1. INTRODUCERE ÎN MATLAB

Obiectivele lucrării:

- familiarizarea cu mediul de programare Matlab,
- recapitularea unor elemente de calcul matriceal,
- fixarea unor cunoştinţe privitoare la rezolvarea problemelor de calcul matriceal folosind mediul de programare Matlab,

prin studierea unor exemple şi prin rezolvarea unor probleme.

Se recomandă parcurgerea anexei M1 înaintea studierii paragrafelor 1.1 şi 1.2.

1.1. Elemente despre mediul de programare Matlab

O scurtă descriere a mediului de programare Matlab

Matlab (Matrix Laboratory) este un software matematic, produs de firma The MathWorks, Inc. (http://www.mathworks.com), destinat calculului numeric, programării, modelării şi simulării numerice, prelucrărilor de date şi reprezentărilor grafice în ştiinţă şi inginerie.

Matlab este alcătuit din pachete de programe. Unul dintre pachete reprezintă ***nucleul***, care are interpretor propriu, şi care conţine comenzi de uz general, funcţii matematice de bază, funcţii de prelucrare a şirurilor de caractere, instrucţiuni de control, funcţii pentru reprezentări grafice etc. Celelalte pachete de programe, numite ***toolbox-uri***, reprezintă colecţii de funcţii Matlab destinate rezolvării problemelor din diverse domenii, cum ar fi, de exemplu: calcul simbolic (*Symbolic Math Toolbox*), optimizare (*Optimization Toolbox*), modelarea, simularea şi analiza sistemelor dinamice (*Simulink*), statistică (*Statistics Toolbox*).

Lansarea în execuţie a mediului Matlab se face fie utilizând pictograma corespunzătoare, fie rulând programul *Matlab.exe* din subdirectorul *bin* al directorului *Matlab*. ***Părăsirea mediului Matlab*** se efectuează fie utilizând comanda *Exit Matlab* din meniul *File*, fie tastând una din comenzile `quit` sau `exit` în linia de comandă.

Interfaţa Matlab este alcătuită din mai multe ***ferestre***. Utilizatorul poate alege care ferestre să fie vizibile la un moment dat. Anumite toolbox-uri au propriile lor ferestre. În continuare vor fi descrise pe scurt câteva dintre ferestrele interfeţei Matlab:

- *fereastra de comenzi* (*Command Window*): în această fereastră, instrucţiunile se introduc în *linia de comandă*, după prompter, reprezentat de simbolul >>. După apăsarea tastei ENTER, fiecare instrucţiune este evaluată. Dacă instrucţiunile au fost corecte, ele se execută imediat, în caz contrar se afişează mesaje de eroare. Implicit, rezultatul executării fiecărei instrucţiuni este afişat în linia de comandă. În cazul în care nu se doreşte afişarea rezultatului, se adaugă la sfârşitul instrucţiunii semnul „**;**”. Matlab este *case-sensitive*, deci, `a` şi `A` pot reprezenta două variabile distincte;

- *fereastra de editare a unui fişier Matlab* (*Editor*): Matlab are un editor propriu, care se deschide fie utilizând comanda *New* din meniul *File*, urmată de comanda *M-file*, fie tastând comanda `edit` în linia de comandă; un fişier Matlab, numit şi *fişier-M* (*M-file*), este un fişier de tip ASCII care are extensia ***.m*** . Un fişier-M poate fi editat şi în alte editoare de texte, cum este *Notepad*;
- *fereastra pentru reprezentări grafice* (*Figure*): o astfel de fereastră se deschide automat în urma executării unei comenzi de reprezentare grafică;
- *fereastra Help*: oferă informaţii detaliate şi exemple legate de mediul Matlab, de comenzi şi funcţii Matlab etc; în această fereastră se găsesc inclusiv informaţii despre toolbox-urile instalate, precum şi diverse tutoriale;
- *fereastra Workspace*: conţine o listă, cu anumite detalii, a variabilelor create în linia de comandă sau în fişiere script; există o variabilă specială, denumită `ans` (ANSwer), care este creată automat în situaţiile în care expresiile evaluate nu sunt atribuite nici unei variabile;
- *fereastra Current Directory*: afişează fişierele şi subdirectoarele directorului curent; acesta poate fi setat în linia de comandă prin tastarea comenzii `cd cale`, unde *cale* reprezintă calea relativă sau absolută a directorului;
- *fereastra Command History*: conţine o listă a ultimelor comenzi executate; comenzile din această fereastră pot fi copiate în linia de comandă, sau chiar executate.

