Aufgabenblatt 2, Lösungen

1. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen nicht mehr abzählbar ist. Tipp: Stellen Sie die Teilmengen der natürlichen Zahlen als (unendlich lange) Strings aus 0 und 1 dar, wobei eine 1 an der i-ten Stelle bedeutet, dass die Zahl i in der Teilmenge enthalten ist. '01101000...' bedeutet z. B. {2; 3; 5} und '010101...' ist die Menge der geraden Zahlen.

Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen besteht aus allen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ kann als unendlich lange Bitkette dargestellt werden. Angenommen, die Teilmengen von $\mathbb{N}$ könnten aufgezählt werden: $T_1, T_2, T_3, \ldots$ Jede der Teilmengen T_i sei als Bitkette $T_{i1}\ T_{i2}\ T_{i3}\ T_{i4} \ldots$ mit $T_{ij} \in \{0; 1\}$ dargestellt. Erzeuge nun eine neue Teilmenge (= Bitkette) TN mit $TN_1 = \neg T_{11}$, $TN_2 = \neg T_{22}, \ldots$ $TN_i = \neg T_{ii}$. Dann kommt TN nicht in der Aufzählung $T_1, T_2, T_3, \ldots$ vor, denn $TN \neq T_1$ wegen der 1 ($1 \in TN \Leftrightarrow 1 \notin T_1$) und $TN \neq T_2$ wegen der 2, allgemein $TN \neq T_i$ wegen der Zahl i ($i \in TN \Leftrightarrow i \notin T_i$). Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, es gäbe eine Aufzählung aller Teilmengen von $\mathbb{N}$.

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: n (n + 1) (n - 1) ist für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ durch 6 ohne Rest teilbar.

Lösung

Induktionsanfang *n* = 2:
2 * 3 * 1 = 6.
Induktionsschluss $n \to n + 1$:
Induktionsvoraussetzung: n (n + 1) (n - 1) ist durch 6 ohne Rest teilbar.
Induktionsbehauptung: (n+1) (n + 2) (n +1 - 1) ist durch 6 ohne Rest teilbar.
Beweis: Es gilt: (n+1) (n + 2) (n +1 - 1) = (n+1) (n+2) n = n (n+1) (n-1+3) = n (n+1) (n-1) + n (n+1) 3 Nach Induktionsvoraussetzung ist der erste Summand durch 6 teilbar; aber auch der zweite Summand enthält neben dem Faktor 3 auch den Faktor 2 in dem Term *n* (*n* + 1), denn entweder ist n gerade oder n+1 gerade.

3. Bei welchen der folgenden Relationen handelt es sich um Funktionen? Ist die Umkehrrelation eine Funktion?

a) Relation "hat als Hauptstadt" zwischen der Menge der Staaten und der Menge der Städte, z. B. Deutschland hat als Hauptstadt Berlin.
Funktion, da jeder Staat eine Hauptstadt hat und diese eindeutig ist.
Umkehrung ist keine Funktion, da nicht jede Stadt Hauptstadt ist.

b) Relation "ist immatrikuliert für" zwischen der Menge aller Studenten in Deutschland und der Menge aller angebotenen Studiengänge an deutschen Hochschulen.
Keine Funktion, da zwar jeder Student immatrikuliert ist, es aber Studenten gibt, die für mehr als einen Studiengang immatrikuliert sind.
Umkehrung ist keine Funktion, da ein Studiengang mehrere Studenten hat.

c) Relation "hat als Mutter" zwischen der Menge aller Menschen und der Menge aller Frauen, (die jemals gelebt haben).
Funktion, da jeder Mensch (biologisch gesehen) genau eine Mutter hat.
Umkehrung ist keine Funktion, da nicht jede Frau Mutter ist und eine Mutter mehrere Kinder haben kann.

d) Relation "ist registrierter Kunde bei" zwischen der Menge aller (lebenden) Menschen mit Staatsbürgerschaft deutsch und aller in Deutschland ansässigen Versandhäuser. (Ein Kunde ist registriert, wenn er eine Kundennummer hat.)
Keine Funktion, da nicht jeder Mensch bei einem Kaufhaus registriert ist und ein Mensch bei mehreren Kaufhäusern registriert sein kann.
Umkehrung ist keine Funktion, da ein Kaufhaus mehrere registrierte Kunden hat.

e) Relation "hat als Regierungsbezirk" zwischen der Menge der Bundesländer in Deutschland und der Menge der Regierungsbezirke, z. B. Bayern hat die Oberpfalz als Regierungsbezirk.
Keine Funktion, da ein Bundesland mehrere Regierungsbezirke haben kann.
Umkehrung ist Funktion, da jeder Regierungsbezirk eindeutig zu einem Bundesland gehört.

