6. REZOLVAREA ECUAŢIILOR TRANSCENDENTE

Obiectivele lucrării:

- însuşirea unui mod de studiu al ecuațiilor transcendente, în vederea rezolvării lor, folosind mediul Matlab,
- recapitularea anumitor proprietăți ale unor funcții matematice elementare,
- fixarea de cunoştințe privitoare la rezolvarea ecuațiilor transcendente, atât pe cale numerică, cât şi pe cale simbolică, folosind mediul de programare Matlab,

prin studierea unor exemple şi prin rezolvarea unor probleme.

Se recomandă parcurgerea anexei M6 înaintea studierii paragrafelor 6.1 şi 6.2.

6.1. Elemente despre rezolvarea ecuaţiilor transcendente în Matlab

Fie ecuația transcendentă:

`f(x) = 0` ($f:I\subseteq \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$)

Rezolvarea acestei ecuații în Matlab necesită parcurgerea celor două etape precizate în anexa M6.

Separarea (localizarea soluțiilor)

În prima etapă se localizează soluțiile fie în vecinătatea unor valori aproximative ale acestora, fie în subintervale care conțin câte o soluție.

Pentru localizarea soluțiilor se foloseşte metoda grafo-analitică. În acest scop, se rescrie ecuația sub forma:

`g(x) = h(x)`

Dacă intervalul `I` nu este cunoscut apriori, atunci el este determinat în funcție de domeniile de definiție şi imaginile funcțiilor `g` şi `h`, precum şi pe baza proprietăților lor de monotonie, periodicitate şi continuitate.

În continuare, se reprezintă grafic funcțiile `g` şi `h` pe intervalul `I`.

De pe grafic se pot "citi" punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții cu mouse-ul folosind funcția Matlab `ginput`, cu una din sintaxele de apel:

```
[x,y] = ginput
[x,y] = ginput(n)
```

unde:

- `x` este un vector care conține abscisele punctelor "citite" de pe grafic

- `y` este un vector care conține ordonatele punctelor "citite" de pe grafic
- `n` este numărul punctelor "citite" de pe grafic.

În primul caz, efectuarea "citirii" punctelor se încheie prin apăsarea tastei ENTER. În al doilea caz, încheierea "citirii" punctelor se face automat după "citirea" celui de-al `n`-lea punct.

Valorile conținute de vectorul `x` reprezintă valorile aproximative de la care se porneşte calculul soluțiilor cu o precizie apriori fixată.

Este foarte important ca "citirea" de pe grafic a unui punct de intersecție să se facă cât mai exact, pentru a minimiza eroarea de determinare a soluției - care reprezintă abscisa punctului de intersecție - şi timpul de calcul al soluției.

Descompunerea `g(x) = h(x)` nu este unică. Ca urmare, de la caz la caz, problema localizării poate fi reluată în diferite variante.

Calculul soluțiilor cu o precizie apriori fixată

Pentru calculul soluțiilor este necesară definirea în prealabil a funcției `f`, într-un fişier-funcție.

Calculul fiecărei soluții a ecuației transcendente se face folosind funcția Matlab `fzero`. Aceasta implementează o metodă de calcul numeric care se bazează pe o combinație a metodelor bisecției, secantei şi a unei metode de interpolare a funcțiilor.

În funcție de scopul urmărit pot fi folosite următoarele sintaxe de apel ale funcției `fzero`:

- dacă interesează doar determinarea soluției, se foloseşte una din sintaxele de apel:

```
x = fzero(nume_fisier,x0)
x = fzero(nume_fisier,x0,optiuni)
```

- dacă în afară de determinarea soluției interesează şi evaluarea funcției `f` pentru soluția găsită, se apelează funcția cu una din sintaxele:

```
[x,fval]= fzero(nume_fisier,x0)
[x,fval]= fzero(nume_fisier,x0,optiuni)
```

- dacă interesează şi cauza opririi executării metodei numerice, se foloseşte una din sintaxele de apel:

```
[x,fval,exitflag]= fzero(nume_fisier,x0)
[x,fval,exitflag]= fzero(nume_fisier,x0,optiuni)
```

- dacă interesează şi anumite date suplimentare, precum numărul de iterații efectuate, se apelează funcția cu una din sintaxele:

```
[x,fval,exitflag,output]= fzero(nume_fisier,x0)
[x,fval,exitflag,output]= fzero(nume_fisier,x0,optiuni)
```

unde:

- `nume_fisier` reprezintă un şir de caractere care conține numele fişierului-funcție în care a fost definită funcția `f` ;

- `x0` reprezintă valoarea aproximativă a soluției căutate, sau un vector care conține capetele subintervalului în care a fost localizată soluția, `a` şi `b`, astfel încât `f(a)·f(b)<0`;
- `optiuni` reprezintă o structură care conține opțiuni de optimizare a calculării soluției; este un argument opțional; opțiunile de optimizare pot fi schimbate folosind funcția Matlab `optimset`; funcția `optimset` primeşte un număr par de argumente, sub formă de perechi *nume parametru opțiune – valoare opțiune*; de exemplu, setarea preciziei de calcul a soluției, memorată în parametrul Matlab `TolX`, se poate face prin comanda Matlab:

```
optiuni=optimset('TolX',valoare_precizie)
```

- `x` reprezintă soluția calculată cu o precizie apriori fixată (fie precizia implicită, fie una stabilită prin intermediul funcției `optimset`);
- `fval` reprezintă valoarea funcției `f` pentru soluția calculată `x`;
- `exitflag` reprezintă o valoare de control, care este strict pozitivă în cazul în care a fost găsită o soluție, sau strict negativă în caz contrar;
- `output` reprezintă o structură care conține următoarele informații: numărul de iterații (*iterations*), numărul de evaluări (*funcCount*) efectuate, precum şi algoritmii utilizați pentru determinarea soluției (*algorithm*).

Matlab poate fi utilizat şi pentru rezolvarea ecuațiilor transcendente cu parametri. În acest scop se foloseşte toolbox-ul *Symbolic Math*, care a fost prezentat pe scurt în paragraful 4.1.

6.2. Exemple de studiat

Exemplul 6.1: Să se determine o soluție în jurul valorii -0.5 cu precizia 10^{-10} pentru ecuația transcendentă:

$$\sin(x)+\left(\frac{x}{3}-0.5\right)^3+1 = 0$$

Totodată să se determine şi numărul de iterații efectuate.

Soluție: Deoarece se specifică valoarea cu care se porneşte căutarea soluției, nu mai este necesar să se parcurgă o etapă de localizare a soluției; se trece direct la etapa de calcul a soluției. În acest scop, se defineşte mai întâi membrul stâng al ecuației într-un fişier funcție (de exemplu, `ectrans1.m`):

```
function f=ectrans1(x)
f=sin(x)+(x/3-0.5).^3+1;
```

După definirea membrului stâng se execută următoarea secvență de program Matlab (de exemplu, fişier script):

```
% setarea preciziei de calcul
options=optimset('Tolx',10^(-10));
% calcularea solutiei
[x,fval,exitflag,output]=fzero('ectrans1',-0.5,options);
```

```
% solutia
x

% numarul de iteratii
iter=output.iterations
```

În urma execuției secvenței de mai sus se obține:

```
x =    -0.6704
iter =     4
```

S-a obținut soluția *x*=-0.6704 după 4 iterații efectuate.

Comentariu: Pentru a accesa un membru al structurii `options` se foloseşte construcția `options.nume_membru`.

Exemplul 6.2: Să se găsească o soluție aproximativă din intervalul [–0.5,0.5] a ecuației transcendente:

$$(x-1)^4 - tg(x) = 0$$

Soluție:

1. Se parcurge etapa de separare a soluțiilor pentru a determina dacă în intervalul cerut există o unică soluție. În acest sens, se reprezintă grafic funcția din membrul stâng al ecuației pe intervalul cerut şi se determină câte puncte de intersecție ale graficului său cu axa O*x* există ($g(x)=h(x)$, cu $g(x)=f(x)$ şi $h(x)=0$):

```
>> x=-0.5:0.1:0.5;
>> plot(x,(x-1).^4-tan(x),x,zeros(size(x)))
```

Graficul este redat în figura 6.1.

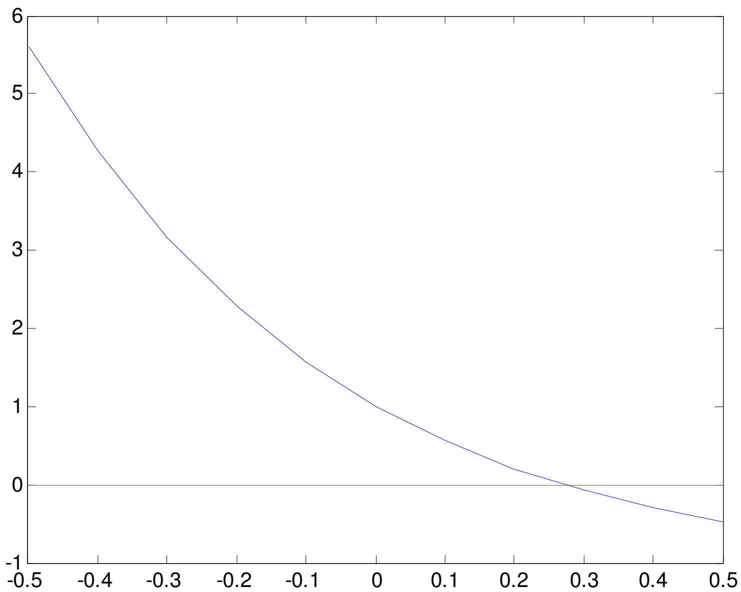

Fig.6.1. *Graficul funcției din membrul stâng al ecuației din exemplul 6.2.*

Se observă că în acest interval se află o singură soluție a ecuației.

2. Pentru determinarea soluției, se defineşte funcția din membrul stâng al ecuației într-un fişier funcție:

```
function f=ectrans2(x)
f= (x-1).^4-tan(x);
```

Pentru a stabili dacă este necesară „citirea” de pe grafic a unei valori aproximative a soluției, sau dacă se poate folosi doar intervalul cerut pentru căutarea acesteia, se verifică dacă funcția din membrul stâng al ecuației are semne diferite în cele două capete ale intervalului:

```
>> ectrans2(-0.5)
ans =     5.6088
>> ectrans2(0.5)
ans =   -0.4838
```

Se observă că funcția are semne diferite în cele două capete ale intervalului. Prin urmare, se poate proceda direct la determinarea soluției, prin comanda:

```
>> x=fzero('ectrans2',[-0.5,0.5])
```

Se obține soluția:

```
x =   0.2728
```

<u>Exemplul 6.3</u>: Să se rezolve ecuația transcendentă:

$$\cos(\pi \cdot x + 0.5) - 2^x + 2.5 = 0$$

<u>*Soluție.*</u>:

1. Pentru a localiza soluțiile ecuației, se rescrie ecuația sub forma:

$2^x = \cos(\pi x + 0.5) + 2.5$

Pentru a reprezenta grafic cele două funcții trebuie determinate intervalele de reprezentare, atât pe axa Ox cât şi pe axa Oy. Acestea se deduc din proprietățile celor două funcții. Astfel, funcția din membrul stâng este funcția exponențială cu baza 2 şi are proprietățile: este definită pe **R**, este strict crescătoare, continuă, imaginea funcției este intervalul $(0,\infty)$. Funcția din membrul drept este definită pe **R**, este periodică de perioadă 2, continuă, mărginită, imaginea funcției este intervalul [1.5,3.5].

