Aufgabenblatt 5

Hausaufgaben

1. Bei welcher Suchanfrage wird der folgende Hilfetext als Treffer angezeigt, wenn die Grenze für cos φ bei 0,5 liegt. Vor dem Vergleich werden die Füllwörter "von", "als", "Sie", "ich", alle Artikel (ein, eine, eines, …, der, die, das, des, den, …), "im", "auf", "dann", "und", "oder", "wie", alle Formen von "sein" (ist, bin, wird, war, …) aus den Hilfetexten und den Suchtexten gestrichen und die Wörter auf ihren Wortstamm zurückgeführt, z. B. "durchgestrichen" auf "durchstreichen".
Hilfetext:
"Formatieren von Text als durchgestrichen:
Markieren Sie den Text, der geändert werden soll.
Klicken Sie im Menü Format auf Zeichen und dann auf die Registerkarte Schriftart.
Aktivieren Sie das Kontrollkästchen Durchgestrichen oder Doppelt durchgestrichen."

a) Suchanfrage 1: "Wie kann ich Text als durchgestrichen markieren?"

b) Suchanfrage 2: " Kann ein Teil eines Textes separat vergrößert werden?"

Lösung: Die drei Texte werden in Vektoren umgewandelt: (Leerfelder bedeuten 0)

Wörter	Hilfetext	Suchtext1	Suchtext2
aktivieren	1		
doppelt	1		
durchstreichen	3	1	
Format	1		
formatieren	1		
ändern	1		
klicken	1		
können		1	1
Kontrollkästchen	1		
markieren	1	1	
Menü	1		
Registerkarte	1		
Schriftart	1		
separat			1
sollen	1		
Teil			1
Text	2	1	1
vergrößern			1
Zeichen	1		

Für die drei Vektoren gilt:

$$\left|Hilfetext\right| = \sqrt{13\cdot 1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{26} = 5{,}099$$

$$\left|Suchtext1\right| = \sqrt{4\cdot 1^2} = 2$$

$$\left|Suchtext2\right| = \sqrt{5\cdot 1^2} = \sqrt{5} = 2{,}236$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{Hilfetext\bullet Suchtext1}{\left|Hilfetext\right|\left|Suchtext1\right|} = \frac{3+1+2}{\sqrt{26}\cdot 2} = \frac{3}{\sqrt{26}} = 0{,}588>0{,}5$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{Hilfetext \bullet Suchtext2}{|Hilfetext||Suchtext2|} = \frac{2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{5{,}099\cdot 2{,}236} = 0{,}175<0{,}5$$

Der Hilfstext wird also bei Suchtext1 bei der Grenze von 0,5 als Treffer angezeigt, bei Suchtext2 dagegen nicht, weil er nicht ähnlich genug ist.

2. Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\-11\\-10\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\6\\8\\4\end{pmatrix}$ linear abhängig? Bilden sie eine Basis?

Lösung:

Ja, sie sind linear abhängig, denn mit dem Ansatz gemäß Definition erhält man das LGS

$$k_1\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\1\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}-8\\-11\\-10\\-2\end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix}9\\6\\8\\4\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{|rrrrrr|}\hline 1 & 0 & -8 & 9 & 0 & \\ 3 & -4 & -11 & 6 & 0 & -3I \\ -2 & 0 & -10 & 8 & 0 & +2I \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 & \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|rrrrrr|}\hline 1 & 0 & -8 & 9 & 0 & \\ 0 & -4 & 13 & -21 & 0 & \\ 0 & 0 & -26 & 26 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 & +1/4\,II \\ \hline\end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{|rrrrrr|}\hline 1 & 0 & -8 & 9 & 0 & \\ 0 & -4 & 13 & -21 & 0 & \\ 0 & 0 & -26 & 26 & 0 & \\ 0 & 0 & 5/4 & -5/4 & 0 & +5/104\,III \\ \hline\end{array} \rightarrow \begin{array}{|rrrrr|}\hline 1 & 0 & -8 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & -26 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen, nicht nur die triviale mit lauter Nullen, z. B.
$k_4 = 1, k_3 = -1, k_2 = 2, k_1 = 1$, also sind die Vektoren linear abhängig.

Da die Vektoren linear abhängig sind, können sie keine Basis bilden.

3. Sind die Vektoren f(x) = 3 x^2 + 2 x - 7 und g(x) = -5 x + 1 des Vektorraums Fq aus Aufgabe 8, Aufgabenblatt 4 linear abhängig?

Lösung:
Nein! f und g linear abhängig genau dann wenn k f + j g = 0 ohne dass k und j beide 0 sind.

