Analyse I : Série 0

<u>Note :</u> cette série sera discutée au cours de la première séance d'exercices, le vendredi 22 septembre.

1. Soient A, B et C trois assertions. En écrivant les tables de vérités correspondantes, vérifier que les équivalences suivantes sont vraies :

   a) $\neg(\neg\mathsf{A}) \Leftrightarrow \mathsf{A}$
   b) $\neg(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathsf{A}) \vee (\neg\mathsf{B})$
   c) $\neg(\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathsf{A}) \wedge (\neg\mathsf{B})$
   d) $(\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \wedge \mathsf{C} \Leftrightarrow (\mathsf{A} \wedge \mathsf{C}) \vee (\mathsf{B} \wedge \mathsf{C})$
   e) $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \vee \mathsf{C} \Leftrightarrow (\mathsf{A} \vee \mathsf{C}) \wedge (\mathsf{B} \vee \mathsf{C})$
   f) $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathsf{A}) \vee \mathsf{B}$
   g) $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Leftrightarrow \big[(\neg\mathsf{B}) \Rightarrow (\neg\mathsf{A})\big]$
   h) $(\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}) \Leftrightarrow (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \wedge (\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{A})$

2. Donner la contraposée et la négation des implications suivantes :

   a) $x > 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0$
   b) $ab = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Associer chaque assertion à la description correspondante :

   a) f ne s'annule qu'au plus une fois
   b) f ne s'annule jamais
   c) f ne peut s'annuler qu'en 0
   d) f s'annule au moins une fois hors de 0
   e) f s'annule en 0

   i) $\exists x \neq 0, f(x) = 0$
   ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \big[f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow x = y\big]$
   iii) $f(0) = 0$
   iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \big[f(x) = 0 \Rightarrow x = 0\big]$
   v) $\nexists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

4. Soit $f : E \to F$. Associer chaque assertion à la description correspondante :

   a) f est injective
   b) f est surjective
   c) f est bijective

   i) $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$
   ii) $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$
   iii) $\forall x, x' \in E, \big[f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big]$

5. Décrire verbalement ce qu'affirment les assertions suivantes, puis écrire leur négation :

   a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$
   b) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, [x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y]$
   c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > M$
   d) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p \geqslant n, \forall r \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{N}, \big[p = rs \Rightarrow (r = 1) \vee (s = 1)\big]$

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

   a) f s'annule
   b) f est la fonction nulle
   c) f n'est pas une fonction constante
   d) f prend sa valeur maximale en 0
   e) f admet un minimum
   f) f prend des valeurs arbitrairement grandes

7. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

   a) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$
   b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
   c) $\varnothing \in \mathbb{N}$
   d) $\varnothing \subset \mathbb{N}$
   e) $\{1, 2\} \in \mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$
   f) $\{1, 2\} \subset \mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$
   g) $\{\{1\}\} \subset \mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$

8. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que $(E \subset F) \wedge (F \subset G) \Rightarrow E \subset G$.