

## Лабораторная работа №2

Задача представлена в 7 вариантах, каждому достанутся две задачи. Схема эксперимента везде одна и та же.

1. Методом моментов найти оценку параметра  $\theta$  равномерного распределения на  $[-\theta, \theta]$ . Найти смещение оценки, дисперсию, среднеквадратическую ошибку. Эксперимент для  $\theta = 10$ .
2. Методом моментов найти оценку квадрата масштабирующего параметра  $\theta$  распределения Лапласа (сдвиг считать нулевым). Найти смещение оценки, дисперсию, среднеквадратическую ошибку. Эксперимент для  $\theta = 0.5$ .
3. Методом максимального правдоподобия найти оценку параметра  $\theta$  биномиального распределения  $\text{Bin}(n, \theta)$ , считая  $n$  известным. Найти смещение оценки, дисперсию, среднеквадратическую ошибку. Является ли найденная оценка эффективной? Эксперимент при  $n = 4$ ,  $\theta = 1/5$ .
4. Можно ли оценить параметр сдвига  $\theta$  распределения Коши с известным масштабирующим параметром с помощью метода моментов? С помощью какой оценки можно оценить параметр  $\theta$ ? Показать её состоятельность (*подсказка*: см. теорему об асимптотическом поведении среднего члена вариационного ряда). Эксперимент для Cauchy(2, 1).
5. Найти оценку максимального правдоподобия параметра  $\theta$  для распределения с плотностью

$$f_{\theta}(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta - x^3)^2}{2}\right).$$

Найти её смещение, дисперсию и среднеквадратическую ошибку. Какими свойствами обладает данная оценка? Эксперимент при  $\theta = 5$ .

6. С помощью метода моментов найти оценку параметра  $\theta$  распределения с плотностью

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{(k-1)!\theta^k} x^{k-1} e^{-x/\theta} \mathbf{1}(x > 0),$$

если  $k \in \mathbb{N}$  – известный параметр. Какими свойствами обладает данная оценка? Эксперимент при  $\theta = 2$ ,  $k = 3$ .

7. С помощью метода моментов найти оценку параметра  $\theta$  геометрического распределения (указать вид используемой параметризации). Какими свойствами обладает оценка? Эксперимент при  $\theta = 0.3$ .

Сгенерируйте 500 выборок объема 50 с указанным значением параметра  $\theta$ . Сколько раз оценка отклонится от истинного значения параметра более чем на 0.01? То же самое сделать для объемов выборки 100, 500, 1000, 2500. Визуализируйте результат. Как объяснить полученный результат?

**Ключевые понятия:**

- Постановка задачи точечного оценивания параметров
- Состоятельность, несмещенность, асимптотическая нормальность
- Эффективность оценки, информация Фишера, неравенство Рао-Крамера
- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия