第四章 动态系统的稳定性

重点内容：

1、内部稳定性和外部稳定性

2、李亚普诺夫稳定性理论（第二方法）

3、构造李亚普诺夫函数方法

4、线性连续系统的稳定性

5、线性离散系统的稳定性

稳定性问题是控制理论研究的一个重要课题，稳定性是控制系统能够正常工作运行的前提。

两类稳定性问题： 外部稳定性，内部稳定性

（1）外部稳定性

物理含义： 若系统的输入是时间的有界函数，输出也是时间的有界函数，就认为系统是有界输入-有界输出稳定，简称BIBO稳定性。

数学定义： 若对于任意的 $u(t),\|u(t)\| \le L, \forall t \in [t_0, \infty]$，对应的输出y(t)存在 $\|y(t)\| \le K, \forall t \in [t_0, \infty]$

讨论这类系统的稳定性时，使用的是输入输出模型，并假定初态是零。

（2）内部稳定性

研究系统初始状态受到扰动时，系统的状态偏离平衡状态，是否有能力回到平衡状态。

内部稳定性和外部稳定性的关系:

结论：对连续时间线性时不变系统，内部稳定→BIBO稳定，反之不成立。

若系统能控且能观测，则内部稳定←→BIBO稳定。

4.1 李亚普诺夫稳定性

1892年由俄国科学家李亚普诺夫提出，可适用于线性系统、非线性系统、时变系统和定常系统。

4.1.1 基本概念

研究的系统是下列自治系统

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4-1}$$

对于定常系统为 $\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0$ （4-2）

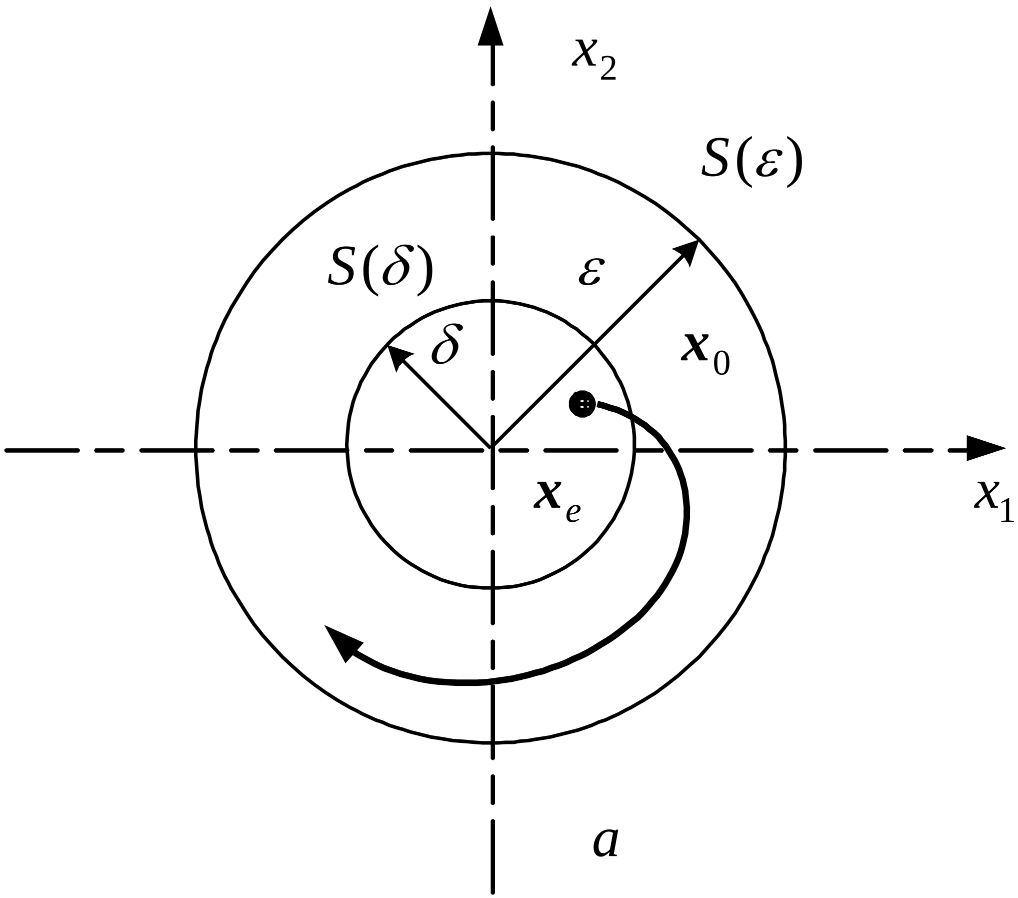
这种理论研究的是某个平衡状态的稳定性。对于系统（4-1），若 $f(x_e,t)=0$，则称 x_e 为系统的一个平衡状态。

系统平衡状态不唯一，仅讨论孤立平衡态的稳定性。

李亚普诺夫意义下稳定性

定义4.1 设$\boldsymbol{x}_e$是系统的一个平衡状态，如果对于$\forall\varepsilon>0$，总存在一个实数$\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得当$\|x(t_0)-x_e\|<\delta$，总有

$$\|\phi(t;x_0,t_0)-x_e\|<\varepsilon \qquad \forall t\geq t_0$$



超球体，邻域概念

几何含义： 图4.1a

定义4. 2（一致稳定） 设 $\boldsymbol{x}_e$是系统的一个平衡状态，如果对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在与初始时刻 t_0 无关的实数 $\delta(\varepsilon)>0$ ，使得当

$$\left\|x(t_0)-x_e\right\|<\delta$$

总有 $\left\|\phi(t;x_0,t_0)-x_e\right\|<\varepsilon \qquad \forall t\geq t_0$

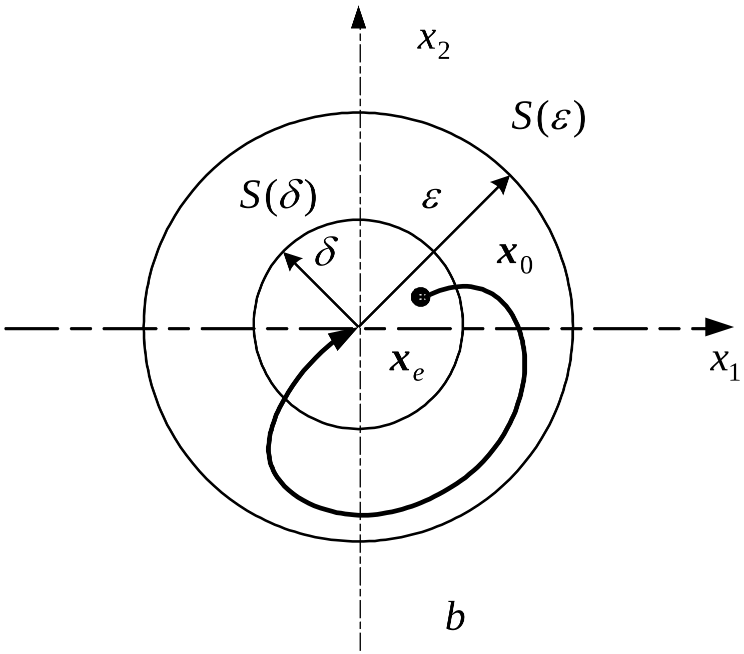
含义：在一个时刻Lyapunov稳定，则在任意时刻Lyapunov稳定

定义4. 3（渐近稳定） 设系统在平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 处是李亚普诺夫意义下稳定，且存在实数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$ ，当