Utilizarea help-ului din linia de comandă

Mediul Matlab oferă două modalităţi de utilizare a help-ului:

- fereastra Help, care a fost descrisă pe scurt în paragraful precedent;
- help-ul în linie de comandă, care este mai rapid şi oferă informaţii concise despre subiectul dorit.

Comanda:

```
>> help
```

determină afişarea listei de directoare ale mediului Matlab. Prima parte a listei conţine directoarele nucleului (subdirectoare ale directorului *matlab*). A doua parte a listei conţine directoarele toolbox-urilor instalate. Lista este formată din două coloane: prima coloană conţine numele directoarelor, iar a doua coloană o scurtă descriere a conţinuturilor acestora.

Informaţii despre un anumit subiect (comandă, funcţie Matlab, director) se pot obţine cu comanda:

```
>> help subiect
```

Câteva funcții Matlab de control

Principalele ***funcții Matlab de control*** sunt prezentate în tabelul 1.1:

Tabelul 1.1. *Funcții Matlab de control.*

Funcţia	Efectul
cd	returnează numele directorului curent sau schimbă directorul curent
clc	şterge fereastra de comenzi
clear	şterge variabile şi funcții
disp	afişeză un tablou de numere sau caractere, fără a tipări numele tabloului
format	setează formatul de afişare a datelor pe ecran
realmin, realmax	reprezintă cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare strict pozitivă în virgulă mobilă care poate fi folosită în calcule
tic, toc	funcții pentru pornirea şi oprirea unui cronometru
type	listează conținutul fişierul-M menționat
which	returneză calea în care este localizat un fişier sau o funcție Matlab
who	listează variabilele curente din memorie (spațiul de lucru Matlab)
whos	listează variabilele curente, dimensiunile lor, tipul lor

Matrice şi vectori

Elementul de bază cu care operează Matlab este ***matricea***.

O matrice se introduce în Matlab sub forma unui şir de valori delimitat de paranteze drepte, „[" şi „]", atribuit unei variabile, de exemplu `A`. Şirul de valori reprezintă elementele matricei scrise linie cu linie; elementele unei linii se separă prin virgulă sau spațiu, liniile sunt separate între ele prin caracterul punct-şi-virgulă (;).

Valoarea unui element $A_{i,j}$ al unei matrice `A` este accesată prin construcția: `A(i,j)`.

Comentarii: 1. Operatorul Matlab de atribuire este semnul egal (=).

2. În Matlab indicii încep de la valoarea 1.

Operațiile cu matrice se împart în două categorii:

- operații desfăşurate după regulile calculului matriceal, adică ***operații matriceale*** (între paranteze sunt precizați operatorii corespunzători): adunarea (+), scăderea (–), înmulțirea (*), împărțirea la dreapta (/) (pentru semnificație a se vedea capitolul 4), împărțirea la stânga (\) (pentru semnificație a se vedea capitolul 4), ridicarea la putere (^) (`A^B`, unde `A` este matrice pătratică şi `B` scalar sau invers, însă A şi B nu pot fi simultan matrice), transpunerea (') (A' $=$ A^T; respectiv A′ $= \overline{A}^T$ dacă A este o matrice de numere complexe);

- operații desfăşurate după regulile calculului scalar, între elemente situate pe aceeaşi poziție, adică ***operații cu tablouri*** (în acest caz se utilizează denumirea ***tablou*** în locul denumirii *matrice*) (între paranteze sunt precizați operatorii corespunzători): adunarea element cu element (+), scăderea element cu element (–), înmulțirea element cu element (.*), împărțirea la dreapta element cu element (./), împărțirea la stânga element cu element (.\), ridicarea la putere element cu element (.^) , transpunerea element cu element (.') (cu excepția operației de transpunere, pentru celelalte operații operanzii trebuie să aibe aceleaşi dimensiuni sau unul dintre operanzi să fie scalar) .

