1 Rodzaje naprężeń. Dowolny stan naprężenia.

Dowolny stan naprężenia jest opisany przez 9 składowych:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

W każdej płaszczyźnie naprężenia ij obok naprężenia normalnego σ_k wystąpią również naprężenia styczne σ_{ki} w kierunku osi i oraz σ_{kj} w kierunku osi j.

2 Interpretacja odkształcenia na przykładzie problemu 2D

Rozważamy wektor dX w bryle materiału, który w wyniku odkształcenioa przemieszcza się o wektor u z położenia A w położenie B. Warunek ciągłości ruchu ma postać:

$$u = \nu(X) = x(X) - X$$

Gradient odkształcenia P

$$P = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

Wtedy $dx = PdX$. Podobną zależność możemy napisać dla przemieszczeń $du = JdX$. Macierz J jest Jakobianem, określonym równaniem

$$J = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

Wychodząc z definicji P otrzymujemy zależność:

$$ds^2 = dX^T C dX$$

gdzie $C = P^T P \Rightarrow C_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}$ jest tensorem deformacji Greena lub tensorem deformacji Cauchy'ego. Finalnie

$$ds^2 - dS^2 = dX^T 2E dX$$

gdzie $E = \frac{1}{2}(C - I) \Rightarrow E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right)$

3 Prawa plastycznego płynięcia

3.1 Modele materiałów

- idealnie sprężyste
- idealnie plastyczne
- idealnie plastyczne z umocnieniem
- sprężysto-idealnie plastyczne
- sprężysto-plastyczne z umocnieniem

3.2 Prawa związane z modelami

3.2.1 Sprężysto-plastyczne prawo płynięcia Prandtla-Reussa

Całkowitą prędkość odkształcenia możemy rozłożyć na składową sprężystą $\dot{\varepsilon}^s$ oraz plastyczną $\dot{\varepsilon}^p$.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^s + \dot{\varepsilon}^p$$

Łącząc obie wartości, po wielu przekształceniach otrzymujemy prawo płynięcia Prandtla-Reussa:

$$\dot{\varepsilon} = \sigma\dot{\lambda} + \frac{1}{2G}\sigma + \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\sigma_m$$

3.2.2 Prawo płynięcia Levy-Misesa

Prawo plastycznego płynięcia Levy-Misesa jest prawem konstruktywnym dla materiału sztywno-plastycznego.

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\dot{\varepsilon}_{11}-\dot{\varepsilon}_{22})^2 + (\dot{\varepsilon}_{22}-\dot{\varepsilon}_{33})^2 + (\dot{\varepsilon}_{33}-\dot{\varepsilon}_{11})^2 + \frac{3}{2}(\dot{\varepsilon}_{12}\dot{\varepsilon}_{23}\dot{\varepsilon}_{31})^2}$$

3.2.3 Lepkoplastyczne prawo płynięcia Nortona-Hoffa

Ogólna postać prawa N-H:

$$\sigma = 2K\left(\sqrt{3}\dot{\varepsilon}_i\right)^{m-1}\dot{\varepsilon}$$

Przy czym współczynnik m może przyjmować następujące wartości:

- $m = 1$ dla cieczy Newtonowskiej z lepkością $\eta = K$
- $m = 0$ prawo plastycznego płynięcia dla materiału spełniającego kryterium plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego z naprężeniem uplastyczniającym $\sigma_p = \sqrt{3}K$
- $0 < m < 1$ odpowiada warunkom odkształcania metali na gorąco

Dla większości metali m jest w przedziale $0.1 - 0.2$ ale np. dla metali w warunkach nadplastyczności może osiągać wartości rzędu $0.5 - 0.7$.

4 Model konstytutywny a model reologiczny

Modele konstytutywne są relacją między dwiema wielkościami ch-stycznymi dla danego pola. W modelu konstytutywnym występują własności materiału lub substancji, z których zrobiony jest ośrodek. Model ten ma charakter fenomenologiczny lub jest wyprowadzany z zasad pierwszych.

Model reologiczny materiału jest to model opisujący zachowanie się tego materiału w warunkach odkształćeń plastycznych. W tym rozumieniu modelem relogicznym będą zależności opisujące naprężenie uplastyczniające lub lepkość materiału w funkcji zmiennych zewnętrznych i/lub zmiennych wewnętrznych.

