Билет №1

1. Теорема о равенстве порядка образующего элемента конечной циклической группы порядку группы (формулировка и доказательство) – 7 б.
2. Вывод формул включения и исключения. – 9 б.
3. Вычислить матрицу кратчайших расстояний для графа, заданного следующей матрицей меток дуг:

$$\begin{matrix} 4 & 4 & +\infty & 5 \\ 3 & +\infty & 3 & 9 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ 6 & 12 & 5 & +\infty \end{matrix}$$

- 7 б.

4. Построить конечный автомат по регулярному выражению $(a^+(ba)^*+b)^*$. Детерминизировать его. – 7 б.

e

1)Теорема о равенстве порядка образующего элемента конечной циклической группы порядку группы (формулировка и доказательство)

Теорема. (О равенстве порядка образующего элемента конечной циклической группы порядку группы)

Порядок образующего элемента конечной циклической группы равен порядку самой группы.

Доказательство:

Пусть $\mathcal{G} = (G, \cdot, 1)$ – конечная циклическая группа с образующим элементом a и $n > 0$ – порядок этого элемента.

Тогда все степени $a^0 = 1, a^1 = a, \ldots, a^{n-1}$ попарно различны.

Действительно, если $a^k = a^l, 0 < l < k < n,$ то $a^{k-l} = a^{k+(-l)} = a^k a^{-l} = a^l a^{-l} = a^{l-l} = 1$. Поскольку $k - l < n$,

получено противоречие с выбором n как порядка элемента a (ибо найдена степень, меньшая n, при возведении в которую элемента a получается единица).

Осталось доказать, что любая степень элемента a принадлежит множеству $\{1, a, \ldots, a^{n-1}\}$. Для любого целого m существуют также целые n, k, такие, что $m = kn + q$, где q – целое и $0 \leq q < n$. Тогда $a^m = a^{kn+q} = a^{kn} \cdot a^q = (a^n)^k \cdot \cdot a^q = 1 \cdot a^q = a^q \in \{1, a, \ldots, a^{n-1}\}$. Поскольку каждый элемент группы $\mathcal{G}$ есть некоторая степень элемента a, то $G = \{1, a, \ldots, a^{n-1}\}$ и порядок группы равен n.

Из доказанной теоремы следует, что в бесконечной циклической группе не существует такого n>0, что для образующего элемента a группы выполняется равенство $a^n = 1$.

2) Вывод формул включения и исключения

1. Формулы включения и исключения (с выводом).

Формула для числа элементов объединения множеств.

$A_1, A_2, \ldots, A_n \neq \varnothing$

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}|$ - <u>первая формула</u>

Заметим, что внутренняя сумма для заданного p содержит C_n^p слагаемых.

В частности:

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$;

$\cancel{|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| -}$

$\cancel{-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|}$

Знак при внутренней сумме «минус» для четного p и «плюс» для нечетного.

<u>Доказательство:</u>

Достаточно доказать, что каждый элемент рассматриваемого объединения учтен в правой части равенства ровно один раз.

Пусть элемент a принадлежит в точности k множествам из n.

Тогда в сумме $\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}|$ этот элемент фигурирует C_k^p раз (выбраны какие-то p подмножеств из k, содержащих a).

Следовательно, во всей правой части этот элемент фигурирует $\sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} C_k^p$ раз.

Но

$0 = (1-1)^k = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p C_k^p = 1 - \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} C_k^p$, откуда $\sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1} C_k^p = 1$,

итд.

Формула для пересечения дополнений множеств.

~~Подсчет числа элементов в объединении множеств позволяет находить число элементов, обладающих хотя одним из n свойств.~~

Следующая формула позволяет находить число элементов, не обладающих ни одним из n свойств. Если обозначить через A_i

Продолжение на след странице

множество всех тех элементов, которые обладают свойством P_i (при $i = 1,\ldots,n$), то множество всех тех элементов, которые не обладают ни одним из указанных свойств, есть пересечение дополнений $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n$.

Тогда

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}| =$$

$$= |U| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| =$$

$$= |U| - \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}| =$$

$$= |U| + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}|.$$

Билет №2

1. Поиск в глубину в орграфе. Классификация дуг. Критерий бесконтурности. – 9 б.
2. Сформулируйте теорему Клини. Опишите алгоритм синтеза КА по регулярному выражению. – 7 б.
3. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x-5y+z=1 \\ 21x-19y+22z=-21 \\ 5x+17z=5 \end{cases} \quad \text{в } Z_{23} \qquad \text{- 7 б.}$$

4. Найти общее решение соотношения $x_n=-x_{n-1}+6x_{n-2}$. – 7 б.

1)Поиск в глубину в орграфе. Классификация дуг. Критерий бесконтурности

```
begin
    for all v ∈V do
    NEW[v] := 1;
    T, B, F, C := ∅;  stack := ∅;
    const := 1;
    for all v ∈V do
    while (∃v)(NEW[v] = 1) do
        search_DOR(v);
end;

proc search_DOR(v)
    NEW[v]  := 0;
    D[v] := const;  const++;
    v -> stack;
    for all ω ∈L[v] do
        if NEW[ω] then begin
            (v,ω) -> T;
            search_DOR(ω);
        end
        else begin
                if (D(v) >= D(ω))&(ω∈stack) then
                (v, ω) ->B;
                if (D(v) < D(ω)) then
```


Продолжение на след странице

```
                    (v, ω) -> F;
                    if (D(v) > D(ω))&(ω∉ stack) then
                    (v, ω) ->C;
            end;
    end;
```

Классификация дуг:

1) **Древесные дуги** – каждая такая дуга ведет от отца к сыну в глубинном остовном лесу.
2) **Прямые дуги** – каждая такая дуга ведет от подлинного предка к подлинному потомку (но не от отца к сыну) в глубинном остовном лесу.
3) **Обратные дуги** – от потомков к предкам (включая все петли).
4) **Поперечные дуги** – все дуги, не являющиеся ни древесными, ни прямыми, ни обратными.

Критерий бесконтурности: ориентированный граф является бесконтурным тогда и только тогда, когда при поиске в глубину от некоторой начальной вершины множество обратных дуг оказывается пустым.

2)Сформулируйте теорему Клини. Опишите алгоритм синтеза КА по регулярному выражения.

Теорема: *язык регулярен тогда и только тогда, когда он допускается КА.*

Док-во:

1) *Докажем, что решение системы линейных уравнений с регулярными коэффициентами – регулярно, т.е. является вектором, каждая компонента которого – регулярный язык.*

Индукция по порядку n системы ЛУ:

Базис n = 1 $x = \lambda x+\beta$ (λ,β – рег. выраж.)

$x = \lambda^*\beta$ – рег. язык

Предположим: пусть для любого порядка ≤ n-1 утверждение верно (n ≤ 2)

Рассмотрим систему n-го порядка:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \dots \\ X_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

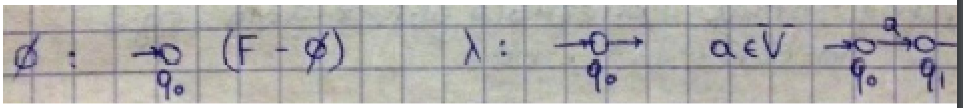
Эта система имеет решение:

$x_1 = a_{11}^*(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1)$

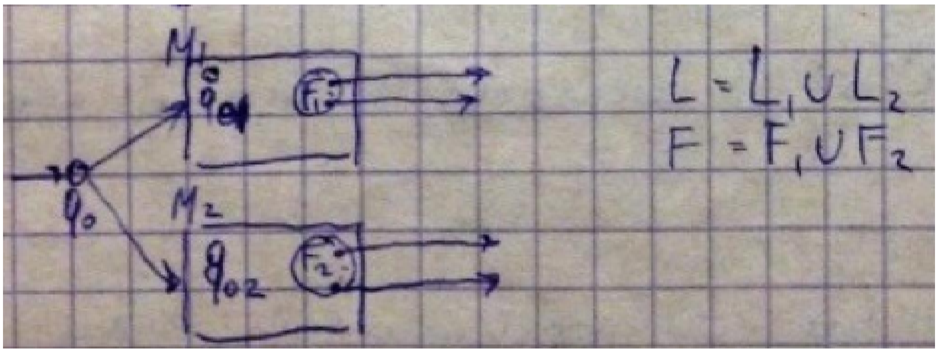
Подставим полученное выражение x_1 в остальные выражения системы и, приводя подобные члены в правых частях, получим систему с рег. коэффициентами порядка n-1, решение которой регулярно по предположению.

