Klausur Analysis 2 (05.02.2007)
Total: 500 Punkte
Note 1: 250 Punkte
Unter 100 Punkten: Nicht bestanden

Aufgabe 1 (Rotation und Divergenz von Vektorfeldern)
50 Punkte

Gegeben sei das Magnetfeld $\vec{B}$ (eines mit der konstanten Stromstärke I durchflossenen unendlich dünnen und langen Leiters in z-Richtung) an einem beliebigen Raumpunkt $\vec{r}$:

$$\vec{B} = \vec{I} \times \frac{\vec{\rho}}{\rho^3}$$

mit $\rho = |\vec{\rho}|$ dem Abstand des Raumpunktes $\vec{r} = (x, y, z)$ von der z-Achse: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, und $\vec{\rho} = (x, y, 0)$ dem Abstandsvektor des Raumpunkts von der z-Achse, und $\vec{I} = (0, 0, I)$ dem Strom in z-Richtung..

a) Berechnen Sie die Rotation des Magnetfelds

$$\textbf{rot}\,\vec{B}(x, y, z)$$ **25 Punkte**

b) Berechnen Sie die Divergenz des Magnetfelds

$$\textbf{div}\,\vec{B}(x, y, z)$$ **20 Punkte**

c) Läßt sich das Magnetfeld als Gradient eines Skalarfelds darstellen? Begründen Sie Ihre Antwort. **5 Punkte**

Aufgabe 2 (Vektoranalysis)
30 Punkte

Berechnen Sie:

a) **rot** $\vec{F}$ für $\vec{F}(x, y, z) = (x \sin z, z \ln y, y)$ **10 Punkte**

b) **grad** $\vec{A} * \vec{r}$ für $\vec{A}$ = (a,b,c) konstant und $\vec{r}$ = (x,y,z) **10 Punkte**

c) **div grad** U (x,y,z) für U(x,y,z) = Q/r
und r = Betrag von $\vec{r}$ = (x,y,z) und Q = const. **10 Punkte**

Aufgabe 3 (Differentialgleichung erster Ordnung)
80 Punkte

Gegeben ist die DGL erster Ordnung::

$$y' = \frac{1+c(y/x)}{c-(y/x)}$$

Mit c = const.

a) Ist diese DGL linear? Begründen Sie Ihre Antwort! Wie muß der Definitionsbereich (x,y) eingeschränkt werden? $\rightarrow x \neq 0$; $\left(\frac{y}{x}\right) \neq c$ **10 Punkte**

b) Allgemeine Lösung der Differentialgleichung (beliebige Anfangsbedingungen)? **40 Punkte**

Tip: $\int \frac{c-z}{1+z^2}dz = c\int \frac{1}{1+z^2}dz - \int \frac{z}{1+z^2}dz$

Lösung: $\sqrt{x^2+y^2} = De^{c \arctan \frac{y}{x}}$ mit D = const.

c) Wie lautet die Lösung für die Anfangsbedingung y(1) = 0? **10 Punkte**

d) Allgemeine Lösung bei Verwendung von Polarkoordinaten? **20 Punkte**

$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi \rightarrow d \cdot e^{x\varphi}$

Aufgabe 4 (Inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung)
80 Punkte

Gegeben ist die inhomogene DGL erster Ordnung::

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$$

a) Ist diese DGL linear? Begründen Sie Ihre Antwort! Lösen Sie die zugeordnete homogene Differentialgleichung allgemein. **40 Punkte**

b) Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung? **40 Punkte**

Aufgabe 5 (Homogene DGL 2. Ordnung, Taylor-Entwicklung, Linearisierung))

70 Punkte

Die DGL für den Auslenkungswinkel ϕ eines schwingenden Pendels in Abhängigkeit von der Zeit t ist gegeben durch:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0$$

Mit der konstanten Pendellänge l und der (konstanten) Erdbeschleunigung g.

Gesucht ist die Lösungsfunktion $\phi(t)$ (Dabei ist die Zeit t die unabhängige Variable).

a) Warum ist diese DGL nicht linear? Entwickeln Sie die Funktion $\sin\phi$ nach ϕ (Taylorentwicklung) um $\phi = 0$ bis zur dritten Ordnung in ϕ. Bei welcher Ordnung müssen Sie die Entwicklung abbrechen, damit obige DGL linear wird? (Gute Näherung für kleine Auslenkungswinkel!) Lösen Sie die so linearisierte DGL

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0$$

45 Punkte

allgemein. Wählen Sie als Abkürzung $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

c) Wie lautet die Lösung für die Anfangsbedingungungen

25 Punkte

$\phi(t=0) = \phi_0 \qquad \dot{\phi}(t=0) = 0$

Welchem Zustand entsprechen diese Anfangsbedingungen bei der Pendelschwingung?

Aufgabe 6 (Inhomogene Differentialgleichung dritter Ordnung)

90 Punkte

Gegeben ist die lineare inhomogene DGL dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = x$$

$\Rightarrow$ linear, da alle Potenzen ≤ 1 !

d) Lösen Sie die zugeordnete homogene Differentialgleichung allgemein (Eine Lösung des charakteristischen Polynoms in λ ist: $\lambda_1 = 1$) **50 Punkte**

e) Finden Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL und schreiben Sie dann die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL hin. **40 Punkte**

Aufgabe 7 (System von Differentialgleichungen erster Ordnung; Einsetzverfahren, Matrixverfahren)

100 Punkte

Gegeben ist das System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 1$.

$$y_1' = y_1 - y_2$$
$$y_2' = 4y_1 - 3y_2$$

$\rightarrow$ ja! $\rightarrow$ ja!

a) Ist das System linear? Sind die Koeffizienten konstant? Lösen Sie dieses System nach dem Einsetzverfahren und berücksichtigen Sie die Vielfachheit der Nullstellen des charakteristischen Polynoms. **50 Punkte**

b) Lösen Sie das System nach dem Matrixverfahren.. **50 Punkte**