Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Направление подготовки 09.03.04 Программная инженерия

Отчёт по расчетно-графической работе №3

По дисциплине «Математический анализ» (второй семестр)

Выполнили Студенты:

Лазарчук Андрей

Стас Меньших

Разуваев Лев

Айдар Фархутдинов

Максим Казаев

Преподаватель:

Константин Владимирович Правдин

г. Санкт-Петербург

2023 г.

1 задание

Задача

Исследуйте интегральную сумму функции , заданной на отрезке [a, b]:

$$\int_{-1}^{0.5} \sqrt[3]{x} dx$$

Решение

Интегральная сумма

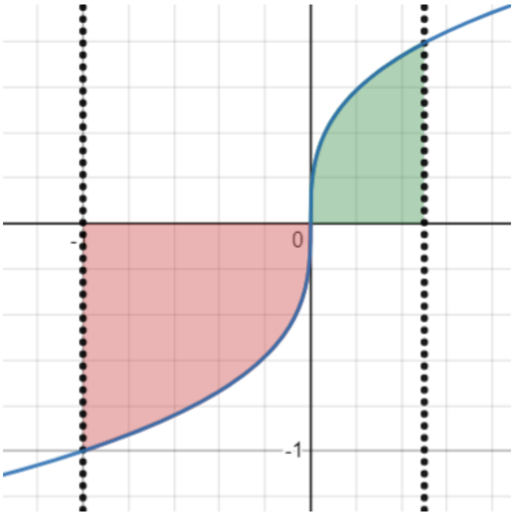


Рис. 1: Криволинейная трапеция

Исследуем ступенчатую фигуру при $n_1 = 3$

Разобъем отрезок [-1,0.5] на 3 равных части.

Длина каждого частичного отрезка равна $\Delta x = \frac{0.5+1}{3} = \frac{1}{2}$

Получаем частичные отрезки: [-1, -0.5], [-0.5, 0], [0, 0.5]

1. Рассмотрим случай, когда $\xi_i = x_{i-1}$

Левый край

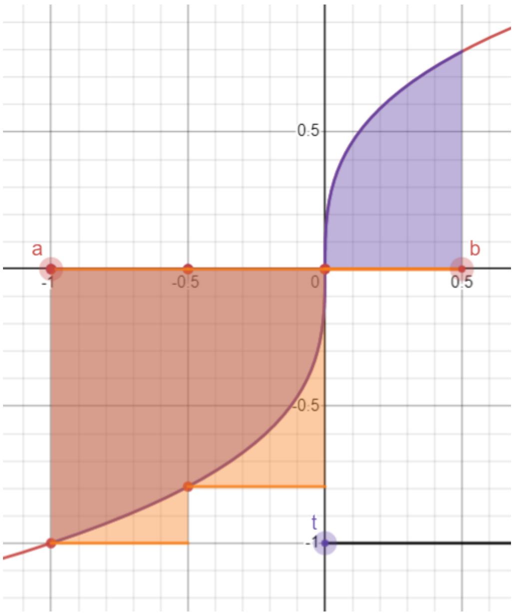


Рис. 2: Криволинейная трапеция с 3 степеньками(левый край)

$$\xi_1 = -1, \xi_2 = -\frac{1}{2}, \xi_3 = 0$$

Подставим значения в формулу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$|\sqrt[3]{-1} * \frac{1}{2}| + |\sqrt[3]{-0.5} * \frac{1}{2}| + \sqrt[3]{0} * \frac{1}{2} = |-\frac{1}{2}| + |\frac{\sqrt[3]{4}}{4}| \approx 0.89685$$

2. Рассмотрим случай, когда $\xi_i = x_i$

Правый край

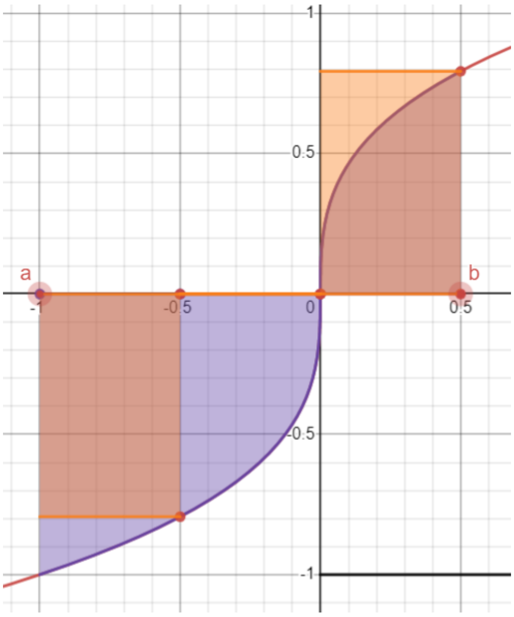


Рис. 3: Криволинейная трапеция с 3 степеньками(правый край)

$$\xi_1 = -\frac{1}{2}, \xi_2 = 0, \xi_3 = \frac{1}{2}$$

Подставим значения в формулу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$|\sqrt[3]{-0.5}| * \frac{1}{2} + \sqrt[3]{0} * \frac{1}{2} + \sqrt[3]{0.5} * \frac{1}{2} \approx 1.69055$$

