9. INTEGRARE NUMERICĂ. REZOLVAREA ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE ŞI A SISTEMELOR DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

Obiectivele lucrării:

- fixarea cunoştinţelor privitoare la calculul integralei definite a unei funcţii prin metoda trapezelor, respectiv metoda lui Simpson,
- familiarizarea cu modalităţi de calcul a integralei definite a unei funcţii folosind mediul Matlab,
- fixarea de cunoştinţe privitoare la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ordinare şi a sistemelor de ecuaţii diferenţiale ordinare folosind mediul de programare Matlab,
- însuşirea modului de a aduce ecuaţiile diferenţiale ordinare, respectiv sistemele de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin superior, la o formă echivalentă cu cea a sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul I,

prin studierea unor exemple şi prin rezolvarea unor probleme.

Se recomandă parcurgerea anexei M9 înaintea studierii paragrafelor 9.1 şi 9.2.

9.1. Elemente despre integrarea numerică în Matlab. Elemente despre rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi a sistemelor de ecuaţii diferenţiale în Matlab

Integrare numerică

Pentru calculul integralelor definite prin ***metoda trapezelor***, în Matlab se utilizează funcţia `trapz`. Această funcţie presupune că funcţia de integrat `f` este precizată sub formă de valori numerice, $\{y_k = f(x_k)\}_{k=1,\ldots,n}$, în puncte echidistante $\{x_k\}_{k=1,\ldots,n}$ ($x_1=a,\ x_n=b$) ale intervalului de integrare $[a,b]$. Sintaxa de apel a funcţiei `trapz` este:

```
I=trapz(x,y)
```

unde:

- `x` reprezintă vectorul valorilor $\{x_k\}$;
- `y` reprezintă vectorul valorilor $\{y_k = f(x_k)\}$;
- `I` reprezintă aproximarea cu metoda trapezelor a integralei definite $\int_a^b f(x)\,dx$

Comentariu: n reprezintă aici numărul de puncte. Prin urmare pasul de integrare – care este calculat implicit- este dat de:

$$h = \frac{b-a}{n-1}$$

Funcţia Matlab quad realizează calculul integralei definite a unei funcţii prin ***metoda adaptativ-recursivă Simpson*** (o variantă mai performantă a metodei lui Simpson, pasul de parcurgere a intervalului de integrare este calculat implicit de către funcţia Matlab). Funcţia *quad* presupune că funcţia de integrat f este cunoscută prin expresia sa analitică, y = f(x). Două sintaxe de apel ale funcţiei quad sunt:

```
I=quad(nume_fisier,a,b)
I=quad(nume_fisier,a,b,precizia)
```

unde:

- nume_fisier reprezintă un şir de caractere care conţine numele fişierului-funcţie în care a fost scrisă expresia funcţiei de integrat f;
- a şi b reprezintă limitele de integrare (capetele intervalului [a,b] pe care se realizează integrarea);
- precizia este un argument opţional prin care se poate modifica precizia implicită 10^{-6};
- I reprezintă aproximarea integralei definite $\int_a^b f(x)\,dx$.

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi a sistemelor de ecuaţii diferenţiale

Matlab pune la dispoziţia utilizatorului mai multe funcţii Matlab de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale şi a sistemelor de ecuaţii diferenţiale de diferite ordine. Aceste funcţii implementează diverse metode numerice. Astfel:

- funcţia Matlab ode23 foloseşte o combinaţie a metodelor Runge-Kutta de ordinele 2, respectiv 3;
- funcţia Matlab ode45 are implementată o combinaţie a metodelor Runge-Kutta de ordinele 4, respectiv 5;
- funcţia Matlab ode113 implementează o variantă a metodei Adams-Bashforth-Moulton.

Cele trei funcţii Matlab menţionate mai sus au aceleaşi sintaxe de apel. Două din aceste sintaxe sunt:

```
[xval,yval] = functie_Matlab(nume_fisier,dom,y0)
[xval,yval] = functie_Matlab(nume_fisier,dom,y0,optiuni)
```

unde:

- functie_Matlab este una din funcţiile ode23, ode45, ode113;
- nume_fisier reprezintă un şir de caractere care conţine numele fişierului-funcţie în care a fost definită expresia derivatei funcţiei-necunoscute, în

cazul unei ecuații diferențiale de ordinul I, respectiv, vectorul expresiilor derivatelor de ordin I al funcțiilor-necunoscute, în cazul sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul I sau al ecuațiilor şi sistemelor de ecuații diferențiale de ordin superior, care au fost aduse în prealabil la o formă echivalentă cu un sistem de ordinul I;

- `dom` reprezintă vectorul capetelor intervalului [`a,b`] al variabilei independente (a se vedea anexa M9);
- `y0` reprezintă valoarea funcției-necunoscute din condiția inițială în cazul unei ecuații diferențiale de ordinul I, respectiv, vectorul valorilor funcțiilor-necunoscute din condițiile inițiale, în celelalte cazuri;
- `optiuni` reprezintă o structură care conține opțiuni de optimizare a calculării soluției / soluțiilor; este un argument opțional; opțiunile de optimizare pot fi schimbate folosind funcția Matlab `optimset` (paragraful 6.1);
- `xval` reprezintă un vector ce conține valorile variabilei independente, în care se determină valorile soluției / soluțiilor;
- `yval` reprezintă vectorul valorilor funcției soluție în punctele `xval`, în cazul unei ecuații diferențiale de ordinul I, respectiv o matrice ale cărei coloane reprezintă valorile funcțiilor soluție în punctele `xval`, în celelalte cazuri.

9.2. Exemple de studiat

Exemplul 9.1: Fie funcția f dată prin puncte de relațiile $f(x_i)=\frac{\sin(x_i)}{i^2+1}\cdot\cos\left(\frac{i}{x_i}\right)$, $x_i=\pi+i\cdot\frac{\pi}{30}$, $i=1,2,...,150$. Să se calculeze $\int_{\pi+\frac{\pi}{30}}^{6\cdot\pi} f(x)dx$.

Soluție: Funcția fiind cunoscută prin puncte, se va folosi metoda trapezelor pentru calculul integralei cerute. Se execută următoarea secvență Matlab:

```
% generarea vectorilor x si y
for i=1:150
    x(i)=pi+i*pi/30;
    y(i)=sin(x(i))/(i^2+1)*cos(i/x(i));
end

% calculul integralei folosind metoda trapezelor
I=trapz(x,y)
```

rezultând următoarea valoare a integralei:

```
I =   -0.0025
```

Exemplul 9.2: Să se calculeze $\int_0^{\pi} \ln(x+1)\cdot\sin(x)dx$.

Soluție: Funcția de integrat având expresia cunoscută, integrala ei va fi calculată cu ajutorul metodei lui Simpson.

Se defineşte expresia funcției de integrat într-un fişier-funcție (de exemplu, `f.m`):

```
function y=f(x)
y=log(x+1).*sin(x);
```

Pentru calculul integralei se apelează funcția Matlab *quad*:

```
I=quad('f',0,pi)
```

rezultând valoarea:

```
I =    1.8113
```

<u>Exemplul 9.3</u>: Să se rezolve prin metoda Runge-Kutta de ordinul 2-3 ecuația diferențială de ordinul I:

$$y' = x^2 \cdot (y+1)$$

cu condiția inițială $y(1)=1$, pe intervalul [1,2].

<u>Soluție</u>: Se parcurg următoarele două etape:

- se defineşte expresia derivatei funcției necunoscute *y* într-un fişier-funcție, de exemplu `ecdif1.m`:

```
function dy=ecdif1(x,y)
dy=x.^2.*(y+1);
```

- se rezolvă ecuația diferențială folosind funcția Matlab *ode23*, executând următoarea secvență Matlab (de exemplu, fişier script):

```
% conditia initiala
y0=1;
% domeniul (intervalul)
dom=[1,2];
% rezolvarea ecuatiei diferentiale
[xval,yval]=ode23('ecdif1',dom,y0)
% reprezentarea grafica a solutiei
plot(xval,yval)
```

Se obține soluția sub formă de seturi de valori:

```
xval =
    1.0000    1.0400    1.1400    1.2400    1.3400    1.4368
    1.5280    1.6140    1.6950    1.7717    1.8443    1.9133
    1.9789    2.0000
yval =
    1.0000    1.0850    1.3482    1.7055    2.1955    2.8512
    3.7058    4.8171    6.2622    8.1423   10.5908   13.7830
   17.9494   19.6011
```

Soluția este reprezentată grafic în figura 9.1.

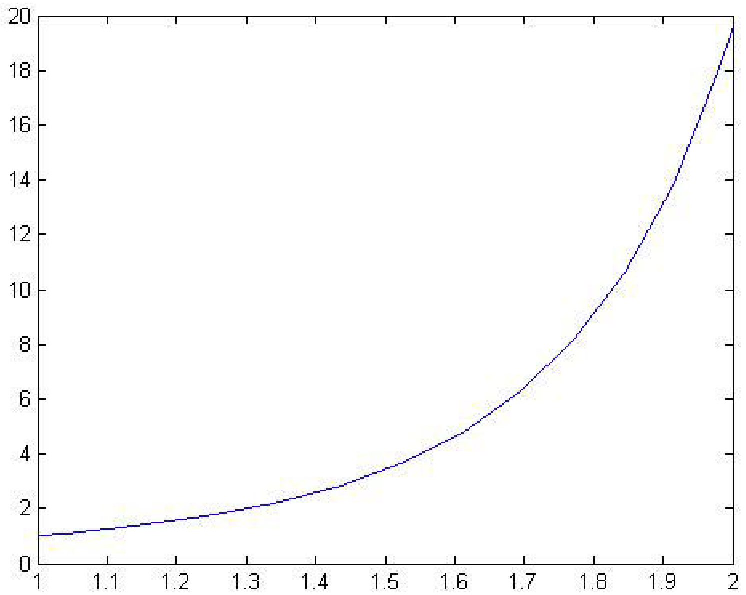

Fig.9.1. *Graficul soluției ecuației diferențiale din exemplul 9.3.*

Exemplul 9.4: Să se rezolve prin metoda Adams-Bashforth-Moulton următoarea ecuație diferențială de ordinul II:

$$y'' = 2 \cdot y' - 3 \cdot x^2 \cdot y$$

cu condițiile inițiale $y(0)=-1$, $y'(0)=2$, pe intervalul [1,2.5].

Soluție: Se rescrie ecuația sub forma unui sistem de 2 ecuații diferențiale de ordinul I, prin introducerea notațiilor $y_1=y$, $y_2=y'$. Se obține sistemul:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 2 \cdot y_2 - 3 \cdot x^2 \cdot y_1 \end{cases}$$

cu condițiile inițiale $y_1(0)=-1$, $y_2(0)=2$.

Rezolvarea sistemului de mai sus presupune parcurgerea celor două etape descrise la exemplul 9.3.:

- se definește vectorul expresiilor derivatelor funcțiilor y_1 și y_2 într-un fișier-funcție (de exemplu `ecdif2.m`):

```
function dy=ecdif2(x,y)
dy=zeros(2,1); % initializarea vectorului
dy(1)=y(2);
dy(2)= 2*y(2)-3*x.^2.*y(1);
```

- se rezolvă ecuația diferențială executând următoarea secvență Matlab (de exemplu, fișier script):

```
% conditiile initiale
y0=[-1; 2];
% domeniul (intervalul)
dom=[1,2.5];
```

```
% rezolvarea ecuatiei diferentiale
[xval,yval]=ode113('ecdif2',dom,y0)
% reprezentarea grafica a solutiei
plot(xval,yval(:,1))
```

