Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Научно-образовательная корпорация ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по расчетно-графической работе №3

По дисциплине «Математический анализ» (второй семестр)

Выполнили Студенты:

Лазарчук Андрей

Стас Меньших

Разуваев Лев

Айдар Фархутдинов

Максим Казаев

Преподаватель:

Константин Владимирович Правдин

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1 задание

а) Некоторую функцию разложили в ряд Маклорена и, придав аргументу х определённое значение, получили данный числовой ряд. Найдите его сумму.

б) Найдите первообразную данной функции в виде ряда, используя стандартные разложения степенных рядов, а также свойства их сложения и умножения.

в) Найдите первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях. Изобразите на графике.

Решение

Пункт А

$$\sum_{0}^{\text{inf}} n! = e$$

$$\sum_{0}^{\text{inf}} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\text{inf}} \frac{(-1)^n * 3^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\text{inf}} \frac{-3^n}{n!} = \frac{1}{e^3}$$

Пункт Б

$$f(x) = (x+1)sinx^2$$

Вычислим ряд Маклорена для функции

$$f_1(X) = sinx^2$$

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2*(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Вычислим ряд Маклорена для функции

$$f_2(x) = (1 + x)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Выше представлен биномиальный ряд, подставим m = 1.

$$(1 + x) = 1 + x$$

Перепишем начальную функцию использую два разложеня на ряды Маклорена.

$$f(x) = (x+1) * (x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2*(2n+1)}}{(2n+1)!})$$

$$f(x) = x^2 + x^3 - \frac{x^6}{3!} - \frac{x^7}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{11}}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2*(2n+1)}}{(2n+1)!} + (-1)^n \frac{x^{2*(2n+1)+1}}{(2n+1)!}$$

Выпишем первообразную от f(x)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\inf} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)! * (4n+3)} + (-1)^n \frac{x^{4n+4}}{(2n+1)! * (4n+4)}$$

Пункт B

$$y' = ycos(X) + 2cos(y), y(0) = 0, k = 4$$

$$y'' = (cos(x) - 2sin(y))y' - sin(x) * y$$

$$y''' = ((cos(x) - 2sin(y))y'' - 2cos(y) * y'^2 - 2sin(x) * y' * cos(x) * y$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 2, y'''(0) = -6$$

Выпишем первые 4 члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения.