$$\left\|x(t_0)-x_e\right\|<\delta(\varepsilon,t_0)$$

有 $$\lim_{t\to\infty}\left\|\phi(t;x_0,t_0)-x_e\right\|=0$$

几何含义： 图4.1 b

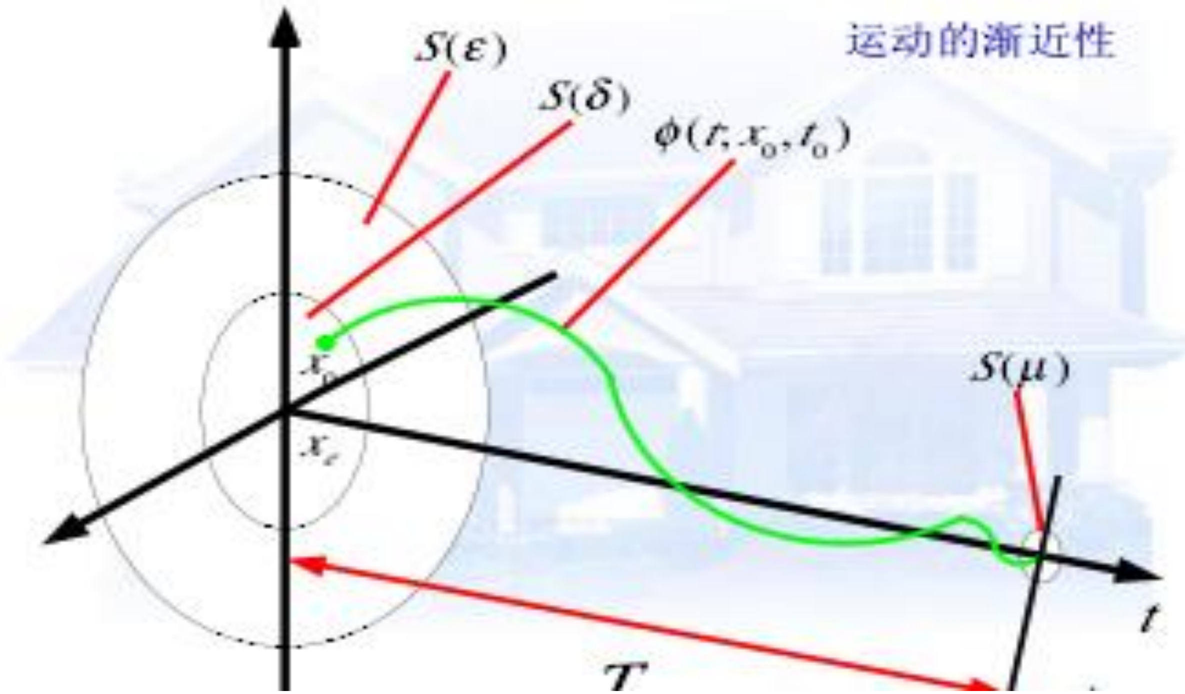


b

工程上主要指渐近稳定

若系统同时满足一致稳定和渐近稳定，则称系统是一致渐近稳定。

图4.1 c

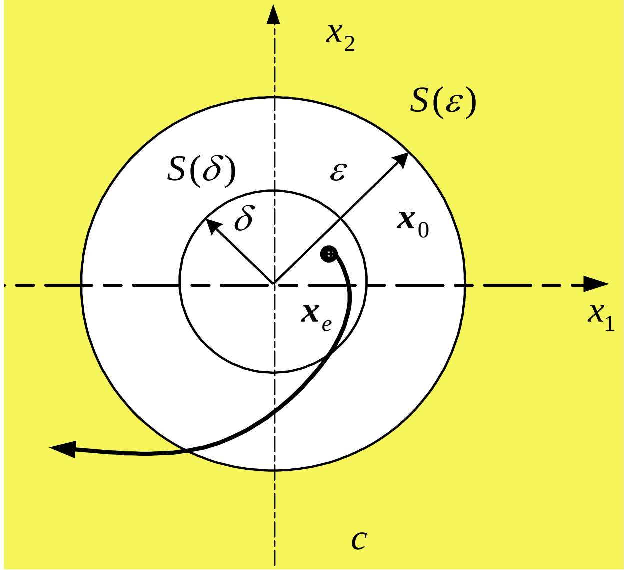


定义4.4（不稳定） 设x_e是系统的一个平衡状态，如果不管 $\forall\varepsilon>0$ 取多大，总不存在对应实数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得当

$$\left\|x(t_0)-x_e\right\|<\delta$$

满足不等式

$$\left\|\phi(t;x_0,t_0)-x_e\right\|<\varepsilon \qquad \forall t\geq t_0$$



几何含义：　图4.1d

结论：对于线性定常系统，渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 一致渐近稳定

李亚普诺夫第一方法：间接法，小范围稳定性方法。将非线性系统在平衡点附近线性化，利用线性系统特征值研究系统稳定性。线性化需满足一定条件。

李亚普诺夫第二方法：直接法，大范围稳定性方法。直接根据系统特征结构判断内部稳定性。思路引入广义能量函数，分析其导数变化率的定号性，建立相应的理论。本课程重点介绍第二方法。

4.1.2 李亚普诺夫第二方法主要结论

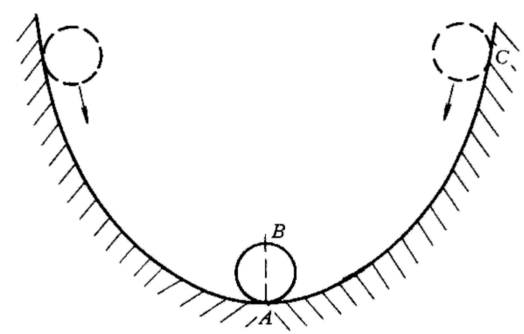
基本思路：从能量观点进行稳定性分析：

1）如果一个系统被激励后，其储存的能量随时间的推移逐渐衰减，到达平衡状态时，能量将达最小值，则这个平衡状态是渐近稳定的；

2）反之，如果系统不断地从外界吸收能量，储能越来越大，则这个平衡状态是不稳定的；

3）如果系统的储能既不增加，也不消耗，则这个平衡状态就是*Lyapunov*意义下的稳定。

由于实际系统的复杂性和多样性，往往不能直观地找到一个能量函数来描述系统的能量关系；



于是*Lyapunov*定义了一个**正定**的**标量**函数，作为虚构的广义能量函数，用一阶微分的符号特征来判断系统的稳定性。

考虑自治系统(4-1), 并假定原点 $x=0$ 为系统孤立平衡状态。

定理4.1 [李亚普诺夫主稳定性定理] 对于自治系统（4-1)，若可构造具有一阶连续偏导数的标量函数 $V(x,t)$，$V(0,t)=0$， 且对所有非零状态x 满足

(1) $V(x,t)$ 正定且有界，即存在非减标量函数 $\alpha(\|x\|)$ 和 $\beta(\|x\|)$，其中 $\alpha(0)=0$和β（0）$=0$ ，成立

$$\beta(\|x\|)\geq V(x,t)\geq\alpha(\|x\|)>0$$

(2) $\dot{V}(x,t)$ 负定且有界，即存在一个非减函数 $r(\|x\|), r(0)=0$ 成立

$$\dot{V}(x,t)\leq -r(\|x\|)<0,\ x\neq 0,\ t\neq t_0$$

（3）当 $\|x\|\to\infty$ ，有 $\alpha(\|x\|)\to\infty$, 即$V(x,t)\to\infty$

则称系统在平衡状态$x=0$ 为大范围一致渐近稳定。

证明：略。

说明：（1）普适性和充分条件，既适用于线性系统又适用于非线性系统，同时既适用于定常系统，又适用于时变系统。

（2）物理含义：$V(x,t)$ 为广义能量函数，$\dot{V}(x,t)$ 为变化率。表示若能量有限，能量变化率为负，则系统能量变化趋向零，系统运动必返回平衡点。

（3）关键选取 $V(x,t)$

定理4.2 [时不变系统] 对于时不变自治系统（4-2)，若可构造具有一阶连续偏导数的标量函数 $V(x)$，$V(0)=0$ ，且对有非零状态x 满足

(1) $V(x)$ 正定；

(2) $\dfrac{dV}{dt}$ 为负定

(3) 当 $\|x\| \to \infty$，有 $V(x) \to \infty$

则称系统在平衡状态$x=0$ 为大范围渐近稳定。

例4. 1 考虑下列系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

研究稳定性。

解：（0，0）为平衡点

选取 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ 正定，且 $V(0) = 0$

$$\dot{V}(x) = 2x_1 \cdot \dot{x}_1 + 2x_2 \cdot \dot{x}_2 = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

$\dot{V}(x)$ 负定，且 $\dot{V}(0) = 0$

当 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$ 时，有

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2 \to \infty$$

由定理4.2 知，系统在平衡状态$x=0$ 为大范围渐近稳定。

$\dot{V}(x)$ 负定条件过于保守，下列的结论将这个条件放宽。

定理4.3 [时不变系统] 对于时不变自治系统（4-2)，若可构造具有一阶连续偏导数的标量函数 $V(x)$, $V(0)=0$ ，且对有非零状态 x 满足

(1) $V(x)$ 正定；

(2) $\dfrac{dV}{dt}$ 为负半定

（3）对于非零 x_0 , $\dot{V}(\Phi(t;x_0,0))$不恒等于0 ;

（4）当 $\|x\|\to\infty$ ，有 $V(x)\to\infty$

则称系统在平衡状态*x=0* 为大范围渐近稳定。

例4.2 见书P229的例题 设系统状态方程为

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-x_1-x_2(1+x_2)^2$$

x_1=0, x_2=0为系统唯一的平衡状态，试确定该系统平衡状态的稳定性。

解： 选取一正定的标量函数

$$V(x)=x_1^{\;2}+x_2^{\;2}$$

$$\dot V(x)=2(x_1\dot x_1+x_2\dot x_2)$$

$$=-2x_2^2(1+x_2)^2\leqslant 0$$

设：$\dot V(x)\equiv 0 \quad \Rightarrow$ **$x_2\equiv 0$** 或 $x_2\equiv -1$

$\Rightarrow$ **$x_1\equiv 0$** 或 $\begin{matrix}\dot x_1=-1\\ 0=-x_1\end{matrix}$ **矛盾！** $\dot V(x)\not\equiv 0$

且 $\|x\|\to\infty$，有 $V(x)\to\infty$

系统的平衡状态是大范围渐近稳定的。

定理4.4 [小范围渐近稳定] 对于自治系统（4-1)，若可构造具有一阶连续偏导数的标量函数 $V(x,t)$，$V(0,t)=0$，且对x=0附近一个吸引区Ω中的非零状态x 满足

(1) $V(x,t)$ 正定；

(2) $\dfrac{dV(x,t)}{dt}$为负定且有界

则称平衡状态$x = 0$ 在Ω域内一致渐近稳定。

4.1.3 构造李亚普诺夫函数的方法

一、变量梯度法

标量函数 $V(x)$ 梯度为

$$\nabla V = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1(x) \\ \vdots \\ \nabla V_n(x) \end{bmatrix}$$