3. Рассмотрим случай, когда $\xi_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$

Центр

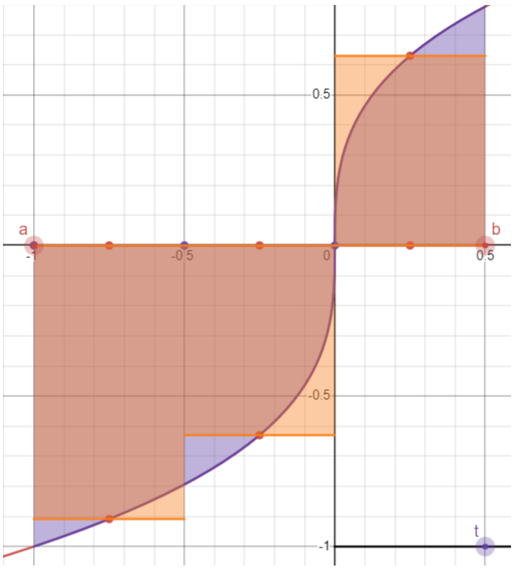


Рис. 4: Криволинейная трапеция с 3 степеньками(центра)

$$\xi_1 = -\frac{3}{4}, \xi_2 = -\frac{1}{4}, \xi_3 = \frac{1}{4}$$

Подставим значения в формулу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$|\sqrt[3]{-\frac{3}{4}}| * \frac{1}{2} + |\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}| * \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} * \frac{1}{2} \approx 1.08424$

Исследуем ступенчатую фигуру при $n_2 = 5$

Разобъем отрезок [-1,0.5] на 5 равных части.

Длина каждого частичного отрезка равна $\Delta x = \frac{0.5+1}{5} = \frac{3}{10}$

Получаем частичные отрезки: [-1, -0.7], [-0.7, -0.4], [-0.4, -0.1], [-0.1, 0.2], [0.2, 0.5]

1. Рассмотрим случай, когда $\xi_i = x_{i-1}$

Левый край

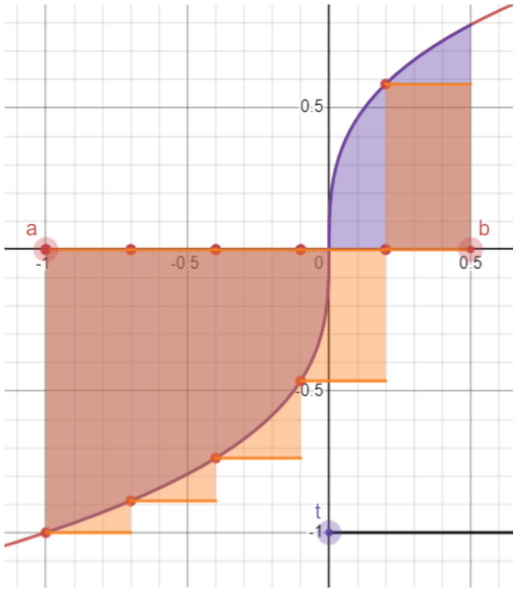


Рис. 5: Криволинейная трапеция с 5 степеньками(левый край)

$$\xi_1 = -1, \xi_2 = -0.7, \xi_3 = -0.4, \xi_4 = -0.1, \xi_5 = 0.2$$

Подставим значения в формулу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$|\sqrt[3]{-1}| * \frac{3}{10} + |\sqrt[3]{-0.7}| * \frac{3}{10} + |\sqrt[3]{-0.4}| * \frac{3}{10} + |\sqrt[3]{-0.1}| * \frac{3}{10} + \sqrt[3]{0.2} * \frac{3}{10} \approx 2.04354$$

2. Рассмотрим случай, когда $\xi_i = x_i$

Правый край

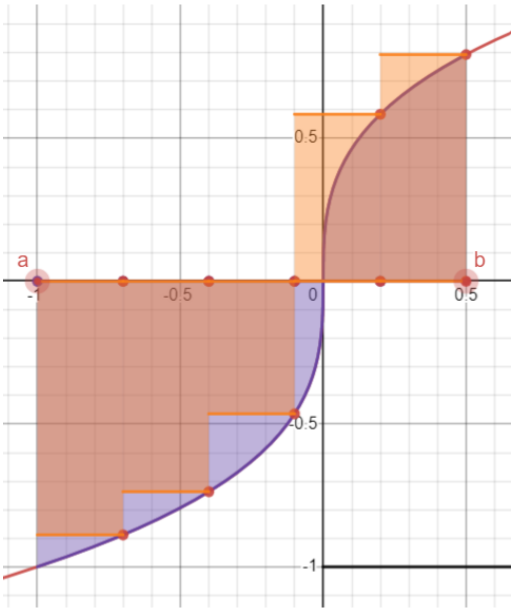


Рис. 6: Криволинейная трапеция с 5 степеньками(правый край)

$$\xi_1 = -0.7, \xi_2 = -0.4, \xi_3 = -0.1, \xi_4 = 0.2, \xi_5 = 0.5$$

Подставим значения в формулу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$|\sqrt[3]{-0.7}| * \frac{3}{10} + |\sqrt[3]{-0.4}| * \frac{3}{10} + |\sqrt[3]{-0.1}| * \frac{3}{10} + \sqrt[3]{0.2} * \frac{3}{10} + \sqrt[3]{0.5} * \frac{3}{10} \approx 0.998935$$

