UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Algèbre I - Série 1

À rendre pour le
23 Septembre 2024

Exercice 1. (Résolution graphique de systèmes)

(a) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y), dessiner les droites d'équations

$$3x + y + 1 = 0, \quad 3x + y = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y = 0.$$

(b) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y, z), dessiner les plans d'équations

$$x + y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y = 3$$

ainsi que l'intersection des deux plans d'équations

$$x + 2y + 3z = 6 \quad \text{et} \quad z = 1.$$

Exercice 2. (Résolution algébrique de systèmes)

Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x + y &= 0 \\ x - 2y &= 6 \\ 2x + 3y &= 0 \end{cases}.$$

Exercice 3. (Espaces vectoriels des fonctions)

1. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que cet ensemble, muni des lois

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \qquad && \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}, \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot (f(x)) && \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   où le $+$ et le $\cdot$ du côté droit dénotent l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{R}$, forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites de scalaires $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n \in \mathbb{R}$, qui peut aussi être vu comme l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrer que cet ensemble, muni des lois

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \\ \alpha \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (\alpha \cdot u_n)_{n \in \mathbb{N}} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (Notion d'espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si c'est un espace vectoriel ou non sur $\mathbb{R}$. Si oui, prouver la (les) propriété(s) entre parenthèse demandée(s). Si non, expliquer quel axiome est mis en défaut. Attention, certaines questions n'admettent pas pour réponse juste oui ou non.

1. L'espace $E = \{0\}$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Neutre de l'addition)
2. L'espace $E = [0, 1]$ avec les lois usuelles $\rightsquigarrow$ (Neutre de la multiplication)
3. L'espace $E = \mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Commutativité de l'addition)
4. L'espace $E = \mathbb{R}^2$ avec l'addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et la multiplication $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, 0)$. $\rightsquigarrow$ (Associativité de l'addition)

5. L'espace $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(a) = b\}$ avec les lois usuelles (définies pour l'exercice 3.1), où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont fixés. $\rightsquigarrow$ (toutes les propriétés)
6. L'espace $E = \mathbb{R}[x]$ des polynômes $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sans borne sur leur degré, avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (Distributivité à droite)

Exercice 5. (Notion de sous-espace vectoriel)

Pour chacun des espaces suivants, dire si F est un sous-espace vectoriel de E ou non, et le prouver. Tous les espaces vectoriels E sont sur $\mathbb{R}$.

1. $E = M_{2,2}(\mathbb{R})$, $F = \left\{ A \in E \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$, où $u, v \in \mathbb{R}^3$ sont fixés.
3. $E = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi)\}$, $F = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi) = a\}$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.
4. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et
   (a) $F_1 = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M\}$, où $M \in \mathbb{R}$ est fixé,
   (b) F_2 l'ensemble des fonctions bornées de E.
5. $E = \mathbb{R}_4[x]$, F l'ensemble des fonctions impaires de E.
6. E un espace vectoriel (quelconque), $F = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$, où U, V sont deux sous-espaces vectoriels (quelconques) de E fixés.