

## Série 1

**Exercice 1.** Quelle est la contraposée des implications suivantes? Même question avec la négation.

- (i) Si  $x > 0$ , alors  $f(x) \leq 0$ .
- (ii) Si  $ab = 0$ , alors  $(a = 0 \text{ ou } b = 0)$ .

**Exercice 2.** Expliquer verbalement ce que signifient les assertions suivantes et écrire leur négation.

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ .
- (ii)  $\forall x, y \in \mathbb{Q}, [x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y]$ .
- (iii)  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > A$ .
- (iv)  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, \forall r \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{N}, [p = rs \Rightarrow (r = 1) \vee (s = 1)]$ .

**Exercice 3.** Écrire la négation des assertions suivantes.

- (i)  $\forall x, y \in E, xy = yx$ .
- (ii)  $\exists x \in E, \forall y \in E, xy = yx$ .
- (iii)  $\forall a, b \in A, [ab = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)]$ .
- (iv)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, [x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]$  (où  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ).
- (v)  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon]$  (où  $(u_n)$  est une suite réelle et  $\ell \in \mathbb{R}$ ).
- (vi)  $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, [n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon]$  (où  $(u_n)$  est une suite réelle).

**Exercice 4.** Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles. Montrer que si  $E \subset F$  et  $F \subset G$ , alors  $E \subset G$ .

**Exercice 5.** Soient  $A, B$  et  $C$  trois ensembles.

- (i) Montrer que  $(A = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A \cup B)$ .
- (ii) Montrer que  $(A = B) \Leftrightarrow (\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B))$ .
- (iii) Montrer que  $(A \cup B = A \cup C) \wedge (A \cap B = A \cap C) \Rightarrow (B = C)$ .

**Exercice 6.** Dites si les assertions suivantes sont VRAIES ou FAUSSES.

- (i)  $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$
- (ii)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- (iii)  $\emptyset \in \mathbb{N}$
- (iv)  $\emptyset \subset \mathbb{N}$
- (v)  $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$
- (vi)  $\{1, 2\} \subset \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$
- (vii)  $\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

**Exercice 7.** Considérons les sous-ensembles de  $\mathbb{N}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7\}, \quad C = \{2, 4, 6\} \quad D = \{3, 6\}.$$

- (i) Déterminer  $B \cap D$  et  $C \cap D$ .
- (ii) Déterminer  $B \cup D$  et  $C \cup D$ . L'une de ces deux unions est-elle disjointe?
- (iii) Déterminer les complémentaires dans  $A$  de  $B, C$  et  $D$ .