$$0 + \frac{2}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{6}{3!}x^3$$

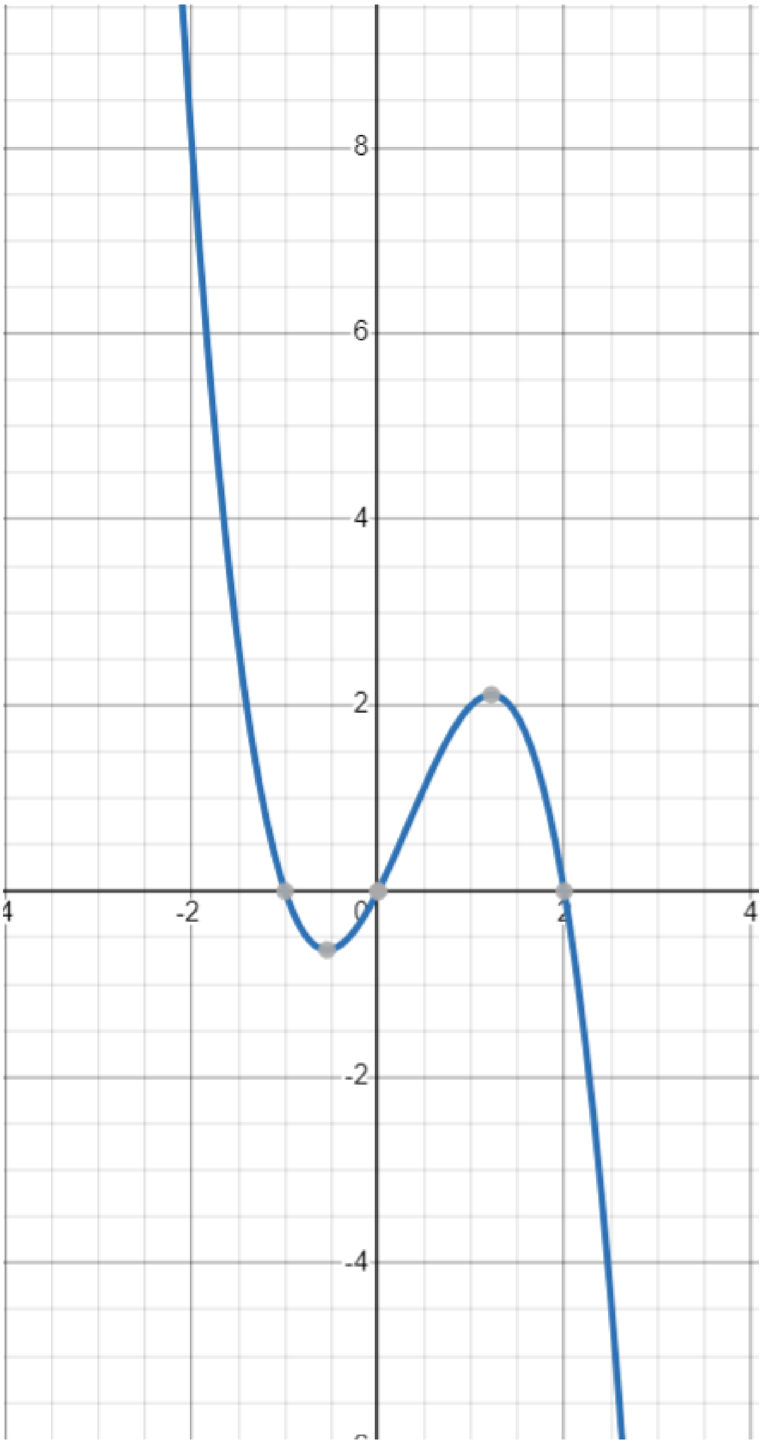


Рис. 1: график, полученный при разложении в степенной ряд

2 задание

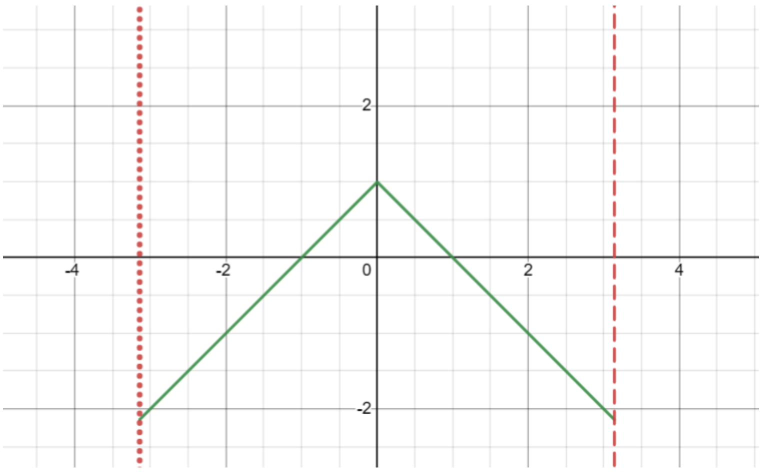
С помощью разложения в ряд Фурье данной функции в интервале $(-\pi; \pi)$ найдите сумму указанного числового ряда.

$$f(x) = 1 - |x|$$

$$\sum_{n=3}^{\text{inf}} \frac{1}{(2n-3)^2}$$

Решение

$$f(x) = 1 - |x|$$



$1 - |x|$ - четная функция, следовательно, ряд имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum)n = 1^{\text{inf}} a_n cos(nx)dx$$

Учитывая предыдущий пункт, будем рассматривать удвоенные интегралы на отрезке

$$(0; \pi)$$

, а также найдём коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)dx = 2-\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cos(nx)fx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)cos(nx)dx$$

Вычислим a_n

1) Найдем неопределенный интеграл

$$\int(1-x)cos(nx)dx = \frac{-xsin(nx)}{n} + \frac{sin(nx)}{n} - \frac{cos(nx)}{n^2} + c$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} * \frac{1-(-1)^n}{n^2}$$

