Κεφάλαιο 4

Αβεβαιότητα και σφάλμα μέτρησης

Από την κλασσική αρχαία εποχή που ο Αριστοτέλης θεώρησε τη βεβαιότητα (και αβεβαιότητα) ενός αποτελέσματος ως σήμερα ο χαρακτηρισμός της αβεβαιότητας της μέτρησης είναι ένα θέμα που έχει απασχολήσει τους επιστήμονες. Σήμερα υπάρχουν ερευνητικά κέντρα και οργανισμοί, όπως ο Παγκόσμιος Οργανισμός Μέτρων (International Organization for Standards, ISO), που αναπτύσσουν μεθοδολογίες για τον καθορισμό μέτρων και σταθμών καθώς και τον καθορισμό της αβεβαιότητας των μετρήσεων.

Κάθε φορά που προσπαθούμε να ποσοτικοποιήσουμε μια φυσική διαδικασία, εμφανίζεται η **αβεβαιότητα** που μπορεί να σχετίζεται με το μοντέλο και την προσομοίωση στον υπολογιστή που υποθέτουμε για τη διαδικασία, όπως επίσης και με τη μέτρηση της διαδικασίας. Αντίστοιχα έχουμε λοιπόν την **αβεβαιότητα του μοντέλου ή / και της προσομοίωσης** (model or simulation uncertainty) και την **αβεβαιότητα της μέτρησης** (measurement uncertainty). Ο πρώτος τύπος αβεβαιότητας είναι δύσκολο να προσδιοριστεί αφού η πραγματική φυσική διαδικασία μας είναι άγνωστη και δεν υπάρχουν διεθνώς αναγνωρισμένα μέτρα (standards) για αυτόν τον τύπο αβεβαιότητας. Για παράδειγμα η αβεβαιότητα του μοντέλου εμφανίζεται όταν υποθέτουμε ένα απλουστευμένο μαθηματικό μοντέλο για μια φυσική διαδικασία που περιέχει παράγοντες που δεν έχουμε συμπεριλάβει στο μοντέλο. Σε αυτόν τον τύπο αβεβαιότητας θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και την *υπολογιστική (αριθμητική) αβεβαιότητα* (numerical uncertainty) που αναφέρεται στην αριθμητική επίλυση μαθηματικών εξισώσεων. Ο δεύτερος τύπος αβεβαιότητας που αναφέρεται στο πείραμα και τη μέτρηση μπορεί πιο εύκολα να προσδιοριστεί και να προτυποποιηθεί.

Σχετικά με την ονοματολογία για την αβεβαιότητα, στη βιβλιογραφία συνήθως γίνεται διαχωρισμός της αβεβαιότητας και του **σφάλματος** (error) και αυτό θα ακολουθήσουμε εδώ. Θα δεχτούμε ότι η αβεβαιότητα του μοντέλου εκφράζει την εν δυνάμει ανεπάρκεια του μοντέλου λόγω έλλειψης γνώσης για τη διαδικασία που μελετάμε, ενώ το **σφάλμα του μοντέλου** (modeling error) είναι η αναγνωρισμένη ανεπάρκεια που δίνει το μοντέλο όταν το εφαρμόζουμε στην πράξη. Αντίστοιχα, το **σφάλμα μέτρησης** (measurement error) είναι η διαφορά πραγματικής και παρατηρούμενης τιμής ενώ η αβεβαιότητα μέτρησης είναι η εκτίμηση για το σφάλμα μέτρησης, που ορίζει ένα σύνολο δυνατών τιμών για το σφάλμα για μια συγκεκριμένη μέτρηση. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την αβεβαιότητα στη μέτρηση και στα επόμενα κεφάλαια θα συζητήσουμε την αβεβαιότητα στο μοντέλο όταν θα μελετήσουμε μοντέλα για φυσικές διαδικασίες διαφόρων μορφών.

