8/12/2021

Άσκηση 2

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Christos Skapetis
AEM 9378

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα παραδοτέων

Στην πλατφόρμα του elearning παραδίδεται ένα συμπιεσμένο αρχείο. Αυτό το αρχείο περιέχει την παρούσα αναφορά, τον κώδικα σε matlab και τα figures που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα αναφορά. Στους φακέλους 2.2, 2.3, 2.4 περιέχονται τα scripts (main.m) που χρησιμοποιήθηκαν για την λύση του εκάστοτε ερωτήματος.

Φάκελος 2.2

Η συνάρτηση armijo.m υλοποιεί τον κανόνα Armijo.

Η συνάρτηση f.m υλοποιεί την συνάρτηση που μας δίνεται.

$$f(x, y) = x^3 * e^{-x^2-y^4}$$

Η συνάρτηση gammaOptimal.m βρίσκει το βέλτιστο γ_κ όπως ορίζει ο αλγόριθμος του βιβλίου.

Η συνάρτηση goldenRationMethod.m βρίσκει το ελάχιστο με την μέθοδο της χρυσής τομής όπως υλοποιήθηκε στην $1^η$ άσκηση.

Η συνάρτηση grad.m υλοποιεί το $\nabla f(x, y)$.

Οι συναρτήσεις gradientDescent.m, gradientDescentArmijo.m, gradientDescentFixed.m υλοποιούν την μέθοδο της μεγίστης καθόδου με το βέλτιστο γ_κ, με τον κανόνα Armijo και με σταθερό γ_κ αντίστοιχα.

Φάκελος 2.3

Η συνάρτηση hessianMatrix.m υλοποιεί το υπολογισμού του Εσσιανού Πίνακα.

Οι συναρτήσεις newtonMethod.m, newtonMethodArmijo.m, newtonMethodFixed.m υλοποιούν την μέθοδο του Newton με το βέλτιστο γ_κ, με τον κανόνα Armijo και με σταθερό γ_κ αντίστοιχα.

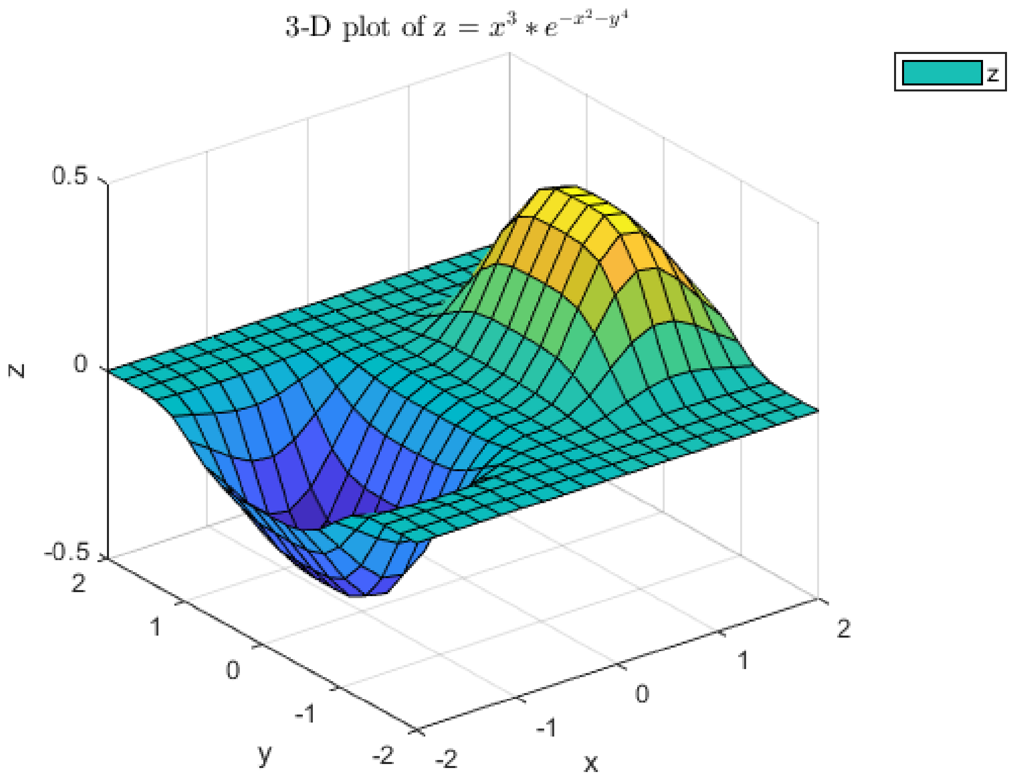
Φάκελος 2.4

Οι συναρτήσεις LevenbergMarquardt.m, LevenbergMarquardtArmijo.m, LevenbergMarquardtFixed.m υλοποιούν την μέθοδο των Levenberg-Marquardt με το βέλτιστο γ_κ, με τον κανόνα Armijo και με σταθερό γ_κ αντίστοιχα.

<u>Παρατήρηση</u>. Συναρτήσεις από προηγούμενους φακέλους είναι απαραίτητοι για τους επόμενους

Θέμα 1

Στο πρώτο θέμα ζητήθηκε να σχεδιαστή η συνάρτηση f για να δοθεί μια γενική εικόνα της μορφής στον τρισδιάστατο χώρο.



Διάγραμμα 1 Απεικόνιση 3D της συνάρτησης f

Η σχεδίαση πραγματοποιήθηκε με την συνάρτηση `surf` του Matlab. Παρατηρούμε πως δεν είναι κυρτή σε όλο το πεδίο ορισμού της καθώς έχει ένα όρος και μια κοιλότητα. Εκ των προτέρων περιμένουμε πως τιμές με θετικά x μεγαλύτερα του 1 θα έχουν σίγουρα λανθασμένο αποτέλεσμα με τους αλγορίθμους μας.

Θέμα 2

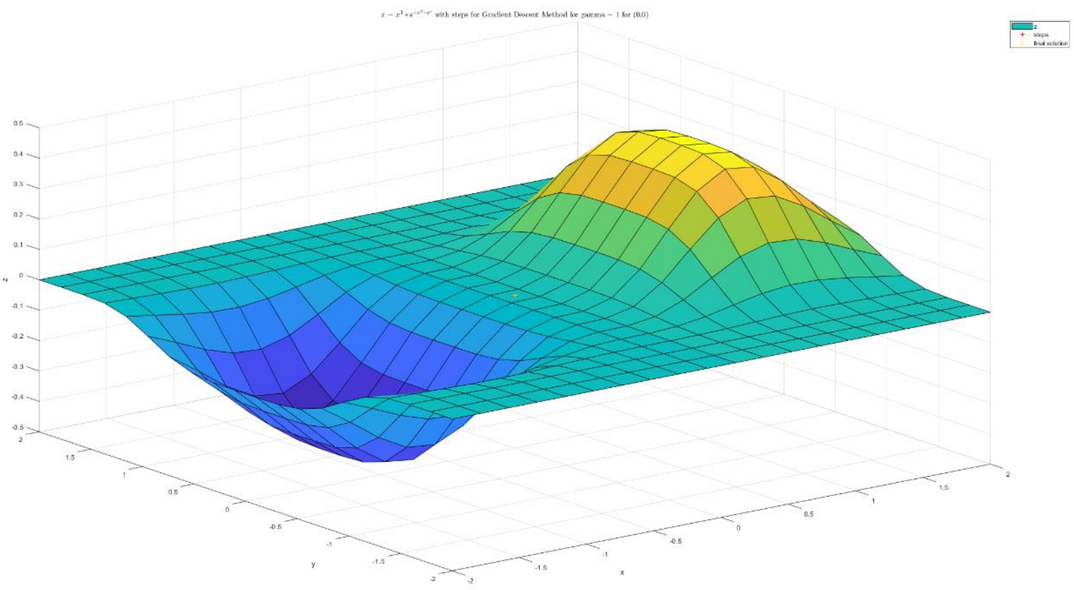
Στο 2ο θέμα ζητήθηκε η ελαχιστοποίηση της f με την χρήση της μεθόδου Μέγιστης Καθόδου, χρησιμοποιώντας ως αρχικά σημεία (x_0, y_0) τα i) (0,0) , ii) (-1,-1) , iii) (1,1) .

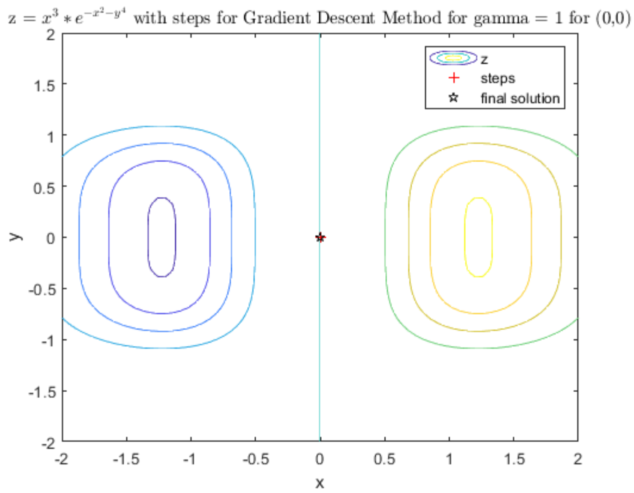
Με το μάτι μπορούμε να εικάσουμε πως με αρχικό σημείο το (0,0) πιθανόν να μην δουλέψουν οι αλγόριθμοί μας καθώς η περιοχή κοντά στο σημείο αυτό είναι επίπεδη. Αντιθέτως, με αρχικό σημείο το (-1,-1) πρέπει οι αλγόριθμοί μας να καταλήξουν μέσα στην κοιλότητα, όπως είναι και επιθυμητό. Τέλος, όπως ειπώθηκε και πιο πριν, στην κλήση του αλγορίθμου με αρχικό σημείο το (1,1) αναμένεται να βγει κάποιο λανθασμένο αποτέλεσμα, δεξιά από το όρος όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα (βλέπε Διάγραμμα 1).

Η επιλογή του βήματος γ_κ θα είναι α) σταθερό (της επιλογής μας), β) τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_\kappa + \gamma_\kappa d_\kappa)$ και γ) βάσει του κανόνα Armijo. Στην περίπτωση α) επιλέχθηκε $\gamma_\kappa = 1$.

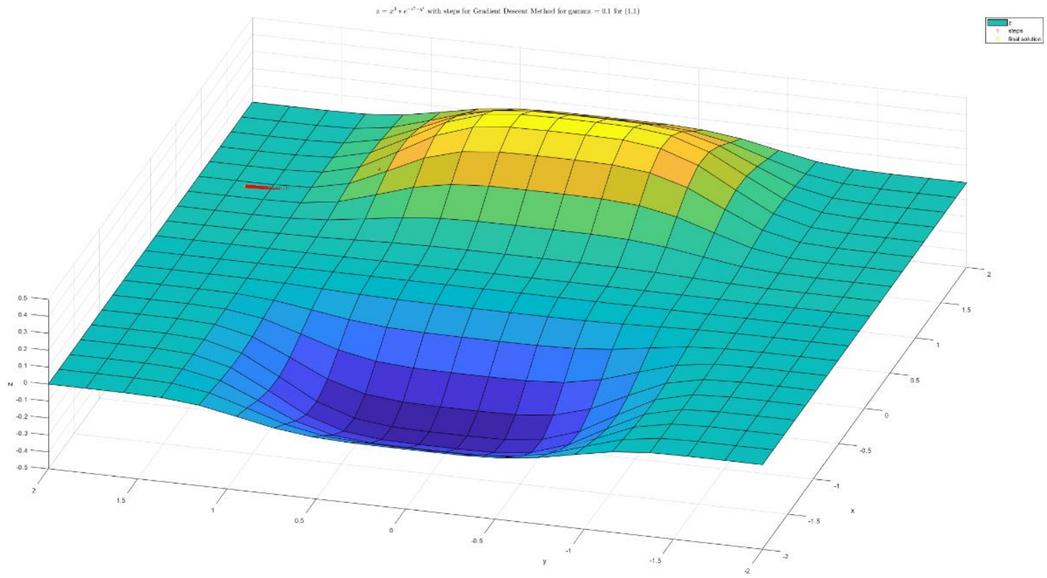
Διαγράμματα

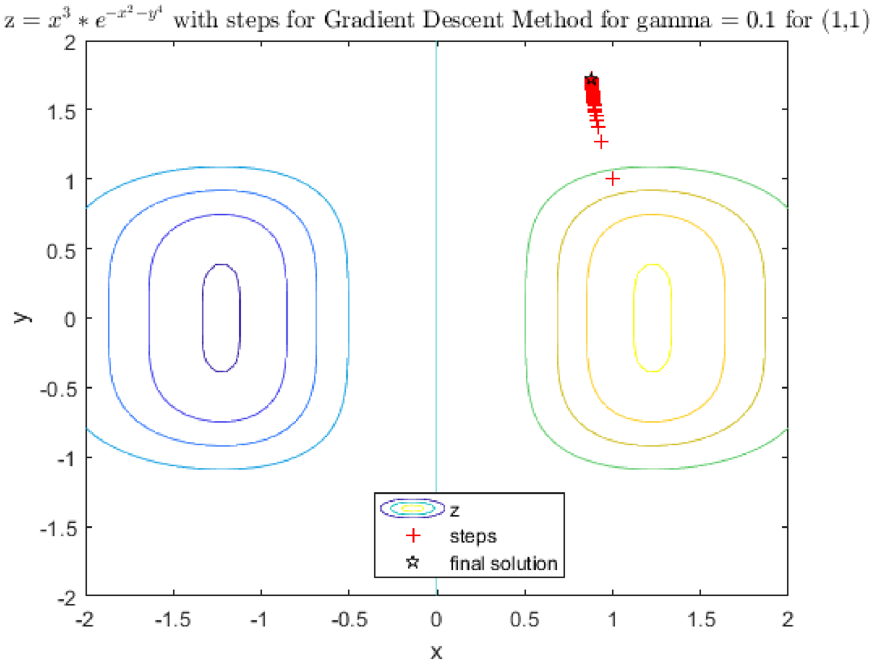
Σταθερό γ_κ



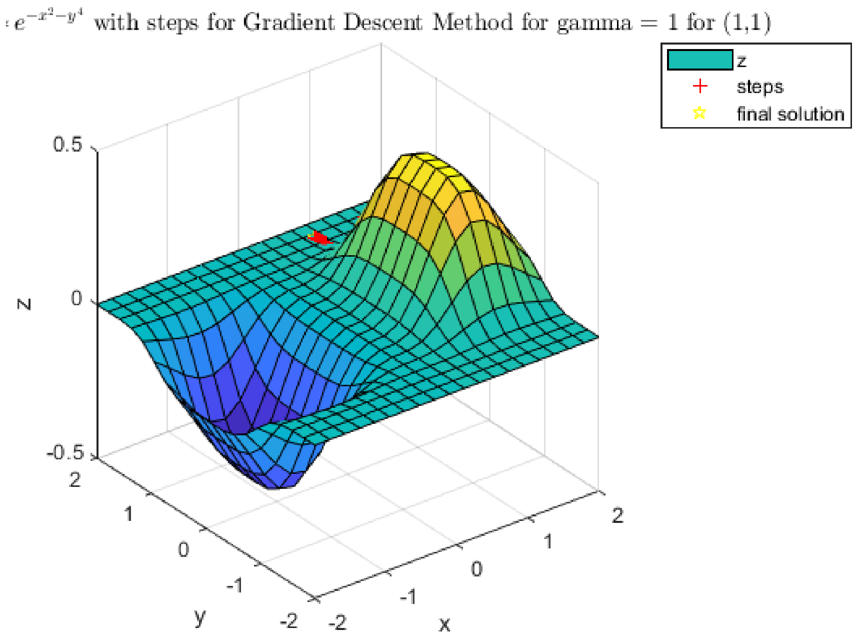


Για αρχικό σημείο (0,0) επιβεβαιώθηκε η υπόθεση ότι δεν θα μετακινηθεί καθόλου ο αλγόριθμος. Οπότε από εδώ και πέρα δεν θα παρουσιαστούν ξανά διαγράμματα για αυτό το αρχικό σημείο.

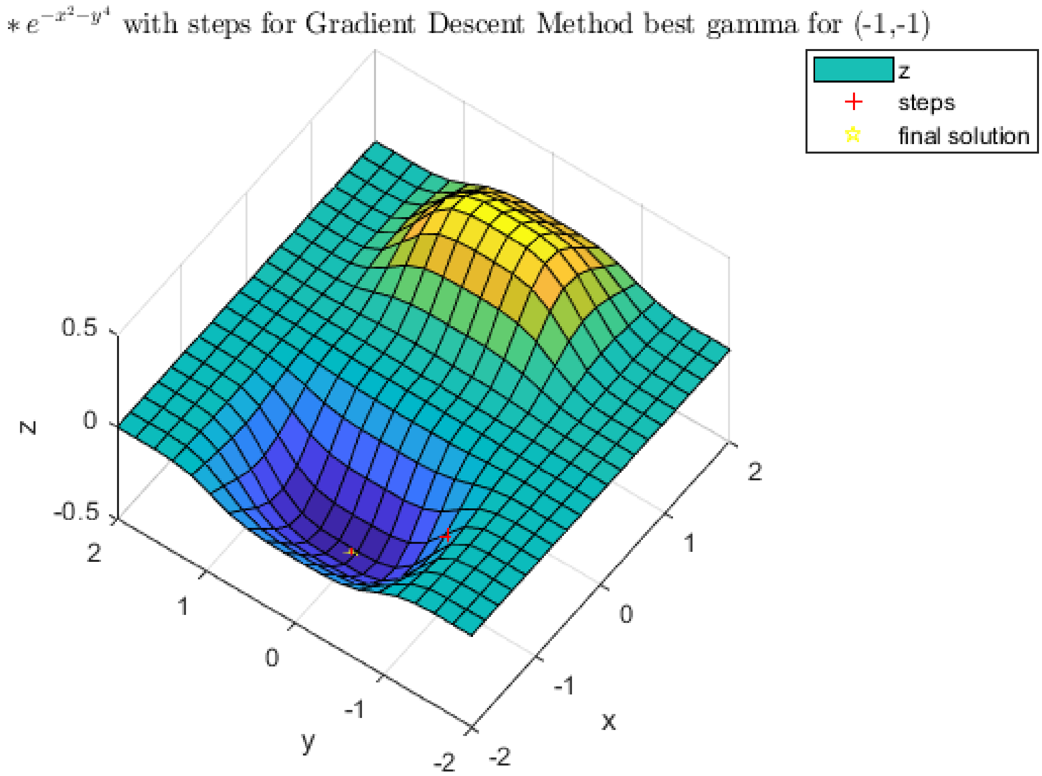


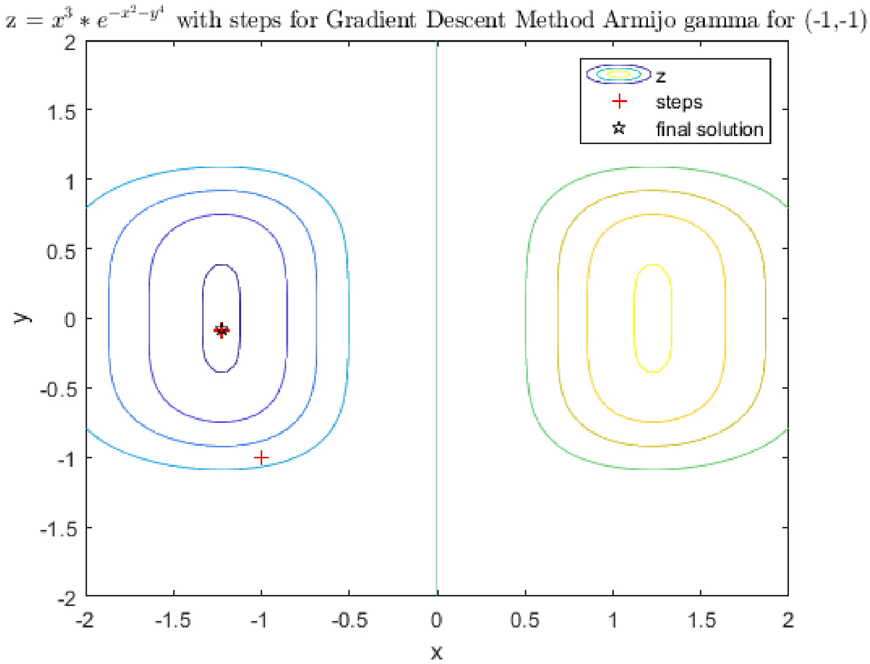


Για αρχικό σημείο (1,1) πάλι δεν κατέληξε ο αλγόριθμος στο επιθυμητό σημείο. Είναι προφανές ότι ο αλγόριθμος βρήκε μια επίπεδη επιφάνεια όπου και σταμάτησε έπειτα από κάποιες επαναλήψεις. Για αυτό το πρώτο πείραμα χρησιμοποιήθηκε μικρό γ=0,1.



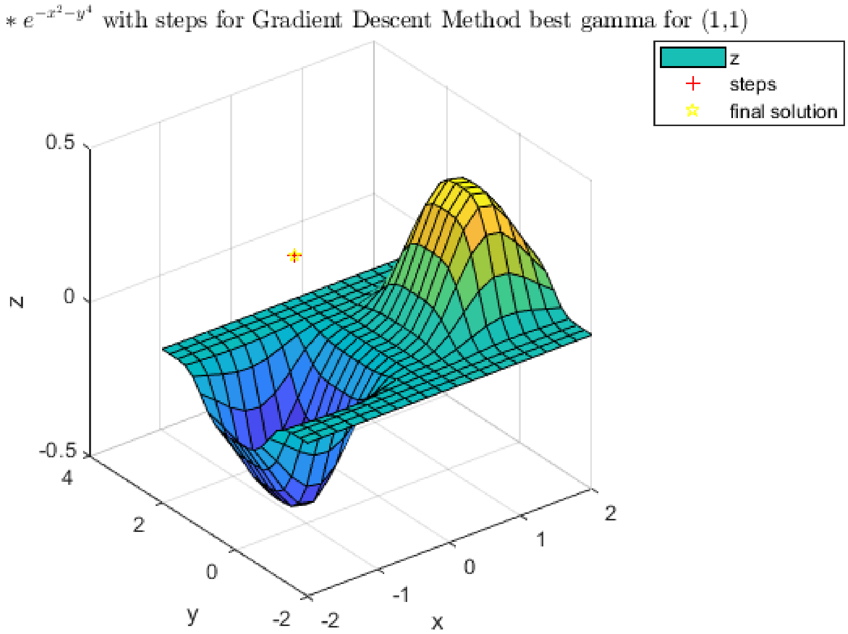
Πραγματοποιήθηκε επανάληψη του πειράματος για γ=1. Αποδείχθηκε ότι παρ’ ότι μεγαλύτερο γ είναι αρκετό για την ολοκλήρωση του αλγορίθμου σε επιθυμητό χρόνο.

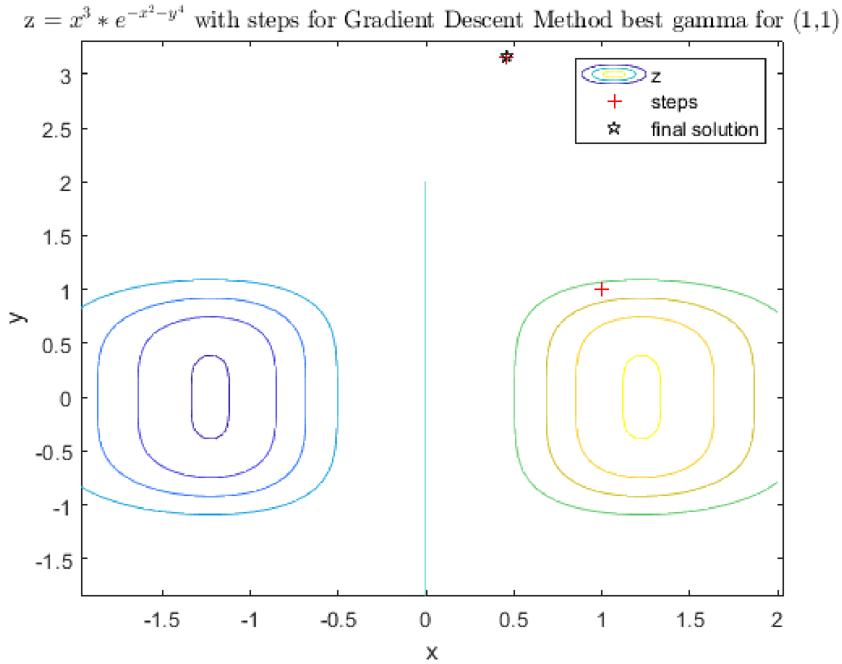




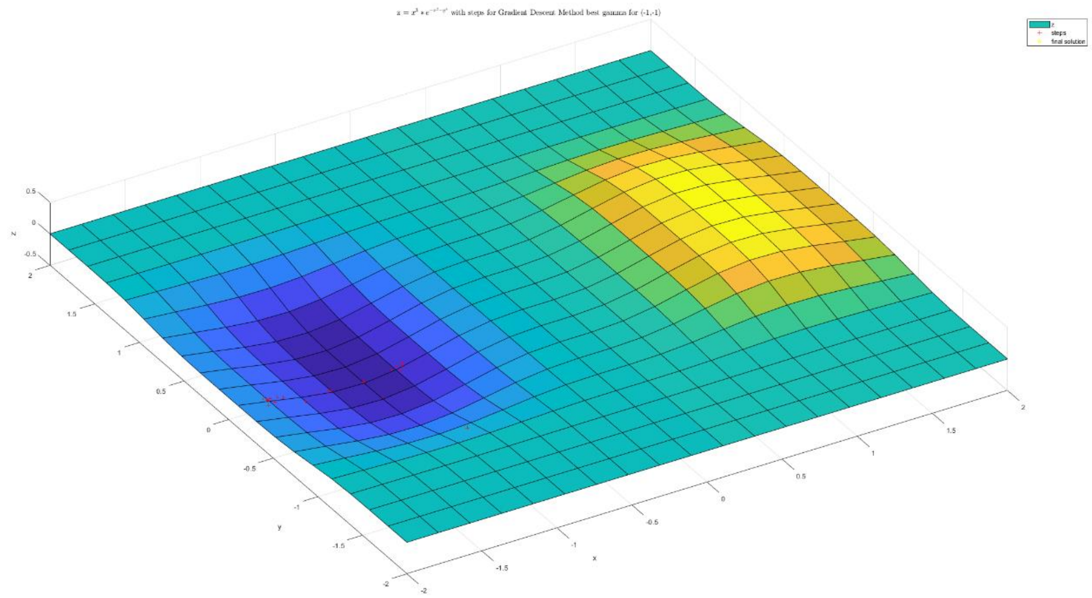
Στον σημείο (-1,-1) πλέον ο αλγόριθμος είναι επιτυχής. Έπειτα από πολύ λίγες επαναλήψεις, οι περισσότερες στο εσωτερικό της κοιλότητας, εντοπίζεται το επιθυμητό σημείο με μεγάλη ακρίβεια.

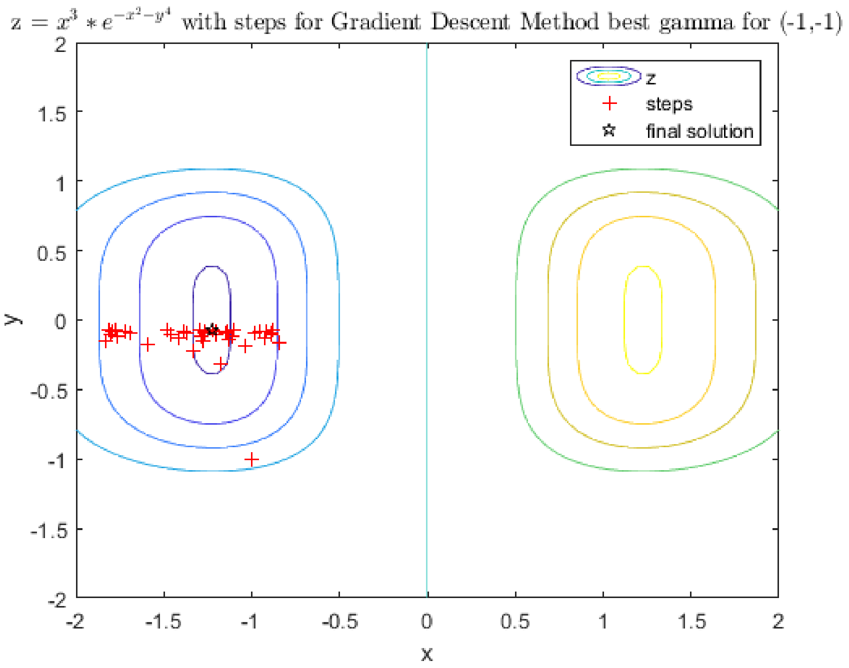
Βέλτιστο γ_κ





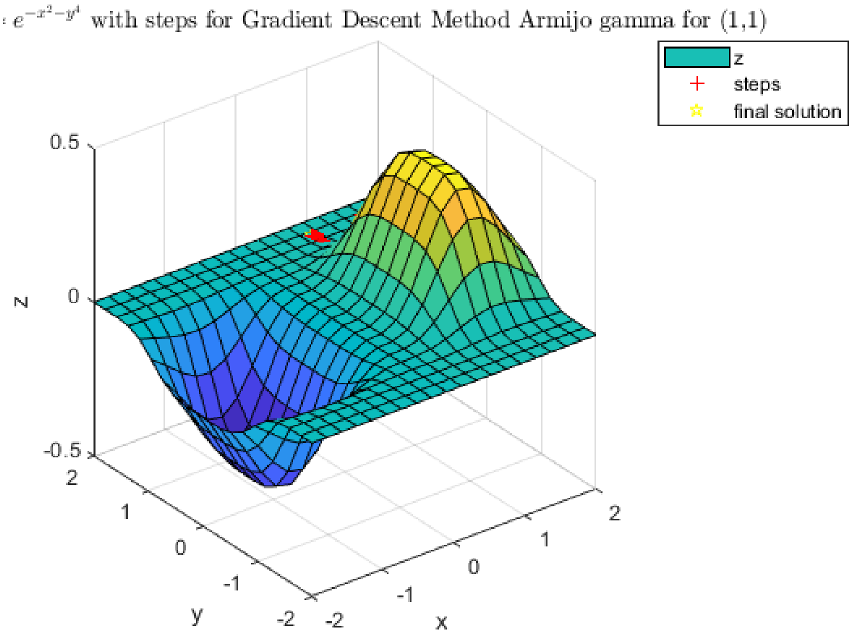
Στην επανάληψη της μεθόδου για βέλτιστο γ από το σημείο (1,1) ο αλγόριθμος τερματίζει ακόμα πιο μακριά στο επίπεδο.

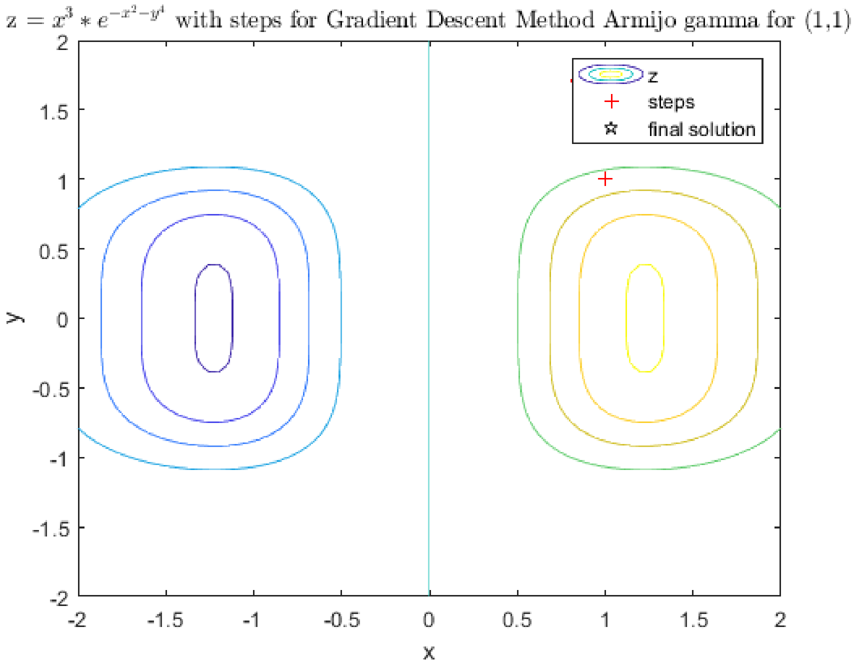




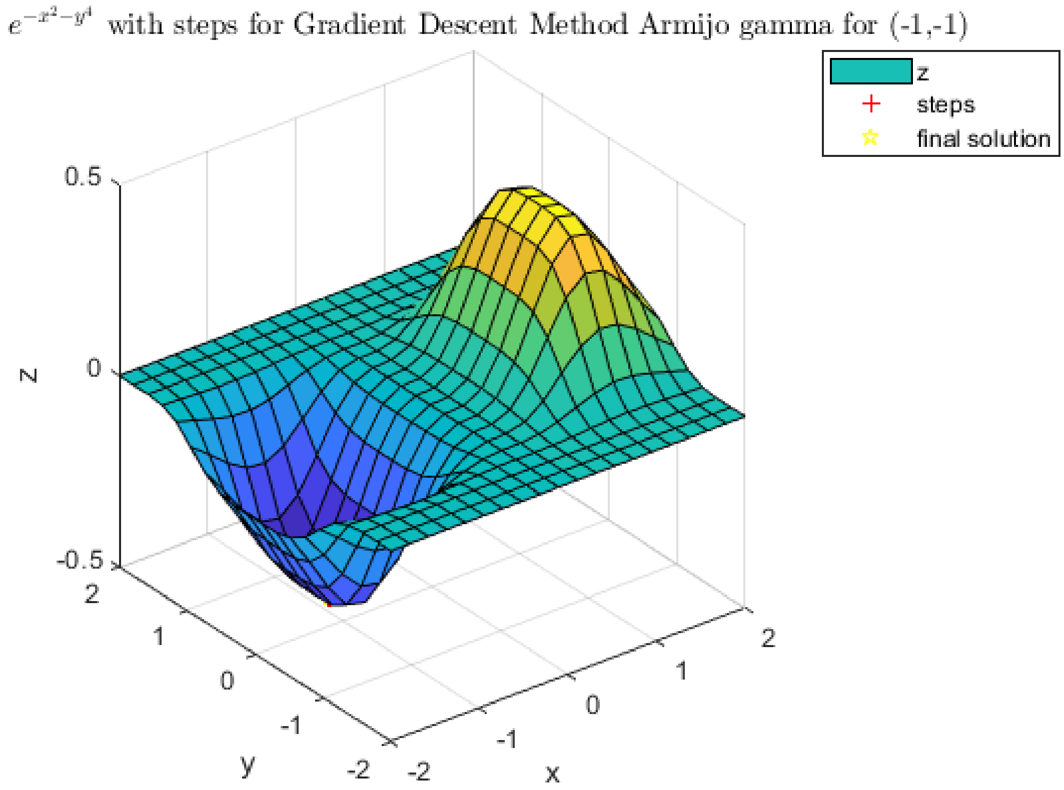
Αντιθέτως από το σημείο (-1,-1) παρατηρούμε σύγκληση στο ελάχιστο.

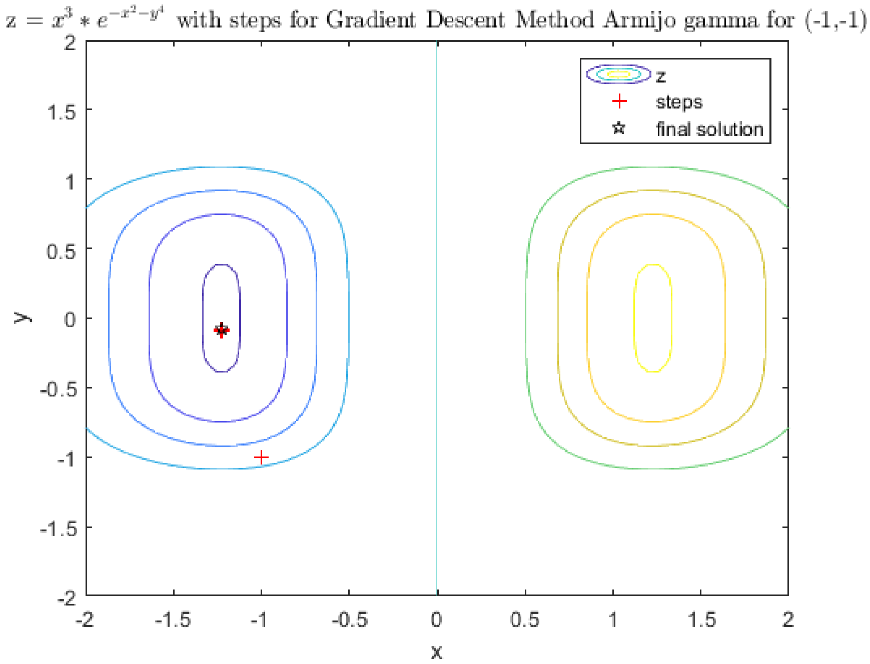
Κανόνας Armijo





Και πάλι παρατηρείτε λανθασμένο αποτέλεσμα από το (1,1) και για αυτό δεν θα ξανά εισαχθούν διαγράμματα σχετικά με αυτό το σημείο.





Παρατηρείται πως με γ επιλεγμένο από την συνάρτηση Armijo η σύγκλιση στο επιθυμητό σημείο είναι τάχιστη.

Θέμα 3

Στο 3ο θέμα ζητήθηκε η ελαχιστοποίηση της f με την χρήση της μεθόδου Newton, χρησιμοποιώντας ξανά τα ίδια αρχικά σημεία (x_0, y_0).

Διαγράμματα

Σταθερό γ_κ

Βέλτιστο γ_κ

Κανόνας Armijo

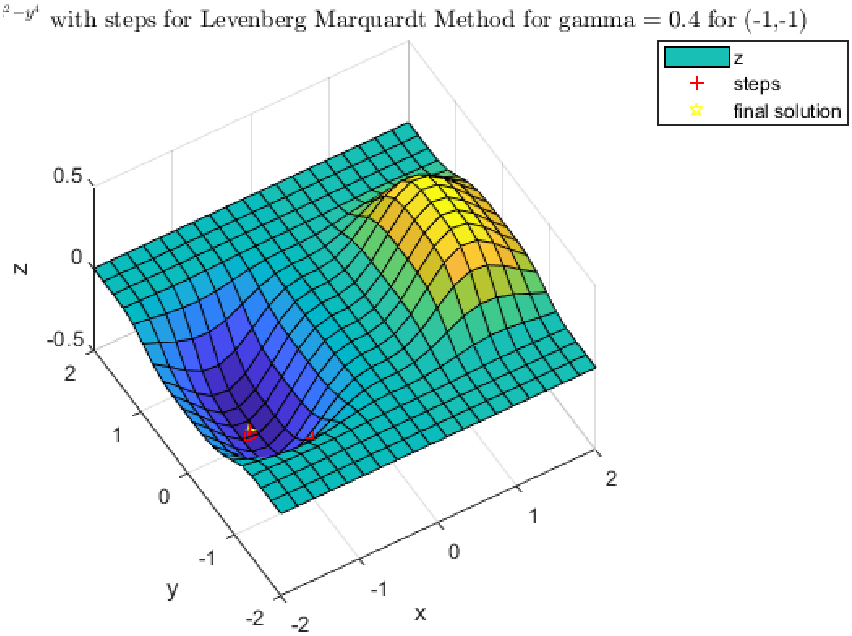
Και στις τρεις περιπτώσεις το πρόβλημα είναι το ίδιο και δεν μας δίνει αποτέλεσμα. Στον αλγόριθμο της μεθόδου αυτής επιθυμούμε τον Εσσιανό πίνακα να είναι θετικά ορισμένο (ή ημιορισμένος). Στην συγκεκριμένη συνάρτηση ο πίνακας δεν είναι ημιορισμένος άρα αδυνατούμε να βγάλουμε αποτέλεσμα. Ωστόσο, ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε.

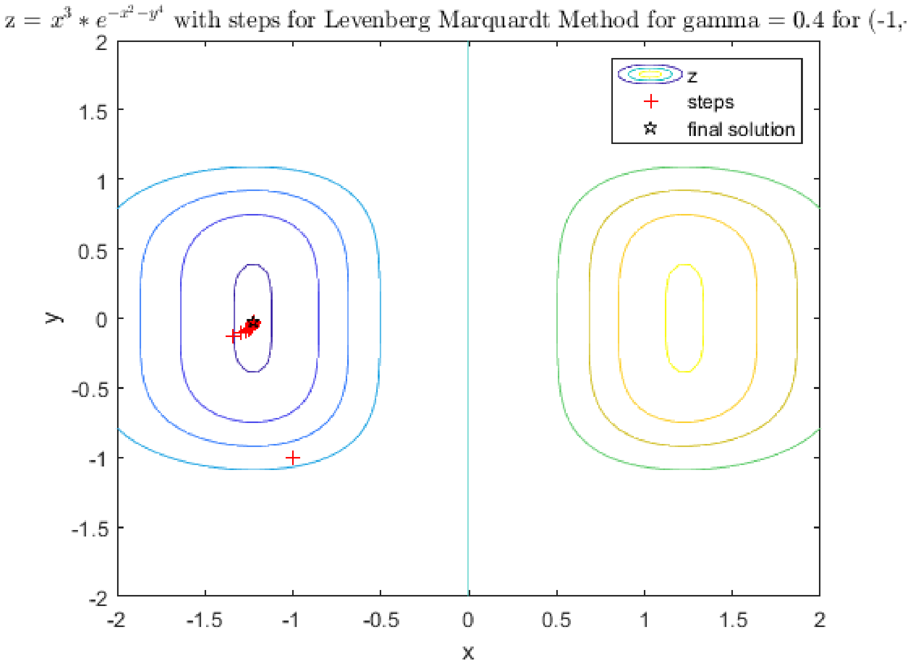
Θέμα 4

Στο 4ο θέμα ζητήθηκε η ελαχιστοποίηση της f με την χρήση της μεθόδου Levenberg-Marquardt, χρησιμοποιώντας ξανά τα ίδια αρχικά σημεία (x_0, y_0).

Διαγράμματα

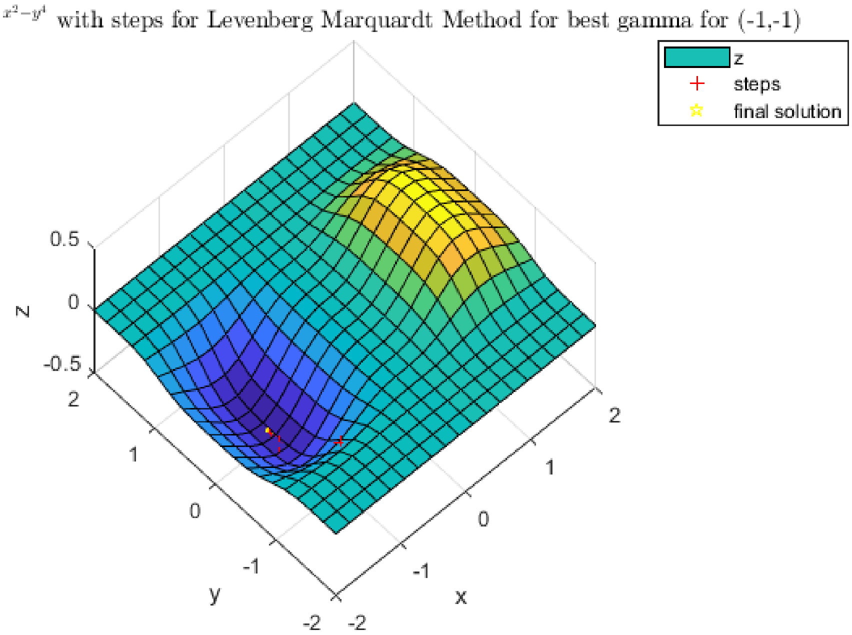
Σταθερό γ_κ

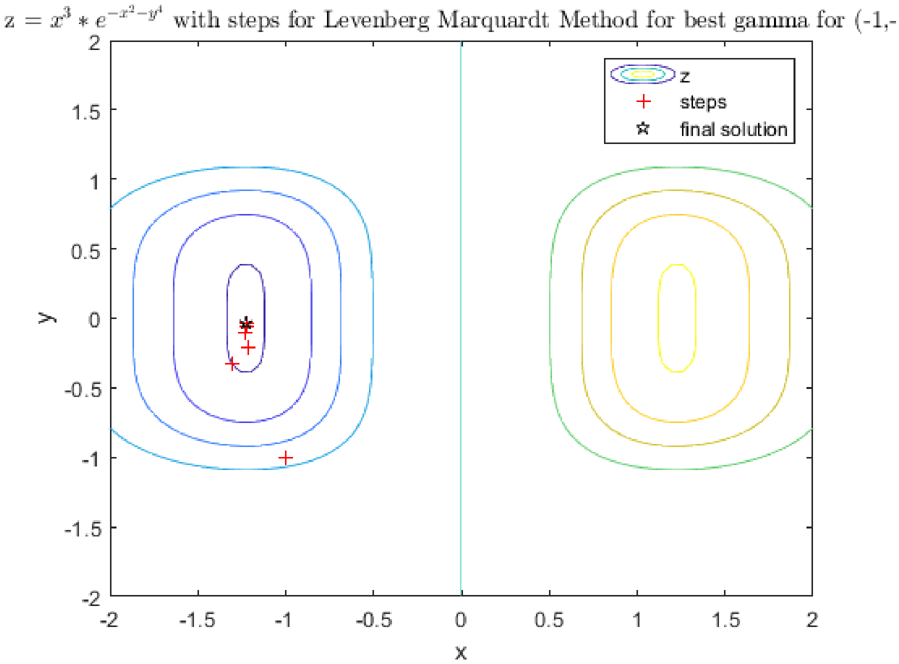




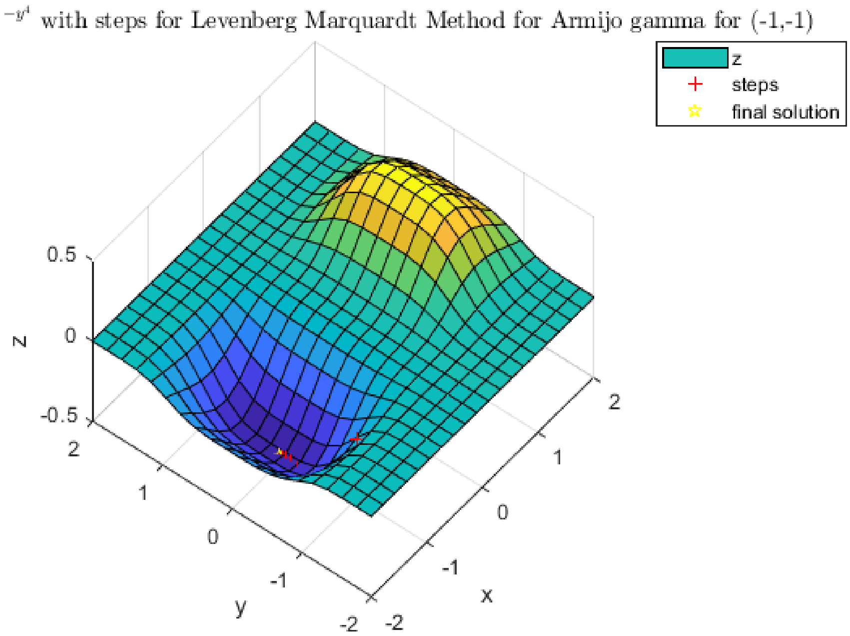
Η μέθοδος Levenberg-Marquardt με σταθερό κ αποδείχθηκε σαφώς πιο γρήγορη από την αντίστοιχη της ελαχίστου καθόδου.

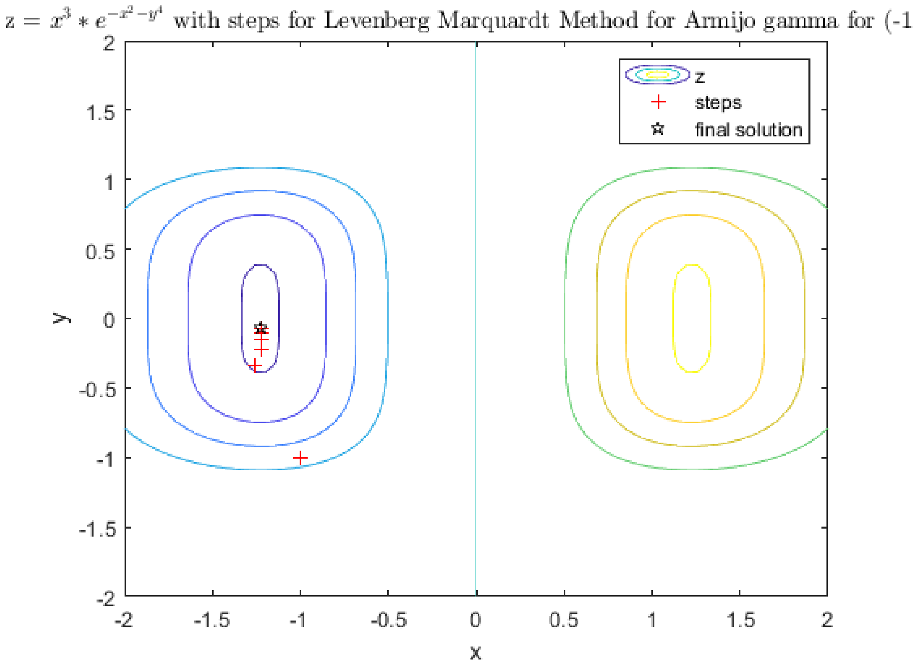
Βέλτιστο γ_κ





Κανόνας Armijo





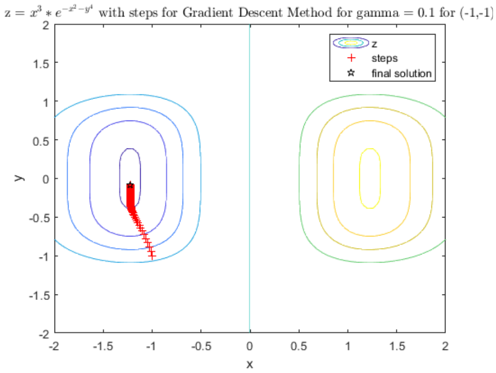
Συμπεράσματα

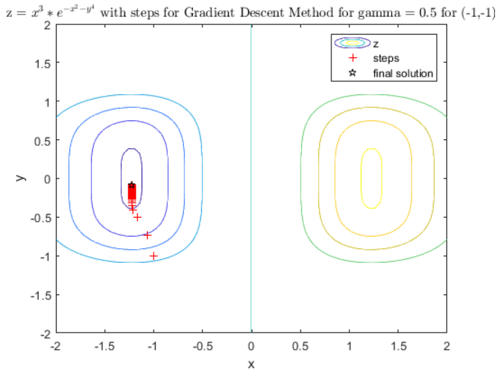
Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου

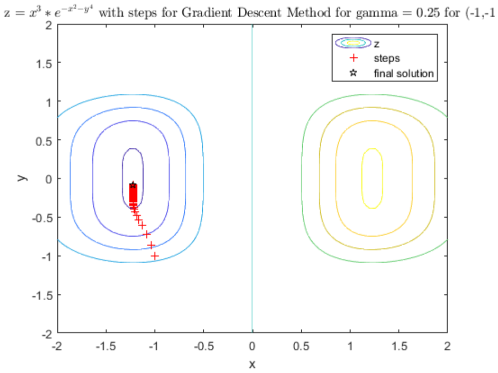
	Σταθερό γ	**Βέλτιστο γ**	**Armijo**
γ_κ	1	-	-
Επαναλήψεις	41	9	9

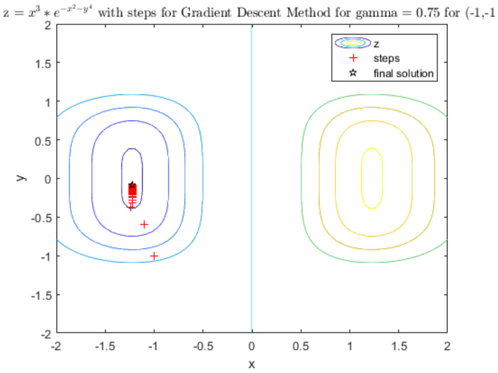
Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου

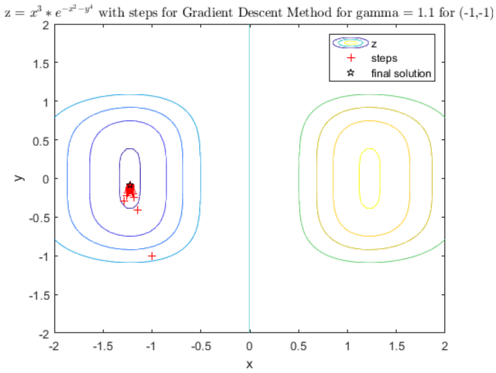
	Σταθερό γ	**Σταθερό γ**	**Σταθερό γ**	**Σταθερό γ**	**Σταθερό γ**	**Σταθερό γ**
γ_κ	0.1	0.25	0.5	0.75	1.1	1.2
Επαναλήψεις	423	168	83	55	37	136





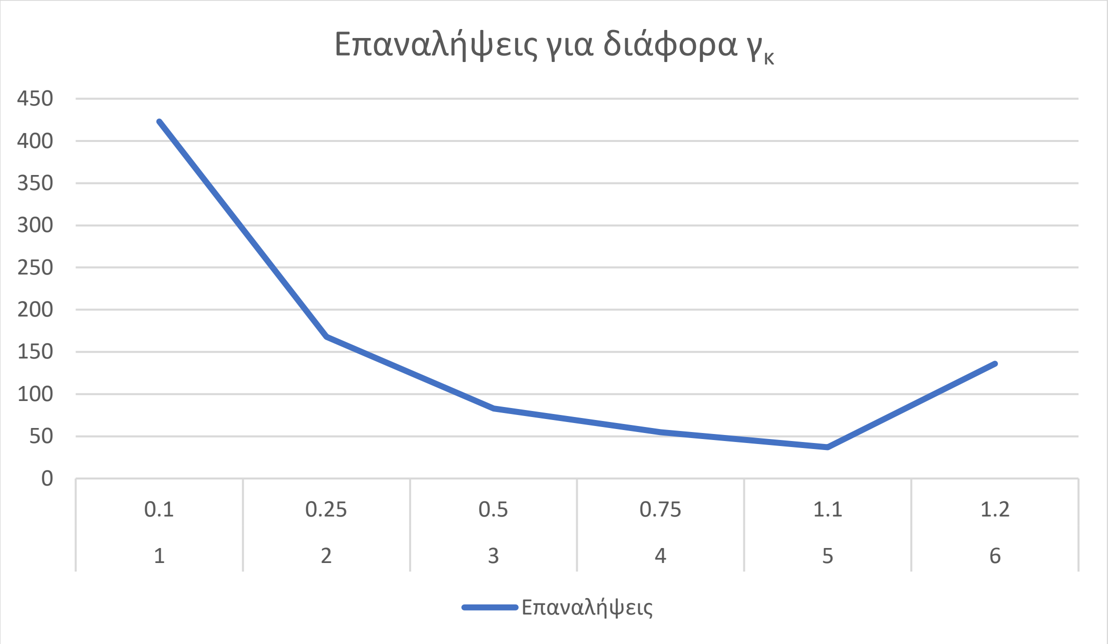






Αρχικά, το πρώτο συμπέρασμα που βγάζουμε είναι πως Βέλτιστο γ και Armijo είναι σχετικά κοντά ενώ σταθερό γ υπολείπεται σημαντικό στον αριθμό των επαναλήψεων. Όσον αφορά την επιλογή του γ από τις διακριτές τιμές που ελήφθησαν το 1.1 είναι η βέλτιστη.

Παρατηρείται ραγδαία επιδείνωση του αλγορίθμου με αύξηση πάνω από το 1.1 ενώ αντιθέτως με μείωση δεν είναι τόσο απότομη η πτώση. Για γ = 1.5 το πρόγραμμα δεν τερμάτισε σε λογικό χρονικό διάστημα. Ωστόσο, όλα έχουν σχετικά την ίδια ακρίβεια.



Μέθοδος Newton

	Σταθερό γ	Βέλτιστο γ	Armijo
$γ_κ$	1	-	-
Επαναλήψεις	-	-	-

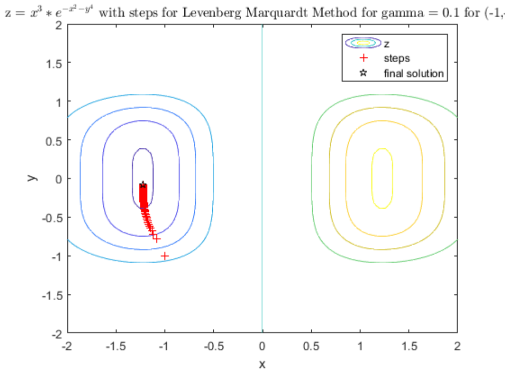
Μέθοδος Levenberg-Marquardt

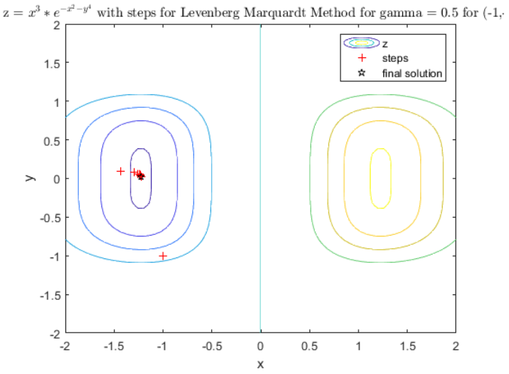
	Σταθερό γ	Βέλτιστο γ	Armijo
$γ_κ$	0.4	-	-
Επαναλήψεις	13	6	6

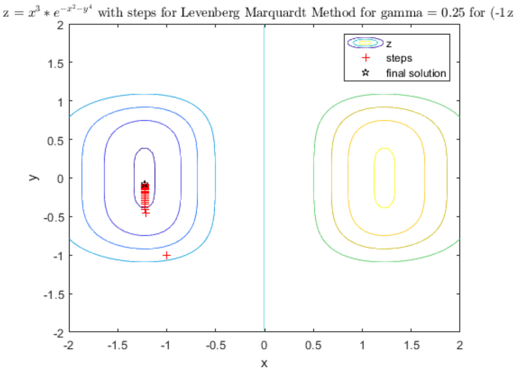
Αντίστοιχα με την πρώτη μέθοδο Armijo και βέλτιστο γ είναι κοντά.

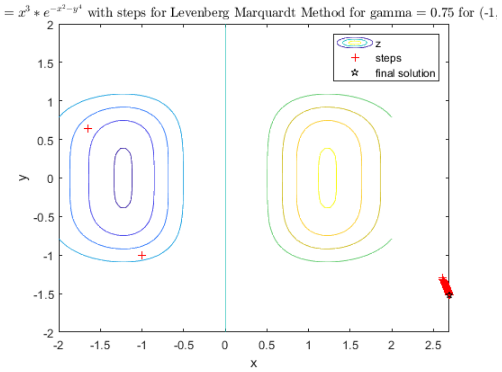
Μέθοδος Levenberg-Marquardt

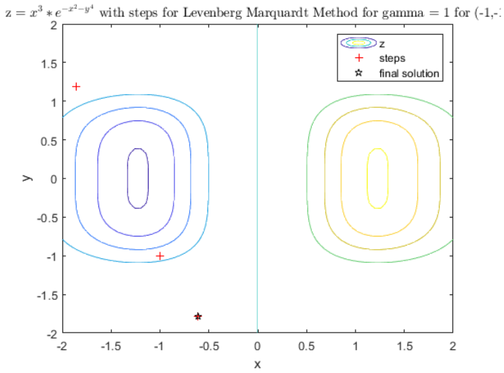
	Σταθερό γ	**Σταθερό γ**	**Σταθερό γ**	**Σταθερό γ**	**Σταθερό γ**
γ_κ	0.1	0.25	0.5	0.75	1
Επαναλήψεις	64	22	10	60	3











Στην Μέθοδο Levenberg-Marquardt το βέλτιστο γ εντοπίζεται κοντά στο 0.5 Και πάλι, παρατηρείται ραγδαία επιδείνωση του αλγορίθμου με αύξηση της τιμής γ. Αυτή την φορά δεν καθυστερεί ο αλγόριθμος αλλά αποτυγχάνει να εντοπίσει την επιθυμητή τιμή. Και για γ=0.75 και για γ=1 μετά από 3 επαναλήψεις ο αλγόριθμος είναι ήδη εξαιρετικά μακριά από τον επιθυμητό χώρο.