Klausur Mathematik 1, Teil Lineare Algebra

Name:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Prüfer:	Prof. Dr. Martin Hulin
Dauer:	90 Minuten gesamt, Lineare Algebra ca. 45 Minuten
Datum:	22. Januar 2003
Hilfsmittel:	Alles ohne programmierbare Taschenrechner
Kennzahlen:	4005, 1865, 1400

Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg durch Angabe aller Zwischenschritte (außer bei den multiple choice Fragen), sonst gibt es keine Punkte!

Lösen Sie die Aufgaben bitte direkt auf dem Aufgabenblatt.

Bewertung:

Aufgabe	1 (8)	2 (12)	3 (12)	4 (18)	
Punkte					
Summe					

Aufgaben **(Punkte)**

1. Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sind die Mengen E und F gegeben. Sie können als Ebenen interpretiert werden.

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$$

$$F = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ t, u \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$$

a) Stellen Sie eine Vektorgleichung auf, um die Schnittmenge von E und F zu berechnen. **(2)**

b) Wandeln Sie die Gleichung aus a) in ein Lineares Gleichungssystem in Matrixform um.
Das LGS brauchen Sie <u>nicht</u> lösen! **(2)**

c) Welche Vektoren ergeben sich für $\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bei E bzw. F? Ist dies demnach eine Lösung des LGS? **(4)**

2. Gegeben ist das folgende Lineare Gleichungssystem für $\vec{z} \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge des LGS mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. **(10)**

b) Interpretieren Sie die Lösungsmenge geometrisch! Es handelt sich um

☐ die leere Menge	☐ einen Punkt	☐ eine Strecke	☐ eine Gerade
☐ ein Viereck	☐ eine Ebene	☐ einen Quader	☐ ganz $\mathbb{R}^4$

(2)

3. Für eine lineare Abbildung $\alpha : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ soll die Abbildungsmatrix A bestimmt werden:

a) Wie viele Zeilen und wie viele Spalten hat die Abbildungsmatrix A?

________ Zeilen und _________ Spalten **(2)**

b) Von α ist bekannt, dass der erste Basisvektor der Standardbasis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ abgebildet wird. Geben Sie die erste Spalte der Abbildungsmatrix an! **(2)**

c) Der zweite Basisvektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Was ist dann gemäß der Definition von Eigenvektoren $\alpha(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})$? **(2)**

$\alpha(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

d) Den Bildvektor des dritten Basisvektors dürfen Sie sich selbst aussuchen. Er muss aber so gewählt werden, dass die 3 Bildvektoren der Aufgabenteile b), c) und d) linear abhängig sind. **(4)**

$\alpha(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) =$

e) Geben Sie nun die gesamte Abbildungsmatrix A an. **(2)**

4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Gegeben ist die folgende Aussage: $2^n > n^2$.
Die Aussage gilt nicht für alle n, sondern nur für $n = 1$ und $n \geq 5$.
Beweisen Sie die Aussage für $n \geq 5$ durch vollständige Induktion. Sie können dabei die Ungleichung

$$n^2 > 2n + 1 \text{ für } n > 2$$

benutzen. **(18)**