Din proprietățile menționate deducem că cele două funcții au sigur cel puțin un punct de intersecție al graficelor, având ordonata în intervalul [1.5,3.5]. Limitele reprezentării grafice pe axa Oy trebuie să cuprindă acest interval, iar limitele pe axa Ox trebuie să cuprindă un interval cât mai mic $[a,b]$ cu $2^a \le 1.5$ şi $2^b \ge 3.5$ (de exemplu, a=0 şi b=2).

Se generează graficele, folosind următoarea secvență Matlab:

```
% intervalul de reprezentare grafica
x=0:0.05:2;
```

```
% reprezentarea grafica a celor doua functii
plot(x,2.^x,'b',x,cos(pi*x+0.5)+2.5,'r:')
% stabilirea limitelor de reprezentare
axis([0 2 1 4])
```

Graficele sunt redate în figura 6.2.

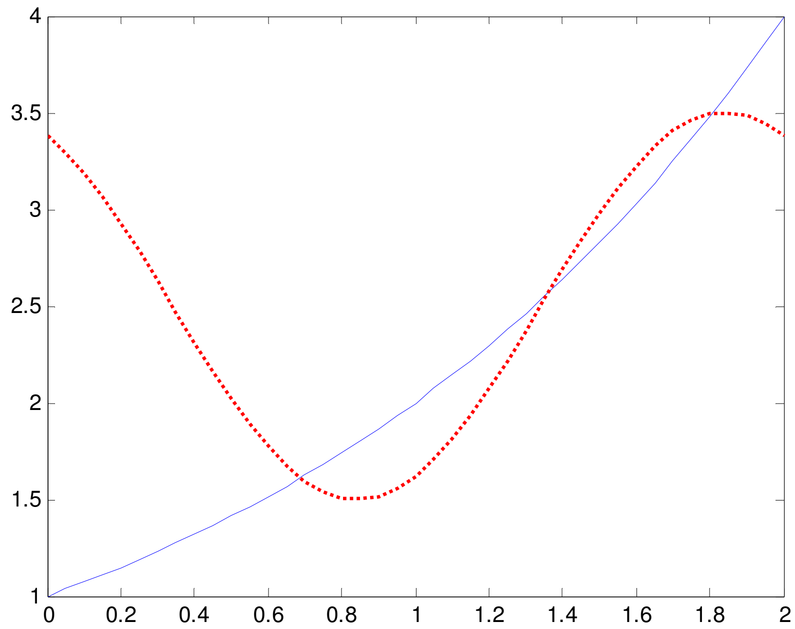

Fig.6.2. *Graficele funcțiilor din exemplul 6.3.*

Se observă din grafic că există trei puncte de intersecție a graficelor celor două funcții. Coordonatele punctelor de intersecție pot fi „citite” de pe grafic cu funcția Matlab *ginput*:

```
[x0,y0]=ginput
```

sau

```
[x0,y0]=ginput(3)
```

După citirea coordonatelor punctului cu mouse-ul de pe grafic (primul mod de citire necesită apăsarea tastei ENTER după citirea celui de-al treilea punct), se obține:

```
x0 =     0.6889     1.3618     1.7995
y0 =     1.6360     2.5658     3.4868
```

2. Înainte de a calcula soluțiile, se definește membrul drept al ecuației inițiale (sub forma f(x)=0) într-un fişier funcție:

```
function f=ectrans3(x)
f=cos(pi*x+0.5)-2.^x+2.5;
```

Soluțiile se determină apelând funcția Matlab *fzero* de 3 ori, pentru fiecare soluție transmițând ca valoare de pornire valoarea x0(i) corespunzătoare:

```
sol1=fzero('ectrans3',x0(1))
sol2=fzero('ectrans3',x0(2))
sol3=fzero('ectrans3',x0(3))
```

Se obțin soluțiile:

```
sol1 =    0.6888
sol2 =    1.3650
sol3 =    1.8047
```

<u>Exemplul 6.4</u>: Să se rezolve ecuația transcendentă:

$$a \cdot \cos(u - v) + b \cdot \sin(u + v) = 0 ,$$

în raport cu necunoscuta *u*.

<u>*Soluție:*</u> Întrucât în cazul calculului simbolic Matlab returnează soluția în cazul cel mai favorabil, înainte de rezolvarea simbolică este necesară identificarea situațiilor de compatibilitate.

<u>Discuții</u>:

(I) dacă a=0 şi b=0, ecuația devine 0=0, deci soluția este $u \in \mathbf{R}$;

(II) dacă $a \neq 0$ şi b=0, ecuația devine $a \cdot \cos(u-v)=0$, care are o infinitate de soluții; acestea se obțin cu formula:

$$u_k = v + (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \ k \in \boldsymbol{Z};$$

(III) dacă a=0 şi $b \neq 0$, ecuația devine $b \cdot \sin(u+v)=0$, care are o infinitate de soluții, obținute cu formula:

$$u_k = -v + k \cdot \pi, \ k \in \boldsymbol{Z};$$

(IV) dacă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$, se execută următoarea secvență Matlab, urmând ca discuția să se continue în funcție de rezultatul returnat de Matlab:

```
% definirea obiectelor simbolice
syms a b u v;
% definirea membrului stang al ecuatiei scrisa sub forma
% f(x)=0
f=a*cos(u-v)+b*sin(u+v);
% rezolvarea ecuatiei in cazul cel mai favorabil
solu=simplify(solve(f,u))
```

Se obține expresia:

```
solu = v-atan((a+b*sin(2*v))/cos(2*v)/b)
```

Discuția continuă în funție de valorile numitorului expresiei obținute:

(IV.1) dacă $\cos(2 \cdot v) \neq 0$, atunci soluțiile ecuației sunt:

$$u_k = v - arctg\left(\frac{a + b \cdot sin(2 \cdot v)}{b \cdot cos(2 \cdot v)}\right) + k \cdot \pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

(IV.2) dacă $\cos(2 \cdot v)$ =0, distingem următoarele cazuri, în funcție de semnele sinusului şi a cosinusului parametrului v, cazuri ce pot fi tratate prin cod Matlab:

```
ff=expand(f);

% (a) sin(v)=sqrt(2)/2, cos(v)=sqrt(2)/2
ffa=subs(ff,sin(v),sqrt(2)/2);
ffa=subs(ffa,cos(v),sqrt(2)/2);
solu_a=solve(ffa,u)

% (b) sin(v)=sqrt(2)/2, cos(v)=-sqrt(2)/2
ffb=subs(ff,sin(v),sqrt(2)/2);
ffb=subs(ffb,cos(v),-sqrt(2)/2);
solu_b=solve(ffb,u)

% (c) sin(v)=-sqrt(2)/2, cos(v)=-sqrt(2)/2
ffc=subs(ff,sin(v),-sqrt(2)/2);
ffc=subs(ffc,cos(v),-sqrt(2)/2);
solu_c=solve(ffc,u)

% (d) sin(v)=-sqrt(2)/2, cos(v)=sqrt(2)/2
ffd=subs(ff,sin(v),-sqrt(2)/2);
ffd=subs(ffd,cos(v),sqrt(2)/2);
solu_d=solve(ffd,u)
```

Executând secvența Matlab de mai sus se obține:

```
solu_a = -1/4*pi
solu_b = 1/4*pi
solu_c = -1/4*pi
solu_d = 1/4*pi
```

Prin urmare s-au obținut soluțiile:

$$u_k = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \boldsymbol{Z},$$

respectiv,

$$u_k = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

6.3. Probleme de rezolvat

P6.1. Să se rezolve ecuațiile transcendente:

a) x^2-3=sin(x)+$\sqrt{|x|}$ (Se va determina soluția în vecinătatea valorii x_0=1.)

