Aufgabenblatt 4

Hausaufgaben

1. Ein starrer Körper sei drehbar um eine Achse durch die Punkte A = (1; 3; 0) m, B = (7; 2; 5) m gelagert. Am Punkt P = (5; 6; 5) m greife einer Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} N$ an.Wie groß ist das Moment $\vec{M}$ der Kraft in P bezüglich A, d. h. als gäbe es keine Achse, sondern ein Kugelgelenk in A? Wie groß ist das erzeugte Drehmoment bezüglich der Achse? (Hinweis: Projektion von $\vec{M}$ auf die Achse, Formel für die Projektion von $\vec{u}$ auf $\vec{w}$: $\vec{u}_{\vec{w}} = \frac{\vec{u}\vec{w}}{\vec{w}\vec{w}}\vec{w}$). Führen Sie die gleiche Rechnung bezüglich B durch. Ist das Achsdrehmoment bei der Rechnung mit B das gleiche wie bei der Rechnung mit A?

Lösung:

Drehmoment bezüglich A (als wäre ein Kugelgelenk in A)

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AP} \times \vec{F} \text{ mit } \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 3 \\ -29 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

Drehmoment bezüglich B (als wäre ein Kugelgelenk in B)

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{BP} \times \vec{F} \text{ mit } \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

Drehmoment bezüglich der Achse

$$\overrightarrow{M_{AB}} = \left|\overrightarrow{M_A}\right| \cdot \cos\varphi \cdot \overrightarrow{AB_0} \text{ mit } AB_0 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

$$\overrightarrow{M_{AB}} = \frac{\left|\overrightarrow{M_A}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \cdot \overrightarrow{AB_0} = \frac{\overrightarrow{M_A} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

$$\overrightarrow{M_{AB}} = \frac{\overrightarrow{M_A} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \text{(Gl.1)} \qquad \overrightarrow{M_{AB}} = \frac{\overrightarrow{M_B} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \text{(Gl.2)}$$

→ Gl.1 $$\frac{\begin{pmatrix} 34 \\ 3 \\ -29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{28}{31} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} [Nm]$$

→ Gl.2 $$\frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{28}{31} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} [Nm]$$

Das Achsen-Drehmoment von Gl.1 ist das gleiche wie von Gl.2!

2. Ein gerades Drahtstück hat die Länge und die Richtung des Vektors $\vec{l}$. Es wird mit der Gewichtskraft $\vec{G}$ nach unten gezogen. Es befindet sich in einem homogenen Magnetfeld mit der Flußdichte $\vec{B}$. Durch den Draht fließt ein Strom in Richtung des Vektors $\vec{l}$. Wie groß müssen die Stromstärke I und der Parameter x sein, damit das Drahtstück schwebt?

Gegeben sind: $\vec{l} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} m$, $\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} N$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 10 \\ x \end{pmatrix} T$

Lösung:

I und Magnetfeld erzeugen Lorentzkraft $\vec{F}$. (1)

Schwebezustand: $\vec{F} = -\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} N$ (2)

Für die Lorentzkraft gilt: $\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) = I \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 10 \\ x \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 0{,}4x \\ -0{,}1x \\ 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ (7)

III: I = 5, II und I: x = 0 (3)

Wenn die dritte Komponente x des Magnetfeldes 0 ist und ein Strom I = 5A fließt, bleibt der Draht in der Schwebe.

3. Führen Sie die Aufgabe mit der Reflektion eines Lichtstrahls aus der Vorlesung mit anderen Zahlen (Vektoren) durch:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Gesucht ist der reflektierte Lichtstrahl $\vec{a}$ des Lichtstrahls $\vec{e}$ an der Ebene E durch den Ursprung mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Lösung:

Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_0} = \vec{n} / |\vec{n}| = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Aus dem Refletionsgesetz folgt für den Cosinus der Winkel der beiden Lichtstrahlen zum Normalenvektor: $\vec{a}\,\overrightarrow{n_0} = -\vec{e}\,\overrightarrow{n_0} \Rightarrow \underline{a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\vec{a}$ liegt in der Ebene von $\vec{e}$ und $\overrightarrow{n_0}$: $\vec{a} = k\vec{e} + m\overrightarrow{n_0} = k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a_1 = 0}$

$\vec{a}$ wurde als Einheitsvektor gewählt:

$|\vec{a}| = 1 \Leftrightarrow \vec{a}\vec{a} = 1 \Leftrightarrow 0^2 + \frac{1}{2} + k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underline{a_3 = k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Da $\vec{a} = -\vec{e}$ nicht möglich ist, ist der reflektierte Lichtstrahl $\underline{\underline{\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}}$

---

4. Betrachten Sie die Menge aller Nullfolgen. (Eine Nullfolge ist eine Folge, deren Grenzwert 0 ist.) Zwei Nullfolgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ werden addiert, indem die Folgenglieder mit der gleichen Nummer addiert werden. Es ergibt sich also $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$

Analog wird die Multiplikation einer Nullfolge mit einer reellen Zahl definiert. Zeigen Sie, dass die Menge der Nullfolgen einen Vektorraum bildet.

Lösung:

- Die Menge der Nullfolgen ist nicht leer, z. B. ist $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge.
- + ist innere Verknüpfung, da die Summe zweier Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist. Beweis: Zu jedem ε muss man einen Index N finden, ab dem $|a_i + b_i| < \varepsilon$. Da aber a_i und

b_i Nullfolgen sind, gibt es jeweils zu $\frac{\varepsilon}{2}$ ein N_a bzw. ein N_b, so dass ab diesen Indizes alle Folgenglieder von a_i bzw. b_i dem Betrag nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sind. Definiere nun N als den größeren der beiden Indizes N_a und N_b. Ab diesem N ist dann $a_i + b_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

- + ist assoziativ: Für jeden Index i gilt $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$. Also gilt es auch für die ganzen Folgen.
  ausführlich: siehe Kommutativgesetz
- Die Folge, die nur aus Nullen besteht 0; 0; 0; . . . ist eine Nullfolge. Sie ist das neutrale Element.
- Wenn $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Nullfolge ist, dann ist auch $-a_1, -a_2, -a_3, \ldots$ eine Nullfolge. Sie ist das inverse Element.
- + ist kommutativ: Für jeden Index i gilt $a_i + b_i = b_i + a_i$. Also gilt es auch für die ganzen Folgen.
  ausführlich: $(a_1, a_2, a_3, \ldots) + (b_1, b_2, b_3, \ldots) =$
  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3, \ldots) = (b_1, b_2, b_3, \ldots) + (a_1, a_2, a_3, \ldots)$

Wie man oben sieht, sind alle **Gruppenaxiome** erfüllt. Jetzt werden die restlichen Axiome für den **Vektorraum** untersucht.

- Das Produkt einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit einer Zahl *r* wird definiert als $r \cdot a_1, r \cdot a_2, r \cdot a_3, \ldots$
  Diese Folge ist wieder eine Nullfolge. Dazu suche den Index N der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ab dem die Glieder dem Betrag nach kleiner als $\frac{\varepsilon}{r}$ werden. Ab diesem Index wird die Folge $r \cdot a_1, r \cdot a_2, r \cdot a_3, \ldots$ dem Betrag nach kleiner als ε.
- Diese Multiplikation ist assoziativ: Seien *r* und *s* reelle Zahlen. Für jeden Index *i* gilt $(r \cdot s) \cdot a_i = r \cdot (s \cdot a_i)$. Also gilt es auch für die ganzen Folgen.
- Distributivgesetz 1: Seien *r* und *s* reele Zahlen. Für jeden Index *i* gilt $(r + s) \cdot a_i = r \cdot a_i + s \cdot a_i$, da das Distributivgesetz für reelle Zahlen gilt. Also gilt es auch für die ganzen Folgen.
- Distributivgesetz 2: Für jeden Index *i* gilt $r \cdot (a_i + b_i) = r \cdot a_i + r \cdot b_i$. Also gilt es auch für die ganzen Folgen.
- unitäres Gesetz: Für jeden Index *i* gilt $1 \cdot a_i = a_i$. Also gilt es auch für die ganze Folge.

Übungsaufgaben in Übungsstunde:

5. Alle Ortsangaben in dieser Aufgabe sind in *Meter* gegeben, alle Kraftangaben in *Newton,* alle Drehmomente in *Newtonmeter*. Ein gerader Stab ist an einem Ende in einem Kugelgelenk drehbar gelagert. An dieses Ende wird der Koordinatenursprung eines ortonormalen Koordinatensystems gelegt. Der andere Endpunkt E hat die Koordinaten (1; 1; 2). Dort greift eine Kraft $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.

a) Welches Drehmoment erzeugt die Kraft $\vec{F}_1$ im Gelenk?

b) Durch eine zweite Kraft $\vec{F}_2$ wird zusätzlich das Drehmoment $\vec{M}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt. Wie muß eine Kraft $\vec{F}_3$ aussehen, die im Punkt P = (0,5; 0,5; 1) angreift, damit die drei Drehmomente sich gegenseitig aufheben? Geben sie die Lösungsmenge für $\vec{F}_3$ an! Nehmen Sie eine beliebige Lösung der Lösungsmenge und führen Sie damit eine Probe durch!

Lösung:

a) $\vec{M}_{F1} = \vec{r} \times \vec{F}_1$ mit $\vec{r} = \overrightarrow{0E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{M}_{F1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 20 \\ -100 \end{pmatrix} \text{[Nm]}$$

b) $\vec{M}_{F3} = -\left(\vec{M}_{F1} + \vec{M}_{F2}\right) = \begin{pmatrix} -170 \\ -30 \\ 100 \end{pmatrix}$ mit $\overrightarrow{M_{F2}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{M}_{F3} = \vec{P} \times \vec{F}_3$ mit $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{M}_{F3} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5z - y \\ x - 0,5z \\ 0,5y - 0,5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -170 \\ -30 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Aufstellen der 3 Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l|} (1) & 0{,}5z - y = -170 \\ (2) & x - 0{,}5z = -30 \\ (3) & 0{,}5y - 0{,}5x = 100 \end{array}$$

(3) $x = y - 200$

in (2) $\begin{array}{l} y - 200 - 0{,}5z = -30 \\ y - 0{,}5z = 170 \end{array}$

$\Rightarrow y = 170 + 0{,}5z$
$\Rightarrow x = -30 + 0{,}5z$

$$\vec{F}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : x = y - 200 \wedge y - 0{,}5z = 170 \right\}$$

Verwende z als beliebigen Parameter, da das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist.

$$\vec{F}_3 = \left\{ \vec{u} \in R^3 : \vec{u} = \begin{pmatrix} -30 + 0{,}5z \\ 170 + 0{,}5z \\ z \end{pmatrix} \wedge z \in R \right\} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

6. Berechnen Sie eine allgemeine Formel für den reflektierten Lichtstrahl $\vec{a}$, wenn der einfallende Lichtstrahl $\vec{e}$ an der Ebene E durch den Ursprung mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ reflektiert wird. Das Beispiel zu "Ray Tracing" aus der Vorlesung soll also ohne konkrete Zahlenwerte gerechnet werden.

Lösung:

Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$; $\overrightarrow{n_0} = \vec{n} / |\vec{n}|$

Aus dem Refletionsgesetz folgt für den Cosinus der Winkel der beiden Lichtstrahlen zum Normalenvektor: $\vec{a}\,\overrightarrow{n_0} = -\vec{e}\,\overrightarrow{n_0}$

$\vec{a}$ liegt in der Ebene von $\vec{e}$ und $\overrightarrow{n_0}$: $\vec{a} = k\vec{e} + l\overrightarrow{n_0}$

Da $\vec{a}$ als Einheitsvektor gewählt wurde, kann man dies in die Darstellung von $\vec{a}$ hineinnehmen und hat nur noch einen Parameter m:

$$\vec{a} = \frac{\vec{e} + m\overrightarrow{n_0}}{|\vec{e} + m\overrightarrow{n_0}|} = \frac{\vec{e} + m\overrightarrow{n_0}}{\sqrt{(\vec{e} + m\overrightarrow{n_0})(\vec{e} + m\overrightarrow{n_0})}} = \frac{\vec{e} + m\overrightarrow{n_0}}{\sqrt{(\vec{e}\vec{e} + 2m\vec{e}\overrightarrow{n_0} + m^2\overrightarrow{n_0}\overrightarrow{n_0})}} = \frac{\vec{e} + m\overrightarrow{n_0}}{\sqrt{(1 + 2m\vec{e}\overrightarrow{n_0} + m^2)}}$$

$\vec{a}$ wird nun in die Gleichung aus dem Reflektionsgesetz eingesetzt:

$$\vec{a}\,\vec{n_0} = -\vec{e}\,\vec{n_0} \Rightarrow \vec{a}\vec{n_0} = \frac{\vec{e} + m\vec{n_0}}{\sqrt{\left(1 + 2m\vec{e}\vec{n_0} + m^2\right)}}\vec{n_0} = -\vec{e}\,\vec{n_0} \Leftrightarrow \frac{\vec{e}\vec{n_0} + m}{\sqrt{\left(1 + 2m\vec{e}\vec{n_0} + m^2\right)}} = -\vec{e}\,\vec{n_0}$$

Die Gleichung wird mit dem Nenner multipliziert und dann quadriert:

$$\left(\vec{e}\vec{n_0} + m\right)^2 = \left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2 \left(1 + 2m\vec{e}\vec{n_0} + m^2\right)$$

Diese Gleichung wird nun vereinfacht und schließlich gelöst:

$$\left(\vec{e}\vec{n_0}\right)^2 + 2m\vec{e}\vec{n_0} + m^2 = \left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2 + 2m\left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^3 + m^2\left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2$$

$$2m\vec{e}\vec{n_0} + m^2 = 2m\left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^3 + m^2\left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2$$

$$m\left(2\vec{e}\vec{n_0} + m - 2\left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^3 - m\left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2\right) = 0$$

$$m\left(m - m\left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2 + 2\vec{e}\vec{n_0} - 2\left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^3\right) = 0$$

$$m\left(m\left(1 - \left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2\right) + 2\vec{e}\vec{n_0}\left(1 - \left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2\right)\right) = 0$$

$$m\left(\left(m + 2\vec{e}\vec{n_0}\right)\left(1 - \left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2\right)\right) = 0$$

$$m\left(m + 2\vec{e}\vec{n_0}\right)\left(1 - \left(\vec{e}\,\vec{n_0}\right)^2\right) = 0$$

Das Produkt wird 0, wenn einer der Faktoren 0 wird, also $m = 0 \vee m = -2\vec{e}\vec{n_0}$.

Für $m = 0$ würde sich $\vec{a} = \vec{e}$ ergeben, also ist $m = -2\vec{e}\vec{n_0}$.

Setzt man dies in den Ansatz für $\vec{a}$ ein, erhält man:

$$\vec{a} = \frac{\vec{e} - 2\left(\vec{e}\vec{n_0}\right)\vec{n_0}}{\sqrt{\left(1 - 4\left(\vec{e}\vec{n_0}\right)\left(\vec{e}\vec{n_0}\right) + 4\left(\vec{e}\vec{n_0}\right)^2\right)}} = \underline{\underline{\vec{e} - 2\left(\vec{e}\vec{n_0}\right)\vec{n_0}}}$$

7. Beweisen Sie, daß eine Gruppe $(G, \otimes)$ abelsch ist, wenn für alle $a \in G$ gilt:
$a^2 := a \otimes a = e$. (e neutrales Element).

$$
\begin{aligned}
a \otimes b &= (e \otimes (a \otimes b)) \otimes e && \text{e neutral}\\
&= ((b \otimes b) \otimes (a \otimes b)) \otimes (a \otimes a) && \text{Vor.}\\
&= (b \otimes ((b \otimes a) \otimes (b \otimes a))) \otimes a && \text{Ass. g.}\\
&= (b \otimes e) \otimes a && \text{Vor. für } a \otimes b\\
&= b \otimes a && \text{e neutral}
\end{aligned}
$$

8. Zeigen Sie durch Nachprüfen der in der Definition geforderten Eigenschaften, daß die Menge Fq der quadratischen Funktionen,
$F_q = \{f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a x^2 + b x + c \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\}$, einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet. Innere Verknüpfung ist dabei die Addition zweier solcher Funktionen, äußere Verknüpfung die Multiplikation $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$.
Da die Menge F_q der quadratischen Funktionen Teilmenge der Menge F aller Funktionen ist und F bereits einen Vektorraum bildet, brauchen Sie einige der Vektorraumgesetze für F_q nicht mehr nachzuprüfen, da sie für ganz F gelten.

Lösung:

a) Fq ist nicht leer, z. B. ist $f(x) = 1 x^2 + 3 x + 8$ eine quadratische Funktion.
b) $u(x) = a x^2 + b x + c$; $v(x) = d x^2 + e x + f$; $(u+v)(x) = (a+d) x^2 + (b+e) x + (c+f)$ ist wieder eine quadratische Funktion aus Fq. Also ist + eine innere Verknüpfung auf Fq.
c) Assoziativgesetz gilt für Vektorraum aller Funktionen von **R** nach **R**, also auch für Funktionen aus Fq.
d) Die Funktion $e(x) = 0 x^2 + 0 x + 0$ ist aus Fq und ist andererseits die Nullfunktion.
e) Zu $u(x) = a x^2 + b x + c$ gibt es die inverse Funktion $-u(x) = -a x^2 + (-b) x + (-c)$, die wieder in Fq ist.
f) Kommutativgesetz gilt für Vektorraum aller Funktionen von **R** nach **R**, also auch für Funktionen aus Fq.
g) Äußere Verknüpfung: $(k v)(x) = k a x^2 + k b x + k c$ ist wieder in Fq.
h) Assoziativgesetz für die Multiplikation gilt für Vektorraum aller Funktionen von **R** nach **R**, also auch für Funktionen aus Fq.
i) Distributivgesetz 1 gilt für Vektorraum aller Funktionen von **R** nach **R**, also auch für Funktionen aus Fq.
j) Distributivgesetz 2 gilt für Vektorraum aller Funktionen von **R** nach **R**, also auch für Funktionen aus Fq.
k) Unitäres Gesetz gilt für Vektorraum aller Funktionen von **R** nach **R**, also auch für Funktionen aus Fq.