

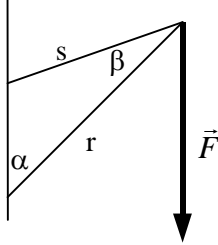
## Aufgabenblatt 2

### Hausaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen nicht mehr abzählbar ist.  
Tipp: Stellen Sie die Teilmengen der natürlichen Zahlen als (unendlich lange) Strings aus 0 und 1 dar, wobei eine 1 an der  $i$ -ten Stelle bedeutet, dass die Zahl  $i$  in der Teilmenge enthalten ist. '01101000...' bedeutet z. B.  $\{2; 3; 5\}$  und '010101...' ist die Menge der geraden Zahlen.
2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:  $n(n+1)(n-1)$  ist für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  durch 6 ohne Rest teilbar.
3. Bei welchen der folgenden Relationen handelt es sich um Funktionen? Ist die Umkehrrelation eine Funktion?
  - a) Relation "hat als Hauptstadt" zwischen der Menge der Staaten und der Menge der Städte, z. B. Deutschland hat als Hauptstadt Berlin.
  - b) Relation "ist immatrikuliert für" zwischen der Menge aller Studenten in Deutschland und der Menge aller angebotenen Studiengänge an deutschen Hochschulen.
  - c) Relation "hat als Mutter" zwischen der Menge aller Menschen und der Menge aller Frauen, (die jemals gelebt haben).
  - d) Relation "ist registrierter Kunde bei" zwischen der Menge aller (lebenden) Menschen mit Staatsbürgerschaft deutsch und aller in Deutschland ansässigen Versandhäuser. (Ein Kunde ist registriert, wenn er eine Kundennummer hat.)
  - e) Relation "hat als Regierungsbezirk" zwischen der Menge der Bundesländer in Deutschland und der Menge der Regierungsbezirke, z. B. Bayern hat die Oberpfalz als Regierungsbezirk.
4. Gegeben ist die Klasseneinteilung  
 $K = \{\{\text{in, er, sein, Bär}\}, \{\text{Salbe, Rabe, unter, gehen}\}, \{\text{umgehen, Gebirge, surjektiv, Vektorraum}\}\}$  auf der Menge  
 $M = \{\text{in, er, sein, Bär, Salbe, Rabe, unter, gehen, umgehen, Gebirge, surjektiv, Vektorraum}\}$ 
  - a) In welche Klasse muss das Wort "Mutter" eingefügt werden, wenn es zu  $M$  zugefügt wird?
  - b) Beschreiben Sie die durch die Klasseneinteilung  $K$  definierte Äquivalenzrelation auf  $M$ .  
 $u \equiv w \Leftrightarrow ?$  (Wort  $u$  äquivalent zu Wort  $v$  genau dann wenn ?)
  - c) Stellen Sie die Relation durch eine Matrix dar. Was beobachten Sie?
5. Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{2x-4}{x}$ 
  - a) Berechnen Sie  $(f \circ f)(x)$ ,  $(f \circ f \circ f)(x)$  für einige beliebig gewählte Werte von  $x$ .
  - b) Geben Sie für die Beobachtung aus a) den Grund an.
  - c) Welche Definitionsmengen haben die Verkettungen  $f \circ f, f \circ f \circ f, \dots$ ?
6. Gegeben sind die Vektoren  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  in kartesischen Koordinaten und  $\vec{y}$  in Polarkoordinaten mit  $r = |\vec{y}| = \sqrt{2}$  und  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Bilden Sie die Summe  $\vec{x} + \vec{y}$ . Sie

dürfen selbst entscheiden, ob Sie das Ergebnis in kartesischen Koordinaten oder Polarkoordinaten angeben.

7. An einem Kran hänge eine Last, die die Kraft  $\vec{F}$  ausübt. Wie groß sind die Beträge der Kräfte in den Streben  $s$  und  $r$ ? Dabei ist gegeben:  $|\vec{F}| = 20000 \text{ N}$ ,  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .



8. Ein Punkt im  $\mathbb{R}^3$  ist in Zylinderkoordinaten gegeben:  $r = 3$ ,  $z = 5$ ,  $\varphi = \pi/5$ . Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten. Schauen Sie dazu in einer Formelsammlung die Umrechnungsformeln nach.
9. Welche der Punkte  $A = (1; 2; 3)$ ,  $B = (-2; 2; -3)$ ,  $C = (6; 6; 6)$ ,  $D = (2; 1; 12)$  des  $\mathbb{R}^3$  liegen auf der Geraden  $g$  gegeben durch die Gleichung  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ?
10. Berechnen Sie die Resultierende der zwei Kräfte. In welchem Punkt greift sie an?  
 $\vec{F} = \begin{pmatrix} 10 \\ 200 \\ -30 \end{pmatrix}$  in  $P = (0; 19; -4)$  und  $\vec{G} = \begin{pmatrix} 100 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix}$  in  $Q = (9; -5; 5; -1)$

### Übungsaufgaben für die Übungsstunde

11. Betrachten Sie im Zahlensystem zur Basis 2 (Dualsystem) Folgen von  $n$  Stück '10'. Z. B. für  $n = 3$ :  $(101010)_2 = 42$ . Eine solche Folge hat (im Zehnersystem) den Wert  $\frac{2}{3}(4^n - 1)$ . Beweisen Sie diese Formel durch vollständige Induktion.
12. Für die Mengen  $A$  und  $B$  gelte  $|A| = 9$  und  $|B| = 5$ .  
 Wie viele Funktionen von  $A$  nach  $B$  gibt es?  
 Wie viele sind injektiv?
13. In einer rechteckigen Werkhalle sei die Längsseite die  $x$ -Achse, die andere Seite die  $y$ -Achse. Ein Roboter steht im Punkt  $(5; 7)$ , Einheit m. Er bewegt sich zunächst 5 s lang mit 3 m/s in einem Winkel von  $30^\circ$  zur positiven  $x$ -Achse. Dort ändert er seine Richtung und dreht sich um  $30^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn. Dann fährt er 4 s lang mit 2 m/s weiter. An welchem Punkt kommt er an? Berechne auf cm genau.
14. Gegeben sind drei Kräfte, die in drei Punkten eines Körpers angreifen. Berechnen Sie die resultierende Kraft und ihren Angriffspunkt. Berechnen Sie dazu erst die Resultierende zweier Kräfte und addieren Sie dazu die dritte Kraft.  
 $\vec{F} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \end{pmatrix}$  in  $P = (0; 0)$ ,  $\vec{G} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$  in  $Q = (1; -1)$ ,  $\vec{H} = \begin{pmatrix} -30 \\ 40 \end{pmatrix}$  in  $S = (-2; 1)$