3–9 нояб.	**10**	Переходные процессы и свободные колебания в электрических цепях.	9.4 °10.1 9.33

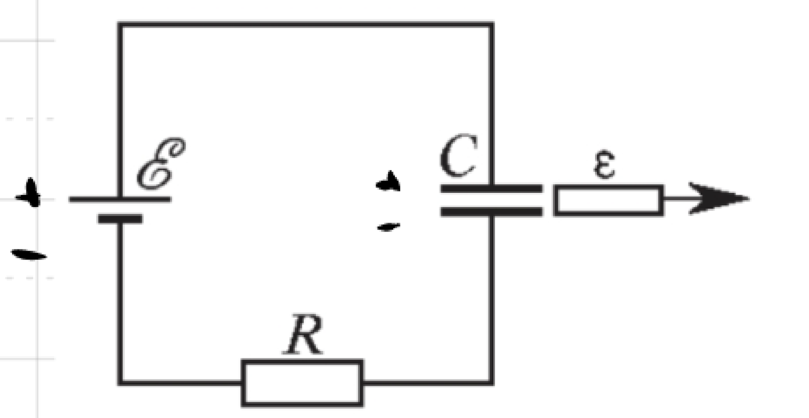
№9.4

9.4. Из конденсатора быстро извлекают пластину с диэлектрической проницаемостью ε так, что емкость скачкообразно изменяется до значения C (рис. 206). Найти зависимость тока в цепи от времени и нарисовать график $\mathcal{I}(t)$. Диэлектрик заполняет весь объем конденсатора.

Дано: | Решение:

ε, C

$I(t)$ - ?



Изначально конденсатор заряжен до напряжения $U_c = \mathcal{E}_c$, ток в цепи не течет. После уд. элемента конд. он начнет разряжаться

$$\mathcal{E}_c = \frac{q}{C} + IR = \frac{q}{C} + \dot{q}R \quad (I<0)$$

(ток течет против источника)

Нач. ток: $I_0 R = \mathcal{E} - \frac{q_0}{C}$

$$\mathcal{E}_c = \frac{q_0}{\varepsilon C} \to q_0 = \mathcal{E}_c \varepsilon C$$

$$I_0 = -\left(\frac{\mathcal{E}_c \varepsilon}{R} - \frac{\mathcal{E}_c}{R}\right) = \frac{\mathcal{E}_c}{R}(1-\varepsilon)$$

$$\dot{q}R = \mathcal{E}_c - \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq\,R}{\mathcal{E}_c - \frac{q}{C}} = dt$$

$$RC\frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -dt$$

$$\ln|q - \mathcal{E}_c C| = -\frac{t}{\tau} + c$$

$$q = \mathcal{E}_c C + C e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\dot{q} = I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

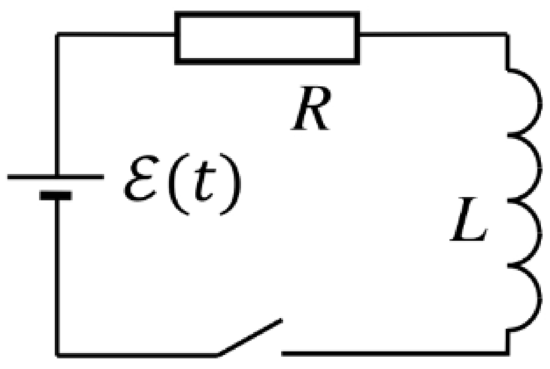
$$I(0) = \frac{\mathcal{E}_c}{R}(1-\varepsilon)$$

$$\Rightarrow |I| = \frac{\mathcal{E}_c}{R}(\varepsilon - 1)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Ответ: $\boxed{I = \frac{\mathcal{E}_c}{R}(\varepsilon - 1)e^{-\frac{t}{RC}}}$

$\boxed{\text{Б10.1}}$

[0]**10.1.** Найти зависимость тока в цепи $I(t)$ от времени в схеме на рис., если после замыкания ключа в момент $t = 0$ напряжение источника меняется по закону $\mathcal{E}(t) = At$. Рассмотреть случай $t \ll L/R$.



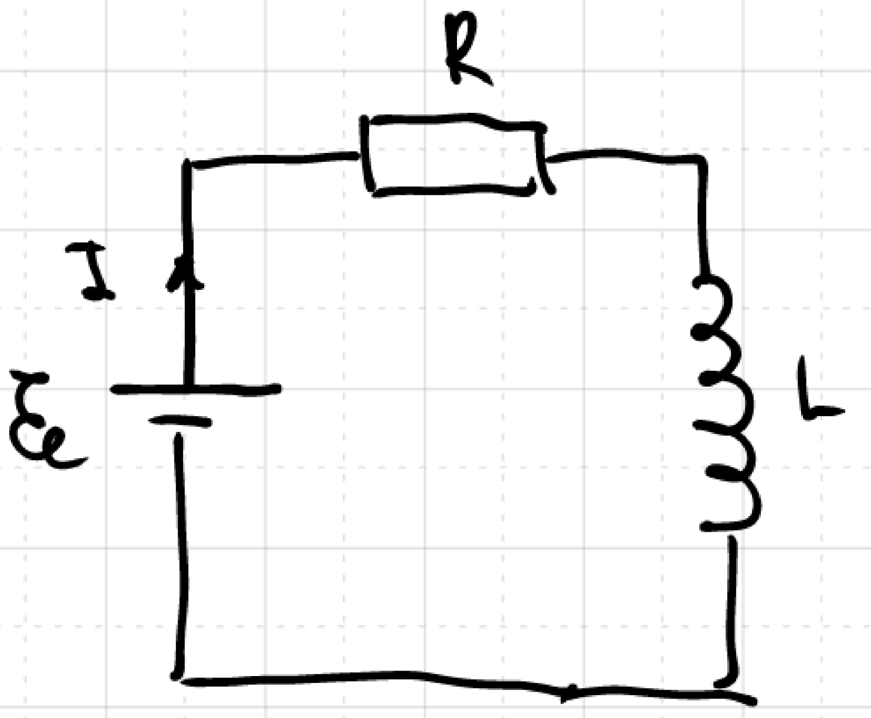
Ответ: $I(t) \approx \frac{At^2}{2L}$.

Дано:

$\mathcal{E}_e = At$

$I(t) = ?$

Решение:



$$\mathcal{E}_e - \underbrace{L\dot{I}}_{\text{против ЭДС}} = IR \qquad I(0) = 0$$

$$\dot{I} = \frac{At}{L} - I\frac{R}{L}$$

Однородное ур-е:

$$\dot{I} = -I\frac{R}{L}$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} \qquad C = C(t)$$

$$\dot{I} = \dot{C}e^{-\frac{R}{L}t} - \cancel{C\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}} = \cancel{-C\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}} + \frac{At}{L}$$

$$dC = \frac{A}{L}te^{\frac{R}{L}t}dt$$

$$dC = \frac{A}{L}\int te^{\frac{R}{L}t}dt = \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dV = e^{\frac{R}{L}t}dt & V = \frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{A}{L}\left(\frac{L}{R}te^{\frac{R}{L}t} - \frac{L}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}dt\right) = \frac{A}{R}te^{\frac{R}{L}t} - \frac{A}{R}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} - C_1$$

$$\Rightarrow I = \frac{A}{R}t - \frac{A}{R}\frac{L}{R} - Ce^{-\frac{R}{L}t} = \frac{A}{R}\left(t - \frac{L}{R}\right) - Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I(0)=0: -\frac{A}{R}\cdot\frac{L}{R}-C=0 \to C=-\frac{A}{R}\cdot\frac{L}{R}$$

$$I=\frac{A}{R}\frac{L}{R}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{A}{R}\left(t-\frac{L}{R}\right)=\frac{A}{R}\left(\frac{L}{R}\left(e^{-\frac{R}{L}t}-1\right)+t\right)$$

При $t \ll \frac{L}{R}$: $I \approx \frac{A}{R}\left(\frac{L}{R}\left(\cancel{1}-\frac{\cancel{R}}{\cancel{L}}t+\frac{R^2}{2L^2}t^2\cancel{-1}\right)\cancel{+t}\right)=\frac{A}{\cancel{R}}\cdot\frac{\cancel{R}}{2L}t^2=\frac{At^2}{2L}$

$$\boxed{\text{Ответ: } I(t)=\frac{A}{R}\left(\frac{L}{R}\left(e^{-\frac{R}{L}t}-1\right)+t\right) \qquad I\Big|_{t\ll\frac{L}{R}}\approx\frac{At^2}{2L}}$$

№9.33

9.33. С помощью осциллографа наблюдают свободные затухающие колебания в колебательном контуре. Как изменится число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда затухает в e раз, если в два раза уменьшить индуктивность контура L и в два раза увеличить его емкость C, сохранив неизменным активное сопротивление?

Дано:

RLC контур

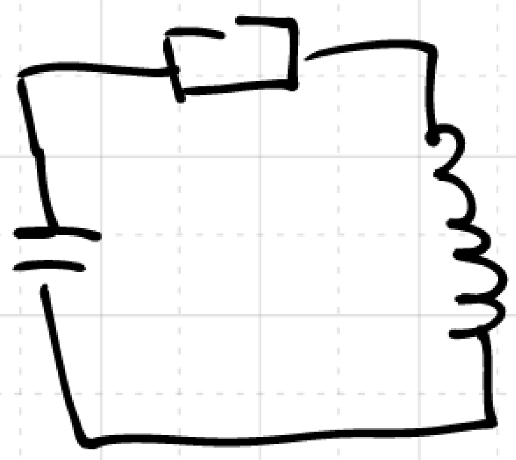
$L \to \frac{L}{2}$

$C \to 2C$

$R \to R$

$\frac{N_2}{N_1}$ - ?

Решение:



$$L\ddot{q}+\dot{q}R+\frac{q}{C}=0$$

$$\ddot{I}+2\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\delta}\dot{I}+\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}I=0$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2+2\delta\lambda+\omega_0^2=0$$

$$\lambda=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$$

Считаем затухания малыми: $\delta<\omega$.

$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$; $\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}=i\omega$; $\varkappa=\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}=i\omega$.

Решение $I=Ae^{-\delta t}\sin\omega t+Be^{-\delta t}\cos\omega t$

Пусть $I(0) = 0$

$B = 0$

$I = 2A \cdot e^{-\delta t} \sin \omega t$

Время, за которое амплитуда колебаний падает в e раз:

$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}$

За время $\tau = \frac{1}{\delta}$ колебание совершается $N = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau\omega}{2\pi} = \frac{L\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{\pi R} =$

$= \frac{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{\pi R} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{L^2}{R^2}\frac{1}{LC} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{L}{R^2 C} - \frac{1}{4}} \approx \frac{1}{\pi}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$N_1 = \frac{1}{\pi}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$N_2 = \frac{1}{\pi}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{4C}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{N_1}{2}.$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{N_1}{2}}$