***Вопрос 1***

**(Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределенного интеграла)**функция *F(x)* называется первообразной функции *f(x)* на интервале от *(а,b)* если:   
1) *F(x)* дифференцируема на *(а,b).*   
2) *F(x)’= f(x)* и существует *х Є(а,b).*

*Теор. Пусть F1(x) и F2(x)- первообразные функции f(x) на (a,b).Тогда F1(х)=F2(x)+C. (две первообразные одной функции отличаются на константу)*

*Док-во: Рассмотрим функцию Ф(х)= F1(x)- F2(x) => Ф’(x)=F’1(x)-F’2(x)=f(x)-f(x)=0 для любого Х из интервала (а,в). Покажем что если Ф’(x)=C=const для любого Х из интервала (а,в). Пусть х1,х2 принадлежат интервалу (а,в), х1<х2: Тогда согласно теореме Лагранжа Ф(х2)-Ф(х1)=Ф’(₰)(х2-х1),Ф’(x)=0 для любого Х из интервала (а,в)=>Ф’(₰)=0=> Ф(х2)-Ф(х1)=0 для любого Х из интервала (а,в)⬄Ф(х)=С=> F1(х)=F2(x)+C.*Таким образом, вся совокупность первообразных функции *f(x)* описывается выражением *F(x) + C*, где *F(x)* — какая-либо фиксированная первообразная, а *C* — произвольная постоянная. Совокупность всех первообразных функции *f(x)* (на некотором промежутке) называется неопределенным интегралом и обозначается

Свойства неопределенного интеграла:   
1) , ;  
2 где *F(x)=df(x)*  
3) α ≠ 0;

4)

***Вопрос 2***

**(Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей)**  
1) **Разложение правильной рациональной дроби на простейшие**  **или метод неопределенных коэффициентов**

B курсе высшей алгебры доказывается, что всякая правильная рациональная дробь *P(x)/Q(x),* знаменатель которой записывается в виде:

где *, ..., , , ..., , , ...,*  − вещественные числа; квадратные трехчлены не имеют

вещественных корней, и .

следующим образом представляется в виде суммы простейших дробей.

При этом если многочлен *Q(x)* не имеет вещественных корней, то в написанном разложении отсутствуют линейные множители, а если все корни этого многочлена вещественны, то отсутствуют квадратные трехчлены. Отметим еще, что разложение единственно (с точностью до порядка сомножителей).

Интегрирование простейших дробей

***Вопрос 3***

**(Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции)**1) ;   
2) ;   
2a) Если *f(x)* и *g(x)* интегрируемы на [*a,b*], то и и интегр. на [*a,b*];  
3) Линейность. Пусть функции *f1(x)* и *f2(x)* интегрируемы на отрезке [*a, b*], и пусть *α1* и *α2* - произвольные вещественные числа. Тогда функция *α1f1(x) + α2f2(x)* также интегрируема на [*a, b*], и

Док-во: для любого разбиения отрезка и любого выбора точек выполняется . Перейдем в этом равенстве к пределу при http://energy.bmstu.ru/gormath/mathan2s/dint/Image548.gif. Так как существуют пределы интегральных сумм, стоящих в левой части равенства, то существует предел линейной комбинации этих сумм, следовательно, существует предел правой интегральной суммы, откуда следует истинность и утверждения, и равенства.

4) Если *f(x)* интегрируема на [*a, b*], то *f(x)* интегрируема на любом отрезке [*α, β*] [*a, b*];

5) Аддитивность. Пусть функция f(x) интегрируема на отрезках [a, c] и [c, b]. Тогда она интегрируема и на отрезке [a, b], причем ;

**Док-во**. Если ***f***(***x***) удовлетворяет условиям интегрируемости по отрезку[***a***,***b***], то она удовлетворяет условиям интегрируемости по отрезкам [***a***,***c***] и [***c***,***b***]. Будем брать такие разбиения отрезка[***a***,***b***], чтобы точка ***c*** являлась одним из узлов ***xi***:***c***=***xi***0,. Тогда. В этом равенстве первая сумма справа - интегральная сумма для, вторая - для. Переходим к пределу приhttp://energy.bmstu.ru/gormath/mathan2s/dint/Image555.gif. Пределы для всех трёх сумм существуют, и .

6) Пусть функции *f1(x)* и *f2(x)* интегрируемы на отрезке [*a, b*], и пусть в каждой точке *x* этого отрезка выполняется неравенство *f1(x)* ≤ *f2(x).* Тогда ;Док-во: Для любого разбиения отрезка и любого выбора nочек при. Переходя в этом неравенстве к пределу при http://energy.bmstu.ru/gormath/mathan2s/dint/Image566.gif, получаем требуемое неравенство.

7) Теорема (об оценке)  
Значение определенного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений подынтегральной функции на длину интервала интегрирования, т.е.

где *M* и *m* -  соответственно наименьшее и наибольшее значения функции *f*(*x*) в интервале [*a, b*];Док-во: Докажем левое неравенство (цифрами над знаками импликации обозначены номера применяемых ранее доказанных свойств):. Аналогично доказывается и правое неравенство.

8)Теорема (об оценке модуля определенного интеграла)  
Пусть функция f(x) интегрируема на отрезке [*a, b*] . Тогда функция *|f(x)*| также интегрируема на этом отрезке, и **Док-во** .   
9) Терема( о среднем)  
Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*] . Тогда существует точка *ξ* ∈ [*a, b*] такая, что **Док-во**. Функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке своё наименьшее ***m*** и наибольшее ***M*** значения. Тогда . Число заключено между минимальным и максимальным значениями функции на отрезке. Одно из свойств функции, непрерывной на отрезке, заключается в том, что эта функция принимает любое значение, расположенное между ***m*** и ***M***. Таким образом, существует точка , такая что.

10) ***-Теорема*** (о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции**)**

Если *f(x)* интегрируема на [*a, b*] и *f(x) 0* и x Є[*a,b*], то   
***-Доказательство:***

Составим суммут.к. *f(*) и

Что и требовалось доказать!

