Klausur Mathematik 1, Teil Lineare Algebra, Lösungen

Prüfer:	Prof. Dr. Martin Hulin
Dauer:	90 Minuten gesamt, Lineare Algebra ca. 45 Minuten
Datum:	22. Januar 2001
Hilfsmittel:	Alles ohne programmierbare Taschenrechner
Kennzahlen:	1865, 1400

Aufgaben **(Punkte)**

1. Gegeben sind die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. **(8)**

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot 1+(-2)\cdot 0+0\cdot 0+2\cdot 1=\underline{3}$$ ●●

b) Berechnen Sie die Länge der beiden Vektoren.

$$\left|\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+4+0+4} = \sqrt{9} = \underline{3}$$ ●● $$\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+0+0+1} = \underline{\sqrt{2}}$$ ●

c) Berechnen Sie mit den Ergebnissen von a) und b) den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

$$\angle(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|};$$ ● $$\varphi = \arccos\frac{3}{3\sqrt{2}} = \arccos\frac{1}{2}\sqrt{2} = \underline{45^\circ}$$ ●●

2. Bei einer Abbildung $\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben: $\beta(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ und

$\beta(\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}) = \beta(2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}20\\12\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$. Kreuzen Sie die richtige Antwort an! **(2)**

- ☐ Die Abbildung β ist linear.
- ☐ Die Abbildung β ist quadratisch.
- ☒ Die Abbildung β ist nicht linear.●●
- ☐ Auf Grund der angegebenen Information kann nicht eindeutig entschieden werden, ob β linear ist.

3. Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ **(5)**

a) Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2,5 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, in der die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{u}$ die Spalten bilden.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2,5 \\ 2 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \quad \bullet\bullet$$

$$1\cdot 0\cdot 5 + 6\cdot(-5)\cdot(-2) + (-2,5)\cdot 2\cdot 3 - (-2)\cdot 0\cdot(-2,5) - 3\cdot(-5)\cdot 1 - 5\cdot 2\cdot 6$$

$$= 60 - 15 + 15 - 60 = \underline{0} \bullet$$

b) Folgern Sie aus dem Ergebnis bei a) mit kurzer Begründung, ob die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{u}$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.

Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn die aus ihnen gebildete Matrix die Determinante 0 hat. • Dann ist nämlich das LGS $k\vec{v} + l\vec{w} + m\vec{u} = \vec{0}$ nichttrivial lösbar. Daher sind die obigen drei Vektoren linear abhängig.•

4. Die komplexe Gleichung $z^4 + \dfrac{(-2-3i)+(2+i)}{1+i} = 0$ soll nach z aufgelöst werden. **(12)**

a) Berechnen Sie dazu zunächst $\dfrac{(-2-3i)+(2+i)}{1+i}$; Ergebnis in Exponentialform.

$$\frac{(-2-3i)+(2+i)}{1+i} = \frac{-2i}{1+i} \bullet = \frac{-2e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} \bullet\bullet = -\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \bullet\bullet = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \bullet$$

b) Ermitteln Sie nun alle Lösungen der obigen Gleichung.

$$z^4 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \bullet = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)}, \quad k \in \mathbf{Z} \bullet$$

$$z = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)}\right)^{\frac{1}{4}} \bullet = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}\right)} \bullet, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Verschiedene Werte für $k \in \{0,1,2,3\}$:

$$z_0 = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}} \bullet; \quad z_1 = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{9\pi}{16}}; \quad z_2 = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{17\pi}{16}}; \quad z_3 = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{25\pi}{16}}; \bullet$$

5. Gegeben ist die lineare Abbildung $\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \vec{x}$. **(12)**

a) Berechnen Sie die Menge aller Vektoren, die auf $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ abgebildet werden.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ •• Dies ist ein LGS für die ges. Vektoren

Lösung mit Gauss-Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{array} \quad -4 \cdot II \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow x_3 = r \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \bullet\bullet$$

einsetzen in II ergibt: $x_2 = 3 - 2r$ •

einsetzen in I ergibt: $x_1 = 6 - 2(3 - 2r) - 3r = r$ •

Alle Vektoren der Menge $\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}$ • werden auf den Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ abgebildet.

b) Ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von α? Wenn ja, wie lautet der zugehörige Eigenwert?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-2 \\ 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ •

Bedingung für Eigenvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ • Dies ist nicht möglich für $\lambda \in \mathbb{R}$

.• Also ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ kein Eigenvektor der Abbildung.

c) Ist $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von α? Wenn ja, wie lautet der zugehörige Eigenwert?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+8+48 \\ 4+32 \\ 16+128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 36 \\ 144 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 9.