

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Дисциплина «Дискретная математика»

**Курсовая работа**  
Часть 1  
Вариант 5

Студент  
XXX XXX XXX  
Р31XX

Преподаватель  
Поляков Владимир Иванович

Функция  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  принимает значение 1 при  $2 < |x_2x_10 - x_3x_4x_5| \leq 5$  и неопределенное значение при  $|x_2x_10 - x_3x_4x_5| = 1$

## Таблица истинности

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_2x_10$	$x_3x_4x_5$	$x_2x_10$	$x_3x_4x_5$	$f$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	d
2	0	0	0	1	0	0	2	0	2	0
3	0	0	0	1	1	0	3	0	3	1
4	0	0	1	0	0	0	4	0	4	1
5	0	0	1	0	1	0	5	0	5	1
6	0	0	1	1	0	0	6	0	6	0
7	0	0	1	1	1	0	7	0	7	0
8	0	1	0	0	0	4	0	4	0	1
9	0	1	0	0	1	4	1	4	1	1
10	0	1	0	1	0	4	2	4	2	0
11	0	1	0	1	1	4	3	4	3	d
12	0	1	1	0	0	4	4	4	4	0
13	0	1	1	0	1	4	5	4	5	d
14	0	1	1	1	0	4	6	4	6	0
15	0	1	1	1	1	4	7	4	7	1
16	1	0	0	0	0	2	0	2	0	0
17	1	0	0	0	1	2	1	2	1	d
18	1	0	0	1	0	2	2	2	2	0
19	1	0	0	1	1	2	3	2	3	d
20	1	0	1	0	0	2	4	2	4	0
21	1	0	1	0	1	2	5	2	5	1
22	1	0	1	1	0	2	6	2	6	1
23	1	0	1	1	1	2	7	2	7	1
24	1	1	0	0	0	6	0	6	0	0
25	1	1	0	0	1	6	1	6	1	1
26	1	1	0	1	0	6	2	6	2	1
27	1	1	0	1	1	6	3	6	3	1
28	1	1	1	0	0	6	4	6	4	0
29	1	1	1	0	1	6	5	6	5	d
30	1	1	1	1	0	6	6	6	6	0
31	1	1	1	1	1	6	7	6	7	d

## Аналитический вид

### Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee \\ \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 x_5$$

### Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \\ (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \\ (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)$$

# Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

## Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$		
$m_4$	00100	✓	$m_1-m_3$	000X1	✓	$m_1-m_3-m_9-m_{11}$	0X0X1	✓
$m_8$	01000	✓	$m_4-m_5$	0010X		$m_1-m_5-m_9-m_{13}$	0XX01	✓
$m_1$	00001	✓	$m_1-m_5$	00X01	✓	$m_1-m_3-m_{17}-m_{19}$	X00X1	✓
$m_3$	00011	✓	$m_8-m_9$	0100X		$m_1-m_5-m_{17}-m_{21}$	X0X01	✓
$m_5$	00101	✓	$m_1-m_9$	0X001	✓	$m_1-m_9-m_{17}-m_{25}$	XX001	✓
$m_9$	01001	✓	$m_1-m_{17}$	X0001	✓	$m_9-m_{11}-m_{13}-m_{15}$	01XX1	✓
$m_{17}$	10001	✓	$m_9-m_{11}$	010X1	✓	$m_{17}-m_{19}-m_{21}-m_{23}$	10XX1	✓
$m_{21}$	10101	✓	$m_9-m_{13}$	01X01	✓	$m_{17}-m_{19}-m_{25}-m_{27}$	1X0X1	✓
$m_{22}$	10110	✓	$m_3-m_{11}$	0X011	✓	$m_{17}-m_{21}-m_{25}-m_{29}$	1XX01	✓
$m_{25}$	11001	✓	$m_5-m_{13}$	0X101	✓	$m_9-m_{11}-m_{25}-m_{27}$	X10X1	✓
$m_{26}$	11010	✓	$m_{17}-m_{19}$	100X1	✓	$m_9-m_{13}-m_{25}-m_{29}$	X1X01	✓
$m_{11}$	01011	✓	$m_{17}-m_{21}$	10X01	✓	$m_3-m_{11}-m_{19}-m_{27}$	XX011	✓
$m_{13}$	01101	✓	$m_{17}-m_{25}$	1X001	✓	$m_5-m_{13}-m_{21}-m_{29}$	XX101	✓
$m_{19}$	10011	✓	$m_3-m_{19}$	X0011	✓	$m_{25}-m_{27}-m_{29}-m_{31}$	11XX1	✓
$m_{15}$	01111	✓	$m_5-m_{21}$	X0101	✓	$m_{21}-m_{23}-m_{29}-m_{31}$	1X1X1	✓
$m_{23}$	10111	✓	$m_9-m_{25}$	X1001	✓	$m_{19}-m_{23}-m_{27}-m_{31}$	1XX11	✓
$m_{27}$	11011	✓	$m_{13}-m_{15}$	011X1	✓	$m_{13}-m_{15}-m_{29}-m_{31}$	X11X1	✓
$m_{29}$	11101	✓	$m_{11}-m_{15}$	01X11	✓	$m_{11}-m_{15}-m_{27}-m_{31}$	X1X11	✓
$m_{31}$	11111	✓	$m_{22}-m_{23}$	1011X				
			$m_{21}-m_{23}$	101X1	✓			
			$m_{19}-m_{23}$	10X11	✓			
			$m_{26}-m_{27}$	1101X				
			$m_{25}-m_{27}$	110X1	✓			
			$m_{25}-m_{29}$	11X01	✓			
			$m_{19}-m_{27}$	1X011	✓			
			$m_{21}-m_{29}$	1X101	✓			
			$m_{11}-m_{27}$	X1011	✓			
			$m_{13}-m_{29}$	X1101	✓			
			$m_{29}-m_{31}$	111X1	✓			
			$m_{27}-m_{31}$	11X11	✓			
			$m_{23}-m_{31}$	1X111	✓			
			$m_{15}-m_{31}$	X1111	✓			