b) $e^{-x^2} = ln(1 - x + \frac{x^2}{3})$ (Se va determina soluția în vecinătatea x_0=-3, cu precizia 10^{-6}. Să se afişeze şi numărul de iterații efectuate.)

c) $2^{-sin(x)} + 4 - x \cdot ln(x) = 0$ (Se va determina soluția din intervalul [3.1,5]. Se va verifica în prealabil dacă în acest interval a fost separată o soluție.)

d) $(x-3)^2 + 5 - cos(|x|) = 0$ (Se va determina soluția dintr-un interval la alegere.)

P6.2. Câte soluții are ecuația de mai jos? Să se determine două soluții de valori absolute distincte:

$$e^{\cos(x)} = \sin(x) + 1 .$$

P6.3. Să se rezolve ecuația în necunoscuta *x*:

$$2 \cdot b \cdot \cos^2(x) + 2 \cdot a \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = p \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + b, \quad a \neq 0$$

Indicație: Pentru simplificarea expresiilor simbolice se pot folosi comenzile Matlab `simple`, `simplify`.

6.4. Întrebări recapitulative

Î6.1. Definiți noțiunea de „ecuație transcendentă (în nedeterminata x)”.

Î6.2. Câte soluții are o ecuație transcendentă?

Î6.3. Care sunt metodele pe care se bazează funcția Matlab `fzero`?

Î6.4. Care sunt etapele de rezolvare ale unei ecuații transcendente?

Î6.5. Dați exemplu de metodă care se poate folosi pentru etapa de localizare a soluțiilor unei ecuații transcendente.

Î6.6. Precizați expresia, domeniul de definiție, imaginea și câteva proprietăți ale funcției putere.

Î6.7. Precizați expresia, domeniul de definiție, imaginea și câteva proprietăți ale funcției arctangentă.

ANEXA M6. ELEMENTE DESPRE REZOLVAREA ECUAŢIILOR TRANSCENDENTE

M6.1. Ecuaţii transcendente

Se numeşte ***ecuație transcendentă (în necunoscuta x)*** orice ecuație

$f(x) = 0$ ($f : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$)

care nu este o ecuație algebrică.

A rezolva ecuația de mai sus este echivalent cu a determina zerourile funcției *f*.

O ecuație transcendentă poate avea un număr finit de soluții, o infinitate de soluții sau nici o soluție.

Rezolvarea ecuațiilor transcendente cu ajutorul metodelor numerice presupune parcurgerea următoarelor două etape:

I. ***separarea** (**localizarea**)* soluțiilor, adică descompunerea intervalului de căutare *I* într-o partiție de subintervale, astfel încât fiecare subinterval să conțină cel mult o soluție;

II. ***calculul soluțiilor cu o precizie apriori fixată***, de obicei pornind de la valori aproximative ale acestora.

Parcurgerea primei etape se poate face prin diferite metode, de exemplu, prin ***metoda grafo-analitică***. Această metodă se bazează pe rescrierea ecuației transcendente sub forma $g(x) = h(x)$, $g,h: I \to \mathbf{R}$, reprezentarea grafică a celor două funcții *g* şi *h* şi folosirea proprietăților lor de monotonie, periodicitate şi continuitate. Soluțiile ecuației transcendente reprezintă abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor *g* şi *h*. Nu există „rețete” pentru descompunerea $f(x)=g(x)-h(x)$; descompunerea se bazează pe abilitatea şi experiența utilizatorului. „Experiența” înseamnă printre altele cunoaşterea aspectelor de la punctul M6.2 de mai jos.

M6.2. Câteva proprietăţi ale unor funcţii elementare

Tabelul M6.1. sintetizează anumite proprietăți ale unor funcții elementare.

