Решение задач «Матрицы и СЛАУ»

Описание

Разделитесь на команды по 3-4 человека. Придумайте название команды. Получите номер у преподавателя.

Подготовьте один лист-чистовик на команду. Запишите в него название команды, её номер, полученный у преподавателя, и список команды (Фамилия Имя № группы). Поставьте сегодняшнюю дату.

Решите предложенные задачи. Вычисления и промежуточные результаты вы можете оформлять, где вам удобно. Ответы на решенные задачи запишите в лист-чистовик, указывая номера задач. По окончании работы сдайте лист преподавателю на проверку. Результаты будут оглашены в общем чате в вк спустя некоторое время.

За работу команда может получить до 7 баллов. Эти баллы выставляются каждому участнику команды.

Задача 1. «Матричное уравнение» – 1.5 балла

Решите матричное уравнение $AXB = (\alpha C + D)^T$. Ответ запишите в виде матрицы.

№ ком.	Условие
1.	$A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-34 & -14\\ 3 & -2\end{pmatrix},\ \alpha=-2.$
2.	$A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}9 & 5\\ -31 & -13\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}49 & 53\\ -107 & -73\end{pmatrix},\ \alpha=-3.$
3.	$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-7 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ 8 & -1\end{pmatrix},\ \alpha=-1.$
4.	$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}9 & -7\\ 4 & -12\end{pmatrix},\ \alpha=1.$
5.	$A=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}12 & -16\\ -8 & 12\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}22 & -26\\ -19 & 29\end{pmatrix},\ \alpha=-1.$
6.	$A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-34 & -14\\ 3 & -2\end{pmatrix},\ \alpha=-2.$
7.	$A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}9 & 5\\ -31 & -13\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}49 & 53\\ -107 & -73\end{pmatrix},\ \alpha=-3.$
8.	$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-7 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ 8 & -1\end{pmatrix},\ \alpha=-1.$
9.	$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}9 & -7\\ 4 & -12\end{pmatrix},\ \alpha=1.$
10.	$A=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}12 & -16\\ -8 & 12\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}22 & -26\\ -19 & 29\end{pmatrix},\ \alpha=-1.$

Задача 2. «Базис системы векторов» – 2 балла

Дана система векторов $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^{6}$. Дополните подсистему $\{a_1, a_2\}$ до базиса $\mathcal{B}$ всей системы $\mathcal{A}$. Запишите базис $\mathcal{B}$. Укажите ранг системы $\mathcal{A}$. Разложите по базису $\mathcal{B}$ вектор a_6 .

№ ком.	Условие
1.	$a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$
2.	$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$
3.	$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -6 \\ 22 \end{pmatrix}$
4.	$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \\ 22 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
5.	$a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$
6.	$a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$
7.	$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$
8.	$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -6 \\ 22 \end{pmatrix}$
9.	$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \\ 22 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
10.	$a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Задача 3. «Фундаментальная система решений» – 2 балла

Найдите ФСР системы $AX = \mathbb{O}$.

При решении не меняйте положение столбцов в матрице. Связанными переменными выберите те, которые относятся к левым столбцам матрицы, а свободными – правые. Ответ запишите в виде системы столбцов.

№ ком.	Условие
1.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & 9 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & -6 & -4 \end{pmatrix}$
2.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
3.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$
4.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
6.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & 9 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & -6 & -4 \end{pmatrix}$
7.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
8.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 & -9 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$
9.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
10.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 4. «Общее решение СЛАУ» – 1.5 балла

Найдите общее решение системы. Решение запишите в матричном (столбцовом) виде.

№ ком.	Условие
1.	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1-4x_2-x_3+x_4=-9 \\ 2x_1-2x_2+2x_3-2x_4=4 \\ 4x_1-6x_2+4x_3-6x_4=4 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4=3 \\ 2x_1-x_2-2x_3-x_4=-1 \\ 3x_1+4x_2+x_3=0 \\ x_1+5x_2+3x_3+x_4=1 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4=2 \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3-2x_4=9 \\ 2x_1+x_2+3x_3-4x_4=6 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1-4x_2+x_3+2x_4=-1 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=-2 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1-4x_2-x_3+x_4=-9 \\ 2x_1-2x_2+2x_3-2x_4=4 \\ 4x_1-6x_2+4x_3-6x_4=4 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4=3 \\ 2x_1-x_2-2x_3-x_4=-1 \\ 3x_1+4x_2+x_3=0 \\ x_1+5x_2+3x_3+x_4=1 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4=2 \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3-2x_4=9 \\ 2x_1+x_2+3x_3-4x_4=6 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=-1 \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+2x_3+x_4=0 \\ x_1-4x_2+x_3+2x_4=-1 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=-2 \end{cases}$