Fachhochschule Ravensburg-Weingarten
Fachbereich Elektrotechnik
Prof. Dr. Martin Hulin

Leistungsnachweis Mathematik I (Lineare Algebra)

gemeinsam mit Mathematik I (Analysis)

Wintersemester 1994/95, 1. Februar 1995	
Hilfsmittel:	A ohne programmierbare Taschenrechner
Dauer:	120 Minuten gesamt

1. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -21 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ r \\ -8 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^4$ mit $r \in \mathbb{R}$.

   a) Sei nun r = 2. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{x} * \vec{y}_2$.

   b) Welchen Winkel schließen $\vec{x}$ und $\vec{y}_2$ ein? (Begründung oder Berechnung!)

   c) Sind $\vec{x}$ und $\vec{y}_2$ linear abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort durch das Ergebnis bei Teilaufgabe a) oder b).

   d) Kann der Parameter $r \in \mathbb{R}$ so gewählt werden, daß $\vec{x}$ und $\vec{y}_r$ linear abhängig sind? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

2. Die folgenden Angaben beziehen sich auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$. Von einer linearen Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ist bekannt:

   a) Sei U der von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannte Untervektorraum. U ist Eigenraum von α.

   Was bedeutet dies für die dritte und vierte Komponente des Vektors $\alpha(\vec{x})$ für $\vec{x} \in U$? (Begründung!) Was bedeutet dies für die Elemente a_{31}, a_{32}, a_{41} und a_{42} der Abbildungsmatrix A von α? (Begründung!)

   b) Jeder Vektor aus U wird bei der Abbildung α um 45° gedreht, seine Länge bleibt gleich. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird dabei zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hingedreht. Geben Sie $\alpha(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ und $\alpha(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ an. (Berechnung oder Begründung!). Wie sehen dann die ersten beiden Spalten von A aus?
   Hinweis: U ist isomorph zum $\mathbb{R}^2$. Wie sehen dort die Bilder der Standardbasis bei der Drehung um 45° aus?

(bitte wenden)

c) Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor der Abbildung α^{-1} (d. h. der zu α inversen Abbildung) zum Eigenwert $-\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie aus dieser Angabe einen Eigenvektor der Abbildung α und den zugehörigen Eigenwert (Berechnung oder Begründung!). Was bedeutet dies für den dritten Spaltenvektor der Abbildungsmatrix?
Hinweis: Wie sieht $\alpha^{-1}(\vec{v})$ aus? Was ist dann $\alpha(\alpha^{-1}(\vec{v}))$?

d) Es gilt $\alpha(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Geben Sie die Abbildungsmatrix A von α an. Verwenden Sie dazu auch die Ergebnisse der vorigen Teilaufgaben.

3. Alle Ortsangaben in dieser Aufgabe sind in *Meter* gegeben, alle Kraftangaben in *Newton,* alle Drehmomente in *Newtonmeter*. Ein gerader Stab ist an einem Ende in einem Kugelgelenk drehbar gelagert. An dieses Ende wird der Koordinatenursprung eines ortonormalen Koordinatensystems gelegt. Der andere Endpunkt E hat die Koordinaten (1; 1; 2). Dort greift eine Kraft $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix}$ an.

a) Welches Drehmoment erzeugt die Kraft $\vec{F}_1$ im Gelenk?

b) Durch eine zweite Kraft $\vec{F}_2$ wird zusätzlich das Drehmoment $\vec{M}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ erzeugt. Wie muß eine Kraft $\vec{F}_3$ aussehen, die im Punkt P = (0,5; 0,5; 1) angreift, damit die drei Drehmomente sich gegenseitig aufheben? Geben sie die Lösungsmenge für $\vec{F}_3$ an! Nehmen Sie eine beliebige Lösung der Lösungsmenge und führen Sie damit eine Probe durch!

Punkteverteilung (ohne Gewähr): 2, 1, 3, 2 / 5, 6, 5, 3 / 2, 11