Série 2

Exercice 1. Écrire la négation des assertions suivantes.

(i) $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $[|x-y| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq f(y)]$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $[|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon]$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq N$, $[n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

(iv) $\forall E \subset \mathbb{N}$, $[E \neq \emptyset \Rightarrow (\exists n \in E, \forall m \in E, m \geq n)]$

(v) $\forall E \subset \mathbb{R}$, $[E \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}, ((\forall b \in E : b \leq a)$ et $(\forall \varepsilon > 0, \exists b \in E : b \geq a - \varepsilon))]$

Exercice 2 (Différence symétrique)**.** L'opération $\triangle$ est définie sur les ensembles $A, B \subset E$ par $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

(i) Montrer que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(ii) Vérifier que $(A \triangle B = \emptyset) \iff (A = B)$.

Exercice 3. Expliquer verbalement ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

(i) $\forall n \geq 0$, $u_n < u_{n+1}$ (où (u_n) est une suite réelle).

(ii) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction :

 (a) $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(x) = C$.

 (b) $\forall x \in E$, $[f(x) = 0 \Rightarrow x = 0]$.

 (c) $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in E$, $f(x) = y$.

 (d) $\forall x \in E, \forall y \in E$, $[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$.

 (e) $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(x) \leq A$.

Exercice 4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes.

(i) La fonction f s'annule.

(ii) La fonction f est la fonction nulle.

(iii) f n'est pas une fonction constante.

(iv) f ne prend jamais deux fois la même valeur.

(v) La fonction f admet un minimum.

(vi) f prend des valeurs arbitrairement grandes.

(vii) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles et $A(x,y)$ des assertions indexées par $(x,y) \in E \times F$.

(i) Montrer que $\big[\forall x \in E, \forall y \in F, A(x,y)\big] \Leftrightarrow \big[\forall y \in F, \forall x \in E, A(x,y)\big]$.

(ii) Montrer que $\big[\exists x \in E, \exists y \in F, A(x,y)\big] \Leftrightarrow \big[\exists y \in F, \exists x \in E, A(x,y)\big]$.

(iii) Montrer en donnant un exemple que $\exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y)$ n'est pas nécessairement équivalent à $\forall y \in F, \exists x \in E, A(x,y)$.

On dira que l'on peut échanger les quantificateurs $\forall$ adjacents (ou les $\exists$ adjacents), mais que l'on ne peut pas échanger les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exercice 6 (Fonctions caractéristiques χ_A)**.** Soient E un ensemble et $A \subset E$. La fonction caractéristique de A est définie par $\chi_A : E \to \{0,1\}$ et

$$\chi_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Montrer que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont la même fonction caractéristique.

(ii) Que peut-on dire sur A et B si $\chi_A(x) \le \chi_B(x)$ pour tout $x \in E$?

(iii) Montrer que $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$, $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ et $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$.

(iv) Montrer les formules de De Morgan pour $(A \cup B)^c$ et $(A \cap B)^c$ en utilisant les fonctions caractéristiques.

Exercice 7. Soit $f : E \to F$ une fonction bijective. Démontrer les proprétés suivantes énoncées mais pas démontrées en classe (Proposition 1.23).

(ii) $(f^{-1})^{-1} = f, \quad f^{-1} \circ f = I_E, \quad f \circ f^{-1} = I_F.$

(iii) (unicité de l'inverse) Si $g : F \to E$ tel que $g \circ f = I_E$ et $f \circ g = I_F$, alors $g = f^{-1}$.

(iv) (composition des inverses) Soit $g : F \to G$ une autre fonction bijective. Alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 8. Soit $f : E \to F$ une fonction.

(i) Soit $B \subset F$. Dans le cas où f est bijective, montrer que l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B est égale à l'image directe de B par la fonction inverse f^{-1}. (Notons que l'image réciproque existe pour tout f, tandis que la fonction inverse uniquement si f est bijective.)

(ii) Montrer que pour tout $A, B \subset F$ on a

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \qquad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

(iii) Montrer que pour tout $A, B \subset E$ on a

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

(iv) Montrer qu'en général $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ est fausse. Montrer aussi qu'elle est vraie si f est injective.

Exercice 9. (i) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Les éléments de E sont des familles $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$. Définissons la fonction $f : E \to E$ par

$$f : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}.$$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

(ii) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Les éléments de E sont des familles $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ indexées par $\mathbb{N}$ (aussi appelées suites). Définissons la fonction $f : E \to E$ par

$$f : (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}.$$

Est-ce que f est injective ? Surjective ?

(iii) Soit f la fonction de (ii). Définissons les ensembles $A, B \subset E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$A = \big\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_0 \in [0,1], x_1 \leqslant 0\big\}, \qquad B = \big\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : \exists i \in \mathbb{N}, x_i \geqslant 0\big\}.$$

Déterminer les images directes $f(A)$ et $f(B)$ ainsi que les images réciproques $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$.