VŨ HỮU BÌNH

9 CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC

TRUNG HỌC CƠ SỞ

- **Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 6, 7, 8, 9**
- **Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên Toán**

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

VŨ HỮU BÌNH

9 CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC

TRUNG HỌC CƠ SỞ

- Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 6, 7, 8, 9
- Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên Toán

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Cuốn sách ***9 CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC TRUNG HỌC CƠ SỞ*** *giúp các em học sinh các lớp 6, 7, 8, 9 thi học sinh giỏi và thi vào lớp 10 chuyên Toán.*

Trong rất nhiều chuyên đề về Hình học ở Trung học cơ sở, chúng tôi chọn lọc những chuyên đề thường gặp nhất trong các kì thi nói trên, hệ thống các phương pháp giải với các ví dụ minh họa và các bài luyện tập được phân chia theo từng dạng toán. Với các chuyên đề khác về Hình học không được đề cập đến trong cuốn sách này, các em có thể tham khảo trong các cuốn sách ***Nâng cao và phát triển Toán*** *các lớp 6, 7, 8, 9 ;* ***Các bài toán Hình học tổ hợp ; Tìm cách giải bài toán Hình học cấp Trung học cơ sở*** *của cùng tác giả.*

Các bài toán được chọn lọc trong cuốn sách này có những đặc điểm sau :

– ***Là các bài toán mới****, chúng ít xuất hiện hoặc chưa xuất hiện trong các cuốn sách đã được xuất bản.*

– ***Có độ khó vừa đủ*** *phục vụ cho yêu cầu chọn học sinh giỏi và chọn học sinh vào lớp 10 chuyên Toán.*

– ***Có nhiều tình huống*** *đòi hỏi các em phải vận dụng kiến thức một cách thích hợp, sáng tạo để giải quyết.*

– ***Lời giải được chọn lọc*** *để vừa rõ ràng dễ hiểu, vừa ngắn gọn cô đọng.*

Trong sách có những bài tập khó, nhưng cách giải các bài tập đó đều hợp lí với mạch tư duy sáng sủa, điều đó giúp các em rèn luyện phương pháp và trau dồi tư duy. Với mỗi bài toán trong cuốn sách này, các em nên dành thời gian tìm hiểu vì sao đã giải được (hoặc không giải được) bài toán ấy, từ đó rút ra những kinh nghiệm về phương pháp giải quyết vấn đề, điều đó không chỉ có ích trong học Toán mà còn cần thiết trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Các bài toán trong cuốn sách này như những đỉnh cao trong học Toán. Các em hãy tập chinh phục những đỉnh cao ấy để sau này chinh phục được những đỉnh cao khác, cao hơn.

Cuốn sách này cũng là một tài liệu thiết thực cho các thầy, cô giáo bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán, các cán bộ chỉ đạo môn Toán và các bậc cha mẹ học sinh quan tâm đến việc bồi dưỡng năng lực toán học cho con em.

Tác giả cảm ơn bạn đọc đã sử dụng cuốn sách này và mong nhận được những góp ý của bạn đọc cho cuốn sách.

Tác giả mong muốn rằng

Chín chuyên đề Hình học
Giúp tư duy trau dồi
Cung cấp cho bạn đọc
Thêm hành trang vào đời.

VŨ HỮU BÌNH

Chuyên đề 1
TAM GIÁC - TỨ GIÁC - ĐA GIÁC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

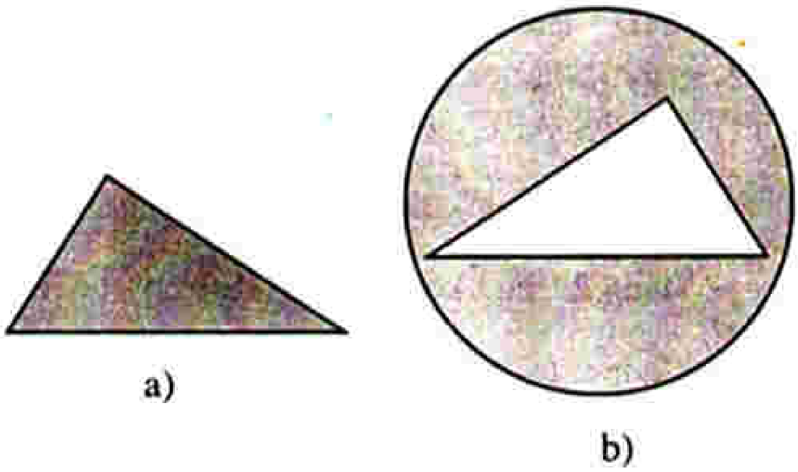
Các hình tam giác, tứ giác được biết đến từ các lớp dưới. Với những kiến thức hình học của lớp 7, lớp 8, chúng ta sẽ phát hiện ra rất nhiều tính chất thú vị về độ dài, về góc, về tính song song, vuông góc, thẳng hàng,... từ những hình tưởng như đơn giản.

Các bài toán trong chuyên đề này gồm đủ các dạng như : tính toán, chứng minh, dựng hình, tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất. Chúng thường đòi hỏi phải vẽ thêm đường phụ, điều đó sẽ mang đến cho chúng ta nhiều cảm hứng và lợi ích trong giải toán.

Bài toán vui

Ở CỬA HÀNG ĐỒ DA

Do có ít khách hàng, một ông chủ cửa hàng đồ da đã nghĩ ra một cách quảng cáo khéo léo. Ông treo hai miếng da trước cửa hàng (h.1) trong đó miếng da bên trái có hình tam giác (h.1a), miếng da bên phải hình tròn có một lỗ hổng mà nếu lật ngược tấm da bên trái xếp vào lỗ hổng thì vừa khít (h.1b).



Hình 1

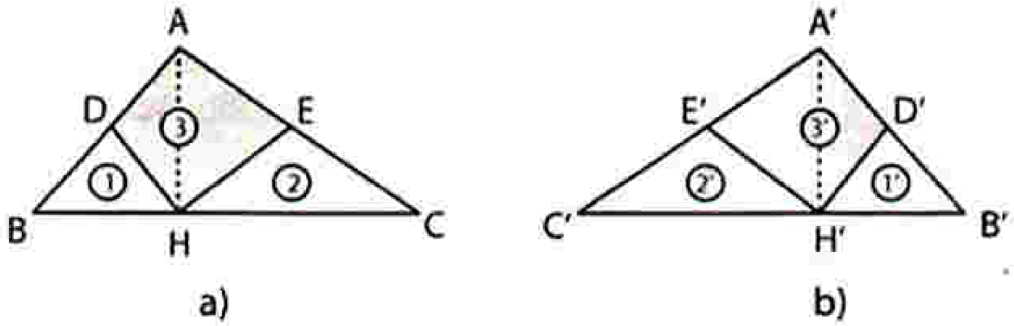
Bên cạnh hai tấm da, ông chủ cửa hàng đặt một tấm bảng ghi dòng chữ : "Quý khách nào cắt được miếng da bên trái thành ba mảnh rồi ghép kín lỗ hổng của tấm da bên phải (mà không phải lật ngược) thì khi mua bất cứ thứ hàng nào của cửa hàng cũng chỉ phải trả nửa tiền".

Ngay lập tức, có nhiều khách đến cửa hàng và đã có người làm được. Còn bạn, bạn hãy đưa ra cách làm của mình.

Theo Xem Lôi-đơ (*Sam Loyd*, Mĩ)

Giải

Các tam giác ABC và A'B'C' (h.2) tuy bằng nhau nhưng nếu muốn đặt trùng khít nhau thì $\triangle$ ABC phải lật lại (đưa mặt trên xuống dưới, đưa mặt dưới lên trên).



Hình 2

Nhưng nếu hai hình bằng nhau là tam giác cân (tổng quát, hình có trục đối xứng) thì không cần lật lại một hình vẫn đặt được trùng khớp với hình kia.

Do đó, ta làm như sau : Ở miếng da hình tam giác (h.2a), gọi H là hình chiếu của A trên BC, gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Cắt miếng da đó theo HD và HE, miếng da được chia thành ba mảnh : mảnh 1 là tam giác cân DBH, mảnh 2 là tam giác cân EHC, mảnh 3 là tứ giác ADHE (gồm hai tam giác cân là ADH và AEH). Không cần lật lại, ta ghép được :

– Mảnh 1 trùng khít phần 1' (D trùng D', B trùng H', H trùng B').

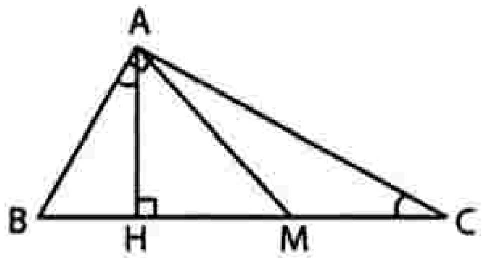
– Mảnh 2 trùng khít phần 2' (E trùng E', H trùng C', C trùng H').

– Mảnh 3 trùng khít phần 3' (A trùng H', D trùng D', H trùng A', E trùng E').

I. TAM GIÁC

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\hat{B} = 60^\circ$, điểm M thuộc cạnh BC cùng với điểm A chia chu vi tam giác ABC thành hai phần bằng nhau (tức là AB + BM = AC + CM). Tính góc AMB.

Giải (h.3)



Hình 3

Kẻ AH ⊥ BC. Đặt BH = 1. Do $\hat{B} = 60^\circ$ nên $\widehat{BAH} = \hat{C} = 30^\circ$. Áp dụng bổ đề : Trong tam giác vuông có góc nhọn 30°, cạnh đối diện với góc đó bằng nửa cạnh huyền vào các tam giác vuông ABH, ABC, AHC được AB = 2BH = 2, BC = 2AB = 4, AC = 2AH.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào $\triangle AHB$ ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 2^2 - 1 = 3$

$\Rightarrow AH = \sqrt{3} \Rightarrow AC = 2AH = 2\sqrt{3}$.

Chu vi $\triangle ABC$ bằng $AB + BC + CA = 2 + 4 + 2\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB + BM = (6 + 2\sqrt{3}) : 2 = 3 + \sqrt{3}$

$\Rightarrow BM = 3 + \sqrt{3} - AB = 3 + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}$

$\Rightarrow HM = BM - BH = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} = AH$.

Tam giác AHM vuông cân nên $\widehat{AMH} = 45^\circ$, tức là $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

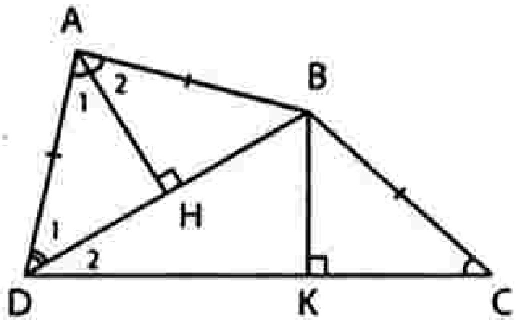
II. TỨ GIÁC

Các tứ giác được nghiên cứu trong chuyên đề này là các tứ giác lồi, chúng có tính chất : tổng các góc trong bằng 360°.

Cần nắm vững định nghĩa, tính chất, dấu hiệu nhận biết của các tứ giác đặc biệt : hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông.

Ví dụ 2. Cho tứ giác ABCD có AB = BC = AD, $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$. Tính các góc B và D.

Giải (h.4)



Hình 4

$\triangle ADB$ cân tại A, $\hat{A} = 80^\circ$ nên

$\hat{D}_1 = (180^\circ - 80^\circ) : 2 = 50^\circ$.

Kẻ AH ⊥ BD, BK ⊥ CD. Ta có $\hat{K} = \hat{H} = 90^\circ$, BC = AD (giả thiết), $\hat{C} = \hat{A}_1 = 40^\circ$ nên $\triangle CKB = \triangle AHD$ (cạnh huyền - góc nhọn) ⇒ BK = DH = HB.

Tam giác vuông BKD có $BK = \frac{1}{2}BD$ nên $\hat{D}_2 = 30^\circ$. Suy ra

$\hat{D} = \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$. Do đó $\hat{B} = 360^\circ - (80^\circ + 80^\circ + 40^\circ) = 160^\circ$.

Ví dụ 3. (Bổ đề nhận biết hai đường chéo vuông góc)

Cho tứ giác ABCD có tổng bình phương các cạnh đối bằng nhau ($AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$). Chứng minh rằng AC vuông góc với BD.

Giải (h.5)

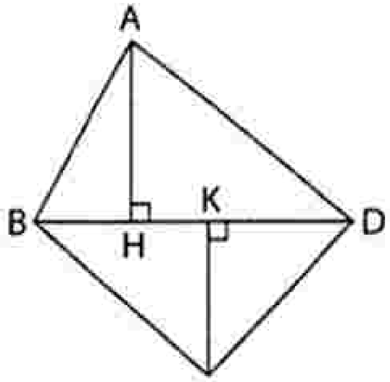
Giả sử AC không vuông góc với BD. Kẻ $AH \perp BD$, $CK \perp BD$, giả sử H nằm giữa B và K. Từ giả thiết suy ra $AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$

$$\Rightarrow (AB^2 - AH^2) - (AD^2 - AH^2)$$

$$= (BC^2 - CK^2) - (CD^2 - CK^2)$$

$$\Rightarrow HB^2 - HD^2 = BK^2 - DK^2$$

$$\Rightarrow HB^2 - BK^2 = HD^2 - DK^2.$$



Hình 5

Đẳng thức trên sai, vì vế trái âm, vế phải dương. Vậy AC vuông góc với BD.

Lưu ý : Bổ đề trên cũng đúng trong trường hợp điểm C nằm trên đoạn thẳng BD. Chứng minh tương tự như trên.

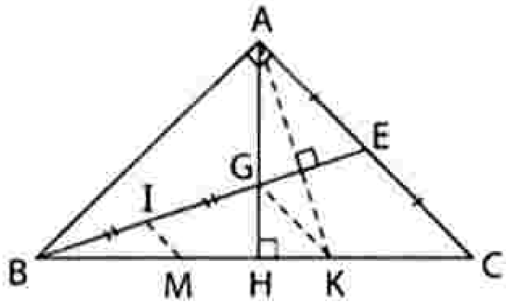
Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BE. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BE cắt BC ở K. Chứng minh rằng BK = 2KC.

Giải (h.6)

Kẻ $AH \perp BC$, cắt BE ở G. Ta có G là trực tâm của ΔABK nên $KG \perp AB$. Ta lại có $CA \perp AB$ nên KG // CA.

Gọi I là trung điểm của BG. Do G là trọng tâm của ΔABC nên BI = IG = GE.

Kẻ IM // GK ($M \in BC$). Do IM // GK // EC nên BM = MK = KC (tính chất đường song song cách đều).



Hình 6

Vậy BK = 2KC.

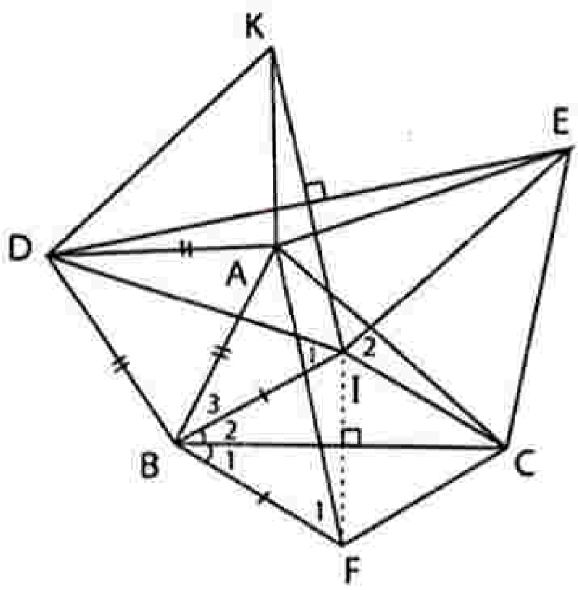
Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác đều ABD, ACE và tam giác cân BCF có $\hat{F} = 120^o$.

a) Gọi I là điểm đối xứng với F qua BC, gọi K là điểm đối xứng với I qua DE. Chứng minh rằng tam giác DIE cân có $\hat{I} = 120^o$.

b) Tam giác DIK là tam giác gì ?

c) Chứng minh rằng AKIF là hình bình hành và AF vuông góc với DE.

Giải (h.7, hình vẽ và chứng minh ứng với $\widehat{ABC} > 30^o, \widehat{ACB} > 30^o$; các trường hợp khác tương tự).



Hình 7

a) I đối xứng với F qua BC

$\Rightarrow BI = BF,\ \hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 30^o.$

$\triangle DBI$ và $\triangle ABF$ có $DB = AB$,

$\widehat{DBI} = \widehat{ABF}\ (= 60^o + \hat{B}_3),\ BI = BF.$

Do đó $\triangle DBI = \triangle ABF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{F}_1,\ DI = AF.$

Tương tự $\hat{I}_2 = \widehat{AFC},\ EI = AF.$

Suy ra $DI = EI$. (1)

$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{F}_1 + \widehat{AFC} = \widehat{BFC} = 120^o$

$\widehat{DIE} = 360^o - (\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \widehat{BIC}) = 360^o - (120^o + 120^o) = 120^o.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DIE$ cân có $\hat{I} = 120^o$.

b) $\triangle DIE$ cân có $\hat{I} = 120^o$ nên $\widehat{IDE} = 30^o$. K đối xứng với I qua DE nên $DK = DI$ và $\widehat{IDK} = 2\widehat{IDE} = 2.30^o = 60^o$. Suy ra $\triangle DIK$ đều.

c) $\triangle DIK$ đều $\Rightarrow IK = DI$ mà $DI = AF$ nên $IK = AF$. (3)

$\triangle DAK = \triangle DBI$ (c.g.c) $\Rightarrow AK = BI$ mà $BI = IF$ nên $AK = IF$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra AKIF là hình bình hành $\Rightarrow AF \parallel IK$.

Ta lại có $IK \perp DE$ nên $AF \perp DE$.

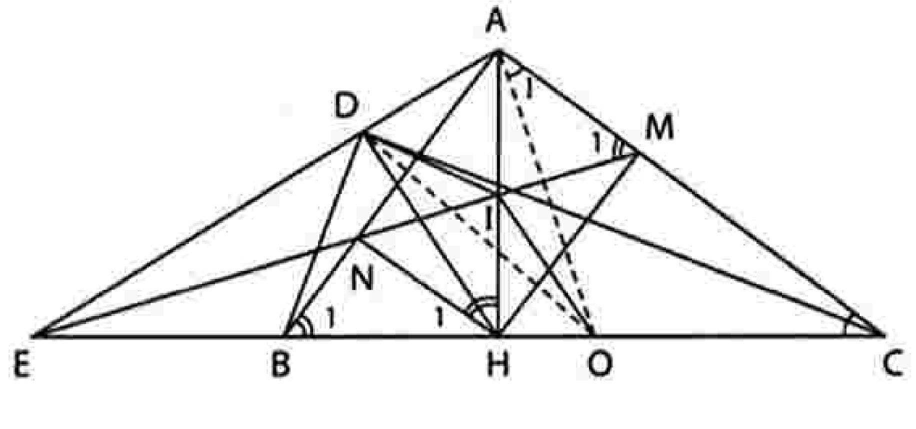
Ví dụ 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AC, AB. Đường thẳng MN cắt AH tại I và cắt CB tại E. Gọi O là trung điểm của BC. Kẻ HD vuông góc với AE ($D \in AE$). Chứng minh rằng :

a) I là trực tâm của tam giác AOE; b) $\widehat{BDC} = 90^\circ$.

Giải (h.8)

a) Tứ giác AMHN là hình chữ nhật nên $\widehat{M}_1 = \widehat{AHN}$.

Ta lại có $\widehat{AHN} = \widehat{B}_1$ (cùng phụ $\widehat{H}_1$) nên $\widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$. (1)



Hình 8

Do OA = OC nên $\widehat{A}_1 = \widehat{ACB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{M}_1 + \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 + \widehat{ACB} = 90^\circ$, suy ra $EM \perp OA$.

Tam giác AOE có $EM \perp OA$, $AH \perp OE$ nên I là trực tâm.

b) Từ câu a), suy ra $OI \perp AD$. (3)

$\triangle ADH$ vuông tại D có DI là đường trung tuyến nên IA = ID. (4)

Từ (3) và (4) suy ra OI là đường trung trực của AD, do đó OA = OD.

Tam giác BDC có OD = OA = OB = OC nên $\widehat{BDC} = 90^\circ$.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = \alpha < 60^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho CD = CB. Gọi E điểm đối xứng với B qua AC. Gọi F là giao điểm của DE và AC.

a) Chứng minh rằng BFEC là hình thoi.

b) Tính các góc của hình thoi đó theo α.

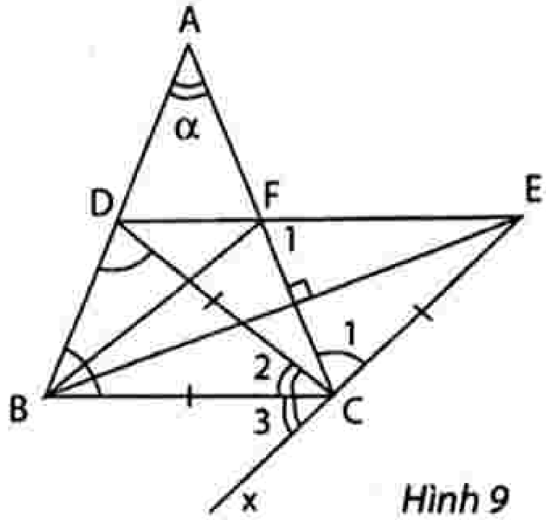
Giải (h.9)

a) Do E đối xứng với B qua AC nên

EC = BC và EF = BF. (1)

Để chứng minh BFEC là hình thoi, ta sẽ chứng minh EC = EF.

Đặt $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \beta$ thì $\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Gọi Cx là tia đối của tia CE. Do E đối xứng với B qua AC nên $\hat{C}_1 = \widehat{ACB} = \beta$, suy ra $\hat{C}_3 = 180^\circ - 2\beta = \alpha$. (2)



Hình 9

$\triangle CBD$ cân có góc đáy $\widehat{CBD} = \beta$ nên $\hat{C}_2 = 180^\circ - 2\beta = \alpha$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\hat{C}_2 = \hat{C}_3$ nên $\widehat{DCx} = 2\alpha$. (4)

Ta có CD = CB = CE nên $\triangle DCE$ cân tại C, suy ra $\widehat{DCx} = 2\widehat{CED}$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{CED} = \alpha$. Tam giác ECF có $\hat{E} = \alpha, \hat{C}_1 = \beta$ nên $\hat{F}_1 = \beta$, suy ra $\hat{C}_1 = \hat{F}_1$, do đó EC = EF. (6)

Từ (1) và (6) suy ra BC = EC = EF = BF nên tứ giác BFEC là hình thoi.

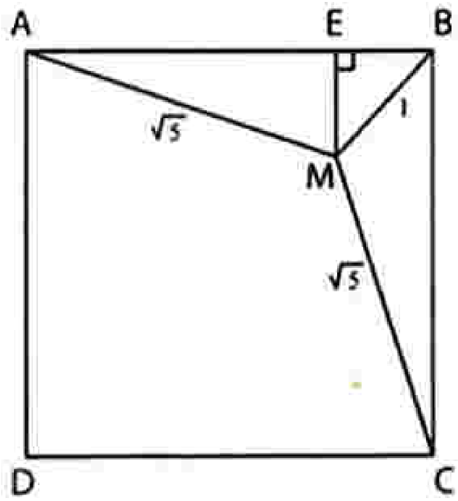
b) Hình thoi BFEC có $\widehat{CEF} = \alpha$ nên $\widehat{CBF} = \alpha$, $\widehat{BFE} = \widehat{BCE} = 180^\circ - \alpha$.

Ví dụ 8. Tính độ dài cạnh của hình vuông ABCD, biết rằng có điểm M nằm trong hình vuông thỏa mãn MB = 1cm, MA = MC = $\sqrt{5}$ cm.

Giải (h.10)

$\triangle MAB = \triangle MCB$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MBC} = 45^\circ$.

Kẻ ME ⊥ AB (E ∈ AB), suy ra $\triangle MEB$ vuông cân tại E nên $ME = EB = \dfrac{MB}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (cm). (1)



Hình 10

$\triangle AEM$ vuông tại E

$$\Rightarrow AE^2 = MA^2 - ME^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ (cm)}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB = AE + EB = \dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (cm).

Ví dụ 9. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, các điểm E, F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA. Tính chu vi nhỏ nhất của tứ giác EFGH.

Giải (h.11)

Đặt EH = a, EF = b, FG = c, GH = d, AH = m, AE = n.

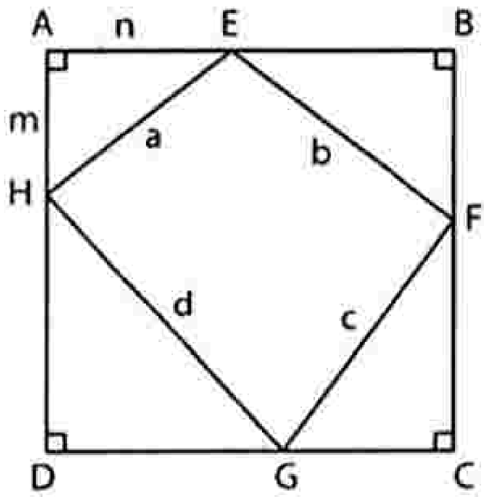
Ta có $a^2 = m^2 + n^2 \geq \dfrac{(m+n)^2}{2}$

$\Rightarrow a \geq \dfrac{m+n}{\sqrt{2}} \Rightarrow a\sqrt{2} \geq AH + AE.$

Tương tự ta có $b\sqrt{2} \geq BE + BF$,

$c\sqrt{2} \geq CF + CG$, $d\sqrt{2} \geq DG + DH$.

Suy ra $(a + b + c + d)\sqrt{2} \geq AB + BC + CD + DA = 4 \Rightarrow a + b + c + d \geq 2\sqrt{2}$.



Hình 11

Chu vi nhỏ nhất của tứ giác EFGH bằng $2\sqrt{2}$ khi và chỉ khi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh của hình vuông ABCD.

III. ĐA GIÁC

1. Các đa giác được nghiên cứu trong chuyên đề này là các đa giác lồi, chúng có tính chất : tổng các góc trong của đa giác n cạnh bằng $(n-2)180^\circ$.

2. Đa giác đều là đa giác có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau. Mỗi góc trong của đa giác đều n cạnh bằng $\dfrac{(n-2)180^\circ}{n}$.

Ví dụ 10. Tìm giá trị của n sao cho các đa giác đều n cạnh, n + 1 cạnh, n + 2 cạnh, n + 3 cạnh đều có số đo mỗi góc là một số nguyên độ.

Giải

Ta có $\dfrac{(n-2)180}{n}$ là một số nguyên nên $(n-2)180 \,\vdots\, n \Leftrightarrow 360 \,\vdots\, n \quad (n \geq 3)$.

Do $360 = 2^3.3^2.5$ nên 360 có 24 ước tự nhiên, trong đó có 22 ước tự nhiên khác 1 và 2 là : 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360. Trong các số trên, có bốn số tự nhiên liên tiếp là 3, 4, 5, 6. Vậy giá trị phải tìm của n là 3 (các đa giác đều có 3, 4, 5, 6 cạnh có số đo mỗi góc bằng 60°, 90°, 108°, 120°).

BÀI TẬP

Tam giác

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB < AC < 2AB. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho CD = AB. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE = AD. Gọi I là giao điểm của BD và CE. Tính góc CID.

Tứ giác - Hình thang

2. Cho tứ giác ABCD có $\widehat{A} = 60^o$, AB = AD, $\widehat{B} = 75^o$, $\widehat{D} = 90^o$. Gọi G là giao điểm của BC và AD, E là giao điểm của tia phân giác góc A với BC. Chứng minh rằng :

   a) AB = AE;   b) BC = EG.

3. Cho tam giác ABC. Ở phía ngoài của tam giác đó, vẽ các tam giác cân ABD đáy AB, BCE đáy BC, ACF đáy AC. Kẻ AH vuông góc với DF ($H \in DF$), kẻ BI vuông góc với DE ($I \in DE$), AH và BI cắt nhau tại O. Chứng minh rằng OC vuông góc với EF.

   Hướng dẫn : Sử dụng bổ đề ở Ví dụ 3.

4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm H thuộc cạnh AC. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BH cắt BC ở D. Lấy điểm E thuộc đoạn DB sao cho DE = DC. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với BH cắt AB ở K. Chứng minh rằng AK = AH.

5. Cho tam giác ABC có BC = a, nửa chu vi bằng p, đường cao AH. Chứng minh rằng $AH^2 \le p(p - a)$.

Hình bình hành

6. Cho hình bình hành ABCD, M là trung điểm của BC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến DM. Chứng minh rằng BA = BH.

7. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^o$. Ở phía ngoài tam giác đó vẽ các tam giác vuông cân ABD có cạnh huyền AB và ACE có cạnh huyền AC. Vẽ hình bình hành ADKE. Tam giác BKC là tam giác gì ?

8. Cho hình thang ABCD (AB // CD), AB < CD. Gọi E, F, M theo thứ tự là trung điểm của BD, AC, CD. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua E và vuông góc với AD, đi qua F và vuông góc với BC, đi qua M và vuông góc với CD đồng quy.

9. Cho tam giác ABC và đường trung tuyến AM có AB = 5 cm, AC = 13 cm, AM = 6 cm. Gọi d_1 và d_2 theo thứ tự là các đường vuông góc với BC tại B và tại C. Gọi D là giao điểm của AM và d_1, gọi E là giao điểm của AB và d_2. Chứng minh rằng CD vuông góc với ME.

10. Cho hình bình hành ABCD, các đường chéo cắt nhau tại O. Đặt OA = OC = m, OB = OD = n. Chứng minh rằng :

a) $AB^2 + AD^2 = 2m^2 + 2n^2$;

b) Tổng bình phương các cạnh của hình bình hành bằng tổng bình phương các đường chéo.

11. Dựng tam giác ABC biết vị trí ba điểm B, H, M trong đó H là trực tâm, M là trung điểm của AC.

Hình chữ nhật

12. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm D trên cạnh BC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AD. Trên tia đối của tia HB lấy điểm E sao cho HE = AH. Chứng minh rằng $\widehat{HEC} = 90^o$.

13. Cho đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB. Trên đoạn thẳng AB lấy các điểm C và D sao cho AC = BD. Gọi E là một điểm thuộc tia Ax (E khác A). Đường vuông góc với EC tại C cắt By ở K. Tính góc EDK.

14. Cho hình chữ nhật ABCD có E là trung điểm của AB, F là trung điểm của BC. Đặt $\widehat{EDF} = \alpha$. Gọi I là giao điểm của AF và EC. Tính góc AIE theo α.

15. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = AB. Gọi I là trung điểm của BE. Tính góc AHI.

16. Cho góc vuông xOy và điểm A nằm trong góc vuông đó. Gọi M là điểm chuyển động trên tia Ox. Đường vuông góc với AM tại A cắt tia Oy ở N. Tìm vị trí của điểm M để độ dài MN nhỏ nhất.

17. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = h. Gọi I là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Gọi D, E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ I đến BC, AC, AB. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng $ID^2 + IE^2 + IF^2$ theo h.

Hình thoi - Hình vuông

18. Tính cạnh của hình thoi biết một đường chéo bằng 15 cm và chiều cao bằng 12 cm.

19. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh AD, điểm F thuộc tia đối của tia CD sao cho CF = AE. Gọi I là giao điểm của EF và AC. Chứng minh rằng BI vuông góc với EF.

20. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy E thuộc cạnh AB, K thuộc cạnh CD sao cho $AE < \frac{a}{2}, CK < \frac{a}{2}$. Lấy G thuộc cạnh AD sao cho $\widehat{KEG} = \widehat{KEB}$. Đường thẳng đi qua K và song song với GE cắt BC ở H. Gọi O là giao điểm của GH và EK. Chứng minh rằng $\widehat{EOG} = 45^o$.

Hướng dẫn : Qua K kẻ đường thẳng song song với HG, cắt EG ở M, chứng minh rằng $\widehat{EKM} = 45^o$.

21. Cho hình vuông ABCD cạnh a, điểm E thuộc cạnh BC, điểm F thuộc cạnh CD sao cho $\widehat{EAF} = 45^o$. Tính độ dài lớn nhất của EF.

22. Tính chu vi nhỏ nhất của tứ giác ABCD biết hai đường chéo vuông góc và có tổng bằng k.

Đa giác

23. Tính các góc của một đa giác có số đo các góc tăng đều từ 90^o đến 126^o.

24. Cho hai đa giác đều, đa giác M có x cạnh, số đo mỗi góc là m, đa giác N có y cạnh, số đo mỗi góc là n. Tính x và y, biết rằng :

a) $\frac{m}{n} = \frac{2}{5}$;　　　　b) $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

Chuyên đề 2

DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Các bài toán trong chuyên đề này bao gồm nhiều dạng :

– *Dạng 1.* Tính toán và chứng minh liên quan đến diện tích các hình : chữ nhật, vuông, thang, bình hành, thoi, tam giác, tứ giác.

– *Dạng 2.* Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của diện tích các hình.

– *Dạng 3.* Sử dụng diện tích để chứng minh các quan hệ về độ dài.

Bài toán thực tế

CHIA BÁNH

Tám bạn học sinh cần chia đều một chiếc bánh ga-tô thành tám phần, chiếc bánh có mặt trên và mặt dưới là hai hình lục giác đều giống nhau.

Bạn Thành tìm ra cách chia bằng bốn nhát cắt thẳng đi qua tâm của chiếc bánh. Bạn Mai lại tìm ra cách chia chiếc bánh thành tám hình thang cân.

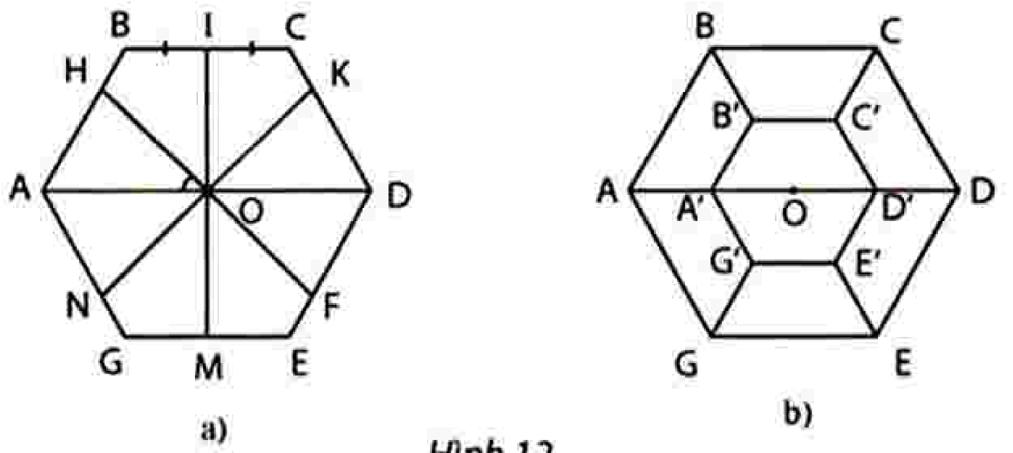
Các bạn đó đã chia chiếc bánh như thế nào ?

Giải

Bạn Thành cắt chiếc bánh như hình 12a bằng bốn nhát cắt là AD, HF, IM, KN.

Giải thích : Lục giác đều có 6 cạnh, chia thành 8 phần nên mỗi phần chứa $\frac{3}{4}$ cạnh (trên hình 12a có $AH = \frac{3}{4}AB$, $KD = \frac{3}{4}CD$, $BI = IC$). Do $AH = HB + BI$ nên $S_{OAH} = S_{OHBI}$.

(Lưu ý rằng các góc AOH và HOI không bằng nhau, dễ chứng minh $\widehat{AOH} > \widehat{HOI}$).



Hình 12

Bạn Mai cắt chiếc bánh như hình 12b, trong đó O là tâm của lục giác đều, các điểm A', B', C', D', E', G' theo thứ tự là trung điểm của OA, OB, OC, OD, OE, OG.

I. DIỆN TÍCH HÌNH VUÔNG, HÌNH CHỮ NHẬT, HÌNH THANG, HÌNH BÌNH HÀNH, HÌNH THOI

Cần nắm vững công thức tính diện tích các hình nói trên. Có thể tính diện tích hình thoi theo hai cách (tính theo đáy và chiều cao tương ứng hoặc tính theo các đường chéo).

Ví dụ 11. Trong các tam giác ABC vuông tại A có BC = 2a, đường cao AH, tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật ADHE ($D \in AC$, $E \in AB$).

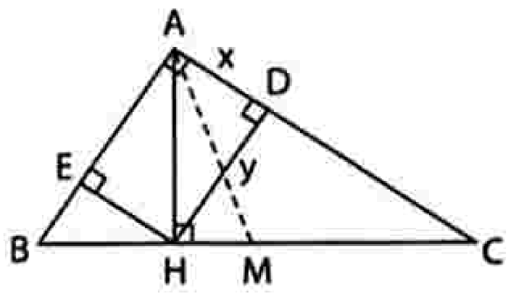
Giải (h.13)

Đặt AD = x, DH = y. Gọi M là trung điểm của BC, ta có

$$S_{ADHE} = xy \le \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{AH^2}{2} \le \frac{AM^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

$\max S = \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow$ H trùng M

$\Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông cân tại A.



Hình 13

Ví dụ 12. Tính diện tích hình thang vuông ABCD có đáy nhỏ AB bằng đường cao, đáy lớn CD = 23cm, cạnh bên lớn BC = 17cm.

Giải

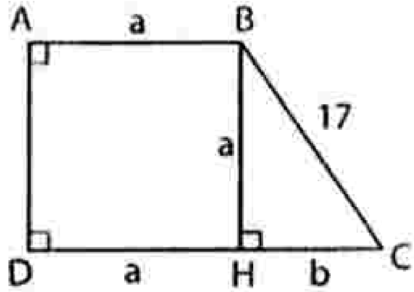
Kẻ BH ⊥ CD. Đặt BH = AB = HD = a, HC = b.

Ta có $a + b = 23$, $a^2 + b^2 = 17^2 = 289$ nên

$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 23^2 - 289 = 240$,

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 289 - 240 = 49$

$\Rightarrow |a - b| = 7$.



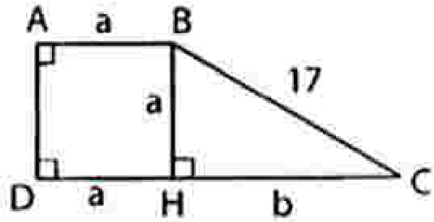
Hình 14

Xét hai trường hợp :

- *Trường hợp* $a - b = 7$ (h.14).

Từ $a + b = 23$ và $a - b = 7$ suy ra $a = 15$, $b = 8$.

$S_{ABCD} = (15 + 23).15 : 2 = 285\ (cm^2)$.



Hình 15

- *Trường hợp* $b - a = 7$ (h.15).

Từ $a + b = 23$ và $b - a = 7$ suy ra $a = 8$, $b = 15$.

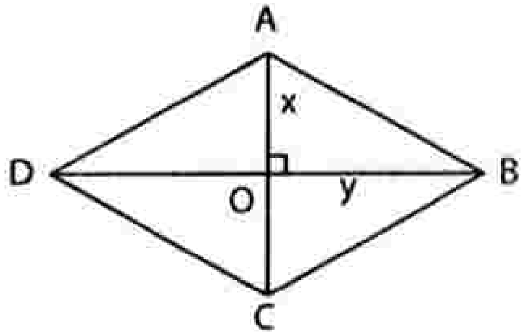
$S_{ABCD} = (8 + 23).8 : 2 = 124\ (cm^2)$.

Ví dụ 13. Hình thoi ABCD có tổng hai đường chéo bằng m.

a) Biết cạnh của hình thoi bằng a, tính diện tích hình thoi.

b) Tính diện tích lớn nhất của hình thoi.

Giải (h.16)



Hình 16

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Đặt OA = x, OB = y. Ta có :

$OA + OB = \dfrac{AC + BD}{2}$ nên $x + y = \dfrac{m}{2}$.

a) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}.2x.2y = 2xy$

$= (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = \dfrac{m^2}{4} - a^2$.

b) $S_{ABCD} = 2xy \le \dfrac{(x + y)^2}{2} = \dfrac{\left(\dfrac{m}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{m^2}{8}$; $\max S = \dfrac{m^2}{8} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{m}{4}$.

II. DIỆN TÍCH TAM GIÁC, TỨ GIÁC, ĐA GIÁC

Khi tính diện tích của một tam giác, ngoài cách dùng công thức, ta còn dùng cách so sánh diện tích của hai tam giác. Cần chú ý đến một số cách so sánh diện tích của hai tam giác :

– Hai tam giác có một đường cao bằng nhau : Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có các đường cao AH và A'H' bằng nhau thì $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

– Hai tam giác có một cạnh bằng nhau : Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có $BC = B'C'$, AH và A'H' là các đường cao thì $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{A'H'}{AH}$.

– Hai tam giác có một góc bằng nhau (xem Ví dụ 14).

Ví dụ 14. (Bổ đề về hai tam giác có một góc bằng nhau)

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC và tam giác A'B'C' có $\widehat{A} = \widehat{A'}$ thì $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$.

Giải (h.17)

Trên tia AB lấy D sao cho AD = A'B', trên tia AC lấy E sao cho AE = A'C'.

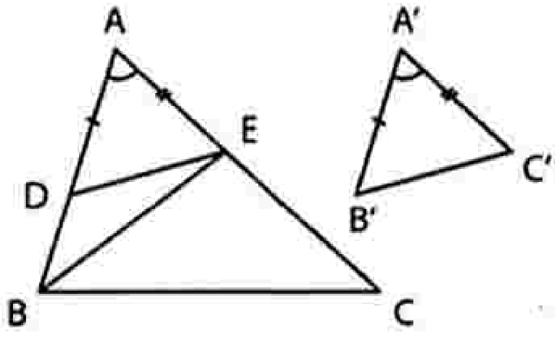
$\triangle A'B'C' = \triangle ADE$ (c.g.c)

$\Rightarrow S_{A'B'C'} = S_{ADE}$. (1)

Ta lại có $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABE}} = \dfrac{AD}{AB}$ và $\dfrac{S_{ABE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AE}{AC}$

nên $\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \dfrac{AD}{AB}.\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$. (2)

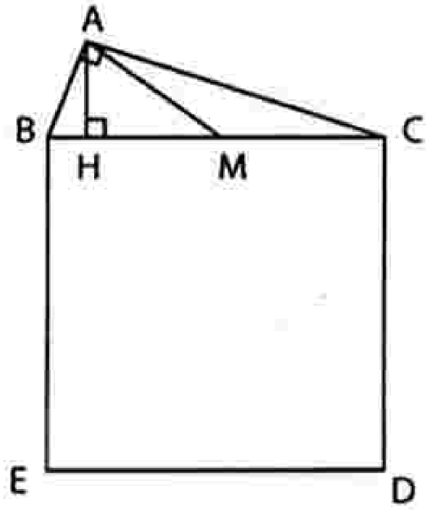
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{A'B'.A'C'}{AB.AC}$.



Hình 17

Ví dụ 15. Tính các góc của một tam giác vuông, biết rằng diện tích tam giác đó bằng $\frac{1}{8}$ diện tích hình vuông có cạnh là cạnh huyền.

Giải (h.18)



Hình 18

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $\hat{B} \geq \hat{C}$ và hình vuông BCDE. Kẻ đường cao AH, trung tuyến AM. Ta có $\frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{8}BC^2$

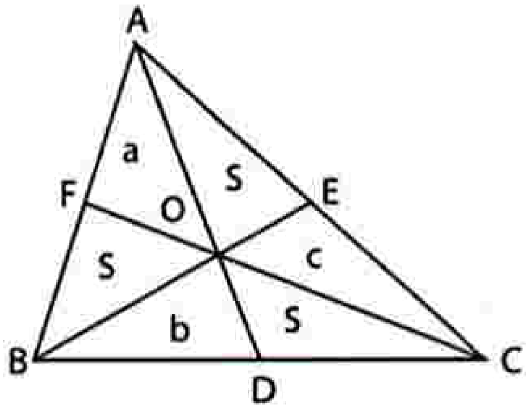
$\Rightarrow AH = \frac{1}{4}BC \Rightarrow AH = \frac{1}{2}AM$

$\Rightarrow \widehat{AMH} = 30^o \Rightarrow \widehat{ACB} = 15^o.$

Tam giác vuông ABC có các góc nhọn 15^o và 75^o.

Ví dụ 16. Trên hình 19, tam giác ABC được chia thành sáu tam giác nhỏ bởi ba đoạn thẳng đồng quy tại O, trong đó có ba tam giác có diện tích bằng nhau và bằng S, ba tam giác còn lại có diện tích bằng a, b, c. Chứng minh rằng a = b = c = S.

Giải (h.19)



Hình 19

Giả sử $a \geq b \geq c$ (1)

Ta có $\frac{S_{DOB}}{S_{AOB}} = \frac{DO}{AO} = \frac{S_{DOC}}{S_{AOC}}$

$\Rightarrow \frac{b}{a+S} = \frac{S}{c+S} \Rightarrow b = S.\frac{a+S}{c+S}$

Do $a \geq c$ nên $b \geq S$. (2)

$\frac{S_{FOA}}{S_{COA}} = \frac{FO}{CO} = \frac{S_{FOB}}{S_{COB}} \Rightarrow \frac{a}{c+S} = \frac{S}{b+S}$

$\Rightarrow a = S.\frac{c+S}{b+S}$. Do $c \leq b$ nên $a \leq S$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $S \geq a \geq b \geq S$ nên a = b = S.

Chứng minh tương tự a = c = S nên a = b = c = S.

Ví dụ 17. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c, I là giao điểm các đường phân giác, G là trọng tâm thỏa mãn $\widehat{AIG} = 90^o$.

a) Gọi r là khoảng cách từ I đến AB, AC. Gọi m, n lần lượt là khoảng cách từ G đến AB, AC. Chứng minh rằng m + n = 2r.

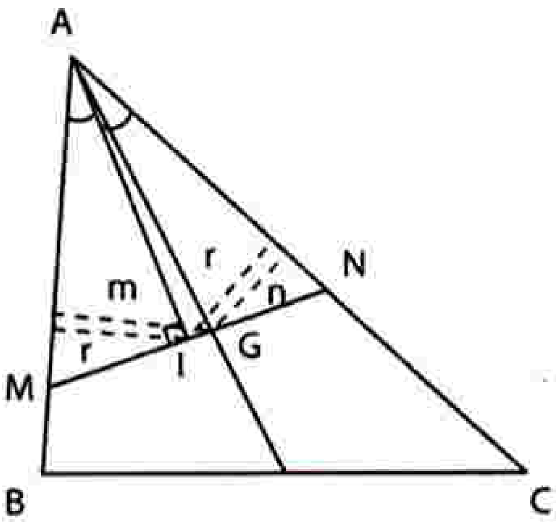
b) Chứng minh rằng $a + b + c = \dfrac{6bc}{b+c}$.

Giải

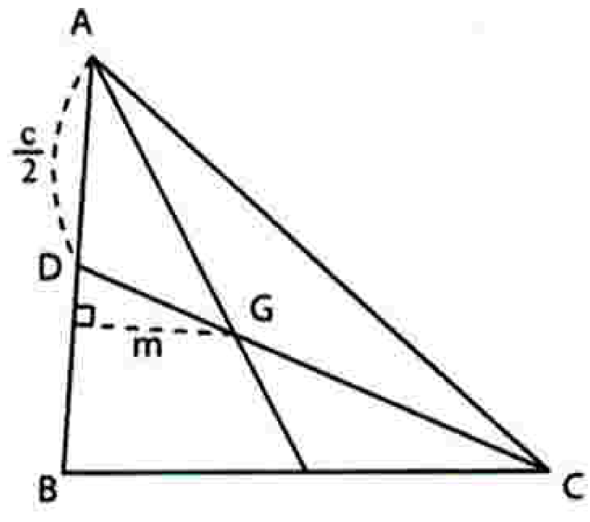
a) (h.20) Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của IG với AB, AC. Ta có

$$S_{AGM} + S_{AGN} = S_{AMN} = S_{AIM} + S_{AIN} \Rightarrow \frac{1}{2}AM.m + \frac{1}{2}AN.n = \frac{1}{2}AM.r + \frac{1}{2}AN.r.$$

Do AM = AN nên m + n = 2r.



Hình 20



Hình 21

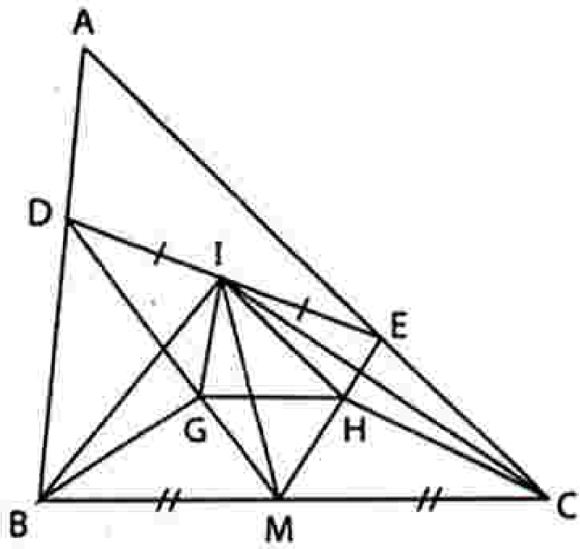
b) (h.21) CG cắt AB tại trung điểm D. Gọi S là diện tích tam giác ABC, p là nửa chu vi. Ta có

$$S_{AGD} = \frac{1}{3}S_{ACD} = \frac{S}{6} \Rightarrow \frac{1}{2}AD.m = \frac{S}{6} \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{c}{2}.m = \frac{S}{6} \Rightarrow m = \frac{4S}{6c}.$$

Tương tự $n = \dfrac{4S}{6b}$. Còn $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2S}{2p} = \dfrac{2S}{a+b+c}$. Từ m + n = 2r suy ra

$$\frac{4S}{6c} + \frac{4S}{6b} = \frac{4S}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{6c} + \frac{1}{6b} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c = \frac{6bc}{b+c}.$$

Ví dụ 18. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh AB, điểm E thuộc cạnh AC. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của DE, BC. Đường thẳng đi qua I và song song với AB cắt MD ở G. Đường thẳng đi qua I và song song với AC cắt ME ở H. Chứng minh rằng GH song song với BC.



Hình 22

Giải (h.22)

Ta có ID = IE $\Rightarrow S_{MID} = S_{MIE}$

$\Rightarrow S_{MIG} + S_{DIG} = S_{MIH} + S_{EIH}$ (1)

Ta lại có IG // AB $\Rightarrow S_{DIG} = S_{BIG}$ (2)

IH // AC $\Rightarrow S_{EIH} = S_{CIH}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

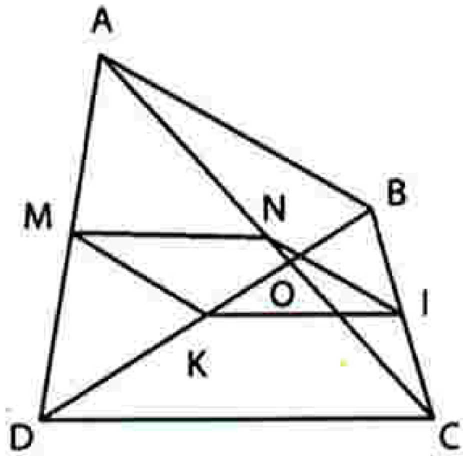
$S_{MIG} + S_{BIG} = S_{MIH} + S_{CIH}$ (4)

Ta lại có MB = MC $\Rightarrow S_{IMB} = S_{IMC}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $S_{MGB} = S_{MHC}$.

Ta lại có MB = MC nên các khoảng cách từ G và từ H đến BC bằng nhau, suy ra GH // BC.

Ví dụ 19. Cho tứ giác ABCD có O là giao điểm hai đường chéo. Gọi S_1 và S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác AOD và BOC ($S_1 > S_2$). Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của AD, AC, BC, BD. Chứng minh rằng diện tích tứ giác MNIK bằng $\dfrac{S_1 - S_2}{2}$.



Hình 23

Giải (h.23)

Đặt $S_{ABCD} = S$, ta có

$S_{MNIK} = S - (S_{DKM} + S_{DKIC}) - (S_{ANM} + S_{ANIB})$

$$= S - \left(\frac{1}{4}S_{DAB} + \frac{3}{4}S_{BCD}\right) - \left(\frac{1}{4}S_{ACD} + \frac{3}{4}S_{ACB}\right)$$

$$= S - \left(\frac{1}{4}S_{DAB} + \frac{1}{4}S_{BCD} + \frac{1}{2}S_{BCD}\right) - \left(\frac{1}{4}S_{ACD} + \frac{1}{4}S_{ACB} + \frac{1}{2}S_{ACB}\right)$$

$$= S - \left(\frac{1}{4}S + \frac{1}{2}S_{BCD}\right) - \left(\frac{1}{4}S + \frac{1}{2}S_{ACB}\right) = \frac{S}{2} - \frac{1}{2}(S_{BCD} + S_{ACB})$$

$$= \frac{S - S_{ACB} - S_{BCD}}{2} = \frac{S_{ACD} - S_{BCD}}{2} = \frac{S_{AOD} - S_{BOC}}{2} = \frac{S_1 - S_2}{2}.$$

Ví dụ 20. Cho ngũ giác ABCDE có AC // DE, BE // CD, BD // AE. Biết $S_{ABC} = 3cm^2$, $S_{BCD} = 2cm^2$. Tính diện tích ngũ giác đó.

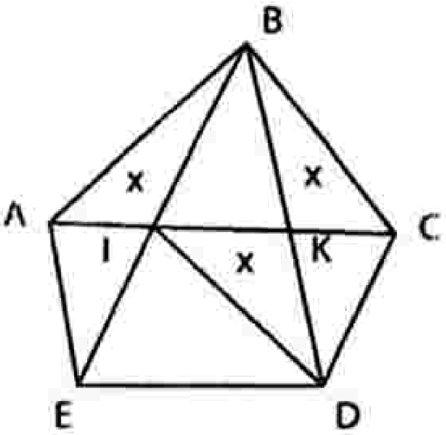
Giải (h.24)

Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của BE, BD với AC. Ta có AKDE, ICDE là hình bình hành nên AK = DE = IC. Suy ra AI = KC.

Đặt $S_{BIA} = S_{BKC} = x$ thì $S_{BIK} = 3 - 2x$ và $S_{DKC} = S_{BCD} - x = 2 - x$.

Do BI // CD nên $S_{DIK} = S_{BKC} = x$.

Ta có $\dfrac{S_{BIK}}{S_{BKC}} = \dfrac{IK}{KC} = \dfrac{S_{DIK}}{S_{DKC}}$ nên $\dfrac{3-2x}{x} = \dfrac{x}{2-x}$



Hình 24

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 6, \text{ (loại).} \end{array}\right.$

Suy ra $S_{CKD} = 2 - x = 1\ cm^2$, $S_{AIE} = S_{CKD} = 1\ cm^2$, $S_{ICDE} = 2S_{BCD} = 2.2 = 4\ (cm^2)$.

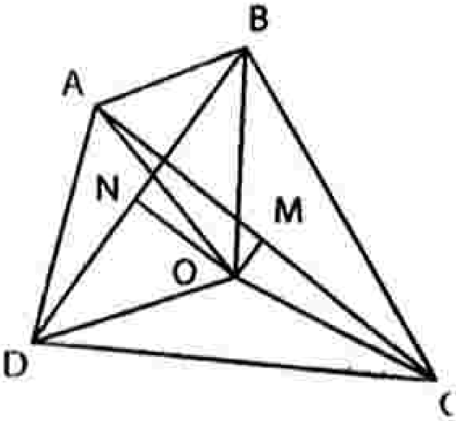
Vậy $S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ICDE} + S_{AIE} = 3 + 4 + 1 = 8\ (cm^2)$.

Ví dụ 21. Cho tứ giác ABCD. Dựng điểm O nằm trong tứ giác sao cho $S_{OAB} = S_{OCD}$ và $S_{OAD} = S_{OBC}$.

Giải (h.25)

Phân tích : Giả sử đã dựng được điểm O sao cho $S_{OAB} = S_{OCD}$, $S_{OAD} = S_{OBC}$ thì

$S_{OAB} + S_{OAD} = S_{OCD} + S_{OBC} = \dfrac{1}{2}S$ (gọi S là diện tích tứ giác ABCD) $\Rightarrow S_{ABOD} = \dfrac{1}{2}S$ (1)



Hình 25

Gọi M là trung điểm của AC, N là trung điểm của BD. Từ (1) suy ra $S_{ABD} + S_{OBD} = \dfrac{1}{2}S$, mà S_{ABD} không đổi nên S_{OBD} không đổi, suy ra O nằm trên đường thẳng song song với BD, đường thẳng này phải đi qua M vì $S_{MAB} + S_{MAD} = \dfrac{1}{2}S$.

Tương tự, O nằm trên đường thẳng đi qua N và song song với AC.

Cách dựng:

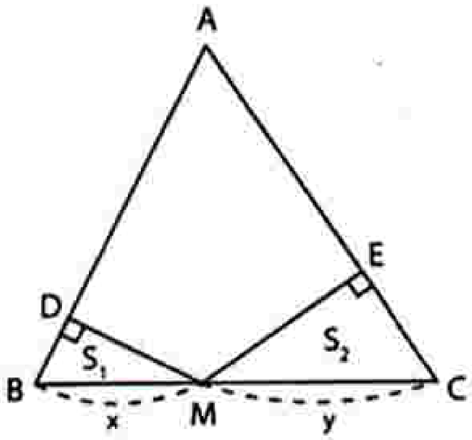
– Qua trung điểm M của AC, dựng đường thẳng d_1 // BD (nếu $M \in BD$ thì d_1 là BD).

– Qua trung điểm N của BD, dựng đường thẳng d_2 // AC (nếu $N \in AC$ thì d_2 là AC).

– Giao điểm của d_1 và d_2 là điểm O phải dựng.

Ví dụ 22. Cho tam giác đều ABC cạnh 4 cm. Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC sao cho nếu gọi D là hình chiếu của M trên AB, gọi E là hình chiếu của M trên AC thì tứ giác ADME có diện tích lớn nhất.

Giải (h.26)



Hình 26

Đặt $S_{MDB} = S_1$, $S_{MEC} = S_2$.

S_{ADME} lớn nhất $\Leftrightarrow S_1 + S_2$ nhỏ nhất.

Đặt MB = x, MC = y thì x + y = 4. Tam giác vuông MDB là nửa tam giác đều cạnh x nên $S_1 = \dfrac{x^2.\sqrt{3}}{8}$, tương tự $S_2 = \dfrac{y^2.\sqrt{3}}{8}$.

$$S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(x^2 + y^2\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{(x+y)^2}{2} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow S_1 + S_2 \geq \sqrt{3}$. Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow x = y$.

Vậy S_{ADME} lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$ cm^2 khi và chỉ khi M là trung điểm của BC.

BÀI TẬP

Diện tích hình vuông, hình chữ nhật

25. Tứ giác ABCD có AB = a, CD = b, hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Biết $S_{EFGH} = \dfrac{(a+b)^2}{8}$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.

26. Cho tam giác nhọn ABC, BC = a, AC = b, AB = c, điểm O nằm trong tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của O trên AB, BC, CA. Đặt AD = x, BE = y, CF = z.

a) Chứng minh bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$.

b) Vẽ ở phía ngoài tam giác ABC các hình vuông theo thứ tự có cạnh là AD, BE, CF. Tìm vị trí của điểm O để tổng diện tích của ba hình vuông nhỏ nhất.

27. Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích S. Qua điểm O nằm trong hình chữ nhật, kẻ hai đường thẳng song song với các cạnh của hình chữ nhật, chia nó thành bốn hình chữ nhật nhỏ. Gọi diện tích hình chữ nhật nhỏ có đỉnh A là S_1, diện tích hình chữ nhật nhỏ có đỉnh C là S_2, giả sử $S_1 \leq S_2$. Chứng minh rằng $S_1 \leq \dfrac{S}{4}$.

Diện tích hình thang, hình thoi

28. Tính diện tích hình thang ABCD, biết :

a) Hai cạnh đáy bằng 16 cm và 44 cm, hai cạnh bên bằng 17 cm và 25 cm;

b) Hai cạnh đáy bằng 10 cm và 14 cm, hai cạnh bên bằng 13 cm và 15 cm.

29. Tính đường cao của một hình thoi có hai đường chéo bằng m và n.

Diện tích tam giác

30. Cho tam giác ABC có B và C là các góc nhọn, BC = 20 m, đường cao AH = 10 m. Hình chữ nhật MNPQ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC.

a) Tính các cạnh của hình chữ nhật, biết diện tích của nó bằng 32 m^2.

b) Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật.

31. Tính diện tích tam giác ABC biết AB = 13 cm, AC = 20 cm, BC = 21 cm.

32. Tính diện tích tam giác ABC vuông tại A có chu vi 60 cm, đường cao AH = 12 cm.

33. Tam giác ABC có B và C là các góc nhọn, đường cao AH, số đo các cạnh AB, BC, CA (đơn vị : cm) là ba số tự nhiên liên tiếp tăng dần.

a) Tính hiệu HC – HB.

b) Tính diện tích tam giác ABC biết AH = 12 cm.

34. Tính các cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh là các số nguyên và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

35. Cho hình bình hành ABCD, điểm E thuộc cạnh AB, điểm F thuộc cạnh CD sao cho AE = CF. Gọi I là điểm bất kì trên cạnh AD, G và H theo thứ tự là giao điểm của IB và IC với EF. Chứng minh rằng $S_{BEG} + S_{CFH} = S_{IGH}$.

36. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm O nằm trong tam giác sao cho $\widehat{OAC} = \widehat{OBA} = \widehat{OCB}$. Chứng minh rằng $S_{AOB} = S_{COB}$.

37. Cho tam giác ABC có AB < AC, đường trung tuyến AM. Lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$, điểm I trên đoạn AD. Chứng minh rằng tỉ số các khoảng cách từ I đến AB và AC bằng $\dfrac{AB}{AC}$.

38. Chọn tam giác ABC vuông tại A (AB < AC) có $BC^2 = 4AB.AC$. Tính góc C.

39. Cho tam giác ABC có $AB \le AC \le BC$, đường phân giác AD, đường cao CH. Chứng minh rằng $CH \ge AD$.

Hướng dẫn : Lấy E đối xứng với D qua AB. Chứng minh rằng $DE \ge AD$.

40. Cho tam giác nhọn ABC có diện tích S, điểm M nằm trong tam giác. Đặt BC = a, AC = b, AB = c.

a) Ở ngoài tam giác ABC vẽ hình bình hành BCDE sao cho CD song song và bằng AM. Chứng minh rằng $S_{AMEB} + S_{AMDC} = S_{BCDE}$.

b) Chứng minh rằng $a.AM + b.BM + c.CM \ge 4S$. Tìm vị trí của M để xảy ra đẳng thức.

Diện tích tứ giác, đa giác

41. Tứ giác ABCD có M là trung điểm của BC và có diện tích gấp đôi diện tích tam giác AMD. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

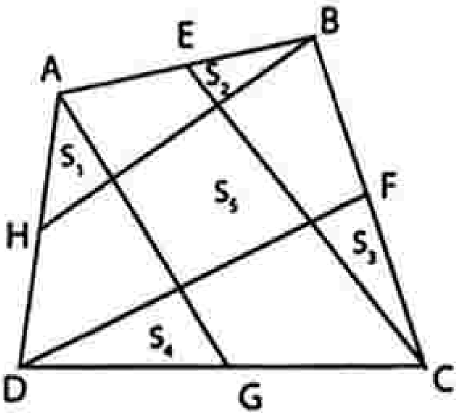
42. Tứ giác ABCD có AB + CD + AC = 8 cm và có diện tích 8 cm^2.

a) Chứng minh rằng AB song song với CD. b) Tính AC và BD.

43. Cho tứ giác ABCD có diện tích S. Trên cạnh AB lấy các điểm E, F sao cho $AE = \frac{1}{3}AB$, $BF = \frac{1}{4}AB$. Trên cạnh CD lấy các điểm G, H sao cho $CG = \frac{1}{3}CD$, $DH = \frac{1}{4}CD$. Tính diện tích tứ giác EFGH.

44. Cho tứ giác ABCD. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Kí hiệu S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 như trên hình 27.

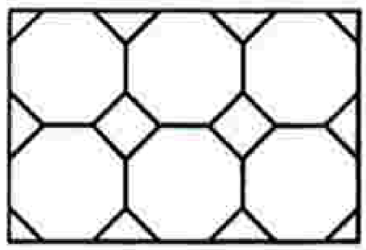
Chứng minh rằng $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_5$.



Hình 27

45. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CA sao cho $\frac{AD}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CA}$. Chứng minh rằng các tứ giác ADGF, BEGD, CFGE có diện tích bằng nhau.

46. Một đoạn hè đường hình chữ nhật được lát bởi các viên gạch hình bát giác đều và các viên gạch hình vuông hoặc hình tam giác vuông cân (hình 28 là hình minh họa). Biết cạnh của bát giác đều bằng 1 dm và số gạch hình bát giác đều là 1000 viên. Tính diện tích phần hè được lát bởi những viên gạch không phải là bát giác đều.


Hình 28

47. Cho tam giác ABC có diện tích S, D là trung điểm của BC. Tính diện tích lớn nhất của tam giác DEF với E thuộc cạnh AB, F thuộc cạnh AC.

Chuyên đề 3

ĐỊNH LÍ TA-LÉT VÀ TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Nội dung của chuyên đề bao gồm :

– Định lí Ta-lét trong tam giác.

– Ba đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song.

– Định lí Ta-lét đảo.

– Tính chất đường phân giác của tam giác.

Định lí Ta-lét và tính chất đường phân giác của tam giác cho ta những cặp đoạn thẳng tỉ lệ, nhờ đó chứng minh nhiều quan hệ về độ dài của các đoạn thẳng.

Các tính chất về ba đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song là những bổ đề suy ra từ định lí Ta-lét.

Định lí Ta-lét đảo cho ta thêm một cách mới để nhận biết hai đường thẳng song song.

Bài toán thực tế

ĐO CHIỀU CAO VỚI CUỐN SỔ TAY VÀ CÂY BÚT CHÌ

Với cuốn sổ tay hình chữ nhật ABCD có AB = 10 cm và phần bút chì nhô lên AE = 5 cm (h.29), hãy tính chiều cao của cây, biết người đo cao 1,7 m và đứng cách cây 20 m.

Giải

Theo định lí Ta-lét, do FG // AE nên

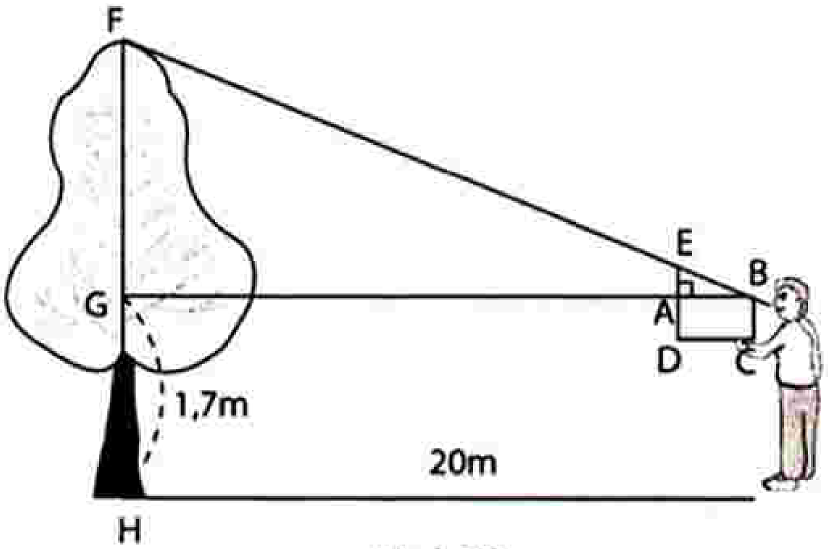
$\frac{FG}{GB} = \frac{EA}{AB} = \frac{5}{10} = 0,5$

$\Rightarrow FG = GB.0,5$

$= 20.0,5 = 10$ (m).

Cây cao

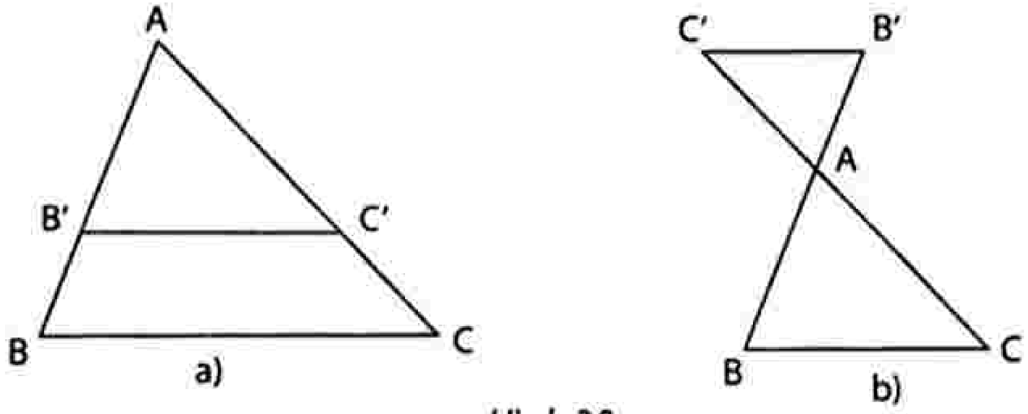
$10 + 1,7 = 11,7$ (m).



Hình 29

I. ĐỊNH LÍ TA-LÉT

Khi có một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác, ta có các cặp đoạn thẳng tỉ lệ. Trên hình 30 : $B'C' // BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.



Hình 30

Trong nhiều bài toán, cần kẻ thêm đường thẳng song song để tạo thành các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

Ví dụ 23. Cho tam giác ABC. Lấy điểm M thuộc đoạn BA, điểm N thuộc tia đối của tia BC sao cho $\frac{AB}{MB} - \frac{BC}{BN} = 1$. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

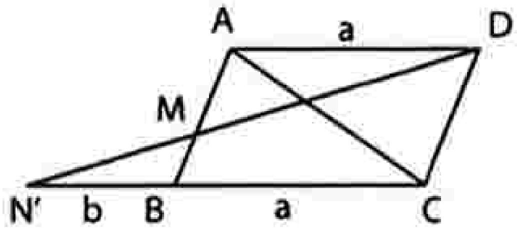
Tìm hướng giải

Xét vị trí đặc biệt của M và N khi M là trung điểm của AB, B là trung điểm của CN, điều kiện của đề bài thỏa mãn vì $\frac{AB}{MB} - \frac{BC}{BN} = 2 - 1 = 1$. Khi đó

NM đi qua đỉnh D của hình bình hành ABCD. Ta dự đoán D là điểm cố định phải tìm.

Giải (h.31)

Vẽ hình bình hành ABCD. Trước hết ta thấy do $\frac{AB}{MB} > 1$ nên AB > MB, do đó M nằm giữa A và B.



Hình 31

Gọi N' là giao điểm của DM và CB. Đặt AD = BC = a, BN' = b.

Do AD // N'C nên theo định lí Ta-lét, ta có $\frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BN'} = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \frac{AM + MB}{MB} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{a+b}{b}.$$

Do đó $\frac{AB}{MB} - \frac{BC}{BN'} = \frac{a+b}{b} - \frac{a}{b} = 1$.

Kết hợp với giả thiết $\frac{AB}{MB} - \frac{BC}{BN} = 1$ suy ra BN' = BN, do đó N' trùng N.

Vậy MN đi qua đỉnh D của hình bình hành ABCD.

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC, các đường phân giác BD và CE, điểm I thuộc đoạn thẳng DE. Gọi M, N, H theo thứ tự là hình chiếu của I trên AC, AB, BC.

a) Gọi EG, DK là các đường cao của tam giác ADE. Chứng minh rằng $\frac{IM}{EG} + \frac{IN}{DK} = 1$.

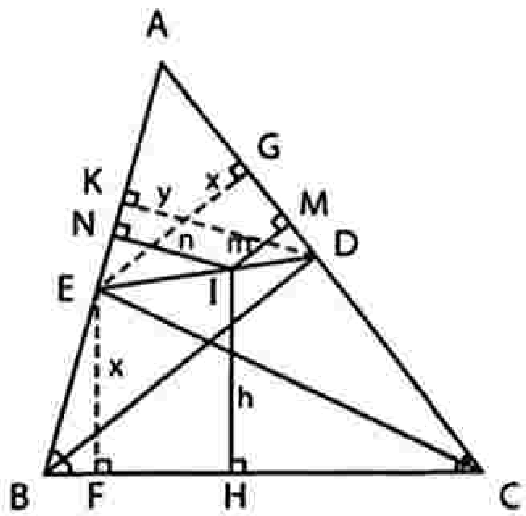
b) Chứng minh rằng IM + IN = IH.

Giải (h.32)

a) Theo định lí Ta-lét với IM // EG và IN // DK, ta có

$$\frac{IM}{EG} + \frac{IN}{DK} = \frac{DI}{DE} + \frac{IE}{DE} = \frac{DE}{DE} = 1.$$

b) Đặt IM = m, IN = n, EG = x, DK = y.



Hình 32

Từ câu a), ta có $\dfrac{m}{x} + \dfrac{n}{y} = 1$. (1)

Đặt IH = h, BC = a, AC = b, AB = c, $S_{ABC} = S$.

Ta có $S_{IAC} + S_{IAB} + S_{IBC} = S \Rightarrow bm + cn + ah = 2S$. (2)

Để chứng minh IM + IN = IH (tức là m + n = h), ta sẽ chứng minh

$bm + cn + a(m + n) = 2S$. Kẻ EF ⊥ BC thì EF = EG = x.

Ta có $S_{AEC} + S_{BEC} = S \Rightarrow bx + ax = 2S \Rightarrow a + b = \dfrac{2S}{x}$.

Tương tự $a + c = \dfrac{2S}{y}$. Suy ra $(a + b)m + (a + c)n = 2S\left(\dfrac{m}{x} + \dfrac{n}{y}\right) = 2S$ (do (1))

$\Rightarrow bm + cn + a(m + n) = 2S$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra m + n = h tức là IM + IN = IH.

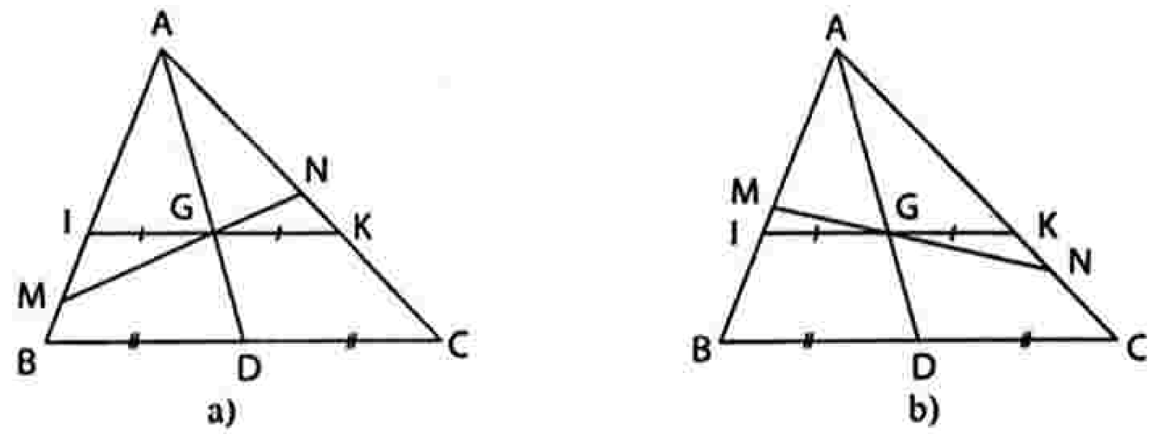
Ví dụ 25. Cho tam giác ABC có diện tích S. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng :

a) $S_{AMN} \ge \dfrac{4}{9}S$; b) $S_{AMN} \le \dfrac{1}{2}S$.

Giải

a) (h.33) Gọi D là giao điểm của AG và BC. Qua G kẻ IK // BC. Do BD = DC nên GI = GK. Theo bổ đề về hai tam giác có một góc bằng nhau (Ví dụ 14) ta có

$\dfrac{S_{AIK}}{S} = \dfrac{AI}{AB} \cdot \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.



Hình 33

Xét ba trường hợp :

– *Trường hợp GM = GN* thì M trùng I và N trùng K, khi đó

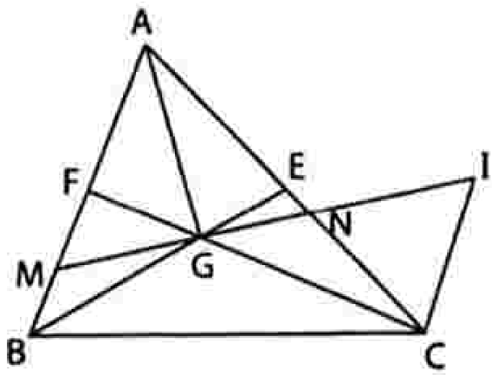
$$S_{AMN} = S_{AIK} = \frac{4}{9}S. \quad (1)$$

– *Trường hợp GM > GN* (h.33a) thì $S_{IGM} > S_{KGN}$ nên $S_{AMN} > S_{AIK} = \frac{4}{9}S$. (2)

– *Trường hợp GM < GN* (h.33b) thì $S_{IGM} < S_{KGN}$ nên $S_{AMN} > S_{AIK} = \frac{4}{9}S$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $S_{AMN} \geq \frac{4}{9}S$.

b) (h.34) Gọi E giao điểm của BG và AC, ta có $S_{ABE} = \frac{1}{2}S$.



Hình 34

Ta sẽ chứng minh $S_{GEN} \leq S_{GBM}$.

Ta có $\frac{S_{GEN}}{S_{GBM}} = \frac{GE}{GB}.\frac{GN}{GM}$ (bổ đề ở câu a)

mà $\frac{GE}{GB} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{S_{GEN}}{S_{GBM}} = \frac{1}{2}.\frac{GN}{GM}$. (4)

Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt MN ở I. Gọi F là giao điểm của CG và AB.

Ta có $\frac{GN}{GM} \leq \frac{GI}{GM} = \frac{GC}{GF} = 2$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{S_{GEN}}{S_{GBM}} \leq \frac{1}{2}.2 = 1$.

Vậy $S_{GEN} \leq S_{GBM} \Rightarrow S_{AMN} \leq S_{ABE} = \frac{1}{2}S$.

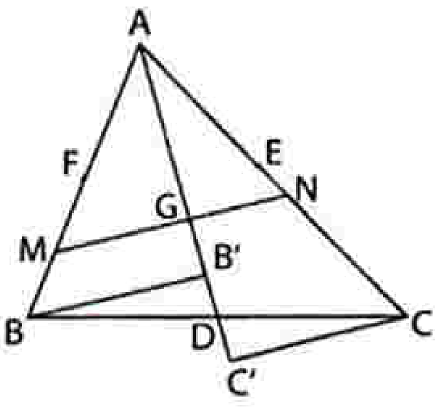
Lưu ý : Cách giải nêu trên là cách giải thuần túy hình học. Một cách giải khác có sử dụng nhiều biến đổi đại số như sau :

Trước hết ta chứng minh $\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3$.

Thật vậy, kẻ BB' // CC' // MN (h.35). AG cắt BC tại D là trung điểm của BC, ta có DB' = DC'.

$$\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{AB'}{AG}+\frac{AC'}{AG}=\frac{AB'+AC'}{AG}$$

$$=\frac{(AD-DB')+(AD+DC')}{AG}=\frac{2AD}{\frac{2}{3}AD}=3.$$



Hình 35

Đặt $\frac{AB}{AM}=m$, $\frac{AC}{AN}=n$ thì $m+n=3$. (1)

Đặt $S_{AMN}=S'$. Theo bổ đề về hai tam giác có một góc bằng nhau, $\frac{S}{S'}=\frac{AB}{AM}.\frac{AC}{AN}=mn$. (2)

a) $\frac{S}{S'}=mn\le\frac{(m+n)^2}{4}=\frac{3^2}{4}=\frac{9}{4}\Rightarrow S'\ge\frac{4}{9}S.$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $m=n\Leftrightarrow MN\,//\,BC$.

b) $\frac{S}{S'}=mn=m(3-m)=3m-m^2.$ (3)

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AC, AB (h.35). M, N thuộc cạnh AB, AC

$\Leftrightarrow AB\ge AM\ge AF\Leftrightarrow\frac{AB}{AB}\le\frac{AB}{AM}\le\frac{AB}{AF}\Leftrightarrow 1\le m\le 2.$

Do $1\le m\le 2$ nên $(m-1)(2-m)\ge 0\Rightarrow 3m-m^2\ge 2.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{S}{S'}\ge 2$, tức là $S'\le\frac{1}{2}S.$

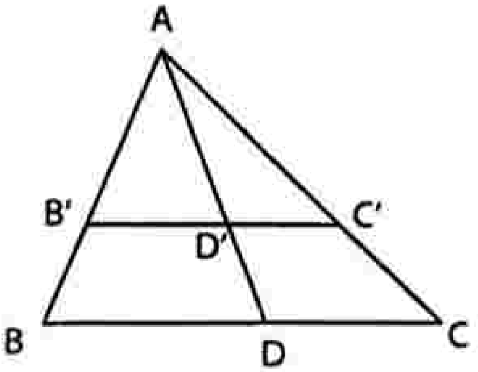
Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $m=1$ hoặc $m=2$, tức là M trùng B (khi đó N là trung điểm của AC) hoặc M là trung điểm của AB (khi đó N trùng C).

II. BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

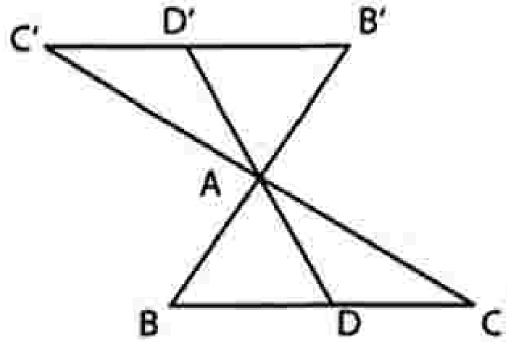
Khi ba đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song, chúng cũng tạo ra trên hai đường thẳng song song ấy những cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

Trên hình 36 :

$B'C'\,//\,BC\Rightarrow\frac{BD}{B'D'}=\frac{DC}{D'C'}$ (vì cùng bằng $\frac{AD}{AD'}$).



a)



b)

Hình 36

Ví dụ 26. Cho tam giác ABC có diện tích S, điểm D thuộc cạnh AB sao cho $AD = \frac{1}{3}AB$, điểm E thuộc cạnh BC sao cho $BE = \frac{2}{5}BC$. Gọi O là giao điểm của AE và CD, F là giao điểm của BO và AC. Tính diện tích tam giác DEF.

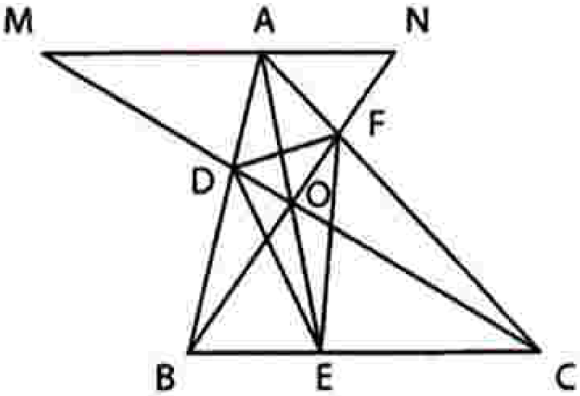
Giải (h.37)

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt CD và BF theo thứ tự ở M và N.