3. Рассмотрим случай, когда $\xi_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$

Центр

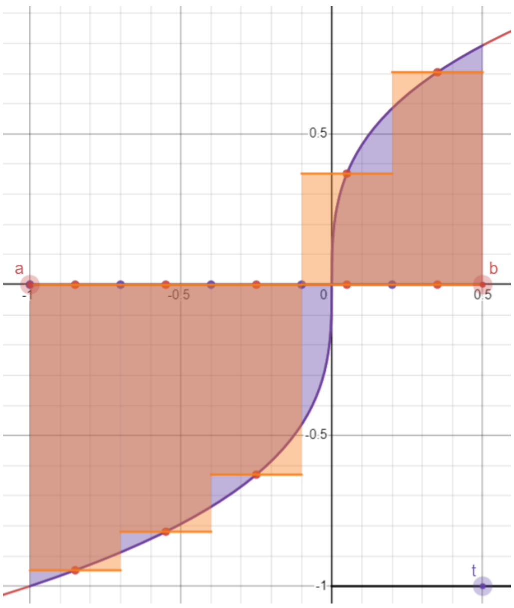


Рис. 7: Криволинейная трапеция с 5 степеньками(центр)

$$\xi_1 = -0.85, \xi_2 = -0.55, \xi_3 = -0.25, \xi_4 = 0.05, \xi_5 = 0.35$$

Подставим значения в формулу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$|\sqrt[3]{-0.85}| * \frac{3}{10} + |\sqrt[3]{-0.55}| * \frac{3}{10} + |\sqrt[3]{-0.25}| * \frac{3}{10} + \sqrt[3]{0.05} * \frac{3}{10} + \sqrt[3]{0.35} * \frac{3}{10} \approx 1.0409$$

Исследуем ступенчатую фигуру при $n_3 = 10$

Разобъем отрезок [-1,0.5] на 10 равных части.

Длина каждого частичного отрезка равна $\Delta x = \frac{0.5+1}{10} = \frac{15}{100}$

Получаем частичные отрезки: [-1, -0.85], [-0.85, -0.7], [-0.7, -0.55], [-0.55, -0.4], [-0.4, -0.25], [-0.25, -0.1], [-0.1, 0.05], [0.05, 0.2], [0.2, 0.35], [0.35, 0.5]

1. Рассмотрим случай, когда $\xi_i = x_{i-1}$

Левый край

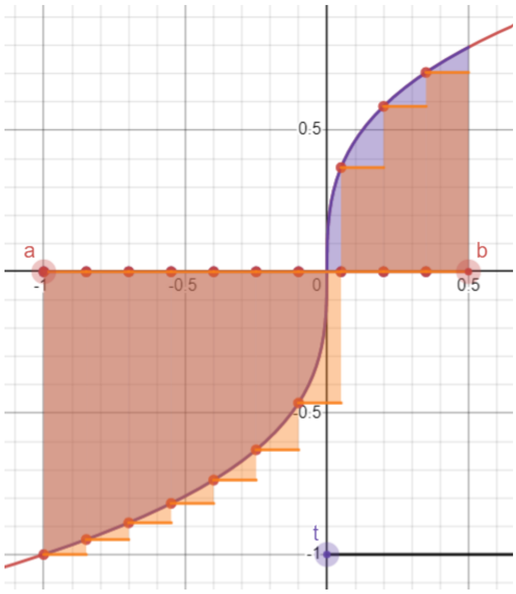


Рис. 8: Криволинейная трапеция с 3 степеньками(левый край)

$$\xi_1 = -1, \xi_2 = -0.85, \xi_3 = -0.7, \xi_4 = -0.55, \xi_5 = -0.4, \xi_6 = -0.25, \xi_7 = -0.1, \xi_8 = 0.05, \xi_9 = 0.2, \xi_10 = 0.35$$

Подставим значения в формулу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$|\sqrt[3]{-1}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.85}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.7}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.55}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.4}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.25}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.1}| * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.05} * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.2} * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.35} * \frac{15}{100} + \approx 1.01875$$

2. Рассмотрим случай, когда $\xi_i = x_i$

Правый край

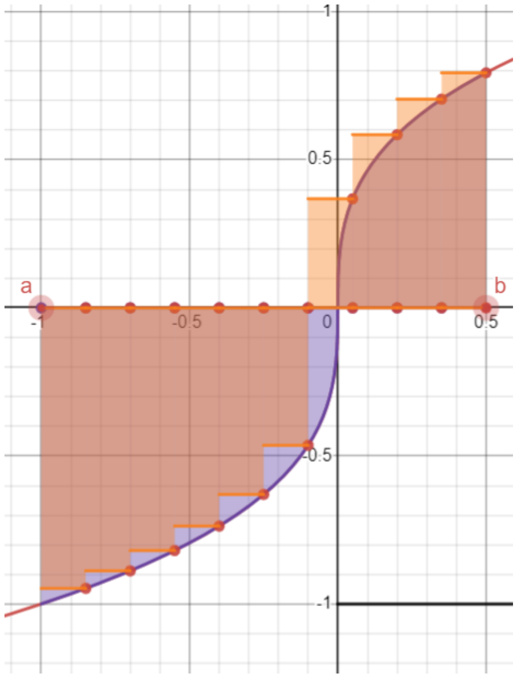


Рис. 9: Криволинейная трапеция с 3 степеньками(правый край)

$$\xi_1 = -0.85, \xi_2 = -0.7, \xi_3 = -0.55, \xi_4 = -0.4, \xi_5 = -0.25, \xi_6 = -0.1, \xi_7 = 0.05, \xi_8 = 0.2, \xi_9 = 0.35, \xi_10 = 0.5$$

