第六章 传递函数矩阵的实现理论

掌握内容：

传递函数矩阵的规范型实现

最小实现的概念与性质

最小实现的算法

实现的实质是利用系统的外部描述(传递函数)，在状态空间中寻找一个外部与原系统等价的系统内部结构。在经典控制理论与现代控制理论之间架起桥梁。

对于连续时不变系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0$$

$$y = Cx + Eu$$

其中，A, B, C, E分别为 $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ 和 $q \times p$ 的实常数阵，系统脉冲响应矩阵为 $H(t, \tau)$ 。

对其拉普拉斯变换得到

$$\begin{cases} s\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} = C\bar{x} + E\bar{u} \end{cases}$$

整理得

$$\bar{y} = (C(sI - A)^{-1}B + E)\bar{u}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + E$$

$$= G_0(s) + E$$

实现问题(反过程):从传递函数获得状态空间描述

6.1 传递函数矩阵的规范型实现

对真或严真连续时间线性时不变系统，称一个状态空间描述

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Eu \end{cases} \tag{6-1}$$

或简写为（A，B，C，E）是其传递函数矩阵$G(s)$ 的一个实现，如果两者为外部等价即成立关系式：

$$C(sI - A)^{-1}B + E = G(s) \tag{6-2}$$

传递函数矩阵 $G(s)$ 的实现（A，B，C，E）的结构复杂程度可由其维数表征。一个实现的维数规定为其系统矩阵A的维数，即有

$$\text{实现维数} = \dim A$$

传递函数矩阵 $G(s)$ 的实现（A，B，C，E）满足强不唯一性。即对传递函数矩阵$G(s)$ ，不仅其实现结果为不唯一，而且其实现维数也为不唯一。

6.1.1 标量传递函数的实现

$$g(s)=e+\frac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0} \qquad (6\text{-}3)$$

$$=e+\frac{n(s)}{d(s)}$$

n(s)/d(s)是严真部分

当g(s)的分子和分母无非常数公因式的情况，即无零、极点对消时，系统**能控能观测**。

能控规范形实现

式（6-3）所示标量传递函数g(s)的严真部分n(s)/d(s)的能控规范形实现具有形式：

$$A_c=\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{array}\right],\quad b_c=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad c_c=[\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}] \qquad (6\text{-}4)$$

能观测规范形实现

式（6-3）所示标量传递函数 g(s)的严真部分n(s)/d(s)的能观测规范形实现具有形式：

$$A_o=\left[\begin{array}{ccc:c}0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ \hdashline 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1}\end{array}\right], \quad b_o=\begin{bmatrix}\beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1}\end{bmatrix}, \quad c_o=[0,\cdots,0,1] \qquad （6-5）$$

这时A阵的规模不可能再减小了，因为再减小就不可能得出传递函数的分母是 n 次多项式的结果。

6.1.2 传递函数矩阵的实现

考虑以有理分式矩阵描述给出的真 $q\times p$ 传递函数矩阵 $G(s)$

$$G(s)=(g_{ij}(s)), \qquad i=1,\cdots,q \qquad j=1,\cdots,p$$

进而，表 $G(s)$ 为 "严真传递函数矩阵 $q\times p$ 阶 $G_{sp}(s)$ " 和 " $q\times p$ 阶常阵E "之和，即

$$G(s)=(g_{ij}(s))=(e_{ij})+(g_{ij}^{sp}(s))=E+G_{sp}(s) \qquad （6-6）$$

且有 $E=G(\infty)$ 。再表 $G_{sp}(s)$ 诸元即 $G(s)$ 诸元的最小公分母d(s)为 $d(s)=s^l+\alpha_{l-1}s^{l-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$

基此，严真 $q\times p$ 传递函数矩阵 $G_{sp}(s)$ 可进而表为

$$G_{sp}(s)=\frac{1}{d(s)}P(s)=\frac{1}{d(s)}\left[P_{l-1}s^{l-1}+\cdots+P_1 s+P_0\right] \qquad (6\text{-}7)$$

其中， $P_k(k=0,1,\cdots,l-1)$ 为 $q\times p$ 常阵.

能控形实现

对式（6-7）的以有理分式矩阵描述给出的严真传递函数矩阵 $G_{sp}(s)$ ，其能控形实现 $(\bar{A}_c,\bar{B}_c,\bar{C}_c)$ 具有形式：

$$\underset{lp\times lp}{\bar{A}_c}=\begin{bmatrix} 0 & I_p & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & I_p \\ -\alpha_0 I_p & -\alpha_1 I_p & \cdots & -\alpha_{l-1} I_p \end{bmatrix},\qquad \underset{lp\times p}{\bar{B}_c}=\begin{bmatrix} 0\\ \vdots \\ 0 \\ I_p\end{bmatrix} \qquad (6\text{-}8)$$

$$\underset{q\times lp}{\bar{C}_c}=\left[P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_{l-1}\right]$$

而真传递函数矩阵 $G(s)$ 的能控形实现为 $(\bar{A}_c,\bar{B}_c,\bar{C}_c,E)$ 。

能观形实现

对式子（6-7）的以有理分式矩阵描述给出的严真传递函数矩阵 $G_{sp}(s)$ ，其能观测形实现 $(\bar{A}_0,\bar{B}_0,\bar{C}_0)$ 具有形式：

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 I_q \\ I_q & & & -\alpha_1 I_q \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_q & -\alpha_{l-1} I_q \end{bmatrix}_{lq\times lq}, \qquad \bar{B}_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{l-1} \end{bmatrix}_{lq\times p} \tag{6-9}$$

$$\bar{C}_0 = \begin{bmatrix} 0, & \cdots, & 0, & I_q \end{bmatrix}_{q\times lq}$$