În Matlab se pot genera ***matrice speciale*** care apar frecvent în calcule matriceale. Exemple de astfel de matrice sunt:

- matricea fără nici un element (introdusă pentru a creşte viteza de lucru): `X=[];`
- matricea având toate elementele egale cu 1: `U=ones(dim);`
- matricea nulă: `O=zeros(dim);`
- matricea unitate: `I=eye(dim);`

unde `dim` poate avea una din semnificațiile:

- ordinul matricei, în cazul matricelor pătratice;
- dimensiunea matricei, sub forma: `număr_linii, număr_coloane`, în cazul matricelor care nu sunt neapărat pătratice;
- dimensiunea unei alte matrice A, sub forma: `size(A)`, dacă se doreşte generarea unei matrice de aceeaşi dimensiune cu matricea A.

În Matlab este considerat că un ***vector*** reprezintă o matrice cu o linie sau cu o coloană. Un element al unui vector este identificat utilizând un singur indice cuprins între paranteze rotunde.

Un caz special de vectori îl reprezintă aşa-numiții ***vectori cu pas liniar***, utilizați, de exemplu, pentru descrierea unui interval finit, închis la ambele capete. Aceştia sunt vectori ai căror elemente reprezintă o secvență finită de termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Generarea unui vector cu pas liniar v se face cu comanda:

```
v=a:pas:b
```

unde `a` reprezintă valoarea primului termen şi `pas` rația progresiei aritmetice (numit *pasul de calcul*), `v` având ca elemente toți termenii progresiei aritmetice din intervalul `[a,b]`, pentru cazul `a≤b` şi `pas≥0`, respectiv intervalul `[b,a]`, pentru cazul `b<a` şi `pas<0`.

Vectorii cu pasul 1 pot fi generați şi cu comanda:

```
v= a:b
```

pasul 1 fiind singurul pas calculat implicit în Matlab. Pentru orice altă valoare a pasului, chiar dacă este egală cu –1, pasul trebuie precizat în mod explicit în expresia de generare.

Manipularea elementelor unei matrice

Următoarele tipuri de operaţii de ***manipulare a elementelor unei matrice***, sunt mai des utilizate:

- Rearanjarea elementelor unei matrice `A` sub forma unui vector-coloană `v`, utilizând comanda:

```
v=A(:)
```

Vectorul `v` conţine elementele matricei în ordinea: prima coloană, a doua coloană, ..., ultima coloană. Datorită acestei posibilităţi de rearanjare, un element al unei matrice poate fi accesat şi prin utilizarea unui singur indice (ca în cazul unui vector), indice care precizează de fapt poziţia elementului respectiv în aranjamentul matricei sub forma vector-coloană.

- Extragerea de submatrice `S` dintr-o matrice `A`, utilizând comanda:

```
S=A(v_lin,v_col)
```

unde `v_lin,v_col` reprezintă vectori (cel mai des, vectori cu pas liniar) care specifică liniile, respectiv coloanele, folosite la extragerea submatricei.

- Asamblarea matricelor mari din alte matrice. Pentru această operaţie se foloseşte o comandă, a cărei sintaxă este asemănătoare celei de definire a unei matrice, singura diferenţă constând în faptul că în locul valorilor matricei se enumeră denumirile matricelor componente.

Calcul matriceal

În tabelul 1.2 sunt redate pe scurt principalele funcţii destinate ***calculului matriceal***.