Подставим значения в формулу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$|\sqrt[3]{-0.85}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.7}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.55}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.4}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.25}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.1}| * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.05} * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.2} * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.35} * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.5} * \frac{15}{100} + \approx 1.134325$$

3. Рассмотрим случай, когда $\xi_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$

Центр

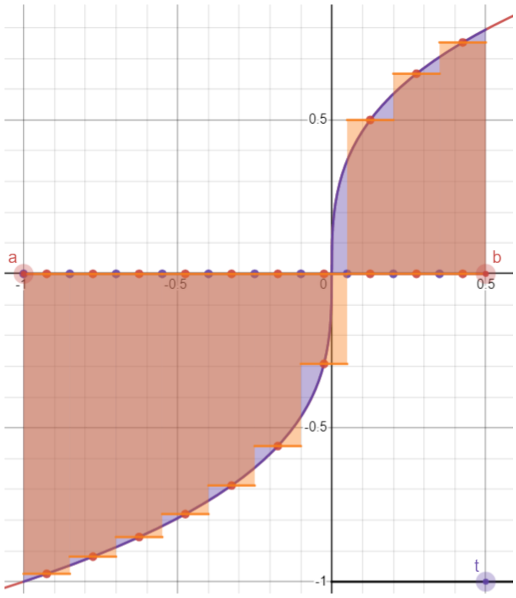


Рис. 10: Криволинейная трапеция с 10 степеньками(центра)

$$\xi_1 = -0.925, \xi_2 = -0.775, \xi_3 = -0.625, \xi_4 = -0.475, \xi_5 = -0.325, \xi_6 = -0.175, \xi_7 = -0.025, \xi_8 = 0.125, \xi_9 = 0.275, \xi_10 = 0.425$$

Подставим значения в формулу $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$|\sqrt[3]{-0.925}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.775}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.625}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.475}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.325}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.175}| * \frac{15}{100} + |\sqrt[3]{-0.025}| * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.125} * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.275} * \frac{15}{100} + \sqrt[3]{0.425} * \frac{15}{100} + \approx 1.10213$$

Последовательность интегральных сумм

$$\int_{-1}^{0.5} \sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{8\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{4} \approx 1.04763769724$$

Построим интегральные суммы для представленного выше интеграла.

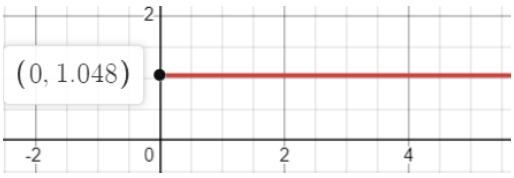


Рис. 11: Значение интеграла по графику

Разобъем отрезок [-1, 0.5] на n равных частей. Длина каждого частичного отрезка равна:

$$\Delta x = \frac{0.5 - (-1)}{n} = \frac{1.5}{n}$$

$$\Delta x_1 \in [-1, -1 + \tfrac{1.5}{n}], \Delta x_2 \in [-1 + \tfrac{3}{n}, -1 + \tfrac{4.5}{n}], \dots,$$
$$\Delta x_n \in [-1 + (n-1) * \tfrac{1.5}{n}, -1 + n\tfrac{1.5}{n}]$$

Рассмотрим случай, когда $\xi_i = x_{i-1}$

Левый край

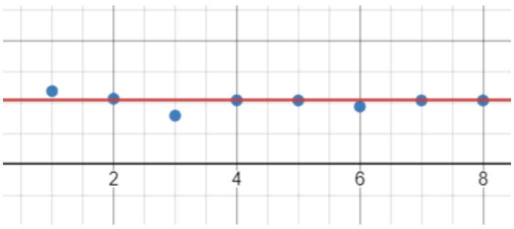


Рис. 12: Значение интегральных сумм (левый край)

$$\xi_1 = -1, \xi_2 = -1 + \frac{3}{n}, \dots, \xi_n = -1 + (n-1) * \frac{1.5}{n}$$

$$\sum_i^n f(\xi_i) * \Delta x = \sqrt[3]{-1} * \frac{1.5}{n} + \sqrt[3]{-1 + \frac{3}{n}} * \frac{1.5}{n} + \dots + \sqrt[3]{-1 + (n-1) * \frac{1.5}{n}} * \frac{1.5}{n}$$

Интегральная сумма слева функции $\sqrt[3]{x} \in [-1, 0.5]$

При увеличении n интегральная сумма будет стремиться к 1.04763769724 слева.