Se obține soluția (prima coloană a matricei `yval`) şi derivata sa (a doua coloană a matricei `yval`) sub formă de seturi de valori:

```
xval =                  yval =
    1.0000                 -1.0000    2.0000
    1.0023                 -0.9955    2.0158
    1.0068                 -0.9863    2.0478
    1.0158                 -0.9675    2.1124
    1.0339                 -0.9281    2.2451
    1.0700                 -0.8420    2.5236
    1.1423                 -0.6381    3.1282
    1.2869                 -0.0908    4.4597
    1.3591                  0.2558    5.1217
    1.4314                  0.6480    5.7155
    1.5037                  1.0787    6.1732
    1.6483                  1.9980    6.3409
    1.7928                  2.8318    4.8694
    1.9229                  3.2723    1.5840
    1.9880                  3.2996   -0.8232
    2.0530                  3.1549   -3.6957
    2.1181                  2.8109   -6.9292
    2.2482                  1.4658  -13.7100
    2.3783                 -0.6870  -18.9046
    2.5000                 -3.0793  -19.5740
```

Soluția este reprezentată grafic în figura 9.2.

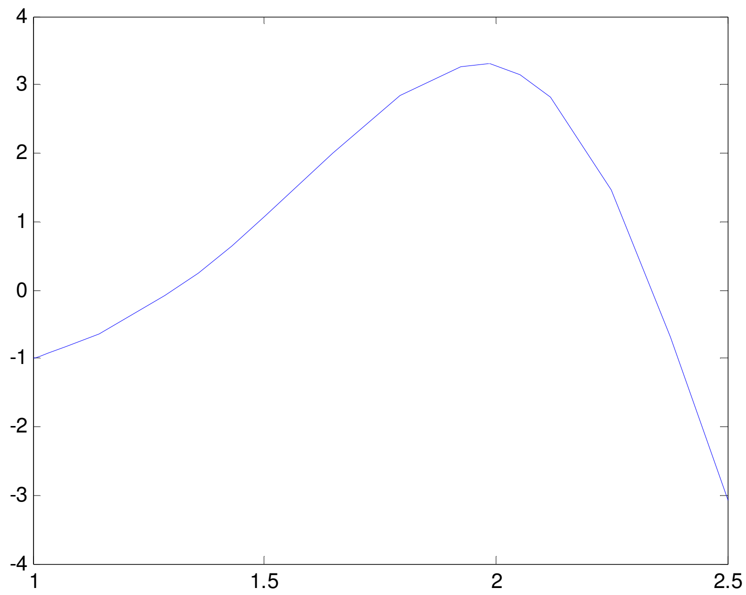

Fig.9.2. *Graficul soluției ecuației diferențiale din exemplul 9.4.*

<u>Exemplul 9.5</u>: Să se rezolve prin metoda Runge-Kutta de ordinul 4-5 sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul I:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = x - y_1 \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale $y_1(0)=0.1$, $y_2(0)=0.2$, pe intervalul [0,10].

<u>Soluţie</u>: Se parcurg etapele:

- se defineşte vectorul expresiilor derivatelor într-un fişier-funcţie (de exemplu `sistdif.m`):

```
function dy=sistdif(x,y)
dy=zeros(2,1); % initializarea vectorului
dy=[y(1)+y(2); x-y(1)];
```

- se rezolvă sistemul de ecuaţii diferenţiale prin execuţia următorului set de instrucţiuni Matlab (fişier script):

```
% conditiile initiale
y0=[0.1; 0.2];
% domeniul (intervalul)
dom=[0,10];
% rezolvarea ecuatiei diferentiale
[xval,yval]=ode45('sistdif',dom,y0)
% reprezentarea grafica a solutiei
plot(xval,yval(:,1),'b',xval,yval(:,2),'r--')
legend('y1','y2')
```

obţinând soluţiile sub formă de puncte (prima coloană a matricei `yval` reprezintă funcţia soluţie y_1, a doua coloană reprezintă funcţia soluţie y_2):

```
xval =   0            yval =    0.1000    0.2000
    0.0167                       0.1051    0.1984
    0.0335                       0.1102    0.1970
    0.0502                       0.1153    0.1959
    0.0670                       0.1206    0.1949
    0.1507                       0.1480    0.1927
    0.2344                       0.1778    0.1952
    0.3182                       0.2107    0.2021
    0.4019                       0.2472    0.2131
    0.5658                       0.3317    0.2452
    0.7296                       0.4381    0.2886
    0.8935                       0.5718    0.3393
    1.0573                       0.7386    0.3922
    1.2445                       0.9770    0.4479
    1.4317                       1.2747    0.4886
    1.6188                       1.6396    0.5024
    1.8060                       2.0787    0.4763
    2.0402                       2.7407    0.3648
    2.2744                       3.5344    0.1375
    2.5087                       4.4600   -0.2361
    2.7429                       5.5095   -0.7860
    2.9548                       6.5508   -1.4585
    3.1667                       7.6588   -2.3146
    3.3787                       8.8049   -3.3654
    3.5906                       9.9509   -4.6147
    3.8182                      11.1274   -6.1710
```

