5. REZOLVAREA ECUAŢIILOR ALGEBRICE. CALCULUL VALORILOR PROPRII ŞI AL VECTORILOR PROPRII

Obiectivele lucrării:

- fixarea cunoştinţelor privitoare la rezolvarea ecuaţiilor algebrice, atât pe cale numerică, cât şi pe cale simbolică, folosind mediul de programare Matlab,
- recapitularea unor elemente despre valori proprii şi vectori proprii,
- fixarea de cunoştinţe privitoare la calculul valorilor proprii şi al vectorilor proprii, precum şi la valorile singulare şi la numărul de condiţionare în raport cu inversarea a unei matrice, folosind mediul de programare Matlab,

prin studierea unor exemple şi prin rezolvarea unor probleme.

Se recomandă parcurgerea anexei M5 înaintea studierii paragrafelor 5.1 şi 5.2.

5.1. Elemente despre rezolvarea ecuaţiilor algebrice în Matlab. Elemente despre determinarea valorilor proprii şi al vectorilor proprii în Matlab

Rezolvarea ecuaţiilor algebrice

O ecuaţie algebrică în necunoscuta x de forma sau adusă la forma:

$$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0$$

cu $a_i \in \boldsymbol{R}$, $i=0,1,\ldots,n$, se defineşte în Matlab prin specificarea vectorului coeficienţilor în ordine descrescătoare după puterile necunoscutei:

```
c = [a0  a1  ...  an-1  an ]
```

A rezolva ecuaţia de mai sus înseamnă a determina rădăcinile polinomului:

$$P_n = a_0 \cdot X^n + a_1 \cdot X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot X + a_n$$

Pentru determinarea rădăcinilor unui polinom P_n şi a soluţiilor ecuaţiilor algebrice, în Matlab se foloseşte funcţia `roots`, care primeşte ca argument vectorul `c` al coeficienţilor :

```
roots(c)
```

Funcţia `roots` returnează soluţiile în mulţimea numerelor complexe ale ecuaţiilor algebrice (respectiv, toate rădăcinile polinoamelor).

Matlab poate fi utilizat şi pentru rezolvarea ecuaţiilor algebrice cu parametri. În acest scop se foloseşte toolbox-ul *Symbolic Math*, care a fost prezentat pe scurt în paragraful 4.1.

Determinarea valorilor proprii şi a vectorilor proprii

Pentru calculul valorilor proprii ale unei matrice `A` se foloseşte funcția Matlab `eig`, cu sintaxa de apel:

```
val = eig(A)
```

Funcția returnează un vector – coloană `val` care conține valorile proprii ale matricei `A`.

Aceeaşi funcție Matlab `eig` se poate utiliza şi pentru a determina câte un vector propriu unitar (adică de normă euclidiană 1) pentru fiecare valoare proprie. În acest scop, funcția se apelează cu sintaxa:

```
[vec,val] = eig(A)
```

în care `val` reprezintă o matrice diagonală care are pe diagonala principală valorile proprii ale matricei `A`, iar `vec` este o matrice ale cărei coloane sunt vectorii proprii unitari ai valorilor proprii din `val`, astfel încât coloana `i` a matricei `vec` reprezintă vectorul propriu asociat valorii proprii $val_{i,i}$, $i=1,2,\ldots,n$, `n` fiind ordinul matricei `A`.

Calculul valorilor singulare

Pentru calculul valorilor singulare ale unei matrice `A` se utilizează funcția Matlab `svd`, cu sintaxa de apel:

```
vs = svd(A)
```

Funcția returnează un vector – coloană `vs` care conține valorile singulare ale matricei `A`.

Calculul numărului de condiţionare în raport cu inversarea

Pentru calculul numărului de condiționare în raport cu inversarea al unei matrice `A` se utilizează funcția Matlab `cond`, având sintaxa:

```
nrc = cond(A)
```

În Matlab se pot calcula şi alte numere de condiționare ale unei matrice. O funcție Matlab mai performantă care calculează numărul de condiționare al unei matrice este funcția `rcond`, având aceeaşi sintaxă de apel ca şi funcția `cond`. Astfel, un sistem de ecuații liniare a cărui matrice a coeficienților este `A` este bine condiționat, dacă `rcond(A)` este aproape 1 şi slab condiționat dacă `rcond(A)` este aproape 0.