4.1 Συστηματικά και τυχαία σφάλματα

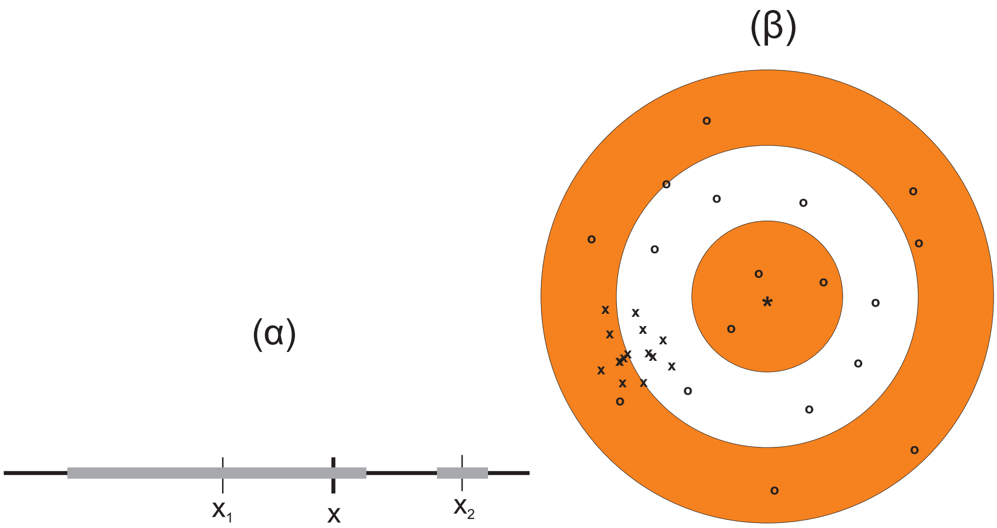
Το αποτέλεσμα της μέτρησης ενός φυσικού μεγέθους είναι κατά κανόνα ακαθόριστο σε μικρό ή μεγάλο βαθμό, δηλαδή αν επαναλάβουμε τη μέτρηση δε θα πάρουμε ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα. Ακόμα και αν επαναλάβουμε ένα πείραμα διατηρώντας τις ίδιες ακριβώς συνθήκες, κάποιος παράγοντας που δεν ελέγχουμε μπορεί να επηρεάζει λίγο ή πολύ το αποτέλεσμα της μέτρησης. Θα θέλαμε λοιπόν να εκτιμήσουμε τις πειραματικές αυτές αποκλίσεις στη μέτρηση και το πρώτο βήμα είναι να εντοπίσουμε τους διαφορετικούς τύπους σφάλματος μέτρησης.

Οι δύο τύποι σφαλμάτων μέτρησης είναι τα **συστηματικά σφάλματα** (systematic errors) και τα **τυχαία σφάλματα** (random errors) που προσδίδουν και αντίστοιχα χαρακτηριστικά στις μετρήσεις.

- Τα συστηματικά σφάλματα επαναλαμβάνονται και υπάρχει κάποιο αίτιο που τα δημιουργεί. Πολλές φορές είναι δύσκολο να εντοπισθούν αλλά μπορούν να εξουδετερωθούν με κατάλληλη *βαθμονόμηση* (calibration), συγκρίνοντας με κάποιον τρόπο μετρήσεις και πραγματικές τιμές. Τα συστηματικά σφάλματα ορίζουν την **ακρίβεια (ορθότητα)** (accuracy) της μέτρησης, δηλαδή κατά πόσο οι μετρήσεις είναι κοντά στις πραγματικές τιμές ή υπάρχουν συστηματικές αποκλίσεις. Με αναφορά στην εκτίμηση παραμέτρων τα συστηματικά σφάλματα συνδέονται με τη μεροληψία (bias), όπου η εκτίμηση του μεγέθους (ή παραμέτρου) δεν είναι ίδια με την πραγματική τιμή του μεγέθους.

- Τα τυχαία σφάλματα δεν επαναλαμβάνονται με το πείραμα αλλά αντιπροσωπεύουν την τυχαιότητα που χαρακτηρίζει το μέγεθος που μετράμε. Για αυτό και αυτού του τύπου τα σφάλματα δε μπορούν να απαλειφθούν. Τα τυχαία σφάλματα ορίζουν την **ακρίβεια επανάληψης** (precision) της μέτρησης, δηλαδή το μέγεθος της μεταβολής των τιμών μέτρησης σε κάθε επανάληψη της μέτρησης (για τις ίδιες συνθήκες του πειράματος).

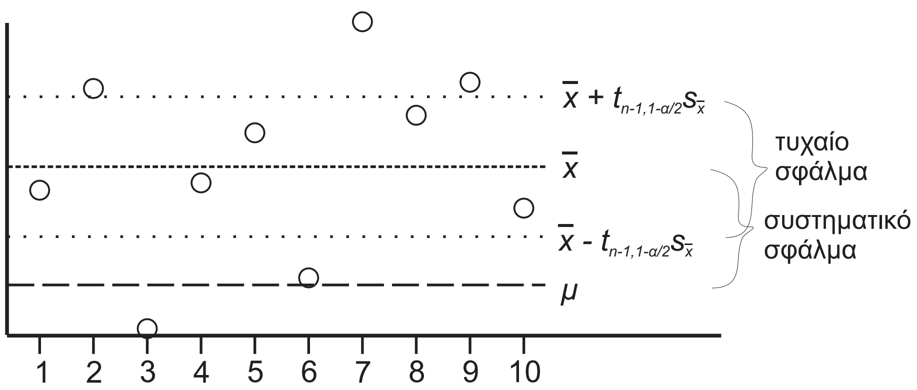
Η ορθότητα και η ακρίβεια επανάληψης της μέτρησης δίνονται σχηματικά στο Σχήμα 4.1α και Σχήμα 4.1β σε μια και σε δύο διαστάσεις αντίστοιχα. Στο



Σχήμα 4.1: Σχηματική παράσταση της ορθότητας και ακρίβειας επανάληψης της μέτρησης σε μια διάσταση στο (α) και σε δύο διαστάσεις στο (β). Στο (α) για το μέγεθος x η μέτρηση x_1 έχει μεγάλο τυχαίο σφάλμα ενώ η μέτρηση x_2 έχει μεγάλο συστηματικό σφάλμα. Στο (β) αντίστοιχα το μέγεθος x είναι στο κέντρο των κύκλων ενώ η μέτρηση με μεγάλο τυχαίο σφάλμα δίνεται με ανοιχτούς κύκλους και με συστηματικό σφάλμα με σύμβολα 'x'.

Σχήμα 4.1α διαγράφονται τα σφάλματα δύο μετρήσεων x_1 και x_2. Η πρώτη μέτρηση x_1 έχει μεγάλο τυχαίο σφάλμα (μικρή ακρίβεια επανάληψης) που καλύπτει το συστηματικό σφάλμα. Η δεύτερη μέτρηση x_2 έχει μικρό τυχαίο σφάλμα που αναδεικνύει μεγάλο συστηματικό σφάλμα (μικρή ορθότητα ή μεγάλη μεροληψία). Τα ίδια χαρακτηριστικά δίνονται στο Σχήμα 4.1β σε δύο διαστάσεις, όπου για μεγάλο τυχαίο σφάλμα οι μετρήσεις είναι διάσπαρτες (ανοιχτοί κύκλοι) γύρω από την πραγματική τιμή στο κέντρο των κύκλων. Αν υποθέσουμε πως το Σχήμα 4.1β απεικονίζει έναν πίνακα σκοποβολής, τότε οι ανοιχτοί κύκλοι δηλώνουν έναν μάλλον άστοχο σκοπευτή. Στη δεύτερη περίπτωση, το συστηματικό σφάλμα είναι μεγάλο και το τυχαίο σφάλμα μικρό και οι μετρήσεις μαζεύονται όχι όμως γύρω από το κέντρο των κύκλων (σύμβολα 'x'). Ο σκοπευτής εδώ είναι ακριβής αλλά σκοπεύει σε λάθος σημείο. Στην πρώτη περίπτωση δε μπορούμε να διορθώσουμε την επιτυχία της σκόπευσης (ενδεχομένως μπορούμε να εκπαιδεύσουμε τον σκοπευτή να σκοπεύει με μεγαλύτερη ακρίβεια αλλά αυτό είναι άλλο θέμα). Στη δεύτερη περίπτωση όμως μπορούμε να εντοπίσουμε το αίτιο της σκόπευσης σε λάθος σημείο, π.χ. λανθασμένος εστίαση του οργάνου σκόπευσης, και να το διορθώσουμε. Αυτή η διαδικασία αναφέρεται ως βαθμοσκόπηση.