Tabelul 1.2. *Funcţii Matlab pentru calcul matriceal.*

Funcţia	**Sintaxa**	**Efectul**
chol	`R=chol(A)`	realizează factorizarea Cholesky a matricei simetrice şi pozitiv definite `A` ($A=R^T*R$, unde `R` este o matrice superior triunghiulară)
conj	`conj(A)`	returnează conjugata matricei cu elemente complexe `A`
det	`det(A)`	returnează determinantul matricei pătratice `A`

diag	`diag(A,p)`
	
	`diag(A)`
		returnează a `p`-a diagonală a matricei `A` paralelă cu diagonala principală, care se află deasupra (cazul `p>0`), sub aceasta (cazul `p<0`) sau este identică cu aceasta (cazul `p=0`)
		
		returnează diagonala principală a matricei `A` (identic cu cazul `p=0`)

inv	`inv(A)`	returnează inversa matricei pătratice, inversabile `A` *Comentariu*: inversa unei matrice `A` mai poate fi calculată cu comanda `A^(-1)`

Tabelul 1.2. *Funcții Matlab pentru calcul matriceal - continuare*

Funcţia	Sintaxa	Efectul
lu	`[L,U]=lu(A)` `[L,U,P]=lu(A)`	realizează factorizarea LR a matricei A (P·A=L·U, unde L este o matrice inferior triunghiulară (*lower*), U o matrice superior triunghiulară (*upper*), iar P o matrice de permutări); dacă se utilizează prima sintaxă, L va fi o matrice care conține o permutare a liniilor matricei inferior triunghiulare, astfel încât A=L·U
qr	`[Q,R]=qr(A)`	realizează factorizarea QR a matricei A (A=Q·R, unde Q este o matrice ortogonală, R o matrice superior triunghiulară)
rank	`rank(A)`	returnează rangul matricei A
size	`[lin,col]=size(A)`	returnează dimensiunea matricei A (numărul de linii, lin, şi numărul de coloane, col)

Comentarii: 1. În Matlab, factorizările LR şi QR se pot efectua pentru orice matrice, nu doar cele pătratice. În acest caz, o matrice oarecare cu p linii şi n coloane este *inferior triunghiulară*, dacă pentru orice i=1,2,...,p şi j=1,2,..,n cu i<j, elementul matricei situat pe poziția (i,j) este nul. Respectiv, o matrice oarecare cu p linii şi n coloane este superior triunghiulară, dacă pentru orice i=1,2,...,p şi j=1,2,..,n cu i>j, elementul matricei situat pe poziția (i,j) este nul.

2. Prin factorizarea LR în Matlab a unei matrice de dimeniune p×n se obțin o matrice inferior triunghiulară de dimensiune p×min(p,n) şi o matrice superior triunghiulară de dimensiune min(p,n)×n.

3. Prin factorizarea QR în Matlab a unei matrice de dimeniune p×n se obțin o matrice ortogonală de dimensiune p×p şi o matrice superior triunghiulară de dimensiune p×n.

Şiruri de caractere

Un ***şir de caractere*** este format din unul sau mai multe caractere şi este delimitat de apostrofuri, '. Apostrofurile nu fac parte din şirul de caractere. Un şir de caractere poate fi atribuit unei variabile folosind operatorul de atribuire =. Caracterele sunt memorate intern prin intermediul codurilor ASCII.

1.2. Exemple de studiat

Exemplul 1.1: Utilizând help-ul în linie de comandă, să se găsească funcția Matlab pentru calculul arctangentei şi să se specifice sintaxa de apel a acesteia.

Soluție: Rezolvarea problemei constă din următorii paşi:

i) Căutarea unui director cu funcții trigonometrice. Pentru aceasta se foloseşte comanda:

```
>> help
```

Din lista de directoare afişate se constată că nu există un director destinat doar funcțiilor trigonometrice. Funcția arctangentă este însă o funcție elementară, deci se găseşte probabil în directorul:

```
matlab\elfun          -  Elementary math functions.
```

ii) Vizualizarea conținutului directorului `elfun`:

```
>> help elfun
```

În lista funcțiilor Matlab din acest director se află şi funcția căutată:

```
atan        - Inverse tangent.
```

iii) Aflarea sintaxei de apel a funcției:

```
>> help atan
```

Din help-ul funcției `atan` rezultă că sintaxa de apel este:

```
atan(X)
```

care returnează arctangentele, exprimate în radiani, ale elementelor vectorului `X`.

Comentarii: 1. Denumirile funcțiilor Matlab se scriu cu litere mici. Ele apar scrise în *help* cu litere mari doar pentru a fi scoase în evidență.

2. Dacă s-ar fi presupus că denumirea funcției arctangentă din Matlab este aceeaşi cu cea folosită în matematică, *arctg*, şi s-ar fi apelat help-ul funcției cu această denumire:

```
>> help arctg
```

Matlab ar fi afişat un mesaj de eroare, anunțând utilizatorul că nu găseşte fişierul-M `arctg` (`arctg.m not found.`), ceea ce arată că denumirea funcției Matlab şi denumirea fişierului în care este implementată funcția trebuie să fie identice.

Exemplul 1.2: Să se extragă din matricea M, definită mai jos: elementul de pe linia 1 şi coloana 3, prima linie, coloana a 2-a şi submatricea determinată de liniile 1,2 şi 4 şi de coloanele 2, 3 şi 4.

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

<u>*Soluție*</u>: Problema se rezolvă parcurgând următorii paşi:

i) Introducerea matricei M:

```
>> M=[1 2 3 4; 2 4 6 8; -1 -2 -3 -4; 0 5 0 7];
```

ii) Extragerea elementului de pe linia 1 şi coloana 3:

```
>> M(1,3)
ans =     3
```

iii) Extragerea primei linii:

```
>> M(1,:)
ans =
     1     2     3     4
```

iv) Extragerea coloanei a 2-a:

```
>> M(:,2)
ans =
     2
     4
    -2
     5
```

v) Extragerea submatricei determinată de liniile 1,2 şi 4 şi de coloanele 2, 3 şi 4:

```
>> M([1,2,4],2:4)
ans =
     2     3     4
     4     6     8
     5     0     7
```

Comentarii: 1. Rezultatele extragerilor nu au fost atribuite niciunei variabile. În acest caz, Matlab a făcut atribuirea implicită a rezultatului fiecărei operații de extragere variabilei *ans*.

2. Dacă se doreşte extragerea tuturor elementelor unei linii, în locul vectorului ce indică coloanele de pe care se face extragerea se foloseşte forma prescurtată „:”. O observație asemănătoare este valabilă şi în cazul extragerii unei coloane.

3. Matricea M nefiind reatribuită în mod explicit, nu a fost afectată de nici una din operațiile de mai sus. Acest lucru se poate vedea afişând la sfârşit conținutul matricei:

```
>> M
M =
     1     2     3     4
     2     4     6     8
    -1    -2    -3    -4
     0     5     0     7
```

1.3. Probleme de rezolvat

P1.1. Fie $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -5 & 0 & 8\end{bmatrix}$ şi $B=\begin{bmatrix}4 & -3 & 1\\ -1 & 0 & 5\end{bmatrix}$. Să se scrie instrucțiunile care afişează rezultatele tuturor operațiilor matriceale, respectiv cu tablouri, care se pot efectua cu *A* şi *B*.

P1.2. Fie $Z=\begin{bmatrix}2-3i & -i\\ 4+7i & 5\end{bmatrix}$. Să se aplice asupra lui *Z* cei doi operatori de transpunere şi să se precizeze diferențele dintre rezultatele afişate.