5.2. Exemple de studiat

Exemplul 5.1: Să se rezolve ecuația algebrică:

$x^3-3\cdot x^2-x+3 = 0$

Soluție: Se execută următoarea secvență de program Matlab:

```
>> c=[1 -3 -1 3]; % vectorul coeficientilor
>> disp('Solutiile ecuatiei: '), sol=roots(c)
```

```
Solutiile ecuatiei:
sol =
    3.0000
   -1.0000
    1.0000
```

Rezultă că ecuația are trei soluții: x_1=3, x_2=-1 şi x_3=1. Se observă că această ecuație are doar soluții reale.

<u>Exemplul 5.2</u>: Să se rezolve ecuația algebrică:

$$2 \cdot x + 3 = 6 + \sqrt{x-1}$$

în mulțimea numerelor reale.

<u>Soluție</u>: Rezolvarea problemei constă din parcurgerea următoarelor etape:

1. Se separă într-un membru al ecuației radicalul, ceilalți termeni grupându-se în celălalt membru. Ecuația devine:

$$2 \cdot x - 3 = \sqrt{x-1}$$

Examinând ecuația de mai sus, rezultă următoarele comentarii:

- condiția de existență a radicalului este: $x \geq 1$;
- radicalul unui număr real este pozitiv, în particular, membrul drept este pozitiv; prin urmare şi membrul stâng trebuie să fie pozitiv, adică: $x \geq 1.5$.

Concluzia: soluțiile trebuie să aibă valori mai mari sau egale cu 1.5.

2. Se aduce ecuația la forma $f(x) = 0$, cu f – polinom, prin ridicare la putere şi mutarea tuturor termenilor în membrul stâng. Se obține:

$$4 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 10 = 0$$

3. Se rezolvă ecuația de mai sus în mediul Matlab şi se extrag acele rezultate care îndeplinesc condiția obținută la etapa 1. În acest scop se execută următoarea secvență de cod Matlab:

```
rad=roots([4 -13 10]);
sol=[];
for i=1:length(rad)
    if imag(rad(i))==0 & rad(i)>=1.5
        sol=[sol rad(i)];
    end
end
disp('Solutiile ecuatiei algebrice:')
format short g
sol
```

În urma execuției secvenței de mai sus se obține:

```
Solutiile ecuatiei algebrice:
sol =     2
```

Adică, ecuația are o singură soluție reală, şi anume: $x = 2$.

<u>Exemplul 5.3</u>: Să se determine soluțiile real strict pozitive (Re x_i>0) ale ecuației algebrice:

$-45\cdot x^2+x^7+11\cdot x^3+x^6+4\cdot x^4-50\cdot x -2\cdot x^5 = 0$

<u>Soluție.</u>:

Se execută următoarea secvență de program Matlab (de exemplu, fişier-M):

```
% vectorul coeficientilor ecuatiei
c=[1 1 -2 4 11 -45 -50 0];
% rezolvarea ecuatiei in C
rad=roots(c);
% extragerea solutiilor cu partea reala >0
j=1;
for i=1:length(rad)
    if real(rad(i))>0
        sol(j)=rad(i); j=j+1;
    end
end
disp('Solutiile care au partea reala strict pozitiva: ')
sol
```

În urma execuției secvenței de mai sus se obține:

```
Solutiile care au partea reala strict pozitiva:
sol =   2.0000
        1.0000 + 2.0000i
        1.0000 - 2.0000i
```

<u>Exemplul 5.4</u>: Să se rezolve următoarele ecuații algebrice:

a) $\dfrac{ax-b}{ax+b}=e^{-a}$,

în raport cu necunoscuta x, respectiv în raport cu necunoscuta b;

b) $\dfrac{ax^2+2b}{bx^2-2a}=\dfrac{b}{a}$, în raport cu necunoscuta x.

<u>Soluție</u>: Întrucât în cazul calculului simbolic Matlab returnează soluția în cazul cel mai favorabil, înainte de rezolvarea simbolică este necesară identificarea situațiilor de compatibilitate.

a) <u>Discuții</u>:

- Ecuația în necunoscuta x prezintă următoarele puncte de discuție:

(I.x) a=0 şi b=0 nu este un caz posibil (numitorul ecuației fiind 0);

(II.x) a=0, $b\neq0$ duc la o ecuație imposibilă $-1=1$;

(III.x) $a\neq0$, b=0 nu este un caz posibil (ecuația devine: $1=e^{-a}$, ceea ce contrazice $a\neq0$);

(IV.x) $a\neq0$ şi $b\neq0$. Se rezolvă ecuația. Pentru aceasta se execută următoarea secvență Matlab:

```
% definirea obiectelor simbolice
syms x a b;
% exprimarea membrului stang al ecuatiei adusa la forma
% f(x)=0
f=a*(exp(-a)-1)*x+b*(exp(-a)+1);
%rezolvarea ecuatiei se face implicit in raport cu variabila x
solx=solve(f)
```

În urma execuției secvenței de mai sus, se obține soluția:

```
solx = -b*(exp(-a)+1)/a/(exp(-a)-1)
```

Trebuie verificat dacă pentru orice $a\neq 0$ şi orice $b\neq 0$, soluția x îndeplineşte condiția ca numitorul $a\cdot x+b\neq 0$. Se calculează:

$$a\cdot x+b=\frac{2\cdot b}{1-e^{-a}}$$

care evident este nenul. Deci soluția calculată este validă.

- În cazul necunoscutei b, există următoarele cazuri:

(I.b) $a=0$ sau $x=0$ duc la o ecuație imposibilă $-1=e^{-a}$, adică $-1>0$, ceea ce este fals;

(II.b) trebuie verificat dacă, pentru $a\neq 0$ şi $x\neq 0$, soluția b care se obține nu anulează numitorul ecuației, adică $a\cdot x+b\neq 0$.

Pentru obținerea soluției, se execută următoarea secvență Matlab:

```
% definirea obiectelor simbolice
syms x a b;
% exprimarea membrului stang al ecuatiei adusa la forma
% f(x)=0
f=(a*x-b)/(a*x+b)-exp(-a);
% rezolvarea ecuatiei in raport cu variabila b
solb=solve(f,b)
```

Se obține expresia simbolică:

```
solb = -a*x*(-1+exp(-a))/(1+exp(-a))
```

Se face verificarea $a\cdot x+b\neq 0$:

$$a\cdot x+b=\frac{2\cdot a\cdot x}{1+e^{-a}},$$

care este nenulă pentru orice $a\neq 0$ şi $x\neq 0$. Deci, expresia simbolică obținută reprezintă soluția.

b) <u>Discuții</u>:

(I) a nu poate fi zero;

(II) în cazul $b=0$ ecuația are o singură soluție, $x=0$;

(III) pentru $a=b$ sau $a=-b$, $b\neq 0$, se obține o ecuație imposibilă, care se reduce la $a=-a$, ceea ce nu este posibil, a neputând fi 0;

(IV) în rest, se determină soluțiile ecuației, executând următoarea secvența Matlab:

```
% definirea obiectelor simbolice
```

```
syms x a b;
% exprimarea membrului stang al ecuatiei adusa la forma
% f(x)=0
f=(a*x^2+2*b)/(b*x^2-2*a)-b/a;
% rezolvarea ecuatiei in raport cu variabila x
solx=solve(f,x)
```

Se obțin soluțiile:

```
solx =

  2/(a^2-b^2)*(-(a^2-b^2)*a*b)^(1/2)

 -2/(a^2-b^2)*(-(a^2-b^2)*a*b)^(1/2)
```

Comentarii. 1 Dacă expresia de sub radical, $(-a^2+b^2)\cdot a\cdot b$, este strict negativă, cele două soluții ale ecuației sunt numere complexe;

2. Se verifică uşor că numitorul $b\cdot x^2-2\cdot a$ nu se anulează pentru soluțiile obținute.

Exemplul 5.5: Se consideră matricea pătratică de ordinul 3:

$$A=\begin{bmatrix} 13 & -10 & 12 \\ -11 & 14 & 10 \\ 0 & 12 & -13 \end{bmatrix}$$

Să se determine:

a) valorile proprii ale matricei A;

b) pentru fiecare valoare proprie a lui A câte un vector propriu unitar;

c) valorile singulare ale matricei A;

d) numărul de condiționare în raport cu inversarea al matricei A.

