\cdot10^4$ MPa**
- **oś optyczna z, wzdłuż której występuje podwójne załamanie promieni świetlnych**
- **trzy osie elektryczne x, przechodzące przez krawędzie, prostopadłe do z**
- **trzy osie mechaniczne y, prostopadłe do ścianek bocznych**

Efekt piezoelektryczny wzdłużny:
- **ściśnięcie sprężyste kryształu między dwoma elektrodami wzdłuż osi x powoduje powstanie ładunku elektrycznego na tych elektrodach**

Efekt piezoelektryczny poprzeczny:
- **ściśnięcie kryształu wzdłuż osi y wywołuje powstanie ładunków na ściankach prostopadłych do osi x**

Stała (moduł) piezoelektryczny dla kwarcu: k_p=$2.2\cdot10^{-12}$ C/N.

W temperaturze 573°C kwarc traci właściwości piezoelektryczne.

Tensometry piezoelektryczne

Napięcie U indukowane na ścianach kryształu obciążonego siłą P_x wynosi:

$$U = \frac{k_p \cdot P_x}{C}$$ **C – pojemność elektryczna kryształu**

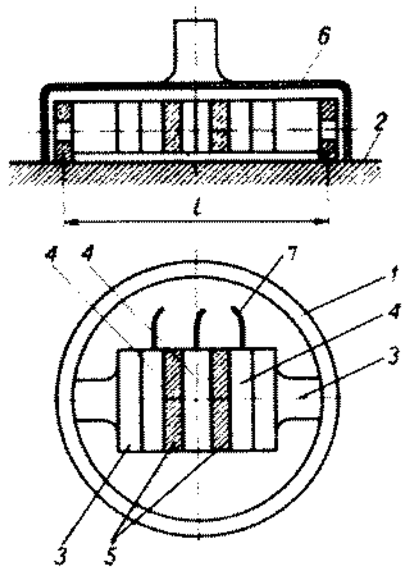
$$S_p = \frac{k_p}{C} \quad [V/N]$$ **- czułość tensometru**

Należy stosować płytki grubsze (małe C) o mniejszych wymiarach poprzecznych, lub elementy wielopłytkowe.

Tensometry piezoelektryczne stosowane są głównie do badań dynamicznych uderzeniowych i o dużych częstotliwościach. Są łatwe w obsłudze.

Wrażliwe są na drgania i wstrząsy, wilgoć i obecność pól elektrycznych.

Przykład tensometru piezoelektrycznego:



1 – pierścień sprężysty
2 - badany element
3 – płytki dociskowe
4 – płytki metalowe
5 – płytki kwarcowe
6 - osłona
7 – przewody elektryczne

Płytki metalowe i kwarcowe są izolowane elektrycznie od badanego elementu.

Odkształcenia pierścienia przenoszą się poprzez płytki dociskowe na odkształcenia płytek kwarcowych co indukuje powstanie ładunku elektrycznego.

Czujniki tego typu mają bazy długości kilku milimetrów.

Tensometria oporowa

Metoda wykorzystująca zmianę oporności elektrycznej materiału, z którego wykonany jest czujnik tensometryczny, przy zmianie jego wymiarów wywołanych działającymi siłami mechanicznymi.

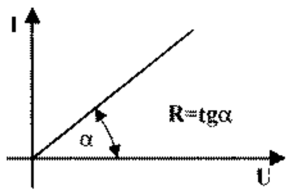
<u>Opór elektryczny (rezystancja) R:</u>

Stosunek napięcia elektrycznego U, przyłożonego do przewodnika, do natężenia powstałego w ten sposób prądu elektrycznego I:

$$R = \frac{U}{I} \qquad [1\ V/A = 1\ \Omega]$$

<u>Prawo Ohma dla przewodnika liniowego:</u>

Natężenie prądu elektrycznego I płynącego w przewodniku jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia U, tzn. wartość oporu R jest wielkością niezależną od napięcia i od natężenia.



Przewodnictwo (przewodność, konduktancja)
- odwrotność oporu

$$G = \frac{1}{R} \qquad [1/\Omega = 1\ S]$$

Wielkość oporu danego przewodnika zależy od jego rozmiarów i własności elektrycznych materiału, z którego jest zrobiony.