P1.3. Să se exemplifice utilizarea help-ului în linie de comandă pentru găsirea următoarelor funcții Matlab:

- funcția / funcțiile care determină codurile ASCII ale unui şir de caractere; să se exemplifice utilizarea funcției / funcțiilor găsite pentru şirul de caractere 'Matlab';
- funcția / funcțiile care compară două şiruri de caractere; să se compare şirurile 'test' şi 'Test' şi să se afişeze rezultatul;
- funcția / funcțiile care determină poziția unui şir de caractere într-un alt şir de caractere; să se afle poziția şirului de caractere *S*2='test' în şirul de caractere *S*1='Acest test este interesant.'.

P1.4. Se consideră următoarea matrice:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & -2 & -9\\ 0 & -5 & 4 & 8 & 10\\ 6 & 6 & 1 & -5 & 7\\ 11 & -2 & 6 & 9 & 4\\ -8 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Se cere să se extragă:

- linia a 3-a;
- ultima coloană;
- ultima linie;
- submatricea determinată de liniile 2-4 şi coloanele 1-3.

P1.5. Să se determine transpusa, rangul şi determinantul matricei de la problema precedentă. Este matricea *A* inversabilă? În caz afirmativ, să se determine inversa matricei *A*.

P1.6. Să se realizeze factorizările LR, respectiv QR, pentru matricea de la problema P1.4. Să se verifice ortogonalitatea matricei Q obținute.

P1.7. Să se afişeze matricea obținută prin concatenarea succesivă a matricei de la problema P1.4. cu vectorii:

$$u = \begin{bmatrix} 14 & 9 & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad w = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1.4. Întrebări recapitulative

Î1.1. Care sunt ferestrele cu care ați lucrat în Matlab?

Î1.2. Care este elementul de bază în Matlab şi de la ce vine denumirea de „Matlab"?

Î1.3. Ce utilizări ale operatorului Matlab „;" (punct-virgulă) cunoaşteți (unde l-ați utilizat şi ce efect a avut)?

Î1.4. Care sunt cele două tipuri de operații asupra matricelor în Matlab şi care este diferența de notare a operatorilor corespunzători celor două tipuri de operații?

Î1.5. Specificați care este funcția Matlab pentru generarea matricei identitate I_n şi modurile sale de apel.

Î1.6. Specificați care este comanda Matlab pentru generarea unui interval real [a,b].

Î1.7. Ce se înțelege prin „vector" în Matlab?

Î1.8. Fie x un număr real. Specificați instrucțiunea de calcul a lui e^x în Matlab.

Î1.9. Fie x un număr real strict pozitiv. Specificați instrucțiunea de calcul a lui ln(x) în Matlab.

Î1.10. Precizați care este funcția Matlab pentru calculul arctangentei.

Î1.11. Precizați care este funcția Matlab pentru calculul cosinusului hiperbolic.

Î1.12. Definiți noțiunea de „transpusă a unei matrice".

Î1.13. Precizați proprietățiile operației de transpunere a matricelor.

Î1.14. Precizați care este diferența dintre operatorii ' (apostrof) şi .' (punct-apostrof).

Î1.15. Definiți noțiunea de „matrice superior triunghiulară".

Î1.16. Definiți noțiunea de „matrice inferior triunghiulară".

Î1.17. Definiția noțiunea de „matrice ortogonală".

Î1.18. Precizați proprietățiile operației de inversare a matricelor.

Î1.19. Ce se înțelege prin „factorizarea unei matrice pătratice"?

Î1.20. Ce tipuri de factorizări ale matricelor pătratice cunoaşteți?

Î1.21. Precizați care este funcția Matlab pentru determinarea dimensiunilor unei matrice, precum şi modul ei de apelare.

ANEXA M1. ELEMENTE DE ALGEBRĂ MATRICEALĂ

M1.1. Elemente de algebră matriceală

a. Diferite tipuri de matrice

Fie A o matrice cu p linii şi n coloane cu elemente din mulţimea numerelor reale, $\boldsymbol{R}$, sau a numerelor complexe complexe, $\boldsymbol{C}$:

$$A=\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,n} \end{bmatrix}$$

Notăm $A\in M_{p,n}(\boldsymbol{K})$, unde $\boldsymbol{K}\in\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{C}\}$. Spunem că matricea A ***are dimensiunea p×n*** sau ***este de dimensiune p×n***.