Soluție: Se execută următoarea secvență de program Matlab:

```
clear, clc

A=[13 -10 12; -11 14 10; 0 12 -13];
disp('valorile proprii ale lui A:')
lambda=eig(A)
% determinarea vectorilor proprii unitari
[vec,val]=eig(A);
for i=1:3
    disp(['vectorul propriu unitar corespunzator valorii '...
        'proprii ' num2str(lambda(i)) ': '])
    disp(vec(:,i))
end

% calculul valorilor singulare
disp(blanks(1)')
disp('Valorile singulare ale lui A:')
val_sing=svd(A)

% calculul numarului de conditionare
disp(blanks(1)')
disp(['Numarul de conditionare in raport cu '...
```

```
        'inversarea al lui A'])
nr=cond(A)
```

În urma executării secvenței de mai sus, se obține:

```
valorile proprii ale lui A:
lambda =
   23.5829
    9.2073
  -18.7902
vectorul propriu unitar corespunzator valorii proprii 23.5829:
   -0.4782
    0.8345
    0.2737
vectorul propriu unitar corespunzator valorii proprii 9.2073:
   -0.6320
   -0.6818
   -0.3684
vectorul propriu unitar corespunzator valorii proprii -
18.7902:

   -0.4303
   -0.3923
    0.8130

Valorile singulare ale lui A:
val_sing =
   26.8248
   18.9470
    8.0275

Numarul de conditionare in raport cu inversarea al lui A
nr =     3.3416
```

Comentarii: 1. Funcția Matlab *num2str* converteşte un număr în şirul de caractere format din cifrele şi punctul zecimal al numărului respectiv.

2. Apelul *disp(blanks(n)')*, unde *n* este un număr natural nenul, determină afişarea a n linii goale.

Exemplul 5.6: Să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 0.3333 \cdot x_3 + 0.25 \cdot x_4 = 0.1 \\ 0.5 \cdot x_1 + 0.3333 \cdot x_2 + 0.25 \cdot x_3 + 0.2 \cdot x_4 = 0 \\ 0.3333 \cdot x_1 + 0.25 \cdot x_2 + 0.2 \cdot x_3 + 0.1667 \cdot x_4 = 0.1 \\ 0.25 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 + 0.1667 \cdot x_3 + 0.1429 \cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

Este acest sistem bine condiționat sau slab condiționat? Să se compare soluția obținută cu soluția următorului sistem:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 0.3333 \cdot x_3 + 0.25 \cdot x_4 = 0.1 \\ 0.5 \cdot x_1 + 0.3333 \cdot x_2 + 0.25 \cdot x_3 + 0.2 \cdot x_4 = 0 \\ 0.3333 \cdot x_1 + 0.25 \cdot x_2 + 0.2 \cdot x_3 + 0.1667 \cdot x_4 = 0.1 \\ 0.25 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 + 0.1667 \cdot x_3 + 0.1436 \cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

Soluție: Se poate observa că al doilea sistem a fost obținut din primul sistem, la care s-a modificat coeficientul din a 4-a ecuație corespunzător necunoscutei x_4. Prin urmare, matricea coeficienților celui de-al doilea sistem se poate obține prin înlocuirea elementului de pe linia 4 – coloana 4 cu noua valoare.

Totodată este mai comod să se introducă liniile matricei coeficienților pe linii de cod separate. În acest caz, separatorul de linii ale matricei este ENTER, în locul separatorului obişnuit „;”.