5 Reguła addytywności

W praktyce przemysłowej większość zjawisk mikrostrukturalnych zachodzących w materiałach poddawanych obróbce zachodzi w zmiennej temperaturze. Z drugiej strony wszystkie konwencjonalne modele opisujące kinetykę tych zjawisk są zwykle modelami doświadczalnymi opracowanymi na podstawie doświadczeń prowadzonych w warunkach izotermicznych. Stosuje się więc zasadę addytywności, która ciągłą krzywą przemiany fazowej zastępuje skończoną ilością stanów izotermicznych. W sposób formalny zasada addytywności jest zapisywana następująco:

$$\int_0^T \frac{dt}{\tau(T)} = 1$$

6 Metoda górnej oceny

Metoda górnej oceny jest zaliczana do metod energentycznych. Jest oparta na następujących założeniach:

- ze wszystkich dopuszczalny pól prędkości wewnątrz materiału tylko jedno powoduje że moc odkształcenia osiąga wartość minimalną:

  $$\dot{W} = \dot{W}_P + \dot{W}_t + \dot{W}_s$$

  gdzie:

  - $\dot{W}_P$ - moc czystego odkształcenia wewnątrz rozpatrywanej strefy
  - $\dot{W}_t$ - moc sił tarcia
  - $\dot{W}_s$ - moc tracona w płaszczyznach nieciągłości

- Pole prędkości odkształcenia obliczone na podstawie dopuszczalnego pola prędkości jest też dopuszczalne

- Rzeczywista moc dostarczona do układu jest zawsze mniejsza od mocy $\dot{W}$.

W metodzie górnej oceny wpływ odkształceń postaciowych jest uwzględniony w sposób wyidealizowany poprzez nieciągłości prędkości, a dodatkowe straty mocy związane z tą nieciągłością są określone zależnością:

$$\dot{W}_s = \int_{\Gamma_s} k\,|\Delta v|\,d\Gamma_s$$

7 Naprężenie uplastyczniające materiałów w wysokich temperaturach

Naprężenie uplastyczniające metali i stopów zmienia się wraz ze wzrostem odkształcenia. Przeważnie obserwuje się wzrost tego naprężenia w trakcie odkształcenia, czyli zjawisko nazywane umocnieniem. Ale w pewnych warunkach odkształcania niektórych metali obserwuje się mięknięcie odkształceniowe, spowodowane albo usuwaniem defektów sieci krystalograficznej poprzez rekrystalizację dynamiczną, albo powstawaniem mikropasm ścinania i lokalizacją odkształceń. W obydwu przypadkach mięknięcie jest wynikiem zjawisk zachodzących na poziomie atomowym, przy czym rekrystalizacja jest procesem aktywowanym cieplnie a powstawanie mikropasm ścinania jest związane ze zmianą drogi odkształcenia.

Problem doboru modelu opisującego naprężenie uplastyczniające uwzględniającego zjawiska mikrostrukturalne odgrywa tutaj dominującą rolę. Stosowane są przede wszystkim modele wykorzystujące zmienne zewnętrzne jako zmienne niezależne. Znakomita większość tych konwencjonalnych modeli przedstawia naprężenie uplastyczniające w funkcji odkształcenia, przy czym współczynniki funkcji umocnienia odkształceniowego zależą od temperatury i prędkości odkształcenia W przypadku metali zmiennymi takimi są przeważnie gęstości dyslokacji różnego typu, ale także i inne parametry mikrostruktury jak na przykład wielkość ziarna.

8 Zasada kontinuum

Kontinuum - masa zachowująca się w sposób ciągły, nie zawierająca wtrąceń, zagieć na tyle małych że trudne będzie zastosowanie równania $\sigma = \frac{F}{S}$.

Przeniesienie definicji kontinuum na rzeczywisty materiał sprowadza się do wyboru skali wymiarowej d takiej, że istnieje pewna granica dla skali powierzchni S w przybliżeniu równa d^2. Przyjmuje się, że materiał spełnia zasadę kontinuum, jeżeli w odpowiednio małej skali wymiarowej zachowuje się w sposób ciągły.

9 Tensor stanu naprężenia Cauchy'ego

9.1 Tensor stanu naprężenia Cauchy'ego

Dowolny stan naprężenia jest opisany przez 9 składowych:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

W każdej płaszczyźnie naprężenia ij obok naprężenia normalnego σ_k wystąpią również naprężenia styczne σ_{ki} w kierunku osi i oraz σ_{kj} w kierunku osi j.