<u>Opór właściwy (rezystywność) przewodnika o długości L i polu przekroju poprzecznego S:</u>

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S}$$

ρ - opór właściwy, jednostka $[\Omega{\cdot}m]$

Opór właściwy jest wielkością charakterystyczną dla danego materiału.
Przewodność elektryczna właściwa (konduktywność)
– odwrotność oporu właściwego:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \qquad \text{jednostka } [S/m]$$

Opór elektryczny

Oporność właściwa ρ przewodnika zależy od temperatury T [K], dla metali jest to zależność liniowa:

$$\rho(T) = \rho_{293\,K}[1 + (T - 293\,K)\cdot\alpha_\rho]$$

$\rho(T)$ - oporność właściwa w dowolnej temperaturze
$\rho_{293\,K}$ - oporność właściwa w temperaturze pokojowej 293 K ≈ 20 °C
α_ρ - współczynnik temperaturowy rezystywności, jednostka [1/K]

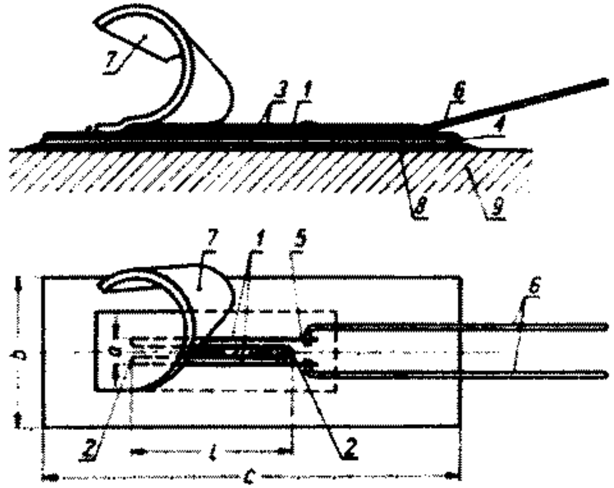
Wartości oporności i współczynników temperaturowych dla wybranych materiałów:

Materiał	Oporność właściwa $\rho\times10^{-8}$ $[\Omega{\cdot}m]$	Współczynnik temperaturowy $\alpha\times10^{-3}$ [1/K]
srebro	1.6	3.6
miedź	1.7	3.9
glin	2.7	4.0
cynk	5.9	3.8
nikiel	6.9	4.3
żelazo	9.8	4.5
Fe_3O_4	5.2×10^3	
diament	2.7×10^8	
Cu_2O	$1\div5\times10^9$	
CuO	6×10^{11}	
Nichrom (Ni20%Cr)	106	0.01
Manganin (Cu12%Mn4%Ni)	43	0.01
Konstantan (Cu40%Ni1.2%Mn)	50	0.005

Zasada działania tensometru oporowego

1. Tensometr oporowy - odpowiednio dobrany przewodnik elektryczny, mechanicznie mocno związany z powierzchnią badanego elementu.
2. Zasada działania tensometru - pod wpływem obciążeń badany element odkształca się waz z tensometrem, wskutek czego zmieniają się wymiary tensometru, z czym związana jest zmiana jego rezystancji.

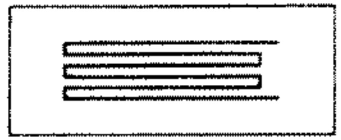
Przykład budowy czujnika tensometrycznego oporowego - typ wężykowy



1 – szereg równoległych drucików, uformowanych w postaci wielokrotnego wężyka, 2 – przegięcia drucików, 3 – klej mocujący drucik do podkładki nośnej, 4 – podkładka nośna, 5 – końcówki drucika oporowego, 6 – druty (grubsze) doprowadzające prąd elektryczny, 7 – nakładka ochronna przyklejona do drucika oporowego i podkładki nośnej, 8 – klej mocujący tensometr do badanego elementu, 9 – badany element, l – baza tensometru

Podkładka nośna i klej pełnią także rolę dielektryka izolującego drucik oporowy od badanego elementu.

Zasada działania tensometru oporowego



Schemat tensometru wykonanego z drutu o długości L i polu przekroju poprzecznego S (średnicy d) oraz oporności właściwej ρ, module Younga E i liczbie Poissona ν, poddanego działaniu jednoosiowego naprężenia σ.