4.0458	12.1810	-7.9312
4.2734	13.0335	-9.8593
4.5010	13.5968	-11.8983
4.7510	13.7696	-14.1717
5.0010	13.3529	-16.3547
5.2510	12.2286	-18.2881
5.5010	10.2933	-19.7796
5.7510	7.4709	-20.6124
6.0010	3.7225	-20.5593
6.2510	-0.9331	-19.3946
6.5010	-6.4021	-16.9022
6.7027	-11.2909	-13.7945
6.9043	-16.4650	-9.6271
7.1060	-21.7488	-4.3594
7.3077	-26.9177	2.0060
7.5085	-31.6833	9.3849
7.7094	-35.7634	17.6997
7.9103	-38.8186	26.7816
8.1111	-40.4739	36.3831
8.3315	-40.2090	47.1212
8.5518	-37.2497	57.5623
8.7721	-31.0862	67.0658
8.9924	-21.2531	74.8667
9.2185	-6.9471	80.1954
9.4446	11.9206	81.8218
9.6706	35.4431	78.7156
9.8967	63.4540	69.8396
9.9225	66.9222	68.4123
9.9484	70.4427	66.8955
9.9742	74.0143	65.2878
10.0000	77.6362	63.5879

Graficul soluțiilor este redat în figura 9.3.:

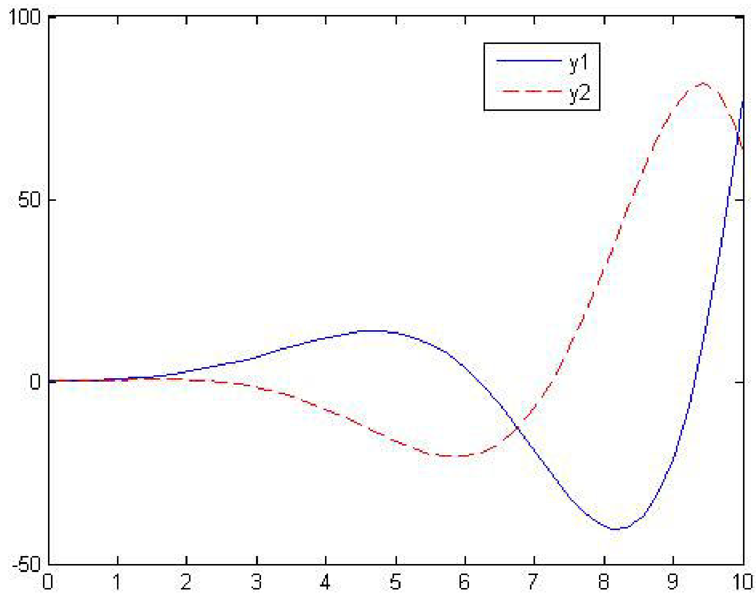

Fig.9.3. *Graficul soluțiilor sistemului de ecuații diferențiale din exemplul 9.5.*

9.3. Probleme de rezolvat

P9.1. Să se calculeze $\int_{-1}^{0} f(x)dx$, unde funcţia f este dată prin relaţiile:

$$f(x_j) = \frac{j \cdot x_j^2}{x_j - 1} - \frac{2}{j+1}, \quad x_j = -1.1 + 0.1 \cdot j, \quad j = 1,2,...11$$

P9.2. Să se calculeze integrala $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x) + \cos(x)} dx$.

