Klausur Mathematik 1, Teil Lineare Algebra

Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

Studiengang: ☐ AI ☐ WI

Prüfer:	Prof. Dr. Martin Hulin
Dauer:	90 Minuten gesamt, Lineare Algebra ca. 45 Minuten
Datum:	29. Januar 2005
Hilfsmittel:	Alle auf dem Prüfungsplan angegebenen Hilfsmittel B - K
Kennzahlen:	4005, 1865

Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg durch Angabe aller Zwischenschritte (außer bei der multiple choice Frage), sonst gibt es keine Punkte!

Lösen Sie die Aufgaben bitte direkt auf dem Aufgabenblatt. Extra Blätter sind nicht zulässig.

Die angegebenen Punkte und Bearbeitungszeiten sind unverbindlich.

Bewertung:

Aufgabe	1 (16)	2 (18)	3 (16)		
Punkte					
Summe					

Aufgaben **(Bearbeitungszeit, Punkte)**

1. Gegeben sind die vier Vektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

a) Die vier Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Kreuzen Sie von den unten stehenden Aussagen genau diejenigen an, die notwendig dafür sind, dass $B = \left\{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3; \vec{b}_4\right\}$ eine Basis bilden.

(3 Min; 4 P)

- ☐ Je zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander.
- ☐ Jeder Vektor des $\mathbb{R}^4$ ist als Linearkombination von B darstellbar.
- ☐ Alle vier Vektoren haben die gleiche Länge, nämlich 1.
- ☐ Alle vier Vektoren haben die gleiche Länge, nämlich $\sqrt{2}$.
- ☐ Die vier Vektoren sind linear unabhängig.
- ☐ In jeder Zeile kommt mindestens einmal eine 1 vor.
- ☐ Als Koordinaten der Basisvektoren kommen nur 0; 1 oder -1 vor.

b) Sei ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Standardbasis gegeben, also $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}_S$. Berechnen Sie die Darstellung dieses Vektors bezüglich der Basis B. **(10 Min, 12 P)**

2. Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^2, \vec{v} \neq \vec{0}$ gegeben. Die Projektion eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ auf $\vec{v}$ ist zu berechnen durch $\frac{\vec{v} \bullet \vec{x}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$, wobei $\bullet$ das Skalarprodukt bedeutet.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln für das Skalarprodukt und der Definition von "linearer Abbildung", dass die Abbildung $\alpha(\vec{x}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{x}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$ linear ist. **(8 Min, 8 P)**

b) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ ein Eigenvektor der Abbildung α ist, indem Sie das Bild von $\vec{v}$ berechnen. Wie lautet der zugehörige Eigenwert? **(4 Min, 4 P)**

c) Sei für die Aufgabenteile c) und d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie für diesen Fall die Bilder der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(4 Min, 4 P)**

d) Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von c) die Abbildungsmatrix von α. **(1 Min, 2 P)**

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Folge a_n ist gegeben durch: $\boxed{a_1 = 1;\ \ a_{n+1} = 3a_n - 1;}$
Die ersten fünf Folgenglieder sind demnach 1; 2; 5; 14; 41;
Beweisen Sie die Aussage $\boxed{a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}}$ durch vollständige Induktion. **(15 Min, 16 P)**

4. Gegeben sind die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1{,}5 & y \end{pmatrix}$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Die beiden Matrizen sind invers zueinander, d. h. $B = A^{-1}$. Berechnen Sie x und y. **(5 Min; 6 P)**