Opór elektryczny drutu: $$R = \frac{\rho \cdot L}{S} \qquad (1)$$

Sprężyste wydłużenie względne drutu: $$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta L}{L} \qquad (2)$$

Sprężyste zmniejszenie względne średnicy drutu: $$\varepsilon' = -\nu \cdot \varepsilon = \frac{\Delta d}{d} \qquad (3)$$

Przekształcenia wzoru (1):

$$\ln R = \ln \rho + \ln L - \ln S \qquad \text{(logarytmowanie)}$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dS}{S} \qquad \text{(różniczkowanie)}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \varepsilon - \frac{\Delta S}{S} \qquad \text{(przejście do przyrostów skończonych)}$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad \underset{\text{różniczkując}}{\Rightarrow} \quad \frac{\Delta S}{S} = 2 \cdot \frac{\Delta d}{d} \quad = -2 \cdot \nu \cdot \frac{\Delta L}{L} = -2 \cdot \nu \cdot \varepsilon$$

Ostatecznie:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + (1 + 2 \cdot \nu) \cdot \varepsilon$$

Zasada działania tensometru oporowego

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + (1 + 2 \cdot \nu) \cdot \varepsilon$$ - względna zmiana oporu drucika tensometru

Definicja: $$k \equiv \frac{\Delta\rho}{\rho \cdot \varepsilon} + 1 + 2 \cdot \nu$$

- współczynnik czułości odkształceniowej tensometru lub
- stała czułości tensometru lub
- stała tensometru

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon$$ - zasadnicze równanie tensometrii oporowej

$\frac{\Delta R}{R}$ - sygnał elektryczny (wielkość przetwarzana w aparaturze pomiarowej na odpowiednią wielkość elektryczną), sygnał ten jest tym większy im większa jest wartość k.

Związki między $\frac{d\rho}{\rho}$ oraz ε są różne dla różnych metali.

Dla hydrostatycznego ściskania: $$\frac{d\rho}{\rho} = C \cdot \frac{dV}{V}$$ V – objętość drutu

co daje dla drutów rozciąganych: $$\frac{d\rho}{\rho} = (1 - \nu) \cdot C \cdot \varepsilon$$

czyli: $k = 1 + 2 \cdot \nu \cdot (1 - C) + C$

Parametr C zależy od materiału drutu i jego obróbki.

Zasada działania tensometru oporowego

$$k = \frac{\Delta\rho}{\rho \cdot \varepsilon} + 1 + 2 \cdot \nu \qquad k = 1 + 2 \cdot \nu \cdot (1 - C) + C \qquad \frac{d\rho}{\rho} = C \cdot \frac{dV}{V}$$

1. W zakresie odkształceń plastycznych $\nu = 0.5$ dla wszystkich metali:

$\longrightarrow$ nie zmienia się objętość $\longrightarrow$ $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0$ $\longrightarrow$ $k = 2$

2. Zakres sprężysty drutu oporowego, dla większości metali:
$\nu = 0.24 \div 0.42$, które zależy od naprężenia i temperatury

$\longrightarrow$ k - zależy od naprężenia

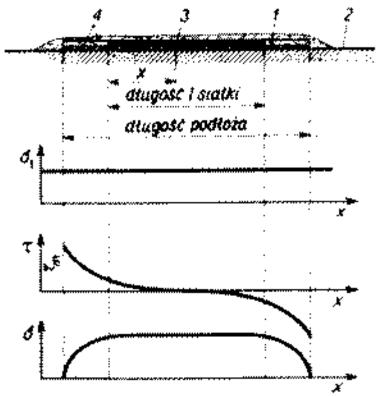
Wyjątek **konstantan**: $k \approx 2$ w zakresie sprężystym.

Zalety konstantanu do produkcji tensometrów oporowych:
- współczynnik czułości odkształceniowej tensometru $k \approx 2$, dla dużego zakresu odkształceń
- współczynnik temperaturowy rezystywności α bliski zeru, tzn. oporność w bardzo niewielkim stopniu zależy od temperatury.

Zasada działania tensometru oporowego

Efekt brzegowy tensometru rezystancyjnego:

Na wskutek istnienia kilku warstw tensometru (kleje, podkładka nośna, nakładka ochronna, druciki oporowe), naprężenie normalne σ_1 w podłożu (czyli w badanym elemencie) wywołuje powstanie naprężeń stycznych τ w warstwach pośredniczących między podłożem a siatką oporową, a w samej siatce naprężenia normalne σ o rozkładach nierównomiernych w pobliżu brzegów płytki tensometru.



Naprężenie ścinające licząc od połowy (x = L/2)

$$\tau = \tau_m \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

β - zależy od modułów sprężystości kleju i materiału drutu, odległości między siatką oporową a badanym elementem oraz od promienia wygięcia drutu na początku i końcu siatki.

