Aufgabenblatt 6

Zwischentest 2, Lösungen

1. Schnittpunkt von Geraden:
Gegeben sind zwei Geraden. Die Gerade g geht durch die Punkte P = (0; 2; 1) und Q = (-2; 0: -1). Die Gerade h ist in der Punkt-Richtungs-Form gegeben durch:

$$h = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge k \in \mathbb{R} \right\}$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts und tragen Sie sie ein. Tragen Sie dabei bitte ganze Zahlen ohne Komma ein, z. B. 5 und nicht 5,0.

Gerade $g = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \ell \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \wedge \ell \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \ell \in \mathbb{R} \right\}$

Schnittpunkt von g und h:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \ell \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$

I. $2\ell = 3 + 2k$ einsetzen

II. $\cancel{2} + 2\ell = \cancel{2} - k \quad \Leftrightarrow \quad k = -2\ell$

III. $\cancel{1} + 2\ell = \cancel{1} - k \quad \Leftrightarrow \quad k = -2\ell$

I. $2\ell = 3 - 4\ell \Leftrightarrow 6\ell = 3 \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -1$

$\Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, d.h. $S = g \cap h = (1; 3; 2)$

2. Vektorprodukt in Gleichung oder Gleichungssystem umwandeln:
Gesucht sind alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,
die die folgende Vektorgleichung (mit dem Vektorprodukt) erfüllen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wandeln Sie die obige Vektorgleichung in ein(e) äquivalente(s) Gleichung/Gleichungssystem um. Welche(s) Gleichung/Gleichungssystem entsteht?

Lösung

☐ $\begin{array}{l} 1-x_2 = \ \ 1 \\ x_3 - 1 = -1 \\ 1 - x_1 = \ \ 0 \end{array}$ ☐ $\begin{array}{l} x_2 - x_3 = \ \ 1 \\ x_3 - x_1 = -1 \\ x_1 - x_2 = \ \ 0 \end{array}$ ☒ $\begin{array}{l} x_3 - x_2 = \ \ 1 \\ x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 - x_1 = \ \ 0 \end{array}$ ☐ $\begin{array}{l} x_2 \cdot x_3 = \ \ 1 \\ x_3 \cdot x_1 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = \ \ 0 \end{array}$

☐ $\begin{array}{l} x_2 \cdot x_3 - x_3 \cdot x_1 = \ \ 1 \\ x_3 \cdot x_1 - x_1 \cdot x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot x_3 = \ \ 0 \end{array}$ ☐ $\begin{array}{l} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 = \ \ 1 \\ x_3 \cdot y_1 - y_1 \cdot x_3 = -1 \\ x_1 \cdot y_2 - y_2 \cdot x_1 = \ \ 0 \end{array}$ ☐ $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ☐ $\begin{array}{l} x_2 = \ \ 1 \\ x_3 = -1 \\ x_1 = \ \ 0 \end{array}$

---

3. Lösen eines LGS:
Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & -10 \\ 10 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist die gesamte Lösungsmenge. Lösen Sie das LGS mit dem Gauß-Algorithmus. Welche der folgenden Lösungen ist die korrekte Lösungsmenge?

Lösung 1: $\mathbb{L} = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge r \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$

Lösung 2: $\mathbb{L} = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung 3: $\mathbb{L} = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung 4: $\mathbb{L} = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge r, s \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$

Lösung 5: $\mathbb{L} = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge r \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$

Lösung 6: $\mathbb{L} = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : v_2 = v_1 + 1 \right\}$

Lösung 7: $\mathbb{L} = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 : v_2 = v_1 + 1 \wedge v_3 = 1 \right\}$

Lösung 8: $\mathbb{L} = \mathbb{R}^3$, d. h. alle Vektoren sind Lösungen.
Lösung 9: $\mathbb{L} = \{\ \}$, d. h. das LGS ist unlösbar.

Lösung

vertausche Zeile 1 und Zeile 2, weil $a_{11} = 0$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 10 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ -10 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ + \text{Zeile } 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 0 & -10 & 10 & -10 \end{array} \quad + \text{Zeile } 3 \bullet$$

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \bullet$$

Letzte Zeile ist Nullzeile; wähle $x_3 = r \in \mathbb{R}$ als freien Parameter •

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ +10 \cdot Zeile3 \\ \\ \end{array}$$

Setze x_3 in die anderen Zeilen ein.

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & 10+10r \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array} \quad \begin{array}{l} +Zeile2 \\ \bullet \\ \\ \end{array}$$

Setze x_2 in die erste Zeile ein.

$$\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 0 & 10r \\ 0 & 10 & 0 & 10-10r \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array} \quad \begin{array}{l} :10 \bullet \\ :10 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 1+r \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array}$$

Die Lösung kann direkt abgelesen werden: $x_1 = r$, $x_2 = 1+r$, $x_3 = r$. Damit ergibt sich als

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$ •• .

Daher muss Lösung 5 markiert werden.

---

4. Lineare Abhängigkeit:

Gegeben sind folgende Vektoren des $\mathbb{R}^6$.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Bestimmen Sie gemäß der Definition, ob die 5 Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind. Kreuzen Sie dann entsprechend Ihres Ergebnisses bei den folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

Lösung

$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_5\vec{v}_5 = \vec{0}$

In dem linearen Gleichungssystem mit 5 Unbekannten sind die Zeilen 3, 4 und 5 Nullzeilen. Es bleiben nur noch 3 Zeilen mit interessanter Information; für eine eindeutige Lösung müssten es aber 5 sein. Daher können für k_3 und k_4 beliebige Werte auch ungleich 0 eingesetzt werden. Für die anderen k gilt:

$k_5 = 0; \quad k_2 = \frac{-k_3 - 3k_4}{4}; \quad k_1 = \frac{-k_3 - 7k_4}{8}$. Eine mögliche Lösung ist z. B.

(-1, -1, 1, 1, 0) für die k_i. Die Vektoren sind daher linear abhängig.

wahr	falsch	
	x	Um mit einer Linearkombination der 5 Vektoren den Nullvektor zu erzeugen, müssen alle Koeffizienten 0 sein. Die 5 Vektoren sind daher linear unabhängig.
x		Um mit einer Linearkombination der 5 Vektoren den Nullvektor zu erzeugen, brauchen nicht alle Koeffizienten 0 sein. Die Vektoren sind daher linear abhängig.
	x	Um mit einer Linearkombination der 5 Vektoren den Nullvektor zu erzeugen, muss auf alle Fälle der Koeffizienten k_5 gleich 0 sein. Daher sind nicht alle Koeffizienten ungleich 0 und die Vektoren deswegen linear unabhängig.
x		Die Vektoren sind linear abhängig, da man $\vec{v}_1$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ darstellen kann.
	x	Die Vektoren sind linear unabhängig, da man $\vec{v}_5$ nicht als Linearkombination der anderen 4 Vektoren darstellen kann.
	x	Die Vektoren sind linear unabhängig, weil 5 Vektoren im $\mathbb{R}^6$ immer linear unabhängig sind. Für lineare Abhängigkeit bräuchte man mindestens 7 Vektoren.
x		Die 5 Vektoren können keine Basis des $\mathbb{R}^6$ bilden. Dazu bräuchte man 6 Vektoren.
x		Um eine Basis zu erhalten, müsste man zwei der Vektoren entfernen, z. B. $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$, und stattdessen drei andere geeignete Vektoren hinzufügen.

5. Basisergänzung:
   Wegen der einfacheren Eingabe sind in dieser Aufgabe alle Vektoren als Zeilenvektoren geschrieben.

   Gegeben ist die Basis B des 4-dimensionalen reellen Vektorraums (R hoch 4), nur der letzte Basisvektor v ist nicht vollständig bekannt.
   B = {(1; 2; 0; 0), (2; 5; 1; 0), (3; 5; 0; 1), v}
   Die vierte Koordinate von v ist 1, d. h. v = (?; ?; ?; 1).
   Bestimmen Sie v so, dass v senkrecht auf allen anderen Basisvektoren steht und tragen Sie ihn unten ein.

Lösung

v senkrecht auf (1; 2; 0; 0) genau dann wenn das Skalarprodukt 0 ergibt, also

$$v \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v1\\v2\\v3\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} = v1 + 2 \cdot v2 = 0$$

Auf die gleiche Weise ergeben sich für die anderen beiden Basisvektoren die Gleichungen

2 v1 + 5 v2 + v3 = 0 und 3 v1 + 5 v2 + 1 = 0

Dies ist ein LGS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten, das mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden kann.

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&1\\3&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v1\\v2\\v3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}\\-2I\\-3I\end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v1\\v2\\v3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}\\\\+II\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v1\\v2\\v3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}\\-III\\\end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v1\\v2\\v3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}-2II\\\\\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v1\\v2\\v3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$$ Damit ist v = (-2; 1; -1; 1).

---

6. Basisumrechnung:
Wegen der einfacheren Eingabe sind in dieser Aufgabe alle Vektoren als Zeilenvektoren geschrieben.

Bezüglich der Standardbasis ist der Vektor v = (8; 0; 5) gegeben.
Rechnen Sie die Koordinaten dieses Vektors um in die Basis
B = {(4; 4; 0), (2; -2; 0), (0; 0; 5)}
und tragen Sie sie unten ein. Tragen Sie dabei bitte ganze Zahlen ohne Komma ein, z. B. 5 und nicht 5,0.

Lösung

$$vb1\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + vb2\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + vb3\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}$$ Dies ist ein LGS; Lösung mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vb1 \\ vb2 \\ vb3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \\ -I \\ \\ \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vb1 \\ vb2 \\ vb3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \\ :(-4) \\ :5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vb1 \\ vb2 \\ vb3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -2II \\ \\ \\ \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vb1 \\ vb2 \\ vb3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} :4 \\ \\ \\ \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vb1 \\ vb2 \\ vb3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Damit ist die Darstellung von v bezüglich B: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$.

7. Wann ist Determinante Null?

Für welche Werte a ∈ ℝ hat die Determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & a & 0 \\ -6 & 3 & a-4 \end{vmatrix}$ den Wert 0?

Lösung
Berechne die Determinante mit der Regel von Sarrus oder dem Entwicklungssatz von Leibniz oder durch Umformung in eine obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & a & 0 \\ -6 & 3 & a-4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ +3I \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & a+2 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

Für die Determinante ergibt sich als Produkt der Diagonalelemente 2 (a + 2) (a – 1). Dieses Produkt wird 0, wenn einer der Faktoren 0 wird, also für a = -2 und a = 1.

Übungsaufgaben über die Ferien, Lösungen

1. Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind die Mengen E und F gegeben. Sie können als Ebenen interpretiert werden.

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge r, s \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$$

$$F = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge t, u \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}.$$

a) Stellen Sie eine Vektorgleichung auf, um die Schnittmenge von E und F zu berechnen.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

b) Wandeln Sie die Gleichung aus a) in ein Lineares Gleichungssystem in Matrixform um.

Das LGS brauchen Sie nicht lösen!

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\\0&2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\\s\\t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-4\end{pmatrix}$$

c) Welche Vektoren ergeben sich für $\begin{pmatrix}r\\s\\t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\1\\1\end{pmatrix}$ bei E bzw. F? Ist dies demnach eine Lösung des LGS?

Punkt auf E: $\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\\-4\end{pmatrix}$

Punkt auf F: $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\\-4\end{pmatrix}$

Da der Punkt auf beiden Ebenen liegt, ist dies eine Lösung des LGS

---

2. Ein Unternehmen besteht aus einem Hauptbetrieb und drei Hilfsbetrieben P, Q und R. Die Erstellung der Leistungen in den Haupt- und Hilfsbetrieben verursacht in jedem Hilfsbetrieb primäre Kosten. Dazu kommen noch sekundäre Kosten für die Lieferung aus den anderen Hilfsbetrieben. In der nachfolgenden Tabelle sind die Leistungseinheiten (LE) eines jeden Hilfsbetriebs angegeben, die er mit jedem anderen in der betrachteten Zeitperiode ausgetauscht hat. Außerdem enthält die Tabelle den Geldbetrag für die Primärkosten und die Anzahl der erstellten Leistungseinheiten eines jeden Hilfsbetriebs.
Leseweise z. B. 1. Zeile: Hilfsbetrieb P erstellt insgesamt 16000 LE, davon liefert er 2000 LE an Hilfsbetrieb Q und 4000 LE an Hilfsbetrieb R, der Rest wird nach außen verkauft. Die Primärkosten von P sind 1000 €. Die Sekundärkosten sind die Preise, die P an Q bzw. R für die erhaltenen 80 LE bzw. 500 LE zahlen muss.

Gefragt wird nach den Kosten je LE, die jeder Hilfsbetrieb für die gelieferten Leistungen verrechnen soll. Stellen Sie dazu ein LGS auf mit den Kosten je LE p, q bzw. r bei den Hilfsbetrieben P, Q bzw. R als Unbekannte und lösen Sie es. Betrachten Sie Einnahmen und Ausgaben für jeden Hilfsbetrieb, das ergibt jeweils eine Gleichung

Hilfsbetrieb	Primärkosten	erstellte Leistung	liefert an Hilfsbetrieb

			P	Q	R
P	1000 €	16000 LE	-	2000 LE	4000 LE
Q	2000 €	400 LE	80 LE	-	10 LE
R	1000 €	2000 LE	500 LE	200 LE	-

Lösung:
1. Zeile der Tabelle: Einnamen Hilfsbetrieb P: 16000 p
Kosten von P: 1000 € + 80 q + 500 r
insgesamt bei ausgeglichener Bilanz: 16000 p = 1000 € + 80 q + 500 r
analog für Q: 400 q = 2000 € + 2000 p + 200 r
analog für R: 2000 r = 1000 € + 4000 p + 10 q
Dies ist ein LGS. Umwandeln in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 16000 & -80 & -500 \\ -2000 & 400 & -200 \\ -4000 & -10 & 2000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Lösung mit Gauß-Algorithmus gerundet auf Hunderstel Cent:
p = 0,1161; q = 5,9616; r = 0,7621

3. Bestimmen Sie mit dem Gauß-Algorithmus den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -17 & 22 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -12 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -17 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ \\ -2I \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & -17 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\frac{3}{2}II \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -III \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & -12 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix hat den Rang 3, da die unterste Zeile (Nullvektor) wegfällt. Da nur Äquivalenzumformungen verwendet wurden, hat auch die Ausgangsmatrix den Rang 3.

4. Bestimmen Sie beide Produkte der Matrizen $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 5 & 9 & 8 & -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 5 & 9 & 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+16-21+30 & 2+4-9+25 \\ 10+36+56-30 & 5+9+24-25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 22 \\ 72 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 5 & 9 & 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 17 & 2 & 5 \\ 13 & 25 & -4 & 15 \\ 29 & 55 & 3 & 20 \\ 43 & 69 & 22 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Bestimmen Sie die Matrix X und die Zahlen y und z in der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 18 \\ 5 & 10 \\ y & z \end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Matrix X muss 2 Zeilen haben, da die erste Matrix 2 Zeilen hat; X muss 2 Spalten haben, da die Ergebnismatrix 2 Spalten hat. Daher ergibt sich der Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 18 \\ 5 & 10 \\ y & z \end{pmatrix}$$

Nach den Regeln der Matrizenmultiplikation ergeben sich daraus jeweils 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten für die erste und die zweite Zeile von X.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Die Lösung mit dem Gauß-Algorithmus ist besonders einfach, da die Koeffizientenmatrix bereits in Dreiecksform ist:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man nun die letzte Zeile der ersten Matrix mit X, so erhält man: y = -3 und z = -2

6. Warum ist das Produkt zweier rechter oberer Dreiecksmatrizen wieder eine rechte obere Dreiecksmatrix?

Lösung:

Für eine rechte obere Dreiecksmatrix gilt $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Seien nun A und B rechte obere Dreiecksmatrizen und C = A B. Für $i > j$ gilt dann:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \cdot 0 = 0$$

Weil A eine rechte obere Dreiecksmatrix ist, ist in der ersten Summe $a_{ik} = 0$ $(i > k)$.

Weil B eine rechte obere Dreiecksmatrix ist, ist in der zweiten Summe $b_{kj} = 0$ $(k \geq i > j)$.

---

7. Gegeben sind die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1{,}5 & y \end{pmatrix}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$.

Die beiden Matrizen sind invers zueinander, d. h. $B = A^{-1}$. Berechnen Sie x und y.

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1{,}5 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3 & -x+2y \\ 0 & -3+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus 2x-3=1 folgt x=2 und aus -3+4y=1 folgt y=1. Setzt man diese Werte in das Feld 1;2 der Produktmatrix ein, ergibt sich 0, wie gefordert. Damit ist x = 2 und y = 1 die gesuchte Lösung.

---

8. Invertieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **Lösung:** $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & -1 \\ 4/3 & 1 & -5/3 & -2 \\ 2/3 & 0 & -1/3 & -1 \\ -2/3 & 0 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$

Die ausführliche Lösung finden Sie als Mathematica-Notebook im File LsgA6_Inverse_z05w.nb. Zum Öffnen benötigen Sie das Computer-Algebra-Programm Mathematica, das auch auf dem Server uranus2.fh-weingarten.de installiert ist. Im Folgenden sind die Zwischenergebnisse des Gauß-Jordan-Vefahrens aufgeführt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -4 \\ -4 & 1 & 1 & 6 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$$