Aufgabenblatt 1

Hausaufgaben

1. In die Menge {2, 9, 12} wird das Element 7 hinzugefügt. Zu der entstehenden Menge wird das Element 7 nochmals zugefügt. Von der Ergebnismenge wird mit der Operation "Mengendifferenz" die Menge {2, 7} abgezogen. Geben Sie die Ergebnismenge an!

$\{2, 9, 12\} \cup \{7\} = \{2, 9, 12, 7\}$

$\{2, 9, 12, 7\} \cup \{7\} = \{2, 9, 12, 7\}$

$\{2, 9, 12, 7\} \setminus \{2, 7\} = \{9, 12\}$

2. Seien A und B Mengen. Dann ist die bool'sche Summe A + B definiert durch:
$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

a) Zeigen Sie, dass gilt $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Lösung: Zeige, dass jedes $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ auch in $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ enthalten ist und dass jedes $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ auch in $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ enthalten ist.

Sei $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

1. Fall $x \in A$. Dann ist x nicht in B, denn $(A \cap B)$ ist ausgenommen, also $x \in A \setminus B$ und damit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2. Fall $x \in B$. Dann ist x nicht in A, denn $(A \cap B)$ ist ausgenommen, also $x \in B \setminus A$ und damit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Sei $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$:

1. Fall $x \in A \setminus B$. $\Rightarrow x \in A$ und $x \notin B \Rightarrow x \in A \cup B$ und $x \notin A \cap B$, da $A \cap B \subset B$
$\Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2. Fall $x \in B \setminus A$. $\Rightarrow x \in B$ und $x \notin A \Rightarrow x \in A \cup B$ und $x \notin A \cap B$, da $A \cap B \subset A$
$\Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

b) Lösen Sie im Internet die Aufgabe bei http://www.gefilde.de/ashome/vorlesungen/grundwissen/_mengen/mengenoperationen_am_beispiel.html
Bei http://www.gefilde.de/ashome/vorlesungen/grundwissen/grundwissen.html finden Sie auch noch weitere Aufgaben.

Lösung: 1B, 2B, 3D, 4A, 5F, 6C

3. Die Menge $\mathbb{N}$ hat ∞ (unendlich) viele Elemente. Sie wird mit der Menge { -1 } vereinigt. Wieviele Elemente hat die entstehende Menge?

☐ $\infty + 1$ ☒ ∞ ☒ $\aleph_0$ ☐ $\aleph_1$

4. *Arab* sei die Menge aller natürlichen Zahlen, dargestellt mit arabischen Ziffern = {1, 2, ...}.

Röm sei die Menge aller natürlichen Zahlen, dargestellt mit römischen Ziffern = {I, II, ...}.
Die Menge *Arab* ∪ *Röm* ist immer noch abzählbar, d. h. man kann jedem Element eine eindeutige Nummer zuordnen. Geben Sie ein Zählverfahren an, bei dem jedes Element von *Arab* ∪ *Röm* eine Nummer bekommt, d. h. keines ausgelassen wird.

Die arabische Zahl i bekommt die Platznummer $2 \cdot i - 1$, die römische Zahl i bekommt die Platznummer $2 \cdot i$.

Platznummer	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Element aus Arab ∪ Röm	1	I	2	II	3	III	4	IV	...

5. Geben Sie die Potenzmenge der Menge {a, b, c, d} an.

$P(\{a,b,c,d\}) =$
$\{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},$
$\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\},$
$\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\},$
$\{a,b,c,d\}\}$

6. Beweisen Sie durch Aufstellen der Wahrheitstafeln die aussagenlogischen Gesetze:

a) Widerlegung: $z = ((x_1 \to x_2) \wedge \neg x_2) \to \neg x_1$

Widerlegung $z = (\underbrace{\underbrace{(x_1 \to x_2)}_{z_1} \wedge \neg x_2}_{z_2}) \to \neg x_1$

x_1	x_2	z_1	$\neg x_2$	z_2	$\neg x_1$	z
F	F	W	W	W	W	W
F	W	W	F	F	W	W
W	F	F	W	F	F	W
W	W	W	F	F	F	W

immer W, also Tautologie

b) Kettenschluß: $z = ((x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)$

x_1	x_2	x_3	$z_1 = x_1 \to x_2$	$z_2 = x_2 \to x_3$	$z_3 = z_1 \wedge z_2$	$z_4 = x_1 \to x_3$	$z = z_3 \to z_4$
F	F	F	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W	W
F	W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F	W
W	F	W	F	W	F	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	W	W	W	W	W	W	W