而真传递函数矩阵 $G(s)$ 的能观形实现为 $(\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{C}_0, E)$ 。

例： 试建立 $G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$ 的状态空间描述。

解： $G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} = \dfrac{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)}$

G(s)的最小公倍式

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}{s^2+3s+2}$$

$$\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 3, P_0 = [2 \quad 1], P_1 = [1 \quad 0], n = 2, p = 2, q = 1$$

能控形实现

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&0&-3&0\\0&-2&0&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}2&1&1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

能观测形实现

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}u$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

例 $$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)}&\dfrac{s^2+2s+2}{s(s+1)^3}\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{\begin{bmatrix}s(s+1)(2s+3)&(s+2)(s^2+2s+2)\end{bmatrix}}{s(s+1)^3(s+2)}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}s^3+\begin{bmatrix}5&4\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}3&6\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0&4\end{bmatrix}}{s^5+5s^4+9s^3+7s^2+2s}$$

能观形实现

能控形实现的维数？

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&-2\\0&1&0&0&-7\\0&0&1&0&-9\\0&0&0&1&-5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0&4\\3&6\\5&4\\2&1\\0&0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

6. 2 传递函数矩阵的最小实现

对于一个可实现的传递函数矩阵来说，从工程角度看，寻求维数最小的一类实现具有重要现实意义。

定义6.1(最小实现） 最小实现定义为传递函数矩阵 $G(s)$ 的所有实现（A，B，C，E）中维数最小的一类实现。实质上，最小实现就是外部等价于 $G(s)$ 的一个结构最简状态空间模型。

设给定严真（真）有理函数矩阵$G(s)$，利用6.1.1和 6.1.2中的的方法求出$G(s)$ 的某种实现

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}\qquad (6\text{-}10)$$

定理6.1（实现间关系） 对传递函数矩阵 $G(s)$，其不同实现间一般不存在代数等价关系，但其所有最小实现间必具有代数等价关系。

定理6.2（最小实现判据） 设（A，B，C）为严真传递函数的 $G(s)$ 一个实现，则其最小实现的充分必要条件是（A，B）完全能控，（A，C）完全能观测.

证：先证必要性。已知（A，B，C）为最小实现，欲证（A，B）能控和（A，C）能观测。采用反证法，反设（A，B，C）不是联合能控和能观测，则可通过系统结构规范分解找出其能控和能观测部分 $(\tilde{A}_{11},\tilde{B}_1,\tilde{C}_1)$，且必成立：

$$\begin{cases} C(sI-A)^{-1}B=\tilde{C}_1(sI-\tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1=G(s) \\ \dim(A)>\dim(\tilde{A}_{11}) \end{cases}$$

据定义，$(\tilde{A}_{11},\tilde{B}_1,\tilde{C}_1)$ 也是 $G(s)$ 的实现，且具有更小维数。这表明，（A，B，C）不是 $G(s)$ 的最小实现，矛盾于已知条件。反设不成立，即（A，B，C）能控和能观测。必要性得证。

充分性，略。 证毕。

严真传递函数矩阵 $G(s)$ 的最小实现为不唯一但满足广义唯一性。即若（A，B，C）和 $(\overline{A},\overline{B},\overline{C})$ 为 $G(s)$ 的任意两个n维最小实现，则必可基此构造出一个 $n\times n$ 非奇异常阵T使成立：

$$\overline{A}=T^{-1}AT,\quad \overline{B}=T^{-1}B,\quad \overline{C}=CT$$

算法一 降阶法

(1) 如果（6-10）是能观性实现，可应用第三章的方法对它进行能控性分解，求出能控子系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=A_{11}\tilde{x}+B_1u\\ y=C_1\tilde{x}\end{cases}$$

就是G(s)的最小实现。

(2) 同样，如果（6-10）是能控性实现，可对它进行能观性分解，求出能观子系统，则它是G(s)的最小实现。

例6.1

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{s}{s-2}\\ 2 & 0\\ \frac{2}{s-2} & 1\end{bmatrix}$$

解：q=3,p=2, 可解出它的能控性实现

$$G(s)=G_{sp}(s)+E=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{2}{s-2}\\ 0 & 0\\ \frac{2}{s-2} & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$G_{sp}(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{2}{s-2}\\ 0 & 0\\ \frac{2}{s-2} & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{(s-2)(s+1)}\begin{bmatrix}s-2 & 2(s+1)\\ 0 & 0\\ 2(s+1) & 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s-2)(s+1)}\left[\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right]$$

$$\underset{lp\times lp}{A}=\begin{bmatrix}0 & I_2\\ -\alpha_0 I_2 & -\alpha_1 I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\2&0&1&0\\0&2&0&1\end{bmatrix}\qquad \underset{lp\times p}{B}=\begin{bmatrix}0\\ I_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\underset{q\times lp}{C}=[P_0,\ \ P_1]=\begin{bmatrix}-2&2&1&2\\0&0&0&0\\2&0&2&0\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

能观性分解 $X_{n0}=span\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ $X_o=span\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$ $P=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\-1&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&-1&0\end{bmatrix}^{-1}$

$$\tilde{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\quad \tilde{B}=PB=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}=CP=\begin{bmatrix}0&3&-2&2\\0&0&0&0\\0&2&2&0\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}0&1\\2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

能观子系统

$$\dot{x}_1=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$$

它是最小实现

算法二 约当型法

将G(s）每个元分成部分分式，再将每个元素展开成约当标准型实现。

算法三 汉克尔法

利用汉克尔矩阵性质