Fachhochschule Ravensburg-Weingarten
Hochschule für Technik und Sozialwesen
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

Klausur

Fach:	Mathematik 1, Lineare Algebra (zusammen mit Mathematik 1, Analysis)
Prüfer:	Prof. Dr. Martin Hulin
Datum:	26. Januar 1998
Dauer:	120 Minuten (gesamt)

Punkte gibt es nur, wenn Ihr Lösungsweg durch Dokumentation der Zwischenschritte ersichtlich ist!

Aufgaben

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in kartesischen Koordinaten und $\vec{y}$ in Palarkoordinaten mit $r = |\vec{y}| = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Bilden Sie die Summe $\vec{x} + \vec{y}$. Sie dürfen selbst entscheiden, ob Sie das Ergebnis in kartesischen Koordinaten oder Palarkoordinaten angeben.

2. An einem Körper greifen die Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ im Punkt (0; 0; 1) und $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ im Punkt (-1; 2; 2) an.

   a) Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$ so, daß sich die Wirkungslinien der beiden Kräfte schneiden und geben Sie den Schnittpunkt an.

   b) Der Körper werde nun im Ursprung (0; 0; 0) mit einem Kugelgelenk drehbar gelagert. Welches Gesamtdrehmoment erzeugen die beiden Kräfte bezüglich des Drehpunkts in Abhängigkeit von b?

   Lösung: $\vec{M} = \begin{pmatrix} 2b - 2 \\ 5 + b \\ -5 \end{pmatrix}$

   c) Für welches b wird der Betrag des Gesamtdrehmoments am kleinsten.

3. Geben Sie alle verschiedenen Lösungen der komplexen Gleichung $z^3 - (1 + i) = 0$ an. Sie dürfen selbst entscheiden, ob Sie das Ergebnis in Normalform oder Exponentialform angeben.

4. Eine innere Verknüpfung $\Diamond$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $a \Diamond b = \sqrt{a^2 + b^2}$.
   Ist die Verknüpfung assoziativ?
   Ist die Verknüpfung kommutativ?
   Gibt es ein neutrales Element?
   Gibt es zu jeder Zahl x ein inverses Element?
   Begründen Sie Ihre Antworten!

1. Umrechnen von $\vec{y}$ in kartesische Koordinaten:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Summe bilden: $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.

a) Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_1$: Alle Endpunkte der Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit beliebigem $r \in \mathbb{R}$ liegen auf der Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_1$.

Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_2$: Alle Endpunkte der Vektoren $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ mit beliebigem $s \in \mathbb{R}$ liegen auf der Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}_2$.

Gleichung für Schnittpunkt: Bestimme r und s so, daß $\vec{x}(r) = \vec{y}(s)$, d. h.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$. Dies ist ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem mit dem Parameter b, das mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden kann:

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & -b \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -b+4 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} -2II \\ \\ +(-b+4)II \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2b+11 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist lösbar, d. h. ein Schnittpunkt ist vorhanden wenn die 3. Gleichung erfüllt ist, also $b = 11/2$. Dann ist die Lösung $r = -5$ und $s = -2$. Der Schnittpunkt hat dann die Koordinaten (-5; 0; -9).

b) Für Drehmomente gilt die Formel: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

$$\vec{M}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_2(b) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-2 \\ 4+b \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die beiden Drehmomente werden zum Gesamtdrehmoment addiert:

$$\vec{M}(b) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b-2 \\ 4+b \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-2 \\ 5+b \\ -5 \end{pmatrix}$$

c) $\left|\vec{M}\right|(b) = \sqrt{(2b-2)^2 + (5+b)^2 + 25} = \sqrt{5b^2 + 2b + 54}$

Bilde die Ableitung: $\left|\vec{M}\right|'(b) = \dfrac{10b+2}{2\sqrt{5b^2+2b+54}} = \dfrac{5b+1}{2\sqrt{5b^2+2b+54}}$

Der Nenner der Ableitung ist immer positiv, da es sich um eine Wurzel handelt. Die Ableitung wird 0 für b = -1/5. Dies ist eine notwendige Bedingung für einen relativen Extremwert. Tatsächlich hat $\left|\vec{M}\right|(b)$ dort ein Minimum, da $\left|\vec{M}\right|'(b) < 0$ für b < -1/5 und $\left|\vec{M}\right|'(b) > 0$ für b > -1/5