Неделя 11

10–16 нояб.	**11**	Вынужденные колебания	[0]11.1 [0]11.2 Т13	10.8 10.6 10.23 10.59	10.20 10.25 10.82 Т14 10.92

№ 11.1°

[0]11.1. К последовательно соединенным резистору с сопротивлением $R = 3{,}2$ кОм и конденсатору ёмкостью $C = 1$ мкФ приложено сетевое напряжение с частотой $f = 50$ Гц. Найдите сдвиг фаз $\Delta\varphi$ между напряжением в сети и напряжением на резисторе.

<u>Ответ:</u> $\Delta\varphi \approx -45°$.

Дано:

$R = 3{,}2$ кОм

$C = 1$ мкФ

$f = 50$ Гц

$\Delta\varphi$ — ?

Решение:

$$\hat{U}_c = \hat{U}_0 e^{i\omega t}$$

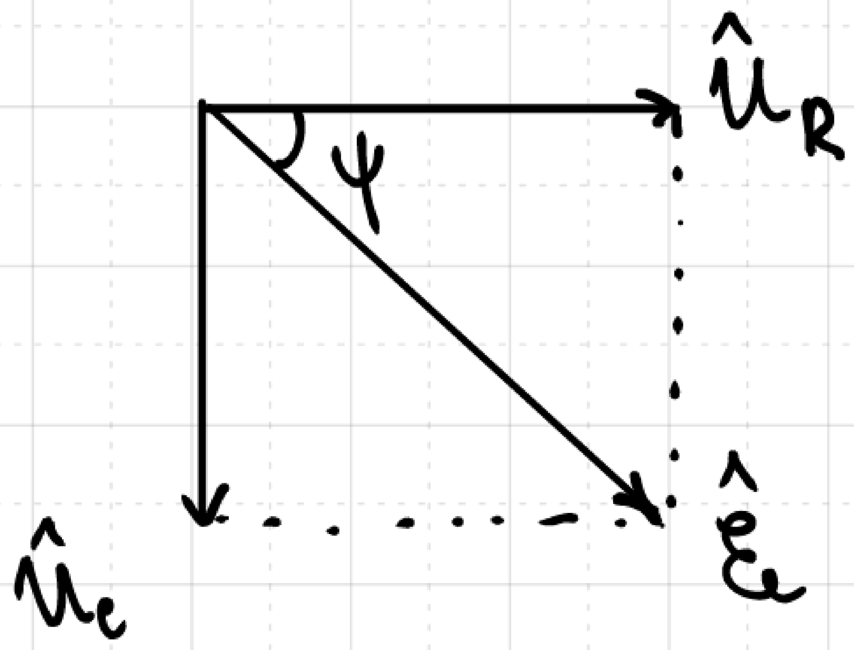
$$\hat{I} = C\dot{\hat{U}}_c = Ci\omega\hat{U}_0 e^{i\omega t} = \omega C\hat{U}_0 e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t}$$

$$\hat{U}_R = \hat{I}R = \omega RC\hat{U}_0 e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t}$$ — сдвинуто на $\frac{\pi}{2}$.

$$\hat{U}_R + \hat{U}_c = \hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\omega t} = \hat{\mathcal{E}}_c$$

$\hat{\mathcal{E}}_c$ - напряжение в сети

$\hat{U}_R$ – /.../ на резисторе



$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{|\hat{U}_c|}{|\hat{U}_R|} = -\frac{|\hat{U}_0|}{\omega RC|\hat{U}_0|} = -\frac{1}{\omega RC} = -\frac{1}{100\pi\cdot 3{,}2\cdot 10^3\cdot 10^{-6}} \approx$$

$$\approx -1 \Rightarrow \varphi \approx -\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$.

№11.2

⁰11.2. Некоторый двухполюсник, имеющий импеданс $Z = 3 + i\sqrt{3}$ [Ом], подключён к идеальному источнику переменной ЭДС с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 2$ В. Найдите среднюю мощность, потребляемую двухполюсником.

Ответ: $P = 0{,}5$ Вт.

Дано:

$\mathcal{E}_0 = 2$ В

$Z = 3 + i\sqrt{3}$

$\bar{P}$ – ?