P9.3. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy pe intervalele menţionate. Soluţia / soluţiile se va / vor reprezenta grafic (în cazul sistemelor, reprezentarea soluţiilor se va face în aceeaşi fereastră grafică):

a) $y' + y^2 = 3 \cdot x$, $y(-1)=2$, pe [-1,5];

b) $y'' - y' = 2 \cdot y \cdot \sin(t)$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$, pe [0,6];

c) $-y''' + y'' - x \cdot y' + 2 \cdot y \cdot \sin(x) - x^3 = 0$, $y(1)=0.5$, $y'(1)=-0.5$, $y''(1)=0.3$, pe [1,4];

d) $\begin{cases} x' + 2x = y - 2z + sin(t), & x(0) = 0 \\ y' + 2y = x + 2z - cos(t), & y(0) = 0.2 \\ z' - 5z = 3x - 3y, & z(0) = -0.1 \end{cases}$, pe [0,3].

P9.4. Să se aproximeze valorile funcţiilor-soluţie obţinute la problema P9.3. în punctele menţionate mai jos:

a) -1, -0.5, 0, 1, 2.3, 5 pentru soluţia de la P9.3.a);

b) 0, 1.5, 2.3, 3.7, 4, 5.45, 6 pentru soluţia de la P9.3.b);

c) 1, 2.2, 3.5, 4 pentru soluţia de la P9.3.c);

d) 0, 0.75, 1.1, 1.16, 2, 3 pentru soluţiile de la P9.3.d).

P9.5. Se consideră un robot cu trei grade de libertate de tip translaţie-translaţie-rotaţie, ale cărui ecuaţii dinamice ale mişcării sunt:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 = F_1 \\ (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 = F_2 - m_2 g - m_3 g \\ J_3 \ddot{q}_3 = M_3 \end{cases},$$

în care au fost utilizate următoarele notaţii:

- q_1, q_2, q_3 - coordonatele generalizate (funcţii de timp, t);

- m_1, m_2, m_3 - masele ansamblelor element-cuplă ale robotului;
- F_1, F_2 - forțele care produc mişcările cuplelor de translație;
- M_3 - momentul care produce mişcarea cuplei de rotație;
- J_3 - momentul de inerție axial al ansamblului cuplă 3 - element 3.

Cunoscând masele (m_1=10 kg, m_2=4.15 kg, m_3=0.5 kg), momentul de inerție axial (J_3=0.015 kgm^2), expresiile analitice ale forțelor şi momentului:

$F_1(t)=-58.6\cdot\sin(2\cdot t)$ $F_2(t)=23.25\cdot e^{-t}\cdot(\sin(4\cdot t)-3\cos(4\cdot t))+45.601$ $M_3(t)=0.004\cdot t^2$

şi condițiile inițiale $q_1(0)=0$, $q'_1(0)=2$, $q_2(0)=1$, $q'_2(0)=-1$, $q_3(0)=-0.5$, $q'_3(0)=0$, să se determine şi să se reprezinte grafic variația coordonatelor cuplelor cinematice în intervalul de timp [0,3] (secunde).

9.4. Întrebări recapitulative

Î9.1. Definiți *problema integrării numerice a unei funcții f:[a,b]->R.*

Î9.2. Precizați ce funcții Matlab destinate calculului integralelor numerice cunoaşteți (denumire) şi care sunt metodele numerice care stau la baza acestor funcții.

Î9.3. Descrieți principiul metodei trapezelor pentru calculul aproximativ al integralelor definite.

Î9.4. Descrieți principiul metodei lui Simpson pentru calculul aproximativ al integralelor definite.

Î9.5. Definiți *problema de rezolvare a unei ecuații diferențiale de ordinul I cu condiții inițiale.*

Î9.6. Precizați care sunt etapele de rezolvare în Matlab a ecuațiilor diferențiale / sistemelor de ecuații diferențiale.

Î9.7. Precizați ce funcții Matlab destinate rezolvării ecuațiilor diferențiale cunoaşteți (denumire, metoda numerică care stă la baza funcției, cea mai simplă sintaxă).