Do MN // BC nên

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AN}{CB} = \frac{AN}{AM}.\frac{AM}{CB}$$

$$= \frac{EB}{EC}.\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$



Hình 37

Theo bổ đề về hai tam giác có một góc bằng nhau (Ví dụ 14) ta có

$$\frac{S_{ADF}}{S} = \frac{AD}{AB}.\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{12},\ \frac{S_{BDE}}{S} = \frac{BD}{BA}.\frac{BE}{BC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{5} = \frac{4}{15},$$

$$\frac{S_{CEF}}{S} = \frac{CE}{CB}.\frac{CF}{CA} = \frac{3}{5}.\frac{3}{4} = \frac{9}{20}.$$

Suy ra $\frac{S_{DEF}}{S} = 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{4}{15} + \frac{9}{20}\right) = \frac{1}{5}$. Vậy $S_{DEF} = \frac{1}{5}S$.

Lưu ý: Để tính $\frac{AF}{FC}$, ta có thể dùng định lí Xê-va $\left(\frac{AF}{FC}.\frac{CE}{EB}.\frac{BD}{DA} = 1\right)$. Ở lời giải trên, định lí Xê-va được chứng minh luôn vào bài.

Để tính $\frac{AF}{FC}$ (cũng như để chứng minh định lí Xê-va), ngoài cách trên còn có thể dùng phương pháp diện tích như sau:

Từ $\frac{AF}{FC} = \frac{S_{BFA}}{S_{BFC}}$ và $\frac{AF}{FC} = \frac{S_{OFA}}{S_{OFC}}$ suy ra

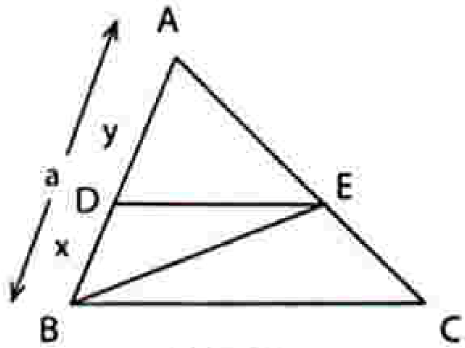
$\frac{AF}{FC} = \frac{S_{BFA} - S_{OFA}}{S_{BFC} - S_{OFC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}$. Tương tự $\frac{AD}{DB} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}$, $\frac{BE}{EC} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$.

Suy ra $\frac{AF}{FC} = \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} = \frac{BE}{EC} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 27. Cho tam giác ABC có diện tích S. Một đường thẳng song song với BC cắt AB và AC theo thứ tự ở D và E. Tính diện tích lớn nhất của tam giác BDE.

Giải

Cách 1. (h.38) Đặt BD = x, AD = y, AB = a, ta có x + y = a.



Hình 38

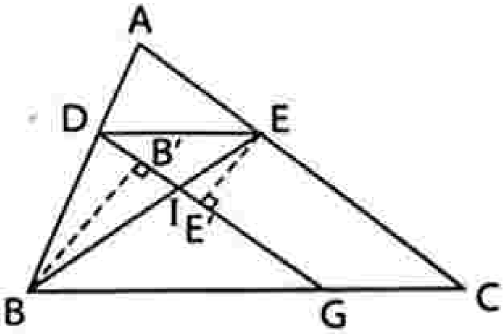
$\frac{S_{BDE}}{S_{BAE}} = \frac{BD}{BA} = \frac{x}{a}$. (1)

$\frac{S_{BAE}}{S} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{y}{a}$. (2)

Nhân (1) với (2) được $\frac{S_{BDE}}{S} = \frac{xy}{a^2} \le \frac{(x+y)^2}{4a^2} = \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4}$.

$\max S_{BDE} = \frac{1}{4}S \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Cách 2. (h.39) Kẻ DG // AC, cắt BE ở I. Kẻ BB', EE' vuông góc với DG.



Hình 39

$S_{BDE} = DI.\frac{BB' + EE'}{2} = DI.\frac{h}{2}$ (h là độ dài đường cao kẻ từ B của $\triangle$ ABC). (1)

Do DG // AC nên $\frac{DI}{AE} = \frac{DG}{AC}$

$\Rightarrow$ DI.AC = AE.DG = AE.EC

$$\le \frac{(AE + EC)^2}{4} = \frac{AC^2}{4} \Rightarrow DI \le \frac{AC}{4}. \qquad (2)$$

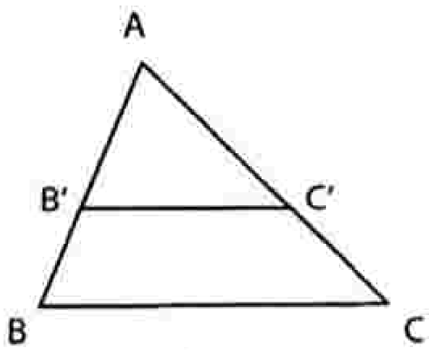
Từ (1) và (2) suy ra $S_{BDE} \le \frac{AC.h}{8} = \frac{1}{4}S.$

$\max S_{BDE} = \frac{1}{4}S \Leftrightarrow AE = EC \Leftrightarrow$ E là trung điểm của AC, khi đó D là trung điểm của AB.

III. ĐỊNH LÍ TA-LÉT ĐẢO

Định lí Ta-lét đảo cho ta một cách chứng minh hai đường thẳng song song.

Trên hình 40 : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow B'C' // BC.$



Hình 40

Ví dụ 28. Cho tam giác ABC, điểm I thuộc đường trung tuyến AM. Gọi D là giao điểm của BI với AC, E là giao điểm của CI với AB. Chứng minh rằng DE song song với BC.

Giải (h.41)

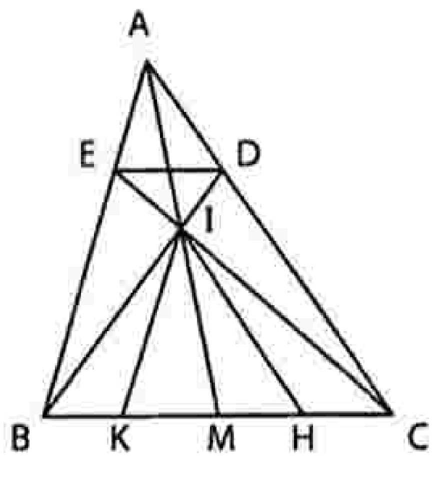
Kẻ IK // AB, IH // AC, theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{EI}{EC} = \frac{BK}{BC} \text{ và } \frac{DI}{DB} = \frac{CH}{BC}. \qquad (1)$$

Ta lại có $\frac{BK}{BM} = \frac{AI}{AM} = \frac{CH}{CM}$ mà BM = CM nên BK = CH. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{EI}{EC} = \frac{DI}{DB}$

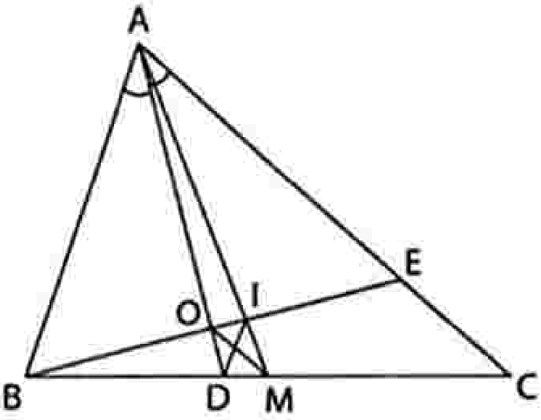
$\Rightarrow$ DE // BC (định lí Ta-lét đảo).



Hình 41

Ví dụ 29. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Đường thẳng đi qua D và song song với AB cắt AM ở I, BI cắt AC ở E. Chứng minh rằng AB = AE.

Giải (h.42)



Hình 42

Gọi O là giao điểm của AD và BE.

Do MC = MB và ID // AB nên

$$\frac{MD}{MC} = \frac{MD}{MB} = \frac{ID}{AB} = \frac{OD}{OA} \Rightarrow OM \mathbin{//} AC$$

(định lí Ta-lét đảo).

Tam giác BEC có MB = MC, MO // CE nên OB = OE.

Tam giác ABE có đường phân giác AO cũng là đường trung tuyến, nên nó là tam giác cân. Vậy AB = AE.

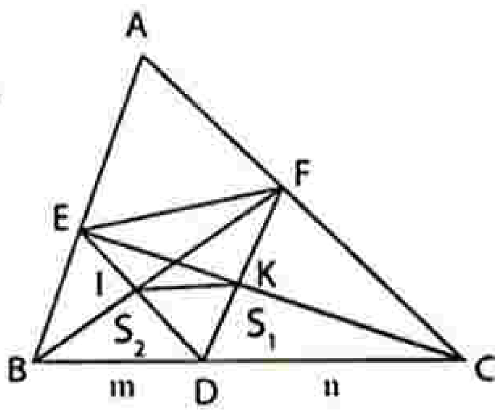
Ví dụ 30. Cho tam giác ABC, điểm D thuộc cạnh BC. Đường thẳng đi qua D và song song với AC cắt AB ở E. Đường thẳng đi qua D và song song với AB cắt AC ở F. Gọi I là giao điểm của DE và BF, K là giao điểm của DF và CE. Đặt $S_{CDK} = S_1$, $S_{BDI} = S_2$. Chứng minh rằng :

a) IK song song với BC;　　　　b) $S_1 + S_2 = S_{DEF}$.

Giải (h.43)

a) Do DE // AC và DF // AB nên

$$\frac{FI}{IB} = \frac{AE}{EB} = \frac{FK}{KD} \Rightarrow IK \mathbin{//} BC \text{ (định lí Ta-lét đảo).}$$



Hình 43

b) Do IK // BC nên $S_1 = S_{DIC}$.

Do ID // FC nên $S_{DIC} = S_{DIF}$. Suy ra $S_1 = S_{DIF}$ (1)

Do DF // BE nên $S_{BED} = S_{BEF}$.

Cùng trừ đi S_{BEI} được $S_2 = S_{EIF}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_1 + S_2 = S_{DIF} + S_{EIF} = S_{DEF}$.

IV. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Đường phân giác của tam giác chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

Với $\triangle$ ABC ta có : AD là đường phân giác $\Rightarrow \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Ví dụ 31. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Gọi E là điểm đối xứng với A qua C. Đường thẳng đi qua B và song song với AC cắt ED ở K. Chứng minh rằng $\widehat{DAK} = 90^\circ$.

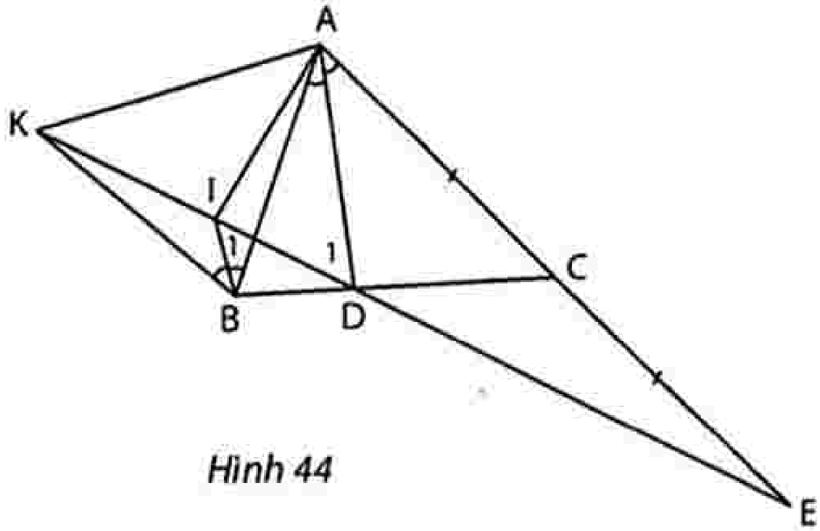
Giải (h.44)

Theo tính chất đường phân giác và định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{BK}{CE} = \frac{BK}{AC}$$

$\Rightarrow AB = BK$.

Tia phân giác của góc ABK cắt DK ở I.



Hình 44

$\triangle$ BIA = $\triangle$ BIK (c.g.c)

$\Rightarrow IA = IK$ (1) và $\widehat{AIB} = \widehat{KIB}$.

Ta có $\widehat{AIB}$ bù $\widehat{IAD}$ (do BI // AD) ; $\widehat{KIB}$ bù $\hat{I}_1$ và $\hat{I}_1 = \hat{D}_1$ (do BI // AD)

nên $\widehat{IAD} = \hat{D}_1 \Rightarrow ID = IA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IK = IA = ID \Rightarrow \widehat{DAK} = 90^\circ$.

Ví dụ 32. Tam giác ABC có AB = 21 cm, AC = 28 cm, BC = 35 cm, các đường phân giác AD, BE, CF. Tính diện tích tam giác DEF.

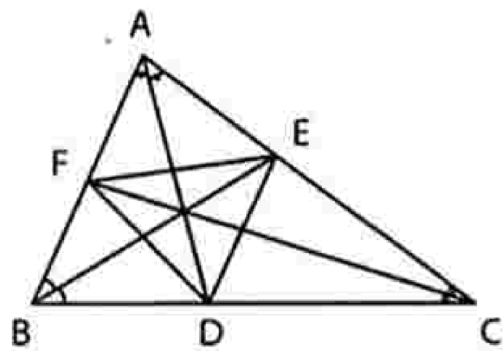
Giải (h.45)

AD là đường phân giác nên

$$\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{35}{21 + 28} = \frac{5}{7}$$

$\Rightarrow \dfrac{DB}{21} = \dfrac{5}{7} \Rightarrow DB = 15$ (cm)

$\Rightarrow DC = 20$ cm.



Hình 45

Tương tự, ta tính được $EA = \frac{21}{2}, EC = \frac{35}{2}, FA = \frac{28}{3}, FB = \frac{35}{3}$.

Theo bổ đề về hai tam giác có một góc bằng nhau (Ví dụ 14), gọi S là diện tích tam giác ABC ta có :

$$\frac{S_{AEF}}{S} = \frac{\frac{28}{3}.\frac{21}{2}}{21.28} = \frac{1}{6}, \frac{S_{BDF}}{S} = \frac{\frac{35}{3}.15}{21.35} = \frac{5}{21}, \frac{S_{CDE}}{S} = \frac{\frac{35}{2}.20}{28.35} = \frac{5}{14}.$$

Suy ra $\frac{S_{DEF}}{S} = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{21} + \frac{5}{14}\right) = \frac{5}{21}$.

$\triangle ABC$ có $AB^2 + AC^2 = 21^2 + 28^2 = 35^2 = BC^2 \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.21.28 = 21.14\ (cm^2) \Rightarrow S_{DEF} = 21.14.\frac{5}{21} = 70\ (cm^2)$.

BÀI TẬP

Định lí Ta-lét

48. Trên một tia gốc O có điểm A và trên tia đối của nó có các điểm B, C. Chứng minh rằng $\frac{1}{OA} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \Leftrightarrow OA^2 = OB.OC$.

49. Cho hình bình hành ABCD có diện tích S, điểm E thuộc cạnh AB sao cho $AE = \frac{1}{3}AB$, điểm F là trung điểm của BC. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của DE, DF với AC. Tính diện tích tam giác DMN.

50. Cho tam giác ABC. Điểm D chuyển động trên cạnh AB, điểm E chuyển động trên cạnh AC sao cho $\frac{AD}{AB} = \frac{CE}{CA}$. Gọi I là trung điểm của DE. Chứng minh rằng I chuyển động trên đường trung bình của tam giác ABC.

51. Cho tam giác ABC. Lấy điểm E thuộc tia BA, điểm F thuộc tia BC sao cho $\frac{BA}{BE} + \frac{BC}{BF} = 1$. Chứng minh rằng khi các điểm E và F thay đổi vị trí thì đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

52. Cho tứ giác ABCD có E, F lần lượt là trung điểm của AC, BD. Gọi giao điểm của EF với AD, BC theo thứ tự là G, H. Chứng minh rằng $\frac{AG}{GD} = \frac{CH}{HB}$.

53. Cho hình thang ABCD (AB // CD), điểm I thuộc tia đối của tia BD sao cho $BI = \frac{1}{2}BD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. IM cắt AD ở H, IN cắt BC ở K. Tính các tỉ số $\frac{AH}{HD}$ và $\frac{BK}{KC}$.

54. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB = 5cm, CD = 9cm. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Điểm E thuộc tia đối của tia BA. Tính độ dài BE, biết diện tích tam giác IBE bằng diện tích hình thang ABCD.

55. Cho hình bình hành ABCD có diện tích S. Các điểm E, F, G, H theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $\frac{AE}{AB} = \frac{BF}{BC} = \frac{CG}{CD} = \frac{DH}{DA} = \frac{2}{3}$. Các đoạn thẳng AF, CH, BG, DE cắt nhau tạo thành một tứ giác. Tính diện tích tứ giác ấy.

56. Cho hình chữ nhật ABCD có AD = 50 cm, AB = 75 cm. Điểm E trên cạnh AB sao cho AE = 45 cm, điểm F trên cạnh CB sao cho CF = 30 cm. Tìm vị trí của điểm I trên đoạn thẳng EF sao cho nếu gọi H và K là các hình chiếu của I trên AD và CD thì hình chữ nhật DHIK có diện tích lớn nhất.

57. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm vị trí của điểm M trên cạnh BC sao cho tích các khoảng cách từ M đến AB và AC có giá trị lớn nhất.

Ba đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song

58. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 3\alpha$, điểm D thuộc tia đối của tia BC sao cho $\widehat{BAD} = \alpha$. Gọi I là trung điểm của AD. Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = \widehat{BID}$.

59. Cho tứ giác ABCD, điểm I thuộc tia đối của tia CA. Lấy điểm E thuộc cạnh AB, gọi G là giao điểm của IE và BC. Đường thẳng đi qua E và song song với BD cắt AD ở F, đường thẳng đi qua G và song song với BD cắt CD ở H.

a) Chứng minh rằng ba điểm F, H, I thẳng hàng.

b) Tứ giác ABCD có điều kiện gì thì EH và FG cắt nhau trên đường chéo AC ?

Định lí Ta-lét đảo

60. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AB, E thuộc cạnh BC sao cho $BE = 2EC$ và $\widehat{BEM} = \widehat{CEA}$. Chứng minh rằng $\widehat{ACB} = 90^o$.

61. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng nằm cùng một phía của đường thẳng d, AB không song song với d. Dựng các điểm E và F thuộc d sao cho AE song song với BF và $\widehat{ECF} = 90^o$.

Tính chất đường phân giác của tam giác

62. Cho tam giác ABC cân tại A có diện tích S, $BC = \frac{2}{3}AB$. Các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Tính diện tích tứ giác AEID.

63. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^o$, đường cao AH, diện tích S. Đường phân giác của góc B cắt AH và AC theo thứ tự ở I và D. Gọi E là giao điểm của CI và AB. Tính :

a) $\frac{AE}{EB}$; b) Diện tích tam giác DEH.

64. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM, đường cao AH. Đường vuông góc với AM tại A và đường vuông góc với CM tại C cắt nhau ở K. Gọi I là giao điểm của BK và AH. Chứng minh rằng AI = IH.

65. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BD. Điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho CE = CB. Lấy điểm I thuộc cạnh AB. Gọi G là giao điểm của IC và BD, H là giao điểm của IE và BC. Chứng minh rằng GH song song với AC.

66. Cho tam giác ABC, AB = c, AC = b, BC = a, các đường phân giác AA', BB', CC'. Gọi a' là khoảng cách từ A' đến AB, b' là khoảng cách từ B' đến BC, c' là khoảng cách từ C' đến CA. Gọi h_a, h_b, h_c là các chiều cao tương ứng với các cạnh a, b, c. Chứng minh rằng $\frac{a'}{h_a} + \frac{b'}{h_b} + \frac{c'}{h_c} \geq \frac{3}{2}$.

Chuyên đề 4

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Chuyên đề này bao gồm các nội dung :

– Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác.

– Tỉ số các đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng.

Nhờ tam giác đồng dạng, ta có thêm nhiều cách mới để chứng minh các quan hệ về độ dài đoạn thẳng, số đo góc, diện tích tam giác.

Vài nét lịch sử

CẬU BÉ LƯƠNG THẾ VINH ĐO CHIỀU CAO BẰNG BÓNG NẮNG

Lương Thế Vinh là một nhà toán học của nước ta thế kỉ XV. Ông sinh năm 1441, mất khoảng năm 1496.

Lúc nhỏ, khi chơi cùng các bạn trong làng, ông đã trả lời câu đố của một bạn yêu cầu tính chiều cao của cây cau mà không cần trèo lên cây như sau :

Chỉ cần đo bóng của cây cau và bóng của một cọc cắm thẳng đứng. Cọc dài gấp bao nhiêu lần bóng của nó thì cây cao gấp bấy nhiêu lần bóng của nó.

Các bạn đã thực hành và thán phục Lương Thế Vinh khi thấy kết quả đo bằng bóng nắng và kết quả đo trực tiếp khớp với nhau.

I. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA TAM GIÁC

Đối với hai tam giác, có ba trường hợp đồng dạng : trường hợp cạnh-cạnh-cạnh, trường hợp cạnh-góc-cạnh, trường hợp góc-góc. Đối với hai tam giác vuông, ngoài các trường hợp nói trên còn có trường hợp đồng dạng về cạnh huyền và cạnh góc vuông.

Ví dụ 33. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AD, K là trung điểm của AD. Gọi I là hình chiếu của điểm D trên CK. Chứng minh rằng $\widehat{AIB} = 90^\circ$.

Giải (h.46)

$\triangle KID$ và $\triangle DIC$ có $\widehat{KID} = \widehat{DIC} = 90^\circ$, $\hat{K}_1 = \hat{D}_1$

(cùng phụ $\hat{C}_1$) nên $\triangle KID \backsim \triangle DIC$ (g.g)

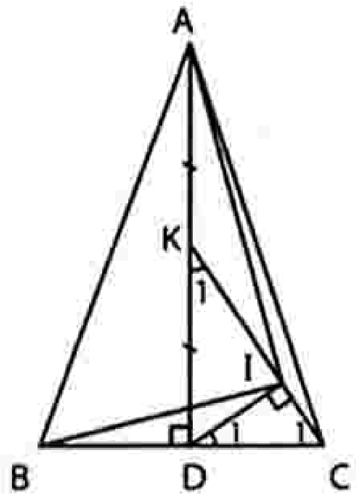
$\Rightarrow \dfrac{KI}{DI} = \dfrac{KD}{DC}$.

Ta lại có KD = KA, DC = DB nên $\dfrac{KI}{DI} = \dfrac{KA}{DB}$.

Kết hợp với $\widehat{IKA} = \widehat{IDB}$

suy ra $\triangle IKA \backsim \triangle IDB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{BID}$.

Cùng cộng với $\widehat{KIB}$ được $\widehat{AIB} = \widehat{KID} = 90^\circ$.



Hình 46

Ví dụ 34. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM $\left(AM > \frac{1}{2}BC\right)$. Lấy điểm I trên đoạn AM sao cho $\widehat{MBI} = \widehat{MAB}$. Chứng minh rằng $\widehat{MCI} = \widehat{MAC}$.

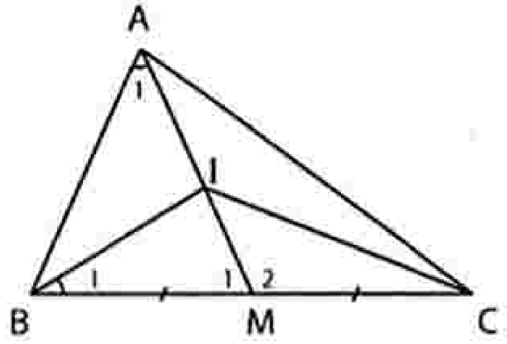
Giải (h.47)

$\triangle MBI$ và $\triangle MAB$ có $\widehat{M}_1$ là góc chung, $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ nên $\triangle MBI \backsim \triangle MAB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MI}{MB} \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MI}{MC}$.

Kết hợp với $\widehat{M}_2$ là góc chung suy ra

$\triangle MCI \backsim \triangle MAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MCI} = \widehat{MAC}$.



Hình 47

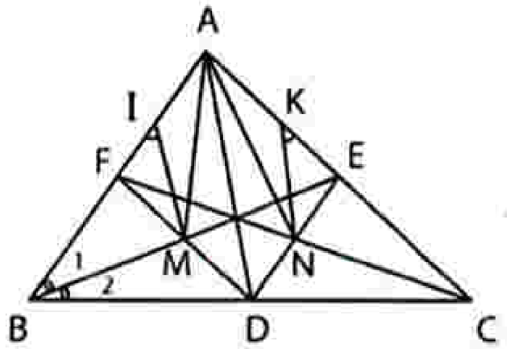
Ví dụ 35. Cho tam giác ABC, các đường phân giác AD, BE, CF. Gọi M là giao điểm của BE và DF, N là giao điểm của DE và CF.

a) Kẻ MI và NK song song với AD ($I \in AB$, $K \in AC$). Chứng minh rằng $\triangle AIM \backsim \triangle AKN$.

b) Chứng minh $\widehat{FAM} = \widehat{EAN}$.

Giải (h.48)

a) Ta có $\widehat{BIM} = \widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \widehat{CKN}$ nên góc bù với chúng là $\widehat{AIM} = \widehat{AKN}$.



Hình 48

Sẽ chứng minh $\frac{AI}{IM} = \frac{AK}{KN}$.

Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Do IM // AD và $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ nên

$\frac{AI}{IF} = \frac{MD}{MF} = \frac{BD}{BF}$. (1)

$\frac{IF}{IM} = \frac{AF}{AD}$. (2)

Nhân (1) với (2) được $\frac{AI}{IM}=\frac{BD}{BF}.\frac{AF}{AD}=\frac{BD}{AD}.\frac{AF}{BF}=\frac{BD}{AD}.\frac{b}{a}$. (3)

Tương tự $\frac{AK}{KN}=\frac{CD}{AD}.\frac{c}{a}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AI}{IM}:\frac{AK}{KN}=\frac{BD}{AD}.\frac{b}{a}.\frac{AD}{CD}.\frac{a}{c}=\frac{BD}{CD}.\frac{b}{c}=1$.

Vậy $\frac{AI}{IM}=\frac{AK}{KN}$. Do đó $\triangle AIM \backsim \triangle AKN$ (c.g.c).

b) Suy ra từ câu a).

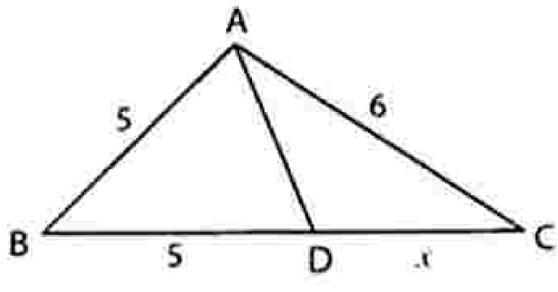
Lưu ý : Trong ví dụ trên, khi xét tỉ số $\frac{AI}{IM}$, ta đã viết tỉ số đó dưới dạng tích của hai tỉ số trung gian $\left(\frac{AI}{IF}.\frac{IF}{IM}\right)$, có nhiều tỉ số bằng các tỉ số trung gian trên từ định lí Ta-lét và tính chất đường phân giác của tam giác.

Cách viết một tỉ số dưới dạng tích của hai tỉ số trung gian, cùng với cách kẻ thêm đường thẳng song song là những cách thường dùng để tạo ra các cặp đoạn thẳng tỉ lệ.

Ví dụ 36. Cho tam giác ABC có AB = 5cm, AC = 6cm, $\widehat{A}=90^\circ+\frac{\widehat{B}}{2}$. Tính độ dài BC.

Giải (h.49)

Trên BC lấy D sao cho BD = 5cm. Tam giác ABD cân tại B nên $\widehat{ADC}=90^\circ+\frac{\widehat{B}}{2}=\widehat{BAC}$.



Hình 49

Ta có $\Delta DCA \backsim \Delta ACB$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{CA}{CB}=\frac{DC}{AC} \Rightarrow DC.CB=AC^2$.

Đặt DC = x thì x(x + 5) = 36

$\Leftrightarrow x^2+5x-36=0 \Leftrightarrow (x+9)(x-4)=0$.

Do x > 0 nên x = 4. Do đó BC = 5 + 4 = 9 (cm).

Ví dụ 37. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H có HA = 7 cm, HB = $\sqrt{5}$ cm, HC = $\sqrt{17}$ cm. Tính :

a) Đường cao AD; b) Diện tích tam giác ABC.

Giải (h.50)

a) $\triangle DBH$ và $\triangle DAC$ vuông tại D có $\widehat{DBH} = \widehat{DAC}$ (cùng phụ $\widehat{ACB}$) nên $\triangle DBH \backsim \triangle DAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{DB}{DA} = \dfrac{DH}{DC}$.

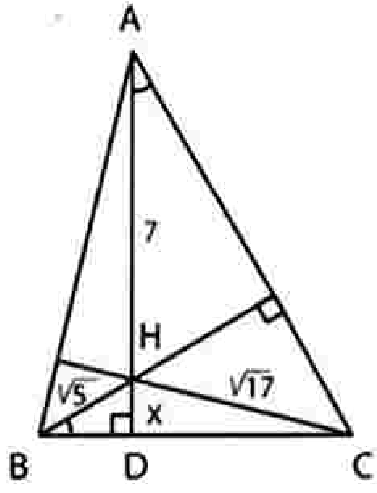
Đặt DH = x thì $\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x+7} = \dfrac{x}{\sqrt{17-x^2}}$.

Rút gọn được $14x^3 + 71x^2 - 85 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(14x^2 + 85x + 85) = 0$.

Do $x > 0$ nên $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra AD = 8 cm.



Hình 50

b) $BD^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow BD = 2$ (cm).

$DC^2 = 17 - 1 = 16 \Rightarrow DC = 4$ (cm).

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AD = \dfrac{1}{2}.(2+4).8 = 24\ (cm^2)$.

Ví dụ 38. Cho tam giác ABC (AB < AC), đường trung tuyến AM. Điểm D trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$. Chứng minh rằng $\dfrac{DB}{DC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

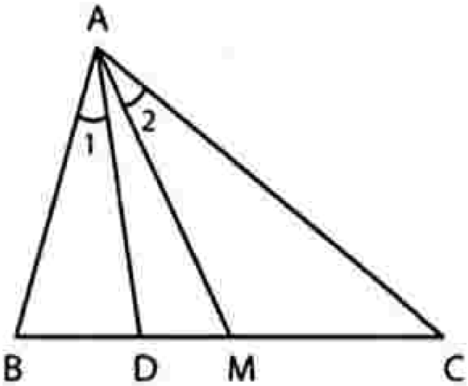
Giải (h.51)

Do MB = MC nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{DB}{MC}.\dfrac{MB}{DC}$. (1)

Theo bổ đề về hai tam giác có một góc bằng nhau (Ví dụ 14) ta có

$$\frac{DB}{MC} = \frac{S_{ADB}}{S_{AMC}} = \frac{AB.AD}{AM.AC}. \qquad (2)$$

$$\frac{MB}{DC} = \frac{S_{AMB}}{S_{ADC}} = \frac{AB.AM}{AD.AC}. \qquad (3)$$



Hình 51

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB.AD}{AM.AC}.\dfrac{AB.AM}{AD.AC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$.

Lưu ý : Do $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ nên đường thẳng AD đối xứng với đường trung tuyến AM qua đường phân giác của góc A. Ta gọi AD là *đường đối trung* đi qua A.

II. TỈ SỐ CÁC ĐƯỜNG CAO, TỈ SỐ DIỆN TÍCH CỦA HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

Nếu hai tam giác đồng dạng thì tỉ số các đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng, tỉ số diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

Nếu $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ có $\dfrac{AB}{A'B'} = k$, AH và A'H' là các đường cao thì $\dfrac{AH}{A'H'} = k$, $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$.

Ví dụ 39. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M và N theo thứ tự là hình chiếu của E và D trên BC.

a) Chứng minh rằng tỉ số các khoảng cách từ H đến EM và DN bằng $\dfrac{EM}{DN}$.

b) Gọi O là giao điểm của DM và EN. Chứng minh rằng HO vuông góc với BC.

Giải (h.52)

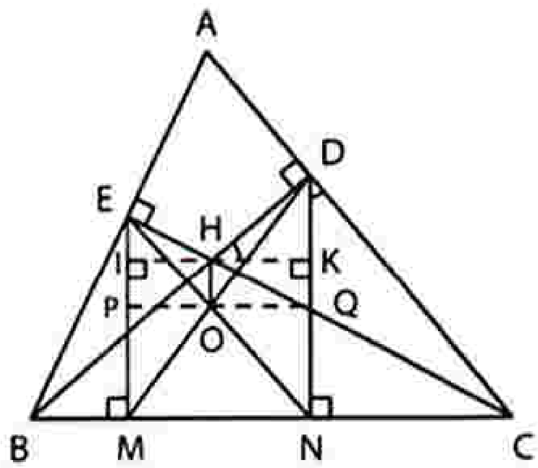
a) Kẻ $HI \perp EM$, $HK \perp DN$. $\triangle KHD$ và $\triangle NDC$ có $\widehat{K} = \widehat{N} = 90^\circ$, $\widehat{KHD} = \widehat{NDC}$ (cùng phụ $\widehat{HDK}$) nên $\triangle KHD \backsim \triangle NDC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HK}{DN} = \dfrac{HD}{DC}$. (1)

Tương tự $\dfrac{HI}{EM} = \dfrac{HE}{EB}$. (2)

Ta lại có $\triangle HBE \backsim \triangle HCD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HE}{EB} = \dfrac{HD}{DC}$. (3)



Hình 52

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{HI}{EM} = \dfrac{HK}{DN} \Rightarrow \dfrac{HI}{HK} = \dfrac{EM}{DN}$. (4)

b) Kẻ $OP \perp EM$, $OQ \perp DN$.

$\triangle OEM \backsim \triangle OND$ (g.g) có OP và OQ là hai đường cao tương ứng nên

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{EM}{DN}. \qquad (5)$$

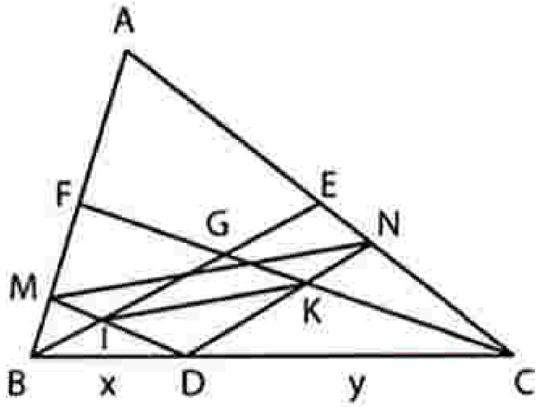
Từ (4) và (5) suy ra $\frac{HI}{HK} = \frac{OP}{OQ}$, chứng tỏ HO // EM, mà $EM \perp BC$ nên $HO \perp BC$.

Ví dụ 40. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BE và CF cắt nhau ở G. Gọi D là một điểm trên cạnh BC. Qua D kẻ đường thẳng song song với CF, cắt BE và BA theo thứ tự ở I và M. Qua D kẻ đường thẳng song song với BE, cắt CF và CA theo thứ tự ở K và N. Tìm vị trí của điểm D để :

a) Tứ giác GIDK có diện tích lớn nhất;

b) Tam giác DMN có diện tích lớn nhất.

Giải (h.53)



Hình 53

a) Đặt $S_{GBC} = S$, $S_{GIDK} = S'$, $BD = x$, $DC = y$. Các tam giác IBD, GBC, KDC đồng dạng nên $\frac{S'}{S} = \frac{S - S_{IBD} - S_{KDC}}{S}$

$$= 1 - \left(\frac{x}{BC}\right)^2 - \left(\frac{y}{BC}\right)^2 = 1 - \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2}.$$

S' lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2}$ nhỏ nhất.

Do $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ nên $\frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} \geq \frac{1}{2}$.

S' lớn nhất $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ D là trung điểm của BC.

b) Ta có DM // CF nên $\frac{DM}{DI} = \frac{CF}{CG} = \frac{3}{2}$, tương tự $\frac{DN}{DK} = \frac{3}{2}$

suy ra $\frac{S_{DMN}}{S_{DIK}} = \frac{DM}{DI} \cdot \frac{DN}{DK} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow S_{DMN} = \frac{9}{4} S_{DIK} = \frac{9}{8} S'$.

S_{DMN} lớn nhất $\Leftrightarrow$ S' lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$ (theo câu a) $\Leftrightarrow$ D là trung điểm của BC.

BÀI TẬP

Các trường hợp đồng dạng của tam giác

67. Cho tam giác ABC có AC = 12 cm, BC = 7 cm, $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Tính AB.

68. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$, I là trung điểm của BC, đặt IB = IC = a. Các điểm M, N theo thứ tự di chuyển trên các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{MIN} = \alpha$.

a) Tính tích BM.CN theo a.

b) Chứng minh rằng NI là tia phân giác của góc MNC.

c) Chứng minh rằng khoảng cách từ I đến MN không đổi.

69. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{C} = 20^o$, đường phân giác CD. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = 30^o$. Tia phân giác của góc CBE cắt AC ở I. Chứng minh rằng DE song song với BI.

70. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H có HA = 1 cm, $HB = \sqrt{5}$ cm, $HC = 2\sqrt{10}$ cm. Tính diện tích tam giác ABC.

71. Tam giác ABC là tam giác gì, nếu có điểm D thuộc cạnh BC thỏa mãn AD chia tam giác ABC thành hai tam giác đồng dạng?

72. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, điểm D đối xứng với A qua B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với DH cắt BC ở I. Chứng minh rằng HI = IC.

73. Cho hình thoi ABCD, M là trung điểm của BC. Trên đoạn AM lấy điểm E sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{CAM}$. Chứng minh rằng :

a) $\triangle DAE \backsim \triangle AMB$; b) $\widehat{MED} = \widehat{BCD}$.

74. Cho tam giác ABC, AB < AC, điểm D trên cạnh AC sao cho AD = AB, điểm E trên đoạn AD sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{C}$. Đường thẳng đi qua A và song song với BD cắt BE ở K. Gọi M là giao điểm của KD và BC. Chứng minh rằng BM = MC.

Hướng dẫn : Kẻ EI // BC (I ∈ KD). Hãy chứng minh $\frac{BM}{EI} = \frac{MC}{EI}$.

75. Cho hình vuông ABCD. Một đường thẳng đi qua C cắt các tia đối của tia BA, DA tại E, F. Gọi M là giao điểm của DE và BC. Gọi H, N theo thứ tự là giao điểm của BF với DE, DC. Chứng minh rằng :

a) MN song song với EF;　　　　b) H là trực tâm của tam giác AMN.

76. Cho tam giác đều ABC, trọng tâm G. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = AG. Gọi giao điểm của DG với AC, BC theo thứ tự là E, K. Chứng minh rằng DE = EK.

Hướng dẫn : Kẻ DI // AC (I $\in$ BC). Hãy chứng minh IC = CK.

77. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH, điểm D trên cạnh AB. Gọi I là hình chiếu của D trên BC, lấy điểm K trên đoạn HC sao cho HK = BI. Đường vuông góc với DK tại K cắt AH ở G. Chứng minh rằng $\widehat{ACG} = 90^0$.

78. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Lấy điểm O nằm trong tam giác HBC sao cho $\widehat{OBH} = \widehat{OCH}$. Gọi D và E theo thứ tự là hình chiếu của O trên AB và AC. Chứng minh rằng OH đi qua trung điểm của DE.

79. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AH. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ các tam giác ABE vuông tại B, ACF vuông tại C có $\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$. Chứng minh rằng các đường thẳng AH, BF, CE đồng quy.

80. Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm D, E, F theo thứ tự thuộc các cạnh BC, AC, AB sao cho $\widehat{BDF} = \widehat{CDE}$, $\widehat{CED} = \widehat{AEF}$, $\widehat{AFE} = \widehat{BFD}$. Chứng minh rằng :

a) $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$;

b) AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC.

81. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác AD. Hình vuông MNPQ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC. Gọi E là giao điểm của BN và MQ.

a) Chứng minh rằng DE song song với AC.

b) Gọi F là giao điểm của CM và NP. Chứng minh rằng DE = DF.

c) Chứng minh rằng AE = AF.

82. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM, điểm D thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$. Đường thẳng đi qua D và song song với AB cắt AC ở E. Đường thẳng đi qua D và song song với AC cắt AB ở F. Chứng minh rằng :

a) $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$;　　　　b) $\widehat{EFD} = \widehat{EDC}$.

Hướng dẫn : Sử dụng Ví dụ 38.

83. Cho hình chữ nhật ABCD. Điểm I nằm trong hình chữ nhật sao cho $\widehat{IAD} = \widehat{ICD}$. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{IDC} = \widehat{IBC}$; b) $S_{ABCD} = IA.IC + IB.ID$.

84. Cho hình vuông ABCD. Hãy dựng đường thẳng d đi qua B, cắt tia đối của các tia AD và CD lần lượt ở E và F sao cho tích BE.BF có giá trị nhỏ nhất.

Tỉ số các đường cao, tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng

85. Một hình thang có đáy nhỏ 17 cm, đáy lớn 31 cm được chia thành hai phần bởi một đoạn thẳng song song với hai đáy dài 25 cm và có hai đầu mút nằm trên hai cạnh bên. Chứng minh rằng hai phần đó có diện tích bằng nhau.

86. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Biết diện tích các tứ giác BDHF và CDHE bằng nhau. Chứng minh rằng AB = AC.

87. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm vị trí của các điểm D, E, F theo thứ tự nằm trong các cạnh BC, AC, AB sao cho tam giác DEF vuông tại D đồng dạng với tam giác đã cho và có diện tích nhỏ nhất.

88. Cho tam giác ABC có diện tích S, điểm O nằm trong tam giác. Kẻ OD song song với AB ($D \in BC$), kẻ OE song song với BC ($E \in CA$), kẻ OF song song với CA ($F \in AB$).

a) Kẻ EH song song với AB ($H \in BC$), kẻ FI song song với BC ($I \in CA$), kẻ DK song song với CA ($K \in AB$). Chứng minh rằng diện tích tam giác DEF bằng nửa diện tích lục giác FIEHDK.

b) Chứng minh rằng $S_{DEF} \le \dfrac{S}{3}$.

Chuyên đề 5

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

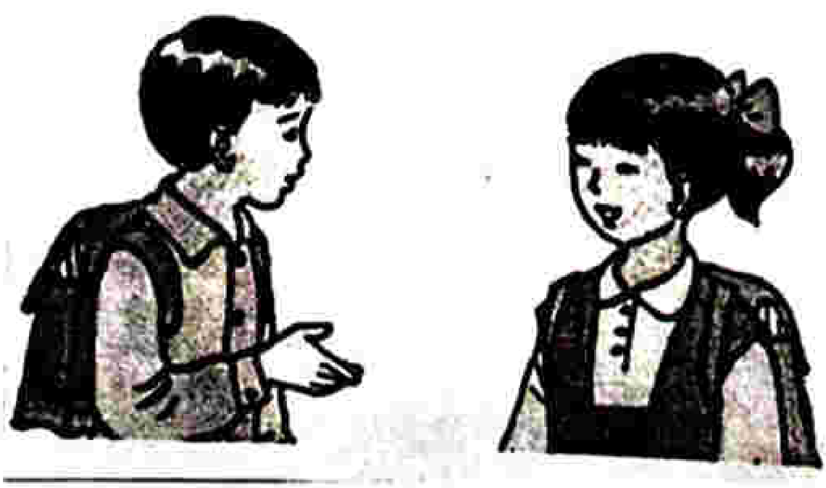
TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Định lí Py-ta-go học ở lớp 7 là một trong những hệ thức lượng trong tam giác vuông. Chuyên đề này giới thiệu thêm những hệ thức quan trọng khác trong tam giác vuông : hệ thức giữa cạnh, đường cao và hình chiếu của cạnh; hệ thức giữa cạnh và góc. Đặc biệt các tỉ số lượng giác của góc nhọn cho ta giải quyết nhiều bài toán thực tế.

Hình học và Đại số

DÙNG HÌNH HỌC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

Tuấn đố Lan chứng minh bất đẳng thức Cô-si bằng hình học : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ với x, y là các số dương. Bạn hãy giúp Lan.



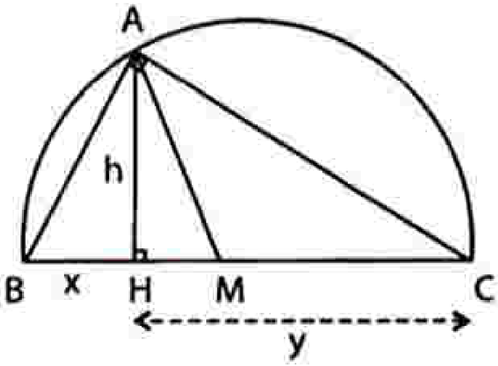
Giải

Trên hai tia đối nhau gốc H, lấy các điểm B và C sao cho HB = x, HC = y. Vẽ nửa đường tròn tâm M, đường kính BC và đường vuông góc với BC tại H, chúng cắt nhau ở A (h.54).

Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH nên $AH^2 = HB.HC = xy \Rightarrow AH = \sqrt{xy}$.

$AM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{x+y}{2}$. Ta có $AM \geq AH$ nên $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi H trùng M, tức là x = y.



Hình 54

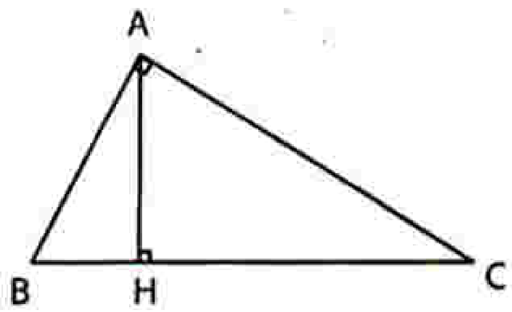
I. HỆ THỨC VỀ CẠNH, HÌNH CHIẾU VÀ ĐƯỜNG CAO

Với tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH (h.55) ngoài định lí Py-ta-go, có các hệ thức lượng sau :

$HB.HC = AH^2$

$AB^2 = BC.BH$, $AC^2 = BC.CH$

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.



Hình 55

Ví dụ 41. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = h. Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm của HB, HC. Gọi I là trực tâm của tam giác ADE. Tính độ dài IH.

Giải (h.56)

Các tam giác vuông HAD và HEI có

$\widehat{HAD} = \widehat{HEI}$ (cùng phụ $\widehat{ADH}$)

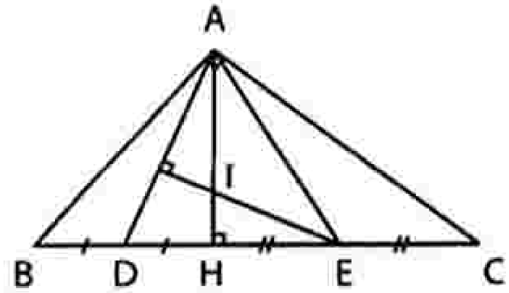
nên $\triangle HAD \backsim \triangle HEI$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DH}{IH} = \dfrac{AH}{EH} \Rightarrow IH = \dfrac{DH.EH}{AH}$. (1)

Ta lại có

$AH^2 = HB.HC = 2DH.2EH = 4DH.EH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IH = \dfrac{AH^2}{4} : AH = \dfrac{h}{4}$.



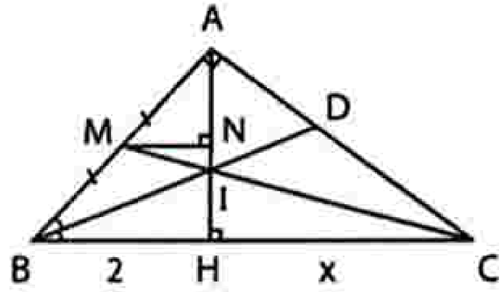
Hình 56

Ví dụ 42. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác BD, đường trung tuyến CM, đường cao AH đồng quy.

a) Chứng minh rằng AB = HC.

b) Tính HC, biết HB = 2 cm.

Giải (h.57)



Hình 57

a) Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH nên $AB^2 = BC.BH$. (1)

Kẻ $MN \perp AH$. Gọi I là giao điểm của BD, CM, AH. Theo định lí Ta-lét và tính chất đường phân giác, ta có :

$$\frac{MN}{HC} = \frac{IM}{IC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow \frac{2MN}{HC} = \frac{2BM}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC.BH = AB.HC. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB^2 = AB.HC \Rightarrow AB = HC$.

b) Đặt HC = AB = x. Từ $AB^2 = BH.BC$ ta có $x^2 = 2(x + 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 5$

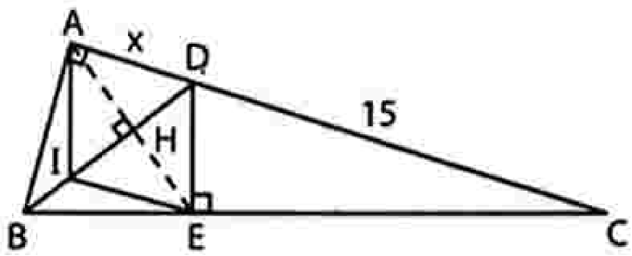
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 5$. Do $x > 0$ nên $x = 1 + \sqrt{5}$. Vậy $HC = 1 + \sqrt{5}$ (cm).

Ví dụ 43. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD.

a) Gọi E là hình chiếu của D trên BC, H là giao điểm của AE và BD, I đối xứng với D qua H. Tứ giác ADEI là hình gì ?

b) Tính độ dài AD, biết BD = 7 cm, DC = 15 cm.

Giải (h.58)



Hình 58

a) $\triangle ABD = \triangle EBD$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow$ BA = BE, AD = DE. Tam giác ABE cân tại B có BH là đường phân giác nên $BH \perp AE$, HA = HE.

Tứ giác ADEI có HA = HE, HD = HI nên là hình bình hành, lại có $AE \perp DI$ nên là hình thoi.

b) Đặt AD = EI = x, HI = HD = y.

Từ $AD^2 = DB.HD$ có $x^2 = 7y$. (1)

Do EI // AC nên $\frac{EI}{CD} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{7-2y}{7}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $30x^2 + 49x - 735 = 0 \Leftrightarrow (5x - 21)(6x + 35) = 0$.

Do $x > 0$ nên $x = 4{,}2$. Vậy AD = 4,2 cm.

Nhận xét : Câu a) là câu gợi ý để giải câu b). Sự xuất hiện các điểm E, H, I ở câu a) dẫn tới hệ thức lượng trong tam giác vuông. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông và định lí Ta-lét giúp ta giải câu b).

II. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN. HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. Cần nắm vững định nghĩa các tỉ số lượng giác $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ và các hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông :

Cạnh góc vuông = Cạnh huyền × sin góc đối;

Cạnh góc vuông = Cạnh huyền × côsin góc kề;

Cạnh góc vuông = Cạnh góc vuông kia × tang góc đối;

Cạnh góc vuông = Cạnh góc vuông kia × côtang góc kề.

2. Từ hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông, suy ra :

– Đường cao của tam giác đều cạnh a bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

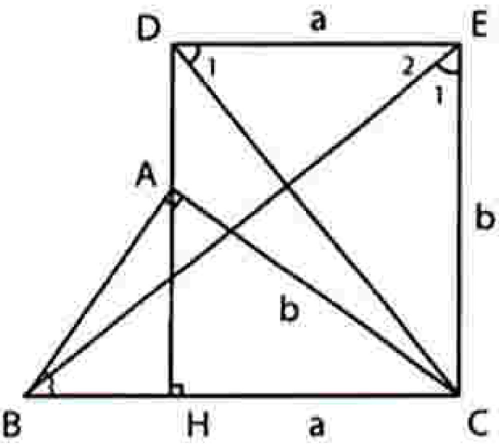
– Diện tích của tam giác đều cạnh a bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

– Diện tích của tam giác ABC bằng $\frac{1}{2}AB.AC\sin\alpha$, trong đó α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB, AC.

Với công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, dễ dàng suy ra bổ đề tổng quát hơn bổ đề ở *Ví dụ 14* : Nếu $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (hoặc $\widehat{A}$ bù $\widehat{A'}$) thì $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$.

Ví dụ 44. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Trên tia đối của tia AH lấy điểm D sao cho HD = AC. Vẽ hình chữ nhật CHDE. Chứng minh rằng BE vuông góc với CD.

Giải (h.59)



Hình 59

Đặt DE = HC = a, EC = DH = AC = b.

Ta có $\tan\widehat{D}_1 = \dfrac{EC}{DE} = \dfrac{b}{a}$. (1)

$\tan\widehat{E}_1 = \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{BC}{b}$. (2)

Tam giác vuông ABC có $AC^2 = BC.HC$

$\Rightarrow b^2 = BC.a \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{BC}{b}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$\tan\widehat{D}_1 = \tan\widehat{E}_1 \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{E}_1 \Rightarrow \widehat{D}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ \Rightarrow BE \perp CD$.

BÀI TẬP

Hệ thức về cạnh, hình chiếu và đường cao

89. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D và E theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB và AC. Biết $\dfrac{AB}{AC} = k$, tính tỉ số $\dfrac{BD}{CE}$.

90. Tính diện tích nhỏ nhất của tam giác vuông có đường cao ứng với cạnh huyền bằng h.

Tỉ số lượng giác của góc nhọn. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông

91. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, đường trung tuyến AM = m. Gọi BD, CE là các đường cao của tam giác ABC, I là trung điểm của DE. Tính AI.

92. Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{5}$ cm, AC = 3 cm, $\widehat{B} + 2\widehat{C} = 90^\circ$. Tính sinC.

93. Tính diện tích tam giác ABC, biết $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 135^\circ$, BC = 2 cm.

Chuyên đề 6

ĐƯỜNG TRÒN. ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG THẲNG. ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG TRÒN

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Chuyên đề này bao gồm các nội dung sau :

– Đường tròn và các tính chất của nó : quan hệ độ dài giữa đường kính và dây, quan hệ vị trí giữa đường kính và dây, quan hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đường tròn đến dây.

– Quan hệ giữa đường tròn với đường thẳng : đường thẳng không giao với đường tròn, đường thẳng tiếp xúc với đường tròn, đường thẳng cắt đường tròn.

– Quan hệ giữa hai đường tròn : không giao nhau, tiếp xúc nhau, cắt nhau.

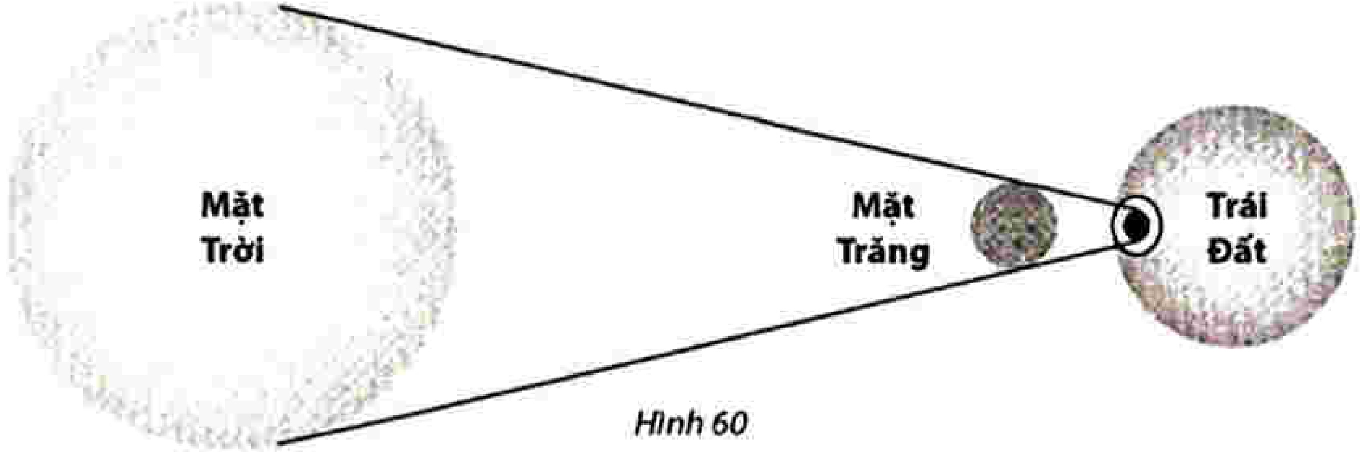
Trong thực tế đời sống và trong kĩ thuật, chúng ta gặp nhiều hình ảnh của những quan hệ trên : các hạt kim loại văng ra theo phương tiếp xúc với viên đá mài quay tròn, các bánh xe tròn và dây cua-roa, các bánh xe răng cưa ăn khớp với nhau, đoạn đường ray thẳng tiếp xúc với đoạn đường ray cong tại tiếp điểm là chỗ ngoặt,...

Chúng ta cũng sẽ thấy sự phong phú và đa dạng của các bài toán về đường tròn trong chuyên đề này.

Vài nét lịch sử

NHÀ KHOA HỌC VIỆT NAM ĐÃ DỰ BÁO ĐÚNG NHẬT THỰC VÀO ĐẦU THẾ KỈ XIX

Nhật thực là hiện tượng Mặt Trăng chặn ánh sáng từ Mặt Trời chiếu xuống Trái Đất (h.60).



Hình 60

Vào năm 1817, đã có một người Việt Nam dự báo đúng nhật thực, người đó là ông Nguyễn Hữu Thận (1757 – 1831), tên hiệu là *Ý Trai*.

Ông sinh tại xã Triệu Đại, huyện Triệu Phong, tỉnh Quảng Trị. Được tiếp thu kiến thức khoa học từ người cha vốn say mê toán pháp và nghiên cứu thời tiết, ông đã để hết tâm trí tự học, tự nghiên cứu toán học và thiên văn học.

Sau khi về hưu với các chức vụ cao : Thượng thư bộ Lại, Thượng thư bộ Hộ, Thượng thư bộ Binh, ông viết cuốn *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục* (Một điều tâm đắc về toán pháp của Ý Trai) gồm 8 quyển, bao gồm những kiến thức hình học, số học, đại số học và một số bài toán.

Về thiên văn học, ông đã làm lịch *Hiệp Kỉ* thay cho lịch đang dùng lúc đó đã sai khác với thực tế rất nhiều. Năm 1815, ông đã tính toán và báo trước là 2 năm nữa, vào ngày 16-5-1817 sẽ có nhật thực và sự việc đã xảy ra đúng như ông tính toán. Vua Gia Long đã gọi ông là "thiên văn gia vô xuất kì hữu" (nhà thiên văn không ai sánh kịp).

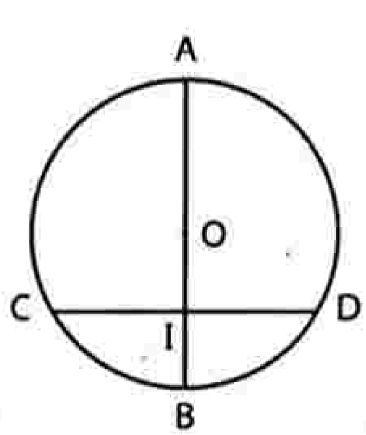
I. ĐƯỜNG TRÒN

1. Về quan hệ độ dài giữa đường kính AB và dây CD của một đường tròn, ta có : đường kính là dây lớn nhất ($AB \geq CD$).

2. Về quan hệ vị trí giữa đường kính AB và dây CD cắt nhau tại I (h.61), ta có :

– Nếu $AB \perp CD$ thì $IC = ID$.

– Nếu $IC = ID$ và I khác O thì $AB \perp CD$.



Hình 61

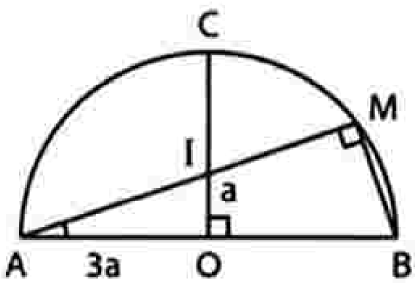
3. Về liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây, ta có :

– Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm. Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

– Dây lớn hơn thì gần tâm hơn, dây gần tâm hơn thì lớn hơn.

Ví dụ 45. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, bán kính OC vuông góc với AB. Trên bán kính OC lấy điểm I sao cho $OI = \frac{1}{3}OC$. Gọi M là giao điểm của AI và nửa đường tròn. Tính tỉ số $\frac{AI}{AM}$.

Giải (h.62)



Hình 62

Đặt OI = a thì OA = 3a. Tam giác vuông AOI có $AI^2 = OA^2 + OI^2 = 9a^2 + a^2 = 10a^2$

$\Rightarrow AI = a\sqrt{10}$. (1)

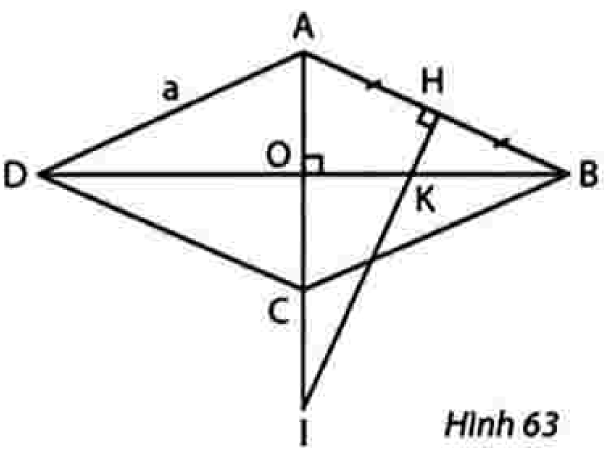
$\frac{AM}{AB} = \cos\widehat{A} = \frac{AO}{AI}$

$\Rightarrow \frac{AM}{6a} = \frac{3a}{a\sqrt{10}} \Rightarrow AM = \frac{18}{\sqrt{10}}a$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AI}{AM} = \sqrt{10} : \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{5}{9}$.

Ví dụ 46. Cho hình thoi ABCD cạnh a. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC. Chứng minh rằng $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{4}{a^2}$.

Giải (h.63)



Hình 63

Đường trung trực của AB cắt AB, BD, AC theo thứ tự ở H, K, I.

I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ nên IA = R, K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ nên KB = r.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có

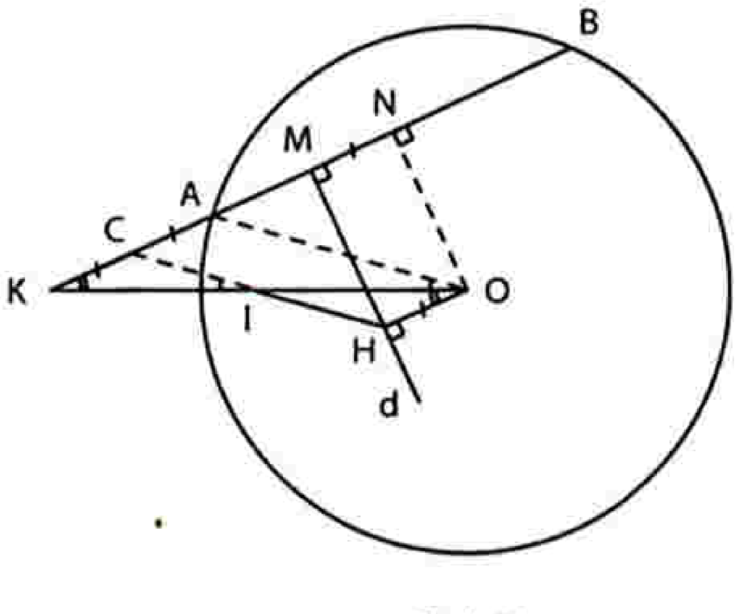
$$\triangle HAI \backsim \triangle OAB\,(g.g) \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AH}{AO} \Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{AO} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{2AO}{a^2}. \qquad (1)$$

$$\triangle HKB \backsim \triangle OAB\,(g.g) \Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{BH}{BO} \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{BO} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{2BO}{a^2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{4(AO^2 + BO^2)}{a^4} = \frac{4a^2}{a^4} = \frac{4}{a^2}$.

Ví dụ 47. Qua điểm K nằm ngoài đường tròn (O ; R), kẻ đường thẳng cắt đường tròn (O) tại A và B (A nằm giữa K và B). Gọi d là đường trung trực của KB, H là hình chiếu của O trên d. Gọi I là trung điểm của OK. Tính IH.

Giải (h.64)



Hình 64

Gọi M là trung điểm của KB, N là trung điểm của AB. Ta có OHMN là hình chữ nhật nên

$OH = MN = MB - NB$

$= \frac{KB}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{KA}{2}$.

Gọi C là trung điểm của KA thì $KC = \frac{KA}{2}$, do đó OH = KC.

$\triangle HOI$ và $\triangle CKI$

có OH = KC, $\widehat{HOI} = \widehat{CKI}$ (so le trong OH // KC), OI = KI nên $\triangle HOI = \triangle CKI$ (c.g.c) $\Rightarrow$ IH = IC. (1)

Do IC là đường trung bình của $\triangle OKA$ nên $IC = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IH = \frac{R}{2}$.

Ví dụ 48. Cho đường tròn (O ; R) và hai điểm A, B nằm ngoài đường tròn, trong đó OA = 2R. Gọi C là giao điểm của tia OA và đường tròn (O).

a) Dựng điểm I trên bán kính OC sao cho với mọi điểm M thuộc đường tròn (O) đều có AM = 2IM.

b) Dựng điểm M thuộc đường tròn (O) sao cho tổng AM + 2MB nhỏ nhất.

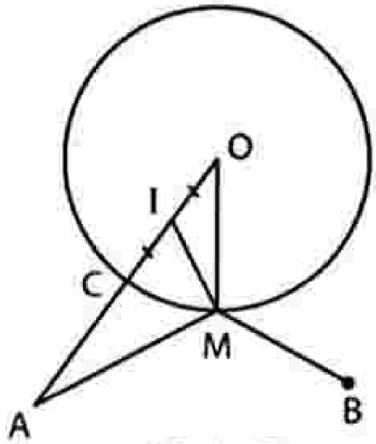
Giải (h.65)

a) Điểm I phải dựng là trung điểm của OC. Thật vậy,

do $\dfrac{OI}{OM} = \dfrac{OM}{OA}\left(=\dfrac{1}{2}\right)$

nên $\triangle IOM \backsim \triangle MOA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{IM}{AM} = \dfrac{OI}{OM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AM = 2IM.$



Hình 65

b) Từ câu a), suy ra AM + 2MB

= 2IM + 2MB = 2(IM + MB) ≥ 2IB.

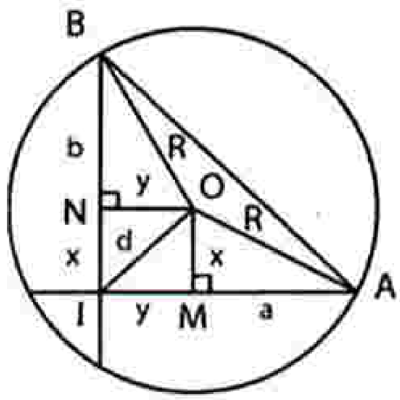
min(AM + 2MB) = 2IB ⇔ M là giao điểm của đoạn IB với đường tròn (O).

Ví dụ 49. Cho đường tròn (O ; R), điểm I nằm trong đường tròn có OI = d > 0. Qua I vẽ hai tia vuông góc với nhau, cắt đường tròn ở A và B sao cho O nằm trong góc vuông AIB.

a) Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của O trên IA, IB. Đặt MA = a, NB = b, OM = x, ON = y. Tính $a^2 + b^2$ theo R và d.

b) Tính diện tích lớn nhất của tam giác AIB.

Giải (h.66)



Hình 66

a) $a^2 + b^2 = (R^2 - x^2) + (R^2 - y^2)$

$= 2R^2 - (x^2 + y^2) = 2R^2 - d^2.$

b) Đặt $S_{AIB} = S$, ta có $2S = IA.IB = (a + y)(b + x)$

$= (ab + xy) + (ax + by).$ (1)

Theo bất đẳng thức Cô-si :

$$ab + xy \le \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{2R^2 - d^2}{2} + \frac{d^2}{2} = R^2. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki :

$$ax + by \le \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} = \sqrt{(2R^2 - d^2)d^2} = d\sqrt{2R^2 - d^2}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2S \le R^2 + d\sqrt{2R^2 - d^2}$ (không đổi).

$$\max S = \frac{R^2 + d\sqrt{2R^2 - d^2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \text{IA và IB tạo với IO góc } 45^\circ.$$

II. ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG THẲNG

1. Có hai dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn :

– Nếu đường thẳng a vuông góc với bán kính OC tại điểm C của đường tròn (O) thì a là tiếp tuyến của (O).

– Nếu đường tròn (O ; R) có khoảng cách d từ O đến đường thẳng a thỏa mãn d = R thì a là tiếp tuyến của (O).

2. Cần nắm vững các tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau.

3. Với đường tròn nội tiếp tam giác ABC có các cạnh a, b, c và D, E là các tiếp điểm trên AB, AC thì $AD = AE = \dfrac{b + c - a}{2}$.

Ví dụ 50. Cho đường tròn tâm O đường kính AB, các dây AC và BD cắt nhau tại E. Gọi H là hình chiếu của E trên AB. Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt HE ở I. Chứng minh rằng IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

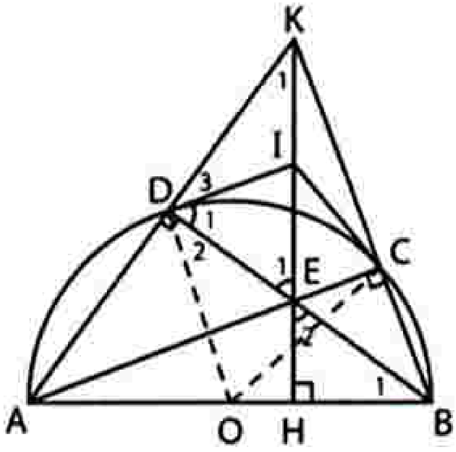
Giải (h.67)

Gọi K là giao điểm của AD và BC. Ta có AC ⊥ KB, BD ⊥ KA nên E là trực tâm của △KAB, do đó các điểm K, I, E, H thẳng hàng.

DI là tiếp tuyến ⇒ $\widehat{D}_1$ phụ $\widehat{D}_2$.

Mặt khác, $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ mà $\widehat{E}_2$ phụ $\widehat{B}_1$ nên $\widehat{E}_1$ phụ $\widehat{B}_1$.

Ta lại có $\widehat{D}_2 = \widehat{B}_1$ nên $\widehat{D}_1 = \widehat{E}_1 \Rightarrow \widehat{D}_3 = \widehat{K}_1$, do đó IK = ID = IE.



Hình 67

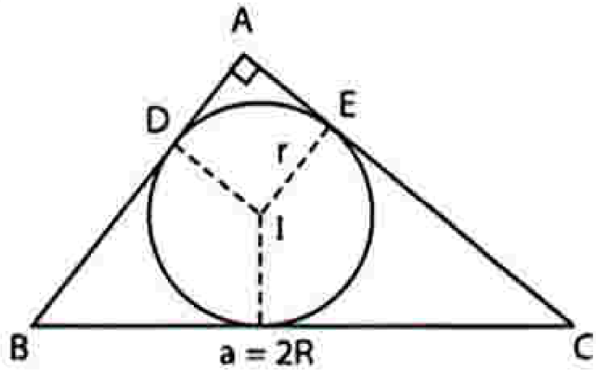
$\triangle ECK$ vuông có CI là đường trung tuyến nên IC = IE = ID.

$\triangle OIC = \triangle OID$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OCI} = \widehat{ODI} = 90^\circ$.

Vậy IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 51. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB < AC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Đặt BC = a, AC = b, AB = c. Tính tỉ số a : b : c, biết $\frac{r}{R} = \frac{2}{5}$.

Giải (h.68)



Hình 68

$\frac{r}{R} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2R = 5r$. Ta sẽ tính a, b, c theo r.

Ta có $a = 2R = 5r$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, D và E là các tiếp điểm trên AB và AC. Ta có

AD + AE = b + c − a. Kết hợp với ADIE là hình vuông nên $2r = b + c - a$

$\Rightarrow b + c = 2r + a = 2r + 5r = 7r.$ (1)

$b^2 + c^2 = a^2 = (5r)^2 = 25r^2.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2bc = (b+c)^2 - (b^2 + c^2) = (7r)^2 - 25r^2 = 24r^2.$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra

$$(b-c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 25r^2 - 24r^2 = r^2 \Rightarrow b - c = r. \quad (4)$$

Từ (1) và (4) suy ra $b = 4r$, $c = 3r$. Do đó a : b : c = 5 : 4 : 3.

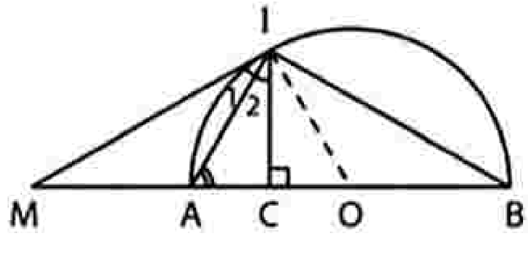
Ví dụ 52. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm M thuộc tia đối của tia AB. Kẻ tiếp tuyến MI với đường tròn (I là tiếp điểm). Gọi C là hình chiếu của I trên AB. Chứng minh hệ thức MB.AC = MA.CB.

Giải (h.69)

$\widehat{MIO} = 90^\circ \Rightarrow \hat{I}_1$ phụ $\widehat{OIA}$. (1)

$IC \perp OA \Rightarrow \hat{I}_2$ phụ $\widehat{OAI}$. (2)

Ta có $\widehat{OIA} = \widehat{OAI}$ ($\triangle OAI$ cân) nên từ (1) và (2) suy ra $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$.



Hình 69

Ta có $IB \perp IA$, mà IA là phân giác trong nên IB là phân giác ngoài của $\triangle IMC$.

Suy ra $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{IM}{IC} = \dfrac{BM}{BC}$

$\Rightarrow MB.AC = MA.CB.$

Ví dụ 53. Trong các tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC = a, tam giác nào có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất ?

Giải (h.70)

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Bạn đọc tự chứng minh

$2r = b + c - a.$ (1)

Ta có $(b + c)^2 \leq 2(b^2 + c^2) = 2a^2$

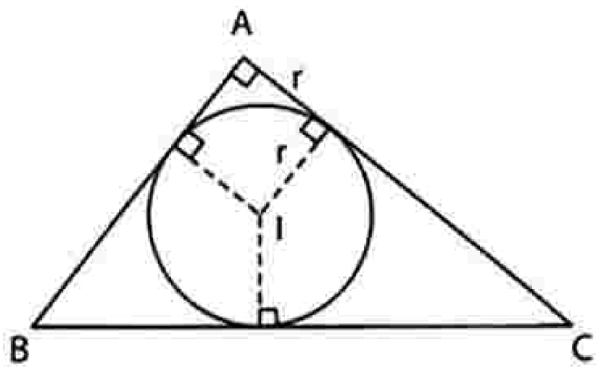
$\Rightarrow b + c \leq a\sqrt{2}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$2r \leq a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$

$\Rightarrow r \leq \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}.a$

$\max r = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}.a \Leftrightarrow AB = AC.$



Hình 70

III. ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG TRÒN

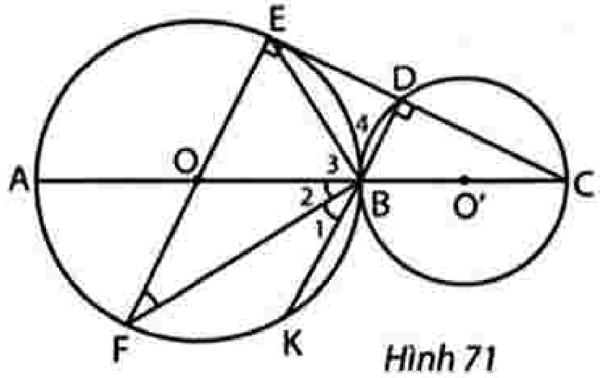
1. Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.

2. Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai tiếp điểm đối xứng nhau qua đường nối tâm.

Ví dụ 54. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính BC tiếp xúc ngoài tại B. Qua C kẻ tiếp tuyến CE với đường tròn (O), E là tiếp điểm. CE cắt đường tròn (O') ở D (khác C). Chứng minh rằng BE là tia phân giác của góc ABD.

Giải (h.71)

Gọi giao điểm của EO, DB với (O) lần lượt là F, K.



Hình 71

EF // DK $\Rightarrow \widehat{F} = \widehat{B}_1$, mà $\widehat{F} = \widehat{B}_2$

nên $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$.

Ta có $\widehat{EBF} = 90^o$ nên $\widehat{B}_3$ phụ $\widehat{B}_2$, $\widehat{B}_4$ phụ $\widehat{B}_1$. Suy ra $\widehat{B}_3 = \widehat{B}_4$, do đó BE là tia phân giác của góc ABD.

Ví dụ 55. Cho đường tròn (O) bán kính 4 cm, điểm A nằm ngoài đường tròn có OA = 8 cm. Kẻ tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Vẽ đường tròn (K) đi qua C và tiếp xúc với AB tại A.

a) Tính bán kính của đường tròn (K).

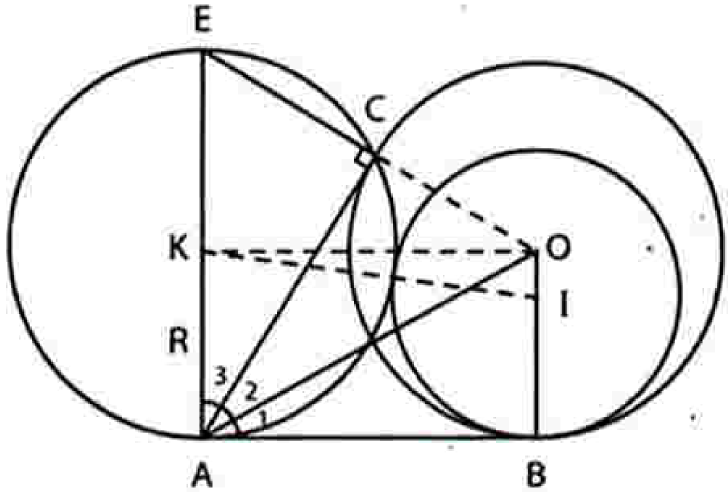
b) Vẽ đường tròn (I) bán kính 3 cm tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại B. Chứng minh rằng các đường tròn (K) và (I) tiếp xúc ngoài với nhau.

Giải (h.72)

a) Đặt AK = R. Vẽ đường kính AE của (K). Ta có

$\widehat{ACE} + \widehat{ACO} = 90^o + 90^o = 180^o$

nên E, C, O thẳng hàng.



Hình 72

$\triangle OBA$ vuông tại B có $OB = \frac{1}{2}OA$ nên $\widehat{A}_1 = 30^o$.

Suy ra $\widehat{A}_2 = 30^o$, $\widehat{A}_3 = 30^o$, $\widehat{E} = 60^o$. Do đó $\triangle AOE$ đều, AE = AO = 8 cm. Vậy R = 4 cm.

b) Điểm I thuộc đoạn OB và OI = OB – IB = 4 – 3 = 1 (cm).

ABOK là hình chữ nhật $\Rightarrow$ OK = AB

$\Rightarrow OK^2 = AB^2 = OA^2 - OB^2 = 8^2 - 4^2 = 48.$

$KI^2 = OK^2 + OI^2 = 48 + 1 = 49 \Rightarrow KI = 7$ (cm). (1)

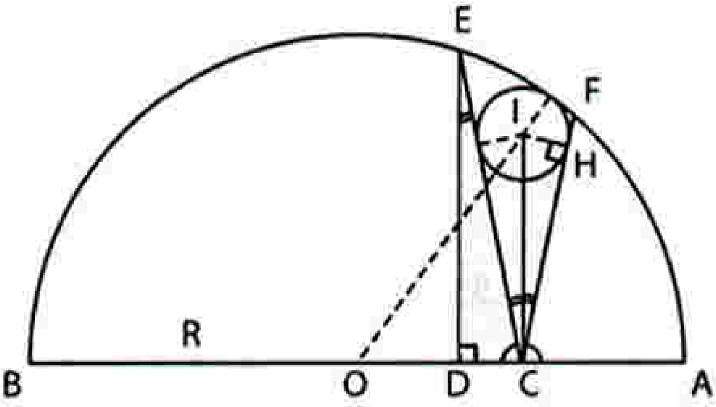
Tổng các bán kính của hai đường tròn (K) và (I) bằng 4 + 3 = 7 (cm). (2)

Từ (1) và (2) suy ra (K) và (I) tiếp xúc ngoài.

Ví dụ 56. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R (với $R \geq 9$cm). Trên bán kính OA có các điểm C và D sao cho AC = 6 cm, AD = 9 cm. Đường vuông góc với OA tại D cắt nửa đường tròn ở E. Điểm F thuộc nửa đường tròn sao cho $\widehat{ACF} = \widehat{DCE}$. Đường tròn tâm I bán kính x tiếp xúc với đoạn CF tại H, tiếp xúc với đoạn CE và tiếp xúc với cung EF.

a) Tính CH theo R và x.

b) Tính x.



Hình 73

Giải (h.73)

a) $\triangle CHI \backsim \triangle EDC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CH}{ED} = \dfrac{IH}{CD}$ (1)

$ED^2 = DA.DB = 9(2R - 9)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$CH = \frac{IH.ED}{CD} = \frac{x.3\sqrt{2R-9}}{3} = x.\sqrt{2R-9}. \quad (3)$$

b) $\triangle$ OCI vuông tại C $\Rightarrow OI^2 = OC^2 + CI^2 = OC^2 + IH^2 + CH^2$

$\Rightarrow (R - x)^2 = (R - 6)^2 + x^2 + CH^2$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(R - x)^2 = (R - 6)^2 + x^2 + x^2(2R - 9)$

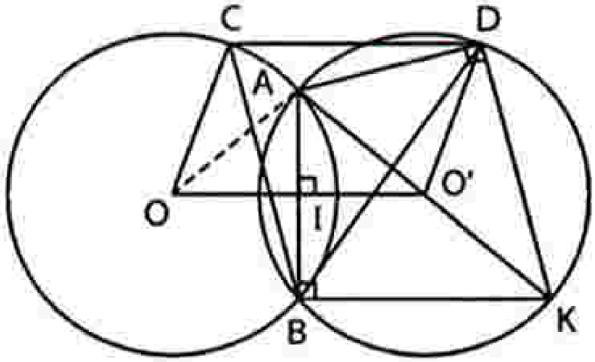
$\Leftrightarrow (2R - 9)x^2 + 2Rx - 12(R - 3) = 0$.

$\Delta' = R^2 + 12(2R - 9)(R - 3) = (5R - 18)^2$.

Do $R \geq 9$ và $x > 0$ nên $x = \dfrac{-R + (5R - 18)}{2R - 9} = 2$ (cm).

Ví dụ 57. Cho hai đường tròn (O), (O') có cùng bán kính cắt nhau ở A và B. Vẽ về một phía của OO' các bán kính OC và O'D song song với nhau. Chứng minh rằng A là trực tâm của tam giác BCD.

