

Sönnun án upplýsinga

Þórður Ágústsson

11. apríl 2021

Útdráttur

Ágrip hér

1 Inngangur

Sannanir eru margskonar. Þær hefðbundnu sem maður kynnist í stærðfræðinámi eru byggðar á samfelldri röksemdarfærslu. Staðhæfing A er gefin og sönnunin leiðir lesandann frá þekktum staðreyndum yfir í staðhæfingu A. Sönnunin er þá gild ef vegurinn sem hún stíkar, milli þekktra staðhæfinga yfir í A, er þráðbeinn og holulaus. Þesskonar sannanir eru t.d. sannanir á Pýþagórasarreglunni, grundvallarreglu algebrunnar og margar fleiri.

Þær sannanir sem við munum skoða í þessari ritgerð eru ekki af þessu almenna tagi. Þær krefjast þess að við víkkum skilning okkar á orðinu "sönnun". Einfalt er að hugsa sér að "sönnun" þurfi ekki eingöngu að eiga við reglur í stærðfræði, heldur einnig getum við hugsað okkur að "sönnun" eigi t.d. við sönnun á að $\sqrt{2}$ sé rót margliðunnar $f(x) = x^2 - 2$ eða að rætur margliðunnar $f(x) = x^{10} + 3 * x^2 + x + 73$ séu þekktar. Þetta eru ekki reglur, sem þarf að sanna, á borð við pýþagórasarregluna, heldur fremur einhverskonar staðhæfingar um þekkingu sem krefjast öðruvísi útleiðinga til að sýna að þær séu "sannar".

Til samanburðar segir grundvallarregla algebrunnar að sérhver margliða af stigi d hefur d-rætur (í \mathbb{C}). Þetta er regla sem þarfnast almennrar röksemdarfærslu um réttmæti hennar. Staðhæfingin " $\sqrt{2}$ er rót margliðunnar $f(x) = x^2 - 2$ " er hinsvegar ekki beint regla, heldur fremur staðhæfing um þekkta lausn á vandamáli.

Sannanir þessarar ritgerðar munu fjalla um þessar hinsegin tegundir af sönnunum, þ.e. sönnun á staðhæfingu um þekkingu. Þær eru töl sem hægt er að

nota til að sanna þekkingu á lausn á vandamáli, í þeim skilningi að ef einhver veit svar við vandamáli og vill sanna að svarið sé lausn fyrir öðrum án þess að aðrir þurfi að verja tíma í að leysa vandamálið sjálfir þá getur hann það með eins miklum líkum og hann vill. (Betur verður farið í orðalagið "eins miklum líkum og hann vill" seinna í ritgerðinni)

Við munum sjá að þessar sannanir nota samskipti milli þess sem segist vita lausn á vandamálinu og þess sem hann vill sannfæra um lausnina, eða sannfæra að hann viti lausn án þess að gefa upp lausnina. Við munum einnig veita slembileika samskiptanna athygli, þar sem slambi-eiginleiki sannananna er það sem gerir þær trúverðugar.

Ein tegund af svona sönnunum, sem hefur fengið mikla athygli síðustu ár, er sönnun án upplýsinga. Þær eru mikilvægur undirflokkur sannana sem hafa hagnýtt gildi í raunheiminum og mun umræða þessarar ritgerðar að mestu fjalla um þær.

Eftirfarandi er sögudæmi sem sýnir kjarna sannana án upplýsinga (og gagnvirkra sannana) og verður mikið notað seinna í ritgerðinni til að, vonandi, auka skilning lesanda á efninu.

Litblindi vinurinn.

Ari og Embla sitja við borð. Á borðinu liggja tveir boltar. Annar rauður en hinn grænn. Að öðru leyti eru boltarnir algjörlega eins. Ari tekur upp boltana og segir við Emblu

"Aflhverju komstu með þessa bolta?"

"Ahh, ég hugsaði bara að þú vildir kannski bolta, en vissi ekki hvaða lit þú vildir svo ég tók þá báða svo þú gætir valið" svarar Embla. Ari hlær.

"Hvað, ertu að reyna stríða mér? Þessir boltar eru alveg eins?" Segir Ari og starir á boltana til skiptis.

"Ha? Nei? Þessi er rauður," Embla lyftir öðrum boltanum upp "og hinn er grænn... Ari, ertu nokkuð litblindur?"

Ari er forviða. Hann trúir þessu ekki. Heldur enn að Embla sé að bulla í honum.

"Neeee, þú ert að ljúga. Hlýtur að vera."

Nú er Embla tiltölulega vel að sér í gagnvirkum sönnunum og segir því við Ara

”Það væri bara kjánalegt að ljúga að einhverju svona. Ég skal sanna þetta fyrir þér.”

Hvernig sannar Embla fyrir Ara að boltarnir séu mismunandi á litinn?

Gagnvirk sönnun fyrir mismunandi bolta

1. Embla lætur Ara halda á báðum boltunum og segir honum að setja þá undir borð eða fyrir aftan bak þannig að Embla getur ekki séð þá.
2. Ari sýnir annan boltann með því að setja hann upp á borðið en heldur hinum földum fyrir Emblu. Eftir að Embla hefur séð boltann setur Ari hann aftur undir borðið.
3. Ari velur annan boltann til að sýna Emblu (hér getur hann valið sama bolta og hann sýndi í skrefi 2 eða hinn) og setur upp á borðið. Þegar Embla hefur séð boltann spyr Ari hana

”Er þetta sami bolti og ég sýndi þér í skrefi 2?”

Embla, verandi *ekki* litblind, á auðvelt með að svara hvort boltinn sé sá sami eða ekki þar sem liturinn auðkennir boltana. Hún svarar því hvort hann skipti um bolta eða ekki.

4. Endurtökum skref 2 og 3 þar til Ari er orðinn sáttur með að boltarnir séu mismunandi, og þar sem það eina sem er mismunandi við þá er liturinn hlýtur Embla að vera segja satt.

”Jæja, þú virðist hafa haft rétt fyrir þér. Skil ekki hvernig ég gat efast um þig,” segir Ari.

”Þú ert heiðarleg. Uppáhalds Marvel-ofurhetjan mín er Hulk, svo ég þigg græna boltann.” Segir ari glaður í bragði, þótt hann hafi haft rangt fyrir sér, og heldur fram báðum boltunum svo Embla geti tekið til sín þann rauða.

”Ekki málið Ari minn. Ég held þá þeim rauða fyrir mig”, segir Embla áður en hún tekur græna boltann og stingur í töskuna sína.