Tol2 Heimadæmi 3

Ragnar Björn Ingvarsson, rbi3

23. ágúst 2024

1

a) Reiknirit með vaxtargráðu $\theta(NlogN)$ myndi líta einhvernveginn svona út:

ParasummaFast (long[] A, long[] B, long K)

$Sort(B)$
for $i = 0$ in A **do**
  if $BinarySearch(B, K - A[i]) \geq 0$ **then**
    return true
  end if
end for
return false

Við sjáum útfrá þessu reikniriti að nokkrar aðgerðir eru gerðar. Við erum fyrst með $Sort$ sem raðar stökum B í hækkandi röð. $Sort$ sem við ætlum að nota í java heitir Arrays.sort og hefur tímaflækjuna $\theta(NlogN)$. Síðan kemur for lykkja sem gengur N sinnum þar sem A er af lengd N, þess vegna er tímaflækja for lykkjunnar $O(N)$. Í hvert skipti sem for lykkjan gengur í gegn framkvæmum við $BinarySearch$ sem er reiknirit sem hefur tímaflækjuna $\theta(logN)$ og þá sést að bæði $Sort$ og restin hefur tímaflækjuna $O(NlogN)$. Þess vegna er tímaflækjan fyrir reikniritið í heild sinni $\theta(NlogN)$.

b)
```
public static boolean nlognSumma(long[] A, long[] B, long K) {
    Arrays.sort(B);
    for (int i = 0; i < A.length; i++) {
        if (Arrays.binarySearch(B, K-A[i]) >= 0) return true;
    }
    return false;
}
```

Þessi útfærsla fær þessar niðurstöður:

10000, tími: 0.009

20000, tími: 0.013, hlutfall: 1.44

40000, tími: 0.021, hlutfall: 1.62

80000, tími: 0.048, hlutfall: 2.29

160000, tími: 0.064, hlutfall: 1.33

320000, tími: 0.099, hlutfall: 1.55

640000, tími: 0.208, hlutfall: 2.10

1280000, tími: 0.343, hlutfall: 1.65

2560000, tími: 0.618, hlutfall: 1.80

Niðurstöðurnar eru ekki mjög nákvæmar en við sjáum að tvöföldunarhlutfallið er rúmlega 1.7.

2

a) Reikniritið fyrir þetta myndi vera svona:

$Sort(A)1$
$a \leftarrow A[1] - A[2]$
for $i = 2$ in A **do**
  if $|A[i] - A[i-1]| < a$ **then**
    $a = |A[i] - A[i-1]|$
  end if
end for
return a

Við sjáum hér að $Sort$ er aftur með tímaflækju $\theta(NlogN)$ og for lykkjan gengur $N-2$ sinnum og gerir constant fjölda aðgerða í hvert sinn svo tímaflækja allrar for lykkjunnar er $\theta(N)$ þannig að heildar-tímaflækjan er $\theta(NlogN)$

b)
```
public static void main(String[] args) {
    int N = Integer.parseInt(args[0]);
    double[] A = new double[N];

    // Búa til slembigildi í fylkið
    for (int i=0; i<N; i++) {
        A[i] = StdRandom.uniformDouble()*N;
    }

    Arrays.sort(A);
    double a = A[1]-A[0];
    double fyrstaStak=0;
    double annadStak=0;
    for (int i = 2; i < A.length; i++) {
        if (Math.abs(A[i]-A[i-1]) < a) {
            a=A[i]-A[i-1];
            fyrstaStak=A[i-1];
            annadStak=A[i];
    \textbf{}    }
    }
    System.out.println(Arrays.toString(A));
    System.out.println("MinDiff: " + a);
    System.out.println("Fyrra Stak: " + fyrstaStak)
}
```

Hér er svo mynd af keyrslu með $N = 10$:

3

a) Hér sést að við erum með tvær for lykkjur, eina ytri og eina innri. Sú ytri rennur í gegn $N - 10$ sinnum og í hvert skipti sem það gerist rennur sú innri í gegn i^2 sinnum. Þegar við erum komin á síðasta snúning ytri lykkjunnar er $i = N - 1$

og því rennur innri lykkjan í gegn $(N-1)^2$ sinnum og því fæst að tímaflækja er $\theta(N * N^2) = \theta(N^3)$.

b) Hér erum við aftur með tvær for lykkjur, eina innri og eina ytri. Við fyrstu sýn virðist eins og við viljum margfalda saman tímaflækjurnar frá báðum lykkjunum en það gengur ekki í þessu tilfelli því innri lykkjan er beint háð þeirri ytri.

Við getum tekið eftir í staðinn að summan s, með því að prófa gildi á N og ganga nokkur skref í gegn, er á forminu $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ...M$, $M < N$. Þess vegna sést að s er rúmlega $2N$ svo tímaflækjan er $\theta(N)$.

c) Við sjáum að hér er ein *while* lykkja sem hækkar i um einn og bætir i við s í hvert skipti. Lykkjan er háð s, svo við fáum að $s = \frac{i(i+1)}{2}$ á meðan $s <= N$. Við getum þá fundið rúmlega tímaflækju forritsins með því að leysa rúmlega fyrir i til að komast eins nálægt N í jöfnunni $\frac{i(i+1)}{2} < N \Rightarrow \frac{i^2+i}{2} < N$ en hér sést að fyrir háar tölur skiptir i engu máli þar sem i^2 er einnig í dæminu, og við hendum út $\frac{1}{2}$ líka og fáum $i^2 < N$ og því hlýtur $i \approx \sqrt{N}$ svo tímaflækjan er $\theta(\sqrt{N})$

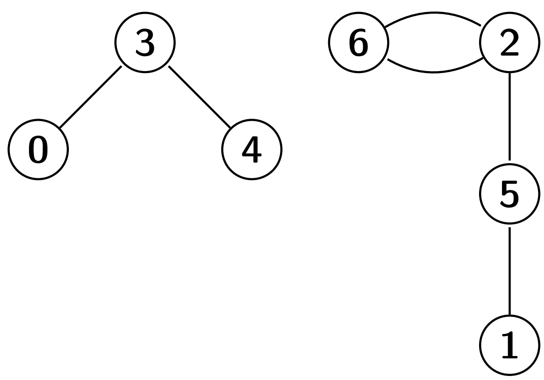
4

a) $3, 5, 6, 3, 3, 2, 2$

Við erum semsagt með röð af lengd 7 frá 0-6 og sjáum að eftirfarandi tengingar eru gefnar:

$$0 - 3$$
$$1 - 5$$
$$2 - 6$$
$$3 - 3$$
$$4 - 3$$
$$5 - 2$$
$$6 - 2$$

Hér sést um leið að þessi runa er ólögleg þar sem 2 tengist við 6 og 6 tengist líka við 2. Þar með myndast lykkja og engin rót fæst fyrir 2 og 6.



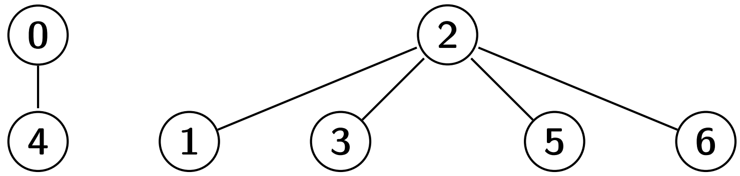
Þetta af sjálfsögðu getur ekki birst í vigtuðu *Quick-union* því það er ólöglegt.

b) $0, 2, 2, 2, 0, 2, 2$

Hér myndast tengingarnar:

$$0 - 0$$
$$1 - 2$$
$$2 - 2$$
$$3 - 2$$
$$4 - 0$$
$$5 - 2$$
$$6 - 2$$

Hér myndast engar lykkjur og sést að 0 og 2 eru rætur svo myndin lítur svona út:

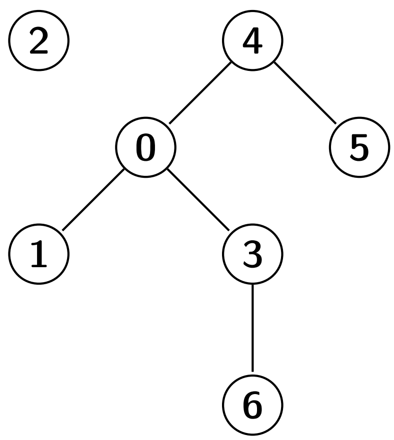


Þetta er löglegt því allar tengingar eru innan marka og engar lykkjur hafa myndast, og einnig eru allar tölur með rót. Þetta getur líka birst í vigtuðu *Quick-union* með aðgerðunum: $(0,4),(2,1),(2,3),(2,5),(2,6)$

c) $4,0,2,0,4,4,3$

$$0-4$$
$$1-0$$
$$2-2$$
$$3-0$$
$$4-4$$
$$5-4$$
$$6-3$$

Hér sést að 2 og 4 eru rætur og myndin lítur þá svona út:

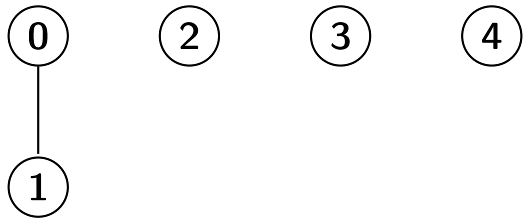


Þetta er lögleg uppsetning skv. reglunum sem ég benti á í b) en hins vegar getur þetta ekki birst í vigtuðu *Quick-union* því við sjáum að dýpt fylkisins er 3 en $\log_2(7) \approx 2.8$. Þetta má ekki því dýpt vigtaðs *Quick-union* má ekki vera meiri en $\log_2(N)$ þar sem N er fjöldi staka.

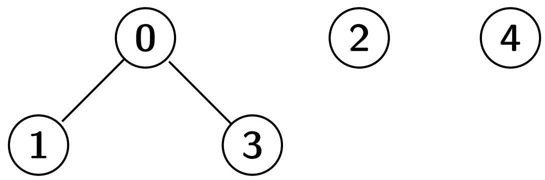
5

Við byrjum með $0,1,2,3,4$ og fáum:

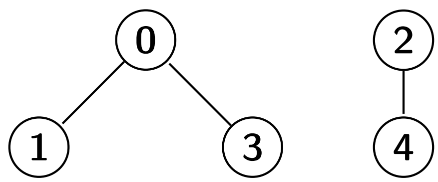
Síðan gerist $union(0,1)$ og fæst þá:



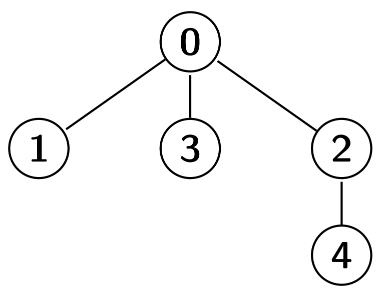
Næst gerist *union*$(3,1)$ og þar sem við erum að nota vigtað *Quick-union* þá finnum við rót 1 sem er 0 og þar sem 0 tréð er þyngra en 3 þá tengist 3 beint við rótina:



Síðan *union*$(2,4)$:



Og loks *union*$(4,1)$ sem finnur rætur beggja stakanna, sem eru þá 0 og 2, og við sjáum að þar sem 2 er léttari þá sameinast 2 við 0 og til að minnka dýpt þá tengist 4 einnig við 0 og við fáum:



Að lokum fæst þá *id*-ið $0,0,0,0,2$.