Egzamin z matematyka II rok Informatyki Stosowanej z 10.06.2005-06-10

1) Stosując metodę Fouriera znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

Spełniającego warunki :

$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0$

oraz

$$u(x,0) = f(x) \ gdzie\ f(x) = \begin{cases} x & , \ 0 < x \le \frac{l}{2} \\ l - x & , \ \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

2) Dla jakiej krzywej $y(x) \in C^2[0,1]$ spełniającej warunek $y(0) = 0,\ y(1) = \frac{1}{e}$

funkcjonał $J[y] = \int ((y')^2 - y^2 - y) \cdot e^{2x} dx$ może osiągnąć ekstremum ?

3) Wyznaczyć w obszarze $D = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 > 0\}$ rozwiązanie równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

spełniające warunek brzegowy

$$\lim_{x_2 \to 0} u(x_1, x_2) = F(x_1) = \begin{cases} 1 & dla \quad |x_1| \le a \\ 0 & dla \quad |x_2| > a \end{cases}$$

Funkcja Greena dla obszaru D ma postać :

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2} \ln \frac{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}, \quad x = (x_1 x_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$