Tabelul M6.1. ***Proprietăți ale unor funcții elementare.***

Numele funcției	**Expresia funcției (f(x))**	**Domeniul de definiție**	**Imaginea**	**Proprietăți**
funcția identitate	f(x)=x	***R***	***R***	o strict crescătoare o continuă o graficul este prima bisectoare
funcția afină	f(x)=a·x+b, a,b∈***R***, a≠0	***R***	***R***	o strict crescătoare, dacă a>0; strict descrescătoa-re, dacă a<0 o continuă o graficul este o dreaptă
funcția polinomială de gradul al doilea	f(x)=a·x²+b·x+c, a,b,c∈***R***, a≠0	***R***	$\left[-\frac{\Delta}{4\cdot a},\infty\right)$, dacă a>0 / $\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4\cdot a}\right]$, dacă a<0, $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$	o nu este monotonă, decât pe porțiuni o continuă o graficul este o parabolă cu vârful $\left(-\frac{b}{2\cdot a},-\frac{\Delta}{4\cdot a}\right)$
funcția polinomială de gradul al treilea	$f(x)=x^3$	***R***	***R***	o strict crescătoare o continuă
funcția radical	$f(x)=\sqrt[n]{x}$ sau $g(x)=\sqrt[2\cdot n-1]{x}$, n∈***N***, n≥2	[0,∞) pentru f, ***R*** pentru g	[0,∞) pentru f, ***R*** pentru g	o strict crescătoare o continuă
funcția putere	$f(x)=x^a$, a∈***R*****	(0,∞)	(0,∞)	o strict crescătoare, dacă a>0; strict descrescătoare, dacă a<0 o continuă
funcția exponențială	$f(x)=a^x$, a∈***R***, a>0, a≠1	***R***	(0,∞)	o strict crescătoare, dacă a>1; strict descrescătoa-re, dacă a<1 o continuă
funcția logaritmică	$f(x)=\log_a(x)$, a∈***R***, a>0, a≠1	(0,∞)	***R***	o strict crescătoare, dacă a>1; strict descrescătoa-re, dacă a<1 o continuă
funcția sinus	f(x)=sin(x)	***R***	[-1,1]	o periodică (perioada 2·π) o impară o continuă
funcția cosinus	f(x)=cos(x)	***R***	[-1,1]	o periodică (perioada 2·π) o pară o continuă

Tabelul M6.1. ***Proprietăţi ale unor funcţii elementare - continuare***

Numele funcţiei	**Expresia funcţiei (f(x))**	**Domeniul de definiţie**	**Imaginea**	**Proprietăţi**
funcţia tangentă	f(x)=tg(x)	***R***-*D*, $D=\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \middle| k \in Z\right\}$	***R***	o periodică (perioada π) o nu este monotonă pe domeniul de definiţie; este strict crescătoare pe fiecare subinterval maximal o nu este continuă pe domeniul de definiţie; este continuă pe fiecare subinterval maximal
funcţia cotangentă	f(x)=ctg(x)	***R***-*D*, $D=\left\{k \cdot \pi \middle| k \in Z\right\}$	***R***	o periodică (perioada π) o nu este monotonă pe domeniul de definiţie; este strict des-crescătoare pe fiecare subinterval maximal o nu este continuă pe domeniul de definiţie; este continuă pe fiecare subinterval maximal
funcţia arcsinus	f(x)=arcsin(x)	[-1,1]	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	o strict crescătoare o continuă
funcţia arccosinus	f(x)=arccos(x)	[-1,1]	[0,π]	o strict des-crescătoare o continuă
funcţia arctangentă	f(x)=arctg(x)	***R***	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	o strict crescătoare o continuă
funcţia arc-cotangentă	f(x)=arcctg(x)	***R***	(0,π)	o strict des-crescătoare o continuă
funcţia modul	f(x)=|x|	***R***	[0,∞)	o nu este monotonă o continuă