O matrice pătratică de ordinul n este o matrice A cu n linii şi n coloane. În acest caz folosim notaţia $A\in M_n(\boldsymbol{K})$.

Transpusa matricei A$\in M_{p,n}(\boldsymbol{K})$ este matricea notată $A^T\in M_{n,p}(\boldsymbol{K})$, cu n linii şi p coloane, obţinută din matricea A prin schimbarea între ele a liniilor şi coloanelor:

$$A=\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{p,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \cdots & A_{p,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \cdots & A_{p,n} \end{bmatrix}$$

Proprietăţi ale operaţiei de transpunere a matricelor sunt:

1. $(A^T)^T=A$, $\forall\ A\in M_{p,n}(\boldsymbol{K})$;
2. $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$, $\forall\ A\in M_{p,n}(\boldsymbol{K})$ şi $\forall\ \alpha\in\boldsymbol{K}$;
3. $(A + B)^T=A^T + B^T$, $\forall\ A, B\in M_{p,n}(\boldsymbol{K})$;
4. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$, $\forall\ A\in M_{p,n}(\boldsymbol{K})$ şi $\forall\ B\in M_{n,s}(\boldsymbol{K})$.

Conjugata unei matrice A$\in M_{p,n}(\boldsymbol{C})$ este matricea notată $\overline{A}\in M_{p,n}(\boldsymbol{C})$ care conţine conjugatele elementelor matricei A.

O matrice simetrică este o matrice pătratică A cu proprietatea $A=A^T$.

O matrice antisimetrică este o matrice pătratică A cu proprietatea $A=-A^T$.

O matrice superior triunghiulară este o matrice pătratică A cu proprietatea $A_{i,j} = 0$, $\forall\ i>j$.

O matrice inferior triunghiulară este o matrice pătratică A cu proprietatea $A_{i,j}= 0,\ \forall\ i<j$.

O matrice pătratică de ordinul n care are elemente nenule doar pe diagonala principală se numeşte ***matrice diagonală de ordinul n.***

O matrice diagonală de ordinul n cu toate elementele de pe diagonala principală de valoare unitară, se numeşte ***matrice unitate de ordinul n***:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

O matrice ortogonală este o matrice pătratică A cu proprietatea $A\cdot A^T=I_n$.

b. Determinant. Inversa unei matrice

Se consideră o matrice pătratică A de ordinul n cu elemente numere reale sau complexe. Fie S_n mulţimea tuturor permutărilor mulţimii $M=\{1,2,\ldots,n\}$.

Numărul:

$$det\,A= \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S_n} (-1)^{I(k_1,k_2,\ldots,k_n)} A_{1,k_1} A_{2,k_2} \ldots A_{n,k_n}$$

în care $I(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ este numărul tuturor inversiunilor permutării $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$, se numeşte ***determinantul matricei A*** sau ***determinant de ordinul n***.

Observaţie. Se numeşte ***inversiune a permutării*** $(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S_n$ orice pereche $(i,j)\in M\times M$ cu proprietăţiile $i<j$ şi $k_i>k_j$.

O matrice $A\in M_n(\boldsymbol{K})$ cu proprietatea $det\,A = 0$ se numeşte ***matrice singulară***.

O matrice nesingulară este o matrice $A\in M_n(\boldsymbol{K})$ cu proprietatea $det\,A \neq 0$.

O matrice pătratică $A\in M_n(\boldsymbol{K})$ este ***o matrice inversabilă*** dacă există o matrice pătratică $B\in M_n(\boldsymbol{K})$ astfel încât:

$A\cdot B= B\cdot A=I_n$.

Matricea B din relaţia de mai sus se numeşte ***matricea inversă a matricei A*** şi se notează cu A^{-1}.

