Aufgabenblatt 1

Hausaufgaben

1. In die Menge {2, 9, 12} wird das Element 7 hinzugefügt. Zu der entstehenden Menge wird das Element 7 nochmals zugefügt. Von der Ergebnismenge wird mit der Operation "Mengendifferenz" die Menge {2, 7} abgezogen. Geben Sie die Ergebnismenge an!

2. Seien A und B Mengen. Dann ist die bool'sche Summe A + B definiert durch: $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   - a) Zeigen Sie, dass gilt $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
   - b) Lösen Sie im Internet die Aufgabe bei http://www.gefilde.de/ashome/vorlesungen/grundwissen/_mengen/mengenoperationen_am_beispiel.html
     Bei http://www.gefilde.de/ashome/vorlesungen/grundwissen/grundwissen.html finden Sie auch noch weitere Aufgaben.

3. Die Menge ℕ hat ∞ (unendlich) viele Elemente. Sie wird mit der Menge { -1 } vereinigt. Wieviele Elemente hat die entstehende Menge?
   ☐ $\infty + 1$ ☐ ∞ ☐ $\aleph_0$ ☐ $\aleph_1$

4. *Arab* sei die Menge aller natürlichen Zahlen, dargestellt mit arabischen Ziffern = {1, 2, ...}.
   Röm sei die Menge aller natürlichen Zahlen, dargestellt mit römischen Ziffern = {I, II, ...}.
   Die Menge *Arab* ∪ *Röm* ist immer noch abzählbar, d. h. man kann jedem Element eine eindeutige Nummer zuordnen. Geben Sie ein Zählverfahren an, bei dem jedes Element von *Arab* ∪ *Röm* eine Nummer bekommt, d. h. keines ausgelassen wird.

5. Geben Sie die Potenzmenge der Menge {a, b, c, d} an.

6. Beweisen Sie durch Aufstellen der Wahrheitstafeln die aussagenlogischen Gesetze:
   - a) Widerlegung: $z = ((x_1 \to x_2) \wedge \neg x_2) \to \neg x_1$
   - b) Kettenschluß: $z = ((x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)$

7. Geben Sie folgende Formeln der Prädikatenlogik als deutschen Satz wieder. Übersetzen Sie dabei zunächst Formelzeichen für Formelzeichen, formulieren sie dann aber den Inhalt der Formel sinngemäß kurz und prägnant:
   - a) $\forall n, m \in \mathbb{N}: (n + m \geq n) \wedge (n + m \geq m)$
   - b) M sei die Menge aller Menschen.
     $\forall$A, B $\in$ M: [$\exists$ X, Y $\in$ M: (X Elternteil von A) $\wedge$ (Y Elternteil von B) $\wedge$ (X und Y sind Geschwister)] $\to$ [(A Cousin von B) $\vee$ (A Cousine von B)]

8. Drücken Sie folgende Gesetze durch eine logische Formeln aus:
   - a) Das Quadrat einer reellen Zahl ist immer positiv oder Null.
   - b) Wenn zwei Produkte von je zwei reellen Zahlen den gleichen Wert haben und die ersten Faktoren bei beiden Produkten gleich sind aber nicht 0, dann sind auch die zweiten Faktoren gleich.

9. Welche Aussagen sind richtig?
Wenn A endlich und B unendlich ist, dann ist $A \cap B$ endlich.
Wenn A endlich aber B unendlich ist, dann ist $A \cup B$ unendlich
Wenn A endlich ist, dann ist $A \cap B$ endlich.
Wenn A endlich und $A \cup B$ endlich sind, dann ist auch B endlich.
Wenn A endlich ist, dann ist $A \cup B$ endlich.

Aufgaben während der Übungsstunde

10. Geben Sie folgende Menge in beschreibender Form an:
{A, B, C, D, F, H, K, L, NZ, T}
Hinweis: Es handelt sich hier nicht um Buchstaben, die Buchstaben sind Symbole für etwas Anderes, das mit der Hochschule Ravensburg-Weingarten zu tun hat. Schauen Sie z. B. auf die hintere Umschlagseite des Hochschulführers.

11. Wieviele Elemente hat die Potenzmenge P(M) einer endlichen Menge M mit *m* Elementen?
(Lösung: 2^m)

12. Ist bei folgenden Mengen eine Vereinigung oder ein Durchschnitt möglich:
A = Menge aller Dozenten der Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, Hochschule für Technik und Sozialwesen am 10.10.2006. B = Menge aller Primzahlen

13. Verdeutlichen Sie folgende Gesetze der Mengenlehre durch Venn-Diagramme:

    a) $(X \cap Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cap (Y \setminus Z)$

    b) $(X \subset M \wedge Y \subset M) \Rightarrow (M \setminus (X \cap Y) = (M \setminus X) \cup (M \setminus Y)$

14. Beweisen Sie: $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

15. Drücken Sie folgenden Sachverhalt durch eine logische Formel aus: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig an der Stelle $x \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine positive reelle Zahl δ gibt, so daß für jedes $z \in \mathbb{R}$, das von x weniger als δ entfernt ist, der Funktionswert f(z) weniger als ε von f(x) entfernt ist.

16. Wir nehmen Bleistift und Lineal und zeichnen auf ein Blatt Papier beliebig viele Geraden; es entsteht eine "abstrakte Landkarte". Eine solche nennen wir richtig gefärbt, wenn zwei "Länder" mit einer "gemeinsamen Grenze" verschiedene Farben haben; zwei "gleichgefärbte Länder" dürfen dabei jedoch einen gemeinsamen "Grenzpunkt" besitzen.
Kann jede unserer Landkarten mit zwei Farben richtig gefärbt werden? (Benutzen Sie vollständige Induktion!)

17. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n (n + 1) (2 n + 1) / 6$