$K^3(f)$		$Z(f)$
$m_1-m_3-m_9-m_{11}-m_{17}-m_{19}-m_{25}-m_{27}$	XX0X1	0010X
$m_1-m_5-m_9-m_{13}-m_{17}-m_{21}-m_{25}-m_{29}$	XXX01	0100X
$m_{17}-m_{19}-m_{21}-m_{23}-m_{25}-m_{27}-m_{29}-m_{31}$	1XXX1	1011X
$m_9-m_{11}-m_{13}-m_{15}-m_{25}-m_{27}-m_{29}-m_{31}$	X1XX1	1101X
		XX0X1
		XXX01
		1XXX1
		X1XX1

## Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы											
		0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
		0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
		1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
		1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
		3	4	5	8	9	15	21	22	23	25	26	27
	0010X		X	X									
	0100X				X	X							
	1011X								X	X			
	1101X											X	X
	XX0X1	X				X					X		X
A	XXX01			X		X		X			X		
B	1XXX1							X		X	X		X
	X1XX1					X	X				X		X

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} XX0X1 \\ 0010X \\ 0100X \\ X1XX1 \\ 1011X \\ 1101X \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы
		1
		0
		1
		0
		1
		21
A	XXX01	X
B	1XXX1	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = A \vee B$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \left\{ \begin{array}{l} T \\ A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} XX0X1 \\ 0010X \\ 0100X \\ X1XX1 \\ 1011X \\ 1101X \\ XX0X1 \end{array} \right\} \quad C_2 = \left\{ \begin{array}{l} T \\ B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} XX0X1 \\ 0010X \\ 0100X \\ X1XX1 \\ 1011X \\ 1101X \\ 1XXX1 \end{array} \right\}$$

$$S_1^a = 22 \quad S_2^a = 22$$

$$S_1^b = 29 \quad S_2^b = 29$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} XX0X1 \\ 0010X \\ 0100X \\ X1XX1 \\ 1011X \\ 1101X \\ XX01 \end{array} \right\}$$

$$S^a = 22$$

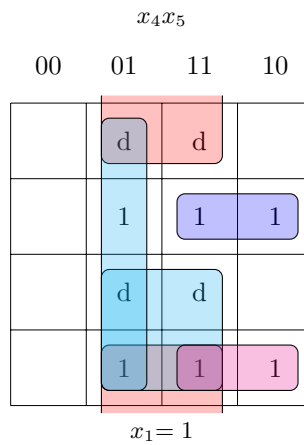
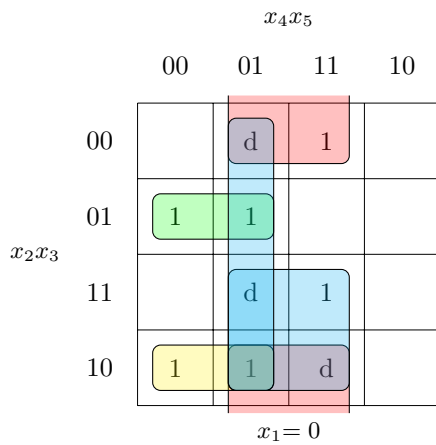
$$S^b = 29$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee x_2 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_4} x_5$$