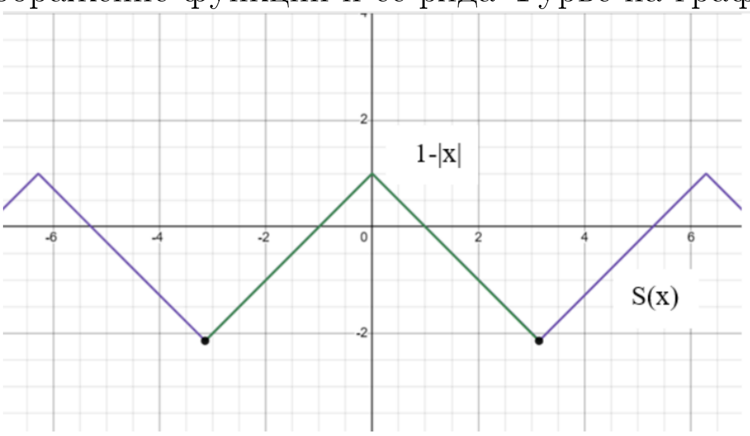
Получаем в итоге

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\text{inf}} a_n cos(nx)dx = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\text{inf}} \frac{1-(-1)^n}{n^2} cos(nx)$$

При этом, при четных n элементы ряда равны нулю, а при нечетных – n=2k-1, следовательно, итоговый тригонометрический ряд

$$f(x) = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\text{inf}} \frac{2}{(2k-1)^2} cos((2k-1)x)$$

Изображение функции и ее ряда Фурье на графике



Возьмём x=0 в ряду Фурье

$$y(0) = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\text{inf}} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Сравним с числовым рядом

$$\sum_{n=3}^{\text{inf}} \frac{1}{(2n-3)^2} = (1 - \frac{\pi}{2} - y(0)) * \frac{-\pi}{4}$$

При x=0, исходная функция f(0)=1, следовательно

$$\sum_{n=3}^{\text{inf}} \frac{1}{(2n-3)^2} = (1 - \frac{\pi}{2} - 1) * \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{8}$

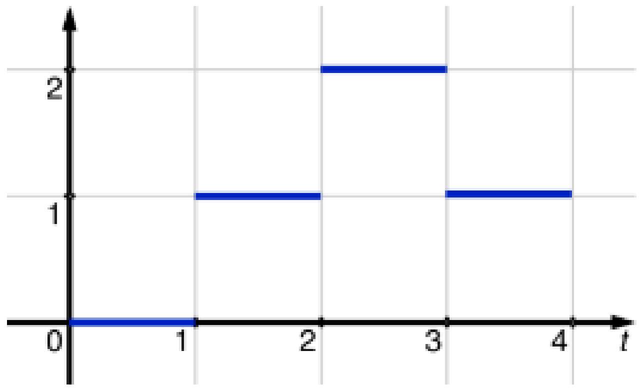
3 задание

1) Найдите аналитически и изобразите на графике форму аналогового сигнала на выходе ЦАП для каждого опыта, если в первом опыте ЦАП был настроен так, что обрезал все гармоники, кроме нулевой и первой; во втором – после третьей; в третьем – после десятой (i-ой гармоникой считается i-й член ряда Фурье при нумерации с нуля).

2) Для каждого опыта постройте графики функции ошибок ЦАП и укажите максимальную ошибку.3) Сравните результаты. Сделайте заключение.

Изначальная функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \le x < 1 \\ 1, 1 \le x < 2 \\ 2, 2 \le x < 3 \\ 1, 3 \le x < 4 \end{cases}$$



Вычислим коэффиценты для разложения в ряд Фурье

$$a_0 = 2$$

$$a_k = \frac{1}{2}(\int_1^2 cos(\frac{k\pi}{2}x)dx + \int_2^3 2 * cos(\frac{k\pi}{2}x)dx + \int_3^4 cos(\frac{k\pi}{2}x)dx) =$$

$$= \frac{2sin\frac{3\pi k}{2}}{\pi k} - \frac{sin\frac{\pi k}{2}}{\pi k} - \frac{sin\frac{3\pi k}{2}}{\pi k}$$

$$b_k = \frac{-1}{\pi k}cos(\pi k) + \frac{1}{\pi k}cos\frac{\pi k}{2} - \frac{2}{\pi k}cos\frac{3\pi k}{2} + \frac{2}{\pi k}cos\pi k -$$

