3. REPREZENTĂRI GRAFICE ÎN MATLAB

Obiectivele lucrării:

- recapitularea unor tipuri de sisteme de coordonate,
- fixarea unor cunoştinţe privitoare la realizarea graficelor în plan în diferite sisteme de coordonate, respectiv a graficelor în spaţiu, folosind mediul de programare Matlab,

prin studierea unor exemple şi prin rezolvarea unor probleme.

Se recomandă parcurgerea anexei M3 înaintea studierii paragrafelor 3.1 şi 3.2.

3.1. Elemente despre reprezentări grafice în Matlab

Reprezentări grafice în plan

Matlab permite crearea de reprezentări grafice atât în plan (2D), cât şi în spaţiul tridimensional (3D).

În plan pot fi reprezentate grafice de funcţii şi suprafeţe poligonale. Reprezentările grafice ale funcţiilor pot fi făcute în mai multe tipuri de coordonate: carteziene, polare, logaritmice, semilogaritmice.

O parte din funcţiile destinate ***reprezentărilor grafice 2D*** din Matlab sunt prezentate în tabelul 3.1.:

Tabelul 3.1. *Funcţii Matlab pentru reprezentări grafice 2D*

Funcţia	**Utilizare**
fill	reprezentarea grafică a suprafeţelor poligonale
line	reprezentarea grafică a liniilor poligonale
loglog	grafice în coordonate X-Y logaritmice (în baza 10)
plot	grafice în coordonate X-Y carteziene (liniare)
polar	grafice în coordonate polare
semilogx, semilogy	grafice în coordonate X-Y semilogaritmice (în baza 10)

Pentru definirea tipurilor de linii, tipurilor de marker-e (simboluri de reprezentare) precum şi a culorilor sunt disponibile variantele ilustrate în tabelul 3.2.

Tabelul 3.2. *Simboluri de reprezentare a tipurilor de linii, marker-elor şi culorilor*

Tipuri de linii		**Tipuri de marker-e**		**Culori**	
Tip linie	**Simbol**	**Tip marker**	**Simbol**	**Culoare**	**Simbol**
continuă	-	asterisc	*	alb	w
întreruptă	--	cerc	o	albastru	b
linie-punct	-.	hexagon	h	albastru-deschis	c
puncte	:	pătrat	s	galben	y
		pentagon	p	mov	m
		plus	+	negru	k
		punct	.	roşu	r
		romb	d	verde	g
		triunghi	v, ^, <, >		
		x	x		

Reprezentări grafice în spațiu

În Matlab pot fi reprezentate grafic în spațiul 3D curbe, suprafețe şi corpuri 3-dimensionale.

Câteva din funcțiile de ***reprezentare grafică 3D*** sunt redate în tabelul 3.3.:

Tabelul 3.3. *Funcții Matlab pentru reprezentări grafice 3D*

Funcția	**Utilizare**
plot3	reprezentarea curbelor în spațiu
mesh	reprezentarea grafică a suprafețelor 3D sub forma unei rețele (“mesh”)
surf, surfl	reprezentarea grafică a suprafețelor pline
fill3	reprezentarea grafică spațială a poliedrelor
cylinder, sphere, ellipsoid	reprezentarea grafică a unor corpuri tridimensionale

Funcții auxiliare pentru reprezentări grafice

În cazul reprezentărilor grafice pot fi setate diferite proprietăți ale modului de reprezentare, pot fi controlate limitele axelor sistemului de coordonate, se pot plasa texte pe grafic etc. În tabelul 3.4. sunt menționate câteva din funcțiile Matlab auxiliare pentru reprezentări grafice:

Tabelul 3.4. *Funcții Matlab auxiliare pentru reprezentări grafice*

Funcţia	Utilizare
meshgrid	definirea sub formă de rețea de puncte a domeniului de reprezentare 3D a suprafețelor
grid	suprapunerea unei rețele de linii pe grafic
axes, axis	controlul apariției şi stabilirea lungimii unităților de reprezentare ale axelor sistemului de coordonate
subplot	împărțirea ferestrei de reprezentare grafică în mai multe regiuni grafice
hold	păstrarea graficului curent şi a proprietăților sale
colormap	stabilirea sau returnarea matricei de culoare folosită pentru reprezentări grafice 3D
shading	stabilirea modului de umbrire pentru suprafețe în spațiul 3D
title	inserarea unui titlu pentru reprezentarea grafică
xlabel, ylabel, zlabel	inserarea etichetelor axelor sistemului de coordonate
gtext	plasarea unui text pe grafic la poziția selectată cu mouse-ul

3.2. Exemple de studiat

Exemplul 3.1: Să se reprezinte grafic funcțiile f1, f2:[-2,6]→***R***, definite prin relațiile: $f1(x)=\dfrac{1}{\sin(x)+2}$ şi $f2(x)=\dfrac{\cos(x)}{e^{\frac{x}{2}}}$.

Soluție.: Etapele reprezentării graficelor 2D sunt:

- redarea domeniului (intervalului) de reprezentare prin definirea unui vector cu pas liniar:

```
>> x=-2:0.1:6;
```

- definirea funcției / funcțiilor, folosind operatori pentru tablouri:

```
>> f1=1./(sin(x)+2); f2=cos(x)./exp(x/2);
```

- trasarea graficului / graficelor şi, eventual, precizarea anumitor proprietăți ale reprezentării grafice:

```
>> plot(x,f1,'b-',x,f2,'ro')
```

- setarea altor proprietăți ale reprezentării grafice (titlul reprezentării grafice, etichetele axelor, text pe grafic etc):

```
>> title('Grafice 2D'), xlabel('x'), ylabel('y')
>> grid; gtext('graficele a 2 functii')
```

Rezultatul execuției secvenței de comenzi este ilustrat în figura 3.1.

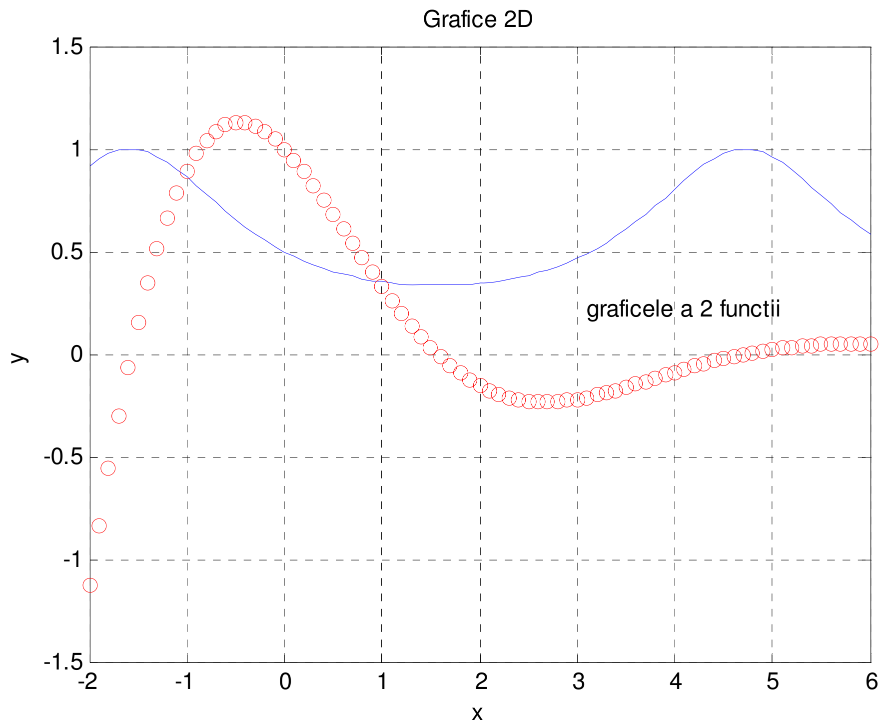


Fig.3.1. *Graficele funcțiilor din exemplul 3.1.*

Comentarii: 1. Pentru reprezentarea grafică a funcțiilor în Matlab este necesar ca domeniul de reprezentare să fie definit prin puncte. În reprezentările grafice din Matlab două puncte consecutive ale graficului sunt unite cu segmentul dintre ele. Distanța dintre oricare două puncte consecutive ale graficului trebuie să fie suficient de mică pentru ca reprezentarea grafică să fie corectă. Totodată, o distanță prea mică necesită mai mult timp de calcul. Deci trebuie găsită întotdeauna o soluție de compromis. În figura 3.2. sunt redate aceleaşi grafice, dar pentru un vector de reprezentare cu pasul de 5 ori mai mare.

2. Reprezentarea mai multor grafice de funcții în acelaşi grafic Matlab se poate face prin enumerarea funcțiilor (sub forma: variabilă, funcție şi, opțional, setări de culoare, marker şi / sau tip de linie, pentru fiecare funcție în parte) în acelaşi apel al funcției `plot`, sau în apeluri diferite ale funcției `plot`, dar, în cazul al doilea, cu condiția ca înainte sau imediat după primul apel să se dea comanda *`hold on`*, iar după ultimul apel să fie dată comanda *`hold off`*. De exemplu, acelaşi grafic se putea obține cu următoarea succesiune de comenzi:

```
>> plot(x,f1,'b-')
>> hold on
>> plot(x,f2,'ro')
>> hold off
```

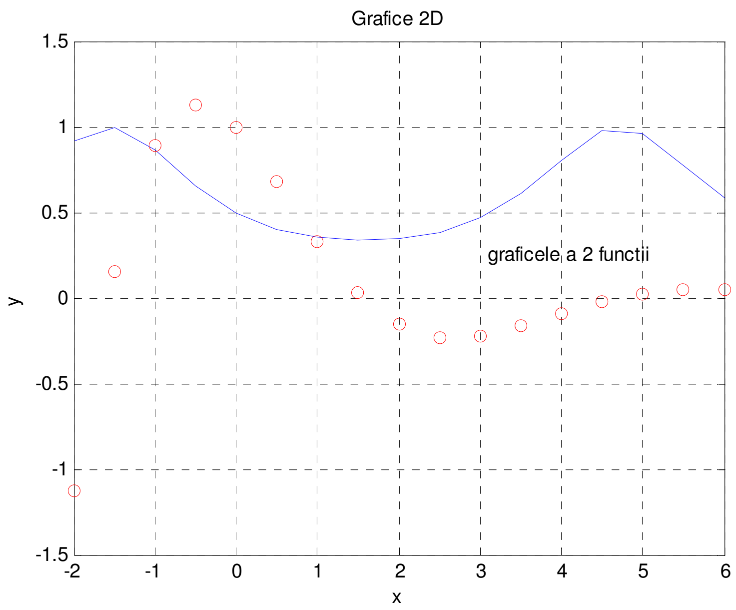


Fig.3.2. *Graficele funcțiilor din exemplul 3.1. în cazul pasului 0.5*

Exemplul 3.2: Să se scrie o funcție Matlab care primeşte ca argumente o altă funcție f şi capetele unui interval închis [a,b] pe care este definită această funcție, şi reprezintă grafic în coordonate semilogaritmice, ambele cazuri, funcția f pe intervalul [a,b]. Dacă reprezentarea grafică în cel puțin unul din cele două cazuri nu poate fi realizată, se va afişa un mesaj de eroare.

Soluție:

- În acest caz, etapa de definire a funcției care se doreşte a fi reprezentată grafic fie se omite, dacă se alege o funcție deja definită, fie se realizează separat, prin definirea ei într-un fişier-funcție.
- Pentru a putea urmări codul sursă al programului este necesară consultarea help-ului Matlab cu privire la funcțiile *min* şi *feval*.
- Codul sursă al funcției Matlab cerute, denumită `grafic_log`, este:

```
function grafic_log(f,a,b)
if a>b
    disp('Interval vid (a>b) !')
    return
end
n=100; % numarul de puncte pentru reprezentarea
       % intervalului-1
pas=(b-a)/n; % pasul de reprezentare
% intervalul [a,b]
if a==b  x=a;
else  x=a:pas:b;
end
if a<=0 | min(feval(f,x))<=0
    disp(['Cel putin unul din graficele in coordonate '...
        'semilogaritmice nu poate fi reprezentat!'])
    return
```

```
end
% coordonate semilogaritmice pe axa x
subplot(2,1,1); semilogx(x,feval(f,x))
% coordonate semilogaritmice pe axa y
subplot(2,1,2); semilogy(x,feval(f,x))
```

Comentarii: 1. Pentru ca vectorul x=a:pas:b să atingă şi capătul din dreapta, pasul trebuie să fie un submultiplu al lungimii intervalului.

2. În reprezentarea celor două grafice s-a optat pentru redarea lor în aceeaşi fereastră grafică. Aceasta a fost împărțită în două subferestre situate una sub cealaltă. În subfereastra de sus va fi reprezentată grafic funcția în coordonate semilogaritmice pe axa x, iar în subfereastra de jos în coordonate semilogaritmice pe axa y.

3. Evident că este necesară testarea în program a valorilor a şi b pentru a şti dacă formează un interval propriu-zis (adică a<=b) şi a valorilor funcției f şi a intervalului [a,b] pentru a putea reprezenta grafic funcția în cele două sisteme de coordonate semilogaritmice (f trebuie să fie strict pozitivă, iar intervalul să conțină valori strict pozitive).