步骤：

（1） 取$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$ $\quad a_{ij}$为待定常数

由 $\dfrac{dV(x)}{dt}$ 为负定，有

$$\frac{dV(x)}{dt}=\left[\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\right]\cdot\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\left[\nabla V(x)\right]^T\cdot\dot{x}<0 \qquad (4\text{-}4)$$

（2）为了简化计算，给出一个附加条件(∇V雅可比矩阵对称)

$$\frac{\partial\nabla_j(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial\nabla_i(x)}{\partial x_j}, \qquad \forall i\neq j \qquad (4\text{-}5)$$

（3）由（4-4）和（4-5）确定 a_{ij}

（4）构造李亚普诺夫函数 $V(x)$

$$V(x)=\int_0^{V(x)}dV(x)=\int_0^t\frac{dV(x)}{dt}dt=\int_0^t\left[\nabla V(x)\right]^T\dot{x}dt=\int_0^x\left[\nabla V(x)\right]^T dx$$

$$=\int_0^{x_1(x_2=\cdots=x_n=0)}\nabla V_1(x)dx_1+\int_0^{x_2(x_1=x_1,x_3=\cdots=x_n=0)}\nabla V_2(x)dx_2 \qquad (4\text{-}6)$$

$$+\cdots+\int_0^{x_n(x_1=x_1,\cdots,x_{n-1}=x_{n-1})}\nabla V_n(x)dx_n$$

（5）判断$V(x)$正定性

若 $V(x)$ 正定，构造成功。若 $V(x)$ 非正定，换方法选 $V(x)$

例4.3 给定一个连续时间非线性时不变系统

$$\Sigma: \quad \dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2$$

解：易知，$(x_1 = 0, x_2 = 0)$ 为系统惟一平衡状态。

首先，由 n = 2，取梯度$\nabla V(x)$ 形式为

$$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} \nabla V_1(x) \\ \nabla V_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

其中，不妨取$a_{22} = 2$。

进而，基于关系（4.4）和（4.5）确定系数 a_{ij}。由要求

$$\frac{\partial \nabla V_j(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \nabla V_i(x)}{\partial x_j}, \qquad \forall \ i \neq j$$

可导出 $$a_{12} = \frac{\partial \nabla V_1(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2(x)}{\partial x_1} = a_{21}$$

再由要求 $[\nabla V(x)]^T \dot{x} < 0$

可导出 $$0 > [a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + 2x_2]\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^3 - x_2 \end{bmatrix} =$$

$$(a_{11} - a_{21} - 2x_1^2)x_1x_2 + (a_{12} - 2)x_2^2 - a_{21}x_1^4$$

由同时满足上述两个关系式要求，取系数为

$$a_{12} = a_{21} \qquad a_{11} = a_{12} + 2x_1^2 \qquad 0 < a_{12} < 2$$

基此，定出梯度$\nabla V(x)$为

$$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} (a_{12} + 2x_1^2)x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}, 0 < a_{12} < 2$$

再基于梯度 $\nabla V(x)$ 结果计算 $V(x)$，得到

$$V(x) = \int_0^{x_1(x_2=0)} (a_{12}x_1 + 2x_1^3)dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} (a_{12}x_1 + 2x_2)dx_2$$

$$= \frac{1}{2}x_1^4 + \frac{a_{12}}{2}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + x_2^2$$

$$= \frac{1}{2}x_1^4 + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

最后，判断$V(x)$ 结果的正定性。由

当 $0 < a_{12} < 2$, 矩阵$\begin{bmatrix} \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & 1 \end{bmatrix} > 0$ 即正定

可以推知，当$0<a_{12}<2, V(x)>0$ 即正定。并且，当$\|x\|\to\infty$ 有$V(x)\to\infty$ 。于是，可以得到结论，上述导出的 $V(x)$ 为满足渐近稳定性定理条件的一个李亚普诺夫函数，系统原点平衡状态 x = 0 为大范围渐近稳定。

二、克拉索夫斯基方法

考虑非线性时不变系统

$$\dot{x} = f(x), t \geq 0$$

其中， x 为 n 维状态，对所有 $t \in [0, \infty)$,有 $f(0)=0$，即状态空间原点 x = 0 为系统孤立平衡状态。

定义Jacobi矩阵

$$F(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

令

$$V(x) = f^T(x) \cdot f(x) \qquad （4\text{-}7）$$

定理4. 5 若 $F^T(x)+F(x)$负定，那么$V(x)=f^T(x)\cdot f(x)$ 是系统（4.2) 的李亚普诺夫函数。

例4.4 给定一个连续时间非线性时不变系统

$$\sum: \dot{x}_1=-3x_1+x_2 \qquad \dot{x}_2=2x_1-x_2-x_2^3$$

解：易知，$(x_1=0, x_2=0)$ 为状态空间 $\Re^2$ 内唯一平衡状态。

首先，通过计算，定出：

$$F(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

和

$$F^T(x)+F(x)=-\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2+6x_2^2 \end{bmatrix}$$

判断其负定性

对 $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2+6x_2^2 \end{bmatrix}$ ，有 $\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = 36x_2^2 + 3 > 0,$

即 $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2+6x_2^2 \end{bmatrix}$正定

可知 $F^T(x) + F(x) = -\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2+6x_2^2 \end{bmatrix}$负定

同时，当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$，有 $f^T(x)f(x) = (-3x_1 + x_2)^2 + (2x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \to \infty$

所以，平衡状态 x = 0 为大范围渐近稳定，且相应的一个李亚普诺夫函数为

$$V(x) = f^T(x)f(x) = (-3x_1 + x_2)^2 + (2x_1 - x_2 - x_2^3)^2$$

$$= 13x_1^2 - 10x_1x_2 - 4x_1x_2^3 + 2x_2^2 + 2x_2^4 + x_2^6$$

显然，上述两种形式的李亚普诺夫函数是采用经验方法难以找到，这从一个方面反映了规则化方法的结果。

4.2 线性系统的稳定性判据

4.2.1 线性定常系统稳定性特征值法

线性时不变系统记为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (4\text{-}8)$$

若A的特征值为 $\lambda_i (i=1,\cdots,n)$，可以得到方程（4-8）的解

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_0) \beta_i e^{\lambda_i (t-t_0)} \qquad (4\text{-}9)$$

β_i 是关于 λ_i 的特征向量。

$$\lim_{t\to\infty} x = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \quad i=1,2,\cdots,n \\ \text{常数或等幅振荡} & \lambda_i = 0\text{或}\,\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0\text{是单根} \\ \infty & \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0\text{或}\,\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0\text{是二重以上特征根} \end{cases} \qquad (4\text{-}10)$$

定理4.6 关于（4-8）在 $x_0 = 0$ 处的稳定性，若A的所有特征根均具有负实根，则是渐近稳定; 若实部为零的特征根为单根其它均为负实部特征根，则是稳定的。若有任一实部为正或实部为零的特征根是多重根，则是不稳定的。

如果系统（4-8）在 $x_e = 0$ 处渐近稳定，就说矩阵A是稳定的，称A的特征多项式

$$f(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda_1+a_0 \qquad (4\text{-}11)$$

为稳定多项式。

由特征方程的系数直接判别系统是否有正实部的根，有2种方法：劳斯法，霍尔维茨法。

（1）霍尔维茨法

结论1： 系统多项式（4-11）稳定的充分必要条件为 $a_n > 0$ 以及由特征方程系数组成的霍尔维茨行列式的主子行列式全部为正值。

霍尔维茨行列式构成方法： 主对角线上各项为特征方程第 2 项系数 a_{n-1} 至最后一项系数 a_0，在主对角线以下的各行中各项系数的下标逐次增加，而在主对角线以上的各行中各项系数的下标逐次减小。当系数的下标大于 n 或小于0时，行列式的项取0。

（2）劳思法

4.2.2 线性定常系统李亚普诺夫法

定理4.7 对 n 维连续时间线性时不变系统，原点平衡状态 $x_e=0$ 是渐近稳定的充分必要条件为，对任给一个$n\times n$ 正定对称矩阵Q，李亚普诺夫方程

$$A^T P + PA = -Q \qquad （4\text{-}12）$$

有唯一 $n\times n$ 正定对称解 P。

证明： 充分性。即正定矩阵P满足方程（4-12），证$x_e=0$ 渐近稳定。取李亚普诺夫函数 $V(x)=x^T Px$ 且由 $P=P^T>0$ 知 $V(x)$ 正定。

$$\dot V(x)=\dot x^T Px+x^T P\dot x=(Ax)^T Px+x^T P(Ax)$$
$$=x^T(A^T P+PA)x=-x^T Qx$$

知 $\dot V(x)$ 负定。由李亚普诺夫稳定性定理知，$x_e=0$为渐近稳定。

再证必要性。 即已知 $x_e=0$ 渐近稳定，证 P 正定。

考察如下矩阵方程

$$\dot X = A^T X + XA\ ,\qquad X(0)=Q$$

显然，其解具有如下形式

$$X = e^{A^T t} Q e^{At} \quad , \qquad t \geq 0$$

并有

$$X(\infty) - X(0) = A^T \left(\int_0^{\infty} X dt\right) + \left(\int_0^{\infty} X dt\right) A$$

系统在原点渐近稳定，$t \to \infty, e^{At} \to 0$ $\qquad X(\infty) = 0$

所以有 $-Q = A^T \left(\int_0^{\infty} X dt\right) + \left(\int_0^{\infty} X dt\right) A$

现取 $P = \int_0^{\infty} X dt = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$

那么：1）因为系统是渐近稳定的，因此上述积分是存在的，即 P 存在。

2）因为 Q 是对称的， 所以成立

$$P^T = \left[\int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt\right]^T = \int_0^{\infty} \left[e^{A^T t} Q e^{At}\right]^T dt$$

$$= \int_0^{\infty} (e^{At})^T Q^T (e^{A^T t})^T dt = \int_0^{\infty} (e^{At})^T Q (e^{At}) dt = P$$

表明 P 是对称阵。

3）考察二次型，对任意$x \in X$，有

$$x^T P x = x^T \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt \cdot x = \int_0^{\infty} (e^{At} x)^T Q (e^{At} x) dt$$

显然，当 $x \neq 0$时，被积函数对任意 t 都是正定的，所以$x^T P x > 0$
仅当 $x = 0$ 时，被积函数为零 $x^T P x = 0$ 。表明 P 是正定的。

这就证明了，存在正定的对称阵P，满足

$$A^T P + PA = -Q$$

例4.5 给定一个连续时间线性时不变系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x$$

为简化计算过程，取$Q = I_2$ 。进而，由李亚普诺夫方程

$$A^T P + PA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -Q$$

导出 $-2p_1 + 0p_2 + 4p_3 = -1, \quad 0p_1 - 6p_2 + 2p_3 = -1$

$p_1 + 2p_2 - 4p_3 = 0$

基此，按代数方程组求解方法，可以定出：

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

从而，导出李亚普诺夫方程解阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} > 0$$

且由P为正定知，系统为渐近稳定。

4.2.3 线性时变系统稳定性

线性时变系统的稳定性不能简单地用$A(t)$的特征值判断其在平衡状态是否稳定。考察例子

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 + a\cos^2 t & 1 - a\sin t\cos t \\ -1 - a\sin t\cos t & -1 + a\sin^2 t \end{bmatrix} x$$

系统的特征方程

$$\nabla(\lambda)=|\lambda I-A(t)|=\begin{vmatrix}\lambda+1-a\cos^2 t & -1+a\sin t\cos t\\ 1+a\sin t\cos t & \lambda+1-a\sin^2 t\end{vmatrix}=0$$

$$=\lambda^2+(2-a)\lambda+(2-a)$$

它与 t 无关，当a<2时，不管t为何值，方程有负实部的两个特征值，若为定常系统总是稳定的。

系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t,0)=\begin{bmatrix} e^{(a-1)t}\cos t & e^{-t}\sin t\\ -e^{(a-1)t}\sin t & e^{-t}\cos t\end{bmatrix}$$

当a>1时无界的，系统状态将无穷增长，不稳定。因此，对时变系统，即使对所有t系统都有实部为负的特征值，仍不能保证稳定。

对线性时变系统，可以采用基于状态转移矩阵的判断方法和基于李亚普诺夫判据的判断方法。

定理4.8 （基于状态转移矩阵的判据）对连续线性时变系统（4.1），$\Phi(t,t_0)$ 为系统状态转移矩阵，则系统在原点平衡状态 $x_e=0$ 是李亚普诺夫意义下稳定的充分必要条件为 $\Phi(t,t_0)$ 是有界，即存在依赖于 t_0 的一个实数 $\beta(t_0)>0$，使成立：

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le \beta(t_0) < \infty, \qquad \forall t \ge t_0 \tag{4.13}$$

进一步，当且仅当对所有 t_0 都存在独立实数 $\beta>0$ 使（4.13）成立，系统原点平衡状态 $x_e=0$ 李亚普诺夫意义下一致稳定。

证明： 系统 $\dot{x}=A(t)x$ 的解为

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x(t_0)$$

取范数后有 $\|x(t)\| \le \|\Phi(t,t_0)\| \cdot \|x(t_0)\|$

若 $\Phi(t,t_0)$ 有界，即对充分大的M有 $\|\Phi(t,t_0)\| \le M, t>t_0$ ，则有

$$\|x(t)\| \le M \cdot \|x(t_0)\|$$

取 $\|x(t_0)\| \le \delta = \varepsilon/M < \infty$,那么 $\|x(t)\| \le M \cdot \|x(t_0)\| \le \varepsilon$

由稳定性定义，知系统在 $x_e=0$ 处李雅普诺夫意义下稳定。证毕。

定理4. 9 （基于状态转移矩阵的判据）对连续时间线性时变系统（4.1）， $\Phi(t,t_0)$ 为系统状态转移矩阵，则系统惟一平衡状态 $x_e=0$ 渐近稳定的充分必要条件为，存在依赖于t_0 的一个实数 $\beta(t_0)>0$ ， 使同时成立：

$$\begin{aligned} &\|\Phi(t,t_0)\| \le \beta(t_0) < \infty, \qquad \forall t \ge t_0 \\ &\lim_{t\to\infty} \|\Phi(t,t_0)\| = 0 \end{aligned} \qquad (4.14)$$

进一步，当且仅当对所有 $t_0 \in [0,\infty)$ 都存在独立实数 $\beta_1>0$ 和 $\beta_2>0$ ， 使成立：

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le \beta_1 e^{-\beta_2(t-t_0)} \qquad (4.15)$$

系统原点平衡状态 $x_e=0$ 为一致渐近稳定。

定理 4.10 （李亚普诺夫判据） 对 n 维连续时间线性时变系统（4. 1）， 设 $x_e=0$为系统惟一平衡状态， $n\times n$ 矩阵 $A(t)$的元均为分段连续的一致有界实函数，则原点平衡状态$x_e=0$是一致渐近稳定的充分必要条件为，对任给的一个实对称、一致有界、一致正定的 $n\times n$ 时变矩阵 $Q(t)$，即存在两个实数和 $\beta_1>0$, $\beta_2>0$ 使有 $0<\beta_1 I \le Q(t) \le \beta_2 I, \ \forall t \ge t_0$

李亚普诺夫方程

$$\dot{P}(t)+P(t)A(t)+A^T(t)P(t)=-Q(t),\quad \forall t\ge t_0 \qquad (4.16)$$

的 $n\times n$ 解阵 P（t）为实对称、一致有界和一致正定，即存在两个实数 $\alpha_1>0$ 和 $\alpha_2>0$，使有

$$0<\alpha_1 I\le P(t)\le\alpha_2 I,\quad \forall t\ge t_0$$

4. 3 离散线性系统的稳定性判据

考察离散时不变自治系统

$$x(k+1)=f(x(k)),\ \ x(0)=x_0,\ k=0,1,2,\cdots \qquad (4\text{-}17)$$

其中，x是n 维系统，$f(0)=0$ 即x=0为系统平衡状态。

定理4.11 (大范围渐近稳定) 对于离散定常自治系统（4-17)，若可构造离散状态 x(k) 的标量函数 $V(x(k))$ ，且对任意非零状态 x 满足

(1) $V(x(k))$ 正定；

(2) $\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k))$ 为负定；

(3)当 $\|x(k)\| \to \infty$，有 $V(x) \to \infty$

则称系统在平衡状态$x=0$ 为大范围渐近稳定。

定理4. 12（大范围渐近稳定） 对于离散时不变自治系统（4-17),

若可构造离散状态x(t)的标量函数 $V(x(k))$ ，且对任意非零状态 x 满足

(1) $V(x(k))$ 正定；

(2) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$ 为负半定；

（3）对任意非零初始状态x(0)确定的所有解x(k)的轨线，$\Delta V(x(k))$不恒等于零；

（4）当 $\|x(k)\| \to \infty$，有 $V(x) \to \infty$

则称系统在平衡状态$x=0$ 为大范围渐近稳定。

考察离散线性时不变系统

$$x(k+1) = Gx(k), \quad x(0) = x_0, \; k = 0,1,2, \cdots \qquad （4\text{-}18）$$

其中，x是n 维系统。若G非奇异，则$x_e=0$为系统唯一平衡状态。

定理4. 13 （特征值法） 对离散线性时不变系统（4-18），在 $x_e=0$ 是李亚普诺夫稳定的充要条件是，G的全部特征值的幅值等于或小于1，且幅值等于1的特征值只能是G的特征多项式的单根。

定理4. 14 （特征值法） 对离散线性时不变系统（4-18），在 $x_e=0$ 是李亚普诺夫渐近稳定的充要条件是，G的全部特征值的幅值均小于1。

定理4. 15 （李亚普诺夫法） 对离散线性时不变系统（4-18），在 $x_e=0$ 是李亚普诺夫渐近稳定的充要条件是，对于任一给定 $n\times n$ 正定对称矩阵Q，离散型李亚普诺夫方程

$$G^T PG - P = -Q \tag{4-19}$$

有唯一 $n\times n$ 正定对称解阵P。

知识点：

1、李亚普诺夫稳定性定义、物理意义，李亚普诺夫稳定性主要结论

2. 利用试凑法构造李亚普诺夫函数

判断具体系统

3、两种构造李亚普诺夫函数的方法：

变量梯度法 克拉索夫斯基方法

4、线性定常系统的稳定性判据

特征值法 李亚普诺夫方程法

5、线性时变系统的稳定性判据

状态转移矩阵法 李亚普诺夫方程法

6. 线性定常离散系统的李亚普诺夫稳定性主要结论

习题：

1. P251, 5.2
2. P251, 5.3
3. P252, 5.5
4. P252, 5.10
5. P253, 5.12