Неделя 14

1–7 дек.	**14**	Электромагнитные волны. Линии передачи энергии. Волноводы. Резонаторы.	[0]14.1 [0]14.2 [0]14.3

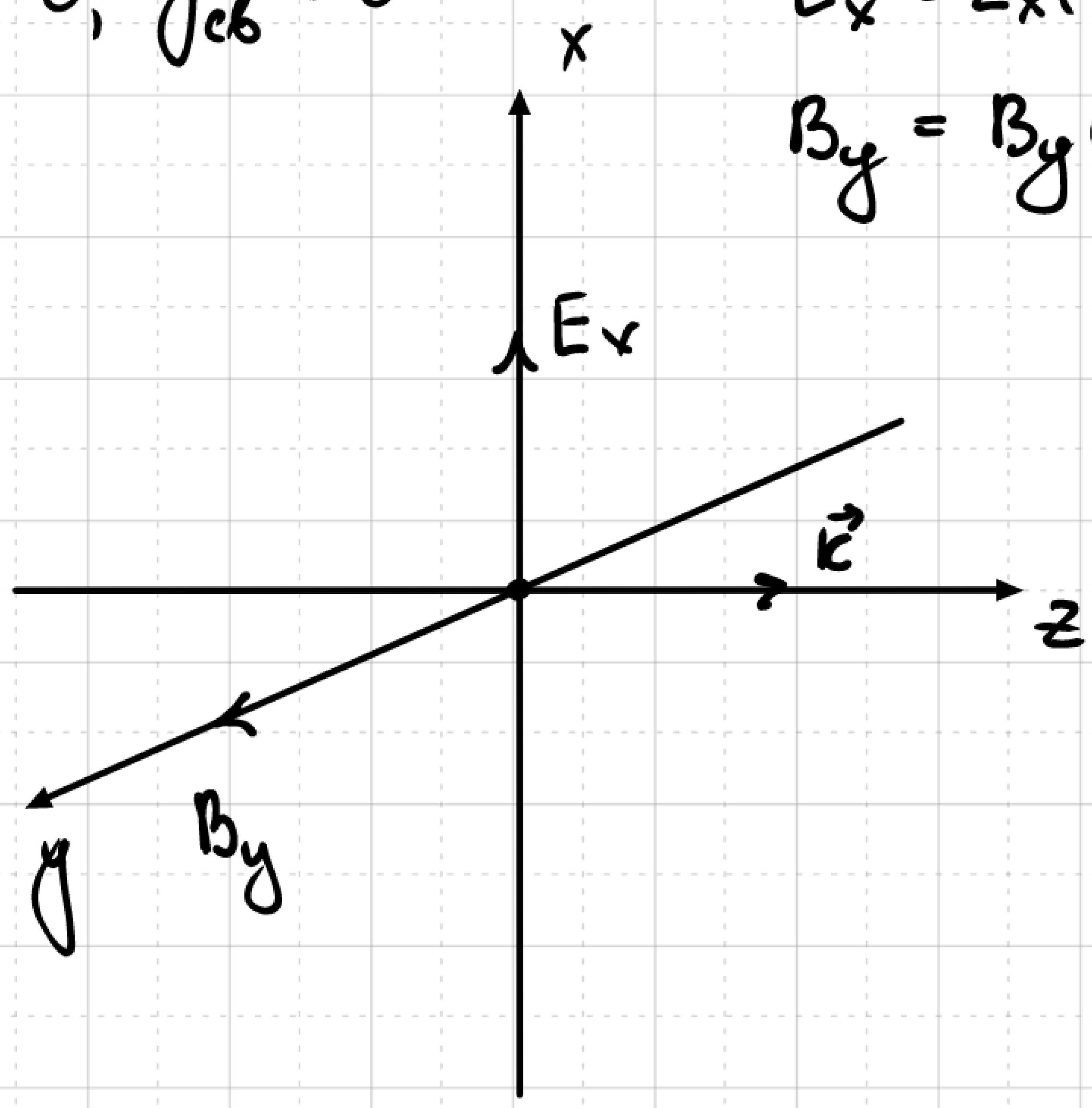
№14.1°

[0]**14.1.** Плоская электромагнитная волна бежит в однородной среде в направлении оси z и имеет компоненты поля $E_x(z,t)$ и $B_y(z,t)$. Фазовая скорость волны равна v. Показать, что в любой момент времени $E_x = \frac{v}{c} B_y$.

Пусть имеется среда с $\varepsilon, \mu, \rho_{св} = 0, \vec{j}_{св} = 0$

$E_x = E_x(z,t)$

$B_y = B_y(z,t)$



Запишем ур-я Максвелла:

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho_{св} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{св} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{H}) = -\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = [\vec{\nabla},[\vec{\nabla},\vec{E}]] = \operatorname{grad}\overset{0}{\cancel{\operatorname{div}\vec{E}}} - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} \quad (\text{т.к. } \vec{E} = \vec{E}(z,t))$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \quad (1) \qquad v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = -\Delta\vec{H} = -\frac{1}{\mu}\Delta\vec{B} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial z^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{D}) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{E}) =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}} \quad (2)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (3) \quad \to \frac{\partial^2 E_x}{\partial t \partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{B_x}^{\,0} \\ B_y \\ \cancel{B_z}^{\,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (4) \quad \to \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} \to \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} = -\frac{c}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = -\frac{c}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \to \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}$$

Аналогично $\quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$

Решение волнового ур-я:

$$E_x = E_{0x} e^{i(\omega t - kz + \varphi_0)}; \quad B_y = B_{0y} e^{i(\omega t - kz + \varphi_0)} \qquad (5)$$

(5) → (3):

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$-ikE_x = -\frac{1}{c} i\omega B_y$$

$$kE_x = \frac{1}{c}\omega B_y \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_\varphi}$$

$$\frac{\omega}{v_\varphi}E_x = \frac{\omega}{c}B_y \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{v_\varphi}{c}B_y}, \quad v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

и.т.д.

№14.2°

[0]**14.2.** При какой длине кабеля его нельзя при расчётах заменить эквивалентным точечным сопротивлением, если частота в цепи $\nu = 50$ Гц?

Дано:	Решение:
$\nu = 50$ Гц	
l_{max} - ?	

Волновые свойства длинной линии проявляются тогда, когда длина кабеля становится сравнимой с длиной волны. $l \simeq \lambda = v_\varphi T \approx \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8}{50} = 6\cdot 10^6$ м

Ответ: $l \simeq 6\cdot 10^6$ м

P.S.: max длина линии такая большая, т.к. ν мало.

При $\nu \simeq 1$ МГц $l \simeq 300$ м, волновые св-ва проявляются гораздо раньше

- также зависит от ε, μ.

- для более точной оценки стоит принять $v_\varphi \simeq \frac{c}{2}$

$$l \simeq \frac{\lambda}{20} \div \frac{\lambda}{10}$$

№14.3°

[0]**14.3.** Найти минимальную частоту электромагнитных колебаний в объёмном прямоугольном резонаторе со сторонами $1 \times 2 \times 3$ см, выполненном из идеального проводника.

Ответ: 9 ГГц.

Дано:	Решение:
$L_x = 1$ см	
$L_y = 2$ см	
$L_z = 3$ см	
ν_{min} = ?	

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}))}; \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}))}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} i\omega \vec{H}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c} i\omega \vec{E}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\Delta\vec{E} = -\frac{\mu}{c} i\omega \operatorname{rot}\vec{H} = -\frac{\mu}{c} i\omega \frac{\varepsilon}{c} i\omega \vec{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 \vec{E}$$

$$\Delta\vec{E} = -k^2\vec{E} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2\vec{E} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$\mu = 1, \varepsilon = 1$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

В силу ГУ $(E_\tau = 0)$: $\begin{cases} k_x L_x = m\pi \\ k_y L_y = n\pi \\ k_z L_z = l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_x = m\frac{\lambda_x}{2} \\ L_y = n\frac{\lambda_y}{2} \\ L_z = l\frac{\lambda_z}{2} \end{cases}$

(на каждую сторону резонатора приходится целое число длин полуволн, чтобы на границах резонатора $E_\tau = 0$)

$$\omega = c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L_z}\right)^2} = c\sqrt{(m\pi)^2 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{3}\right)^2} \cdot 10^2 =$$

$$= 100\pi c\sqrt{m^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{3}\right)^2}$$

Чтобы $\omega \to \min$, $m = 0$ (т.е. $k_x = 0$ – вдоль Ox волна не распр.)

• может быть только один нуль $\Rightarrow n = l = 1$

$$\nu_{min} = \frac{\omega_{min}}{2\pi} = \frac{100\pi c}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = 50c\sqrt{\frac{13}{36}} = 50 \cdot 3 \cdot 10^8\sqrt{\frac{13}{36}} \approx 9 \text{ ГГц}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 9 \text{ ГГц}}$