5.5 状态观测器设计

5.5.1 观测器问题的提法

观测器问题的引入是为**解决状态的重构问题，**是实现反馈控制的需要。

观测器分为：状态观测器（全维、降维），函数观测器。

定义1 （状态观测器）

对于线性时不变观测系统 Σ ，构造与其具有相同属性的一个系统 $\hat{\Sigma}$ ，利用 Σ 中可直接测量的输出y 和输入u作为 $\hat{\Sigma}$ 的输入，并使 $\hat{\Sigma}$ 状态 $\hat{x}$ 在一定指标下等价于 Σ 状态 x，即有

$$\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t)=\lim_{t\to\infty}x(t)$$

分为：全维观测器

降维观测器

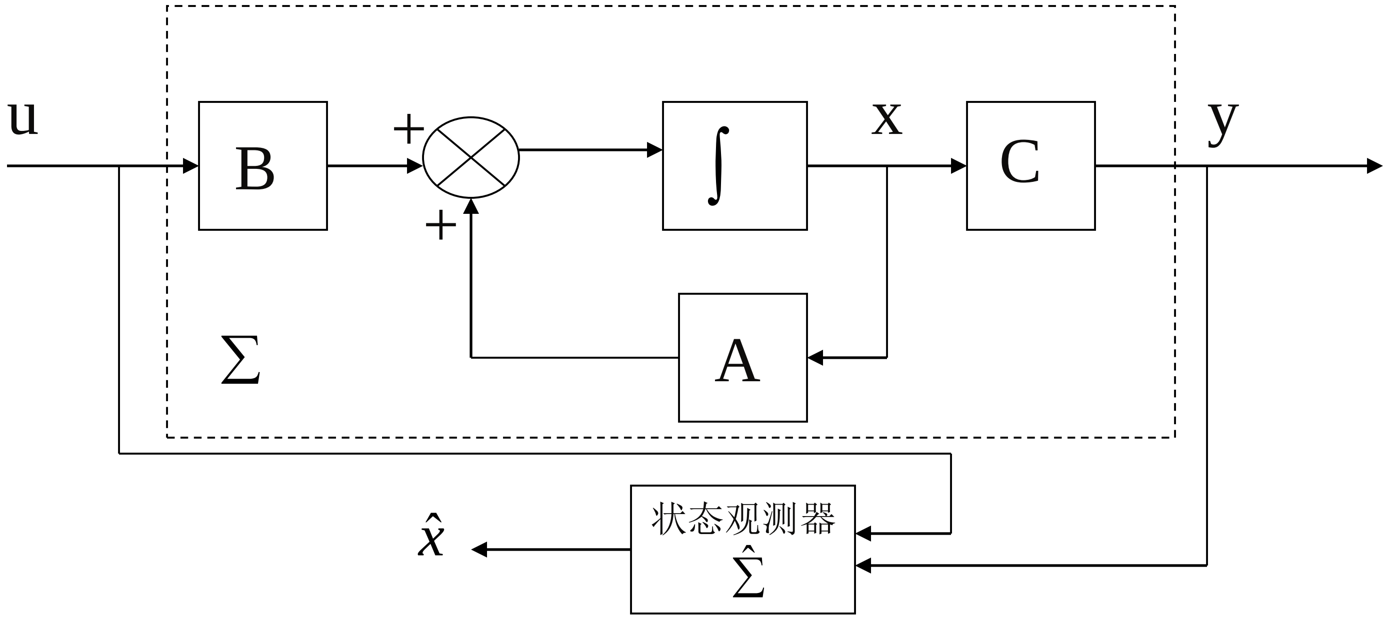


图5.2 状态观测器

定义2 设n维系统 Σ 的状态x 不可测，对给定矩阵 $K_{l\times n}$ ，若有一系统 $\hat{\Sigma}$, 以 Σ的输入u和输出y作为它的输入， $\hat{\Sigma}$ 的输出 $W(t)_{l\times 1}$ 满足：

$$\lim_{t\to\infty}(Kx(t)-W(t))=0 \tag{5-31}$$

则称 $\hat{\Sigma}$ 为Σ 的KX函数观测器。

若K =I, 则称 $\hat{\Sigma}$为Σ 的状态观测器。

（1）观测器构造思路

a. 以原系统 $\sum$ 的输入u 和输出 y作为观测系统 $\hat{\Sigma}$ 的输入, 建立一个复制系统;

b. 引入反馈 $L(y-C\hat{x})$ ，作为输入。

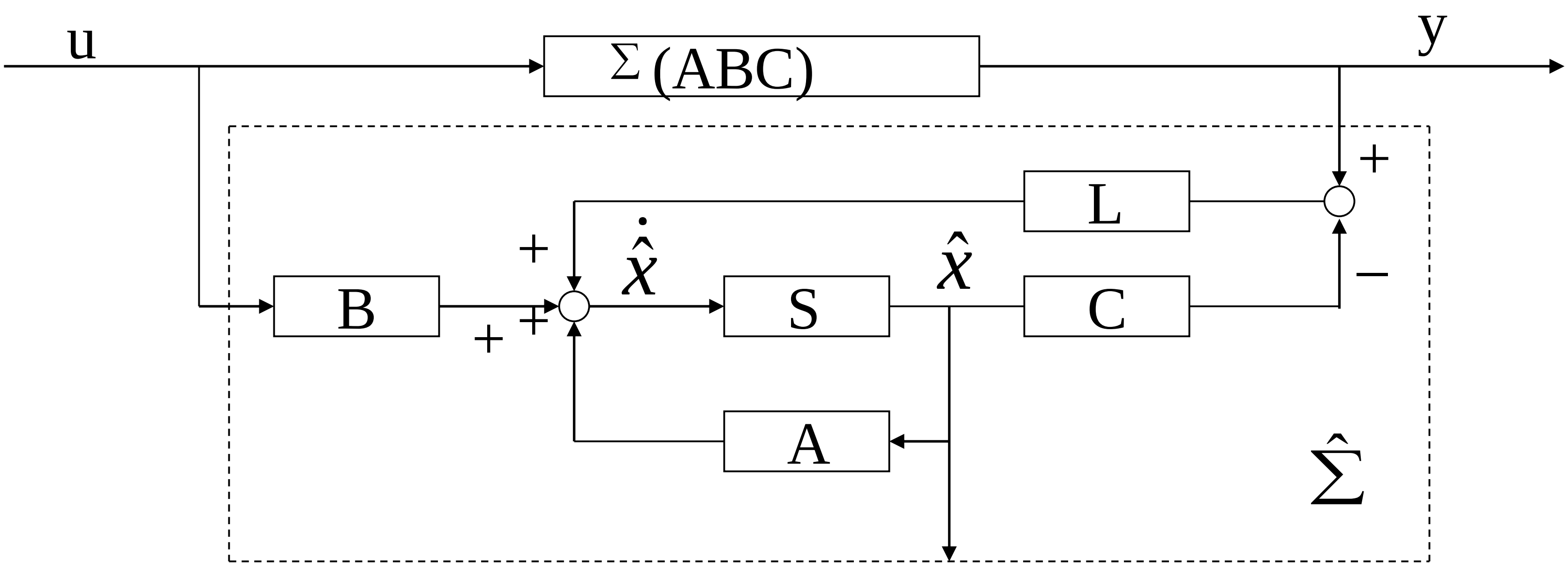


图5.3 状态观测器实现结构

这种闭环观测器结构，可以克服开环系统容易发散、收敛速度慢及鲁棒性差等缺点。

状态观测器方程为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \tag{5-32}$$

适当选 $L_{n\times q}$，可使 A-LC 有希望特征值。

（2）**唯一性**

观测器不唯一

5.5.2 观测器存在条件

若有一系统r维S_g，它以u和 y 为输入，并有

$$S_g : \begin{cases} \dot{Z} = FZ + Nu + Gy \\ W = EZ + My \end{cases} \tag{5-33}$$

$r \le n$

符合什么条件 S_g 为Σ的 KX 观测器。即有 $\lim\limits_{t\to\infty}(KX(t) - W(t)) = 0$

定理 5.8 若Σ能控能观，则S_g成为Σ的 KX 函数观测器的充分必要条件是：

1） F的全部特征值 $\lambda_i(F)$ 具有负实部，即

$$\text{Re}\ \lambda_i(F) < 0 \qquad i = 1,2,\cdots,r$$ 即Sg是渐近稳定的；

2）$\lambda_i(A) \neq \lambda_j(F) \qquad i = 1\cdots n;\ j = 1\cdots r$

3) $K = EP + MC$

4) $PA - FP = GC$

5） $N = PB$

其中，$P_{r\times n}$ 必唯一存在。

可以证明：

1）这些观测器之间必是代数等价的。

2）若 Σ 能控能观，S_{g_1}，S_{g_2}都有（5-33）形式的动态系统，若 S_{g_1}为Σ的KX 观测器，且 $Sg_1 \Leftrightarrow Sg_2$，$Sg_2$ 也必是Σ的KX 观测器。

若 $r=n$， $M=0$，则（5−33）式为

$$\begin{cases}\dot{z}=Fz+Nu+Gy\\ W=Ez\end{cases} \tag{5-34}$$

称为全维观测器。

若 $r<n$，$M\neq 0$ 相应观测器称为降维观测器。

对 $r=n$ 全维观测器，参数除按上述步骤外，有特定取法：

$$F=A-LC,\qquad G=L$$

则 $PA-FP=PA-(A-LC)P=PA-AP+LCP=LC$

有 $P=I_n$ 从而 $\longrightarrow N=B$， $K=E$

于是得到一特定的n 维KX 观测器。

$$\begin{cases}\dot{z}=(A-LC)z+Bu+Ly\\ W=Kz\end{cases} \tag{5-35}$$

称此为Σ 的一个全维KX观测器；K=I为Σ 的一个全维状态观测器.

因为满足结构条件的L 不唯一，全维观测器也不唯一。全维观测器设计较简单。

5.5.2 全维状态观测器设计

若 Σ 能观，其对偶系统(A^T, C^T, B^T) 必是能控的。

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A^T \bar{x} + C^T \bar{u} \\ \bar{y} = B^T \bar{x} \end{cases}$$

$(A^T C^T)$ 能控

那么对任意指定的极点，可求得状态反馈 $\bar{u} = v - L^T \bar{x}$

使得闭环系统 $\dot{\bar{x}} = (A^T - C^T L^T)\bar{x} + C^T v$

任意配置极点，这些极点也正是系统（A, B, C)观测器中$A-LC$的极点。

因此，可用对偶关系设计观测器

（A, B, C）能观 (A^T, C^T, B^T) 能控

(A^T, C^T, B^T) 极点配置

算法1 利用对偶原理（本科已学过）

1）计算对偶系统矩阵 $\bar{A} = A^T$， $\bar{B} = C^T$

2）对 $(\bar{A}, \bar{B})$ 和期望特征值$\left\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*\right\}$，采用极点配置算法，使

$$\lambda_i(\bar{A}-\bar{B}\bar{K}) = \lambda_i^*,\ i = 1,2,\cdots,n$$

3）取 $L = \bar{K}^T$

4）计算（A-LC)

5）观测器为 $\dot{x} = (A-LC)\dot{x} + Bu + Ly$

例1 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

设计特征值为-3,-3和-4的全维状态观测器.

解:

$$rank\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n$$

可知系统完全观测.

$$\bar{A} = A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \bar{b} = c^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\bar{A}, \bar{b}) \ \text{完全能控}$$

$$\det(sI - \bar{A}) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ 2 & s+1 & 0 \\ 2 & -1 & s+1 \end{bmatrix} = s^3 + 3s^2 + 5s + 5$$

$$\alpha^*(s) = (s+3)(s+3)(s+4) = s^3 + 10s^2 + 33s + 36$$

$$P = \begin{bmatrix} \bar{A}^2\bar{b} & \bar{A}\bar{b} & \bar{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \tilde{k} = \begin{bmatrix} 31 & 28 & 7 \end{bmatrix}$$

$$k = \tilde{k}P^{-1} = \begin{bmatrix} 31 & 28 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{5} = \begin{bmatrix} 12 & -5 & -4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{k}^T = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - Lc)\hat{x} + Ly + bu$$

$$= \begin{bmatrix} -13 & -14 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

算法2　利用观测器存在条件

对式 (5-33) ，若 $r = n$， $M = 0, E = T^{-1}$，则式为

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Nu + Gy \\ W = T^{-1}z \end{cases} \tag{5-36}$$

结论1 系统（5-36）成为Σ的全维观测器的充分必要条件为：

(1) $TA - FT = GC$，解阵T为非奇异；

(2) $N = TB$ ；

(3) F的全部特征值$\lambda_i(F)$具有负实部，即

$$\mathrm{Re}\ \lambda_i(F) < 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, r$$

结论2（解阵T非奇异条件） 设A和F不具有公共特征值，则方程 $TA-FT=GC$ 存在非奇异n×n解阵T的必要条件是（A,C）能观测和（F,G）完全能控。对于单输出系统，这个条件是充要条件。

$TA-FT=GC$ 称为西尔维斯特方程。

计算步骤： 被估计系统（A,B,C)能控能观，观测器按如下步骤：

Step1，计算期望特征值组 $\{\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_n^*\}$ 对应特征多项式

$$\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i^*)=s^n+\alpha_{n-1}^*s^{n-1}+\cdots+\alpha_1^*s^1+\alpha_0^*$$

$$F_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* & & -a_{n-1}^* \end{bmatrix}$$

Step2，任取非奇异n×n阵S，计算 $F=SF_0S^{-1}$;

Step3，任取使（F,G）完全能控的$n\times q$ 矩阵 G;

Step4，求解 $TA-FT=GC$ 的解阵 T；若q=1,转到Step6,若q>1,转到下一步；

Step5，若T为非奇异，进入下一步；若为奇异，转到Step2；
Step6，计算 $N = TB$;

Step7，观测器为 $\begin{cases} \dot{z} = Fz + Nu + Gy \\ W = T^{-1}z \end{cases}$

5.5.3 降维状态观测器设计

当系统阶数很高时，构造的全维观测器是很复杂的。降低维数意味着观测器只需较少个数积分器来构成。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{5-39}$$

若rank $C = q$.

定理5.9 系统（5-39）完全能观，它的最小观测器维数为n-q.

这个定理告诉我们，已经有一部分状态已由y获得，只需构造n-q维观测器。

任选 $R \in \Re^{(n-q)\times n}$，使 $P = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$ 非奇异。令 $Q = P^{-1} = [Q_1 \mid Q_2]$

定理5.10 通过非奇异变换$\bar{x}=Px$，线性定常系统（5−39）可以变成如下形式的系统

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}u \tag{5−40}$$

$$y=\bar{x}_1$$

其中，$\bar{x}_1$为q维分状态，$\bar{x}_2$是n-q维分状态.

证明： $\dot{\bar{x}}=PAP^{-1}\bar{x}+PBu=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}u$

$$y=CP^{-1}\bar{x}=[CQ_1 \quad CQ_2]\bar{x}=[I_q \quad 0]\bar{x}$$

$$记\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{x}_{1_q}\\ \bar{x}_{2_{n-q}}\end{bmatrix}$$

证毕

因为$\bar{x}_1$可直接测量，因此需要构造的是n-q维状态观测器。

定理5.11 分状态$\bar{x}_2$的n−q维状态观测器为

$$\dot{z}=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})z+[(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}+(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{11})]y+(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1)u \tag{5-41}$$

(n-q)× q阵$\bar{L}$取为使$(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})$满足期望极点配置。

证明： 由式（5−40）
$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}u$$
$$y=\bar{x}_1$$

写出关于 $\bar{x}_2$的状态方程和输出方程

$$\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{21}\bar{x}_1+\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{B}_2u\Rightarrow\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\underbrace{\bar{A}_{21}y+\bar{B}_2u}_{\bar{u}}$$

$$\dot{\bar{x}}_1=\bar{A}_{11}\bar{x}_1+\bar{A}_{12}\bar{x}_2+\bar{B}_1u\Rightarrow\underbrace{\dot{y}-\bar{A}_{11}y-\bar{B}_1u}_{w}=\bar{A}_{12}\bar{x}_2$$

得

$$\dot{\bar{x}}_2=\bar{A}_{22}\bar{x}_2+\bar{u}$$
$$w=\bar{A}_{12}\bar{x}_2$$
$\{A,C\}$能观 $\Leftrightarrow\{\bar{A}_{22},\bar{A}_{12}\}$能观

可对n−q构造观测器：

$$\dot{\hat{x}}_2=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\hat{x}_2+\bar{L}w+\bar{u}$$

通过选取$\bar{L}$可以任意配置$(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})$的全部特征值

$$\dot{\hat{x}}_2=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\hat{x}_2+\bar{L}(\dot{y}-\bar{A}_{11}y-\bar{B}_1u)+(\bar{A}_{21}y+\bar{B}_2u)$$

设法消去$\dot{y}$,增加抗扰动性.

设$z=\hat{x}_2-\bar{L}y$

则$\dot{z}=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})z+[(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}+(\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11})]y$
$+(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1)u$

通过此,重构z

$$\hat{x}_2=z+\bar{L}y$$

证毕

定理5. 12 对于线性时不变观测系统(5-39)，确定系统状态x重构状态 $\hat{x}$ 的关系式为

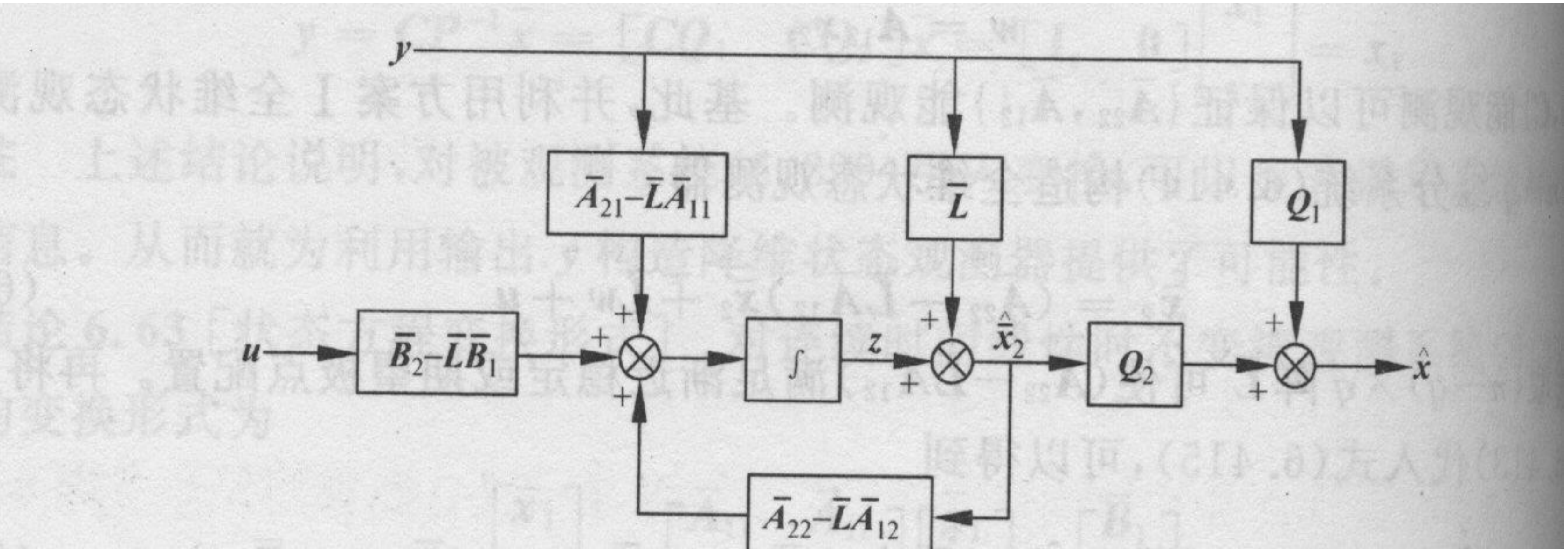
$$\hat{x} = Q_1 y + Q_2(z + \bar{L}y) \tag{5-42}$$

证明： 由 $\bar{x} = Px$ ， 则$x = P^{-1}\bar{x} = Q\bar{x}$ ， 故$\hat{x} = Q\hat{\bar{x}}$

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z + \bar{L}y \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \hat{\bar{x}} = Q_1 y + Q_2(z + \bar{L}y)$$

结构图：



算法1:（1） 对给定C，任取R，使 $P=\begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$ 非奇异；

（2） $Q=P^{-1}=\left[Q_1 \mid Q_2\right]$, Q_1为$n\times q$，Q_2为$n\times(n-q)$

（3）

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix},\quad \bar{B}=PB=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

（4）计算期望特征多项式

$$\prod_{i=1}^{n-q}(s-\lambda_i^*)=\alpha^*(s)$$

（5）对 $\{A_{22}^T, A_{12}^T\}$ 采用极点配置算法，求 $\bar{K}$ 使

$$\det(sI-A_{22}^T+A_{12}^T\bar{K})=\alpha^*(s)$$

（6）取 $\bar{L}=\bar{K}^T$

（7）计算 $\dot{z}=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})z+[(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}+(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{11})]y+(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1)u$

$$\hat{x}=Q_1y+Q_2(z+\bar{L}y)$$

例

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

设计特征值为-3和-4的二维状态观测器.

解： 可(A,C)判断能观测，降维观测器维数是2.

$$P=\begin{bmatrix}C\\R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & \vdots & -2 & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \vdots & -1 & 1\\ 1 & \vdots & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\bar{b}=Pb=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ \cdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}$$

配置 $(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})$ 特征值为-3和-4, 确定 $\boldsymbol{\bar{L}} = \boldsymbol{k}^{T}$.

$$\tilde{A}=\bar{A}_{22}^{T}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\ \tilde{B}=\bar{A}_{12}^{T}=\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix},\ (\tilde{A},\tilde{B})$$ 完全能控

$$\alpha(s)=\det(sI-\tilde{A})=s^{2}+2s+2 \qquad \alpha^{*}(s)=s^{2}+7s+12$$

$$T=\left[\tilde{A}\tilde{B}\quad \tilde{B}\right]\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha_{1} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -3 & -1\end{bmatrix},\ T^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}=\begin{bmatrix}10 & 5\end{bmatrix} \qquad k=\tilde{k}T^{-1}=\begin{bmatrix}10 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{5}=\begin{bmatrix}-1 & -3\end{bmatrix} \qquad \bar{L}=k^{T}=\begin{bmatrix}-1\\ -3\end{bmatrix}$$

降维观测器参数

$$\bar{A}_{22}-\bar{L}\ \bar{A}_{12}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -7 & -4\end{bmatrix} \qquad (\bar{A}_{22}-\bar{L}\ \bar{A}_{12})\bar{L}=\begin{bmatrix}3\\ 19\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{21}-\bar{L}\ \bar{A}_{11}=\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix} \qquad [(\bar{A}_{22}-\bar{L}\ \bar{A}_{12})\bar{L}+(\bar{A}_{21}-\bar{L}\ \bar{A}_{11})]=\begin{bmatrix}2\\ 17\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_{2}-\bar{L}\ \bar{B}_{1}=\begin{bmatrix}2\\ 7\end{bmatrix}$$

降维观测器为

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})z + [(\bar{A}_{22} - \bar{L}\ \bar{A}_{12})\bar{L} + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\ \bar{A}_{11})]y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\ \bar{B}_1)u$$

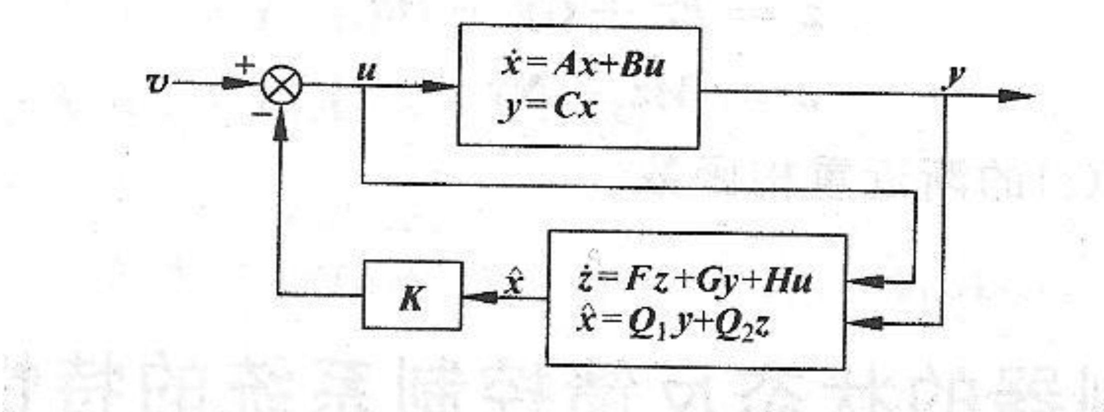
$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -7 & -4 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 \\ 17 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} u$$

系统状态x的重构为

$$\hat{x} = Q_1 y + Q_2(z + \bar{L}y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} y$$

算法2：西尔维斯特方法（自学）

5.5.4 利用观测器构成的状态反馈系统



受控系统的状态x, 观测器的状态z, 其中z是r维的状态方程式.

受控系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv \\ y = Cx \end{cases}$$

观测器

$$\dot{z} = Fz + Gy + Hv$$

$$u = v - K\hat{x}$$

进一步可表示为

$$\dot{x} = (A - BKQ_1C)x - BKQ_2z + Bv$$

$$\dot{z} = (GC - HKQ_1C)x + (F - HKQ_2)z + Nv$$

$$y = Cx$$

或者

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BKQ_1C & -BKQ_2 \\ GC - HKQ_1C & F - HKQ_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ H \end{bmatrix} u \\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

这就是带有观测器后闭环系统状态方程。

性质：

（1）若x是n维，Z是r维，则闭环系统维数为n+r；

（2）闭环极点具有分离性(**分离性原理**)

可以证明，它可变为：

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & -BKQ_2 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$$

得 $\det\left[sI-\tilde{A}\right] = \det\left[sI-(A-BK)\right]\cdot\det\left[sI-F\right]$

观测器的引入具有分离性，即观测器设计与极点配置、解耦控制可独立进行。

（3）$\tilde{z}$ 是系统的不能控不能观部分。

5.5.5 离散观测器

离散系统观测器的讨论方法和连续系统相似，设离散定常系统 (Φ, H, C) 能观，并且 Φ 是可逆阵。

$$x(k+1)=\Phi x(k)+Hu(k)$$

$$y(k)=Cx(k)$$

$$W_0=\begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$rankW_0=n$$

如果系统的能观性指数为β，则

$$rank\begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{\beta-1} \end{bmatrix}=n$$

对于离散系统，作为全维状态观测器，可取为

$$\xi(k+1)=(\Phi-LC)\xi(k)+Hu(k)+Ly(k)$$

$$\eta(k)=\xi(k)$$

其中L是要选择的反馈阵，这时

$$x(k+1)-\xi(k+1)=(\Phi-LC)(x(k)-\xi(k))$$

连续系统L的选择可以控制观测误差的速度，但不能在有限时间使观测误差彻底消失。而对于离散系统，若选择 L 使 $\Phi - LC$ 的特征值都为0，则存在式具有 k_0 ，使

$$x_0(k_0) - \zeta(k_0) = (\Phi - LC)^{k_0}(x(0) - \zeta(0)) = 0$$

可见，只要 $k \ge k_0$，必有 $x(k) = \zeta(k)$ 观测误差彻底消失。

定义　以 $u(k), y(k)$ 输入的系统 $\sum_k$ 称为 (Φ, H, C) 的 Kx 观测器，如果存在步数 k_0 ，当 $k \ge k_0$ 时，$\sum_k$ 的输出 $\eta(k)$ 和 $Kx(k)$ 相等。当 $K = I$ 时，$\sum_k$ 则称为状态观测器。

离散系统 KX 观测器的一般结构

$$\begin{aligned} \zeta(k+1) &= F\zeta(k) + Gy(k) + Nu(k) \\ \eta(k) &= E\zeta(k) + My(k) \end{aligned} \qquad (5\text{-}43)$$

它的维数是 r, $r \le n$ 。设 $k \ge 1$ ，则有

$$\eta(k_0 + k) = Kx(k_0 + k)$$

定理5.11 设系统（5-43）能观，则它成为 (Φ, H, C) 的步数为的 k_0 Kx 观测器的充分必要条件是，存在 $r \times n$ 阶矩阵 P，使得对任意输入 $\{u_k\}$ 和初始状态 $x(0), \xi(0)$，有

$$Kx(k) = \eta(k) \qquad k \geq k_0$$

以及

1、F 的特征值都为0

2、$P\Phi - FP = GC$

3、$N = PH$

4、$K = EP + MC$

设计同连续系统，变为极点配置问题。

5.6 抗干扰跟踪控制器的设计

跟踪控制和扰动抑制是广泛存在于工程实际中的一类基本控制问题。

典型例子：雷达天线、导弹鱼雷

跟踪问题——抑制外部扰动对系统性能影响和使系统输出无静差地跟踪外部参考输入。

1、问题的提法

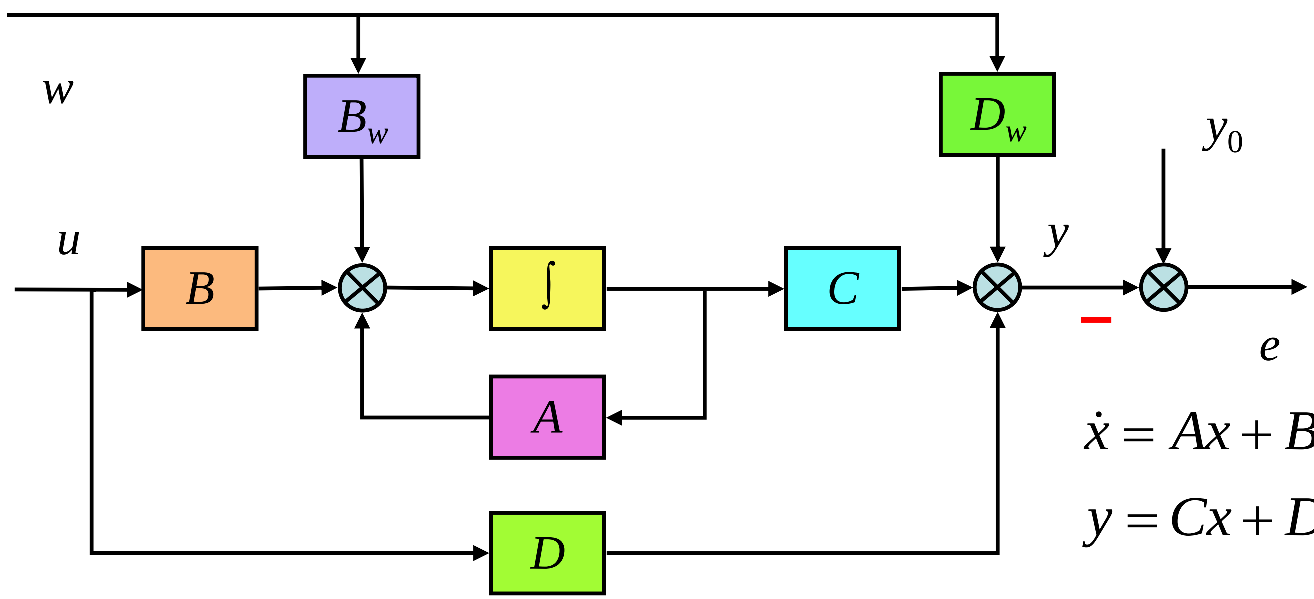
考察同时作用控制输入和外部扰动的连续线性时不变受控系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_w w$$
$$y = Cx + Du + D_w w$$

q维确定性扰动

假定系统能控能观，令系统输出y(t)跟踪外部参考输入$y_0(t)$，

跟踪误差： $e(t) = y_0(t) - y(t)$



$$\dot{x} = Ax + Bu + B_w w$$

$$y = Cx + Du + D_w w$$

跟踪问题三种提法：

渐近跟踪： $y_0(t) \neq 0$， $w(t) = 0$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y_0(t)$

扰动抑制： $w(t) \neq 0$， $y_0(t) = 0$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{t\to\infty} y_w(t) = 0$

无静差跟踪： $y_0(t) \neq 0$， $w(t) \neq 0$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y_0(t)$

2、参考输入和扰动的信号模型

使线性时不变受控系统的输出实现渐近跟踪和扰动抑制，是以控制器中“**植入**”参考输入和扰动信号的**模型**为机理的。

信号的特性和模型

给定信号$\tilde{y}_0(t)$的特性：结构特性＋非结构特性

阶跃信号

时域中，$\tilde{y}_0(t)=\beta_0 1(t)$

频域中，$\bar{Y}_0(s)=\dfrac{n(s)}{d(s)}=\dfrac{\beta_0}{s}$

非结构特性（数量参数）

结构特性（结构特性）

非结构特性

结构特性

由给定信号频域结构特性d(s)导出一个线性时不变自治系统：

$$\dot{x}=A_0x \qquad x(0)=x_0$$

$$\tilde{y}_0(t)=C_0x$$

其中：dim$\boldsymbol{x}$＝$d(s)$阶次＝$\boldsymbol{n}_y$

A_0的最小多项式＝$d(s)$

C_0=1×$\boldsymbol{n}_y$向量

$\boldsymbol{x}(0)$＝$\boldsymbol{x}_0$为未知向量

$$\bar{Y}_0(s)=C_0(sI-A_0)^{-1}x_0=\frac{C_0 adj(sI-A_0)x_0}{|sI-A_0|}=\frac{n(s)}{d(s)}$$

正弦信号 $y_{\mathbf{0m}}\sin(\omega t+\theta)$ $\qquad \bar{Y}_{\mathbf{0}}(s)=\frac{n(s)}{d(s)}=\frac{n(s)}{s^2+\omega^2}$

频域结构特性

$$A_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & 0\end{bmatrix} \qquad C_0=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

参考输入的结构特性模型

$$y_{\mathbf{0}}(t)=\begin{bmatrix}y_{\mathbf{01}}(t)\\ \vdots\\ y_{\mathbf{0}q}(t)\end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{Y}_0(s)=\begin{bmatrix}\bar{Y}_{01}(s)\\ \vdots\\ \bar{Y}_{0q}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{n_{r1}(s)}{d_{r1}(s)}\\ \vdots\\ \dfrac{n_{rq}(s)}{d_{rq}(s)}\end{bmatrix}$$

再表 $d_r(s)=\{\, d_{r1}(s),\cdots, d_{rq}(s)\,\}$ 最小公倍式，$\boldsymbol{n}_r$ =多项式 $d_r(s)$的次数

由$\mathbf{d_r(s)}$导出参考输入$y_0(t)$的结构特性模型：

$$\dot{x}_r=A_r x_r$$
$$y_0(t)=C_r x_r$$

其中：A_r是满足 “最小多项式＝ $d_r(s)$”的任一$\boldsymbol{n}_r\times\boldsymbol{n}_r$阵，C阵是满足输出为$\boldsymbol{y}_0(t)$的任一$\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n}_r$ 阵。

扰动信号的结构特性模型

$$w(t)=\begin{bmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_q(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{W}_0(s)=\begin{bmatrix} \bar{W}_{01}(s) \\ \vdots \\ \bar{W}_{0q}(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{n_{w1}(s)}{d_{w1}(s)} \\ \vdots \\ \dfrac{n_{wq}(s)}{d_{wq}(s)} \end{bmatrix}$$

再表 $d_w(s) = \{ d_{w1}(s), \cdots , d_{wq}(s) \}$ 最小公倍式，$\boldsymbol{n}_w$ =多项式 $d_w(s)$的次数

由$\mathbf{d_w(s)}$导出扰动信号$\boldsymbol{w(t)}$的结构特性模型：

$$\dot{x}_w = A_w x_w$$
$$w(t) = C_w x_w$$

其中：A_w是满足 “最小多项式＝ $d_w(s)$”的任一$\boldsymbol{n}_w\times\boldsymbol{n}_w$阵，C阵是满足输出为$\boldsymbol{w}(t)$的任一$\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{n}_w$ 阵。

参考输入和扰动信号的共同不稳定模型

渐近跟踪和扰动抑制只需关注系统输出y(t)在t→∞的行为，建模时只需考虑信号$\boldsymbol{y_0(t)}$**和** $\boldsymbol{w(t)}$的渐近影响，即只主要参考信号和扰动信号的特征多项式不稳定多项式。

$$d_r(s)=\bar{\phi}_r(s)\cdot\phi_r(s) \qquad d_w(s)=\bar{\phi}_w(s)\cdot\phi_w(s)$$

其中， $\boldsymbol{\phi_r(t)=0}$，$\boldsymbol{\phi_w(t)=0}$的根为不稳定。

令 $\boldsymbol{\phi(t)} = \boldsymbol{\phi_r(t)}$和$\boldsymbol{\phi_w(t)}$ 的最小公倍式， $\boldsymbol{\phi(t)}$包含了A_r和A_w的所有不稳定特征根。

$$\phi(s) = s^l + \tilde{\alpha}_{l-1}s^{l-1} + \cdots + \tilde{\alpha}_1 s + \tilde{\alpha}_0$$

令 $\boldsymbol{\phi^{-1}(s)I_q}$内模

由此组成参考输入和扰动信号的共同不稳定模型的系数矩阵为

$$\Gamma_{l\times l} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{l-1} & \\ 0 & & & \\ \hline -\tilde{\alpha}_0 & -\tilde{\alpha}_1 & \cdots & -\tilde{\alpha}_{l-1} \end{array}\right] \qquad \underset{l\times 1}{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

q为输入维数

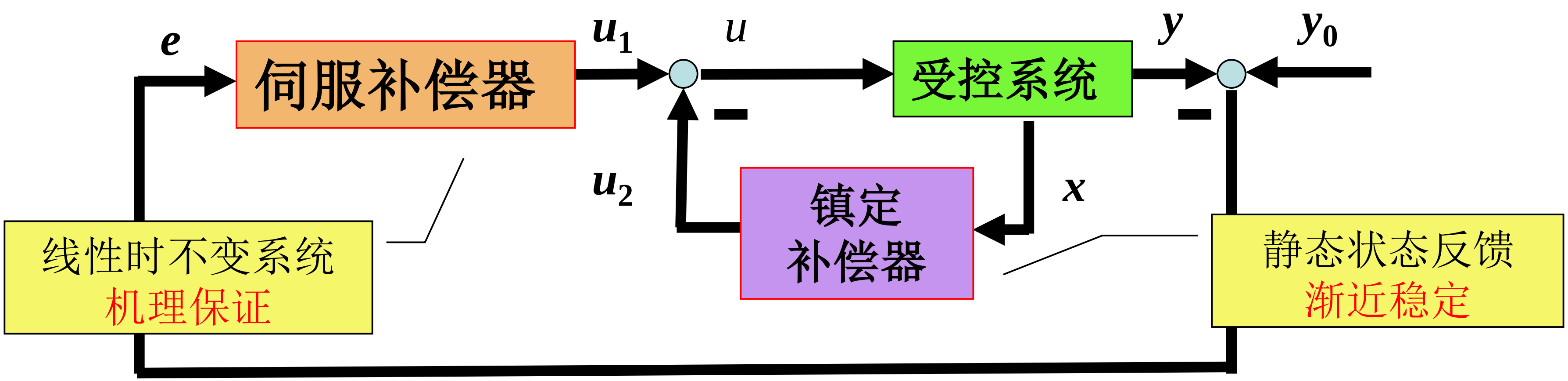
$$\underset{ql\times ql}{A_c} = \begin{bmatrix} \Gamma & & \\ & \ddots & \\ & & \Gamma \end{bmatrix} \qquad \underset{ql\times q}{B_c} = \begin{bmatrix} \beta & & \\ & \ddots & \\ & & \beta \end{bmatrix}$$

并令跟踪误差$\boldsymbol{e(t)}$为模型输入，$y_c\boldsymbol{(t)}$为模型输出，则参考输入和扰动信号的共同不稳定模型为：

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c e$$

$$y_c = x_c$$

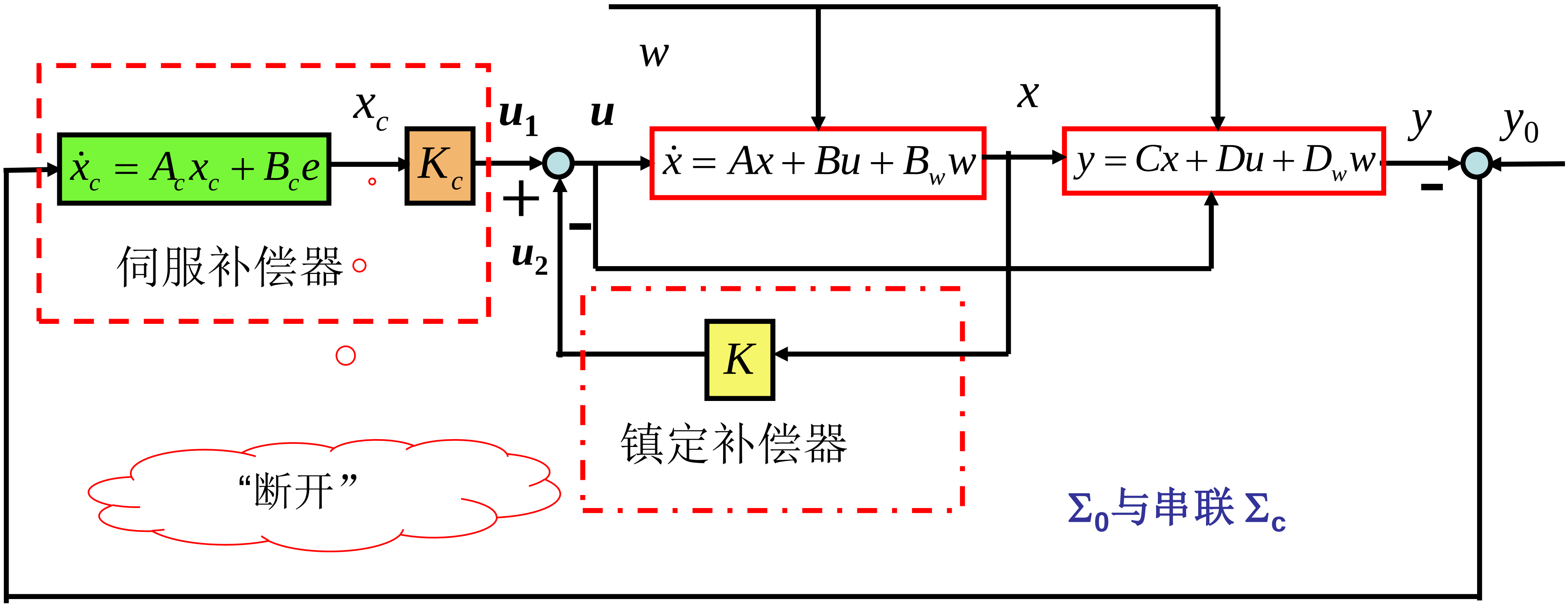
无静差跟踪控制系统



将伺服补偿器取为“参考输入和扰动信号的共同不稳定模型”和比例性控制率K_c的串联，将镇定补偿器取为受控系统的状态反馈。

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c e$$
$$u_1 = K_c x_c$$

$$u_2 = Kx$$



无静差跟踪控制系统的状态空间描述：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ -B_c D \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} B_w \\ -B_c D_w \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B_c \end{bmatrix} y_0$$

$$u = \begin{bmatrix} -K & K_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

串联系统Σ_T的**能控性**

串联系统Σ_T为能控的一个充分条件：

(1) $\dim(u) \geq \dim(y)$

(2) 对$\boldsymbol{\phi(s)=0}$的每一个根$\boldsymbol{\lambda_i}$，成立

$$rank\begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = n+q, \qquad i=1,2,\cdots,l$$

无静差跟踪条件

存在状态反馈 $u=\begin{bmatrix} -K & K_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$，使可实现**无静差跟踪的一个充分条件为：**

(1) $\dim(u) \geq \dim(y)$

(2) 对$\boldsymbol{\phi(s)=0}$的每一个根$\boldsymbol{\lambda_i}$，成立

$$rank\begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = n+q, \qquad i=1,2,\cdots,l$$

无静差跟踪的综合算法

Step1：判断是否dim(u)≥ dim(y)，若是，进入下一步；若否，转去step11。

Step2：判断(A.B)能控性，若完全能控，进入下一步；若否，转去step11。

Step3：定出$\boldsymbol{\phi(t)}=\boldsymbol{\phi_r(t)}$和$\boldsymbol{\phi_w(t)}$ 的最小公倍式。

$$\phi(s)=s^l+\tilde{\alpha}_{l-1}s^{l-1}+\cdots+\tilde{\alpha}_1 s+\tilde{\alpha}_0$$

Step4：计算$\boldsymbol{\phi(t)}=\boldsymbol{0}$的根$\boldsymbol{\lambda_i}$，判断

$$rank\begin{bmatrix}\lambda_i I-A & B\\ -C & D\end{bmatrix}=n+q, \qquad i=1,2,\cdots,l$$

若成立，进入下一步；若否，转去step11。

Step5：定出分块矩阵

$$\Gamma_{l\times l}=\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{l-1} & \\ 0 & & & \\ \hline -\tilde{\alpha}_0 & -\tilde{\alpha}_1 & \cdots & -\tilde{\alpha}_{l-1}\end{array}\right] \qquad \underset{l\times 1}{\beta}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

定出参考输入和扰动信号的共同不稳定模型的系数矩阵为

$$\underset{ql\times ql}{A_c}=\begin{bmatrix}\Gamma & & \\ & \ddots & \\ & & \Gamma\end{bmatrix}\qquad \underset{ql\times q}{B_c}=\begin{bmatrix}\beta & & \\ & \ddots & \\ & & \beta\end{bmatrix}$$

Step6：组成($n+ql$)维串联系统Σ_T的状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{x}_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ -B_cC & A_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x_c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ -B_cD\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}B_w\\ -B_cD_w\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}0\\ B_c\end{bmatrix}y_0$$

Step7：对串联系统Σ_T按期望动态性能指标指定($n+ql$)个期望闭环极点{λ_1^*，λ_2^*，…，λ_{ql}^*}，基于$\boldsymbol{u=K_Tx_T}$，$\boldsymbol{x_T=[x^T,x_c^T]^T}$，采用极点配置算法定出$\boldsymbol{p\times(n+ql)}$维$\boldsymbol{K_T}$。

Step8：对$\boldsymbol{K_T}$分块:

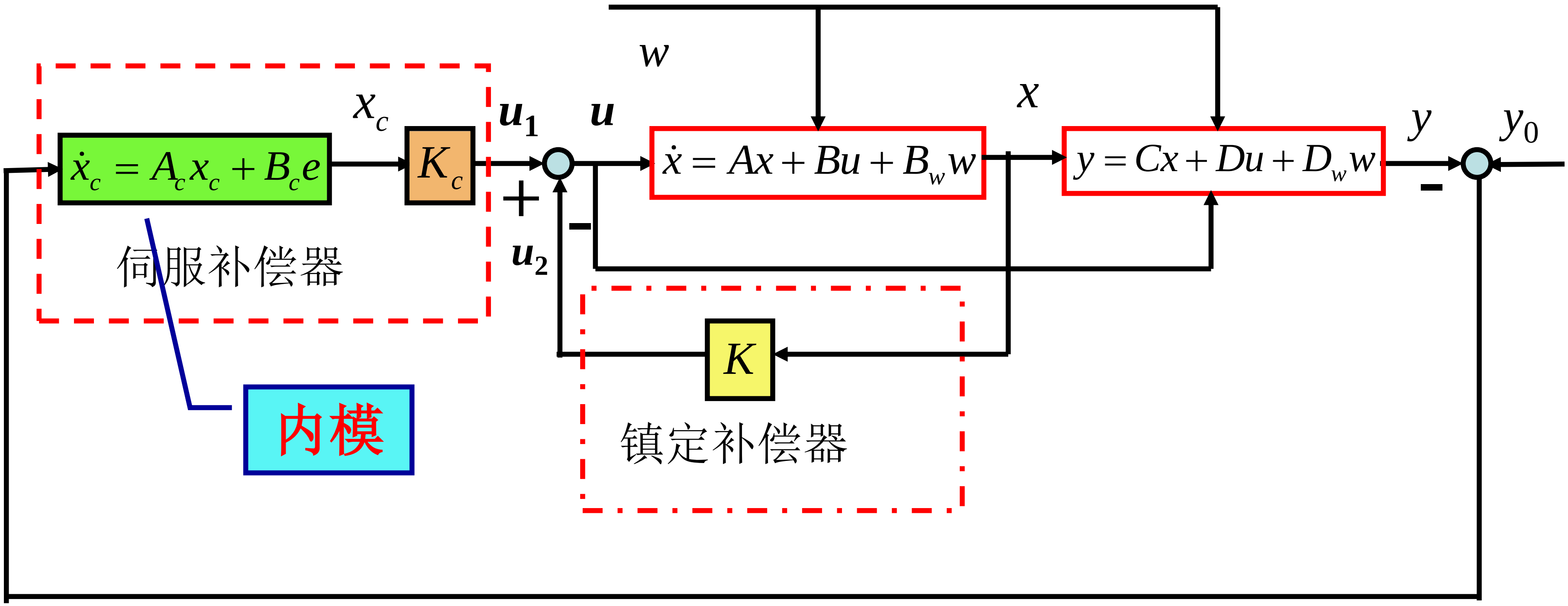
$$K_T=\begin{bmatrix}-\underset{p\times n}{K} & \underset{p\times ql}{K_c}\end{bmatrix}$$

Step9：定出镇定补偿器：$u_2 = Kx$

Step10：定出伺服补偿器：$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c e$

$u_1 = K_c x_c$

Step11：停止计算。



在回路中“植入”参考信号和扰动信号的共同不稳定模型，称这个置于系统内部的外部信号模型为“内模”。

知识点：

1、控制器类型，反馈控制及性质

4种综合问题，综合涉及的三要素，掌握反馈控制系统的问题描述与模型，反馈控制性质（能控、能观、稳定性）

2、多变量系统的极点配置

极点配置的条件，熟练掌握单变量系统极点配置算法，多变量系统极点配置算法（两步法、循环矩阵法非常熟练掌握，标准型一般了解），反馈对零点的影响

3、解耦控制

解耦控制问题提法及条件，结构特征量计算，熟练掌握动态解耦控制算法，了解静态解耦算法。

4、状态反馈实现镇定控制

镇定控制问题提法及条件，掌握镇定控制算法

5、状态观测器设计（全维、降维）

观测器问题提法，观测器实现的思路，基本概念，熟练掌握全维观测器设计（对偶性原理方法，求解西尔维斯特矩阵方法），熟练掌握最小维观测器设计，分离性原理

6、抗干扰跟踪控制器设计

参考信号与干扰信号的特性与模型，无静差跟踪条件，无静差跟踪的综合算法

第五章习题（2）

6. p374, 6.18
7. p375, 6.21