Рассмотрим случай, когда $\xi_i = x_i$

Правый край

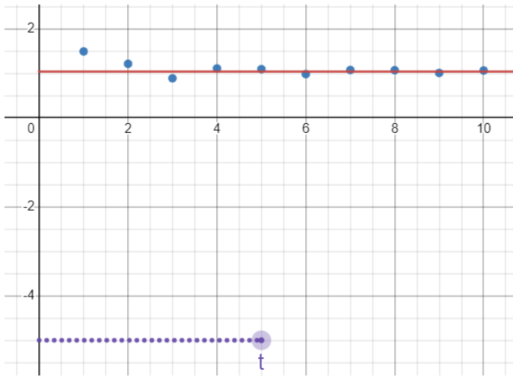


Рис. 13: Значение интегральных сумм (правый край)

$$\xi_1 = -1 + \frac{1.5}{n}, \xi_2 = -1 + \frac{4.5}{n}, \ldots, \xi_n = -1 + n\frac{1.5}{n}$$

$$\sum_i^n f(\xi_i) * \Delta x = \sqrt[3]{-1 + \frac{1.5}{n}} * \frac{1.5}{n} + \sqrt[3]{-1 + \frac{4.5}{n}} * \frac{1.5}{n} + \cdots + \sqrt[3]{-1 + n\frac{1.5}{n}} * \frac{1.5}{n}$$

Интегральная сумма справа функции $\sqrt[3]{x} \in [-1, 0.5]$

При увеличении n интегральная сумма будет стремиться к 1.04763769724 справа.

Рассмотрим случай, когда $\xi_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$

Центр

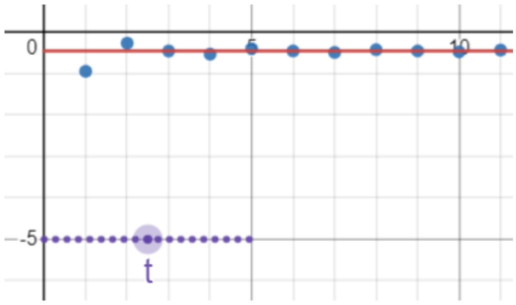


Рис. 14: Значение интегральных сумм (центр)

$$\xi_1 = \frac{-1 + \frac{1.5}{n}}{2}, \xi_2 = \frac{-1 + \frac{4.5}{n}}{2}, \ldots, \xi_n = \frac{-1 + n\frac{1.5}{n}}{2}$$

$$\sum_i^n f(\xi_i) * \Delta x = \sqrt[3]{\frac{-1 + \frac{1.5}{n}}{2}} * \frac{1.5}{n} + \sqrt[3]{\frac{-1 + \frac{4.5}{n}}{2}} * \frac{1.5}{n} + \cdots + \sqrt[3]{\frac{-1 + n\frac{1.5}{n}}{2}} * \frac{1.5}{n} \ \sqrt[3]{x} \in [-1, 0.5]$$

Ответ: $\sqrt[3]{x} = 1.04763769724$

2 задание

Задача

Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной:

x = t, y = 8/(4+t^2), $y = 0$

Решение

1) Заданная функция y(t) зависит от параметра t, при этом t=x, следовательно можно подставить x вместо t и функцию можно представить в виде:

$$y = \frac{8}{4 + t^2}$$

Изобразим площадь между заданной функцией и осью абсцисс:

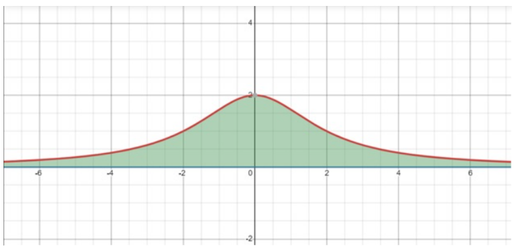


Рис. 15: Изображение площади

Можно заметить, что график функции симметричен относительно оси ординат, а также стремится к нулю на бесконечности, не достигая его.

2) Определенный интеграл численно равен площади плоской фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции на промежутке интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx$$

В нашем случае вычисляется несобственный интеграл первого рода на бесконечном промежутке интегрирования.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8}{4+x^2} dx$$

3) Вычисление интеграла: На основании определения несобственного интеграла с двумя бесконечными пределами представляем данный интеграл как сумму двух несобственных интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8}{4+x^2} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{8}{4+x^2} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{8}{4+x^2} dx$$

Вычислим неопределенный интеграл:

$$\int \frac{8}{4+x^2} dx = 8 \int \frac{1}{2^2+x^2} = 4arctg(\frac{x}{2}) + C$$

Далее вычислим по отдельности два определенных интеграла:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{8}{4+x^2} dx = 4 \lim_{b\to\infty} arctg(\frac{x}{2})|_0^b = 4 \lim_{b\to\infty} (arctg(\frac{b}{2}) - arctg(0)) = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{8}{4+x^2} dx = 4 \lim_{a\to-\infty} arctg(\frac{x}{2})|_a^0 = 4 \lim_{a\to-\infty} (arctg(0) - arctg(\frac{b}{2})) = 2\pi$$

Заметим, что два интеграла равны, это очевидно, так ка график функции симметричен.