9.2 Aksjator i dewiator stanu naprężenia

Każdy dowolny stan naprężenia można rozłożyć na dwa podstawowe stany:

- **stan hydrostatyczny** - opisany przez aksjator stanu naprężenia, prowadzi tylko i wyłącznie do zmiany objętości
- **stan dewiacyjny** (czyste ścinanie) - opisany przez dewiator stanu naprężenia, prowadzi do odkształceń trwałych

Tensor stanu naprężenia możemy więc rozłożyć na aksjator i dewiator stanu naprężenia, gdzie aksjator jest związany tylko z naprężeniem średnim, natomiast dewiator zawiera pozostałą część tensora:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

10 Równania równowagi naprężeń

Analiza warunku równowagi bryły poddanej obciążeniom, z uwzględnieniem sił bezwładności i sił masowych, prowadzi do **różniczkowych równań równowagi naprężeń**

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_j - \rho \alpha_j = 0$$

gdzie:

- ρ - gęstość
- g_i - składowe wektora przyspieszenia ziemskiego
- α_i - składowe wektora przyspieszenia ruchu bryły.

Równania równowagi uwzględniające zarówno siły masowe jak i siły bezwładności noszą nazwę **równań ruchu**.

11 Zasada ekstremum w modelowaniu

12 Idea zmiennych zewnętrznych i wewnętrznych

13 Twierdzenie Greena

Rozważmy obszar Ω ograniczony powierzchnią Γ oraz dwie funkcje skalarne f i g zdefiniowane w Ω. Dla każdego zestawu współrzędnych x_i stanowiącego wektor x możemy zapisać zależność:

$$\int\limits_{\Omega} f\frac{\partial g}{\partial x_i}d\Omega = \int\limits_{\Gamma} fgn_i d\Gamma - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}gd\Omega$$

gdzie n_i - składowe jednostkowego wektora n normalnego do powierzchni

Twierdzenie Greena w modelowaniu materiałów odkształcanych plastycznie jest stosowane w **zasadzie pracy wirtualnej**, która jest podstawoą sformułowania rozwiązania wariacyjnego w rozwiązaniu MESem.

14 Równanie Hollomona i spółka ;)

Równanie Hollomona jt równanie opisujące zależność naprężenia w funkcji odkształcenia:

$$\sigma_p = k\varepsilon^n$$

σ_p jest to naprężenie uplastyczniające. Współczynnik k w równaniu jest nazywany **współczynnikiem umocnienia**, natomiast n **wykładnikiem umocnienia**.

Zależność naprężenia uplastyczniającego od prędkości odkształcenia jest analogiczna do wzoru Hollomona:

$$\sigma_p = \hat{k}\dot{\varepsilon}^m$$

Gdzie m jest **wykładnikiem czułości na prędkość odkształcenia**. Dla wielu materiałów jest stały, chociaż są materiały dla których zależy od od prędkości odkształcenia. Wówczas

$$m = \frac{d\ln\sigma}{d\ln\varepsilon}$$

14.1 Kryterium Considere'a

Kryterium Considere'a pozwala wyznaczyć odkształcenie przy którym rozpoczyna się tworzenie szyjki w próbce rozciąganej:

$$\frac{n}{\varepsilon} - 1 = 0 \Rightarrow n = \varepsilon$$

Mówi ono, że początek tworzenia się szyjki w próbce ma miejsce w tedy gdy rzeczywiste odkształcenie ε osiąga wartość równą wykładnikowi umocnienia. Ogólna forma kryterium Considere'a jest następująca:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma$$

15 Transport ciepła i masy

Większość zjawisk zachodzących w procesach przetwórstwa jest aktywowanych cieplnie, więc symulacja musi uwzględniać rolę temperatury. Transport masy również odgrywa dominującą rolę w zmianach jakie zachodzą w strukturze materiału. Pole temperatury w większości procesów **jest niestacjonarne**, metodami analitycznymi można uzyskać rozwiązanie jedynie dla jednokierunkowego przepływu ciepła. Określenie pola temperatur możliwe jest przez rozwiązanie ogólnego równania dyfuzji - równania Fouriera:

$$\nabla^T(K\nabla T) + Q = c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^t\nabla T\right)$$

gdzie T - temperatura, K - macierz funkcji rozkładu współczynnika przewodzenia ciepła, Q - prędkość generowania ciepła, ρ - gęstość, c_p ciepło właściwe, v - wektor prędkości. Macierz K jest zdefiniowana jako:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

gdzie k_1, k_2, k_3 - anizotropowe współczynniki przewodzenia ciepła. Dla materiału izotropowego przyjmujemy $k_1 = k_2 = k_3 = k$

16 Różniczkowe równanie równowagi

Metoda różniczkowych równań równowagi jest najczęściej stosowana w procesach walcowania blach i ciągnienia wyrobów osiowosymetrycznych. Do obliczeń przyjmujemy nieskończenie mały element wydzielony w strefie odkształcenia. Ogólne równanie różniczkowe ma postać:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d2k}{dx} + \frac{1}{y}\left(2k\operatorname{tg}\alpha \pm \tau\right)$$

Równanie to musi spełniać następujące warunki brzegowe na obydwu końcach kotliny walcowniczej:

- $p(0) = 2k_1 - \sigma_1$ - na wejściu
- $p(l_d) = 2k_2 - \sigma_2$ - na wyjściu

17 Wpływ tarcia na odkształcanie materiałów

Tarcie jest w większości przypadków procesów zjawiskiem niepożądanym, powodującym wzrost sił potrzebnych do odkształcenia materiału, podnoszącym temperaturę w płaszczyźnie styku w wyniku dodatkowej pracy oraz zwiększającym nierównomierność odkształcenia. W wyniku tych negatywnych aspektów może wystąpić ograniczenie możliwości wybranego procesu. Pozytywny wpływ tarcia obserwuje się w niektórych procesach walcowania grubych wyrobów, kiedy mogą wystąpić problemy z uchwyceniem materiału, oraz w niektórych procesach tłoczenia, kiedy tarcie między dociskaczem i odkształcaną blacha poprawia warunki płynięcia materiału.

18 Schematy całkowania po czasie

19 Miary odkształcenia

Miary odkształcenia:

- **odkształcenie inżynierskie** $\varepsilon_e = \frac{l_k - l_0}{l_0}$

- **odkształcenie rzeczywiste** $\varepsilon = \ln \frac{l_k}{l_0}$
- **prędkość odkształcenia** $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$

20 Zasada stałej objętości

Zasada stałej objętości (prawo zachowania masy) jest równoznaczne z warunkiem ciągłości ośrodka. Zakładamy, że gęstość ρ jest funkcją położenia x i czasu t. Całkowita masa bryły jest obliczana jako:

$$M = \int_{\Omega_t} \rho(x,t) d\Omega_t$$

Jeżeli rozważymy dowolny podobszar ω_t wewnątrz Ω_t, to odpowiadająca temu podobszarowi masa m_ω powinna pozostać stała. Można zatem zapisać zależność:

$$\frac{d\rho}{dt} + div(\rho v) = 0$$

Równanie to jest ogólną formą warunku ciągłości. Jeżeli materiał jest nieściśliwy, to znaczy jego gęstość jest stała, warunek ten upraszcza się do:

$$div(v) = 0$$

21 Zasada pracy wirtualnej

Rozważamy problem mechaniczny w obszarze Ω z warunkami brzegowymi na powierzchni Γ. Zasada pracy wirtualnej mółi, że dla pola naprężeń pozostającego w równowadze wewnątrz bryły i z przyłożonymi siłami zewnętrznymi, praca wewnątrz bryły jest równa pracy sił zewnętrznych przyłożonych na brzegu obszaru dla każdego pola przyrostów przemieszczeń, które jest ciągłe i różniczkowalne:

$$\int_{\Omega} \sigma \delta \varepsilon d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma n \delta u d\Gamma + \int_{\Omega} \rho g \delta u d\Omega$$

Zasada pracy wirtualnej jest podstawą sformułowania wariacyjnego w rozwiązaniu metodą elementów skończonych. Sformułowanie całkowe jest bardzo wygodne dla rozwiązania tą metodą, przede wszystkim ze względu na ogólną dostępność różnorodnych metod optymalizacji wykorzystywanych przy poszukiwaniu minimum tego wyrażenia.

Zasada pracy wirtualnej jest całkowym odpowiednikiem różniczkowych cząstkowych równań równowagi lub równań ruchu.

22 Problemy wyznaczania σ_p i analiza odwrotna

Najczęściej spotykane zakłócenia

- nierównomierność odkształceń,
- nierównomierność naprężeń, wynikająca z wpływu tarcia,
- nierównomierność temperatury

Występujące we wszystkich rodzajach prób plastometrycznych zakłócenia powodują, że naukowcy ciągle poszukują metod wyeliminowania tych zakłóceń, pozwalających na wyznaczenie naprężenia uplastyczniającego σ_p jako właściwości materiału która nie zależy od rodzaju próby, wymiarów próbki, warunków tarcia itp.