***Вопрос 4***

**(Доказать теорему об оценке определенного интеграла)**

***- Теорема:***

Значение определенного интеграла заключено между произведениями наименьшего и наибольшего значений подынтегральной функции на длину интервала интегрирования, т.е.где *M* и *m* - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции *f*(*x*) в интервале [*a, b*];

***- Доказательство:***

Возьмем две функции *M*−*f*(*x*) и *m*−*f*(*x*). Первая из них в интервале [*a, b*] неотрицательна, вторая неположительна. Значит по теореме о знаке интеграла:

и

и

что и требовалось доказать. Из доказательства теоремы о знаке интеграла следует, что знаки неравенств могут перейти в знаки равенств только в том случае, когда функция *f(x)* постоянна.

***Вопрос 5***

**(Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла)**

Пусть функция *f(x)* интегрируема на отрезке [*a, b*]. Тогда функция |f(x)| также интегрируема на этом отрезке, и

***-Доказательство:***

Факт интегрируемости функции |f(x)| нетрудно доказать для кусочно-непрерывной функции *f(x)*; в общем случае принимаем это без доказательства (сама теорема принимается без доказательств). Запишем очевидное неравенство для интегральных сумм:.Переходя к пределу при стремлении к нулю диаметра разбиения, получаем требуемое.

Заметим, что (1) можно обобщить и на случай *a > b*. В этом случае соответствующее неравенство приобретает вид:

***Вопрос 6***

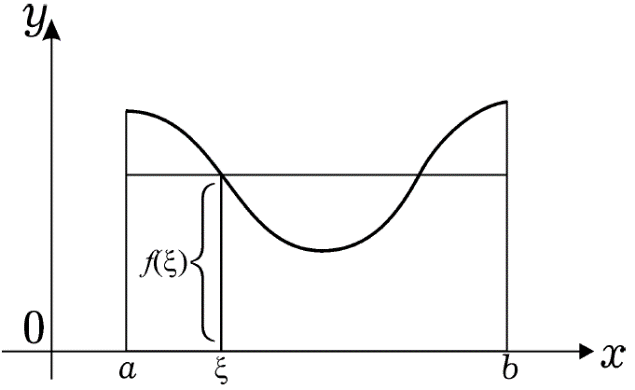
***- Теорема:***

Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*]. Тогда существует точка *ξ* ∈ [*a, b*] такая, что***- Доказательство:***

Т.к. f(x) непрерывна на [*a, b*], то эта функция достигает на этом отрезке своего наименьшего значения m и наибольшего значения M и принимает все значения из отрезка [*m, M*]. Далее, из неравенства m ≤ f(x) ≤ M получаем, чтоИлиПоэтому существует число ξ ∈ [*a, b*] такое, что Отсюда легко следует требуемое. ***Теорема доказана.***

***-Геометрический смысл:***

доказанной теоремы заключается в том, что на отрезке [a, b] найдется точка ξ такая, что площадь соответствующей криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием (*b – a)* и высотой *f(ξ);* при этом предполагается, что *f(x)* неотрицательна на [*a, b*]

***Вопрос 7***

**(Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу)**

***-Определение:*** Если функция *f(x)* интегрируема на отрезке [*a, b*], то для любого x, a ≤ x ≤ b, существует интеграл

который называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

***-Теорема:***

Пусть функция *f(x)* интегрируема на отрезке [*a, b*] и непрерывна в некоторой точке *x* этого отрезка. Тогда функция (1) дифференцируема в точке *x*, и *F’(x)=f(x)*

***-Доказательство:*** Достаточно доказать, что

Оценим сверху модуль выражения под знаком предела в левой части этого равенства;

имеем:Т.к. функция *f* непрерывна в точке *x*, то для любого > 0 существует число > 0 такое, что при любом *t*, *t-x* < , выполняется неравенство Поэтому для указанных *t* Окончательно

если *.* Это означает справедливость (2). **Теорема доказана.**

***-Следствие:*** Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*], то она имеет на этом

отрезке первообразную. В качестве такой первообразной можно взять, например, интеграл

с переменным верхним пределом.

***Вопрос 8***

**(Вывести формулу Ньютона-Лейбница)**

***- Теорема:***

Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*], и *(x)* - какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то

***-Доказательство:***

Одной из первообразных функции *f(x)* является

две первообразные функции *f(x)* различаются самое большее на константу, т.е.Подставляя сюда *x = a* , получаем, что *C* =*(a).* Поэтому При x=b получаем требуемую формулу. *Теорема доказана.*

Доказанную теорему часто называют основной теоремой интегрального исчисления. Формула (1) называется ***формулой Ньютона-Лейбница***; эту формулу часто записывают в виде правую часть при этом называют двойной подстановкой от *a* до *b*. Заметим еще, что формула Ньютона-Лейбница справедлива и при *a ≥ b*.

***Вопрос 9***

**(Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определённого интеграла)**

Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке *I*, а функция ϕ непрерывно дифференцируема на отрезке [α, β], причем ϕ*(t)* ∈ *I* для любого *t* ∈ [α, β]. Тогда, если *a* = ϕ(α), *b* = ϕ(β), то

***-Доказательство:***

В силу сделанных предположений оба интеграла, входящие в последнее равенство, существуют. Пусть *F(x)* − первообразная функции *f(x)* на отрезке *I*; эта первообразная существует в силу непрерывности *f(x)* на *I*. Тогда *F((t))* будет первообразной функции *f((t))* на отрезке [α, β], что проверяется непосредственно. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

Из двух написанных равенств следует утверждение теоремы. ***Теорема доказана***.