Siła P rozciągająca druciki siatki tensometru wynosi zero na początku i końcu płytki tensometru a maksimum w środku drucików:

$$P = \frac{2\pi r}{\beta} \tau_m (1 - e^{\beta x}) \qquad \text{(od } x = 0 \text{ do } x = L/2)$$

Średnia wartość współczynnika czułości tensometru k_s jest mniejsza od k:

$$k_s = \left(1 - \frac{2}{\beta \cdot l} + \frac{2}{\beta \cdot l} \cdot e^{-\beta \cdot L/2}\right) \cdot k \approx \left(1 - \frac{2}{\beta \cdot l}\right) \cdot k$$

Na wartość współczynnika k_s wpływają także rozmiary i kształt podkładki nośnej tensometru.

Zasada działania tensometru oporowego
Wpływ temperatury

Pod wpływem zmiany temperatury od T do T_0 zmianom ulegają:

- długości drucików siatki oporowej od L do L_t:

$$L_t = L \cdot [1 + \alpha_t \cdot (T - T_0)]$$

- długość odcinka na elemencie badanym odpowiadający bazie tensometru L od L do L_p:

$$L_t = L \cdot [1 + \alpha_p \cdot (T - T_0)]$$

α_t, α_p – współczynniki temperaturowe rozszerzalności cieplnej odpowiednio materiału drutu oporowego i materiału badanego elementu

Obydwa wydłużenia wywołują względną zmianę rezystancji tensometru:

$$\frac{\Delta R_p}{R} = (\alpha_p - \alpha_t) \cdot (T - T_0 \cdot)k$$

Zmiana rezystancji siatki tensometru zależna tylko od zmiany temperatury:

$$R_r = R \cdot [1 + \alpha_p \cdot (T - T_0)] \qquad \text{czyli}$$

$$\frac{\Delta R_r}{R} = \alpha_p \cdot (T - T_0)$$

Zatem całkowita względna zmiana rezystancji siatki tensometru wynikająca ze zmiany temperatury od T_0 do T:

$$\frac{\Delta R_T}{R} = \left(\frac{\alpha_p}{k} \cdot \alpha_p - \alpha_t\right) \cdot (T - T_0) \cdot k$$

Pozorne wydłużenie względne (błąd pozornego wydłużenia):

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\alpha_p}{k} + \alpha_p - \alpha_t\right) \cdot (T - T_0)$$

Kompensacja wpływu temperatury:

$$\left(\frac{\alpha_p}{k} + \alpha_p - \alpha_t\right) = 0$$

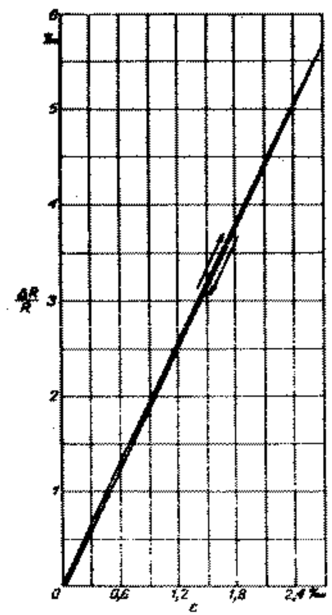
Taki warunek dobrać można tylko dla jednego materiału tensometru i materiału badanego elementu.

Zalety tensometrii oporowej

1. Duża czułość i dokładność pomiaru:
   - zakres liniowy (k = const) zwykle tensometry ε do 5‰ = 0.005 czyli do σ = 1000 MPa dla stali
   - minimalne odkształcenia i naprężenia $\varepsilon \approx 10^{-6}$ czyli σ = 0.2 MPa dla stali
2. Pomiary są uniezależnione od bazy pomiarowej L (bazy tensometru), gdyż odczyt dokonywany jest bezpośrednio w jednostkach $\varepsilon = \Delta L/L$
3. Możliwość pomiarów statycznych i dynamicznych o dużych częstotliwościach przez długie okresy czasu
4. Małe wymiary i mała masa eleminują wpływ tych wielkości na dokładność przeprowadzonych pomiarów – duże znaczenie w badaniach obiektów obciążonych dynamicznie
5. Niewrażliwość na wstrząsy – ważne w badaniach dynamicznych
6. Bezpośrednie przekazywanie odkształceń na drut oporowy
7. Możliwość bardzo łatwego stosowania układów rozetowych – badania dwuosiowego stanu naprężeń
8. Możliwość jednoczesnego przeprowadzania pomiaru w bardzo wielu punktach
9. Możliwość pomiaru na niewielkich, bardzo zakrzywionych powierzchniach
10. Możliwość wykonywania z jednego miejsca pomiarów na odległych od siebie przedmiotach
11. Możliwość dogodnego i bezpiecznego wykonywania pomiarów na trudno dostępnych i zagrażających awarią obiektach maszynowych
12. Możliwość przeprowadzania pomiarów na elementach ruchomych
13. Duża łatwość automatyzacji pomiaru i łatwość rejestracji danych
14. Niskie koszty produkcji