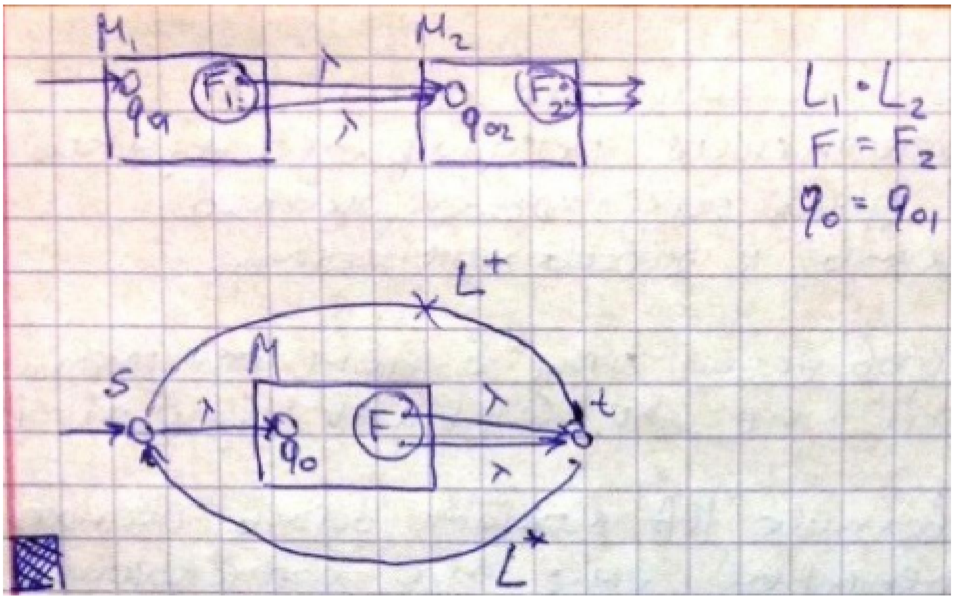
$x_2 \dots x_n$ – регулярные языки. Тогда x_1 – тоже регулярно.

2) Построим КА по данному регулярному выражению


∅ :
q0
(F = ∅)
λ :
q0
a ∈ V
a
q0
q1

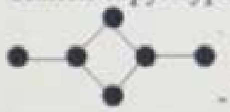
$L(M_1) = L_1, L(M_2) = L_2$


M1
q01
F1
q0
M2
q02
F2
L = L1 ∪ L2
F = F1 ∪ F2


M1
q01
F1
λ
λ
M2
q02
F2
L1 · L2
F = F2
q0 = q01
L+
M
s
λ
q0
F
λ
λ
t
L*

Билет №3

1. Индуктивное упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке (с доказательством). – 9 б.
2. Поиск в ширину (алгоритм волнового фронта и поиск в размеченном орграфе). – 7 б.
3. Найти язык, допускаемый конечным автоматом со следующей системой команд: $q_0 0 \to q_0$, $q_0 0 \to q_0 \mid q_3$, $q_1 0 \to q_0 | q_3$, $q_1 1 \to q_0$, $q_3 0 \to q_1 \mid q_3$, $q_3 1 \to q_1$. Начальное состояние q_0, заключительные – q_2, q_3. – 7 б.
4. Найти структурный перечень трехцветных раскрасок графа:



- 7 б.

1)Индуктивное упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке (с докозательством)

Упорядоченное множество $\mathcal{A}$ называется **индуктивно упорядоченным**, если в нем есть наименьший элемент, а любая неубывающая последовательность элементов $\{a_n\}_{n\geq 0}$ имеет точную верхнюю грань.

Пусть $(A, \leq)$, $(B, \preccurlyeq)$ – индуктивные упорядоченные множества. Отображение $f: A \to B$ называется непрерывным, если справедливо равенство $f(\sup a_n) = \sup f(a_n)$. Элемент $a \in A$ называют **неподвижной точкой** отображения $f: A \to A$, если $f(a) = a$. Элемент a называют наименьшей неподвижной точкой отображения, если он является наименьшим элементом множества всех неподвижных точек отображения.

Теорема: любое непрерывное отображение f индуктивно упорядоченного множества $(M, \leq)$ $f: M \to M$ имеет наименьшую неподвижную точку.

Доказательство: Пусть $\mathbb{O}$ – наименьший элемент **И**ндуктивно **У**порядоченного **М**ножества M. Построим последовательность $\{\mathbb{O}, f(\mathbb{O}), f(f(\mathbb{O})), \dots f^n(\mathbb{O}), \dots\}$,
где $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$.

Т.к. $\mathbb{O}$ – наименьший элемент, то $\mathbb{O} \leq f(\mathbb{O})$, т.е.
при n=0 $f^n(\mathbb{O}) \leq f^{n+1}(\mathbb{O})$.
Пусть $f^n(\mathbb{O}) \leq f^{n+1}(\mathbb{O})\ \forall n \leq k$.
$f^{k+1}(\mathbb{O}) = f(f^k(\mathbb{O})) \leq f(f^{k+1}(\mathbb{O}))$, следовательно,
$f^{k+1} \leq f^{k+2}(\mathbb{O})$, т.е. последовательность не убывает.
Обозначим $a = \sup f^n(\mathbb{O})$, $n \geq 0$.
Тогда $f(a) = f(\sup f^n(\mathbb{O})) = \sup(f^{n+1}(\mathbb{O}))\ (n \geq 0) = \sup f^n(\mathbb{O})\ (n \geq 1) = a$.
Таким образом, f(a)=a, т.е. a –неподвижная точка.
Пусть теперь f(b)=b.

$\mathbb{0} \le b, \Longrightarrow f(\mathbb{0}) \le f(b) = b, f(f(\mathbb{0})) \le f(f(b)) = b, \dots . (\forall n \ge 0)\ (f^n(\mathbb{0}) \le b)$ – значит b является верхней гранью последовательности $\{f^n\ (\mathbb{0})\} n \ge 0$. Однако a – <u>ТОЧНАЯ</u> верхняя грань этой последовательности, поэтому $a \le b$.

<u>Пример</u>: рассмотрим уравнение $f(x)$ =1/2x +1/4 на ИУМ A = [0; 1] с естественным числовым порядком. Для данного множества наименьшим элементом является 0. Последовательно вычисляя f^0 (0) = 0, f(0) =1/4, $f(f(0))$ =1/2∗1/4+1/4=3/8, f^3(0) =7/16, …, получаем последовательность приближений к наименьшей неподвижной точке.

f^n (0) =$(2^{n-1})/(2^{n+1})$, $\lim_{n\to+\infty} f^n$ (0) =1/2.

Следовательно, наименьшая неподвижная точка отображения f, определяемого правой частью уравнения, равна ½.

2)Поиск в ширину (алгоритм волнового фронта и поиск в размеченное орграфе)

<u>Поиск в ширину</u>

Охватываем весь список смежностей используется очередь.

