17–23 нояб.	**12**	Спектральный анализ электрических сигналов. Модуляция.	11.1 11.3(а,б) ^{0}12.1
		Параметрические колебания. Автоколебания.	

№ 11.1

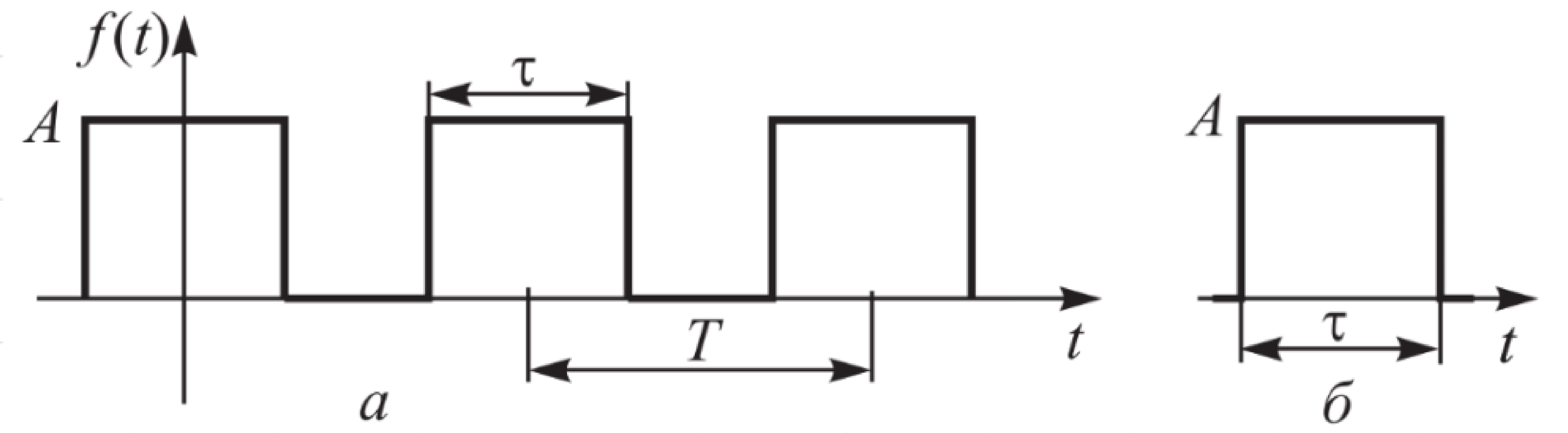
11.1. Найти спектры следующих колебаний:

1) $f(t) = A\cos^2\omega_0 t$ (квадратичное преобразование монохроматического сигнала);

$$f(t) = A\cos^2\omega t = A\frac{1+\cos 2\omega t}{2} = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos 2\omega t$$

№ 11.3.(а, б)

11.3. Найти спектр следующих сигналов, изображенных на рис. 298: а) периодическая последовательность прямоугольных импульсов; б) прямоугольный импульс; в) синусоидальный цуг.



$$а)\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \Big|\cdot e^{-im\omega_0 t}$$

$$f(t)e^{-im\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-m)\omega_0 t}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-im\omega_0 t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} c_n e^{i(n-m)\omega_0 t}dt = c_m T$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-im\omega_0 t}dt$$

$$c_n = \frac{A}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-in\omega_0 t}\,dt = \frac{A}{T}\frac{1}{-in\omega_0}\left[e^{-\frac{in\omega_0\tau}{2}} - e^{\frac{in\omega_0\tau}{2}}\right] =$$

$$= A\,\frac{e^{\frac{in\omega_0\tau}{2}} - e^{-\frac{in\omega_0\tau}{2}}}{2i}\cdot\frac{2}{Tn\omega_0} = A\frac{2}{Tn\omega_0}\sin\frac{n\omega_0\tau}{2} = A\frac{\tau}{T}\,\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}} =$$

$$= A\frac{\tau}{2}\,\frac{\sin \pi n\frac{\tau}{T}}{\pi n\frac{\tau}{T}}$$

б) То же самое, только $T \to +\infty$

$\omega = n\omega_0$

$$F(\omega) = \lim_{T\to\infty} c_n T = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = A\tau\,\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

Ответ: а) $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A\frac{\tau}{T}\,\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}\,e^{in\omega_0 t}$, $\underset{\text{спектр}}{c_n} = A\frac{\tau}{T}\,\frac{\sin\frac{n\omega_0\tau}{2}}{\frac{n\omega_0\tau}{2}}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

б) $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = A\tau\,\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$

№12.1°

°12.1. Найдите спектр модулированного по амплитуде сигнала вида $g(t) = f(t)\cdot\cos\omega_0 t$, если спектр сигнала $f(t)$ равен $F(\omega)$. Рассмотрите случай $f(t) = e^{-\gamma t}$ при $t \geq 0$.

Ответ: $G(\Omega) = \frac{\gamma + i\Omega}{(\gamma+i\Omega)^2+\omega_0^2}$

$$g(t) = f(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}f(t)\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2}f(t)\,e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)\,e^{-i\omega_0 t}$$

$$L(f(t)e^{i\omega_0 t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega_0 t}\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt =$$

$$= F(\omega-\omega_0)$$

$$L(f(t)e^{-i\omega_0 t}) = F(\omega+\omega_0)$$

$$L(g(t)) = \frac{1}{2} F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)$$

$$f(t) = e^{-\gamma t}, \quad F(\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(\gamma+i\omega)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{-\gamma-i\omega}\, e^{-(\gamma+i\omega)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{-\gamma-i\omega}\, e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}\Big|_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-\gamma-i\omega} = \frac{1}{\gamma+i\omega}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_0) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\gamma+i\omega-i\omega_0} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\gamma+i\omega+i\omega_0} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma+i\omega+\cancel{i\omega_0}+\gamma+i\omega-\cancel{i\omega_0}}{(\gamma+i\omega+i\omega_0)(\gamma+i\omega-i\omega_0)} = \frac{\gamma+i\omega}{(\gamma+i\omega)^2+\omega_0^2}$$

Ответ: $L(f(t)\cos\omega_0 t) = \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)$

$$G(\omega) = \frac{\gamma+i\omega}{(\gamma+i\omega)^2+\omega_0^2}$$