***Вопрос 10***

**(Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла)**

Пусть функции *u(x)* и *v(x)* непрерывно дифференцируемы на отрезке [*a, b*]. Тогда***-Доказательство:***

Рассмотрим функцию ;Следовательно, *F(x)* − первообразная для *u(x)· v’(x)*. По формуле Ньютона-Лейбница получаем

***Вопрос 11***

**(Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат)**

***-Теорема (об интеграле от периодической функции):***Если периодическая с периодом *T > 0* функция *f(x)* интегрируема на каком-либо отрезке длины T , то она интегрируема на любом отрезке, и интеграл не зависит от *α,f(x+T)=f(x).****-Доказательство:***Для упрощения доказательства предположим дополнительно, что *f(x)* непрерывна при всех *x*. Напишем очевидное равенство:В последнем интеграле сделаем замену переменной(x=u+T,x=T => u=0;dx=du,x=a+T=>u=a):Следовательно, в равенстве:***Теорема доказана.***

Пусть *f(x)* интегрируема на отрезке [*−α; α*]. ТогдаПредположив, что функция *f(x)* непрерывна, сделаем в первом интеграле замену *x = −t*; получим: ОтсюдаПоэтому в случае четной функции а в случае нечетной

***Вопрос 12, 13, 14***

**(Сформулировать свойства несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству, предельный признак сравнения, признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода)**

**Определение** Предположим, что функция f(x) задана на бесконечном промежутке вида [a,+ и интегрируема на любом конечном отрезке [a,b] , где  . Таким образом, можно рассмотреть функцию, зависящую от верхнего предела, как от переменной:

Если эта функция имеет предел при  , то число  называется **значением несобственного интеграла первого рода**: а сам определенный интеграл называется **сходящимся**. Если же предела не существует, то интеграл называется **расходящимся** и не имеет никакого числового значения.

1.(адитивность) Если существует , то http://allmath.ru/highermath/mathanalis/matan/matan/matan3/clip_image183.gif существует . При этом.

2.(линейность) Если , и сходятся ,то сходится и равен

3.Если и сходятся, f(x)g(x),то

4. Если существуют   и , то существует.

КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА.

Для сходимости интеграла  необходимо и достаточно выполнения условия :



ДОК. Сходимость интеграла равносильна существованию предела , где

 - первообразная функции на . Для существования  необходимо и достаточно по критерию Коши для предела функции, чтобы

.

Сформулируем теоремы сравнения 1 и 2 для несобственных интегралов на .

**Признак сравнения по неравенству**. Пусть функции ***f***(***x***) и ***g***(***x***) интегрируемы по любому отрезку [***a***,***b***] и при http://energy.power.bmstu.ru/gormath/mathan2s/unprint/Image669.gif удовлетворяют неравенствам http://energy.power.bmstu.ru/gormath/mathan2s/unprint/Image670.gif. Тогда:   
http://energy.power.bmstu.ru/gormath/mathan2s/unprint/Image0.gifесли сходится интеграл , то сходится интеграл ;   
http://energy.power.bmstu.ru/gormath/mathan2s/unprint/Image0.gifесли расходится интеграл , то расходится интеграл

Док-во:g(x)≥0,xϵ[a,+) Покажем, что Ф(b)=   неубывает. Пусть b1<b2,Ф(b2)=Пусть сходится =>

неубывает и ограниченно сверху .Пусть расходится д.п. сходится сходится!!!!!!!ПРОТИВОРЕЧИЕ

***(Предельный признак сравнения)***Пусть f(x) и g(x) определены на [a, интегрируемы на если сходится или расходится одновременно.Док-во:выберем ɛ так ,что ʎ+ɛ>0.1) пусть сходится сходится(свойство линейности) сходится .

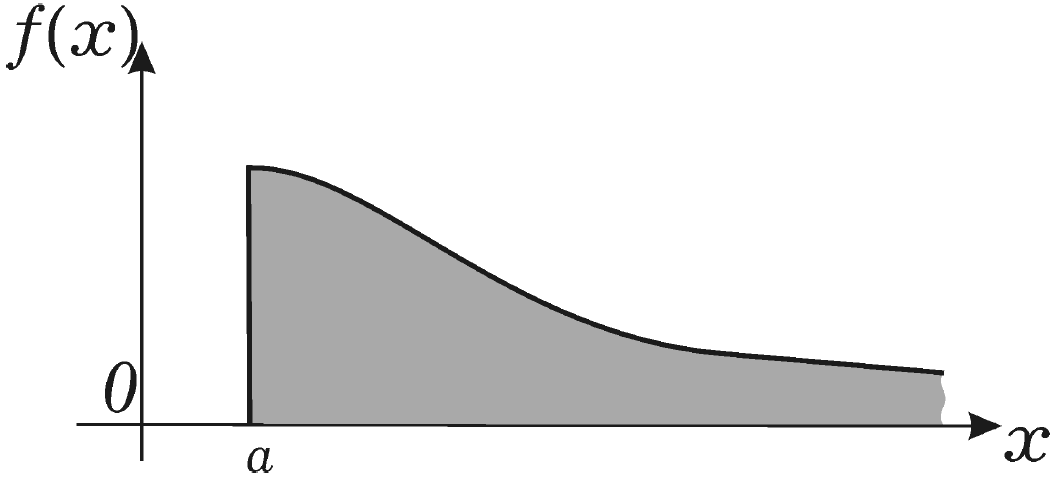
***(теорема о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)***  В некоторых приложениях несобственных интегралов возникает необходимость использования углубленного понятия сходимости. (Одно из таких приложений рассматривается в разделе "Интегралы, зависящие от параметра".) С этой целью рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Пусть функция  *f*(*x*)  интегрируема на полубесконечном интервале  [*A*, ∞). Если наряду с интегралом    сходится и интеграл  , то интеграл    называется **абсолютно сходящимся**. Говорят также, что функция  *f*(*x*)  **абсолютно интегрируема** на промежутке  [*A*, ∞).
2. Если интеграл    сходится, тогда как интеграл    расходится, то интеграл    называется **условно сходящимся**.

      Заметим, что из сходимости интеграла    вытекает сходимость интеграла    , тогда как обратное утверждение является несправедливым.Док-во:Предпологается что функция f(x) определена при : т.к. по условию сходится, то сходится и интеграл следовательно, по признаку сравнения сходится интеграл НО тогда сходится интеграл ЧТД.

Определенный интеграл от неограниченной на отрезке функции не существует; функцию, заданную на неограниченном промежутке, нельзя проинтегрировать по этому промежутку. Эти ограничения оказываются неудобными при рассмотрении многих теоретических и прикладных задач. Поэтому возникает необходимость расширить понятие интеграла. Это делается с помощью дополнительного предельного перехода. Рассмотрим сначала интегралы по неограниченному промежутку.