Расставляем метки на вершинах графа.

```
begin
    for all (v ∈ V) do
        M[v] := +∞;
    Q := ∅;
    M[v0] := 0;
    V0 -> Q;
    for all (v ∈ Q)
        while (Q != ∅) do
            for all (w ∈ L[v]) do
                if M[w] = +∞ then begin
                    M[w] := M[v] + 1;
                    w -> Q;
                end;
    Q -> V;
end
```

<u>Алгоритм волнового фронта</u>

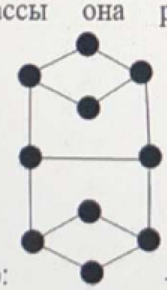
G = (V,E) – орграф, φ = E->R^+ (функция разметки)

```
begin
    for all (v ∈ V) do

        M[v] := +∞;
    Q := ∅;
    M[v0] := 0;
    V0 -> Q;
    for all (v ∈ Q)
        while (Q != ∅) do
            for all (w ∈ L[v]) do begin
                d := M[v] + φ(v,w);
                if(d < M[w]) then begin
                    M[w] := d;
                    if(w ∉ Q) then
                        (w -> Q)
                end;
                Q -> v;
            end;
end;
```

Билет №4

1. Кольца. Аддитивная группа и мультипликативный моноид кольца. Теорема о тождествах кольца (аннулирующем свойстве нуля, свойстве обратного по сложению при умножении, дистрибутивности умножения относительно вычитания). – 9 б.
2. Сформулируйте теорему о детерминизации КА. Опишите алгоритм построения КА без λ-переходов по исходному КА. – 7 б.
3. Вычислить порядок группы автоморфизмов графа и указать, на какие левые смежные классы она разбивается (вычисление всех автоморфизмов



необязательно): - 7 б.
4. Найти число всех перестановок 5 элементов с запрещенными парами: (1,3), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (5,5). – 7 б.

1)Кольца. Аддитивная группа и мультипликативный моноид кольца. Теорема о тождествах кольца (аннулирующем свойстве нуля, свойстве обратного по сложению при умножении, дистрибутивности умножения относительно вычитания)

Кольцом называют алгебру вида $(R, +, *, 0, 1)$, сигнатура которой состоит из двух бинарных (сложение кольца и умножение кольца) и двух нульарных операций, причем для любых $a, b, c \in R$ выполняются равенства, называемые аксиомами кольца:

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$
2) $a + b = b + a$
3) $a + 0 = a$
4) $\forall a \in R\ \exists(-a)$: $a + (-a) = 0$
5) $a * (b * c) = (a * b) * c$
6) $a * 1 = 1 * a = a$
7) $a * (b + c) = a * b + a * c$; $(b + c) * a = b * a + c * a$

• Аксиомы 1-4 означают, что алгебра (R,+,0) является абелевой (коммутативной) группой, называемой **аддитивной группой** кольца. Аксиомы
5 и 6 показывают, что алгебра (R,*,1) является моноидом, называемым **мультипликативным моноидом** кольца.

• Кольцо называется **коммутативным**, если его операция умножения коммутативна.

• **Кольцо** (коммутативное) **вычетов** по модулю k – алгебра вида $Zk = (\{0, 1, \ldots, k-1\}, \oplus k, \odot k, 0, 1)$ с операциями сложения по модулю к и умножения по модулю к.

Теорема. (О тождествах кольца)

В любом кольце выполняются следующие тождества:

1) $0 * a = a * 0 = 0$
2) $(-a) * b = -(a * b) = a * (-b)$
3) $(a - b) * c = a * c - b * c$; $c * (a - b) = c * a - c * b$

Доказательство:

- Для $0 * a = a * 0 = 0$

  $$a + 0 * a = 1 * a + 0 * a = (1 + 0) * a = 1 * a = a$$

- Для $(-a) * b = -(a * b) = a * (-b)$ с учетом доказанного выше

  $$a * (-b) + a * b = a * \big((-b) + b\big) = a * 0 = 0 \text{ откуда } a * (-b) = -(a * b)$$

- Для $(a - b) * c = a * c - b * c$ с учетом доказанного выше

  $$a * (b - a) = a * \big(b + (-c)\big) = a * b + a * (-c) = a * b - a * c$$

2) Сформулировать теорему о детерминизации КА. Опишите алгоритм построения ка без lambda переходов по исходному КА

Теорема: для любого КА может быть построен эквивалентный ему, т.е. допускающий тот же самый детерминированный КА.

$$M_1 \approx M_2 <-> L(M_1) = L(M_2)$$

Доказательство следующим листком
Хуйню с рисунками справа тоже продиктуй

Доказательство:

КА $M = (V, Q, q_0, F, \delta)$ называется детерминированным, если

1) в нём нет λ-переходов

2) ~~для каждого~~

$(\forall q \in Q)(\forall a \in V)(|\delta(q,a)| = 1)$ – только 1 выход из 1-го состояния

если $(|\delta(q,a)| \leq 1)$, то квазидетерминированный

Алгоритм детерминизации:

1) Удаление λ-переходов

2) Собственно детерминизация

1) Удаление λ-переходов:

Дано: КА $M = (V, Q, q_0, F, \delta)$

Строим: КА $M' = (V, Q', q_0', F', \delta')$

DL

$Q' = \{q_0\} \cup \{q : (\exists p \in Q)(\exists a \in V)\ p \xrightarrow{a} q\}$

$q_0' = q_0$

$F' = (F \cap Q') \cup \{q : (\exists p \in Q)(q \overset{*}{\underset{\lambda}{\Rightarrow}} p \in F)\}$ $M: q \xrightarrow{\lambda} p \to (p \in F)$

$-\lambda$

$M': q \to, \ q \in F'$

$\delta'(q,a) = \delta(q,a) \cup \{r : (\exists p \in Q)(q \overset{*}{\underset{\lambda}{\Rightarrow}} p \xrightarrow{a} r)\}$ $M: q \xrightarrow{\lambda} p \xrightarrow{a} r$

$M' = q \xrightarrow{a} r$

2) Собственно детерминизация

Дано: $M = (V, Q, q_0, F, \delta)$ – без λ-переходов

Строим: $M' = (V, Q', q_0', F', \delta')$

$Q' = 2^Q$

$q_0' = \{q_0\}$

$F' = \{T : T \cap F \neq \varnothing\}$

$\delta'(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$

Билет №5

1. Область целостности. Теорема о конечной области целостности (с доказательством). Поля вычетов. – 7 б.
2. Однородные линейные рекуррентные соотношения. Доказательство теоремы о структуре общего решения (любое решение есть линейная комбинация фундаментальных решений). – 9 б.
3. Для орграфа, заданного матрицей меток дуг, вычислить матрицу кратчайших расстояний (используя решение систем линейных уравнений в полукольце $\mathbf{R}^{+}$).

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 4 & 8 \\ +\infty & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & +\infty \end{pmatrix} \text{ - 7 б.}$$

4. Построить конечный автомат, допускающий те и только те цепочки в алфавите {a, b}, которые содержат нечетное число каждого из символов. Вывести регулярное выражение для этого языка. – 7 б.

1)Область целостности. Теорема о конечной области целостности (с доказательством)

Кольцо, в котором множество всех ненулевых элементов по умножению образует группу, называют **телом**; коммутативное тело – **полем**. В поле, помимо аксиом кольца, выполняются еще два тождества:

1) $\forall a \neq 0 \in R, \exists a{-}1 \colon a * a{-}1 = 1$;
2) $a * b = b * a$.

Примеры: поля рациональных чисел $(\mathbb{Q}, +, *, 0, 1)$, действительных чисел $(\mathbb{R}, +, *, 0, 1)$.

Док-во следующим листком

... $(0, \cdot, 1)$ – коммутативная

Делители нуля: такие a и b, что:

$a \neq 0$, $b \neq 0$

$a \cdot b = 0$ или $b \cdot a = 0$

Определение: Область целостности — коммутативное кольцо без делителей нуля

Пример: кольцо целых чисел $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$

Теорема: конечная область целостности является полем

Доказательство. Пусть $R = (R, +, \cdot, 0, 1)$ – конечная обл. цел. Тогда

$f_a: R \setminus \{0\} \to R \setminus \{0\}$, где, по опр. $f_a(x) = ax$, $a \neq 0$

Докажем, что f_a инъективно.

пусть $ax = ay$. Тогда $ax - ay = 0 = a(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$, т.е.

f_a – инъекция, R конечно $\Rightarrow f_a$ – биекция, поэтому

f_a – сюръекция, поэтому $(\forall y \neq 0)(\exists!\, x \neq 0)(y = ax)$

Тогда при $y = 1$: $(\exists!\, x \neq 0)(1 = a \cdot x$, т.е. $x = a^{-1})$

т.е. любой ненулевой элемент обратим.

~~на экзамене!~~

$\mathbb{Z}_p$ $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ ~~$p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ и $p \mid b$~~

Кольцо вычетов по простому модулю является полем!

2) Однородные линейные рекурентные соотношения. Док-во теоремы о структуре общего решения

Пусть дана числовая последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, причем она не определена явно как функция натуральной переменной, но всякий ее член выражается через k предыдущих (для фиксированного k) в виде:

$$x_n = \varphi(x_{n-1},\dots,x_{n-k}) + f(n) \qquad (1)$$

В этом случае соотношение (1) называют ***рекуррентным соотношением*** k ***-го порядка***. При $f(n)=0$ соотношение называют ***однородным***.

Если функция φ в (1) линейна по своим аргументам, то такое соотношение называют ***линейным***. Будем, как правило, записывать линейное рекуррентное соотношение в виде:

$$x_n + a_1(n)x_{n-1} + \dots + a_k(n)x_{n-k} = f(n) \qquad (3)$$

В соотношении (3) последовательности $a_i(n), i=1,\dots,k$ называют ***коэффициентами***, а последовательность $f(n)$ - ***правой частью***. В случае нулевой правой части получаем ***однородное линейное рекуррентное соотношение***.

Теорема: любое решение ОЛРС ~~соотношения (6)~~ есть линейная комбинация фундаментальных решений, т.е. решений ФСР

Доказательство: составим комбинацию

$$y_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots + C_k y_n^{(k)}$$

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_0^{(1)} + C_2 y_0^{(2)} + \ldots + C_k y_0^{(k)} = \vartheta_0 \\ y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots + C_k y_1^{(k)} = \vartheta_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} = C_1 y_{k-1}^{(1)} + C_2 y_{k-1}^{(2)} + \ldots + C_k y_{k-1}^{(k)} = \vartheta_{k-1} \end{cases} \quad (1)$$

Докажем, что система (1) однозначно разрешима.

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & \ldots & y_0^{(k)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(k)} \\ \vdots & & & \\ y_{k-1}^{(1)} & y_{k-1}^{(2)} & \ldots & y_{k-1}^{(k)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2)$$

Докажем, что $\Delta \neq 0$. Пусть $\Delta = 0$ (от противного). Тогда соответствующая системе (1) однородная система

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} C_i y_0^{(i)} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} C_i y_1^{(i)} = 0 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{(i)} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

имеет нетривиальное решение, т.е. линейная комбинация фундаментальных решений удовлетворяет нулевым начальным условиям, т.е. сама тождественна нулю (существует такая)

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} C_i y_k^{(i)} = 0, \text{ но не все } C_i = 0$$

Возникает противоречие с определением линейной зависимости, т.е. $\Delta \neq 0$, т.е. система (1) однозначно разрешима.

Теорема доказана.

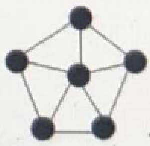
Билет №6

1. Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце. – 9 б.
2. Сформулируйте и докажите теорему о детерминизации КА. – 7 б.
3. Орграф задан матрицей меток дуг:

$$\begin{pmatrix} +\infty & +\infty & 10 & 5 & 7 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 14 & 18 & +\infty \\ +\infty & 9 & +\infty & 14 & 7 & 11 & 22 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 7 & 16 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 8 & 23 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 9 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix}.$$

Используя поиск в ширину, найти кратчайшие расстояния от источника (вершины v_1), Показать изменение содержимого очереди вершин. – 7 б

4. Найти структурный перечень трехцветных раскрасок графа:



- 7 б.

1)Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.

Для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ элементов замкнутого полукольца и любого элемента а этого полукольца выполняется равенство $a + \sum x_n = \sum(a + x_n)$ – операция сложения в замкнутом полукольце непрерывна.

__Теорема:__ Наименьшими решениями уравнений $x = ax + b$ и $x = xa + b$ в замкнутых полукольцах являются соответственно $x = a^*b$ и $x = ba^*$; а* - итерация элемента а.

◀ Используя формулу ~~(1.8)~~ для вычисления наименьшей неподвижной точки и записывая sup в случае замкнутого полукольца как бесконечную сумму~~, для уравнения (3.14)~~ получаем

$$x = \sum_{n\geqslant 0}^{\infty} f^n(\mathbf{0}),$$

где $\mathbf{0}$ — нуль полукольца, а $f(x) = ax + b$.

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&f^0(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\\
&f^1(\mathbf{0}) = b,\\
&f^2(\mathbf{0}) = ab + b = (a + \mathbf{1})b,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^n(\mathbf{0}) = (a^{n-1} + \ldots + a^2 + a + \mathbf{1})b,
\end{aligned}$$

получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbf{0}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1})b.$$

Используя непрерывность умножения, вынесем b (вправо) за знак бесконечной суммы и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1})b = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1})\right)b.$$

Сумма $\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1}$ есть частичная сумма последовательности $\{a^n\}_{n\geqslant 0}$. ~~Используя равенство (3.6)~~, можем написать

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = a^*.$$

Окончательно получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^n(\mathbf{0}) = a^* b.$$

Анологично доказывается равенство ~~(3.15)~~. ▶

2 - е

2) Сформулируйте и докажите теорему о детерминизации КА

Теорема: для любого КА может быть построен эквивалентный ему, т.е. допускающий тот же самый детерминированный КА.

$$M_1 \approx M_2 \Leftrightarrow L(M_1) = L(M_2)$$

Доказательство следующим листком !!!ЭТИ РИСУНКИ ТОЖЕ СКАЖИ!!!

Доказательство:

КА $M = (V, Q, q_0, F, \delta)$ называется детерминированным, если

1) в нём нет λ-переходов

2) ~~для каждого~~

$(\forall q \in Q)(\forall a \in V)(|\delta(q, a)| = 1)$ – только 1 выход из 1-го состояния

если $(|\delta(q, a)| \le 1)$, то квазидетерминированный

Алгоритм детерминизации:

1) Удаление λ-переходов

2) Собственно детерминизация

1) Удаление λ-переходов:

Дано: КА $M = (V, Q, q_0, F, \delta)$

Строим: КА $M' = (V, Q', q_0', F', \delta')$

$Q' = \{q_0\} \cup \{q : (\exists p \in Q)(\exists a \in V)\ p \xrightarrow{a} q\}$

$q_0' = q_0$

$F' = (F \cap Q') \cup \{q : (\exists p \in Q)(q \overset{*}{\underset{\lambda}{\Rightarrow}} p \in F)\}$

$\delta'(q, a) = \delta(q, a) \cup \{r : (\exists p \in Q)(q \overset{*}{\underset{\lambda}{\Rightarrow}} p \xrightarrow[a]{} r)\}$

M: $q \xrightarrow{\lambda} p \rightarrow$ $(p \in F)$

M': $q \rightarrow$, $q \in F'$

M: $q \xrightarrow{\lambda} p \xrightarrow{a} r$

$M' = q \xrightarrow{a} r$

2) Собственно детерминизация

Дано: $M = (V, Q, q_0, F, \delta)$ – без λ-переходов

Строим: $M' = (V, Q', q_0', F', \delta')$

$Q' = 2^Q$

$q_0' = \{q_0\}$

$F' = \{T : T \cap F \neq \varnothing\}$

$\delta'(S, a) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$

Билет №7

1. Смежные классы подгруппы по элементу. Теорема Лагранжа. – 7 б.
2. Задача о путях в размеченных орграфах и метод ее решения (с доказательством основной теоремы). – 9 б.
3. Доказать нерегулярность языка L^+ , где $L = \{a^m b^n;\ m > n,\ m,n > 0\}$ в алфавите $V=\{a, b\}$.- 7 б.
4. Найти число всех перестановок 6 элементов с запрещенными парами: (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6) – 7 б.

