

Joudy BENKADDOUR

Master 272

Abdoulaye GAYE

Ingénierie économique et financière

## **Mémoire : Théorème des deux fonds appliqué aux crypto-monnaies**

<b>0. Introduction :</b>	<b>3</b>
0.a Présentation du théorème des 2 fonds	3
0.b Présentation des crypto-monnaies	4
<b>1. La base de données :</b>	<b>6</b>
1.a Construction de la base de données à l'aide de Python	6
1.b Etude des rendements de nos crypto monnaies sur la période de notre base de données:	7
<b>2. Etude des corrélations et de la distribution des rendements :</b>	<b>13</b>
<b>3. Théorème des deux fonds:</b>	<b>19</b>
3.a Hypothèses	19
3.b Frontière efficiente et portefeuille optimal	21
3.c Frontière efficiente et portefeuille optimal avec vente à découvert	24
<b>4. Mise en place d'un indice boursier</b>	<b>25</b>
4.a Construction de l'indice	25
4.b Superposition de la frontière efficiente et de la CML	28
<b>5. Value at Risk</b>	<b>29</b>
5.a Calcul de la VaR pour notre portefeuille optimal	29
5.b Optimisation de la VaR	30
<b>6. Conclusion</b>	<b>32</b>
<b>7. Bibliographie:</b>	<b>34</b>

# 0. Introduction :

## 0.a Présentation du théorème des 2 fonds:

Le théorème des deux fonds provient de la théorie du portefeuille de Harry Markowitz, développée dans les années 1950. En effet, avant l'introduction de cette théorie, la plupart des investisseurs se concentrent sur les rendements de chaque actif pour construire leurs portefeuilles. Markowitz a permis de repenser la théorie de gestion de portefeuilles en introduisant la notion de « corrélations » entre actifs composant le portefeuille. Ce dernier a réussi à démontrer que la performance d'un portefeuille dépend de ses actifs le composant mais aussi, de la relation liant ces actifs. La performance d'un portefeuille est donc fonction de la combinaison de l'ensemble des actifs composant le portefeuille. Ce modèle repose sur deux concepts clés : le rendement espéré du portefeuille et le niveau de risque associé à la variance du portefeuille. Chaque investisseur rationnel donc, va chercher à maximiser le rendement espéré du portefeuille tout en minimisant le risque obtenu.

Nous obtenons donc un programme de maximisation d'une fonction  $F$  dépendant du rendement espéré des investisseurs et du niveau de risque associé. Ce programme dépend avant tout d'une contrainte, qui est la contrainte budgétaire. Le modèle de Markowitz a permis de conclure que la diversification du portefeuille permet de réduire les risques associés à celui-ci. En effet, cette diversification se traduit par un choix d'actifs à corrélation faible, voire négative, de telle sorte que lorsqu'il y a des effets de marché, tout le portefeuille ne se mette pas à tendre vers un seul sens ce qui pourrait minimiser sa perte, en cas de marché baissier par exemple (mais aussi minimiser ses gains en marché haussier).

Le théorème des deux fonds est un résultat de cette théorie de la gestion de portefeuilles de Markowitz. Notons cependant que les hypothèses étaient relativement différentes pour arriver à ce résultat. En effet, dans le programme de maximisation, il a été modifié la contrainte budgétaire, en plus de la part des actifs risqués, nous avons rajouté le fait que les investisseurs devaient détenir une certaine part d'un actif non risqué : un actif qui va donner un rendement, de manière certaine dans une période donnée, et dont la valeur nous est connue actuellement. Pour démontrer ce théorème, seuls deux actifs vont être utilisés : un actif risqué, dont le rendement est inconnu, nous allons donc nous baser sur son rendement espéré et un actif non risqué dont le rendement est lui connu. Ce théorème des deux fonds stipule qu'avec seulement deux actifs, il est possible de répliquer l'ensemble des portefeuilles de différents investisseurs avec pourtant, des niveaux d'aversion aux risques différents. Bien entendu, pour que le théorème des deux fonds soit fonctionnel, celui-ci doit reposer sur quelques hypothèses comme : l'absence de taxes, de frais de transaction, des marchés financiers efficients et des investisseurs rationnels. Il est quand même important de rappeler que ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées dans la vraie vie, nous allons quand même essayer de prouver cela avec les crypto-monnaies. Aussi au cours de notre mémoire nous allons faire en sorte d'être uniquement "long" sur les crypto-monnaies, la vente à découvert n'est pas permise.

## **0.b Présentation des crypto-monnaies:**

Les crypto-monnaies sont des monnaies numériques, qui sont une réponse au système monétaire actuel. Leur arrivée a marqué une nouvelle ère dans la finance. En effet, celles-ci ont permis l'introduction de la finance décentralisée, en concurrence directe avec la finance centralisée. Les crypto-monnaies sont des monnaies numériques utilisant la cryptographie pour sécuriser les transactions. Les crypto-monnaies ont fait leur apparition en 2008, lors de la création du Bitcoin par Satoshi Nakamoto. Depuis, de nombreuses crypto-monnaies ont vu le jour, comme l'Ethereum, le Ripple, le Litecoin avec diverses technologies comme le proof of work ou le proof of stake.

Les crypto-monnaies offrent plusieurs avantages, tels que la rapidité, le faible coût des transactions, qui, de plus, sont très sécurisées, ainsi qu'une certaine forme d'anonymat lors de transactions, séduisant de plus en plus d'investisseurs dans le monde.

Plusieurs études ont examiné la performance des crypto-monnaies dans la gestion de portefeuilles. Certaines études ont prouvé que l'inclusion des crypto-monnaies permettaient d'améliorer le ratio rendement risque du portefeuilles, tandis que d'autres ont infirmé ce modèle, mettant aussi en garde sur la volatilité élevée de ce type d'actifs. Il est cependant important de noter que la recherche sur les crypto-monnaies et la gestion de portefeuille est encore relativement récente et en évolution, et que de nouvelles études et approches pourraient offrir des perspectives supplémentaires sur cette question.

Dans ce mémoire, notre objectif sera donc de mettre en œuvre le théorème des deux fonds sur un portefeuille entièrement composé de crypto-monnaies. Pour composer notre actif risqué, nous allons prendre une composition de crypto-monnaies à base de crypto-monnaies bien établies et reconnues : nous allons prendre les 13 plus grandes crypto-monnaies en terme de capitalisation boursière. Nous allons ainsi relever leurs cours, de manière quotidienne, depuis 2020.

# 1. La base de données :

## 1.a Construction de la base de données à l'aide de Python:

Nous avons préféré avoir une base de donnée mobile que l'on actualise à chaque fois que nous relançons le code avec de nouvelles valeurs plutôt qu'importer une base figée. Pour cela nous utilisons un code qui récupère les données les prix (à 2 heures du matin) pour un certain nombre de crypto-monnaies (les 13 les plus populaires) à partir de l'API de CoinGecko. Ce code utilise la bibliothèque Python Requests pour effectuer des requêtes HTTP à l'API, ensuite, celui-ci utilise la bibliothèque Datetime pour formater les dates et la bibliothèque Pandas pour stocker et manipuler les données.

Une première partie du code consiste à récupérer les crypto-monnaies avec les plus grandes capitalisations en omettant les stablecoins et crypto-monnaies dérivées de celles déjà présentes comme le Lido Ether ou le Wrapped Bitcoin. Puis pour ces crypto-monnaies, nous récupérerons leurs prix quotidiens depuis 2020 (nous aurions aimé prendre une période plus longue mais avons des restrictions sur le nombre de requêtes. En effet, l'API gratuite nous limite sur le nombre de dates et de crypto-monnaies.

*Voici un aperçu de la base de données avec les prix des crypto-monnaies du 22/12 /2022 au 05/08/2023:*

	BTC	ETH	BNB	XRP	ADA	DOGE	MATIC	SOL	DOT	TRX	LTC	SHIB	AVAX
time													
2020-09-22 02:00:00	10439.522489	341.277131	23.533250	0.231657	0.080367	0.002621	0.018930	2.773660	4.089750	0.024937	43.243477	1.231771e-10	5.284244
2020-09-23 02:00:00	10527.587847	343.917547	24.026976	0.233163	0.081443	0.002646	0.019625	2.940216	4.168356	0.024989	44.487314	1.182029e-10	5.284244
2020-09-24 02:00:00	10223.784106	321.077435	22.810300	0.220603	0.076628	0.002542	0.017737	2.835501	4.016036	0.024789	42.971450	1.066568e-10	3.491229
2020-09-25 02:00:00	10726.530083	348.821020	24.518301	0.232699	0.082607	0.002635	0.018975	3.130126	4.389749	0.026079	44.910404	1.173661e-10	4.573891
2020-09-26 02:00:00	10681.993848	351.331567	24.625905	0.241207	0.096791	0.002699	0.019104	3.191006	4.412863	0.027111	45.910860	1.184209e-10	4.702974
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2023-05-04 02:00:00	28988.320996	1903.728211	326.011821	0.463365	0.393838	0.079702	1.006446	22.219642	5.775235	0.069255	88.794024	1.014573e-05	17.208894
2023-05-05 02:00:00	28846.461459	1877.401195	323.824211	0.462304	0.387710	0.078457	0.983248	21.741801	5.668620	0.069527	88.492922	9.918589e-06	16.922114
2023-05-06 02:00:00	29520.322269	1993.612966	326.824903	0.467826	0.394535	0.080367	0.998382	22.818606	5.849452	0.071084	88.701989	1.003049e-05	17.383762
2023-05-07 02:00:00	28887.741046	1900.410599	322.697754	0.460065	0.380261	0.076913	0.977922	21.986706	5.650477	0.070441	83.487024	9.496295e-06	16.631562
2023-05-08 02:00:00	28611.439198	1895.230148	322.308903	0.452959	0.378091	0.077033	0.968248	22.002452	5.655290	0.069539	83.823306	9.420267e-06	16.491125

*Figure 1: Base de données constituée des prix des crypto-monnaies*

Cette dernière est composée des 13 crypto monnaies en terme de capitalisation boursière, ces 13 crypto monnaies sont alors :

[Bitcoin (BTC); Ethereum (ETH); Binance Coin (BNB); Ripple (XRP); Cardano (ADA); Dogecoin (DOGE); Polygon (MATIC); Solana (SOL); Polkadot (DOT); Litecoin (LTC); Shiba Inu Coin (SHIB); Avalanche (AVAX); Tron (TRX)]

## **1.b Etude des rendements de nos crypto monnaies sur la période de notre base de données:**

Dès lors que nous avons nos prix, nous calculons les rendements journaliers de chaque crypto-monnaies ainsi que leurs rendements cumulés.

	BTC	ETH	BNB	XRP	ADA	DOGE	SOL	MATIC	DOT	TRX	LTC	SHIB	AVAX
time													
2020-09-23 02:00:00	0.008436	0.007737	0.020980	0.006502	0.013390	0.009615	0.060049	0.036687	0.019220	0.002092	0.028764	-0.040382	0.000000
2020-09-24 02:00:00	-0.028858	-0.066412	-0.050638	-0.053866	-0.059126	-0.039476	-0.035615	-0.096214	-0.036542	-0.008011	-0.034074	-0.097680	-0.339313
2020-09-25 02:00:00	0.049174	0.086408	0.074878	0.054832	0.078026	0.036515	0.103906	0.069813	0.093055	0.052053	0.045122	0.100409	0.310109
2020-09-26 02:00:00	-0.004152	0.007197	0.004389	0.036561	0.171711	0.024655	0.019450	0.006786	0.005265	0.039578	0.022277	0.008988	0.028222
2020-09-27 02:00:00	0.005729	0.008340	0.063051	0.001138	-0.010910	0.000724	-0.017506	-0.010013	-0.016443	0.003750	0.004047	0.014099	-0.037911
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2023-05-06 02:00:00	0.023360	0.061900	0.009266	0.011945	0.017601	0.024355	0.049527	0.015392	0.031901	0.022389	0.002363	0.011282	0.027281
2023-05-07 02:00:00	-0.021429	-0.046750	-0.012628	-0.016591	-0.036179	-0.042979	-0.036457	-0.020493	-0.034016	-0.009037	-0.058792	-0.053257	-0.043270
2023-05-08 02:00:00	-0.009565	-0.002726	-0.001205	-0.015446	-0.005706	0.001557	0.000716	-0.009893	0.000852	-0.012812	0.004028	-0.008006	-0.008444
2023-05-09 02:00:00	-0.031969	-0.024241	-0.025961	-0.051404	-0.031594	-0.058074	-0.061164	-0.069323	-0.049622	-0.016654	-0.070891	-0.048940	-0.064771
2023-05-10 02:00:00	-0.003227	-0.001744	-0.005772	0.000905	-0.007012	0.008457	0.000014	-0.027139	-0.009637	0.010274	0.026009	0.008097	-0.006729

*Figure 2: Base de données des rendements journaliers des crypto-monnaies*

Les rendements journaliers de ces crypto-monnaies en capitalisation boursière peuvent être très variables d'un jour à l'autre. En effet, ces actifs sont soumis à une forte volatilité, influencée par des facteurs tels que l'actualité économique et politique, la réglementation, l'adoption de la technologie blockchain et la spéculation (sur certaines crypto-monnaies, comme par exemple les memecoins, dont nous verrons la volatilité prochainement).

Cependant, en regardant les tendances sur une période plus longue, on peut observer certaines caractéristiques des rendements journaliers de ces crypto-monnaies. Par exemple, Bitcoin, la plus grande crypto-monnaie en termes de capitalisation boursière, a connu une croissance rapide en 2020, atteignant un sommet historique de plus de 56 000 dollars en novembre 2021, avant de subir une correction importante à partir de 2022 où son cours a baissé aux alentours de 40 000 dollars début 2022. En 2023, le bitcoin connaît une évolution lente et moins volatile que les années précédentes avec un cours en 2023 à 25 000 dollars à peu près. Ethereum, la deuxième plus grande crypto-monnaie, a également connu une forte croissance en 2020 et en 2021, avec des augmentations de prix qui ont dépassé celles de Bitcoin à certains moments. Par exemple, de novembre 2019 à novembre 2021, le prix de l'Ethereum est passé de 117 dollars à plus de 4000 dollars, soit un prix qui a évolué à plus de 30000%, ce qui est une augmentation de prix très importante. Depuis ce plus haut historique atteint en novembre 2021, le prix de l'Ethereum a chuté à moins de 3000 dollars début 2022. En 2023, le cours de l'Ethereum se situe autour de 1600 dollars.

Cependant, d'autres crypto-monnaies ont connu des performances moins stables. Par exemple, XRP, la quatrième plus grande crypto-monnaie en capitalisation boursière, a été confrontée à une action en justice de la SEC en décembre 2020, ce qui a entraîné une forte baisse de son prix. Cardano, la cinquième plus grande crypto-monnaie, a également connu des fluctuations importantes de son prix en 2021, avec une forte hausse qui a débuté en février 2021 jusqu'en août 2021 avec un plus haut atteint en août 2021 à 2,5 dollars, suivie d'une baisse en mars 2021. Depuis cette période de forte hausse, Cardano a perdu une très grande partie de sa valeur boursière, aujourd'hui, le cours de la crypto-monnaie s'établit autour de 0,30 dollars.

	BTC	ETH	BNB	XRP	ADA	DOGE	SOL	MATIC	DOT	TRX	LTC	AVAX
count	962.000000	962.000000	962.000000	962.000000	962.000000	962.000000	962.000000	962.000000	962.000000	962.000000	962.000000	962.000000
mean	33783.157827	2089.715493	311.820889	0.618880	0.876278	0.126349	55.526629	0.966837	16.752805	0.066610	120.485177	34.050442
std	14397.772025	1057.505728	151.971338	0.319218	0.666344	0.105426	59.444322	0.616466	12.522309	0.024318	62.639688	30.164307
min	10223.784106	321.077435	22.810300	0.212070	0.076628	0.002520	1.206243	0.012245	3.748835	0.024227	42.971450	2.914066
25%	20707.404192	1323.675655	262.253576	0.377844	0.364104	0.061839	14.910275	0.547323	6.242204	0.055621	66.191592	13.657611
50%	31983.555185	1827.406155	309.505068	0.499840	0.541487	0.084974	32.467770	0.943114	11.350553	0.064436	104.893791	19.609521
75%	45006.823713	2882.265836	401.337783	0.815807	1.283741	0.178122	85.111582	1.393835	25.554833	0.074981	162.452875	51.399087
max	67617.015545	4815.004634	675.098974	1.837677	2.967075	0.681842	259.239558	2.881712	54.142860	0.166178	384.671618	134.469747

Figure 3 : Tableau statistique des caractéristiques des rendements des crypto-monnaies

Pour établir l'interprétation faite ci-dessus, nous proposons de visualiser les rendements cumulés des crypto-monnaies sur les dates de notre période d'étude:

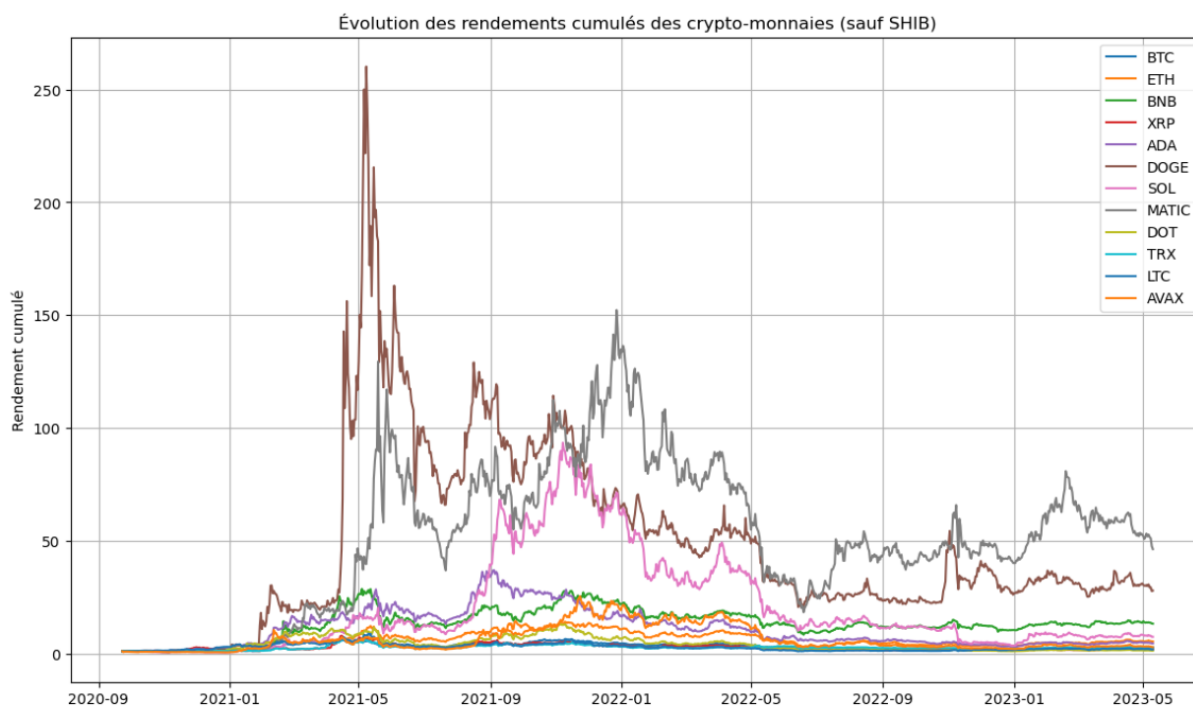


Figure 4: Graphique des rendements cumulés des crypto-monnaies

Ce que nous remarquons, c'est qu'en terme de rendement cumulé, une majorité des autres crypto monnaies sont en dessous de 25% en environ 3 ans. Ce qui peut correspondre à une

certaine faiblesse des rendements ou des rendements qui peuvent s'avérer négatifs sur une période à l'autre.

Seules quelques crypto-monnaies arrivent à sortir du lot : DOGE, SOL et MATIC avec des rendements cumulés dépassant les 100%.

Nous observons de manière totalement unanime la bulle spéculative qui a eu lieu en 2021. En effet, le cours d'une très grande majorité des crypto-monnaies a augmenté, nous le voyons avec les pics sur le graphique ci-dessus qui ont atteint leur plus haut en mai 2021. Pour d'autres crypto-monnaies cependant, la bulle n'arrive qu'en septembre 2021, c'est le cas pour AVAX par exemple. A partir de 2022, le cours des crypto-monnaies a beaucoup baissé (nous le voyons car les rendements cumulés baissent aussi, dû à des rendements globalement négatifs). Ces rendements tendent à se stabiliser de 2022 à 2023, pour l'ensemble des crypto-monnaies.

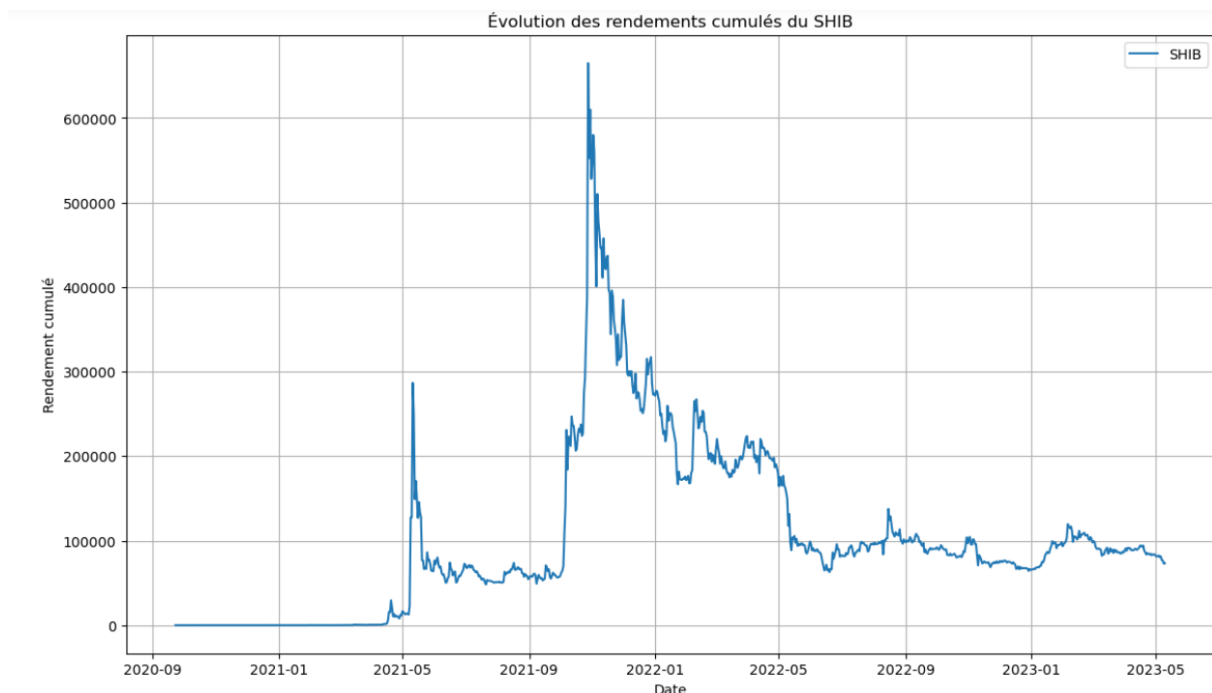


Figure 5 : Rendements cumulés du Shiba Inu Coin

Nous voyons par le graphique ci-dessus que le Shiba Inu Coin a réalisé une hausse de plus de 100 000% fin 2021. Cela paraît absolument invraisemblable. Depuis, le Shiba Inu Coin a subi une correction importante, avec une baisse de plus de 80 % de son prix de pointe en janvier 2022. Cette baisse est probablement due à la réalisation de certains investisseurs que le SHIB est une crypto monnaie très risquée avec un potentiel de croissance élevé mais aussi un potentiel de perte important. En effet, son rendement cumulé, depuis mi-2022 a une valeur très stable, si ce n'est quelques variations. Cela amène les investisseurs à se poser quelques questions par rapport à la fiabilité de cette crypto-monnaie.

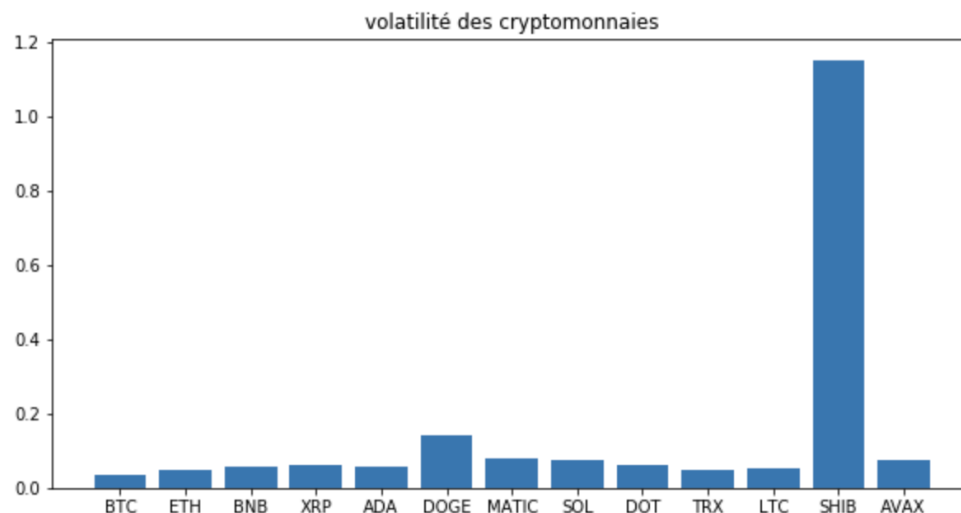
Nous allons modéliser cela en nous concentrant dans un premier temps sur la volatilité des crypto-monnaies.

#### Etude de la volatilité :



Nous observons de plus quelques pics de volatilité : nous arrivons à déceler les crypto-monnaies avec le plus de volatilité. Parmi elles, nous pouvons citer le Dogecoin comme la crypto-monnaie la plus volatile, qui a représenté un rendement égale à 3,5% au début de l'année 2021. Nous pouvons aussi citer le Shiba Inu Coin(SHIB) qui a présenté un gros rendement début 2021, de l'ordre de 35%.

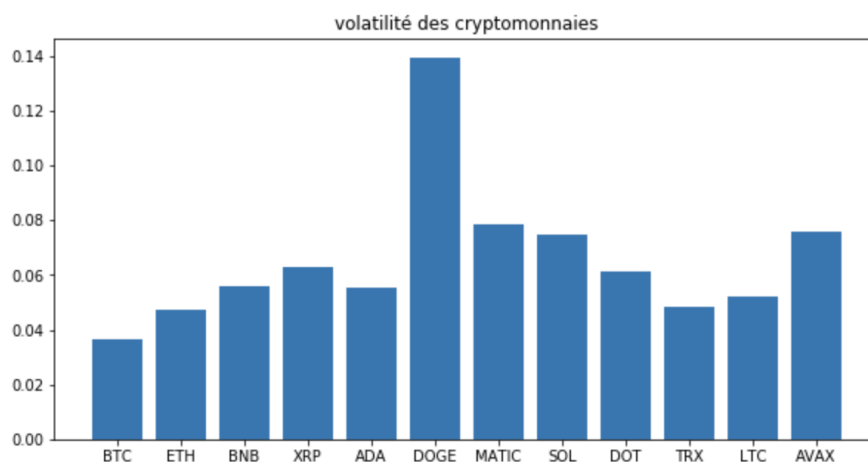
Pour avoir une idée plus complète sur la distribution de la volatilité, voici un histogramme qui résume les volatilités de nos crypto monnaies sur la période désignée :



*Figure 6 : Histogramme de la volatilité des crypto-monnaies*

**Le Shiba Inu Coin (SHIB) est de loin la crypto-monnaie la plus volatile, nous avons alors décidé de l'écartier du champ d'étude pour ce mémoire,** car celle-ci risque de fausser les résultats. En effet, les memecoin sont les crypto-monnaies avec le plus de volatilité car beaucoup plus sujet à la spéculation. Leur valeur n'est que le reflet d'un sentiment d'appartenance à une communauté et leur fondamentaux sont souvent très fragiles.

Nous allons alors nous concentrer sur la volatilité de nos crypto-monnaies en retraçant un histogramme de volatilité de celles-ci, en omettant le Shiba Inu Coin(SHIB) .



*Figure 7: Histogramme de la volatilité des crypto-monnaies (sans SHIB)*

Ainsi, nous avons une vision plus claire de la volatilité des crypto-monnaies. Le dogecoin est la plus volatile, avec une volatilité de 14%, suivie par Polygon (8%) et Avalanche (un peu moins de 8%). Mis à part la DogeCoin, les crypto-monnaies ont une volatilité comprise entre 4% et 8%. Ce qui reste une volatilité importante.

Pour avoir une idée plus précise de la distribution de la volatilité, nous voyons ci-dessous un tableau qui nous récapitule les principales données statistiques des volatilités des crypto-monnaies :

Moyenne	Ecart-type	1er quantile	Médiane	3e quantile
6%	2,6%	5%	5,8%	7,5%

Figure 8 : Tableau de la distribution statistique des volatilités du panier de crypto-monnaies

En moyenne, la volatilité des crypto-monnaies est de 6%. De plus, 50% d'entre elles, ont une volatilité inférieure à 6% et 25% d'entre elles, une volatilité inférieure à 5%.

Pour aller plus loin, nous vous proposons d'étudier de manière plus approfondie les rendements des crypto-monnaies:

	Mean	Median	Volatility	Skewness	Kurtosis
BTC	0.001661	0.000567	0.036004	0.058153	2.862938
ETH	0.002868	0.002628	0.047056	-0.033320	3.516123
BNB	0.004147	0.001594	0.055642	2.790838	36.462980
XRP	0.002668	0.000509	0.064730	1.488014	14.111797
ADA	0.003092	0.000427	0.055396	0.729526	3.496377
DOGE	0.008588	-0.000783	0.138521	16.111090	375.398060
SOL	0.004749	-0.000221	0.072935	0.421225	4.425747
MATIC	0.006843	0.000241	0.078397	1.885955	10.041155
DOT	0.002142	-0.000710	0.061059	0.647037	6.200673
TRX	0.002236	0.001933	0.048655	0.731844	9.908135
LTC	0.002012	0.001397	0.051678	-0.251165	4.358052
AVAX	0.003835	0.000000	0.075445	1.525677	13.362045
UNI	0.002284	0.000777	0.065678	0.903712	6.168528

Figure 9 : Etude statistique des rendements des crypto-monnaies

*Moyenne des moyennes : 0,36%*

*Moyenne des médianes : 0,06%*

*Moyenne des volatilités : 6%*

*Moyenne des skewness : 2*

*Moyenne des Kurtosis : 37*

Sur toute la période d'étude, les rendements sont globalement faibles (on observe les rendements les plus faibles en moyenne pour le Bitcoin, avec un rendement moyen sur toute la période de 0,17%). L'Ethereum aussi possède un rendement moyen assez faible, de l'ordre de 0,29%. En moyenne, il s'agit du DogeCoin qui réussit à totaliser la moyenne de rendement la plus haute avec plus de 0,85%. Cela est confirmé par la Skewness de la distribution des

rendements de la DogeCoin, avec plus de 375, ce qui confirme qu'il est beaucoup plus probable d'atteindre des valeurs extrêmes en investissant sur le DogeCoin que sur les autres crypto-monnaies. Cette dernière observation nous permet aussi de faire la remarque sur le comportement du DogeCoin : il s'agit, tout comme du Shiba Inu Coin, d'un MemeCoin. De ce fait, la valeur de son cours peut évoluer très rapidement d'une période sur l'autre avec des hausses et baisses importantes.

## 2. Etude des corrélations et de la distribution des rendements:

### 2a. Les corrélations:

Les corrélations entre les premières crypto-monnaies en termes de capitalisation boursière peuvent être influencées par de nombreux facteurs, notamment la volatilité du marché des crypto-monnaies, les tendances du marché, les événements économiques et politiques mondiaux et les développements technologiques.

Cependant, il est possible d'observer certaines tendances dans les corrélations entre les crypto-monnaies les plus importantes. Par exemple, Bitcoin et Ethereum sont souvent considérés comme les "pilotes" du marché des crypto-monnaies (car ce sont ces deux crypto-monnaies qui possèdent les capitalisations boursières les plus importantes), avec une forte corrélation entre leurs performances. Les autres crypto-monnaies peuvent également avoir une corrélation positive avec Bitcoin et Ethereum, ce qui signifie que leur prix a tendance à augmenter ou à diminuer en même temps que ceux de ces deux crypto-monnaies. C'est le cas par exemple pour la Binance Coin, mais aussi et très fortement pour la Litecoin (LTC). En effet, la Litecoin, qui n'est pourtant une crypto dérivée des deux crypto-monnaies pilotes, possède une corrélation de 78% avec le Bitcoin et 79% avec l'Ethereum. On peut aussi remarquer que le Dogecoin est la crypto-monnaie la moins corrélée à l'ensemble des crypto-monnaies, avec une moyenne d'environ 20% de corrélation avec les autres crypto-monnaies.

Enfin, nous pouvons noter le caractère positif de l'ensemble des corrélations des crypto-monnaies entre elles. En effet, de manière plus ou moins appuyée, l'ensemble des premières crypto-monnaies, en termes de capitalisation boursière, évolue dans le même sens.

Ce qui fait qu'il est finalement difficile de diversifier un portefeuille entièrement composé de crypto-monnaies.

Ci-dessous, une illustration des corrélations des crypto-monnaies entre elles:

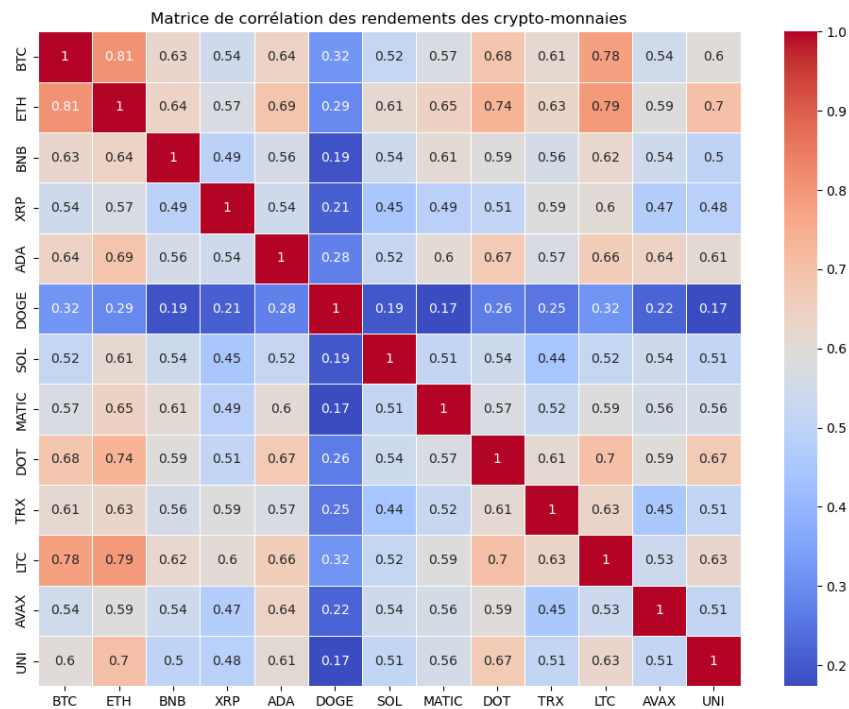


Figure 10 : Matrice de corrélation des crypto-monnaies

*Moyenne des corrélations : 53%*

*Médiane des corrélations : 56%*

*Ecart-type des corrélations : 15%*

Comme indiqué, nous avons une corrélation moyenne entre crypto-monnaies de 53% (ce qui est assez important), mais ce qui est surtout assez intéressant à remarquer, c'est la médiane des corrélations des crypto-monnaies. En effet, celle-ci est de 56%, ce qui veut dire que sur l'ensemble de nos crypto-monnaies sélectionnées pour l'étude, 50% d'entre elles, ont une corrélation supérieure à 56% (reprenant ainsi, la complexité à diversifier un portefeuille de crypto-monnaies).

Nous allons, dans un premier temps, comparer les corrélations des crypto-monnaies aux corrélations des plus grandes actions US.

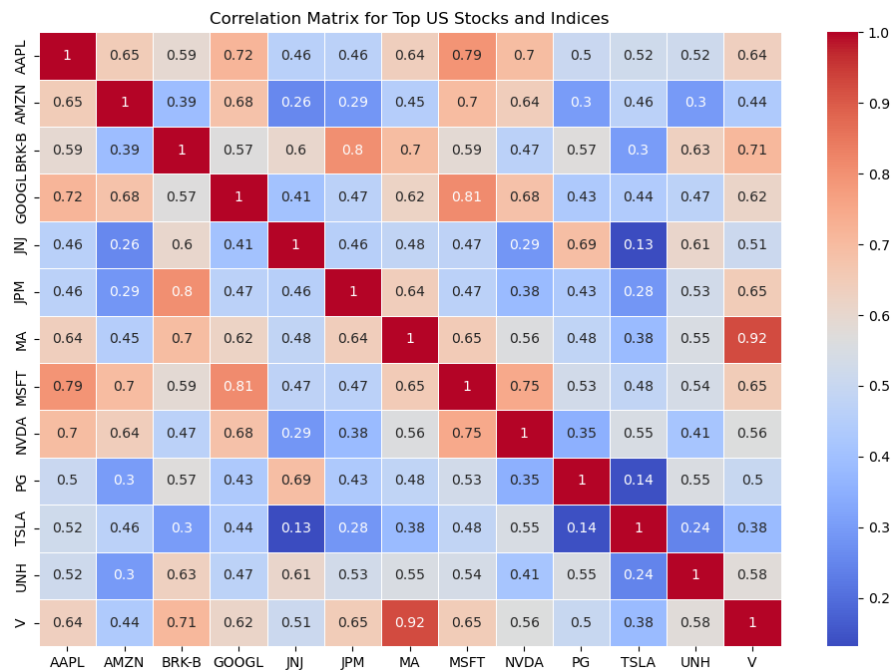


Figure 11: Matrice de corrélation des actions US

Moyenne des corrélations : 52%

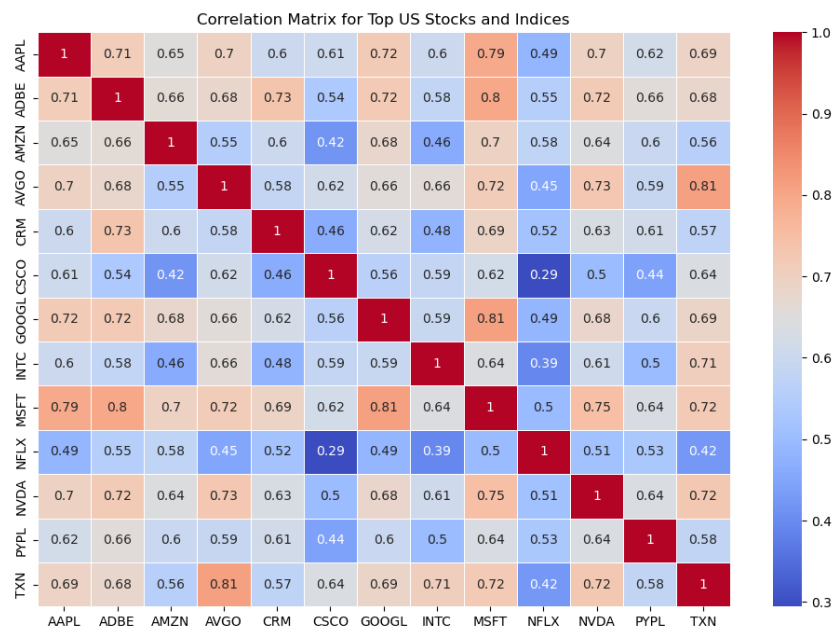
Médiane des corrélations : 55%

Ecart-type des corrélations : 15%

Les actions US sont elles aussi corrélées entre elles avec des corrélations plus ou moins importantes dépendant des actions. En effet, on observe une moyenne de corrélations entre les actions de 52%. On retrouve aussi une médiane des corrélations de 55%, donc plus de 50% des actions ont une corrélation supérieure à 55%. Ce qui en fait aussi un marché très corrélé. L'ordre des corrélations est aussi important que l'ordre des corrélations des crypto-monnaies.

Nous pouvons nous demander si l'idée de penser que les crypto-monnaies sont plus corrélées que les actions US est vrai ?

Nous allons, dans un second temps, comparer la corrélation entre les crypto-monnaies et les plus grandes actions technologiques des US. En effet, étant donné que le secteur des crypto-monnaies est assez lié au secteur de la technologie américaine, il serait intéressant de comparer les corrélations dans ces deux secteurs.



**Figure 12: Matrice de corrélation des actions technologiques aux US**

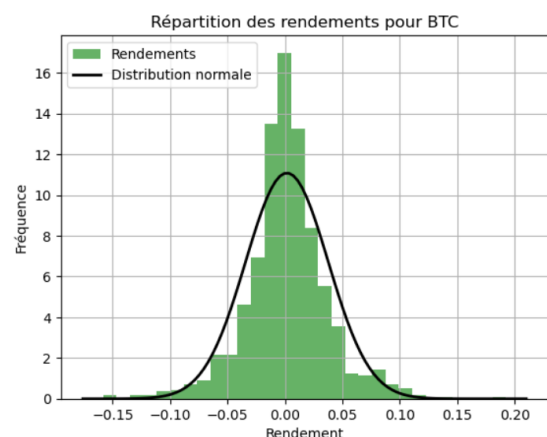
Moyenne des corrélations : 62%  
Médiane des corrélations : 66%  
Ecart-type des corrélations : 10%

Nous remarquons que les crypto-monnaies sont moins corrélées entre elles que les actions technologiques US, ce qui est assez surprenant. En effet, en moyenne les cryptos sont de 53% contre 61% pour les actions US dans la technologie. Cependant, il est important de noter que cette étude de corrélation peut-être biaisée par la période d'étude, mais aussi le nombre d'observations. Cependant, nous estimons qu'une étude sur 3 années peut nous informer sur les tendances.

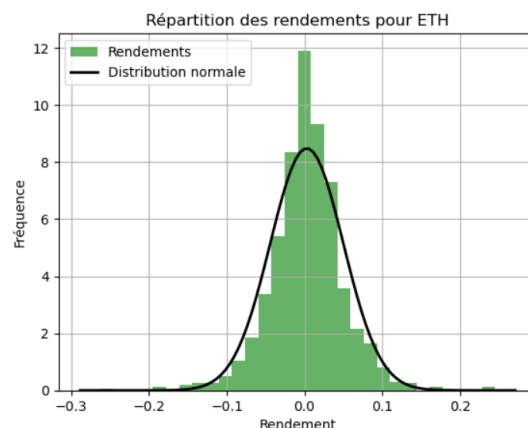
Corrélations	Moyenne	Médiane	Ecart-type
Crypto-monnaie	53%	56%	15%
Actions US	52%	55%	15%
Actions US Techno	62%	66%	10%

**Figure 13 : Tableau récapitulatif des corrélations sur les différents secteurs**

## 2b. Les rendements



Résultats du test de Jarque-Bera pour BTC:  
Statistique: 323.9156  
Valeur p: 0.0000  
Les rendements de BTC ne semblent pas suivre une distribution normale (On rejette  $H_0$ ).



Résultats du test de Jarque-Bera pour ETH:  
Statistique: 488.3413  
Valeur p: 0.0000  
Les rendements de ETH ne semblent pas suivre une distribution normale (On rejette  $H_0$ ).

**Figure 14 : Distributions de rendements pour un échantillon de crypto-monnaies**

A première vue, les rendements de nos crypto-monnaies ressemblent par la forme à une loi normale mais nous avons des valeurs un peu trop centrées. Nous allons vérifier cela en faisant un test de normalité pour conclure.

Pour effectuer ce test de normalité, nous avons choisi le test de Jarque et Bera, pour l'ensemble de nos crypto-monnaies.

Nous allons ainsi faire une boucle sur celle-ci, retournant la p-value du test, pour chaque crypto-monnaie:

BTC (stat=323, pvalue=0.0)	ETH (stat=488, pvalue=0.0)	SOL (stat=802, pvalue=0.0)
BNB (stat=53911, pvalue=0.0)	XRP (stat=8237, pvalue=0.0)	MATIC (stat=4558, pvalue=0.0)
ADA (stat=567, pvalue=0.0)	DOGE (stat=5625597, pvalue=0.0)	DOT (stat=1587, pvalue=0.0)
TRX (stat=3970, pvalue=0.0)	LTC (stat=760, pvalue=0.0)	AVAX (stat=7440, pvalue=0.0)

**Figure 15 : Tableau récapitulatif des tests de Jarque et Bera**

Une fois les tests de Jarque et Bera sont faits pour chacune de nos crypto-monnaies, nous remarquons, de manière quasiment immédiate que les p-values de chacun de test est nulle : aucun rendement ne suit une distribution comparable à celle d'une loi normale.

Pour appliquer le théorème des deux fonds, il convient de normaliser ces rendements, car celui-ci repose sur l'hypothèse fondamentale de normalité des rendements.

Pour continuer, nous allons cependant, faire l'hypothèse que ces rendements suivent une loi normale.



Pour revenir aux actions, nous savons que le théorème des 2 fonds a été d'abord utilisé sur cette classe d'actif donc regardons si les actions US respectent eux l'hypothèse de normalité des rendements.

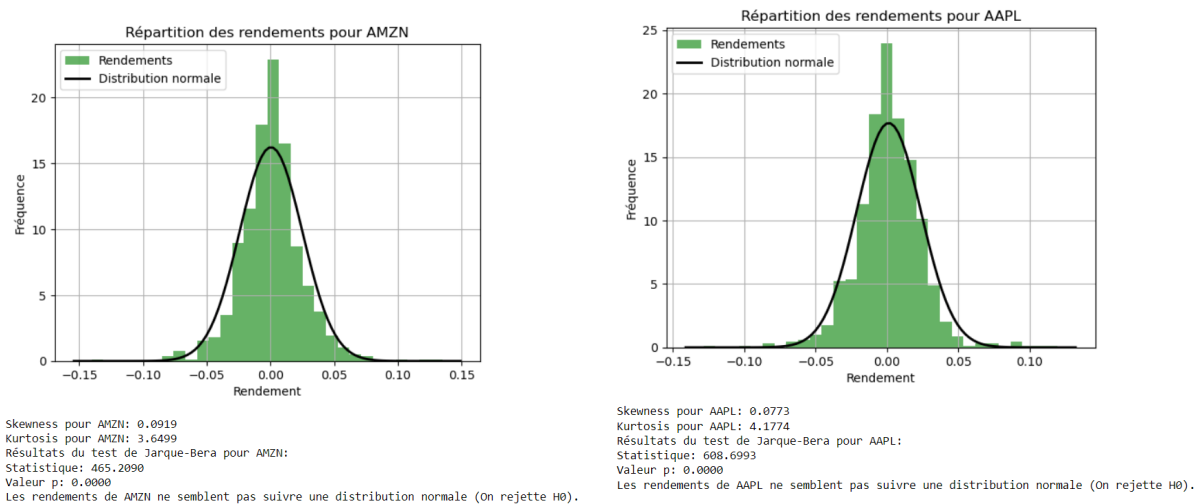


Figure 16 : Distributions de rendements pour un échantillon d'actions US

Nous avons sur cet échantillon comme pour toutes les actions US que l'hypothèse de normalité des rendements n'est pas respectée. Ceci nous montre bien que l'hypothèse est difficile à respecter. Nous pouvons penser que notre durée d'étude est trop courte (900 jours). Nous allons donc dans un premier temps faire nos études sans prendre en compte cette hypothèse puis nous essayerons de trouver une meilleure manière de trouver un portefeuille optimal.

## 3. Théorème des deux fonds:

### 3.a Hypothèses:

Le théorème des deux fonds repose sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices pour être valide. Voici les principales hypothèses sur lesquelles repose ce théorème :

- **Marchés financiers parfaits** : Les marchés sont supposés être parfaitement compétitifs, sans frictions ni coûts de transaction. Cela signifie que les investisseurs peuvent acheter et vendre des actifs sans frais, et qu'ils ont tous accès aux mêmes informations.
- **Aucun impôt** : Le théorème des deux fonds suppose qu'il n'y a pas d'impôt sur les gains en capital ou les dividendes, ce qui simplifie considérablement les calculs de rendement et les décisions d'investissement.
- **Investisseurs rationnels** : Les investisseurs sont supposés être rationnels et cherchent à maximiser leur utilité en fonction de leur aversion au risque. Cela signifie qu'ils sont capables d'évaluer les rendements futurs et les risques associés aux différents investissements de manière objective.
- **Prêt et emprunt sans risque** : Les investisseurs peuvent prêter et emprunter à un taux sans risque, qui est le même pour tous les investisseurs. Cela signifie que les investisseurs peuvent ajuster leur exposition au risque en empruntant ou en prêtant à ce taux sans risque.
- **Diversification** : Les investisseurs peuvent diversifier leur portefeuille en détenant une combinaison de deux fonds seulement : un fonds sans risque et un fonds de marché. Le fonds de marché est supposé être un portefeuille diversifié d'actifs risqués qui reflète l'ensemble du marché.
- **Actifs divisibles et échangeables** : Les actifs sont supposés être parfaitement divisibles et échangeables, ce qui permet aux investisseurs de créer des portefeuilles diversifiés même avec un nombre limité d'actifs.

Nous revenons alors sur chacune de ces hypothèses:

**Marchés financiers parfaits** : Les marchés des crypto-monnaies sont souvent moins liquides que les marchés des actions, ce qui signifie qu'il peut y avoir des coûts de transaction plus élevés et des écarts de prix plus importants. Cependant, les plateformes d'échange de crypto-monnaies sont généralement ouvertes 24 heures sur 24, 7 jours sur 7, ce qui facilite les transactions à tout moment. Dans l'ensemble, cette hypothèse est probablement moins respectée pour les crypto-monnaies que pour les actions.

**Aucun impôt** : Les gains en capital sur les crypto-monnaies sont souvent soumis à des règles fiscales spécifiques et peuvent être imposés différemment des gains en capital sur les actions, selon les juridictions. Cette hypothèse peut donc ne pas être respectée pour les deux univers, mais les règles fiscales peuvent varier davantage pour les crypto-monnaies.

**Investisseurs rationnels** : Les marchés des crypto-monnaies ont tendance à être plus volatils et peuvent être sujets à des mouvements de prix irrationnels en raison de la spéculation et du sentiment du marché. Il est donc possible que cette hypothèse soit moins respectée pour les crypto-monnaies que pour les actions.

**Prêt et emprunt sans risque** : Les taux sans risque sont généralement basés sur les obligations d'État, qui ne sont pas directement liées aux crypto-monnaies. Cependant, certains protocoles de finance décentralisée (DeFi) permettent de gagner des intérêts sur les dépôts de crypto-monnaies, ce qui pourrait être considéré comme un équivalent du taux sans risque. Nous pouvons faire cela à travers du farming ou bien du lending.

**Diversification** : La diversification peut être plus difficile à réaliser avec les crypto-monnaies, car elles sont souvent fortement corrélées entre elles cependant, d'après notre matrice de corrélation, nous voyons que la corrélation est finalement d'ordre moyenne entre celles-ci (cf Figure 9) , à part une corrélation importante entre le Bitcoin et l'Ethereum, et l'Ethereum ainsi que la crypto-monnaie dérivée (STETH). De cette manière, le Bitcoin et la Skated Ethereum (STETH) sont aussi très corrélés.

**Actifs divisibles et échangeables** : Les crypto-monnaies sont généralement très divisibles, ce qui permet aux investisseurs de créer des portefeuilles diversifiés même avec un nombre limité d'actifs.

**Distribution normale des rendements** : Les rendements des crypto-monnaies sont souvent caractérisés par une volatilité plus élevée et des mouvements de prix plus extrêmes que les actions, ce qui rend cette hypothèse moins respectée pour *les crypto-monnaies*.

Pour conclure sur ces hypothèses, elles peuvent donc être moins respectées pour les crypto-monnaies que pour les actions. Les marchés des crypto-monnaies sont souvent moins liquides et plus volatils, et les règles fiscales peuvent varier davantage pour les crypto-monnaies. Cependant, les crypto-monnaies sont très divisibles et peuvent être échangées facilement sur des plateformes d'échange ou des protocoles de finance décentralisée (DeFi).

### **3.b Frontière efficiente et portefeuille optimal:**

Pour obtenir notre portefeuille optimal, nous allons faire plusieurs milliers de simulation de portefeuille. Nous allons pour chaque simulation prendre des poids aléatoires pour chaque crypto-monnaie dans notre portefeuille et calculer le rendement et la volatilité de ce portefeuille. Ainsi nous pourrons calculer les ratios de Sharpe de chaque portefeuille et déterminer notre portefeuille optimal en récupérant les poids de chaque crypto-monnaie correspondant au portefeuille avec le plus grand ratio de Sharpe.

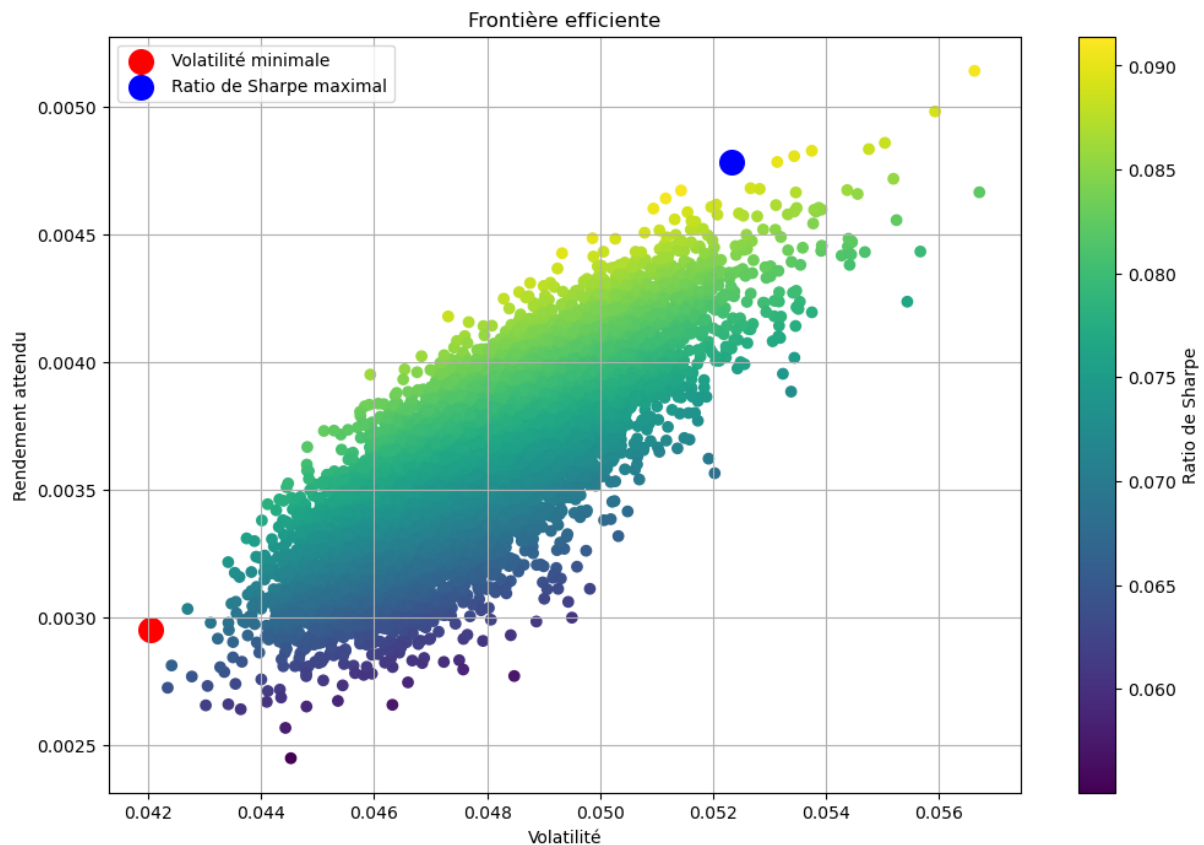
Voici la formule du ratio de Sharpe:  $\sigma = \frac{rp - r0}{\sigma p}$

Avec :

$rp$  : le rendement du portefeuille simulé

$\sigma p$  : la volatilité du portefeuille simulé

$r0$  : le taux sans risque que nous prenons à 3%/365 en journalier



*Figure 17: Tracé de la frontière des portefeuilles efficients*

Rappelons que la frontière efficiente désigne l'ensemble des portefeuilles optimaux pour un niveau de risque donné et un niveau de rendement donné.

Aussi, nous avons aussi calculé le portefeuille efficient (en bleu) qui maximisait le ratio de Sharpe, nous rappelons la définition :

**Ratio de Sharpe:** mesure de la performance pour évaluer le rendement d'un investissement par rapport à son niveau de risque. Pour cela, il est calculé sous forme de ratio avec au dénominateur la prime de risque de l'investisseur et au dénominateur, la volatilité.

Ainsi, le portefeuille (en bleu) qui permet de maximiser le ratio de Sharpe est le portefeuille qui permet de maximiser le couple (rendement/risque) : celui qui va offrir le rendement le plus élevé pour un niveau de risque donné. Nous l'avons donc calculé, et il est présent en bleu.

En rouge, nous représentons aussi le portefeuille avec la volatilité minimale.

### Composition du portefeuille optimal :

Nous retrouvons le portefeuille optimale pondéré comme suit (les poids des crypto-monnaies sont en %) :

BTC	ETH	BNB	XRP	ADA	DOGE	SOL	MATIC	DOT	TRX	LTC	AVAX	UNI
0,95	3,2	19,3	0	10,5	13,2	1,4	24,6	5,7	7,7	7,7	5,8	0,04

**Rendement journalier du portefeuille optimale :** 0.004783

**Volatilité journalière du portefeuille optimale :** 0.052332

Ce portefeuille est ainsi surpondéré en Polygon et en Binance Coin (avec des pondérations respectives à 24,55% et 19,31%). Suivi par une pondération importante en DogeCoin. Nous observons aussi que l'Ethereum est pondéré à 3,23% tandis que le Bitcoin, avec la plus grande capitalisation boursière, en représente que 0,95% du poids du portefeuille optimal, soit plus de 24 fois de moins que la crypto-monnaie Polygon.

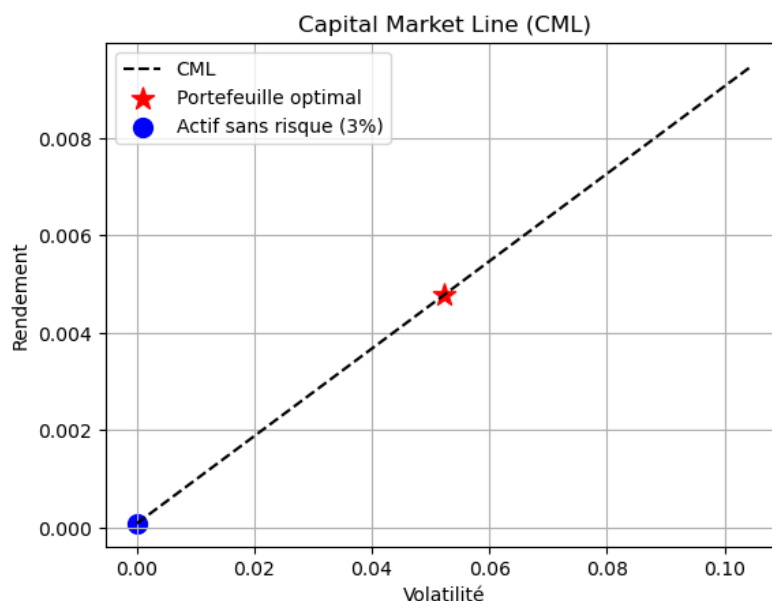


Figure 18 : Tracé de la Capital Market Line (CML)

**La capital market line** représente une droite qui relie les portefeuilles qui combinent un actif sans risque et un portefeuille de marché diversifié, ici le portefeuille optimal. Elle permet d'associer à chaque niveau de risque, le rendement espéré le plus élevé. En d'autres termes, la CML montre comment un investisseur peut maximiser son rendement pour un niveau de risque donné en combinant un actif sans risque avec un portefeuille diversifié de titres risqués.

L'investisseur doit rester sur la ligne CML pour obtenir le meilleur couple rendement/risque. Il peut choisir son point sur la droite en fonction de son aversion au risque. En effet, plus il se trouve proche de l'actif sans risque plus il est averse au risque, inversement, plus il se trouve proche du portefeuille optimal moins il est averse au risque.

Dans ce cas le portefeuille se construit sous la forme :  $Pg = x * Asr + (1 - x)Po$

$Asr$  : Actif sans risque et  $Po$  le portefeuille optimal

Ainsi si nous avons  $x \in [0,1]$ , notre couple rendement/risque se trouvera sur la droite CML et entre les points du portefeuille optimal et de l'actif sans risque

Si  $x \in \mathbb{R}$  alors, il est possible de vendre à découvert l'actif sans risque (il n'y a aucun intérêt à racheter de l'actif sans risque) pour être encore plus exposé au portefeuille optimal et ainsi espérer un meilleur rendement. Ceci s'accompagne évidemment par une forte augmentation du risque.

### **3.c Frontière efficiente et portefeuille optimal avec vente à découvert:**

Nous avons jusque-là empêché toute vente à découvert. C'est-à-dire vendre un titre que nous ne possédons pas. Ceci peut permettre d'obtenir un gain lorsque le prix d'un actif baisse car nous rachetons un titre moins cher que le prix auquel nous l'avons vendu. Cette nouvelle possibilité augmente grandement le nombre de possibilités car nous pouvons tout d'abord autofinancer une stratégie et ainsi débiter sans capital de départ mais aussi nous pouvons être long sur une crypto-monnaie et short sur une autre si nous nous apercevons d'un écart de performance pour une même volatilité.

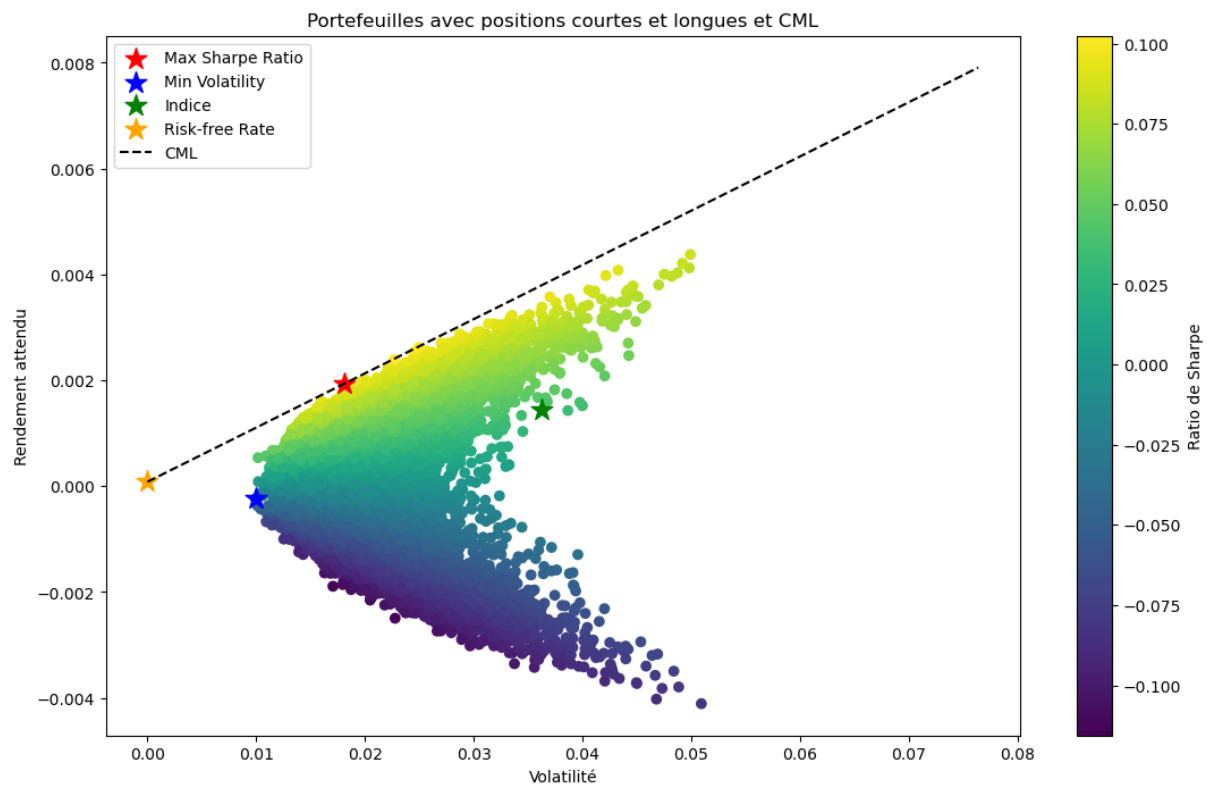


Figure 19 : Frontière efficiente et profil de risque de l'indice boursier (short possible)

Ici nous voyons que nous pouvons maintenant avoir des rendements négatifs et une plus large palette de stratégies.

Notre indice se trouve désormais bien dans la forme, ce qui indique que nous nous sommes peut-être trompé sur le premier code.

## 4. Mise en place d'un indice boursier

### 4.a Construction de l'indice

Pour construire un indice sur l'ensemble de nos crypto-monnaies, il convient de récupérer un historique des capitalisations boursières de celles-ci. Nous obtenons alors l'historique comme mentionné ci-dessous:

time	BTC	ETH	BNB	XRP	ADA	DOGE	SOL	MATIC	DOT	TRX
2020-09-22 02:00:00	1.936778e+11	3.869581e+10	3.493932e+09	1.048793e+10	2.513124e+09	3.326858e+08	1.051324e+08	7.216628e+07	3.770969e+09	1.796697e+09
2020-09-23 02:00:00	1.947311e+11	3.867991e+10	3.535552e+09	1.049207e+10	2.528466e+09	3.331077e+08	1.109967e+08	7.422866e+07	3.807700e+09	1.783817e+09
2020-09-24 02:00:00	1.891206e+11	3.623917e+10	3.373415e+09	9.962005e+09	2.387518e+09	3.212321e+08	1.078015e+08	6.739922e+07	3.701918e+09	1.779349e+09
2020-09-25 02:00:00	1.985140e+11	3.931472e+10	3.626152e+09	1.049413e+10	2.577653e+09	3.335463e+08	1.188789e+08	7.218173e+07	4.024415e+09	1.867973e+09
2020-09-26 02:00:00	1.976170e+11	3.959839e+10	3.635724e+09	1.088984e+10	2.988519e+09	3.409401e+08	1.222383e+08	7.261814e+07	4.036997e+09	1.941450e+09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2023-05-07 02:00:00	5.590787e+11	2.283690e+11	5.094146e+10	2.381716e+10	1.330651e+10	1.069442e+10	8.661567e+09	9.045816e+09	6.942713e+09	6.374307e+09
2023-05-08 02:00:00	5.543730e+11	2.282466e+11	5.084472e+10	2.350826e+10	1.323281e+10	1.070867e+10	8.705466e+09	8.940762e+09	6.946474e+09	6.292395e+09
2023-05-09 02:00:00	5.360321e+11	2.224068e+11	4.954905e+10	2.224489e+10	1.281057e+10	1.010024e+10	8.146998e+09	8.322796e+09	6.612417e+09	6.187712e+09
2023-05-10 02:00:00	5.350371e+11	2.222464e+11	4.930686e+10	2.230419e+10	1.273937e+10	1.019301e+10	8.164795e+09	8.111035e+09	6.555237e+09	6.260149e+09
2023-05-11 02:00:00	5.349375e+11	2.218320e+11	4.966239e+10	2.242442e+10	1.297544e+10	1.021705e+10	8.287540e+09	8.124795e+09	6.740923e+09	6.294876e+09

*Figure 20 : Base de données contenant les capitalisations boursières des crypto-monnaies*

Sans surprise, la capitalisation boursière du bitcoin est la plus importante, avec une capitalisation de plus de 535 milliards de dollars (en mai 2023). Ensuite, l'Ethereum, avec une capitalisation culminant autour de 232 milliards).

#### Procédure de construction de l'indice :

Nous allons construire notre indice de crypto-monnaies comme sont construits la plupart des indices classiques (ex: CAC 40). Donc, suivant la pondération par capitalisation boursière. Chaque jour, de notre base (commençant le 1er janvier 2017), nous allons additionner l'ensemble des capitalisations boursières chaque jour et ensuite, nous allons diviser chacune des capitalisations de nos crypto-monnaies par la capitalisation totale. Les coefficients obtenus de notre indice, sont ainsi pondérés par capitalisation.

Ci-dessous, voici un tableau montrant l'évolution des poids des crypto-monnaies composant notre indice :



	BTC	ETH	BNB	XRP	ADA	DOGE	SOL	MATIC	DOT	TRX	LTC	AVAX	UNI
time													
2020-09-22 02:00:00	0.749408	0.149728	0.013519	0.040581	0.009724	0.001287	0.000407	0.000279	0.014591	0.006952	0.011005	0.000481	0.002037
2020-09-23 02:00:00	0.750111	0.148996	0.013619	0.040416	0.009740	0.001283	0.000428	0.000286	0.014667	0.006871	0.011227	0.000479	0.001877
2020-09-24 02:00:00	0.754910	0.144655	0.013466	0.039765	0.009530	0.001282	0.000430	0.000269	0.014777	0.007103	0.011239	0.000345	0.002229
2020-09-25 02:00:00	0.750045	0.148543	0.013701	0.039650	0.009739	0.001260	0.000449	0.000273	0.015205	0.007058	0.011119	0.000424	0.002534
2020-09-26 02:00:00	0.745683	0.149420	0.013719	0.041091	0.011277	0.001286	0.000461	0.000274	0.015233	0.007326	0.011354	0.000436	0.002441
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2023-05-07 02:00:00	0.599367	0.244826	0.054612	0.025533	0.014265	0.011465	0.009286	0.009698	0.007443	0.006834	0.006514	0.005882	0.004276
2023-05-08 02:00:00	0.597821	0.246135	0.054830	0.025351	0.014270	0.011548	0.009388	0.009641	0.007491	0.006786	0.006577	0.005879	0.004284
2023-05-09 02:00:00	0.597628	0.247964	0.055243	0.024801	0.014283	0.011261	0.009083	0.009279	0.007372	0.006899	0.006327	0.005683	0.004178
2023-05-10 02:00:00	0.597437	0.248167	0.055057	0.024905	0.014225	0.011382	0.009117	0.009057	0.007320	0.006990	0.006505	0.005667	0.004170
2023-05-11 02:00:00	0.596874	0.247293	0.055412	0.025021	0.014478	0.011400	0.009247	0.009066	0.007521	0.007024	0.006597	0.005754	0.004313

Figure 21 : Evolution du poids des crypto-monnaies composant l'indice

Ci-dessous, l'évolution de notre indice:

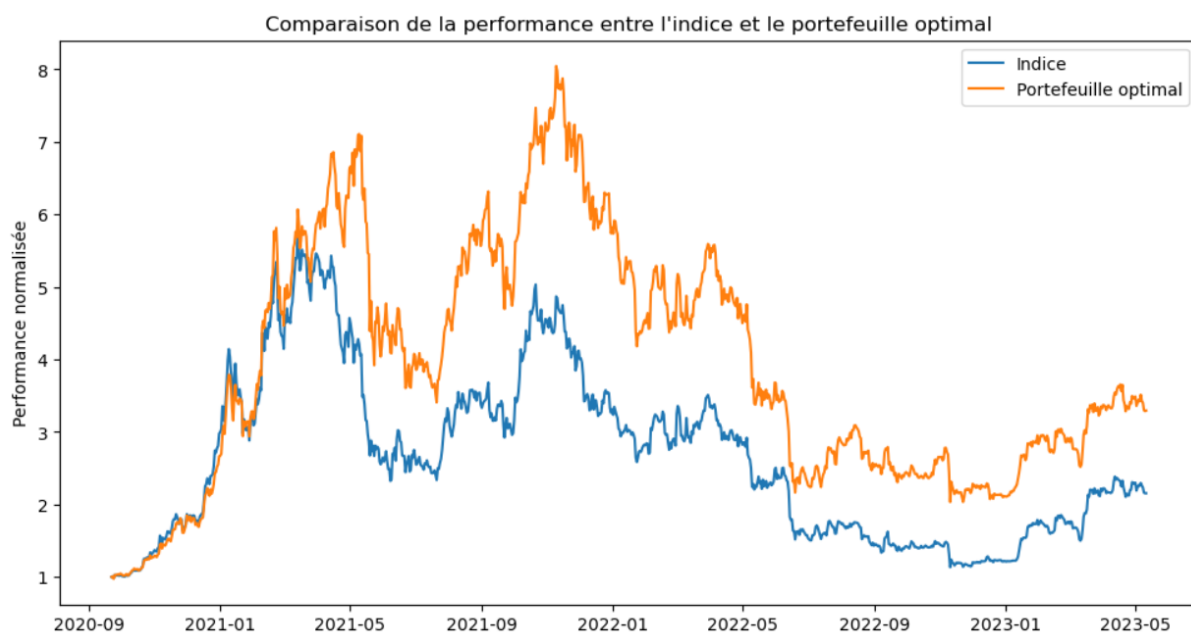


Figure 22 : Evolution de notre indice boursier par rapport au portefeuille optimal

Il est évident de penser que le cours du bitcoin ainsi que celui de l'Ethereum vont ainsi avoir beaucoup plus d'influence sur la variation de notre indice boursier que les autres crypto-monnaies car celles-ci ont un poids faible, notamment dû à la faiblesse de leur capitalisation boursière.

#### Remarques sur l'indice:

Nous traçons, ici en bleu, la performance de l'indice par rapport à la performance du portefeuille optimal (ici en orange). Les variations sont strictement similaires (ce qui est logique). Nous observons différentes phases de hausse et de baisse de performance de l'indice, sur les différentes périodes. Ce qui est aussi notable, c'est que le portefeuille optimal

surperforme l'indice sur toute la durée de l'étude avec une performance normalisée qui atteint les 8% fin 2021.

Nous avons ensuite voulu calculer le  $\beta$  de notre portefeuille optimal. Nous avons pensé qu'il était préférable de calculer des  $\beta$  glissants sur une période de 1 an :

	Minimum	Moyenne	Maximum
$\beta$	0,915609	0,95795	1,013329

*Figure 23 : Tableau récapitulatif des  $\beta$  glissants*

Il nous paraît étrange alors que le  $\beta$  moyen soit inférieur à 1 alors que le rendement du portefeuille optimale est supérieur à l'indice car nous avons comme formule :

$$Rp = \alpha + \beta(Rm - R0)$$

Ainsi comme  $Rp > Rm$ , nous nous attendions à avoir un  $\beta$  moyen supérieur à 1. Cependant il nous reste à calculer le  $\alpha$  qui correspond à la surperformance du portefeuille. Nous avons donc fait une régression linéaire :

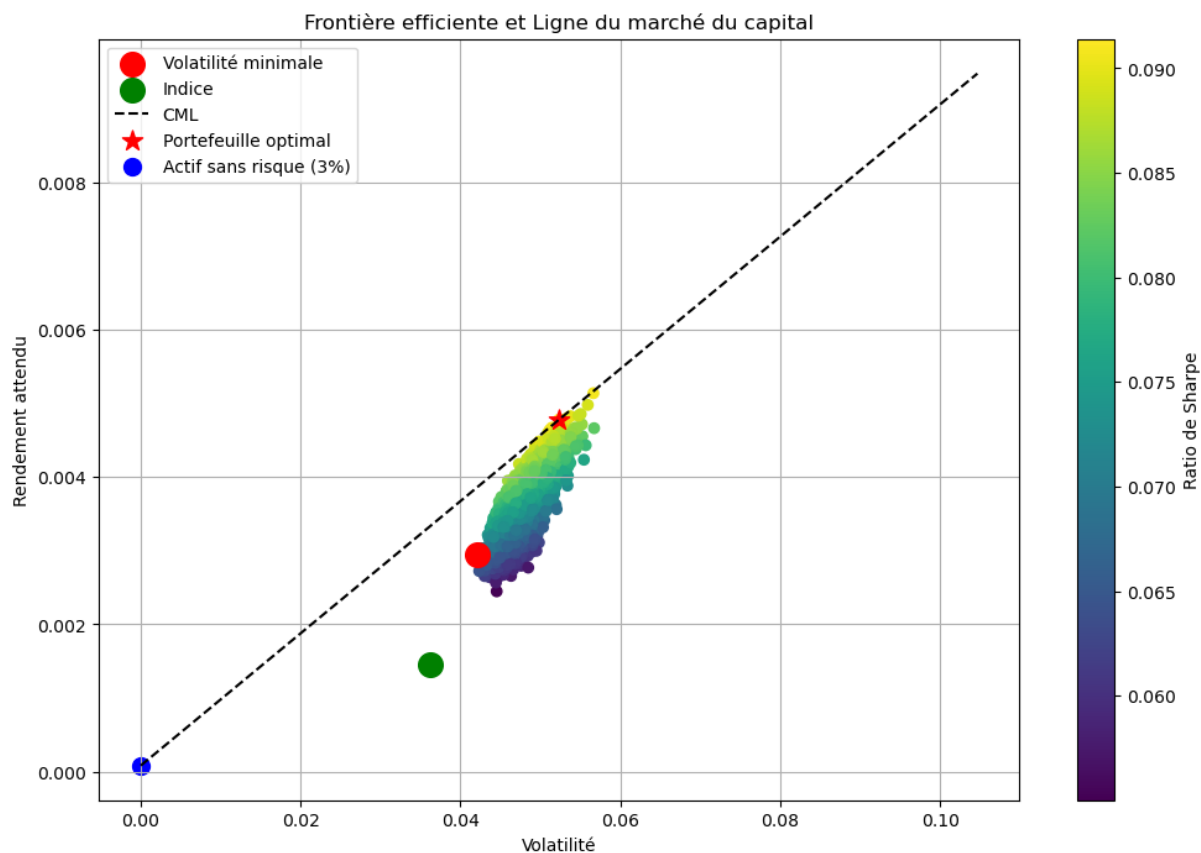
OLS Regression Results						
=====						
Dep. Variable:	y	R-squared:	0.841			
Model:	OLS	Adj. R-squared:	0.841			
Method:	Least Squares	F-statistic:	5073.			
Date:	Fri, 12 May 2023	Prob (F-statistic):	0.00			
Time:	23:50:35	Log-Likelihood:	2684.6			
No. Observations:	961	AIC:	-5365.			
Df Residuals:	959	BIC:	-5355.			
Df Model:	1					
Covariance Type:	nonrobust					
=====						
	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
-----						
const	0.0006	0.000	1.196	0.232	-0.000	0.002
indice	0.9391	0.013	71.227	0.000	0.913	0.965
=====						
Omnibus:	198.260	Durbin-Watson:	2.101			
Prob(Omnibus):	0.000	Jarque-Bera (JB):	4014.298			
Skew:	-0.350	Prob(JB):	0.00			
Kurtosis:	12.988	Cond. No.	27.6			
=====						

*Figure 24 : Régression par MCO des rendements du portefeuille optimal*

Nous avons ici un bon  $R^2$  de 84% donc la régression est de bonne qualité avec un  $\beta$  de 0,939 ce qui n'est pas très loin de la moyenne des  $\beta$  glissants de 0,958.

Ainsi on peut conclure que le  $\beta$  du portefeuille optimal est inférieur à 1.

## 4.b Superposition de la frontière efficiente et de la CML



*Figure 25 : Frontière efficiente et profil de risque de l'indice boursier*

Nous remarquons tout d'abord où se trouve l'indice que nous avons créé. Le point nous semble mal placé mais nous avons vérifié plusieurs fois le code de la création de l'indice, de la création de la frontière efficiente mais nous ne trouvons pas d'erreur.

Néanmoins nous pouvons désormais voir tous les portefeuilles optimaux possible en combinant le portefeuille avec le plus grand ratio de Sharpe et l'actif sans risque.

## 5. Value at Risk

### 5.a Calcul de la VaR pour notre portefeuille optimal

Les crypto-monnaies étant connues pour leur volatilité, nous avons maintenant décidé de mesurer nos risques de pertes. Pour cela, nous allons calculer notre Value-at-Risk (VaR). La VaR est une mesure statistique du risque financier qui quantifie la perte maximale attendue sur une période donnée à un certain niveau de confiance. La VaR a certaines limites. Elle ne dit rien sur l'ampleur de la perte lorsque celle-ci dépasse la VaR (c'est-à-dire dans les 5% des cas les plus défavorables dans l'exemple ci-dessus). Elle repose entièrement sur les données historiques et suppose donc que le futur ressemblera au passé. De plus, elle ne prend en compte que le risque de marché et suppose que les rendements sont indépendants et identiquement distribués.

Nous avons un problème supplémentaire, les rendements de nos crypto-monnaie ne sont pas normaux, ainsi nous ne pouvons pas calculer de VaR paramétrique, nous devons donc calculer une VaR non-paramétrique, pour cela il existe 2 méthodes que nous allons expérimenter : la VaR historique et la VaR Monte-Carlo.

Pour la VaR historique, nous avons uniquement à trier nos rendements et notre VaR sera la valeur du quantile défini.

La méthode Monte-Carlo est une technique de simulation qui permet de comprendre l'impact du risque et de l'incertitude dans les modèles de prévision financière et de prise de décision. Nous simulons cette fois-ci plusieurs portefeuilles en prenant en compte les rendements et la volatilité de nos actifs. Nous récupérons chaque rendement, nous les trions et enfin comme la VaR historique on détermine.

Voici nos résultats pour notre portefeuille optimal :

*VaR historique 95% journalière : -5,9%*

*VaR historique 95% mensuelle : -27%*

*VaR Monte-Carlo 95% journalière :-5,7%*

*VaR Monte-Carlo 95% mensuelle : -24%*

Afin de mettre en perspective ces résultats, voici des résultats pour le S&P 500:

*VaR historique 95% mensuelle: -2,9%*

*VaR historique 95% mensuelle: -9,3%*

Nous avons décidé de prendre une VaR à 95% journalière et mensuelle.

Tout d'abord, nous voyons que pour notre portefeuille optimale la VaR historique et simulé correspond, ce qui crédibilise notre résultat.

De plus, on remarque bien que les crypto-monnaies sont bien plus volatiles que les actions avec de VaR 2 à 3 fois plus importantes.

## **5.b Optimisation de la VaR**

Maintenant que nous avons présenté ce qu'est la VaR, nous allons tenter une autre manière de trouver un portefeuille optimal. Cette autre méthode consiste à trouver la combinaison des poids des crypto-monnaies qui nous donnera la VaR la plus basse.

Seulement, la VaR seule ne prend en compte que le risque de perte et ignore le rendement potentiel. Dans la pratique, les investisseurs cherchent à équilibrer le rendement et le risque, et ils utilisent souvent une mesure de performance ajustée au risque, comme le ratio de Sharpe, pour le faire.

Cependant, pour certains investisseurs, surtout ceux qui sont très averses au risque, minimiser le risque de perte peut être une priorité plus importante que maximiser le rendement. Par exemple, un fonds de pension peut avoir une tolérance au risque très faible parce qu'il doit être en mesure de payer des prestations de retraite prédéfinies, peu importe ce qui se passe sur les marchés financiers. Dans ce cas, minimiser la VaR pourrait être un objectif approprié.

En fin de compte, l'optimalité d'un portefeuille dépend des objectifs et de la tolérance au risque de l'investisseur. Un portefeuille qui minimise la VaR pourrait être optimal pour un investisseur, tandis qu'un portefeuille qui maximise le ratio de Sharpe pourrait être optimal pour un autre.

BTC	23.08	ADA	12.84	DOT	0.00	UNI	1.90
ETH	9.95	DOGE	0.00	TRX	25.80		
BNB	7.63	SOL	10.96	LTC	0.00		
XRP	0.00	MATIC	0.00	AVAX	7.83		

*Figure 26 : portefeuille optimal de prudence*

Ceci est donc le portefeuille optimal de prudence et on retrouve évidemment les crypto-monnaies les moins volatiles comme Bitcoin, Cardano et Tron. Ces crypto-monnaies sont parmi les plus anciennes avec des fondamentaux solides ce qui leur permet d'être moins soumis aux aléas du marchés.

Voici sur le graphique rendement/volatilité où se trouve ce portefeuille prudent, il coïncide pratiquement avec le portefeuille à variance minimale.

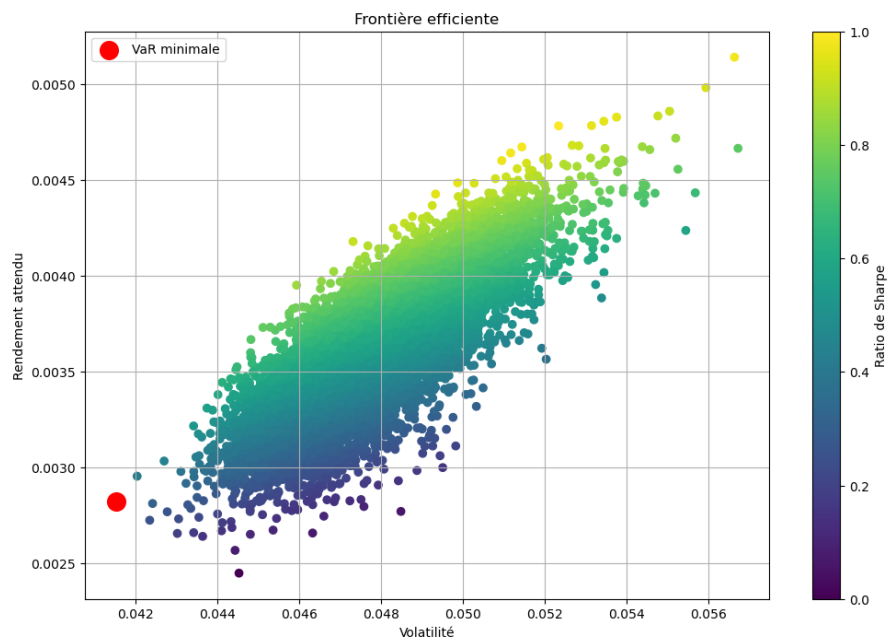


Figure 26 : Frontière efficiente et portefeuille VaR minimale

## 6. Conclusion

Nous avons commencé notre exploration en récupérant les données des prix des crypto-monnaies via l'API de CoinGecko, couvrant une période spécifique. Après avoir obtenu ces données, nous avons procédé à une analyse descriptive pour comprendre les tendances et les caractéristiques de base des séries temporelles des prix et des rendements.

Nous avons ensuite transformé les données de prix en rendements journaliers pour chaque crypto-monnaie et calculé leur volatilité pour évaluer le niveau de risque associé à chaque actif. Pour mieux comprendre les interactions entre les crypto-monnaies, nous avons réalisé une analyse de corrélation, examinant comment les mouvements de prix de différentes crypto-monnaies sont liés les uns aux autres.

Pour vérifier les hypothèses sous-jacentes de nombreux modèles financiers, nous avons testé si les rendements suivent une distribution normale.

Avec ces informations en main, nous avons entrepris d'optimiser un portefeuille de crypto-monnaies. En utilisant les rendements et la matrice de covariance des rendements, nous avons cherché le portefeuille qui maximise le ratio de Sharpe, une mesure couramment utilisée du rendement ajusté au risque.

Nous avons visualisé nos résultats en traçant la frontière efficiente, une représentation graphique des combinaisons de rendement et de risque qui maximisent le ratio de Sharpe. Nous avons également identifié le portefeuille avec la volatilité minimale et celui avec le ratio de Sharpe maximal.

Ensuite, nous avons calculé la Value at Risk (VaR) pour chaque crypto-monnaie, une mesure populaire du risque de perte. Nous avons également cherché à optimiser notre portefeuille en minimisant cette VaR, en utilisant la même méthode d'optimisation que précédemment.

Nous avons également exploré la Capital Market Line (CML), une ligne qui illustre les taux de rendement pour des niveaux de risque efficaces, en la superposant sur notre frontière efficiente.

Enfin, nous avons comparé notre portefeuille de crypto-monnaies avec un portefeuille d'actions américaines. Cette comparaison nous a permis d'apprécier les différences en termes de rendement et de risque entre les deux types d'actifs.

Ainsi, à travers ce processus, nous avons non seulement acquis une compréhension approfondie du comportement des crypto-monnaies, mais nous avons également identifié les portefeuilles optimaux en fonction de différents critères, tels que le ratio de Sharpe et la Value at Risk.





## 7. Bibliographie:

[ ] Bouri, E., Molnár, P., Azzi, G., Roubaud, D., & Hagfors, L. I. (2017). On the hedge and safe haven properties of Bitcoin: Is it really more than a diversifier? *Finance Research Letters*, 20, 192-198.

[ ] Platanakis, E., Sakkas, A., & Sutcliffe, C. (2018). The role of cryptocurrencies in optimal investment portfolios. In: S. V. Bekiros, R. K. Gupta, A. Matousek, M. Vieito, (Eds.), *Handbook of Digital Finance and Financial Inclusion: Cryptocurrency, FinTech, InsurTech, and Regulation* (pp. 3-36). Academic Press.

[ ] Botraiders: Qu'est-ce qu'un indice boursier ?

[ ] Ji, X., Ma, J., & Deng, Y. (2019). Portfolio diversification across cryptocurrencies. *Finance Research Letters*, 30, 200-205

[ ] Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System. Consulté sur <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>

[ ] Yermack, D. (2015). Is Bitcoin a Real Currency? An Economic Appraisal. In: D. Lee, K. (Ed.), *Handbook of Digital Currency* (pp. 31-43). Elsevier.

[ ] Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies*, 25(2), 65-86.