Giải (h.74)



Hình 74

Tứ giác OCDO' có OC // O'D, OC = O'D nên là hình bình hành, suy ra OO' // CD, OO' = CD. (1)

Gọi I là giao điểm của AB và OO'. $\triangle$AOO' cân tại A, AI là đường cao nên

$IO' = \frac{1}{2}OO'$, kết hợp với (1) có $IO' = \frac{1}{2}CD$. (2)

Kẻ đường kính AO'K. Ta có IO' là đường trung bình của $\triangle$ABK

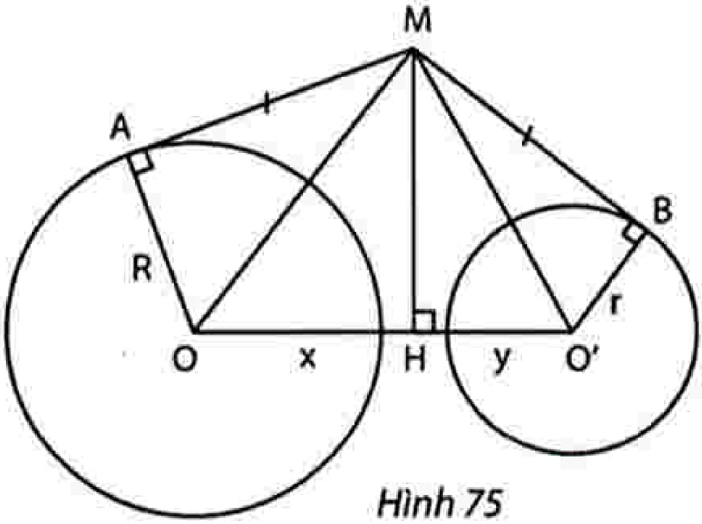
$\Rightarrow$ IO' // BK, $IO' = \frac{1}{2}BK$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra CD // BK, CD = BK nên CDKB là hình bình hành

$\Rightarrow$ DK // BC. Do DA $\perp$ DK và DK // BC nên DA $\perp$ BC. Do BA $\perp$ BK và BK // CD nên BA $\perp$ CD.

$\triangle$BCD có DA $\perp$ BC, BA $\perp$ CD nên A là trực tâm.

Ví dụ 58. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) ở ngoài nhau, OO' = d. Điểm M nằm ngoài hai đường tròn sao cho các đoạn tiếp tuyến kẻ từ M đến (O) và đến (O') bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của M trên OO'. Tính OH.



Hình 75

Giải (h.75)

Gọi các tiếp tuyến bằng nhau kẻ từ M đến (O) và (O') là MA và MB. Đặt OH = x, O'H = y.

Ta có x + y = d. (1)

$$x^2 - y^2 = (OM^2 - MH^2) - (O'M^2 - MH^2) = OM^2 - O'M^2$$
$$= (MA^2 + R^2) - (MB^2 + r^2) = R^2 - r^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x - y = \dfrac{R^2 - r^2}{d}$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $2x = d + \dfrac{R^2 - r^2}{d} \Rightarrow x = \dfrac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}$.

Lưu ý : Từ ví dụ trên suy ra H là điểm cố định và tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với OO' tại H.

Ví dụ 59. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2. Điểm C di chuyển trên nửa đường tròn. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với các bán kính OA, OC và cung AC. Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc với các bán kính OB, OC và cung BC. Gọi tiếp điểm của các đường tròn (I), (K) trên AB theo thứ tự là D, E. Tìm giá trị nhỏ nhất của DE.

Hướng dẫn : Đặt OD = x, OE = y. Hãy lập một hệ thức giữa x và y.

Giải (h.76)

Đặt $ID = r_1$, $KE = r_2$.

Ta có $OD^2 = OI^2 - ID^2$

$\Rightarrow x^2 = (1 - r_1)^2 - r_1^2 = 1 - 2r_1$

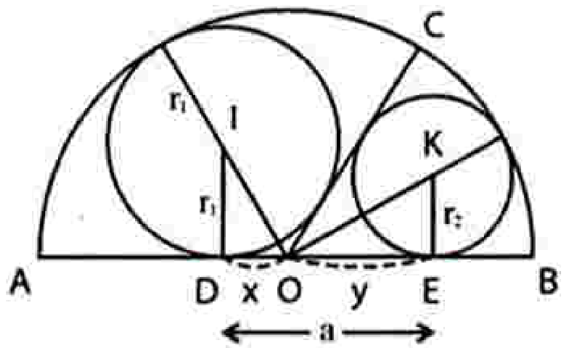
$\Rightarrow 1 - x^2 = 2r_1$. (1)

Tương tự $1 - y^2 = 2r_2$. (2)

$\triangle ODI \backsim \triangle KEO$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{OD}{KE} = \dfrac{DI}{EO} \Rightarrow \dfrac{x}{r_2} = \dfrac{r_1}{y}$

$\Rightarrow xy = r_1r_2$. (3)



Hình 76

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(1 - x^2)(1 - y^2) = 4xy$

$\Rightarrow 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 = 4xy \Rightarrow 1 - 2xy + x^2y^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$\Rightarrow (1 - xy)^2 = (x + y)^2$. Do $xy < 1$ nên $1 - xy = x + y$.

Đặt $x + y = a$ thì $1 - xy = a \Rightarrow 1 - a = xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + a \ge 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{2} + 1\right)^2 \ge 2 \Rightarrow \frac{a}{2} + 1 \ge \sqrt{2} \Rightarrow a \ge 2(\sqrt{2} - 1).$$

$\min a = 2(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của nửa đường tròn.

BÀI TẬP

Đường tròn

94. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Các điểm C, D thuộc nửa đường tròn, AC = CD = 30 cm, BD = 14 cm. Tính bán kính của đường tròn.

95. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BE và CF. Ở phía ngoài tam giác ABC, vẽ các nửa đường tròn có đường kính là AB và AC, chúng cắt BE và CF theo thứ tự ở I và K. Chứng minh rằng AI = AK.

96. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD nằm về một phía của AB. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của A, B trên CD. Kẻ dây DG vuông góc với AB.

Chứng minh rằng $S_{AEFB} = S_{ACBG}$.

97. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi D là giao điểm của AO và BC, E là giao điểm của BO và AC, F là giao điểm của CO và AB.

Chứng minh rằng $OD + OE + OF \ge \frac{3}{2}R$.

98. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R). Dựng đường thẳng đi qua A cắt đường tròn (O) tại B và C sao cho dây BC = a (0 < a < 2R).

99. Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, điểm M cố định thuộc đường kính AB, có MA = a, MB = b. Điểm C chuyển động trên đường tròn. Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của M trên AC, BC. Tìm vị trí của điểm C để hình chữ nhật MDCE có diện tích lớn nhất.

100. Cho đường tròn (O), dây AB cố định, điểm M chuyển động trên đường tròn. Vẽ hình bình hành BAMC. Tìm vị trí của điểm M để độ dài AC lớn nhất.

101. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Hai bán kính OC và OD thay đổi vị trí sao cho C thuộc cung AD và $\widehat{COD} = 60^o$. Tìm vị trí của các điểm C, D để tứ giác ACDB có diện tích lớn nhất.

102. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R, bán kính OC vuông góc với AB, điểm M chuyển động trên cung CB. Gọi H là hình chiếu của M trên OB. Tìm vị trí của điểm M để tam giác MOH có :

a) Chu vi lớn nhất; b) Diện tích lớn nhất.

103. Cho tam giác ABC. Dựng điểm M sao cho $MA = \frac{1}{2}AB$ và MB + 2MC có giá trị nhỏ nhất.

Đường tròn và đường thẳng

104. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường tròn (O) bán kính 2 cm nội tiếp tam giác.

a) Tính diện tích tam giác ABC, biết BC = 13 cm.

b) Tính BC, biết $\frac{DB}{DC} = \frac{2}{3}$ (D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trên BC).

105. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại M. Gọi D, C theo thứ tự là hình chiếu của A, B trên d. Chứng minh hệ thức $CD^2 = 4AD.BC$.

106. Cho đường tròn (O) nội tiếp hình thoi ABCD. Kẻ một tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt các cạnh AB, AD theo thứ tự ở E, F. Kẻ một tiếp tuyến khác với đường tròn (O) cắt các cạnh CB, CD theo thứ tự ở G, H. Chứng minh rằng :

a) BE.DF = OB.OD;

b) EG song song với HF.

107. Cho tam giác ABC có diện tích S, chu vi 2p, r là bán kính đường tròn nội tiếp ; R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn bàng tiếp trong góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$. Chứng minh rằng :

a) $S = R_1(p - a) = R_2(p - b) = R_3(p - c)$;

b) $\widehat{A} = 90^o$ nếu $R_1 - r = R_2 + R_3$.

108. Cho tam giác ABC, đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, AC, AB theo thứ tự ở D, E, F. Tia IA cắt EF ở H và cắt đường tròn (I) ở K. Gọi N là giao điểm của DK và EF. Tia phân giác của góc BIC cắt BC ở M. Chứng minh rằng :

a) IM song song với KD;

b) $\triangle KHN \backsim \triangle IDM$;

c) $\triangle AKN \backsim \triangle AIM$;

d) Ba điểm A, N, M thẳng hàng.

109. Trong các tam giác ABC có đáy BC = a, đường cao AH = h, tam giác nào có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất ?

110. Trong các tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (O ; r), tam giác nào có cạnh huyền nhỏ nhất ?

111. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Vẽ cung BD một phần tư đường tròn có tâm A, bán kính AB (nằm trong hình vuông ABCD). Gọi I là điểm chuyển động trên cung BD. Tiếp tuyến tại I cắt các cạnh CB; CD theo thứ tự ở E, F. Tìm vị trí của điểm I để tam giác CEF có diện tích lớn nhất.

Đường tròn và đường tròn

112. Cho tam giác nhọn ABC, BC = 24 cm, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 6 cm. Các đường tròn (D) và (E) có cùng bán kính x tiếp xúc ngoài nhau, cùng tiếp xúc với cạnh BC, trong đó một đường tròn tiếp xúc với AB, một đường tròn tiếp xúc với AC. Tính x.

113. Cho tam giác đều ABC cạnh 6 cm nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh AB, AC theo thứ tự tại M, N và tiếp xúc với cung nhỏ BC. Tính MN.

114. Cho ba đường tròn (A ; 1), (B ; 2), (C ; 3) tiếp xúc ngoài đôi một và cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O ; R). Tính R.

115. Cho hai đường tròn (O ; R), (O' ; r) ở ngoài nhau (R > r). Đường tròn (I) tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O), (O') theo thứ tự tại A, B. Chứng minh rằng khi đường tròn (I) thay đổi thì đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

116. Cho hai đường tròn (O ; R), (O' ; r) ở ngoài nhau. Kẻ các tia tiếp tuyến OA, OB đến đường tròn (O'), cắt đường tròn (O) ở C, D. Kẻ các tia tiếp tuyến O'E, O'F đến đường tròn (O), cắt đường tròn (O') ở G, H. Chứng minh rằng CD = GH.

117. Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{A} > 90^o$, AB > AD. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho AE = AD. Gọi F là giao điểm của DE và CB. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác BEF và đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau ở điểm thứ hai I. Chứng minh rằng IB song song với AC.

118. Cho đường tròn (O ; R) tiếp xúc với đường thẳng d. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích hai bán kính của các đường tròn (I) và (K) tiếp xúc ngoài nhau, tiếp xúc ngoài với đường tròn (O) và tiếp xúc với đường thẳng d.

119. Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB = 2R, điểm C trên đường kính AB. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn ở D. Tìm giá trị lớn nhất của tổng hai bán kính của các đường tròn (I) và (K) tiếp xúc với AB, tiếp xúc với đoạn CD và tiếp xúc với nửa đường tròn (O).

Chuyên đề 7

ĐƯỜNG TRÒN VÀ GÓC

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Tùy theo vị trí với đường tròn mà một góc có nhiều tên gọi mới : góc ở tâm, góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến với dây, góc có đỉnh ở trong hay ở ngoài đường tròn. Quan hệ giữa góc với đường tròn giúp chứng minh được nhiều quan hệ giữa hai góc, và là công cụ hữu ích trong giải toán.

Quan hệ giữa góc và đường tròn còn được thể hiện trong khái niệm cung chứa góc. Sử dụng cung chứa góc, ta chứng minh được nhiều điểm nằm trên một đường tròn, nhờ đó có thể áp dụng nhiều kiến thức đã học về đường tròn vào bài toán.

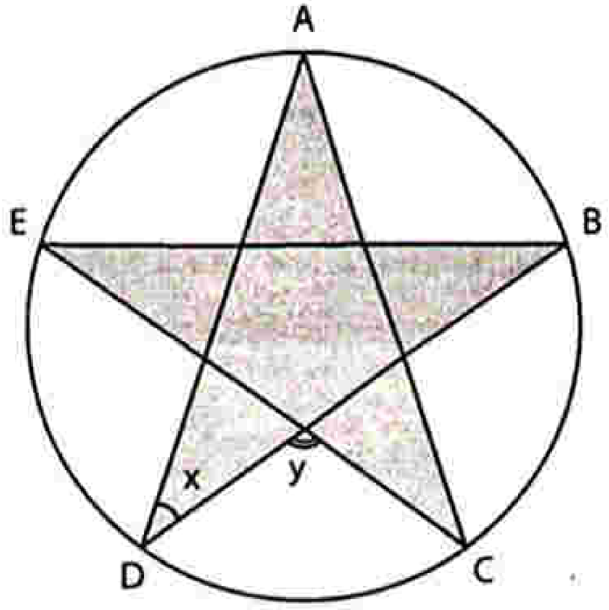
Bài toán thực tế

NGÔI SAO NĂM CÁNH

Ngôi sao năm cánh trên lá quốc kì Việt Nam là một hình rất quen thuộc. Bạn đã bao giờ nghĩ đến góc nhọn x của một cánh sao và góc tù y giữa hai cánh sao (h.77) bằng bao nhiêu độ chưa ?

Hình 77

Giải (h.78)



Hình 78

Vẽ đường tròn đi qua các đỉnh của năm cánh sao, ta có số đo của mỗi cung AB, BC, CD, DE, EA bằng $360^{\circ} : 5 = 72^{\circ}$.

Theo tính chất góc nội tiếp, ta có $x = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AB}}{2} = 72^{\circ} : 2 = 36^{\circ}$.

Theo tính chất góc có đỉnh ở bên trong đường tròn, ta có

$$y = \frac{sđ\overset{\frown}{BE} + sđ\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{72^{\circ}.2 + 72^{\circ}}{2} = 108^{\circ}.$$

I. GÓC TẠO BỞI HAI CÁT TUYẾN (HOẶC TIẾP TUYẾN) CỦA ĐƯỜNG TRÒN

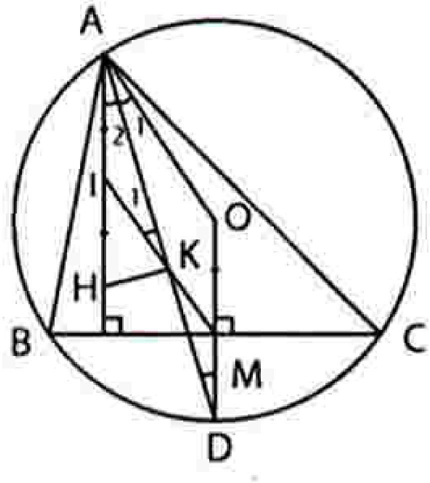
Số đo của góc nội tiếp, số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây đều bằng nửa số đo của cung bị chắn.

Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn bởi hai cạnh của góc và tia đối của hai cạnh ấy (trường hợp đặc biệt : số đo của góc ở tâm bằng số đo của cung bị chắn).

Ví dụ 60. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC), trực tâm H. Gọi I là trung điểm của AH, M là trung điểm của BC. Tia phân giác của góc BAC cắt IM ở K. Chứng minh rằng $\widehat{AKH} = 90^{\circ}$.

Giải (h.79)



Hình 79

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Vẽ bán kính OD đi qua M thì D là điểm chính giữa của cung BC nên A, K, D thẳng hàng.

Dễ chứng minh bổ đề $OM = \dfrac{1}{2}AH$. Tứ giác AOMI có AI // OM, AI = OM nên là hình bình hành

$\Rightarrow$ OA // MI $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{K}_1$.

Kết hợp với $\widehat{A}_1 = \widehat{D} = \widehat{A}_2$ nên $\widehat{K}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow IK = IA = IH$. Vậy $\widehat{AKH} = 90^{\circ}$.

Ví dụ 61. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác góc A cắt BC ở D và cắt đường tròn (O) ở M (khác A). Kẻ tiếp tuyến AK với đường tròn (M ; MB), K là tiếp điểm. Chứng minh rằng DK vuông góc với AM.

Giải (h.80)

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ mà $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_1$ (góc nội tiếp)

nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

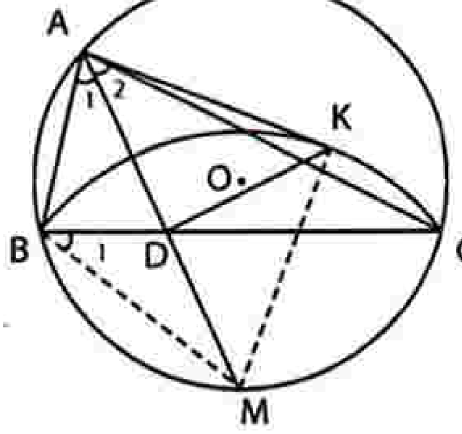
$\triangle MBD \backsim \triangle MAB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MB}{MA} \Rightarrow \dfrac{MD}{MK} = \dfrac{MK}{MA}$.

Kết hợp với $\widehat{DMK} = \widehat{KMA}$ ta có

$\triangle DMK \backsim \triangle KMA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MDK} = \widehat{MKA} = 90^o$. Vậy $DK \perp AM$.



Hình 80

Ví dụ 62. Tính góc A của tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), biết $\widehat{IOK} = 90^o$, trong đó I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A.

Giải (h.81)

Gọi D là giao điểm của đoạn IK và đường tròn (O).

$\triangle IBK$ vuông tại B có DB = DI (dễ chứng minh) nên

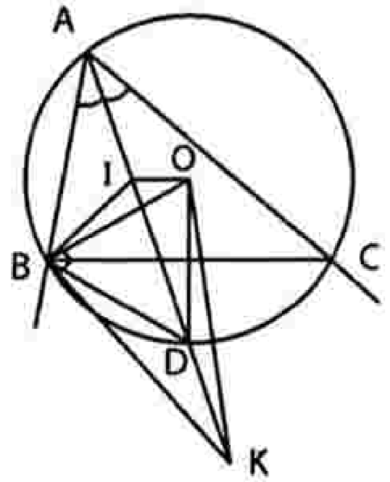
$DI = DK$ và $DB = \dfrac{1}{2}IK$. (1)

$\triangle IOK$ vuông tại O có DI = DK nên

$OD = \dfrac{1}{2}IK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BD = OD = OB

$\Rightarrow \triangle BOD$ đều $\Rightarrow \widehat{BOD} = 60^o \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^o$.



Hình 81

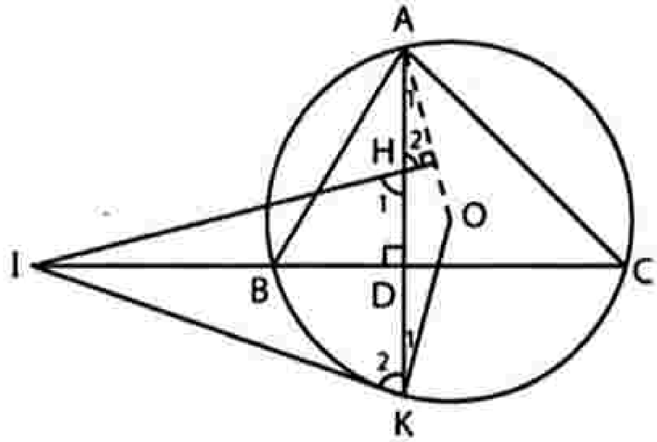
Ví dụ 63. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, K là giao điểm thứ hai của AH với đường tròn (O). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt BC ở I. Chứng minh rằng IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải (h.82)

Dễ chứng minh H đối xứng với K qua BC, suy ra $\widehat{K}_2 = \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$. (1)

Ta lại có $\widehat{K}_1 = \widehat{A}_1$ nên

$\widehat{K}_1$ phụ $\widehat{H}_2$. (2)



Hình 82

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{K}_2$ phụ $\widehat{K}_1$. Vậy IK là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Ví dụ 64. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), đường trung tuyến AM. Lấy điểm D trên cung BC không chứa A sao cho $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$. Chứng minh rằng $\widehat{ADB} = \widehat{CDM}$.

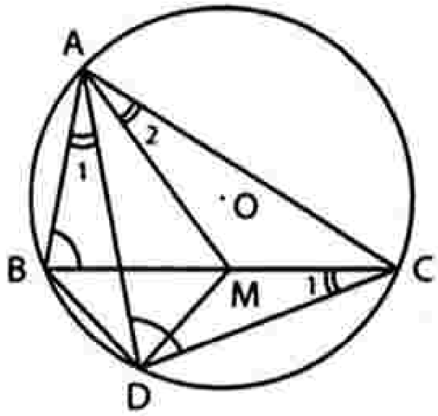
Giải (h.83)

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{DAC}$, lại có

$\widehat{ABM} = \widehat{ADC}$ (góc nội tiếp) nên

$\triangle ABM \backsim \triangle ADC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BA}{AD} = \dfrac{BM}{DC} = \dfrac{MC}{CD}$.

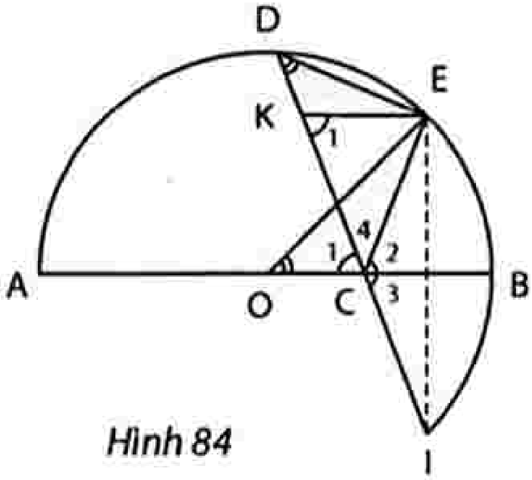


Hình 83

Kết hợp với $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ suy ra $\triangle BAD \backsim \triangle MCD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{CDM}$.

Ví dụ 65. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi C là trung điểm của OB. Gọi D, E là các điểm thuộc nửa đường tròn sao cho $\widehat{ACD} = \widehat{BCE} < 90^o$. Biết CD – CE = a. Tính DE theo a.

Giải (h.84)



Hình 84

Trên CD lấy K sao cho CK = CE thì

DK = CD – CK = CD – CE = a.

Kéo dài DC cắt đường tròn (O) ở I.

Ta có $\widehat{C}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_3 \Rightarrow$ E đối xứng với I qua AB $\Rightarrow \widehat{EOB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{EI} = \widehat{D}$. (1)

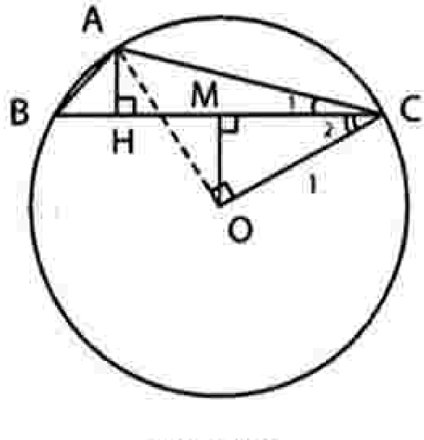
$\triangle ECK$ cân $\Rightarrow \widehat{K}_1 = \dfrac{180^\circ - \widehat{C}_4}{2} = \widehat{C}_2 \Rightarrow \widehat{DKE} = \widehat{OCE}$ (bù với hai góc trên). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle DKE \backsim \triangle OCE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DE}{DK} = \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{OB}{OC} = 2$. Vậy DE = 2DK = 2a.

Ví dụ 66. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có bán kính 1 dm, $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 15^\circ$. Tính độ dài AC, BC, AB và diện tích tam giác ABC.

Giải (h.85)



Hình 85

- $\widehat{B} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AOC} = 90^\circ$

$\Rightarrow AC = OC\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (dm).

- Kẻ OM ⊥ BC.

Ta có $\widehat{C}_2 = \widehat{C} - \widehat{C}_1 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow MC = OC.\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \sqrt{3}$ (dm).

- Kẻ AH ⊥ BC. Đặt HC = x, HB = y thì $x + y = \sqrt{3}$. (1)

Ta có $HC^2 + HB^2 = HC^2 + HA^2 = AC^2 = 2$ nên $x^2 + y^2 = 2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 3 - 2 = 1$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 2 - 1 = 1 \Rightarrow x - y = 1$. (4)

Từ (1) và (4) suy ra $y = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$ (dm). Do đó $AB = y\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ (dm).

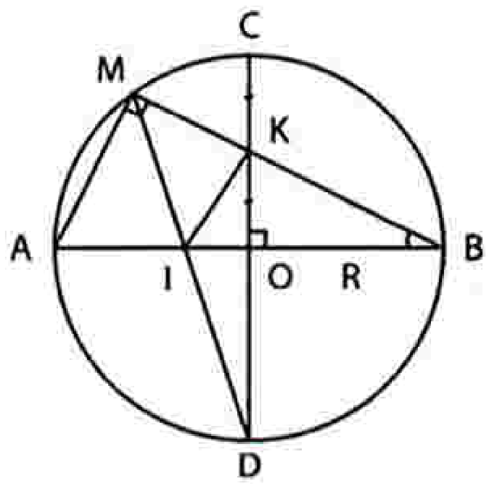
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}(dm^2).$

Ví dụ 67. Cho đường tròn (O ; R), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi K là trung điểm của OC. Gọi M là giao điểm thứ hai của BK với đường tròn (O), I là giao điểm của MD và AB. Tính diện tích :

a) Tam giác MAB;

b) Tam giác MIK.

Giải (h.86)



Hình 86

a) $\widehat{AMB} = 90^o, \widehat{BOK} = 90^o$ nên

$\frac{MA}{MB} = \tan\hat{B} = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{2}.$

Từ $\begin{cases} MB = 2MA \\ MA^2 + MB^2 = 4R^2 \end{cases}$ dễ dàng tính

được $MA = \frac{2R}{\sqrt{5}}, MB = \frac{4R}{\sqrt{5}}, S_{MAB} = \frac{4R^2}{5}.$ (1)

b) MI là đường phân giác của $\triangle MAB$

$\Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$. Lại có IA + IB = 2R nên dễ dàng tính được $IB = \frac{4R}{3}.$

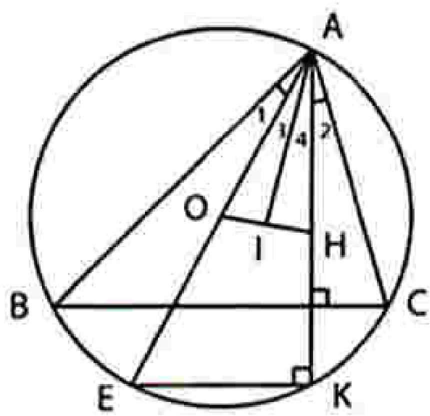
$S_{KIB} = \frac{1}{2}IB.KO = \frac{1}{2}.\frac{4R}{3}.\frac{R}{2} = \frac{R^2}{3}.$ (2)

$AI = \frac{1}{3}AB \Rightarrow S_{MAI} = \frac{1}{3}S_{MAB} = \frac{1}{3}.\frac{4R^2}{5} = \frac{4R^2}{15}.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$S_{MIK} = S_{MAB} - S_{KIB} - S_{MAI} = \frac{4R^2}{5} - \frac{R^2}{3} - \frac{4R^2}{15} = \frac{R^2}{5}.$

Ví dụ 68. Cho đường tròn (O) và hai điểm H, I nằm trong đường tròn, trong đó I là trung điểm của OH. Dựng tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) nhận H làm trực tâm và AI là tia phân giác của góc BAC.



Hình 87

Giải (h.87)

Phân tích : Kẻ đường kính AE. Gọi K là giao điểm của AH với đường tròn. Ta có

BC // EK nên $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CK}$, suy ra $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, do đó $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$.

$\triangle AOH$ có $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$ nên $\dfrac{AO}{AH} = \dfrac{IO}{IH} = 1$, suy ra $AI \perp OH$.

Cách dựng :

– Dựng đường trung trực của OH, cắt đường tròn tại A.

– Dựng giao điểm K của AH và đường tròn.

– Dựng dây BC là đường trung trực của HK.

Ví dụ 69. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm D di chuyển trên cạnh BC. Gọi I và K theo thứ tự là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADB và ADC.

a) Chứng minh rằng tứ giác AIDK là hình vuông.

b) Tìm vị trí của điểm D để hình vuông AIDK có diện tích nhỏ nhất.

Giải (h.88)

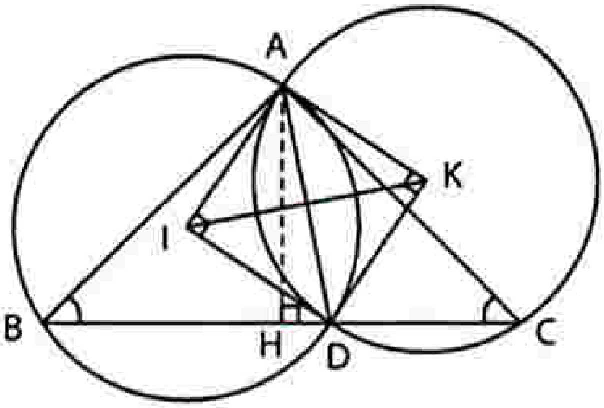
a) Theo liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm, ta có

$\widehat{AID} = 2\hat{B} = 2.45^\circ = 90^\circ$,

$\widehat{AKD} = 2\hat{C} = 2.45^\circ = 90^\circ$.

Suy ra

$\widehat{IAK} + \widehat{IDK} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ) = 180^\circ$.



Hình 88

Ta lại có $\triangle IAK = \triangle IDK$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{IDK} = 90^\circ$.

Hình chữ nhật AIDK có IA = ID nên là hình vuông.

b) $S_{AIDK} = \frac{1}{2}AD.IK = \frac{1}{2}AD^2 \geq \frac{1}{2}AH^2$ (AH là đường cao của $\triangle ABC$).

$\min S_{AIDK} = \frac{1}{2}AH^2 \Leftrightarrow$ D là trung điểm của BC.

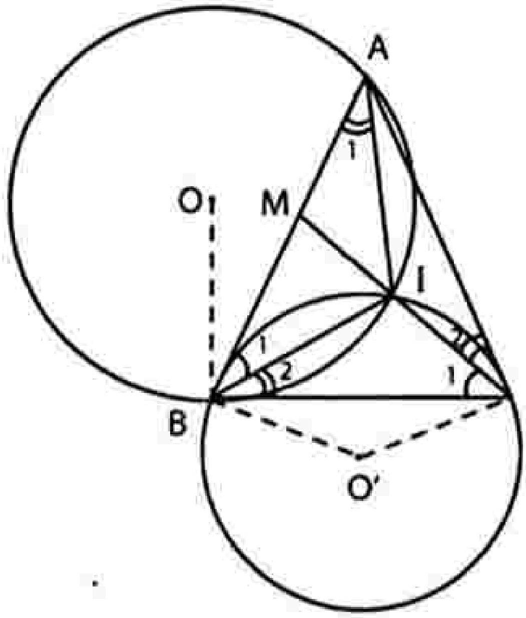
Ví dụ 70. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi (O) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại B. Gọi (O') là đường tròn tiếp xúc với AB tại B và tiếp xúc với AC tại C. Gọi I là giao điểm (khác B) của hai đường tròn trên. Chứng minh rằng CI đi qua trung điểm của AB.

Giải (h.89)

Gọi M là giao điểm của CI và AB. Ta có $\hat{C}_1$ và $\hat{B}_1$ là góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến với dây chắn cung BI của (O') nên $\hat{C}_1 = \hat{B}_1$.

ΔMBI và ΔMCB có $\widehat{M}$ là góc chung, $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ nên $\Delta MBI \backsim \Delta MCB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{MI}{MB} \Rightarrow MB^2 = MI.MC \quad (1)$$



Hình 89

Ta có $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến với dây của (O)).

Mặt khác, $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến với dây của (O'))

nên $\Delta MAI \backsim \Delta MCA$(g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MI}{MA} \Rightarrow MA^2 = MI\,.\,MC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra MA = MB.

Vậy CI đi qua trung điểm của AB.

Ví dụ 71. Cho tam giác ABC, đường phân giác AD. Các điểm E và F thuộc đoạn AD sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{CBF}$. Chứng minh rằng $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$.

Giải (h.90)

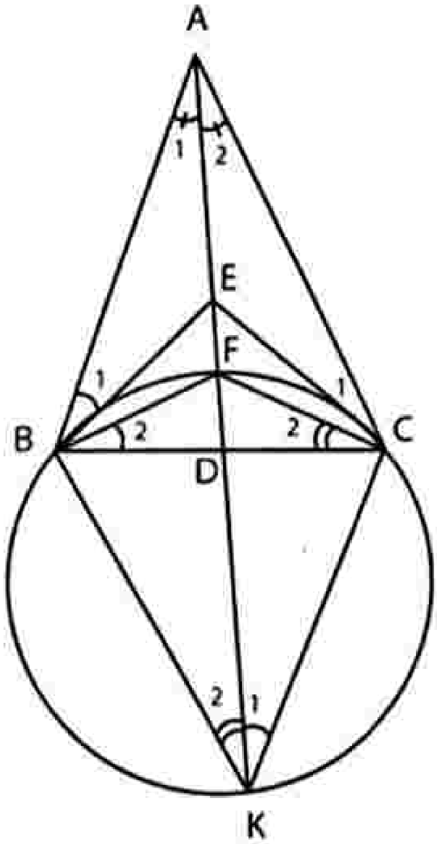
Giả sử E nằm giữa A và F. Vẽ đường tròn ngoại tiếp ΔBFC cắt AD ở K.

Ta có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{K}_1$ nên

$\Delta ABE \backsim \Delta AKC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AK} = \dfrac{AE}{AC}$

$\Rightarrow \Delta ABK \backsim \Delta AEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{K}_2 = \widehat{C}_1$.

Ta lại có $\widehat{K}_2 = \widehat{C}_2$ nên $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (đpcm).



Hình 90

Ví dụ 72. Cho tam giác nhọn ABC. Dựng điểm M trong tam giác sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MBA}$ và $\widehat{MAB} = \widehat{MCA}$.

Giải (h.91)

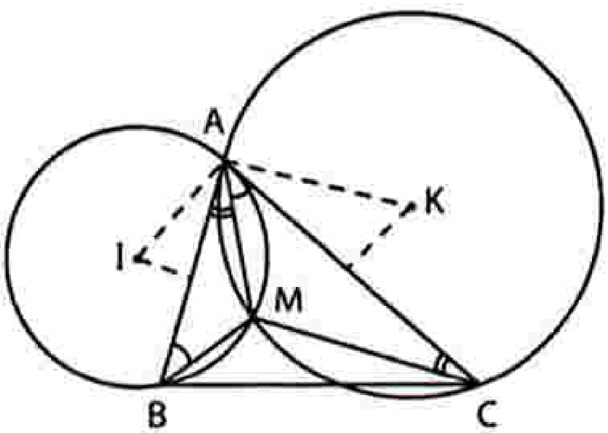
Phân tích : $\widehat{MAC} = \widehat{MBA} \Rightarrow$ AC là tiếp tuyến của đường tròn (AMB).

$\widehat{MAB} = \widehat{MCA} \Rightarrow$ AB là tiếp tuyến của đường tròn (AMC).

Cách dựng :

– Dựng đường tròn (I) đi qua B và tiếp xúc với AC tại A (I là giao điểm của đường vuông góc với AC tại A và đường trung trực của AB).

– Dựng đường tròn (K) đi qua C và tiếp xúc với AB tại A. Giao điểm khác A của hai đường tròn là điểm M phải dựng.

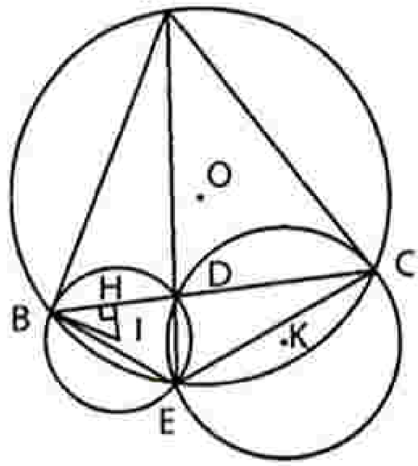


Hình 91

Ví dụ 73. Cho tam giác đều ABC cạnh a, nội tiếp đường tròn (O), điểm D di chuyển trên cạnh BC. Gọi E là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (O). Tìm vị trí của điểm D để tích các bán kính của các đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE, CDE có giá trị lớn nhất.

Giải (h.92)

Gọi (I ; x), (K ; y) là các đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE, CDE. Kẻ IH ⊥ BC, ta có $\widehat{BIH} = \widehat{BED} = 60^0$ nên $BH = IB\sin 60^0 = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$



Hình 92

$\Rightarrow 2BH = x\sqrt{3} \Rightarrow BD = x\sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{BD}{\sqrt{3}}$.

Tương tự $y = \dfrac{CD}{\sqrt{3}}$ nên $xy = \dfrac{BD.CD}{3}$.

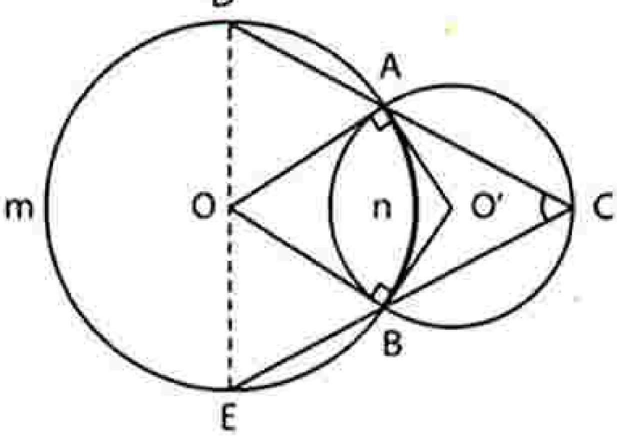
Ta lại có $BD.CD \le \dfrac{(BD + CD)^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$

nên $xy \le \dfrac{a^2}{12}$.

$\max(xy) = \dfrac{a^2}{12} \Leftrightarrow BD = CD \Leftrightarrow$ D là trung điểm của BC.

Ví dụ 74. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau ở A và B sao cho $\widehat{OAO'} = 90^0$. Gọi C là một điểm của đường tròn (O'). Các đường thẳng CA, CB cắt đường tròn (O) ở điểm thứ hai D, E. Chứng minh rằng DE là đường kính của đường tròn (O).

Giải (h.93)



Hình 93a

Gọi số đo cung DE không chứa A là m, số đo cung nhỏ AB của đường tròn (O) là n. Xét hai trường hợp :

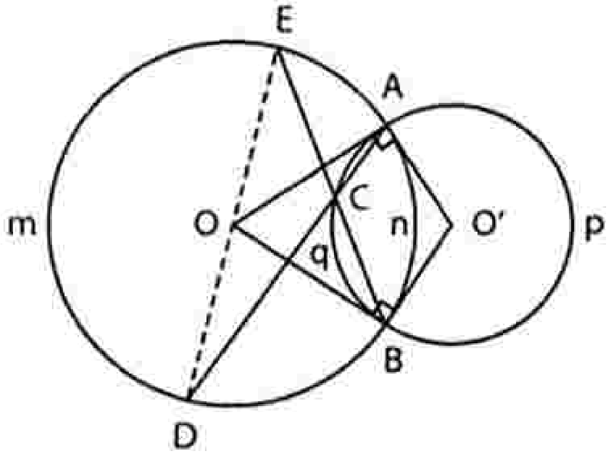
– Trường hợp C ở ngoài đường tròn (O) (h.93a). Theo tính chất góc có đỉnh ở ngoài đường tròn ta có :

$\widehat{ACB} = \dfrac{m - n}{2}$

$\Rightarrow m = 2\widehat{ACB} + n = \widehat{AO'B} + \widehat{AOB} = 180^0$

$\Rightarrow$ DE là đường kính của (O).

– Trường hợp C ở trong đường tròn (O) (h.93b). Xét hai cung AB của (O'), gọi số đo cung nằm ngoài (O) là p, số đo cung còn lại là q. Theo tính chất góc có đỉnh ở trong đường tròn ta có :



Hình 93b

$\widehat{ACB} = \dfrac{m+n}{2} \Rightarrow m = 2\widehat{ACB} - n$. Kết hợp với $2\widehat{ACB} = p = 360^\circ - q$

suy ra $m = (360^\circ - q) - n$

$= 360^\circ - (q + n) = 360^\circ - (\widehat{AO'B} + \widehat{AOB})$

$= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ DE là đường kính của (O).

Ví dụ 75. Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau, điểm M thuộc cung nhỏ BC. Gọi E là giao điểm của MA và CD, F là giao điểm của MD và AB. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{DEA} = \widehat{ADF}$;

b) Khi M di chuyển trên cung nhỏ BC thì diện tích tứ giác AEFD không đổi.

Giải (h.94)

a) $\hat{E}_1 = \dfrac{sd\overset{\frown}{AD} + sd\overset{\frown}{CM}}{2} = \dfrac{90^\circ + sd\overset{\frown}{CM}}{2}$ (góc có đỉnh ở trong đường tròn).

$\widehat{ADF} = \dfrac{sd\overset{\frown}{AC} + sd\overset{\frown}{CM}}{2}$

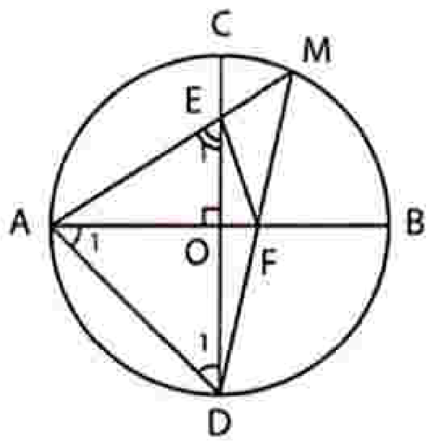
$= \dfrac{90^\circ + sd\overset{\frown}{CM}}{2}$ (góc nội tiếp)

Suy ra $\hat{E}_1 = \widehat{ADF}$ (đpcm).

b) Ta có $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$ ($= 45^\circ$) và $\hat{E}_1 = \widehat{ADF}$ (câu a)

nên $\triangle DEA \backsim \triangle ADF$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{AD}{AF} \Rightarrow AF.DE = AD^2$.



Hình 94

Do đó $S_{AEFD} = \dfrac{1}{2}AF.DE = \dfrac{1}{2}AD^2$, không đổi.

II. CUNG CHỨA GÓC

1. Cung chứa góc áp dụng vào chứng minh : Nếu một tứ giác có hai đỉnh liên tiếp nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì bốn đỉnh của tứ giác nằm trên một đường tròn.

2. Cung chứa góc áp dụng vào quỹ tích :

– Qũy tích các điểm nhìn một đoạn thẳng cố định dưới một góc α không đổi $(0^{o} < \alpha < 180^{o})$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng đó.

– *Đặc biệt* : Quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 76. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, I là điểm chính giữa của nửa đường tròn, điểm M thuộc cung AI. Gọi H là hình chiếu của I trên AM, K là giao điểm của OH và BM. Chứng minh rằng tứ giác IHMK là hình vuông.

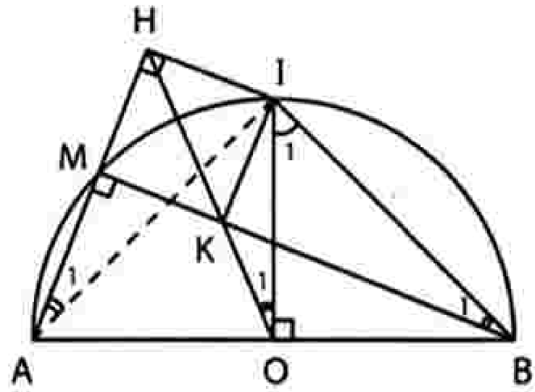
Giải (h.95)

Tứ giác AHIO có $\widehat{AHI} = \widehat{AOI} = 90^{o}$ nên A, H, I, O nằm trên đường tròn đường kính AI. (*)

Suy ra $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$.

Ta lại có $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (góc nội tiếp)

nên $\hat{O}_1 = \hat{B}_1$, suy ra O, K, I, B thuộc một đường tròn, do đó $\widehat{IKB} = \widehat{IOB} = 90^{o}$.



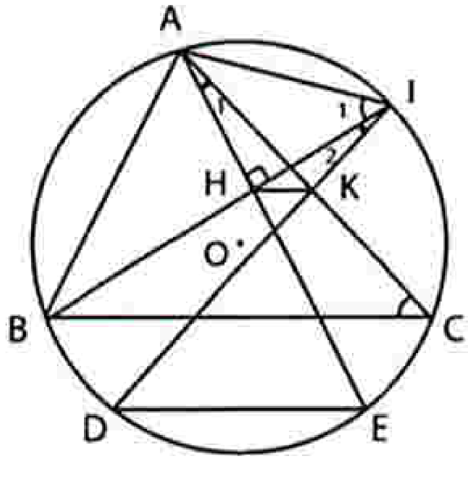
Hình 95

Tứ giác IHMK có $\hat{H} = \hat{M} = \hat{K} = 90^{o}$ nên là hình chữ nhật.

Do (*) nên $\widehat{OHA} = \widehat{OIA} = 45^{o}$. Suy ra $\triangle KHM$ vuông cân. Hình chữ nhật IHMK có MH = MK nên là hình vuông.

Ví dụ 77. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ BC ($\overset{\frown}{BD} < \overset{\frown}{DC}$). Vẽ dây DE song song với BC, dây BI vuông góc với AE tại H. Gọi K là giao điểm của ID và AC. Chứng minh rằng HK song song với BC.

Giải (h.96)



Hình 96

$\hat{C} = \hat{I}_1$ (góc nội tiếp) (1)

DE // BC $\Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CE} \Rightarrow \hat{I}_2 = \hat{A}_1$

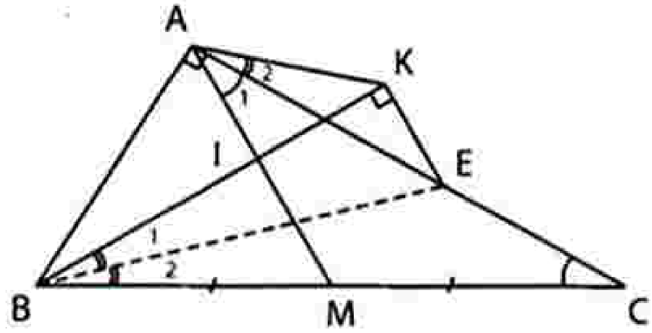
$\Rightarrow$ A, H, K, I thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{AKH} = \hat{I}_1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{C} = \widehat{AKH}$, lại ở vị trí đồng vị nên HK // BC.

Ví dụ 78. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm I thuộc đường trung tuyến AM. Tia phân giác của góc IBC cắt AC tại E. Gọi K là hình chiếu của E trên BI. Chứng minh rằng tam giác AIK là tam giác cân.

Giải (h.97)



Hình 97

$\triangle$AMC cân tại M $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}$. (1)

Tứ giác BAKE có $\widehat{BAE} = \widehat{BKE} = 90^\circ$ nên B, A, K, E thuộc đường tròn đường kính BE $\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{KAI} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{C} + \hat{B}_2 = \widehat{AEB}$. (3)

Do B, A, K, E thuộc một đường tròn nên $\widehat{AKB} = \widehat{AEB}$, tức là $\widehat{AKI} = \widehat{AEB}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{KAI} = \widehat{AKI} \Rightarrow \triangle$AIK cân tại I.

Ví dụ 79. Cho đường tròn (O), đường kính AB vuông góc với dây CD tại M. Gọi E là điểm thuộc cung nhỏ AC, I là trung điểm của BE, H là hình chiếu của A trên DE. Chứng minh rằng :

a) $\triangle$DHM $\backsim$ $\triangle$BEC; b) IC = IH.

Giải (h.98)

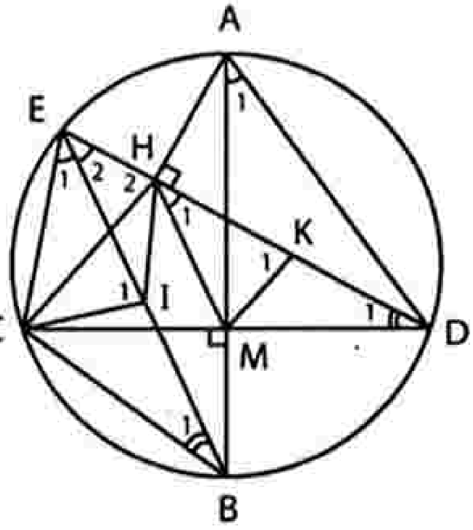
a) A, H, M, D thuộc đường tròn đường kính AD $\Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{A}_1$. (1)

Do AB ⊥ CD nên $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD}$ suy ra $\widehat{E}_1 = \widehat{A}_1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{H}_1 = \widehat{E}_1$.

Ta lại có $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ nên $\triangle DHM \backsim \triangle BEC$ (g.g).

b) Gọi K là trung điểm của HD. Do MK và CI là các đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng nên $\widehat{K}_1 = \widehat{I}_1$. (3)



Hình 98

MK là đường trung bình của $\triangle HCD \Rightarrow MK \,//\, CH \Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{H}_2$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{I}_1 = \widehat{H}_2 \Rightarrow$ E, H, I, C thuộc một đường tròn. Xét đường tròn đó, do $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ nên IC = IH.

Ví dụ 80. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R), M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Lấy điểm K thuộc cạnh BC sao cho nếu gọi I là giao điểm của MK và AC thì CI = BK. Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{DKM} = 120^\circ$; b) CK = R.

Giải (h.99)

a) $\triangle DBK$ và $\triangle MCI$ có BK = CI (giả thiết),

$\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ (= 30°), BD = CM (vì $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CM}$)

nên $\triangle DBK = \triangle MCI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{M}_1$.

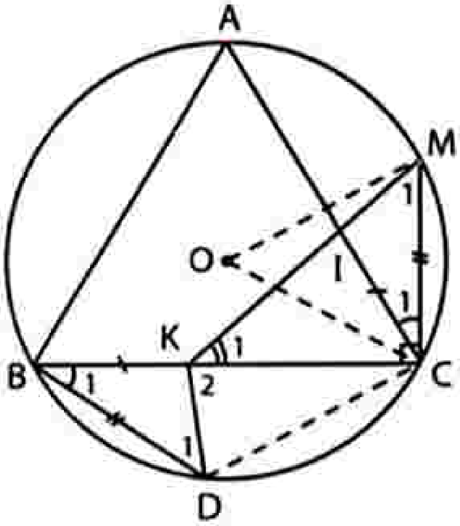
Do $\widehat{BCM} = \widehat{ACB} + \widehat{C}_1 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ nên

$\widehat{K}_1 = 90^\circ - \widehat{M}_1$.

$\widehat{K}_2 = \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 30^\circ + \widehat{D}_1$ nên

$\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 90^\circ - \widehat{M}_1 + 30^\circ + \widehat{D}_1 = 120^\circ$

(vì $\widehat{D}_1 = \widehat{M}_1$) tức là $\widehat{DKM} = 120^\circ$. (1)



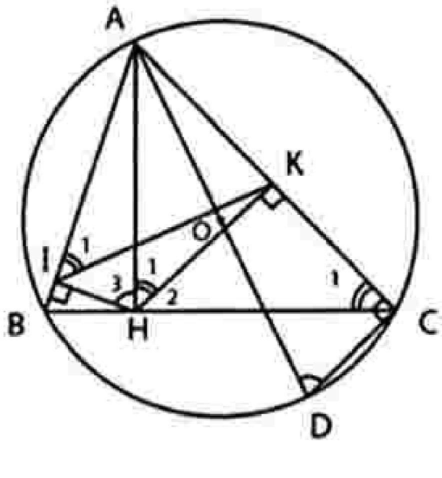
Hình 99

b) Ta có $\widehat{DOM} = sđ\overset{\frown}{DM} = 120^o$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra D, K, O, M thuộc một đường tròn. Đường tròn này có tâm là C, vì CD = CO = CM = R. Suy ra CK = R.

Ví dụ 81. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O ; R), đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Biết diện tích tam giác AIK bằng nửa diện tích tam giác ABC, tính AH.

Giải (h.100)



Hình 100

Tứ giác AIHK có $\widehat{AIH} = \widehat{AKH} = 90^o$ nên A, I, H, K thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{H}_1$. Kết hợp với $\hat{H}_1 = \hat{C}_1$ (cùng phụ $\hat{H}_2$) suy ra $\hat{I}_1 = \hat{C}_1$.

$\triangle AIK \backsim \triangle ACB$ (g.g)

$$\Rightarrow \left(\frac{AI}{AC}\right)^2 = \frac{S_{AIK}}{S_{ACB}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

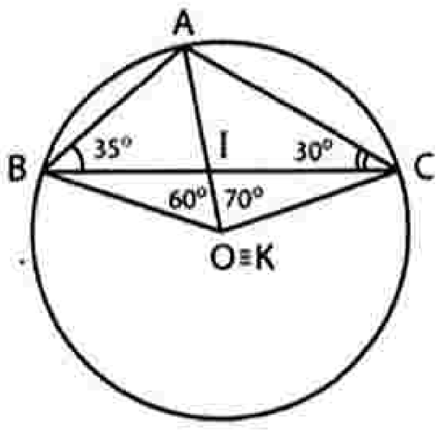
Kẻ đường kính AD. Xét $\triangle AIH$ và $\triangle ACD$ có $\hat{I} = \hat{C} = 90^o$, $\hat{H}_3 = \hat{D}$ (cùng bằng $\hat{B}$) nên $\triangle AIH \backsim \triangle ACD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AI}{AC} = \frac{AH}{AD} = \frac{AH}{2R}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AH}{2R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AH = R\sqrt{2}.$

Ví dụ 82. Cho tam giác ABC, $\hat{B} = 35^o, \hat{C} = 30^o$. Lấy điểm K thuộc nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A sao cho $\widehat{AKB} = 60^o, \widehat{AKC} = 70^o$. Tính góc nhọn tạo bởi AK và BC.

Giải (h.101)



Hình 101

Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Theo liên hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm, ta có :

$\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 2.30^o = 60^o$, $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 2.35^o = 70^o$ nên O là giao điểm của cung chứa góc 60^o vẽ trên AB và cung chứa góc 70^o vẽ trên AC. Do đó O và K trùng nhau.

Gọi I là giao điểm của AK và BC. $\triangle AKB$ cân tại K có $\widehat{AKB} = 60^o$ nên $\widehat{KAB} = 60^o$ tức là $\widehat{IAB} = 60^o$.

Vậy $\widehat{AIB} = 180^o - (60^o + 35^o) = 85^o$. Góc nhọn tạo bởi AK và BC bằng 85^o.

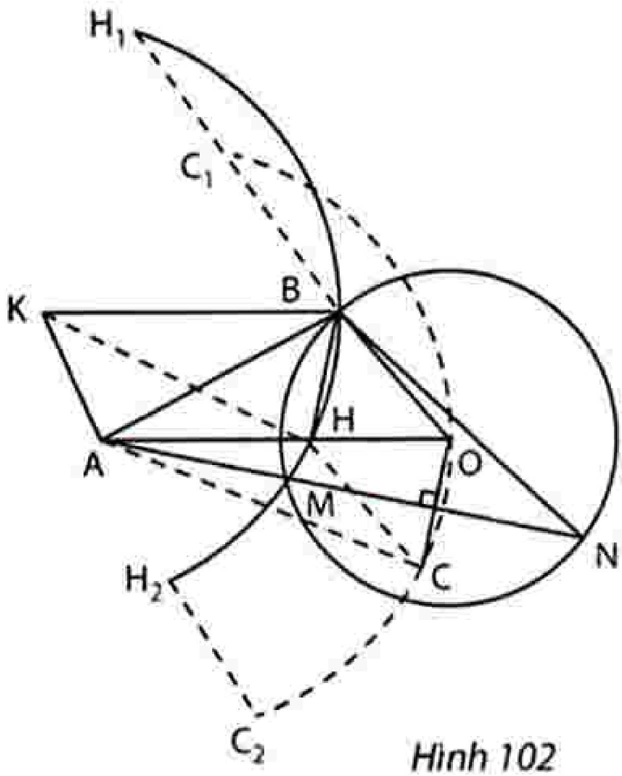
Ví dụ 83. Cho đường tròn (O), điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Một đường thẳng chuyển động luôn qua A cắt đường tròn (O) ở M và N. Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác BMN.

Giải *(h.102)*

Phần thuận: Lấy C đối xứng với O qua MN. Dễ chứng minh BH = OC. Ta lại có BH // OC nên HBOC là hình bình hành.

Vẽ hình bình hành AOBK. Dễ chứng minh AKHC là hình bình hành nên KH = AC = AO. Điểm H cách K cố định một khoảng bằng AO (đặt bằng d) không đổi, nên H chuyển động trên đường tròn (K ; d).

Giới hạn : Khi AMN trùng với AB thì H trùng H_1 (H_1 thuộc tia OB và OH_1 = 3OB). Điểm H chỉ chuyển động trên cung H_1H_2 của đường tròn (K : d), cung H_1H_2 nhận KB làm trục đối xứng).



Hình 102

Phần đảo : Bạn đọc tự giải.

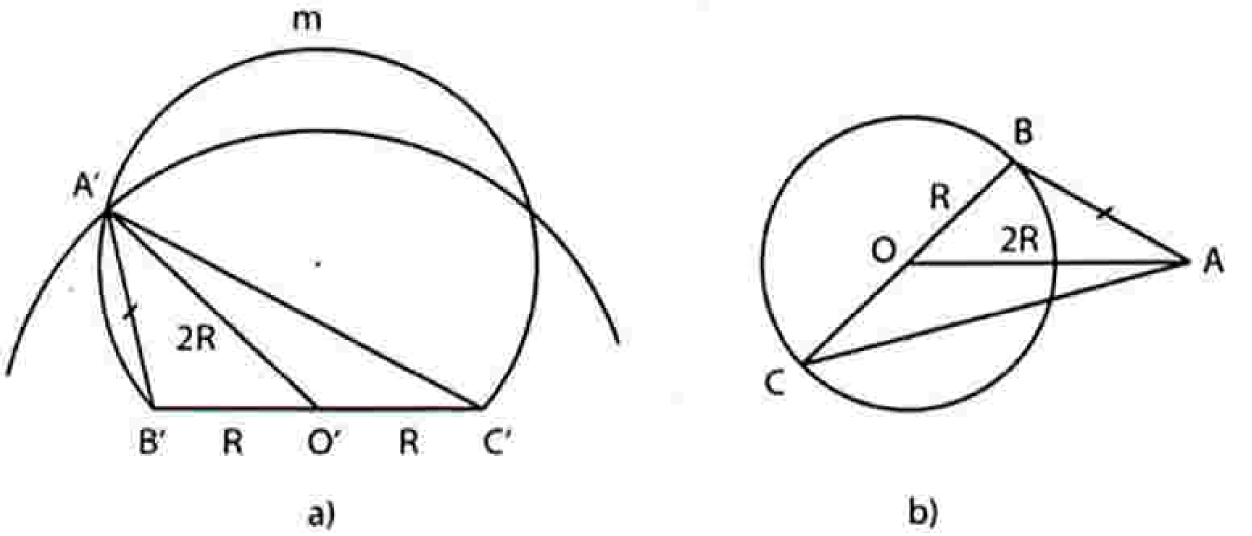
Kết luận : Quỹ tích của H là cung H_1H_2 của đường tròn (K : d).

Lưu ý : Ta có thể phát hiện quỹ tích của H nhờ phép tịnh tiến : H là ảnh của C trong phép tịnh tiến theo vec-tơ OB. Quỹ tích của C là cung C_1C_2 của đường tròn (A; AO). Tịnh tiến cung C_1C_2 theo vec-tơ OB, ta được cung H_1H_2 (điểm K vẽ thêm là ảnh của điểm A trong phép tịnh tiến đó).

Ví dụ 84. Cho đường tròn (O ; R), điểm A cố định có OA = 2R. Dựng đường kính BC sao cho $\widehat{BAC} = 45^{\circ}$.

Giải (h.103)

Cách dựng : Dựng theo thứ tự ngược. Trước hết ta dựng ở một hình riêng (h.103a) :



Hình 103

– Dựng đoạn thẳng B'C' = 2R. Dựng cung B'mC' chứa góc 45°.

– Dựng trung điểm O' của B'C'. Dựng đường tròn (O' ; 2R) cắt cung B'mC' ở A'.

Sau đó dựng vào hình đã cho (h.103b) :

Dựng đường tròn (A ; A'B') cắt (O) ở B. Dựng đường kính BOC.

Chứng minh : $\triangle AOB = \triangle A'O'B'$ (c.c.c) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{B'}$.

$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} = 45^{\circ}$.

BÀI TẬP

Góc ở tâm. Cung bị chắn

120. Cho đường tròn (O ; R), hai dây AB và CD vuông góc với nhau tại điểm I nằm trong đường tròn. Tính tổng bình phương bốn cạnh của tứ giác ACBD.

121. Cho đường tròn (O). M là điểm chính giữa cung AB. Kẻ dây MC cắt dây AB ở D.

a) Nêu cách dựng đường tròn (I) đi qua D và tiếp xúc trong với đường tròn (O).

b) Chứng minh rằng đường tròn (I) tiếp xúc với AB tại D.

122. Cho tam giác ABC vuông tại A. Ở phía ngoài tam giác ABC vẽ các nửa đường tròn có đường kính là AB, AC. Một đường thẳng d đi qua A cắt các nửa đường tròn trên theo thứ tự ở D, E. Tìm vị trí của đường thẳng d để tứ giác BCED có :

a) Diện tích lớn nhất; b) Chu vi lớn nhất.

Góc nội tiếp

123. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Dây BC của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') ở E nằm giữa B và C. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt ở D và K (khác A). Chứng minh rằng CDEK là hình thoi.

124. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau ở A và B, trong đó O' thuộc đường tròn (O). Dây AC của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') ở M nằm giữa A và C. Gọi N là giao điểm thứ hai của CB và đường tròn (O'). Chứng minh rằng OC vuông góc với MN.

125. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^o$, trực tâm H nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Chứng minh rằng O đối xứng với H qua AD.

126. Cho đường tròn (O), dây AB, C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Gọi M là trung điểm của OC. Vẽ dây BD đi qua M. Chứng minh rằng AD = 2(MD – MB).

127. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) có đường phân giác AD tạo với BC góc 45^o. Tính tổng $AB^2 + AC^2$.

128. Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Một dây CD cắt đường kính AB ở M và $\widehat{AMC} = 45^o$. Tính tổng $MC^2 + MD^2$.

129. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) cắt nhau tại A và B, trong đó O' thuộc đường tròn (O). Vẽ dây CD của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O'). Tính tích O'C.O'D.

130. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I : r) nội tiếp tam giác ABC. Gọi D là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn (O). Chứng minh rằng $\dfrac{IB.IC}{ID} = 2r$.

131. Cho tam giác ABC, trực tâm H nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HAC, HAB. Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

132. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm M thuộc cung nhỏ BC (M khác B, khác C). Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MA > 2MI.

133. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE và CF cắt nhau ở H. Vẽ dây BD cắt đoạn thẳng CH tại K nằm giữa H và C. Gọi G là giao điểm của CD và BE. Chứng minh rằng FE đi qua trung điểm của GK.

Hướng dẫn : Qua K kẻ đường thẳng song song với BE, cắt FE ở N. Chứng minh rằng KN = EG.

134. Cho tam giác nhọn ABC, BC = a, AC = b, AB = c. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có các tiếp điểm trên AB, AC theo thứ tự là E, F.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{IA^2}{bc}$ bằng tỉ số $S_{AEIF} : S_{ABC}$.

b) Lập một hệ thức giữa IA, IB, IC và a, b, c.

135. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O : R), gọi (K : k) là đường tròn bàng tiếp trong góc A.

a) Gọi I là giao điểm của tia phân giác góc ABC với AK. Chứng minh rằng bốn điểm B, I, C, K thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh hệ thức $KA.\ KB.KC = 4Rk^2$.

136. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O : R). Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh hệ thức $4R = R_1 + R_2 + R_3 - r$.

137. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại K, M, N. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{AK}{AD}+\dfrac{BM}{BE}+\dfrac{CN}{CF}=4$;　　　b) $\dfrac{AD}{AK}+\dfrac{BE}{BM}+\dfrac{CF}{CN}\geq\dfrac{9}{4}$.

138. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) có $\hat{B}=18^{\circ}, \hat{C}=36^{\circ}$, BC = a, AC = b.

a) Chứng minh rằng $a-b=R$ và $ab=R^2$.

b) Tính a và b, biết R = 2 cm (không dùng máy tính, bảng số).

139. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác của các góc A, B, C cắt đường tròn (O) theo thứ tự ở D, E, F. Gọi A', B', C' theo thứ tự là tâm các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C. Gọi diện tích tam giác ABC là S, diện tích lục giác AFBDCE là S_1, diện tích tam giác A'B'C' là S'. Chứng minh rằng :

a) $S_1 \geq 2S$;　　b) $S' = 2S_1$;　　c) $S' \geq 4S$.

140. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Dựng điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho nếu gọi H là hình chiếu của C trên AB, D là hình chiếu của H trên AC thì O là hình chiếu của D trên AB.

Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây

141. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, điểm C thuộc nửa đường tròn, D là điểm chính giữa của cung AC. Kẻ dây DE song song với AB. Tiếp tuyến tại E cắt AB ở K. Gọi I là giao điểm của DE và AC. Chứng minh rằng DI = BK.

142. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các điểm D và E thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{BAD}=\widehat{CAE}$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tiếp xúc trong với đường tròn (O).

143. Cho hình vuông ABCD. Vẽ ở trong hình vuông cung AC của đường tròn (B ; BA). Qua điểm M thuộc cung đó, kẻ tiếp tuyến với đường tròn (B ; BA), cắt AD và DC theo thứ tự ở E và F.

a) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng $\triangle IEF \backsim \triangle MCA$.

b) Chứng minh rằng $S_{DEF} < S_{MCA}$.

144. Cho đường tròn (O), điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Dựng điểm M thuộc đường tròn (O) sao cho tổng các khoảng cách từ M đến AB và AC gấp đôi khoảng cách từ M đến BC.

Góc có đỉnh ở trong, ở ngoài đường tròn

145. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác của các góc A, B, C cắt nhau tại I và cắt đường tròn ngoại tiếp theo thứ tự ở D, E, F. Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác DEF.

146. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung AB. Kẻ dây DE vuông góc với OA. Gọi M là giao điểm của BD và CA, N là giao điểm của BA và CE. Chứng minh rằng MN song song với DE.

147. Cho đường tròn (O ; R), các dây AC và BD vuông góc với nhau tại điểm I nằm trong đường tròn (O nằm trong tam giác CID). Chứng minh rằng các tam giác AOB và COD có diện tích bằng nhau.

Cung chứa góc

148. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, bán kính OC vuông góc với AB, điểm D thuộc cung AC. Các tiếp tuyến với đường tròn tại A và D cắt nhau ở E. Gọi H là hình chiếu của E trên OC. Chứng minh rằng ba điểm D, H, B thẳng hàng.

149. Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{A} = \alpha$, điểm I nằm trong tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của I trên BC, CA, AB. Tính hiệu $\widehat{BIC} - \widehat{EDF}$.

150. Cho tam giác ABC (AB < AC), I là giao điểm các tia phân giác của các góc B và C. Gọi D là hình chiếu của I trên AB, E là hình chiếu của I trên AC. Các đường thẳng BI, CI cắt DE theo thứ tự ở K, G. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MG = MK.

151. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CD của hai đường tròn, $C \in (O)$, $D \in (O')$, B gần CD hơn A. Vẽ dây BE của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O'). Vẽ dây BF của đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi I là giao điểm của CB và DF, K là giao điểm của DB và CE. Chứng minh rằng năm điểm A, C, D, I, K thuộc một đường tròn.

152. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H, điểm D thuộc tia đối của tia BA. Đường vuông góc với AD tại D cắt AC ở E. Trên tia AC lấy điểm F sao cho AF = CE. Gọi K là hình chiếu của F trên BC. Chứng minh rằng bốn điểm D, B, H, K thuộc một đường tròn.

153. Tứ giác ABCD có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^o$, $\widehat{D} = 135^o$. Biết BD = 4 cm, tính AC.

154. Cho đường tròn (O), D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC. Điểm A thuộc cung lớn BC (A và C nằm cùng phía đối với OD). Gọi M là giao điểm của OD và BC. Đường thẳng đi qua M và song song với DA cắt BA ở F. Vẽ hình bình hành CMFK. Chứng minh rằng $\widehat{DAK} = 90^{o}$.

Hướng dẫn : Vẽ đường kính DOE. Chứng minh rằng ba điểm K, A, E thẳng hàng.

155. Cho đường tròn (O), dây BC không đi qua O. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Vẽ đường tròn (I) đi qua B và tiếp xúc với AC tại A. Vẽ đường tròn (K) đi qua C và tiếp xúc với AB tại A. Gọi D là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (I) và (K). Chứng minh rằng :

a) Bốn điểm B, D, O, C thuộc một đường tròn;

b) Đường thẳng AD luôn đi qua một điểm cố định.

156. Cho hai đường thẳng song song a và b. Điểm A cố định thộc đường thẳng a, điểm B di chuyển trên đường thẳng b. Đường vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng a ở C. Trên nửa mặt phẳng không chứa B có bờ a, vẽ tia Cx sao cho $\widehat{ACx} = 2\widehat{BAC}$. Tìm quỹ tích hình chiếu H của A trên đường thẳng Cx.

157. Cho đường tròn (O ; R), điểm A nằm ngoài đường tròn, OA = 2R. Điểm M di chuyển trên đường tròn (O). Tia phân giác của góc AOM cắt AM ở D. Tìm quỹ tích của điểm D.

158. Cho đường tròn (O), dây AB, C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Điểm M di chuyển trên đoạn thẳng AB. Vẽ dây CD đi qua M. Gọi (I), (K) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMD, BMD. Gọi N là trung điểm của IK. Tìm quỹ tích của N.

159. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{A} = \alpha$, đường cao AH = h, chu vi bằng d.

160. Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển nằm giữa A và B. Vẽ về một phía của AB các hình vuông AMCD, BMEF. Gọi K là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp hai hình vuông đó.

a) Điểm K di chuyển trên đường nào ?

b) Chứng minh rằng đường thẳng KM luôn đi qua một điểm cố định.

c) Tìm vị trí của điểm M để độ dài KM lớn nhất.

Chuyên đề 8

TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Tứ giác nội tiếp là một công cụ đặc biệt quan trọng trong các bài toán về đường tròn cũng như trong các bài toán mà đề bài không đề cập đến đường tròn.

Các bài toán về tứ giác nội tiếp trong chuyên đề này gồm có :

– Tứ giác nội tiếp, tính chất và cách nhận biết, bao gồm các bài toán về chứng minh một tứ giác nội tiếp và vận dụng các tính chất của tứ giác nội tiếp để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, hai góc bằng nhau, hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song, các điểm thẳng hàng,...

– Sử dụng hệ thức lượng trong đường tròn vào tứ giác nội tiếp : Từ các điểm thuộc đường tròn suy ra các hệ thức, từ các hệ thức chứng minh các điểm thuộc một đường tròn.

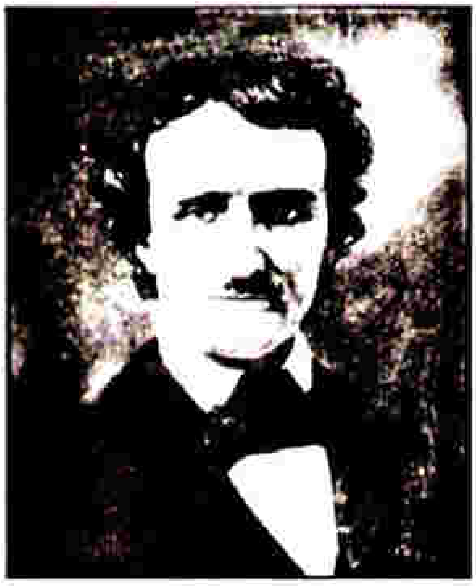
– Chuyên đề cũng giới thiệu những chùm bài tập có giả thiết gần nhau thường gặp, như bài toán có tam giác và các đường cao, bài toán có hai tiếp tuyến và một cát tuyến kẻ từ một điểm, bài toán có tứ giác nội tiếp và giao điểm của các đường thẳng chứa các cạnh đối để khi gặp các bài toán dạng này, ta nhớ đến những bổ đề quen thuộc giúp tìm ra cách giải.

Vài nét lịch sử

BÀI TOÁN NA-PÔ-LÊ-ÔNG

Na-pô-lê-ông Bô-na-pác (*Napoléon Bonaparte* 1769 - 1821), Hoàng đế Pháp, không chỉ giỏi về quân sự và kinh tế mà còn rất yêu thích toán học. Bài toán dưới đây và một vài bài toán khác, được gọi là bài toán Na-pô-lê-ông.

Thực ra, đó là bài toán của nhà toán học I-ta-li-a Mac-sê-rô-ni (*Lorenzo Mascheroni 1750 – 1800*). Na-pô-lê-ông đã gặp nhà toán học này trong chuyến viễn chinh ở I-ta-li-a và đã giới thiệu cuốn "Hình học với chiếc compa" của Mac-sê-rô-ni với Viện Hàn lâm khoa học Pa-ri.



Lorenzo Mascheroni

Napoléon Bonaparte

Bài toán chia đường tròn thành bốn phần với chiếc compa như sau :

Cho một đường tròn và tâm O của nó. Chỉ dùng một chiếc compa, hãy chia đường tròn đó thành bốn phần bằng nhau (tức là hãy dựng hai điểm sao cho khoảng cách giữa chúng là độ dài cạnh của một hình vuông nội tiếp đường tròn).

Giải (h.104)

Gọi R là bán kính của đường tròn (O). Dùng compa, dựng các điểm A, B, C, D trên đường tròn sao cho AB = BC = CD = R.

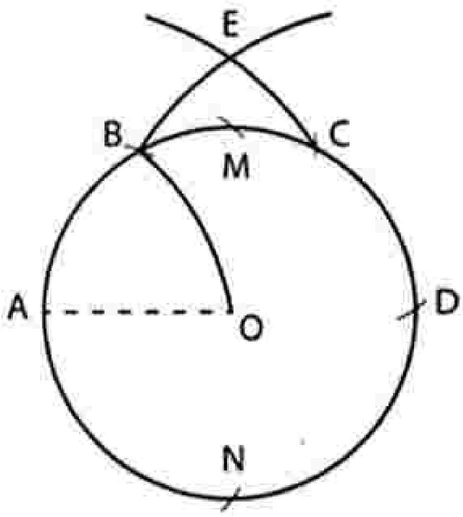
Dựng các cung của đường tròn (A ; AC) và (D ; DB), chúng cắt nhau ở E. Độ dài OE là độ dài cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn.

Đường tròn (A ; OE) cắt (O) ở M, N. Các điểm A, M, D, N chia đường tròn (O) thành bốn phần bằng nhau.

Chứng minh : $\triangle EAD$ cân tại E, đường trung tuyến EO là đường cao nên

$$OE^2 = AE^2 - OA^2 = AC^2 - OA^2$$

$$= (R\sqrt{3})^2 - R^2 = 2R^2 \Rightarrow OE = R\sqrt{2}.$$



Hình 104

I. TỨ GIÁC NỘI TIẾP : TÍNH CHẤT VÀ CÁCH NHẬN BIẾT

1. Tứ giác nội tiếp là tứ giác có bốn đỉnh thuộc một đường tròn.

2. Trong một tứ giác nội tiếp, các góc đối bù nhau (do đó một góc của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện).

3. Một tứ giác là nội tiếp nếu có một trong các điều kiện sau :

– Có một điểm cách đều bốn đỉnh của tứ giác (dùng định nghĩa đường tròn);

– Có hai đỉnh liên tiếp nhìn cạnh nối hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau (dùng cung chứa góc);

– Có hai góc đối bù nhau;

– Có một góc bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện.

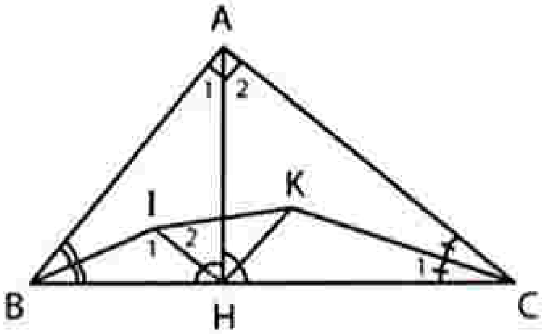
Ngoài ra, còn có thể dùng các hệ thức để chứng minh tứ giác nội tiếp (xem *Mục II. Sử dụng hệ thức lượng trong đường tròn*).

Ví dụ 85. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm các đường phân giác của các tam giác AHB, AHC. Chứng minh rằng BIKC là tứ giác nội tiếp.

Giải (h.105)

Xét $\widehat{BIK} + \hat{C}_1 = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{C}_1$. (1)

$\hat{I}_1 = 90^\circ + \dfrac{\hat{A}_1}{2} = 90^\circ + \dfrac{\hat{C}}{2}$. (2)



Hình 105

$\triangle AHB \backsim \triangle CHA$ (g.g). I và K là giao điểm các đường phân giác nên $\dfrac{HI}{HK}$ bằng tỉ số đồng dạng $\dfrac{HI}{HK} = \dfrac{HA}{HC}$, lại có $\widehat{IHK} = 90^\circ$ nên $\triangle IHK \backsim \triangle AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{I}_2 = \hat{A}_2 = \hat{B}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{BIK} + \hat{C}_1 = 90^\circ + \dfrac{\hat{C}}{2} + \hat{B} + \dfrac{\hat{C}}{2} = 90^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

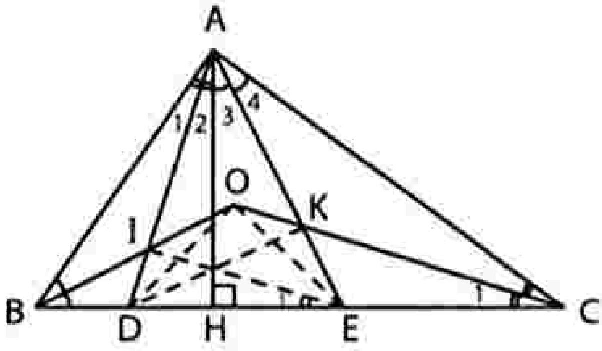
$\Rightarrow$ BIKC là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 86. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi O, I, K theo thứ tự là giao điểm các đường phân giác của các tam giác ABC, AHB, AHC. Gọi D, E theo thứ tự là giao điểm của AI, AK với BC.

a) Chứng minh rằng năm điểm D, I, O, K, E thuộc một đường tròn.

b) Tính đường kính của đường tròn đó theo các cạnh của tam giác ABC.

Giải (h.106)



Hình 106

a) Ta có $\widehat{BAE}$ phụ $\widehat{A}_4$, $\widehat{BEA}$ phụ $\widehat{A}_3$ mà $\widehat{A}_3 = \widehat{A}_4$ nên $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$

$\Rightarrow \triangle BAE$ cân tại B, do đó đường phân giác BO là đường trung trực của AE.

Tương tự CO là đường trung trực của AD. Suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE \Rightarrow \widehat{DOE} = 2\widehat{DAE} = 2.45^\circ = 90^\circ$. (1)

$\triangle BAE$ cân tại B có I thuộc trục đối xứng BO của tam giác nên $\widehat{E}_1 = \widehat{A}_1$ (đối xứng) mà $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ (do $\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$) nên $\widehat{E}_1 = \widehat{C}_1$, suy ra EI // CO. Ta lại có $CO \perp AD$ nên $EI \perp AD$, tức là $\widehat{DIE} = 90^\circ$. (2)

Tương tự $\widehat{DKE} = 90^\circ$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra D, I, O, K, E thuộc đường tròn đường kính DE.

b) DE = BE + CD − BC = BA + CA − BC.

Ví dụ 87. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Gọi Bx, Cy là các tiếp tuyến của đường tròn, D là hình chiếu của A trên Bx, E là hình chiếu của A trên Cy. Gọi I là giao điểm của AB và HD, K là giao điểm của AC và HE. Chứng minh rằng :

a) AIHK là tứ giác nội tiếp; b) IK song song với BC.

Giải (h.107)

a) Tứ giác AHBD nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AHD} = \widehat{ABD}$ mà $\widehat{C}_1 = \widehat{ABD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến với dây cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$) nên $\widehat{AHD} = \widehat{C}_1$.

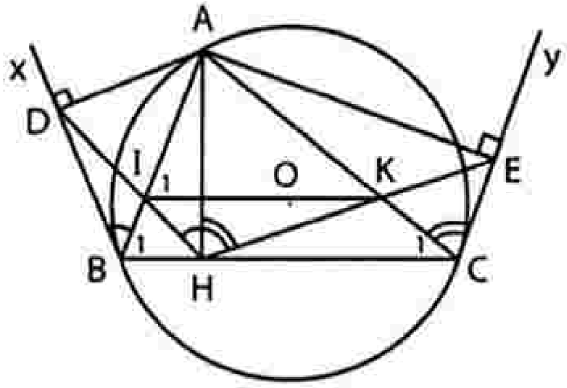
Tương tự $\widehat{AHE} = \hat{B}_1$.

Suy ra $\widehat{AHD} + \widehat{AHE} + \widehat{BAC}$

$= \hat{C}_1 + \hat{B}_1 + \widehat{BAC} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{IHK} + \widehat{IAK} = 180^o$

$\Rightarrow$ AIHK là tứ giác nội tiếp.



Hình 107

b) AIHK là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \hat{I}_1 = \widehat{AHK}$, mà $\widehat{AHK} = \hat{B}_1$ nên $\hat{I}_1 = \hat{B}_1$. Suy ra IK // BC.

Ví dụ 88. Cho đường tròn (O), dây BC, điểm H nằm giữa B và C. Đường vuông góc với BC tại H cắt cung lớn BC ở A. Kẻ dây AD song song với BC. Kẻ dây DK đi qua H. Kẻ đường kính AE, cắt BC ở I. Kẻ dây KF đi qua I. Gọi M là giao điểm của AF và BC. Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải (h.108)

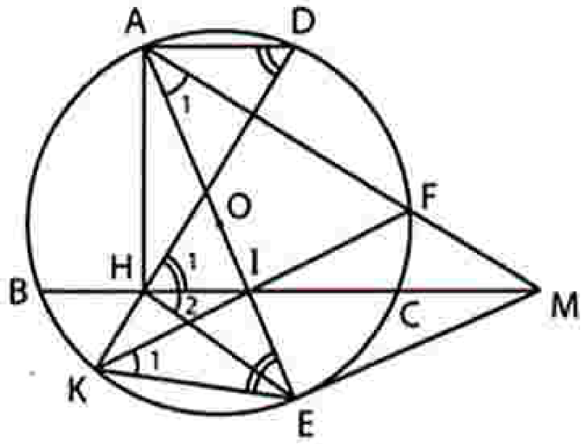
$\hat{D} = \hat{H}_1$ (vì AD // BC)

$\hat{D} = \widehat{AEK}$ (góc nội tiếp chắn cung AK)

nên $\hat{H}_1 = \widehat{AEK}$

$\Rightarrow$ IHKE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \hat{H}_2 = \hat{K}_1$.

