

**В каком виде искать частное решение  
линейного неоднородного дифференциального уравнения  
с постоянными коэффициентами  $y'' + py' + qy = f(x)$ ?**

После долгих раздумий я принял решение создать отдельную справочную таблицу для подбора частного решения неоднородного ДУ. В методический материал сведены практически все типовые ситуации, которые могут встретиться на практике, кроме того, приведены случаи подбора частного решения для уравнений повышенной сложности.

Как всегда объяснения ведутся на конкретных примерах с минимумом формул и параметров. **Обязательно прочитайте выводы на последней странице!!!**

**I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля.**

*Пример:* Рассмотрим неоднородное уравнение  $y'' + y' - 2y = f(x)$

Для соответствующего однородного уравнения  $y'' + y' - 2y = 0$  составим характеристическое уравнение  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  и найдём его корни:  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$

Итак, получены различные действительные корни, среди которых нет нуля.

Правая часть $f(x)$	В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?
1. $f(x) = 4$ (или другая ненулевая константа)	$\tilde{y} = A$
2. $f(x) = 3x - 1$	$\tilde{y} = Ax + B$
3. $f(x) = x^2 - x$	$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$
4. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 1$	$\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
<b>Примечание:</b> обратите внимание, что когда в правой части $f(x)$ находится неполный многочлен, то частное решение подбирается <u>без пропусков степеней</u> , пример: $f(x) = -5x$ Это многочлен первой степени, и в нём отсутствует константа. Однако при подборе частного решения константу пропускать нельзя, то есть частное решение необходимо искать в виде $\tilde{y} = Ax + B$	
5. $f(x) = 2e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{3x}$ <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -2$ или $\lambda_2 = 1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y} = Ae^{3x}$
6. $f(x) = (2x - 3)e^{-x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{-1 \cdot x}$ <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -2$ или $\lambda_2 = 1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-x}$
7. $f(x) = \frac{x}{2}e^{-2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{-2x}$ <b>совпал</b> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -2$ . В подобной ситуации «штатный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-2x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{-2x}$ , то есть, искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-2x}$

8. $f(x) = e^x$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{1x}$ совпал с корнем характеристического уравнения $\lambda_2 = 1$ . Аналогично: «штатный» подбор $\tilde{y} = Ae^x$ домножаем на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot Ae^x$ , то есть ищем частное решение в виде: $\tilde{y} = Axe^x$
<p><b>Примечание:</b> обратите внимание, что опять же в случае неполных многочленов <u>степени не теряются</u>, например, если <math>f(x) = 7x^2e^{5x}</math> (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени и константа), то частное решение следует искать в виде <math>\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{5x}</math>.</p> <p>Если <math>f(x) = (1 - x^2)e^{-2x}</math> (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени), то частное решение ищем в виде <math>\tilde{y} = x(Ax^2 + Bx + C)e^{-2x} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{-2x}</math></p>	
9. $f(x) = \sin x$	$\tilde{y} = A \cos x + B \sin x$
10. $f(x) = -3 \cos 2x$	$\tilde{y} = A \cos 2x + B \sin 2x$
11. $f(x) = 2 \cos 3x - 4 \sin 3x$	$\tilde{y} = A \cos 3x + B \sin 3x$
<p><b>Примечание:</b> в подборе частного решения <b>всегда должен присутствовать и синус и косинус</b> (даже если в правую часть <math>f(x)</math> входит <b>только</b> синус или <b>только</b> косинус).</p> <p>Редко, но встречаются следующие похожие случаи:</p>	
12. $f(x) = -x \sin 5x$	$\tilde{y} = (Ax + B) \cos 5x + (Cx + D) \sin 5x$
13. $f(x) = (x - 1) \cos \frac{x}{2}$	$\tilde{y} = (Ax + B) \cos \frac{x}{2} + (Cx + D) \sin \frac{x}{2}$
14. $f(x) = x \cos x + 2 \sin x$	$\tilde{y} = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$
И заключительные примеры, здесь тоже всё прозрачно:	
15. $f(x) = 2e^x \sin 2x$	$\tilde{y} = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$
16. $f(x) = \frac{1}{3} e^{-3x} \sin x$	$\tilde{y} = e^{-3x} (A \cos x + B \sin x)$
17. $f(x) = e^{-2x} (5 \sin 3x - \cos 3x)$	$\tilde{y} = e^{-2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$
<p><b>Примечание:</b> в примерах 15-17 хоть и есть экспонента, но корни характеристического уравнения <math>\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1</math> нас уже совершенно не волнуют – подбор частного решения идёт штатным образом без всяких домножений на «икс».</p>	