- Pentru testarea programului, mai jos se folosesc funcția Matlab `sin` şi funcția:

```
function y=f(x)
y=sin(x)+2;
```

Apelul funcției `grafic_log` se face din linia de comandă. Funcția f se transmite ca argument prin intermediul denumirii fişierului-funcție în care a fost definită. Iată apelurile şi rezultatele lor, sub formă de răspunsuri în linia de comandă, respectiv reprezentarea grafică în figura 3.3:

```
>> grafic_log('f',2,1)
Interval vid (a>b) !
>> grafic_log('f',-1,10)
Cel putin unul din graficele in coordonate logaritmice nu poate fi reprezentat!
>> grafic_log('sin',1,10)
Cel putin unul din graficele in coordonate logaritmice nu poate fi reprezentat!
>> grafic_log('f',1,10)
```

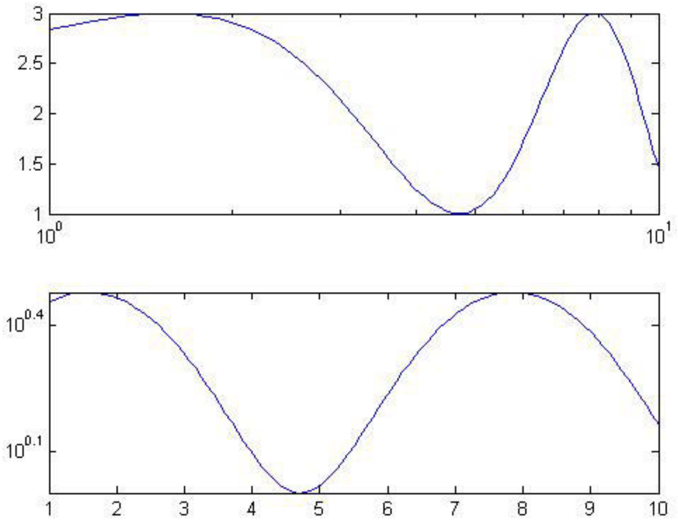


Fig.3.3. *Graficele funcției din exemplul 3.2. în coordonate semilogaritmice*

<u>Exemplul 3.3</u>: Să se reprezinte grafic triunghiul ale cărui vârfuri au coordonatele (-1,3), (2,7) şi (9,-4).

<u>Soluție</u>: Rezolvarea problemei se bazează pe utilizarea funcției `line`, care primeşte ca argumente vectorul tuturor absciselor şi vectorul tuturor ordonatelor vârfurilor (evident în aceeaşi ordine):

```
>> line([-1 2 9 -1],[3 7 -4 3]); grid
```

În figura 3.4. este redată reprezentarea obținută:

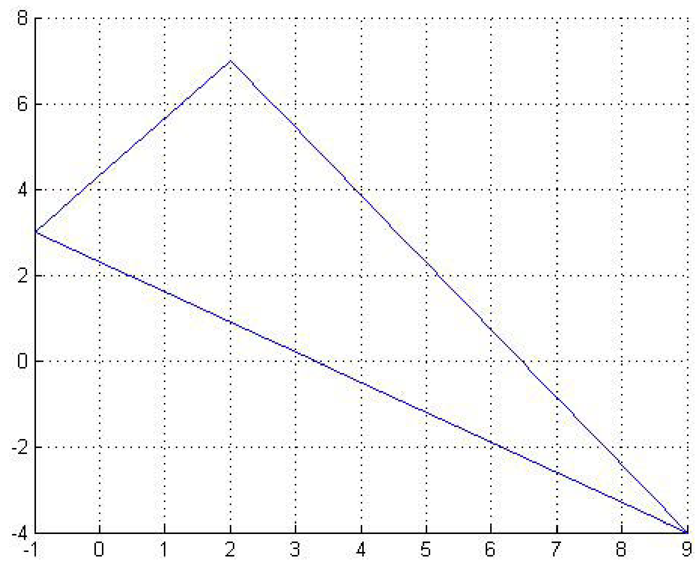


Fig.3.4. *Reprezentarea triunghiului din exemplul 3.3.*

Comentariu: Funcția Matlab `line` unește două puncte consecutive din șirul de puncte cu segmentul determinat de ele. Triunghiul fiind format din 3 segmente, necesită precizarea a patru puncte, evident, primul și ultimul punct fiind identice.

<u>Exemplul 3.4</u>: Să se reprezinte grafic în spațiul tridimensional curba 3D dată prin ecuațiile parametrice: $x(t)=\ln(t^2+2)$, $y(t)=t\sin(t)$, $z(t)=-t-1$, $t\in[-7,7]$.

<u>*Soluție*</u>: Etapele reprezentării unei curbe 3D sunt:

- redarea domeniului (intervalului) de reprezentare prin definirea unui vector cu pas liniar:

```
>> t=-7:0.1:7;
```

- definirea funcțiilor corespunzătoare coordonatelor:

```
>> x=log(t.^2+2); y=t.*sin(t); z=-t-1;
```

- trasarea graficului și, eventual, precizarea anumitor proprietăți ale reprezentării grafice:

```
>> plot3(x,y,z,'m')
```

- setarea altor proprietăți ale reprezentării grafice (etichetele axelor, grid etc):

```
>> grid
>> xlabel('axa x'); ylabel('axa y'); zlabel('axa z');
```

Rezultatul execuției secvenței de comenzi este ilustrat în figura 3.5.

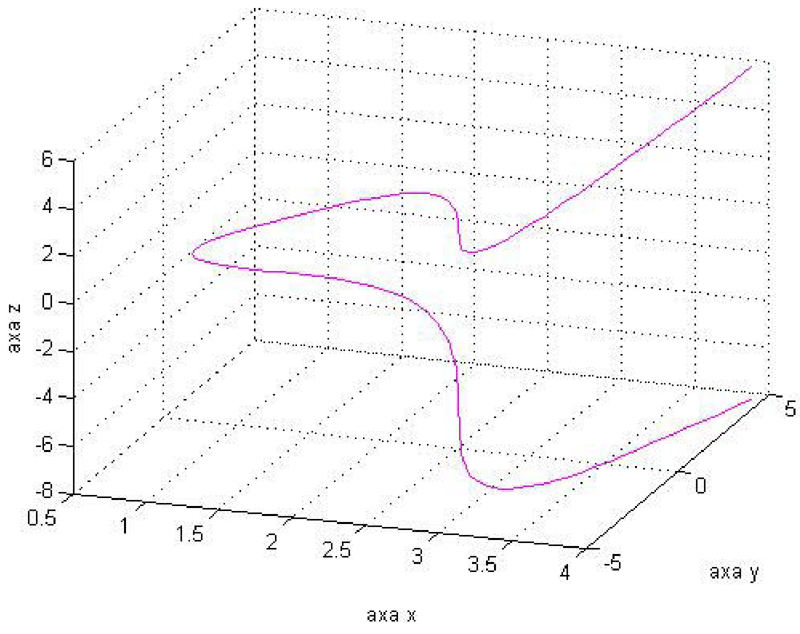


***Fig.3.5.** Reprezentarea grafică a curbei 3D din exemplul 3.4.*

Comentariu: Stabiliți sensul de parcurgere a curbei din figura 3.5. Indicație: Folosiți funcția Matlab `comet3`.

