Université de Genève
Automne 2023

Analyse I : Série 1

Section de mathématiques
Yvan Velenik

Vous pouvez rendre les exercices suivants : 2b, 4a, 5a, 8b.

1. Soient E et F deux ensembles et $A(x,y)$ des assertions indexées par $(x,y) \in E \times F$. Il est clair (pensez-y un instant) que

$$\begin{aligned} \big[\forall x \in E, \forall y \in F, A(x,y)\big] &\Leftrightarrow \big[\forall y \in F, \forall x \in E, A(x,y)\big], \\ \big[\exists x \in E, \exists y \in F, A(x,y)\big] &\Leftrightarrow \big[\exists y \in F, \exists x \in E, A(x,y)\big]. \end{aligned}$$

Le but de cet exercice est de vérifier qu'il n'est cependant pas toujours possible d'interchanger des quantificateurs.

a) Montrer que $\big[\exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y)\big] \Rightarrow \big[\forall y \in F, \exists x \in E, A(x,y)\big]$.

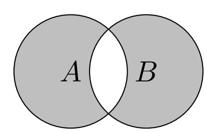
Solution: La première assertion affirme l'existence d'un élément $x^* \in E$ tel que $A(x^*,y)$ soit vraie pour tout $y \in F$. Par conséquent, si on se donne $y \in F$ arbitraire, alors on sait que $A(x^*,y)$ est vraie. En particulier, l'assertion $\exists x \in E, A(x,y)$ est vraie. Cela établit la seconde assertion.

b) Montrer par un exemple que la réciproque de l'implication précédente est fausse en général.

Solution: Étant donné deux entiers naturels x et y, notons $A(x,y)$ l'assertion « $x > y$ ». Alors, quel que soit $y \in \mathbb{N}$, il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $A(x,y)$ soit vraie (on peut prendre, par exemple, $x = y + 1$). L'assertion $\forall y \in F, \exists x \in E, A(x,y)$ est donc vraie.

Par contre, il n'existe aucun $x \in \mathbb{N}$ tel que $\forall y \in \mathbb{N}, A(x,y)$ soit vraie. En effet, $A(x,x)$ est toujours fausse. L'assertion $\exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y)$ est donc fausse, ce qui montre que l'implication n'est pas valide en général.

2. Soit E un ensemble. L'opération **différence symétrique** associe à chaque paire de sous-ensembles $A, B \subset E$ l'ensemble $A \triangle B := (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$. Démontrer les affirmations suivantes :



a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ b) $A \triangle B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

Solution:

a) Par définition,

$$x \in A \triangle B \quad \Leftrightarrow \quad [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \vee [(x \notin A) \wedge (x \in B)].$$

On rappelle les deux propriétés suivantes : quelles que soient les assertions A', B', C',

$$(A' \wedge B') \vee C' = (A' \vee C') \wedge (B' \vee C') \quad \text{et} \quad (A' \wedge B') \wedge C' = A' \wedge (B' \wedge C') = A' \wedge B' \wedge C'.$$

On en déduit que $x \in A \triangle B$ est équivalent à

$$\big[(x \in A) \vee (x \notin A)\big] \wedge \big[(x \in A) \vee (x \in B)\big] \wedge \big[(x \notin B) \vee (x \notin A)\big] \wedge \big[(x \notin B) \vee (x \in B)\big].$$

À présent, on a d'une part que les assertions $(x \in A) \vee (x \notin A)$ et $(x \notin B) \vee (x \in B)$ sont toujours vraies. D'autre part, $\big[(x \in A) \vee (x \in B)\big] \Leftrightarrow x \in A \cup B$ et

$$\begin{aligned} \big[(x \notin B) \vee (x \notin A)\big] \quad &\Leftrightarrow \quad \big[\neg(x \in B) \vee \neg(x \in A)\big] \quad &&\Leftrightarrow \quad \neg\big[(x \in B) \wedge (x \in A)\big] \\ &\Leftrightarrow \quad \neg\big[x \in A \cap B\big] &&\Leftrightarrow \quad x \notin A \cap B. \end{aligned}$$

On conclut finalement que

$$x \in A \triangle B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

b) On procède par double implication.

Tournez la page.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $A \triangle B = \varnothing$, alors $A \cap B^c = \varnothing$ et $B \cap A^c = \varnothing$. On a donc

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap B \subset B \quad \text{et} \quad B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = B \cap A \subset A,$$

ce qui montre que $A = B$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $A = B$, alors $A \triangle B = A \triangle A = A \cap A^c = \varnothing$.

3. Trouver une collection infinie $A_1, A_2, \ldots$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ telle que (i) chaque A_i contienne une infinité d'éléments et (ii) chaque entier appartienne à exactement un des ensembles A_i.