Ansatz k f(x) + j g(x) = e(x) = 0 für alle x aus $\mathbb{R}$.

k f(x) + j g(x) = k (3 x^2 + 2 x – 7) + j (-5 x + 1) = x^2 (3 k) + x (2 k – 5 j) + (-7 k + j) = 0 f. a. x
Dies soll für die ganzen Funktionen gelten, d. h. für alle x, z. B. auch für x = 0 und x = 0,2.
x = 0,2: 0,12 k + 0,4 k – j – 7 k + j = - 6,48 k = 0 $\Rightarrow$ k = 0
x = 0: - 7 k + j = (einsetzen von k = 0) j = 0 $\Rightarrow$ j = 0
Also müssen k und j gleichzeitig 0 sein. Damit sind f und g linear unabhängig.

4. Sind die Vektoren f(x) = 3 x^2 + 2 x - 7, g(x) = 2 x^2 + x + 1 und h(x) = 5 x^2 + 3 x - 6 des Vektorraums Fq aus Aufgabe 8, Aufgabenblatt 4 linear abhängig?

Lösung:
Ja, denn 1 f +1 g – 1 h = 0 für alle x. Diese Linearkombination der Funktionen f, g und h ergibt also die Nullfunktion, ohne dass alle Koeffizienten 0 sind. Das ist aber die Definition von "linear abhängig".

5. Geben Sie eine möglichst einfache Basis des Vektorraums Fq aus Aufgabe 8, Aufgabenblatt 4 an.

Lösung:
Die Funktionen u(x) = x^2, v(x) = x, w(x) = 1 bilden eine Basis von Fq.

6. Herr Krösus möchte sein Kapital von 110.000 EURO in Fonds anlegen. Er hat sich drei Fonds herausgesucht: Adabas, Unitrust, und Exofond. Diese Fonds investieren in Aktien, Industrieanleihen und Staatsanleihen.

Der Fondmanager von Adabas hat 80% des Fondvermögens in Aktien, 10% in Industrieanleihen und 10% in Staatsanleihen angelegt. Der Kurs von Adabas steht bei 23 Euro/Stück.

Der Fondmanager von Unitrust hat 10% des Fondvermögens in Aktien, 70% in Industrieanleihen und 20% in Staatsanleihen angelegt. Der Kurs von Unitrust steht bei 17 Euro/Stück.

Der Fondmanager von Exofond hat 10% des Fondvermögens in Industrieanleihen und 90% in Staatsanleihen angelegt. Der Kurs von Exofond steht bei 47 Euro/Stück.

Herr Krösus will eine Aufteilung seines Kapitals in 50.000 EURO für Aktien, 23.000 EURO für Industrieanleihen und 37.000 EURO für Staatsanleihen erreichen. Wie viel Stück muss er von den einzelnen Fonds kaufen, um diese Aufteilung zu erreichen?

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, mit dem die Stückzahlen ermittelt werden können. (Es können auch Bruchteile von Stücken gekauft werden.)

Lösung:

Die Stücke, die Herr Krösus von den Fonds Adabas, Unitrust, bzw. Exofond, seien mit x_1, x_2 bzw. x_3 bezeichnet. Der Wert an Aktien, den er mit dieser Aufteilung seines Kapitals erhält, beträgt $0{,}8 \cdot 23 \cdot x_1 + 0{,}10 \cdot 17 \cdot x_2$. Dieser Anteil soll 50000 € sein. Damit ergibt sich als Gleichung (1): $0{,}8 \cdot 23 \cdot x_1 + 0{,}10 \cdot 17 \cdot x_2 = 50000$. Analog ergeben sich die Gleichungen (2) bzw. (3) für Industrie- bzw. Staatsanleihen. Insgesamt ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllllll}
(1) & 0{,}8 \cdot 23 \cdot x_1 & + & 0{,}1 \cdot 17 \cdot x_2 & & & = & 50000 \\
(2) & 0{,}1 \cdot 23 \cdot x_1 & + & 0{,}7 \cdot 17 \cdot x_2 & + & 0{,}1 \cdot 47 \cdot x_3 & = & 23000 \\
(3) & 0{,}1 \cdot 23 \cdot x_1 & + & 0{,}2 \cdot 17 \cdot x_2 & + & 0{,}9 \cdot 47 \cdot x_3 & = & 37000
\end{array}$$

Lösen mit dem Gauß-Algorithmus liefert: $x_1 = 2608{,}7$; $x_2 = 1176{,}47$; $x_3 = 638{,}298$;

Übungsaufgaben in Übungsstunde:

7. Betrachten Sie die Relation "ist linear abhängig von" auf dem Vektorraum **V ohne den Nullvektor**. Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ stehen demnach in Relation zueinander, wenn sie linear abhängig sind.
   a) Geben Sie ein möglichst einfaches Kriterium für die lineare Abhängigkeit von **zwei** Vektoren an.
   b) Zeigen Sie, daß Relation "ist linear abhängig von" eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung:

a) Zwei Vektoren aus Vektorraum V ohne den Nullvektor sind linear abhängig, wenn beide in die gleiche Richtung zeigen, d. h. der eine ein Vielfaches des anderen ist.

b) Die Relation "ist linear abhängig von", abgekürzt *ilav* ist eine Äquivalenzrelation, weil sie reflexif ist: $\vec{v}\ ilav\ \vec{v}$, weil $\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$

sie symmetrisch ist: $\vec{v}\ ilav\ \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = k\vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{k}\vec{v} \Rightarrow \vec{w}\ ilav\ \vec{v}$

sie transitiv ist:
$\vec{v}\ ilav\ \vec{w}, \vec{w}\ ilav\ \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = k\vec{w}, \vec{w} = j\vec{u} \Rightarrow \vec{v} = k\vec{w} = k(j\vec{u}) = (k \cdot j)\vec{u} \Rightarrow \vec{v}\ ilav\ \vec{u}$

8. Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -21 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{y}(r) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ r \\ -8 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^4$ mit r $\in \mathbb{R}$.
   a) Sei nun r = 2. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{x} * \vec{y}(2)$.
   b) Welchen Winkel schließen $\vec{x}$ und $\vec{y}(2)$ ein? (Begründung oder Berechnung!)
   c) Sind $\vec{x}$ und $\vec{y}(2)$ linear abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort durch das Ergebnis bei Teilaufgabe a) oder b).
   d) Kann der Parameter r $\in \mathbb{R}$ so gewählt werden, daß $\vec{x}$ und $\vec{y}(r)$ linear abhängig sind? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -21 \\ -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 + 8 - 42 + 32 = 0$

b) Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander, da das Skalarprodukt 0 ist.

c) Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn einer das Vielfache des anderen ist. Das ist nur möglich (beide Vektoren sind vom Nullvektor verschieden), wenn sie in die gleiche Richtung zeigen, d. h. der Winkel zwischen ihnen 0° oder 180° beträgt. Hier ist aber der Winkel 90°. Daher können die beiden Vektoren nicht linear abhängig sein.

d) Ja, für r = - 42 gilt: $2\vec{x} = \vec{y}_{-42}$. Damit sind die beiden Vektoren linear abhängig, da einer das Vielfache des anderen ist.

9. Zeigen Sie: Die Vektoren $\vec{a}_1$ bis $\vec{a}_4$ bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^4$? Welche Koordinaten hat $\vec{b}$ bezüglich dieser Basis?

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\\3\\2\end{pmatrix}.$$

Lösung:

Ja, denn die Vektoren sind linear unabhängig:

$$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow k_4 = k_3 = k_2 = k_1 = 0$$ und man kann jeden Vektor mit ihnen darstellen, denn für $\vec{v} = \begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}$ gilt: $\vec{v} = (p-q)\vec{a}_1 + (q-r)\,\vec{a}_2 + (r-s)\,\vec{a}_3 + s\vec{a}_4$. Speziell gilt: $\vec{b} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4$

10. Der Greifarm eines Roboters kann sich in x-, y- und z-Richtung bewegen. Zusätzlich kann der Greifarm gedreht werden (0° bis 360°) und die Greifzangen geschlossen werden (Zangenabstand 0 mm bis 80 mm). Der Roboter besitzt 6 Schrittmotoren die pro Schritt folgendes bewirken:
1. Schrittmotor: 0,1 mm in x-Richtung und 0,2 mm in y-Richtung
2. Schrittmotor: - 0,1 mm in y-Richtung und 0,1 mm in z-Richtung
3. Schrittmotor: 0,1 mm in x-Richtung, 0,1 mm in y-Richtung und 0,2 mm in z-Richtung
4. Schrittmotor: je 1 mm in x-, y- und z-Richtung, Drehung um 0,1°
5. Schrittmotor: Drehung um 0,5°, Zangenabstand + 0,1 mm
6. Schrittmotor: Zangenabstand – 0,05 mm

Der Roboter soll von der Ausgangsposition Raumkoordinaten (0; 0; 0), Drehung 0°, Zangenabstand 5 mm in die Position mit den Raumkoordinaten (1223; 144; 533), Drehung 60°, Zangenabstand 0 mm bewegt werden. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, mit dem die Ansteuerung der Schrittmotoren berechnet werden kann. Bestimmen Sie die Lösung.