Exemplul 3.5: Să se reprezinte grafic în spațiul 3D clasicul „sombrero” (suprafața descrisă de relația $z(x,y)=\begin{cases}1, & x=y=0\\ \dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x,y\ reali, nenuli\end{cases}$).

Soluție: Etapele reprezentării grafice 3D sunt aceleaşi ca şi în cazul 2D:

- redarea domeniului de reprezentare:

```
>> x=-8:0.2:8; y=x; [x,y]=meshgrid(x,y);
```

- definirea funcției / funcțiilor:

```
>> R=sqrt(x.^2+y.^2); S=sin(R);
>> [i,j]=find(R==0); R(i,j)=1; S(i,j)=1;
>> z=S./R;
```

- trasarea graficului / graficelor şi, eventual, precizarea anumitor proprietăți ale reprezentării grafice (culoare, umbră etc):

```
>> surfl(x,y,z)
>> shading interp
>> colormap(flag)
```

Rezultatul execuției comenzilor este reprezentat grafic în figura 3.6.

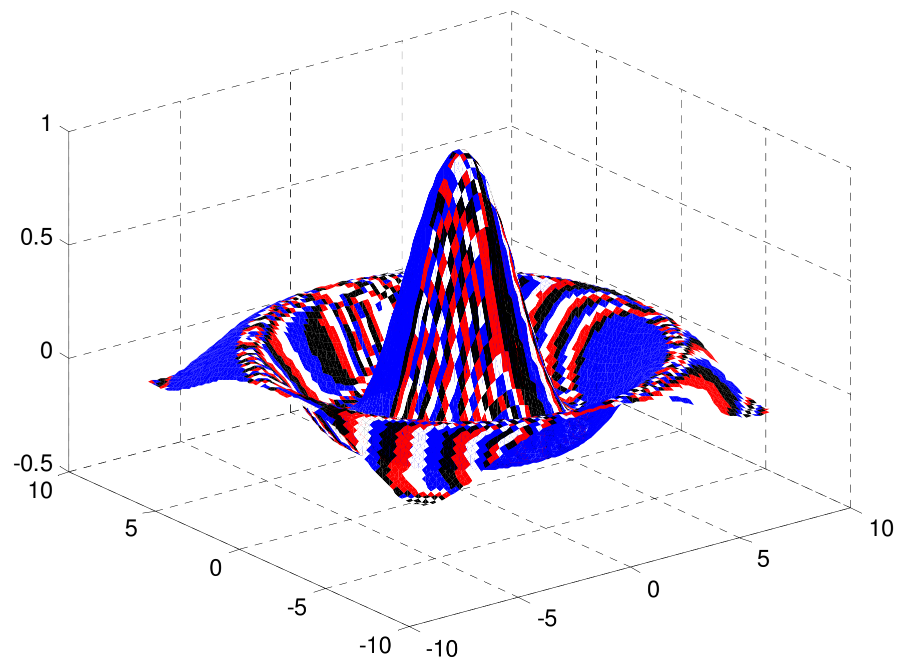


Fig.3.6. *Graficul funcției „sombrero”.*

Comentarii: 1. Domeniul de reprezentare al unei suprafețe este o rețea de puncte $\{(x_i, y_j)\}$, care se formează de obicei în următorul mod: se generează separat seturile de puncte $\{x_i\}$ şi $\{y_j\}$, apoi se formează produsul cartezian al acestora cu ajutorul funcției Matlab `meshgrid`.

2. Pentru a defini valoarea funcției în punctul (0,0), poziția acestuia a fost căutată în tabloul R cu funcția Matlab *find*, iar apoi valoarea de pe poziția găsită a fost setată pe 1, atât în tabloul R, cât şi în tabloul S.

Exemplul 3.6: Să se reprezinte grafic o piramidă dreaptă de înălțime *h* şi cu baza octogon regulat înscris într-un cerc de rază *rc* şi un elipsoid de semiaxe *rx*, *ry* şi *rz*.

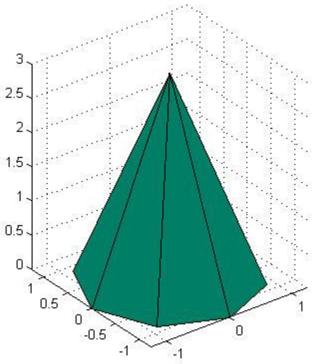
Soluție: Piramida va fi reprezentată cu ajutorul funcției Matlab *cylinder*, iar elipsoidul cu una din funcțiile Matlab *sphere* sau *ellipsoid*.

- Reprezentarea grafică a piramidei, redată în figura 3.7.a, cu rc=1.25 şi h=3, se obține astfel:

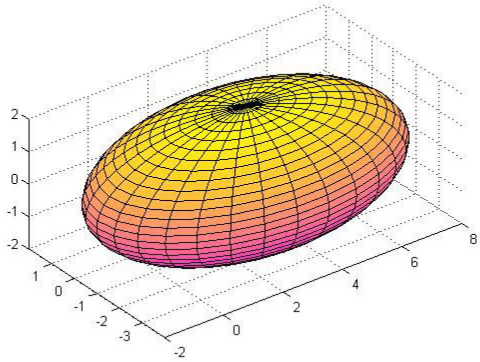
```
% raza cercului circumscris bazei, inaltimea piramidei si
% numarul laturilor bazei
rc=1.25; h=3; n=8;
%determinarea coordonatelor suprafetei piramidei de
% inaltime 1
[xp,yp,z]=cylinder([rc 0],n);
% stabilirea inaltimii cerute
zp=h*z;
% reprezentarea grafica
surf(xp,yp,zp)
colormap(summer); axis('equal')
```

- Reprezentarea grafică a elipsoidului este realizată cu ambele funcții menționate şi este redată în figurile 3.7.b şi 3.7.c (s-a ales ca centru al elipsoidului punctul de coordonate (3,-1,0), iar pentru semiaxe au fost considerate valorile 5,3,2):