Principalele proprietăţi ale operaţiei de inversare sunt:

1. O matrice pătratică este inversabilă dacă şi numai dacă ea este o matrice nesingulară.
2. $\forall\ A\in M_n(\boldsymbol{K})$, A – inversabilă, rezultă că A^{-1} este inversabilă şi $(A^{-1})^{-1}=A$;
3. $\forall\ A\in M_n(\boldsymbol{K})$, A – inversabilă, rezultă că A^T este inversabilă şi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
4. $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det\,A}$, $\forall\ A\in M_n(\boldsymbol{K})$, A - inversabilă;

5. $\forall\ A \in M_n(\boldsymbol{K})$ şi $\forall\ B \in M_n(\boldsymbol{K})$, A, B – inversabile, rezultă că $A \cdot B$ este o matrice inversabilă şi $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Fie o matrice $A \in M_n(\boldsymbol{K})$.

Se numeşte ***minor al elementului $A_{i,j}$ din det A***, determinantul de ordinul n-1 care se obţine din *det A* prin eliminarea liniei i şi a coloanei j. Minorul elementului $A_{i,j}$ se notează cu $M_{i,j}$.

Se numeşte ***complement algebric*** sau ***cofactor al elementului $A_{i,j}$ din det A*** numărul:

$\underline{A}_{i,j}=(-1)^{i+j}M_{i,j}$

Se numeşte ***adjuncta matricei A***, şi se notează cu A^*, matricea:

$$A^* = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{21} & \cdots & \underline{A}_{n1} \\ \underline{A}_{12} & \underline{A}_{22} & \cdots & \underline{A}_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{A}_{1n} & \underline{A}_{2n} & \cdots & \underline{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

Utilizând noţiunile de mai sus, inversa matricei A se poate exprima sub forma următoare:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot A^*$$

c. Rangul unei matrice

Fie A o matrice de dimensiune $p \times n$ cu elemente numere reale sau complexe.

Se numeşte ***minor de ordin k al matricei A*** orice determinant de ordin k format din k^2 elemente ale lui A (k linii şi k coloane, păstrând ordinea elementelor).

Se spune că matricea A are ***rangul r***, dacă A are un minor de ordinul r nenul, iar toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r, dacă există astfel de minori, sunt nuli. Faptul că matricea A are rangul r se scrie sub forma:

$rang\ A = r$

d. Factorizarea matricelor

Prin ***factorizarea unei matrice pătratice A de ordinul n*** se înţelege exprimarea matricei A sub forma unui produs de două (sau mai multe) matrice de acelaşi ordin cu A. De obicei, matrice-factor sunt matrice de anumite tipuri (triunghiulare, ortogonale etc.). Astfel se disting mai multe metode de factorizare, dintre care menţionăm următoarele:

- ***Factorizarea LR*** (cunoscută şi sub denumirea de *factorizare LU*)

Matricea $A \in M_n(\boldsymbol{K})$ se scrie sub forma:

$A=L \cdot R$

unde $L \in M_n(\boldsymbol{K})$ este o matrice inferior triunghiulară, iar $R \in M_n(\boldsymbol{K})$ o matrice superior triunghiulară.

Un caz particular îl constituie factorizarea LR a matricelor simetrice şi pozitiv definite, numită ***factorizare Cholesky***. În acest caz, $L=R^T$.

Comentariu. Fie A_k submatricea determinată de primele k linii şi primele k coloane ale matricei pătratice A de ordinul n. Matricea A este ***pozitiv definită***, dacă şi numai dacă determinanții tuturor submatricelor A_k, $k=1,2,\ldots,n$ sunt strict pozitivi.

- ***Factorizarea QR***

Exprimarea matricei $A\in M_n(\boldsymbol{K})$ se face sub forma:

$A=Q\cdot R$

unde $Q\in M_n(\boldsymbol{K})$ este o matrice ortogonală, iar $R\in M_n(\boldsymbol{K})$ o matrice superior triunghiulară.