Итог:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8}{4+x^2} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{8}{4+x^2} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{8}{4+x^2} dx = 2\pi + 2\pi = 4\pi \ \approx 12.57ed^2$$

4)Оценим найденное значение при помощи треугольника: Так как график симметричен, то рассмотрим одну половину графика. Для оценки результата разобьем половину фигуры на 12 треугольников и прямоугольников:

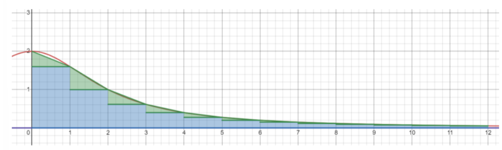


Рис. 16: Разбиение на треугольники и прямоугольники

Посчитаем площадь всех треугольников:

$\mathrm{S}_1 = \frac{1}{2} * (2 - 1.6) + \frac{1}{2} * (1.6 - 1) + \frac{1}{2} * (1 - 0.615) + \frac{1}{2} * (0.615 - 4) + \frac{1}{2} * (0.4 - 0.276) + \frac{1}{2} * (0.276 - 0.2) + \frac{1}{2} * (0.2 - 0.151) + \frac{1}{2} * (0.151 - 0.118) + \frac{1}{2} * (0.151 - 0.118) + \frac{1}{2} * (0.094 - 0.077) + \frac{1}{2} * (0.077 - 0.064) + \frac{1}{2} * (0.064 - 0.054) = 0.973$

Посчитаем площадь всех прямоугольников:

$\mathrm{S}_2 = 1.6 + 1 + 0.615 + 0.4 + 0.276 + 0.2 + 0.151 + 0.118 + 0.094 + 0.077 + 0.064 + 0.054 = 4.649$

В итоге приблизительная площадь будет равняться:

$$S = 2 * (S_1 + S_2) = 2 * (0.973 + 4.649) = 11.244 \approx 3.6\pi$$

Заключение

Полученное значение меньше вычисленного интеграла на 0,4π.

Если увеличить количество треугольников и прямоугольников, то можно получить приблизительную площадь более близкую к вычисленному интегралу.

3 задание

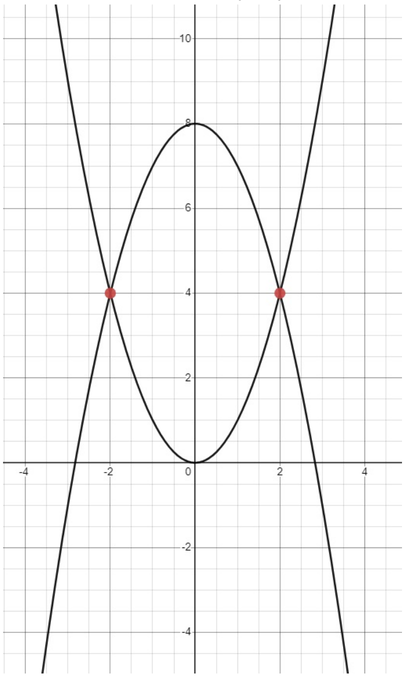
Задача

Найдите объём тела Т, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси. Фигура Ф ограничена следующими кривыми:

$$y = 8 - x^2 \quad y = x^2, Ox$$

Решение

1) Изобразим на графике фигуру Ф и тело вращение Т.



2) Формула для нахождения объёма тела вращения Т при помощи определённого интеграла:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

3) Вычислим интеграл и запишем ответ.

Для вычисления объёма тела вращения можем вычислить с помощью разности объёмов двух тел:

$$V = V_1 - V_2$$

V_1 - объём первой фигуры

V_2 - объём второй фигуры

a = -2, b = 2, т.к. это точки пересечения кривых.

Фигура Ф1 ограничена:

$$y = 8 - x^2$$

Следовательно,

$$V_1 = \pi \int_{-2}^{2} (8 - x^2)^2 \, dx$$

Фигура Ф2 ограничена:

$$y = x^2$$

Следовательно,

$$V_2 = \pi \int_{-2}^{2} x^4 \, dx$$

Вычисляем объём фигуры Ф с помощью вышесказанной формуле:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (8 - x^2)^2 \, dx - \pi \int_{-2}^{2} x^4 \, dx = \pi((64x - \frac{16x^3}{3} + \frac{x^5}{5})\Big|_{-2}^{2}) - (\frac{x^5}{5})\Big|_{-2}^{2} =$$

$$\pi(64x - \frac{16x^3}{3})\Big|_{-2}^{2} = \pi(64 \cdot 2 - \frac{16 \cdot 8}{3} - 64 \cdot (-2) + \frac{16 \cdot (-8)}{3}) = \pi(64 \cdot 4 - \frac{16 \cdot 16}{3}) = 170\frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $170\frac{2\pi}{3}$

4) Сравним полученный объём с объёмом цилиндра(радиус 8, высота 4).

$$R = 8 \quad h = 4$$

$$V = \pi R^2 h = 256\pi$$

Заключение

Объём цилиндра примерно в полтора раза больше нашего посчитанного интеграла, следовательно интеграл посчитан верно.

Ответ: $170\frac{2\pi}{3}$

4 задание

Задача

Исследуйте несобственный интеграл на сходимость при всех значениях параметра a.

Решение

$$\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{x^a ln(1/x)} = \int_{0}^{1/2} \frac{dx}{-x^a ln(x)}$$

1)$f(x) \to \infty$ при x = 0 - особая точка несобственного интеграла, других особых точек нет. Данный интеграл является несобственным интегралом второго рода, также подынтегральная функция неотрицательная на промежутке интегрирования от 0 до 0,5.

2) Графики подынтегральной функции:

3) При a = 1 первообразная находится легко:

$$-\int \frac{dx}{x^a ln(x)} = \left| t = ln(x) \ dt = \frac{dx}{x} \right| = -\int \frac{dt}{t} \ = \ -ln|ln(x)|$$

Найдем несобственный интеграл:

$$\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{-x ln(x)} \ = \lim_{a \to 0+} \left(-\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{x ln(x)} \right) = \lim_{a \to 0+} \ (-ln|ln(x))|_{0}^{1/2}$$

$$= \lim_{a \to 0+} (-ln(ln(2)) \ + \ ln|ln|a||) = +\infty$$

При a = 1 инеграл расходится

4)Признаки для определения сходимости несобственных инеграллов 2 рода на промежутке от 0 до 0,5:

Пусть у нас есть два интеграла:

$$\int_{0}^{1/2} f(x)dx; \int_{0}^{1/2} g(x)dx$$

1.Признак сравнение с неравенствами: Если f(x) и g(x) непрерывны на всем промежутке и при x = 0 терпят бесконечный разрыв, а также удовлетворяют условию 0 ≤ f(x) ≤ g(x), тогда: Если $\int\limits_0^{1/2} g(x)dx$ - сходится, тогда $\int\limits_0^{1/2} f(x)dx$ - тоже сходится.

2.Пределеньный признак сравнения: Если $\lim_{a\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ где $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \infty$ и один из интегралов сходится, тогда второй интеграл тоже сходится.

3.Абсолютный признак: Если $\int\limits_0^{1/2} |f(x)|dx$ сходится, тогда $\int\limits_0^{1/2} f(x)dx$ тоже сходится.

5)Исследование на сходимость эталонного интеграла:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\beta} \begin{cases} -\frac{1}{\beta-1} * \frac{1}{x^{\beta-1}}\Big|_0^{1/2}, \beta \neq 1 \\ \ln|x|\big|_0^{1/2} \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{При } \beta \ > 1 \text{ - расходится} \\ \text{При } \beta \ < 1 \text{ - сходится} \\ \text{При } \beta \ \text{ a} = 1 \text{ - расходится} \end{cases}$$

6)Трансцендентаня функция:

$$t(x) = -lnx$$

Сравним данную функию с g(x) = x на промежутке от 0 до $\frac{1}{2}$. Тогда t(x) - убывающая, g(x) - возрастающая; t(0) = ∞, g(0) = 0. Проверим, произошло ли пересечение данных функций до x = $\frac{1}{2}$, для этого сравним значения этих функций в данной точке:

ln2 > $\frac{1}{2}$ => t($\frac{1}{2}$) > g($\frac{1}{2}$)

Заменим трансцендентную функцию в исходном выражении на x:

$\frac{1}{-x^a ln(x)} < \frac{1}{-x^{a+1}}$

В правой части получился эталонный интеграл, сравним с эталонным и найдем промежутки сходимости и расходимости:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{a+1}}$$

$$\begin{cases} \text{При a} - \text{расходится} \\ \text{При a} < 1 - \text{ сходится} \\ \text{При a} = 1 - \text{ расходится} \end{cases}$$

Исходя признака сравнения по неравенствам данного интеграла с эталонным, можно сделать вывод, что исходный интеграл сходтися при значениях a < 0.

7)При а = 1 легко находится первообразная,а также исходный интеграл расходится. Используем предельный признак сравнения подынтегральных функций у исходного интеграла, и интеграла с а = 1, для выявления промежутков расходимости.

$$\lim_{x+\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x+\to 0+}\frac{-xlnx}{-xlnx}=\lim_{x+\to 0+}x^{a-1}=\begin{cases}0, a-1>0,\\1, a-1=0,\\\infty, a-1<0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>1\text{- расходится}\\a<1\text{- сходится}\\a=1\text{- расходится}\end{cases}$$

8)Интеграл сходится в промежутке$(-\infty;1)$ и расходится в промежутке $[1;+\infty)$

5 задание

Задача

Прямой круглый конус с радиусом основания и высотой 1 м вертикально погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Найти работу, необходимую для извлечения цилиндра из воды, если его удельный вес равен 3.

