1. Die Menger aller Buchstabenketten aus den 26 Buchstaben (ohne Umlaute) {a, b, c, ... x, y, z} ist abzählbar unendlich. Geben Sie dazu unten das Zählschema an (= bijektive Abbildung zwischen den Buchstabenketten und den natürlichen Zahlen), d. h. schreiben Sie zu jeder Platznummer die zugehörige Buchstabenfolge.
Hinweis: $26 + 26^2 = 702$

a	b	…	z	aa	ab	…	zz	aaa	…
1	2	…	26	27	28	…	702	703	…

Allgemeine Formel (nicht verlangt): Sei N(<Buchstabe>) die Platznummer eines Buchstaben im Alphabet, also N(a) = 1 und N(z) = 26. Dann bekommt eine Buchstabenkette der Länge k "$bst_1 bst_2 \ldots bst_k$" die Platznummer $\sum_{i=1}^{k} 26^{k-i} N(bst_i)$

2. Eine Relation R auf den ganzen Zahlen ist dadurch definiert, dass x R y genau dann gilt, wenn x*x - y*y durch 3 ohne Rest teilbar ist. Kreuzen Sie alle zutreffenden Aussagen an.

☒ R ist reflexiv richtig, es gilt x R x, da $x^2-x^2 = 0$ und 0 ist durch 3 ohne Rest teilbar

☐ R ist antisymmetrisch falsch, R ist symmetrisch, denn wenn x^2-y^2 durch 3 ohne Rest teilbar ist, dann ist auch $y^2-x^2 = -(x^2-y^2)$ durch 3 ohne Rest teilbar.

☒ R ist transitiv richtig, da aus (x^2-y^2) MOD 3 = 0 und (y^2-z^2) MOD 3 = 0 folgt (x^2-z^2) MOD 3 = $(x^2-y^2+y^2-z^2)$ MOD 3 = (x^2-y^2) MOD 3 + (y^2-z^2) MOD 3 = 0

☒ R erzeugt 2 Äquivalenzklassen: {... -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 8, ...} und {... -6, -3, 0, 3, 6, ...} richtig

☐ R erzeugt 3 Äquivalenzklassen: {... -6, -3, 0, 3, 6, ...}, {... -5, -2, 1, 4, 7, ...} und {... -4, -1, 2, 5, 8, ...} falsch, die zweite und dritte Menge bilden zusammen eine Äquivalenzklasse

☐ R erzeugt keine Äquivalenzklassen. falsch, da R eine Äquivalenzrelation ist (reflexiv, symmetrisch, transitiv)

3. Welche Schritte gehören zu einem Induktionsbeweis für die Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 : 4^n \geq n^4$? Kreuzen Sie die richtigen Angaben an.

☒ $4^4 \geq 4^4$ richtig, da Induktionsanfang erst bei n = 4

☐ $4^1 \geq 1^4$ falscher Induktionsanfang, da die Behauptung z. B. für n = 3 nicht gilt.

☐ $4^n \geq n^4 \Rightarrow 4^n + 1 \geq n^4$ falsch, n+1 nicht richtig in Formel eingesetzt.

☒ $4^n \geq n^4 \Rightarrow 4^{n+1} \geq (n+1)^4$ richtiger Induktionsschluss

☐ $4^0 \geq 0^4$ falscher Induktionsanfang, da die Behauptung z. B. für n = 3 nicht gilt.

☐ $4^n \geq n^4 \Rightarrow 4^{n+n} \geq (n+n)^4$ falsch, n+1 nicht richtig in Formel eingesetzt.

☐ $4^n \geq n^4 \Rightarrow (4+1)^n \geq n^{4+1}$ falsch, n+1 nicht richtig in Formel eingesetzt.

4. Ein Schatzsucher befindet sich auf einer früheren Pirateninsel. Er hat eine Karte, auf der ein Schatz verzeichnet ist. Er steht genau auf dem in der Karte verzeichneten Startpunkt, einer verrosteten Kanone. Zur besseren Orientierung legt er sich gedanklich ein kartesisches Koordinatensystem fest: x-Achse genau nach Osten, y-Achse genau nach Norden und z-Achse senkrecht nach oben. Den Ursprung legt er in den Startpunkt. Dann folgt er den Anweisungen der Karte:

- Wende dich von der N-Richtung 30° gen Osten und gehe 500 m geradeaus.

- Drehe dich nun um 90° im Uhrzeigersinn und gehe 100 m geradeaus.
- Dort triffst du auf eine Treppe die genau nach Westen im 45° Winkel nach unten führt. Steige 40 Stufen hinab. Jede Stufe ist 25 cm breit. Hinter einem losen Mauerstein ist dort das Gold versteckt.

a. Geben Sie die drei Wegstrecken als Vektoren im kartesischen Koordinatensystem des Schatzsuchers an! Kreuzen Sie dazu die korrekte Lösung an. (Einheit ist jeweils m)

1. Wegstrecke:

Koordinaten auf z-Achse: 0, da keine Höhenänderung. => Wegvektor nur in der x-y-Ebene. Wegvektor in Polarkoordinaten: Länge: 500 m, Winkel zur x-Achse: 60°. Umrechnung in kartesische Koordinaten ergibt:

$$\begin{pmatrix} 500\cos 60° \\ 500\sin 60° \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 250\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

☐ $\begin{pmatrix} 245 \\ 437{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 250 \\ 435 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 250\sqrt{3} \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 250 \\ 250\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 250\sqrt{2} \\ 250\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Wegstrecke:

Wegvektor in Polarkoordinaten: Länge: 100 m, Winkel zur x-Achse: -30°. Umrechnung in kartesische Koordinaten ergibt:

$$\begin{pmatrix} 100\cos(-30°) \\ 100\sin(-30°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\sqrt{3} \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

☐ $\begin{pmatrix} 90 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 89 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 50\sqrt{3} \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 50 \\ -50\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 100\sqrt{\frac{3}{4}} \\ -100\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Wegstrecke:

$$\begin{pmatrix} -40\cdot 0{,}25 \\ 0 \\ -40\cdot 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

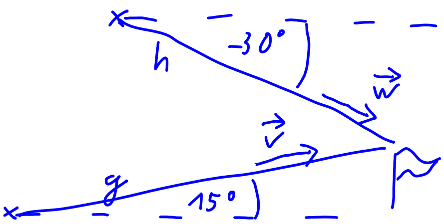
☐ $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -20\sqrt{2} \\ 0 \\ -20\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -5\sqrt{3} \\ 0 \\ -5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

b. An welcher Stelle in seinem Koordinatensystem befindet sich der Schatzsucher, wenn er vor dem losen Mauerstein steht?

$$\begin{pmatrix} 250 \\ 250\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50\sqrt{3} \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240+50\sqrt{3} \\ -50+250\sqrt{3} \\ -10 \end{pmatrix}$$

5. Zwei Beobachter stehen auf den Punkten mit den Koordinaten (2; 1) und (5; 6). Beide peilen eine Fahne an. Der erste misst einen Winkel von 15° zur positiven x-Achse, der zweite einen Winkel von -30°.

Berechnen Sie die Koordinaten der Fahne und tragen Sie sie ein. Runden Sie dabei die Koordinaten auf eine Stelle hinter dem Komma, z. B. 5,0 und nicht 5,0327. Verwenden Sie ein Komma und keinen Punkt.



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos 15° \\ \sin 15° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 \\ 0,26 \end{pmatrix}; \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \cos(-30°) \\ \sin(-30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,87 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

$$g = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0,97 \\ 0,26 \end{pmatrix} \wedge k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$h = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0,87 \\ -0,5 \end{pmatrix} \wedge m \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S = g \cap h$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0,97 \\ 0,26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0,87 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$ 2 Gleichungen

$$\text{I}: \quad 0,97\,k - 0,87\,m = 3$$

$$\text{II}: \quad 0,26\,k + 0,5\,m = 5 \quad \Rightarrow \quad m = 10 - 0,52\,k$$

$$\text{in I}: \quad k = 8,23 \quad \Rightarrow m = 5,72$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 8,23 \cdot \begin{pmatrix} 0,97 \\ 0,26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,98 \\ 3,14 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 10,0 \\ 3,1 \end{pmatrix}$$

6. Lösen Sie folgende Gleichung nach dem drei-dimensionalen Vektor *u* auf. *u* ist ein Vektor, auch wenn er nicht durch einen Pfeil als solcher gekennzeichnet ist. Geben Sie bei Ihrer Antwort jede Komponente des Vektors ohne Leerzeichen ein, Dezimaltrennzeichen ist das Komma, z. B. in der Form *u* = (15;-12;5,25)

$$5\begin{pmatrix} 3,2 \\ 3,8 \\ -2 \end{pmatrix} + 3u = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$3u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -21 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

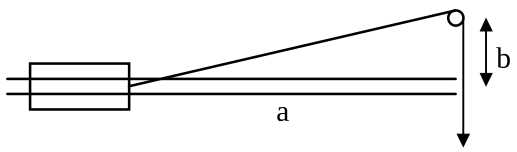
7. Gegeben sind die Vektoren (7; 4; 4) und (1; 2; 3). Die beiden Vektoren schließen den Winkel Phi ein. Berechnen Sie cos (Phi) und den Winkel Phi im Bogenmaß. Rechnen Sie alle Zwischenergebnisse und Ergebnisse auf 5 Stellen hinter dem Komma genau. Runden Sie dann auf 2 Stellen hinter dem Komma. Benutzen Sie als Dezimaltrennzeichen ein Komma, keinen Punkt.

$\cos\varphi = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{7+12+8}{\sqrt{49+16+16}\sqrt{1+9+4}} = \frac{27}{9 \cdot \sqrt{14}} = 0{,}8018$; gerundet: cos φ = 0,80

$\varphi = \arccos 0{,}8018 = 0{,}6405 (= 36{,}70°)$; gerundet: φ = 0,64

Aufgaben während der Übungsstunde

1. Ein Wagen auf Schienen wird mit einem Seil und einer Umlenkrolle gezogen und zwar mit einer Kraft von 2000 N. a = 300 m, b = 2 m. Welche Arbeit wird in die Beschleunigung des Wagens gesteckt, wenn er 1m weit entlang a gezogen wird? Warum wäre die Aufgabe schwieriger, wenn statt 1m Weg 280m Weg in der Aufgabe angegeben wäre?



Kraft $\vec{F}$: $|\vec{F}| = 2000$ N

Weg $\vec{s}$: $|\vec{s}| = 1$ m

Arbeit $W = \vec{F} * \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \underbrace{\sphericalangle(\vec{F}, \vec{s})}_{\varphi}$

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$

$W = 2000 \cdot 1 \cdot \cos\left(\arctan \frac{1}{150}\right)$

$= 1999{,}95557 \approx 1999{,}96$ [Nm]

Bei 280 m wäre der Winkel nicht mehr nahezu konstant geblieben und man hätte integrieren müssen.

---

2. Verwenden Sie die Formel für das Vektorprodukt für die zwei Vektoren in kartesischen Koordinaten: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf beiden Ausgangsvektoren steht.

Lösung:

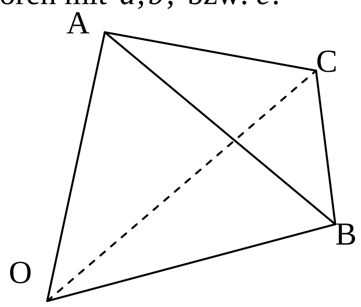
Zwei Vektoren sind genau dann senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

$$\vec{a} * (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix} = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_1 b_3 + a_3 a_1 b_2 - a_3 a_2 b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$$

analog: $\vec{b} * (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$

3. Betrachten Sie einen Tetraeder (Körper mit 4 Ecken, d. h. die 4 Seitenflächen sind Dreiecke), bei dem ein Eckpunkt im Ursprung O des Koordinatensystems liegt. Die anderen Eckpunkte seien mit A, B und C bezeichnet und entsprechend ihre Ortsvektoren mit $\vec{a}, \vec{b},$ bzw. $\vec{c}$.



a) Berechnen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts die 4 Normalenvektoren der Seitenflächen. (Normalenvektor ist der Vektor, der senkrecht auf der Seite steht und die doppelte Länge der Dreiecksfläche hat.)

b) Zeigen Sie, dass die Summe der Normalenvektoren den Nullvektor ergibt.

Lösung:

Alle Normalenvektoren werden so berechnet, dass sie ins Innere des Tetraeders zeigen.

Normalenvektor des Dreiecks OBA: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor des Dreiecks OCB: $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} b_2\, c_3 - b_3\, c_2 \\ b_3\, c_1 - b_1\, c_3 \\ b_1\, c_2 - b_2\, c_1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor des Dreiecks OAC: $\vec{c} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} c_2\, a_3 - c_3\, a_2 \\ c_3\, a_1 - c_1\, a_3 \\ c_1\, a_2 - c_2\, a_1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor des Dreiecks ABC:

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} = \qquad /* \ \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0},\ \vec{a} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{a} \ */$$

$$-\vec{c} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c}$$

Summe der 4 Normalenvektoren: $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$