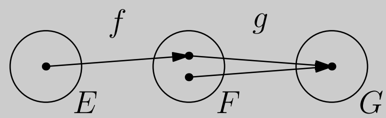
Solution: Une solution possible est de partir de $\mathbb{N}$ et de mettre 1 élément sur 2 (disons, les nombres pairs) dans A_1. On part alors de ce qui reste (les nombres impairs) et on place 1 élément sur 2 dans A_2 ; ensuite, on place 1 élément sur 2 de ce qui reste dans A_3, etc. Ci-dessous, nous décrivons cette construction de manière plus précise.
À tout sous-ensemble $B \coloneqq \{b_0, b_1, b_2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ contenant une infinité d'éléments et tel que $b_0 < b_1 < b_2 < \cdots$, on associe les sous-ensembles $B' \coloneqq \{b_{2k} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{b_0, b_2, b_4, b_6, \ldots\}$ et $B'' \coloneqq \{b_{2k+1} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{b_1, b_3, b_5, b_7, \ldots\}$.
On peut alors poser $A_1 \coloneqq \mathbb{N}'$ et $R_1 \coloneqq \mathbb{N}''$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $A_{k+1} \coloneqq R'_k$ et $R_{k+1} \coloneqq R''_k$.

4. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Démontrer les affirmations suivantes :
   a) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
   b) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
   c) Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Solution:
a) Soit $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$ et soit $y \coloneqq f(x)$, $y' \coloneqq f(x')$, $z \coloneqq g(y)$ et $z' \coloneqq g(y')$. f étant injective, $y \neq y'$. Par conséquent, g étant également injective, $z \neq z'$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$.
b) Soit $z \in G$. g étant surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. f étant également surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc $z = g \circ f(x)$.
c) Suit immédiatement de a et b.

5. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
   a) Supposons $g \circ f$ injective. f est-elle injective ? g est-elle injective ?

Solution: Montrons tout d'abord que f est injective. On procède par contraposition. Supposons f non injective. Dans ce cas, il existe $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. On a donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$, ce qui montre que $g \circ f$ n'est pas injective.
Par contre, le contre-exemple suivant montre que $g \circ f$ peut être injective sans que g le soit :



   b) Supposons $g \circ f$ surjective. f est-elle surjective ? g est-elle surjective ?

Solution: Montrons tout d'abord que g est surjective. Soit $z \in G$. $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. Soit $y \coloneqq f(x)$. Alors, $y \in F$ et $g(y) = z$.
Par contre, le même contre-exemple qu'au point a montre que $g \circ f$ peut être surjective sans que f le soit.

c) Supposons $g \circ f$ bijective. f et g sont-elle bijectives ?

Solution: Dans le contre-exemple du point a, $g \circ f$ est bijective, mais ni f, ni g ne sont bijectives (f n'est pas surjective et g n'est pas injective).

À chaque fois, prouver le résultat si la réponse est affirmative, sinon donner un contre-exemple.

6. Les fonctions suivantes sont-elles bien définies ? Lorsque c'est le cas, dire si la fonction est injective, surjective, bijective.

a) $f_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$

b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$

c) $f_3 \colon \mathbb{N} \to \{-1,1\}$, $n \mapsto (-1)^n$

d) $f_4 \colon [-1,0] \to [-1,0]$, $x \mapsto x^2$

e) $f_5 \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

f) $f_6 \colon \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto$ le plus petit nombre premier divisant n

g) $f_7 \colon \mathscr{P}(E) \to \{0,1\}^E$, $A \mapsto \chi_A$, où E est un ensemble et χ_A est la fonction caractéristique de A

Solution:

a) f_1 est bien définie, injective ($f_1(x) = f_1(y) \Leftrightarrow x+1 = y+1 \Leftrightarrow x = y$), mais pas surjective ($\forall x \in \mathbb{N}, f(x) = x+1 \neq 0$).

b) f_2 est bien définie, injective ($f_2(x) = f_2(y) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$), surjective ($\forall y \in \mathbb{R}, f_2(y/2) = y$) et donc bijective.

c) f_3 est bien définie, surjective ($f_3(0) = 1$, $f_3(1) = -1$), mais pas injective ($f_3(0) = f_3(2)$).

d) f_4 n'est pas bien définie (par exemple, $f_4(-1) \notin [-1,0]$).

e) f_5 est bien définie, injective ($f_5(x) = f_5(y) \Leftrightarrow 1/x = 1/y \Leftrightarrow x = y$), surjective ($\forall y \in \mathbb{R}^*, f_5(1/y) = y$) et donc bijective.

f) f_6 est bien définie, mais n'est ni injective ($f_6(2) = f_6(4)$), ni surjective ($\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $f_6(x) \neq 4$).

g) f_7 est bien définie. Elle est injective, car

$$f_7(A) = f_7(B) \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B \Leftrightarrow \big[\forall x \in E, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)\big] \Leftrightarrow A = B.$$

Elle est aussi surjective : soit $\chi \in \{0,1\}^E$ et posons $A \coloneqq \{x \in E \mid \chi(x) = 1\}$. Alors,

$$\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow \chi(x) = 1,$$

ce qui montre que $f_7(A) = \chi$. f_7 est donc également bijective.

7. Soit $f : E \to F$ une fonction bijective et f^{-1} sa réciproque. Démontrer les affirmations suivantes :

a) $f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_F$.

Solution: Soit $x \in E$. Alors, $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x$, puisque x est la préimage de $f(x)$. Ceci montre la première affirmation.
Pour la seconde, soit $y \in F$ et $x \coloneqq f^{-1}(y)$. Alors, $f \circ f^{-1}(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y$, puisque y est l'image de x.

b) Si $g : F \to E$ est telle que $g \circ f = \mathbb{I}_E$ ou $f \circ g = \mathbb{I}_F$, alors $g = f^{-1}$.

Solution: Soit $y \in F$ et $x \coloneqq f^{-1}(y)$.
Supposons tout d'abord que $g \circ f = \mathbb{I}_E$. Dans ce cas, $g(y) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) = x = f^{-1}(y)$.
Supposons à présent que $f \circ g = \mathbb{I}_F$. Dans ce cas, $f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f \circ g(y)\big) = f^{-1} \circ f \circ g(y) = f^{-1} \circ f(g(y)) = g(y)$.

Tournez la page.

c) f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Solution: Montrons tous d'abord que f^{-1} est bijective :
Injectivité : Soit $y, y' \in F$. Alors, $f^{-1}(y) = f^{-1}(y') \Rightarrow f\big(f^{-1}(y)\big) = f\big(f^{-1}(y')\big) \Rightarrow y = y'$, puisque $f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_F$ par le point a.
Surjectivité : Soit $x \in E$ et $y := f(x)$. Alors, $f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x$, puisque $f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_E$ par le point a.
Finalement, puisque $f : E \to F$ satisfait $f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_F$, il suit du point b que $f = (f^{-1})^{-1}$.

d) Si $g : F \to G$ est bijective, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Solution: Comme $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_E$, la conclusion suit de b.

8. Soit $f : E \to F$ une fonction.

a) Soit $B \subset F$. Dans le cas où f est bijective, montrer que l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B est égale à l'image directe de B par la fonction inverse f^{-1}.

Solution: On doit montrer que $\{x \in E \,|\, f(x) \in B\} = \big\{f^{-1}(y) \,\big|\, y \in B\big\}$. Or,

$$\begin{aligned} x_* \in \{x \in E \,|\, f(x) \in B\} &\Leftrightarrow f(x_*) \in B \\ &\Leftrightarrow \exists y \in B, f(x_*) = y \\ &\Leftrightarrow \exists y \in B, x_* = f^{-1}(y) \qquad \text{(puisque } f \text{ est bijective)} \\ &\Leftrightarrow x_* \in \big\{f^{-1}(y) \,\big|\, y \in B\big\}\,. \end{aligned}$$

b) Montrer que, pour tout $A, B \subset F$,

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Solution: Soit $x \in E$. Alors,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow \big(f(x) \in A\big) \vee \big(f(x) \in B\big) \\ &\Leftrightarrow \big(x \in f^{-1}(A)\big) \vee \big(x \in f^{-1}(B)\big) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow \big(f(x) \in A\big) \wedge \big(f(x) \in B\big) \\ &\Leftrightarrow \big(x \in f^{-1}(A)\big) \wedge \big(x \in f^{-1}(B)\big) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

c) Montrer que, pour tout $A, B \subset E$,

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Solution: Soit $y \in F$. Alors,

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B, y = f(x) \Leftrightarrow \big(\exists x \in A, y = f(x)\big) \vee \big(\exists x \in B, y = f(x)\big) \\ &\Leftrightarrow \big(y \in f(A)\big) \vee \big(y \in f(B)\big) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

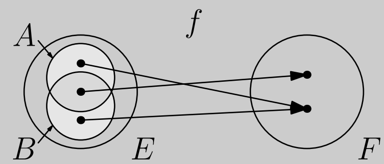
Pour la seconde affirmation,

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B, y = f(x) \Rightarrow \big(\exists x \in A, y = f(x)\big) \wedge \big(\exists x \in B, y = f(x)\big) \\ &\Leftrightarrow \big(y \in f(A)\big) \wedge \big(y \in f(B)\big) \Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

(Observez que l'implication ne peut pas être remplacée par une équivalence en général !)

d) Montrer qu'en général l'assertion $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est fausse, mais qu'elle est toujours vraie lorsque f est injective.

Solution: Contre-exemple :



Supposons à présent f injective. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Il existe donc $x \in A$ et $x' \in B$ tel que $f(x) = f(x') = y$. f étant injective, on a nécessairement $x = x'$. Donc $x \in A \cap B$, ce qui montre que $y \in f(A \cap B)$. On a donc $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. La conclusion suit puisque $f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B)$ par le point précédent.

9. Soit $f : E \to F$. Montrer que $E = \displaystyle\bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$.

Solution: On procède par double inclusion.
D'une part, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\}) \subset E$. Par conséquent, $\bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}) \subset E$.
D'autre part, pour tout $x \in E$, il existe $z \in F$ tel que $x \in f^{-1}(\{z\})$: il suffit de prendre $z = f(x)$. Par conséquent, $x \in \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$ et donc $E \subset \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$.