Î9.8. Scrieți sistemul de ecuații diferențiale de ordinul I care reprezintă o formă echivalentă a ecuației diferențiale de ordinul III: $x'''+2\cdot x''+x'-x+2\cdot t^2=1$.

Î9.9. Scrieți sistemul de ecuații diferențiale de ordinul I care reprezintă o formă echivalentă a sistemului de ecuații diferențiale de ordinul II: $\begin{cases} x''+y=sin(u) \\ x'-y'+u=0 \end{cases}$.

ANEXA M9. ELEMENTE DESPRE INTEGRAREA NUMERICĂ. ELEMENTE DESPRE REZOLVAREA ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE ŞI A SISTEMELOR DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

M9.1. Integrare numerică

Problema integrării numerice se enunță astfel: Se consideră o funcție reală de variabilă reală $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, integrabilă pe intervalul $[a,b]$. Se cere să se calculeze integrala definită:

$$I_f = \int_a^b f(x)dx \, .$$

Modalitățile de calcul numeric a integralei de mai sus se bazează de regulă pe aproximarea funcției f printr-o altă funcție g, a cărei integrală poate fi uşor calculată. În continuare vor fi prezentate două metode bazate pe această modalitate: metoda trapezelor şi metoda lui Simpson.

Metoda trapezelor

Intervalul pe care se calculează integrala, $[a,b]$, este împărțit în n secțiuni egale, pasul şi abscisa curentă fiind:

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_k = a + k \cdot h, \quad k = 0,1,\ldots,n$$

În cazul ***metodei trapezelor***, funcția de integrat f se aproximează cu o funcție g afină pe porțiuni, având proprietatea că $g(x_k)=f(x_k)$, $k=0,1,\ldots,n$. Metoda trapezelor constă în folosirea formulei de aproximare:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx = \frac{\left[f\left(x_{k+1}\right) + f\left(x_k\right)\right] \cdot h}{2}$$

În final se obține expresia:

$$I_f = \frac{h}{2}\left[y_a + y_b + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right],$$

unde $y_k = f(x_k)$, $k=1,\ldots,n-1$, $y_a = f(a)$, $y_b = f(b)$.

Metoda lui Simpson

Intervalul pe care se calculează integrala, $[a,b]$, este divizat în $2 \cdot n$ secțiuni egale, pasul şi abscisa curentă fiind:

$$h = \frac{b-a}{2 \cdot n}, \qquad x_k = a + k \cdot h, \quad k = 0,1,\ldots,2 \cdot n$$

În cazul ***metodei lui Simpson***, aproximarea funcției f se face cu o funcție g pătratică pe porțiuni, cu proprietatea că $g(x_k)=f(x_k)$, k=0,1,...,2·n. Metoda lui Simpson constă în folosirea formulei de aproximare:

$$\int_{x_{2\cdot k}}^{x_{2\cdot k+2}} f(x)dx \approx \int_{x_{2\cdot k}}^{x_{2\cdot k+2}} g(x)dx = \frac{h}{3} \cdot \left[f\left(x_{2\cdot k}\right) + 4 \cdot f\left(x_{2\cdot k+1}\right) + f\left(x_{2\cdot k+2}\right) \right]$$

În final, integrala poate fi exprimată prin următoarea expresie, cunoscută sub denumirea de ***formula generalizată a lui Simpson***:

$$I_f = \frac{h}{3}\left[y_a + y_b + 4 \cdot \left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2\cdot n-1}\right) + 2 \cdot \left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2\cdot n-2}\right) \right],$$

unde $y_k = f(x_k)$, k=1,...,n-1, $y_a = f(a)$, $y_b = f(b)$.

Dintre cele două metode prezentate, metoda lui Simpson are pentru acelaşi număr de secțiuni ale intervalului $[a,b]$ o precizie mai bună decât metoda trapezelor.

M9.2. Ecuaţii diferenţiale

Problema rezolvării unei ecuații diferențiale de ordinul I cu condiție inițială se pune astfel:

Fiind dată ecuația diferențială:

$$y' = f(x,y), \quad f:[a,b]\times I \to \boldsymbol{R}, \quad [a,b], I \subset \boldsymbol{R}$$

(I fiind un interval) şi condiția inițială:

$y(x_0) = y_0$, $x_0 = a$

să se determine funcția $y : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, $x \to y(x)$, care verifică relațiile de mai sus.

Problema rezolvării unei ecuații diferențiale cu condiție inițială se mai numeşte ***problemă Cauchy***.

Prin utilizarea metodelor numerice pentru rezolvarea problemei enunțate, se obțin valorile y_1, y_2,..., y_n care aproximează valorile $y(x_1)$, $y(x_2)$,..., $y(x_n)$ ale funcției-soluție y într-un set de n puncte ale intervalului $[a,b]$, $x_1<x_2<\ldots<x_n$, $x_1 = a$, $x_n = b$.

În funcție de numărul de puncte anterior calculate utilizate în determinarea punctului curent (x_i,y_i), metodele numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale se împart în două categorii:

i) metode monopas (numite şi metode cu paşi separați), care utilizează doar valorile corespunzătoare punctului precedent (x_{i-1}, y_{i-1});

ii) metode multipas (numite şi metode cu paşi legați), care utilizează valorile corespunzătoare mai multor puncte anterior determinate, (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_{i-2}, y_{i-2}),... .

Din prima categorie face parte metoda ***Runge-Kutta***.

Din a doua categorie fac parte metoda ***Adams-Bashforth-Moulton***, diferite variante îmbunătățite ale metodei Runge-Kutta ş.a.

B9.3. Sisteme de ecuații diferențiale

Problema rezolvării unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul I cu condiții inițiale este:

Fiind dat sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

$$f_i : [a,b] \times I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \to \boldsymbol{R}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad [a,b], I_1, I_2 \ldots, I_n \subset \boldsymbol{R}$$

(I_i fiind intervale, i=1,2,...,n) şi condițiile inițiale:

$y_1(x_0) = y_{01}$, $y_2(x_0) = y_{02}$, ..., $y_n(x_0) = y_{0n}$, $x_0 = a$

să se determine funcțiile $y_1 : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, $x \to y_1(x)$, $y_2 : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, $x \to y_2(x)$, ..., $y_n : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, $x \to y_n(x)$, care verifică relațiile de mai sus.

Pentru rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul I cu condiții inițiale se utilizează metode numerice având ca punct de plecare metodele de rezolvare din cazul ecuațiilor diferențiale de ordinul I cu condiții inițiale.

B9.4. Ecuații diferențiale de ordin superior. Sisteme de ecuații diferențiale de ordin superior

Problemele de rezolvare a ecuațiilor diferențiale de ordin superior, respectiv a sistemelor de ecuații diferențiale de ordin superior, se pun în mod asemănător problemelor corespunzătoare formulate la punctele 2 şi 3, cu adăugarea şi a condițiilor inițiale referitoare la derivatele de ordin superior ale funcțiilor-necunoscute.

Pentru rezolvarea acestor probleme, ecuația diferențială de ordin superior, respectiv sistemul de ecuații diferențiale de ordin superior, trebuiesc aduse la forma unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul I.

În continuare se exemplifică aducerea unei ecuații diferențiale de ordinul n la forma unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul I:

Fie ecuația diferențială de ordinul n:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

$$f : [a,b] \times I \times I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{n-1} \to \boldsymbol{R}, \quad [a,b], I, I_1, I_2, \ldots, I_{n-1} \subset \boldsymbol{R}$$

şi condițiile inițiale:

$y'(x_0) = y_{01}$, $y''(x_0) = y_{02}, \ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}$, $x_0 = a$

Pentru rezolvarea problemei, se introduc notațiile $y_i = y^{(i)}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Se observă că $y_i' = \left(y^{(i)}\right)' = y^{(i+1)} = y_{i+1}$, i = 1,2,...,n-1. Prin urmare, ecuația diferențială de ordinul n cu condiții inițiale este echivalentă cu următorul sistem de n ecuații diferențiale de ordinul I:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

cu condițiile inițiale:

$y_1(x_0) = y_{01}$, $y_2(x_0) = y_{02}$, ..., $y_n(x_0) = y_{0n}$.