Ta lại có $\hat{K}_1 = \hat{A}_1$ (góc nội tiếp chắn cung EF) nên $\hat{H}_2 = \hat{A}_1$



Hình 108

$\Rightarrow$ AHEM là tứ giác nội tiếp (theo cung chứa góc)

$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{AHM} = 90^o \Rightarrow$ ME là tiếp tuyến của (O).

Ví dụ 89. Cho hình thang ABCD nội tiếp đường tròn (O) có đáy lớn CD không qua O. Đường vuông góc với AD tại D và đường vuông góc với BC tại B cắt nhau ở E. Chứng minh rằng EO song song với AB.

Giải (h.109, hình vẽ ứng với điểm O nằm trong hình thang; trường hợp còn lại chứng minh tương tự).

Gọi K là giao điểm của AD và BC.

Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$ nên hiệu của chúng là $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

Ta lại có $\widehat{A}_1 = \widehat{ODA}$ nên $\widehat{B}_1 = \widehat{ODA}$

$\Rightarrow$ ODKB là tứ giác nội tiếp. (1)

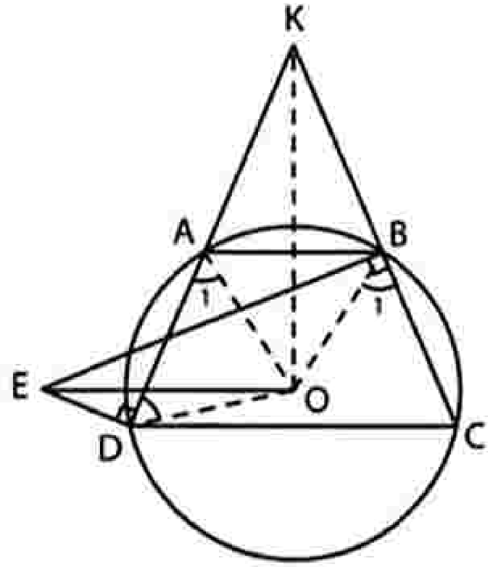
$\widehat{KBE} = \widehat{KDE} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ KBDE là tứ giác nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra K, B, O, D, E thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{KOE} = \widehat{KBE} = 90^\circ$.

Kết hợp với KO $\perp$ AB suy ra EO // AB.



Hình 109

Ví dụ 90. Cho tam giác ABC có AB < AC, điểm D thuộc đường trung tuyến AM. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC cắt tia phân giác của góc BAC tại E. Gọi H và K theo thứ tự là hình chiếu của E trên AB và AC. Chứng minh rằng ba điểm H, D, K thẳng hàng.

Giải (h.110)

Qua D kẻ đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC ở I và N.

Do MB = MC nên DI = DN. (1)

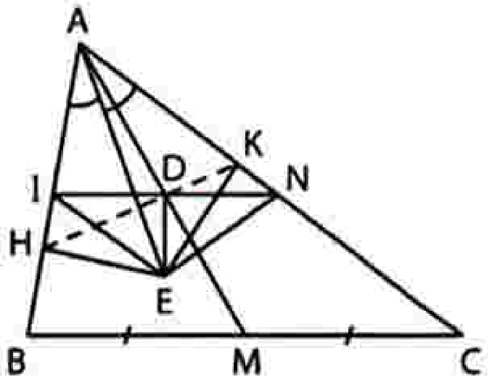
DE $\perp$ BC, BC // IN nên DE $\perp$ IN. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle$ EIN cân,

EI = EN. (3)

AE là tia phân giác góc A nên EH = EK. (4)

Từ (3) và (4) có $\triangle$EHI = $\triangle$EKN (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{EIH} = \widehat{ENK}$. (5)



Hình 110

Ta lại có $\widehat{EIH} = \widehat{EDH}$ (tứ giác EHID nội tiếp), $\widehat{ENK}$ bù $\widehat{EDK}$ (tứ giác EDKN nội tiếp) nên từ (5) suy ra $\widehat{EDH}$ bù $\widehat{EDK}$. Do đó H, D, K thẳng hàng.

Ví dụ 91. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B, $\widehat{OAO'} = 90^o$. Kẻ cát tuyến chung CAD, A nằm giữa C và D, $C \in (O)$, $D \in (O')$. Kẻ dây AG của đường tròn (O') cắt cung AB của đường tròn (O) ở H (khác A).

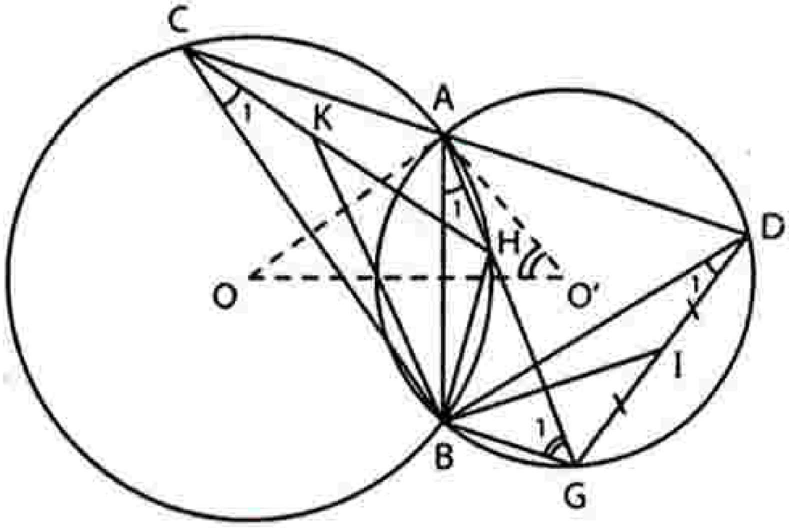
a) Tính góc GBH.

b) Gọi I là trung điểm của GD, K là trung điểm của CH. Tính góc IBK.

Giải (h.111)

a) $\widehat{G}_1 = \widehat{AO'O}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{AO'B}$)

$\widehat{BHG} = \widehat{ACB}$ (ACBH nội tiếp) $= \widehat{AOO'}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{AOB}$)



Hình 111

nên $\widehat{G}_1 + \widehat{BHG}$

$= \widehat{AO'O} + \widehat{AOO'} = 90^o$.

Vậy $\widehat{GBH} = 90^o$.

b) $\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{D}_1$.

$\widehat{BHC} = \widehat{BAC}$ (góc nội tiếp) $= \widehat{BGD}$ (ABGD nội tiếp) nên $\triangle BHC \backsim \triangle BGD$ (g.g)

$\Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{GBI}$ (BK và BI là các trung tuyến tương ứng)

$\Rightarrow \widehat{HBK} + \widehat{HBI} = \widehat{GBI} + \widehat{HBI} \Rightarrow \widehat{IBK} = \widehat{GBH}$.

Ta lại có $\widehat{GBH} = 90^o$ (câu a) nên $\widehat{IBK} = 90^o$.

Ví dụ 92. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Kẻ cát tuyến chung CAD, $C \in (O)$, $D \in (O')$. Đường vuông góc với O'A tại A cắt BC ở M. Đường vuông góc với OA tại A cắt BD ở N. Chứng minh rằng :

a) A, M, B, N thuộc một đường tròn;

b) MN song song với CD.

Giải (h.112, hình vẽ ứng với A nằm giữa C và D; trường hợp còn lại tương tự).

a) Theo liên hệ giữa góc tạo bởi tiếp tuyến với dây và góc nội tiếp, ta có

$\widehat{A}_1 = \widehat{C}$, $\widehat{A}_2 = \widehat{D}$ nên

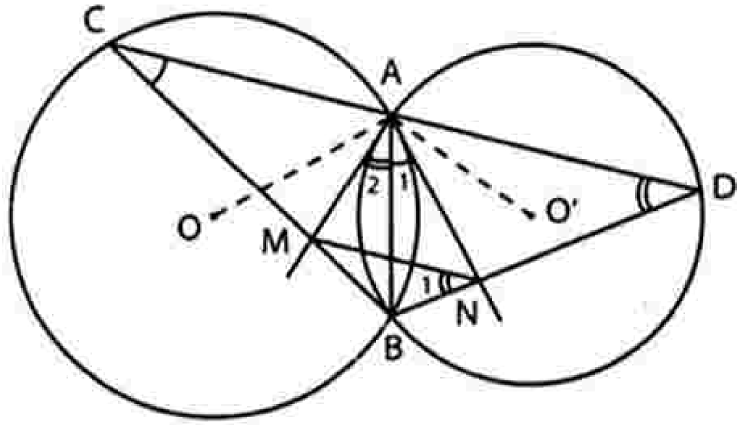
$\widehat{MBN} + \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$

$= \widehat{CBD} + \widehat{C} + \widehat{D} = 180^o$

$\Rightarrow$ AMBN là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác AMBN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{A}_2$.



Hình 112

Ta lại có $\widehat{A}_2 = \widehat{D}$ nên $\widehat{N}_1 = \widehat{D}$.

Suy ra MN // CD.

Ví dụ 93. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Kẻ các cát tuyến ABC, ADE với đường tròn, B nằm giữa A và C, D nằm giữa A và E. Gọi F là giao điểm (khác A) của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, ACD.

a) Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của BC và DE. Chứng minh rằng tứ giác AHFK nội tiếp.

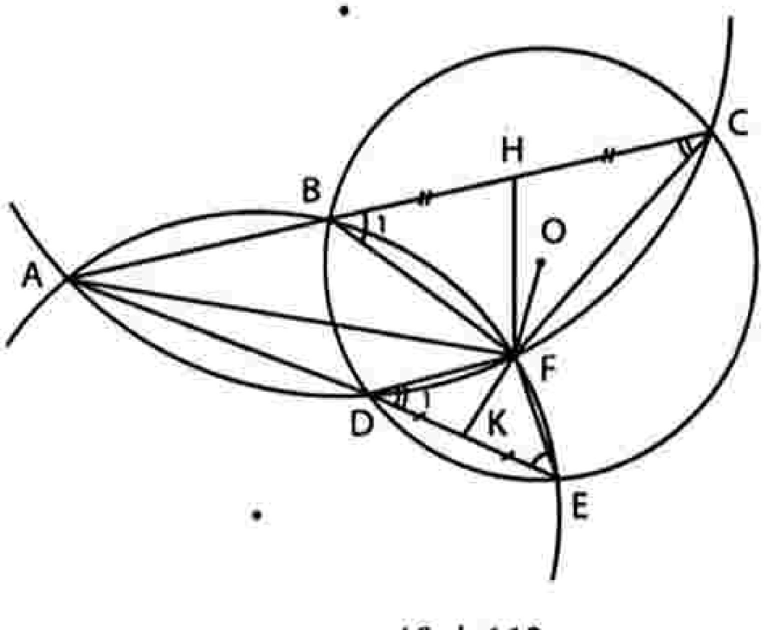
b) Tính góc AFO.

Giải (h.113)

a) ABFE là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}$. ADFC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}$.

Suy ra $\triangle BCF \backsim \triangle EDF$ (g.g), mà FH và FK là các đường trung tuyến tương ứng nên $\widehat{BHF} = \widehat{EKF} \Rightarrow$ AHFK là tứ giác nội tiếp.

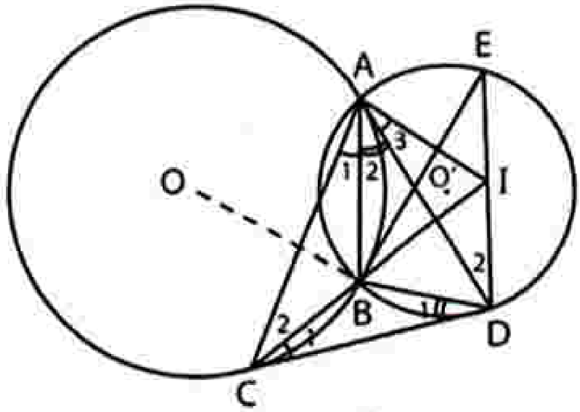


Hình 113

b) AHFK là tứ giác nội tiếp, AHOK là tứ giác nội tiếp (vì $\widehat{AHO} = \widehat{AKO} = 90^o$) nên A, H, O, F, K thuộc đường tròn đường kính AO. Suy ra $\widehat{AFO} = 90^o$.

Ví dụ 94. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CD, $C \in (O)$, $D \in (O')$, B gần CD hơn so với A. Đặt $\widehat{BCD} = \alpha$, $\widehat{BDC} = \beta$. Kẻ dây BE của đường tròn (O') vuông góc với OB tại B. Gọi I là giao điểm của CB và DE. Tính $\widehat{BID}$ và $\widehat{BAI}$.

Giải (h.114)



Hình 114

$\widehat{C}_2 = \widehat{ABE}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến với dây) $= \widehat{D}_2$ (góc nội tiếp)

$\Rightarrow$ ACDI là tứ giác nội tiếp

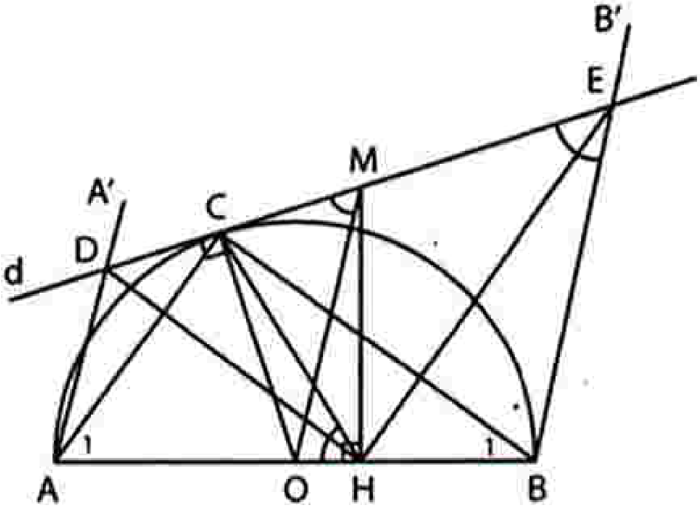
$\Rightarrow \widehat{BID} = \widehat{CAD} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2$

$= \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = \alpha + \beta.$

Ta có $\widehat{A}_3 = \widehat{C}_1$ (ACDI nội tiếp) nên $\widehat{BAI} = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = \widehat{D}_1 + \widehat{C}_1 = \beta + \alpha$.

Ví dụ 95. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Qua điểm C thuộc nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến d. Kẻ hai đường thẳng song song AA' và BB' bất kì, cắt d theo thứ tự ở D và E. Chứng minh rằng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.

Giải (h.115)



Hình 115

Gọi M là trung điểm của DE.

Kẻ $MH \perp AB$. Ta sẽ chứng minh MH = MD = ME bằng cách chứng minh $\widehat{DHE} = 90^\circ$.

Giả sử M nằm giữa C và E, các trường hợp khác tương tự.

OCMH là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CHO} = \widehat{CMO}$. (1)

OM là đường trung bình của hình thang ADEB

$\Rightarrow OM \parallel BE \Rightarrow \widehat{CMO} = \widehat{CEB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CHO} = \widehat{CEB} \Rightarrow$ CHBE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CEH} = \widehat{B}_1$.

Tương tự $\widehat{CDH} = \widehat{A}_1$.

Suy ra $\widehat{CEH} + \widehat{CDH} = \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = 90^o \Rightarrow \widehat{DHE} = 90^o$.

Tam giác DHE vuông tại H có HM là đường trung tuyến nên HM = MD = ME.

Đường tròn đường kính DE có tâm M, lại có AB ⊥ MH tại H nên AB là tiếp tuyến của đường tròn.

Ví dụ 96. Cho tam giác ABC, tia phân giác các góc B và C cắt nhau tại I. Gọi H là hình chiếu của C trên BI, K là hình chiếu của B trên CI, D là hình chiếu của I trên BC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng bốn điểm D, K, H, M thuộc một đường tròn.

Giải (h.116, hình vẽ ứng với AB < AC, các trường hợp khác tương tự).

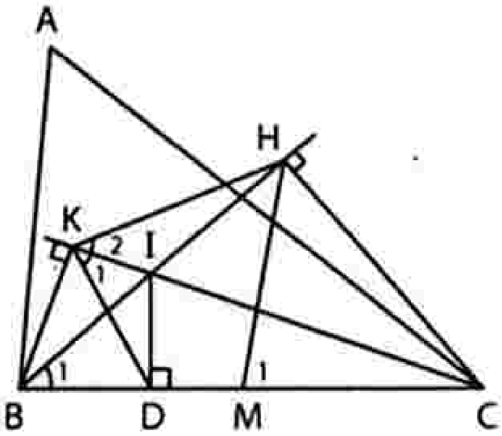
$\triangle$BHC vuông tại H có HM là đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle$MBH cân tại M.

$\widehat{M}_1 = 2\widehat{B}_1 = \widehat{ABC}$. (1)

BKID là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{B}_1$.

BKHC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{K}_2 = \widehat{B}_1$.

Suy ra $\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 2\widehat{B}_1 = \widehat{ABC}$ tức là $\widehat{DKH} = \widehat{ABC}$. (2)

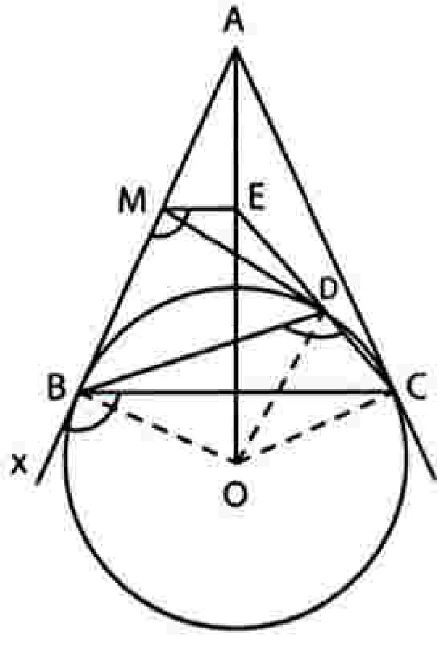


Hình 116

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{DKH} \Rightarrow$ DKHM là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 97. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại B và tiếp xúc với AC tại C. Gọi D là điểm thuộc cung nhỏ BC ($\overset{\frown}{CD} < \overset{\frown}{BD}$). Gọi E là giao điểm của CD và AO. Đường thẳng đi qua E và song song với BC cắt AB ở M. Chứng minh rằng MD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải (h.117)



Hình 117

ME // BC $\Rightarrow \widehat{EMB} = \widehat{CBx}$, mà $\widehat{CBx} = \widehat{CDB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến với dây và góc nội tiếp) nên $\widehat{EMB} = \widehat{CDB} \Rightarrow$ EMBD là tứ giác nội tiếp. (1)

EMBO có $\widehat{OEM} + \widehat{OBM} = 90^o + 90^o = 180^o$ nên là tứ giác nội tiếp. (2)

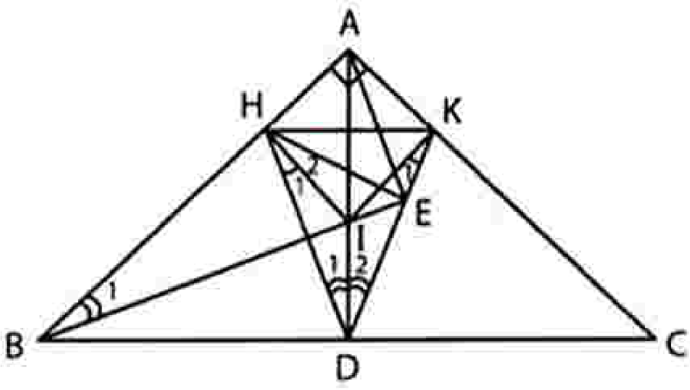
Từ (1) và (2) suy ra năm điểm E, M, B, O, D thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OEM} = 90^o$.

Vậy MD là tiếp tuyến của (O).

Ví dụ 98. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm I thuộc đường cao AD. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của I trên AB, AC. Gọi E là giao điểm của BI và DK. Chứng minh rằng I là giao điểm các đường phân giác của tam giác DHE.

Giải (h.118)



Hình 118

Tứ giác AHIK là hình vuông nên H đối xứng với K qua AD

$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$, $\widehat{H}_1 = \widehat{K}_1$.

Tứ giác BHID nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \Rightarrow$ ABDE nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^o$.

Do đó A, H, I, E, K thuộc đường tròn đường kính AI $\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{H}_2$.

Vậy $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$.

Tam giác DHE có $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$, $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ nên I là giao điểm các đường phân giác.

Ví dụ 99. Cho đường tròn (O). Đường tròn (O') đi qua O và cắt đường tròn (O) tại A và B. Vẽ đường kính OC của đường tròn (O'). Vẽ dây BD của đường tròn (O) là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Gọi giao điểm thứ hai của CD với đường tròn (O) và đường tròn (O') theo thứ tự là H và E. Chứng minh rằng :

a) EC là tia phân giác của góc AEB; b) AE song song với HB;

c) AH = EH.

Giải (h.119)

a) A đối xứng với B qua OC

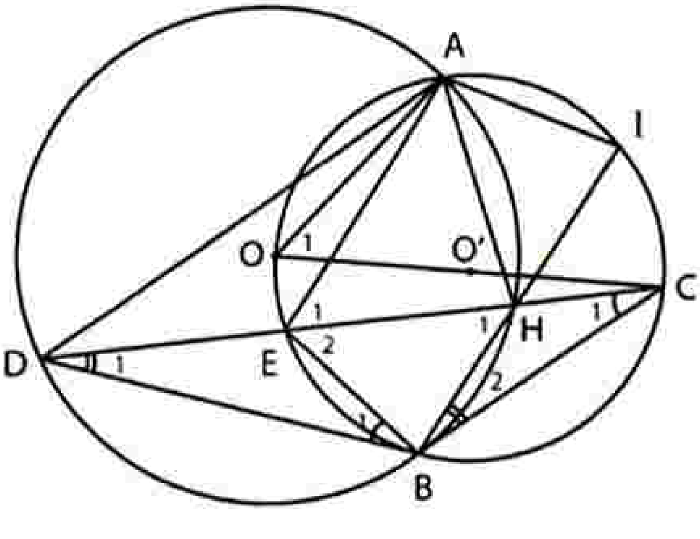
$\Rightarrow \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2$.

b) Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có

$\hat{E}_2 = \hat{D}_1 + \hat{B}_1, \hat{H}_1 = \hat{B}_2 + \hat{C}_1$.

Ta lại có BD là tiếp tuyến của (O'), BC là tiếp tuyến của (O) nên $\hat{D}_1 = \hat{B}_2$, $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$.

Suy ra $\hat{E}_2 = \hat{H}_1$. Ta lại có $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ (câu a) nên $\hat{E}_1 = \hat{H}_1$



Hình 119

$\Rightarrow$ AE // HB.

c) Do AE // HB (câu b), gọi I là giao điểm của BH và (O') thì AEBI là hình thang cân $\Rightarrow \hat{I} = \widehat{EBH}$. (1)

$\widehat{AHI} = \widehat{ADB}$ (ADBH nội tiếp) $= \hat{O}_1 = \hat{E}_1 = \hat{H}_1$. (2)

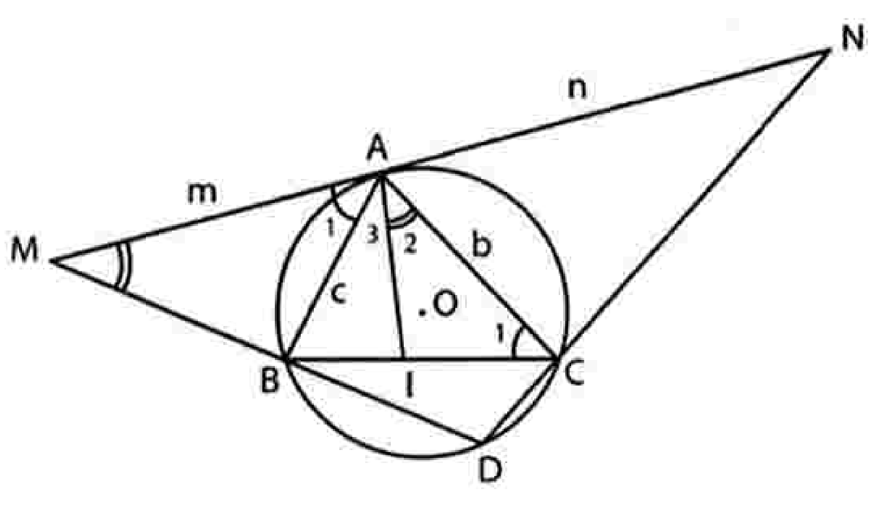
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AHI \backsim \triangle EHB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{EH} = \dfrac{AI}{EB} = 1$. Vậy AH = EH.

Ví dụ 100. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), BC = a, AC = b, AB = c. Gọi d là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O). Lấy điểm D thuộc cung BC không chứa A sao cho các tia DB và DC cắt d, gọi các giao điểm đó theo thứ tự là M và N. Tính tổng $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN}$ theo a, b, c.

Giải (h.120)

Đặt AM = m, AN = n.
Ta có $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (cùng bằng nửa số đo cung AB). Để tạo ra tam giác đồng dạng với $\triangle$AMB, ta lấy I trên BC sao cho $\widehat{CAI} = \hat{M}$.
$\triangle CAI \backsim \triangle AMB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AM} = \dfrac{IC}{AB}$



Hình 120

$$\Rightarrow \frac{b}{m} = \frac{IC}{c} \Rightarrow m = \frac{bc}{IC} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{IC}{bc}.$$

Do $\widehat{D} + \widehat{M} + \widehat{N} = 180^o$ (xét $\triangle DMN$) và $\widehat{D} + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 180^o$ (ABDC nội tiếp) nên $\widehat{M} + \widehat{N} = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3$. Do $\widehat{M} = \widehat{A}_2$ nên $\widehat{N} = \widehat{A}_3$. Do đó tương tự ta có $\frac{1}{n} = \frac{IB}{bc}$.

Suy ra $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{IC}{bc} + \frac{IB}{bc} = \frac{a}{bc}$. Vậy $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{a}{bc}$.

Ví dụ 101. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d không giao với đường tròn, điểm A cố định trên đường tròn (O), điểm B cố định trên đường thẳng d. Gọi M là điểm di chuyển trên d. Đường tròn (O') đi qua A, B, M cắt đường tròn (O) ở điểm C (khác A). Chứng minh rằng đường thẳng MC luôn đi qua một điểm cố định.

Giải (h.121)

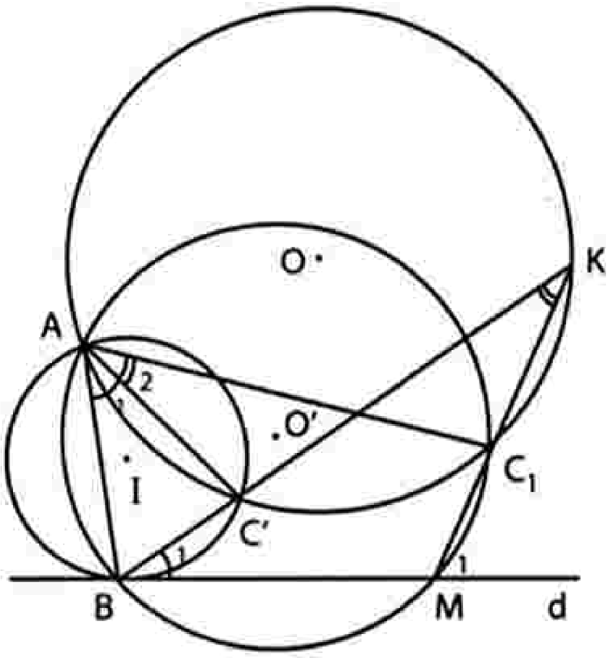
Vẽ đường tròn (I) đi qua A và tiếp xúc với d tại B, cắt (O) ở C'. Gọi K là giao điểm của BC' và (O) thì K cố định.

Gọi C_1 là giao điểm (khác K) của MK và (O). Ta có $\widehat{M_1} = \widehat{B_1} + \widehat{K}$ (góc ngoài $\triangle MBK$) $= \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{BAC_1}$

$\Rightarrow ABMC_1$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow C_1 \in (O') \Rightarrow C_1$ trùng C.

Vậy MC đi qua điểm cố định K.



Hình 121

Lưu ý : Sở dĩ ta vẽ đường tròn (I) đi qua A và tiếp xúc với d tại B vì khi M tiến đến B thì đường tròn (O') tiến đến đường tròn (I).

Ví dụ 102. Cho tam giác nhọn ABC, điểm M thuộc cạnh BC. Kẻ MD song song với AC ($D \in AB$), kẻ ME song song với AB ($E \in AC$).

a) Gọi (O) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại A. Gọi (O') là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với AB tại A. Gọi K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn đó. Chứng minh rằng $\triangle KAE \backsim \triangle KBD$.

b) Chứng minh rằng khi M chuyển động trên cạnh BC thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A.

Giải (h.122)

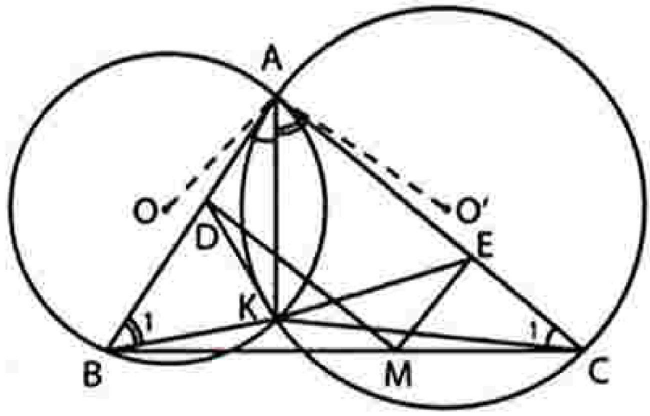
a) Ta có $\widehat{KAE} = \hat{B}_1$, sẽ chứng minh $\frac{AK}{BK} = \frac{AE}{BD}$.

$\triangle KAC \backsim \triangle KBA$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{AC}{AB}$. (1)

ADME là hình bình hành

$\Rightarrow \frac{AE}{BD} = \frac{DM}{BD} = \frac{AC}{AB}$. (2)



Hình 122

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AK}{BK} = \frac{AE}{BD}$, lại có $\widehat{KAE} = \hat{B}_1$ nên $\triangle KAE \backsim \triangle KBD$ (c.g.c).

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{KEA} = \widehat{KDB} \Rightarrow$ ADKE là tứ giác nội tiếp. Vậy đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ đi qua điểm cố định K.

Lưu ý : Câu a) là gợi ý để giải câu b). Sở dĩ ta vẽ các đường tròn (O), (O') vì khi M tiến đến B thì đường tròn (ADE) tiến đến đường tròn (O), khi M tiến đến C thì đường tròn (ADE) tiến đến đường tròn (O').

Ví dụ 103. Cho tam giác nhọn ABC.

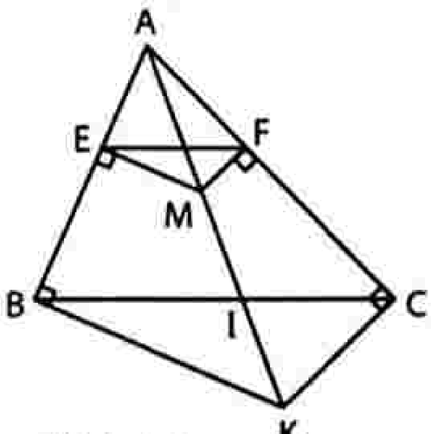
a) Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong tam giác sao cho nếu gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB và AC thì EF song song với BC.

b) Dựng điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho nếu gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, AB, AC thì DE // AC, DF // AB, EF // BC.

Giải (h.123)

a) Đường vuông góc với AB tại B cắt AM ở K. Ta có $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB}$ (do EF // BC) $= \frac{AM}{MK}$ (do EM // BK)

$\Rightarrow$ MF // KC (định lí Ta-lét đảo).



Hình 123

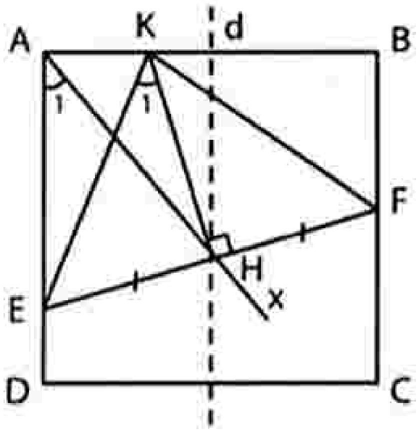
Ta lại có MF $\perp$ AC nên KC $\perp$ AC. Tứ giác ABKC nội tiếp đường tròn đường kính AK. Quỹ tích của M là đoạn AI trên đường kính AK của đường tròn (ABC).

b) Từ câu a) suy ra điểm M phải dựng là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Ví dụ 104. Cho hình vuông ABCD, điểm K thuộc cạnh AB. Dựng điểm E thuộc tia AD, điểm F thuộc tia BC sao cho tam giác KEF cân tại K có $\widehat{EKF} = 80^o$.

Giải (h.124)

Phân tích : Giả sử đã dựng được $\triangle KEF$ thỏa mãn bài toán. Gọi H là trung điểm của EF thì H thuộc đường trung trực d của AB. AEHK là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{A}_1 = \widehat{K}_1 = 40^o$ nên $\widehat{DAx} = 40^o$.



Hình 124

Cách dựng : Dựng tia Ax trong góc BAD sao cho $\widehat{DAx} = 40^o$. Dựng đường trung trực d của AB, cắt Ax tại H. Dựng đường vuông góc với KH tại H, cắt AD và BC theo thứ tự ở E và F.

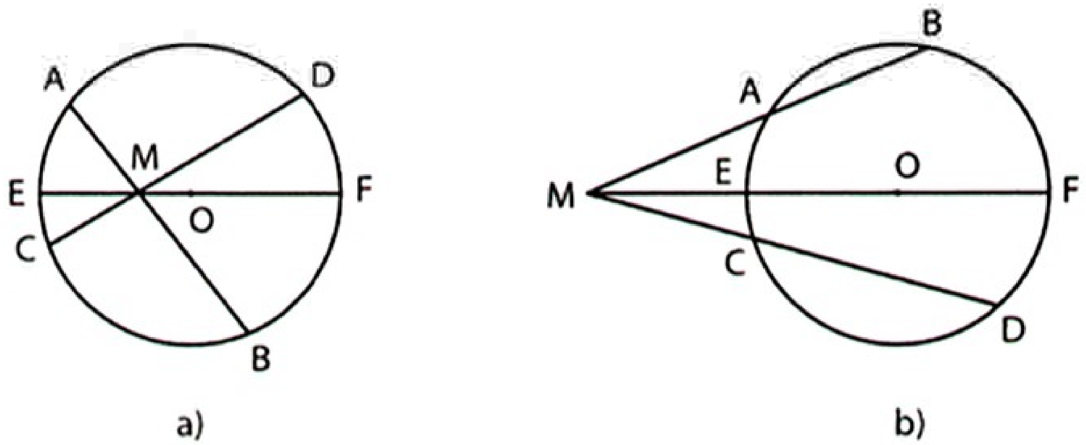
Chứng minh : Bạn đọc tự giải.

Biện luận : Bài toán có một nghiệm hình.

II. SỬ DỤNG HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

Các bài toán trong mục này có sử dụng các bổ đề sau :

Bổ đề 1. Nếu hai dây (hoặc hai đường thẳng chứa dây) AB và CD cắt nhau ở M thì MA.MB = MC.MD (h.125).



Hình 125

Bổ đề 2. Gọi R là bán kính của đường tròn và MO = d thì :

$MA.MB = R^2 - d^2$ nếu M nằm trong đường tròn (O ; R);

$MA.MB = d^2 - R^2$ nếu M nằm ngoài đường tròn (O ; R).

Chẳng hạn với hình 125b, ta chứng minh như sau :

Kẻ cát tuyến MEF đi qua O, ta có

$MA.MB = ME.MF = (MO - OE)(MO + OF) = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2.$

Bổ đề 3. Nếu có cát tuyến MAB và tiếp tuyến MT của đường tròn (O), T là tiếp điểm thì $MT^2 = MA.MB$.

Bổ đề 4. (Đảo của bổ đề 1). Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau ở M, hai điểm A và B thuộc a, hai điểm C và D thuộc b mà MA.MB = MC.MD thì bốn điểm A, B, C, D thuộc một đường tròn.

Bổ đề 5. (Đảo của bổ đề 3). Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau ở M, hai điểm A và B thuộc a, điểm T thuộc b mà $MA.MB = MT^2$ thì MT là tiếp tuyến của đường tròn (TAB), T là tiếp điểm.

Ví dụ 105. Cho tam giác nhọn ABC có đường trung tuyến AO = BC. Vẽ đường tròn (O) đường kính BC cắt các đoạn AB, AO, AC theo thứ tự ở D, K, E. Gọi I là trung điểm của OK. Chứng minh rằng :

a) BDIO là tứ giác nội tiếp; b) ADIE là tứ giác nội tiếp.

Giải (h.126)

a) Vẽ đường kính KOH. Đặt OB = OC = R, ta có AD.AB = AK.AH (bổ đề 1)

$= R.3R = 3R^2.$ (1)

$AI.AO = \frac{3}{2}R.2R = 3R^2.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AD.AB = AI.AO

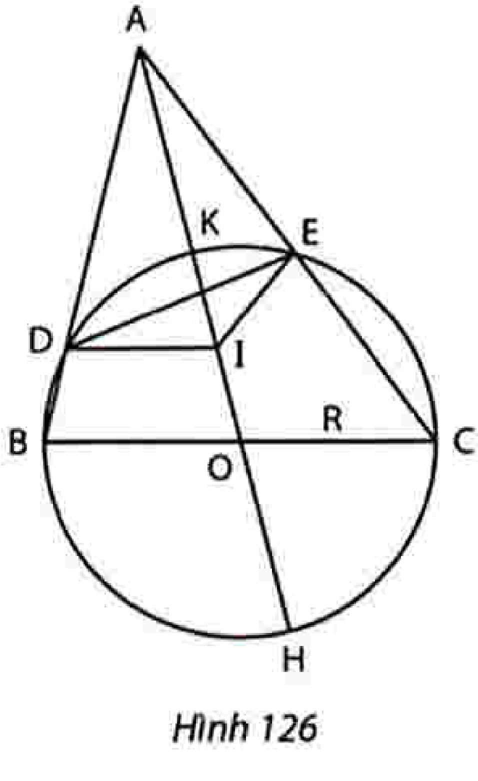
$\Rightarrow$ BDIO là tứ giác nội tiếp (bổ đề 4).

b) Tứ giác BDIO nội tiếp (câu a)

$\Rightarrow \hat{B} = \widehat{DIA}$.

Tứ giác BDEC nội tiếp $\Rightarrow \hat{B} = \widehat{DEA}$.

Suy ra $\widehat{DIA} = \widehat{DEA} \Rightarrow$ ADIE là tứ giác nội tiếp.



Hình 126

Ví dụ 106. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O ; R). Một đường kính BC thay đổi. Gọi D và E theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AB và AC với đường tròn. Chứng minh rằng :

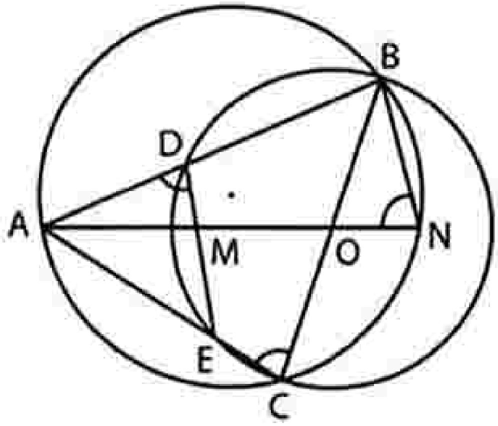
a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua một điểm cố định khác A;

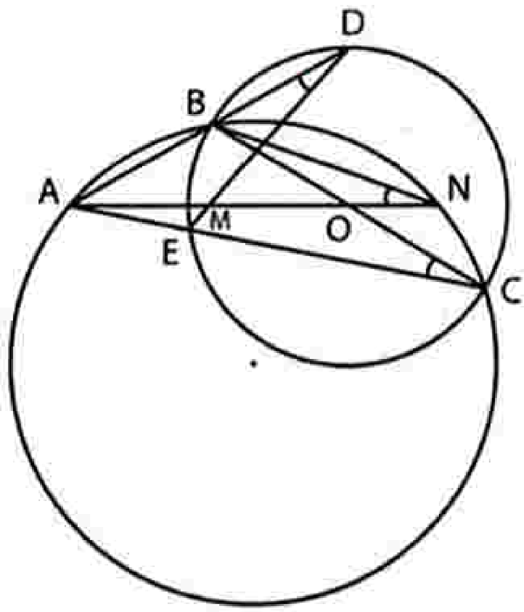
b) Đường thẳng DE đi qua một điểm cố định.

Giải (h.127)

a) Gọi N là giao điểm của đường tròn (ABC) với AO.

Ta có OA.ON = OB.OC = R^2 (bổ đề 1) nên N là điểm cố định.





Hình 127

b) Gọi M là giao điểm của DE và OA. Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{ACB} = \widehat{ADE}$ nên B, D, M, N thuộc một đường tròn $\Rightarrow$ AM.AN = AD.AB (bổ đề 1).

Ta lại có AD.AB không đổi, có hai cách giải thích :

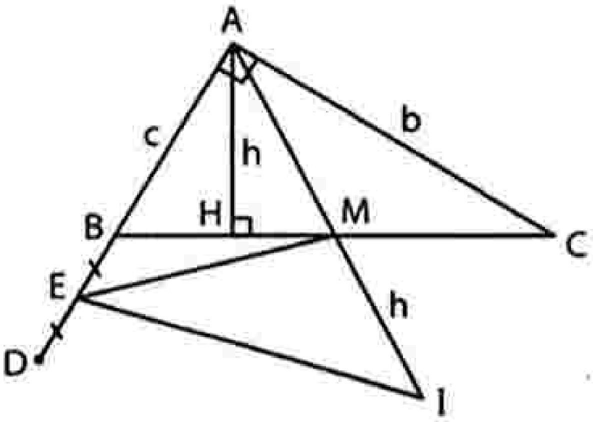
– Vì AD.AB = AK^2 với AK là tiếp tuyến kẻ từ A đến (O), theo bổ đề 3.

– Vì AD.AB = $AO^2 - R^2$, theo bổ đề 2.

Ta có AM.AN không đổi, mà AN không đổi (câu a) nên M là điểm cố định.

Ví dụ 107. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB < AC, đường trung tuyến AM, đường cao AH. Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho MI = AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho AD = AC. Gọi E là trung điểm của BD. Chứng minh rằng AE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMI.

Giải (h.128)



Hình 128

Đặt BC = a, AC = b, AB = c, AH = h.

Ta có AE = AB + BE = c + BE,

AE = AD − ED = b − ED mà BE = ED nên 2AE = b + c

$$\Rightarrow AE^2 = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{b^2+c^2+2bc}{4}. \quad (1)$$

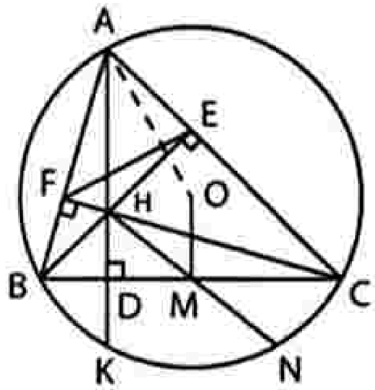
$$\text{Ta có } AM.AI = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+h\right) = \frac{a^2+2ah}{4}. \qquad (2)$$

Do bc = ah và $b^2 + c^2 = a^2$ nên từ (1) và (2) suy ra $AE^2 = AM.AI$. Theo bổ đề 5, AE là tiếp tuyến của đường tròn (EMI).

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ GIẢ THIẾT GẦN NHAU

1. Bài toán có tam giác và các đường cao

Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm của BC (h.129).



Hình 129

Có nhiều tính chất được vận dụng khi giải toán, chẳng hạn :

a) Có ba tứ giác nội tiếp có đường kính là HA, HB, HC. Có ba tứ giác nội tiếp có đường kính là AB, BC, CA.

b) $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$ (vì $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ do BFEC là tứ giác nội tiếp).

c) $OA \perp EF$.

d) AH = 2OM.

e) Điểm K đối xứng với H qua BC thuộc đường tròn (O).

g) Điểm N đối xứng với H qua trung điểm M của BC thuộc đường tròn (O).

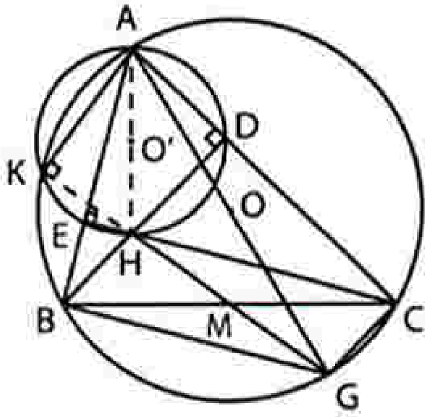
Ví dụ 108. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), AB < AC, các đường cao BD và CE. Đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ADE cắt đường tròn (O) ở K (khác A). Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng KM vuông góc với AK.

Giải

Cách 1. (h.130) Kẻ đường kính AG, ta có $\widehat{AKG} = 90^o$. (1)

Để chứng minh $\widehat{AKM} = 90^o$, ta sẽ chứng minh K, M, G thẳng hàng.

Gọi H là giao điểm của BD và CE. Tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn (O') mà K $\in$ (O') nên $\widehat{AKH} = \widehat{AEH} = 90^o$. (2)



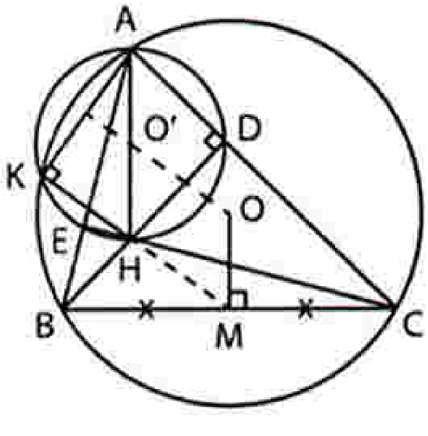
Hình 130

Từ (1) và (2) suy ra K, H, G thẳng hàng.(3)

BHCG là hình bình hành, M là trung điểm của BC nên H, M, G thẳng hàng. (4)

Từ (3) và (4) suy ra K, H, M, G thẳng hàng. Suy ra $\widehat{AKM} = 90^o$, tức là KM $\perp$ AK.

Cách 2. (h.131) Gọi H là giao điểm của BD và CE. Tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn (O') mà K $\in$ (O') nên $\widehat{AKH} = \widehat{AEH} = 90^o$, tức là HK $\perp$ AK. (1)



Hình 131

Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và K nên OO' $\perp$ AK. (2)

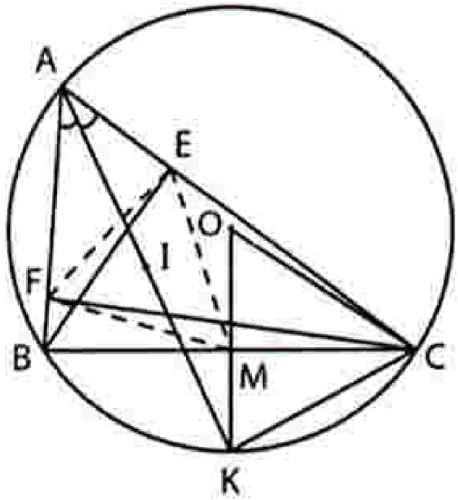
Từ (1) và (2) suy ra HK // OO'. (3)

Ta có O'H = $\frac{1}{2}$AH = OM và O'H // OM nên OO'HM là hình bình hành $\Rightarrow$ HM // OO'. (4)

Từ (3) và (4) suy ra K, H, M thẳng hàng.

Do HK $\perp$ AK nên KM $\perp$ AK.

Ví dụ 109. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE và CF, M là trung điểm của BC, I là giao điểm các đường phân giác của tam giác ABC, K là giao điểm thứ hai của AI với đường tròn (O). Biết KI = KO, chứng minh rằng tam giác MEF là tam giác đều.



Hình 132

Giải (h.132)

Dễ chứng minh KI = KC.

Theo đề bài KI = KO nên KC = KO = OC

$\Rightarrow \triangle KOC$ đều $\Rightarrow \widehat{KOC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{2}$. (1)

Tứ giác BFEC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \triangle AEF \backsim \triangle ABC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AE}{AB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EF = \dfrac{1}{2}BC$.

Ta lại có $ME = MF = \dfrac{1}{2}BC$ nên $\triangle MEF$ là tam giác đều.

Ví dụ 110. Cho tam giác nhọn ABC, AB < AC, đường cao AD. Đường tròn đường kính BC cắt AC, AB tại E, F. Gọi K là giao điểm của EF và BC, M là giao điểm (khác F) của FD và đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) KFOM là tứ giác nội tiếp;

b) KO là tia phân giác của góc MKF.

Giải (h.133)

a) $\hat{F}_1 = \hat{C}$ (tứ giác BFEC nội tiếp)

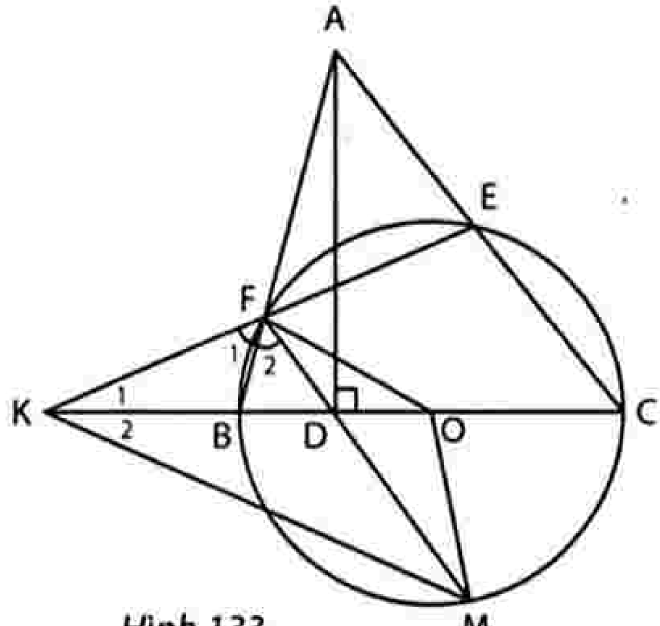
$= \hat{F}_2$ (tứ giác AFDC nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{KFM} = 2\hat{F}_2$, mà $\widehat{KOM} = 2\hat{F}_2$, (góc nội tiếp và góc ở tâm) nên $\widehat{KFM} = \widehat{KOM}$.

Suy ra KFOM là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác KFOM nội tiếp có OF = OM nên $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$.

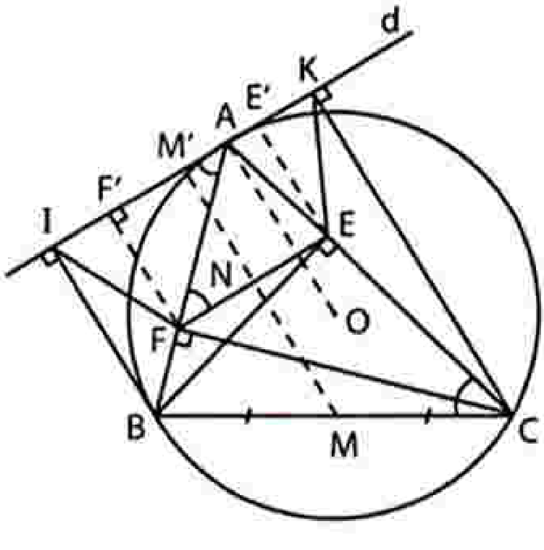
Vậy KO là tia phân giác của góc MKF.



Hình 133

Ví dụ 111. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE và CF. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Gọi I, K theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên d. Chứng minh rằng FI = EK.

Giải (h.134)



Hình 134

Gọi M là trung điểm của BC.

Kẻ EE', FF', MM' vuông góc với d.

Dễ chứng minh $\widehat{BAI} = \widehat{ACB} = \widehat{AFE}$

$\Rightarrow$ EF // d $\Rightarrow$ EE' = FF'. (1)

Gọi N là giao điểm của MM' và EF.

Do EF // d nên MM' $\perp$ EF.

Tam giác MEF cân tại M mà MN $\perp$ EF nên NF = NE.

Suy ra M'F' = M'E'. (2)

Hình thang BIKC có MB = MC, MM' // BI // CK nên M'I = M'K. (3)

Từ (2) và (3) suy ra M'I − M'F' = M'K − M'E' $\Rightarrow$ IF' = KE'. (4)

Từ (1) và (4) suy ra $\triangle$FF'I = $\triangle$EE'K (c.g.c) $\Rightarrow$ FI = EK.

Ví dụ 112. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. Kẻ các dây BD, CE đi qua H. Gọi M là điểm thuộc cung BC không chứa A. Gọi I là giao điểm của ME và AB, K là giao điểm của MD và AC. Chứng minh rằng ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Giải (h.135)

Hình 135

Dễ chứng minh H đối xứng với D qua AC nên $\widehat{H}_1 = \widehat{D}$. Ta lại có $\widehat{D} = \widehat{C}_1$ (góc nội tiếp) nên $\widehat{H}_1 = \widehat{C}_1$. Chứng minh tương tự, $\widehat{H}_2 = \widehat{B}_1$.

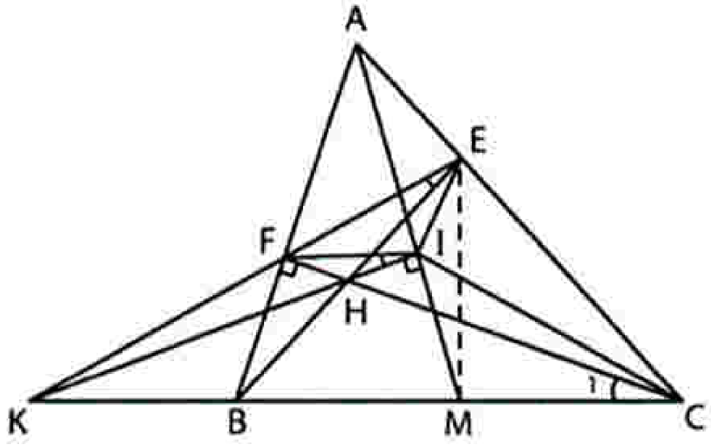
Còn $\widehat{H}_3 = \overset{\frown}{BMC}$ (cùng bù $\widehat{A}$).

Suy ra $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 + \widehat{H}_3 = \widehat{C}_1 + \widehat{B}_1 + \overset{\frown}{BMC} = 180^\circ$.
Vậy I, H, K thẳng hàng.

Ví dụ 113. Cho tam giác nhọn ABC. AB < AC, các đường cao BE và CF cắt nhau ở H. Gọi K là giao điểm của EF và BC. Qua A kẻ đường vuông góc với KH, cắt KH và BC theo thứ tự ở I và M. Chứng minh rằng :

a) KFIC là tứ giác nội tiếp; b) MIEC là tứ giác nội tiếp; c) MB = MC.

Giải (h.136a)



Hình 136a

a) Năm điểm A, F, H, I, E thuộc đường tròn đường kính AH nên $\widehat{HIF}=\widehat{HEF}$ mà $\widehat{HEF}=\hat{C}_1$ (BFEC nội tiếp) nên $\widehat{HIF}=\hat{C}_1$, tức là $\widehat{KIF}=\hat{C}_1 \Rightarrow$ KFIC là tứ giác nội tiếp.

b) $\widehat{AIE}=\widehat{AFE}$ mà

$\widehat{AFE}=\widehat{ACB}$ (BFEC nội tiếp) nên $\widehat{AIE}=\widehat{ACB} \Rightarrow$ MIEC là tứ giác nội tiếp.

c) Từ câu b) suy ra $\widehat{MIC}=\widehat{MEC}$. (1)

Từ câu a) suy ra $\widehat{KFC}=\widehat{KIC}$.

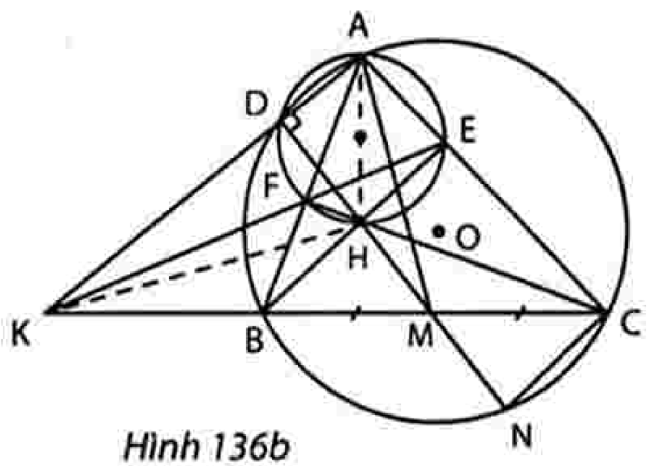
Hai góc này cùng trừ đi 90° suy ra $\widehat{KFB}=\widehat{MIC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KFB}=\widehat{MEC}$, ta lại có $\widehat{KFB}=\widehat{ACB}$ (BFEC nội tiếp) nên $\widehat{MEC}=\widehat{ACB}$. Suy ra MC = ME. Từ đó MB = ME. Vậy MB = MC.

Lưu ý: Xét bài toán đảo của Ví dụ 113, ta có bài toán sau:

Cho tam giác nhọn ABC, AB < AC, các đường cao BE và CF cắt nhau ở H. Gọi K là giao điểm của EF và BC, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng KH vuông góc với AM.

Giải



Hình 136b

Cách 1. (Chứng minh gián tiếp). Qua A, kẻ đường vuông góc với KH, cắt BC ở M'. Giải như Ví dụ 113 được M' là trung điểm của BC nên M' trùng M. Vậy $KH \perp AM$.

Cách 2. (Chứng minh trực tiếp, h.136b). Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH. Gọi D là giao điểm thứ hai của đường tròn đó với AK. Ta có $\widehat{ADH} = \widehat{AFH} = 90^o$. (*)

Ta có KD.KA = KF.KE = KB.KC $\Rightarrow$ ADBC là tứ giác nội tiếp.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADBC, gọi N là giao điểm của DH và (O). Do (*) nên $\widehat{ADN} = 90^o \Rightarrow \widehat{ACN} = 90^o$.

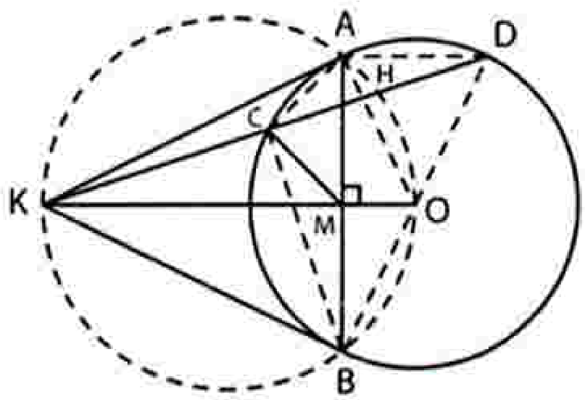
Từ đó NC // BH, tương tự NB // CH. Tứ giác BHCN là hình bình hành nên HN đi qua trung điểm M của BC.

ΔAKM có AH $\perp$ KM, MH $\perp$ AK nên H là trực tâm suy ra KH $\perp$ AM.

Ở bài toán trên, tuy trong đề bài không có đường tròn nhưng trong cách giải có vẽ thêm hai đường tròn và vẽ thêm hai giao điểm D và N với hai đường tròn ấy.

2. Bài toán có hai tiếp tuyến và một cát tuyến kẻ từ một điểm

Cho đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD. Gọi H là trung điểm của CD, M là giao điểm của KO và AB (h.137). Cần chú ý đến các tính chất sau :



Hình 137

a) Năm điểm K, A, H, O, B thuộc một đường tròn.

b) (Bổ đề 1). Mỗi điểm A và B đều có tỉ số khoảng cách đến C và D bằng nhau.

Chứng minh.

$\Delta KAC \backsim \Delta KDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{KA}{KD}$.

Tương tự $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{KB}{KD}$. Ta lại có KA = KB nên $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$.

c) (Bổ đề 2). Tứ giác ACBD có tích các cạnh đối bằng nhau: AC.BD = AD. BC (suy từ bổ đề 1). Ta còn gọi tứ giác ACBD là tứ giác điều hòa.

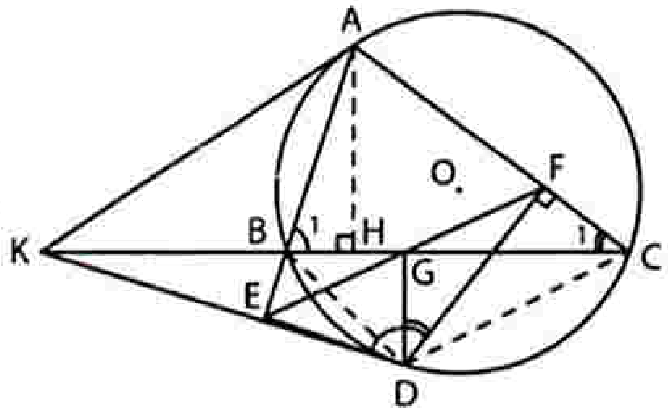
d) (Bổ đề 3). CMOD là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh. KC.KD = KA^2 = KM.KO $\Rightarrow$ CMOD là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 114. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A cắt BC ở K. Kẻ tiếp tuyến KD với đường tròn. Gọi E, G, F theo thứ tự là hình chiếu của D trên AB, BC, CA. Chứng minh rằng GE = GF.

Giải (h.138)

$\triangle DEG$ có $\widehat{D}$ nhọn nội tiếp đường tròn đường kính BD nên $\dfrac{EG}{\sin\widehat{EDG}} = BD$ (một bổ đề) mà $\widehat{EDG} = \widehat{B}_1$ nên $EG = BD\sin\widehat{B}_1$. (1)



Hình 138

Tương tự $GF = CD\sin\widehat{C}_1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EG}{GF} = \dfrac{BD}{CD}.\dfrac{\sin\widehat{B}_1}{\sin\widehat{C}_1}$. (3)

Theo bổ đề 1 ta có $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{EG}{GF} = \dfrac{AB}{AC}.\dfrac{\sin\widehat{B}_1}{\sin\widehat{C}_1} = \dfrac{AH}{AH} = 1$ (với AH là đường cao của $\triangle ABC$). Vậy EG = GF.

Lưu ý : Ta có E, G, F thẳng hàng (đường thẳng Xim-xơn) nên còn suy ra G là trung điểm của EF.

Ví dụ 115. Cho đường tròn (O), tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD. Chứng minh rằng tứ giác ACBD có tích hai đường chéo bằng hai lần tích hai cạnh đối (được sử dụng định lí Ptô-lê-mê với tứ giác nội tiếp: tích hai đường chéo bằng tổng các tích hai cạnh đối).

Giải (h.139)

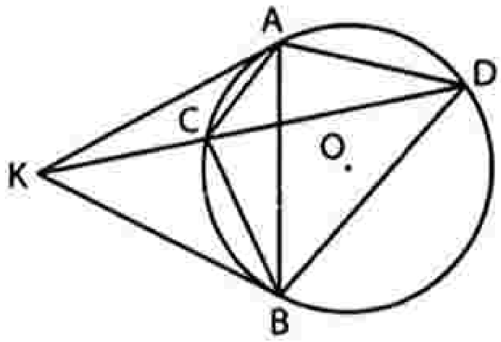
Theo định lí Ptô-lê-mê :

AB.CD = AC.BD + AD.BC. (1)

Theo bổ đề 2 ta có AC.BD = AD.BC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

AB.CD = 2AC.BD = 2AD.BC.

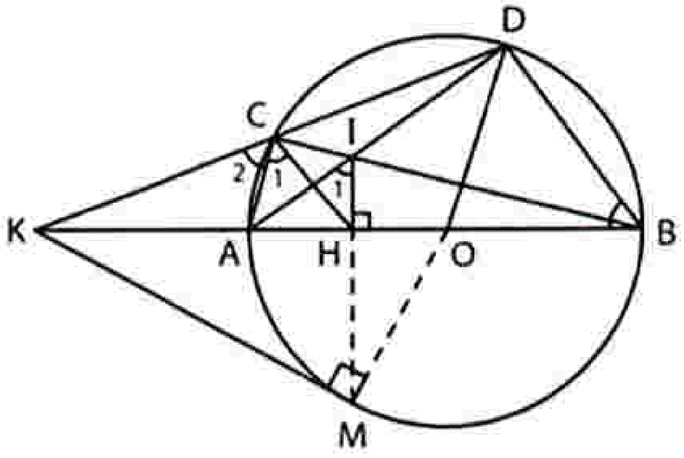


Hình 139

Ví dụ 116. Cho đường tròn (O). Qua điểm K nằm ngoài đường tròn, kẻ tiếp tuyến KM, cát tuyến KAB đi qua O, cát tuyến KCD bất kì. Gọi I là giao điểm của AD và BC, H là hình chiếu của I trên AB. Chứng minh rằng :

a) CHOD là tứ giác nội tiếp; b) Ba điểm I, H, M thẳng hàng.

Giải (h.140)



Hình 140

a) Ta có $\hat{C}_1 = \hat{I}_1$ (IHAC nội tiếp)

$= \widehat{HBD}$ (IHBD nội tiếp)

$= \hat{C}_2$ (ABDC nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{HCK} = 2\hat{C}_1 = 2\widehat{HBD}$. (1)

$\triangle BOD$ cân tại O

$\Rightarrow \widehat{HOD} = 2\widehat{HBD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HOD} = \widehat{HCK} \Rightarrow$ CHOD là tứ giác nội tiếp.

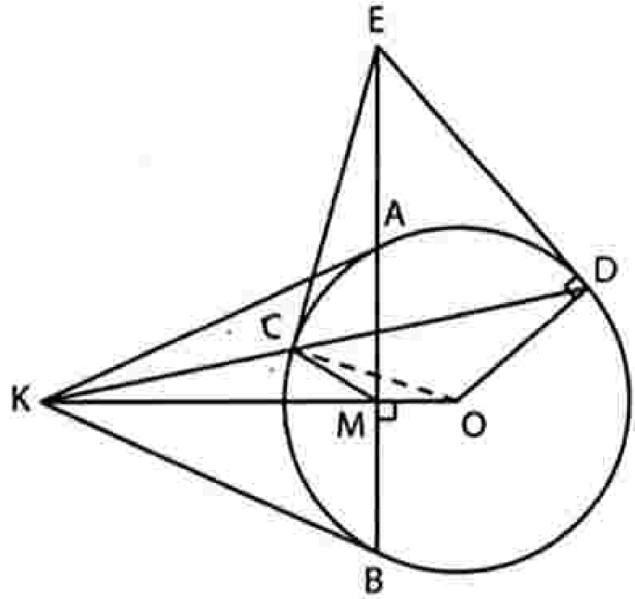
b) Ta có $KM^2 = KC.KD$ mà $KC.KD = KH.KO$ (câu a) nên $KM^2 = KH.HO$

$\Rightarrow \dfrac{KH}{KM} = \dfrac{KM}{KO} \Rightarrow \triangle KHM \backsim \triangle KMO$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{KHM} = \widehat{KMO} = 90^o$.

HI và HM cùng vuông góc với KO nên I, H, M thẳng hàng.

Ví dụ 117. Cho đường tròn (O), tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại D cắt AB ở E. Chứng minh rằng EC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Giải (h.141)



Hình 141

Gọi M là giao điểm của EB và KO. Theo bổ đề 3 ta có CMOD là tứ giác nội tiếp, mà EMOD là tứ giác nội tiếp nên E, C, M, O, D thuộc một đường tròn

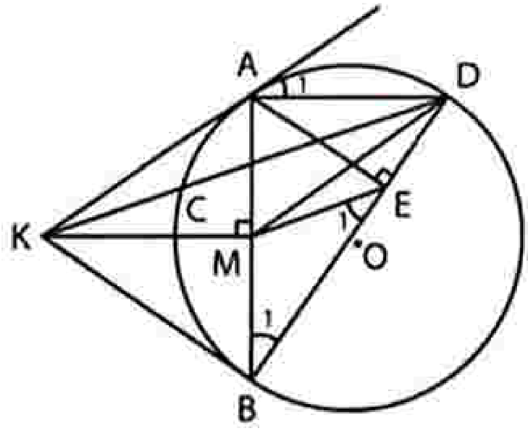
$\Rightarrow \widehat{OCE} = \widehat{OME} = 90^o$.

Vậy EC là tiếp tuyến của (O).

Ví dụ 118. Cho đường tròn (O), tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $\widehat{ADC} = \widehat{BDM}$.

Giải

Cách 1. (h.142) Kẻ $AE \perp BD$. Sẽ chứng minh $\widehat{ADC} = \widehat{BDM}$ bằng cách chứng minh $\triangle ADK \backsim \triangle EDM$.



Hình 142

$\triangle AEB$ vuông tại E, trung tuyến EM

$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1$, mà $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$

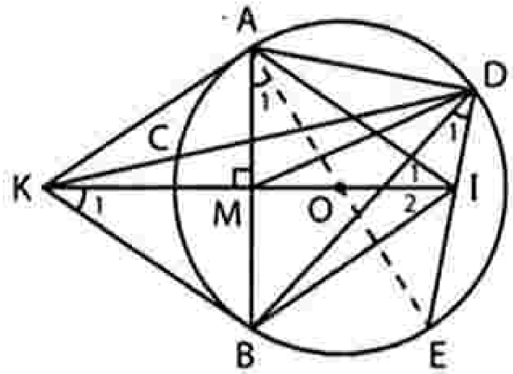
nên $\hat{A}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{DEM}$. (1)

$\widehat{ADE} = \widehat{KAM} \Rightarrow \triangle ADE \backsim \triangle KAM$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AK} = \dfrac{DE}{AM} = \dfrac{DE}{EM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ADK \backsim \triangle EDM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{EDM}$, tức là $\widehat{ADC} = \widehat{BDM}$.

Cách 2. (h.143) Kẻ đường kính AE. Gọi I là giao điểm của DE và KO. Tứ giác AMID nội tiếp (vì $\widehat{AMI} = \widehat{ADI} = 90^{\circ}$) $\Rightarrow \widehat{ADM} = \hat{I}_1$. (1)



Hình 143

$\hat{K}_1 = \hat{A}_1$ (cùng phụ với $\widehat{KAM}$) $= \hat{D}_1$ (góc nội tiếp) $\Rightarrow$ KBID là tứ giác nội tiếp

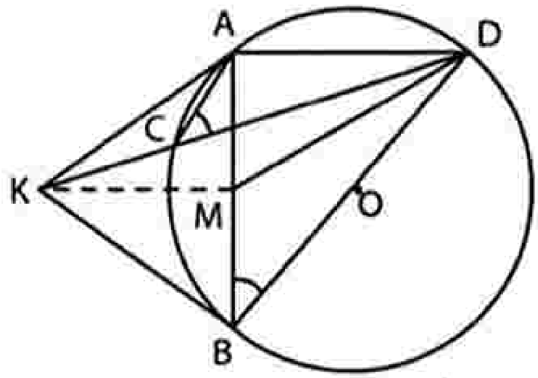
$\Rightarrow \widehat{KDB} = \hat{I}_2$. (2)

$\triangle IAB$ cân (vì đường cao IM là trung tuyến)

$\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{I}_2$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{ADM} = \widehat{KDB}$.

Hai góc này cùng trừ đi $\widehat{KDM}$ được $\widehat{ADC} = \widehat{BDM}$.



Hình 144

Cách 3. (h.144) Sử dụng kết quả của Ví dụ 115.

Theo Ví dụ 115, ta có

$AC.BD = \dfrac{1}{2}AB.CD = MB.CD$ (vì $MB = \dfrac{1}{2}AB$) $\Rightarrow \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{MB}{BD}$.

Kết hợp với $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (góc nội tiếp) suy ra $\triangle ACD \backsim \triangle MBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{MDB}$.

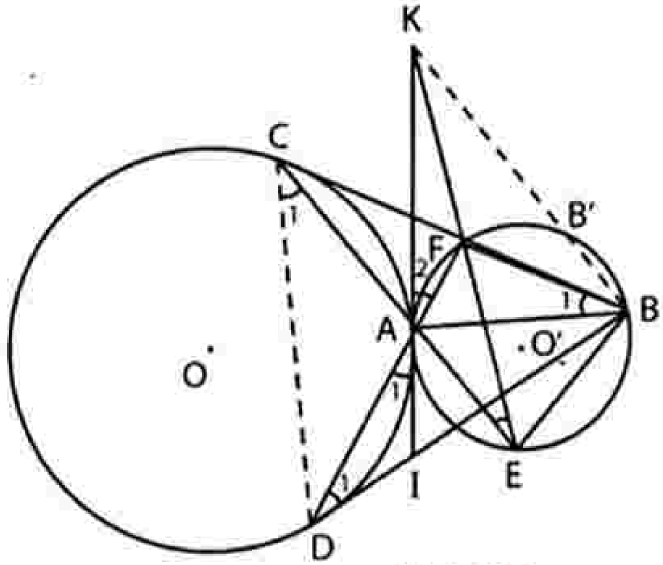
Ví dụ 119. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ dây AB của đường tròn (O') không đi qua O'. Kẻ các tiếp tuyến BC, BD với đường tròn (O), C và D là các tiếp điểm. Gọi giao điểm thứ hai của CA, DA với đường tròn (O') lần lượt là E, F. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') tại A cắt EF ở K. Chứng minh rằng :

a) $BF^2 = AF.DF$ và $BE^2 = AE.CE$;

b) $\dfrac{BF}{BE} = \dfrac{AF}{AE}$;

c) KB là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Giải *(h.145)*



Hình 145

a) Gọi I là giao điểm của KA và BD.

Ta có $\widehat{D}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1$

nên $\triangle FBA \backsim \triangle FDB$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BF}{DF} = \dfrac{AF}{BF} \Rightarrow BF^2 = AF.DF$.

Tương tự $BE^2 = AE.CE$.

b) Từ câu a) suy ra

$\left(\dfrac{BF}{BE}\right)^2 = \dfrac{AF}{AE}.\dfrac{DF}{CE}$. (1)

$\widehat{AEF} = \widehat{A}_2 = \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow EF // CD$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AF + AD}{AE + AC} = \dfrac{DF}{CE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\dfrac{BF}{BE}\right)^2 = \left(\dfrac{AF}{AE}\right)^2$ nên $\dfrac{BF}{BE} = \dfrac{AF}{AE}$. (3)

c) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử KB cắt đường tròn (O') tại B' khác B, giả sử $\overset{\frown}{B'F} < \overset{\frown}{BF} \Rightarrow \overset{\frown}{B'BE} > \overset{\frown}{BE}$, suy ra B'F < BF, B'E > BE nên $\dfrac{B'F}{B'E} < \dfrac{BF}{BE}$. (4)

Xét các tiếp tuyến KA, KB' và cát tuyến KFE, theo bổ đề 1 ta có $\dfrac{B'F}{B'E} = \dfrac{AF}{AE}$,

kết hợp với (3) có $\dfrac{B'F}{B'E} = \dfrac{BF}{BE}$, mâu thuẫn với (4). Vậy KB là tiếp tuyến của (O').

Lưu ý: Câu c) chính là định lí đảo của bổ đề 1.

Ví dụ 120. Cho đường tròn (O), điểm K nằm ngoài đường tròn, KA và KB là các tiếp tuyến (A, B là tiếp điểm). Dựng cát tuyến KCD với đường tròn (C nằm giữa K và D) sao cho AC song song với BD.

Giải *(h.146)*

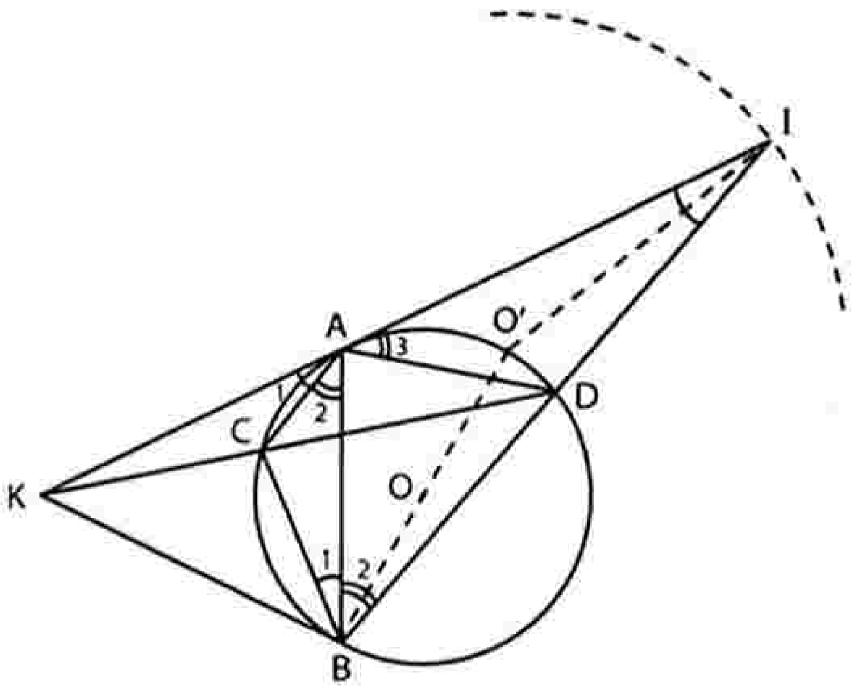
Phân tích : Giả sử đã dựng được cát tuyến KCD có AC // BD. Gọi I là giao điểm của KA và BD. Ta có $\hat{I} = \hat{A}_1$ (do AC // BI) = $\hat{B}_1$ (bằng nửa số đo cung AC).

$\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ (do AC // BD)

$= \hat{A}_3$ (bằng nửa số đo cung AD)

nên $\triangle ABC \backsim \triangle AID$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{DI}$. (1)

Theo bổ đề 1 ta có $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$. (2)



Hình 146

Từ (1) và (2) suy ra BD = DI.

Chỉ cần dựng I thuộc tia đối của tia AK sao cho DI = BD (nếu kẻ đường kính BOO' thì O'I = O'B).

Cách dựng :

Dựng đường kính BOO'.

Dựng đường tròn (O' ; O'B) cắt tia đối của tia AK ở I.

Dựng D là giao điểm của BI với (O), C là giao điểm của KD với (O).

Chứng minh : Bạn đọc tự giải.

Biện luận : Bài toán có một nghiệm hình.

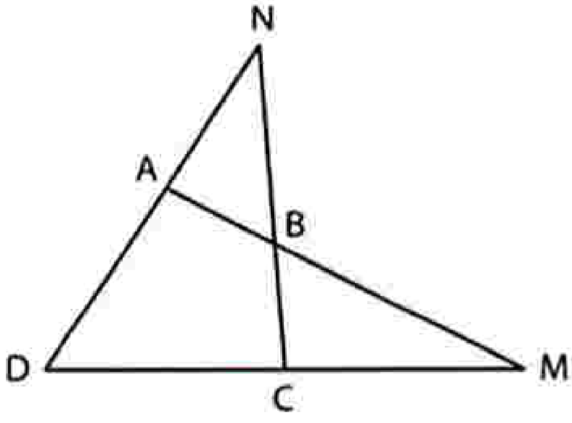
3. Bài toán có tứ giác nội tiếp và giao điểm các đường thẳng chứa các cạnh đối

Xét tứ giác ABCD có M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC (h.147). Ta có các tính chất sau :

a) Với tứ giác ABCD bất kì, các đường tròn ngoại tiếp của bốn tam giác MAD, MBC, NAB, NCD cùng đi qua một điểm K.

b) Với tứ giác ABCD nội tiếp, điểm K nói trên thuộc đoạn thẳng MN.

Xem chứng minh các tính chất trên ở Ví dụ 121.



Hình 147

Ví dụ 121. Cho tứ giác ABCD, M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC. Gọi K là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác NAB, MBC (K khác B). Chứng minh rằng :

a) K thuộc đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAD, NCD;

b) Nếu ABCD là tứ giác nội tiếp thì K thuộc đoạn thẳng MN.

Giải (h.148, hình vẽ ứng với các tia AB và DC cắt nhau ở M, các tia DA và CB cắt nhau ở N. Các trường hợp khác tương tự).

a) Tứ giác CMKB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CMK} = \widehat{B}_1$.

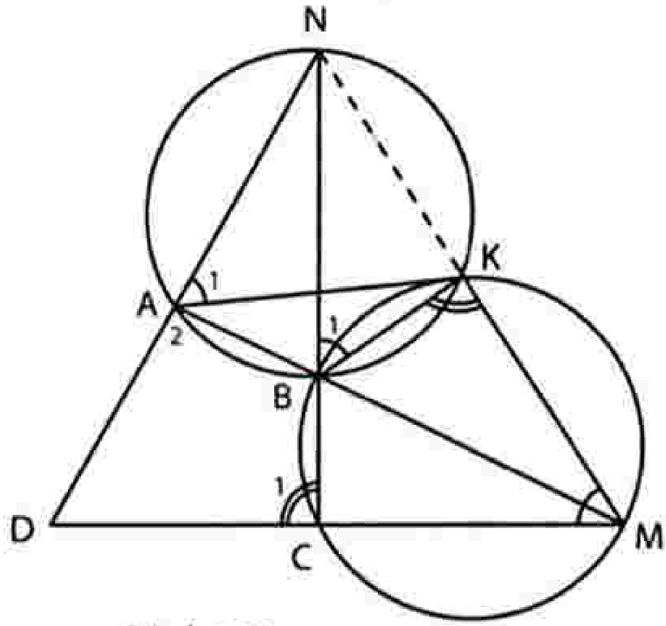
Tứ giác ANKB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$.

Suy ra $\widehat{CMK} = \widehat{A}_1$

$\Rightarrow$ K thuộc đường tròn (MAD).

Tương tự K thuộc đường tròn (NCD).



Hình 148

b) Tứ giác CMKB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{C}_1$.

Tứ giác ANKB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NKB} = \widehat{A}_2$.

Suy ra $\widehat{MKB} + \widehat{NKB} = \widehat{C}_1 + \widehat{A}_2 = 180^o$ (do ABCD nội tiếp) $\Rightarrow$ K thuộc đoạn thẳng MN.

Lưu ý : Kết luận ở câu a) là định lí Mi-ken (*Miquel*), điểm K là điểm Mi-ken của tứ giác ABCD.

Ví dụ 122. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O ; R), M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC. Gọi K là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác NAB, MBC. Chứng minh rằng :

a) $MK^2 - NK^2 = MO^2 - NO^2$;   b) OK vuông góc với MN.

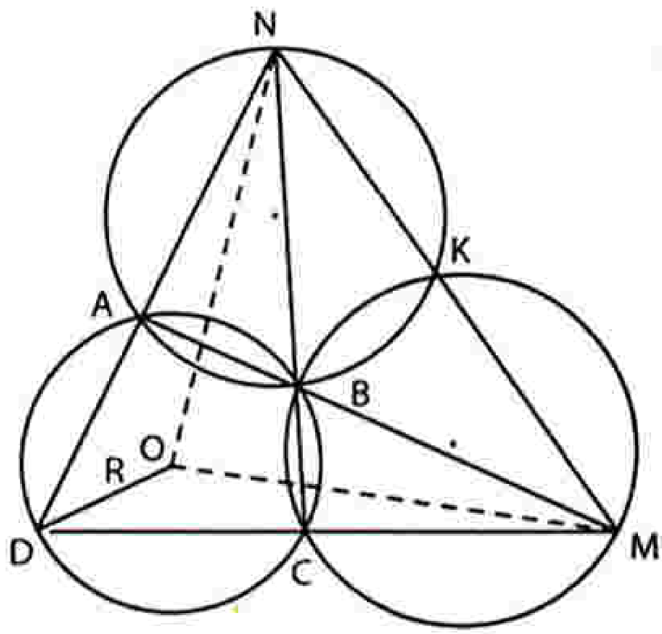
Giải (h.149, hình vẽ ứng với các tia AB và DC cắt nhau ở M, các tia DA và CB cắt nhau ở N. Các trường hợp khác tương tự).

a) Theo Ví dụ 121, điểm K thuộc đoạn thẳng MN nên $MK^2 - NK^2$

$= (MK + NK)(MK - NK)$

$= MN(MK - NK)$

$= MN.MK - NM.NK.$ (1)



Hình 149

Áp dụng các bổ đề 1 và 2 về hệ thức lượng trong đường tròn, ta có

$MN.MK = MA.MB = MO^2 - R^2.$ (2)

$NM.NK = NC.NB = NO^2 - R^2.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $MK^2 - NK^2 = MO^2 - NO^2$.

b) Áp dụng bổ đề nhận biết hai đường chéo vuông góc (Ví dụ 3), từ $MK^2 + NO^2 = MO^2 + NK^2$ suy ra $OK \perp MN$.

Ví dụ 123. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). N là giao điểm của AD và BC. Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác NAB. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác NCD.

a) Chứng minh rằng OO'NI là hình bình hành.

b) Gọi K giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O') và (I). Chứng minh rằng $\widehat{OKN} = 90^o$ và IO' song song với OK.

Giải (h.150)

a) Kẻ Ny là tiếp tuyến của (O') thì $\widehat{ANy} = \widehat{ABN} = \widehat{D} \Rightarrow Ny \,//\, CD$. Ta lại có đường nối tâm $OI \perp CD$ và

$O'N \perp Ny$ nên $OI \,//\, O'N$. (1)

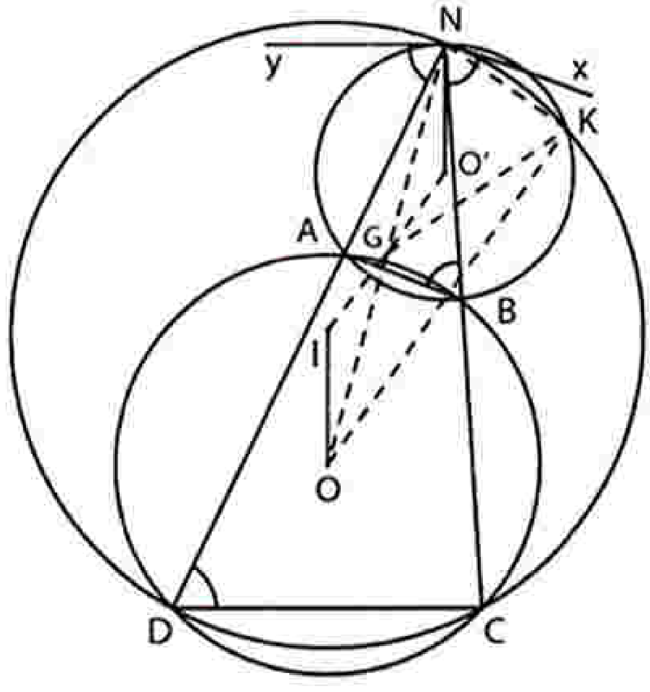
Kẻ Nx là tiếp tuyến của (I) thì $\widehat{CNx} = \widehat{D} = \widehat{ABN} \Rightarrow Nx \,//\, AB$.

Ta lại có đường nối tâm $OO' \perp AB$ và $IN \perp Nx$ nên $OO' \,//\, IN$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra OO'NI là hình bình hành.

b) Gọi G là giao điểm của IO' và ON. Do OO'NI là hình bình hành nên GO = GN. (3)

Đường nối tâm IO' là đường trung trực của NK nên GN = GK. (4)



Hình 150

Từ (3) và (4) suy ra GO = GN = GK nên $\widehat{OKN} = 90^o$.

Đường nối tâm $IO' \perp NK$ mà $OK \perp NK$ nên $IO' \,//\, OK$.

Lưu ý : Điểm K là điểm Mi-ken của tứ giác ABCD. Ví dụ 123 cho ta một cách khác giải Ví dụ 122.

Ví dụ 124. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là giao điểm của AC và BD, E là giao điểm của AB và CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt EI ở điểm thứ hai K.

a) Chứng minh rằng C, I, K, D thuộc một đường tròn.

b) Kẻ tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt IE ở M. Chứng minh rằng BKCM là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh rằng BM là tiếp tuyến của đường tròn (O).

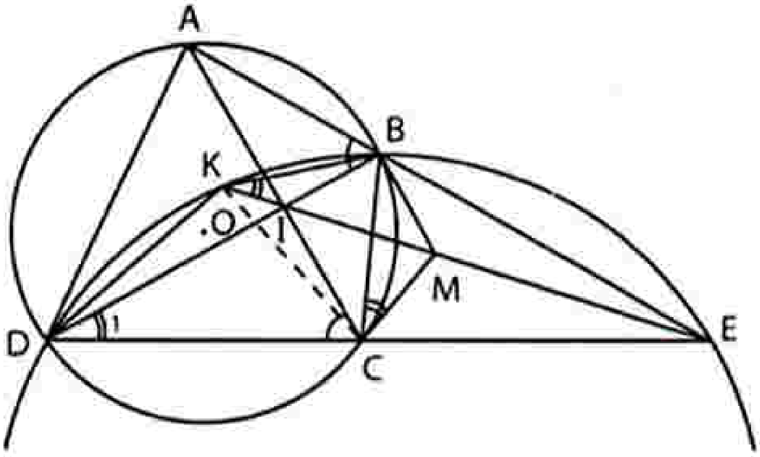
Giải (h.151, hình vẽ ứng với các tia AB và DC cắt nhau, các trường hợp khác tương tự)

a) Tứ giác DKBE nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DKE} = \widehat{DBE}$ tức là

$\widehat{DKI} = \widehat{DBE}$. (1)

$\widehat{DCI} = \widehat{DBA}$. (2)



Hình 151

Từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{DKI} + \widehat{DCI} = \widehat{DBE} + \widehat{DBA} = 180^0 \Rightarrow$ CIKD là tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác DKBE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{D}_1$ tức là $\widehat{BKM} = \widehat{D}_1$. (3)

Ta lại có $\widehat{BCM} = \widehat{D}_1$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BKM} = \widehat{BCM} \Rightarrow$ BKCM là tứ giác nội tiếp.

c) Tứ giác CIKD nội tiếp (câu a) $\Rightarrow \widehat{CKM} = \widehat{D}_1$. (5)

Tứ giác BKCM nội tiếp (câu b) $\Rightarrow \widehat{CKM} = \widehat{CBM}$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{CBM} = \widehat{D}_1$. Từ đó BM là tiếp tuyến của (O).

BÀI TẬP

Tứ giác nội tiếp : Tính chất và cách nhận biết

161. Cho tam giác ABC có AC = 10 cm, AB = 6 cm, nội tiếp đường tròn (O) có đường kính 15 cm. Tính đường cao AH của tam giác ABC.

162. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của A, C trên BD. Gọi G, H theo thứ tự là hình chiếu của B, D trên AC. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, G, H thuộc một đường tròn.

163. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), các điểm D và E thuộc cạnh BC sao cho $BD + CE = \frac{1}{2}BC$. Các đường vuông góc với BC tại D và tại E cắt AB và AC theo thứ tự ở I và K. Chứng minh rằng bốn điểm A, I, O, K thuộc một đường tròn.

164. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ cát tuyến chung CAD, $C \in (O)$, $D \in (O')$, A nằm giữa C và D. Gọi d là đường thẳng song song với CD và không giao với hai đường tròn (B gần d hơn so với A). Gọi giao điểm của CB, DB với d lần lượt là E, F. Gọi giao điểm thứ hai của AF với (O) là M, giao điểm thứ hai của AE với (O') là N. Gọi K là giao điểm của CM và DN. Chứng minh rằng sáu điểm F, M, B, N, E, K thuộc một đường tròn.

165. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^o$), đường cao BD. Tia phân giác của góc CBD cắt AC ở I. Qua A kẻ đường vuông góc với BI, cắt BI và BC theo thứ tự ở H và E. Chứng minh rằng tam giác IEC là tam giác cân.

166. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm D thuộc cạnh BC. Gọi E là hình chiếu của D trên AB, F đối xứng với D qua E. Gọi G là giao điểm của CF và AB, H là hình chiếu của G trên BC, I là giao điểm của HE và CF. Chứng minh rằng :

a) BI vuông góc với CF; b) $\widehat{AIG} = \widehat{HIG}$.

167. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB < AC, điểm I thuộc đường cao AH. Chứng minh rằng không thể xảy ra $\widehat{ABI} = \widehat{ACI}$.

168. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ tiếp tuyến chung CD, $C \in (O)$, $D \in (O')$, B gần CD hơn so với A. Gọi E là giao điểm của CB và AD, F là giao điểm của DB và AC. Chứng minh rằng EF song song với CD.

169. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ cát tuyến chung CBD, $C \in (O)$, $D \in (O')$ B nằm giữa C và D. Gọi E là điểm thuộc cung AB của đường tròn (O) nằm trong đường tròn (O'), F là điểm thuộc cung AB của đường tròn (O') nằm trong đường tròn (O), I là giao điểm của CE và DF.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác EIF đi qua A.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của AB với đường tròn ngoại tiếp tam giác EIF. Chứng minh rằng IK song song với CD.

170. Cho hình thang ABCD nội tiếp đường tròn (O), đáy AB và CD, điểm K thuộc cung CD không chứa A. Kẻ dây BE vuông góc với DK tại M. Gọi N là giao điểm của AK và CE. Chứng minh rằng MN song song với CD.

171. Cho tam giác ABC (AB < AC), đường phân giác AD. Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB, AC theo thứ tự ở E, F (khác A). Gọi I là điểm đối xứng với F qua M. Chứng minh rằng :

a) MB là tia phân giác của góc IME;

b) Tứ giác BEMI nội tiếp;

c) BE = CF và AD song song với EI.

172. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, các bán kính OC và OD vuông góc với nhau (C thuộc cung AD). Gọi E là giao điểm của AC và BD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác COD cắt AE, BE theo thứ tự tại các điểm thứ hai G, H. Chứng minh rằng AOHG là hình bình hành.

173. Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^{o}$) nội tiếp đường tròn (O), đường cao BE. Các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C cắt nhau ở D. Gọi H là giao điểm của AD và BC, M là trung điểm của BE. Vẽ dây AK đi qua M. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{BKH} = 90^{o}$; b) CDKH là tứ giác nội tiếp;

c) DA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KBD.

174. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, các đường phân giác AD và BE cắt nhau ở I. Gọi H là hình chiếu của E trên IC. Chứng minh rằng DH là tia phân giác của góc IDC.

175. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Kẻ đường kính AOB. Gọi G là một điểm thuộc đường thẳng d, E là giao điểm thứ hai của GB với đường tròn. Vẽ đường kính EOF. Gọi C là giao điểm của EF và d, D là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn, H là giao điểm của BF và d. Chứng minh rằng :

a) CGED là tứ giác nội tiếp; b) $\widehat{GDH} = 90^{o}$.

176. Cho đường tròn (O ; R), dây AB = R, điểm C thuộc cung lớn AB. Gọi I là trung điểm của OA, M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của A trên BC. Chứng minh rằng tam giác MIH là tam giác đều.

177. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AH, HC = 2HB. Đường vuông góc với AC tại C cắt AH ở D. Gọi E là trung điểm của CD. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ABE} = 90^{o}$; b) $\widehat{BAH} = \widehat{CAE}$.

178. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm I nằm trong tam giác sao cho $\widehat{IBC} = \widehat{ICA}$. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Kẻ đường vuông góc với BI tại I, cắt AM ở F. Chứng minh rằng A, F, I, C thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $\widehat{AIC} + \widehat{BIM} = 180^{o}$

179. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B (O'A < OA, O và O' nằm về hai phía của AB). Gọi C là điểm đối xứng với O' qua AB. Gọi D là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O). Gọi E là giao điểm thứ hai của DB với đường tròn (O'). Gọi K là giao điểm của AE và OO'. Chứng minh rằng OC = O'K.

180. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), điểm I thuộc cung AB không chứa điểm C. Gọi H là hình chiếu của A trên IC. Chứng minh rằng IB + IH = HC.

181. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$), đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC, AB, AC theo thứ tự ở D, E, F. Gọi H là hình chiếu của D trên EF.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BHE} = \widehat{CHF}$.

b) Gọi N là giao điểm thứ hai của EF với đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC. Chứng minh rằng NB = NC.

182. Cho đường thẳng d không giao với đường tròn (O). Gọi I là hình chiếu của O trên d. Kẻ cát tuyến IBC với đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại B và tại C cắt đường thẳng d theo thứ tự tại D và E. Chứng minh rằng ID = IE.

183. Cho đường thẳng d không giao với đường tròn (O). Gọi I là hình chiếu của O trên d. Kẻ các cát tuyến IAD, IBC với đường tròn (O), A nằm giữa I và D, B nằm giữa I và C. Gọi giao điểm của CA và DB với d theo thứ tự là E và F. Chứng minh rằng IE = IF.

184. Cho đường tròn (O), điểm K thuộc đường tròn. Vẽ đường tròn (K) cắt đường tròn (O) tại C và D. Vẽ dây AB của đường tròn (K) vuông góc với bán kính KC, B nằm trong đường tròn (O). Gọi giao điểm thứ hai của CB, AC với đường tròn (O) theo thứ tự là E, F. Qua E vẽ đường thẳng song song với AC, cắt AB ở G. Chứng minh rằng :

a) KE = KF; b) CF = BE = EG; c) $\widehat{CDG} = 90^\circ$.

185. Cho tam giác ABC vuông tại A, gọi O là giao điểm các đường phân giác. Gọi E là hình chiếu của A trên OB, gọi F là hình chiếu của A trên OC.

a) Chứng minh rằng EF song song với BC.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác ABC, gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của MO và AH. Chứng minh rằng AN = EF.

186. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) bàng tiếp trong góc A tiếp xúc với AB, BC, AC theo thứ tự ở D, E, F. Gọi G là giao điểm của DE và KC, H là giao điểm của FE và KB.

a) Chứng minh rằng AHKG là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của AH, AG với BC. Chứng minh rằng EM = EN.

187. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Lấy điểm E thuộc đường tròn (O), điểm F thuộc đường tròn (O') sao cho AB là tia phân giác của góc EAF. Kẻ các cát tuyến chung EBG và FBH, $G \in (O')$, $H \in (O)$. Chứng minh rằng :

a) E, F, G, H thuộc một đường tròn;

b) Tâm đường tròn đi qua bốn điểm trên là một điểm cố định khi E, F thay đổi vị trí.

188. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có AB = BC. Vẽ hình bình hành ADCE. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với BD cắt DA, DC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng BM = BN = BD.

189. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{A} = 120^{0}$. Điểm D thuộc tia đối của tia AC, điểm E thuộc tia đối của tia AB, AD < AE. Gọi I là trung điểm của BD, K là trung điểm của CE. Đường trung trực của IK cắt BC ở M. Chứng minh rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác GIK.

Hướng dẫn : Gọi F là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IFK cắt BC ở điểm thứ hai N. Chứng minh rằng N trùng M.

190. Cho tam giác nhọn ABC, I là giao điểm các đường phân giác. Đường vuông góc với AB tại B và đường vuông góc với AC tại C cắt nhau ở K. Lấy điểm M thuộc tia KB, điểm N thuộc tia KC sao cho KM = KN = KA. Chứng minh rằng ba điểm M, I, N thẳng hàng.

191. Cho tam giác nhọn ABC, AB < AC, đường cao AH. Gọi D, E theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Kẻ HF song song với AB ($F \in AC$), kẻ HG song song với AC ($G \in AB$).

a) Gọi K là giao điểm của DE và HF. Chứng minh rằng CK vuông góc với HF.

b) Gọi M là giao điểm của DE và BC, gọi N là giao điểm của FG và BC. Chứng minh rằng M trùng N.

192. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm M di chuyển trên cạnh BC. Kẻ MD song song với AC ($D \in AB$), kẻ ME song song với AB ($E \in AC$). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A.

193. Cho tứ giác nội tiếp ABCD có các tia phân giác của các góc A và B gặp nhau tại điểm E thuộc cạnh CD. Chứng minh hệ thức CD = AD + BC.

194. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), điểm E thuộc cung AD không chứa B. Gọi khoảng cách từ E đến AB, BC, CD theo thứ tự là a, b, c. Tính khoảng cách EK từ E đến AD.

195. Cho hình vuông ABCD cạnh a, điểm K đối xứng với D qua A. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vẽ cung AB của đường tròn (O ; OA), cắt CK ở E. Gọi I là giao điểm của BE và CA. Tính diện tích tam giác AID.

196. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), dây AD đi qua trung điểm M của BC. Kẻ dây DE song song với BC, dây CF song song với AE. Chứng minh rằng :

a) Các tam giác BAF và BEF có diện tích bằng nhau.

b) BF đi qua trung điểm của AE.

197. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Kẻ cát tuyến chung CBD vuông góc với AB, $C \in (O)$, $D \in (O')$. Một đường thẳng chuyển động luôn đi qua B cắt các đường tròn (O) và (O') theo thứ tự ở E và F. Gọi M là giao điểm của CE và DF. Tìm quỹ tích trung điểm I của AM.

198. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự ấy, AB > BC. Điểm M chuyển động trên đường vuông góc với AB tại B. Gọi I là hình chiếu của C trên AM. Gọi H là giao điểm của CI và BM. Tìm quỹ tích tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác MAH.

199. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), AB > BC. Điểm D chuyển động trên cung AB. Trên tia CD lấy điểm E sao cho CE = AD. Tìm quỹ tích của điểm E.

200. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Dựng điểm D trên cạnh huyền, các điểm E và F trên các cạnh góc vuông (D, E, F không trùng với các đỉnh của tam giác ABC) sao cho $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

201. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Gọi Am, Bn là các tia tiếp tuyến với nửa đường tròn (nằm cùng phía với nửa đường tròn đối với AB). Dựng tiếp tuyến CD với nửa đường tròn ($C \in Am$, $D \in Bn$) sao cho nếu gọi M là tiếp điểm, I là giao điểm của AD và BC thì MIBD là tứ giác nội tiếp.

202. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, điểm I thuộc đường kính AB, IA = a, IB = b. Điểm M chuyển động trên nửa đường tròn. Đường vuông góc với IM tại M cắt các tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A và B theo thứ tự ở C và D. Tìm vị trí của C và D sao cho tam giác CID có diện tích nhỏ nhất.

Sử dụng hệ thức lượng trong đường tròn

203. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Gọi I là điểm thuộc dây chung AB (IA < IB). Kẻ dây CD của đường tròn (O) vuông góc với OI tại I, kẻ dây EF của đường tròn (O') vuông góc với O'I tại I. Tứ giác CEDF là hình gì ?

204. Cho tam giác ABC có BC = 2AB ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M là trung điểm của BC, gọi H và K là giao điểm của AM và đường tròn (I), H nằm giữa A và K. Chứng minh rằng AH = MK.

205. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} - \widehat{C} > 90^\circ$, $AB = \frac{1}{2}BC$, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM = \frac{1}{2}AB$. Đường trung trực của AC cắt BA ở I. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ICB} < 90^\circ$;   b) $\widehat{IMC} = \frac{1}{2}\widehat{ICM}$.

206. Cho đường tròn (O) đường kính AB, dây CD vuông góc với AB, M là điểm thuộc dây BD. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với AM cắt BC ở N. Gọi K là hình chiếu của C trên AN. Chứng minh rằng ba điểm C, K, M thẳng hàng.

207. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC, các tiếp điểm trên BC, AC, AB theo thứ tự là D, E, F. Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt FE ở K. Gọi I là giao điểm của OD và EF.

a) Chứng minh rằng AI vuông góc với OK (tại H).

b) Chứng minh rằng $\triangle OHD \backsim \triangle ODK$.

c) Gọi M là giao điểm của AI và BC. Chứng minh rằng OM vuông góc với DK.

208. Cho đường tròn (O), điểm M nằm ngoài đường tròn, tia đối của tia OM cắt đường tròn ở K. Kẻ tiếp tuyến MA với đường tròn (A là tiếp điểm), H là hình chiếu của A trên MO. Kẻ cát tuyến MBC, B và C thuộc (O), B nằm giữa M và C. Chứng minh rằng :

a) BHOC là tứ giác nội tiếp.

b) BK là tia phân giác của góc CBH.

209. Cho đường tròn (O ; R), đường kính CD. Điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho AO = 2R và tam giác ACD nhọn. Gọi giao điểm thứ hai của AC, AD với đường tròn (O) theo thứ tự là B, E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt OA ở điểm thứ hai I. Tính OI.

210. Cho đường tròn (O) điểm A nằm ngoài đường tròn. Gọi CD là một đường kính thay đổi vị trí. Gọi giao điểm thứ hai của AC, AD với đường tròn (O) theo thứ tự là B, E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt OA ở điểm thứ hai I. Chứng minh rằng I là điểm cố định.

211. Cho tam giác ABC và đường thẳng d không có điểm chung với các cạnh của tam giác. Đường tròn (O) bất kì đi qua B và C cắt đường thẳng d ở E và F. Gọi (O') là đường tròn đi qua A, E, F. Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi thì đường tròn (O') đi qua hai điểm cố định (hai điểm này có thể trùng nhau trong trường hợp đặc biệt).

212. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung AB. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và tại C cắt AD theo thứ tự ở E và F. Gọi I là giao điểm của CE và BF.

a) Tính góc BIC.

b) Chứng minh rằng BIDE, CIDF là các tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh rằng khi điểm D chuyển động trên cung AB thì DI đi qua một điểm cố định.

213. Cho đường tròn (O), điểm A cố định nằm trong đường tròn (A khác O). Gọi BC là một dây bất kì đi qua A. Các tiếp tuyến tại B và tại C cắt nhau ở M. Tìm quỹ tích của M khi dây BC chuyển động.

214. Cho đường tròn (O ; R), điểm A cố định nằm ngoài đường tròn, OA = 2R. Một đường thẳng chuyển động luôn đi qua A cắt đường tròn (O) ở B và C. Tìm quỹ tích tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.

215. Cho đường tròn (O), đường thẳng d không giao với đường tròn, M là điểm chuyển động trên đường thẳng d. Gọi MA, MB là các tiếp tuyến với đường tròn (O), A và B là các tiếp điểm. Tìm quỹ tích :

a) Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB;

b) Trung điểm E của AB.

216. Cho tam giác nhọn ABC và các nửa đường tròn đường kính BC, AC, AB ở phía ngoài tam giác đó. Dựng các điểm H, I, K theo thứ tự thuộc các nửa đường tròn trên sao cho AI = AK, BK = BH, CH = CI.

217. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm D thuộc cạnh BC sao cho BD = 2DC. Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng AD sao cho $\widehat{DIB} = 2\widehat{DIC}$.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BID} = \widehat{BAC}$; b) Nêu cách dựng điểm I nói trên.

Bài toán có tam giác và các đường cao

218. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Gọi I là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (O), K là giao điểm của FD và BI. Tính góc BKC.

219. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H. Đường tròn đường kính AH cắt DF ở K (khác F). Chứng minh rằng DK = DE.

220. Cho đường tròn (O), dây BC, điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Các đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi I là giao điểm của DE và BC. Gọi K là giao điểm thứ hai của IA với đường tròn (O). Chứng minh rằng :

a) $\widehat{AKH} = 90^o$; b) Đường thẳng KH đi qua một điểm cố định.

221. Cho tam giác nhọn ABC, AB < AC, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Gọi I là một điểm thuộc cạnh BC. Gọi K là giao điểm (khác I) của các đường tròn ngoại tiếp tam giác IBE, ICD.

a) Tính góc AKH. b) Tính góc HKI.

222. Cho tam giác nhọn ABC, AB < AC, các đường cao BD và CE. Gọi I là trung điểm của DE, M là trung điểm của BC. Gọi H là giao điểm của AI và BC, K là giao điểm của AM và DE. Chứng minh rằng KH vuông góc với BC.

223. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, DE. Gọi K là giao điểm thứ hai của AM với đường tròn (O') đường kính AH. Gọi I là giao điểm thứ hai của AN với đường tròn (O). Chứng minh rằng :

a) $\widehat{NAE} = \widehat{MAC}$; b) $\triangle MCK \backsim \triangle MAC$;

c) I đối xứng với K qua BC.

224. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt cung BHC ở E, BE cắt AC ở I và cắt đường tròn (O) ở K, CE cắt AB ở G và cắt đường tròn (O) ở N. Chứng minh rằng :

a) GI song song với BC; b) $\widehat{MAN} = \widehat{MAK}$.

225. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Gọi M là trung điểm của AH, I là giao điểm của DE và AH.

a) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng K thuộc đường tròn ngoại tiếp các tam giác CDI và BDM.

b) Chứng minh rằng CI vuông góc với BM.

226. Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H nội tiếp đường tròn (O). Vẽ dây MN vuông góc với BC tại K (M thuộc cung nhỏ BC). Đường thẳng đi qua K và song song với AN cắt MH ở I.

a) Gọi giao điểm của IK với AC, AB theo thứ tự là E, F. Chứng minh rằng ME vuông góc với AC, MF vuông góc với AB.

b) Gọi D là điểm đối xứng với M qua AB, G là điểm đối xứng với M qua AC. Chứng minh rằng ba điểm D, H, G thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng I là trung điểm của MH.

227. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao BD và CE cắt nhau ở H. Gọi I và K theo thứ tự là hình chiếu của B và C trên DE. Gọi diện tích các tam giác HBC, HDE, BIE, CKD theo thứ tự là S_1, S_2, S_3, S_4. Chứng minh rằng $S_1 - S_2 = S_3 + S_4$.

228. Cho đường tròn (O ; R), dây BC. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Tìm vị trí của A để tam giác DEF có chu vi lớn nhất.

229. Cho đường tròn (O), dây BC cố định, điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng DE có độ dài không đổi.

b) Gọi M là điểm đối xứng với B qua AH, N là điểm đối xứng với C qua AH. Gọi I là giao điểm của MH và AB, K là giao điểm của NH và AC. Tìm vị trí của điểm A để độ dài IK nhỏ nhất.

Bài toán có hai tiếp tuyến và một cát tuyến kẻ từ một điểm

230. Cho đường tròn (O), các tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD ($\overset{\frown}{AC} > \overset{\frown}{BC}$). Gọi I là trung điểm của CD. Đường tròn đi qua B, I, D cắt AB ở điểm thứ hai E. Chứng minh rằng AK song song với DE.

231. Cho đường tròn (O), các tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD. Kẻ dây AE song song với CD. Gọi M là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng M là trung điểm của CD.

232. Cho đường tròn (O), các tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD. Gọi M là trung điểm của CD. Kẻ dây BE đi qua M. Chứng minh rằng :

a) AE song song với CD.

b) AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM.

233. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE và CF. Các tiếp tuyến tại B và tại C cắt nhau ở K. Gọi M là giao điểm của OK và BC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAK} = \widehat{MAC}$.

b) Gọi G là giao điểm của AM và EF, H là giao điểm của AK và BC. Chứng minh rằng GH song song với OM.

234. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $\frac{AC}{AB} = k$. Các tiếp tuyến tại B và tại C cắt nhau ở M. Gọi N là giao điểm của AM và BC. Chứng minh rằng $\frac{NC}{NB} = k^2$.

235. Cho đường tròn (O), các tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD sao cho BD là đường kính của đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của OK và AB.

a) Tính góc ACH.

b) Gọi M là giao điểm của AC và KH. Chứng minh rằng MH = MK.

236. Cho đường tròn (O), các tiếp tuyến KA, KB và cát tuyến KCD. Gọi (O') là một đường tròn đi qua C, D và chứa điểm B bên trong. Gọi E và F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AC và CB với đường tròn (O'). Gọi I là giao điểm của AB và EF. Chứng minh rằng :

a) ADIE, BDFI là các tứ giác nội tiếp; b) IE = IF.

237. Cho đường tròn (O), các tiếp tuyến AB, AC. Kẻ đường kính BD. Đường vuông góc với AB tại A cắt OC ở E. Gọi F là trung điểm của OB. Chứng minh rằng EF vuông góc với AD.

238. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Dựng điểm D thuộc đường tròn sao cho tứ giác ABCD có tích hai cạnh đối này bằng tích hai cạnh đối kia.

Bài toán có tứ giác nội tiếp và giao điểm các đường thẳng chứa các cạnh đối

239. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng :

a) $MN^2 = MC.MD + NA.ND$;   b) Góc MON không vuông.

240. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC. Gọi I là giao điểm của AC và BD, K là giao điểm thứ hai của NI và đường tròn ngoại tiếp tam giác NBD. Chứng minh rằng :

a) Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAD, IBC, NAC đi qua K.

b) $\widehat{NKC} = \widehat{NKD}$.

Chuyên đề 9

TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN. CHU VI VÀ DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

TỔNG QUAN VỀ CHUYÊN ĐỀ

Nội dung của chuyên đề này bao gồm :

– Tứ giác ngoại tiếp đường tròn, tính chất và dấu hiệu nhận biết.

– Độ dài đường tròn, độ dài cung tròn.

– Diện tích hình tròn, hình quạt tròn, hình viên phân, hình vành khăn.

Đố vui

Bạn hãy tìm ý nghĩa toán học của bài thơ dưới đây :

CÂY LÚA VIỆT NAM

Ba miền đất Bắc – Trung – Nam
Một vùng lãnh thổ Việt Nam anh hùng.
Bốn mùa xuân hạ thu đông
Một năm thu hoạch cây trồng tốt tươi.
Năm nay đất chẳng phụ người
Chín vàng thảm lúa chân trời cò bay.
Hai sương một nắng chung tay
Sáu tấn một mẫu bõ ngày chăm lo.
Năm xưa ăn chẳng đủ no
Ba miền nay đã thành kho thóc đầy.
Năm châu nhập gạo từ đây
Tám thơm hạt dẻo, mê say lòng người.

Giải

Các chữ đầu của 12 câu thơ cho ta 12 chữ số đầu tiên của số π, đó là 3,14159265358.

I. TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

1. Tứ giác ngoại tiếp đường tròn là tứ giác có các cạnh tiếp xúc với đường tròn ấy.
2. Nếu một tứ giác ngoại tiếp đường tròn thì tổng các cạnh đối bằng nhau.
3. Đảo lại, nếu một tứ giác có tổng các cạnh đối bằng nhau thì tứ giác đó ngoại tiếp một đường tròn.
4. Đa giác có chu vi 2p ngoại tiếp đường tròn bán kính r thì có diện tích S = pr.

Ví dụ 125. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có diện tích 192 cm^2 ngoại tiếp đường tròn (O) bán kính 6 cm. Gọi các tiếp điểm trên AD, BC theo thứ tự là M, N. Tính độ dài MN.

Giải (h.152)

Kẻ AH ⊥ CD. Hình thang cân ABCD ngoại tiếp (O) nên

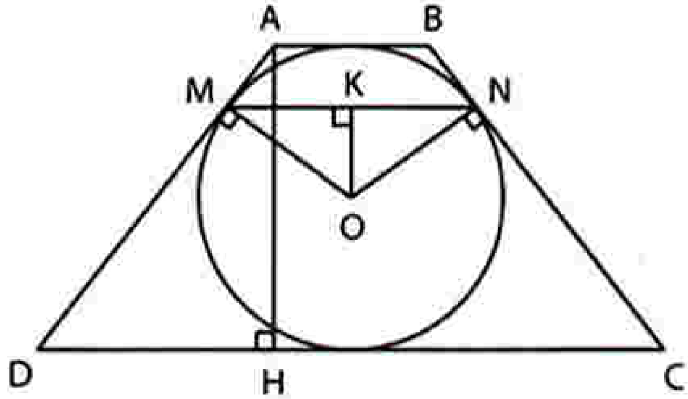
AB + CD = AD + BC = 2AD.

Ta có

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2}.AH = AD.AH$$

$\Rightarrow$ 192 = AD.12

$\Rightarrow$ AD = 16 cm.



Hình 152

Kẻ OK ⊥ MN thì OK ⊥ AB (do hình thang ABCD cân)

$$\Rightarrow \triangle AHD \backsim \triangle MKO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{MO} = \frac{AH}{MK} \Rightarrow \frac{16}{6} = \frac{12}{MK} \Rightarrow MK = 4{,}5 \text{ (cm)}$$

$\Rightarrow$ MN = 2MK = 9 (cm).

Ví dụ 126. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) nội tiếp đường (O) đường kính 20 cm và ngoại tiếp đường tròn (I) đường kính 9 cm.

a) Tính các độ dài AD và OI.

b) Tính chu vi và diện tích hình thang.

Giải (h.153)

a) $\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \dfrac{\hat{A} + \hat{D}}{2} = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$.

Gọi M là trung điểm của AD, đặt AM = MD = MI = x.

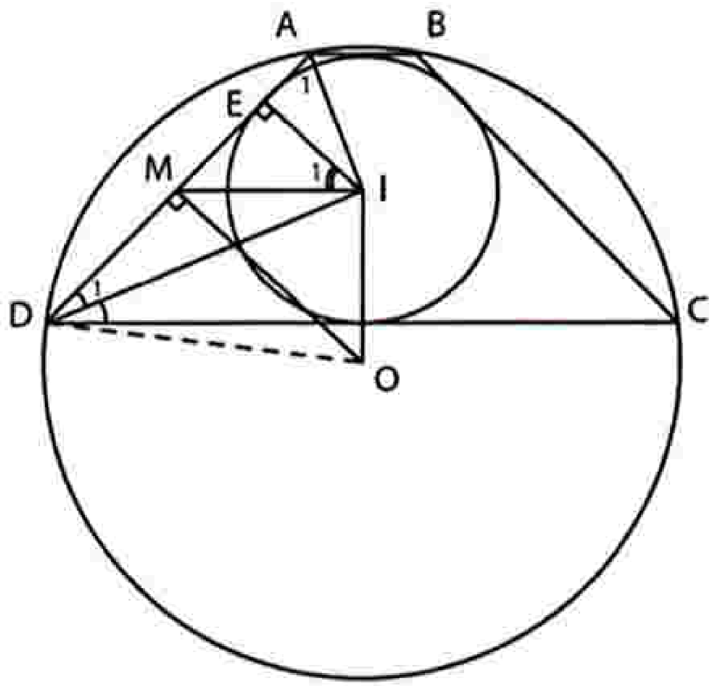
Gọi E là tiếp điểm của (I) trên AD. Ta có IE // OM (cùng vuông góc với AD)

$\Rightarrow \hat{I}_1 = \widehat{OMI}$

$\Rightarrow \triangle MIE \backsim \triangle OMI$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IE}{MI} = \dfrac{MI}{OM} \Rightarrow MI^2 = IE.OM$

$\Rightarrow x^2 = 4,5.\sqrt{10^2 - x^2}$.



Hình 153

Đặt $x^2 = a$ thì $a = 4,5\sqrt{100 - a}$ $\Leftrightarrow 4a^2 + 81a - 8100 = 0$. Nghiệm dương của phương trình là a = 36 nên x = 6 (cm), suy ra AD = 12 cm.

$OM^2 = OD^2 - MD^2 = 10^2 - 6^2 = 64$

$OI^2 = OM^2 - MI^2 = 64 - 6^2 = 28 \Rightarrow OI = 2\sqrt{7}$ (cm).

b) Hình thang cân ABCD ngoại tiếp (I) nên AB + CD = 2AD. Chu vi hình thang ABCD bằng 4AD = 4.12 = 48 (cm). $S_{ABCD} = pr = 24.4,5 = 108$ (cm^2).

Ví dụ 127. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có đường kính BD = 24 cm. Đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD có tâm I nằm trên đoạn OB và có bán kính 7 cm.

a) Tính AB + AD ; b) Tính AB và AD ; c) Tính OI.

Giải (h.154)

a) Đặt AD = a, AB = b (a > b) và a + b = x.

Tam giác ABD vuông tại A nên

$a^2 + b^2 = BD^2 = 24^2 = 576.$

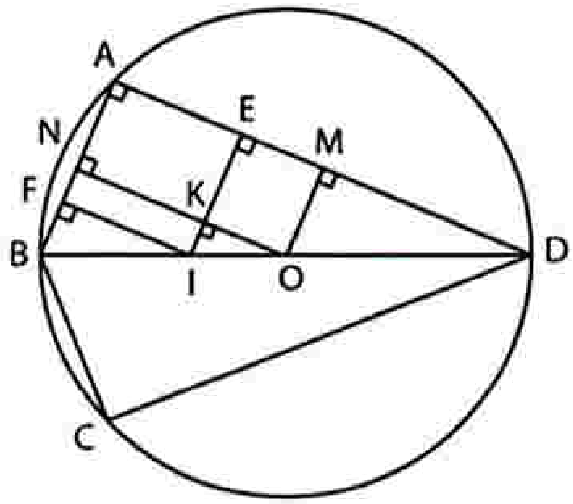
Ta có $x^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$= 576 + 2ab.$ (1)

Kẻ IE ⊥ AD, IF ⊥ AB. Do FI // AD nên

$\frac{BF}{BA} = \frac{FI}{AD} \Rightarrow \frac{b-7}{b} = \frac{7}{a} \Rightarrow ab - 7a = 7b$

$\Rightarrow ab = 7(a + b) = 7x.$ (2)



Hình 154

Từ (1) và (2) suy ra $x^2 = 576 + 14x$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x - 576 = 0.$

Nghiệm dương của phương trình là x = 32.

Vậy AB + AD = 32 cm.

b) a + b = 32 và ab = 7.32 = 224 nên a và b là nghiệm của phương trình

$X^2 - 32X + 224 = 0$. Suy ra $X_1 = 16 + 4\sqrt{2}$; $X_2 = 16 - 4\sqrt{2}$.

Vậy $AD = 16 + 4\sqrt{2}$ cm ; $AB = 16 - 4\sqrt{2}$ cm.

c) Kẻ OM ⊥ AD, kẻ ON ⊥ AB cắt IE ở K.

$\triangle OIK$ vuông tại K nên $OI^2 = IK^2 + OK^2 = FN^2 + ME^2$

$$= \left(7 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - 7\right)^2 = 98 + \frac{a^2 + b^2}{4} - 7(a + b) = 98 + \frac{576}{4} - 7.32 = 18$$

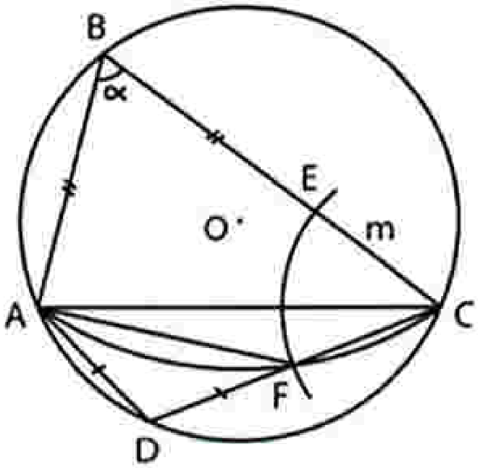
$\Rightarrow OI = 3\sqrt{2}$ cm.

Ví dụ 128. Cho tam giác ABC có AB < BC. Dựng điểm D sao cho ABCD vừa là tứ giác nội tiếp, vừa là tứ giác ngoại tiếp.

Giải (h.155)

Phân tích : Giả sử đã dựng được điểm D thỏa mãn bài toán.

Để ABCD là tứ giác nội tiếp thì D nằm trên cung AC của đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$. Lấy E trên BC sao cho BE = BA thì CE = BC − BE = BC − AB = m.



Hình 155

Lấy F trên CD sao cho DF = DA. $\triangle$ ADF cân tại D $\Rightarrow \widehat{AFC} = 90^o + \dfrac{\widehat{D}}{2} = 90^o + \dfrac{180^o - \alpha}{2}$

$$= 180^o - \frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Tứ giác ABCD ngoại tiếp $\Rightarrow$ AB + CD = BC + AD

$\Rightarrow$ CD − AD = BC − AB $\Rightarrow$ CF = m. (2)

Từ (1) và (2) suy ra F là giao điểm của cung chứa góc $180^o - \dfrac{\alpha}{2}$ dựng trên AC (cung nằm khác phía với B đối với AC) và đường tròn (C ; m). D là giao điểm của CF và (O).

Bạn đọc tự trình bày các phần còn lại.

II. CHU VI VÀ DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

1. Chu vi hình tròn (độ dài đường tròn) có bán kính R là $C = 2\pi R$.

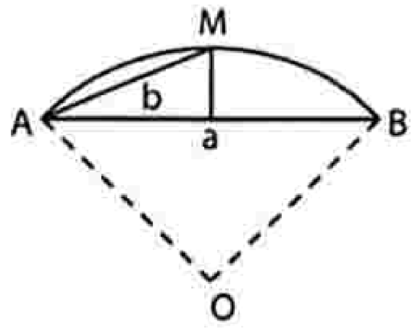
2. Độ dài cung n^o của đường tròn bán kính R là $l = \dfrac{\pi R n}{180}$.

3. Diện tích hình tròn bán kính R là $S = \pi R^2$.

4. Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^o, độ dài cung l là $S = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{lR}{2}$.

Ví dụ 129. Trong thực tế, nhiều khi ta phải tìm độ dài một cung AB nhưng khó xác định được bán kính đường tròn. Khi đó ta có thể dùng cách sau : Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Độ dài l của cung AB được tính gần đúng theo công thức Huy-ghen :

$$l \approx \frac{8b - a}{3} \text{ với } AB = a,\ AM = b.$$

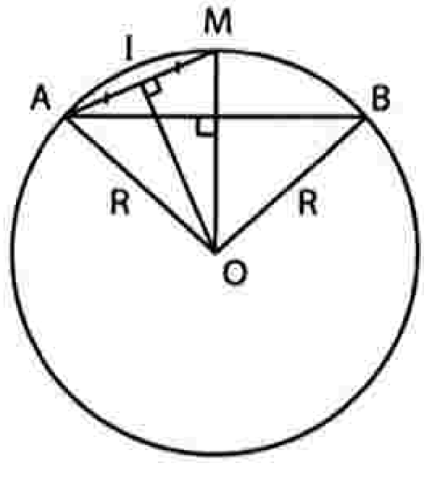


Hình 156

(*Huygens*, nhà toán học và vật lí học Hà Lan, 1629 – 1695).

Tính tỉ số phần trăm của độ dài cung AB tính theo công thức Huy-ghen so với tính theo công thức đúng, nếu số đo của cung AB bằng $90°$ (h.156).

Giải (h.157)



Hình 157

Gọi I là trung điểm của AM. Đặt OA = OB = R, ta có $AB = R\sqrt{2}$.

$AM = 2AI = 2R\sin 22°30' \approx 0{,}76537R.$

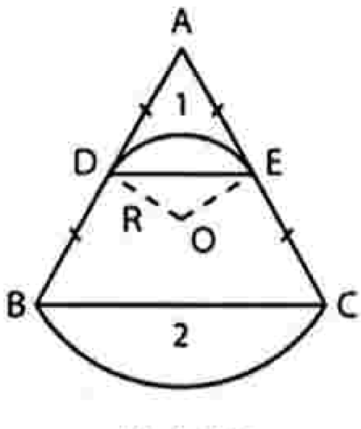
Độ dài cung AB tính theo công thức Huy-ghen bằng $\dfrac{8b - a}{3} = \dfrac{(8.0{,}76537 - \sqrt{2})R}{3} \approx 1{,}5696R.$

Độ dài cung AB tính theo công thức đúng bằng $\dfrac{2\pi R}{4} = \dfrac{\pi R}{2} = 1{,}5708R.$

Độ dài cung AB tính theo công thức Huy-ghen so với tính theo công thức đúng bằng

$$1{,}5696 : 1{,}5708 \approx 99{,}92\%.$$

Ví dụ 130. Trên hình 158, ta có tam giác đều ABC với tâm O, các điểm D và E theo thứ tự là trung điểm của AB và AC, biết OD = R. Gọi S_1 là diện tích phần giới hạn bởi hai đoạn AD, AE và cung nhỏ DE của đường tròn (O ; R). Gọi S_2 là diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC của đường tròn (O ; OB). Tính tổng $S_1 + S_2$.



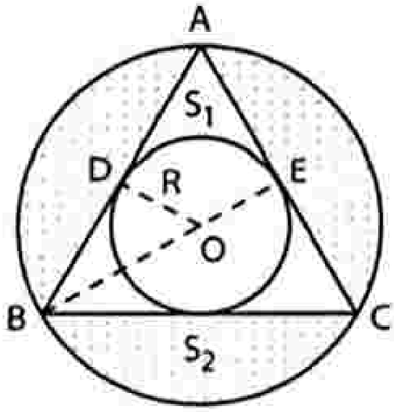
Hình 158

Giải (h.159)

Vẽ đủ các cung còn lại của các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp $\triangle ABC$. Khi đó $S_1 + S_2$ bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình vành khăn. Diện tích hình vành khăn bằng :

$\pi OB^2 - \pi OD^2 = 4\pi R^2 - \pi R^2 = 3\pi R^2$.

$S_1 + S_2 = \frac{1}{3}.3\pi R^2 = \pi R^2$.



Hình 159

Ví dụ 131. Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn có diện tích S_1 và ngoại tiếp một đường tròn có diện tích S_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{S_1}{S_2}$.

Giải (h.160)

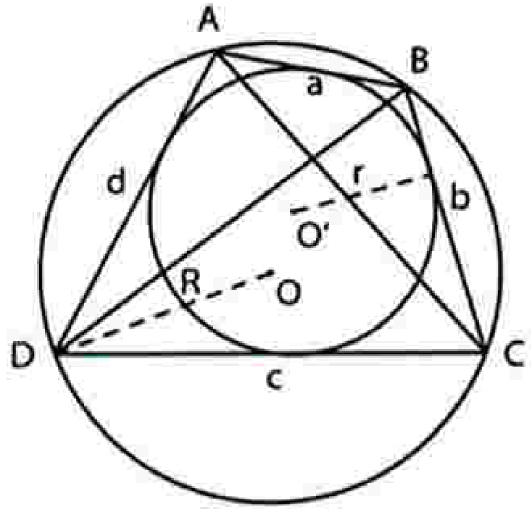
Gọi R và r theo thứ tự là các bán kính của đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tứ giác ABCD.

Ta có $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2}$. (1)

Gọi S là diện tích tứ giác ABCD. Ta có

$S \le \frac{1}{2}AC.BD \le \frac{1}{2}.2R.2R = 2R^2$

$\Rightarrow 2R^2 \ge S$. (2)



Hình 160

Gọi a, b, c, d là bốn cạnh liên tiếp của tứ giác ABCD.

Do tứ giác ngoại tiếp nên $a + c = b + d$.

Ta có $S = \frac{a+b+c+d}{2}.r = (a+c)r$. (3)

Ta lại có $ab + cd \ge 2S$, $bc + ad \ge 2S$ nên $ab + cd + bc + ad \ge 4S$

$\Rightarrow (a+c)(b+d) \ge 4S \Rightarrow (a+c)^2 \ge 4S$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $S^2 = (a+c)^2r^2 \ge 4Sr^2 \Rightarrow S \ge 4r^2$. (5)

Từ (2) và (5) suy ra $2R^2 \geq 4r^2 \Rightarrow \dfrac{R^2}{r^2} \geq 2$. (6)

Từ (1) và (6) suy ra $\dfrac{S_1}{S_2} \geq 2$; $\min \dfrac{S_1}{S_2} = 2 \Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông.

BÀI TẬP

Tứ giác ngoại tiếp đường tròn

241. Tính diện tích hình thang cân ngoại tiếp có các cạnh đáy bằng a và b.

242. Cho hình thang vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (O ; r), $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$, AB < CD, các tiếp điểm trên AB, CD theo thứ tự là E, F. Gọi I là giao điểm của BD và EF. Tính diện tích tam giác BIC.

243. Cho đường tròn (O), hai dây AC và BD cắt nhau tại I. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là hình chiếu của I trên AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh rằng EFGH là tứ giác ngoại tiếp.

b) Các dây AC và BD có điều kiện gì thì EFGH là tứ giác nội tiếp ?

244. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) nội tiếp đường tròn (O) đường kính AB = 2 và ngoại tiếp đường tròn (I). Tính BC và CD.

245. Chứng minh rằng trong các tứ giác ngoại tiếp cùng một đường tròn, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Chu vi và diện tích hình tròn

246. Cho đường tròn (O ; R) và dây AB không đi qua O. Điểm C di chuyển trên dây AB. Gọi (O_1) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Gọi (O_2) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với đường tròn (O) tại B.

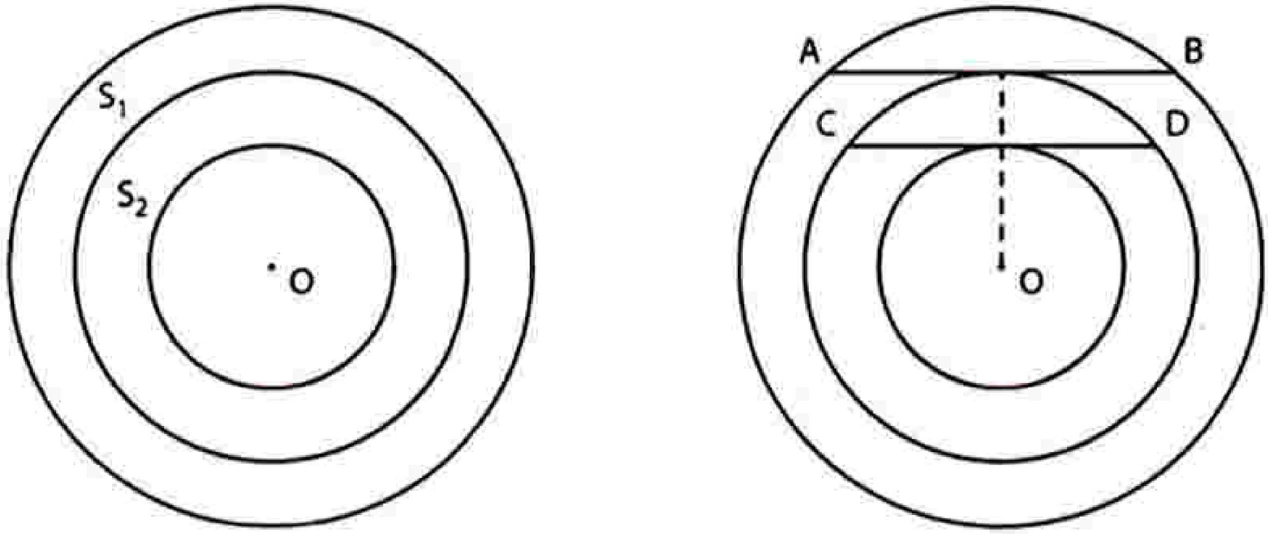
a) Chứng minh rằng tổng các chu vi của hai đường tròn (O_1) và (O_2) không đổi.

b) Tìm vị trí của điểm C để tổng diện tích của hai hình tròn (O_1) và (O_2) có giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm quỹ tích giao điểm thứ hai I của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

d) Chứng minh rằng khi điểm C di chuyển trên dây AB thì đường thẳng IC luôn đi qua một điểm cố định.

247. Trên hình 161a, hình vành khăn bên ngoài có diện tích S_1 và hình vành khăn bên trong có diện tích S_2.



a) b)

Hình 161

Dùng một chiếc que, đo đoạn tiếp tuyến AB và đoạn tiếp tuyến CD (h.161b), ta thấy AB > CD. Hãy chứng minh $S_1 > S_2$.

248. Một hình quạt có chu vi (tức là tổng của độ dài cung và hai bán kính) bằng 12 dm. Tính diện tích lớn nhất của hình quạt.

LỜI GIẢI, CHỈ DẪN, ĐÁP SỐ

Chuyên đề 1

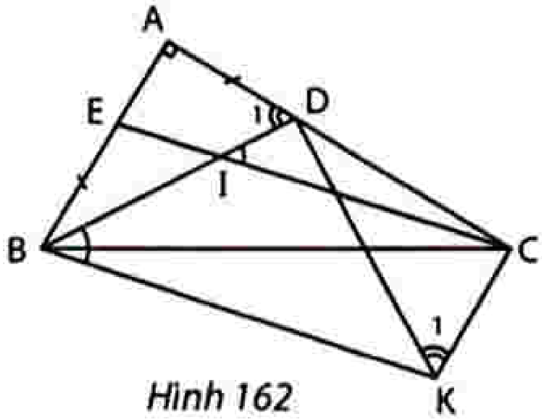
TAM GIÁC - TỨ GIÁC - ĐA GIÁC

1. *(h.162)* Qua B kẻ đường thẳng song song với EC, qua C kẻ đường thẳng song song với BE, chúng cắt nhau ở K.

Ta có $\widehat{CID} = \widehat{DBK}$. (1)

Dễ chứng minh $\Delta CBK = \Delta BCE$ (g.c.g)

$\Rightarrow CK = BE = AD$.



Hình 162

$\Delta ABD = \Delta CDK$ (c.g.c). Hãy chứng minh ΔDBK vuông cân để suy ra $\widehat{DBK} = 45^o$, do (1) nên $\widehat{CID} = 45^o$.

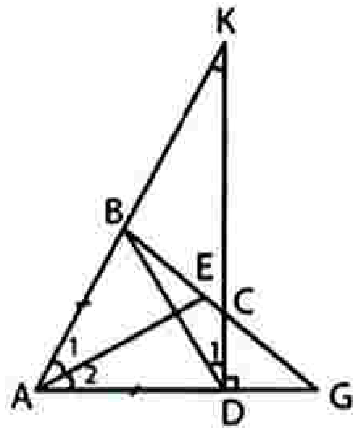
2. *(h.163)*. a) Bạn đọc tự giải.

b) Gọi K là giao điểm của AB và CD. ΔABD đều và $\widehat{D}_1 = \widehat{K} = 30^o$ nên

AB = BD = BK, mà AB = AE (câu a) nên BK = AE.

Ta lại có $\widehat{KBC} = \widehat{AEG}$ $(= 105^o)$

nên $\Delta KBC = \Delta AEG$ (g.c.g) $\Rightarrow BC = EG$.



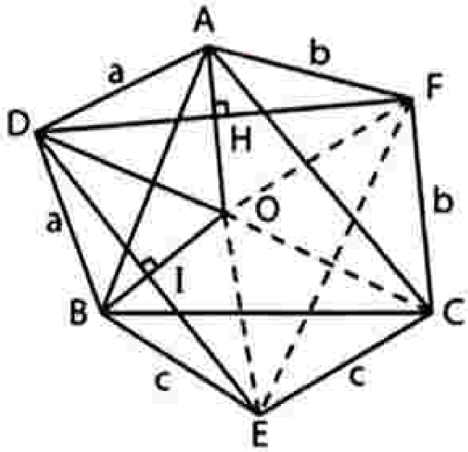
Hình 163

3. *(h.164)* Đặt AD = DB = a, AF = FC = b, CE = EB = c.

Do $OA \perp DF$ nên $OF^2 - OD^2$

$= HF^2 - HD^2 = AF^2 - AD^2$

$= b^2 - a^2$. (1)

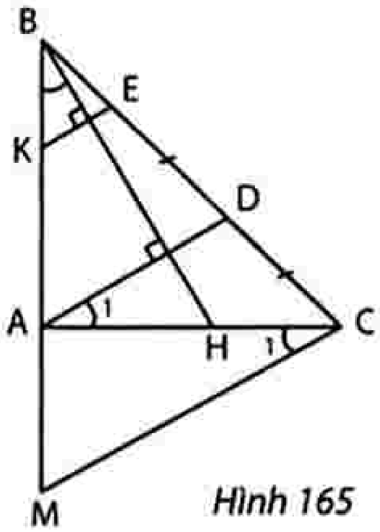


Hình 164

Tương tự, do OB ⊥ DE nên $OD^2 - OE^2 = a^2 - c^2$. (2)

Cộng (1) với (2) được $OF^2 - OE^2 = b^2 - c^2 = CF^2 - CE^2$.

Theo bổ đề nhận biết hai đường chéo vuông góc, ta có OC ⊥ EF.



Hình 165

4. *(h.165)* Kẻ đường thẳng qua C và song song với AD, cắt BA ở M thì AK = AM. (1)

ΔABH = ΔACM (g.c.g) ⇒ AH = AM. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AK = AH.

5. *(h.166)* Kẻ đường thẳng d qua A và song song với BC. Gọi D là điểm đối xứng với B qua d. Đặt AH = h thì BD = 2h. Đặt AC = b, AB = c.

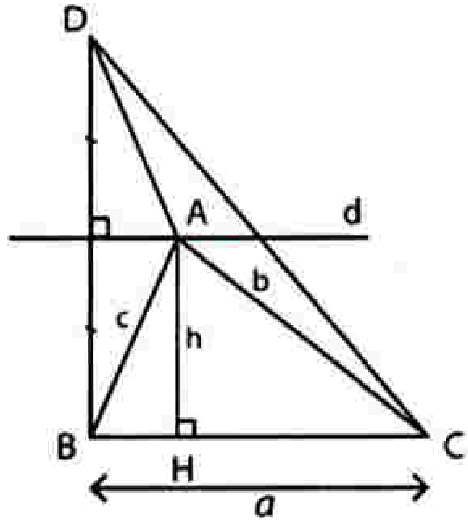
Ta có AB + AC = AD + AC ≥ CD

$\Rightarrow (b + c)^2 \geq CD^2 = a^2 + (2h)^2$

$\Rightarrow h^2 \leq \dfrac{(b + c)^2 - a^2}{4}$

$= \dfrac{(b + c + a)(b + c - a)}{4}$

$= \dfrac{2p(2p - 2a)}{4} = p(p - a).$



Hình 166

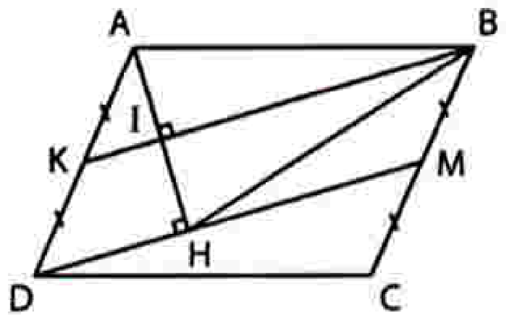
6. *(h.167)* Gọi K là trung điểm của AD.

Ta có BKDM là hình bình hành

⇒ BK // DM

⇒ BK ⊥ AH (tại I) và AI = IH.

Do BK là đường trung trực của AH nên BA = BH.



Hình 167

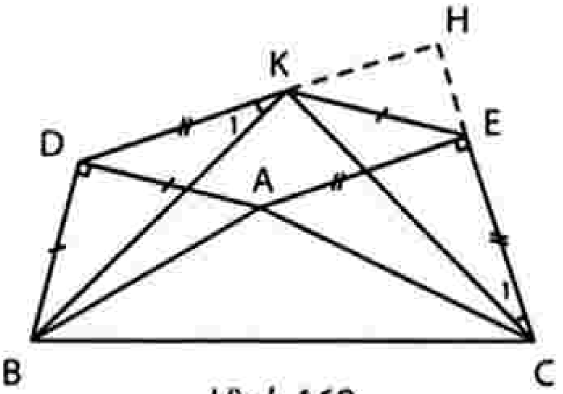
7. *(h.168)* ΔBDK = ΔKEC (c.g.c)

$\Rightarrow BK = KC$ và $\widehat{K}_1 = \widehat{C}_1$. (1)

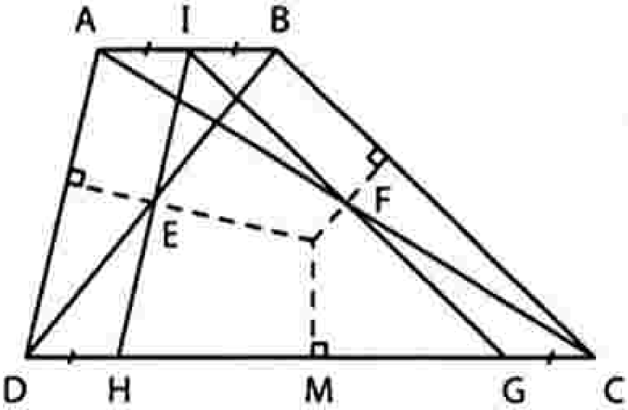
Gọi H là giao điểm của CE và DK.

Ta có $CE \perp AE$ và $AE // DK$ nên $CE \perp DK$ (tại H) $\Rightarrow \widehat{C_1}$ phụ $\widehat{CKH}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{K_1}$ phụ $\widehat{CKH}$ và ΔBKC vuông cân.



Hình 168



Hình 169

8. *(h.169)* Gọi I là trung điểm của AB, các đường thẳng IE và IF cắt CD theo thứ tự ở H và G. Ba đường thẳng cần chứng minh đồng quy là ba đường trung trực của ΔIHG.

9. *(h.170)*

Gọi K là giao điểm của AM và d_2.

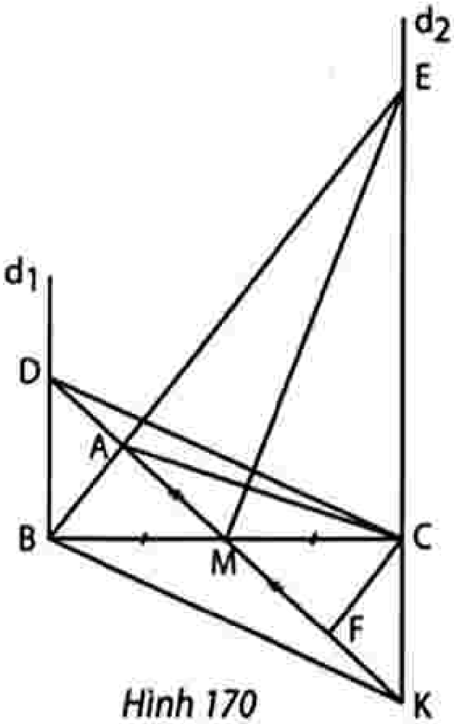
Lấy F trên MK sao cho MF = MA.

Tam giác AFC có AF = 12 cm, CF = 5 cm, AC = 13 cm nên $\widehat{AFC} = 90^\circ$, suy ra $KA \perp AB$.

Ta lại có $BC \perp EK$ nên $EM \perp BK$. (1)

Dễ chứng minh BDCK là hình bình hành nên $BK // CD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EM \perp CD$.



Hình 170

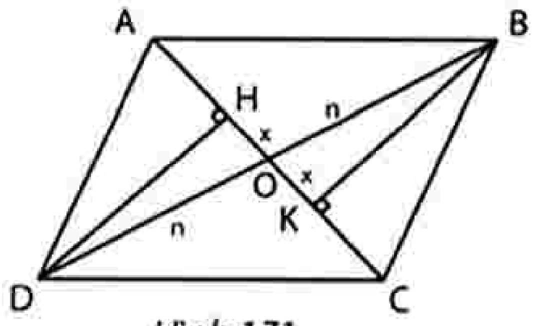
10. *(h.171)* a) Kẻ DH và BK vuông góc với AC. Đặt OH = OK = x. Ta có

$AB^2 = AK^2 + BK^2 = (m + x)^2 + (n^2 - x^2) = m^2 + 2mx + n^2$.

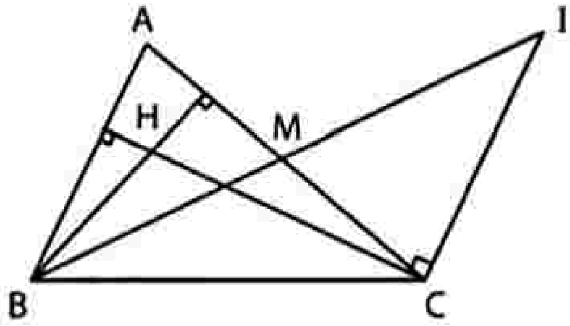
$AD^2 = AH^2 + DH^2 = (m - x)^2 + (n^2 - x^2) = m^2 - 2mx + n^2$.

Suy ra $AB^2 + AD^2 = 2m^2 + 2n^2$.

b) Suy ra từ câu a).



Hình 171



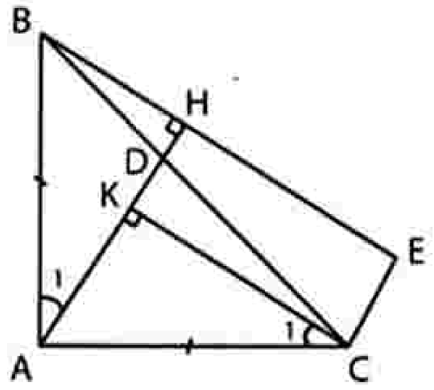
Hình 172

11. *(h.172)* Gọi I là điểm đối xứng với B qua M. Ta có CI // AB nên CI ⊥ CH.

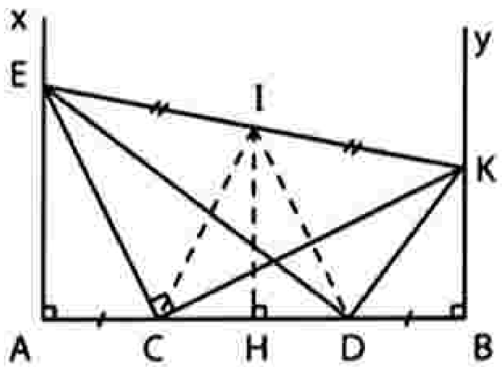
Điểm C dựng được, là giao điểm của đường tròn đường kính HI và đường thẳng qua M và vuông góc với BH. Từ đó dễ dàng dựng được tam giác ABC.

12. *(h.173)* Kẻ CK ⊥ AD. Ta có ΔCKA = ΔAHB (cạnh huyền – góc nhọn)

⇒ CK = AH = HE. Hãy chứng minh CKHE là hình chữ nhật.



Hình 173



Hình 174

13. *(h.174)* Gọi I là trung điểm của EK. Kẻ IH ⊥ AB thì HA = HB nên HC = HD.

Ta có ID = IC = IE = IK nên $\widehat{EDK} = 90^o$.

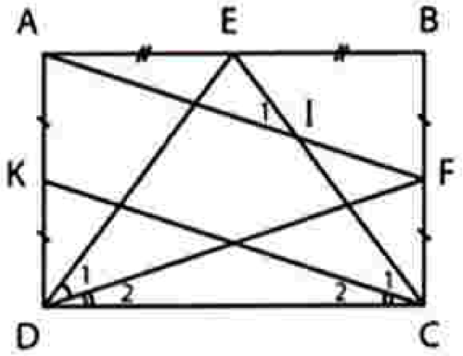
14. *(h.175)* Gọi K là trung điểm của AD. Ta có

ΔCDK = ΔDCF (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{D}_2 \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = \alpha$.

Do AKCF là hình bình hành nên AF // KC

$\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{C}_1 = \alpha$.



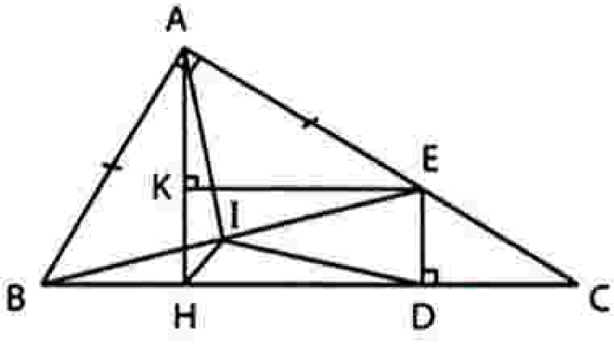
Hình 175

15. *(h.176)* Kẻ $EK \perp AH$, $ED \perp BC$. Ta có $\Delta AHB = \Delta EKA$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AH = EK = HD$.

Ta có $AI = DI$ (cùng bằng $\frac{1}{2}BE$).

Suy ra $\Delta AHI = \Delta DHI$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AHI} = \widehat{DHI} = 45^o$.



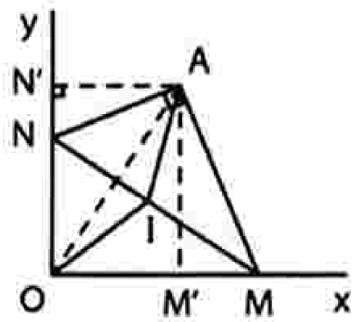
Hình 176

16. *(h.177) Cách 1.* Gọi I là trung điểm của MN.

Ta có $MN = IM + IN = IA + IO \geq OA$.

$\min MN = OA \Leftrightarrow$ O, I, A thẳng hàng.

Khi đó I là trung điểm của OA, AMON là hình chữ nhật, M là chân đường vuông góc kẻ từ A đến Ox.



Hình 177

Cách 2. MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AM^2 + AN^2$ nhỏ nhất.

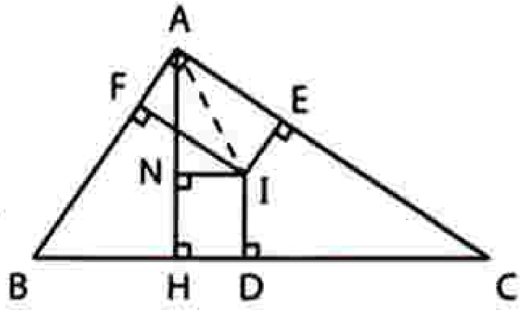
Xảy ra được đồng thời AM^2 nhỏ nhất và AN^2 nhỏ nhất, khi đó $AM' \perp Ox$ và $AN' \perp Oy$, thỏa mãn $AM' \perp AN'$.

17. *(h.178)* Kẻ $IN \perp AH$.

Ta có $IE^2 + IF^2 = IA^2$ nên $IE^2 + IF^2 + ID^2$

$= IA^2 + ID^2 \geq AN^2 + NH^2 \geq \frac{(AN + NH)^2}{2}$

$= \frac{AH^2}{2} = \frac{h^2}{2}$.

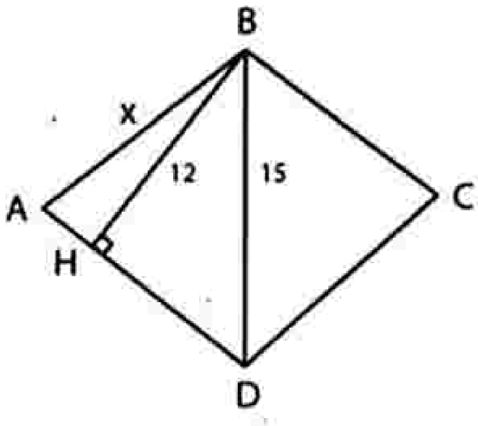


Hình 178

$\min(IE^2 + IF^2 + ID^2) = \frac{h^2}{2}$

$\Leftrightarrow$ I là trung điểm của đường cao AH.

18. *(h.179)* Hình thoi ABCD có $BD = 15$ cm, đường cao $BH = 12$ cm thì $HD^2 = BD^2 - BH^2$
$= 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow HD = 9$ cm.



Hình 179

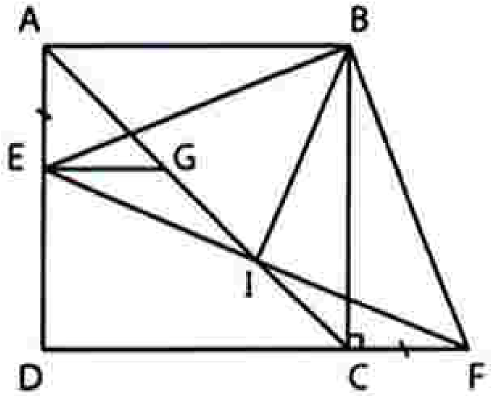
Đặt AB = x thì AH = x − 9.

Giải phương trình $(x-9)^2 + 12^2 = x^2$ được x = 12,5.

Cạnh hình thoi bằng 12,5 cm.

19. *(h.180)* $\Delta BAE = \Delta BCF$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = BF$.

Kẻ EG // CF, ta có EG = AE = CF nên EGFC là hình bình hành, suy ra IE = IF. Tam giác BEF cân có BI là đường trung tuyến nên $BI \perp EF$.



Hình 180

20. *(h.181)* Do $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ nên ta kẻ $KF \perp AB$, $KI \perp EG$ thì KI = KF = a.

Kẻ $MN \perp CD$, $MQ \perp AD$, ta có

$\Delta KCH = \Delta MQG$ (cạnh huyền – góc nhọn)

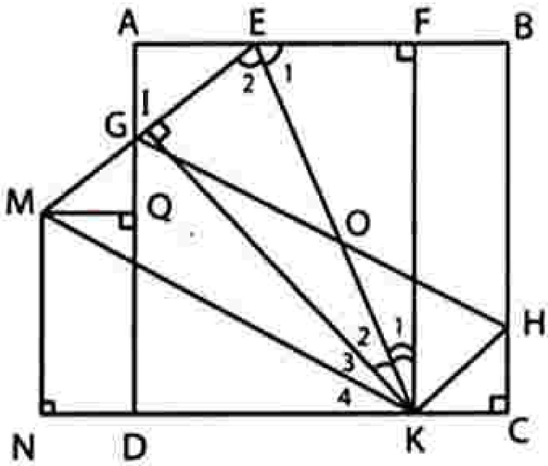
$\Rightarrow KC = MQ = ND$

$\Rightarrow NK = DC = a = KI \Rightarrow \hat{K}_3 = \hat{K}_4$.

Ta lại có $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$

nên $\hat{K}_2 + \hat{K}_3 = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EKM} = 45^\circ$.

Do KM // HG nên $\widehat{EOG} = \widehat{EKM} = 45^\circ$.



Hình 181

21. *(h.182)* Trên tia đối của tia DC lấy K sao cho DK = BE.

$\Delta ADK = \Delta ABE$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_4 = \hat{A}_1$

$\Rightarrow \hat{A}_4 + \hat{A}_3 = \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = 45^\circ = \hat{A}_2$.

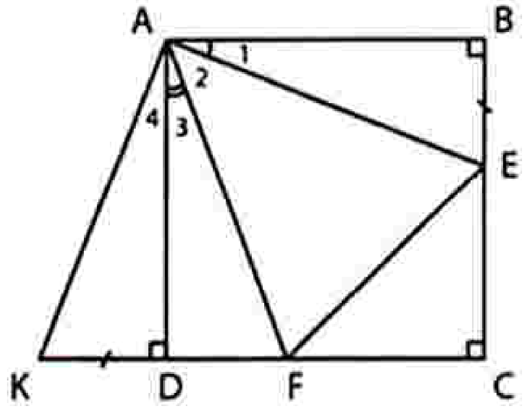
$\Delta FAE = \Delta FAK$ (c.g.c)

$\Rightarrow EF = KF = KD + DF = BE + DF$

$\Rightarrow EF + CE + CF = BE + CE + DF + CF$

$= BC + CD = 2a$.

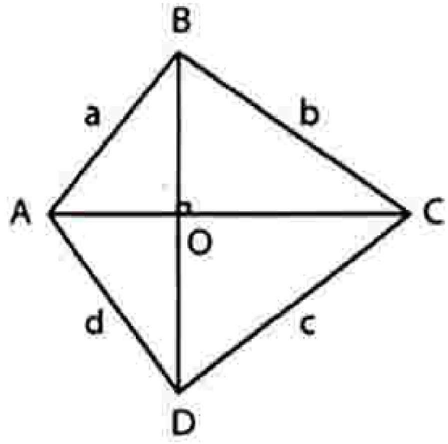
Ta lại có $EF \le CE + CF$ nên $EF \le a$.



Hình 182

maxEF = a $\Leftrightarrow$ E trùng B (khi đó F trùng C) hoặc E trùng C (khi đó F trùng D).

22. *(h.183)*



Hình 183

Đặt AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

Ta có $a^2 = OA^2 + OB^2 \geq \dfrac{(OA + OB)^2}{2}$

$\Rightarrow a \geq \dfrac{OA + OB}{\sqrt{2}} \Rightarrow a\sqrt{2} \geq OA + OB.$

Tương tự $b\sqrt{2} \geq OB + OC$

$c\sqrt{2} \geq OC + OD$

$d\sqrt{2} \geq OD + OA$

Suy ra $(a + b + c + d)\sqrt{2} \geq 2(OA + OC + OB + OD) = 2k.$

$$\min(a + b + c + d) = k\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB = OC = OD = \dfrac{k}{4} \\ AC \perp BD \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông có đường chéo bằng $\dfrac{k}{2}$.

23. Xét đa giác n cạnh có số đo các góc tăng dần là $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tổng các góc trong bằng $\dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = \dfrac{(90^\circ + 126^\circ)n}{2} = 108^\circ n$.

Giải phương trình $(n - 2)180^\circ = 108^\circ n$, ta được n = 5.

Gọi d là độ tăng dần của các góc. Do n = 5 nên $90^\circ + 4d = 126^\circ$, suy ra $d = 9^\circ$.

Số đo các góc của đa giác là $90^\circ, 99^\circ, 108^\circ, 117^\circ, 126^\circ$.

24. a) $\dfrac{m}{n} = \dfrac{(x - 2)180}{x} : \dfrac{(y - 2)180}{y} = \dfrac{x - 2}{x} \cdot \dfrac{y}{y - 2}$. Ta có $\dfrac{y(x - 2)}{x(y - 2)} = \dfrac{2}{5}$.

Rút gọn được $3xy + 4x - 10y = 0 \Leftrightarrow (3y + 4)(3x - 10) = -40$.

Do $y \geq 3$ nên $3y + 4 \geq 13$, có hai trường hợp

3y + 4	20	40
3x − 10	−2	−1

Đáp số : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 12. \end{cases}$

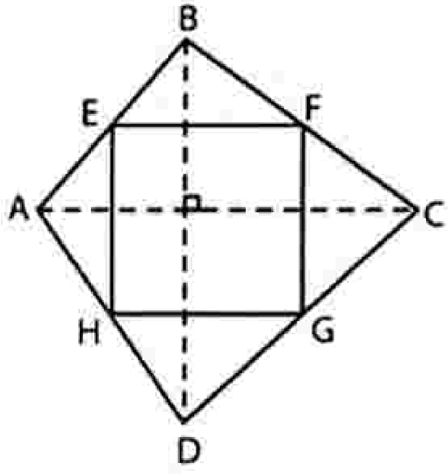
b) Có 4 đáp số :

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6 \\ y = 18 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 7 \\ y = 42. \end{cases}$

Chuyên đề 2

DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

25. *(h.184)* Dễ dàng chứng minh EFGH là hình vuông nên $S_{EFGH} = \dfrac{HF^2}{2}$.

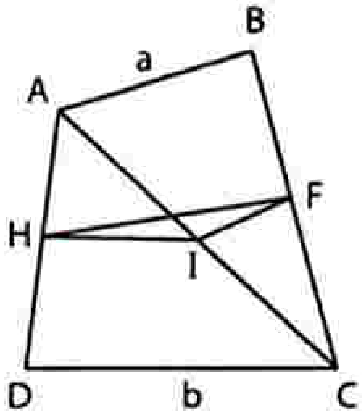


Hình 184

Theo đề bài $S_{EFGH} = \dfrac{(a+b)^2}{8}$

nên $HF = \dfrac{a+b}{2}$.

Xét tứ giác ABCD có $HF = \dfrac{a+b}{2}$ (h.185).



Hình 185

Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có $HI + IF = \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{2} = \dfrac{a+b}{2} = HF$.

Suy ra I nằm giữa H và F, do đó AB // CD.

Vậy ABCD là hình thang. Hình thang ABCD có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân.

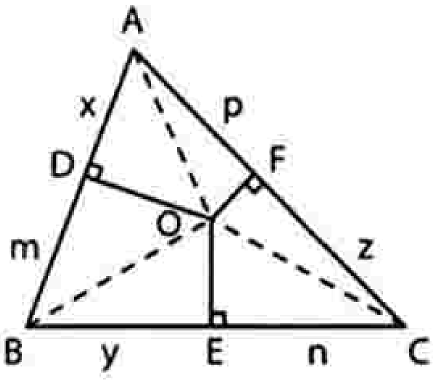
26. *(h.186)* a) Đặt BD = m, CE = n, AF = p.

Ta có $2(x^2 + m^2) \geq (x + m)^2 = c^2$.

Tương tự $2(y^2 + n^2) \geq a^2$

$2(z^2 + p^2) \geq b^2$. Suy ra

$$x^2 + y^2 + z^2 + m^2 + n^2 + p^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \quad (1)$$



Hình 186

Ta lại có $x^2 + y^2 + z^2 = (OA^2 - OD^2) + (OB^2 - OE^2) + (OC^2 - OF^2)$

$m^2 + n^2 + p^2 = (OB^2 - OD^2) + (OC^2 - OE^2) + (OA^2 - OF^2)$

nên $x^2 + y^2 + z^2 = m^2 + n^2 + p^2$. (2)

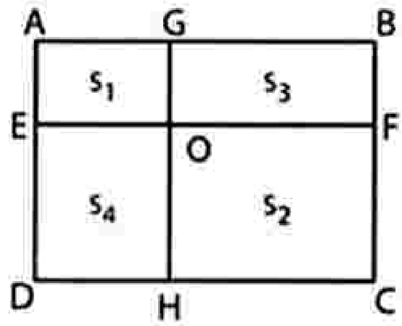
Từ (1) và (2) suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \ge \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$.

b) $\min(x^2 + y^2 + z^2) = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = n \\ z = p \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ O là giao điểm các đường trung trực.

27. *(h.187)*. Gọi S_3, S_4 theo thứ tự là diện tích các hình chữ nhật nhỏ có đỉnh B, đỉnh D.

Kí hiệu các điểm E, F, G, H như trên hình vẽ.



Hình 187

Ta có $S_1.S_2 = OE.OG.OF.OH$

$S_3.S_4 = OG.OF.OE.OH$ nên $S_1S_2 = S_3S_4$.

Ta có $S_1 \le S_2 \Rightarrow S_1^2 \le S_1S_2 = S_3S_4$

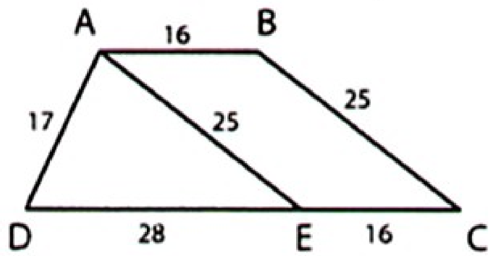
$\Rightarrow S_1 \le \sqrt{S_3S_4} = \dfrac{S_3 + S_4}{2}$. (1)

Ta có $S_1 \le S_2 \Rightarrow S_1 \le \dfrac{S_1 + S_2}{2}$. (2)

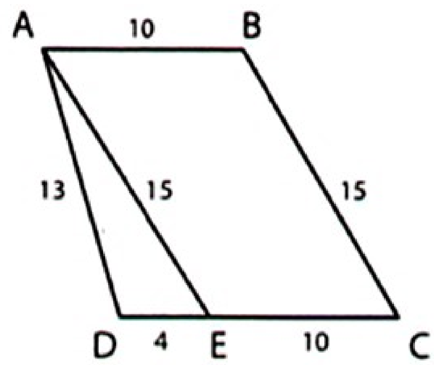
Từ (1) và (2) suy ra $S_1 \le \dfrac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} = \dfrac{S}{4}$.

28. a) *(h.188) Đáp số* : 450 cm^2.

b) *(h.189) Đáp số* : 144 cm^2.



Hình 188



Hình 189

29. Gọi a là cạnh, h là chiều cao, S là diện tích hình thoi.

Ta có $ah = S = \dfrac{mn}{2}$ nên $h = \dfrac{mn}{2a}$. (1)

Ta có $a^2 = \left(\dfrac{m}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{2}\right)^2 \Rightarrow 4a^2 = m^2 + n^2 \Rightarrow 2a = \sqrt{m^2 + n^2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $h = \dfrac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

30. *(h.190)* Đặt NP = x, MN = y.