---

4. Gegeben ist die Klasseneinteilung
K = {{in, er, sein, Bär}, {Salbe, Rabe, unter, gehen}, {umgehen, Gebirge, surjektiv, Vektorraum}} auf der Menge
M = {in, er, sein, Bär, Salbe, Rabe, unter, gehen, umgehen, Gebirge, surjektiv, Vektorraum}

a) In welche Klasse muss das Wort "Mutter" eingefügt werden, wenn es zu M zugefügt wird?

b) Beschreiben Sie die durch die Klasseneinteilung K definierte Äquivalenzrelation auf M.
$u \cong w \Leftrightarrow$? (Wort u äquivalent zu Wort v genau dann wenn ?)

c) Stellen Sie die Relation durch eine Matrix dar. Was beobachten Sie?

Lösung:

a) Silbenzahl ("Mutter") = 2. Daher kommt "Mutter" in die 2. Klasse.

b) $u \cong w \Leftrightarrow$ Silbenzahl (u) = Silbenzahl(w)

c)

in	×	×	×	×								
er	×	×	×	×								
dein	×	×	×	×								
Dir	×	×	×	×								
Falke					×	×	×	×				
Rabe					×	×	×	×				
unten					×	×	×	×				
gehe					×	×	×	×				
ungeh.									×	×	×	×
Geb.									×	×	×	×
sang.									×	×	×	×
Vektor									×	×	×	×

Die Matrix zerfällt in Blöcke, in denen jedes Element mit jedem in Relation steht, während zwischen den Blöcken gar keine Verbindung besteht.

---

5. Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{2x-4}{x}$

   a) Berechnen Sie $(f \circ f)(x)$, $(f \circ f \circ f)(x)$ für einige beliebig gewählte Werte von x.

   b) Geben Sie für die Beobachtung aus a) den Grund an.

   c) Welche Definitionsmengen haben die Verkettungen $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, ... ?

Lösung

a. Beispiel: $x = 1$ gibt $f(1) = -2$; $f(f(1) = f(-2) = 4$; $f(f(f(1))) = f(4) = 1$. Es entsteht ein Zyklus der Länge 3. Dies gilt für fast alle Startwerte (s. u.).

b. Also haben alle Zyklen die Länge 3. (Dazu noch zu beachten: Die Gleichungen $f(x) = x$ und $f(f(x)) = x$ ergeben dieselbe unlösbare quadratische Gleichung. Es gibt also weder Fixwerte noch Zweierzyklen.)

c. Definitionsmenge von f = R \ {0}
Definitionsmenge von $f \circ f$ = R \ {0, 2}
Definitionsmenge von $f \circ f \circ f$ = R \ {0, 2}
Die Startzahl 0 ist offenbar nicht zulässig, aber auch nicht die Startzahl 2, da $f(2) = 0$ gilt und $f(f(2))$ auf $f(0)$ führt.

---

6. Gegeben sind die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in kartesischen Koordinaten und $\vec{y}$ in Palarkoordinaten mit $r = |\vec{y}| = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Bilden Sie die Summe $\vec{x} + \vec{y}$. Sie dürfen selbst entscheiden, ob Sie das Ergebnis in kartesischen Koordinaten oder Palarkoordinaten angeben.

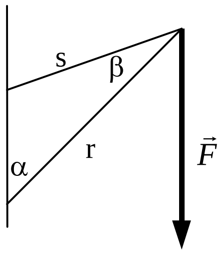
Lösung

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} P_X \\ P_Y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} P_X = |\vec{y}| \cdot \cos\rho = \sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 1 \\ P_Y = |\vec{y}| \cdot \sin\rho = \sqrt{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 1 \end{matrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

---

7. An einem Kran hänge eine Last, die die Kraft $\vec{F}$ ausübt. Wie groß sind die Beträge der Kräfte in den Streben *s* und *r*? Dabei ist gegeben: $|\vec{F}|$ = 20000 N, α = 40°, β = 30°.



Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung:

Es wird ein kartesisches Koordinatensystem definiert mit der x-Achse parallel zum Boden, der y-Achse nach oben entlang der Wand und dem Ursprung im Befestigungspunkt der Strebe r an der Wand.

Einheitsvektor in Richtung Strebe r in Polarkoordinaten: $\vec{r}_0 = (1, 50°)$

Einheitsvektor in Richtung Strebe s in Polarkoordinaten: $\vec{s}_0 = (1, 20°)$

Einheitsvektor in Richtung Strebe r in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r}_0 = (1, 50°) = \begin{pmatrix} \cos 50° \\ \sin 50° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6428 \\ 0{,}7660 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor in Richtung Strebe s in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{s}_0 = (1, 20°) = \begin{pmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9397 \\ 0{,}3420 \end{pmatrix}$$

Für die Kräftezerlegung gilt nach dem physikalischen Gesetz "Actio = Reactio": $\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_s$ (*)

Die beiden Kräfte in den Streben r bzw. s sind jeweils darstellbar als Faktor mal dem Einheitsvektor in Richtung r bzw. s: $\vec{F}_r = \lambda \vec{r}_0, \vec{F}_s = \mu \vec{s}_0 \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Nun können die Vektoren in die Gleichung (*) eingesetzt werden und es ergibt sich die Vektorgleichung

$$\lambda\begin{pmatrix}0,9397\\0,3420\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0,6428\\0,7660\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-20000\end{pmatrix}$$

Da zwei Vektoren gleich sind, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen, ergeben sich zwei Gleichungen, je eine für die x- und für die y-Komponente.

$$0,9397\lambda+0,6428\mu=0$$

$$0,3420\lambda+0,7660\mu=-20000$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ergibt $\lambda=-37587,7;\quad \mu=25711,5$. Da die Richtungsvektoren Einheitsvektoren sind, entspricht dies auch den Beträgen der beiden Kräfte.

Lösung mit Hilfe des Sinussatzes:

$$\frac{s}{\sin\alpha}=\frac{|\vec{F}|}{\sin\beta}\rightarrow s=\frac{|\vec{F}|}{\sin\beta}\cdot\sin\alpha\approx 25711,5N$$

$$\frac{r}{\sin\gamma}=\frac{|\vec{F}|}{\sin\beta}\quad \text{wobei}\quad \gamma=180°-\alpha-\beta=180°-40°-30°=110°$$

$$\rightarrow r=\frac{|\vec{F}|}{\sin\beta}\cdot\sin\gamma\approx 37587,7N$$

Dabei wird die untere Strebe durch die Kraft $\vec{r}$ auf Druck belastet und die obere Strebe auf Zug.

---

8. Ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ ist in Zylinderkoordinaten gegeben: r = 3, z = 5, φ = π/5.

   Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten. Schauen Sie dazu in einer Formelsammlung die Umrechnungsformeln nach.

Lösung

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos\frac{\pi}{5}\\3\sin\frac{\pi}{5}\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,4271\\1,7634\\5\end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten:

Länge $l=\sqrt{r^2+z^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}=5,8310$

Breitengrad (Winkel zur positiven z-Achse): $\theta=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{z}{r}=0,5404=30,9638°$

Längengrad (Winkel zur x-z-Ebene): $\varphi=\varphi=\frac{\pi}{5}=0,6283=36°$

---

9. Welche der Punkte A = (1; 2; 3), B = (-2; 2; -3), C = (6; 6; 6) , D = (2; 1; 12) des $\mathbb{R}^3$ liegen auf der Geraden g gegeben durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, k $\in \mathbb{R}^3$?

Lösung:

Für A: x-Koordinate: 4 + k = 1, also k = -3. Dann stimmt aber die y-Koordinate nicht: 5 – 3*2 = -1 statt 2. A liegt also nicht auf g.

Für B: x-Koordinate: 4 + k = -2, also k = -6. Dann stimmt aber die y-Koordinate nicht: 5 – 6*2 = -7 statt 2. B liegt also nicht auf g.

Für C: x-Koordinate: 4 + k = 6, also k = 2. Dann stimmt aber die y-Koordinate nicht: 5 + 2*2 = 9 statt 6. C liegt also nicht auf g.

Für D: x-Koordinate: 4 + k = 2, also k = -2. y-Koordinate: 5 – 2*2 = 1, stimmt. z-Koordinate: 6 – 2*(-3) = 12, stimmt. D liegt also auf g.

---

10. Berechnen Sie die Resultierende der zwei Kräfte. In welchem Punkt greift sie an?

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 10 \\ 200 \\ -30 \end{pmatrix} \text{ in } P = (0; 19; -4) \text{ und } \vec{G} = \begin{pmatrix} 100 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in } Q = (9; -5,5; -1)$$

Lösung:

Berechnung der Resultierenden:

$$\vec{F}_R = \vec{F} + \vec{G} = \begin{pmatrix} 10 \\ 200 \\ -30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 155 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Angriffpunktes: Aufstellen der beiden Geradengleichungen

$$g_1 : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ 200 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{G} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5,5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 100 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 10 \\ 200 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5,5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 100 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} 10 \\ 200 \\ -30 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 100 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -24,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufstellen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{r|l|}
1) & 10r - 100s = 9 \\
2) & 200r + 45s = -24{,}5 \\
3) & -30r = 3
\end{array} \quad s = \frac{-24{,}5 - 200r}{45} = -0{,}1 \qquad r = \frac{3}{-30} = -0{,}1$$

$s = r = -0{,}1$

in alle drei Gleichungen einsetzen und prüfen, ob jeweiliges Ergebnis richtig ist.

$$\begin{array}{r|l|}
1) & 10 \cdot (-0{,}1) - 100 \cdot (-0{,}1) = 9 \\
2) & 200 \cdot (-0{,}1) + 45 \cdot (-0{,}1) = -24{,}5 \\
3) & -30 \cdot (-0{,}1) = 3
\end{array} \quad \begin{array}{l} ✓ \\ ✓ \\ ✓ \end{array}$$

Schnittpunkt/Angriffpunkt:

$$\vec{X}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix} - 0{,}1 \begin{pmatrix} 10 \\ 200 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder: } \vec{X}_S = \begin{pmatrix} 9 \\ -5{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} - 0{,}1 \begin{pmatrix} 100 \\ -45 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Resultierende Kraft greift im Punkt (-1; -1; -1) an.

---

11. Betrachten Sie im Zahlensystem zur Basis 2 (Dualsystem) Folgen von n Stück '10'. Z. B. für n = 3: $(101010)_2 = 42$. Eine solche Folge hat (im Zehnersystem) den Wert $\frac{2}{3}(4^n - 1)$. Beweisen Sie diese Formel durch vollständige Induktion.

Lösung

Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt .

$$(10)_2 = 2 = \frac{2}{3}(4^1 - 1)$$

Induktionsschluss $n \to n + 1$: Die Behauptung gelte für $n \geq 1$. Der Wert von $n + 1$ hintereinander geschriebenen Zifferngruppen 10 im Binärsystem lautet nach Induktionsannahme:

$$\Big(10\,\underbrace{10\ldots10}_{n}\Big)_2 = \Big(10\,\underbrace{00\ldots0}_{2n}\Big)_2 + \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

Der erste Summand auf der rechten Seiten dieser Gleichung (1 mit $2n + 1$ Nullen) hat den Wert $2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n$, so dass sich insgesamt ergibt:

$$\Big(10\,\underbrace{10\ldots10}_{n}\Big)_2 = 2 \cdot 4^n + \frac{2}{3}(4^n - 1) =$$

$$\frac{2}{3}(3 \cdot 4^n + 4^n - 1) = \frac{2}{3}(4^{n+1} - 1)$$

---

12. Für die Mengen A und B gelte | A | = 9 und | B | = 5.
Wie viele Funktionen von A nach B gibt es?
Wie viele sind injektiv?

Lösung

Es bezeichne $a = |A|$, $b = |B|$.
Anzahlen von Funktionen $f : A \to B$
alle:
$b^a = 1953125$
injektive:
Formel: $b(b-1) \cdot \ldots \cdot (b-a+1)$
In diesem Fall ergibt sich 0, da $a > b$.

---

13. In einer rechteckigen Werkhalle sei die Längsseite die x-Achse, die andere Seite die y-Achse. Ein Roboter steht im Punkt (5; 7), Einheit m. Er bewegt sich zunächst 5 s lang mit 3 m/s in einem Winkel von 30° zur positiven x-Achse. Dort ändert er seine Richtung und dreht sich um 30° gegen den Uhrzeigersinn. Dann fährt er 4 s lang mit 2 m/s weiter. An welchem Punkt kommt er an? Berechne auf cm genau.

Lösung:

$$\vec{v}_1 = 3\begin{pmatrix}\cos 30°\\ \sin 30°\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}0,8660\\ 0,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,5980\\ 1,5\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = 2\begin{pmatrix}\cos 60°\\ \sin 60°\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0,5\\ 0,8660\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1,7320\end{pmatrix}$$

$$\text{Endpunkt } \vec{e} = \begin{pmatrix}5\\ 7\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}2,5980\\ 1,5\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\ 1,7320\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21,990\\ 21,428\end{pmatrix}$$

Der Roboter steht nach seiner Fahrt auf dem Punkt (21,99; 21,43)

---

14. Gegeben sind drei Kräfte, die in drei Punkten eines Körpers angreifen. Berechnen Sie die resultierende Kraft und ihren Angriffspunkt. Berechnen Sie dazu erst die Resultierende zweier Kräfte und addieren Sie dazu die dritte Kraft.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix}20\\ 50\end{pmatrix} \text{ in } P = (0;0),\ \vec{G} = \begin{pmatrix}30\\ 10\end{pmatrix} \text{ in } Q = (1;-1),\ \vec{H} = \begin{pmatrix}-30\\ 40\end{pmatrix} \text{ in } S = (-2;1)$$

Lösung:

Aufstellung der Geradengleichungen:

$$g_1 : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}20\\ 50\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}20\\ 50\end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{G} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}30\\ 10\end{pmatrix}$$

Gleichsetzen von g_1 und g_2:

$$r\begin{pmatrix}20\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}20\\50\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l|l|l} 1) & 20r-30s=\ \ 1 & \cdot 5 \\ 2) & 50r-10s=-1 & \cdot(-2) \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100r-150s=5 \\ -100r\ \ +20s\ =2 \\ \hline -130s=7 \end{array} \qquad s=-\frac{7}{130}$$

$$1)\rightarrow \quad r=\frac{1+30s}{20}\quad=-\frac{2}{65}$$

$$2)\rightarrow \quad r=\frac{-1+10s}{50}=-\frac{2}{65}$$

Schnittpunkt, Angriffspunkt:

$$\overrightarrow{x_S}=r\begin{pmatrix}20\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{13}\\-\frac{20}{13}\end{pmatrix}\text{ oder: }\overrightarrow{x_S}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{13}\\-\frac{20}{13}\end{pmatrix}$$

Resultierende von Vektor $\vec{F}$ und $\vec{G}$

$$\overrightarrow{F_{R1}}=\vec{F}+\vec{G}=\begin{pmatrix}20\\50\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}30\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}$$

Gesamtresultierende:

$$\overrightarrow{F_{ges}}=\overrightarrow{F_{R1}}+\vec{H}=\begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-30\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\100\end{pmatrix}$$

Ermittlung des Angriffpunktes der Gesamtresultierenden:

$$g_3:\vec{x}=\overrightarrow{x_S}+r\cdot\overrightarrow{F_{R1}}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{13}\\-\frac{20}{13}\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}$$

$$g_4:\vec{x}=\vec{S}+s\cdot\vec{H}\quad=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\quad+s\begin{pmatrix}-30\\40\end{pmatrix}$$

Gleichsetzen von g_3 und g_4:

$$\begin{pmatrix}-\frac{8}{13}\\-\frac{20}{13}\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-30\\40\end{pmatrix}\qquad r\begin{pmatrix}50\\60\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}-30\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{18}{13}\\\frac{33}{13}\end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} 1) & 50r + 30s = -\frac{18}{13} \quad \cdot 6 \\ 2) & 60r - 40s = \frac{33}{13} \quad \cdot (-5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} 300r + 180s &= -\frac{108}{13} \\ -300r + 200s &= -\frac{165}{13} \\ \hline 380s &= -21 \\ s &= -\frac{21}{380} \end{aligned}$$

$$1) \rightarrow r = \frac{-\frac{18}{13} - 30s}{50} = \frac{27}{4940}$$

$$2) \rightarrow r = \frac{\frac{33}{13} + 40s}{60} = \frac{27}{4940}$$

Angriffspunkt:

$$\overrightarrow{x_R} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{13} \\ -\frac{20}{13} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{38} \\ -\frac{23}{19} \end{pmatrix}$$