7. Geben Sie folgende Formeln der Prädikatenlogik als deutschen Satz wieder. Übersetzen Sie dabei zunächst Formelzeichen für Formelzeichen, formulieren sie dann aber den Inhalt der Formel sinngemäß kurz und prägnant:

a) $\forall n, m \in \mathbb{N}: (n + m \geq n) \wedge (n + m \geq m)$

b) M sei die Menge aller Menschen.
$\forall A, B \in M$: [$\exists$ X, Y $\in$ M: (X Elternteil von A) $\wedge$ (Y Elternteil von B) $\wedge$ (X und Y sind Geschwister)] $\to$ [(A Cousin von B) $\vee$ (A Cousine von B)]

a) Für alle n, m Element aus den natürlichen Zahlen gilt:
„n plus m ist größer oder gleich n" und „n plus m ist größer oder gleich m"

Die Summe zweier natürliche Zahlen ist größer als oder gleich groß wie jeder der beiden Summanden.

b) Für alle ..

Zwei Menschen sind Cousin oder Cousine wenn ein Elternteil des einen Geschwister eines Elternteils des anderen ist.

8. Drücken Sie folgende Gesetze durch eine logische Formeln aus:

a) Das Quadrat einer reellen Zahl ist immer positiv oder Null.

b) Wenn zwei Produkte von je zwei reellen Zahlen den gleichen Wert haben und die ersten Faktoren bei beiden Produkten gleich sind aber nicht 0, dann sind auch die zweiten Faktoren gleich.

a) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$

b) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}:$

$$(a \cdot b = c \cdot d \wedge a = c \wedge a \neq 0) \rightarrow (b = d)$$

oder auch

$\forall a, b, d \in \mathbb{R}:$

$$(a \cdot b = a \cdot d \wedge a \neq 0) \rightarrow (b = d)$$

9. Welche Aussagen sind richtig?
Wenn A endlich und B unendlich ist, dann ist $A \cap B$ endlich. ✓
Wenn A endlich aber B unendlich ist, dann ist $A \cup B$ unendlich ✓
Wenn A endlich ist, dann ist $A \cap B$ endlich. ✓
Wenn A endlich und $A \cup B$ endlich sind, dann ist auch B endlich. ✓
Wenn A endlich ist, dann ist $A \cup B$ endlich. falsch für unendliches B

Aufgaben während der Übungsstunde

10. Geben Sie folgende Menge in beschreibender Form an:
{A, B, C, D, F, H, K, L, NZ, T}
Hinweis: Es handelt sich hier nicht um Buchstaben, die Buchstaben sind Symbole für etwas Anderes, das mit der Hochschule Ravensburg-Weingarten zu tun hat. Schauen Sie z. B. auf die hintere Umschlagseite des Hochschulführers.

Die Menge der Gebäude der Hochschule Ravensburg-Weingarten.

11. Wieviele Elemente hat die Potenzmenge P(M) einer endlichen Menge M mit *m* Elementen?
(Lösung: 2^m)

Um eine beliebige Teilmenge der Menge M zu bilden, hat man für jedes Element von M 2 Möglichkeiten: Es kommt in die Teilmenge oder es kommt nicht hinein. Diese Entscheidung ist für jedes Element unabhängig von den anderen. Damit ergeben sich $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{m \text{ Faktoren}} = 2^m$ Möglichkeiten, verschiedene Teilmengen zu bilden.