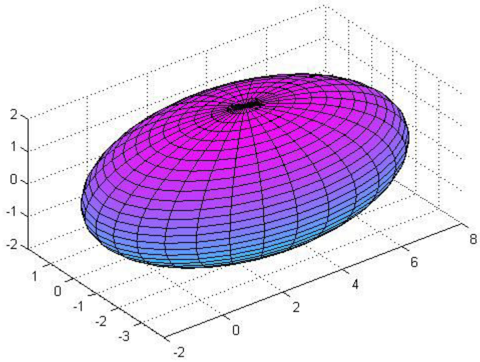
```
% precizarea coordonatelor centrului
xc=3; yc=-1; zc=0;
% precizarea semiaxelor
rx=5; ry=3; rz=2;
% reprezentarea grafica cu functia ellipsoid
ellipsoid(xc,yc,zc,rx,ry,rz,30)
axis('equal'); colormap spring
pause

% reprezentarea grafica cu functia sphere
[x,y,z]=sphere(30);
xe=5*x+3; ye=3*y-1; ze=2*z;
surf(xe,ye,ze)
axis('equal'); colormap(cool)
```



a



b



c

Fig.3.7 *Reprezentarea grafică a unor corpuri 3D: a - piramidă, b,c -elipsoid*

3.3. Probleme de rezolvat

P3.1. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $$y(t) = \begin{cases} \sin(5 \cdot t), & \text{dacă } \{-9 \le t < -3\} \text{ și } \{3 \le t \le 9\} \\ \cos(t) - \cos(3) - \sin(15), & \text{dacă } -3 \le t < 3 \end{cases}$$

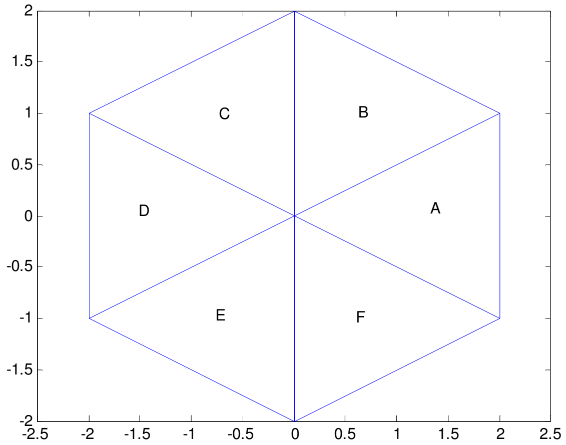
b) $f(t)=\sin(\pi t)\cdot\cos(\pi t)$, $t\in[-3,3]$, cu linie întreruptă de culoare mov și $g(t)=\sin(\pi t+1)\cdot\cos(\pi t+1)$, $t\in[-3,3]$, cu markere-pătrat de culoare albastru-deschis unite cu linie continuă.

P3.2. Să se reprezinte în coordonate polare, ($r=f(t)$, $\theta=t$), funcția:

$$f(t) = \sqrt{\sin(t) + t^2}\ ,\ t\in[0,6\pi].$$

P3.3. Să se reprezinte în coordonate logaritmice, ($\lg(t)$,$\lg(f(t))$), funcția $f(t)=e^{3\cdot t}$, $t\in[1,5]$.

P3.4. Fie suprafața hexagonală din figura de mai jos, formată din 6 regiuni: *A*,*B*,*C*,*D*,*E*,*F*. Să se scrie un program care primește ca argument un număr întreg strict pozitiv *p* şi reprezintă grafic suprafața hexagonală, colorată în funcție de restul *r* al împărțirii lui *p* la 3 cu *r*+1 culori, alternând culorile.



P3.5. Să se reprezinte grafic:

a) dreptunghiul,

b) suprafața dreptunghiulară, cu o culoare la alegere,

determinate de punctele *A*(5,4), *B*(-7,4), *C*(-7,-3), *D*(5,-3).

P3.6. Să se reprezinte grafic în acelaşi plan un cerc şi o elipsă care să se intersecteze.

P3.7. Să se reprezinte grafic spirala 3D dată de relațiile: $x(t)=t$, $y(t)=\sin(0.5\cdot t\text{-}3)$, $z(t)=\cos(0.5\cdot t)$, $t\in[-10\pi,10\pi]$.

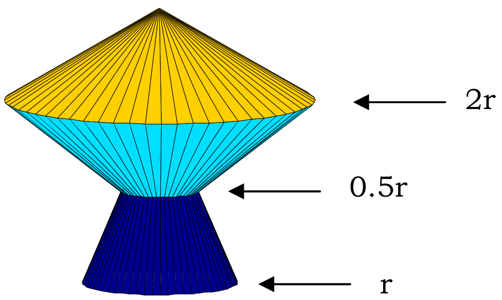
P3.8. Să se reprezinte grafic, pe rând, cu `plot3`, `mesh`, `surf` şi `surfl` funcția:

$z(x,y)=x^3\text{-}3\cdot x\cdot y^2$, $x\in[-3,3]$, $y\in[-3,3]$.

P3.9. Să se reprezinte grafic în mod separat un trunchi de con de raze *rc*1=2, *rc*2=1 şi de înălțime *h*=3 şi o piramidă de înălțime *h* cu baza hexagon regulat, cu cercul circumscris bazei de rază *rp*=3.

P3.10. Să se reprezinte grafic o sferă de rază 6371, care să sugereze Globul Pământesc cu meridiane şi paralele la 15° longitudine şi latitudine.

P3.11. Să se scrie un program care primeşte ca argument un număr real *r* şi realizează următoarea reprezentare grafică (dacă *r* este negativ sau nul, pentru reprezentare se consideră implicit *r* = 1):



3.4. Întrebări recapitulative

Î3.1. Ce tipuri de coordonate în plan pot fi utilizate în Matlab pentru reprezentări grafice de funcții?

Î3.2. Precizați formulele de legătură dintre coordonatele carteziene şi coordonatele polare.

Î3.3. Ce tipuri de grafice 3D pot fi realizate în Matlab?

Î3.4. Care sunt etapele de reprezentare a funcțiilor în plan?

Î3.5. Care sunt etapele de reprezentare a curbelor în spațiu?

Î3.6. Care sunt etapele de reprezentare a suprafețelor în spațiu?

Î3.7. Precizați care este ecuația carteziană generală a dreptei în plan.

Î3.8. Precizați care este ecuația unei drepte determinată de două puncte distincte.

Î3.9. Definiți cercul ca loc geometric.

Î3.10. Precizați care sunt ecuațiile explicite ale unui cerc.

Î3.11. Precizați care sunt ecuațiile parametrice ale unei elipse.

Î3.12. Definiți hiperbola ca loc geometric.

Î3.13. Cum se numeşte figura plană definită ca "loc geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix şi de o dreaptă fixă"?

Î3.14. Definiți sfera ca loc geometric.

Î3.15. Precizați care este ecuația implicită a unui elipsoid.

Î3.16. Precizați care sunt ecuațiile parametrice ale unei sfere.