$$-\frac{1}{\pi k}cos(2\pi k) + \frac{1}{\pi k}cos\frac{3\pi k}{2}$$

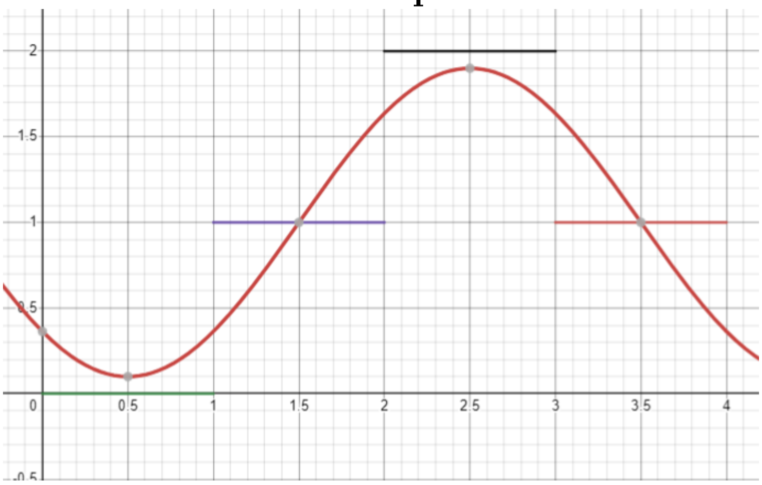
Представим разложенную функцию:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{k}(\frac{2sin\frac{3\pi k}{2}}{\pi k} - \frac{sin\frac{\pi k}{2}}{\pi k} - \frac{sin\frac{3\pi k}{2}}{\pi k}) * cos\frac{\pi nx}{2} +$$

$$+(\frac{-1}{\pi k}cos(\pi k) + \frac{1}{\pi k}cos\frac{\pi k}{2} - \frac{2}{\pi k}cos\frac{3\pi k}{2} + \frac{2}{\pi k}cos\pi k -)$$

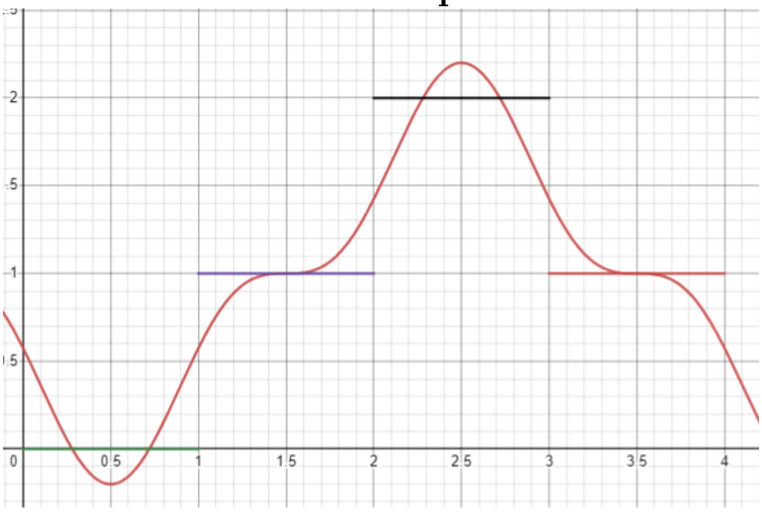
$$-\frac{1}{\pi k}cos(2\pi k) + \frac{1}{\pi k}cos\frac{3\pi k}{2}) * sin\frac{\pi nx}{2}$$

Опыт первый



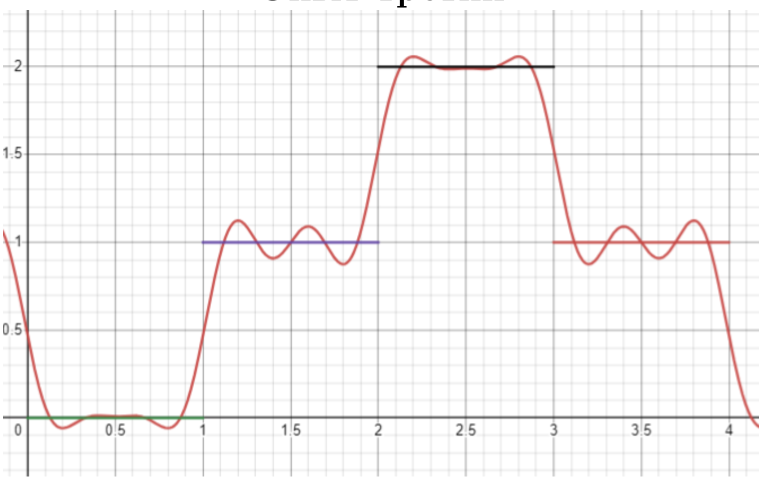
Максимальная ошибка ЦАП - 0.647

Опыт второй



Максимальная ошибка ЦАП - 0.624

Опыт третий



Максимальная ошибка ЦАП - 0.501