Klausur Mathematik 1, Teil Lineare Algebra
Musterlösung

Prüfer:	Prof. Dr. Martin Hulin
Dauer:	90 Minuten gesamt, Lineare Algebra ca. 45 Minuten
Datum:	29. Januar 2005
Hilfsmittel:	Alle auf dem Prüfungsplan angegebenen Hilfsmittel B - K
Kennzahlen:	4005, 1865, 1400

Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg durch Angabe aller Zwischenschritte (außer bei den multiple choice Fragen), sonst gibt es keine Punkte!

Aufgaben **(Bearbeitungszeit, Punkte)**

1. Gegeben sind die vier Vektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}; \vec{b}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \vec{b}_4 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix};$

a) Die vier Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Kreuzen Sie von den unten stehenden Aussagen genau diejenigen an, die notwendig dafür sind, dass $B = \{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3; \vec{b}_4\}$ eine Basis bilden.

(3 Min; 4 P)

- ☐ Je zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander.
- ☒ Jeder Vektor des $\mathbb{R}^4$ ist als Linearkombination von B darstellbar.
- ☐ Alle vier Vektoren haben die gleiche Länge, nämlich 1.
- ☐ Alle vier Vektoren haben die gleiche Länge, nämlich $\sqrt{2}$.
- ☒ Die vier Vektoren sind linear unabhängig.
- ☐ In jeder Zeile kommt mindestens einmal eine 1 vor.
- ☐ Als Koordinaten der Basisvektoren kommen nur 0; 1 oder -1 vor.

b) Sei ein Vektor $\vec{v}$ bezüglich der Standardbasis gegeben, also $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}_S$. Berechnen Sie die Darstellung dieses Vektors bezüglich der Basis B. **(10 Min, 12 P)**

Gesucht sind die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 von $\vec{v}$ bezüglich B, d. h.

$$x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -I\\ \\ \end{matrix} \quad \bullet\bullet\bullet$$

Dieses LGS kann z. B. mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden.

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&2&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3-v_1\\v_4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ -II\end{matrix} \quad \bullet\bullet$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B = \left.\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 - v_1 \\ v_4 - v_2 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} \\ \\ :2 \\ :2 \end{matrix} \bullet\bullet$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B = \left.\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \frac{1}{2}(v_3 - v_1) \\ \frac{1}{2}(v_4 - v_2) \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} +III \\ +IV \\ \\ \\ \end{matrix} \bullet\bullet$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v_1 + v_3) \\ \frac{1}{2}(v_2 + v_4) \\ \frac{1}{2}(v_3 - v_1) \\ \frac{1}{2}(v_4 - v_2) \end{pmatrix} \bullet\bullet$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v_1 + v_3) \\ \frac{1}{2}(v_2 + v_4) \\ \frac{1}{2}(v_3 - v_1) \\ \frac{1}{2}(v_4 - v_2) \end{pmatrix}_B \bullet = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}_S$$

2. Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^2, \vec{v} \neq \vec{0}$ gegeben. Die Projektion eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ auf $\vec{v}$ ist zu berechnen durch $\frac{\vec{v} \bullet \vec{x}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$, wobei $\bullet$ das Skalarprodukt bedeutet.

   a) Zeigen Sie mit Hilfe der Regeln für das Skalarprodukt und der Definition von "linearer Abbildung", dass die Abbildung $\alpha(\vec{x}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{x}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}$ linear ist. **(8 Min, 8 P)**

   Es muss für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ und $k \in \mathbb{R}$ gelten $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y})$ und $\alpha(k\vec{x}) = k\alpha(\vec{x})$

$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) \bullet = \frac{\vec{v} \bullet (\vec{x} + \vec{y})}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v} \bullet \underset{\text{Distributivgesetz von } \bullet}{=} \frac{\vec{v} \bullet \vec{x} + \vec{v} \bullet \vec{y}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v} \bullet = \frac{\vec{v} \bullet \vec{x}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v} + \frac{\vec{v} \bullet \vec{y}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v} \bullet = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y}) \bullet$$

$$\alpha(k\vec{x}) \bullet = \frac{\vec{v} \bullet (k\vec{x})}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v} \underset{\text{Assoziativgesetz von } \bullet}{=} \frac{k(\vec{v} \bullet \vec{x})}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v} \bullet = k \frac{\vec{v} \bullet \vec{x}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v} = k\alpha(\vec{x}) \bullet$$

   Somit sind beide geforderten Gesetzmäßigkeiten erfüllt, es handelt sich um eine lineare Abbildung.

b) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ ein Eigenvektor der Abbildung α ist, indem Sie das Bild von $\vec{v}$ berechnen. Wie lautet der zugehörige Eigenwert? **(4 Min, 4 P)**

$\alpha(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\bullet\vec{v}}{\vec{v}\bullet\vec{v}}\vec{v} = 1\vec{v}$ ●● und $\vec{v} \neq \vec{0}$ ●. Dies ist genau die Definition eines Eigenvektors. Der Eigenwert ist 1 ●.

c) Sei für die Aufgabenteile c) und d) $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie für diesen Fall die Bilder der Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. **(4 Min, 4 P)**

$$\alpha\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \bullet\bullet \text{ und } \alpha\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \bullet\bullet$$

d) Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von c) die Abbildungsmatrix von α. **(1 Min, 2 P)**

In der Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Basisvektoren als Spalten. Damit lautet die Abbildungsmatrix $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$ ●●

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Folge a_n ist gegeben durch: $\boxed{a_1 = 1;\ a_{n+1} = 3a_n - 1;}$

Die ersten fünf Folgenglieder sind demnach 1; 2; 5; 14; 41;

Beweisen Sie die Aussage $\boxed{a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}}$ durch vollständige Induktion. **(15 Min, 16 P)**

Induktionsverankerung: n = 1 ●

linke Seite = $a_1 = 1$ ●

rechte Seite = $\frac{3^{n-1}+1}{2} = \frac{3^{1-1}+1}{2} = \frac{3^0+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$ ●

linke Seite = rechte Seite; die Formel stimmt also für n = 1. ●

Induktionsschritt: n → n + 1 ●

Induktionsvoraussetzung: $a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}$ ●

Induktionsbehauptung: $a_{n+1} = \frac{3^{n+1-1}+1}{2} = \frac{3^n+1}{2}$ ●●

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$a_{n+1} = 3a_n - 1 \bullet\bullet \overset{Ind.vor.}{=} 3\frac{3^{n-1}+1}{2} - 1 \bullet\bullet\bullet = \frac{3\cdot 3^{n-1}+3}{2} - \frac{2}{2} \bullet = \frac{3^n+3-2}{2} \bullet = \frac{3^n+1}{2} \bullet$$