Se execută următoarea secvență Matlab:

```
% matricea coeficientilor
A=[ 1      0.5    0.3333 0.25
    0.5    0.3333 0.25   0.2
    0.3333 0.25   0.2    0.1667
    0.25   0.2    0.1667 0.1429];
% vectorul termenilor liberi
b=[0.1; 0; 0.1; 0];
% solutia sistemului
x=A\b
% numarul de conditionare al lui A
nr_cond=rcond(A)

% matricea coeficientilor sistemului 2
A1=A; A1(4,4)=0.1436;
% solutia sistemului 2
x1=A1\b

% compararea solutiilor
dif=abs(x-x1)
```

În urma executării secvenței de mai sus, se obține:

```
x =    32.8794
     -360.8831
      858.5994
     -554.0360
nr_cond =
        2.7586e-005


x1 =   12.2531
     -119.2262
      261.8065
     -159.2004
dif =   20.6263
       241.6569
       596.7930
       394.8356
```

Se observă că numărul de condiționare al matricei *A* este apropiat de zero. Deci, sistemul este slab condiționat. Aceeaşi observație rezultă şi din compararea soluțiilor celor două sisteme: la o mică modificare a unui coeficient al matricei *A* – modulul diferenței între valorile care diferă este $7 \cdot 10^{-4}$ – se obține o modificare mare a soluției – de exemplu, pentru necunoscuta x_3 modulul diferenței este de peste 500.

5.3. Probleme de rezolvat

P5.1. Să se rezolve ecuațiile algebrice:

a) $2 \cdot x^5 - 3 \cdot x^4 + 3 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 8 = 0$, în ***C***;

b) $2 \cdot x + \sqrt{1 - x^2} + 1 = x^2 + 3 \cdot x + 2$, în ***R***.

P5.2. Să se scrie un program care primeşte ca argument vectorul coeficienților unei ecuații algebrice şi returnează vectorul soluțiilor reale ale ecuației.

P5.3. Să se scrie un program care primeşte ca argument vectorul coeficienților unei ecuații algebrice şi returnează vectorul soluțiilor complexe de modul supraunitar.

P5.4. Să se rezolve în ***R*** următoarea ecuație algebrică în necunoscuta *x*:

$$m - x + \frac{n}{x} = m \cdot x + 1.$$

P5.5. Se consideră matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Să se determine valorile proprii ale matricei. Câți vectori proprii corespund fiecărei valori proprii determinate? Să se afişeze minimum câte trei vectori proprii pentru fiecare valoare proprie determinată.

P5.6. Să se scrie un program care primeşte ca argument o matrice pătratică şi care returnează valoarea singulară minimă, valoarea singulară maximă şi numărul de condiționare în raport cu inversarea al matricei.

P5.7. Să se stabilească dacă următoarele sisteme sunt bine condiționate sau slab condiționate:

a) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ -6x_1 + 8x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 190 \cdot \mathrm{x} + 7 \cdot \mathrm{y} = 4 \\ 2 \cdot \mathrm{x} + 200 \cdot \mathrm{y} = \text{-2} \end{cases}$$

5.4. Întrebări recapitulative

Î5.1. Definiţi noţiunea de „ecuaţie algebrică (în necunoscuta x)”.

Î5.2. Cum se defineşte în Matlab o ecuaţie algebrică?

Î5.3. Definiţi noţiunile de „valoare proprie” şi „vector propriu” pentru o matrice pătratică.

Î5.4. Câţi vectori proprii corespund unei valori proprii? Argumentaţi răspunsul.

Î5.5. Ce proprietate au vectorii proprii returnaţi de funcţia Matlab *eig*?

Î5.6. Definiţi noţiunile de „polinom caracteristic” şi „ecuaţie caracteristică” pentru o matrice pătratică.

Î5.7. Definiţi noţiunile de „spectru” şi „rază spectrală” pentru o matrice pătratică.

Î5.8. Definiţi noţiunea de „valoare singulară” pentru o matrice pătratică.

Î5.9. Definiţi noţiunea de „număr de condiţionare în raport cu inversarea” pentru o matrice pătratică.

