9. Circuits logiques combinatoires et algèbre de Boole

Principes de fonctionnement des ordinateurs

Jonas Lätt

Centre Universitaire d’Informatique

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
CENTRE UNIVERSITAIRE D’INFORMATIQUE

Trouvé une erreur sur un transparent? Envoyez-moi un message
- *sur Twitter @teachjl ou*
- *par e-mail jonas.latt@unige.ch*

Contenu du cours

Partie I: Introduction

1. Introduction
2. Histoire de l'informatique

Partie II: Codage de l'information

3. Information digitale et codage de l'information
4. Codage des nombres entiers naturels
5. Codage des nombres entiers relatifs
6. Codage des nombres réels
7. Codage de contenu média

Partie III: Circuits logiques

8. Portes logiques
9. **Circuits logiques combinatoires et algèbre de Boole**
10. Réalisation d'un circuit combinatoire
11. Circuits combinatoires importants
12. Principes de logique séquentielle
13. Réalisation de la bascule DFF

Partie IV: Architecture des ordinateurs

14. Architecture de von Neumann
15. Réalisation des composants
16. Code machine et langage assembleur
17. Réalisation d'un processeur
18. Performance et micro-architecture
19. Du processeur au système

Les Circuits

- Un **circuit logique combinatoire** implémente une fonction logique.
- M bits de sortie S_j, j=1..M dépendent uniquement de N bits d'entrée E_i, i=1…N.

$$S_j=f(E_1, E_2,\ldots, E_N) \text{ pour tout } j=1...M$$

- **Comportement** du circuit entièrement défini par la table de vérité.
- **Réalisation** d'un circuit: combinaison de plusieurs portes logiques ou d'autres circuits. Décrit par une expression Booléenne ou un diagramme logique.

Porte vs Circuit

Porte Logique

- Exécute une opération élémentaire.
- Exemple: réalisation d’un opérateur de la logique de Boole

Circuit Logique Combinatoire

- Réalisation de n’importe quelle fonction logique, et donc, de n’importe quelle expression en algèbre de Boole.
- En pratique: se construit en composant plusieurs portes logiques.

La différence n’est pas stricte: certains auteurs désignent tous les circuits combinatoires de “portes”.

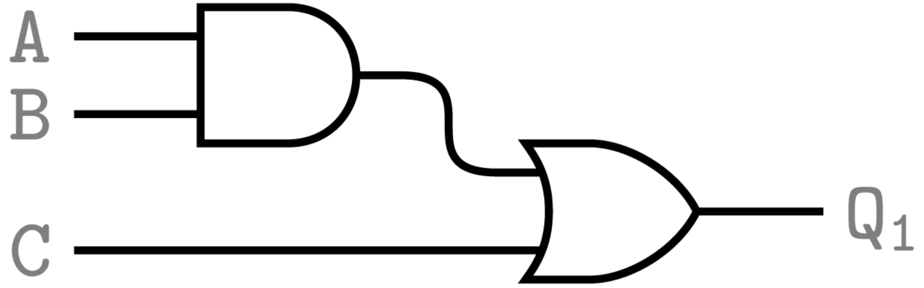
Exemples à trois entrées

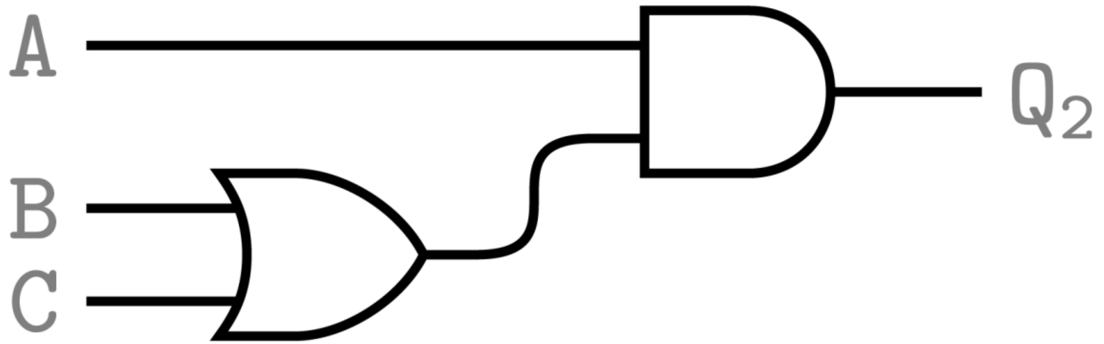
$$Q_1 = A \cdot B + C \qquad\qquad Q_2 = A \cdot (B + C)$$

Exemples à trois entrées

$$Q_1 = A \cdot B + C$$

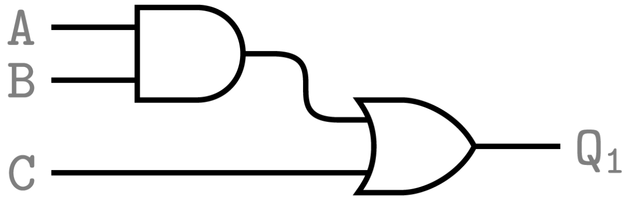
$$Q_2 = A \cdot (B + C)$$



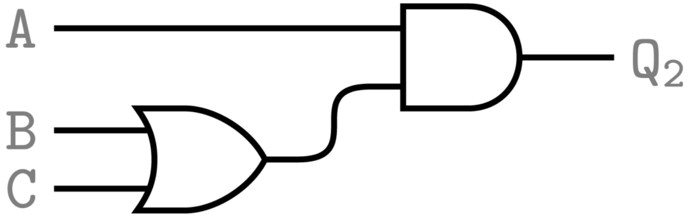


Circuits à deux portes

$$Q_1 = A \cdot B + C$$



$$Q_2 = A \cdot (B + C)$$

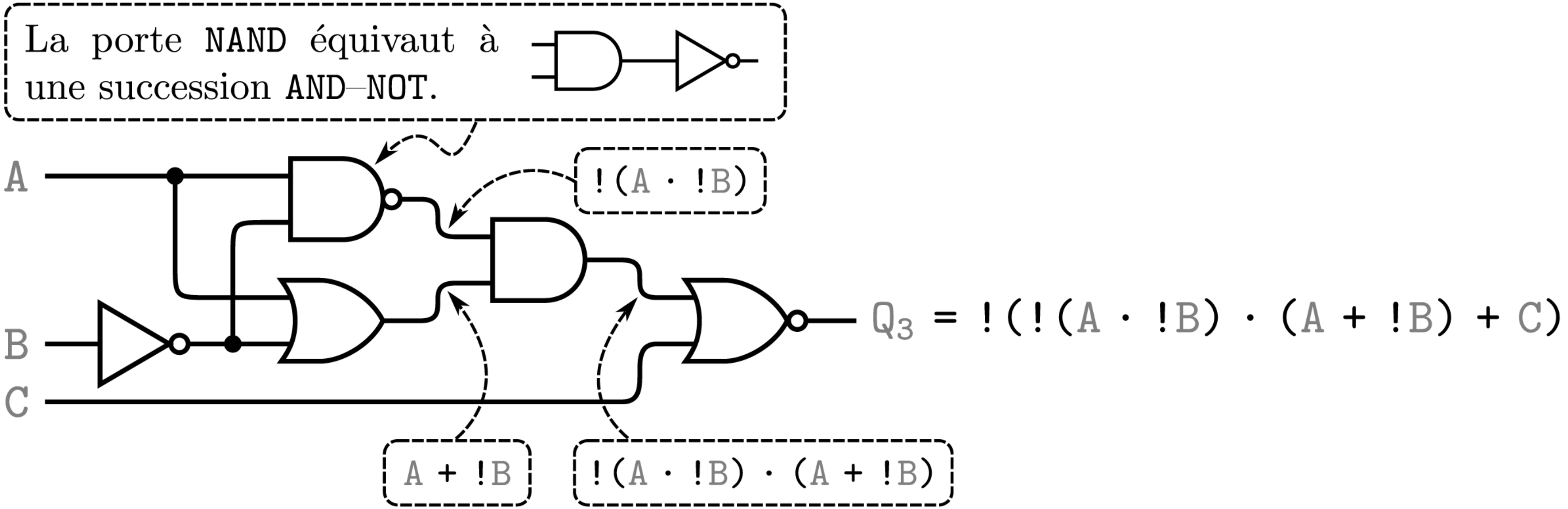


A	B	C	Q_1	Q_2
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Un exemple plus complexe

$$Q_3 = !(!(A \cdot !B) \cdot (A + !B) + C)$$

Un exemple plus complexe



Un exemple plus complexe

$$Q_3 = !(!(A \cdot !B) \cdot (A + !B) + C)$$

A	B	C	!(A · !B)	(A+!B)	Q_3
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

A vous de jouer: diagramme logique et table de vérité

$$Q_4 = A \cdot B + A \cdot C$$

$$Q_5 = (A \oplus B) \cdot !C$$

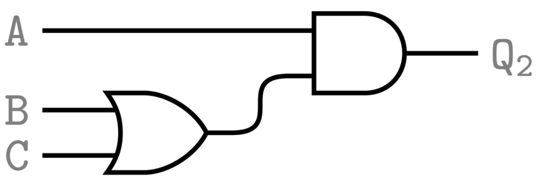
A	B	C	Q_4	Q_5
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Equivalence de circuits

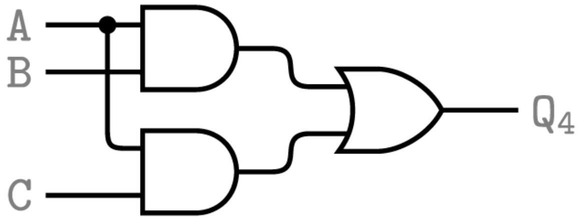
La table pour Q_4 est identique à celle pour Q_2, et la table pour Q_5 est identique à la table pour Q_3. Il s'agit donc de **circuits équivalents**.

A	B	C	Q2/Q4	Q3/Q5
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

$Q_2 = A \cdot (B + C)$

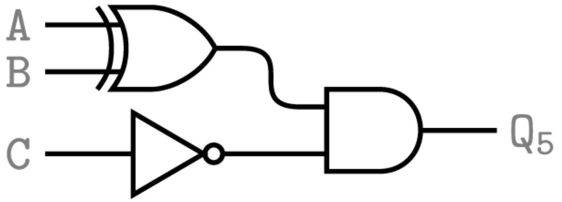


$Q_4 = A \cdot B + A \cdot C$



$$Q_3 = !(!(A \cdot !B) \cdot (A + !B) + C)$$

$Q_5 = (A \oplus B) \cdot !C$



Equivalence de circuit

$Q_2 = Q_4$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$Q_3 = Q_5$

$$!(!(A \cdot !B) \cdot (A + !B) + C) = (A \oplus B) \cdot !C$$

Algèbre de Boole

- Une branche de l'Algèbre sur les valeurs vrai/faux ou 1/0.
- Opérations de base: AND ("la multiplication") et OR ("l'addition").

Règle	AND	OR
Commutativité	$A \cdot B = B \cdot A$	$A+B = B+A$
Associativité	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A+(B+C) = (A+B)+C$
Distributivité	$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A+(B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$
Valeur neutre	$1 \cdot A = A$	$0+A = A$
Nullité	$0 \cdot A = 0$	$1+A = 1$
Idempotence	$A \cdot A = A$	$A+A = A$
Complément	$A \cdot (!A) = 0$	$A + (!A) = 1$
Lois de De Morgan	$!(A \cdot B) = !A + !B$	$!(A+B) = (!A) \cdot (!B)$

Commutativité

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Associativité

Règle	AND	OR
Commutativité	$A \cdot B = B \cdot A$	$A+B = B+A$
Associativité	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A+(B+C) = (A+B)+C$
Distributivité	$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A+(B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$
Valeur neutre	$1 \cdot A = A$	$0+A = A$
Nullité	$0 \cdot A = 0$	$1+A = 1$
Idempotence	$A \cdot A = A$	$A+A = A$
Complément	$A \cdot (!A) = 0$	$A + (!A) = 1$
Lois de De Morgan	$!(A \cdot B) = !A + !B$	$!(A+B) = (!A) \cdot (!B)$

Distributivité

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Valeur neutre

Règle	AND	OR
Commutativité	$A \cdot B = B \cdot A$	$A+B = B+A$
Associativité	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A+(B+C) = (A+B)+C$
Distributivité	$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A+(B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$
Valeur neutre	$1 \cdot A = A$	$0+A = A$
Nullité	$0 \cdot A = 0$	$1+A = 1$
Idempotence	$A \cdot A = A$	$A+A = A$
Complément	$A \cdot (!A) = 0$	$A + (!A) = 1$
Lois de De Morgan	$!(A \cdot B) = !A + !B$	$!(A+B) = (!A) \cdot (!B)$

Nullité

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Idempotence

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Complément

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Lois de De Morgan

Règle	**AND**	**OR**
Commutativité	$A \cdot B = B \cdot A$	$A+B = B+A$
Associativité	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A+(B+C) = (A+B)+C$
Distributivité	$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A+(B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$
Valeur neutre	$1 \cdot A = A$	$0+A = A$
Nullité	$0 \cdot A = 0$	$1+A = 1$
Idempotence	$A \cdot A = A$	$A+A = A$
Complément	$A \cdot (!A) = 0$	$A + (!A) = 1$
Lois de De Morgan	$!(A \cdot B) = !A + !B$	$!(A+B) = (!A) \cdot (!B)$

Algèbre de Boole

Règle	AND	OR
Commutativité	A·B = B·A	A+B = B+A
Associativité	A·(B·C) = (A·B)·C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributivité	A·(B+C) = A·B + A·C	A+(B·C) = (A+B)·(A+C)
Valeur neutre	1·A = A	0+A = A
Nullité	0·A = 0	1+A = 1
Idempotence	A·A = A	A+A = A
Complément	A · (!A) = 0	A + (!A) = 1
Lois de De Morgan	!(A·B) = !A + !B	!(A+B) = (!A)·(!B)

Exemple de simplification:

A · B + A =

Principe de dualité

Les lois de De Morgan:

Lois de De Morgan	**!(A·B) = !A + !B**	**!(A+B) = (!A)·(!B)**

Mènent au principe de dualité:

Si une affirmation logique (ou autrement dit, une égalité en algèbre de Boole) est vraie, alors son equivalent dual est vrai aussi. L'equivalent dual d'une expression se trouve en remplaçant les AND par des OR, des OR par des AND, et en remplaçant chaque variable par son complément (X par !X et vice-versa).

Principe de dualité

$$Q = (A + !B) \cdot (!A + C) \cdot !(B + C)$$

Règles de priorité dans les expressions booléennes

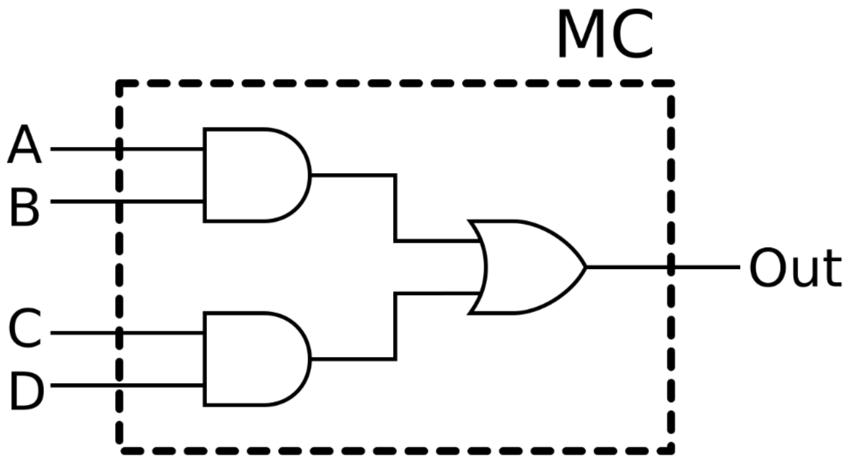
Pour des expressions comprenant NOT, AND, OR

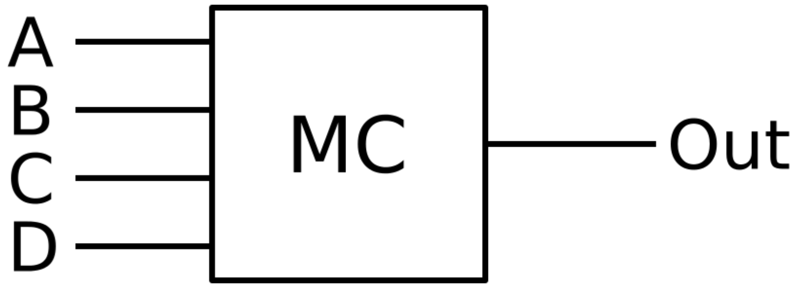
1. Priorité maximale: NOT
2. Priorité moyenne: AND
3. Priorité minimale: OR

Exemple:

$$!AB + C =$$

Définition d’un nouveau circuit





Exercice

Ecrivez l'expression logique pour le circuit suivant et simplifiez-la: