

Sönnun án upplýsinga

Þórður Ágústsson

14. mars 2021

Útdráttur

Ágrip hér

1 Innangangur

Sannanir eru margskonar. Þær hefðbundnu sem maður hugsar um í stærðfræðinámi eru byggðar á röksemdarfærslu þar sem staðhæfing A er gefin og sönnunin leiðir lesandann frá þekktum staðreyndum (sannaðar áður eða "axioms") yfir í staðhæfingu A . Sönnunin er þá gild ef vegurinn sem hún stíkar, milli þekktra staðhæfinga yfir í A , er þráðbeinn og holulaus.

Þesskonar sannanir eru t.d. sannanir á Pýþagórasarreglunni, grundvallarreglu algebrunnar etc. (KOMA MEÐ DÆMI UM SÖNNUN, I.E. REGLU OG SANNA HANA EH EAZY)

Þær sannanir sem við munum skoða í þessari ritgerð eru ekki af þessu almenna tagi. Þær krefjast þess að við víkkum skilgreiningu okkar á "sönnun". Einfalt er að hugsa sér að orðið "sönnun" á ekki eingöngu við reglur í stærðfræði, heldur einnig getur maður sannað staðhæfingu eins og $\sqrt{2}$ er rót margliðunnar $f(x) = x^2 - 2$. Sem er ekki regla á borð við pýþagórasarregluna, heldur fremur einhverskonar staðhæfing að rót margliðunnar er þekkt.

Til dæmis segir grundvallarregla algebrunnar að sérhver margliða af stigi d hefur d -rætur (í \mathbb{C}). Þetta er regla sem þarfnast almennrar röksemdarfærslu um réttmæti hennar. Staðhæfingin " $\sqrt{2}$ er rót margliðunnar $f(x) = x^2 - 2$ " er hinsvegar ekki beint regla, helur fremur staðhæfing um þekkta lausn á vandamáli. Sannanirnar sem við skoðum í þessari ritgerð eru líkari seinni tegundinni. Þær eru töl sem einstaklingar geta notað til að sanna þekkingu á lausn á vandamáli fyrir öðrum, í þeim skilningi að einn veit svar við vandamáli og vill sanna að svarið sé lausn fyrir öðrum án þess að hinn þurfi að leysa vandamálið sjálfur.

Ein tegund af þesskonar sönnunum er sönnun án upplýsinga. Þær eru mikilvægur undirflokkur af sönnunum sem hafa hagnýtt gildi í raunheimum.

Eftirfarandi er sögudæmi sem sýnir kjarna sannana án upplýsinga.

Litblindi vinurinn.

Ari og Embla sitja við borð. Á borðinu liggja tveir boltar. Annar rauður en hinn grænn. Að öðru leyti eru boltarnir algjörlega eins. Ari tekur upp boltana og segir við Emblu

”Afhverju komstu með þessa bolta?”

”Hugsaði að þú vildir kannski bolta, en vissi ekki hvaða lit þú vildir svo tók bara báða svo þú gætir valið” svarar Embla.

Ari hlær. ”Hvað, ertu að reyna stríða mér? Þessir boltar eru alveg eins?” Segir Ari og starir á boltana til skiptis.

”Ha? Nei? Þessi er rauður,” Embla tekur annan boltann ”og hinn er grænn... Ari, ertu nokkuð litblindur?”

Ari er forviða. Hann trúir þessu ekki. Heldur enn að Embla sé að bulla í honum.

”Neeee, þú ert að ljúga. Hlítur að vera.”

Nú er Embla tiltölulega vel að sér í gagnvirkum sönnunum og segir því við Ara ”Það væri bara kjánalegt að ljúga að einhverju svona. Ég skal sanna þetta fyrir þér.”

Hvernig sannar Embla fyrir Ara að boltarnir séu mismunandi litaðir?

Skilgreining 1.1. Gagnvirk sönnun fyrir mismunandi bolta:

1. Embla lætur Ara halda á báðum boltunum og segir honum að setja þá undir borð eða fyrir aftan bak þannig að Embla sér ekki boltana.
2. Síðan setur Ari annan boltann upp á borðið en heldur hinum földum. Og setur boltann síðan aftur undir borð.
3. Ari velur síðan annan boltann aftur (hér getur hann valið sama bolta og hann sýndi fyrst eða valið hinn) og setur upp á borðið og spyr Emblu ”Er þetta sami bolti og ég sýndi þér fyrst?”

Embla, verandi EKKI litblind, á auðvelt með að svara hvort boltinn sé sá sami eða ekki þar sem liturinn auðkennir boltana. Hún svarar því hvort hann skipti um bolta eða ekki.

4. Endurtökum skref 2&3 þar til Ari er orðinn sáttur með að boltarnir séu mismunandi, og þar sem það eina sem er mismunandi við þá er liturinn hlýtur Embla að vera segja satt.

”Jæja, þú virðist hafa haft rétt fyrir þér. Skil ekki afhverju ég efaðist um þig,” segir Ari.

”Þú ert heiðarleg. Uppáhalds Marvel-ofurhetjan mín er Hulk, svo ég þigg græna boltann.” Segir ari glaður í bragði, þótt hann hafi haft rangt fyrir sér, og heldur fram báðum boltunum svo Embla geti tekið til sín þann rauða.

”Ekki málið Ari minn. Ég held þá þeim rauða fyrir mig”, segir Embla áður en hún græna boltann og stingur í töskuna sína.