Ta có $S_{AMN} + S_{BMNC} = S_{ABC}$ nên $\dfrac{1}{2}.y(10 - x) + \dfrac{1}{2}.(20 + y)x = \dfrac{1}{2}.20.10$

$\Leftrightarrow y(10 - x) + (20 + y)x = 200$

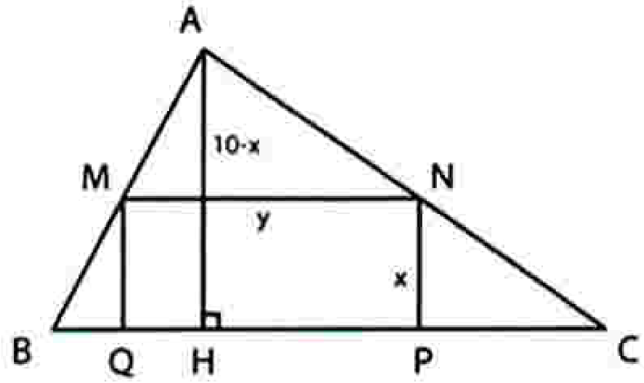
$\Leftrightarrow y = 20 - 2x$.

$S_{MNPQ} = xy = x(20 - 2x)$.

a) $x(20 - 2x) = 32$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 8)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 2 \end{array}\right.$



Hình 190

Cạnh của hình chữ nhật bằng 8 m và 4 m, hoặc 2 m và 16 m.

b) $S_{MNPQ} = x(20 - 2x) = -2(x - 5)^2 + 50 \le 50$.

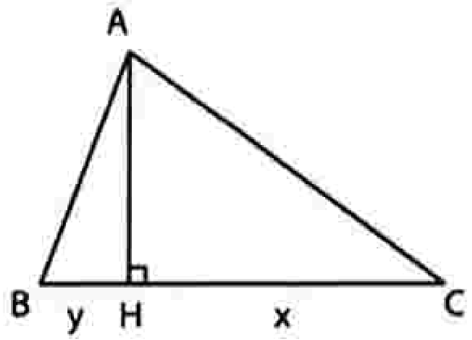
$\max S_{MNPQ} = 50\ m^2 \Leftrightarrow x = 5m \Leftrightarrow$ MN là đường trung bình của ΔABC.

31. *(h.191)* Kẻ đường cao AH.

Đặt HC = x, HB = y, ta có x + y = 21 (cm).

$x^2 - y^2 = AC^2 - AB^2 = 20^2 - 13^2 = 231$

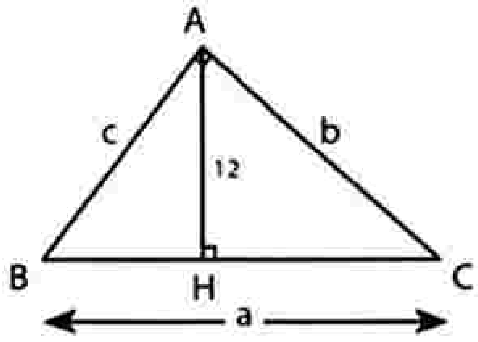
$\Rightarrow x - y = \dfrac{x^2 - y^2}{x + y} = \dfrac{231}{21} = 11$ (cm).



Hình 191

Từ đó x = 16 cm, y = 5 cm, AH = 12 cm, $S_{ABC} = 126\ cm^2$.

32. *(h.192)* Đặt BC = a, AC = b, AB = c.



Hình 192

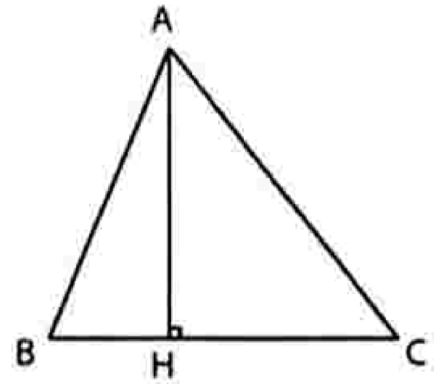
Ta có $\begin{cases} a + b + c = 60 \\ bc = 12a \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases}$

$(b + c)^2 = (60 - a)^2$

$\Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 3600 - 120a + a^2$

$\Rightarrow 24a = 3600 - 120a \Rightarrow a = 25$ (cm), $S_{ABC} = \dfrac{25.12}{2} = 150$ (cm^2).

33. *(h.193)* a) Do AB, BC, AC là ba số tự nhiên liên tiếp nên



Hình 193

$AC - AB = 2$ và $AC + AB = 2BC$.

Ta có $HC^2 - HB^2 = AC^2 - AB^2$

$= (AC + AB)(AC - AB)$

$= 2BC.2 = 4BC.$ (1)

$HC^2 - HB^2 = (HC + HB)(HC - HB)$

$= BC(HC - HB).$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra HC − HB = 4 (cm).

b) Đặt HB = x thì HC = x + 4, BC = 2x + 4, AB = BC − 1 = 2x + 3.

Ta có $AB^2 = HB^2 + AH^2 \Leftrightarrow (2x + 3)^2 = x^2 + 12^2$.

Rút gọn được $x^2 + 4x - 45 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 9) = 0$. Do x > 0 nên x = 5.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{2}.14.12 = 84$ (cm^2).

34. Xét tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng x và y ($x \geq y$).

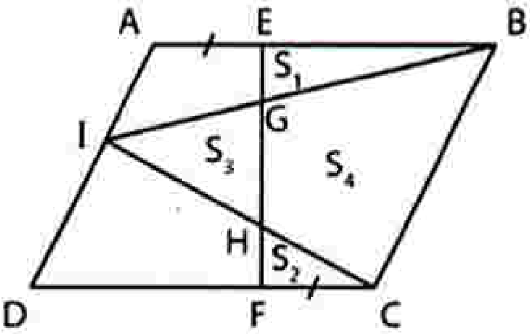
Ta có $\dfrac{xy}{2} = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = xy - 2x - 2y.$

Bình phương hai vế rồi rút gọn được $(x - 4)(y - 4) = 8$.

Đáp số: 12 và 5 ; 8 và 6.

35. *(h.194)* Đặt $S_{BEG} = S_1$, $S_{CFH} = S_2$, $S_{IGH} = S_3$, $S_{BGHC} = S_4$, $S_{ABCD} = S$. Hãy chứng minh

$S_1 + S_2 + S_4 = \frac{1}{2}S$ và $S_3 + S_4 = \frac{1}{2}S$.



Hình 194

36. *(h.195)* Do $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ nên $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$.

ΔBOC và ΔAOC có $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$ và $\hat{B}_2 = \hat{C}_2$

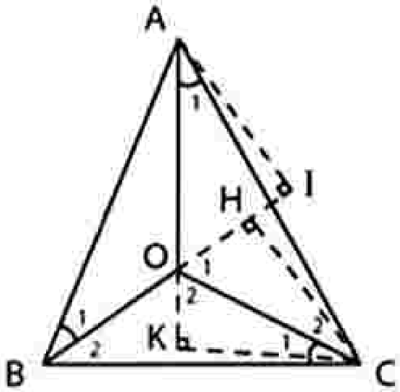
nên $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

Kẻ $CK \perp OA$, $CH \perp OB$ thì $CH = CK$. (1)

Kẻ $AI \perp OB$. Ta có $\Delta ABI = \Delta CAK$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AI = CK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AI = CH \Rightarrow S_{AOB} = S_{COB}$.

Lưu ý: BO đi qua trung điểm của AC.



Hình 195

37. *(h.196)* Kẻ $IH \perp AB$, $IK \perp AC$.

Trên AM lấy E sao cho $AE = AI$, kẻ $EG \perp AB$, $EN \perp AC$.

$\Delta AHI = \Delta ANE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

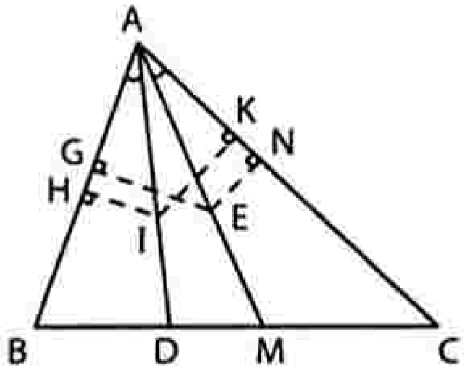
$\Rightarrow IH = EN$.

Tương tự $IK = EG$. Suy ra $\frac{IH}{IK} = \frac{EN}{EG}$. (1)

$MC = MB \Rightarrow S_{AEC} = S_{AEB} \Rightarrow EN.AC = EG.AB$

$\Rightarrow \frac{EN}{EG} = \frac{AB}{AC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IH}{IK} = \frac{AB}{AC}$.



Hình 196

38. (h.197) Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM.

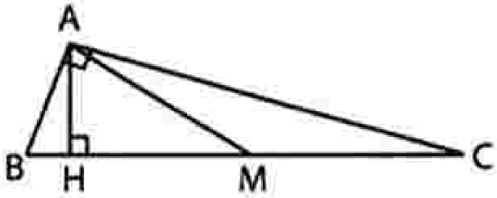
Ta có $BC.AH = AB.AC$ (1)

Theo giả thiết $BC^2 = 4AB.AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC^2 = 4BC.AH$

$\Rightarrow AH = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{2}AM$

$\Rightarrow \widehat{AMH} = 30^o \Rightarrow \hat{C} = 15^o$.



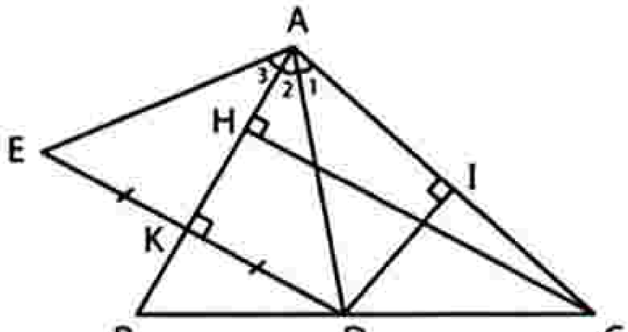
Hình 197

39. *(h.198)* Lấy E đối xứng với D qua AB. Ta có BC là cạnh lớn nhất nên $\widehat{BAC} \geq 60^o \Rightarrow \widehat{DAE} \geq 60^o$

$\Rightarrow DE \geq AD.$ (1)

Gọi K là giao điểm của DE và AB.

Kẻ $DI \perp AC$.



Hình 198

Ta có $S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ADC}$

$$= \frac{1}{2}AB.DK + \frac{1}{2}AC.DI = DK.\frac{AB + AC}{2} \geq DK.AB. \quad (2)$$

Ta lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH.$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{1}{2}AB.CH \geq AB.DK \Rightarrow CH \geq 2DK = DE.$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $CH \geq DE \geq AD$.

40. *(h.199)* a) Bạn đọc tự giải.

b) Đặt $S_{AMB} = S_1$, $S_{AMC} = S_2$.

Từ câu a) ta có

$2S_1 + 2S_2 = S_{BCDE} \leq a.CD = a.AM.$

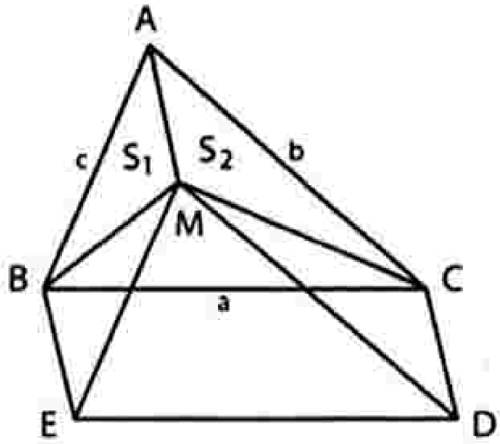
Tương tự $2S_1 + 2S_{BMC} \leq b.BM,$

$2S_2 + 2S_{BMC} \leq c.CM$

Suy ra

$4(S_1 + S_2 + S_{BMC}) \leq a.AM + b.BM + c.CM$

$\Rightarrow 4S \leq a.AM + b.BM + c.CM.$



Hình 199

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $AM \perp BC$, $BM \perp AC$, $CM \perp AB$, tức là M là trực tâm của tam giác ABC.

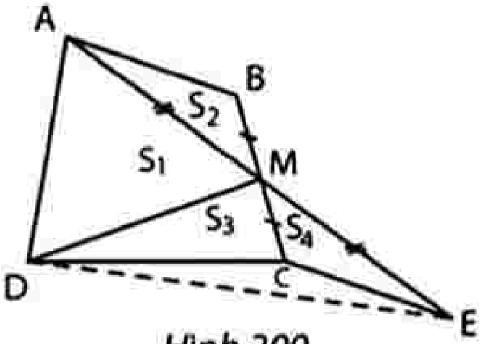
41. *(h.200)* Gọi E là điểm đối xứng với A qua M.

Theo đề bài $S_1 = S_2 + S_3$.

Ta lại có $S_2 = S_4$ nên $S_1 = S_4 + S_3$. (1)

Do AM = ME nên $S_1 = S_{MDE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_3 + S_4 = S_{MDE}$, chứng tỏ C thuộc đoạn DE. Do AB // CE nên AB // CD.



Hình 200

42. *(h.201)* a) Đặt AC = x. Ta có $8 = S_{ABCD}$

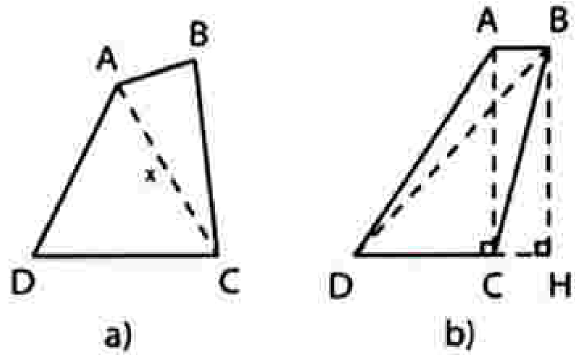
$= S_{ABC} + S_{ADC} \le \frac{1}{2}x.AB + \frac{1}{2}x.CD$

$= \frac{1}{2}x(8 - x)$

$\Rightarrow x(8 - x) \ge 16 \Rightarrow (x - 4)^2 \le 0$

$\Rightarrow x = 4$ và $\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 90^o$.

Vậy AB // CD.



Hình 201

b) Ở chứng minh trên, ta đã có AC = 4 cm. Suy ra AB + CD = 4 cm.

Kẻ BH ⊥ CD. Hãy chứng minh ΔBHD vuông cân nên $BD = 4\sqrt{2}$ cm.

43. *(h.202)*

Kí hiệu S_1, S_2, S_3, S_4 như trên hình vẽ.

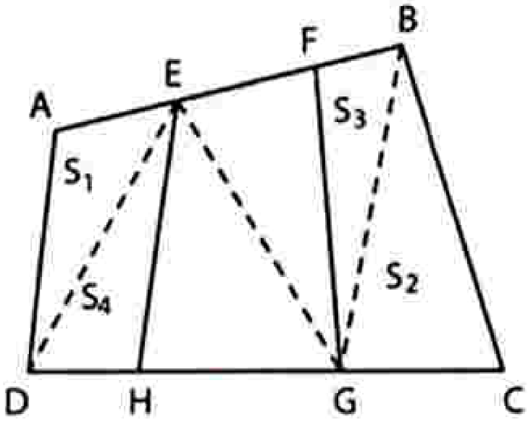
Ta có $S_1 = \frac{1}{3}S_{ABD}$, $S_2 = \frac{1}{3}S_{BCD}$

nên $S_1 + S_2 = \frac{1}{3}S$.

Suy ra $S_{EBGD} = \frac{2}{3}S$. (1)

Do $\frac{BF}{BE} = \frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{8}$ nên $S_3 = \frac{3}{8}S_{EBG}$,

tương tự $S_4 = \frac{3}{8}S_{EDG}$.



Hình 202

Suy ra $S_3 + S_4 = \frac{3}{8}S_{EBGD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_3 + S_4 = \frac{3}{8}.\frac{2}{3}S = \frac{1}{4}S$.

Do đó $S_{EFGH} = S_{EBGD} - (S_3 + S_4) = \frac{2}{3}S - \frac{1}{4}S = \frac{5}{12}S$.

44. *(h.203)*

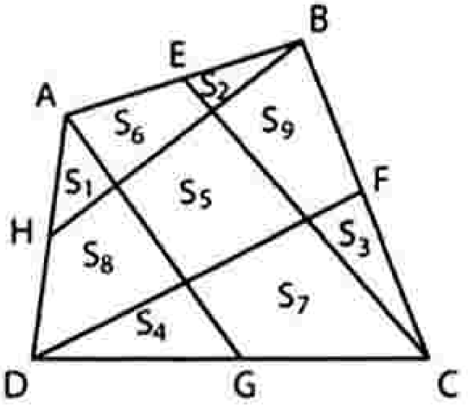
Kí hiệu S_6, S_7, S_8, S_9 như trên hình vẽ. Ta có

$(S_1 + S_6 + S_2) + (S_3 + S_7 + S_4) = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$. (1)

suy ra $S_5 + S_8 + S_9 = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$.

Tương tự $S_5 + S_6 + S_7 = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_5$.



Hình 203

45. *(h.204)*

Kí hiệu S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 như trên hình vẽ.

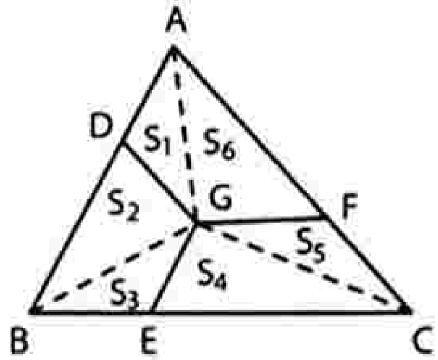
Dễ chứng minh $S_{AGB} = S_{BGC} = S_{CGA}$,

đặt mỗi diện tích đó bằng S.

Đặt $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{CF}{CA} = k$ thì $S_1 = S_3 = S_5$

(cùng bằng $\dfrac{1}{k}S$), suy ra $S_2 = S_4 = S_6$.

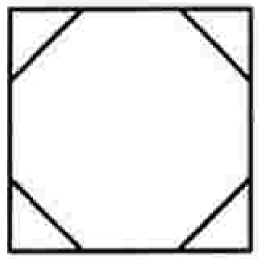
Do đó $S_1 + S_6 = S_2 + S_3 = S_4 + S_5$.



Hình 204

46. Vẽ hình vuông chứa viên gạch hình bát giác đều cạnh 1 dm (h.205). Phần hình vuông nằm ngoài bát giác ghép lại được một hình vuông cạnh 1 dm, diện tích 1 dm^2.

Như vậy ứng với một viên gạch hình bát giác đều, có diện tích 1 dm^2 được lát bởi các viên gạch không phải là bát giác đều. Vậy diện tích phải tìm là 1000 dm^2, tức là 10 m^2.



Hình 205

47. *(h.206)* Vẽ K đối xứng với E qua D. Ta có

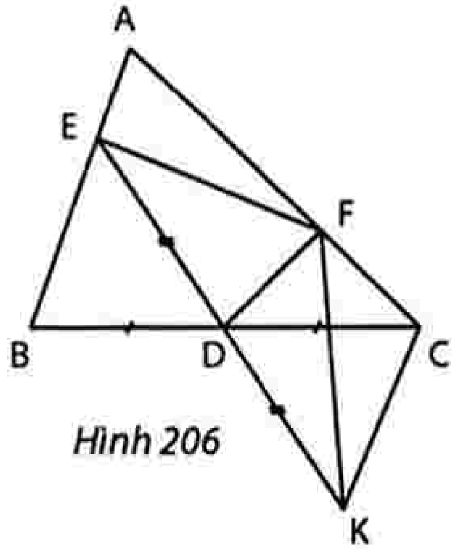
$S_{DEF} = S_{DKF} \le S_{DKCF} = S_{CDK} + S_{CDF} = S_{BDE} + S_{CDF}$

$S_{DEF} \le S_{AEDF}$.

Suy ra $2S_{DEF} \le S_{BDE} + S_{CDF} + S_{AEDF} = S$

$\max S_{DEF} = \dfrac{S}{2}$

$\Leftrightarrow$ E trùng A (khi đó F trùng C) hoặc E trùng B (khi đó F trùng A).



Hình 206

Chuyên đề 3

ĐỊNH LÍ TA-LÉT VÀ TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

48. *(h.207)* $\frac{1}{OA} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \Leftrightarrow 1 = \frac{OA}{AB} + \frac{OA}{AC}$

$\Leftrightarrow \frac{OA}{AB} = 1 - \frac{OA}{AC}$

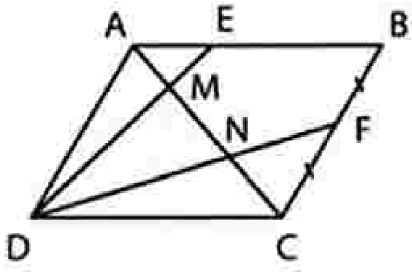
Hình 207

$\Leftrightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{AC - OA}{AC} \Leftrightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{AC}$

$\Leftrightarrow \frac{OA}{AB - OA} = \frac{OC}{AC - OC} \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OA} \Leftrightarrow OA^2 = OB.OC.$

49. *(h.208)*

$\frac{AM}{MC} = \frac{AE}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = \frac{1}{4}AC.$



Hình 208

$\frac{CN}{NA} = \frac{CF}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow CN = \frac{1}{3}AC.$

Suy ra $\frac{MN}{AC} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow S_{DMN} = \frac{5}{12}S_{ADC} = \frac{5}{24}S.$

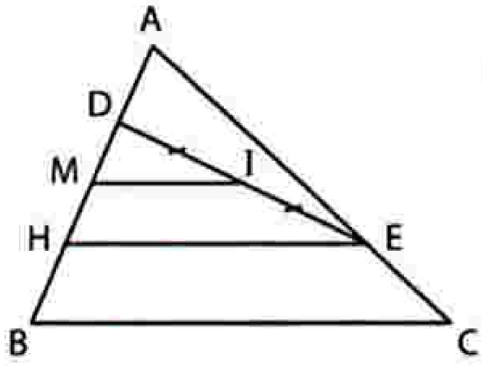
50. *(h.209)*

Gọi M là trung điểm của AB. Kẻ EH // BC.

Ta có $\frac{BH}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow BH = AD$

$\Rightarrow MD = MH.$

Từ đó MI // HE // BC và MI đi qua trung điểm của AC.

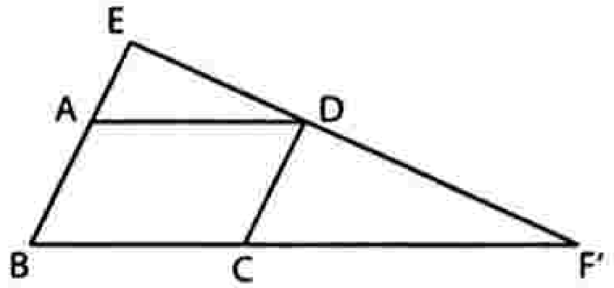


Hình 209

51. *(h.210)* Bằng cách đặc biệt hóa, ta dự đoán EF đi qua đỉnh D của hình bình hành ABCD.

Do $\frac{BA}{BE} < 1$ nên E thuộc tia đối của tia AB.

Gọi F' là giao điểm của ED và BC, hãy chứng minh $\frac{BA}{BE} + \frac{BC}{BF'} = 1$ để suy ra F' trùng F.

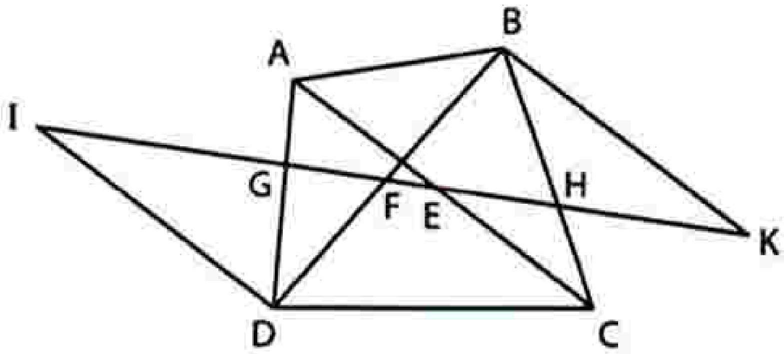


Hình 210

52. *(h.211)*

Qua D và B, vẽ các đường thẳng song song với AC, cắt GH theo thứ tự ở I và K.

Ta có $\frac{AG}{GD} = \frac{AE}{ID} = \frac{EC}{ID}$, $\frac{CH}{HB} = \frac{EC}{BK}$ mà DI = BK (dễ chứng minh) nên $\frac{AG}{GD} = \frac{CH}{HB}$.



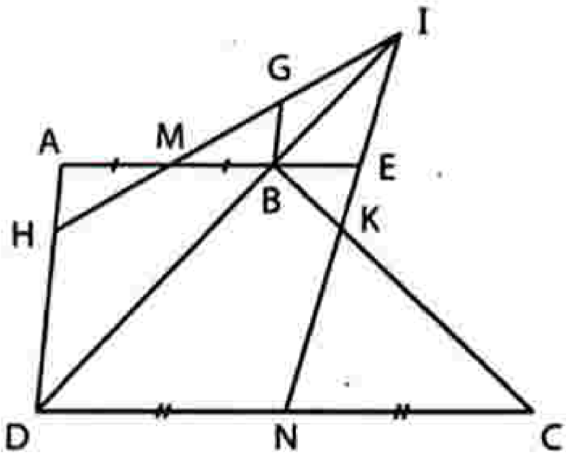
Hình 211

53. *(h.212)* Đường thẳng qua B và song song với AD cắt IH ở G.

Ta có $\frac{AH}{HD} = \frac{BG}{HD} = \frac{IB}{ID} = \frac{1}{3}$.

Gọi E là giao điểm của AB và IN. Ta có

$\frac{BK}{KC} = \frac{BE}{NC} = \frac{BE}{DN} = \frac{IB}{ID} = \frac{1}{3}$.



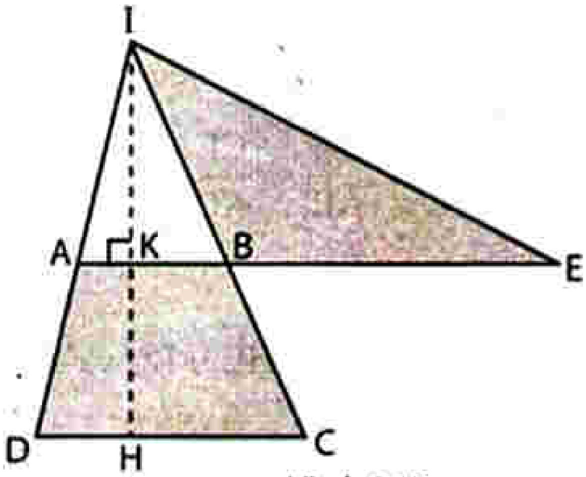
Hình 212

54. *(h.213)* Kẻ IH ⊥ CD, cắt AB ở K. Ta có AB // CD

$\Rightarrow \frac{IK}{IH} = \frac{IB}{IC} = \frac{AB}{CD} = \frac{5}{9}$

$\Rightarrow IK = \frac{5}{9} IH, \ KH = \frac{4}{9} IH.$

Ta có $S_{IBE} = S_{ABCD}$



Hình 213

$$\Rightarrow \frac{1}{2}BE.IK = \frac{AB + CD}{2}.KH$$

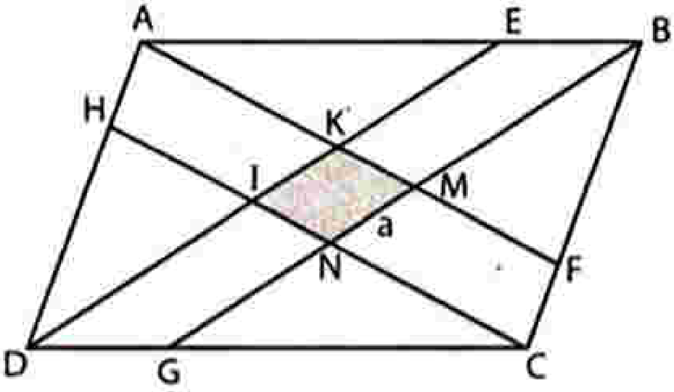
$$\Rightarrow BE.\frac{5}{9}IH = 14.\frac{4}{9}IH \Rightarrow BE = \frac{56}{5} = 11,2(cm).$$

55. Kí hiệu tứ giác phải tìm diện tích là MNIK như trên hình 214.

Dễ chứng minh DE // BG, AF // CD nên MNIK là hình bình hành.

Đặt MN = a. Từ định lí Ta-lét ta có BM = 2MN = 2a, $\Delta IDH = \Delta MBF$ (g.c.g) $\Rightarrow$ ID = BM = 2a.

Suy ra $NG = \frac{2}{3}ID = \frac{4a}{3}$.



Hình 214

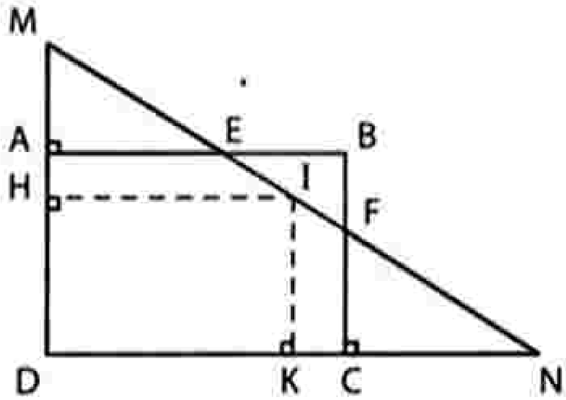
Do đó $BG = 2a + a + \frac{4a}{3} = \frac{13a}{3}$.

Do $MN = \frac{3}{13}BG$ nên $S_{MNIK} = \frac{3}{13}S_{BEDG} = \frac{3}{13}.\frac{1}{3}S = \frac{1}{13}S$.

56. *(h.215)* Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EF với DA, DC.

Trước hết, tìm vị trí của I trên MN để S_{DHIK} lớn nhất, ta được I là trung điểm của MN (giải tương tự Bài tập 30b).

Tính AM, CN để thấy EM = FN, suy ra trung điểm I của MN cũng là trung điểm của EF.



Hình 215

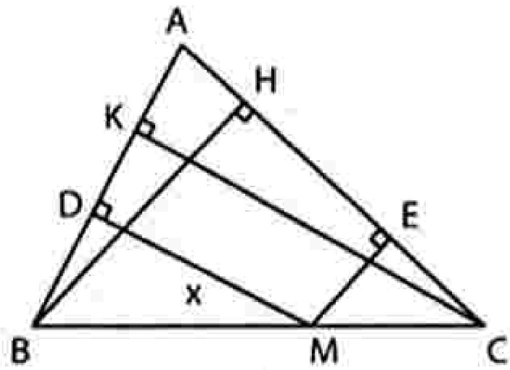
57. *(h.216)* Kẻ MD $\perp$ AB, ME $\perp$ AC, CK $\perp$ AB, BH $\perp$ AC.

Đặt MD = x, BH = m, CK = n.

Ta có $\frac{MD}{CK} + \frac{ME}{BH} = \frac{MB}{BC} + \frac{MC}{BC} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{n} + \frac{ME}{m} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{m} = 1 - \frac{x}{n} = \frac{n - x}{n}$$



Hình 216

$\Rightarrow ME = \dfrac{m}{n}(n - x)$

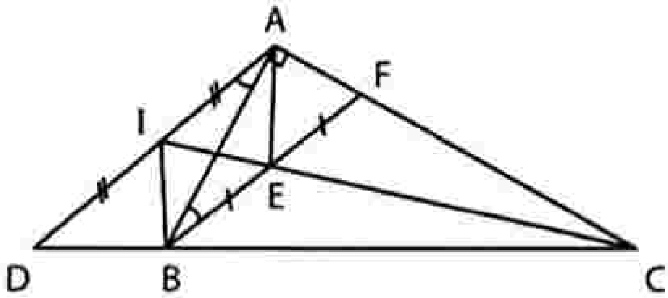
$\Rightarrow MD.ME = \dfrac{m}{n}(-x^2 + nx) = \dfrac{m}{n}\left[-\left(x - \dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{n^2}{4}\right] \le \dfrac{m}{n}.\dfrac{n^2}{4} = \dfrac{mn}{4}.$

$\max(MD.ME) = \dfrac{mn}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{n}{2} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của BC.

58. *(h.217)*

Qua B kẻ đường thẳng song song với AD, cắt CI và CA lần lượt ở E và F. Do AI = ID nên EF = EB = EA.

Hãy chứng minh $\widehat{D} = \widehat{DAE}$ (= 2α) để suy ra ADBE là hình thang cân, từ đó chứng minh $\widehat{AIC} = \widehat{BID}$.



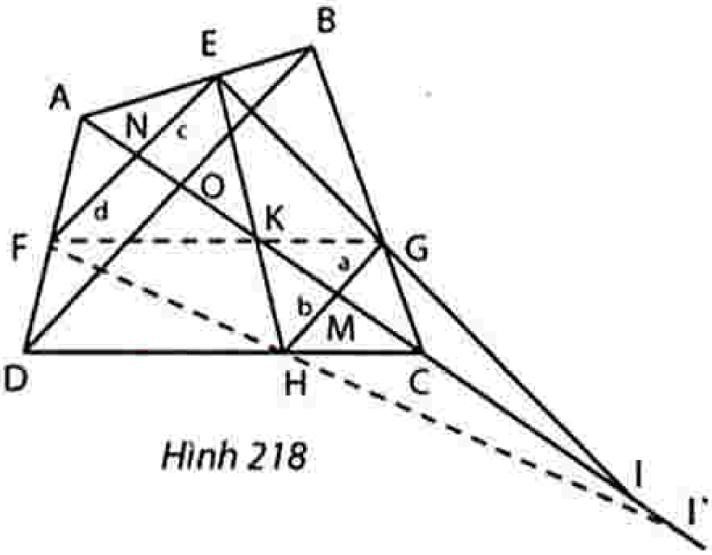
Hình 217

59. *(h.218)* a) Gọi M, O, N theo thứ tự là giao điểm của GH, BD, EF với AC.

Đặt MG = a, MH = b, NE = c, NF = d.

Ta có $\dfrac{a}{b} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{c}{d}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}.$ (1)



Hình 218

Gọi I' là giao điểm của FH và tia CI. Ta có

$\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{a}{c}$, $\dfrac{I'M}{I'N} = \dfrac{b}{d}$. Do (1) nên $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{I'M}{I'N}$, do đó I' trùng I.

b) Điều kiện để EH cắt FG tại K thuộc AC là $\dfrac{a}{d} = \dfrac{MK}{KN} = \dfrac{b}{c}.$ (2)

Nhân (1) với (2) được $\dfrac{a^2}{cd} = \dfrac{b^2}{cd} \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow OB = OD.$

60. *(h.219)* Gọi I là trung điểm của MA thì

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BM}{MI}\ (= 2)$$

$\Rightarrow ME \parallel IC$ (định lí Ta-lét đảo).

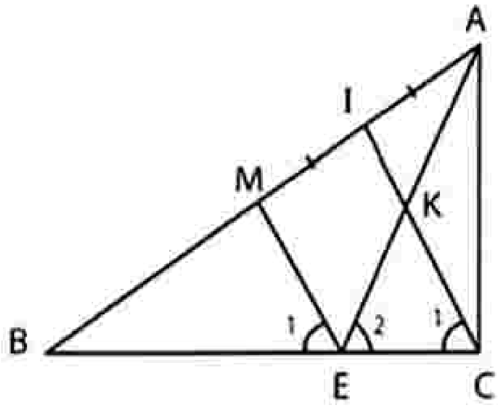
Gọi K là giao điểm của IC và AE thì

$AK = KE$. (1)

$IC \parallel ME \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \Rightarrow KE = KC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{ACB} = 90^\circ$.



Hình 219

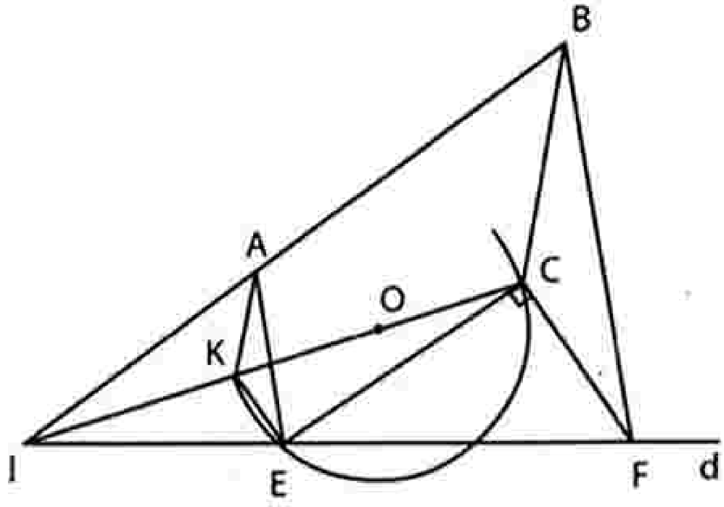
61. *(h.220)*

Dựng giao điểm I của AB và d.

Dựng đường thẳng đi qua A và song song với BC, cắt IC ở K.

Dựng đường tròn có đường kính KC, cắt d ở E.

Dựng đường vuông góc với EC tại C, cắt d ở F.



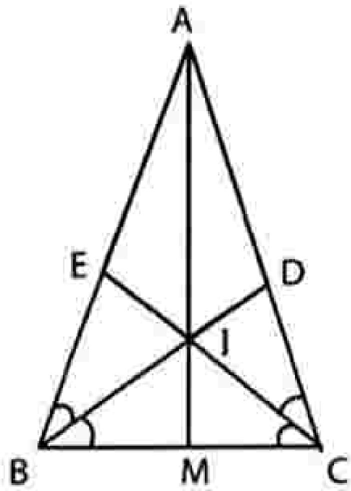
Hình 220

62. *(h.221)* Gọi M là giao điểm của AI và BC.

Dùng tính chất đường phân giác, ta tính được $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{5}$, $\frac{AI}{AM} = \frac{3}{4}$ nên

$$S_{AEI} = \frac{9}{20} S_{ABM} = \frac{9}{40} S.$$

Do đó $S_{AEID} = \frac{9}{20} S$.



Hình 221

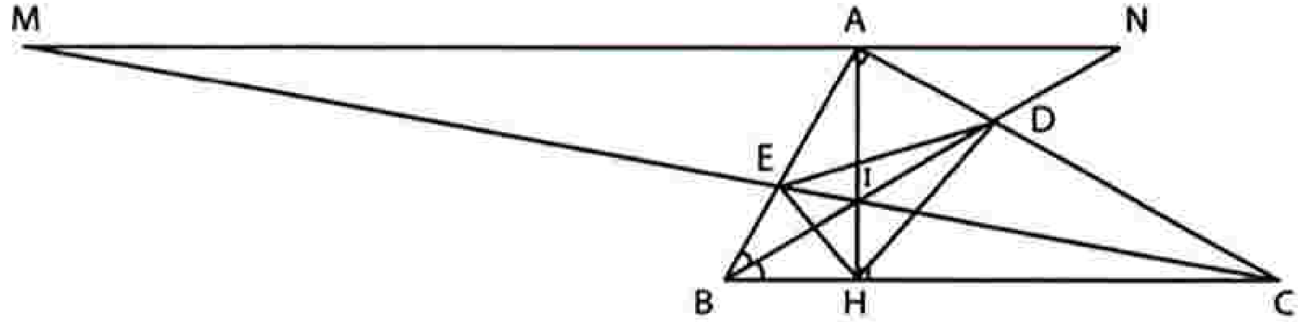
63. *(h.222)* a) Do $\hat{B} = 60^\circ$ nên $BC = 2AB = 4HB$.

Do BD là tia phân giác của góc B nên

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC, cắt CE và BD theo thứ tự ở M và N.

Ta có $\frac{AE}{EB} = \frac{AM}{BC} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{AN}{BC} = \frac{HC}{HB} \cdot \frac{AD}{DC} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.



Hình 222

b) Theo bổ đề về hai tam giác có một góc bằng nhau (Ví dụ 14) ta có :

$$\frac{S_{ADE}}{S} = \frac{AE}{AB}.\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}.\frac{1}{3} = \frac{1}{5}, \quad \frac{S_{BEH}}{S} = \frac{BE}{BA}.\frac{BH}{BC} = \frac{2}{5}.\frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

$$\frac{S_{CDH}}{S} = \frac{CD}{CA}.\frac{CH}{CB} = \frac{2}{3}.\frac{3}{4} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } \frac{S_{DEH}}{S} = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}.$$

Vậy $S_{DEH} = \frac{1}{5}S$.

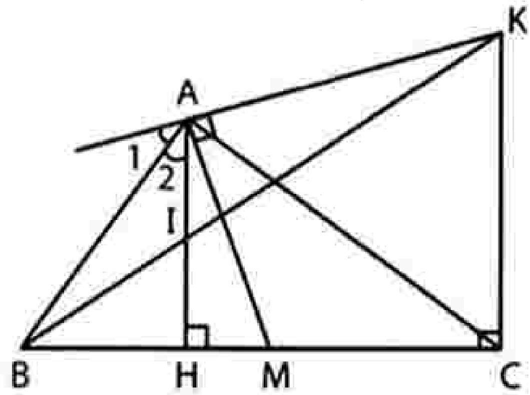
64. *(h.223)*

$\widehat{A}_1$ phụ $\widehat{BAM}$, $\widehat{A}_2$ phụ $\widehat{ABM}$ mà

$\widehat{BAM} = \widehat{ABM}$ nên $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$,

suy ra AB là đường phân giác ngoài của $\Delta AIK \Rightarrow \frac{AI}{AK} = \frac{BI}{BK} = \frac{IH}{KC}$.

Hãy chứng minh AK = KC để suy ra AI = IH.



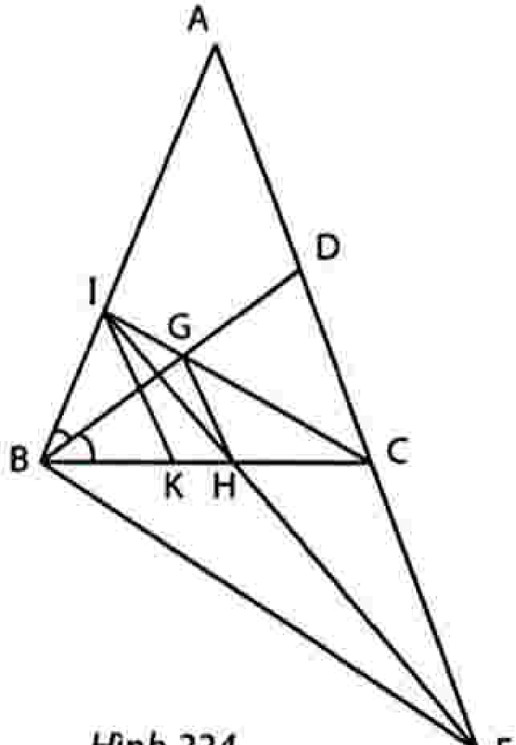
Hình 223

65. *(h.224)* Kẻ IK // AC.

Theo định lí Ta-lét và tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{KH}{HC} = \frac{IK}{CE} = \frac{BI}{BC} = \frac{IG}{GC}$$

$\Rightarrow$ GH // IK // AC.



Hình 224

66. *(h.225)*

Xét $\Delta ABA'$ có $a'c = 2S_{ABA'} = BA'.h_a$

$$\Rightarrow \frac{a'}{h_a} = \frac{BA'}{c}. \qquad (1)$$

Theo tính chất đường phân giác

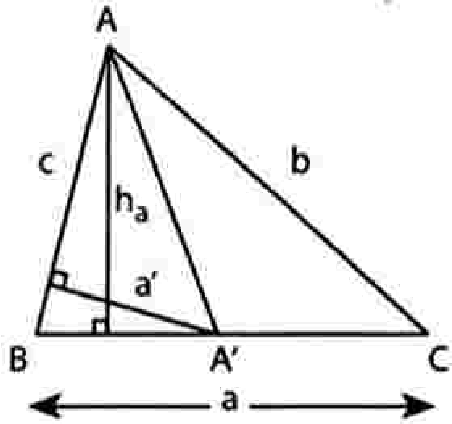
$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BA'}{BA' + A'C} = \frac{c}{c+b}$$

$$\Rightarrow \frac{BA'}{c} = \frac{a}{b+c}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{a'}{h_a} = \dfrac{a}{b+c}$.

Do đó $\dfrac{a'}{h_a} + \dfrac{b'}{h_b} + \dfrac{c'}{h_c} = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$.

Bạn đọc tự chứng minh bất đẳng thức $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.



Hình 225

Chuyên đề 4

TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

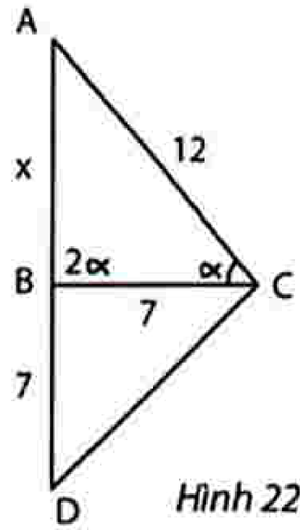
67. *(h.226)*

Trên tia đối của tia BA lấy D sao cho BD = BC.

Ta có $\Delta ABC \backsim \Delta ACD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$.

Đặt AB = x thì $\dfrac{x}{12} = \dfrac{12}{x+7} \Rightarrow x^2 + 7x - 144 = 0$

$\Rightarrow (x-9)(x+16) = 0$. *Đáp số*: AB = 9 cm.



Hình 226

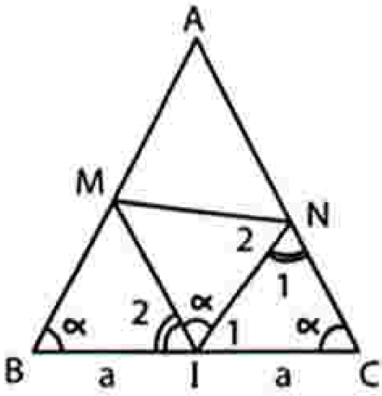
68. *(h.227)* a) Ta có $\widehat{N}_1 = \hat{I}_2$ (cùng cộng với $\alpha + \hat{I}_1$ được 180°). $\Delta BIM \backsim \Delta CNI$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BM}{CI} = \dfrac{IB}{NC}$

$\Rightarrow BM.NC = IB.IC = a^2$.

b) Hai tam giác đồng dạng trên còn suy ra

$\dfrac{IM}{NI} = \dfrac{IB}{NC} = \dfrac{IC}{NC}$

$\Rightarrow \Delta MIN \backsim \Delta ICN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{N}_2 = \widehat{N}_1$.



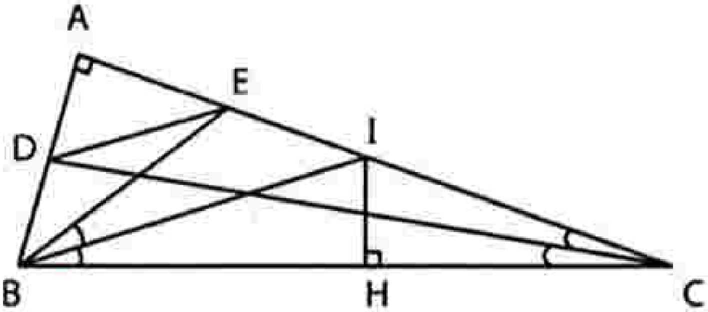
Hình 227

c) Từ câu b) suy ra khoảng cách từ I đến MN bằng khoảng cách từ I đến AC không đổi.

69. *(h.228)* Kẻ $IH \perp BC$.

Ta có $\Delta HIC \backsim \Delta ABC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HC}{IC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{DB}$. (1)



Hình 228

Dễ chứng minh ΔIBC cân nên $HB = HC$.

Ta có BI là đường phân giác của ΔEBC nên $\dfrac{BE}{EI} = \dfrac{BC}{IC}$

$\Rightarrow \dfrac{2AE}{EI} = \dfrac{2HC}{IC} \Rightarrow \dfrac{AE}{EI} = \dfrac{HC}{IC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EI} \Rightarrow DE \parallel BI$ (định lí Ta-lét đảo).

70. *(h.229)* Giải tương tự Ví dụ 37.

Gọi AD là đường cao của ΔABC.

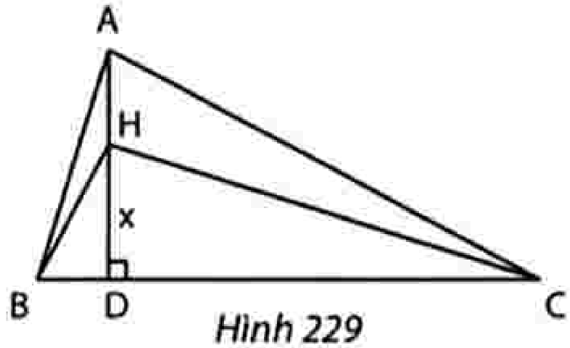
Đặt $HD = x$.

Đưa về phương trình

$x^3 + 23x^2 - 100 = 0$

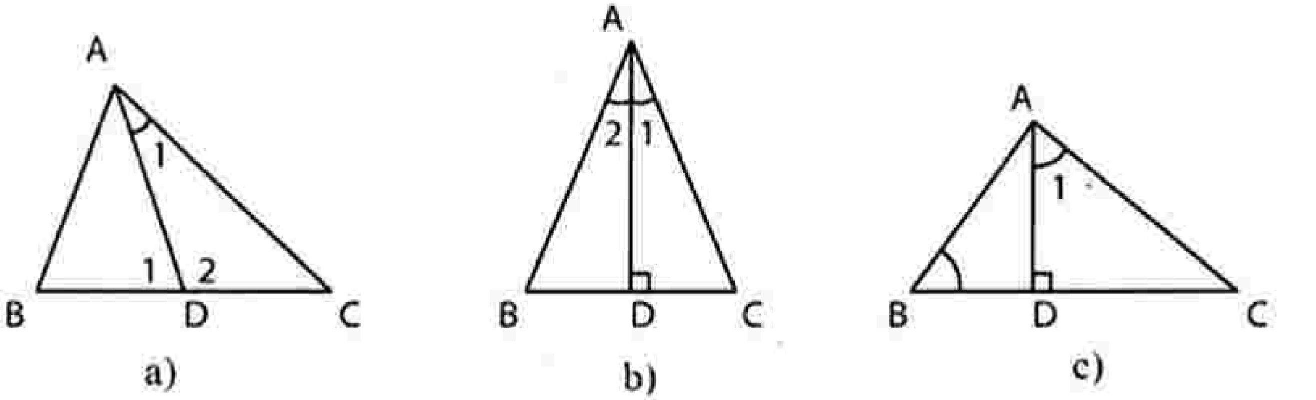
$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 25x + 50) = 0$

$HD = 2$ cm, $BD = 1$ cm, $DC = 6$ cm, $S_{ABC} = 10{,}5\ cm^2$.



Hình 229

71. *(h.230)*



Hình 230

ΔABD đồng dạng với tam giác có ba đỉnh là A, D, C (h.230a) mà $\widehat{D}_1 > \widehat{A}_1$ và $\widehat{D}_1 > \widehat{C}$ nên $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$, suy ra $AD \perp BC$.

Có hai trường hợp :

– Nếu $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ thì ΔABC cân tại A (h.230b).

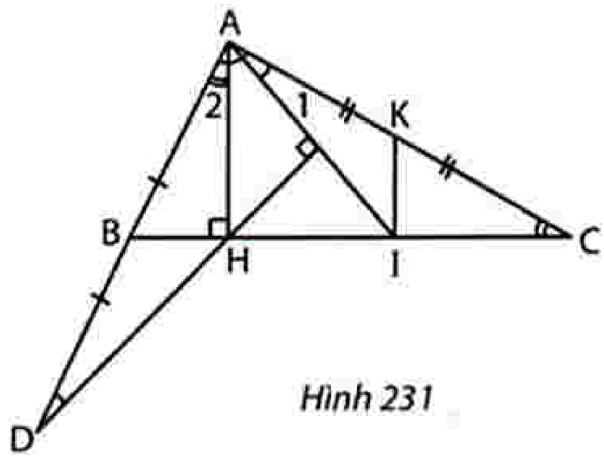
– Nếu $\widehat{A}_1 = \widehat{B}$ thì ΔABC vuông tại A (h.230c).

72. *(h.231)* Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{D}$ (cùng phụ $\widehat{DAI}$), $\widehat{C} = \widehat{A}_2$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$) nên $\Delta ICA \backsim \Delta HAD$ (g.g).

Kẻ trung tuyến IK của ΔICA.

Do IK và HB là hai trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng nên $\widehat{CIK} = \widehat{AHB} = 90^\circ$.

ΔAHC có $AK = KC$ và $KI \parallel AH$ nên $HI = IC$.



Hình 231

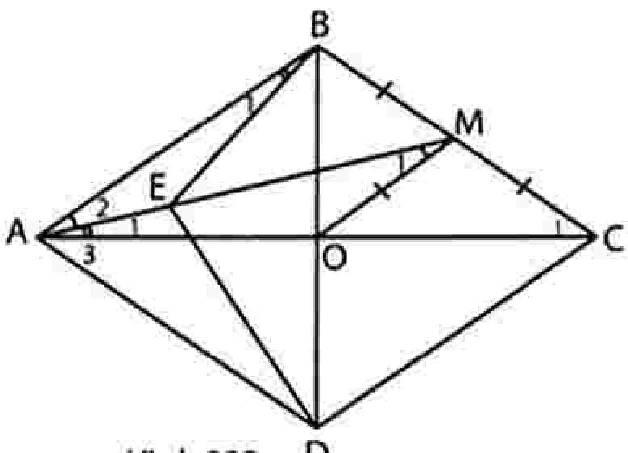
73. *(h.232)*

a) Sẽ chứng minh $\dfrac{AD}{MA} = \dfrac{AE}{MB}$.

Ta có $\dfrac{AD}{MA} = \dfrac{AB}{MA}$. (1)

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Do $\widehat{A}_2 = \widehat{M}_1$ (vì $AB \parallel OM$)



Hình 232

và $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ nên $\Delta ABE \backsim \Delta MAO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{MA} = \dfrac{AE}{MO} = \dfrac{AE}{MB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AD}{MA} = \dfrac{AE}{MB}$, lại có $\widehat{DAE} = \widehat{AMB}$

nên $\Delta DAE \backsim \Delta AMB$ (c.g.c).

b) $\Delta DAE \backsim \Delta AMB \Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{MBA}$.

Suy ra hai góc bù với chúng bằng nhau : $\widehat{MED} = \widehat{BCD}$.

74. *(h.233)*

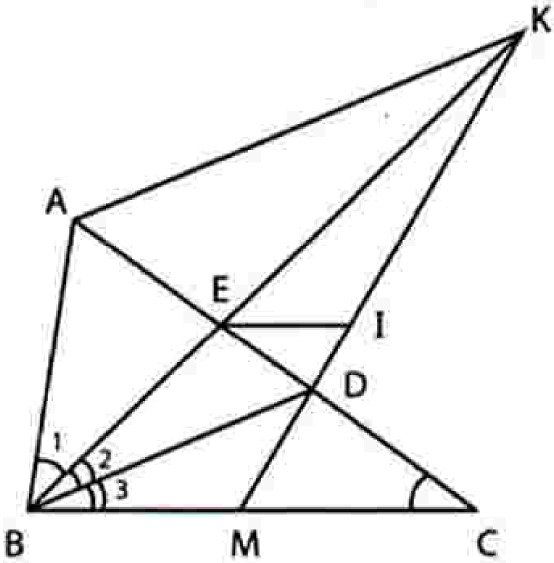
$EI \parallel BC \Rightarrow \dfrac{BM}{EI} = \dfrac{KB}{KE}$. (1)

$\dfrac{MC}{EI} = \dfrac{DC}{DE}$ (do $EI \parallel BC$)

$= \dfrac{BC}{BE}$ (do $\hat{B}_2 = \hat{B}_3$)

$= \dfrac{AB}{AE}$ (do $\Delta ABC \backsim \Delta AEB$)

$= \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{KB}{KE}$ (do $AK \parallel BD$). (2)



Hình 233

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{BM}{EI} = \dfrac{MC}{EI} \Rightarrow BM = MC$.

75. *(h.234)*

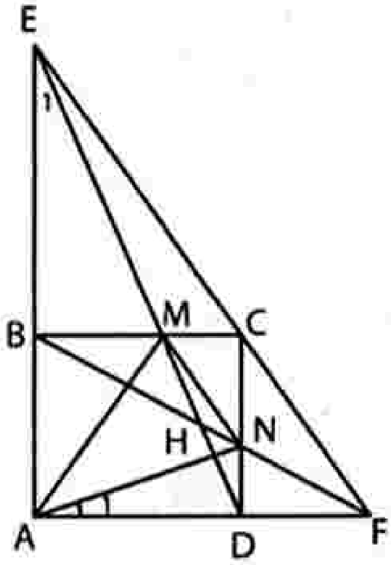
a) $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BE}{CD}$. (1)

$\dfrac{BN}{NF} = \dfrac{EC}{CF} = \dfrac{BE}{AB}$. (2)

Do $AB = CD$ nên từ (1) và (2) suy ra

$\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BN}{NF} \Rightarrow MN \parallel EF$.

b) $\dfrac{AD}{DN} = \dfrac{AB}{DN} = \dfrac{AE}{CD} = \dfrac{AE}{AD}$

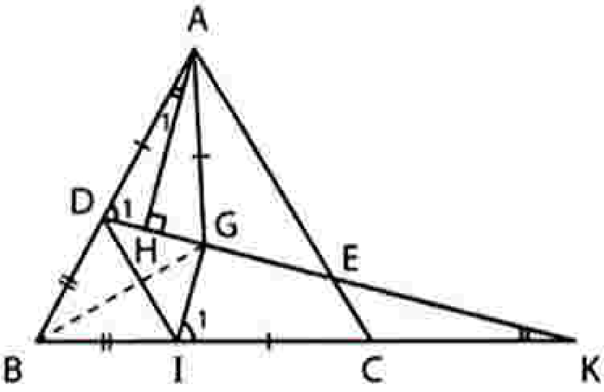


Hình 234

$\Rightarrow \Delta ADN \backsim \Delta EAD$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow AN \perp DE$.

Tương tự $AM \perp BF$. Vậy H là trực tâm của ΔAMN.

76. *(h.235)* Kẻ DI // AC ($I \in BC$), ta có ΔBDI đều $\Rightarrow BD = BI \Rightarrow AD = CI$. (1)



Hình 235

Kẻ $AH \perp DG$ thì $\widehat{A}_1 = 15^o$,

$\widehat{D}_1 = 75^o$

$\Rightarrow \widehat{K} = \widehat{D}_1 - \widehat{B} = 75^o - 60^o = 15^o$.

I đối xứng với D qua BG

$\Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{D}_1 = 75^o$.

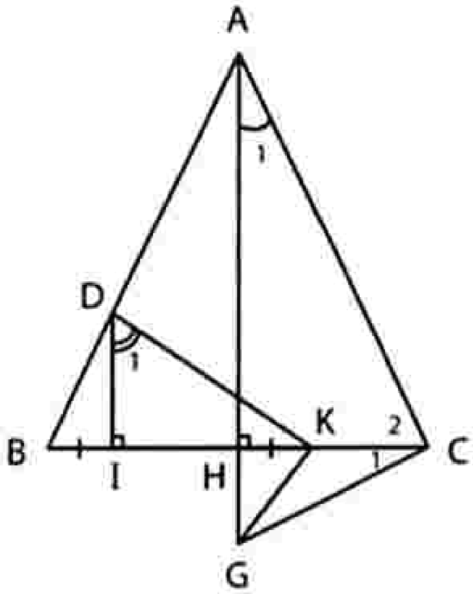
$\Delta KIG \backsim \Delta ADH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{KI}{AD} = \dfrac{IG}{DH} = \dfrac{DG}{DH} = 2 \Rightarrow KI = 2AD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KI = 2CI \Rightarrow IC = CK$.

ΔDIK có $IC = CK$ và DI // EC nên $DE = EK$.

77. *(h.236)* ΔHKG và ΔIDK có $\widehat{H} = \widehat{I} = 90^o$,

$\widehat{HKG} = \widehat{D}_1$ (cùng phụ $\widehat{IKD}$)



Hình 236

nên $\Delta HKG \backsim \Delta IDK$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{HG}{IK} = \dfrac{HK}{ID}$.

Do $BI = HK$, $IK = BH = CH$ nên

$\dfrac{HG}{CH} = \dfrac{BI}{ID} = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{CH}{AH}$.

Kết hợp với $\widehat{CHG} = \widehat{AHC} = 90^o$ suy ra

$\Delta CHG \backsim \Delta AHC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{A}_1$. Cùng cộng với $\widehat{C}_2$ được $\widehat{ACG} = \widehat{A}_1 + \widehat{C}_2 = 90^o$.

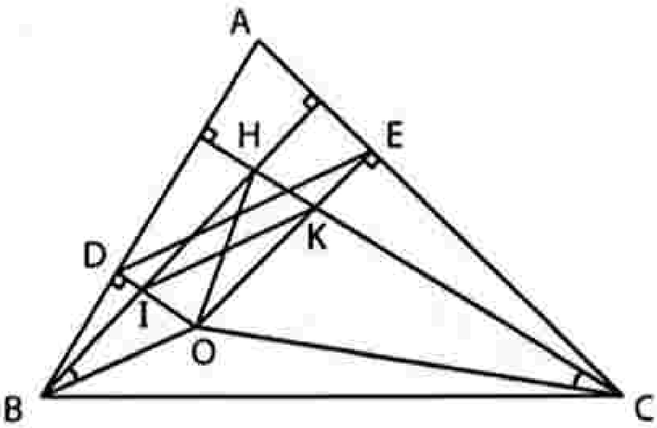
78. *(h.237)*

Gọi I là giao điểm của OD và HB, K là giao điểm của OE và HC.

Ta có OIHK là hình bình hành nên OH đi qua trung điểm của IK.

Hãy chứng minh IK // DE bằng cách chứng minh $\dfrac{DI}{DO} = \dfrac{EK}{EO}$.

Xét các tam giác đồng dạng BDI và CEK, BOD và COE.



Hình 237

79. *(h.238)* Qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BF, cắt HA ở K.

Do $\widehat{B_1} = \widehat{K_1}$, $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ nên

$\Delta BCF \backsim \Delta KAC$ (g.g)

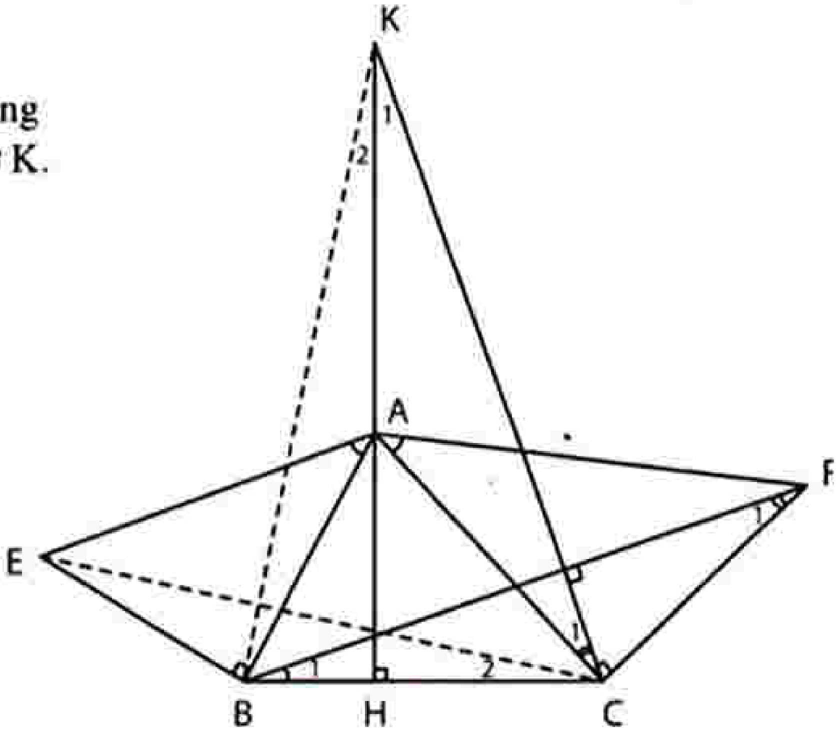
$\Rightarrow \dfrac{CF}{AC} = \dfrac{BC}{KA}$. (1)

$\Delta ACF \backsim \Delta ABE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{CF}{AC} = \dfrac{BE}{AB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\dfrac{BC}{KA} = \dfrac{BE}{AB}$, lại có



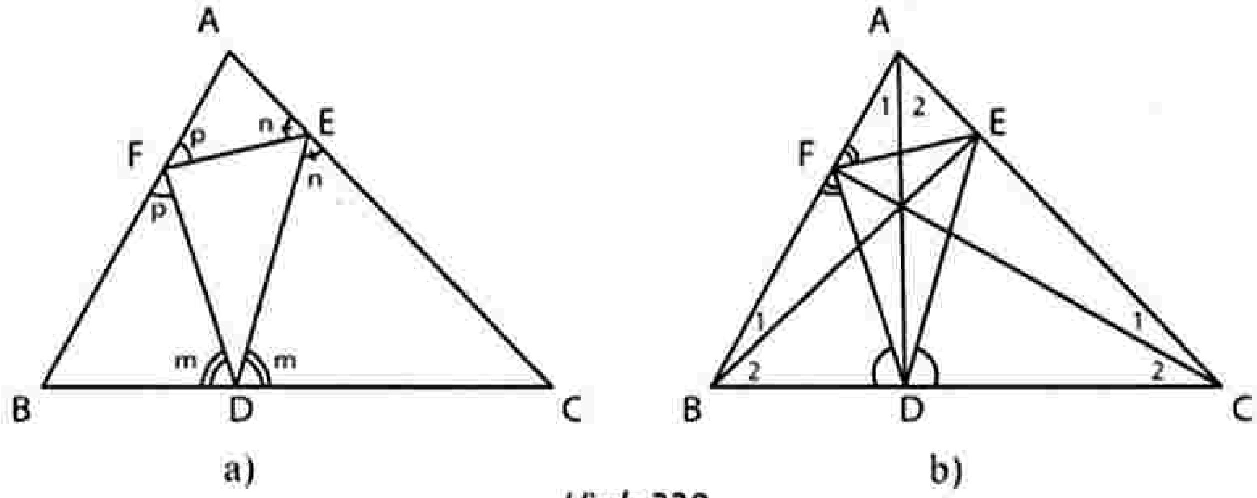
$\widehat{CBE} = \widehat{KAB}$ nên $\Delta CBE \backsim \Delta KAB$ (c.g.c)

Hình 238

$\Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{K_2} \Rightarrow \widehat{C_2} + \widehat{CBK} = \widehat{K_2} + \widehat{CBK} = 90^o \Rightarrow CE \perp BK$.

KH, BF, CE là ba đường cao của ΔKBC nên chúng đồng quy.

80. a) *(h.239a)* Đặt các góc bằng nhau và bằng m, n, p như hình vẽ.



Hình 239

Ta có $2m + 2n + 2p = 360^o$ (bằng 540^o trừ đi tổng ba góc của ΔDEF)

$\Rightarrow m + n + p = 180^o \Rightarrow \widehat{A} = m$, $\widehat{B} = n$, $\widehat{C} = p$.

Do đó $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g.g).

b) *(h.239b)* $\Delta AEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} \Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta ACF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$. Tương tự $\widehat{A_1} = \widehat{C_2}$, $\widehat{B_2} = \widehat{A_2}$.

Suy ra $\widehat{B_1} + \widehat{A_1} + \widehat{B_2} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2} + \widehat{A_2}$, vậy $AD \perp BC$.

Tương tự $BE \perp AC$, $CF \perp AB$.

81. *(h.240)* a) Theo định lí Ta-lét, tính chất đường phân giác và tam giác đồng dạng, ta có

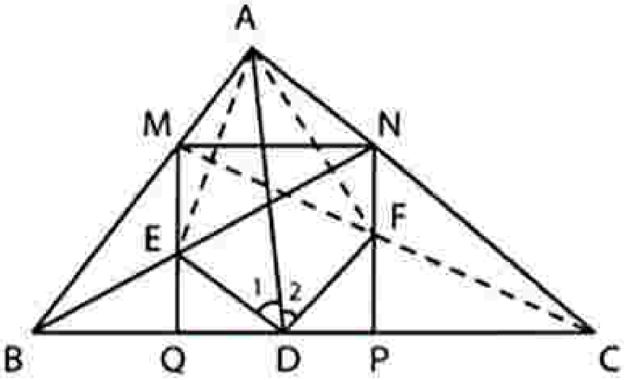
$$\frac{BE}{EN} = \frac{BQ}{QP} = \frac{BQ}{MQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$\Rightarrow$ DE // NC, tức là DE // AC.

b) Do DE // AC nên $\frac{DE}{CN} = \frac{BD}{BC}$

$\Rightarrow DE = \frac{BD}{BC}.CN.$ (1)

Tương tự, $DF = \frac{CD}{BC}.BM.$ (2)



Hình 240

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DE}{DF} = \frac{BD}{CD}.\frac{CN}{BM}$. Ta lại có $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ (do AD là đường phân giác), $\frac{CN}{BM} = \frac{AC}{AB}$ (do MN // BC) nên $\frac{DE}{DF} = 1$, tức là DE = DF.

c) Ta có $\hat{D}_1 = \widehat{DAC} = \widehat{DAB} = \hat{D}_2$

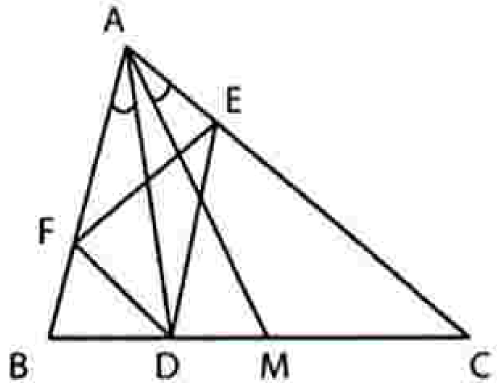
$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta ADF$ (c.g.c) $\Rightarrow$ AE = AF.

82. *(h.241)* a) Ta có $\frac{AE}{AC} = \frac{BD}{BC}$. (1)

$\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{CD}$. (2)

Nhân (1) với (2) được

$\frac{AE}{AF}.\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$. (3)



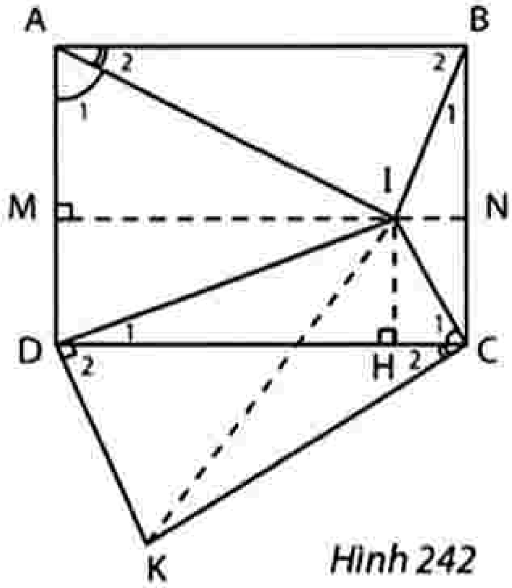
Hình 241

Ta chứng minh được $\frac{BD}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (xem Ví dụ 38) nên từ (3) suy ra $\frac{AE}{AF}.\frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (c.g.c).

b) $\Delta AEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \widehat{AEF} = \hat{B}$. Ta lại có $\widehat{AEF} = \widehat{EFD}$ và $\hat{B} = \widehat{EDC}$ nên $\widehat{EFD} = \widehat{EDC}$.

83. *(h.242)*



Hình 242

a) Qua I kẻ MN ⊥ AD, kẻ IH ⊥ CD.

$\Delta IMA \backsim \Delta IHC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{IM}{IH} = \dfrac{AM}{HC} \Rightarrow \dfrac{DH}{IH} = \dfrac{BN}{IN}$

$\Rightarrow \Delta IDH \backsim \Delta IBN$ (c.g.c)

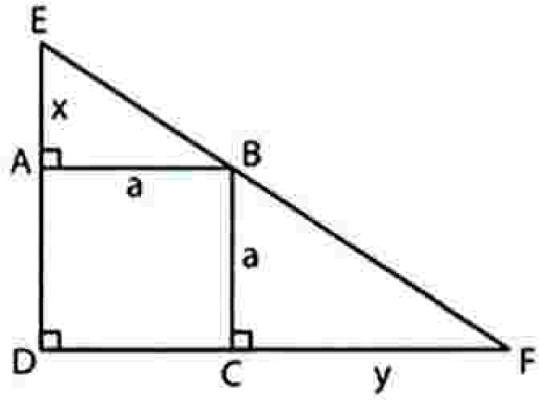
$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$, tức là $\widehat{IDC} = \widehat{IBC}$.

b) Kẻ đường vuông góc với DI tại D, kẻ đường vuông góc với CI tại C, chúng cắt nhau ở K. Do $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ nên $\widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$, do $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$ nên $\widehat{B}_2 = \widehat{D}_2$, $\Delta AIB = \Delta CKD$ (g.c.g) $\Rightarrow S_{AIB} = S_{CKD}$.

$S_{ABCD} = 2(S_{AIB} + S_{CID}) = 2(S_{CKD} + S_{CID}) = 2(S_{IDK} + S_{ICK})$

$= ID.DK + IC.CK = ID.IB + IC.IA$.

84. *(h.243)* Đặt AB = BC = a, AE = x, CF = y.



Hình 243

$\Delta EAB \backsim \Delta BCF \Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{y} \Rightarrow xy = a^2$.

Ta có $BE^2.BF^2 = (x^2 + a^2)(y^2 + a^2)$

$= x^2y^2 + a^2(x^2 + y^2) + a^4 = 2a^4 + a^2(x^2 + y^2)$.

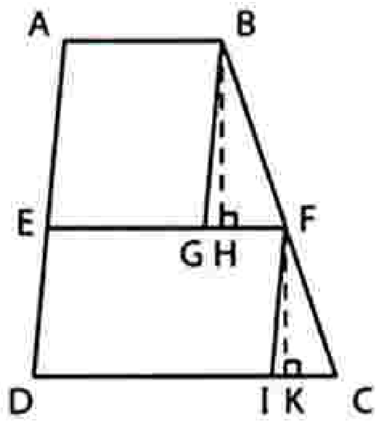
Ta lại có $x^2 + y^2 \geq 2xy = 2a^2$ nên

$BE^2.BF^2 \geq 4a^4$.

$\min(BE.BF) = 2a^2 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ d vuông góc với BD tại B.

85. *(h.244)* Kí hiệu như trên hình vẽ.

Kẻ BG, FI song song với AD.



Hình 244

$\Delta BGF \backsim \Delta FIC$ nên tỉ số hai đường cao bằng tỉ số đồng dạng :

$\dfrac{BH}{FK} = \dfrac{GF}{IC} = \dfrac{25 - 17}{31 - 25} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow BH = \dfrac{4}{3}FK$.

$S_{ABFE} = \dfrac{17 + 25}{2}.\dfrac{4}{3}KF = 28FK$.

$S_{EFCD} = \dfrac{25 + 31}{2}.FK = 28FK$.

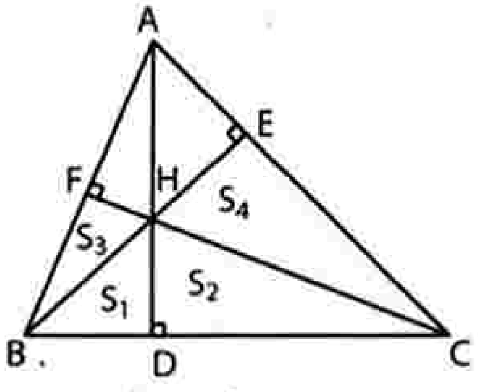
Suy ra điều phải chứng minh.

86. *(h.245)* Giả sử AB < AC thì DB < DC và HB < HC.

DB < DC $\Rightarrow S_1 < S_2$. (1)

ΔFHB $\backsim$ ΔEHC (g.g) mà HB < HC nên $S_3 < S_4$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_1 + S_3 < S_2 + S_4$, tức là $S_{BDHF} < S_{CDHE}$, trái với giả thiết.



Hình 245

Giả sử AB > AC, tương tự $S_{BDHF} > S_{CDHE}$, trái với giả thiết.

Vậy AB = AC.

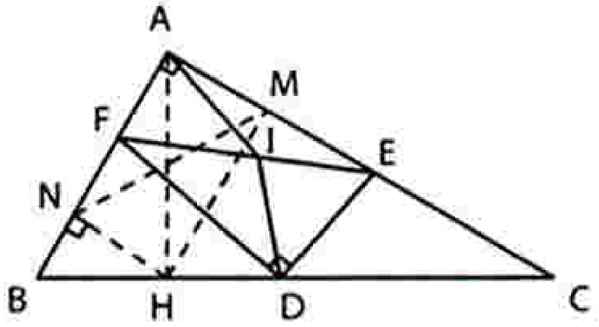
87. *(h.246)*

ΔDEF có các góc không đổi nên có diện tích nhỏ nhất nếu EF nhỏ nhất.

Kẻ AH $\perp$ BC, HM $\perp$ AC, HN $\perp$ AB. Gọi I là trung điểm của EF, ta có

EF = EI + IF = AI + ID $\geq$ AD $\geq$ AH.

minEF = AH $\Leftrightarrow$ D trùng H, E trùng M, F trùng N.



Hình 246

Khi đó ΔDEF là ΔHMN.

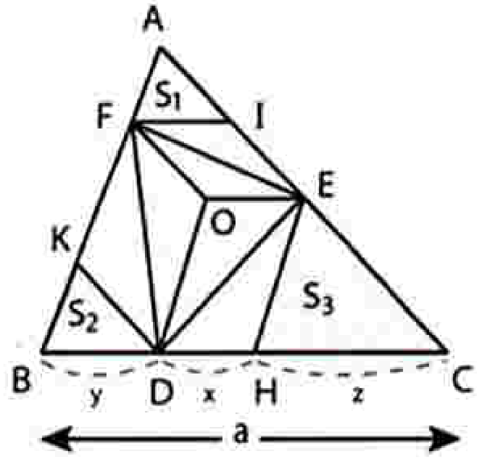
88. *(h.247)* a) Bạn đọc tự giải.

b) Đặt $S_{AFI} = S_1$, $S_{KBD} = S_2$, $S_{EHC} = S_3$.

Ta sẽ chứng minh $S_1 + S_2 + S_3 \geq \dfrac{S}{3}$.

Đặt FI = OE = DH = x, BD = y, HC = z, BC = a.

Các tam giác AFI, KBD, EHC đồng dạng với ΔABC nên $\dfrac{S_1}{S} + \dfrac{S_2}{S} + \dfrac{S_3}{S}$



Hình 247

$$= \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S_{FIEHDK} \leq \frac{2}{3}S \Rightarrow S_{DEF} \leq \frac{S}{3}.$$

$$\max S_{DEF} = \frac{S}{3} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \text{O là trọng tâm của } \Delta ABC.$$

Chuyên đề 5

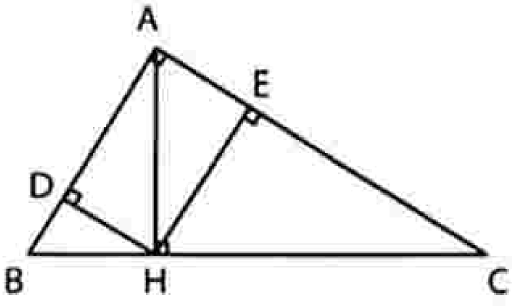
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

89. *(h.248)* Từ $BD.AB = HB^2$ và $CE.AC = HC^2$

suy ra $\dfrac{BD}{CE}.k = \left(\dfrac{HB}{HC}\right)^2$. (1)

Từ $HB.BC = AB^2$ và $HC.BC = AC^2$ suy ra

$\dfrac{HB}{HC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 = k^2$. (2)



Hình 248

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{BD}{CE}.k = k^4 \Rightarrow \dfrac{BD}{CE} = k^3$.

90. Xét ΔABC vuông tại A, đường cao AH = h, diện tích S (h.248).

$\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \geq 2.\dfrac{1}{AB}.\dfrac{1}{AC} = \dfrac{2}{2S} = \dfrac{1}{S} \Rightarrow h^2 \leq S$.

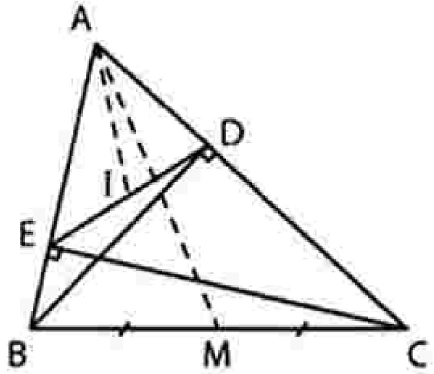
$\min S = h^2 \Leftrightarrow AB = AC$.

91. *(h.249)* $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \left(= \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{2}$ (tỉ số hai trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng).

Vậy $AI = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{m}{2}$.



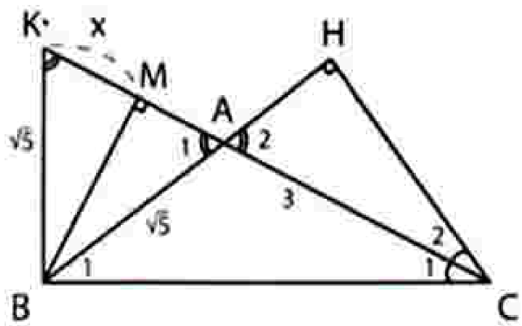
Hình 249

92. *(h.250)* Kẻ $CH \perp AB$. Do $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 < 90^\circ$ nên A nằm giữa B và H. Ta có

$\hat{B}_1 + \widehat{BCH} = 90^\circ = \hat{B}_1 + 2\hat{C}_1$

$\Rightarrow \widehat{BCH} = 2\hat{C}_1 \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2$.

Đường vuông góc với BC tại B cắt CA ở K.



Hình 250

Ta có $\widehat{K} = \widehat{A}_1$ (cùng phụ với $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$)

$\Rightarrow \Delta ABK$ cân.

Kẻ $BM \perp AK$. Đặt $KM = MA = x$.

Từ $BK^2 = KM.KC$ suy ra $\left(\sqrt{5}\right)^2 = x(2x + 3) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(2x + 5) = 0$. Do $x > 0$ nên $x = 1$, do đó $KC = 5$ cm.

Suy ra $\sin C = \dfrac{BK}{KC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

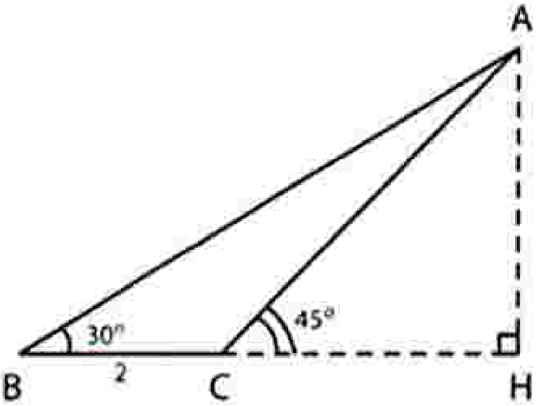
93. *(h.251)* Kẻ đường cao AH. Ta có

$BC = BH - CH = AH\cot 30^\circ - AH$

$= AH\left(\sqrt{3} - 1\right) \Rightarrow AH = \dfrac{BC}{\sqrt{3} - 1}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$ (cm).

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.2(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} + 1\ (cm^2)$.



Hình 251

Chuyên đề 6

ĐƯỜNG TRÒN. ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG THẲNG. ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG TRÒN

94. *(h.252)* Gọi H là giao điểm của OC và AD.

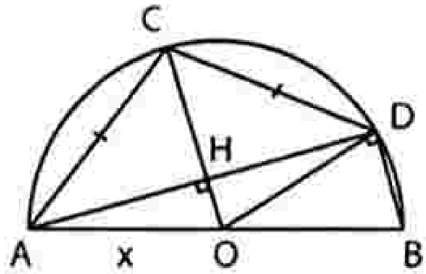
Ta có CA = CD và OA = OD nên $OC \perp AD$.

Đặt OA = OC = x.

Từ $AC^2 - HC^2 = OA^2 - OH^2$ suy ra

$30^2 - (x - 7)^2 = x^2 - 7^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 450 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 25)(x + 18) = 0$; OA = 25 cm.



Hình 252

95. *(h.253)*

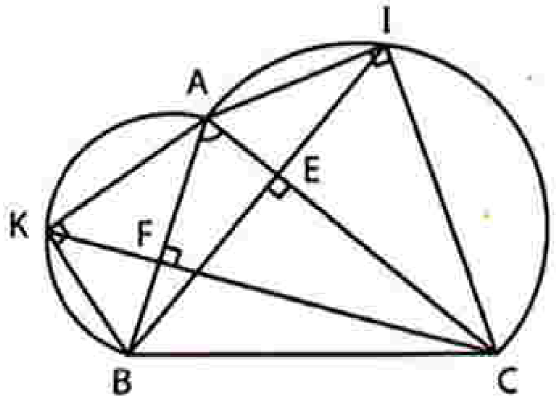
ΔAIC vuông nên $AI^2 = AC.AE$. (1)

ΔAKB vuông nên $AK^2 = AB.AF$. (2)

$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ $(= \cos\widehat{A})$

$\Rightarrow AC.AE = AB.AF$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AI = AK$.



Hình 253

96. *(h.254)* Gọi D' là giao điểm của DG và AB. Kẻ $CC' \perp AB$.

$S_{ACBG} = S_{ABC} + S_{ABG}$

$= AB.\dfrac{CC'}{2} + AB.\dfrac{GD'}{2}$

$= AB.\dfrac{CC' + DD'}{2}$ (vì $DD' = GD'$).

Gọi M là trung điểm của CD, kẻ

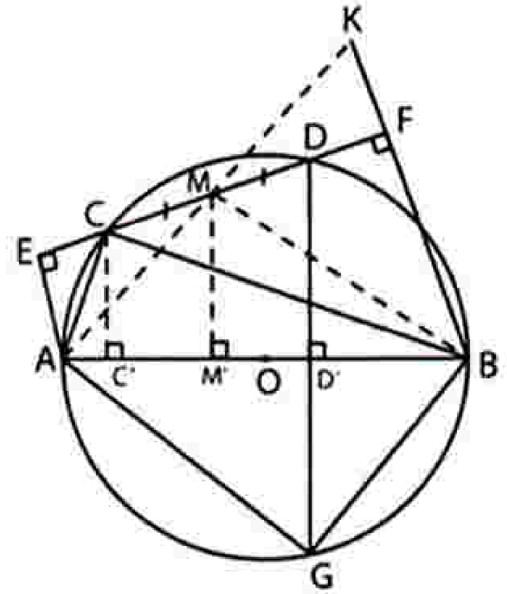
$MM' \perp AB$ thì $MM' = \dfrac{CC' + DD'}{2}$

nên $S_{ACBG} = AB.MM' = 2S_{AMB}$. (1)

Gọi K là giao điểm của AM và BF, dễ chứng minh

$\Delta MEA = \Delta MFK$ nên $S_{AEFB} = S_{ABK} = 2S_{AMB}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ACBG} = S_{AEFB}$.



Hình 254

97. *(h.255)*

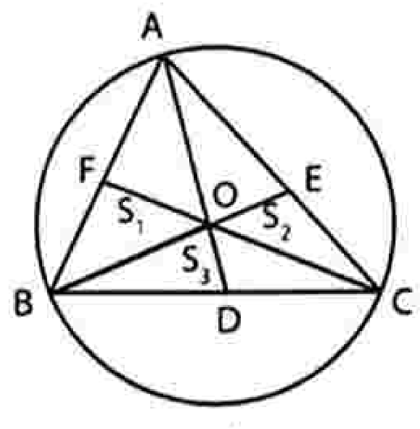
Đặt $S_{AOB} = S_1$, $S_{AOC} = S_2$, $S_{BOC} = S_3$.

Ta có $\dfrac{OD}{AO} = \dfrac{S_{ODB}}{S_1}$

$= \dfrac{S_{ODC}}{S_2} = \dfrac{S_{ODB} + S_{ODC}}{S_1 + S_2} = \dfrac{S_3}{S_1 + S_2}$.

$\Rightarrow \dfrac{OD}{R} = \dfrac{S_3}{S_1 + S_2}$.

Tương tự $\dfrac{OE}{R} = \dfrac{S_2}{S_1 + S_3}$, $\dfrac{OF}{R} = \dfrac{S_1}{S_2 + S_3}$.



Hình 255

Suy ra $\dfrac{OD + OE + OF}{R} = \dfrac{S_1}{S_2 + S_3} + \dfrac{S_2}{S_1 + S_3} + \dfrac{S_3}{S_1 + S_2}$.

Bạn đọc tự chứng minh $\dfrac{S_1}{S_2 + S_3} + \dfrac{S_2}{S_1 + S_3} + \dfrac{S_3}{S_1 + S_2} \geq \dfrac{3}{2}$.

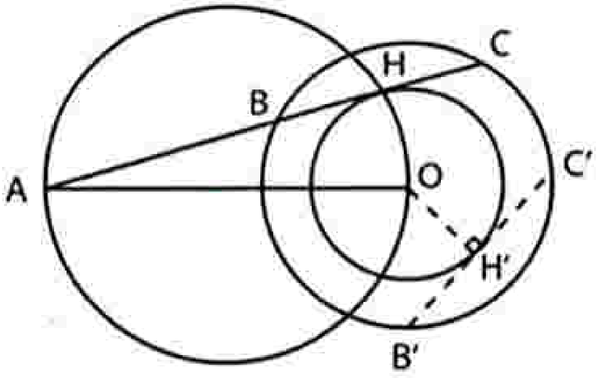
Do đó $OD + OE + OF \geq \dfrac{3}{2}R$. Xảy ra đẳng thức $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

98. *(h.256) Cách dựng* : Dựng dây $B'C' = a$, dựng $OH' \perp B'C'$.

Dựng đường tròn đường kính AO, cắt đường tròn (O ; OH') tại H.

AH cắt (O) tại B và C.

Chứng minh: Bạn đọc tự giải.



Hình 256

99. *(h.257)* $S_{MDCE} = MD.ME$.

Đặt $\widehat{MAD} = \widehat{BME} = \alpha$, ta có

$MD = MA\sin\alpha = a\sin\alpha$.

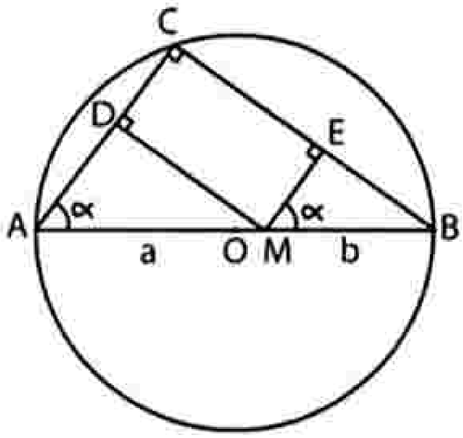
$ME = MB\cos\alpha = b\cos\alpha$.

$$S_{MDCE} = ab\sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{ab}{2}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= \frac{ab}{2}.$$

$\max S = \dfrac{ab}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha$

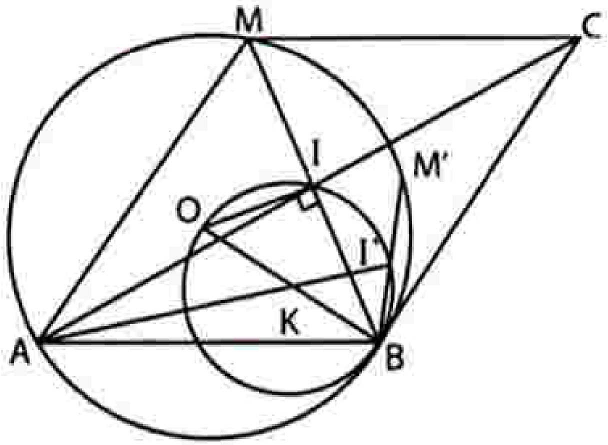
$\Leftrightarrow \alpha = 45^\circ \Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của cung AB.



Hình 257

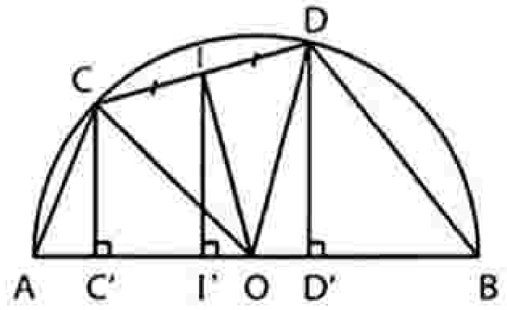
100. *(h.258)* Gọi I là giao điểm của AC và BM. Do MI = IB nên $OI \perp BM$, I chuyển động trên đường tròn đường kính OB.

AC lớn nhất $\Leftrightarrow$ AI lớn nhất $\Leftrightarrow$ đoạn AI đi qua trung điểm K của OB. Khi đó M ở vị trí M' đối xứng với B qua điểm I' vừa xác định.



Hình 258

101. *(h.259)* ΔCOD đều $\Rightarrow S_{COD} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. (1)



Hình 259

Đặt $S_{ACDB} = S$ thì S lớn nhất $\Leftrightarrow S_{AOC} + S_{BOD}$ lớn nhất.

Gọi I là trung điểm của CD. Kẻ II', CC', DD' vuông góc với AB.

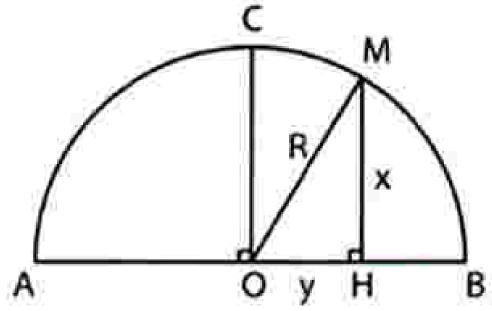
Ta có $S_{AOC} + S_{BOD} = R.\frac{CC' + DD'}{2} = R.II'$. (2)

Ta lại có $II' \leq IO = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $S \leq \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + R.\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

$\max S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$ I' trùng O $\Leftrightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 60^o$.

102. *(h.260)* Đặt MH = x, OH = y.



Hình 260

a) Chu vi ΔMOH bằng $R + x + y$. Ta có

$(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2R^2$.

Chu vi ΔMOH lớn nhất bằng $R + R\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \widehat{BOM} = 45^o$.

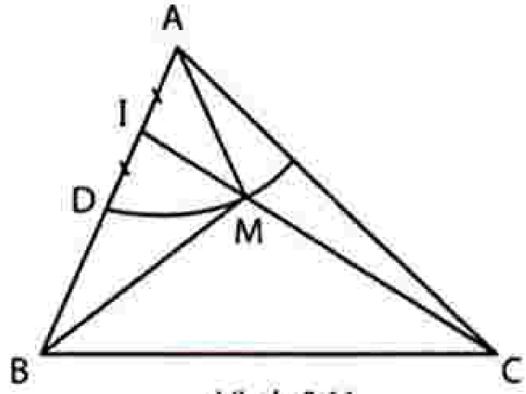
b) $2S_{MOH} = MH.OH = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{R^2}{2}$.

$\max S = \frac{R^2}{4} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \widehat{BOM} = 45^o$.

103. *(h.261)* Giải tương tự Ví dụ 48.

Dựng D là trung điểm của AB, I là trung điểm của AD.

Dựng M là giao điểm của đoạn IC và đường tròn (A ; AD).



Hình 261

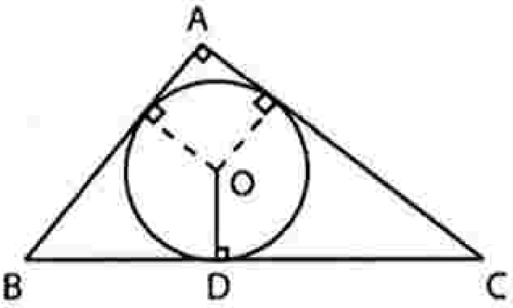
104. *(h.262)* a) Đặt $AC = b$, $AB = c$.

Ta có $b^2 + c^2 = 13^2 = 169$. (1)

Do $b + c - BC = 2r$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp) nên $b + c = 4 + 13 = 17$. (2)

Từ (1) và (2) tính được $2bc = 120$.

Vậy $S_{ABC} = 30\text{ cm}^2$.



Hình 262

b) Đặt $BD = 2k$, $DC = 3k$ thì $BC = 5k$.

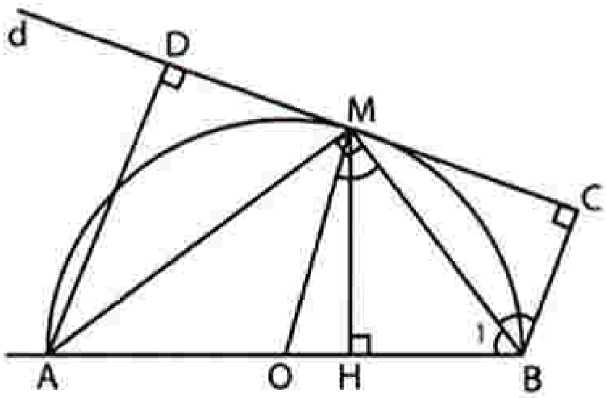
Từ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ta có $(2k + 2)^2 + (3k + 2)^2 = (5k)^2$.

Tìm được $k = 2$, $BC = 10$ (cm).

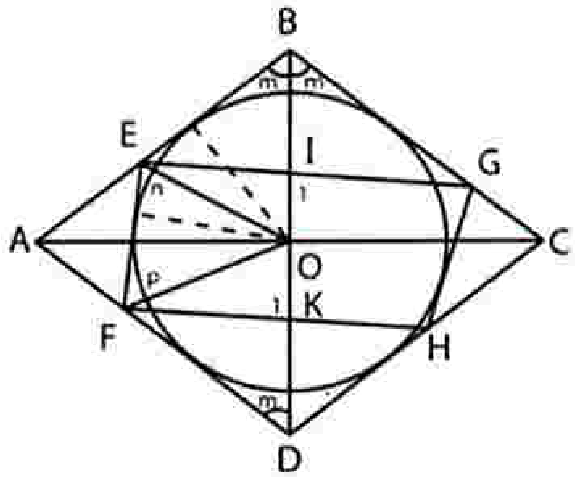
105. *(h.263)* Kẻ $MH \perp AB$.

Ta có $\widehat{MBC} = \widehat{OMB} = \hat{B}_1 \Rightarrow MH = MC = MD$.

$CD^2 = (2MH)^2 = 4MH^2 = 4AH.BH = 4AD.BC$.



Hình 263



Hình 264

106. *(h.264)*

a) Đặt $\widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{ODA} = m$, $\widehat{OEF} = \widehat{OEB} = n$, $\widehat{OFE} = \widehat{OFD} = p$.

Tứ giác BEFD có $2(m + n + p) = 360^\circ \Rightarrow m + n + p = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BOE} = p$.

$\Delta BOE \backsim \Delta DFO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BE}{OD} = \dfrac{OB}{DF} \Rightarrow BE.DF = OB.OD$. (1)

b) Tương tự $BG.DH = OB.OD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE.DF = BG.DH \Rightarrow \dfrac{BE}{DH} = \dfrac{BG}{DF} \Rightarrow \Delta BEG \backsim \Delta DHF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{BGE} = \widehat{DFH} \Rightarrow \widehat{BGE} + m = \widehat{DFH} + m \Rightarrow \hat{I}_1 + \hat{K}_1$

(I, K lần lượt là giao điểm của BD với EG, FH) $\Rightarrow EG \parallel FH$.

107. a) Bạn đọc tự chứng minh bằng cách xét diện tích các tam giác.

b) Từ $r = \dfrac{S}{p}$, $R_1 - r = R_2 + R_3$ và câu a) suy ra

$$\frac{S}{p-a} - \frac{S}{p} = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}$$

$$\Rightarrow \frac{p-(p-a)}{p(p-a)} = \frac{p-c+p-b}{(p-b)(p-c)} \Rightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}$$

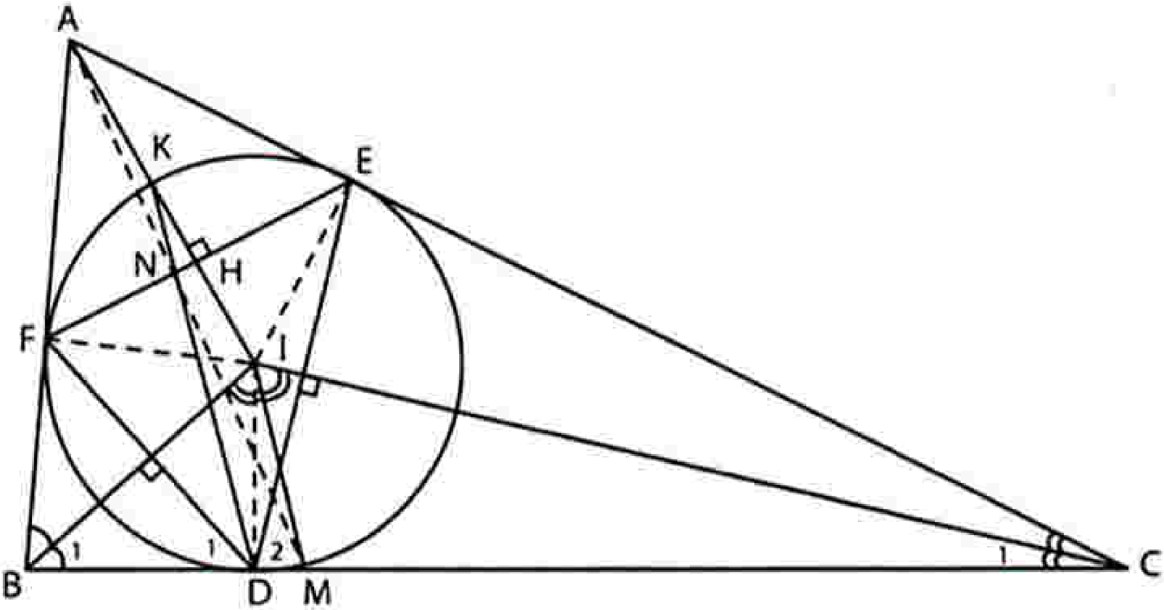
$$\Rightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c) \Rightarrow 2p(2p-2a) = (2p-2b)(2p-2c)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a) = (a+c-b)(a+b-c)$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 - a^2 = a^2 - (b-c)^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ.$$

108. *(h.265)* a) Ta sẽ chứng minh $\widehat{IMC} = \widehat{KDC}$. Đặt $\widehat{B}_1 = x$, $\widehat{C}_1 = y$.

Ta có $\widehat{IMC} = \widehat{MIB} + \widehat{B}_1 = \dfrac{180^\circ - x - y}{2} + x = 90^\circ + \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}$. (1)



Hình 265

$$\widehat{KDC} = \widehat{KDE} + \widehat{EDC} = \frac{\overset{\frown}{FDE}}{2} + (90^\circ - y)$$

mà $\widehat{FDE} = 180^\circ - \widehat{D}_1 - \widehat{D}_2 = 180^\circ - (90^\circ - x) - (90^\circ - y) = x + y$

nên $\widehat{KDC} = \dfrac{x+y}{2} + (90^\circ - y) = 90^\circ + \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IMC} = \widehat{KDC} \Rightarrow IM \mathbin{//} KD$.

b) IM // KD $\Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{IDK} = \widehat{IKD}$, $\Delta KHN \backsim \Delta IDM$ (g.g).

c) Ta sẽ chứng minh $\dfrac{KN}{IM} = \dfrac{KA}{IA}$. Từ câu b) suy ra $\dfrac{KN}{IM} = \dfrac{KH}{ID} = \dfrac{KH}{IK}$. (3)

Ta có $IH.IA = IE^2 = IK^2 \Rightarrow \dfrac{IH}{IK} = \dfrac{IK}{IA} \Rightarrow \dfrac{IK - IH}{IK} = \dfrac{IA - IK}{IA}$

$\Rightarrow \dfrac{KH}{IK} = \dfrac{KA}{IA}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{KN}{IM} = \dfrac{KA}{IA}$. Từ đó $\Delta AKN \backsim \Delta AIM$ (c.g.c).

d) Từ câu c) suy ra $\widehat{KAN} = \widehat{IAM}$. Suy ra A, N, M thẳng hàng.

109. *(h.266)*

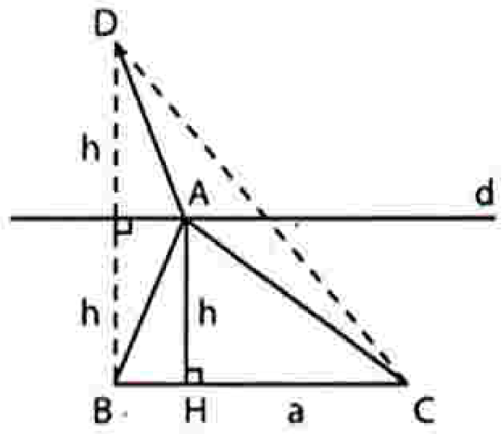
Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp.

$S_{ABC} = r.\dfrac{AB + BC + CA}{2}$ mà

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ah$ không đổi nên r lớn nhất

$\Leftrightarrow AB + BC + CA$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow AB + AC$ nhỏ nhất. Bạn đọc tự chứng minh khi đó ΔABC cân tại A.



Hình 266

110. *(h.267)*

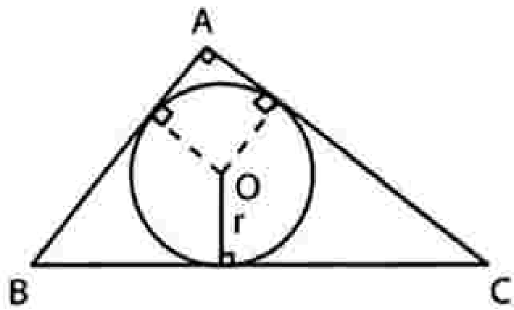
Ta có $2BC^2 = 2(AB^2 + AC^2) \geq (AB + AC)^2$

$= (BC + 2r)^2 \Rightarrow BC\sqrt{2} \geq BC + 2r$

$\Rightarrow BC \geq \dfrac{2r}{\sqrt{2} - 1} = 2r(\sqrt{2} + 1)$.

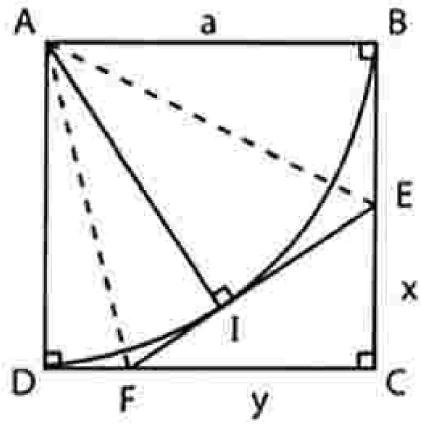
$\min BC = 2r(\sqrt{2} + 1)$

$\Leftrightarrow AB = AC = r(\sqrt{2} + 2)$.



Hình 267

111. *(h.268)*



Hình 268

Đặt CE = x, CF = y. Ta có $S_{CEF} = \frac{1}{2}xy$.

Do $\widehat{EAF} = 45^o$ nên ta chứng minh được

CE + CF + EF = CB + CD = 2a (xem Bài tập 21).

Suy ra $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$. (1)

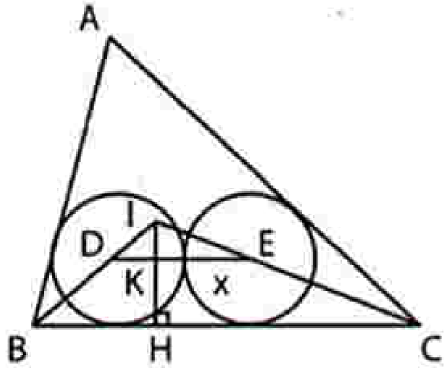
Ta lại có $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$ nên

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy} = (2 + \sqrt{2})\sqrt{xy}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{xy} \leq \frac{2a}{2 + \sqrt{2}} = a(2 - \sqrt{2})$.

S_{CEF} lớn nhất $\Leftrightarrow$ x = y. Khi đó I là giao điểm của cung BD và đường chéo AC.

112. *(h.269)* Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.



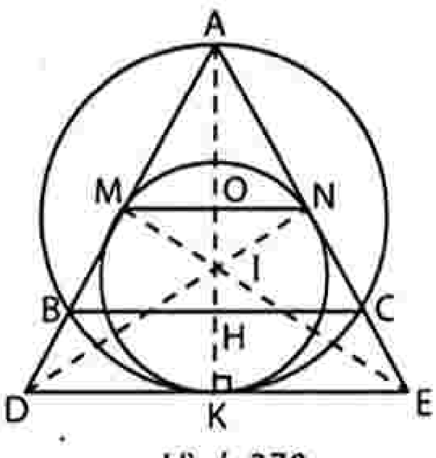
Hình 269

Kẻ IH ⊥ BC, IH cắt DE ở K.

Ta có $\frac{IK}{IH} = \frac{DE}{BC}$ nên $\frac{6 - x}{6} = \frac{2x}{24}$

$\Leftrightarrow$ x = 4 (cm).

113. *(h.270)* Gọi K là tiếp điểm của (I) và cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại K cắt AB, AC theo thứ tự ở D, E. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác đều ADE nên M, N lần lượt là trung điểm của AD, AE, do đó MN đi qua O.



Hình 270

Gọi AH là đường cao của ΔABC, ta có

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AO}{AH} \Rightarrow \frac{MN}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = 4 \text{ (cm)}.$$

114. *(h.271)* Ta có AB = 1 + 2 = 3, AC = 1 + 3 = 4,

BC = 2 + 3 = 5 nên $\widehat{BAC} = 90^0$. Vẽ hình chữ nhật ABO'C.

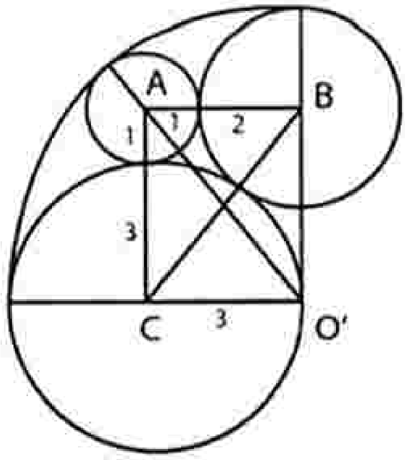
Do O'C = AB = 3 nên O'∈ (C). Vẽ đường tròn (O' ; 6).

Đường tròn (A ; 1) tiếp xúc trong với (O' ; 6) vì O'A = 6 − 1.

Đường tròn (B ; 2) tiếp xúc trong với (O' ; 6) vì O'B = 6 − 2.

Đường tròn (C ; 3) tiếp xúc trong với (O' ; 6) vì O'C = 6 − 3.

Vậy O' trùng O và R = 6 cm.

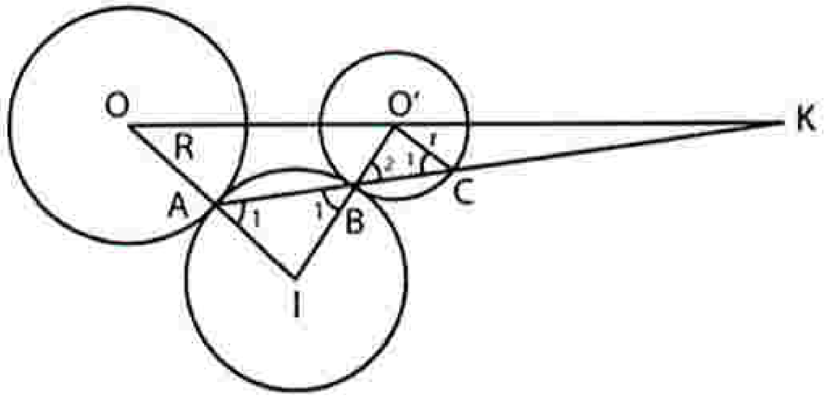


Hình 271

115. *(h.272)* Gọi K là giao điểm của AB và OO'.

Gọi C là giao điểm thứ hai của AB với (O'). Ta có $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1$

$\Rightarrow$ O'C // OI $\Rightarrow \dfrac{KO'}{KO} = \dfrac{O'C}{OA} = \dfrac{r}{R} \Rightarrow$ K cố định.



Hình 272

116. *(h.273)* Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của OO' với CD, GH.

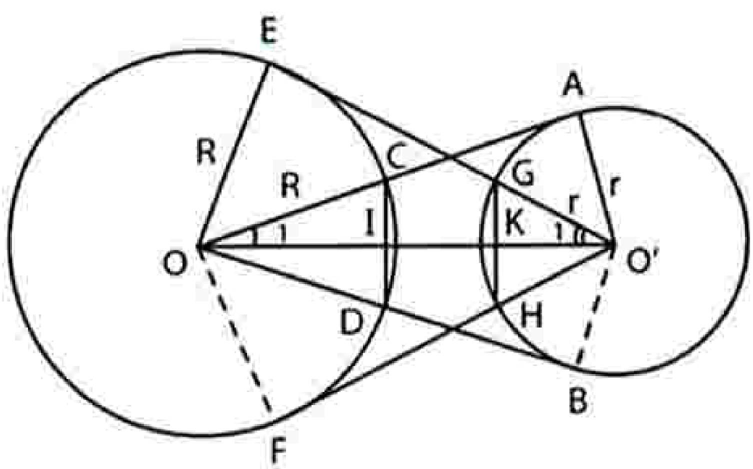
Ta có

$CI = R\sin\hat{O}_1 = R.\dfrac{r}{OO'}$,

$GK = r\sin\widehat{O'_1} = r.\dfrac{R}{OO'}$

nên CI = GK.

Suy ra CD = GH.

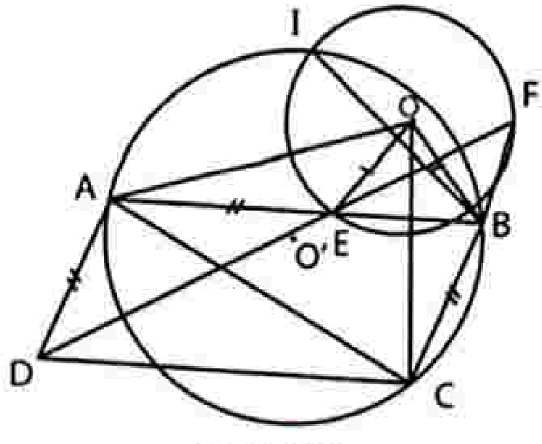


Hình 273

117. *(h.274)* Ta đã có IB ⊥ OO'. Sẽ chứng minh OO' ⊥ AC bằng cách chứng minh O'A = O'C (đã có) và OA = OC.

Xét ΔOEA và ΔOBC, ta có OE = OB, AE = AD = BC, cần chứng minh $\widehat{OEA} = \widehat{OBC}$.

Do BE = BF nên OB là đường trung trực của EF ⇒ $\widehat{OBF} = \widehat{OBE} = \widehat{OEB}$



Hình 274

⇒ $\widehat{OBC} = \widehat{OEA}$ (bù với hai góc trên).

ΔOEA = ΔOBC (c.g.c) ⇒ OA = OC.

Kết hợp với O'A = O'C ta có OO' là đường trung trực của AC.

Ta lại có OO' là đường trung trực của IB nên AC // IB.

118. *(h.275)* Gọi A, B, C theo thứ tự là tiếp điểm của các đường tròn (O), (I), (K) trên d.

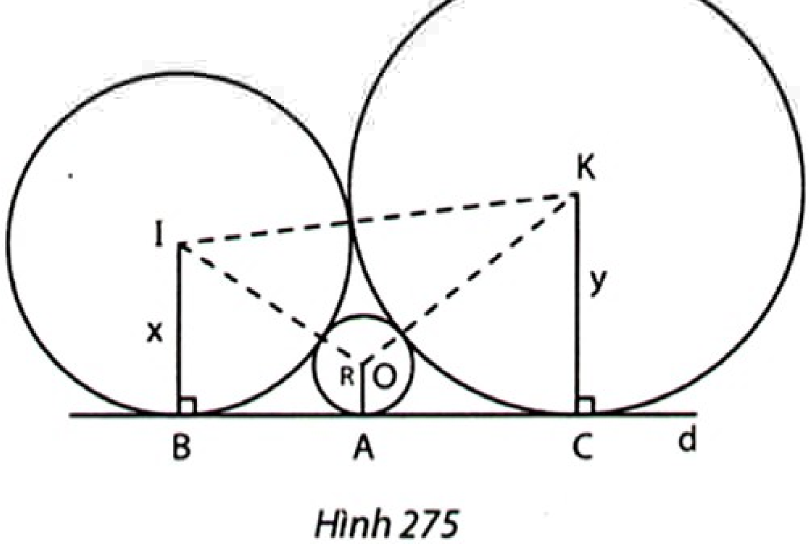
Gọi x và y theo thứ tự là bán kính của các đường tròn (I), (K).

Từ AB + AC = BC suy ra

$$2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{Ry} = 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy = \left(\sqrt{Rx} + \sqrt{Ry}\right)^2 \geq 4\sqrt{R^2xy} = 4R\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} \geq 4R \Rightarrow xy \geq 16R^2.$$

$\min(xy) = 16R^2 \Leftrightarrow x = y = 4R.$



Hình 275

119. *(h.276)* Gọi (I') là đường tròn đối xứng với đường tròn (I) qua AB.

Đặt x và y là bán kính của các đường tròn (I) và (K).

Ta có $I'K = CI' + CK = x\sqrt{2} + y\sqrt{2}$.

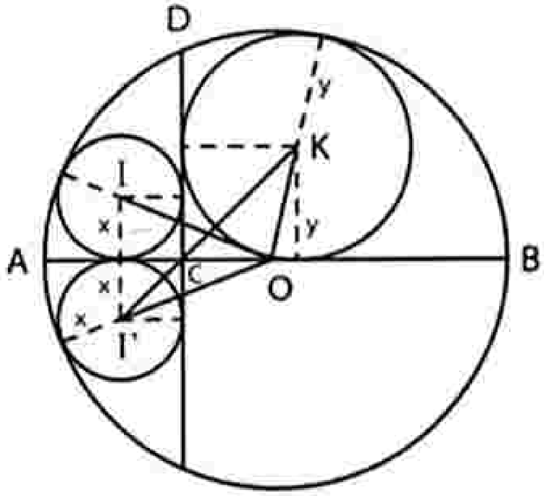
Từ $I'K \le I'O + OK$ suy ra

$x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \le (R - x) + (R - y)$

$\Rightarrow (\sqrt{2} + 1)(x + y) \le 2R$

$\Rightarrow x + y \le \dfrac{2R}{\sqrt{2}+1} = 2R(\sqrt{2} - 1)$.

$\max(x + y) = 2R(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow$ C trùng O.



Hình 276.

Chuyên đề 7

ĐƯỜNG TRÒN VÀ GÓC

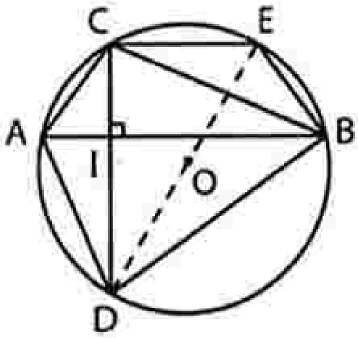
120. *(h.277)*

Kẻ đường kính DE thì CE // AB $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$.

$BD^2 + AC^2 = BD^2 + BE^2 = DE^2 = 4R^2$.

Tương tự $AD^2 + BC^2 = 4R^2$.

Vậy $BD^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 = 8R^2$.



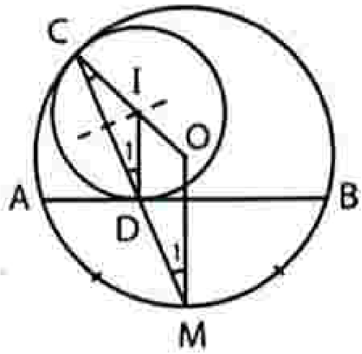
Hình 277

121. *(h.278)* a) Tâm I là giao điểm của OC và đường trung trực của CD.

b) $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB} \Rightarrow OM \perp AB$. Ta có $\widehat{M}_1 = \widehat{C} = \widehat{I}_1$

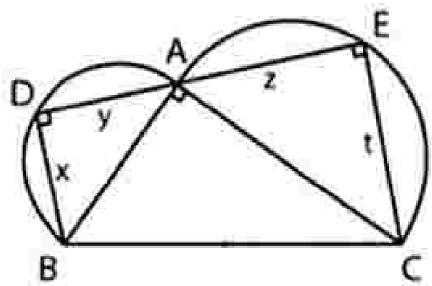
$\Rightarrow$ ID // OM.

Vậy $ID \perp AB$ nên (I) tiếp xúc với AB tại D.



Hình 278

122. *(h.279)* Ta có $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^o$. Đặt BD = x, DA = y, AE = z, EC = t.



Hình 279

a) S_{BCED} lớn nhất

$\Leftrightarrow S_{ABD} + S_{ACE}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(xy + zt)$ lớn nhất.

Ta có $xy \le \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{AB^2}{2}$; $zt \le \frac{z^2 + t^2}{2} = \frac{AC^2}{2}$.

Xảy ra được đồng thời xy lớn nhất (khi đó D là điểm giữa cung AB) và zt lớn nhất (khi đó E là điểm chính giữa cung AC).

b) Chu vi BCED lớn nhất $\Leftrightarrow x + y + z + t$ lớn nhất.

Ta có $(x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2) = 2AB^2 \Rightarrow x + y \le AB\sqrt{2}$.

Tương tự $z + t \le AC\sqrt{2}$. Suy ra $x + y + z + t \le \sqrt{2}(AB + AC)$.

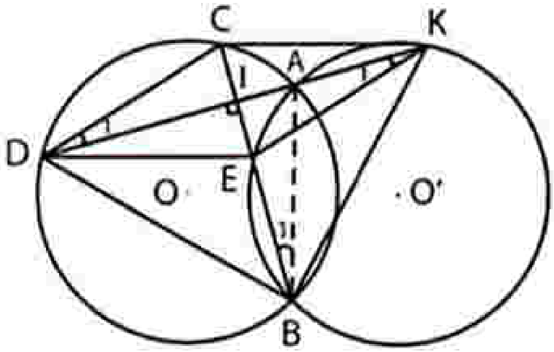
Xảy ra được đồng thời x + y lớn nhất (khi đó D là điểm chính giữa cung AB) và z + t lớn nhất (khi đó E là điểm chính giữa của cung AC).

123. *(h.280)* Gọi I là giao điểm của BC và DK.

$\widehat{BDA} = \widehat{BKA}$ (bằng nửa số đo hai cung AB bằng nhau) $\Rightarrow \Delta BDK$ cân $\Rightarrow$ đường cao BI là đường trung tuyến $\Rightarrow$ ID = IK. (1)

$\widehat{D_1} = \widehat{K_1}$ (cùng bằng $\widehat{B_1}$). $\Delta IDC = \Delta IKE$ (g.c.g) $\Rightarrow$ IC = IE. (2)

Từ (1), (2) và CE ⊥ DK suy ra CDEK là hình thoi.

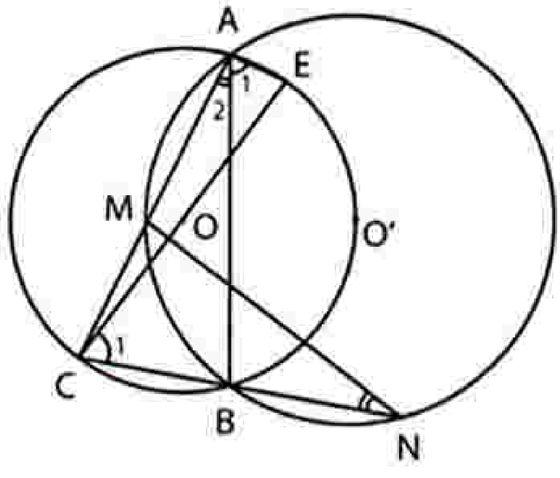


Hình 280

124. *(h.281)* Giả sử O nằm trong góc ACB (các trường hợp khác tương tự).

Vẽ đường kính COE. Ta có $\widehat{C_1} = \widehat{A_1}$, $\widehat{N} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{C_1} + \widehat{N} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^o$.

Suy ra OC ⊥ MN.



Hình 281

125. *(h.282)* $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow OD \perp BC$.

Do $\widehat{A} = 60^o$ nên $\widehat{COD} = 60^o$.

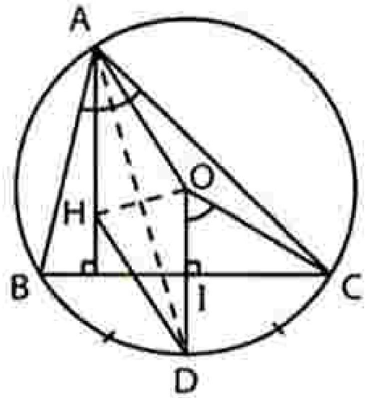
Gọi I là giao điểm của OD và BC thì

$OI = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OD.$ (1)

Dễ chứng minh $OI = \frac{1}{2}AH.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AH = OD. Tứ giác AHDO có AH = OD, AH // OD nên là hình bình hành, lại có OA = OD nên là hình thoi.

Vậy O đối xứng với H qua AD.



Hình 282

126. *(h.283)*

Lấy E đối xứng với B qua M thì AE // MC

và DE = MD – ME = MD – MB. (1)

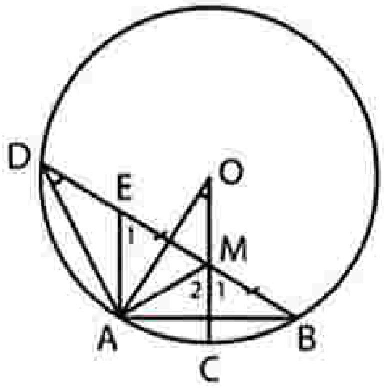
Sẽ chứng minh AD = 2DE.

Ta có $\widehat{D} = \widehat{O}$, $\widehat{E}_1 = \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

nên ΔADE ∽ ΔAOM (g.g)

$\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{OA}{OM} = \frac{OC}{OM} = 2.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AD = 2(MD – MB).



Hình 283

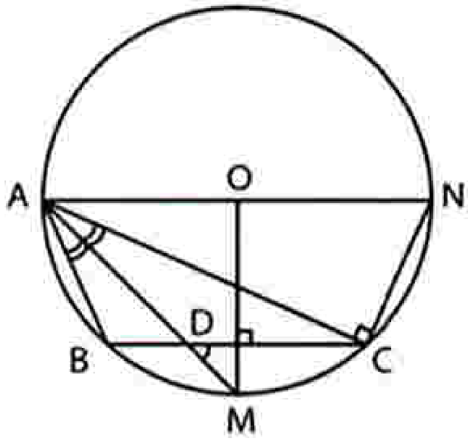
127. *(h.284)* Gọi M là giao điểm của AD với (O),

ta có OM ⊥ BC. Do $\widehat{MDC} = 45^o$

nên $\widehat{M} = 45^o \Rightarrow \widehat{AOM} = 90^o$.

Kẻ đường kính AON. Do AN // BC nên AB = CN.

Do đó $AB^2 + AC^2 = CN^2 + AC^2 = AN^2 = 4R^2$.



Hình 284

128. *(h.285)* Vẽ dây CE ⊥ AB.

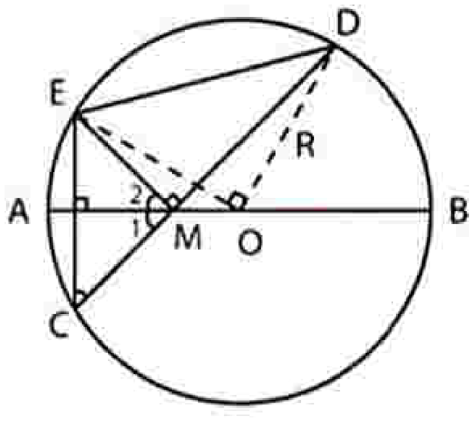
Ta có $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 45^o$ nên $\widehat{DME} = 90^o$,

$MC^2 + MD^2 = ME^2 + MD^2 = DE^2.$ (1)

Do $\widehat{C} = 45^o$ nên $\widehat{DOE} = 90^o$,

suy ra $DE^2 = 2R^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MC^2 + MD^2 = 2R^2$.

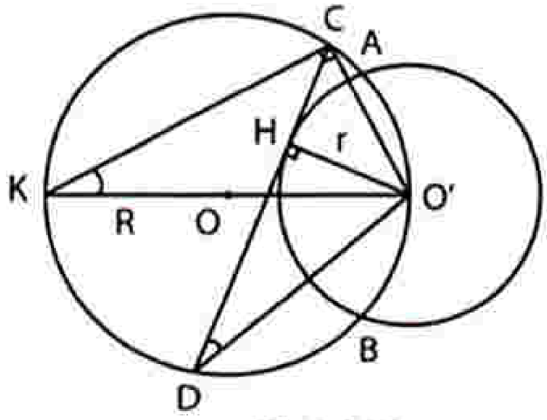


Hình 285

129. *(h.286)* Kẻ đường kính O'OK. Gọi H là tiếp điểm của CD với (O').

$\Delta O'CK \backsim \Delta O'HD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{O'C}{O'H} = \dfrac{O'K}{O'D}$

$\Rightarrow O'C.O'D = O'K.O'H = 2Rr.$



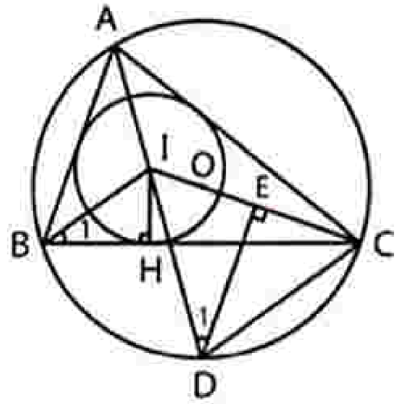
Hình 286

130. *(h.287)* Dễ chứng minh DC = DI. Gọi E là trung điểm của IC thì $DE \perp IC$.

$\Delta IBH \backsim \Delta IDE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{IH}{IE} = \frac{r}{\frac{1}{2}IC} = \frac{2r}{IC}$$

$$\Rightarrow \frac{IB.IC}{ID} = 2r.$$



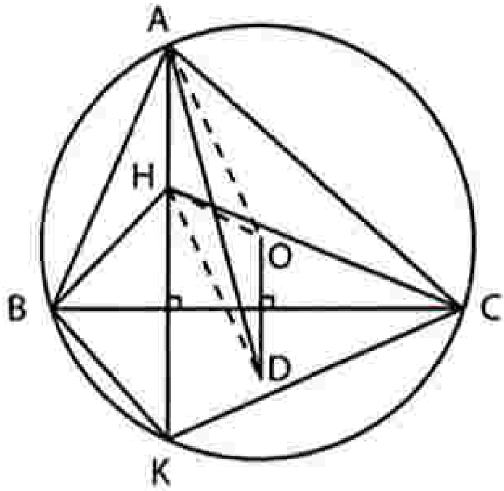
Hình 287

131. *(h.288)* Gọi K là giao điểm của AH và (O), dễ chứng minh bổ đề K đối xứng với H qua BC.

Do đó đường tròn (D) ngoại tiếp ΔHBC đối xứng với đường tròn (O) qua BC, suy ra D đối xứng với O qua BC.

Dễ chứng minh AH = OD, lại có AH // OD nên AHDO là hình bình hành, do đó AD đi qua trung điểm của OH.

Tương tự BE, CF cũng đi qua trung điểm của OH.



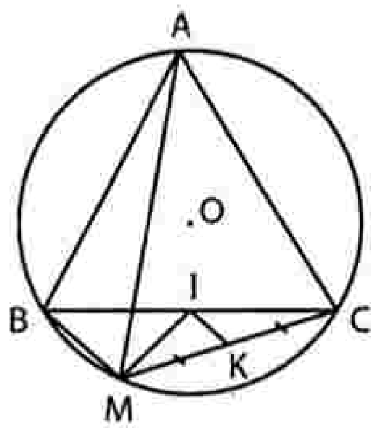
Hình 288

132. *(h.289)*

Gọi K là trung điểm của MC.

Ta có $MI < IK + MK = \dfrac{MB}{2} + \dfrac{MC}{2}.$

Hãy chứng minh MB + MC = MA.



Hình 289

133. *(h.290)*

Sẽ chứng minh $\frac{KN}{KF} = \frac{EG}{KF}$.

Ta có $\frac{KN}{KF} = \frac{HE}{HF}$ (do HE // KN)

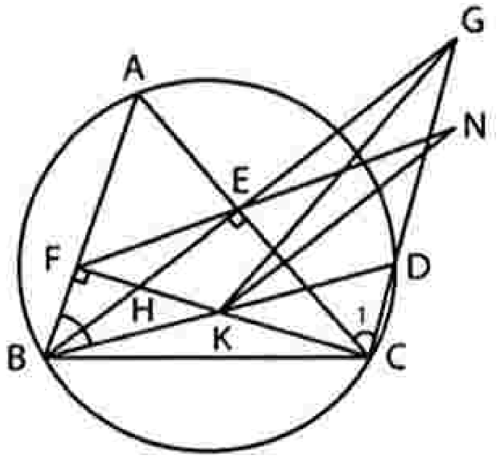
$= \frac{CE}{BF}$ (do $\Delta CHE \backsim \Delta BHF$). (1)

Ta có $\widehat{C}_1 = \widehat{ABD}$, từ đó

$\Delta ECG \backsim \Delta FBK$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CE}{BF} = \frac{EG}{KF}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{KN}{KF} = \frac{EG}{KF} \Rightarrow KN = EG$.

Tứ giác EGNK là hình bình hành nên FE đi qua trung điểm của GK.



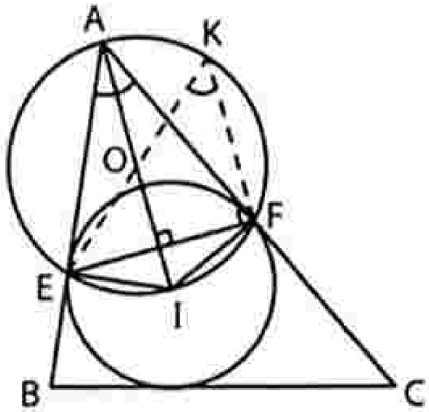
Hình 290

134. *(h.291)*

a) Ta có $S_{AEIF} = \frac{1}{2}IA.EF$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

nên $S_{AEIF} : S_{ABC} = \frac{IA.EF}{bc\sin\widehat{A}}$. (1)

$\frac{IA^2}{bc} = \frac{IA.IA}{bc}$. (2)



Hình 291

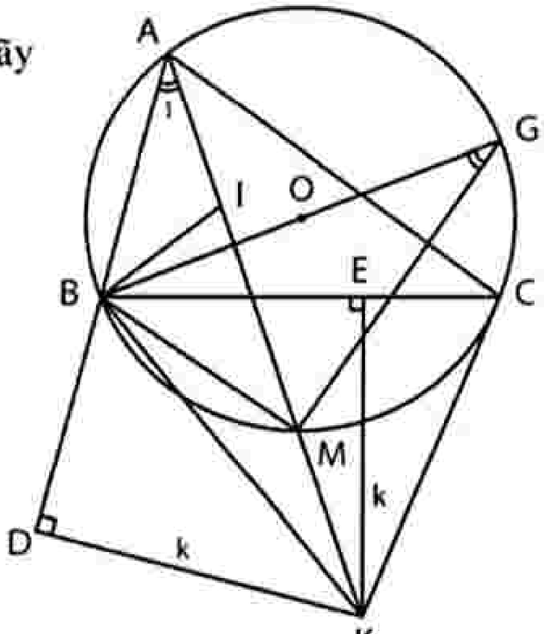
Từ (1) và (2), ta thấy cần chứng minh $\frac{EF}{\sin\widehat{A}} = IA$,

điều này đúng dựa vào bổ đề :

Nếu ΔAEF nội tiếp đường tròn (O ; R) thì $\frac{EF}{\sin\widehat{A}} = 2R$. (Chứng minh bổ đề trên vào hình như sau : Kẻ đường kính EOK. Tam giác EFK vuông nên $EF = EK\sin\widehat{K} = AI\sin\widehat{A}$).

b) Hệ thức lập được là $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$.

135. *(h.292)* a) Gọi M là giao điểm của IK và (O). Hãy chứng minh MB = MI = MC = MK.



Hình 292

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{BIK} = \widehat{BCK}$.

Kẻ KE ⊥ BC, ta có ΔBIK ∽ ΔECK (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{KB}{KE} = \dfrac{KI}{KC}$. (1)

Đặt MI = MB = MK = m, từ (1) suy ra

KB.KC = KI.KE = 2mk. (2)

Kẻ đường kính BG thì $\widehat{BMG} = 90^o$.

Kẻ KD ⊥ AB. Ta có $\widehat{G} = \widehat{A}_1$.

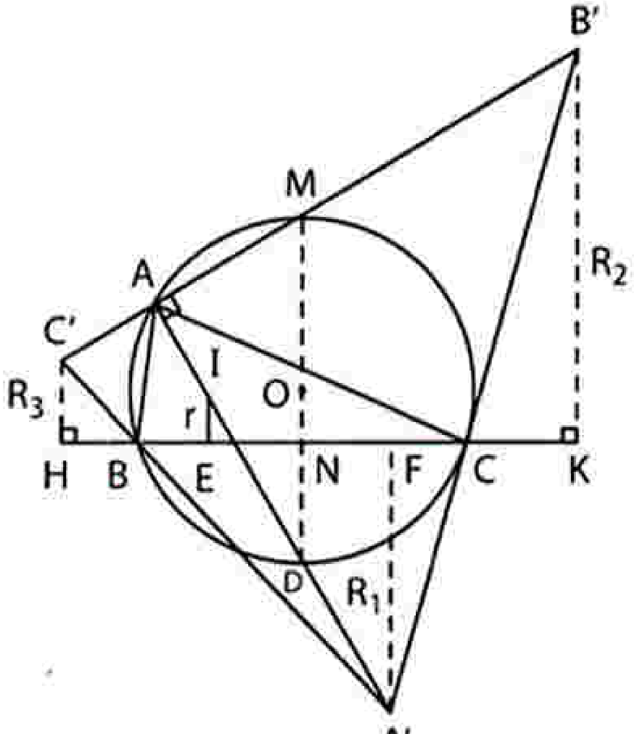
từ đó ΔMGB ∽ ΔDAK (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BG}{KA} = \dfrac{MB}{DK} \Rightarrow \dfrac{2R}{KA} = \dfrac{m}{k} \Rightarrow KA = \dfrac{2Rk}{m}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $KA.KB.KC = 4Rk^2$.

136. *(h.293)* Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, gọi A', B', C' là tâm các đường tròn bàng tiếp ΔABC, $A'F = R_1$, $B'K = R_2$, $C'H = R_3$, IE = r.

Gọi giao điểm của AA', AB' với (O) là D, M. Ta có $\widehat{MAD} = 90^o$ nên D, O, M thẳng hàng. Gọi N là giao điểm của OD và BC.



Hình 293

Ta có ND ⊥ BC. Dễ chứng minh

$$ND = \frac{A'F - IE}{2} = \frac{R_1 - r}{2}$$

$\Rightarrow R_1 - r = 2ND$. (1)

Dễ chứng minh CH = BK (cùng bằng nửa chu vi ΔABC)

⇒ BH = CK ⇒ NH = NK

⇒ MN là đường trung bình của hình thang B'C'HK

$\Rightarrow 2MN = B'K + C'H = R_2 + R_3$. (2)

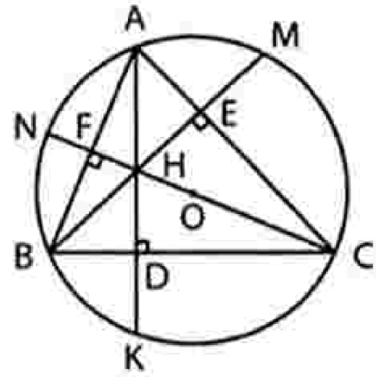
Từ (1) và (2) suy ra $R_1 + R_2 + R_3 - r = 2(MN + ND) = 2MD = 4R$.

137. *(h.294)* a) $\dfrac{AK}{AD}+\dfrac{BM}{BE}+\dfrac{CN}{CF}$

$$=\frac{AD+DK}{AD}+\frac{BE+EM}{BE}+\frac{CF+FN}{CF}$$

$$=3+\frac{DK}{AD}+\frac{EM}{BE}+\frac{FN}{CF}$$

$$=3+\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}.$$



Hình 294

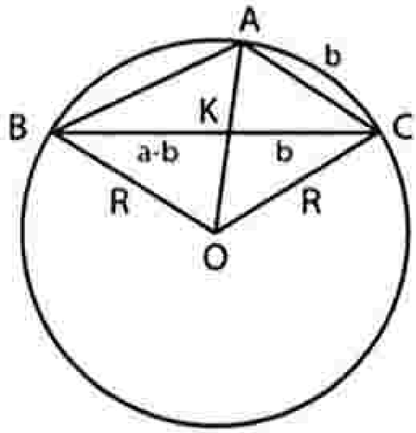
Sử dụng diện tích tam giác, hãy chứng minh $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}=1$.

b) Sử dụng bất đẳng thức $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$ với a, b, c > 0 và câu a). Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi ΔABC đều.

138. *(h.295)* a) Lần lượt tính được $\widehat{AOB}=72^o$, $\widehat{AOC}=36^o$, $\widehat{OBC}=36^o$, $\widehat{OKB}=\widehat{AKC}=72^o$ (K là giao điểm của OA và BC), $\widehat{OAC}=72^o$, $\widehat{ACK}=\widehat{OCK}=36^o$.

Từ các tam giác cân ACK và OBK, chứng minh được $a-b=R$.

Từ các tam giác cân đồng dạng BOC và KOC, chứng minh được $ab=R^2$.



Hình 295

b) Từ $\begin{cases}a-b=2\\ab=4\end{cases}$ ta được $a^2-2a-4=0$.

Từ đó $a=1+\sqrt{5}$ cm, $b=\sqrt{5}-1$ cm.

139. *(h.296)*

a) Gọi H là trực tâm của ΔABC, K là giao điểm của AH và (O).

Dễ chứng minh bổ đề K đối xứng với H qua BC, suy ra $S_{BKC}=S_{BHC}$.

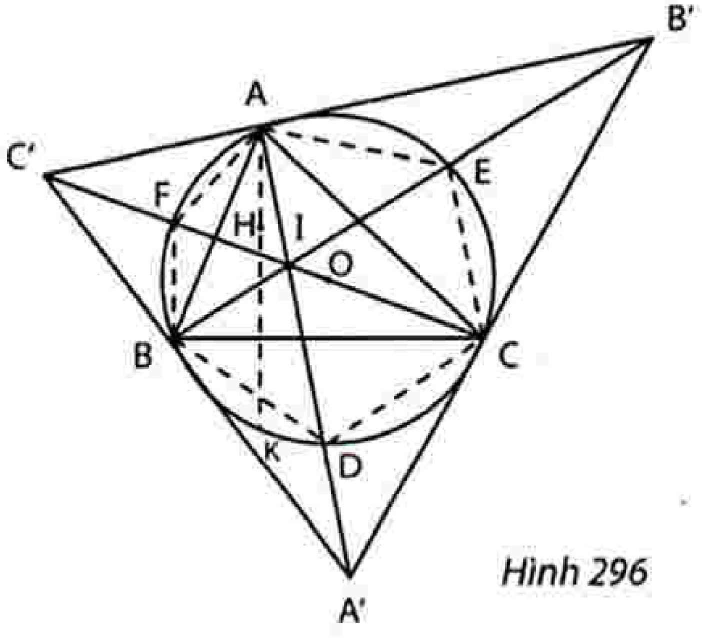
Ta lại có $S_{BDC}\ge S_{BKC}$ nên $S_{BDC}\ge S_{BHC}$.

Từ đó $S_{BDC} + S_{AEC} + S_{AFB} \geq S_{BHC} + S_{AHC} + S_{AHB} = S_{ABC}$.

Suy ra $S_{AFBDCE} \geq 2S_{ABC}$ tức là $S_1 \geq 2S$.

b) Gọi I là giao điểm của AA', BB', CC'. Dễ chứng minh bổ đề ID = DA', suy ra $S_{IBA'} = 2S_{IBD}$ và $S_{ICA'} = 2S_{ICD}$ nên

$S_{IBA'C} = 2S_{IBDC}$. Do đó



Hình 296

$S_{IBA'C} + S_{ICB'A} + S_{IAC'B} =$

$2(S_{IBDC} + S_{ICEA} + S_{IAFB}) \Rightarrow S_{A'B'C'} = 2S_{AFBDCE}$, tức là $S' = 2S_1$.

c) Suy ra từ hai câu trên.

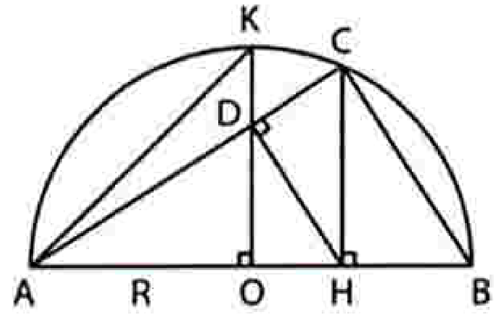
140. *(h.297) Phân tích*: Ta có $\dfrac{OA}{AH} = \dfrac{AD}{AC}$

(do OD // CH) $= \dfrac{AH}{AB}$ (do HD // BC)

$\Rightarrow AH^2 = OA.AB = 2R^2 \Rightarrow AH = R\sqrt{2}$.

Cách dựng: Dựng bán kính $OK \perp AB$.

Trên tia AB, dựng H sao cho AH = AK.

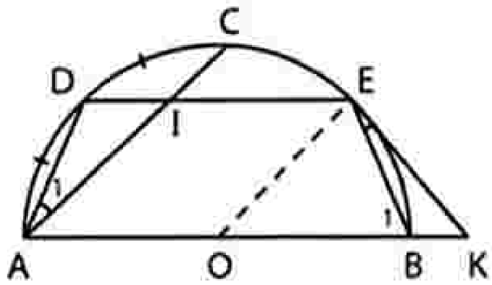


Hình 297

141. *(h.298)* $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE}$

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{BEK}$, $\widehat{ADI} = \widehat{EBK}$ (cùng bù $\widehat{B_1}$).

$\Delta ADI = \Delta EBK$ (g.c.g) $\Rightarrow DI = BK$.



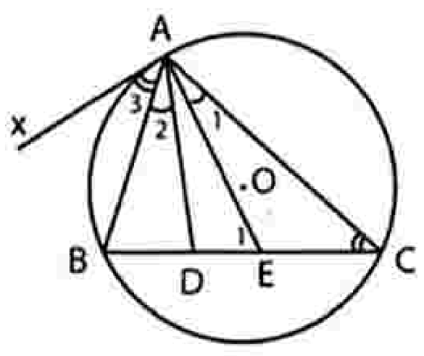
Hình 298

142. *(h.299)* Giả sử D nằm giữa B và E. Kẻ tiếp tuyến Ax của (O).

Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{A_1} + \widehat{C} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = \widehat{DAx}$.

Từ đó Ax là tiếp tuyến của đường tròn (ADE).

Do đó đường tròn (ADE) tiếp xúc với (O).



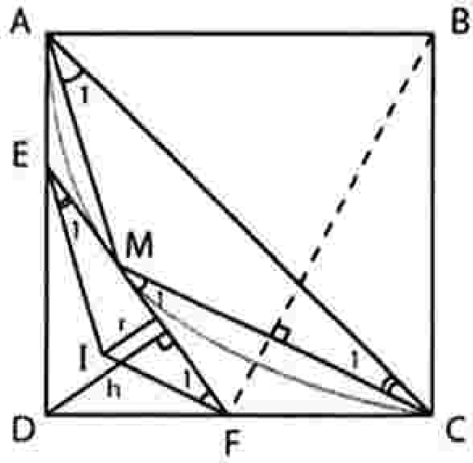
Hình 299

143. *(h.300)* a) Ta có FI // CM (cùng vuông góc với FB) nên $\hat{F}_1 = \widehat{M}_1$, mà $\widehat{M}_1 = \widehat{A}_1$ nên $\hat{F}_1 = \hat{A}_1$. Tương tự $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$.

Suy ra $\Delta IEF \backsim \Delta MCA$ (g.g).

b) Đặt $S_{MCA} = S$. Gọi cạnh của hình vuông là a.

Từ câu a ta có $\dfrac{S_{IEF}}{S} = \left(\dfrac{EF}{CA}\right)^2 = \dfrac{EF^2}{2a^2}$.   (1)



Hình 300

Xét ΔDEF có S' là diện tích, p là nửa chu vi, r là bán kính đường tròn nội tiếp, h là chiều cao từ D đến EF.

Ta có $\dfrac{S'}{S_{IEF}} = \dfrac{h}{r}$, mà $EF.h = 2S' = 2pr$ nên $\dfrac{h}{r} = \dfrac{2p}{EF}$.

Do đó $\dfrac{S'}{S_{IEF}} = \dfrac{2p}{EF} = \dfrac{2DC}{EF} = \dfrac{2a}{EF}$.   (2)

Nhân (1) với (2) được $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{EF^2}{2a^2}.\dfrac{2a}{EF} = \dfrac{EF}{a}$.   (3)

Xét ΔDEF ta có $EF < DE + DF$ $EF + EF < DE + DF + EF = 2a$ $EF < a$.

Kết hợp với (3) có $\dfrac{S'}{S} < 1$, tức là $S_{DEF} < S_{MCA}$.

144. *(h.301)* Kẻ $MH \perp BC$, $MI \perp AB$, $MK \perp AC$.

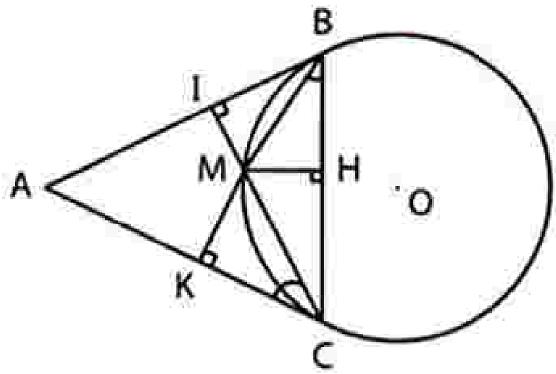
Ta có $\Delta MBH \backsim \Delta MCK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MH}{MK} = \dfrac{MB}{MC}$. Tương tự

$\dfrac{MH}{MI} = \dfrac{MC}{MB}$. Suy ra $\dfrac{MH}{MK} = \dfrac{MI}{MH}$

$MH^2 = MI.MK$

$\Rightarrow MH = \sqrt{MI.MK} \le \dfrac{MI + MK}{2}$.



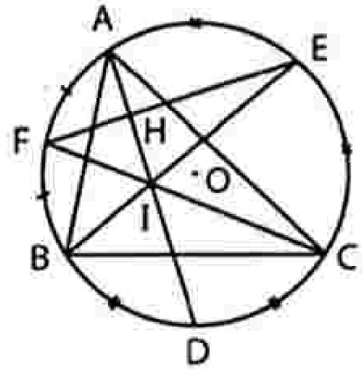
Hình 301

Xảy ra $MI + MK = 2MH$ khi và chỉ khi $MI = MK$, khi đó M là giao điểm của AO và (O).

Dựng được hai điểm M thỏa mãn bài toán.

145. *(h.302)* Gọi H là giao điểm của AD và EF.

Sử dụng góc có đỉnh ở trong đường tròn, hãy chứng minh $\widehat{H} = 90^o$.



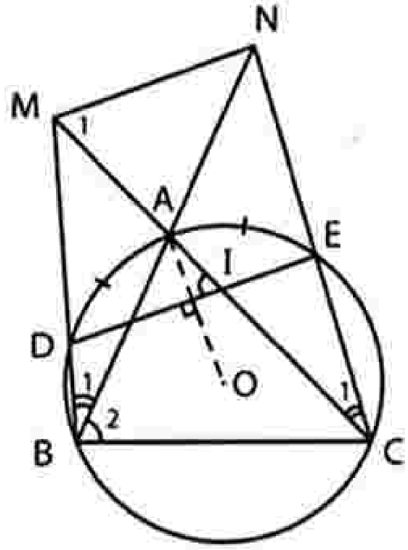
Hình 302

146. *(h.303)* $OA \perp DE \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$.

$\Delta ABM \backsim \Delta ACN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AM}{AN}$

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta AMN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{B}_2 = \widehat{M}_1$. Hãy chứng minh $\hat{B}_2 = \widehat{AID}$ (I là giao điểm của AC và DE) để suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{AID}$, từ đó MN // DE.



Hình 303

147. *(h.304)*

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin \widehat{AOB},$$

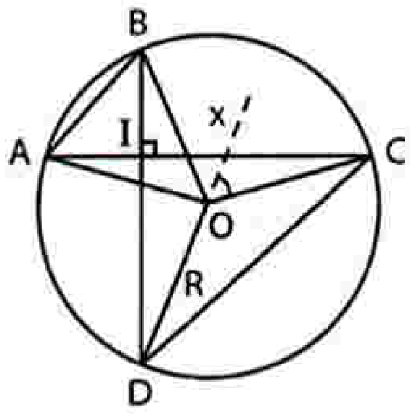
$$S_{COD} = \frac{1}{2}R^2 \sin \widehat{COx} \text{ (Ox là tia đối của tia OD).}$$

$$90^o = \hat{I} = \frac{\text{sđ}\overset{\frown}{AB} + \text{sđ}\overset{\frown}{CD}}{2}$$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ + sđ $\overset{\frown}{CD} = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{AOB}$ bù $\widehat{COD} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{COx}$.

Do đó $S_{AOB} = S_{COD}$.



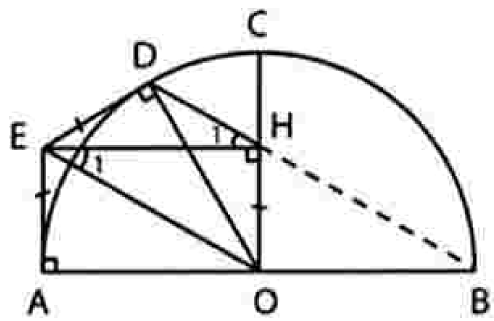
Hình 304

148. *(h.305)* OEHB là hình bình hành ⇒ HB // OE. (1)

E, D, H, O thuộc một đường tròn, lại có ED = EA = OH nên $\hat{H}_1 = \hat{E}_1$

⇒ DH // EO. (2)

Từ (1) và (2) suy ra D, H, B thẳng hàng.

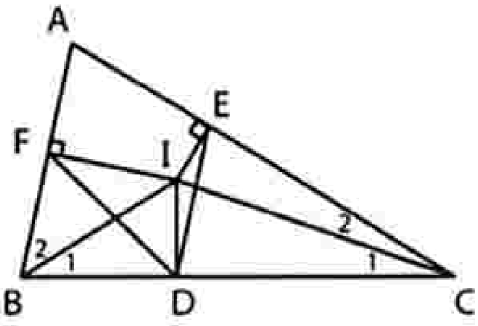


Hình 305

149. *(h.306)* Ta có $\widehat{BIC} = \widehat{DIB} + \widehat{DIC}$

$= (90^\circ - \hat{B}_1) + (90^\circ - \hat{C}_1)$

$= 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1).$ (1)



Hình 306

Bốn điểm I, D, B, F thuộc đường tròn đường kính IB ; bốn điểm I, D, C, E thuộc đường tròn đường kính IC nên

$\widehat{EDF} = \widehat{IDF} + \widehat{IDE} = \hat{B}_2 + \hat{C}_2.$ (2)

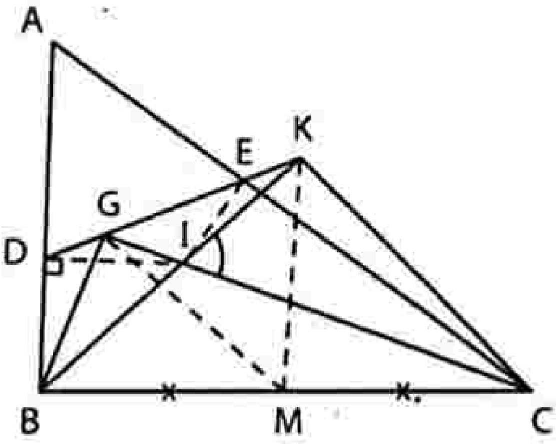
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BIC} - \widehat{EDF} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2)$

$= 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A} = \alpha.$

150. *(h.307)* Đặt $\hat{A} = \alpha$.

Hãy chứng minh $\widehat{CEK} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$,

$\widehat{CIK} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ để suy ra C, I, E, K thuộc một đường tròn, từ đó $\widehat{IKC} = 90^\circ$. Suy ra $MK = \dfrac{1}{2}BC$.



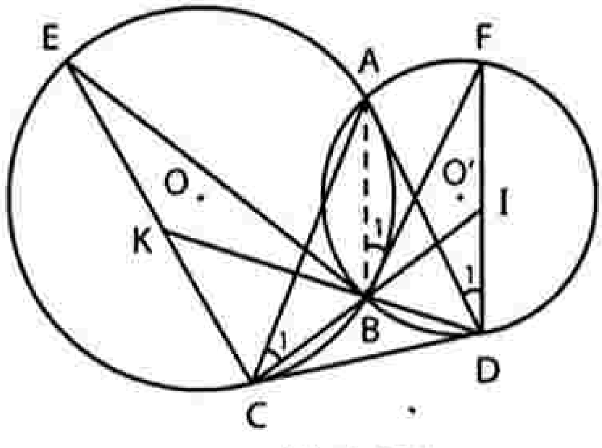
Hình 307

Tương tự $\widehat{IGB} = 90^\circ$, $MG = \dfrac{1}{2}BC$.

Do đó MK = MG.

151. *(h.308)* $\hat{C}_1 = \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow$ A, C, D, I thuộc một đường tròn.

Tương tự A, D, C, K thuộc một đường tròn. Vậy I, K thuộc đường tròn đi qua A, C, D.



Hình 308

152. *(h.309)* Gọi I là giao điểm của FK và DE.

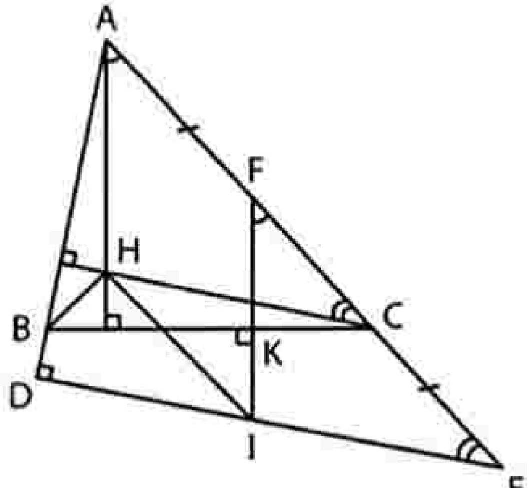
Ta sẽ chứng minh năm điểm D, B, H, K, I thuộc một đường tròn.

Dễ thấy D, B, K, I thuộc đường tròn đường kính BI. (1)

$\Delta AHC = \Delta FIE$ (g.c.g) $\Rightarrow AH = FI$.

AHIF là hình bình hành $\Rightarrow AF \parallel HI$, mà $BH \perp AF$ nên $BH \perp HI \Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính BI. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.



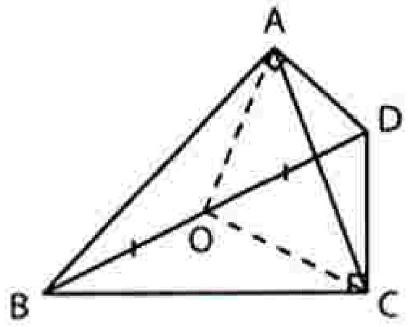
Hình 309

153. *(h.310)* Góc còn lại của tứ giác là $\hat{B} = 45^o$.

Bốn điểm A, B, C, D thuộc đường tròn đường kính BD. Gọi O là trung điểm của BD thì

$\overset{\frown}{AOC} = 2\overset{\frown}{ABC} = 2.45^o = 90^o$.

Suy ra $AC = OA\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (cm).



Hình 310

154. *(h.311)*

$\hat{F}_1 = \hat{A}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow$ B, E, F, M thuộc một đường tròn $\Rightarrow \overset{\frown}{EFB} = \overset{\frown}{EMB} = 90^o$. (1)

Do $FK \parallel BM$, $FK = BM$ nên

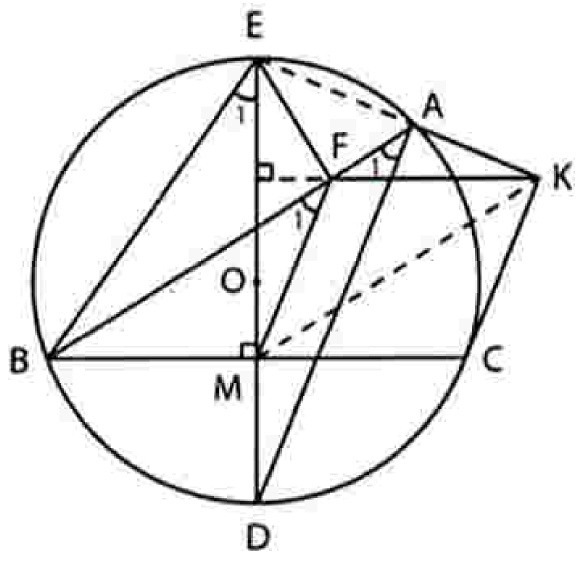
$BF \parallel MK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EF \perp MK$.

Ta lại có $KF \perp ME$ nên F là trực tâm của ΔEMK, suy ra $MF \perp EK$, do đó $DA \perp EK$. (3)

Ta lại có $DA \perp EA$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra E, A, K thẳng hàng và $\overset{\frown}{DAK} = 90^o$.



Hình 311

155. *(h.312)*

a) Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$. Ta có

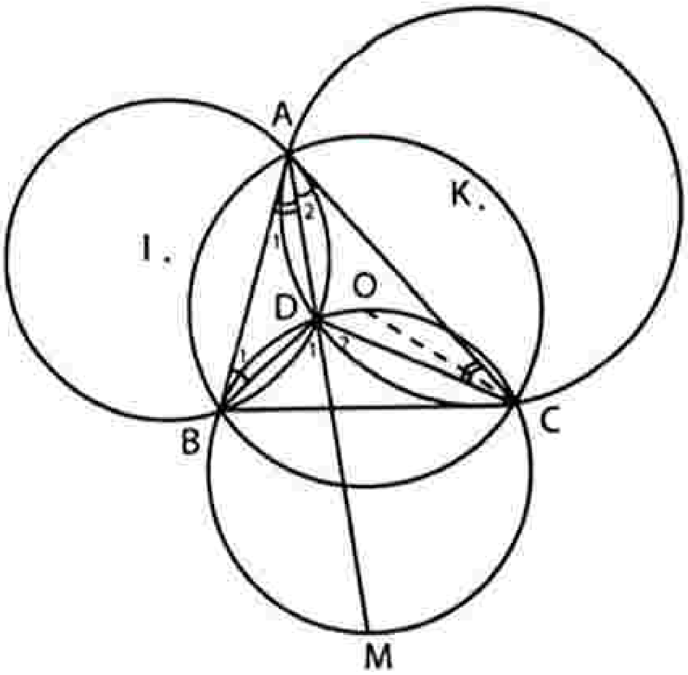
$\widehat{D}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \alpha$.

Tương tự $\widehat{D}_2 = \alpha$.

Suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 2\alpha$.

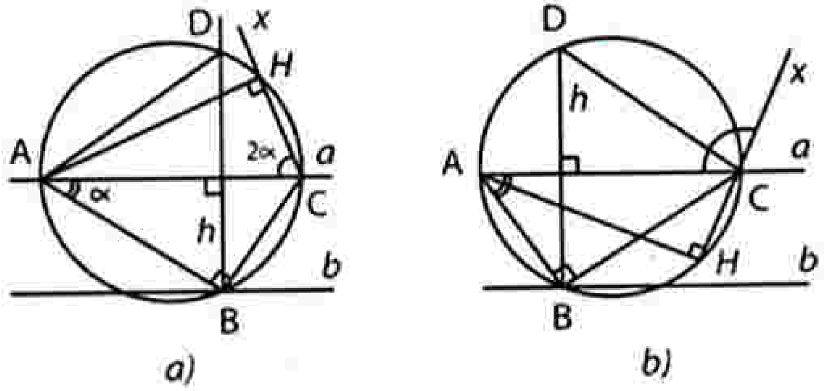
Ta lại có $\widehat{BOC} = 2\alpha$ nên B, D, O, C thuộc một đường tròn.

b) Đường tròn ngoại tiếp ΔBOC cố định mà $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ nên AD đi qua điểm chính giữa của cung BC không chứa O của đường tròn đó. (điểm M trong hình).



Hình 312

156. *(h.313)*



Hình 313

Đặt $\widehat{BAC} = \alpha\ (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua a.

Năm điểm A, B, C, D, H thuộc đường tròn đường kính AC.

Gọi h là khoảng cách giữa a và b. Xét hai trường hợp :

– *Trường hợp* $\alpha \le 45^\circ$ (h.313a). Ta có $\widehat{ACH} = 2\alpha$, $\widehat{BAD} = 2\widehat{BAC} = 2\alpha$

nên $\widehat{ACH} = \widehat{BAD} \Rightarrow \overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AH = BD = 2h$.

– *Trường hợp* $\alpha > 45^\circ$ (h.313b). Ta có $\widehat{ACH} = 180^\circ - 2\alpha$.

$\widehat{BCD} = 2\widehat{BCA} = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha$ nên $\widehat{ACH} = \widehat{BCD}$

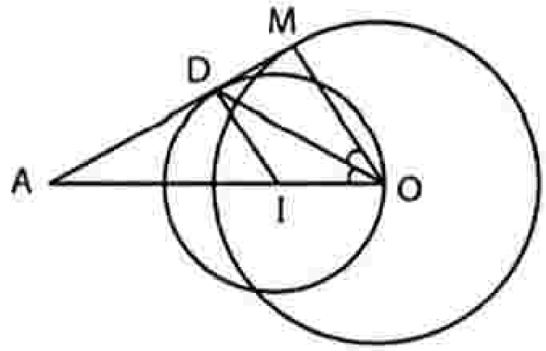
$\Rightarrow \overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AH = BD = 2h$. Quỹ tích của H là đường tròn (A ; 2h).