Î5.10. Ce se înţelege prin „sistem de ecuaţii liniare bine condiţionat”? Dar prin „sistem de ecuaţii liniare slab condiţionat”?

ANEXA M5. ELEMENTE DESPRE REZOLVAREA ECUAŢIILOR ALGEBRICE. ELEMENTE DESPRE VALORI PROPRII ŞI VECTORI PROPRII

M5.1. Ecuaţii algebrice

Se numeşte ***ecuație algebrică (în necunoscuta x)*** o ecuație de forma:

$f(x) = 0$

unde f este un polinom nenul, sau o ecuație reductibilă (prin operații algebrice) la aceasta.

Dacă polinomul f este de grad n, se spune că ***gradul ecuației algebrice este n***.

Rădăcinile polinomului f se numesc ***soluțiile ecuației algebrice f(x)=0***.

De obicei interesează determinarea soluțiilor reale ale unei ecuații algebrice.

M5.2. Valori proprii. Vectori proprii

Fie A o matrice pătratică de ordinul n cu elemente reale sau complexe.

Un număr $\lambda \in \mathbf{C}$ se numeşte ***valoare proprie a matricei A*** dacă există un vector n-dimensional x ($x \in \mathbf{R}^n$ sau $x \in \mathbf{C}^n$), nenul, astfel încât:

$A \cdot x = \lambda \cdot x$

În acest caz, vectorul nenul x se numeşte ***vector propriu al matricei A asociat valorii proprii λ***.

Relația de mai sus poate fi scrisă şi sub forma:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot x = 0$

Ultima relație reprezintă forma matriceală a unui sistem de ecuații liniare omogene. Întrucât din definiția vectorului propriu rezultă că acest sistem admite şi soluții nebanale, el este un sistem compatibil nedeterminat. Deci sistemul are o infinitate de soluții, ceea ce duce la concluzia că unei valori proprii îi corespund o infinitate de vectori proprii. Determinantul sistemului este:

$det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

Ecuația $det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$ reprezintă o ecuație algebrică în necunoscuta λ şi se numeşte ***ecuația caracteristică a matricei A***. Polinomul de grad n, $P_n(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I_n)$, poartă denumirea de ***polinom caracteristic al matricei A***.

Mulțimea tuturor valorilor proprii ale lui *A* se numeşte ***spectrul matricei A*** şi se notează $\sigma(A)$. Numărul $\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ se numeşte ***raza spectrală a matricei A***.

Vectorii proprii asociați la două valori proprii distincte sunt liniar independenți. Dacă matricea A de ordin *n* are *n* vectori proprii liniar independenți, atunci ea se numeşte ***matrice simplă*** sau ***matrice nedefectivă***. În caz contrar, matricea A se numeşte ***matrice defectivă***.

Valori singulare

Teoremă. Dacă *A* este o matrice pătratică de ordinul *n*, atunci există matricele ortogonale pătratice de ordinul *n*, *U* şi *V*, şi o matrice diagonală Σ de ordinul *n* cu elemente pozitive, care satisfac relația:

$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$

Elementele diagonale ale matricei Σ se numesc ***valorile singulare ale matricei A***.

Câteva proprietăți ale valorilor singulare sunt:

1. Rangul matricei *A* este egal cu numărul valorilor singulare nenule.
2. Valorile singulare ale matricei *A* sunt rădăcinile pătrate ale valorilor proprii ale matricei simetrice $A^T \cdot A$.

Număr de condiționare

Raportul dintre cea mai mare valoare singulară nenulă şi cea mai mică valoare singulară nenulă ale matricei *A* se numeşte ***numărul de condiționare în raport cu inversarea al matricei A***.

Numărul de condiționare al unei matrice *A* caracterizează sensibilitatea unui sistem de ecuații liniare pentru care *A* este matricea coeficienților.

Se spune că ***un sistem de ecuații liniare este slab condiționat*** dacă mici modificări ale coeficienților sistemului duc la modificări mari ale soluției. În caz contrar, se spune că sistemul este ***bine condiționat***. Dacă numărul de condiționare al matricei coeficienților unui sistem de ecuații liniare este mare, sistemul este slab condiționat.