Klausur Lineare Algebra
Wintersemester 2005/2006

Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

Studiengang: ☐ AI-B ☐ AI-D ☐ WI-B ☐ WI-D

Prüfer:	Prof. Dr. Martin Hulin
Dauer:	60 Minuten
Datum:	3. Februar 2006
Hilfsmittel:	Alle auf dem Prüfungsplan angegebenen Hilfsmittel B - K
Kennzahlen:	1865, 3604, 4005, 4106

Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg durch Angabe aller Zwischenschritte, sonst gibt es keine Punkte!

Lösen Sie die Aufgaben bitte direkt auf dem Aufgabenblatt. Extra Blätter sind nicht zulässig.

Die angegebenen Punkte und Bearbeitungszeiten sind unverbindlich.

Bewertung:

Aufgabe	1 (18)	2 (13)	3 (12)	4 (7)	
Punkte					
Summe (50)					

Für das Bestehen der Prüfung sind ca. 20 Punkte notwendig. Diese Angabe erfolgt ohne Gewähr.

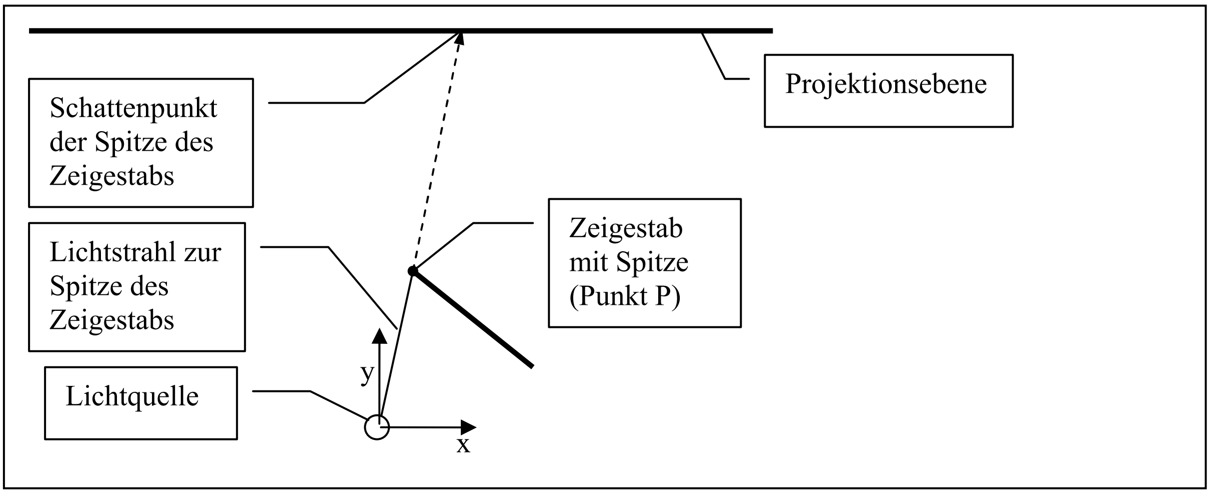
Aufgaben **(Bearbeitungszeit, Punkte)**

1. Im Hörsaal C004 steht eine punktförmige Lichtquelle auf dem mittleren Tisch der vordersten Tischreihe. Dort wird der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems festgelegt, wobei die x-Achse parallel zu den Tischreihen nach rechts zeigt (von den Studenten aus gesehen), die y-Achse nach vorn zur Tafel und die z-Achse nach oben.

   Die Projektionsebene E hinter der Tafel hat in der Punkt-Richtungs-Form die Darstellung

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge r, s \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$$

   Der unterrichtende Professor hält einen Zeigestab in der Hand. Die Spitze des Zeigestabs befindet sich im Punkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$, wobei auch $p \in \mathbb{R}$ gegeben ist. (p ist gegeben, d. h. behandeln Sie p wie eine vorgegebene Zahl. Beispiel: p x +3 = 2 p $\Rightarrow$ x = 2 – 3/p)



   a) Wie lautet die Gerade g des Lichtstrahls, der von der Lichtquelle auf die Spitze P des Zeigestabs trifft, in Punkt-Richtungs-Form? **(5 Min, 3 P)**

   Lösung:
   Ein Punkt auf der Gerade ist der Nullpunkt, da dort die Lampe steht. Richtungsvektor ist der Vektor vom Nullpunkt zum Punkt P. Damit ergibt sich:

$$g = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix} \wedge t \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$$

   b) Stellen Sie eine Vektorgleichung für den Schattenpunkt S auf, den die Spitze des Zeigestabs auf der Projektionsebene wirft. **(4 Min, 3 P)**

   Lösung:
   Der Schattenpunkt liegt sowohl auf der Geraden g als auch auf der Ebene E. Er muss daher beide Bedingungen erfüllen.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$$

   c) Wandeln Sie die Vektorgleichung in ein lineares Gleichungssystem um, mit dem der Schattenpunkt S berechnet werden kann, und stellen es in Matrixform dar. **(4 Min, 4 P)**

Lösung:
Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen. Daher erhält man für jede der drei Komponenten eine Gleichung also ein LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Lösen Sie nun das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus und geben die Koordinaten des Schattenpunktes S an. Dabei taucht in Ihrer Lösung natürlich noch das gegebene p als Parameter auf. **(10 Min, 8 P)**

Lösung:
Der erste Lösungsschritt kann unterbleiben, da in der ersten Spalte unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen sind.
Im zweiten Schritt werden die zweite und die dritte Zeile vertauscht •, da an der Position "zweite Zeile, zweite Spalte" eine Null steht

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{array}{|l} \\ \\ :(-3) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{array}{|l} +2III \\ +pIII \bullet \\ \quad \bullet \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \bullet \\ 3p \bullet \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit ist das LGS gelöst. Die eindeutige Lösung lautet: r = 6; s = 3 p; t = 3; •
Setzt man t = 3 in die Gleichung von g ein •, so ergibt sich für den Schattenpunkt
S = 3 (2; 3; p) = <u>(6; 9; 3 p)</u> •

(Hinweis: Wenn Sie Teil c) nicht lösen konnten, können Sie stattdessen das lineare

Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lösen.)

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Folge a_n ist gegeben durch: $\boxed{a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2a_n - (n-1);}$
Beweisen Sie die Aussage $\boxed{a_n = n}$ durch vollständige Induktion. **(15 Min, 13 P)**

Lösung:
Induktionsverankerung: n = 1 •
$a_1 = 1 = n$ ••

Induktionsschritt: n → n + 1 •
Induktionsvoraussetzung: $a_n = n$ •
Induktionsbehauptung: $a_{n+1} = n + 1$ ••

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$a_{n+1} = 2a_n - (n-1) \overset{Ind.vor.}{=} 2n - (n-1) = 2n - n + 1 = n + 1$$

3. Eine lineare Abbildung ist gegeben durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{pmatrix}$

a) Auf welchen Vektor wird der zweite Basisvektor abgebildet? **(3 Min, 2 P)**

Lösung:
Das Bild des zweiten Basisvektors steht in der zweiten Spalte der Matrix:

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird auf den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet. Berechnen Sie x und z. **(5 Min, 5 P)**

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+x \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Komponente folgt x = – 3.
Aus der dritten Komponente folgt z = – 5.

c) Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor der Abbildung.

Berechnen Sie y und den zugehörigen Eigenwert λ. **(6 Min; 5 P)**

Lösung:
Für diesen Eigenvektor mit Eigenwert λ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1+y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Aus der dritten Komponente folgt λ = 2.
Aus der vierten Komponente folgt y = λ – 1 = 1.

4. Ermitteln Sie die Erfüllungsmenge des aussagenlogischen Ausdrucks

$$z = (x_1 \vee x_2) \rightarrow \neg x_3$$

indem Sie die Wahrheitstafel ausfüllen. **(8 Min, 7 P)**

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2$	$\neg x_3$	$(x_1 \vee x_2) \rightarrow \neg x_3$

Damit ergibt sich die Erfüllungsmenge

E(z) = ...

Lösung: (W = wahr, F = falsch)

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2$	$\neg x_3$	$(x_1 \vee x_2) \rightarrow \neg x_3$
F	F	F	F	W	W
F	F	W	F	F	W
F	W	F	W	W	W
F	W	W	W	F	F
W	F	F	W	W	W
W	F	W	W	F	F
W	W	F	W	W	W
W	W	W	W	F	F
• •			•	•	•

Damit ergibt sich die Erfüllungsmenge

E(z) = {(F;F;F); (F;F;W); (F;W;F); (W;F;F); (W;W;F)} • •