1) Смежные классы подгруппы по элементу. Теорема Лагранжа

Пусть есть группа

$\mathcal{G} = (G, \cdot, 1)$, $H \subseteq G$. H замкнуто, если: 1) $1 \in H$

$\mathcal{H} = (H, \cdot, 1)$ – подгруппа группы G. 2) $(\forall a, b \in H)(ab \in H)$

~~Пример: $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $H = \{2m : m \in \mathbb{Z}\}$ замкнуто~~ 3) $(\forall a \in H)(a^{-1} \in H)$

~~$\hat{\mathcal{M}}^{+\cdot}_n = (\hat{M}^{+}, \cdot, E)$ $H = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} : a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0 \right\}$~~

Любая группа имеет две тривиальные подгруппы: $\{1\}$ и $H = G$

Левый смежный класс подгруппы H по элементу $a \in G$:

$aH \rightleftharpoons \{ah : h \in H\}$

Правый . . .

$Ha \rightleftharpoons \{ha : h \in H\}$

Докажем 4 леммы о смежных классах:

Лемма 1: $(\forall h \in H)(hH = H)$

Пусть $x \in hH$. Тогда $x = hh_1$, $h_1 \in H$, но $hh_1 \in H$, т.е. $x \in H$ и $hH \in H$

Пусть $x \in H$; $x = h(h^{-1}x)$, но $h^{-1}x \in H$ и $x \in H$, поэтому $x \subseteq hH$, $H \subseteq hH$

Поэтому $hH = H$

Лемма 2: $abH = a(bH)$ – следствие ассоциативности умножения

Лемма 3: левые смежные классы попарно не пересекаются

Пусть $aH \neq bH$, но $aH \cap bH \neq \varnothing$, т.е. $\exists z \in aH$, $z \in bH$, т.е.

$z = ah_1 = bh_2$, h_1 и $h_2 \in H$

$ah_1 = bh_2 \Rightarrow ah_1h_2^{-1} = b$

$bH = ah_1\underbrace{h_2^{-1}H}_{H} = a\underbrace{h_1H}_{H} = aH$ – ? совпали

по лемме 1

$(\forall a \in G)(a = a \cdot 1)$, но $1 \in H \Rightarrow a \in aH$

Лемма 4: все левые классы находятся между собой во взаимно однозначном соответствии.

$\varphi: H \to aH$, где $\varphi(h) = ah$. Данное отображение φ – сюръекция, но и инъекция

$\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$, т.е. $ah_1 = ah_2 \Rightarrow h_1 = h_2$

Продиктовать как теорема 1 (2.11) и теорема 2 (2.12) перед теоремой лагранжа

Теорема 2.11. Бинарное отношение $\sim_H$ есть ***эквивалентность*** на G, причем ***класс эквивалентности*** произвольного элемента $a \in G$ совпадает с левым смежным классом aH.

Теорема 2.12. Всякий левый смежный класс подгруппы H ***равномощен*** H.

Теорема 2.13 (***теорема Лагранжа***). *Порядок конечной группы* делится на порядок любой ее подгруппы.

◀ Согласно теореме 2.11, все левые смежные классы образуют разбиение множества G на подмножества, равномощные в силу теоремы 2.12 подгруппе H. Так как группа $\mathcal{G}$ конечна, то число элементов разбиения конечно. Обозначив это число через k, заключаем, что $|G| = k|H|$. Следовательно, порядок группы $|G|$ делится на порядок группы $|H|$. ▶

Число всех левых смежных классов подгруппы $\mathcal{H}$ конечной группы $\mathcal{G}$ называют ***левым индексом подгруппы*** $\mathcal{H}$ ***в группе*** $\mathcal{G}$.

Рассмотрим некоторые следствия теоремы Лагранжа.

Продиктовать как следствие 1, 2, 3

Следствие 2.3. Любая *группа* простого порядка является ***циклической***.

Следствие 2.4. Конечная группа неразложима тогда и только тогда, когда она является циклической группой, порядок которой есть простое число.

Следствие 2.5. В конечной группе $\mathcal{G}$ для любого элемента $a \in G$ имеет место равенство $a^{|G|} = 1$.

2) Задача о путях в размеченном орграфе и метод ее решения (с доказательством основной теоремы)

<u>Размеченным ориентированным графом</u> называют пару $W = (G, \phi)$, где $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ – обычный ориентированный граф,

$\boldsymbol{\phi}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}$ – функция разметки со значениями в некотором идемпотентном полукольце $\mathcal{S} = (S, +, *, \mathbb{0}, \mathbf{1})$, $(\forall e \in E)(\phi(e) \neq 1)$.

Если задать орграф с помощью матрицы смежности

$\cancel{A = (a_{ij}),\ a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$, то задача о достижимости сводится к вычислению матрицы достижимости графа:

$\cancel{C = (c_{ij}),\ c_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \Rightarrow^* v_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$.

Если задать орграф с помощью матрицы меток дуг

$\cancel{A = (a_{ij}),\ a_{ij} = \begin{cases} \phi(v_i, v_j), & \text{если } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$, то задача о поиске кратчайших расстояний между двумя узлами графа сводится к вычислению матрицы кратчайших расстояний:

$$\cancel{C = (c_{ij}), c_{ij} = \begin{cases} \text{длине кратчайшего пути из } v_i \text{ в } v_j, & \text{если } v_i \Rightarrow^* v_j \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}}.$$

Обе задачи можно решить с помощью алгоритма Флойда – Уоршелла – Клини.

В случае задачи о достижимости, в качестве полукольца $\mathcal{S}$, выбирают полукольцо $\mathbb{B} = (\{0,1\}, max, min, 0,1)$.

В случае задачи о поиске кратчайших расстояний, выбирают полукольцо $\mathcal{R}^+ = ([0, +\infty], min, +, +\infty, 0)$.

Теорема ~~5.4.~~ Матрица стоимостей ориентированного графа G, размеченного над полукольцом с итерацией $\mathcal{R}$ ~~(в частности, над замкнутым полукольцом)~~, равна итерации матрицы A меток дуг ориентированного графа G. ~~#~~

Для вычисления $C = A^*$ достаточно решить (т.е. найти наименьшее решение) в $\mathcal{R}$ при всех $j = \overline{1, n}$ систему уравнений

