Lösungen Leistungsnachweis Mathematik I, WS 94/95 (Lineare Algebra)

1. a)
$$\vec{x} * \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -21 \\ -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + (-21) \cdot 2 + (-4) \cdot (-8) = 0$$

b) $\vec{x}$ und $\vec{y}_2$ stehen senkrecht aufeinander, weil ihr Skalarprodukt 0 ist.

c) $\vec{x}$ und $\vec{y}_2$ sind linear unabhängig, da sie senkrecht aufeinander stehen. Deshalb, und weil keiner von ihnen der Nullvektor ist, zeigen sie in verschiedene Richtungen. Zwei Vektoren sind aber linear abhängig, wenn einer von ihnen ein Vielfaches des anderen ist, d. h. die Vektoren die gleiche Richtung haben.

d) Ja, bei r = -42 gilt $2\vec{x} = \vec{y}_{-42}$ womit die Bedingung für lineare Abhängigkeit erfüllt ist.

2. a) Alle Vektoren in U haben eine 0 in der dritten und vierten Koordinate, weil die beiden Vektoren, die U aufspannen, dort eine 0 haben. Da U Eigenraum von α. ist, ist gemäß der Definition von "Eigenraum" $\alpha(\vec{x}) \in U$ für $\vec{x} \in U$. Wenn aber das Bild von $\dot{x}$ ein Vektor in U ist, ist die dritte und vierte Koordinate dieses Bildvektors 0. Damit haben auch die Bilder des ersten und zweiten Basisvektors als dritte und vierte Koordinate eine 0. Die Bilder dieser Vektoren stehen als erste bzw. zweite Spalte in der Abbildungsmatrix A. Die Elemente a_{31}, a_{32}, a_{41} und a_{42} der Abbildungsmatrix A sind damit alle 0.

b) Ansatz nach 2 a): $\alpha(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $\cos\varphi = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a$, wenn φ der Winkel zwischen Vektor und Bildvektor ist. Da die Länge bei Vektoren aus U unverändert bleibt, gilt: $1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + b^2} \quad \Rightarrow \quad b = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wegen der Drehrichtung gilt

$\alpha(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Analog kann berechnet werden $\alpha(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c)
$$\alpha^{-1}(\vec{v}) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha(\alpha^{-1}(\vec{v})) = \alpha(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
. Damit ist der dritte Basisvektor (und alle seine Vielfachen ohne den Nullvektor) Eigenvektor der Abbildung α zum Eigenwert -3. Der dritte Spaltenvektor der Abbildungsmatrix ist damit gleich $\vec{v}$

d)

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & a_{14} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & -3 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{14} \\ 2a_{24} \\ -3+2a_{34} \\ 2a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{14} = 0, a_{24} = 1, a_{34} = 1, a_{44} = 2.$$

Damit ergibt sich als Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Alle Ortsangaben in dieser Aufgabe sind in *Meter* gegeben, alle Kraftangaben in *Newton,* alle Drehmomente in *Newtonmeter*.Der andere Endpunkt E hat die Koordinaten (1; 1; 2). Dort greift eine Kraft an.

a)

$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 20 \\ -100 \end{pmatrix}$. Dieses Drehmoment erzeugt die Kraft $\vec{F}_1$ im Gelenk?

b)

$\vec{M}_3 = -(\vec{M}_1 + \vec{M}_2) = \begin{pmatrix} -170 \\ -30 \\ 100 \end{pmatrix}$. Andererseits gilt

$\vec{M}_3 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5z - y \\ x - 0,5z \\ 0,5y - 0,5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0,5 \\ 1 & 0 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -170 \\ -30 \\ 100 \end{pmatrix}$. Dieses Gleichugssystem kann nicht eindeutig gelöst werden, da die Determinante 0 ist. Durch Äquivalenzumformungen, z. B. "Vertausche erste und dritte Zeile", "Erste Zeile mal -2", "Zweite Zeile minus erste Zeile", ergibt sich das äquivalente Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0,5 \\ 0 & 1 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ -170 \\ 170 \end{pmatrix}$. Die dritte Zeile ist äquivalent zur zweiten Zeile; weglassen. Nimm eine Variable als frei wählbaren Parameter, z. B. x, und drücke die anderen Komponenten mit diesem Parameter aus. Es ergibt sich y = x + 200 und z = 2x + 60. Damit ergibt sich als Lösungsmenge $\left\{ \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} x \\ x+200 \\ 2x+60 \end{pmatrix} : x \in R \right\}$.

Wähle z. B. x = 0. Dann ergibt sich für $\vec{M}_3 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-200 \\ 0-30 \\ 100-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -170 \\ -30 \\ 100 \end{pmatrix} = -(\vec{M}_1 + \vec{M}_2)$. Das stimmt mit dem Ansatz überein.

Punkteverteilung: 1, 2, 3, 2 / 5, 6, 5, 3 / 2, 12