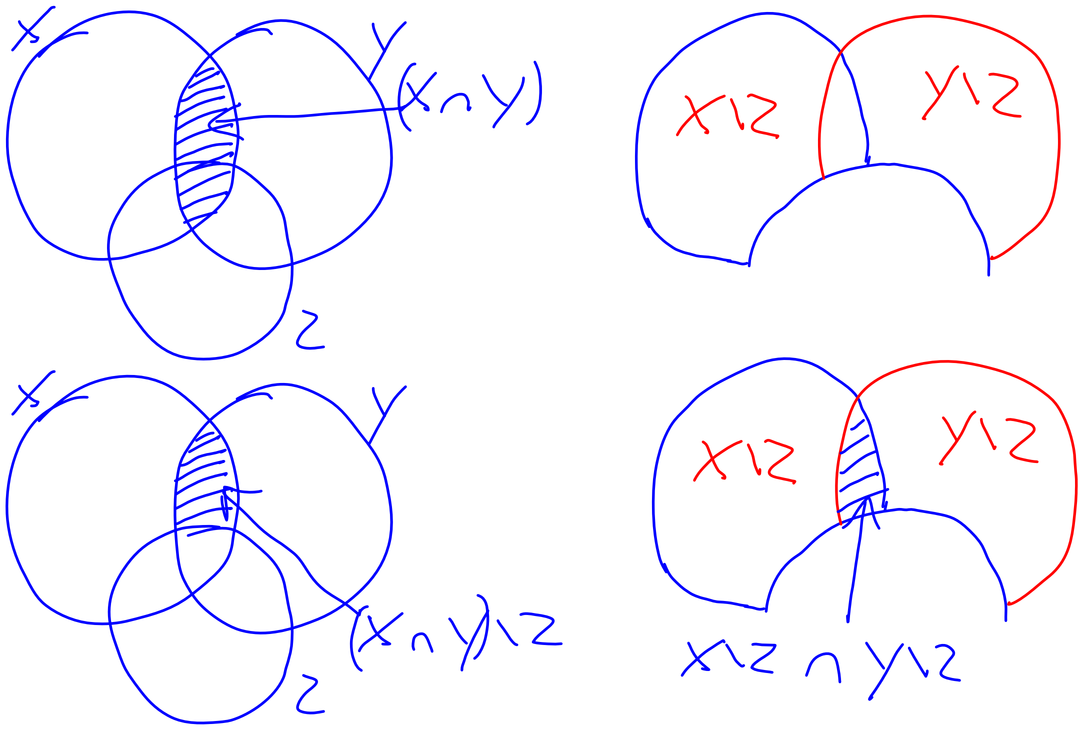
12. Ist bei folgenden Mengen eine Vereinigung oder ein Durchschnitt möglich:
A = Menge aller Dozenten der Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, Hochschule

für Technik und Sozialwesen am 11.10.2006. B = Menge aller Primzahlen

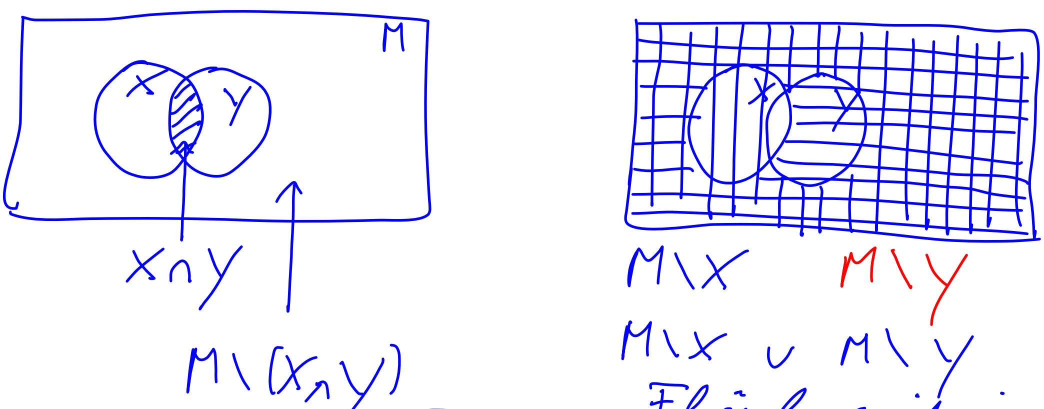
Ja, beides ist möglich. Beim Durchschnitt ergibt sich die leere Menge. Die Vereinigungsmenge ist nicht sehr sinnvoll.

