Université Paris-Dauphine
Économétrie II
Année universitaire 2022-2023

Projet Mesure et Gestion des Risques en Finance de Marché

Par Benkaddour Joudy, BOUSSAID Nassim et MOUROUGAYA Kartty

Sous la direction de M. Kayo de Kayo

Déclaration préalable au projet :

Nous déclarons sur l'honneur que ce mémoire a été écrit de notre main, sans aide extérieure non autorisée, qu'il n'a pas été présenté auparavant pour évaluation et qu'il n'a jamais été publié, dans sa totalité ou en partie. Toutes parties, groupes de mots ou idées, aussi limités soient-ils, y compris des tableaux, graphiques, cartes etc. qui sont empruntés ou qui font référence à d'autres sources bibliographiques sont présentés comme tels, sans exception aucune.

Signé par :
Par Benkaddour Joudy, BOUSSAID Nassim et MOUROUGAYA Kartty, en date du 27 février 2023

Partie B : VaR Cornish-Fischer d'une unique option - calculs théoriques

π est un portefeuille composé d'une unique option, et on note δP l'approximation delta-gamma-speed de son PnL entre t et $t+\delta t$.

$$PnL^{\pi}_{[t;t+\delta t]} \approx \Delta * \delta S + \frac{1}{2} * \Gamma * (\delta S)^2 + \frac{1}{6} * Speed * (\delta S)^3 \stackrel{\text{def}}{=} \delta P$$

On pose $\delta x = \frac{\delta S}{S}$ le rendement linéaire du sous-jacent et on suppose que $\delta x \sim N(0, \sigma)$. Montrer que :

1 – $\delta P = \Delta * S * \delta x + \frac{1}{2} * \Gamma * S^2 * (\delta x)^2 + \frac{1}{6} * Speed * S^3 * (\delta x)^3$

D'après $\delta x = \frac{\delta S}{S}$, nous avons $\delta S = \delta x * S$. D'où :

$$\delta P = \Delta * \delta S + \frac{1}{2} * \Gamma * (\delta S)^2 + \frac{1}{6} * Speed * (\delta S)^3$$
$$\delta P = \Delta * \delta x * S + \frac{1}{2} * \Gamma * (\delta x * S)^2 + \frac{1}{6} * Speed * (\delta x * S)^3$$
$$\delta P = \Delta * S * \delta x + \frac{1}{2} * \Gamma * S^2 * (\delta x)^2 + \frac{1}{6} * Speed * S^3 * (\delta x)^3$$

2 – $\mathbb{E}[\delta P], \mathbb{E}[(\delta P)^2], \ \mathbb{E}[(\delta P)^3]$ et $\mathbb{E}[(\delta P)^4]$ peuvent s'écrire comme des polynômes en σ.

Afin de faciliter les calculs nous allons poser les variables suivantes :
- $a = \frac{1}{6} * Speed * S^3$
- $b = \frac{1}{2} * \Gamma * S^2$
- $c = \Delta * S$

$$\delta P = \Delta * S * \delta x + \frac{1}{2} * \Gamma * S^2 * (\delta x)^2 + \frac{1}{6} * Speed * S^3 * (\delta x)^3$$

$$\delta P = a * (\delta x)^3 + b * (\delta x)^2 + c * \delta x$$

$$\mathbb{E}[\delta P] = \mathbb{E}[a * (\delta x)^3 + b * (\delta x)^2 + c * \delta x]$$

$$\mathbb{E}[\delta P] = a * \mathbb{E}[(\delta x)^3] + b * \mathbb{E}[(\delta x)^2] + c * \mathbb{E}[(\delta x)]$$

Or :
- $\delta x \sim N(0, \sigma)$
- $\mathbb{E}[(X-\mu)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k * k!} * \sigma^{2k}$
- $\mathbb{E}[(X-\mu)^{2k+1}] = 0$

$$\mathbb{E}[\delta P] = a * 0 + b * \frac{(2*1)!}{2^1 * 1!} * \sigma^{2*1} + c * 0$$
$$\mathbb{E}[\delta P] = b * \frac{2}{2} * \sigma^2 = \frac{1}{2} * \Gamma * S^2 * \sigma^2$$

$$\mathbb{E}[(\delta P)^2] = \mathbb{E}[(a * (\delta x)^3 + b * (\delta x)^2 + c * \delta x)^2]$$

Nous utilisons le premier développement polynomial présent dans l'énoncé, ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}[(\delta P)^2] = a^2 * \mathbb{E}[(\delta P)^6] + 2ab * \mathbb{E}[(\delta P)^5] + (b^2 + 2ac) * \mathbb{E}[(\delta P)^4] + 2bc * \mathbb{E}[(\delta P)^3] + c^2 * \mathbb{E}[(\delta P)^2]$$

Nous utilisons les propriétés suivantes :
- $\mathbb{E}[(X-\mu)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k * k!} * \sigma^{2k}$
- $\mathbb{E}[(X-\mu)^{2k+1}] = 0$

$$\mathbb{E}[(\delta P)^2] = a^2 * \frac{(2*3)!}{2^3 * 3!} * \sigma^{2*3} + 2ab * 0 + (b^2 + 2ac) * \frac{(2*2)!}{2^2 * 2!} * \sigma^{2*2} + 2bc * 0 + c^2 * \frac{(2*1)!}{2^1 * 1!} * \sigma^{2*1}$$

$$\mathbb{E}[(\delta P)^2] = a^2 * \frac{6!}{8 * 3!} * \sigma^6 + (b^2 + 2ac) * \frac{4!}{4 * 2!} * \sigma^4 + c^2 * \frac{2!}{2 * 1!} * \sigma^2$$

$$\mathbb{E}[(\delta P)^2] = a^2 * 15 * \sigma^6 + (b^2 + 2ac) * 3 * \sigma^4 + c^2 * 1 * \sigma^2$$

$$\mathbb{E}[(\delta P)^3] = \mathbb{E}[(a * (\delta x)^3 + b * (\delta x)^2 + c * \delta x)^3]$$

Nous utilisons le deuxième développement polynomial présent dans l'énoncé, ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}[(\delta P)^3] = a^3 * \mathbb{E}[(\delta P)^9] + 3ba^2 * \mathbb{E}[(\delta P)^8] + 3 * (ab^2 + ca^2) * \mathbb{E}[(\delta P)^7] + (b^3 + 6abc) * \mathbb{E}[(\delta P)^6] + 3 * (cb^2 + ac^2) * \mathbb{E}[(\delta P)^5] + 3bc^2 * \mathbb{E}[(\delta P)^4] + c^3 * \mathbb{E}[(\delta P)^3]$$

Nous utilisons les propriétés suivantes :
- $\mathbb{E}[(X-\mu)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k * k!} * \sigma^{2k}$
- $\mathbb{E}[(X-\mu)^{2k+1}] = 0$

$$\mathbb{E}[(\delta P)^3] = a^3 * 0 + 3ba^2 * \frac{(2*4)!}{2^4 * 4!} * \sigma^{2*4} + 3 * (ab^2 + ca^2) * 0 + (b^3 + 6abc) * \frac{(2*3)!}{2^3 * 3!} * \sigma^{2*3} + 3 * (cb^2 + ac^2) * 0 + 3bc^2 * \frac{(2*2)!}{2^2 * 2!} * \sigma^{2*2} + c^3 * 0$$

$$\mathbb{E}[(\delta P)^3] = 3ba^2 * 105 * \sigma^8 + (b^3 + 6abc) * 15 * \sigma^6 + 3bc^2 * 3 * \sigma^4$$

$$\mathbb{E}[(\delta P)^3] = 315 * ba^2 * \sigma^8 + 15 * (b^3 + 6abc) * \sigma^6 + 9 * bc^2 * \sigma^4$$

$$\mathbb{E}[(\delta P)^4] = \mathbb{E}[(a * (\delta x)^3 + b * (\delta x)^2 + c * \delta x)^4]$$

Nous utilisons le troisième développement polynomial présent dans l'énoncé, ce qui nous donne :

$$\mathbb{E}[(\delta P)^4] = a^4 * \mathbb{E}[(\delta P)^{12}] + 4ba^3 * \mathbb{E}[(\delta P)^{11}] + (6a^2b^2 + 4ca^3) * \mathbb{E}[(\delta P)^{10}] + (4ab^3 + 12bca^2) * \mathbb{E}[(\delta P)^9] + (b^4 + 12acb^2 + 6a^2c^2) * \mathbb{E}[(\delta P)^8] + (4cb^3 + 12abc^2) * \mathbb{E}[(\delta P)^7] + (6b^2c^2 + 4ac^3) * \mathbb{E}[(\delta P)^6] + 4bc^3 * \mathbb{E}[(\delta P)^5] + c^4 * \mathbb{E}[(\delta P)^4]$$

Nous utilisons les propriétés suivantes :
- $\mathbb{E}[(X-\mu)^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k * k!} * \sigma^{2k}$
- $\mathbb{E}[(X-\mu)^{2k+1}] = 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\delta P)^4] = a^4 * \mathbb{E}[(\delta P)^{12}] + 4ba^3 * \mathbb{E}[(\delta P)^{11}] + (6a^2b^2 + 4ca^3) * \mathbb{E}[(\delta P)^{10}] \\ + (4ab^3 + 12bca^2) * \mathbb{E}[(\delta P)^9] + (b^4 + 12acb^2 + 6a^2c^2) * \mathbb{E}[(\delta P)^8] \\ + (4cb^3 + 12abc^2) * \mathbb{E}[(\delta P)^7] + (6b^2c^2 + 4ac^3) * \mathbb{E}[(\delta P)^6] + 4bc^3 * \mathbb{E}[(\delta P)^5] \\ + c^4 * \mathbb{E}[(\delta P)^4]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\delta P)^4] = a^4 * \frac{(2*6)!}{2^6 * 6!} * \sigma^{2*6} + 4ba^3 * 0 + (6a^2b^2 + 4ca^3) * \frac{(2*5)!}{2^5 * 5!} * \sigma^{2*5} \\ + (4ab^3 + 12bca^2) * 0 + (b^4 + 12acb^2 + 6a^2c^2) * \frac{(2*4)!}{2^4 * 4!} * \sigma^{2*4} \\ + (4cb^3 + 12abc^2) * 0 + (6b^2c^2 + 4ac^3) * \frac{(2*3)!}{2^3 * 3!} * \sigma^{2*3} + 4bc^3 * 0 + c^4 \\ * \frac{(2*2)!}{2^2 * 2!} * \sigma^{2*2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\delta P)^4] = 10395 * a^4 * \sigma^{12} + 945 * (6a^2b^2 + 4ca^3) * \sigma^{10} + 105 * (b^4 + 12acb^2 + 6a^2c^2) * \sigma^8 \\ + 15 * (6b^2c^2 + 4ac^3) * \sigma^6 + 3 * c^4 * \sigma^4\end{aligned}$$

3 – $\sigma_{\delta P}^2 = \mathbb{E}[(\delta P)^2] - \mathbb{E}^2[\delta P]$

$$\sigma_{\delta P}^2 = V[\delta P] = \mathbb{E}[(\delta P - \mathbb{E}[\delta P])^2]$$

$$\sigma_{\delta P}^2 = \mathbb{E}\left[(\delta P)^2 - 2 * \delta P * \mathbb{E}[\delta P] + \mathbb{E}^2[\delta P]\right]$$

$$\sigma_{\delta P}^2 = \mathbb{E}[(\delta P)^2] - 2 * \mathbb{E}[\delta P] * \mathbb{E}[\delta P] + \mathbb{E}^2[\delta P]$$

$$\sigma_{\delta P}^2 = \mathbb{E}[(\delta P)^2] - 2 * \mathbb{E}^2[\delta P] + \mathbb{E}^2[\delta P]$$

$$\sigma_{\delta P}^2 = \mathbb{E}[(\delta P)^2] - \mathbb{E}^2[\delta P]$$

4 – $\sigma_{\delta P}^3 * S_{\delta P} = \mathbb{E}[(\delta P)^3] - 3 * \mathbb{E}[(\delta P)^2] * \mathbb{E}[\delta P] + 2 * \mathbb{E}^3[\delta P]$

$$\sigma_{\delta P}^3 * S_{\delta P} = \sigma_{\delta P}^3 * \mathbb{E}\left[\left(\frac{\delta P - \mathbb{E}[\delta P]}{\sigma_{\delta P}}\right)^3\right]$$

$$\sigma_{\delta P}^3 * S_{\delta P} = \frac{\sigma_{\delta P}^3}{\sigma_{\delta P}^3} * \mathbb{E}[(\delta P - \mathbb{E}[\delta P])^3]$$

$$\sigma_{\delta P}^3 * S_{\delta P} = 1 * \mathbb{E}\left[\delta P^3 - 3 * \delta P^2 * \mathbb{E}[\delta P] + 3 * \delta P * \mathbb{E}^2[\delta P] - \mathbb{E}^3[\delta P]\right]$$

$$\sigma_{\delta P}^3 * S_{\delta P} = \mathbb{E}[(\delta P)^3] - 3 * \mathbb{E}[(\delta P)^2] * \mathbb{E}[\delta P] + 3 * \mathbb{E}[\delta P] * \mathbb{E}^2[\delta P] - \mathbb{E}^3[\delta P]$$

$$\sigma_{\delta P}^3 * S_{\delta P} = \mathbb{E}[(\delta P)^3] - 3 * \mathbb{E}[(\delta P)^2] * \mathbb{E}[\delta P] + 3 * \mathbb{E}^3[\delta P] - \mathbb{E}^3[\delta P]$$

$$\sigma_{\delta P}^3 * S_{\delta P} = \mathbb{E}[(\delta P)^3] - 3 * \mathbb{E}[(\delta P)^2] * \mathbb{E}[\delta P] + 2 * \mathbb{E}^3[\delta P]$$

5 – $\sigma_{\delta P}^4 * K_{\delta P} = \mathbb{E}[(\delta P)^4] - 4 * \mathbb{E}[(\delta P)^3] * \mathbb{E}[\delta P] + 6 * \mathbb{E}[(\delta P)^2] * \mathbb{E}^2[\delta P] - 3 * \mathbb{E}^4[\delta P]$

$$\sigma_{\delta P}^4 * K_{\delta P} = \sigma_{\delta P}^4 * \mathbb{E}\left[\left(\frac{\delta P - \mathbb{E}[\delta P]}{\sigma_{\delta P}}\right)^4\right]$$

$$\sigma_{\delta P}^4 * K_{\delta P} = \frac{\sigma_{\delta P}^4}{\sigma_{\delta P}^4} * \mathbb{E}[(\delta P - \mathbb{E}[\delta P])^4]$$

$$\sigma_{\delta P}^4 * S_{\delta P} = 1 * \mathbb{E}\left[\delta P^4 - 4 * \delta P^3 * \mathbb{E}[\delta P] + 6 * \delta P^2 * \mathbb{E}^2[\delta P] - 4 * \delta P * \mathbb{E}^3[\delta P] + \mathbb{E}^4[\delta P]\right]$$

$$\sigma_{\delta P}^4 * S_{\delta P} = \mathbb{E}[(\delta P)^4] - 4 * \mathbb{E}[(\delta P)^3] * \mathbb{E}[\delta P] + 6 * \mathbb{E}[(\delta P)^2] * \mathbb{E}^2[\delta P] - 4 * \mathbb{E}[\delta P] * \mathbb{E}^3[\delta P] + \mathbb{E}^4[\delta P]$$

$$\sigma_{\delta P}^4 * S_{\delta P} = \mathbb{E}[(\delta P)^4] - 4 * \mathbb{E}[(\delta P)^3] * \mathbb{E}[\delta P] + 6 * \mathbb{E}[(\delta P)^2] * \mathbb{E}^2[\delta P] - 4 * \mathbb{E}^4[\delta P] + \mathbb{E}^4[\delta P]$$

$$\sigma_{\delta P}^4 * S_{\delta P} = \mathbb{E}[(\delta P)^4] - 4 * \mathbb{E}[(\delta P)^3] * \mathbb{E}[\delta P] + 6 * \mathbb{E}[(\delta P)^2] * \mathbb{E}^2[\delta P] - 3 * \mathbb{E}^4[\delta P]$$

6 – $\mathbb{E}[L] = -\mathbb{E}[\delta P]$ avec ($L = -\delta P = la\ perte\ du\ portefeuille$)

$$\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[-\delta P]$$

En raison de la linéarité de l'espérance, nous avons :

$$\mathbb{E}[L] = -\mathbb{E}[\delta P]$$

7 – $\sigma_L = \sigma_{\delta P}$

$$\sigma_L = \sigma_{-\delta P}$$

$$\sigma_L = \sqrt{V[-\delta P]}$$

$$\sigma_L = \sqrt{(-1)^2 * V[\delta P]}$$

$$\sigma_L = 1 * \sqrt{V[\delta P]}$$

$$\sigma_L = \sigma_{\delta P}$$

8 – $S_L = -S_{\delta P}$

$$S_L = S_{-\delta P}$$

$$S_L = \mathbb{E}\left[\left(\frac{-\delta P - \mathbb{E}[-\delta P]}{\sigma_{-\delta P}}\right)^3\right]$$

D'après le calcul théorique précédent, nous avons que :

$$\sigma_L = \sigma_{-\delta P}$$

$$S_L = (-1)^3 * \mathbb{E}\left[\left(\frac{\delta P - \mathbb{E}[\delta P]}{\sigma_{\delta P}}\right)^3\right]$$

$$S_L = -\mathbb{E}\left[\left(\frac{\delta P - \mathbb{E}[\delta P]}{\sigma_{\delta P}}\right)^3\right]$$

$$S_L = -S_{\delta P}$$

9 – $K_L = K_{\delta P}$

$$K_L = K_{-\delta P}$$

$$K_L = \mathbb{E}\left[\left(\frac{-\delta P - \mathbb{E}[-\delta P]}{\sigma_{-\delta P}}\right)^4\right]$$

D'après le calcul théorique précédent, nous avons que :

$$\sigma_L = \sigma_{-\delta P}$$

$$K_L = (-1)^4 * \mathbb{E}\left[\left(\frac{\delta P - \mathbb{E}[\delta P]}{\sigma_{\delta P}}\right)^4\right]$$

$$K_L = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\delta P - \mathbb{E}[\delta P]}{\sigma_{\delta P}}\right)^4\right]$$

$$K_L = K_{\delta P}$$