Пусть функция *f(x)* определена при *x > a* и интегрируема на любом отрезке [*a, b*]. Тогда на промежутке [*a, +∞*) определена функцияЕсли существует (конечный) предел то этот предел называется ***несобственным интегралом (1-го рода)*** от функции f(x) по промежутку [*a, +∞*) и обозначается В случае существования предела последний интеграл называют сходящимся, в противном случае - расходящимся. Если *f(x) > 0* и интеграл сходится, то значение этого интеграла можно истолковать геометрически как площадь бесконечной криволинейной трапеции. Для функции *f(x)*, заданной для *x ≤ b* и интегрируемой на любом отрезке [*a, b*], можно рассмотреть несобственный интеграл Если же функция *f(x)* определена на всей вещественной прямой и интегрируема на любом отрезке [*a, b*], то, выбрав произвольно точку c на этом отрезке, можно рассмотреть несобственный интеграл Такой интеграл считается сходящимся, если существуют оба предела в правой части последнего равенства. Нетрудно проверить, что сходимость (т.е. существование) интеграла и его значение не зависят от выбора точки *c.* Из определений несобственных интегралов следует, что для непрерывной функции f(x) в случае сходимости соответствующих интегралов справедливы следующие обобщения формулы Ньютона-Лейбница:где F(x) - первообразная функции f(x) на соответствующем промежутке



***Вопрос 15***

**(Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов)**

Пусть функция *f(x)* определена на [a, b) и интегрируема на любом отрезке [a.n], неограничена при .Несобственный интеграл от функции f(x) по промежутку [a,b) называется

называется несобственным интегралом (2-го рода) от неограниченной функции *f(x)* по промежутку *[a, b)* и обозначается:(интеграл называют сходящимся если предел существует и конечен, и расходящемся есть предел равен бесконечности или не существует).Если F(x) первообразная f(x) на [a,b), то = сходится тогда и только тогда когда существует конечный .

***- Теорема*** ***(признак сравнения):***

Пусть функции *f(x)* и *g(x)* интегрируемы на отрезке [*a, b*] при любом *b*, и пусть для любого x ≥ a выполняется неравенство 0 ≤ *f(x)* ≤ *g(x)*.

Тогда из сходимости интеграла следует сходимость интеграла , а из расходимости , следует расходимость

***- Доказательство:***

Из неравенства *f(x) ≤ g(x)* следует, что для любого *b*

Если второй из этих интегралов сходится, то, ввиду неотрицательности *g(x)* для некоторой константы *C* при всех *b* a выполняется неравенство . Но тогда из предыдущего неравенства для интегралов следует, что при b ≥ a:

Если интеграл расходится, а интеграл сходится, то мы получаем противоречие с только что доказанным. Поэтому расходимость первого интеграла влечет

расходимость второго, **Теорема доказана.**

***-Теорема (признак сравнения в предельной форме):***

Пусть функции *f(x)* и *g(x)* положительны при *x* ≥ *a* и интегрируемы на любом отрезке [*a, b*]. Тогда, если существует предел

то интегралы и   сходятся или расходятся одновременно.

***-Доказательство:***

В теореме содержатся четыре утверждения. Докажем лишь одно из них: если интеграл сходится, то сходится и интеграл . Возьмем . Тогда при всех x ≥ выполняется неравенство

Т.к. , то отсюда следует, что при всех указанных *x* выполняется неравенство g(x) < f(x). На основании предыдущей теоремы получаем, что сходится интеграл

а тогда сходится и интеграл . Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. **Теорема доказана.**

***Замечание:***

Из этой теоремы вытекает, что если *f(x)* и *g(x)* положительны (по крайней мере для достаточно больших *x*) и являются эквивалентными бесконечно малыми при , то интегралы от этих функций указанного вида сходятся или расходятся одновременно.

***-Теорема*** **(о сходимости абсолютно сходящегося интеграла)*:***

Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

***-Доказательство:***

Здесь, как обычно, предполагается, что функция *f(x)* определена при *x ≥ a* и интегрируема на каждом отрезке [*a, b*]. Напишем очевидное неравенство, верное для любого x ≥ a :

Т.к. по условию сходится, то сходится и интеграл . Следовательно, по признаку сравнения сходится интеграл

Но тогда сходится и интеграл

***Теорема доказана.***

***Вопрос 16***

**(Фигура ограничена кривой *y = f(x) ≥ 0,* прямыми *x = a, x = b* и *y = 0.* Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры)**

Рассмотрим вопрос о вычислении площади с помощью определенного интеграла. Выше было установлено, что при *f(x) > 0* площадь *S* соответствующей криволинейной трапеции вычисляется по формулеЕсли на отрезке [*a, b*] функция *f(x)* неположительная, т.е. *f(x) ≤ 0*, то, очевидно,Пользуясь этими замечаниями, нетрудно установить, что если плоская геометрическая фигура ограничена сверху и снизу соответственно графиками непрерывных функций *(x)* и *(x), (x)* > *(x), a ≤ x ≤ b*, а с боков - отрезками прямых *x = a* и *x = b*, то площадь *S* этой фигуры вычисляется по формулеЕсли плоская кривая задана параметрически, т.е. в виде *x = (x), y = (x),* причем , , *a < b, > 0* на [*a, b*]

то эту же кривую можно задать и явным уравнением *y = y(x), a ≤ x ≤ b*

где *y(x) =* ; − функция, обратная по отношению к *(t)*. Все это хорошо известно из начального курса анализа.Если *y(x) > 0*, то площадь *S* соответствующей криволинейной трапеции можно вычислить следующим образом:

Т.о., в данном случае справедлива формулa Нетрудно видеть, что при < 0 эта формула справедлива лишь с точностью до знака; поэтому в общем случае