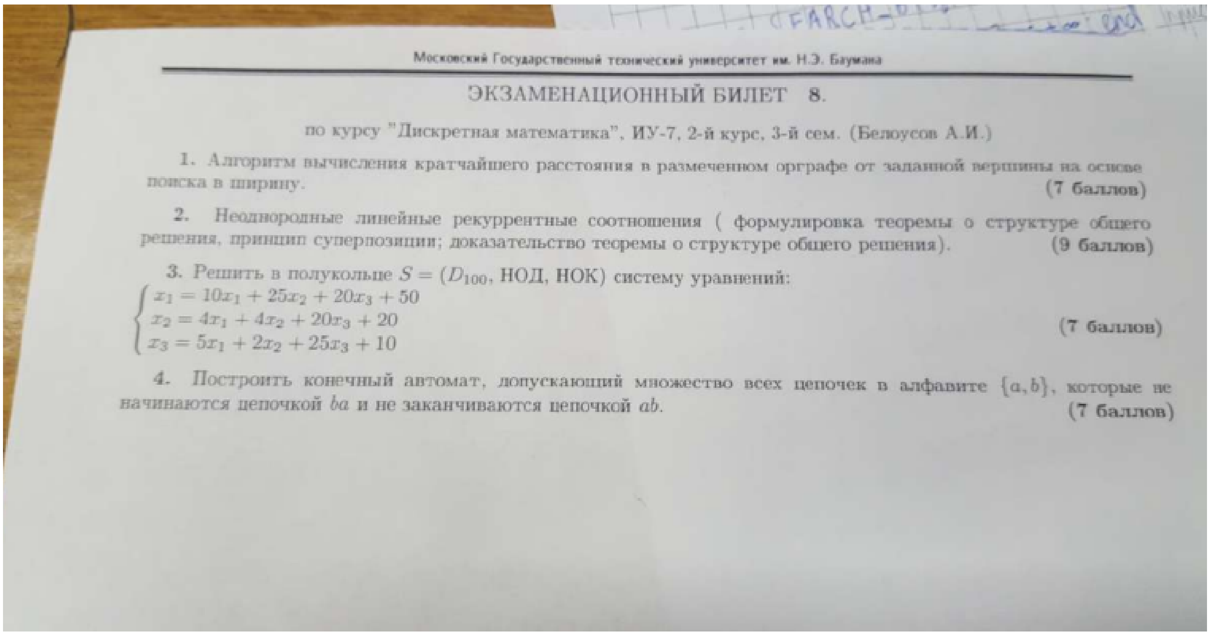
$$\xi = A\xi + \varepsilon_j,$$

где $\varepsilon_j \in \mathcal{R}^n$ — j-й единичный вектор, т.е. вектор, все элементы которого, кроме j-го, равны $\mathbf{0}$, а j-й равен единице полукольца $\mathcal{R}$. Наименьшее решение имеет вид $\xi = A^*\varepsilon_j$ ~~(см. 3.3)~~. Тогда столбец $\xi = A^*\varepsilon_j$ есть j-й столбец матрицы A^*. ~~Такой метод вычисления матрицы A^* аналогичен известному из линейной алгебры методу элементарных преобразований при вычислении обратной матрицы~~.

Выясним теперь смысл матрицы стоимостей $C = A^*$ для полуколец $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}^+$.

В первом из этих полуколец метка отдельного пути всегда равна 1 (так как метка дуги в размеченном над полукольцом графе не может, согласно определению, быть нулем полукольца). Следовательно, стоимость $c_{ij} = 1$, если существует хотя бы один путь из i-й вершины в j-ю, и $c_{ij} = 0$, если иначе. ~~Другими словами, для полукольца $\mathcal{B}$ матрица стоимостей совпадает с матрицей достижимости ориентированного графа.~~

В полукольце $\mathcal{R}^+$ метка пути — это арифметическая сумма меток его дуг, так как умножение в $\mathcal{R}^+$ — это обычное арифметическое сложение. Поскольку сложение в $\mathcal{R}^+$ — это взятие наименьшего из слагаемых, то стоимость c_{ij} — это наименьшая из меток пути среди всех путей, ведущих из i-й вершины в j-ю, т.е. это и есть наименьшая длина пути между указанными вершинами. Таким образом, в полукольце $\mathcal{R}^+$ матрица стоимостей является матрицей кратчайших расстояний, ~~т.е. наименьших длин путей между всеми парами вершин ориентированного графа.~~



Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 8.

по курсу "Дискретная математика", ИУ-7, 2-й курс, 3-й сем. (Белоусов А.И.)

1. Алгоритм вычисления кратчайшего расстояния в размеченном орграфе от заданной вершины на основе поиска в ширину. **(7 баллов)**

2. Неоднородные линейные рекуррентные соотношения (формулировка теоремы о структуре общего решения, принцип суперпозиции; доказательство теоремы о структуре общего решения). **(9 баллов)**

3. Решить в полукольце $S = (D_{100}$, НОД, НОК) систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 10x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 50 \\ x_2 = 4x_1 + 4x_2 + 20x_3 + 20 \\ x_3 = 5x_1 + 2x_2 + 25x_3 + 10 \end{cases}$$

(7 баллов)

4. Построить конечный автомат, допускающий множество всех цепочек в алфавите $\{a, b\}$, которые не начинаются цепочкой ba и не заканчиваются цепочкой ab. **(7 баллов)**

1)Алгоритм вычисления кратчайшего расстояния в размеченном орграфе от заданной вершины на основе поиска в ширину.

Поиск в ширину

Охватываем весь список смежностей используется очередь.
Расставляем метки на вершинах графа.

```
begin
    for all (v ∈ V) do
        M[v] := +∞;
    Q := ∅;
    M[v0] := 0;
    V0 -> Q;
    for all (v ∈ Q)
        while (Q != ∅) do
            for all (w ∈ L[v]) do
                if M[w] = +∞ then begin
                    M[w] := M[v] + 1;
                    w -> Q;
                end;
    Q -> V;
end
```

2)Неоднородные линейные рекурентные соотношения (формулировка теоремы о структуре общего решения, принцип суперпозиции, доказательство теоремы о структуре общего решения)

Линейные неоднородные рекуррентные соотношения

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f(n) \qquad (4)$$

<u>Теорема 4:</u> общее решение ~~соотношения (4)~~ НЛРС может быть представлено в виде суммы произвольного частного неоднородного соотношения и общего решения соответствующего однородного соотношения ~~(5)~~, т.е.

$$y_n^{о.н.} = y_n^{ч.н.} + \sum_{i=1}^{k} c_i y_n^{(i)} \qquad (11)$$

<u>Доказательство:</u> зададим произвольные начальные условия в виде (

$$\begin{cases} y_0^{ч.н.} + \sum_{i=1}^{k} c_i y_0^{(i)} = d_0 \\ y_1^{ч.н.} + \sum_{i=1}^{k} c_i y_1^{(i)} = d_1 \\ \vdots \\ y_{k-1}^{ч.н.} + \sum_{i=1}^{k} c_i y_{k-1}^{(i)} = d_{k-1} \end{cases} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} c_i y_0^{(i)} = d_0 - y_0^{ч.н.} \\ \sum_{i=1}^{k} c_i y_1^{(i)} = d_1 - y_1^{ч.н.} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} c_i y_{k-1}^{(i)} = d_{k-1} - y_{k-1}^{ч.н.} \end{cases} \qquad (12а)$$

$\Delta \neq 0$ ~~(... (8))~~

Замечательное замечание: если есть рекуррентное соотношение

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = \sum_{i=1}^{l} g_i(n) \qquad (13)$$

$\varphi_i(n)$ — частное решение соответствующего слагаемого правой части ~~(13)~~

Тогда частное решение ~~(13)~~ может быть представлено в виде

$$y_n^{ч.н.} = \sum_{i=1}^{l} \varphi_i(n)$$

ЭТОЙ

Утверждение теоремы ~~8~~ называют ***принципом суперпозиции***.

Теорема ~~8~~. Пусть правая часть неоднородного соотношения $x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f(n)$ ~~(12)~~ является суммой некоторых последовательностей: $f(n) = \sum_{i=1}^{p} g_i(n)$, и пусть последовательность $\varphi_n^{(i)}$ есть решение неоднородного соотношения с правой частью $g_i(n), i = 1, \ldots, p$.

