第三章 线性系统的标准型与结构分解

重点掌握内容：

1、坐标变换

2、结构分解

3、单变量标准型

4、多变量标准型

预备知识

1、线性空间

设 V 是一个非空集合，P 是数域，如果 V 满足下列条件：

（1）在 V 中定义了加法运算 $\gamma=\alpha+\beta$

（2）在 V 中定义了一个数量乘法运算

$$\delta=k\cdot\alpha$$

则称 V 是数域 P 上的一个线性空间。

判定一个集合是否是一个线性空间，须满足：

（1）非空集合；

（2）定义了“加法运算”和“数乘运算”

线性无关、基、维数　　空间 X^n

2、生成空间

设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$是线性空间X^n的向量

$\alpha_{i,} \quad i=1,\cdots,m \qquad \in R \qquad m<n$

形为 $a=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots+\alpha_m a_m$

的全部向量组成如下的集合，记为$X_a \qquad X_a \subset X^n$

X_a 是 X^n 的线性子空间，它由 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 张成，

记为 $X_a = Span\{a_1, \cdots, a_m\}$

到此并未要求$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 无关。

若 $a_1^{'}, a_2^{'}, \cdots, a_L^{'} \qquad L \le m$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_m$的极大线性无关组

则 $X_a = Span\{a_1^{'}, \cdots, a_L^{'}\}$ 且 $\dim X_a = L$

3、直和

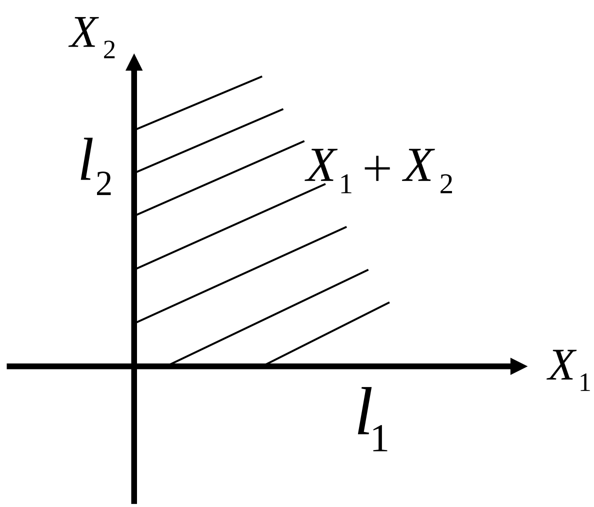
1）交：设X_1, X_2为X^n的两 子 空间，同属于 X_1, X_2 的全部向量构成的集合X_{12}，称为 X_1, X_2 的交，记为

$X_{12} = X_1 \cap X_2$　　　　X_{12} 也是线性空间

2）**和**：设 $a_1 \in X_1, a_2 \in X_2$ 形为$a = a_1 + a_2$ 的全部向量集合称为X_1, X_2的和，记为

$X_a = X_1 + X_2$　　　　X_a 是线性空间

和与并的区别　　$X_1 + X_2 \neq X_2 \cup X_2$



$X_1 \cup X_2$ 指 l_1, l_2 两条线

例1 求 $X_1 = Span\{a_1, a_2, a_3\}$ 与 $X_2 = Span\{a_4, a_5, a_6\}$ 的交与和空间

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad a_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \quad a_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

（1）求 $X_1 \cap X_2$

设 $x \in X_1 \cap X_2$ ，则 $\exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_6$， 使

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 \qquad \in X_1$$

$$= \alpha_4 a_4 + \alpha_5 a_5 + \alpha_6 a_6 \qquad \in X_2$$

则 $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3-\alpha_4 a_4-\alpha_5 a_5-\alpha_6 a_6=0$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&3&1&1&1&0\\0&1&1&0&-1&-1\\0&2&-2&4&6&4\\1&0&2&0&-4&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\-\alpha_4\\-\alpha_5\\-\alpha_6\end{bmatrix}=0$$

验证前4列的$\left|\ \right|=-12\neq 0\Rightarrow$解空间2维，即 $X_1\cap X_2$ 2维

令 $\alpha_5=-1,\quad \alpha_6=0$

$$\rightarrow\alpha_1=0\qquad\alpha_2=-1\qquad\alpha_3=2\qquad\alpha_4=0$$

$$X_1^{'}=-a_2+2a_3=-a_5=\begin{bmatrix}-1\\1\\-6\\4\end{bmatrix}\in X_1\cap X_2$$

$$\alpha_5=0,\quad \alpha_6=2\rightarrow\alpha_1=\alpha_2=1\quad \alpha_3=-3\quad \alpha_4=0$$

令

$$X_2^{'}=a_2-3a_3=2a_6=\begin{bmatrix}0\\-2\\8\\-6\end{bmatrix}\in X_1\bigcap X_2$$

$$\therefore X_1\bigcap X_2=Span\left\{X_1^{'}X_2^{'}\right\}=Span\left\{\begin{matrix}-1 & 0\\1 & -2\\-6 & 8\\4 & -6\end{matrix}\right\}$$

可通过初等变换化为简单向量

（2）求 X_1+X_2

$$X_1+X_2=Span\{a_1,a_2,\cdots,a_6\}\overset{a_1,\cdots,a_4\text{无关}}{=}Span\{a_1,\cdots,a_4\}=X$$