Î3.17. Precizați utilitatea funcțiilor Matlab `min`, `feval` şi `find`, precum şi sintaxele de apel ale acestora.

ANEXA M3. ELEMENTE DE REPREZENTARE GRAFICĂ ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

M3.1. Tipuri de sisteme de coordonate

a. Coordonate carteziene

Fie *xOy* un sistem de coordonate carteziene în plan. Fie *P* un punct în plan având coordonatele *xp* pe axa *Ox* şi *yp* pe axa *Oy*. Coordonata *xp* se mai numeşte ***abscisa punctului P***, iar axa *Ox* ***axa absciselor***, şi *yp* se mai numeşte ***ordonata punctului P***, iar axa *Oy* ***axa ordonatelor***. Se va nota *P*(*xp*,*yp*). Coordonatele carteziene se mai numesc şi ***coordonate liniare***.

Axele *Ox* şi *Oy* împart planul în patru regiuni, numite ***cadrane deschise***:

- cadranul I este mulţimea punctelor care au ambele coordonate strict pozitive;
- cadranul II este mulţimea punctelor care au abscisele strict negative şi ordonatele strict pozitive;
- cadranul III este mulţimea punctelor care au ambele coordonate strict negative;
- cadranul IV este mulţimea punctelor care au abscisele strict pozitive şi ordonatele strict negative.

Un sistem de coordonate carteziene în spaţiu se notează cu *xOyz*. Poziţia unui punct *P* din spaţiul tridimensional este dată de cele trei coordonate ale sale, *xp* pe axa *Ox*, *yp* pe axa *Oy* şi *zp* pe axa *Oz*. Se va nota *P*(*xp*,*yp*,*zp*).

b. Coordonate polare

Fie *xOy* un sistem de coordonate carteziene în plan şi *P*(*xp*,*yp*) un punct din plan diferit de originea *O* a sistemului. Fie *r* distanţa de la *P* la *O* şi θ unghiul format în sens trigonometric de semidreapta (*OP* cu axa *Ox*, $\theta\in[0,2\pi)$. Numerele *r* şi θ se numesc ***coordonatele polare ale punctului P***. Se notează $P(r,\theta)$. *r* se numeşte ***raza polară a lui P***, iar θ ***argumentul polar al lui P***.

Legătura dintre coordonatele carteziene şi coordonatele polare ale lui P sunt exprimate de relaţiile:

$$r=\sqrt{xp^2+yp^2}\ ,$$

$$cos(\theta)=\frac{xp}{\sqrt{xp^2+yp^2}},\qquad sin(\theta)=\frac{yp}{\sqrt{xp^2+yp^2}},\qquad \theta\in[0,2\pi)$$

c. Coordonate logaritmice

Coordonatele logaritmice reprezintă exprimarea coordonatelor unui punct pe o ***scară logaritmică***, adică ca şi logaritmi într-o bază *b* precizată ale coordonatelor carteziene ale punctului respectiv. Deoarece logaritmul se poate calcula doar pentru valori strict pozitive, singurele puncte care pot fi reprezentate în coordonate logaritmice sunt cele din cadranul deschis I. Astfel, dacă *xOy* este un sistem de coordonate carteziene şi $P(xp,yp)$ un punct din cadranul deschis I, atunci coordonatele logaritmice ale punctului *P* sunt $x=\log_b(xp)$ şi $y=\log_b(yp)$, adică $xp=b^x$ şi $yp=b^y$.

d. Coordonate semilogaritmice

Coordonatele semilogaritmice reprezintă o pereche de coordonate dintre care una este o coordonată carteziană (liniară), iar cealaltă o coordonată logaritmică. Dacă coordonata logaritmică corespunde axei x, atunci se foloseşte denumirea de ***coordonate semilogaritmice pe axa x***. Analog, dacă coordonata logaritmică corespunde axei y, atunci se foloseşte denumirea de ***coordonate semilogaritmice pe axa y***.

M3.2. Figuri geometrice în plan

a. Dreapta

Fie *xOy* un sistem de coordonate carteziene. Orice dreaptă paralelă cu *Ox* se numeşte ***dreaptă orizontală***. Orice dreaptă paralelă cu *Oy* se numeşte ***dreaptă verticală***. Orice dreaptă care nu este nici orizontală şi nici verticală se numeşte ***dreaptă oblică***. Tangenta unghiului format de o dreaptă oblică cu axa *Ox* (unghi cuprins în mulţimea $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$) se numeşte ***panta dreptei oblice*** şi se notează cu *m*.

Ecuaţia dreptei oblice determinată de un punct şi de o pantă

Fie *d* o dreaptă oblică de pantă *m* şi $P(xp,yp)$ un punct al dreptei *d*. Atunci ecuaţia dreptei *d* este:

$y - yp = m\cdot(x - xp)$

Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte

Fie *d* o dreaptă şi $P(xp,yp)$ şi $R(xr,yr)$ două puncte distincte ale dreptei *d*. Atunci ecuaţia dreptei *d* este:

$x = xp$, *când dreapta este verticală*

$y = yp$, *când dreapta este orizontală*

$\frac{x-xp}{xr-xp}=\frac{y-yp}{yr-yp}$, *când dreapta este oblică*

Ecuaţia carteziană generală a dreptei

Fie *d* o dreaptă. Ecuaţia carteziană generală a dreptei *d* are forma implicită:

$a\cdot x+b\cdot y+c = 0$, cu $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a^2+b^2\neq 0$

b. Cercul

Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct dat se numeşte ***cerc***. Punctul dat poartă denumirea de ***centrul cercului***, iar distanţa de la acesta la oricare din punctele cercului se numeşte ***raza cercului***.

Fie *xOy* un sistem de coordonate carteziene, iar $\mathscr{C}$ cercul de centru *C*(*xc*,*yc*) şi de rază *r*. Ecuaţiile cercului $\mathscr{C}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a cercului:*** $(x - xc)^2 + (y - yc)^2 = r^2$
- ***ecuaţiile explicite ale cercului:*** $y = yc \pm \sqrt{r^2 - (x - xc)^2}, \quad x \in [xc - r, xc + r]$
- ***ecuaţiile parametrice ale cercului:*** $\begin{cases} x = xc + r \cdot \cos(\theta) \\ y = yc + r \cdot \sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$

Mulţimea punctelor a căror distanţă la *C* este strict mai mică decât r se numeşte ***interiorul cercului***. Reuniunea dintre cerc şi interiorul său se numeşte ***disc de centru C şi rază r.***

c. Elipsa

Locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că suma distanţelor lor la două puncte fixe este constantă se numeşte ***elipsă***. Cele două puncte fixe se numesc ***focarele elipsei***. Distanţa dintre cele două focare se numeşte ***distanţă focală***, iar distanţele de la un punct *P* oarecare al elipsei la cele două focare se numesc ***razele focale ale punctului P***.