Дано

r=h=1m

Y=3

Графическая иллюстрация:

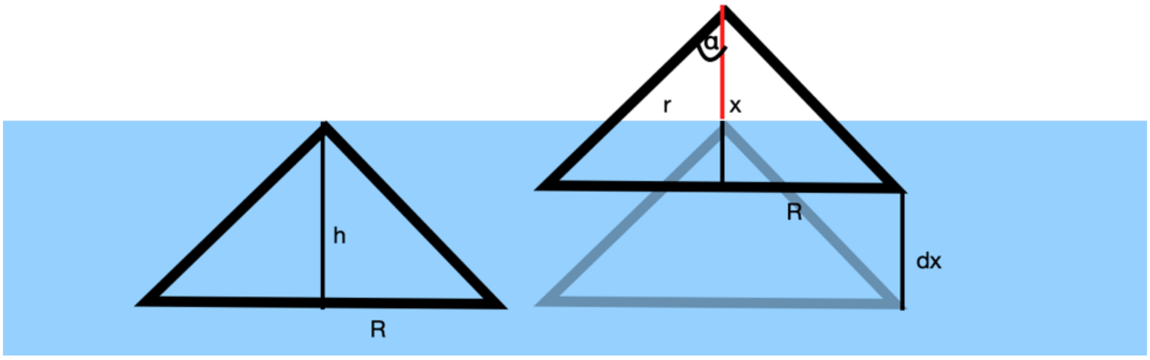


Рис. 17

h – Высота конуса

R – Радиус конуса

r – Радиус части конуса, находящийся на поверхности

x – Высота части конуса, находящийся на поверхности

g = 9,8 м/c – Ускорение свободного падения

F = mg = 30 Н – Сила тяжести

Сила Архимеда противодействующая силе тяжести(Fa=pgV, p-плотность воды, V-объем погруженной части тела) будет уменьшаться по мере поднятия тела из-за уменьшения объема тела и соответсвенно объема вытемняемой воды => для поднятия будет требоваться большая сила

Работа показывает какую силу приложили на каком-то расстоянии

A=mg-pV(погруженной части)g, где mg-Сила тяжести, pVg-сила Архимеда

Т.к. сила F(x) варьируется, то выполняемая работа на промежутке a до b на x будет:

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

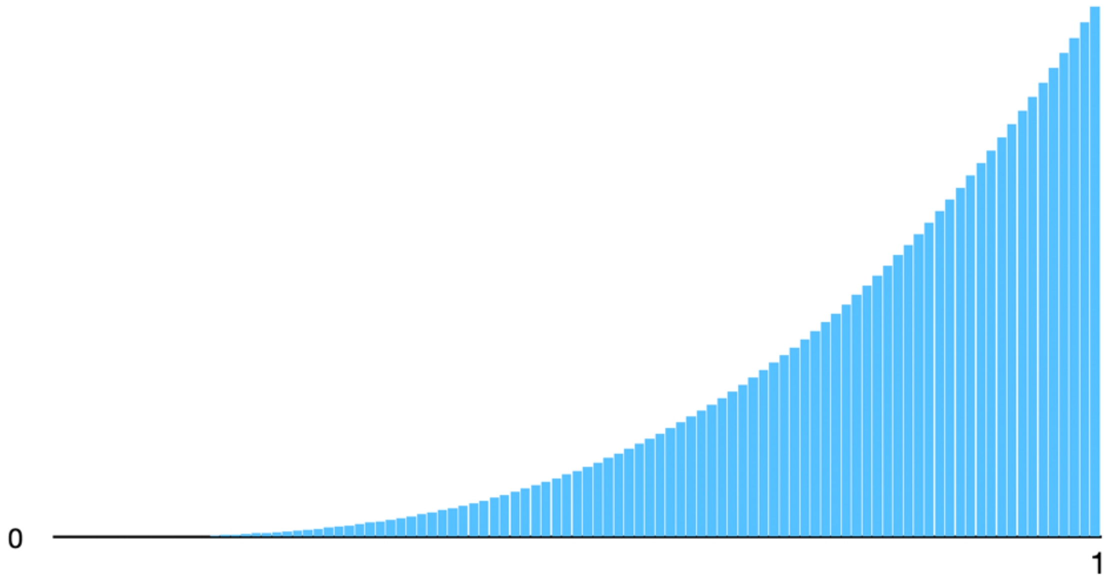


Рис. 18

Объем работы в малый момент времени:

$$\delta A = F(x)dx$$

$$\delta A = dA = mgdx - pV(x)gdx$$

Выразим объем погруженной части конуса, через x:
Радиус непогруженной части конуса:

$$r = x\tan(a) = x\tan(\frac{\pi}{4}) = x$$

Объем непогруженной части конуса:

$$V_n = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi}{3}x^3$$

Объем погруженной части конуса:

$$V = \frac{\pi}{3}hR^2 - \frac{\pi}{3}x^3$$

Найдем силу тяжести:

$$P = mg = pVg$$

$$Y = \frac{pVg}{V} = pg = 3$$
$$F = Y * V = \pi$$

Найдем работу:

$$dA = dmg - dpVg = dmg - dp(\frac{\pi}{3}hR^2 - \frac{\pi}{3}x^3)g$$

$$A = \int_0^h (mg - dp(\frac{\pi}{3}hR^2 - \frac{\pi}{3}x^3)g)dx = \int_0^1 (\pi - 9800(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}x^3))dx =$$

$$= \pi \int_0^1 (1 - \frac{9800}{3} - \frac{9800x^3}{3})dx = \frac{\pi x(-9797 - 2450x^3}{3}|_0^1 \approx -7693.8$$

Ответ: -7693.8 Дж

Т.к. конус имеет положительную плавучесть, внешняя сила должна быть приложена для компенсации силы Архемеда, т.е. работа будет отрицательно