Решение:

$$Z = \sqrt{12}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{i\psi} e^{i\omega t}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{Z} = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\omega t}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\psi} e^{i\omega t}}{\sqrt{12}\, e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{12}} e^{i(\psi - \frac{\pi}{6})} e^{i\omega t}$$

Let $\psi = 0$ (не влияет на ф. мощность)

$\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ $\qquad$ $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos\omega t$

$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{12}} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{6})}$ $\qquad$ $I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{12}} \cos(\omega t - \frac{\pi}{6})$

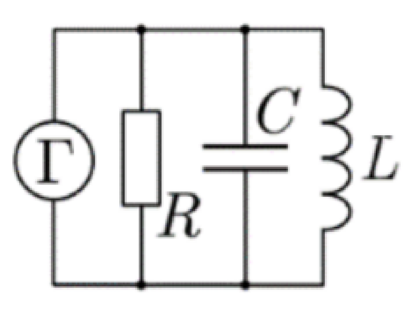
$$P = \mathcal{E} I = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\sqrt{12}} \cos\omega t \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\sqrt{12}} \cdot \frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t - \frac{\pi}{6}) + \cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\bar{P} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2\sqrt{12}} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathcal{E}_0^2 \cancel{\sqrt{3}}}{4 \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot 2} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{8} = \frac{4}{8} = 0{,}5 \text{ Вт}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 0{,}5 \text{ Вт}}$

T13

T13. (2023-1Б) В представленной на рисунке электрической схеме генератор Г создаёт переменный ток по закону $I(t) = I_0(\cos\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t)$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Определите выделяющуюся на сопротивлении R среднюю мощность, если $\sqrt{L/C} = 3/2\, R$.



Ответ: $P = \frac{3}{4} I_0^2 R$.

Дано:

$I(t) = I_0(\cos\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t)$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{3}{2} R$

Решение:

$\bar{P} = ?$ | Отклик системы на 2 сигнала - сумма откликов на каждый из сигналов.

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega_1 L} + i\omega_1 C}; \quad Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega_2 L} + i\omega_2 C}$$

$\omega_1 = \omega_0$

$\omega_2 = 2\omega_0$

$$\hat{I}_1 = I_0 e^{i\omega_1 t}; \quad \hat{U}_1 = \hat{I}_1 Z_1 = \frac{I_0 e^{i\omega_1 t}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega_1 L} + i\omega_1 C}$$

$$\hat{I}_2 = I_0 e^{i\omega_2 t}; \quad \hat{U}_2 = \hat{I}_2 Z_1 = \frac{I_0 e^{i\omega_2 t}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega_2 L} + i\omega_2 C}$$

$$\hat{I}_{R_1} = \frac{\hat{U}_1}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{I_0 e^{i\omega_1 t}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega_1 L} + i\omega_1 C}$$

$$\hat{I}_{R_2} = \frac{\hat{U}_2}{R} = \frac{1}{R} \frac{I_0 e^{i\omega_2 t}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega_2 L} + i\omega_2 C}$$

$$\hat{I}_R = \hat{I}_{R_1} + \hat{I}_{R_2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{I_0 e^{i\omega_1 t}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega_1 L} + i\omega_1 C} + \frac{1}{R} \frac{I_0 e^{i\omega_2 t}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega_2 L} + i\omega_2 C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{3}{2} R$$

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} \qquad \frac{L}{C} = \frac{9}{4} R^2 \rightarrow \frac{1}{C^2 \omega_0^2} = \frac{9}{4} R^2 \rightarrow C^2 = \frac{4}{9} \frac{1}{R^2 \omega_0^2}; \quad C = \frac{2}{3\omega_0 R}$$

$$L = \frac{1}{C\omega_0^2}$$

$$L = \frac{1}{2\omega_0^{\cancel{2}}} \cdot 3\cancel{\omega_0} R = \frac{3R}{2\omega_0}$$

$$L = \frac{3R}{2\omega_0}; \quad C = \frac{2}{3\omega_0 R}$$

$$\hat{I}_R = \frac{1}{R}\,\frac{I_0 e^{i\omega_0 t}}{\frac{1}{R} - \cancel{i\frac{2}{3R}} + \cancel{i\frac{2}{3R}}} + \frac{1}{R}\,\frac{I_0 e^{i\cdot 2\omega_0 t}}{\frac{1}{R} - \frac{i}{2}\,\frac{2}{3R} + 2i\,\frac{2}{3R}} =$$

$$= I_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{I_0 e^{i\cdot 2\omega_0 t}}{1+i} = I_0 e^{i\omega_0 t} + \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{i(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4})}$$

$$I_R = I_0 \cos\omega_0 t + \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P = I_R^2 R = \left(I_0^2 \cos^2\omega_0 t + \frac{I_0^2}{2}\cos^2\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\, I_0^2 \cos\omega_0 t \cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)\right) R$$

$$= \left(I_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega_0 t\right) + \frac{I_0^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left[2\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)\right]\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{2} I_0^2 \left[\cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)\right]\right) R$$

$$\bar{P} = \left(\frac{I_0^2}{2} + \frac{I_0^2}{4}\right) R = \frac{3}{4} I_0^2 R$$

Ответ: $\bar{P} = \frac{3}{4} I_0^2 R$