Ας δούμε τις έννοιες της ορθότητας μέτρησης και ακρίβειας επανάληψης μέτρησης στην περίπτωση της εκτίμησης της μέσης τιμής ενός μεγέθους, δηλαδή μιας τ.μ. X. Έστω ότι έχουμε 10 παρατηρήσεις (μετρήσεις) της τ.μ. X. Αν υπάρχει συστηματικό σφάλμα στη διαδικασία μέτρησης τότε υπάρχει μεροληψία στην εκτίμηση της μέσης τιμής και η δειγματική μέση τιμή (μέσος όρος των 10 παρατηρήσεων) $\bar{x}$ αποκλίνει από την πραγματική μέση τιμή. Σε αυτήν την περίπτωση το διάστημα εμπιστοσύνης (για κάποιο επίπεδο σημαντικότητας a) μπορεί να μην περιέχει την πραγματική μέση τιμή μ με πιθανότητα μεγαλύτερη του a, όπως στο Σχήμα 4.2. Το εύρος του διαστήματος εμπιστοσύνης καθορίζει σε αυτήν την περίπτωση την ακρίβεια επανάληψης για τη μέση τιμή μ και η απόσταση του $\bar{x}$ από την μ την ορθότητα.



Σχήμα 4.2: Σχηματική παράσταση της ορθότητας (μεροληψίας) και ακρίβειας επανάληψης στην εκτίμηση της μέσης τιμής από 10 παρατηρήσεις.

Αν έχουμε συλλέξει n μετρήσεις μιας τ.μ. X η αβεβαιότητα της μέτρησης είναι η εκτίμηση του σφάλματος μέτρησης που δίνεται από την τυπική απόκλιση s (δες την έκφραση της διασποράς s^2 στην (3.3)). Κάνοντας χρήση της κρίσιμης τιμής από την κατανομή Student και κάτω από προϋποθέσεις (X από κανονική κατανομή ή μεγάλο n), το *όριο της ακρίβειας επανάληψης* (random uncertainty) για κάθε (επόμενη) μέτρηση σε επίπεδο σημαντικότητας a είναι

$$\bar{x} \pm t_{n-1,1-a/2} s.$$

Αντίστοιχα, η αβεβαιότητα για την εκτίμηση της μέσης τιμής μ είναι η εκτίμηση του σταθερού σφάλματος του μέσου όρου $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{n}$ και το όριο της ακρίβειας για τη μέση τιμή είναι σε επίπεδο σημαντικότητας a

$$\bar{x} \pm t_{n-1,1-a/2} s/\sqrt{n}.$$

Παράδειγμα 4.1. Η διαφορά τάσης (voltage difference) V σε έναν αντιστάτη (resistor) μετρήθηκε 10 φορές και έδωσε τις παρακάτω τιμές (σε mV)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_i	123.5	125.3	124.1	123.9	123.7	124.2	123.2	123.7	124.0	123.2

Η μέση διαφορά τάσης υπολογίζεται από τις 10 μετρήσεις ως

$$\bar{V} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} V_i = 123.880 \text{ mV}$$

Υποθέτοντας ότι η διαφορά τάσης V είναι τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή, η αβεβαιότητα για κάθε μέτρηση V_i είναι

$$s_V = \sqrt{\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{n}(V_i - \bar{V})^2} = 0.607 \text{ mV}.$$

και θα έχουμε

$$V_1 = (123.5 \pm 0.6)\text{mV}, \; V_2 = (125.3 \pm 0.6)\text{mV}, \; \ldots, \; V_{10} = (123.2 \pm 0.6)\text{mV}.$$

Η αβεβαιότητα για το $\bar{V}$ είναι

$$s_{\bar{V}} = \frac{s_V}{\sqrt{10}} = 0.192 \text{ mV}$$

και θα έχουμε

$$\bar{V} = (123.880 \pm 0.192) \text{ mV}.$$

Το όριο αβεβαιότητας σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.05$ για κάθε νέα μέτρηση θα είναι

$$\begin{aligned} \bar{V} \pm t_{n-1,1-a/2} s_V &= 123.88 \pm t_{9,0.975} \cdot 0.607 = 123.88 \pm 2.2622 \cdot 0.607 \\ &= 123.88 \pm 1.373 \text{ mV}, \end{aligned}$$

ενώ το όριο αβεβαιότητας για τη μέση τιμή μ είναι το 95% διάστημα εμπιστοσύνης

$$\bar{V} \pm t_{n-1,1-a/2} s_V/\sqrt{n} = 123.88 \pm 2.2622 \cdot 0.607/\sqrt{10} = 123.88 \pm 0.434 \text{ mV}.$$

4.2 Διάδοση σφάλματος μέτρησης

Ας υποθέσουμε τώρα πως έχουμε μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους X που είναι τυχαία μεταβλητή, δηλαδή γνωρίζουμε το X με κάποια αβεβαιότητα σ_X που είναι η τυπική του απόκλιση. Έστω ότι μας ενδιαφέρει ένα άλλο φυσικό μέγεθος Y που δίνεται ως συνάρτηση του X, $Y = f(X)$. Η μεταβολή του Y, $\mathrm{d}Y$, για κάθε μικρή μεταβολή $\mathrm{d}X$ γύρω από κάποια τιμή x δίνεται ως

$$\mathrm{d}Y \simeq \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right)_{X=x} \mathrm{d}X,$$

όπου η προσέγγιση του αναπτύγματος Ταψλορ έγινε μόνο ως την πρώτη τάξη (πρώτη παράγωγο). Θεωρώντας την μεταβολή $\mathrm{d}X = x-\bar{x}$ και $\mathrm{d}Y = y-\bar{y}$, όπου $\bar{x}$ και $\bar{y}$ οι μέσοι όροι των παρατηρήσεων της X και Y αντίστοιχα, παίρνουμε την παρακάτω έκφραση για την αβεβαιότητα στην Y

$$\sigma_Y^2 \simeq \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right)^2_{X=x} \sigma_X^2 \;\Leftrightarrow\; \sigma_Y \simeq \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}\right|_{X=x} \sigma_X. \tag{4.1}$$

Η απόλυτη τιμή χρησιμοποιείται για να δίνει πάντα θετική τιμή στην αβεβαιότητα σ_Y, ακόμα και αν η παράγωγος της f είναι αρνητική.

Η παραπάνω σχέση μπορεί να επεκταθεί και όταν η τ.μ. Y που μας ενδιαφέρει είναι συνάρτηση m παρατηρούμενων τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_m$ και δίνεται ως

$$\sigma_Y^2 \simeq \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X_i}\right)^2_{X_i=x_i} \sigma_{X_i}^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X_i}\right)_{X_i=x_i} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X_j}\right)_{X_j=x_j} \sigma_{X_i,X_j}, \tag{4.2}$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_m$ είναι οι μετρήσεις των $X_1, X_2, \ldots, X_m$ αντίστοιχα και σ_{X_i,X_j} είναι η συνδιασπορά των X_i και X_j. Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται **νόμος διάδοσης των σφαλμάτων** (law of propagation of errors) και δίνει μια εκτίμηση της μέγιστης αβεβαιότητας σ_Y της Y για δεδομένες αβεβαιότητες $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}, \ldots, \sigma_{X_m}$. Αυτός ο νόμος είναι αυστηρά ακριβής όταν η συνάρτηση f είναι γραμμική (η ανάπτυξη της f κατά Taylor συμπίπτει με την ίδια την f). Η f μπορεί να έχει μη-γραμμική μορφή που δεν επιτρέπει καλή προσέγγιση της αβεβαιότητας σ_Y αν δεν επεκταθεί το ανάπτυγμα Taylor σε μεγαλύτερη τάξη.