Lösung:

Als unabhängige Parameter, die es zu ermitteln gilt, stehen die Schrittzahlen für jeden der 6 Schrittmotoren zur Verfügung. Diese seien mit $s_1, s_2, \ldots s_6$ bezeichnet. Für jede der 5 Dimensionen (x, y, z, Drehung, Zangenabstand) ergibt sich eine Gleichung der Form:

$$Ausgangswert + s_1 \cdot Effekt\_Schrittmotor1 + \cdots + s_6 \cdot Effekt\_Schrittmotor6 = Endwert$$

Gleichung für x: $0 + 0{,}1s_1 + 0{,}1s_3 + 1s_4 = 1223$

Gleichung für y: $0 + 0{,}2s_1 - 0{,}1s_2 + 0{,}1s_3 + 1s_4 = 144$

Gleichung für z: $0 + 0{,}1s_2 + 0{,}2s_3 + 1s_4 = 533$

Gleichung für Drehung: $0+0,1s_4+0,5s_5=60$

Gleichung für Zangenabstand: $5+0,1s_5-0,05s_6=0$

Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,1 & 1 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,1 & 0,1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & -0,05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1223 \\ 144 \\ 533 \\ 60 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{cccccc|c|l} 0,1 & 0 & 0,1 & 1 & 0 & 0 & 1223 & \\ 0,2 & -0,1 & 0,1 & 1 & 0 & 0 & 144 & -2I \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 1 & 0 & 0 & 533 & \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,5 & 0 & 60 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & -0,05 & -5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c|l} 0,1 & 0 & 0,1 & 1 & 0 & 0 & 1223 & \\ 0 & -0,1 & -0,1 & -1 & 0 & 0 & -2302 & \\ 0 & 0,1 & 0,2 & 1 & 0 & 0 & 533 & +II \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,5 & 0 & 60 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & -0,05 & -5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 0,1 & 0 & 0,1 & 1 & 0 & 0 & 1223 \\ 0 & -0,1 & -0,1 & -1 & 0 & 0 & -2302 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & -1769 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,5 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & -0,05 & -5 \end{array}$$

Um den im Skript vorgestellten Gauß-Algorithmus weiter anwenden zu können, können Sie proforma eine 0-Zeile einfügen. Dann kann $s_6 = r$ als freier Parameter aus den reellen Zahlen gewählt werden. Beim sukzessiven Einsetzen ergibt sich:

$s_6 = r \in \mathbb{R}$

$s_5 = (-5+0,05r)/0,1 = -50+0,5r$

$s_4 = (60-0,5s_4)/0,1 = 600-5s_4 = 600+250-2,5r = 850-2,5r$

$s_3 = -1769/0,1 = -17690$

$s_2 = (-2302+0,1s_3+s_4)/-0,1 = 23020-1s_3-10s_4 = 23020+17690-8500+25r = 32210-25r$

$s_1 = (1223-0,1s_3-s_4)/0,1 = 12230-1s_3-10s_4 = 12230+17690-8500+25r = 21420+25r$

Es gibt unendlich viele Lösungen:

$$\text{Lösungsmenge} = \left\{ \vec{s} \in \mathbb{R}^6 : \vec{s} = \begin{pmatrix} 21420 \\ 32210 \\ -17690 \\ 850 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 25 \\ -25 \\ 0 \\ -2{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$$

Davon sind in der Realität nicht alle Lösungen anwendbar. Da es keine halben Schritte gibt, muss r eine gerade ganze Zahl sein. Außerdem muss beim Zangenabstand darauf geachtet werden, dass er die zulässigen Grenzen nie überschreitet.

11. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems!

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{array}{|ccccc|l} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & \\ 2 & -1 & 4 & -1 & 0 & -2I \\ -1 & 5 & 7 & -4 & 0 & +I \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccccc|l} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 0 & \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 0 & -II \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccccc|} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Nur 2 gültige Zeilen, freie Parameter $x_4 = r \in \mathbb{R}, \quad x_3 = s \in \mathbb{R}$

Einsetzen in II: $x_2 = (-6s + 3r)\frac{1}{3} = -2s + r$

Einsetzen in I: $x_1 = -4s + 2r + s - r = -3s + r$

$$\text{Lösungsmenge } L = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3s + r \\ -2s + r \\ s \\ r \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge s \in \mathbb{R} \wedge r \in \mathbb{R} \right\}$$