## II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю.

Такой диффур имеет вид  $y'' + py' = f(x)$ .

*Пример:* Рассмотрим подопытное неоднородное уравнение  $y'' + 3y' = f(x)$ .

Для соответствующего однородного уравнения  $y'' + 3y' = 0$  составим характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 3\lambda = 0$  и найдем его корни:  $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0$

Получены различные действительные корни, один из которых равен нулю.

Правая часть $f(x)$	В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?
<b>Правило:</b> Если в правой части $f(x)$ находится ненулевая константа или многочлен, и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то «очевидный» подбор частного решения необходимо домножить на «икс»:	
18. $f(x) = -10$	$\tilde{y} = x \cdot A$ , то есть частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax$
19. $f(x) = -2x$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax + B)$ , т.е. частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$
20. $f(x) = x^2 + 3$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax^2 + Bx + C)$ или $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)$
21. $f(x) = x^3$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ или $\tilde{y} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx)$
Если <b>в правую часть входит экспонента или экспонента, умноженная на многочлен</b> , то подбор частного решения следует проводить по тем же принципам, по которым он проведён в примерах № 5-8. На всякий случай еще пара примеров:	
22. $f(x) = (x^2 + 2x)e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{3x}$ не совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$ $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$
23. $f(x) = (1 - x)e^{-3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{-3x}$ совпал с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$ . Поэтому «обычный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-3x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{-3x}$ , то есть, искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$
Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется точно так же, как уже разобрано – в штатном режиме см. <a href="#">Раздел I</a> .	

### Дополнительный пример:

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка:  $y''' - y'' = f(x)$ . Для соответствующего однородного уравнения  $y''' - y'' = 0$  составим характеристическое уравнение  $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$  и найдем его корни:  $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 1$ .

Если получено **два кратных нулевых корня** и **в правой части  $f(x)$  находится многочлен** (аналогично примерам № 18-21), то «штатный» подбор нужно домножать уже на  $x^2$ .

Например, если  $f(x) = 3x$ , то частное решение следует искать в виде:

$$\tilde{y} = x^2 \cdot (Ax + B) = (Ax^3 + Bx^2)$$

### III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если эти корни равны нулю  $\lambda_{1,2} = 0$ , то речь идёт об уравнении  $y'' = f(x)$ , которое проще решить двукратным интегрированием правой части:

[http://mathprofi.ru/differencialnye\\_uravnenija\\_dopuskajushie\\_ponizhenie\\_poryadka.html](http://mathprofi.ru/differencialnye_uravnenija_dopuskajushie_ponizhenie_poryadka.html)

Если же корни ненулевые, то выполняем подбор.

*Пример:* Рассмотрим неоднородное уравнение  $y'' - 4y' + 4y = f(x)$ .

Для соответствующего однородного уравнения  $y'' - 4y' + 4y = 0$  составим характеристическое уравнение  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$  и найдем его корни:  $\lambda_{1,2} = 2$

Получены кратные (совпавшие) действительные корни

Правая часть $f(x)$	В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?
$f(x)$ – ненулевая константа или многочлен	Если $\lambda_{1,2} \neq 0$ , то подбор частного решения следует осуществлять «штатным» способом точно так же, как в примерах № 1-4; если $\lambda_{1,2} = 0$ , то «очевидный» подбор следует домножить на $x^2$ либо дважды проинтегрировать правую часть.
24. $f(x) = 5e^x$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{1x}$ не совпадает с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$ $\tilde{y} = Ae^x$
25. $f(x) = -2e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{2x}$ совпал с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$ . Поэтому очевидный подбор $\tilde{y} = Ae^{2x}$ следует домножить на $x^2$ : $\tilde{y} = x^2 \cdot Ae^{2x}$ и искать частное решение в виде: $\tilde{y} = Ax^2e^{2x}$
26. $f(x) = (5x - 1)e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{2x}$ совпал с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$ . Поэтому «штатный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{2x}$ следует домножить на $x^2$ : $\tilde{y} = x^2 \cdot (Ax + B)e^{2x}$ , то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$
Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется обычным образом – см. <a href="#">Раздел I</a> .	

**IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , причём  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$**

*Пример:* Рассмотрим неоднородное уравнение  $y'' + 6y' + 10y = f(x)$ .

Для соответствующего однородного уравнения  $y'' + 6y' + 10y = 0$  составим характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$  и найдем его корни:  $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$

Получены сопряженные комплексные корни с ненулевой действительной частью  $\alpha$ .

Правая часть $f(x)$	В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?
Подбор частного решения осуществляется очевидным образом (см. примеры № <a href="#">1-6</a> , <a href="#">9-14</a> ) за исключением следующих видов правой части:	
27. $f(x) = 2e^{-3x} \sin 2x$	<p>Проще всего объяснить так, берём правую часть и составляем сопряженные комплексные числа:</p> $2e^{-3x} \sin 2x$ <p>Полученные сопряженные комплексные числа <math>-3 \pm 2i</math> <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения <math>\lambda_{1,2} = -3 \pm i</math>, поэтому частное решение следует искать в обычном виде: <math>\tilde{y} = e^{-3x} (A \cos 2x + B \sin 2x)</math></p>
28. $f(x) = 2e^{-3x} \cos x$	<p>Составляем сопряженные комплексные числа:</p> $2e^{-3x} \cos(1 \cdot x)$ <p>Составленные сопряженные комплексные числа <math>-3 \pm i</math> <b>совпали</b> с корнями характеристического уравнения <math>\lambda_{1,2} = -3 \pm i</math>, поэтому «обычный» подбор частного решения следует домножить на «икс»: <math>\tilde{y} = x \cdot e^{-3x} (A \cos x + B \sin x)</math> или:</p> $\tilde{y} = e^{-3x} (Ax \cos x + Bx \sin x)$
29. $f(x) = e^x (5 \cos x - 3 \sin x)$	$e^1 x (5 \cos(1 \cdot x) - 3 \sin(1 \cdot x))$ <p>Составленные сопряженные комплексные числа <math>1 \pm i</math> <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения <math>\lambda_{1,2} = -3 \pm i</math>, поэтому частное решение ищем в виде:</p> $\tilde{y} = e^x (A \cos x + B \sin x)$

<p>30. <math>f(x) = e^{-3x}(-\cos x + 2\sin x)</math></p>	 <p>Составленные сопряженные комплексные числа <math>-3 \pm i</math> <b>совпали</b> с корнями <math>\lambda_{1,2} = -3 \pm i</math>, поэтому:</p> $\tilde{y} = x \cdot e^{-3x}(A \cos x + B \sin x) = e^{-3x}(Ax \cos x + Bx \sin x)$
---	---

