

Exercice 1. (Nombres complexes)

1. Écrire en forme algébrique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$ les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{i(3+2i)^2}, \quad \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2} - \sqrt{3}i}, \quad \frac{1}{\sqrt{3} - i}.$$

2. Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$-3i, \quad \sqrt{3} + i, \quad 3i(2 + i).$$

3. Résolvez les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ avec la formule habituelle pour résoudre les équations générales du second degré. Vérifiez les solutions trouvées.

— $z^2 + 2z + 3 = 0,$

— $z^2 + 2iz - 3 = 0.$

4. Résolvez l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en remplaçant $z = a + ib$

$$z + 3i + \operatorname{Re}(z)(i + (\operatorname{Im}(z))^2) = 0.$$

5. Calculer le conjugué en forme algébrique $z = a + ib$ des nombres complexes suivants :

$$\frac{5 + 2i}{1 - i}, \quad \frac{\sqrt{2} - i}{2 + i}, \quad \frac{2 - i}{i}.$$

6. Montrer la proposition suivante : $\forall z \in \mathbb{C}$:

— si $z \neq 0$: $|z^{-1}| = |z|^{-1}$;

— $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$;

— $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z.$

Exercice 2. (Coordonnées polaires)

- (a) Montrer que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

où $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ est l'écriture du nombre complexe z en coordonnées polaires.

- (b) Dédurre une formule analogue pour $\frac{z_1}{z_2}$ lorsque $z_2 \neq 0$.

- (c) Représenter graphiquement les solutions d'équation $z^3 = 1$ (racines cubiques de l'unité).

Exercice 3. (Propriétés d'espace vectoriel)

Soit V un espace vectoriel sur un corps K . Démontrer que les propriétés suivantes sont satisfaites

- (a) l'élément neutre pour l'addition est unique ;
(b) $\forall v \in V$, l'opposé $(-v)$ de v est unique ;
- (a) $0_K \cdot v = 0_V \quad \forall v \in V$;
(b) $\lambda \cdot 0_V = 0_V \quad \forall \lambda \in K$;
- l'opposé de v , noté $-v$, satisfait $-v = (-1) \cdot v$ avec $v \in V$ et $-1 \in K$;
- $\lambda \cdot v = 0 \iff \lambda = 0_K \text{ ou } v = 0_V.$

NB : Cet exercice figure en tant que Proposition 1.1.1 du polycopié, mais vous pouvez essayer de trouver vous-mêmes les preuves avant de regarder le polycopié.

Exercice 4. (Un exemple d'espace vectoriel)

Définir les opérations $+$ et \cdot sur \mathbb{C}^n et vérifier que cela muni \mathbb{C}^n d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{C} . Détailler l'associativité de la multiplication par les scalaires.

Exercice 5. (Est ce un sous-espace vectoriel? Trouver une famille génératrice.)

1. Les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^2 sont-ils des sous-espaces vectoriels sur \mathbb{R} ? Si oui, donner une famille génératrice.
 - (a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$,
 - (b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x - y = 0\}$.
2. Les sous-ensembles suivants de \mathbb{C}^3 sont-ils des sous-espaces vectoriels sur \mathbb{C} ? Si oui, trouver une famille génératrice.
 - (a) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\}$
 - (b) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y = 0\}$
 - (c) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
 - (d) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{C}\}$
 - (e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y^2 - x^3 = 0\}$

Exercice 6. (Propriétés des sous-espaces vectoriels)

L'objectif de cet exercice est de vérifier que toutes les propriétés demandées dans la définition de sous-espace vectoriel sont nécessaires.

1. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de \mathbb{R}^2 qui vérifie

$$\begin{aligned} \forall u \in U, \forall v \in U, \quad u + v &\in U, \\ \forall u \in U, \quad -u &\in U \end{aligned}$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

2. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de \mathbb{R}^2 qui vérifie :

$$\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in U$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

3. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de \mathbb{R}^2 qui vérifie

$$\begin{aligned} \forall u \in U, \forall v \in U, \quad u + v &\in U, \\ \forall u \in U, \forall \lambda > 0, \quad \lambda u &\in U \end{aligned}$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

L'exercice suivant est **facultatif**. Il ne sera pas corrigé lors de la séance d'exercices, mais sa solution sera postée sur Moodle.

Exercice 7. (Un corps à 3 éléments)

L'objectif de cet exercice est de construire un corps fini.

Rappelons que le reste de la division d'un entier n par 3 est l'unique entier r entre 0 et $3 - 1$ (compris) tel que $n - r$ soit divisible par 3. Par exemple, le reste de 5 est 2, le reste de 39 est 0, le reste de -2 est 1, et le reste de votre numéro d'étudiant est votre groupe pour les séances d'exercices.

Considérons $K = \{0, 1, 2\}$ et définissons les opérations

$$a \oplus b = \text{le reste de la division de } a + b \text{ par } 3$$

$$a \otimes b = \text{le reste de la division de } a \cdot b \text{ par } 3$$

Remplir les tables d'addition et de multiplication suivantes.

\oplus	0	1	2
0			
1			
2			

\otimes	0	1	2
0			
1			
2			

Montrez que l'existence des neutres additif et multiplicatif. Montrez que tout élément admet un inverse pour \oplus , et tout élément non-nul admet un inverse pour \otimes . Vérifiez que l'addition est commutative.