Ze względu na dominującą rolę tarcia w procesach przetwórstwa opracowanie dokładnego modelu tarcia jest ważne dla prawidłowości symulacji. Niezależnie od wykorzystanej próby plastometrycznej i zastosowania modelu reologicznego, algorytm składa się z trzech części:

- doświadczenie - wyniki pomiarów w próbach plastometrycznych są danymi wejściowymi dla rozwiązania odwrotnego
- symulacja - doświadczenie z zastosowaniem rozwiązani wprost, zwykle MES
- optymalizacja - minimalizacja funkcji celu w analizie odwrotnej.

23 Równanie kinetyki przemiany

Równanie różniczkowe kinetyki przemiany ma postać:

$$\frac{dX_f}{dt} = a_f(SIG^3)^{0.25}\left[\ln\left(\frac{1}{1-X_f}\right)\right]^{0.75}(1-X_f$$

gdzie X_f - ułamek objętości w której zaszła przemiana ferrytyczne, I - prędkość zarodkowania, G - prędkość przemiany, S - względna powierzchnia ziarna.

Drugi mechanizm przemiany, odpowiadający wysyceniu miejsc zarodkowania jest opisany równaniem:

$$\frac{dX_f}{dt} = k_f = \frac{6}{D_\gamma}G(1-X_f)$$

gdzie D_γ - wielkość ziarna austenitu, k_f - stała materiałowa obliczana z zależności Arheniusa.

23.1 Modelowanie przemiany w zmiennej temperaturze

Gdy lokalna temperatura spada poniżej A_{C3} rozpoczyna się symulacja przemiany austenit-ferryt według pierwszego równania. Kiedy wartość pochodnej obliczona z rownania drugiego staje się większa od określonej równaniem pierwszym, dalszy przebieg przemiany jest obliczany drugim równaniem.

24 Próby plastometryczne

Podstawowe próby plastometryczne:

- **statyczna próba rozciągania** - rozciąga się odpowiednio wykonany pręt o przekroju okrągłym wykorzystując urządzenie zwane zrywarką. W czasie próby rejestruje się zależność przyrostu długości próbki od wielkości siły rozciągającej oraz rejestruje się granicę sprężystości, przewężenie próbki i siłę zrywającą próbkę.

25 Model zmiennej wewnętrznej dyslokacji

U podstaw budowy modelu leży zależność oporu odkształcenia od gęstości defektów sieci krystalicznej, głównie dyslokacji. Powszechnie stosowana zależność ma postać:

$$\sigma_p = \sigma_0 + \alpha b G\sqrt{\rho}$$

gdzie σ_p - naprężenie uplastyczniające, σ_0 - naprężenie początkowe, b - wektor Burgersa, G - moduł sprężystości na ścinanie, ρ - średnia gęstość dyslokacji.

Aby symulacja była prawidłowa ρ nie powinno być stałe, lecz powinna być uwzględniona funkcja rozkładu gęstości dyslokacji.

26 Warunki brzegowe

Jest dość oczywiste, że równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych posiada nie jedno rozwiązanie. Na ogół nie jest możliwe podać ogólne rozwiązanie takiego równania. Tak więc będziemy szukać rozwiązania równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych, które spełniają specjalne warunki brzegowe. Przytoczmy kilka przykładów. Niech będzie zadany obszar $\Omega \subset R^n$ oraz funkcje f, u_0, u_1 i φ. Warunki brzegowe:

- **I rodzaju** (Dirichleta) - jest przyjmowany, jeśli całyu przeg lub jego część posiada znaną temperaturę określoną poprzez znaną, zależną od czasu funkcję $f(t)$:

$$T(x,t) = f(t); x \in \Gamma_D$$

- **II rodzaju** (Neumanna) - przyjmowany gdy znana jest funkcja określająca natężenie strumienia cieplnego na brzegu obszaru:

$$k\nabla T(x,t) \times n = q(t); x \in \Gamma_N$$

- **III rodzaju** (Fouriera - przyjmowany, gdy następuje swobodny, niczym nie skrępowany przepływ ciepła przez powierzchnię brzegową obszaru:

$$k\nabla T(x,t) \times n = \alpha(t)[T(x,t) - T_a(t)]$$

27 Równanie różniczkowe do całkowego