Wady tensometrii oporowej

1. Wrażliwość na wilgoć i temperaturę
2. Niszczenie tensometru przy zdejmowaniu z badanego elementu – konieczność cechowania kontrolnego na drodze porównawczej, na wbranych tensometrach z danej partii produkcyjnej
3. Zjawisko histerezy (po odciążeniu odkształcenie tensometru nie wraca dokładnie do wartości zerowej) – znika całkowicie po kilku cyklach obciążenia
4. Stosunkowo długi okres przygotowawczy – przygotowywanie powierzchni badanej, klejenie i suszenie, mocowanie przewodów elektrycznych, zabezpieczanie przed wilgocią i przypadkowym uszkodzeniem.



Zjawisko histerezy

– polega na nieco odmiennym przebiegu zależności $\Delta R/R$ vs. ε przy obciążaniu i odciążaniu tensometru, zazwyczaj znika po kilku cyklach obciążenie-odciążenie

Wymagania stawiane materiałom używanym do wyrobu tensometrów oporowych

Drut oporowy powinien odpowiadać następującym wymaganiom:

1. Stała wartość współczynnika czułości odkształceniowej tensometru k=const w możliwie szerokim zakresie naprężeń
2. Możliwie duża wartość współczynnika czułości k (ma wpływ na czułość i dokładność pomiarów)
3. Możliwie duża rezystancja właściwa – daje większe sygnały $\Delta R/R$, pozwala na budowę małych czujników
4. Najmniejsza możliwa histereza odkształceń
5. Najmniejszy możliwy współczynnik termicznej zależności rezystancji
6. Współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej powinien być maksymalnie zbliżony do współczynnika materiału badanego elementu – eliminacja naprężeń termicznych
7. Niewielkie napięcie termoelektryczne względem miedzi, odgrywa dużą rolę przy pomiarach statycznych z użyciem prądu stałego – napięcie termoelektryczne pojawia się jeśli połączenia (styki) dwóch przewodników z różnych materiałów znajdują się w róznych temperaturach
8. Dobra lutowność i spawalność – potrzebna do przymocowania drutów zewnętrznych

Najwięcej wymagań spełnia konstantan, dlatego jest najpowszechnej stosowanym materiałem na druty oporowe tensometrów.

Wady konstantanu:
- stosunkowo duży współczynnik napięcia termoelektrycznego względem miedzi ok. 43 $\mu V/K$ (ma to znaczenie tylko przy pomiarach stałoprądowych i gdy lutowane połączenia konstantan-miedź znajdują się w różnych temperaturach)
- stosunkowo niewielka wartość $k \approx 2$ (istnieją stopy metali o znacznie większej wartości k)

Wymagania stawiane materiałom używanym do wyrobu tensometrów oporowych

Podkładka nośna – element pośredniczący w przenoszeniu naprężeń z przedmiotu badanego na na drut oporowy tensometru, jej własności współdecydują o jakości tensometru:

Wymagania:

1. Brak pełzania – zachowywanie właściwości mechanicznych z czasem
2. Brak histerezy
3. Niewrażliwość na wilgoć
4. Niewrażliwość na temperaturę
5. Dobra przylepność do stosowanych klejów
6. Giętkość
7. Odpowiednia wytrzymałość mechaniczna
8. Duża zdolność izolacyjna (> 50 $M\Omega$, wobec standardoej oporności tensometru rzędu 100 Ω)

Podkładki nośne wykonywane są z tworzyw sztucznych (np. żywice fenolowe) ograniczenie pomiarów temperaturowych do ok. 200°C.

Klej – wymagania:

1. Brak pełzania
2. Dobra przyczepność
3. Brak histerezy
4. Niewrażliwość na wilgoć
5. Niewrażliwość na temperaturę
6. Nieaktywny chemicznie
7. Duża zdolność izolacyjna
8. Krótki czas schnięcia (twardnienia, osiągnięcia właściwych parametrów)

Stosuje się kleje samoutwardzalne np. nitrocelulozowe (aceton) lub polimeryzujące np. bakelitowo-fenolowe, typu cyjanopan itd.

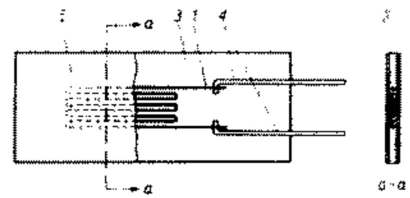
Wymagania stawiane tensometrom oporowym

Wymagania dla tensometrów jako elementów pomiarowych:

1. Małe wymiary – zwłaszcza do badania małych przedmiotów i spiętrzenia naprężeń
2. Jak największe maksymalne dopuszczalne odkształcenie – zakres pracy dający wyniki powtarzalne, brak uszkodzeń mechanicznych tensometru
3. Duża wytrzymałość zmęczeniowa (liczba cykli pracy tensometru, dla której jego wskazania uznaje się za dobre)
4. Możliwość stosowania stosunkowo dużych prądów pomiarowych aby zwiększyć czułość – czyli duża przewodność cieplna aby odprowadzać wydzielane ciepło.
5. Niewrażliwość na odkształcenia poprzeczne w stosunku do kierunku odkształceń mierzonych
6. Jak najmniejsze pełzanie – różnica wskazań tensometru w różnym czasie na elemencie poddaym stałemu obciążeniu
7. Dobra mechaniczna i termiczna osłona drutu oporowego
8. Widoczność siatki oporowej w celu ułatwienia właściwego umieszczenia tensometru na powierzchni badanego przedmiotu.
9. Wysoka dopuszczalna górna częstotliwość graniczna

Rodzaje tensometrów rezystancyjnych

Wężykowe

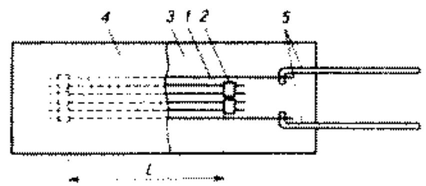


1 – siatka rezystancyjna (wężyk)
2 – klej
3 – podkładka nośna
4 - przewody doprowadzające
5 – nakładka ochronna

Główne wady:
- wrażliwość na odkształcenia boczne
- zależność czułości tensometru k od długości czynnej (całej) drutu oporowego, zależność od stosunku części podłużnej do części porzecznych drutu

Grubość drucików oporowych jest rzędu 0.025 mm = 25 μm

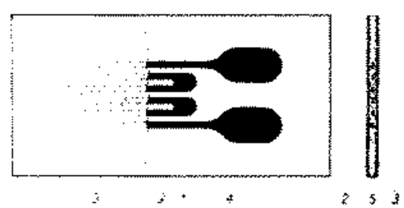
Kratowe



1 – drut rezystancyjny
2 – tasiemka miedziana odpowiednio poprzecinana
3 – podkładka nośna
4 – nakładka ochronna
5 – przewody doprowadzające

Budowa tensometru (tasiemki miedziane) w znacznym stopniu eleminuje wady tensometru wężykowego.

Foliowe



1 – siatka rezystancyjna w postaci cienkiej folii metalicznej (mniej niż 0.004 mm = 4 μm) wprasowana w podkładkę
2 – podkładka nośna
3 – nakładka ochronna
4 – zakończenia
5 – klej

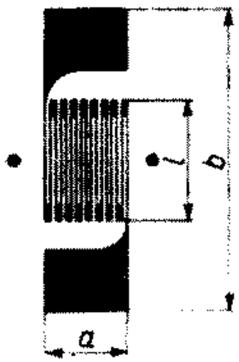
Rodzaje tensometrów rezystancyjnych

Zalety tensometrów foliowych w stosunku do drucikowych:

1. **Możliwość wykonania siatki oporowej lub rozety tensometrycznej w dowolnym kształcie i z dużą precyzją (metoda fotochemiczna)**
2. **Lepsze powiązanie z badanym podłożem (lepsze przyleganie)**
3. **Lepsze odprowadzanie wydzielanego ciepła (ze względu na lepsze powiązanie z podłożem, relatywnie szerokie ścieżki przewodnika w stosunku do grubości) – czyli większe prądy pomiarowe**
4. **Mniejsza skłonność do pełzania pod obciążeniem**
5. **Mniejsza histereza**
6. **Większa stałość punktu zerowego**