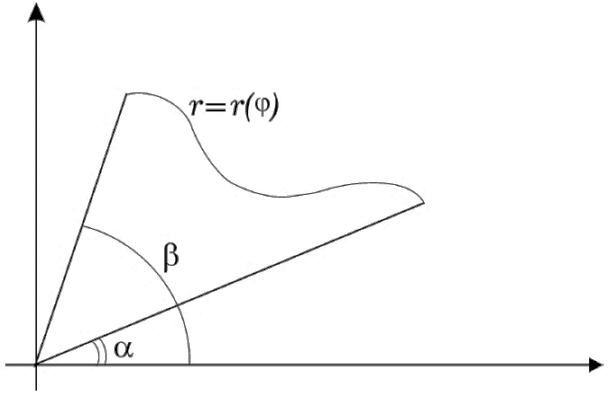
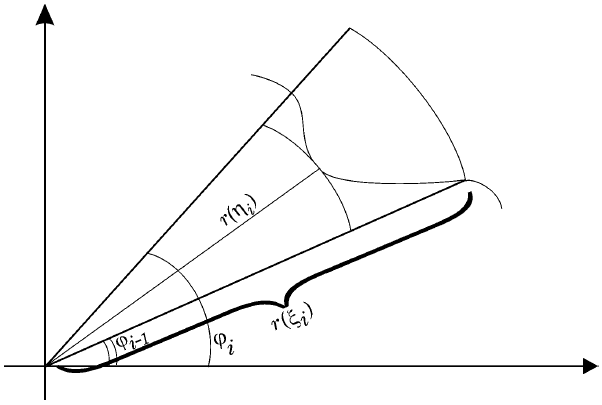
***Вопрос 17***

**(Фигура ограничена лучами , и кривой . Здесь *r* и *– полярные координаты точки, 0 ≤* α *<* β ≤ 2π. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры)**

Криволинейным сектором называется геометрическая фигура, ограниченная отрезками лучей = α, = β и кривой *r = r(*), ∈ [*α, β*]

Для вычисления площади криволинейного сектора рассмотрим разбиение отрезка [α, β] и предположив, что *r()* непрерывна на рассматриваемом отрезке, напишем очевидное неравенство

в котором *Si* − площадь криволинейного сектора, отвечающего изменению на отрезке [*−1,* ]; *r(ηi) и r(ξi)* − соответственно наименьшее и наибольшее значения функции *r*() на указанном частичном отрезке разбиении; при составлении неравенства (1) была использована известная школьная формула для площади криволинейного сектора. Кроме того, мы предполагаем дополнительно, что *r*() непрерывна на отрезке [α, β]. Суммируя неравенства (1) по *i = 1, 2, ..., n* получим, что для площади *S* рассматриваемого криволинейного сектора справедливо неравенствоПереходя здесь к пределу при → 0, получаем требуемую формулу:

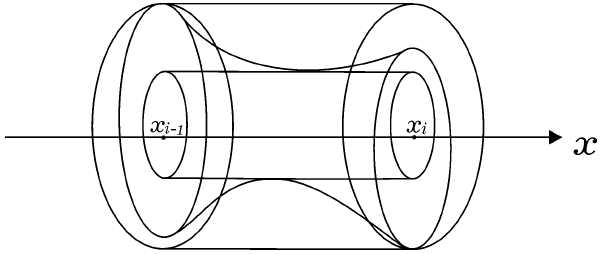


***Вопрос 18***

**(Тело образовано вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y = f(x) ≥ 0,* прямыми *x = a, x = b* и *y = 0 (a < b)*. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения)**

Определенные интегралы можно применять и для вычисления объемов. Пусть тело *M* заключено между плоскостями *x = a* и *x = b*, и пусть для каждой точки *x ∈ [a, b]* известна площадь *S(x)* фигуры, получающейся в сечении тела *M* плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через указанную точку. Предположим далее, что проекции двух сечений тела *M* такими плоскостями на плоскость *OYZ* лежат одна в другой (во всяком случае, для сечений, отвечающих достаточно близким плоскостям). Разобьем отрезок [*a, b*] на части точками Тогда объем *Vi* части *Mi* тела, расположенной между плоскостями *x = xi−1* и *x = xi* в силу сделанного выше предположения о проекциях сечений тела *M* при достаточно малом диаметре разбиения удовлетворяет неравенству где *S(ηi)* и *S(ξi)* − соответственно минимальное и максимальное значение функции *S(x)* на отрезке [*xi−1, xi*]; здесь мы предполагаем дополнительно, что *S(x)* непрерывна на [*a, b*] Геометрический смысл величин *S(ηi)∆xi* и *S(ξi)∆xi* очевиден - это объемы прямых круговых цилиндров, один из которых содержится в части *Mi* тела *M*, а другой содержит внутри себя эту часть. Переходя в этом неравенстве к пределу при *maxi∆xi* →0, получим неравенство Если тело M получено вращением графика непрерывной функции *y = f(x)*, a ≤ x ≤ b, то, очевидно,

и мы получаем такую формулу для вычисления объема тела вращения:



***Вопрос 19***

**(Кривая задана в декартовых координатах уравнением *y = f(x),* где *x* и *y –* декартовые координаты точки, a ≤ x ≤ b. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой)**

Непрерывно дифференцируемая плоская кривая Γ спрямляема, и производная *S’(t)* переменной длины дуги вычисляется по формуле: Т.к. одной из первообразных функции из правой части этого равенства является то отсюда, поскольку F(a) = 0, следует равенство: Поэтому для длины всей кривой имеем формулу: Если кривая Γ задана явно уравнением *y = y(t), a ≤ x ≤ b,* то, беря *x* в качестве параметра, получаем такую формулу: для длины пространственной кривой Γ, заданной уравнениями *x = x(t), y = y(t), z = z(t)*

***Вопрос 20***

**(Кривая задана в полярных координатах уравнением *r = r() ≥ 0*, где *r* и *– полярные координаты точки,* α *< <* β. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой)**

Пусть кривая Γ задана в полярных координатах:

Тогда

Поэтому

***Вопрос 21***

**(Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений 1-го порядка методом Бернулли (метод “*uv”)* и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной))**

1)К линейным уравнениям первого порядка сводится уравнение Бернулли

Если , то , и относительно *z* имеем линейное уравнение:

Решив его, найдем *z*, а затем и *y*. При α > 0 уравнению Бернулли удовлетворяет также функция, тождественно равная нулю. Другой подход к решению уравнений Бернулли состоит в следующем. Пусть *y = u · v*; тогда:

2)Уравнение вида: называется уравнением с разделяющимися переменными

3) Уравнение называется линейным

функции *p(x)* и *f(x)* будем считать непрерывными на некотором интервале *I*. Чтобы решить уравнение, найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

Пусть *P(x)* – какая-либо первообразная функции *p(x)* на интервале *I*. Тогда, как легко проверить, функция

есть общее решение уравнения. Далее применим метод вариации постоянной, состоящий в том, что постоянная *C*, входящая в общее решение, заменяется функцией *C(x);* затем эта последняя функция определяется из исходного неоднородного уравнения. Имеем:

Отсюда где интеграл в правой части означает какую-любо фиксированную первообразную соответствующей функции (а не всю совокупность этих первообразных). Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

***Вопрос 22***

**(Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка)**

Задачей Коши для дифференциального уравнения называют задачу нахождения решения удовлетворяющую начальным условиям y( где заданные числа.

Теорема Коши(о существовании и единственности решения для дифференциального уравнения n-го порядка): Пусть в области D из ***R*** n*+1* функция непрерывна и имеет непрерывные частные производные y,y‘,…y(n-1). Тогда для любой точки (x0,y0,y0',…,y0(n-1)) \subsetD решение задачи y(n)=f(x,y,y’,…t(n-1)).

**(Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка)**

1. Уравнение вида . После *n*-кратного интегрирования получается общее решение

**Y=**

**Где и где**

1. Уравнение не содержит искомой функции и её производных до порядка k-1 включительно: F(x,y(k),y(k+1),…,y(n))=0

Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц заменой y(k)(x)=p(x) . Тогда уравнение примет вид

F(x,p,p’,…,p(n-k))=0

Из последнего уравнения, если это возможно, определяем p=f(x,C1,C2,…..,Cn-k), а затем находим y из уравнения y(k)=f(x,C1,C2,…Cn-k) k-кратным интегрированием.

1. Уравнение не содержит независимого переменного:

F(y,y’y”,…,y(n))=0

Подстановка y’=p позволяет понизить порядок уравнения на единицу. При этом pрассматривается как новая неизвестная функция от y:p=p(y). Все производные y’,y”,…,y(n) выражаются через производные от новой неизвестной функции p по y

y’=

y”==

y”’=2 etc

Подставив эти выражения вместо (y,y’y”,…,y(n)) в уравнение, получим дифференциальное уравнение (*n–1)-*го порядка.

***Вопрос 23***

**(Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка)**

Пусть функция f(x), непрерывна на промежутке TR.Тогда для любой точки и для любых чисел решения задачи Коши существует и единственно.

**(Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка)**

Линейный Оператор(действует на множестве функций имеющих производную до n-го порядка включительно).линейное неоднородное уравнение будем записывать в виде , а однородное

**Свойства решений линейных д.у.n-го порядка.**

**1)** если и решения однородного д.у., то для любого α,β – тоже решенияд.у.**Док-во. =0** следствие решения линейного однородного д.у. образуют линейное пространство.

*2)если*  и -решения то их разность равна нулю.**Док-во**:

**3)**если решение .**,** а решение то их сумма решение **.Док-во:**

***Вопрос 24***

**(Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций)**

1) Система функций называется ***линейно зависимой*** на (*a, b*), если существуют такие числа ,из которых хотя бы одно отлично от нуля, что для любого*x* (*a, b)* имеет место равенство:

***Замечание:*** Если заданы две функции и то их линейная зависимость равносильна условию пропорциональности этих функций: , где *A*- некоторая постоянная.

2) Система функций называется ***линейно независимой*** на (*a, b*), если равенство имеет место для *x* (*a, b)* только тогда, когда

***Замечание:***При задании двух линейно независимых функций и , их отношением будет некоторая функция, не являющаяся постоянной:

**(Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций)**

Если система функций ***линейно зависима*** на интервале (*a*, *b*), то вронскиан этой системы тождественно равен нулю на этом интервале.

***-Доказательство:***

Если функции линейно зависимы на интервале (*a*, *b*), то найдутся числа , из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие что для любого *x* (*a, b) (1)*

Продифференцируем по *x* равенство (1) *n* - 1 раз и составим систему уравнений:

Будем рассматривать эту систему как однородную линейную систему алгебраических уравнений относительно . Определитель этой системы - определитель Вронского (2). При любом *x* (*a, b)* эта система имеет нетривиальное решение , следовательно, в каждой точке её определитель равен нулю. Итак, *W(x)* = 0 при любом *x* (*a, b)*, т.е. *W*(*x*) = 0 на (*a*, *b*).

***Вопрос 25***

**(Сформулировать определение линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения *n-*го порядка)**

1) Система функций называется ***линейно зависимой*** на (*a, b*), если существуют такие числа ,из которых хотя бы одно отлично от нуля, что для любого *x* (*a, b)* имеет место равенство:

2) Система функций называется ***линейно независимой*** на (*a, b*), если равенство имеет место для *x* (*a, b)* только тогда, когда

**Определителем Вронского** называется определитель

***-Теорема:***

Пусть решение ДУ с непрерывными коэффициентами. Чтобы эти функции были линейно независимы на (*а, b*)

***-Доказательство:***

Допустим противное

СЛАУ имеет нетривиальное решение

Рассмотрим - решение ДУ

Примем

Задача Коши , , … имеет единственное решение . Система линейно независима. Противоречие!

Пусть для . Предположим, что решение линейно зависимо для . Противоречие! **Теорема доказана.**

***Вопрос 26***

**(Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения *n-*го порядка)**

Систему из *n* линейно независимых решений *ЛОДУ* называется *ФСР* этого ДУ

***-Теорема:***

Для ДУ с непрерывными коэффициентами ФСР.

***-Доказательство:***

Пусть решение задачи Коши

Пусть решение задачи Коши

==1 линейно независимые.

выполняются условия теоремы Коши ФСР ДУ

**Теорема доказана.**

***Вопрос 27***

***-Теорема:***

Пусть ФСР ЛОДУ с непрерывными коэффициентами ,.

Тогда общее решение ДУ имеет вид  
, где произвольные константы.

***-Доказательство:***

Пусть -решение задачи Коши для …

(т.к. ФСР) СЛАУ имеет единственное решение удовлетворяет тем же начальным условиям, что и согласно теореме Коши .