Fie *F* şi *F'* cele două focare, *C* mijlocul segmentului [*FF'*], *A* şi *A'* punctele de intersecţie ale dreptei *FF'* cu elipsa, *B* şi *B'* intersecţia dreptei perpendiculare pe *FF'* în *C* cu elipsa, *a* distanţa *CA* şi *b* distanţa *CB*. *C* este ***centrul de simetrie al elipsei***, iar *AA'* şi *BB'* sunt ***axele de simetrie ale elipsei***. *a* şi *b* se numesc ***semiaxele elipsei***.

Fie *xOy* un sistem de coordonate carteziene şi (*xc*,*yc*) coordonatele centrului de simetrie *C* al elipsei. În continuare se va considera că dreapta *FF'* este paralelă cu axa *Ox*. Fie $\mathscr{E}$ elipsa de centru *C*(*xc*,*yc*) şi semiaxe *a* şi *b*. Ecuaţiile elipsei $\mathscr{E}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a elipsei:*** $\frac{(x - xc)^2}{a^2} + \frac{(y - yc)^2}{b^2} = 1$
- ***ecuaţiile explicite ale elipsei:*** $y = yc \pm b\sqrt{\left(1 - \frac{(x - xc)^2}{a^2}\right)}, \quad x \in [xc - a, xc + a]$
- ***ecuaţiile parametrice ale elipsei:*** $\begin{cases} x = xc + a \cdot cos(\theta) \\ y = yc + b \cdot sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$

d. Hiperbola

Locul geometric al punctelor din plan care au proprietatea că modulul diferenţei distanţelor lor la două puncte fixe este constant se numeşte ***hiperbolă***. Cele două puncte fixe se numesc ***focarele hiperbolei***. Distanţa dintre cele două focare se numeşte ***distanţă focală***, iar distanţele de la un punct *P* oarecare al hiperbolei la cele două focare se numesc ***razele focale ale punctului P***.

Fie F şi F' cele două focare, C mijlocul segmentului $[FF']$, A şi A' punctele de intersecţie ale dreptei FF' cu hiperbola, c distanţa CF, a distanţa CA ($a<c$) şi $b=\sqrt{c^2-a^2}$. C este ***centrul de simetrie al hiperbolei***, iar FF' şi mediatoarea segmentului $[FF']$ sunt ***axele de simetrie ale hiperbolei***. a şi b se numesc ***semiaxele hiperbolei***.

Fie xOy un sistem de coordonate carteziene şi (xc,yc) coordonatele centrului de simetrie C al hiperbolei. În continuare se va considera că dreapta FF' este paralelă cu axa Ox. Fie $\mathscr{H}$ hiperbola de centru $C(xc,yc)$ şi semiaxe a şi b. Ecuaţiile hiperbolei $\mathscr{H}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a hiperbolei:*** $$\frac{(x-xc)^2}{a^2}-\frac{(y-yc)^2}{b^2}=1$$
- ***ecuaţiile explicite ale hiperbolei:*** $$y=yc\pm b\sqrt{\left(\frac{(x-xc)^2}{a^2}-1\right)},$$ $$x\in(-\infty,xc-a]\cup[xc+a,\infty)$$

Mulţimea punctelor de coordonate (x,y) care satisfac ecuaţia:

$$-\frac{(x-xc)^2}{a^2}+\frac{(y-yc)^2}{b^2}=1$$

reprezintă o hiperbolă $\mathscr{H}'$ de centru $C(xc,yc)$ şi semiaxe b şi a, pentru care axa focarelor este paralelă cu axa Oy. Hiperbolele $\mathscr{H}$ şi $\mathscr{H}'$ se numesc ***hiperbole conjugate una alteia***.

O hiperbolă de semiaxe egale se numeşte ***hiperbolă echilateră***.

e. Parabola

Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix şi de o axă fixă se numeşte ***parabolă***. Punctul fix se numeşte ***focarul parabolei***, iar axa fixă ***directoarea parabolei***. Distanţa de la un punct oarecare P al parabolei la focar se numeşte ***raza focală a punctului P***. Fie F focarul, A proiecţia focarului pe directoarea parabolei, C intersecţia dreptei FA cu parabola şi p distanţa dintre focar şi A. C se numeşte ***vârful parabolei***. Dreapta AC este ***dreaptă de simetrie a parabolei***.

Fie xOy un sistem de coordonate carteziene şi (xc,yc) coordonatele vârfului C al parabolei. În continuare se va considera că dreapta AF este paralelă cu axa Ox. Fie $\mathscr{P}$ parabola de vârf $C(xc,yc)$ şi axă de simetrie AF. Ecuaţiile parabolei $\mathscr{P}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a parabolei:*** $$(y-yc)^2-2p(x-xc)=0$$
- ***ecuaţiile explicite ale parabolei:*** $$y=yc\pm\sqrt{2p(x-xc)},\qquad x\geq xc$$

M3.3. Figuri geometrice în spaţiu

a. Dreapta

Fie $xOyz$ un sistem de coordonate carteziene şi d o dreaptă în spaţiul structurat de acesta.

Ecuaţiile carteziene generale ale dreptei

Analitic, dreapta d se exprimă ca intersecţie a două plane, adică prin sistemul de ecuaţii alcătuit din ecuaţiile celor două plane. Astfel, dacă $\mathscr{P}_1$, de ecuaţie $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$, şi $\mathscr{P}_2$, de ecuaţie $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$, sunt cele două plane, atunci, ecuaţiile dreptei d sunt:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}, \quad a_1,\ldots,d_2 \in \boldsymbol{R}$$

Ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de două puncte distincte

Fie $P(xp,yp,zp)$ şi $R(xr,yr,zr)$ două puncte distincte ale dreptei d. Atunci ecuaţiile parametrice ale dreptei d determinate de punctele P şi R sunt:

$$\begin{cases} x = xp + k(xr - xp) \\ y = yp + k(yr - yp), \qquad k \in \boldsymbol{R} \\ z = zp + k(zr - zp) \end{cases}$$

b. Sfera

Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct dat se numeşte ***sferă***. Punctul dat poartă denumirea de ***centrul sferei***, iar distanţa de la acesta la oricare din punctele sferei se numeşte ***raza sferei***.

Fie $xOyz$ un sistem de coordonate carteziene şi $\mathscr{S}$ sfera de centru $C(xc,yc,zc)$ şi de rază r. Ecuaţiile sferei $\mathscr{S}$ sunt:

- ***ecuaţia implicită a sferei:*** $(x - xc)^2 + (y - yc)^2 + (z - zc)^2 = r^2$
- ***ecuaţiile parametrice ale sferei:*** $\begin{cases} x = xc + r \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \\ y = yc + r \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\beta), \quad \alpha \in [0,2\pi), \beta \in [-\pi,\pi] \\ z = zc + r \cdot sin(\beta) \end{cases}$

Mulţimea punctelor a căror distanţă la C este strict mai mică decât r se numeşte ***interiorul sferei***. Reuniunea dintre sferă şi interiorul său se numeşte ***bilă de centru C şi rază r.***

b. Elipsoidul

Un ***elipsoid*** este o suprafaţă tridimensională închisă cu proprietatea că intersecţia ei cu orice plan este o elipsă sau un cerc. Un elipsoid are trei ***axe de simetrie***, care se intersectează într-un punct şi care sunt perpendiculare două câte două. Punctul de intersecţie se numeşte ***centru de simetrie***. Fie *AA'*, *BB'* şi *DD'* intersecţiile celor trei axe de simetrie cu elipsoidul, iar *C* centrul de simetrie. Distanţele *CA, CB* şi *CD* se numesc ***semiaxele elipsoidului*** şi se notează cu *a*, *b*, respectiv *c*.

Fie $xOyz$ un sistem de coordonate carteziene şi $\mathscr{ES}$ un elipsoid de semiaxe a,b şi c, şi de centru de simetrie $C(xc,yc,zc)$. Ecuațiile elipsoidului $\mathscr{ES}$ sunt:

- ***ecuația implicită a elipsoidului:***

$$\frac{(x-xc)^2}{a^2}+\frac{(y-yc)^2}{b^2}+\frac{(z-zc)^2}{c^2}=1$$

- ***ecuațiile parametrice ale elipsoidului:***

$$\begin{cases} x = xc + a\cdot cos(\alpha)\cdot cos(\beta) \\ y = yc + b\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\beta), \quad \alpha\in[0,2\pi),\ \beta\in[-\pi,\pi] \\ z = zc + c\cdot sin(\beta) \end{cases}$$

c. Prisma

Fie $\mathscr{S}$ o suprafață poligonală, inclusă într-un plan α, d o dreaptă care nu aparține planului α şi nu este nici paralelă cu acesta, şi $\alpha\,'$ un plan paralel cu α. Pentru fiecare punct P al suprafeței poligonale $\mathscr{S}$ fie P' intersecția dintre planul $\alpha\,'$ şi paralela la d dusă prin P. Reuniunea tuturor segmentelor $[PP']$, atunci când P parcurge suprafața $\mathscr{S}$, se numeşte ***prismă***. Fie $\mathscr{S}\,'$ mulțimea tuturor punctelor P'. $\mathscr{S}$ şi $\mathscr{S}\,'$ se numesc ***bazele prismei***. $\mathscr{S}$ şi $\mathscr{S}\,'$ sunt congruente.

Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α, atunci prisma este o ***prismă dreaptă***. O prismă dreaptă a cărei bază este o suprafață poligonală regulată se numeşte ***prismă regulată***. O prismă a cărei bază este mărginită de un paralelogram se numeşte ***paralelipiped.*** Un paralelipiped drept se numeşte ***paralelipiped dreptunghic.*** Un paralelipiped dreptunghic care are doar suprafețe mărginite de pătrate se numeşte ***cub***.

d. Piramida

Fie $\mathscr{S}$ o suprafață poligonală, inclusă într-un plan α, şi V un punct care nu aparține planului α. Reuniunea tuturor segmentelor $[VP]$, atunci când P parcurge suprafața $\mathscr{S}$, se numeşte ***piramidă de vârf V şi bază*** $\mathscr{S}$. Distanța de la V la planul α se numeşte ***înălțimea piramidei***.

O piramidă a cărei bază este o suprafață poligonală regulată şi pentru care proiecția lui V pe α este centrul lui $\mathscr{S}$ se numeşte ***piramidă regulată***. O piramidă cu baza suprafață triunghiulară se numeşte ***tetraedru***.

Fie $\alpha\,'$ un plan paralel cu α şi care intersectează piramida. Fie $\mathscr{S}\,'$ intersecția planului $\alpha\,'$ cu piramida. $\mathscr{S}$ şi $\mathscr{S}\,'$ sunt asemenea. Mulțimea punctelor piramidei cuprinse între planurile α şi $\alpha\,'$ împreună cu cele două suprafețe $\mathscr{S}$ şi $\mathscr{S}\,'$ se numeşte ***trunchi de piramidă***. $\mathscr{S}$ şi $\mathscr{S}\,'$ se numesc ***bazele trunchiului de piramidă***. Distanța dintre cele două plane se numeşte ***înălțimea trunchiului de piramidă***. Un trunchi de piramidă obținut dintr-o piramidă regulată se numeşte ***trunchi de piramidă regulată***.

e. Cilindrul

Fie $\mathscr{D}$ un disc, inclus într-un plan α, d o dreaptă care nu aparține planului α şi nu este nici paralelă cu acesta, şi $\alpha\,'$ un plan paralel cu α. Pentru fiecare punct P al discului $\mathscr{D}$ fie $P\,'$ intersecția dintre planul $\alpha\,'$ şi paralela la d dusă prin P. Reuniunea tuturor segmentelor $[PP\,']$, atunci când P parcurge discul $\mathscr{D}$, se numeşte ***cilindru circular***. Fie $\mathscr{D}\,'$ mulțimea tuturor punctelor $P\,'$. $\mathscr{D}$ şi $\mathscr{D}\,'$ se numesc ***bazele cilindrului circular***. $\mathscr{D}$ şi $\mathscr{D}\,'$ au raze egale.

Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α, atunci cilindrul este un ***cilindru circular drept***.

f. Conul

Fie $\mathscr{D}$ un disc, inclus într-un plan α, şi V un punct care nu aparţine planului α. Reuniunea tuturor segmentelor $[VP]$, atunci când P parcurge discul $\mathscr{D}$, se numeşte ***con circular de vârf V şi bază*** $\mathscr{D}$. Distanţa de la V la planul α se numeşte ***înălţimea conului***.

Un con pentru care proiecţia vârfului pe planul bazei coincide cu centrul bazei se numeşte ***con drept***.

Fie α' un plan paralel cu α şi care intersectează conul. Fie $\mathscr{D}'$ intersecţia planului α' cu piramida. Mulţimea punctelor conului cuprinse între planurile α şi α' împreună cu cele două discuri $\mathscr{D}$ şi $\mathscr{D}'$ se numeşte ***trunchi de con***. $\mathscr{D}$ şi $\mathscr{D}'$ se numesc ***bazele trunchiului de con***. Distanţa dintre cele două plane se numeşte ***înălţimea trunchiului de con***. Un trunchi de con obţinut dintr-un con drept se numeşte ***trunchi de con drept***.