II Rok Informatyki Stosowanej **27-09-2006**

Egzamin z Matematyki

1. Rozwiązać równanie

$$\frac{1}{4}u_{tt}=u_{xx}$$
$$u(0,t)=0, \qquad u(\pi,t)=0, \qquad t\geq 0$$
$$u_t(x,0)=0, \qquad 0\leq x\leq \pi$$
$$u(x,0)=\begin{cases} x \quad dla \quad 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2} \\ \pi-x \quad dla \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

2. Dla funkcjonału $J:C^2(\Omega)\to \mathbb{R},\ \Omega\in \mathbb{R}^2$ gdzie

$$J[z(x,y)]=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}[(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+z^2-2\cdot z\cdot f(x,y)]dxdy$$
$$f:\Omega\to \mathbb{R}-ciągła$$

   a) wyznaczyć równanie Eulera-Lagrange'a
   b) uzasadnić, że równanie Eulera-Lagrange'a ma co najwyżej jedno rozwiązanie spełniające warunek z(x,y) = φ(x,y), gdzie $(x,y)\in \partial\Omega$ a φ jest daną funkcją

3. Dla funkcjonału $J[y(x)]=\int_1^2 [(y')^2+2\mathrm{xy}]\,dx$

gdzie y(1) = 0, y(2) = -1
wyznaczyć ekstrema