## Минимизация булевой функции на картах Карно

### Определение МДНФ



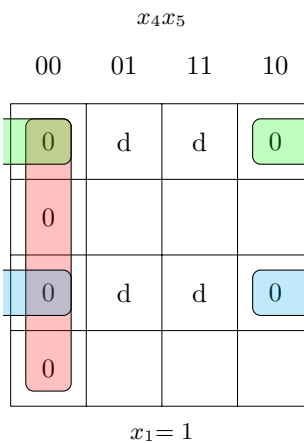
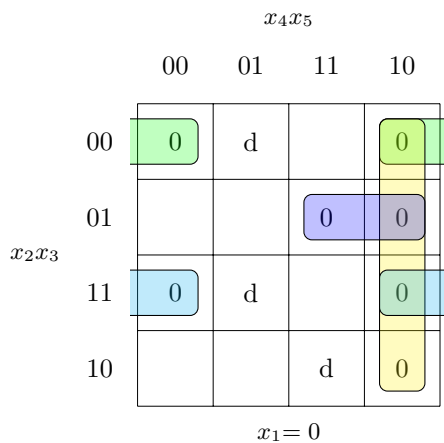
$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} XX0X1 \\ 0010X \\ 0100X \\ X1XX1 \\ 1011X \\ 1101X \\ XX01 \end{array} \right\}$$

$$S^a = 22$$

$$S^b = 29$$

$$f = \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee x_2 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_4} x_5$$

### Определение МКНФ



$$C_{\min} = \left\{ \begin{array}{l} 1XX00 \\ X00X0 \\ 0XX10 \\ X11X0 \\ 0011X \end{array} \right\}$$

$$S^a = 16$$

$$S^b = 21$$

$$f = (\overline{x_1} \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$$

# Преобразование минимальных форм булевой функции

## Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_3} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee x_2 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_4} x_5 \quad S_Q = 29 \quad \tau = 2$$

$$f = x_5 (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) (x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = \overline{x_2} x_3$$

$$\overline{\varphi} = x_2 \vee \overline{x_3}$$

$$f = x_5 (\overline{\varphi} \vee \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) (x_2 \overline{x_3} \vee \varphi) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 5$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = x_5 (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) (x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

## Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (\overline{x_1} \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 2$$

Декомпозиция невозможна

$$f = (x_1 \vee \overline{x_4} \vee x_5 (x_2 \vee \overline{x_3})) (\overline{x_1} \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee x_5) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5) \quad S_Q = 20 \quad \tau = 4$$

## Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 1$$

## Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_5 (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) (x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3) \quad (S_Q = 21, \tau = 4)$$

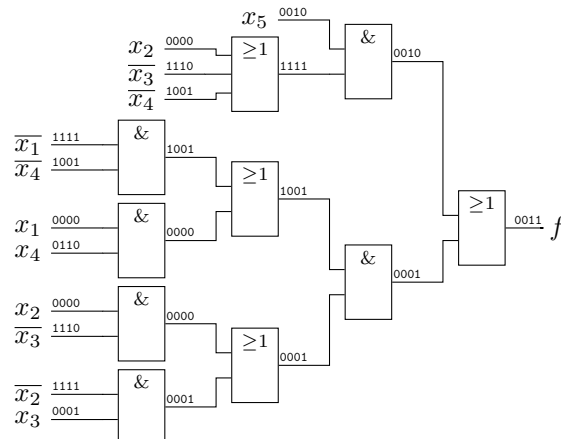
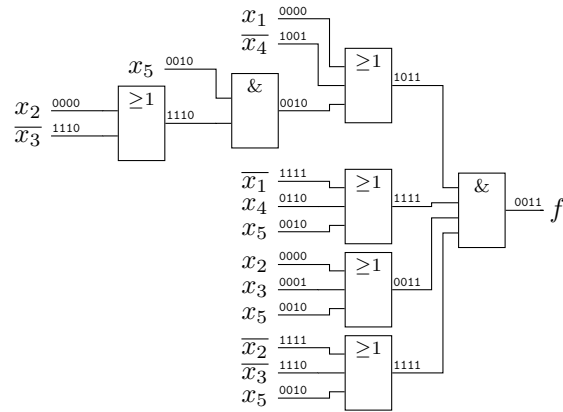


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_1 \vee \overline{x_4} \vee x_5 (x_2 \vee \overline{x_3})) (\overline{x_1} \vee x_4 \vee x_5) (x_2 \vee x_3 \vee x_5) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5) \quad (S_Q = 20, \tau = 4)$$



## Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_5 \varphi x_4 x_1 x_4 x_1 x_4 x_2 x_3 \varphi}}} \quad (S_Q = 30, \tau = 8)$$

$$\varphi = \overline{x_2} x_3$$

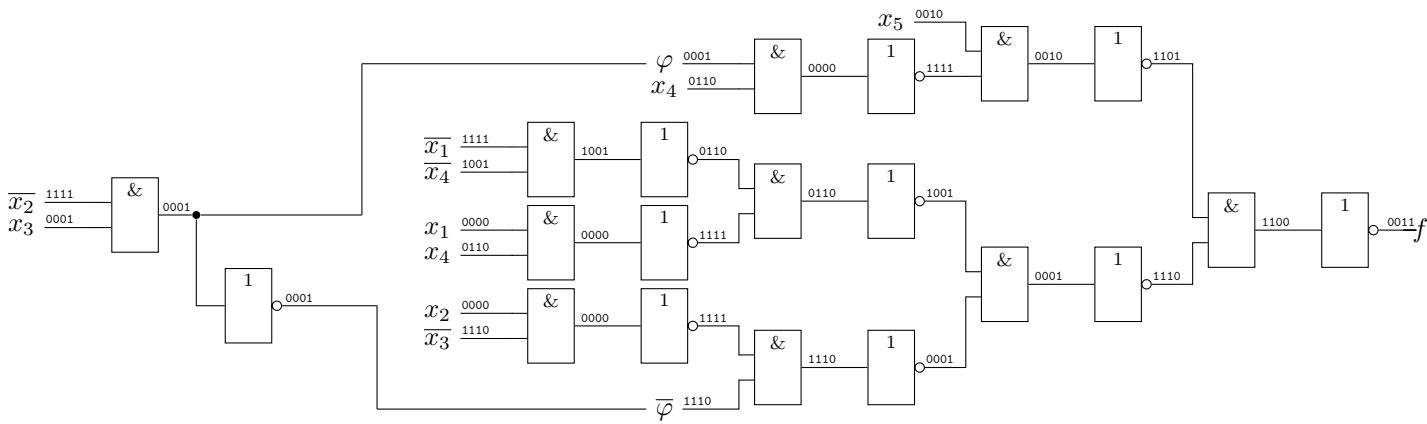
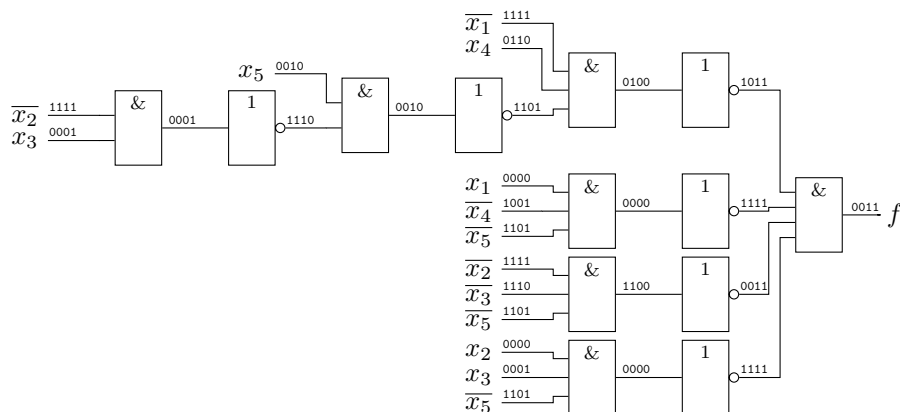


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1 x_4 x_5 \overline{x_2} x_3 x_1 \overline{x_4} x_5 \overline{x_2} x_3 x_5 x_2 x_3 \overline{x_5}}}} \quad (S_Q = 26, \tau = 7)$$



## Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_5} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_3} \quad (S_Q = 24, \tau = 5)$$

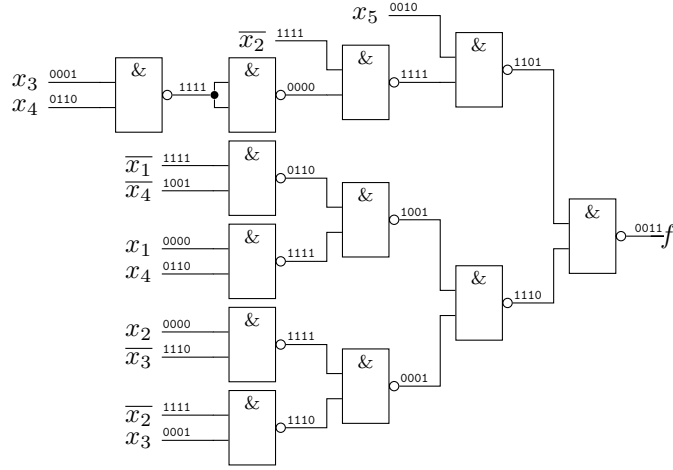


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_5} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{x_5} \overline{x_2} \overline{x_3} \quad (S_Q = 28, \tau = 7)$$