**Теорема доказана.**

***Вопрос 28***

**(Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка)**

Формула Лиуви́лля-Острогра́дского — формула, связывающая определитель Вронского (вронскиа́н) для решений дифференциального уравнения и коэффициенты в этом уравнении.

Доказательство для уравнения второго порядка:

Пусть y1 = y1(x) и y2 = y2(x) – решения линейного однродного дифференциального уравнения второго порядка:

y” + p(x)y’ + q(x)y = 0

где p(x) и q(x) – функции, непрерывные на некотором промежутке. Для определителя Вронского указанных решений имеем+

Первое слагаемое равно 0, так как этот определитель содержит 2 одинаковые строки. Подставив

во второе слагаемое получим

Домножим верхнюю строчку на q(x) и сложим со 2-й

*, т.е. W’(*x)+p(x)*W*(x)=0

Мы видим, что определитель Вронского W(x) удовлетворяет уравнению: y’ + p(x)y=0(5)

Непосредственной проверкой можно убедиться, что этому же уравнению удовлетворяет и функция:

y(x)=*W*(x0)*e* –S p(t)dt

причём y(x0) = W(x0), где x0 – произвольная фиксированная точка промежутка *I*. Из теоремы существования и единственности для уравнения (5) получаем, что для всех x ∈ *I* выполняется равенство: *W*(x)=*W*(x0)*e* –S p(t)dt

Это равенство называется формулой Остроградского-Лиувилля.

***Вопрос 29***

**(Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка при одном известном частном решении)**

Дифференциальное уравнение второго порядка называется линейным, если оно первой степени (линейно) относительно искомой функции *у* и ее производных .  где  – либо функции от *х*, либо постоянные. При f(x) = 0 уравнение называется линейным однородным. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 

имеет вид 

где  две произвольные постоянные;  два частных решения уравнения, линейно независимых. Заметим, что два решения: – называются линейно независимыми, если их отношение не является постоянным, т. е. 

**Доказательство:**

Из равенства Остроградского-Лиувилля:

то разделив это неравенство на y12 , получим

Уравнение с разделяющимися переменными, интеграл которого является общим решениям:

***Вопрос 30***

**(Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *n-го порядка)***

**Теорема:** Пусть - частное д.у. Ln[y]=F(x), и - общее решение однородного д.у. Ln[y]=F(x). Тогда общее решение уравнения имеет вид .Любое решение неоднородного д.у. можно представить в виде где – частное решение ур-я, а *y1(x), … ,yn(x) –* ФСР соответствующего однородного уравнения; *C1, … ,Cn –* произвольные постоянные

**Доказательство:**

при всех значениях постоянных *C1, … ,Cn является решением д.у.* (согласно теоремам о свойствах решений)Пусть z(x)- произвольное решение д.у.**.**Так как z(x) и – решения неоднородного д.у. , то их разность –есть решение однородного д.у.(согласно теореме о свойствах решений)Тогда согласно теореме о структуре общего решения линейного однородного д.у. =, где *C1, … ,Cn –* произвольные постоянные

Решение представленное в таком виде .

***Вопрос 31, 32***

**(Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных и комплексных корней характеристического уравнения)**

Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет видгде *a1...an* – вещественные числа. Уравнение:

называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

Напишем соответствующее характеристическое уравнение:

Для хар. уравнения возможен один (и только один) из следующих случаев:1) Корни уравнения (3) вещественны и различны. Обозначим эти корни *k1* и *k2*. Тогда фундаментальную систему решений уравнения (2) образуют функции: и

а общее решение имеет вид Здесь нужно проверить лишь линейную независимость решений *y1* и *y2*; чтобы убедиться в этом, составим определитель Вронского:

Таким образом, *y1* и *y2* линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную

систему решений уравнения (2).

2) Уравнение (3) имеет один вещественный корень кратности 2; обозначим этот корень *k0*. Тогда фундаментальную систему решений уравнения (2) образуют функции и , а общее решение этого уравнения есть Проверим, что *y2* есть решение уравнения (2). Т.к. *k0* - корень кратности 2 характеристического уравнения (3), то Далее: и Отсюда:

т.е. *y2* – решение уравнения (2). Проверим линейную независимость *y1* и *y2* :

Таким образом, *y1* и *y2* образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

3) Характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни λ1,2 = α ± i β, β ≠ 0. В этом случае фундаментальная система решений уравнения (2) имеет вид а общее решение записывается так: Здесь в проверке нуждается лишь линейная независимость решений *y*1 и *y*2; имеем

Поэтому *y1* и *y2* линейно независимы

***Вопрос 33***

**(Частное решение ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений)**

***-Теорема (о наложении частных решений):***

Пусть имеются два линейных неоднородных уравнения:  
где  
и пусть *y1 = y1(x) и y2 = y2(x)* – решения этих уравнений. Тогда *y1(x) + y2(x*) будет решением уравнения *L[y] = b1(x) + b2(x).*

***-Доказательство:***

Имеем  
т.е*. y1 +y2* – решение уравнения *L[y] = b1(x) + b2(x).*

***Теорема доказана.***

***Квазимногочленом*** называется сумма нескольких слагаемых вида:

где *P(x)* и *Q(x)* – многочлены.

Частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами : *L[y] = b(x)*

и квазимногочленом в правой части рекомендуется искать методом неопределённых коэффициентов (методом подбора). Для каждого слагаемого данного вида, входящего в правую часть решаемого уравнения, частное решение уравнения

ищется в виде:

где *r = 0*, если *α+i β* не есть корень характеристического уравнения, и *r* равно кратности этого корня в противном случае; *R(x)* и *S(x)* – многочлены с неопределёнными коэффициентами, степень каждого из которых равна максимальной из степеней *P(x)* и *Q(x).* Для нахождения неопределённых коэффициентов выражение (8) подставляется в соответствующее уравнение, и затем приравниваются коэффициенты при подобных членах слева и справа. После того, как частные решения найдены для всех слагаемых, входящих в *b(x)*, частное решение исходного уравнения определяется с помощью теоремы о наложении решений.