Тогда сумма $\theta_n = \sum_{i=1}^{p} \varphi_n^{(i)}$ является решением соотношения

$x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f(n)$ ~~(12).~~

// **Доказательство**. Имеем:

$$\theta_n + a_1\theta_{n-1} + \ldots + a_k\theta_{n-k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \varphi_n^{(i)} + a_1 \sum_{i=1}^{p} \varphi_{n-1}^{(i)} + \ldots + a_k \sum_{i=1}^{p} \varphi_{n-k}^{(i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (\varphi_n^{(i)} + a_1\varphi_{n-1}^{(i)} + \ldots + a_k\varphi_{n-k}^{(i)}) = \sum_{i=1}^{p} g_i(n) = f(n),$$

Билет №9

1. Поиск в ширину в орграфе. – 7 б.
2. Сформулируйте и докажите лемму о разрастании для регулярных языков и ее следствие. – 9 б.
3. Определить, обладает ли определенное ниже бинарное отношение ρ на множестве целых чисел свойствами рефлексивности (или иррефлексивности), симметричности (или антисимметричности) и транзитивности: ρ = {(x,y): |x-y|≥k>0}. Описать квадрат этого отношения. – 7 б.
4. Найти общее решение соотношения $x_n = -x_{n-1} + 12x_{n-2} + 2^n$. – 7 б.

1) Поиск в ширину в орграфе

<u>Поиск в ширину</u>

Охватываем весь список смежностей используется очередь. Расставляем метки на вершинах графа.

```
begin
    for all (v ∈ V) do
        M[v] := +∞;
    Q := Ø;
    M[v0] := 0;
    V0 -> Q;
    for all (v ∈ Q)
        while (Q != Ø) do
            for all (w ∈ L[v]) do
                if M[w] = +∞ then begin
                    M[w] := M[v] + 1;
                    w -> Q;
                end;
    Q -> V;
end
```

2)

Сформулируйте и докажите лемму о разрастании для регулярных языков и ее следствия (ПРИМЕР НЕ ДИКТУЙ)

Дискр. мат
12.01.2021

§5. Лемма о разрастании для регулярных языков

<u>Теорема</u> (о разрастании)

Для любого регулярного языка $L \subseteq V^*$ существует константа k_L такая, что $(\forall x \in V^*)(|x| \geq k_L \Rightarrow ((x \in L) \rightarrow (x = uvw$ & $0 < |v| \leq k_L$ & $(\forall n \geq 0)(uv^n w \in L)))$ & $|v| > 0)$

<u>Пример</u> $L_1 = \{a^n b^n;\ n \geq 0\}$

$x = \underbrace{a \dots a}_{n} \underbrace{b \dots b}_{n} = uvw$

① $v = a^k;\ 0 < k \leq n$

② $v = b^l;\ 0 < l \leq n$ — для всех 3-х есть противоречие

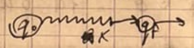
③ $v = a^k b^l,\ k, l \neq 0$ (нельзя найти v) $\Rightarrow$ L_1 не регулярен.

<u>Доказательство</u>

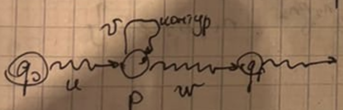
Пусть язык $L \subseteq V^*$ регулярен. Тогда $L = L(M)$, где $M = (V, Q, q_0, F, \delta)$ — дет. КА

Пусть $k_L = |Q|$, возьм. $x \in L$ и $|x| \geq |Q| = k_L$

Тогда $(\exists!\, W:\ q_0 \overset{*}{\underset{x}{\Rightarrow}} q_f)$



$|x| > |Q| \Rightarrow$ число вершин в пути $W > |Q|$. Тогда



$x = uvw$ и $(\forall n \geq 0)(x_n = uv^n w \in L)$

$|v| \leq k_L = |Q|$

<u>Следствие</u> Для любого бесконечного регулярного языка существует последовательность слов $\{x_n\}_{n \geq 0}$ такая, что их длины образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Билет №10

1. Задача о путях в размеченном орграфе и ее решение (доказать основную теорему). – 7 б.
2. Лемма Бернсайда (с доказательством). – 9 б.
3. Для бинарного отношения $\rho = \{(x,y): 2x \le 5y,\ 0 \le x,y \le 1\}$ найти обратное и квадрат. – 7 б.
4. Доказать, что язык $L = \{x: x = a^n b^m a^p,\ m,n,p \ge 0,\ n > p\}$ нерегулярен.- 7 б.

1) Задача о путях в размеченном орграфе и метод ее решения (с доказательством основной теоремы)

к

<u>Размеченным ориентированным графом</u> называют пару $W = (G, \phi)$, где $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ – обычный ориентированный граф,

$\boldsymbol{\phi}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}$ – функция разметки со значениями в некотором идемпотентном полукольце $\mathcal{S} = (S, +, *, \mathbb{0}, \mathbf{1})$, $(\forall e \in E)(\phi(e) \neq 1)$.

Если задать орграф с помощью матрицы смежности

$\cancel{A = (a_{ij}),\ a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$, то задача о достижимости сводится к вычислению матрицы достижимости графа:

$$\cancel{C = (c_{ij}),\ c_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \Rightarrow^* v_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}.$$

Если задать орграф с помощью матрицы меток дуг

$\cancel{A = (a_{ij}),\ a_{ij} = \begin{cases} \phi(v_i, v_j), & \text{если } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}}$, то задача о поиске кратчайших расстояний между двумя узлами графа сводится к вычислению матрицы кратчайших расстояний:

$$\cancel{C = (c_{ij}), c_{ij} = \begin{cases} \text{длине кратчайшего пути из } v_i \text{ в } v_j, & \text{если } v_i \Rightarrow^* v_j \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}}.$$

Обе задачи можно решить с помощью алгоритма Флойда – Уоршелла – Клини.

В случае задачи о достижимости, в качестве полукольца $\mathcal{S}$, выбирают полукольцо $\mathbb{B} = (\{0,1\}, max, min, 0,1)$.

В случае задачи о поиске кратчайших расстояний, выбирают полукольцо $\mathcal{R}^+ = ([0, +\infty], min, +, +\infty, 0)$.

На след странице продолжение

Теорема ~~5.4.~~ Матрица стоимостей ориентированного графа G, размеченного над полукольцом с итерацией $\mathcal{R}$ ~~(в частности, над замкнутым полукольцом)~~, равна итерации матрицы A меток дуг ориентированного графа G. ~~#~~

Для вычисления $C = A^*$ достаточно решить (т.е. найти наименьшее решение) в $\mathcal{R}$ при всех $j = \overline{1,n}$ систему уравнений

$$\xi = A\xi + \varepsilon_j,$$

где $\varepsilon_j \in \mathcal{R}^n$ — j-й единичный вектор, т.е. вектор, все элементы которого, кроме j-го, равны $\mathbf{0}$, а j-й равен единице полукольца $\mathcal{R}$. Наименьшее решение имеет вид $\xi = A^*\varepsilon_j$ ~~(см. 3.3)~~. Тогда столбец $\xi = A^*\varepsilon_j$ есть j-й столбец матрицы A^*. ~~Такой метод вычисления матрицы A^* аналогичен известному из линейной алгебры методу элементарных преобразований при вычислении обратной матрицы~~.

Выясним теперь смысл матрицы стоимостей $C = A^*$ для полуколец $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}^+$.

В первом из этих полуколец метка отдельного пути всегда равна 1 (так как метка дуги в размеченном над полукольцом графе не может, согласно определению, быть нулем полукольца). Следовательно, стоимость $c_{ij} = 1$, если существует хотя бы один путь из i-й вершины в j-ю, и $c_{ij} = 0$, если иначе. ~~Другими словами, для полукольца $\mathcal{B}$ матрица стоимостей совпадает с матрицей достижимости ориентированного графа.~~

В полукольце $\mathcal{R}^+$ метка пути — это арифметическая сумма меток его дуг, так как умножение в $\mathcal{R}^+$ — это обычное арифметическое сложение. Поскольку сложение в $\mathcal{R}^+$ — это взятие наименьшего из слагаемых, то стоимость c_{ij} — это наименьшая из меток пути среди всех путей, ведущих из i-й вершины в j-ю, т.е. это и есть наименьшая длина пути между указанными вершинами. Таким образом, в полукольце $\mathcal{R}^+$ матрица стоимостей является матрицей кратчайших расстояний, ~~т.е. наименьших длин путей между всеми парами вершин ориентированного графа.~~

2) Лемма Бернсайда (с доказательством)

Утверждение 1: множество всех перестановок, переводящих s в τ — правый смежный класс стабилизатора

$G(s,\tau) = G_s\sigma_\tau$, где $\sigma_\tau(s) = \tau$

Доказательство: пусть $\sigma \in G_s\sigma_\tau$. Тогда $\sigma = \tau\sigma_\tau$, где $\tau \in G_s$

$\sigma(s) = \sigma_\tau(\tau(s)) = \sigma_\tau(s) = \tau$, т.е. $\sigma \in G(s,\tau)$.

Пусть $\sigma \in G(s,\tau)$. Тогда $\sigma = \sigma(\sigma_\tau^{-1}\cdot\sigma_\tau) = (\sigma\sigma_\tau^{-1})\sigma_\tau$, но

$\sigma\sigma_\tau^{-1} \in G_s$, т.к. $\sigma\sigma_\tau^{-1}(s) = \sigma_\tau^{-1}(\sigma(s)) = \sigma_\tau^{-1}(\tau) = s$, т.е.

$\sigma\sigma_\tau^{-1} \in G_s$. Итак, $\sigma \in G_s\sigma_\tau$

Следствие 1. $|G(s,\tau)| = |G_s| = |G_s\sigma_\tau|$

Следствие 2. Если $s \underset{G}{\sim} \tau$, то $|G_s| = |G_\tau|$

т.е. $|G(s,\tau)| = |G(\tau,s)| = |G_s| = |G_\tau|$

Обозначим $|[s]_G| = \omega(s)$ - число элементов в орбите s

Утверждение 2: число элементов в орбите s совпадает с индексом подгруппы в группе: $\omega(s) = |G : G_s|$

$|G:H|$ - число смежных классов, определяющих H.

Доказательство: обозначим $C(G_s) = \{G_s\sigma : \sigma \in G\}$ - прав. смежн. классы

Зададим отображение $h: [s]_G \to C(G_s)$, $h(\sigma(s)) = G_s\sigma$

Из определения следует, что отображение h сюръективно. Докажем, что h инъективно.

Пусть $\tau, t \in [s]_G$ и $\tau \neq t$, но $h(\tau) = h(t)$. Тогда

$h(\tau) = h(\sigma_\tau(s)) = G_s\sigma_\tau$, $\sigma_\tau(s) = \tau$

$h(t) = h(\sigma_t(s)) = G_s\sigma_t$, где $\sigma_t(s) = t$. Итак, $G_s\sigma_\tau = G_s\sigma_t$, т.е.

$G(s,\tau) = G(s,t)$, $s \xrightarrow{\sigma} \tau$, $s \xrightarrow{\sigma} t$, что невозможно, $\Rightarrow h$ - инъекция $\Rightarrow$

$\Rightarrow h$ - биекция и $w(s) = |G : G_s|$

По теореме Лагранжа $|G| = \underbrace{|G : G_s|}_{w(s)} \cdot |G_s| = w(s) \cdot |G_s|$

Обозначим N - число орбит

$s_1, s_2, \ldots, s_N$ - элементы из орбит

$$\underbrace{w(s_1) \cdot |G_{s_1}|}_{|G|} + \underbrace{w(s_2) \cdot |G_{s_2}|}_{|G|} + \ldots + \underbrace{w(s_N) \cdot |G_{s_N}|}_{|G|} = N \cdot |G|$$

Отсюда $\boxed{N = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in M} |G_s|}$ - лемма Бернсайда (1)

Им же

(2) $\boxed{N = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma),}$ где $\psi(\sigma)$ - число элементов мн. M, оставляющих подстановку σ неподвижн

П

Билет №11

1. Цикловой индекс группы. Формулировка теоремы Пойа. – 7 б.
2. Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце. – 9 б.
3. Вычислить группу автоморфизмов графа:  - 7 б.
4. Построить конечный автомат, допускающий те и только те цепочки нулей и единиц, которые не содержат вхождения цепочки 11 и не заканчиваются цепочкой 00.- 7 б.

1) Цикловой индекс группы. Формулировка теоремы Пойа

Циклический индекс группы.

Пусть есть группа S_n и подстановка
$\sigma \in S_n$, $\sigma = C_1 C_2 \dots C_n$
тогда t_σ – мультипликативный терм
$t_\sigma = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, где $k_i \geq 0$
При этом $\sum_{i=1}^{n} k_i = k(\sigma)$, а $\sum_{i=1}^{n} i k_i = n$

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightleftharpoons \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} t_\sigma =$$

$$= \frac{1}{|G|} (\alpha_1 t_{\sigma_1} + \alpha_2 t_{\sigma_2} + \dots + \alpha_m t_{\sigma_m})$$

где $\alpha_1 + \dots \alpha_m = |G|$

Структурный перечень неэквивалентных единиц разметки

$$Inv t(R^S / \tilde{G}) = \sum_{w} \alpha_w w,$$ где
w – вес, α_w – число неэквивалентных функций веса.

Теорема Пойа.

1) $N = P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)|(\forall i = \overline{1,n})(x_i = m)$ –

– число неэкв. раскрасок

2) $Invt(R^S/\tilde{G}) = P_G(w_1 + \ldots + w_m, \ldots, w_1^n + \ldots + w_m^n)$

т.е. $x_1 = \sum_{i=1}^{m} w_i$

Док-во

1) $P_G(x_1, x_2, \ldots x_n)(\forall i = \overline{1,n})(x_i = m) =$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} t_\sigma \Big|(\forall i = \overline{1,n})(x_i = m) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} m^{k(\sigma)} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma) = N \text{ –}$$

– по лемме Бернсайда.

2) $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)|x_1 = \sum_{i=1}^{m} w_i =$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \hat{t}_\sigma = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sum_{w} \psi_w(\sigma) w =$$

$$= \sum_{w} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \psi_w(\sigma) \right) w = \sum_{w} \alpha_w W$$

$\hat{t}_\sigma$ – структурный перечень множества стационарных функций размещения сохраняемых подстановкой σ

2) Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце

Для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ элементов замкнутого полукольца и любого элемента а этого полукольца выполняется равенство $a + \sum x_n = \sum(a + x_n)$ – операция сложения в замкнутом полукольце непрерывна.

Теорема: Наименьшими решениями уравнений $x = ax + b$ и $x = xa + b$ в замкнутых полукольцах являются соответственно $x = a^*b$ и $x = ba^*$; а* - итерация элемента а.

Док-во на след странице

◀ Используя формулу ~~(1.8)~~ для вычисления наименьшей неподвижной точки и записывая sup в случае замкнутого полукольца как бесконечную сумму~~, для уравнения (3.14)~~ получаем

$$x = \sum_{n \geqslant 0}^{\infty} f^n(\mathbf{0}),$$

где $\mathbf{0}$ — нуль полукольца, а $f(x) = ax + b$.

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
&f^0(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\\
&f^1(\mathbf{0}) = b,\\
&f^2(\mathbf{0}) = ab + b = (a + \mathbf{1})b,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^n(\mathbf{0}) = (a^{n-1} + \ldots + a^2 + a + \mathbf{1})b,
\end{aligned}$$

получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbf{0}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1})b.$$

Используя непрерывность умножения, вынесем b (вправо) за знак бесконечной суммы и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1})b = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1})\right)b.$$

Сумма $\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1}$ есть частичная сумма последовательности $\{a^n\}_{n \geqslant 0}$. ~~Используя равенство (3.6)~~, можем написать

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = a^*.$$

Окончательно получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^n(\mathbf{0}) = a^* b.$$

Анологично доказывается равенство ~~(3.15)~~. ▶

2 - 2