Όταν οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_m$ είναι ανεξάρτητες, το δεύτερο διπλό άθροισμα στη σχέση (4.2) απαλείφεται αφού οι συνδιασπορές μηδενίζονται και η αβεβαιότητα δίνεται ως

$$\sigma_Y \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X_i}\right)^2_{X_i=x_i} \sigma_{X_i}^2}. \tag{4.3}$$

Ειδικότερα ας θεωρήσουμε ότι η f είναι γραμμική, δηλαδή η Y είναι γραμμικός συνδυασμός των $X_1, X_2, \ldots, X_m$

$$Y = \sum_{i=1}^{m} a_i X_i = a^{\mathrm{T}} X$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_m$ είναι οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού και τα διανύσματα είναι $a = [a_1, a_2, \ldots, a_m]^{\mathrm{T}}$, $X = [X_1, X_2, \ldots, X_m]^{\mathrm{T}}$. Γενικά για συσχετισμένες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_m$, ο πίνακας συνδιασποράς είναι

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1,X_2} & \cdots & \sigma_{X_1,X_m} \\ \sigma_{X_2,X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2,X_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_m,X_1} & \sigma_{X_m,X_2} & \cdots & \sigma_{X_m}^2 \end{bmatrix}.$$

Η διασπορά της Y είναι

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} a_i \sigma_{X_i,X_j} a_j = a^{\mathrm{T}} \Sigma a.$$

Για κάθε δύο διαφορετικές τ.μ. X_i και X_j ο συντελεστής συσχέτισης είναι $\rho_{X_i,X_j} = \sigma_{X_i,X_j}/(\sigma_{X_i}\sigma_{X_j})$ και η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί ως

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{m} a_i \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} a_i a_j \rho_{X_i,X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j}.$$

Όταν οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_m$ είναι ανεξάρτητες η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{m} a_i \sigma_{X_i}^2.$$

Συχνά χρησιμοποιείται ο συμβολισμός ΔX αντί σ_X για την αβεβαιότητα της X. Επίσης χρησιμοποιείται η **σχετική αβεβαιότητα** (relative uncertainty σ_X/X και συχνά σε ποσοστιαίες μονάδες.

Παράδειγμα 4.2. Ένα απλό και πρακτικό παράδειγμα διάδοσης σφάλματος είναι ο νόμος του Ωμ $R = V/I$, όπου μετρώντας την ένταση του ρεύματος I και την τάση V σε έναν αντιστάτη θέλουμε να προσδιορίσουμε την αντίσταση R.

Αν υποθέσουμε ότι οι παρατηρούμενη ένταση και τάση του ρεύματος δίνονται με αβεβαιότητα σ_I και σ_V αντίστοιχα, η αβεβαιότητα σ_R είναι

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{I}\right)^2 + \left(\frac{V}{I^2}\sigma_I\right)^2} = R\sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2}.$$

Σε αυτήν την απλή περίπτωση, η σχετική αβεβαιότητα σ_R/R είναι η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των σχετικών αβεβαιοτήτων της έντασης και τάσης.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

1. Ο συντελεστής αποκατάστασης e (coefficient of restitution) μιας μπάλας, όπου εδώ έχει το νόημα της αναπήδησης, ορίζεται από το λόγο της ταχύτητας μετά την επαφή με την επιφάνεια προς την ταχύτητα πριν την επαφή. Ισοδύναμα ο συντελεστής αποκατάστασης ορίζεται ως $e = \sqrt{h_2/h_1}$, όπου h_1 είναι το ύψος από το οποίο αφήνουμε τη μπάλα και h_2 είναι το ύψος που φτάνει η μπάλα μετά την επαφή με την επιφάνεια (έδαφος).

   (α΄) Αφήνουμε μια μπάλα μπάσκετ από ύψος 100 cm και μετράμε το ύψος που φτάνει μετά την αναπήδηση. Επαναλαμβάνουμε αυτό το πείραμα 5 φορές και βρίσκουμε (σε cm) 60, 54, 58, 60, 56. Για μια σωστά φουσκωμένη μπάλα θα πρέπει ο συντελεστής αναπήδησης να είναι 0.76. Εκτιμήστε την αβεβαιότητα ορθότητας και ακρίβειας επανάληψης για το συντελεστή αναπήδησης για αυτήν τη μπάλα.

   (β΄) Προσομοιώστε $M = 1000$ φορές το παραπάνω πείραμα. Σε κάθε πείραμα δημιουργείστε τις 5 μετρήσεις του ύψους h_2 μετά την αναπήδηση της μπάλας από κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_2 = 58$cm και τυπική απόκλιση $\sigma_2 = 2$cm. Υπολογίστε σε κάθε προσομοίωση το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση του ύψους h_2 καθώς και του συντελεστή αποκατάστασης e. Εξετάστε αν οι τιμές αυτές είναι συνεπείς με τις αναμενόμενες από τη σχέση $e = \sqrt{h_2/h_1}$ για σταθερό $h_1 = 100$cm.

   (γ΄) Αφήνουμε τη μπάλα μπάσκετ 5 φορές από διαφορετικά αρχικά ύψη h_1 και βρίσκουμε τις παρακάτω τιμές (σε cm)

h_1	80	100	90	120	95
h_2	48	60	50	75	56

   Εκτιμήστε την αβεβαιότητα στα δύο ύψη και υπολογίστε την αβεβαιότητα στο συντελεστή αναπήδησης. Αν ο συντελεστής αναπήδησης πρέπει να είναι 0.76, μπορούμε να δεχθούμε ότι η μπάλα είναι κατάλληλα φουσκωμένη;

2. Στη μέτρηση αγροτεμαχίων σε παραλληλεπίπεδο σχήμα μετράμε το μήκος και πλάτος με αβεβαιότητα 5m.

   (α΄) Ποια είναι η αβεβαιότητα στη μέτρηση της επιφάνειας αγροτεμαχίου με μήκος 500m και πλάτος 300m; Για ποια μήκη και πλάτη αυτή η αβεβαιότητα είναι ίδια;

(β΄) Σχηματίστε την αβεβαιότητα ως συνάρτηση του μήκους και πλάτους της έκτασης αγροτεμαχίου.

Βοήθεια (`matlab`*):* Για το σχηματισμό επιφάνειας χρησιμοποίησε την εντολή `surf`.

3. Η ισχύς που εκλύεται (is dissipated) από ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος δίνεται ως $P = VI\cos f$, όπου V και I είναι η ημιτονοειδής τάση και ένταση ρεύματος στο κύκλωμα και f είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των V και I.

(α΄) Θεωρώντας ότι τα V, I και f δε συσχετίζονται υπολογίστε την αβεβαιότητα της ισχύος από τις τιμές των V, I και f και την αβεβαιότητα τους.

(β΄) Θεωρείστε ότι η ακρίβεια των V, I και f δίνεται ως (μέση τιμή και τυπική απόκλιση)

$$\begin{aligned} V &= (77.78 \pm 0.71)\mathrm{V} \\ I &= (1.21 \pm 0.071)\mathrm{A} \\ f &= (0.283 \pm 0.017)\mathrm{rad} \end{aligned}$$

Θεωρώντας κανονική κατανομή για κάθε μια από τις V, I και f, ελέγξετε με $M = 1000$ προσομοιώσεις αν η ισχύς έχει την αναμενόμενη ακρίβεια.

(γ΄) Κάνετε το ίδιο με παραπάνω αλλά θεωρώντας επιπλέον πως η διαφορά φάσης συσχετίζεται με την τάση με συντελεστή συσχέτισης $\rho_{V,f} = 0.5$.

Βοήθεια (`matlab`*):* Για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών από πολυμεταβλητή κανονική κατανομή χρησιμοποίησε την εντολή `mvnrnd`.