3）子空间的直和

设 $X_1, X_2 \subset X$，而 $X_1 \cap X_2 = 0$则 $X_1 + X_2$ 是直和，记为 $X_1 \oplus X_2$

例2　接例1研究

a_1，a_4 均与 X_1', X_2' 线性无关　$X_1' = -a_2 + 3a_3 = -a_5$

$X_2' = a_2 - 3a_3 = 2a_6$

$$\therefore Span\{a_1\} \cap Span\{X_1' \ X_2'\} = Span\{a_1\} \cap \{X_1 \cap X_2\} = 0$$

$$Span\{a_4\} \cap Span\{X_1' \ X_2'\} = Span\{a_4\} \cap \{X_1 \cap X_2\} = 0$$

则　$Span\{a_1\}$ 与 $X_1 \cap X_2$ 之和均为直和

$Span\{a_4\}$　　$X_1 \cap X_2$

即　$X_1 = Span\{a_1\} \oplus \{X_1 \cap X_2\}$　　$X_2 = Span\{a_4\} \oplus \{X_1 \cap X_2\}$

进而　$X = X_1 + X_2 = Span\{a_1\} \oplus Span\{a_4\} \oplus [X_1 \cap X_2]$

即X被分解为子空间 $Span\{a_1\}, Span\{a_4\}, [X_1 \cap X_2]$ 直和

一般有 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 是 X 的子空间，如果

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_k$$ 则称此为空间的一个分解

4、线性映射，像空间

$$F: y^m \to x^n \qquad X = Ay$$

像

A像的全体构成 X^n 的一子空间，称A的像空间。

A的像空间为A矩阵列向量所张成的空间。

5、核空间

所有使 A y = 0 的全体 y 所构成的集合称为 A 的核空间。

记 ker A　　　N(A)

Norms of Vectors

- A norm is a function $\|\cdot\| : \mathcal{C}^n \to \mathcal{R}$ that assigns a real-valued length to each vector.

  For all vectors $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ and all scalars $\alpha \in \mathcal{C}$, a norm must satisfy

  - $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, and $\|\mathbf{x}\| = 0$ only if $\mathbf{x} = 0$
  - $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$
  - $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$

- In general, 'p' norms are defined by

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

  In particular, we have

  - 1-norm: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum^{n} |x_i|$.

- 2-norm (Euclidean norm): $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ (Euclidean norm).
- infinite-norm: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$.

3.1 坐标变换

线性系统的各种标准型，是使用等价变换作为手段，基于如下事实求得。考虑常系数系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Eu \end{cases} \tag{3-1}$$

经 $n \times n$ 非奇异矩阵 P 进行如下变换

$$\tilde{x} = Px \tag{3-2}$$

得到和它代数等价的系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{E}u \end{cases} \tag{3-3}$$

两式的系数矩阵有如下关系

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \tilde{B} = PB, \tilde{C} = CP^{-1}, \tilde{E} = E \tag{3-4}$$

等价系统之间有性质：

（1）能控性、能观性相同；

（2）特征值相同，即 $\lambda(A)=\lambda(\tilde{A})$ ；

（3）输入输出关系（脉冲响应阵，传递函数阵）相同。

目标是：寻找一个奇异变换，使系统方程变成等价的，适于研究需要的形式。

3.2 线性系统的结构分解

3.2.1 能控子空间

状态空间X中全体能控状态组成的子空间Xc，称为能控子空间

定理3.1 能控子空间 $\Leftrightarrow Span\left\{B\ AB\cdots A^{n-1}B\right\}$

证明： 对任一 $x_0 \in X_c$ ，则存在 t_f 和 u (t), $t \in \left[0, t_f\right]$ 使得：

$$x_0 = -\int_0^{t_f} e^{-At} Bu(t)dt$$

设 $e^{At}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)A^k$ 凯莱-哈密顿定理

则有

$$x_0=-\int_0^{t_f}(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)(-A)^k Bu(t)dt)$$

$$=B\tilde{u}_0+AB\tilde{u}_1+\cdots+A^{n-1}B\tilde{u}_{n-1}$$

$$\tilde{u}_k=(-1)^k\int_0^{t_f}\alpha_k(t)u(t)dt,\qquad k=0,1,\cdots,n-1$$

$$\therefore\quad x_0\in Span\{B\ \ AB\cdots A^{n-1}B\}$$

即 $X_c\subset Span\{B\ \ AB\cdots A^{n-1}B\}$

下面证明：$Span\{B\ \ AB\cdots A^{n-1}B\}\subset X_c$

设 $\dim X_c=n_1$,则有 $n_1<n,\quad n_1=n$ 两种情况。

（1）$n_1<n$,则存在 $n_0=n-n_1$ 无关向量 $g_1,\cdots,g_{n_0}$

使对任意 $x_0\in X_c$ ，有 $g_1^Tx_0=0\ \ \cdots\ \ g_i^Tx_0=0\ \ \cdots\ \ g_{n_0}^Tx_0=0$ （*）

即 $< g_i, x_0 >= 0$

将（*）式代入

$$g_i^T \int_0^{t_f} e^{-At} Bu(t) dt = 0 \qquad\qquad i = 1,2,\cdots,n_0$$

因为上式对任意$t_f, u(t)$成立，则 $g_i^T e^{-At} B = 0$

求导至 n – 1次，并令 t = 0 得;

$$g_i^T B = 0 \quad g_i^T AB = 0 \qquad g_i^T A^2 B = 0 \qquad g_i^T A^{n-1} B = 0$$

$$\Rightarrow g_i^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore Span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ 的维数小于或等于 $n_1 = n - n_0$

则 $Span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \subset X_c$

因为相互包含 $\therefore X_c = Span\{B \ \ AB \ \ \cdots \ \ A^{n-1}B\}$

（2）当 $n_1 = n$ 时，则 $X_c = X$，显然

$$X_c = Span\{B \ \ AB \ \ \cdots \ \ A^{n-1}B\} = X$$

定理3.1 能控子空间是A的不变子空间。

显然 $A\,Span\{B\ \ AB\ \cdots\ A^{n-1}B\}\subset Span\{B\ \ AB\ \cdots\ A^{n-1}B\}$

3.2.2 系统能控的结构形式

设系统 S(A，B，C）的能控子空间 $X_c, \dim X_c = n_c$ 且

$n_c < n$ ，则有 $X_{nc}, \dim x_{nc} = n' = n - n_c$ ，使 $X = X_c \oplus X_{nc}$

在 X_c 中选基底 $e_1^c, \cdots, e_{n_c}^c$

在 X_{nc} 中选基底 $e_{n_c+1}^c, \cdots, e_n^c$

则 $e_1^c, \cdots, e_{n_c}^c, e_{n_c+1}^c, \cdots, e_n^c$ 为X 的一组基底，以此基底的

坐标记为 $\sum_c$ ，对任一 $x \in X$ ，有：

$$x = x_1 e_1^c + x_2 e_2^c + \cdots + x_n e_n^c$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i^c$$

$$\left(e_i^c = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\ \text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \right)$$

令

$$X_c = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_c} \end{bmatrix} \qquad X_{nc} = \begin{bmatrix} x_{n_c+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

定理3.2 在 $\sum_c$ 坐标系下，系统 S 的状态方程必取如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_c \\ \dot{X}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_c \\ X_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (3\text{-}5)$$

证明： 即证明 $A_{21} = 0, B_2 = 0$

1) 证 $B_2 = 0$

$X_c = Span\{B \ \ AB \ \ \cdots \ \ A^{n-1}B\} \Rightarrow B$的列向量$\in X_c \Rightarrow$ 在X_{nc}中分量为0

故 $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$， $B_2 = 0$ ，

$$\begin{array}{cl} & \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow n_c \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

2）证 $A_{21}=0$

在 $\sum_c$ 坐标系下：

$$\left[Ae_1,\cdots,Ae_{n_c}^c\right]=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & 1\\ \hdashline & 0 & \end{bmatrix}\leftarrow \text{第} n_c \text{行}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}I_{n_c\times n_c}\\ \hdashline 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}\\ \hdashline A_{21}\end{bmatrix}$$

$\because X_c$ 是 A 的不变子空间 $\Rightarrow Ae_i^c\in X_c \qquad i=1,\cdots,n_c$

$\therefore \left[Ae_1^c\cdots Ae_{n_c}^c\right]=\begin{bmatrix}A_{11}\\ \hdashline 0\end{bmatrix}$ 　　　　即 $A_{21}=0$

由坐标的选择可知，$X=X_c\oplus X_{nc}$

3.2.3 不能观子空间

定义3.1（不能观） 对于非零状态 $x_0\in X$，若 $\exists$ 有限 $t_f>t_0$ 使 $y(t)\equiv 0$， 称 $\left[t_0,t_f\right]$ 上 x_0 为不能观状态。

1） x_0为不能观 $\Leftrightarrow y(t)=C\Phi(t,t_0)x_0=0$

定常下 $Ce^{At}x_0=0$

2） S完全能观 $\Leftrightarrow X_{no}=0$

3） 所有不能观状态组成一子空间 X_{no} 是线性空间

定理3.3 X_{no}为核空间 $\ker C,\ker CA,\cdots,\ker CA^{n-1}$的交

$$X_{no}==\bigcap_{i=0}^{n-1}\ker CA^i$$

证明： 证相互包含

1） $\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker CA^i\subset X_{no}$

设任$x_0\in\bigcap_{i=1}^{n-1}\ker CA^i \xrightarrow{\text{核空间定义}} Cx_0=0 \quad CAx_0=0 \quad \cdots \quad CA^{n-1}x_0=0$

而以x_0为初态的输出 $(u(t)=0)$

$$y(t)=Ce^{At}x_0=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k CA^k x_0=0$$

$$\therefore x_0\in X_{no}\rightarrow\bigcap_{i=0}^{n-1}\ker CA^i\subset X_{no}$$

2） $X_{no} \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i$

设任一 $x_0 \in X_{no}$,则$y(t) = Ce^{At}x_0 = 0$

对该式求直至n-1次导数，且令 t = 0 $\longrightarrow$

$$Cx_0 = 0 \quad CAx_0 = 0 \quad \cdots \quad CA^{n-1}x_0 = 0$$

$$\therefore x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker CA^k \rightarrow X_{no} \subset \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i$$

故 $X_{no} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^i$

定理3.4 不能观子空间 X_{no}是A的不变子空间

3.2.4 系统能观的结构形式

定理3. 5 在 $\sum_0$ 坐标系下，系统 S 的状态方程必取如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{no} \\ \dot{X}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{no} \\ X_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \qquad (3\text{-}6)$$

$$y = [0 \quad C_2] \begin{bmatrix} X_{no} \\ X_o \end{bmatrix}$$

证：省略。

3.2.5 结构分解的变换矩阵

（1）能控与不能控分解

若 n 维线性定常系统不完全能控，即

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n_c < n$$

则可选出 n_c 个线性无关向量 $V_1, V_2, \cdots, V_{n_c}$，则

$$X_c = Span\left\{V_1, V_2, \cdots, V_{n_c}\right\}$$

经过简化，得到 $e_1^c, e_2^c, \cdots, e_{n_c}^c$ 作为 X_c 的一组基底（并不要求是标准正交基）

求不能控部分，使 $X = X_c \oplus X_{nc}$

得到 X_{nc} 的一组基底 $e_{n_c+1}^c, \cdots, e_n^c$，并且

$$X_{nc} = Span\left\{e_{n_c+1}^c, \cdots, e_n^c\right\}$$

所求坐标变换为 $P = \left[e_1^c, \cdots, e_{n_c}^c, e_{n_c+1}^c, \cdots, e_n^c\right]^{-1}$ （3-7）

使用此变换矩阵系统就可以变成（3-5）形式

例3 给定线性定常系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1 & -1\\ -4 & -2 & 4 & -4\\ -4 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}2\\1\\2\\0\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix}X$$

化为能控和不能控结构形式

解： 求能控子空间

$$X_c=Span\{B \ \ AB \ \ A^2B \ \ A^3B\}=Span\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\-2\\-2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\4\\2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\-8\\-2\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$=Span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\Rightarrow e_1^c=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad e_2^c=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

为X_c的基

求X_{nc}使 $X=X_c\oplus X_{nc}$ ，则：

$$X_{nc}=Span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\Rightarrow e_3^c=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},e_4^c=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

为X_{nc}的基 $\quad \therefore P=\begin{bmatrix}e_1^c & e_2^c & e_3^c & e_4^c\end{bmatrix}^{-1}$

由于 X_{nc} 的选择不唯一，则状态空间X的分解不唯一但（3-5）的形式不变。

（2）能观与不能观结构分解

$$S(A,B,C)\text{不完全能观} \Rightarrow rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_0 \neq n$$

$$\Rightarrow \text{不能观维数} n_{no} = n - n_0$$

设 $x \in X_{n0} \Rightarrow Cx = 0,\ CAx = 0,\ \cdots,\ CA^{n-1}x = 0$

解方程得到 n_{no} 个线性无关的向量，经过化简设为：

$e_1^0, e_2^0, \cdots, e_{n_{no}}^0$ ，则： $X_{no} = Span\{e_1^0, e_2^0, \cdots, e_{n_{no}}^0\}$

选取 $e_{n_{no}+1}^0, \cdots, e_n^0$ 组成 X_0，使 $X = X_{no} \oplus X_0$

取坐标变换

$$P = \left[e_1^0, e_2^0, \cdots, e_{n_{no}}^0, e_{n_{no}+1}^0, \cdots, e_n^0\right]^{-1}$$

在该坐标变换下系统有（3-6）形式。

例4 对例3化为能观与不能观形式

解：求不能观子空间

$$Cx=0 \quad CAx=0 \quad CA^2x \quad CA^3x=0$$

解为

$$e_1^0=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad e_2^0=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$X_{no}=Span\{e_1^0 \ \ e_2^0\}$$

选 X_0，使 $X=X_0\oplus X_{no}$，则 $X_0=Span\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\Rightarrow e_3^0=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad e_4^0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

故 $P=\begin{bmatrix}e_1^0 & e_2^0 & e_3^0 & e_4^0\end{bmatrix}^{-1}$

由于 X_0 选取不唯一，则 X 的分解不唯一。

（3）系统结构规范分解

设系统不完全能控且不完全能观，则用坐标变换使 X 分为四个子空间的直和

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 \oplus \boldsymbol{X}_2 \oplus \boldsymbol{X}_3 \oplus \boldsymbol{X}_4$$

X_1 能控不能观　　X_3 不能控不能观

X_2 能控能观　　X_4 不能控能观

先求 X_c, X_{no} ，然后令 $X_1 = X_c \cap X_{no}$

取 X_2 使 $\boldsymbol{X}_c = \boldsymbol{X}_1 \oplus \boldsymbol{X}_2$

取 X_3 使 $\boldsymbol{X}_{no} = \boldsymbol{X}_1 \oplus \boldsymbol{X}_3$

选 X_4 使 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_1 \oplus \boldsymbol{X}_2 \oplus \boldsymbol{X}_3 \oplus \boldsymbol{X}_4$

维数 n　n_1　n_2　n_3　n_4

n_c　n_{no}

这种分解为X的规范分解，它也不是唯一的。

若在4个部分中分别选一组基底，设为

$$X_1: \quad e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_{n_1} \qquad\qquad X_2: \quad e_{n_1+1} \quad e_{n_1+2} \quad \cdots \quad e_{n_1+n_2}$$

$$X_3: \quad e_{n_1+n_2+1} \quad \cdots \quad e_{n_1+n_2+n_3} \qquad\qquad X_4: \quad e_{n_1+n_2+n_3} \quad \cdots \quad e_n$$

由这组基底总合构成坐标变换，利用该坐标变换，系统状态方程必化为标准分解形式

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad (3\text{-}8)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

例5 对例3和例4的结果继续分解

$$X_c = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad X_{no} = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

因而

$$X_1 = X_c \cap X_{no} = Span\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right\} \qquad e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{为} X_1 \text{的基底}$$

$$\because X_c = X_1 \oplus X_2$$

$$\therefore X_2 = Span\left\{\begin{matrix}0\\1\\0\\0\end{matrix}\right\} \qquad e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

又 $\because X_{no} = X_1 \oplus X_3$

$$\therefore X_3 = Span\left\{\begin{matrix}1\\-1\\0\\0\end{matrix}\right\} \qquad e_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

由 $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$

则 $$X_4 = Span\left\{\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}\right\} \qquad e_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

取坐标变换 $P=\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}^{-1}$

在此坐标变换下

$$\dot{X}^{\Delta}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X^{\Delta}+\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} X^{\Delta}$$

讨论：

1）空间分解的变换阵不唯一，但分解出的各子空间维数是一致的，且能控（观）因子不变（指各部分的特征值）。

2）空间分解不一定所有空间都有，按定义求空间。

总结：

1. 能控子空间构成 $Span\left\{ B\ AB \cdots A^{n-1}B \right\}$

不能观子空间构成 $X_{no} == \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker CA^{i}$

2. 按能控与不能控分解 规范型 变换矩阵求法

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_c \\ \dot{X}_{nc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_c \\ X_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

3. 按能观与不能观分解 规范型 变换矩阵求法

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{no} \\ \dot{X}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{no} \\ X_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{no} \\ X_o \end{bmatrix}$$

4. 按全空间分解 规范型 变换矩阵求法

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{24} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

3.3 单变量系统标准型

1、能控标准型

单输入单输出系统可表示为

$$\sum: \quad \dot{X} = AX + bu \qquad\qquad y = cX \qquad\qquad （3\text{-}9）$$

其中 b 是 $n\times 1$列向量， c 是 $1\times n$ 行向量。

假设系统完全能控，则有属性 $rank\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n$

令系统的特征多项式为 $\det(sI - A) \overset{\Delta}{=} \alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$

定义如下 n 个常数

$$\beta_{n-1} = cb$$

$$\beta_{n-2} = cAb + \alpha_{n-1}cb$$

$$\vdots$$

$$\beta_1 = cA^{n-2}b + \alpha_{n-1}cA^{n-3}b + \cdots + \alpha_2 cb$$

$$\beta_0 = cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_1 cb$$

构造如下的变换矩阵

$$P=\left[A^{n-1}b,\cdots,Ab,b\right]\begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{3-10}$$

容易看出，P 是非奇异的。

定理3.6 对完全能控的单输入单输出线性定常系统，通过非奇异变换 $\overline{X}=P^{-1}X$ ，可变成能控标准型

$$\sum_c: \quad \dot{\overline{X}}=A_c\overline{X}+b_cu \qquad y=c_c\overline{X} \tag{3-11}$$

其中

$$A_c=P^{-1}AP=\left[\begin{array}{c:cccc} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \\ \hdashline -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{array}\right], b_c=P^{-1}b=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3-12}$$

$$c_c=cP=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1}\end{bmatrix}$$

证明：略

例6 考虑单输入单输出系统

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}X$$

解：特征多项式 $\alpha(s)\overset{\Delta}{=}s^3-5s+4$

β_i 常数

$$\beta_2=cb=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=3 \qquad \beta_1=cAb+\alpha_2 cb=4$$

$$\beta_0=cA^2b+\alpha_2 cAb+\alpha_1 cb=0$$

利用（3-12），可导出系统的能控标准型

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & 5 & 0\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\end{bmatrix}\bar{x}$$

变换矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}A^2b & Ab & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \alpha_2 & 1 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{28}\\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7}\\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7}\end{bmatrix}$$

2、能观测规范形

对于系统(3-9)，假设完全能观，有

$$rank\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

构造如下矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & \ddots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cA^{n-1} \\ \vdots \\ cA \\ A \end{bmatrix}$$

很明显，Q为非奇异阵。

定理3.7 对完全能观测的单输入单输出线性定常系统，通过非奇异变换 $\hat{x} = Qx$，可变成能观标准型

$$\sum\nolimits_0 : \dot{\hat{x}} = A_0\hat{x} + b_0 u \qquad y = C_0\hat{x} \qquad (3\text{-}13)$$

其中，

$$A_0 = QAQ^{-1} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ \hdashline 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{array}\right], \quad b_0 = Qb = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C_0 = cQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例7 考虑例6系统，变成能观规范型

解：已知 $\alpha(s)=s^3-5s+4$ $\beta_2=3$ $\beta_1=4$ $\beta_0=0$

利用(3-13)，可得到能观规范型

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -4\\ 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\ 4\\ 3\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\hat{x}$$

变换矩阵为

$$Q=\begin{bmatrix}1 & \alpha_2 & \alpha_1\\ 0 & 1 & \alpha_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cA^2\\ cA\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -4 & 4\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

3.4 多输入多输出系统标准型

特点：（1）规范型不唯一

（2）构造变换矩阵较复杂

重点讨论两种标准型：龙伯格标准型和旺纳姆标准型

3.4.1 搜索线性无关列或行的方法

共同性问题： 搜索能控性矩阵中的 n 个线性无关列

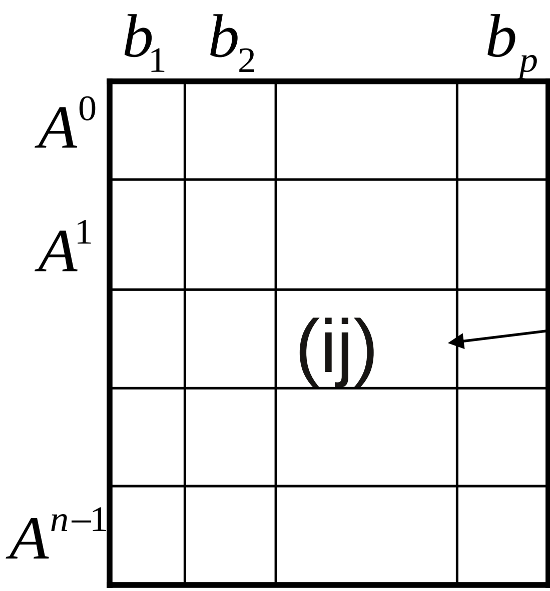
或能观性矩阵中的 n 个线性无关行。

下面以能控性矩阵W_c为例，说明搜索方法。

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

W_c 为 $n \times pn$ ，从W_c 中选n个线性无关列，有不同选法，

用格栅图表示



格（ij）单元表示$A^i b_j$

方法1　按列搜索格栅

	b_1			b_p
I	×	×		
	×	×		
A	×	×		
A^2				
	×	0		
	0			
A^{n-1}				

$$\begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ Ab_1 & Ab_2 \\ \vdots & \vdots \\ A^{v_1-1}b_1 & A^{v_2-1}b_2 \end{array}$$

Step1：从格栅栏第1列开始，自上往下，顺序找出所有线性无关的列向量；

Step2: 转入右邻列从上往下继续搜索，直到找到n个线性无关列向量。

最后排成：

$$\begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & \cdots & A^{v_1-1}b_1 & b_2 & Ab_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

不一定用足 b_p

方法2　按行搜索格栅

$$rank\ B = r < p$$

	b_1	b_2			b_p
I	×	×	×	0	
A	×	0	×		
A^2	×		0		
	×				
	0				
A^{n-1}					

Step1: 从格栅栏第1行开始，自左至右，顺序找出所有线性无关的列向量;

Step2: 转入下一行，从左到右搜索， 对每格判断列向量和先前的向量组是否相关。若相关,划0,无关画×。

若某格已画0，则所在列中位于其下的所有列向量必和先前的列向量相关，该列无需搜索。

Step3:直到找到n个线性无关列向量,停止。

最后排成：$\left[b_1\ Ab_1 \cdots A^{\mu_1-1}b_1 \cdots b_r\ \ Ab_r\ \cdots b_r A^{\mu_r-1}\right]$

可以证明 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$ 为能控性指数。

3.4.2 龙伯格能控标准型

这种标准型在极点配置方面有着很大的用途。下面考虑线性多变量时不变系统

$$\Sigma:\quad \begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned} \qquad (3\text{-}14)$$

其中，A为 $n\times n$ 常阵，B为 $n\times p$ 常阵，C为 $m\times n$ 常阵，rank $B= r$。

假设按行搜索，找出W_c 中n个线性无关的列向量，组成非奇异矩阵

$$Q_1 = [b_1\ \ Ab_1 \cdots A^{\mu_1-1}b_1\ \ b_2\ \ Ab_2 \cdots A^{\mu_2-1}b_2 \cdots b_r\ Ab_r \cdots A^{\mu_r-1}b_r]$$

对Q_1 求逆，将Q_1^{-1}表为

$$P = Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} e_{11}^T \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ e_{r1}^T \\ \vdots \\ e_{r\mu_r}^T \end{bmatrix}$$

P为块矩阵，每块行数为 $\mu_i, i = 1,2,\cdots,r$

在矩阵P中，取出各个块阵的末行，即为 $e_{1\mu_1}^T, e_{2\mu_2}^T, \cdots e_{r\mu_r}^T$，

并组成变换矩阵

$$T = \begin{bmatrix} e_{1\mu_1}^T \\ e_{1\mu_1}^T A \\ \vdots \\ e_{1\mu_1}^T A^{\mu_1 - 1} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ e_{r\mu_r}^T \\ e_{r\mu_r}^T A \\ \vdots \\ e_{r\mu_r}^T A^{\mu_r - 1} \end{bmatrix} \qquad （3-15）$$

定理3.8 [龙伯格能控标准型] 对完全能控的多变量定常系统（3-14），通过非奇异变换 $\hat{x}=Tx$，可得到下列龙伯格能控标准型

$$\Sigma_{cL}:\ \dot{\hat{x}}=\hat{A}_c\hat{x}+\hat{B}_c u \qquad\qquad (3\text{-}16)$$
$$y=\hat{C}_c\hat{x}$$

其中

$$\underset{(n\times n)}{\hat{A}_c}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \cdots & \hat{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \hat{A}_{r1} & \cdots & \hat{A}_{rr}\end{bmatrix}$$

$$\underset{(\mu_i\times\mu_i)}{\hat{A}_{ii}}=\begin{bmatrix}0 & \vdots & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \vdots & & & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ * & \vdots & * & \cdots & *\end{bmatrix},\ i=1,2,\cdots,r$$

$$\underset{(\mu_i\times\mu_j)}{\hat{A}_{ij}}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\\ * & \cdots & *\end{bmatrix},\qquad i\neq j$$

$$\underset{(n\times p)}{\hat{B}_c}=TB=\left[\begin{array}{c:c:c:ccc}0 & & & * & \cdots & *\\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 1 & * & & \vdots & & \vdots\\ \hdashline & \ddots & & & & \\ \hdashline & & 0 & \vdots & & \vdots\\ & & \vdots & & & \\ & & 0 & & & \\ & & 1 & * & \cdots & *\end{array}\right]$$

$$\underset{(m\times n)}{\hat{C}_c}=CT^{-1}\quad \text{无特殊形式}$$

例8 给定线性定常系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & -1\\ 1 & 7 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}u,\quad n=3$$

解：

$$W_c=[B\ \ AB\ \ A^2B]=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4 & -2 & 6 & 8\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 & -5\\ 1 & 1 & 1 & -1 & -12 & -8\end{bmatrix}$$

按行搜索，找出3个线性无关列

$$b_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\quad b_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad Ab_1=\begin{bmatrix}-4\\-1\\1\end{bmatrix}\qquad \text{（完全能控）}$$

组成 Q_1 $\qquad Q_1=[b_1\quad Ab_1\quad b_2]$

对 Q_1 求逆，得

$$P=Q_1^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\left[\begin{array}{ccc}0.5 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ \hdashline -0.5 & 3 & 1\end{array}\right]$$

$$T=\begin{bmatrix} e_{12}^T \\ e_{12}^T A \\ e_{21}^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -0.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

利用变换矩阵T，可得到龙伯格标准型

$$\hat{A}_c=TAT^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -0.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -0.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -19 & 7 & -2 \\ -36 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_c=TB=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ -0.5 & 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理3.9（龙伯格能观标准型）对完全能观的多变量线性定常系统（3-14），利用对偶性原理，可得到龙伯格能观标准型

$$\sum_L : \dot{\bar{x}} = \bar{A}_0 \bar{x} + \bar{B}_0 u \qquad (3\text{-}17)$$

$$y = \bar{C}_0 \bar{x}$$

其中

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \cdots & \bar{A}_{1r} \\ \vdots & & \\ \bar{A}_{r1} & \cdots & \bar{A}_{rr} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{ii} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & * \\ \hline 1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & * \end{array}\right], \qquad i = 1,2,\cdots,r$$

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}, \qquad i \neq j$$

$$\bar{C}_0 = \left[\begin{array}{cccc|c|cccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & & \\ \hline & & & & \ddots & & & & \\ \hline & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline * & & \cdots & & & & \cdots & & * \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ * & & \cdots & & & & \cdots & & * \end{array}\right]$$

$\bar{B}_0$ 无特殊形式 $n \times m \qquad r < m$

系统（3-16）和系统（3-17），存在关系

$$\bar{A}_0 = \hat{A}_c^T \qquad \bar{B}_0 = \hat{C}_c^T \qquad \bar{C}_0 = \hat{B}_c^T$$

3.4.3 旺纳姆标准型

对于多变量线性定常系统（3-14），假设按列搜索方法，找出 W_c 中n 个线性无关列向量，组成非奇异矩阵

$$Q_1=\left[b_1, Ab_1, \cdots, A^{v_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{v_2-1}b_2, \cdots b_l, Ab_l, \cdots A^{v_l-1}b_l\right]$$

其中 $v_1+v_2+\cdots+v_l=n$

定义基组

（1）设 $A^{v_1}b_1=-\sum_{j=0}^{v_1-1}\alpha_{1j}A^jb_1$

定义相应的基组 $\begin{cases} e_{11}=A^{v_1-1}b_1+\alpha_{1,v_1-1}A^{v_1-2}b_1+\cdots+\alpha_{11}b_1 \\ e_{12}=A^{v_1-2}b_1+\alpha_{1,v_1-1}A^{v_1-3}b_1+\cdots+\alpha_{12}b_1 \\ \cdots \\ e_{1v_1}=b_1 \end{cases}$

（2）设 $A^{v_2}b_2=-\sum_{j=0}^{v_2-1}\alpha_{2j}A^jb_2+\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{v_i}r_{2ji}e_{ij}$

定义相应的基组 $\begin{cases} e_{21}=A^{v_2-1}b_2+\alpha_{2,v_2-1}A^{v_2-2}b_2+\cdots+\alpha_{21}b_2 \\ e_{22}=A^{v_2-2}b_2+\alpha_{2,v_2-1}A^{v_2-3}b_2+\cdots+\alpha_{22}b_2 \\ \cdots \\ e_{2v_1}=b_2 \end{cases}$

（3）设 $A^{v_3}b_3=-\sum_{j=0}^{v_3-1}\alpha_{3j}A^jb_3+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{v_i}r_{3ji}e_{ij}$

定义相应的基组
$$\begin{cases} e_{31}=A^{v_3-1}b_3+\alpha_{3,v_3-1}A^{v_3-2}b_3+\cdots+\alpha_{31}b_3 \\ e_{32}=A^{v_3-2}b_3+\alpha_{3,v_3-1}A^{v_3-3}b_3+\cdots+\alpha_{32}b_3 \\ \qquad\cdots \\ e_{3v_3}=b_3 \end{cases}$$

………

（l）设 $A^{v_l}b_l=-\sum_{j=0}^{v_l-1}\alpha_{lj}A^jb_l+\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{v_i}r_{lji}e_{ij}$

定义相应的基组
$$\begin{cases} e_{l1}=A^{v_l-1}b_l+\alpha_{l,v_l-1}A^{v_l-2}b_l+\cdots+\alpha_{l1}b_l \\ e_{l2}=A^{v_l-2}b_l+\alpha_{l,v_l-1}A^{v_l-3}b_l+\cdots+\alpha_{l2}b_l \\ \qquad\cdots \\ e_{lv_l}=b_l \end{cases}$$

在上列这些基组的基础上，组成非奇异变换阵

$$P=\left[e_{11},e_{12},\cdots,e_{1v_1},\cdots,e_{l1},e_{l2},\cdots,e_{lv_l}\right]^{-1}$$

定理3.10 （旺纳姆能控标准型）对完全能控的多变量线性定常系统，利用非奇异变换$\bar{x} = Px$，可得到旺纳姆能控标准型

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}_c \bar{x} + \bar{B}_c u \qquad （3\text{-}18）$$
$$y = \bar{C}_c \bar{x}$$

其中，

$$\bar{A}_c = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{l1} \\ & \bar{A}_{22} & \cdots & \bar{A}_{l2} \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{A}_{ll} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(v_i \times v_i)}{\bar{A}_{ii}} = \left[\begin{array}{c:cccc} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \\ \hdashline -\alpha_{i0} & -\alpha_{i1} & & \cdots & -\alpha_{iv_i-1} \end{array}\right], \qquad i = 1,2,\cdots l$$

$$\underset{(v_i \times v_j)}{\bar{A}_{ij}} = \begin{bmatrix} r_{j1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{jv_i i} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad j = i+1,\cdots l$$

$$\underset{(n\times p)}{\bar{B}_c} = PB = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c:c:ccc} 0 & & & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ \hdashline & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \hdashline & & 0 & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & 0 & & & \\ & & 1 & * & \cdots & * \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\0\\1\end{array}}\right\} v_1 \\ \vphantom{\vdots} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\ \vdots\\0\\1\end{array}}\right\} v_l \end{array} \\ \underbrace{\hspace{6em}}_{l} \underbrace{\hspace{5em}}_{p-l} \end{array}$$

$$\underset{(m\times n)}{\bar{C}_c} = cP^{-1} \text{ 无特殊形式}$$

例9 考虑下列完全能控的线性系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -2\\ 0 & 6 & -1\\ 1 & 7 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}u,\qquad n=3$$

解：

$$W_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4 & -2 & 6 & 8\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 & -5\\ 1 & 1 & 1 & -1 & -12 & -8\end{bmatrix}$$

按列搜索3个线性无关列

$$b_1=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\qquad Ab_1=\begin{bmatrix}-4\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\qquad A^2b_1=\begin{bmatrix}6\\ -7\\ -12\end{bmatrix}$$

$$A^3b_1=\begin{bmatrix}46\\ -30\\ -31\end{bmatrix}=-(\alpha_{12}A^2b_1+\alpha_{11}Ab_1+\alpha_{10}b_1)=-\alpha_{12}\begin{bmatrix}6\\ -7\\ -12\end{bmatrix}-\alpha_{11}\begin{bmatrix}-4\\ -1\\ 1\end{bmatrix}-\alpha_{10}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

导出 $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -7 & -1 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{10} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 46 \\ -30 \\ -31 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -7 & -1 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 46 \\ -30 \\ -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -15 \end{bmatrix}$

定义基组

$$e_{11} = A^2 b_1 + \alpha_{12} A b_1 + \alpha_{11} b_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ -3 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$e_{12} = A b_1 + \alpha_{12} b_1 = \begin{bmatrix} -12 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad e_{13} = b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [e_{11} \quad e_{12} \quad e_{13}]^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & -12 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ -18 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

利用（3-18），可求出

$$\overline{A}_c = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \overline{B}_c = PB = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{36} \\ 0 & \frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

旺纳姆标准型

$$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{36} \\ 0 & \frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} u$$

定理3.11 [旺纳姆能观标准型] 对完全能观的多变量线性定常系统，利用对偶性原理，可导出下列旺纳姆能观标准型为

$$\Sigma_{ow}:\dot{\hat{x}}=\hat{A}_o\hat{x}+\hat{B}_o u \qquad (3\text{-}19)$$
$$y=\hat{C}_o\hat{x}$$

其中

$$\hat{A}_o=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & & & \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hat{A}_{l1} & \hat{A}_{l2} & \cdots & \hat{A}_{ll}\end{bmatrix} \qquad \hat{A}_{ii}=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & \cdots & 0 & -\alpha_{io} \\ \hline 1 & & & -\alpha_{i1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{iv_i-1}\end{array}\right], \qquad i=1,2,\cdots,l$$

$$\hat{A}_{ij}=\begin{bmatrix}\rho_{i1j} & \cdots & \rho_{iv_ij} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}, \qquad j=1,2,\cdots,i-1$$

$$\hat{C}_o=\left[\begin{array}{cccc|c|cccc}0 & \cdots & 0 & 1 & & & & & \\ \hline & & & & \ddots & & & & \\ \hline & & & & & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline * & & \cdots & & & & \cdots & & * \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ * & & \cdots & & & & \cdots & & *\end{array}\right]$$

$\hat{B}_o$无特殊形式

知识点：

1、线性系统等价坐标变换关系式，性质

2、结构分解

（1）能控子空间，不能观子空间，概念与求法

（2）按能控与不能控、能观与不能观、全空间结构分解规范型与求法

3、单变量标准型

能控标准型、能观标准型

4、多变量标准型

龙伯格标准型（按行）、旺纳姆标准型（按列）

习题：

1. p212, 4.11
2. P212, 4.13
3. 将系统化为全空间的标准结构形式

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -5 & -1 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} X$$