Klausur Mathematik 1, Teil Lineare Algebra, Lösungen

Prüfer:	Prof. Dr. Martin Hulin
Datum:	23. Januar 2002

Aufgaben **(Punkte)**

1. Ein Schatzsucher befindet sich auf einer früheren Pirateninsel. Er hat eine Karte, auf der ein Schatz verzeichnet ist. Er steht genau auf dem in der Karte verzeichneten Startpunkt, einer verrosteten Kanone. Zur besseren Orientierung legt er sich gedanklich ein kartesisches Koordinatensystem fest: x-Achse genau nach Osten, y-Achse genau nach Norden und z-Achse senkrecht nach oben. Den Ursprung legt er in den Startpunkt. Dann folgt er den Anweisungen der Karte: **(13)**

- Wende dich von der N-Richtung 30° gen Osten und gehe 500 m geradeaus.
- Drehe dich nun um 90° im Uhrzeigersinn und gehe 100 m geradeaus.
- Dort triffst du auf eine Treppe die genau nach Westen im 45° Winkel nach unten führt. Steige 40 Stufen hinab. Jede Stufe ist 25 cm breit. Hinter einem losen Mauerstein ist dort das Gold versteckt.

.

a) Geben Sie die drei Wegstrecken als Vektoren im kartesischen Koordinatensystem des Schatzsuchers an! Kreuzen Sie dazu die korrekte Lösung an. (Einheit ist jeweils m)
Hinweis: Auf dem letzten Blatt befindet sich eine Tabelle für Sinus und Cosinus.
1. Wegstrecke:
Koordinaten auf z-Achse: 0, da keine Höhenänderung. => Wegvektor nur in der x-y-Ebene. Wegvektor in Polarkoordinaten: Länge: 500 m, Winkel zur x-Achse: 60°. Umrechnung in kartesische Koordinaten ergibt:

$$\begin{pmatrix} 500\cos 60° \\ 500\sin 60° \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 250\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \bullet\bullet\bullet$$

2. Wegstrecke:
Wegvektor in Polarkoordinaten: Länge: 100 m, Winkel zur x-Achse: -30°. Umrechnung in kartesische Koordinaten ergibt:

$$\begin{pmatrix} 100\cos(-30°) \\ 100\sin(-30°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\sqrt{3} \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet\bullet\bullet$$

3. Wegstrecke:

$$\begin{pmatrix} -40\cdot 0,25 \\ 0 \\ -40\cdot 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \bullet\bullet\bullet$$

b) An welcher Stelle in seinem Koordinatensystem befindet sich der Schatzsucher, wenn er vor dem losen Mauerstein steht?

$$\begin{pmatrix} 250 \\ 250\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50\sqrt{3} \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240+50\sqrt{3} \\ -50+250\sqrt{3} \\ -10 \end{pmatrix} \bullet\bullet\bullet\bullet$$

2. Für eine lineare Abbildung $\alpha:\mathsf{R}^3 \to \mathsf{R}^3$ soll die Abbildungsmatrix A bestimmt werden: **(12)**

a) Von α ist bekannt, dass der erste Basisvektor der Standardbasis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist. Geben Sie $\alpha(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$ an:

Da der erste Basisvektor ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist, wird er gemäß Definition von Eigenvektor auf sein 3-faches abgebildet, also $\alpha(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ ●●

b) Geben Sie die erste Spalte der Abbildungsmatrix an!
In der Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren als Spalten

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 3 & & \\ \hline 0 & & \\ \hline 0 & & \end{array}\right)$$ ●●

c) Der Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ wird auf $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ abgebildet. Geben Sie die zweite Spalte der Abbildungsmatrix an:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline & 1 & \end{array}\right)$$ ●●

d) Der Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ wird auf $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ abgebildet. Berechnen Sie damit die fehlenden Koeffizienten von A und geben Sie die komplette Abbildungsmatrix A an.

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & r\\0 & 1 & s\\0 & 1 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \bullet\bullet \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5+3r\\2+3s\\2+3t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} r=-5/3\\ s=-1/3\\ t=-1\end{matrix} \bullet\bullet\bullet$$

$$A = \begin{pmatrix}3 & 1 & -5/3\\0 & 1 & -1/3\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \bullet$$

3. Eine Fahrradfirma stellt 4 verschiedene Fahrräder her: Das City-Bike **Town2000**, das Mountain-Bike **Peak**, das Rennrad **R900** und das Treckingrad **Tour2000**.
Das Unternehmen will seine Fertigungsstrategie optimieren. Dazu werden folgende Gesichtspunkte in Betracht gezogen: **(15)**

- Bei einer Umfrage bei Fachhändlern wurden als mögliche Absatzzahlen für die 4 Radtypen **7000**, **9000**, **2000** bzw. **3000** ermittelt. Da das Unternehmen auf keinen Fall Räder übrig behalten will, wird beschlossen, von jedem Typ maximal die geschätzte Absatzzahl minus 10% herzustellen.
- Zur Herstellung eines Rades werden bei den 4 Radtypen 5 Arbeitsstunden, 6 Arbeitsstunden, 4 Arbeitsstunden bzw. 5 Arbeitsstunden benötigt. Insgesamt stehen im betrachteten Produktionszeitraum 80000 Arbeitsstunden zur Verfügung.
- Zum Löten oder Schweißen des Rahmens ist eine Richtbank notwendig, in die die Rohre exakt eingespannt werden können. Jedes Rad benötigt **1 Stunde** in der Richtbank. Da es nur 10 Richtbänke gibt, stehen an Richtbankkapazität nur **15000 Stunden** während des Produktionszeitraums zur Verfügung.
- **Peak** und **Tour2000** sind mit hydraulischen Magura-Scheibenbremsen ausgestattet. Davon wurden bereits vorab **9000 Paar** (für Vorder- und Hinterrad) bestellt. Magura hat nun mitgeteilt, dass eine Nachlieferung von zusätzlichen Bremsen nicht möglich ist. Andererseits sollen von den teuren Bremsen keine übrigbleiben, sondern alle verbaut werden.
- Für jedes verkaufte Rad erwirtschaftet das Unternehmen einen Gewinn von **50 Euro**, **80 Euro**, **110 Euro** bzw. **60 Euro** bei den 4 Fahrradtypen.

a) Welche Parameter kann das Unternehmen bei dieser Optimierungsaufgabe verändern? Geben Sie den Parametern von Ihnen gewählte Bezeichnungen.
Das Unternehmen kann die Stückzahlen der einzelnen produzierten Radtypen variieren. Diese werden mit x_i bezeichnet, d. h.
x_1 = Stückzahl produzierter Räder, Typ Town2000
x_2 = St. prod. Räder, Typ Peak; x_3 = St. prod. Räder, Typ R900
x_4 = St. prod. Räder, Typ Tour2000 ●●

b) Geben Sie die Gewinnfunktion an! $g(x) = 50x_1 + 80x_2 + 110x_3 + 60x_4$ ●●

c) Geben Sie ein System von Gleichungen und Ungleichungen an, das das Optimierungsproblem beschreibt.
$x_1 \le 6300$ //gesch�zte Absatzzahlen - 10% ●●●
$x_2 \le 8100$
$x_3 \le 1800$
$x_4 \le 2700$
$5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 80000$ //begrenzte Kapazit�Arbeitsstunden ●●
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 15000$ //begrenzte Kapazit�Richtb�ke ●●
$x_2 + x_4 = 9000$ //alle Scheibenbremsen verbauen ●●
$x_1 \ge 0$ //keine negativen St�kzahlen ●●
$x_2 \ge 0$
$x_3 \ge 0$
$x_4 \ge 0$

4. Gegeben ist die Funktion $f: \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ durch $f(x) = x\sqrt{2}e^{i45^\circ} + 1$, wobei i die imaginäre Einheit ist. **(10)**

a) Wandeln Sie die Funktionsgleichung in die Normalform, d. h. *Realteil* + *i Imaginärteil* um.

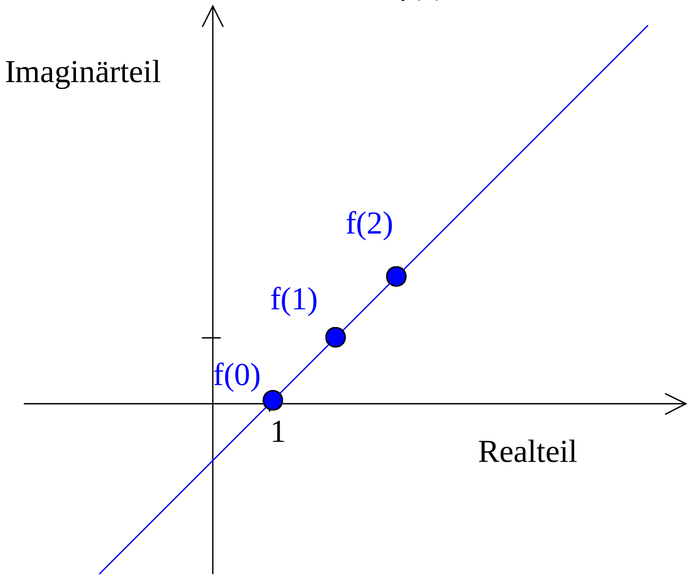
$f(x) = x\sqrt{2}e^{i45^\circ} + 1 = x\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) + 1 \bullet\bullet = x\sqrt{2}(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}) + 1 \bullet\bullet =$

$x + ix + 1 = (x+1) + i\,x \bullet\bullet$

b) Füllen Sie die Wertetabelle aus. ●●

x	0	1	2
f	1	$2 + i$	$3 + 2i$

c) Zeichnen Sie die Ortskurve von $f(x)$ ein. ●●



Wertetabelle von Sinus und Cosinus:

	[illegible]	0	3	4	6	9
	s	0				1
	[illegible]	1				0