Przykładowe tensometry foliowe lub ich rozety

Pojedyncze



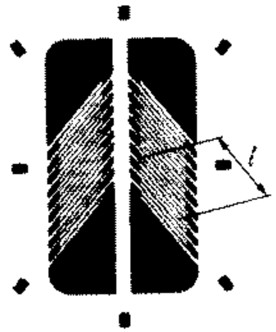
wzdłużny z bocznymi wyprowadzeniami
l = 1.2 mm
a = 1.3, b = 4.5 mm
R = 120 Ω

poprzeczny
l = 3 mm
a = 4, b = 13 mm
R = 120 Ω

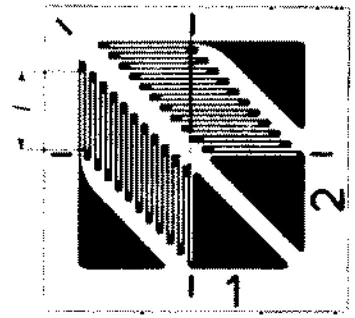
jednostronny
l = 9 mm
a = 3.5, b = 12 mm
R = 120 Ω

Przykładowe tensometry foliowe lub ich rozety

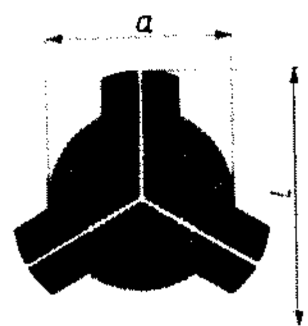
Rozety



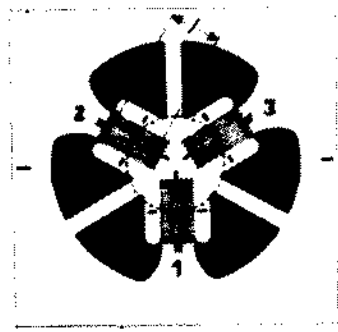
dwugałęźny
do pomiaru naprężeń stycznych
kąt między gałęziami 45°
l = 5 mm
opór każdej gałęzi 120 Ω



dwugałęźny
do pomiaru naprężeń przy skręcaniu kąt 90°
l = 3.5 mm



typu delta
kąty między siatkami 120°
a = 12 mm, l = 17 mm
opór każdej gałęzi 120 Ω

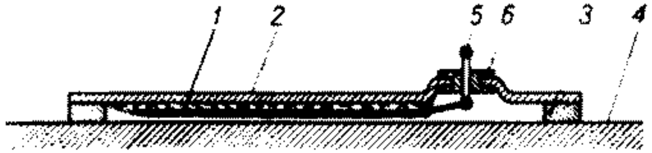


typu delta
l = 2.5 mm

Żywotność tensometrów 10^7 cykli obciążeń symetrycznych o amplitudzie $\varepsilon=10^{-3}$
Zakres odkształceń do $\varepsilon=4\times10^{-3}$ (błąd nieliniowości < 0.1%)

Tensometria oporowa
Inne rozwiązania

Tensometr płytkowy

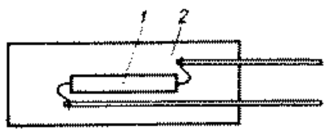


1 – tensometr foliowy	2 – płytka stalowa	3 – ramka
4 – powierzchnia elementu	5 – końcówka przewodu	6 – przepust

Zasada działania

1. Tensometr lub układ tensometrów (rozeta) przymocowany jest do płytki metalowej a nie do badanego elementu.
2. Płytka łączy się z elementem przez ramkę dystansową. Stosuje się zgrzewanie płytki do ramki i ramki do badanego elementu.
3. Ramka i płytka przenoszą odkształcenia na tensometr.
4. Zalety: bardzo mała wrażliwość na zakłócenia elektryczne z zewnątrz, dobra izolacja termiczna

Tensometry półprzewodnikowe



1 – pasek krzemowy (grubość 0.02÷0.1 mm)
2 – podkładka nośna

Główna zaleta tensometrów półprzewodnikowych:

- bardzo duża wartość współczynnika czułości odkształceniowej
  k = 40÷300 (zależy od domieszkowania)

Ponadto: - dobrze znoszą podwyższone temperatury, do 300°C
- jednakowo znoszą obciążenia statyczne i dynamiczne

Wady:

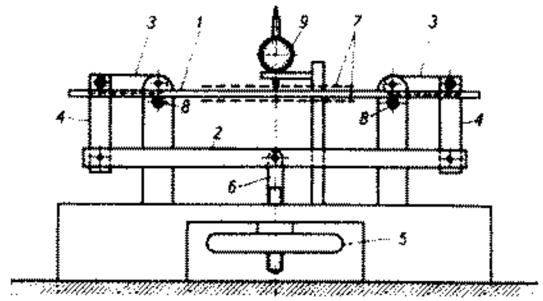
- współczynnik k silnie zależy od temperatury i wydłużenia względnego ε

Wzorcowanie tensometrów rezystancyjnych

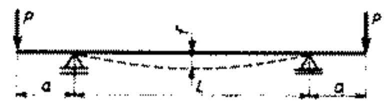
Zadaniem wzorcowania tensometrów jest wyznaczenie wartości współczynnika czułości odkształceniowej (stałej tensometru) k:

$$k = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\varepsilon}$$

Przyrząd do wzorcowania tensometrów oporowych



1 – zginana belka
2, 3 – dźwignie
4 – cięgna
5 – pokrętło
6 – cięgno gwintowane
7 – tensometry
8 – podpory
9 – czujnik zegarowy



Urządzenie umożliwia dokładne określenie wielkości odkształcenia

Belka o przekroju prostokątnym b×h i module Younga E, na długości L ulega ugięciu o promieniu stałym – w dowolnym przekroju poprzecznym moment gnący M jest taki sam.

strzałka ugięcia: $$f = \frac{M \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot I_Z}$$

$$I_Z = \frac{b \cdot h^3}{12}$$ - moment bezwładności przekroju poprzecznego belki

W skrajnych warstwach belki (gdzie przylepione są tensometry) naprężenie jest:

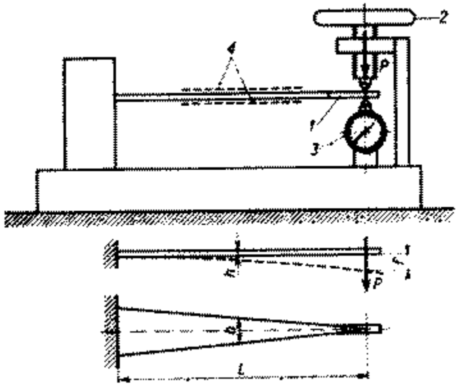
$$\sigma = \pm \frac{M}{W_Z} = \pm \varepsilon \cdot E \qquad W_Z = \frac{b \cdot h^2}{6}$$ - wskaźnik przekroju przy zginaniu

Wydłużenie względne skrajnych warstw jest stałe wzdłuż odcinka L belki:

$$\varepsilon = \pm \frac{4 \cdot f \cdot h}{L^2}$$ odkształcenie tensometru wyznacza się tylko przez pomiar strzałki ugięcia

Wzorcowanie tensometrów rezystancyjnych

Przyrząd do wzorcowania tensometrów oporowych
- prostszy w użyciu, mniej dokładny



1 – belka wspornikowa
2 – pokrętło
3 – czujnik zegarowy
4 – naklejone tensometry

h – grubość belki
b – szerokość belki liniowo zmienna
f – strzałka ugięcia

Z teorii ugięcia belek wynika, że dla tego przypadku wydłużenie względne warstwy skrajnej jest stałe na całej długości belki i wynosi:

$$\varepsilon = \frac{f \cdot h}{L^2}$$

Wyznaczenie ε sprowadza się do zmierzeni strzałki ugięcia.

Mierząc jednocześnie $\frac{\Delta R}{R}$ każdego tensometru wyznacza się wartości k.

Dodatkowe uwagi:

1. **Czułość tensometru w kierunku poprzecznym wyznacza się przez wyznaczenie wskazań 2 tensometrów naklejonych obok siebie, z których jeden jest skierowany wzdłuż włókien belki, drugi zaś prostopadle.**

2. **Tensometr nie może być ponownie użyty po odklejeniu go z badanego elementu (ulega zniszczeniu). Cechowanie tensometrów odbywa się w sposób statystyczny na pewnej liczbie (próbie) tensometrów wyprodukowanych w danej partii.**

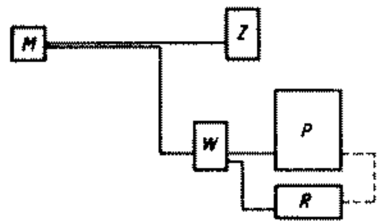
Tensometryczne układy pomiarowe

1. Zadanie układu pomiarowego: **wyznaczenie zmian rezystancji tensometru, wywołanych odkształceniami przedmiotu, do którego został przymocowany**

2. Zmiany rezystancji tensometru są bardzo małe **najwyżej rzędu ~ 1 ‰**

- należy stosować przyrządy bardzo czułe lub wzmacniać sygnały

3. Ogólny schemat blokowy tensometrycznego układu pomiarowego:



M – mostek tensometryczny
P – przyrząd pomiarowy
W – wzmacniacz
Z – zasilacz
R - rejestrator

4. Pomiary odkształceń tensometrów oporowych dają się łatwo zautomatyzować: