<u>Note :</u> cette série sera discutée au cours de la première séance d'exercices, le vendredi 22 septembre.

1. Soient A, B et C trois assertions. En écrivant les tables de vérités correspondantes, vérifier que les équivalences suivantes sont vraies :

   a) $\neg(\neg\mathsf{A}) \;\Leftrightarrow\; \mathsf{A}$

   b) $\neg(\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}) \;\Leftrightarrow\; (\neg\mathsf{A})\vee(\neg\mathsf{B})$

   c) $\neg(\mathsf{A}\vee\mathsf{B}) \;\Leftrightarrow\; (\neg\mathsf{A})\wedge(\neg\mathsf{B})$

   d) $(\mathsf{A}\vee\mathsf{B})\wedge\mathsf{C} \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{A}\wedge\mathsf{C})\vee(\mathsf{B}\wedge\mathsf{C})$

   e) $(\mathsf{A}\wedge\mathsf{B})\vee\mathsf{C} \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{A}\vee\mathsf{C})\wedge(\mathsf{B}\vee\mathsf{C})$

   f) $(\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}) \;\Leftrightarrow\; (\neg\mathsf{A})\vee\mathsf{B}$

   g) $(\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}) \;\Leftrightarrow\; \big[(\neg\mathsf{B})\Rightarrow(\neg\mathsf{A})\big]$

   h) $(\mathsf{A}\Leftrightarrow\mathsf{B}) \;\Leftrightarrow\; (\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B})\wedge(\mathsf{B}\Rightarrow\mathsf{A})$

Solution: On ne donne la solution que du point f, les autres étant traités de la même façon.

A	B	$\neg\mathsf{A}$	$(\neg\mathsf{A})\vee\mathsf{B}$	$\mathsf{A}\Rightarrow\mathsf{B}$
V	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**

L'équivalence est vérifiée puisque les valeurs de vérité des deux dernières colonnes coïncident.

2. Donner la contraposée et la négation des implications suivantes :

   a) $x > 0 \;\Rightarrow\; f(x) \leqslant 0$

   b) $ab = 0 \;\Rightarrow\; (a=0)\vee(b=0)$

Solution:

a) Contraposée : $f(x) > 0 \;\Rightarrow\; x \leqslant 0$ Négation : $(x>0)\wedge\big(f(x)>0\big)$

b) Contraposée : $(a\neq 0)\wedge(b\neq 0) \;\Rightarrow\; ab\neq 0$ Négation : $(ab=0)\wedge\big[(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)\big]$

3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Associer chaque assertion à la description correspondante :

   a) f ne s'annule qu'au plus une fois

   b) f ne s'annule jamais

   c) f ne peut s'annuler qu'en 0

   d) f s'annule au moins une fois hors de 0

   e) f s'annule en 0

   i) $\exists x\neq 0, f(x)=0$

   ii) $\forall x,y\in\mathbb{R}, \big[f(x)=f(y)=0 \;\Rightarrow\; x=y\big]$

   iii) $f(0)=0$

   iv) $\forall x\in\mathbb{R}, \big[f(x)=0 \;\Rightarrow\; x=0\big]$

   v) $\nexists x\in\mathbb{R}, f(x)=0$

Solution: a–ii, b–v, c–iv, d–i, e–iii

4. Soit $f:E\to F$. Associer chaque assertion à la description correspondante :

   a) f est injective

   b) f est surjective

   c) f est bijective

   i) $\forall y\in F, \exists! x\in E, f(x)=y$

   ii) $\forall y\in F, \exists x\in E, f(x)=y$

   iii) $\forall x,x'\in E, \big[f(x)=f(x') \;\Rightarrow\; x=x'\big]$

Tournez la page.

Solution: a–iii, b–ii, c–i

5. Décrire verbalement ce qu'affirment les assertions suivantes, puis écrire leur négation :

   a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$

   b) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, [x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y]$

   c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > M$

   d) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p \geqslant n, \forall r \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{N}, \big[p = rs \Rightarrow (r = 1) \vee (s = 1)\big]$

Solution:

a) « Le carré de tout nombre réel est positif »
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

b) « Entre toute paire de rationnels distincts, on peut trouver un troisième rationnel »
Négation : $\exists x, y \in \mathbb{Q}, \big[(x < y) \wedge (\nexists z \in \mathbb{Q}, x < z < y)\big]$

c) « Il existe des nombres entiers arbitrairement grands »
Négation : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leqslant M$

d) « Il existe une infinité de nombres premiers »
Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant n, \exists r, s \in \mathbb{N}, \big[(p = rs) \wedge \big((r \neq 1) \wedge (s \neq 1)\big)\big]$

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

   a) f s'annule

   b) f est la fonction nulle

   c) f n'est pas une fonction constante

   d) f prend sa valeur maximale en 0

   e) f admet un minimum

   f) f prend des valeurs arbitrairement grandes

Solution:

a) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

c) $\exists x, y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$

d) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant f(0)$

e) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(y) \geqslant f(x)$

f) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$

7. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

   a) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$

   b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

   c) $\varnothing \in \mathbb{N}$

   d) $\varnothing \subset \mathbb{N}$

   e) $\{1, 2\} \in \mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$

   f) $\{1, 2\} \subset \mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$

   g) $\{\{1\}\} \subset \mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$

Solution:

a) Faux b) Vrai c) Faux d) Vrai e) Vrai f) Faux g) Vrai

8. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que $(E \subset F) \wedge (F \subset G) \ \Rightarrow \ E \subset G$.

Solution: Rappelez-vous que $E \subset F$ signifie $\forall x \in E, x \in F$. Soit donc $x \in E$. Puisque $E \subset F$, on doit avoir $x \in F$. Puisque $F \subset G$, on doit avoir $x \in G$. Par conséquent, $\forall x \in E, x \in G$, ce qui signifie bien que $E \subset G$.