13. Verdeutlichen Sie folgende Gesetze der Mengenlehre durch Venn-Diagramme:

a) $(X \cap Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cap (Y \setminus Z)$



b) $(X \subset M \wedge Y \subset M) \Rightarrow (M \setminus (X \cap Y) = (M \setminus X) \cup (M \setminus Y)$



nicht schraffierte Fläche

Fläche mit irgendeiner Schraffur, rot oder blau,

14. Beweisen Sie: $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

„$\Rightarrow$" Vor.: $A \subset B$, Beh.: $A \cap B = A$

$(x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A) \Rightarrow$

$\cancel{x \in A \overset{\text{Vor}}{\Longrightarrow} x \in B}$ $\quad x \in A \cap B \to x \in A$

$A \subset B \Rightarrow x \in A \to x \in B \Rightarrow x \in A \to x \in A \wedge x \in B$

$\overset{\text{Def von }\cap}{\Longrightarrow} x \in A \to x \in A \cap B$

$((x \in A \cap B \to x \in A) \wedge (x \in A \to x \in A \cap B)) \overset{\text{Def. }\subset}{\Longrightarrow} \cancel{A \cap B = A}$

$A \cap B \subset A \wedge A \subset A \cap B$

$\Rightarrow A \cap B = A$

„$\Leftarrow$" Vor. $A \cap B = A$ Beh. $A \subset B$

$A \cap B = A \Rightarrow \cancel{(x \in A \to} A \subset A \cap B$

$\overset{\text{Def }\subset}{\Longrightarrow} (x \in A \to x \in A \cap B) \overset{\text{Def }\cap}{\Longrightarrow}$

$(x \in A \to x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow$

$(x \in A \to x \in B) \overset{\text{Def }\subset}{\Longrightarrow} A \subset B$

15. Drücken Sie folgenden Sachverhalt durch eine logische Formel aus: Eine Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine positive reelle Zahl δ gibt, so daß für jedes $z \in \mathbb{R}$, das von x weniger als δ entfernt ist, der Funktionswert f(z) weniger als ε von f(x) entfernt ist.

$\forall (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}):$

f stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow$

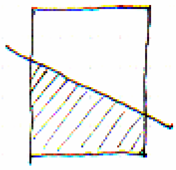
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall z \in \mathbb{R} : |z - x| < \delta \to |f(z) - f(x)| < \varepsilon$

16. Wir nehmen Bleistift und Lineal und zeichnen auf ein Blatt Papier beliebig viele Geraden; es entsteht eine "abstrakte Landkarte". Eine solche nennen wir richtig gefärbt, wenn zwei "Länder" mit einer "gemeinsamen Grenze" verschiedene Farben haben; zwei "gleichgefärbte Länder" dürfen dabei jedoch einen gemeinsamen "Grenzpunkt" besitzen.
Kann jede unserer Landkarten mit zwei Farben richtig gefärbt werden? (Benutzen Sie

vollständige Induktion!)

Beweis durch vollst. Induktion

Induktionsanf. $n=1$



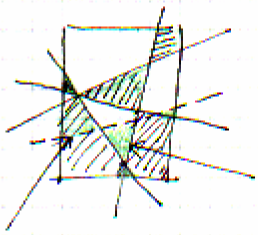
korrekte Färbung möglich

Induktionsschritt $n \to n+1$

I. Vor.: Landkarte mit n Geraden ist richtig gefärbt

I. Beh.: Landkarte mit $n+1$ Geraden (also eine mehr) kann richtig gefärbt werden

Bew.:



nach I. Vor. an jeder Kante Färbebed. erfüllt

An dieser Kante Färbebed. nicht erfüllt

Nimm einen der beiden Teile, in die das Blatt durch die neue Gerade geteilt wird! Färbe sie komplementär! Dann ist in diesem ~~Tei~~ Teil die Färbebedingung an allen ~~Kan~~ alten Grenzen immer noch erfüllt. Im anderen Teil hat sich nichts geändert, alte Grenzen o.k. An der neuen Grenze sind durch das Umfärben eines Teils komplementäre Färbungen ~~leicht~~ auf der einen und anderen Seite der Grenze

17. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

Beh.: $s = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beweis durch vollständige Induktion

Induktionsanfang $n = 1$

l. S. (linke Seite) $= s = 1^2 = 1$

r. S. $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$ = l. S. ✓

Induktionsschritt $n \to n+1$

Induktionsvoraussetzung $s = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Induktionsbehauptung: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

Beweis: l. S. $= (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (n+1)^2 \overset{\text{Ind. Vor.}}{=}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$

$\cancel{\text{r. S.} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}}$

r. S. $= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6}$

$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$ = l. S ✓