<p><b>V. Характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни:</b> <math>\lambda_{1,2} = \pm \beta i</math></p> <p>В таком диффуре отсутствует первая производная: <math>y'' + qy = f(x)</math></p> <p><i>Пример:</i> Рассмотрим неоднородное уравнение <math>y'' + 4y = f(x)</math>.          Для соответствующего однородного уравнения <math>y'' + 4y = 0</math> составим характеристическое уравнение <math>\lambda^2 + 4 = 0</math> и найдем его корни: <math>\lambda_{1,2} = \pm 2i</math></p> <p>Получены <u>чисто мнимые</u> сопряженные комплексные корни:</p>	
<p><b>Правая часть <math>f(x)</math></b></p>	<p><b>В каком виде нужно искать частное решение <math>\tilde{y}</math> неоднородного уравнения?</b></p>
<p>Подбор частного решения осуществляется очевидным «штатным» образом, за исключением следующих видов правой части:</p>	
<p>31. <math>f(x) = \sin x</math></p>	<p>Коэффициент <math>\sin(1 \cdot x)</math> <u>не совпадает</u> с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях <math>\pm 2i</math>, поэтому частное решение ищем в обычном виде:  <math>\tilde{y} = A \cos x + B \sin x</math></p>
<p>32. <math>f(x) = -3 \sin 2x</math></p>	<p>Коэффициент <math>-3 \sin 2x</math> <b>совпал</b> с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях <math>\pm 2i</math>, поэтому при подборе «штатное» частное решение необходимо домножить на «икс»: <math>\tilde{y} = x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x)</math>, то есть искать частное решение в виде:  <math>\tilde{y} = Ax \cos 2x + Bx \sin 2x</math></p>
<p>33. <math>f(x) = 2 \cos 3x - 2 \sin 3x</math></p>	<p>Коэффициенты <math>2 \cos 3x - 2 \sin 3x</math> <u>не совпадают</u> с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях <math>\pm 2i</math>, поэтому частное решение ищем в обычном виде:  <math>\tilde{y} = A \cos 3x + B \sin 3x</math></p>
<p>34. <math>f(x) = 2x \cos 2x - \sin 2x</math></p>	<p>Коэффициенты <math>2x \cos 2x - \sin 2x</math> <b>совпали</b> с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях <math>\pm 2i</math>, поэтому при подборе очевидное частное решение опять же домножаем на «икс»:  <math>\tilde{y} = x \cdot ((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x)</math>, или:  <math>\tilde{y} = (Ax^2 + Bx) \cos 2x + (Cx^2 + Dx) \sin 2x</math></p>

35. $f(x) = -3x \cos 4x$	Коэффициент $-3x \cos 4x$ не совпадает с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm 2i$ , поэтому частное решение ищем в «штатном» виде: $\tilde{y} = (Ax + B) \cos 4x + (Cx + D) \sin 4x$
--------------------------	---

### Краткие итоги по пяти разделам:

Тип корней характеристического уравнения	Когда следует проявить <b>ПОВЫШЕННОЕ ВНИМАНИЕ</b> при подборе частного решения
<b>I.</b> Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля	Если в правой части $f(x)$ находится <u>экспонента</u> или <u>экспонента, умноженная на многочлен</u> ( <a href="#">примеры 5-8</a> )
<b>II.</b> Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю	Если в правой части $f(x)$ находится <u>константа, многочлен, экспонента</u> или <u>экспонента, умноженная на многочлен</u> ( <a href="#">примеры 18-23</a> )
<b>III.</b> Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня	Если в правой части $f(x)$ находится <u>экспонента</u> или <u>экспонента, умноженная на многочлен</u> ( <a href="#">примеры 24-26</a> )
<b>IV.</b> Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , причём $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$	Если в уравнении есть правые части, разобранные в <a href="#">примерах 27-30</a> : $f(x) = 2e^{-3x} \sin 2x$ , $f(x) = 2e^{-3x} \cos x$ , $f(x) = e^x(5\cos x - 3\sin x)$ и т.п.
<b>V.</b> Характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$	Когда в правой части находится <u>синус, косинус</u> или <u>синус и косинус</u> одновременно; либо <u>данные функции, умноженные на многочлены</u> (многочлен) ( <a href="#">примеры 31-35</a> )