Неделя 13

24–30 нояб.	**13**	Уравнения Максвелла. Вектор Пойнтинга.	^{0}13.1 ^{0}13.2

№13.1°

^{0}**13.1.** Напряжение в плоском конденсаторе меняется по гармоническому закону $U = U_0 \sin \omega t$. Пластины имеют форму дисков радиуса R, расстояние между которыми $h \ll R$, между пластин — среда с проницаемостью ε. Пренебрегая краевыми искажениями поля, найдите магнитное поле на краю конденсатора (на расстоянии R от оси). Частоту считать малой: $\omega \ll c/R$.

<u>Ответ:</u> $B = \frac{\omega R}{2c} \cdot \frac{\varepsilon U_0}{h} \cos \omega t$.

Дано:

$\omega \ll \frac{c}{R}$

$h \ll R$

$U = U_0 \sin \omega t$

$R, h, \omega, U_0, \varepsilon$

$B(R) = ?$

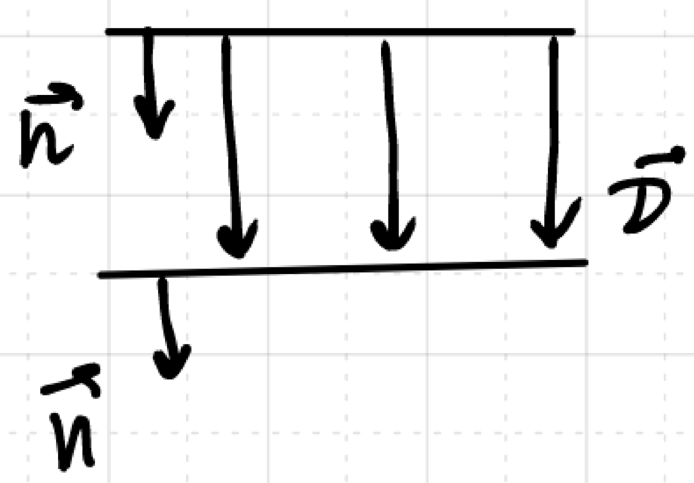
Решение:

Из системы ур-й Максвелла.

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\cancel{\vec{j}}^{\,0} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S}\right) =$$

$$= \frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S}\right) \circeq$$

Поле в конденсаторе: $E = \frac{U}{h} = \frac{U_0}{h} \sin \omega t$



$D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon U_0}{h} \sin \omega t \qquad \vec{D} = \frac{\varepsilon U_0}{h} \sin \omega t \, \vec{n}$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon U_0 \omega_0}{h} \cos \omega t \, \vec{n}$$

$$\circeq \frac{1}{c} \int_S \frac{\varepsilon U_0 \omega}{h} \cos \omega t \cdot dS = \frac{1}{c} \frac{\varepsilon U_0 \omega}{h} \cos \omega t \int_S dS =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{\varepsilon U_0 \omega}{h}\cos\omega t \cdot \pi r^2$$

$$\oint\limits_{\partial S}(\vec{H}, d\vec{l}) = H \cdot 2\pi r = \frac{1}{c}\frac{\varepsilon U_0 \omega}{h}\cos\omega t \cdot \pi r^2$$

$$H = \frac{\omega r}{2c}\cdot\frac{\varepsilon U_0}{h}\cos\omega t$$

Ответ: $B = H = \dfrac{\omega R}{2c}\cdot\dfrac{\varepsilon U_0}{h}\cos\omega t$

№13.2°

[0]**13.2.** Используя выражение для вектора Пойнтинга S, в условиях предыдущей задачи найдите полный поток электромагнитной энергии из конденсатора и сравните его с выражением для скорости изменения энергии, запасённой в конденсаторе dW/dt.

Ответ: $S \cdot 2\pi Rh = \frac{dW}{dt} = \frac{\varepsilon\pi R^2}{h}\sin 2\omega t$.

Дано:

$\dfrac{dW}{dt}$ − ?

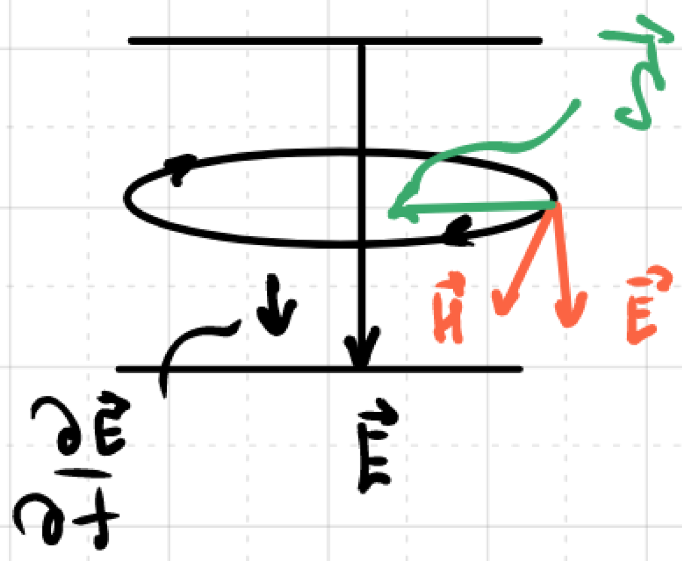
$\oint\limits_{S}(\vec{S}, d\vec{\sigma})$ − ?

Решение:

$\vec{j} = \vec{0}$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]$$

$$S = \frac{c}{4\pi}EH =$$



Пусть $\vec{E}$ ув.

$$= \frac{c}{4\pi}\frac{U_0}{h}\sin\omega t \cdot \frac{\omega R}{2c}\cdot\frac{\varepsilon U_0}{h}\cos\omega t =$$

$U_0^2 \omega R^2$

$$= \frac{\varepsilon U_0^2}{16\pi h^2}\omega R \sin 2\omega t$$

$$\oint\limits_{\sigma}(\vec{S}, d\vec{\sigma}) = S \cdot 2\pi R h = \frac{\varepsilon U_0^2}{{}_{8}\cancel{16}\cancel{\pi} h^{\cancel{2}}}\omega R\sin 2\omega t \cdot \cancel{2}\cancel{\pi} R \cancel{h} = \frac{\varepsilon U_0^2 \omega R^2}{8h}\sin 2\omega t$$

$$W = \frac{CU^2}{2} = \left| C = \frac{\varepsilon\sigma}{4\pi h} \right| = \frac{\varepsilon\pi R^2}{8\pi h} \cdot U_0^2 \sin^2\omega t = \frac{\varepsilon U_0^2 R^2}{8h} \sin^2\omega t$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\varepsilon U_0^2 R^2}{8h} \cdot 2\sin\omega t\cos\omega t \cdot \omega = \frac{\varepsilon U_0^2 \omega R^2}{8h} \sin 2\omega t$$

Ответ: оказалось, что $\oint\limits_{\sigma_{бок}} (\vec{S}, d\vec{\sigma}) = S \cdot 2\pi R h = \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\varepsilon U_0^2 \omega R^2}{8h} \sin 2\omega t$