***Вопрос 34***

**(Метод Лагранжа вариации постоянных для нахождения решения ЛНДУ 2-го порядка)**

***-Определение:***

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение *n*-го порядка имеет вид

***-Метод Лагранжа (вариации постоянных):***

Пусть *y1 = y1(x), ..., yn = yn(x)* – фундаментальная система решений однородного уравнения *L[y] = 0*. Тогда частное решение неоднородного уравнения *L[y] = b(x)* можно искать в виде

где функции *C1 = С1(x), ..., Cn = Cn(x)* определяются из системы

Так как определитель

то из этой системы *C'1, ..., C'n* определяются однозначно, а сами функции *C1, ..., Cn* – с точностью до произвольных постоянных. Если в (2) подставить именно эти функции

*C1 = C1(x), ..., Cn = Cn(x),* то получим частное решение уравнения (1).

***-Метод Лагранжа для функции второго порядка (n=2):***

Уравнение в этом случае имеет вид

где *a1(x), a2(x), b(x)* – непрерывные на некотором промежутке функции. Частное решение

данного уравнения ищем в виде

где *y1(x), y2(x)–* фундаментальная система решений однородного уравнения

a *C1 = C1(x)* и *C2 = C2(x)* – подлежащие определению функции. Предположим, что они удовлетворяют системе:

Тогда

Отсюда

– что и требовалось доказать!

***Вопрос 35***

**(Сформулировать определение дифференциального уравнения *n*-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе ду)**

Всякую систему, в которой уравнения разрешены относительно старших производных, а число уравнений равно числу неизвестных, можно с помощью введения новых неизвестных функций свести к нормальной системе. Рассмотрим соответствующий прием для системы из двух уравнений:

Пусть *y11 = y1, y12 = y’1, ..., y1n = y1(n-1), y21 = y2, y22 = y’2, ..., y2m = y2(m-1).* Относительно

этих функций получаем такую (нормальную) систему:

Ясно, что одно уравнение *n* -го порядка этим приемом будет сведено к нормальной системе относительно *n* неизвестных функций. В принципе верно и обратное: при определенных условиях нормальную систему можно свести к одному уравнению. Пусть имеется нормальная система двух уравнений

Продифференцируем по *x* первое уравнение и подставим в получившееся выражение вместо *y’2*, правую часть второго уравнения системы:

Затем из первого уравнения системы определим *y2* как функцию *x, y1, y’1*, т.е. *y2 = y2(x, y1, y’1)* и поставим эту функцию вместо *y2* в полученное ранее равенство. Т.о., следствием данной системы является уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции y1 = y1(x). Аналогичным приемом можно получить и уравнение относительно *y2 = y2(x).****Вопрос 36***

**(Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка)**

***-Определение:***

Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка называется система вида

или

***-Определение:***

**Задача Коши** для Нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений *n*-го порядка ставится следующим образом. Дана точка (x0, y10, ..., yn0), принадлежащая области определения правых частей этой системы; требуется найти решение *yi=yi(x), i=1*, …, *n* удовлетворяющее начальным условиям *yi(x0)=yi0 , i=1, ..., n*.

***-Теорема (Коши существования и единственности для нормальной системы):*** Пусть правые части системы

определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным *y1 ,... ,yn* в некоторой области *G* . Тогда для любой точки (x0, y10, ..., yn0) *G* существует решение данной системы, удовлетворяющее начальным условиям *yi'(x0)=yi0*, *i=1, ..., n*. Любые два решения этой системы, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям, совпадают всюду, где они оба определены. ***Без доказательства****.*

***Вопрос 37***

**(Сформулировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений)**

***-Определение:***

Функцию *u(x)=u(X1,X2,...,Xn)*, определённую и непрерывную вместе со своими частными производными в некоторой области *D* изменения фазовых переменных X1,X2,...,Xn называют первым интегралом системы *dx/dt =f(x)(*где *x(t)=(X1(t),X2(t),...,Xn(t))* - вектор-функция скалярного аргумента *t* с координатными функциями *Xi (t)*, определёнными в некотором промежутке *Т⊆ R* числовой прямой *R*, а *f(x)=(f1(x),...,fn(x))* - векторная функция векторного аргумента x с координатными функциями *fi(x), i=1,n* ,определёнными и непрерывно дифференцируемыми в некоторой области *D⊆ R n*-мерного фазового пространства в области *D* ,если при подстановке в *u(x)* произвольного решения *x=g(t)* этой системы ,траектория которого целиком расположена в *D* ,получим постоянную относительно *t* величину.Иными словами, функция *u(g(t))* зависит только от выбора решения *g(t),* но не от независимого переменного *t*.

***-Теорема:***

Для того, чтобы функция *u(x)* была первым интегралом системы *dx/dt =f(x),* необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в области *D* соотношению:

***-Доказательство:***

Пусть *u(x)* - первый интеграл системы *dx/dt =f(x).* Рассмотрим произвольную точку *x0 ∈ D*. Если *x(t)=g(t)* - решение системы *dx/dt =f(x),* удовлетворяющее начальному условию *g(t0) = x0* *∈ D*, то, согласно определению первого интеграла, *V(t) = u(g(t)) = const* и *dV/dt=0*. В соответствии с , производная *dV/dt* совпадает с полной производной по *t* функции *u(x)* в силу системы *dx/dt =f(x)* на решение *g(t).*Поэтому в точке *x0*: du/dt = dV/dt =0

т.е. в области *D* выполнено равенство:

Докажем обратное утверждение. Пусть выполнено:

и *x(t)=g(t)* - решение системы *dx/dt =f(x),* фазовая траектория которого лежит в *D*, тогда с учетом имеем

т.е. *u(g(t))* не зависит от *t* и, следовательно, в соответствии с определением *dx/dt =f(x), u(x)*-первый интеграл системы *dx/dt =f(x).*

***-Геометрический смысл:***

условие имеет простой геометрический смысл. В любой точке *x ∈ D* вектор *grad(*u(*X*)) градиента скалярной функции *u(x)* ортогонален к ее поверхности уровня *S*, задаваемой уравнением *u(x)=u(X).* Из равенства следует, что в каждой точке *X ∈ S* вектор *f(x)* касается этой поверхности. Поэтому фазовая траектория, проходящая через точку *X∈ S*, лежит на поверхности *S*.