157. *(h.314)* Trên tia OA lấy I sao cho $OI = \frac{1}{3}OA$ thì I cố định.

Ta có $\frac{DA}{DM} = \frac{OA}{OM} = 2 = \frac{IA}{IO}$

$\Rightarrow DI \,//\, MO$ và $DI = \frac{2}{3}MO = \frac{2}{3}R$.

Quỹ tích của D là đường tròn $\left(I ; \frac{2R}{3}\right)$.



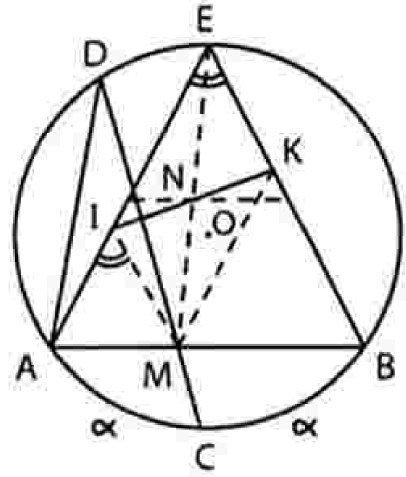
Hình 314

158. *(h.315)* Đặt sđ $\overset{\frown}{CA}$ = sđ $\overset{\frown}{CB} = \alpha \Rightarrow \widehat{ADC} = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \widehat{ADM} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \widehat{AIM} = \alpha$.

Tương tự $\widehat{BKM} = \alpha$. Các tam giác cân AIM, BKM có góc ở đỉnh bằng nhau nên góc ở đáy bằng nhau, suy ra IM // KB, KM // IA.

Gọi E là giao điểm của AI và BK. Ta có EIMK là hình bình hành nên $\widehat{AEB} = \alpha$. Điểm E thuộc cung chứa góc α vẽ trên AB nên $E \in (O)$, CE là đường kính, E cố định.



Hình 315

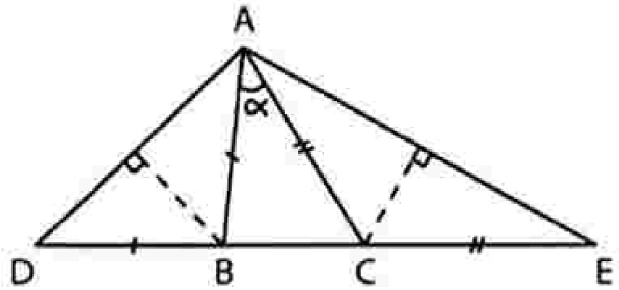
Trung điểm N của EM là trung điểm của IK có quỹ tích là đường trung bình của tam giác cân AEB (song song với AB).

159. *(h.316)* *Phân tích*: Trên tia đối của tia BC, lấy D sao cho BD = BA.

Trên tia đối của tia CB, lấy E sao cho CE = CA thì DE = d,

$\widehat{DAE} = 180^\circ - (\hat{D} + \hat{E})$

$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.



Hình 316

Cách dựng: Trên đoạn DE = d, dựng cung $\overset{\frown}{DmE}$ chứa góc $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Dựng đường thẳng song song với DE, cách DE một khoảng là h, cắt cung chứa góc ở A.

Dựng các đường trung trực của AD và AE cắt DE ở B và C.

160. *(h.317)* a) $\widehat{AKM} = \widehat{ADM} = 45^o$.

$\widehat{BKM} = \widehat{BEM} = 45^o$ nên

$\widehat{AKB} = 45^o + 45^o = 90^o$.

K chuyển động trên đường tròn (O) đường kính AB.

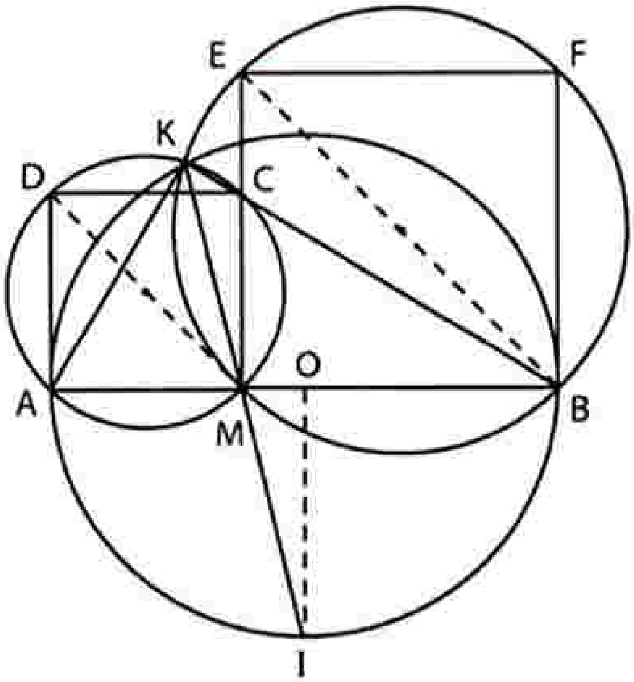
b) Xét (O), gọi I là điểm chính giữa của cung AB không chứa K thì I là điểm cố định.

Do $\widehat{AKM} = \widehat{BKM}$ nên KM đi qua I.

c) KM = IK − IM mà IK ≤ 2R (đặt AB = 2R) và IM ≥ IO = R

nên KM ≤ 2R − R = R.

max KM = R ⇔ M trùng O, trung điểm của AB.

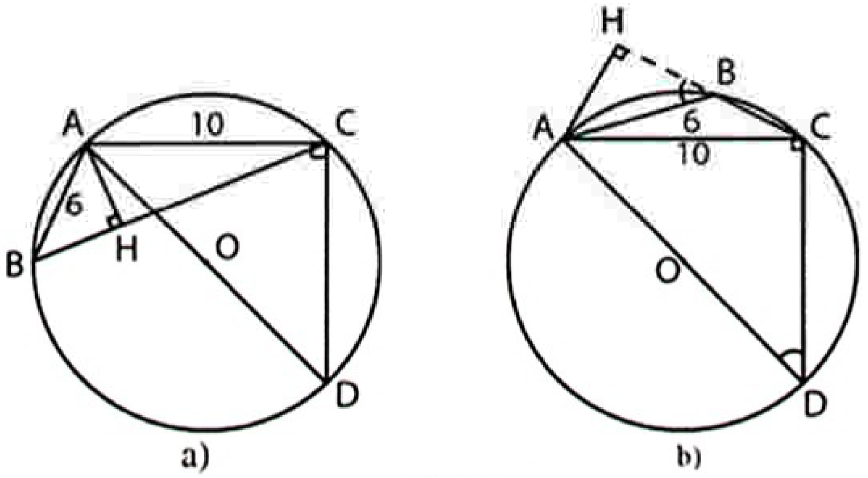


Hình 317

Chuyên đề 8

TỨ GIÁC NỘI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN

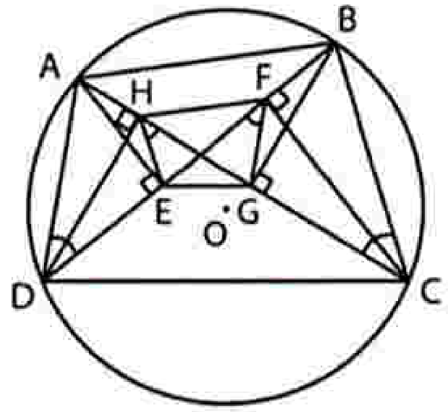
161. *(h.318)* Kẻ đường kính AD. Ta có ΔAHB ∽ ΔACD (g.g)



Hình 318

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AH}{10} = \frac{6}{15} \Rightarrow AH = 4 \text{ cm}.$$

162. *(h.319)*



Hình 319

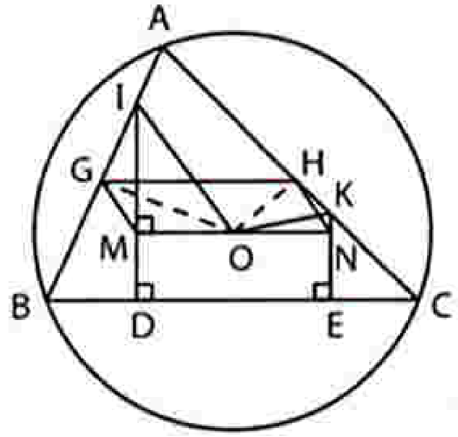
Tứ giác ADEH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EHG} = \widehat{ADB}$.

Tứ giác BCGF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EFG} = \widehat{ACB}$.

Ta lại có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{EHG} = \widehat{EFG}$

$\Rightarrow$ E, H, F, G thuộc một đường tròn.

163. *(h.320*, giả sử I thuộc cạnh AB, các trường hợp khác tương tự).



Hình 320

Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Qua O kẻ đường thẳng song song với BC, cắt ID và KE ở M và N.

Ta có $MN = DE = \dfrac{BC}{2} = GH$, $MN \,//\, BC \,//\, GH$

nên GHNM là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{OMG} + \widehat{ONH} = 180^o$. (1)

Tứ giác OMGI có $\widehat{OMI} = \widehat{OGI} = 90^o$ nên nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OMG} = \widehat{OIA}$. (2)

Tứ giác ONKH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ONH} = \widehat{OKA}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$\widehat{OIA} + \widehat{OKA} = 180^o \Rightarrow$ AIOK là tứ giác nội tiếp.

164. *(h.321)* CD // EF

$\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow$ FMBE là tứ giác nội tiếp. (1)

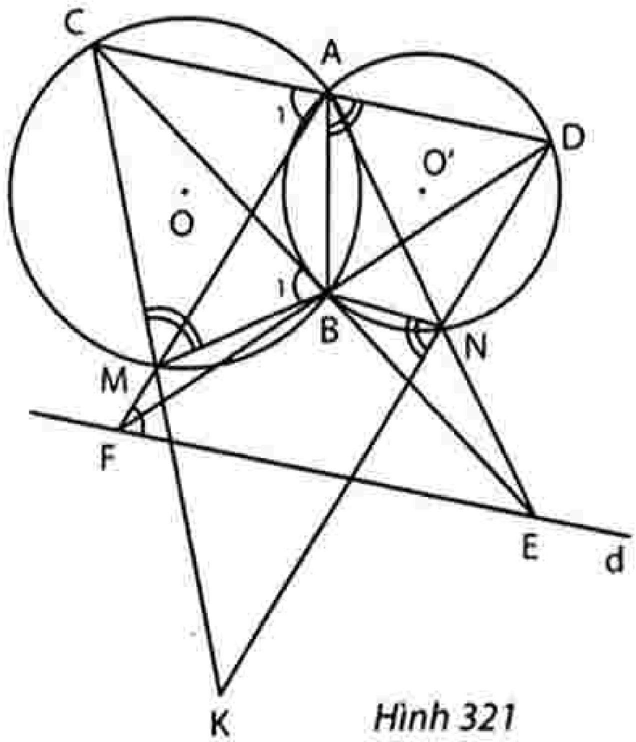
Tương tự ENBF là tứ giác nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra năm điểm F, M, B, E, N thuộc một đường tròn. (3)

Ta có $\widehat{BNK} = \widehat{BAD} = \widehat{BMC} \Rightarrow$

M, B, N, K thuộc một đường tròn. (4)

Từ (3) và (4) suy ra sáu điểm F, M, B, E, N, K thuộc một đường tròn.



Hình 321

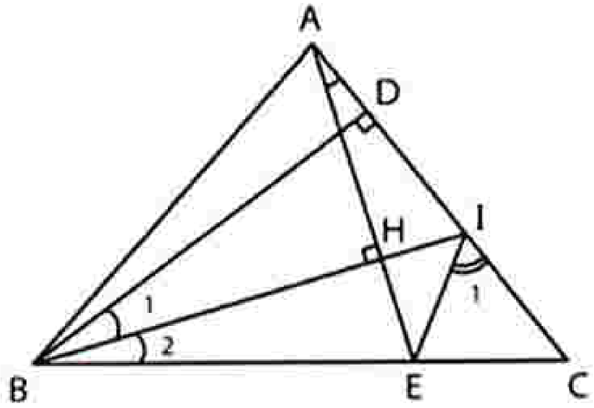
165. *(h.322)* Tứ giác ADHB nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{DAE} = \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

$\Rightarrow$ AIEB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \hat{I}_1 = \widehat{ABC} = \hat{C}$

$\Rightarrow \Delta IEC$ cân tại E.



Hình 322

166. *(h.323)* a) ΔGFD cân

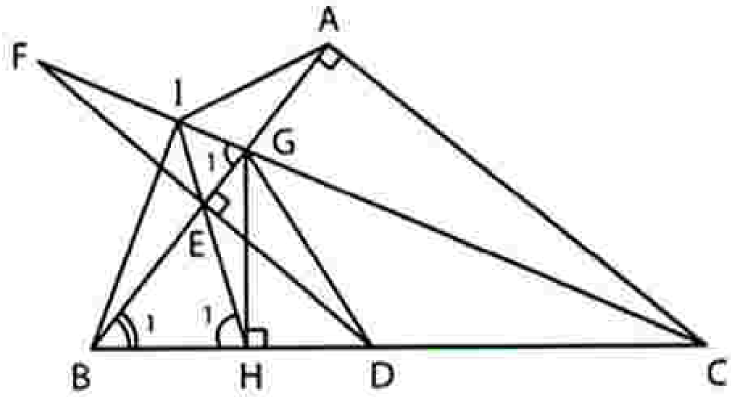
$\Rightarrow \hat{G}_1 = \widehat{EGD}$. (1)

Tứ giác DHEG nội tiếp

$\Rightarrow \hat{H}_1 = \widehat{EGD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{G}_1 = \hat{H}_1$

$\Rightarrow$ BIGH là tứ giác nội tiếp, mà $\widehat{GHB} = 90^o$ nên $\widehat{BIG} = 90^o$.



Hình 323

b) $\widehat{BIC} = 90^o$ (câu a) mà $\widehat{BAC} = 90^o$ nên tứ giác BIAC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AIC} = \hat{B}_1 = \widehat{HIG}$ (BIGH nội tiếp) tức là $\widehat{AIG} = \widehat{HIG}$.

167. *(h.324)* Giả sử $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$. (1)

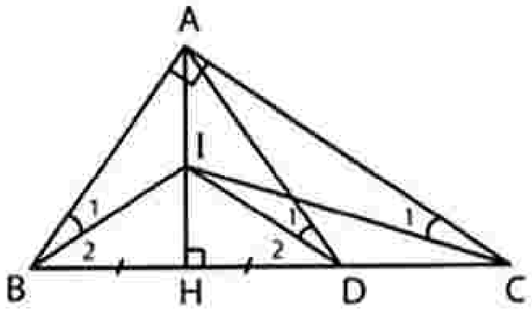
Lấy D đối xứng với B qua H thì D nằm giữa H và C (vì HC > HB).

AH là đường trung trực của BD nên $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$

$\Rightarrow$ AIDC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HAC} = \hat{D}_2 = \hat{B}_2 < \widehat{ABH}$, trái với $\widehat{HAC} = \widehat{ABH}$.



Hình 324

Vậy không thể xảy ra $\widehat{ABI} = \widehat{ACI}$.

168. *(h.325)* Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$, $\widehat{A}_2 = \widehat{D}_1$

nên $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1$,

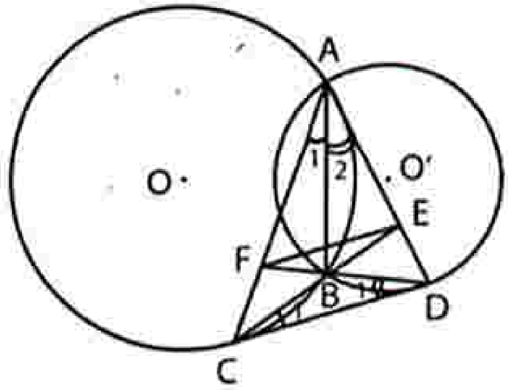
tức là $\widehat{EAF} = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1$. (1)

$\widehat{EBF} = \widehat{CBD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{EAF} + \widehat{EBF} = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 + \widehat{CBD} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ AEBF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow EF // CD$.



Hình 325

169. (*h.326* hình vẽ ứng với các đoạn thẳng CE và DF không cắt nhau, các trường hợp khác tương tự).

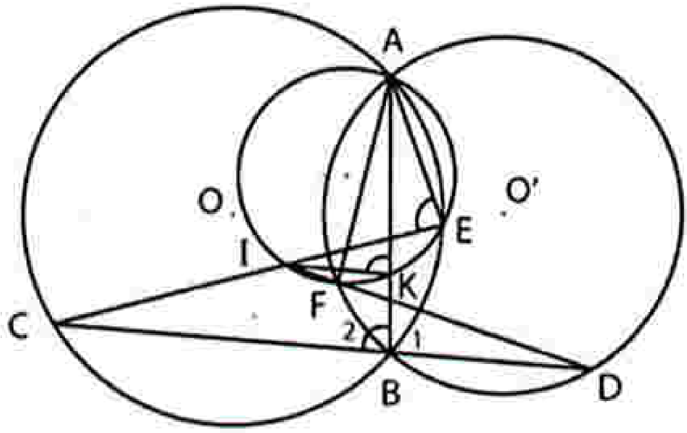
a) $\widehat{AFD} = \widehat{B}_1$ nên $\widehat{AFI} = \widehat{B}_2$. (1)

$\widehat{E} = \widehat{B}_2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AFI} = \widehat{E}$

$\Rightarrow$ A, E, I, F thuộc một đường tròn.

b) $\widehat{AKI} = \widehat{E} = \widehat{B}_2 \Rightarrow IK // CD$.



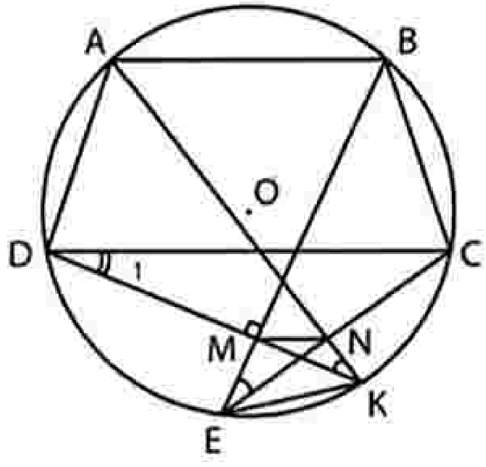
Hình 326

170. *(h.327)* $AB // CD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

$\Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{BEC}$

$\Rightarrow$ MNKE là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NMK} = \widehat{NEK} = \widehat{D}_1 \Rightarrow MN // CD$.



Hình 327

171. *(h.328)* a) $\widehat{M}_1 = \widehat{A}_1$, $\widehat{M}_3 = \widehat{M}_2 = \widehat{A}_2$

mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ nên $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$.

b) $\widehat{E}_1 = \widehat{F}_1 = \widehat{BIM}$

$\Rightarrow$ BEMI là tứ giác nội tiếp.

c) Tứ giác BEMI nội tiếp (câu b)

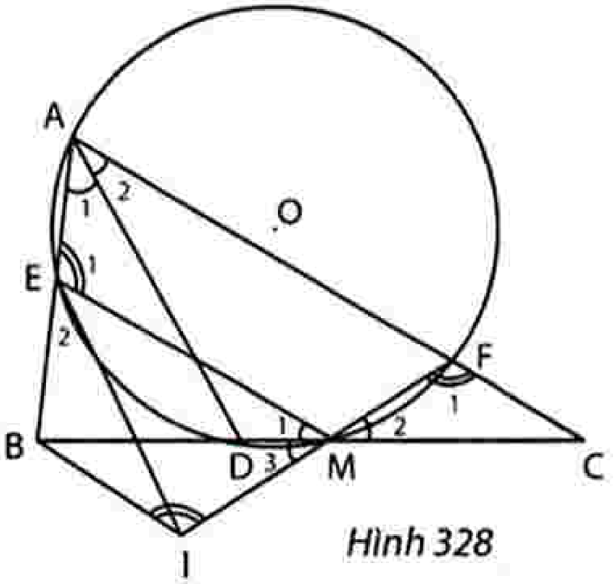
$\Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{M}_3$, $\widehat{BIE} = \widehat{M}_1$ mà

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_3$ (câu a)

nên $\widehat{E}_2 = \widehat{BIE}$. Suy ra BI = BE.

Ta lại có BI = CF ($\Delta MBI = \Delta MCF$) nên BE = CF.

Ta có $\widehat{E}_2 = \widehat{M}_3 = \widehat{M}_1 = \widehat{A}_1$ nên AD // EI.



Hình 328

172. *(h.329)* $\widehat{EGH} = \widehat{CDH} = \widehat{A}$

$\Rightarrow$ GH // AB. (1)

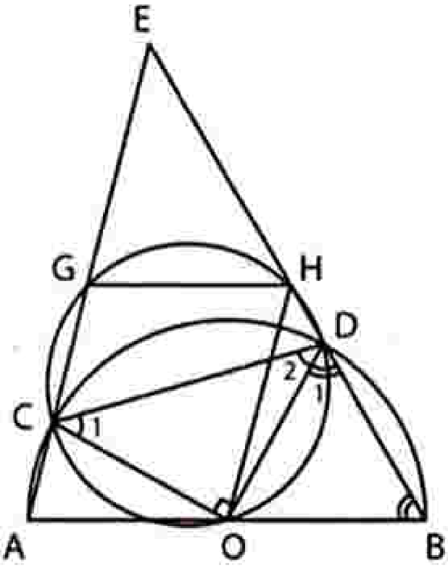
$\widehat{AOH} = \widehat{OHD} + \widehat{B}$ (góc ngoài ΔOHB)

$= \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 + \widehat{D}_1 = \widehat{BDC}$.

Ta lại có $\widehat{A} + \widehat{BDC} = 180^o$

nên $\widehat{A} + \widehat{AOH} = 180^o \Rightarrow$ AG // OH. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AOHG là hình bình hành.



Hình 329

173. *(h.330)* a) MH là đường trung bình của ΔBEC

$\Rightarrow$ MH // AC $\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{KAC} = \widehat{B}_1 \Rightarrow$ BMHK là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có $\widehat{BMH} = \widehat{E} = 90^o$ nên $\widehat{BKH} = 90^o$.

b) $\widehat{B}_1$ phụ $\widehat{H}_1$ (câu a) mà $\widehat{H}_2$ phụ $\widehat{H}_1$ nên

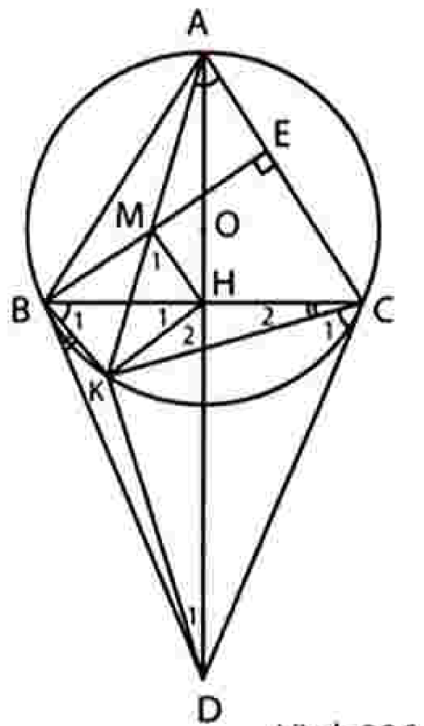
$\widehat{B}_1 = \widehat{H}_2$.

Ta lại có $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ nên $\widehat{H}_2 = \widehat{C}_1 \Rightarrow$ CDKH là tứ giác nội tiếp.

c) Tứ giác CDKH nội tiếp (câu b) $\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_2$.

Ta lại có $\widehat{KBD} = \widehat{C}_2$ nên $\widehat{D}_1 = \widehat{KBD}$.

Từ đó DA là tiếp tuyến của đường tròn (KBD).



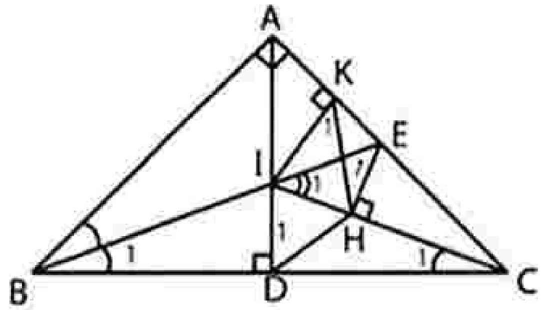
Hình 330

174. *(h.331)* $\widehat{B}+\widehat{C}=90^o \Rightarrow \widehat{B}_1+\widehat{C}_1=45^o$

$\Rightarrow \widehat{I}_1=\widehat{B}_1+\widehat{C}_1=45^o$

$\Rightarrow \Delta EIH$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{E}_1=45^o$.

Kẻ $IK \perp AC$. $\Delta IKC=\Delta IDC$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow IK=ID$ và $CK=CD \Rightarrow$

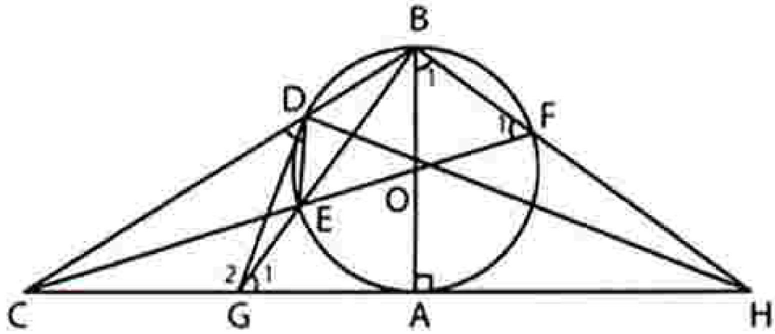


Hình 331

K đối xứng với D qua IC. Ta lại có $H \in IC$ nên $\widehat{IKH}$ đối xứng với $\widehat{IDH}$ qua IC $\Rightarrow \widehat{K}_1=\widehat{D}_1$.

Tứ giác IKEH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{K}_1=\widehat{E}_1=45^o$. Vậy $\widehat{D}_1=45^o$, do đó DH là tia phân giác của góc IDC.

175. *(h.332)* a) $\widehat{G}_1=\widehat{B}_1=\widehat{F}_1=\widehat{CDE} \Rightarrow$ CGED là tứ giác nội tiếp.



Hình 332

b) Tứ giác CGED nội tiếp (câu a) $\Rightarrow \widehat{G}_2=\widehat{DEC}$. (1)

Tứ giác BDEF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DBF}=\widehat{DEC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{G}_2=\widehat{DBF} \Rightarrow$ GDBH là tứ giác nội tiếp

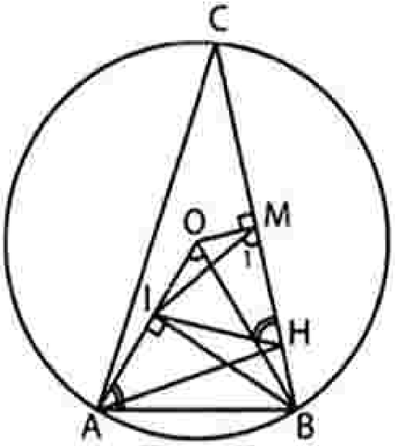
$\Rightarrow \widehat{GDH}=\widehat{GBH}=90^o$.

176. (*h.333*, hình vẽ ứng với O nằm trong ΔABC, các trường hợp khác tương tự).

Tứ giác AIHB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IHM}=\widehat{IAB}=60^o$. (1)

Tứ giác BIOM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{M}_1=\widehat{IOB}=60^o$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔMIH đều.



Hình 333

177. *(h.334)*

a) Gọi I là trung điểm của HC thì $HD = 2IE$.

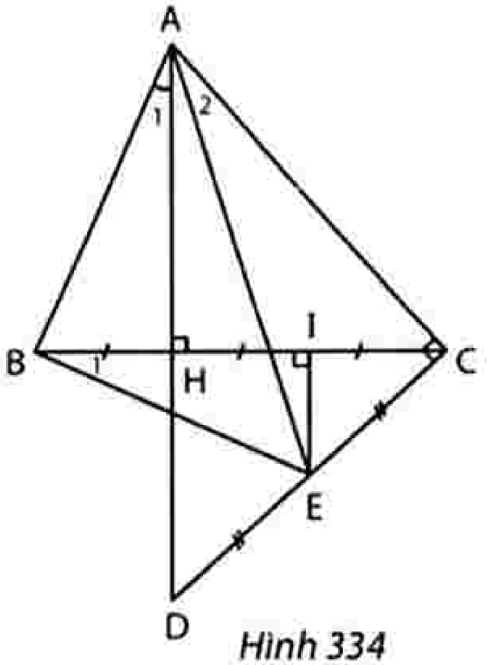
ΔACD vuông, đường cao CH nên

$HA.HD = HC^2 = HC.HC = 2HB.BI$

$\Rightarrow HA.2IE = 2HB.BI \Rightarrow HA.IE = HB.BI$

$\Rightarrow \dfrac{HB}{HA} = \dfrac{IE}{BI} \Rightarrow \tan\widehat{A}_1 = \tan\widehat{B}_1$

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{ABE} = 90^o$.



Hình 334

b) Tứ giác ABEC có $\widehat{ABE} = \widehat{ACE} = 90^o$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_2$.

Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (đpcm).

178. *(h.335)* a) Tứ giác BMIF nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$

$\Rightarrow$ AFIC là tứ giác nội tiếp.

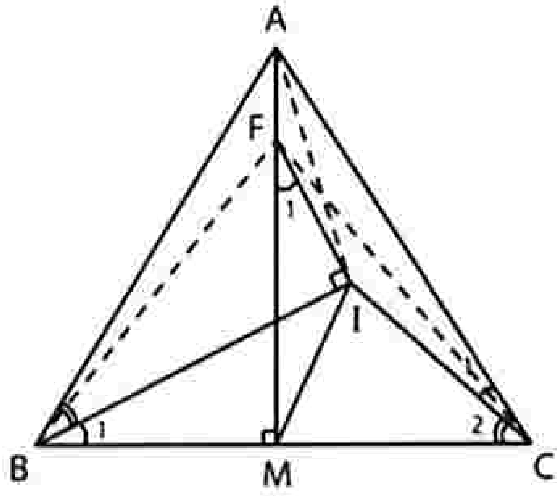
b) Tứ giác AFIC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AIC} = \widehat{AFC},\ \widehat{BIM} = \widehat{BFM}$

(BMIF nội tiếp) $= \widehat{CFM}$ (ΔBFC cân tại F).

Suy ra $\widehat{AIC} + \widehat{BIM}$

$= \widehat{AFC} + \widehat{CFM} = 180^o$.



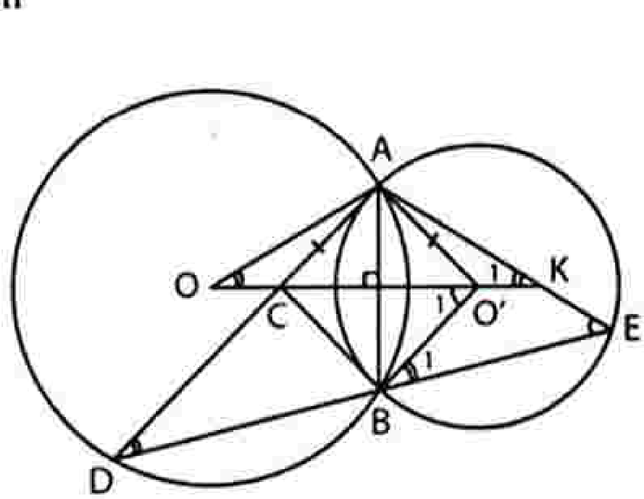
Hình 335

179. *(h.336)* Tứ giác ACBO' là hình thoi nên

$AC = AO',\ \widehat{ACO} = \widehat{AO'K}$. (1)

Ta có $\widehat{O} = \widehat{D} = \widehat{B}_1$, tứ giác BO'KE nội tiếp (vì $\widehat{O'}_1 = \widehat{E}$) nên $\widehat{B}_1 = \widehat{K}_1$, suy ra $\widehat{O} = \widehat{K}_1$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Delta ACO = \Delta AO'K$ (g.c.g) $\Rightarrow OC = O'K$.



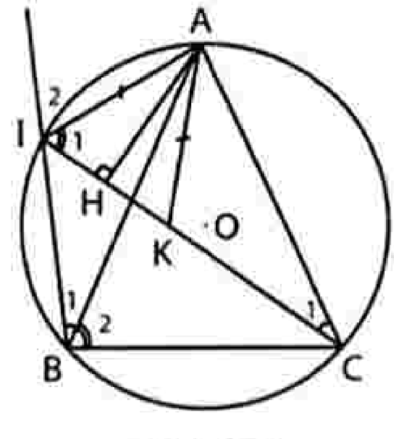
Hình 336

180. *(h.337)* Trên HC lấy K sao cho HK = HI. ΔAIK cân nên

$AK = AI$, $\widehat{AKI} = \hat{I}_1 = \hat{B}_2 = \widehat{ACB} = \hat{I}_2$

nên góc bù với chúng là $\widehat{AKC} = \widehat{AIB}$.

Hãy chứng minh $\Delta AKC = \Delta AIB$ (g.c.g) để suy ra $KC = IB$, từ đó $IB + IH = CK + KH = HC$.



Hình 337

181. *(h.338)* a) Kẻ BM, CK vuông góc với EF.

ΔAEF cân $\Rightarrow \widehat{BEM} = \widehat{CFK}$, $\Delta BEM \backsim \Delta CFK$ (g.g)

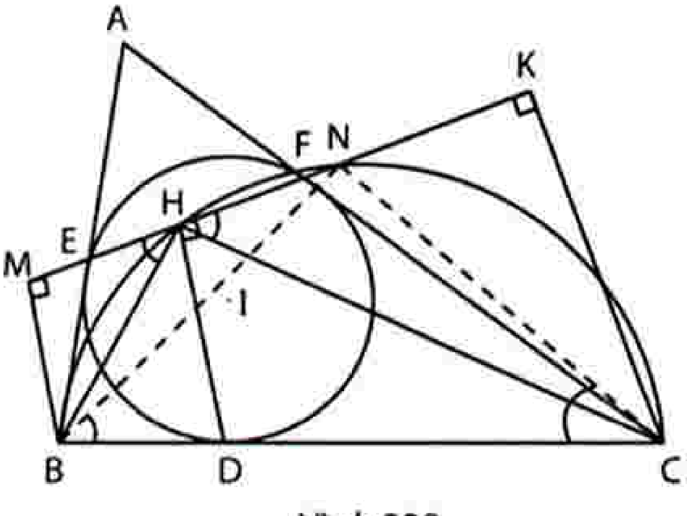
$$\Rightarrow \frac{BM}{CK} = \frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD} = \frac{HM}{HK} \Rightarrow \Delta BHM \backsim \Delta CHK \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{CHF}$.

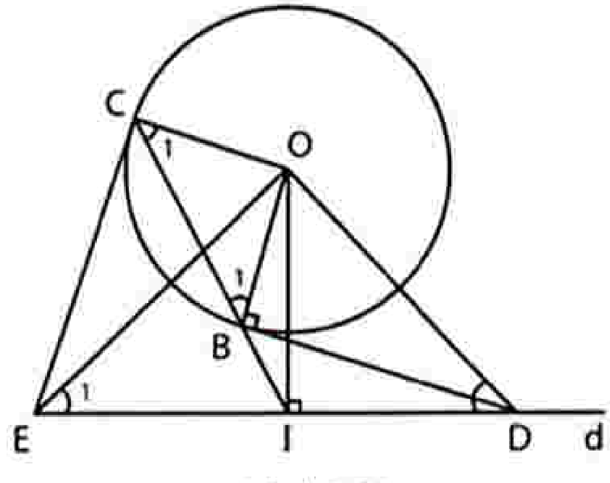
b) Tứ giác BHNC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{CHF}$, $\widehat{BCN} = \widehat{BHE}$.

Ta lại có $\widehat{CHF} = \widehat{BHE}$ (câu a) nên $\widehat{CBN} = \widehat{BCN}$

Suy ra NB = NC.



Hình 338



Hình 339

182. *(h.339)* Các tứ giác OBID, OIEC nội tiếp nên $\widehat{ODE} = \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{E}_1$

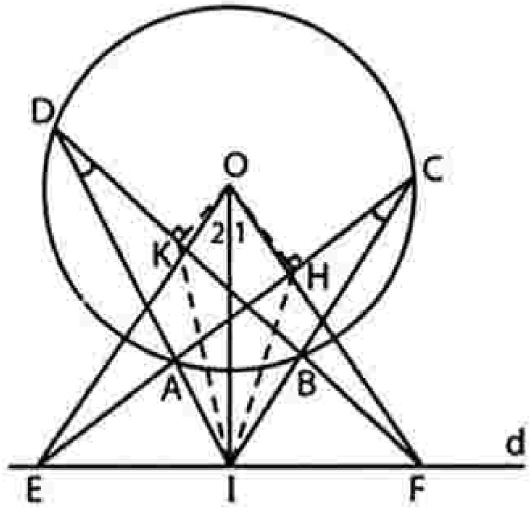
$\Rightarrow \Delta ODE$ cân $\Rightarrow ID = IE$.

183. *(h.340)*

Kẻ OH ⊥ AC, OK ⊥ BD.

$\Delta IDB \backsim \Delta ICA$ (g.g), IK và IH là các đường trung tuyến tương ứng nên $\widehat{IKB} = \widehat{IHA}$ tức là $\widehat{IKF} = \widehat{IHE}$.

Ta lại có $\widehat{IKF} = \hat{O}_1$, $\widehat{IHE} = \hat{O}_2$ (xét các tứ giác nội tiếp) nên $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Suy ra IE = IF.



Hình 340

184. *(h.341)*

a) $\hat{F}_1 = \widehat{ECK} = \widehat{ACK} = \widehat{KEF}$

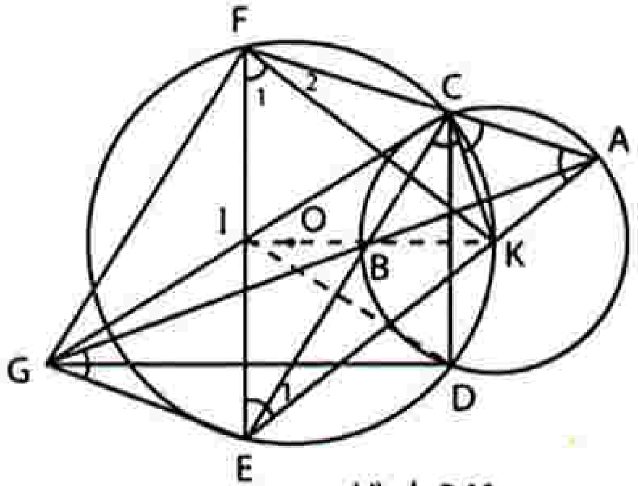
$\Rightarrow \Delta KEF$ cân $\Rightarrow$ KE = KF.

b) Từ $\hat{F}_2 = \hat{E}_1$ và

$\widehat{KAC} = \widehat{KCA} = \widehat{KCE}$

suy ra $\widehat{AKF} = \widehat{CKE}$.

Từ đó $\Delta AKF = \Delta CKE$ (c.g.c)



Hình 341

$\Rightarrow$ AF = CE $\Rightarrow$ AF − CA = CE − CB $\Rightarrow$ CF = BE. (1)

$\widehat{EGB} = \widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{EBG} \Rightarrow$ BE = EG. (2)

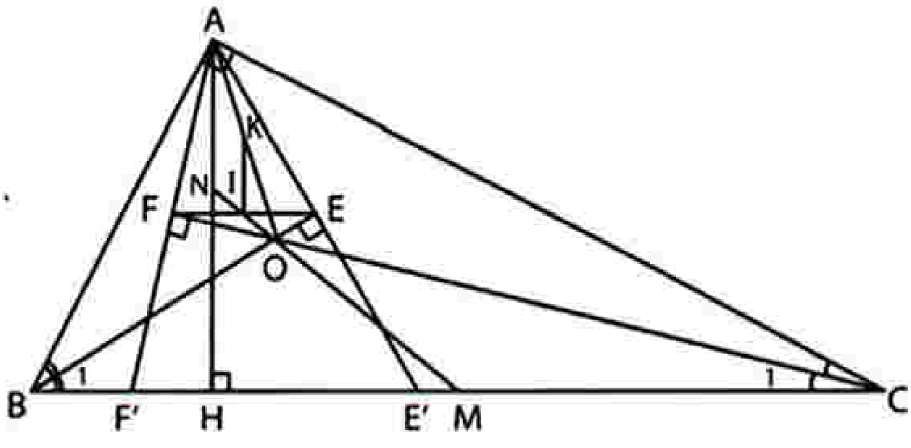
Từ (1) và (2) suy ra CF = BE = EG.

c) CF = EG (câu b) và CF // EG nên CFGE là hình bình hành.

Gọi I là giao điểm của EF và CG thì IE = IF. Ta lại có KE = KF (câu a) và OE = OF nên I, O, K thẳng hàng.

Do OK là đường trung trực của CD nên IC = ID. Ta lại có IC = IG nên ID = IC = IG $\Rightarrow \widehat{CDG} = 90^\circ$.

185. *(h.342)* a) Gọi giao điểm của AE và AF với BC lần lượt là E' và F'.



Hình 342

$\Delta ABE'$ cân tại B nên AE = EE', tương tự AF = FF'.

EF là đường trung bình của $\Delta AE'F'$ nên EF // BC.

b) Gọi I là giao điểm của MN và EF.

Do EF // BC (câu a) và MB = MC nên IE = IF.

Gọi K là trung điểm của OA.

Tứ giác OEAF nội tiếp đường tròn (K) đường kính OA mà IE = IF nên $KI \perp EF$, do $EF \perp AH$ nên KI // AN và $KI = \frac{1}{2}AN$. (1)

Ta có $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 45^o \Rightarrow \widehat{BOC} = 135^o \Rightarrow \widehat{EOF} = 135^o$

$\Rightarrow \widehat{EAF} = 45^o \Rightarrow \widehat{EKF} = 90^o$.

Tam giác EKF vuông có KI là đường trung tuyến nên $KI = \frac{1}{2}EF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AN = EF.

186. *(h.343)* a)

$\widehat{DKF} = 180^o - \widehat{BAC}$

nên $\widehat{BKC} = \frac{1}{2}\widehat{KDF}$

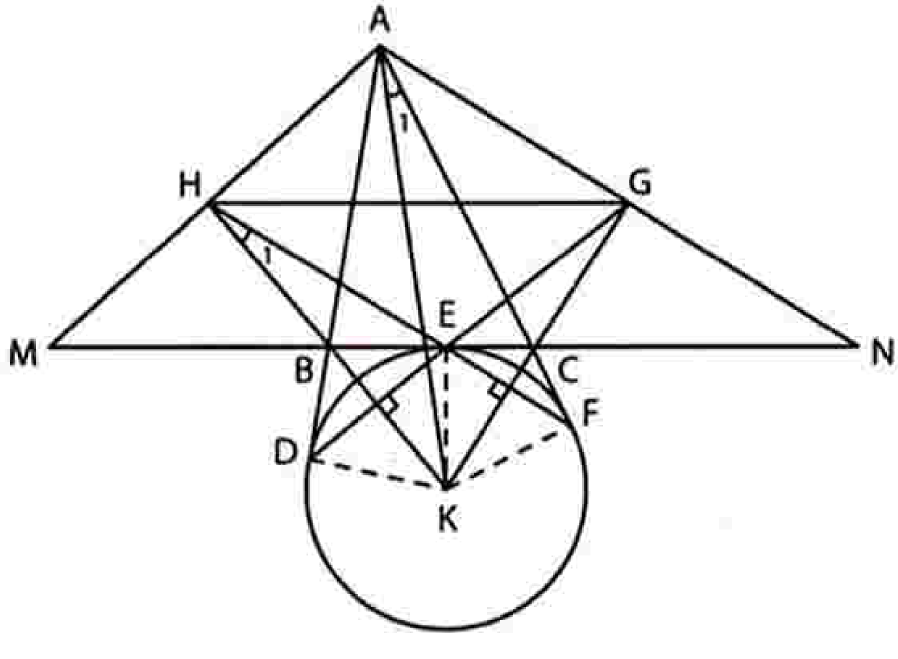
$= 90^o - \hat{A}_1$. (1)

Do $KC \perp EF$ nên

$\widehat{BKC} = 90^o - \hat{H}_1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\hat{A}_1 = \hat{H}_1 \Rightarrow$ AHKF là tứ giác nội tiếp.



Hình 343

Ta lại có $\widehat{AFK} = 90^o$ nên $\widehat{AHK} = 90^o$.

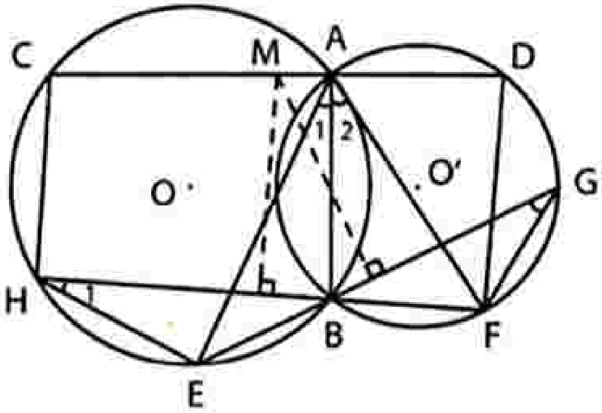
Tương tự $\widehat{AGK} = 90^o$. Vậy AHKG là tứ giác nội tiếp.

b) Tam giác ABM có BH là đường cao (câu a) và phân giác nên BH là đường trung trực của AM. Suy ra KA = KM. Tương tự KA = KN.

Tam giác KMN cân tại K có KE là đường cao nên EM = EN.

187. *(h.344)* a) $\widehat{H}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{G}$

$\Rightarrow$ E, F, G, H thuộc một đường tròn.



Hình 344

b) Kẻ cát tuyến CAD ⊥ AB thì $\widehat{BHC} = 90^o$, $\widehat{BFD} = 90^o$.

CHFD là hình thang vuông nên đường trung trực của HF đi qua trung điểm M của CD. (1)

Tương tự đường trung trực của EG đi qua trung điểm M của CD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là tâm đường tròn đi qua E, F, G, H và là điểm cố định khi E, F thay đổi.

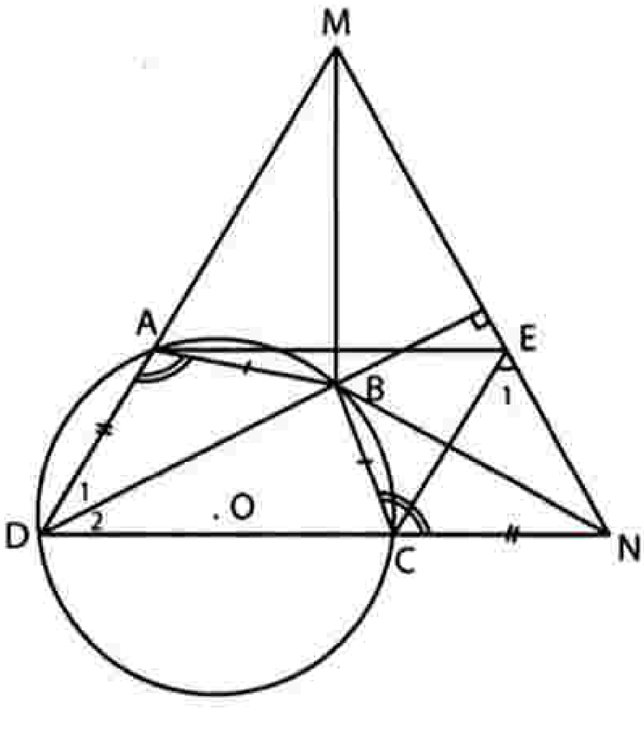
188. *(h.345)* ΔDMN cân tại D và $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$ nên BM = BN. (1)

$\widehat{E}_1 = \widehat{DMN}$ (do MD // EC)

$= \widehat{DNM} \Rightarrow$ CN = CE = AD.

Hãy chứng minh $\Delta BAD = \Delta BCN$ (c.g.c) để suy ra BD = BN. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BM = BN = BD.



Hình 345

189. *(h.346*, hình vẽ ứng với N nằm giữa F và C, các trường hợp khác tương tự).

Gọi G là trung điểm của DE.

Tứ giác IFKG là hình bình hành nên $\widehat{IFK} = \widehat{IGK} = \widehat{BAC} = 120^o$.

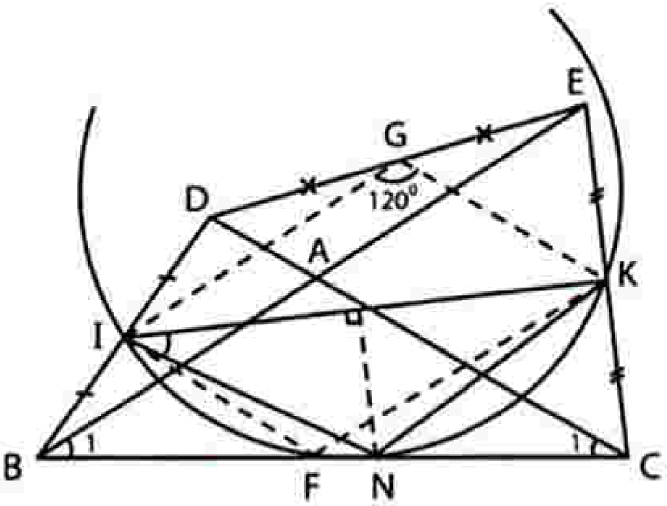
Ta có $\widehat{KIN} = \widehat{KFN} = \hat{B}_1 = 30^o$,

$\widehat{IKN} = \widehat{IFB} = \hat{C}_1 = 30^o$ nên ΔNIK cân tại N, N thuộc đường trung trực của IK suy ra N trùng M.

$\widehat{IGC} = 120^o$ nên G thuộc cung chứa góc 120^o vẽ trên IK.

Do NI = NK, $\widehat{INK} = 120^o$, N và G nằm khác phía đối với IK nên N là tâm của đường tròn chứa cung chứa góc 120^o nói trên.

Do đó N là tâm đường tròn (GIK).



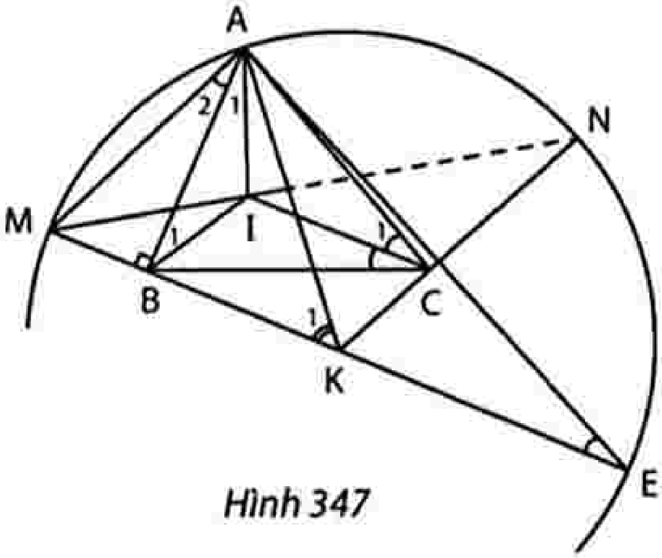
Hình 346

190. *(h.347)* Vẽ đường tròn (K ; KA), đường tròn này đi qua M và N.

Kẻ đường kính ME, ta có $\hat{E} = \frac{1}{2}\hat{K}_1$ (góc nội tiếp và góc ở tâm)

$= \frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}$ (vì ABKC nội tiếp) $= \hat{C}_1$.

Ta lại có $\hat{A}_2 = \hat{E}$ (cùng phụ $\widehat{BAE}$) nên $\hat{A}_2 = \hat{C}_1$.



Hình 347

Suy ra

$\widehat{MAI} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C}_1$. (1)

Ta có $\widehat{MBI} = \hat{B}_1 + 90^o$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MAI} + \widehat{MBI} = \hat{A}_1 + \hat{C}_1 + \hat{B}_1 + 90^o$

$= 90^o + 90^o = 180^o \Rightarrow$ AIBM là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{ABM} = 90^o$. (3)

Tương tự $\widehat{AIN} = 90^o$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra M, I, N thẳng hàng.

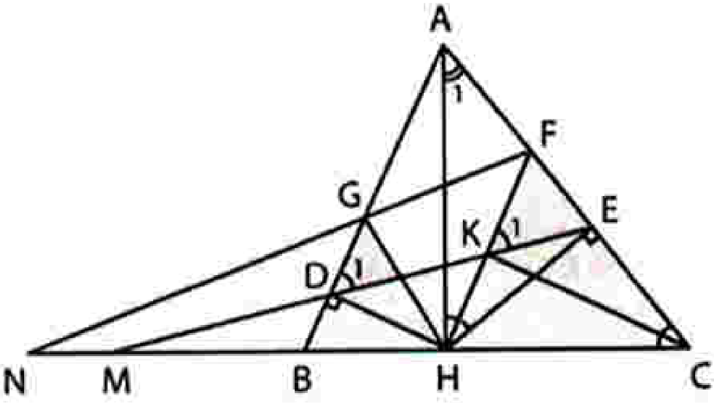
191. *(h.348)* a) $\widehat{ACH} = \widehat{AHE}$ (cùng phụ $\widehat{A}_1$) $= \widehat{D}_1$ (ADHE nội tiếp) $= \widehat{K}_1$ (AB // HF)

$\Rightarrow$ HKEC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CKH} = \widehat{CEH} = 90^o$.

b) CK $\perp$ HF (câu a)

$\Rightarrow$ CK $\perp$ AB $\Rightarrow$ CK // HD



Hình 348

(cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{HD}{CK}$. (1)

HG // CF $\Rightarrow \dfrac{NH}{NC} = \dfrac{HG}{CF}$. Lại có $\Delta BHG \backsim \Delta HCF$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{HG}{CF} = \dfrac{HD}{CK}$ (tỉ số hai đường cao tương ứng) nên $\dfrac{NH}{NC} = \dfrac{HD}{CK}$. (2)

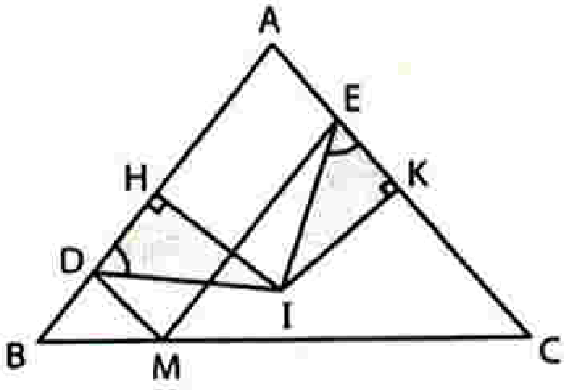
Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{NH}{NC}$, tức là M và N chia ngoài đoạn HC theo cùng một tỉ số, vậy M trùng N.

192. *(h.349)* Gọi H và K theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại I.

Ta có $\Delta IHD = \Delta IKE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{IDH} = \widehat{IEK} \Rightarrow$ ADIE là tứ giác nội tiếp.

Vậy đường tròn (ADE) đi qua điểm cố định I.



Hình 349

193. Lấy F thuộc cạnh CD sao cho

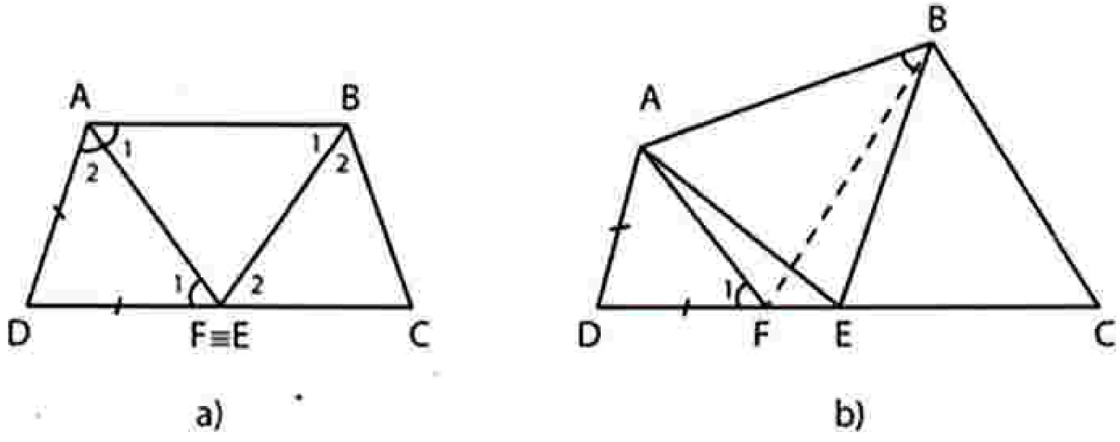
DF = DA. (1)

Xét hai trường hợp :

– Trường hợp F trùng E (h.350a).

$\hat{F}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_1 \Rightarrow$ AB // CD $\Rightarrow \hat{F}_2 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow$ BC = FC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AD + BC = DF + FC = CD.



Hình 350

– Trường hợp F khác E, chẳng hạn F nằm giữa D và E (h.350b).

ΔADF cân $\Rightarrow \hat{F}_1 = \dfrac{180^\circ - \hat{D}}{2}$. (3)

Tứ giác ABCD nội tiếp và BE là phân giác $\Rightarrow \widehat{ABE} = \dfrac{180^\circ - \hat{D}}{2}$. (4)

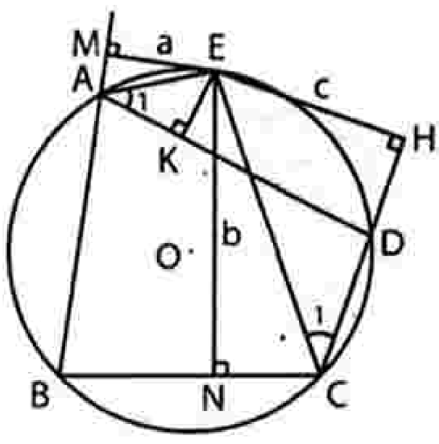
Từ (3) và (4) suy ra $\hat{F}_1 = \widehat{ABE} \Rightarrow$ ABEF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BFC} = \widehat{BAE}$. (5)

Tứ giác ABCD nội tiếp và AE là phân giác $\Rightarrow \widehat{BAE} = \dfrac{180^\circ - \hat{C}}{2}$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $\widehat{BFC} = \dfrac{180^\circ - \hat{C}}{2}$, chứng tỏ $\widehat{BFC} = \widehat{FBC} \Rightarrow FC = BC$. (7)

Từ (1) và (7) suy ra AD + BC = DF + FC = CD.

194. *(h.351)* Gọi M, N, H là hình chiếu của E trên AB, BC, CD.



Hình 351

Ta có $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \Delta EAK \backsim \Delta ECH$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EK}{EH} = \dfrac{EA}{EC}$. (1)

Tương tự $\Delta MAE \backsim \Delta NCE$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EM}{EN} = \dfrac{EA}{EC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EK}{EH} = \dfrac{EM}{EN} \Rightarrow \dfrac{EK}{c} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow EK = \dfrac{ac}{b}$.

195. *(h.352)* Kẻ $IH \perp AK$.

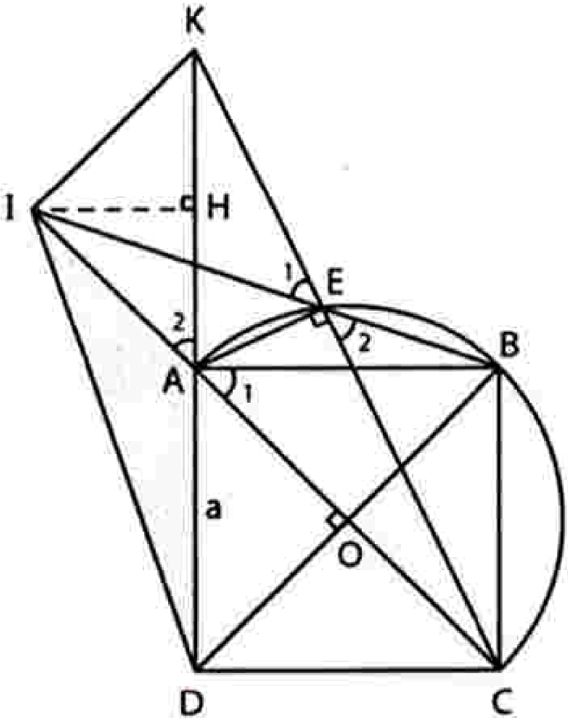
Ta có $S_{AID} = \frac{1}{2}AD.IH = \frac{a}{2}.IH$. (1)

Để tính IH, ta sẽ chứng minh ΔAIK vuông cân.

Tứ giác AEBC nội tiếp

$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \widehat{A}_1 = 45^o$,

mà $\widehat{A}_2 = 45^o$ nên tứ giác AIKE nội tiếp, suy ra $\widehat{AIK} = 90^o$. Ta lại có $\widehat{A}_2 = 45^o$ nên ΔAIK vuông cân tại I và $IH = \frac{AK}{2} = \frac{a}{2}$. (2)



Hình 352

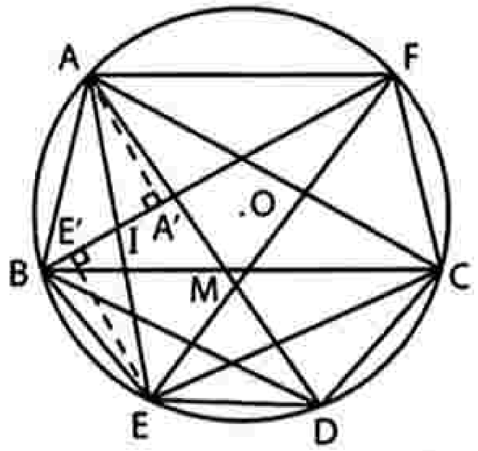
Từ (1) và (2) suy ra $S_{AID} = \frac{a^2}{4}$.

196. *(h.353)* a) Dễ chứng minh bổ đề : Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có $\widehat{A}$ bù A' thì

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{AB.AC}{A'B'.A'C'}.$$

Từ các hình thang cân AECF, BCDE ta có $AF = EC = BD$, $BE = CD$, $EF = CA$.

Do $\widehat{BAF}$ bù $\widehat{BEF}$, $\widehat{ABD}$ bù $\widehat{ACD}$ nên áp dụng bổ đề trên, ta có



Hình 353

$$\frac{S_{BAF}}{S_{BEF}} = \frac{AB.AF}{BE.EF} = \frac{AB.BD}{CD.CA} = \frac{S_{BAD}}{S_{CAD}}. \quad (1)$$

Ta lại có $S_{BAD} = S_{BMA} + S_{BMD} = S_{CMA} + S_{CMD} = S_{CAD}$. (2)

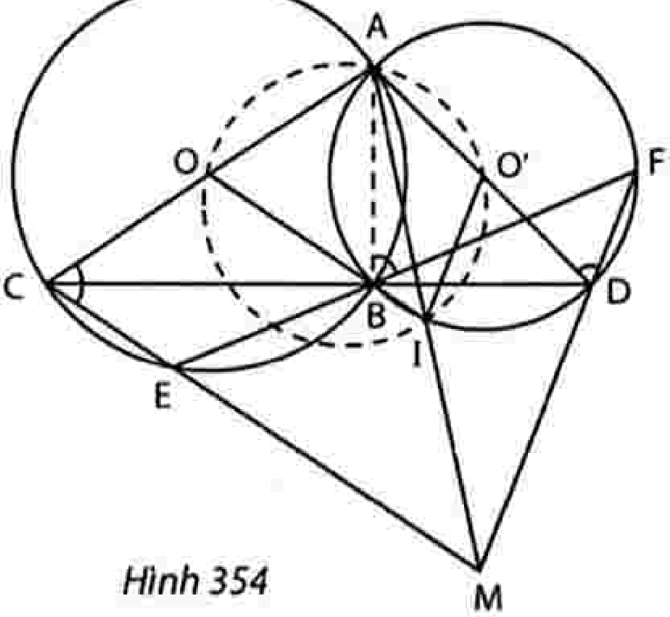
Từ (1) và (2) suy ra $S_{BAF} = S_{BEF}$.

b) Gọi I là giao điểm AE và BF. Từ câu a) suy ra các đường cao AA', EE' bằng nhau. Suy ra AI = IE.

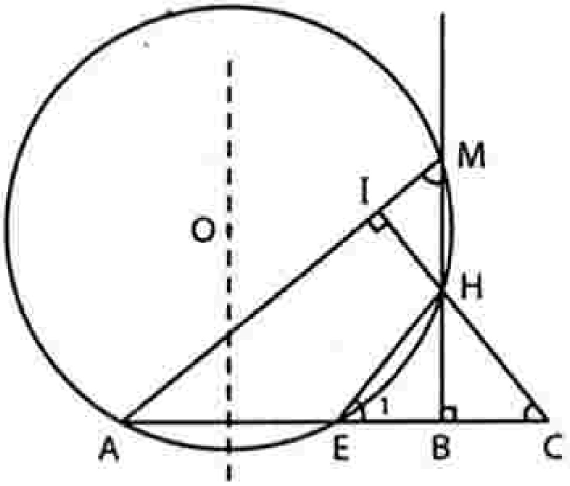
197. (*h.354*, hình vẽ ứng với B nằm giữa E và F, các trường hợp khác tương tự).

Hãy chứng minh $\widehat{ACE} = \widehat{ADF}$ để suy ra tứ giác ACMD nội tiếp, từ đó tứ giác AOIO' nội tiếp.

Quỹ tích của I là đường tròn ngoại tiếp ΔAOO'.



Hình 354



Hình 355

198. (*h.355*) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với AB.

Ta có $\widehat{C} = \widehat{M} = \widehat{E}_1 \Rightarrow HE = HC \Rightarrow EB = BC \Rightarrow$ E cố định.

Quỹ tích của O là đường trung trực của AE.

199. (*h.356*) Trên tia CB lấy điểm K sao cho CK = CA

(sở dĩ lấy điểm K như vậy vì khi D trùng B thì E trùng K).

Gọi I là giao điểm của AK và (O).

Ta sẽ chứng minh KIEC là tứ giác nội tiếp.

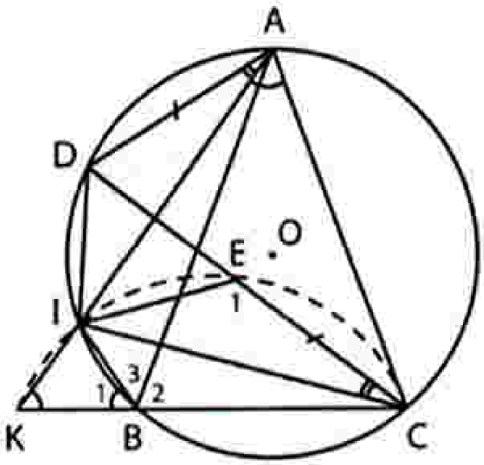
Đặt $\widehat{K} = \widehat{KAC} = \widehat{B}_1 = \alpha$. (1)

ΔCAK cân $\Rightarrow \widehat{ACK} + 2\alpha = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{B}_2 + 2\alpha = 180^o$

$\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{B}_3 = 2\alpha$. Do $\widehat{B}_1 = \alpha$ nên $\widehat{B}_3 = \alpha$

$\Rightarrow \widehat{ICA} = \widehat{B}_3 = \alpha$. (2)



Hình 356

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KAC} = \widehat{ICA}$ IA = IC.

$\Delta ICE = \Delta IAD$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{E}_1 = \widehat{IDA}$.

Ta lại có $\widehat{IDA}$ bù $\widehat{ICA}$, mà $\widehat{ICA} = \widehat{IAC} = \widehat{K}$ nên $\hat{E}_1$ bù $\widehat{K}$

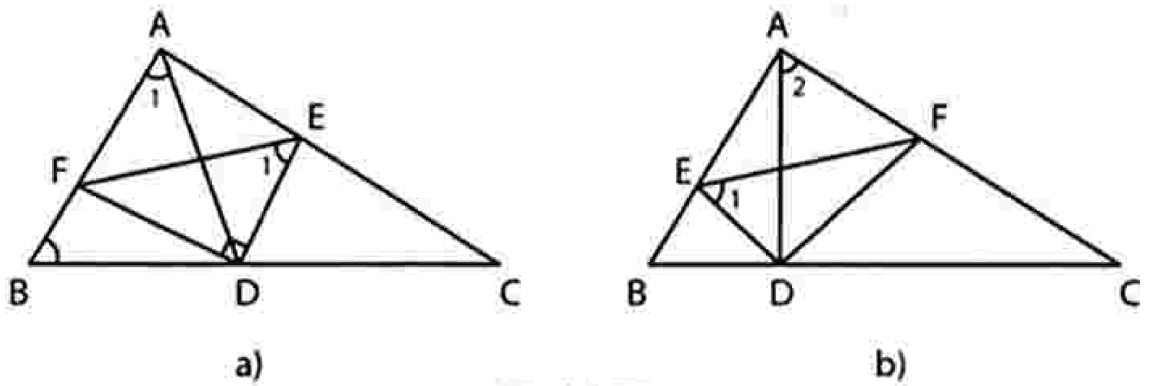
KIEC là tứ giác nội tiếp.

Quỹ tích của E là cung KIC của đường tròn ngoại tiếp ΔKIC.

200. Xét hai trường hợp :

– *Trường hợp E thuộc cạnh AC* (h.357a).

$\Delta DEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}$, mà $\hat{E}_1 = \hat{A}_1$ (AEDF nội tiếp) nên $\hat{B} = \hat{A}_1$, từ đó D là trung điểm của BC.



Hình 357

– *Trường hợp E thuộc cạnh AB* (h.357b).

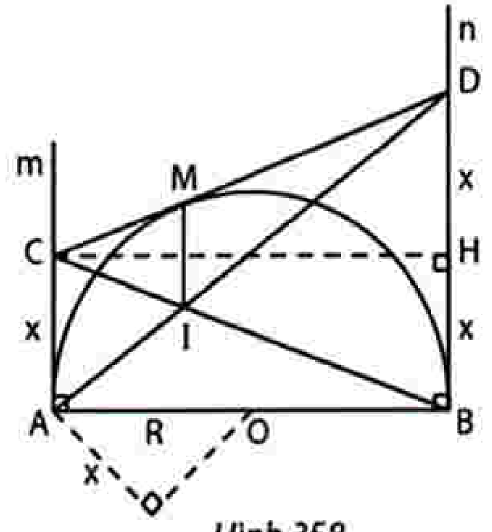
$\Delta DEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}$, mà $\hat{E}_1 = \hat{A}_2$ (AEDF nội tiếp) nên $\hat{B} = \hat{A}_2$ $\Rightarrow \hat{A}_2$ phụ $\hat{C}$ $AD \perp BC$.

Bài toán có vô số nghiệm hình:

– Hoặc D là trung điểm của BC, E và F tùy ý trên AC và AB sao cho $\widehat{EDF} = 90^\circ$ (h.357a) ;

– Hoặc D là chân đường cao kẻ từ A, còn E và F tùy ý trên AB và AC sao cho $\widehat{EDF} = 90^\circ$ (h.357b).

201. *(h.358)* Ta có $\frac{CI}{IB} = \frac{CA}{BD} = \frac{CM}{MD}$ nên MI // DB.



Hình 358

Điều kiện để hình thang MIBD nội tiếp là hình thang đó cân ⇔ ΔCBD cân tại C

⇔ đường cao CH là trung tuyến.

Đặt DH = HB = AC = x, OA = R thì

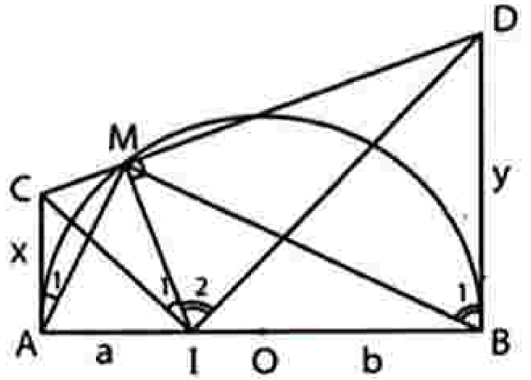
$CD = CM + MD = CA + DB = x + 2x = 3x.$

$CH^2 + DH^2 = CD^2$

$\Leftrightarrow (2R)^2 + x^2 = (3x)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{R^2}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ (x là cạnh góc vuông của tam giác vuông cân có cạnh huyền R).

202. *(h.359)*



Hình 359

AIMC, BIMD là các tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^o$

$\Rightarrow S_{CID} = \frac{1}{2}IC.ID.$ (1)

$\Delta IAC \backsim \Delta DBI$ (g.g), đặt AC = x, BD = y,

ta có $\frac{IA}{BD} = \frac{AC}{IB} \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{x}{b} \Rightarrow xy = ab.$ (2)

Ta có $IC^2 = a^2 + x^2 \geq 2ax$

$ID^2 = b^2 + y^2 \geq 2by$ nên $IC^2.ID^2 \geq 4abxy.$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra IC.ID ≥ 2ab. Kết hợp với (1) suy ra $S_{CID} \geq ab$.

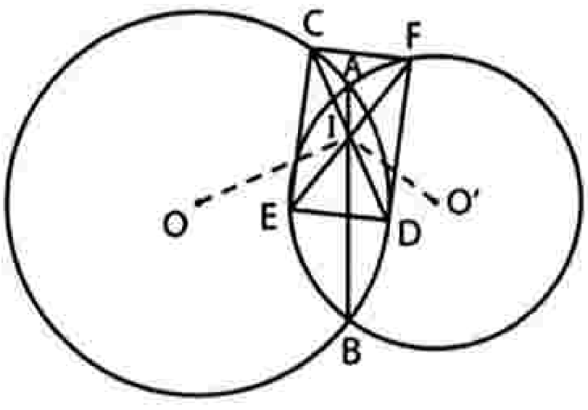
$\min S_{CID} = ab \Leftrightarrow x = a$ và $y = b$.

203. *(h.360)* Dễ thấy IC = ID và IE = IF.

Ta lại có IC.ID = IA.IB = IE.IF nên

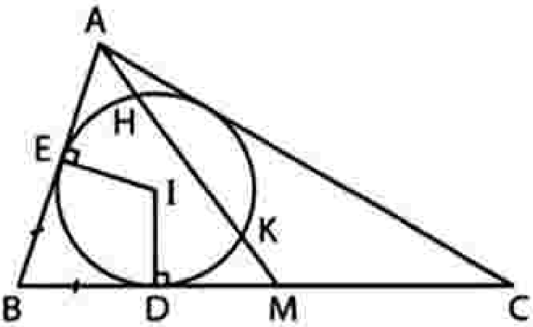
IC = ID = IE = IF.

Tứ giác CEDF là hình chữ nhật.



Hình 360

204. *(h.361)* Gọi D, E là các tiếp điểm của (I) trên BC, AB.



Hình 361

Theo hệ thức lượng trong đường tròn

$AE^2 = AH.AK$, $MD^2 = MH.MK$. (1)

Theo đề bài BA = BM nên AE = MD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AH.AK = MH.MK.

Đặt AH = x, MK = y, HK = a thì

$x(x + a) = y(y + a) \Rightarrow x^2 + ax - y^2 - ay = 0$

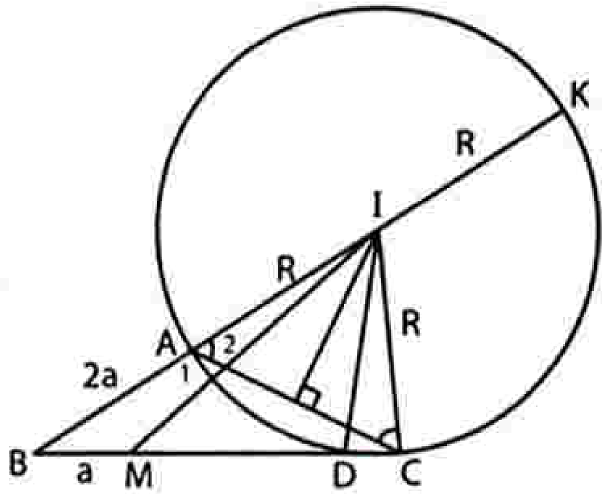
$\Rightarrow (x - y)(x + y + a) = 0 \Rightarrow x = y.$

205. *(h.362)* a) $\widehat{ICB} = \widehat{ICA} + \widehat{ACB} = \hat{A}_2 + \widehat{ACB}$

$= 180^o - (\hat{A}_1 - \widehat{ACB}) < 90^o$ (vì

$\hat{A}_1 - \widehat{ACB} > 90^o$).

b) Đặt IA = IC = R. Vẽ đường tròn (I ; R) cắt BC ở D.



Hình 362

Do $\widehat{ICB} < 90^o$ (câu a) nên D nằm giữa B và C.

Kẻ đường kính AK.

Đặt BM = a thì BA = 2a, BC = 4a.

Ta có BA.BK = BD.BC

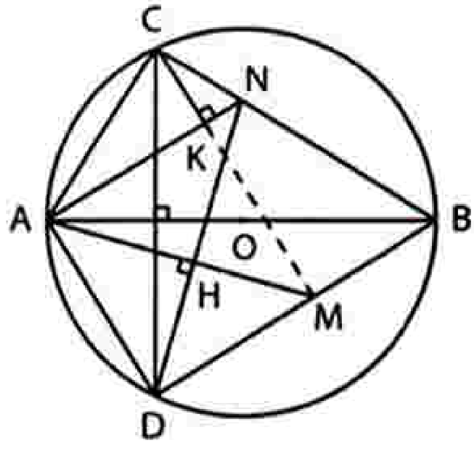
$\Rightarrow 2a(2a + 2R) = BD.4a$

$\Rightarrow BD = a + R \Rightarrow MD = R = ID \Rightarrow \Delta IDM$ cân tại D

$\Rightarrow \widehat{IMD} = \frac{1}{2}\widehat{IDC} = \frac{1}{2}\widehat{ICB}$, tức là

$\widehat{IMC} = \frac{1}{2}\widehat{ICM}$.

206. *(h.363)* Gọi H là giao điểm của AM và DN.



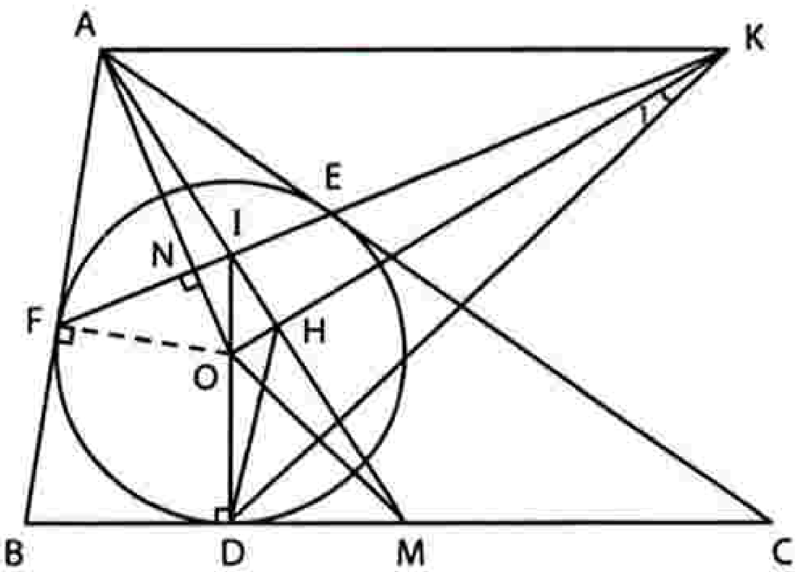
Hình 363

Ta có $AH.AM = AD^2 = AC^2 = AK.AN$

$\Rightarrow$ MHKN là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MKN} = 90^o$.

Kết hợp với $\widehat{CKN} = 90^o$ suy ra C, K, M thẳng hàng.

207. *(h.364)*



Hình 364

a) $OI \perp BC$ mà $BC // AK$ nên $OI \perp AK$. (1)

$EF \perp OA$ nên $KF \perp OA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AI \perp OK$.

b) Gọi N là giao điểm của OA và EF. Tứ giác ANHK nội tiếp

$\Rightarrow OH.OK = ON.OA$

$= OF^2 = OD^2$

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OD} = \dfrac{OD}{OK} \Rightarrow \Delta OHD \backsim \Delta ODK$ (c.g.c).

c) Tứ giác ODMH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{OMH}$. (3)

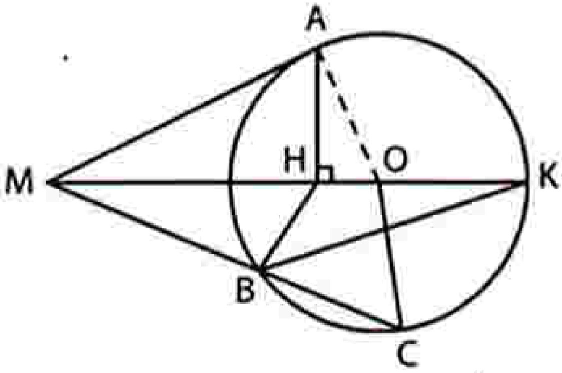
$\Delta OHD \backsim \Delta ODK \Rightarrow \widehat{ODH} = \widehat{K}_1$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{OMH} = \widehat{K}_1$.

Lại có $\widehat{OMH}$ phụ $\widehat{MOH}$ nên $\widehat{K}_1$ phụ $\widehat{MOH} \Rightarrow OM \perp DK$.

208. *(h.365)* a) $MB.MC = MA^2 = MH.MO$

$\Rightarrow$ BHOC là tứ giác nội tiếp.



Hình 365

b) Tứ giác BHOC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CBH} = \widehat{COK}$.

Ta lại có $\widehat{CBK} = \dfrac{1}{2}\widehat{COK}$ nên

$\widehat{CBK} = \dfrac{1}{2}\widehat{CBH}$

$\Rightarrow$ BK là tia phân giác của góc CBH.

209. *(h.366)* Gọi giao điểm của AO với đường tròn (O) lần lượt là K, H.

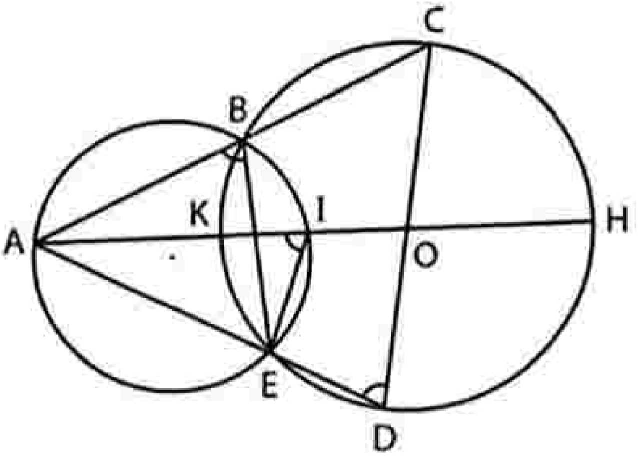
Ta có $\widehat{D} = \widehat{ABE} = \widehat{AIE}$

$\Rightarrow$ ODEI là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AI.AO = AE.AD = AK.AH$

$\Rightarrow AI.2R = R.3R$

$\Rightarrow AI = \frac{3}{2}R \Rightarrow OI = \frac{R}{2}.$



Hình 366

210. Xét trường hợp các góc ACD và ADC đều nhọn (h.366).

Gọi giao điểm của AO với đường tròn (O) là K, H.

Giải như Bài tập 209, ta được AI.AO = AK.AH nên I cố định.

Các trường hợp khác tương tự.

211. Xét hai trường hợp :

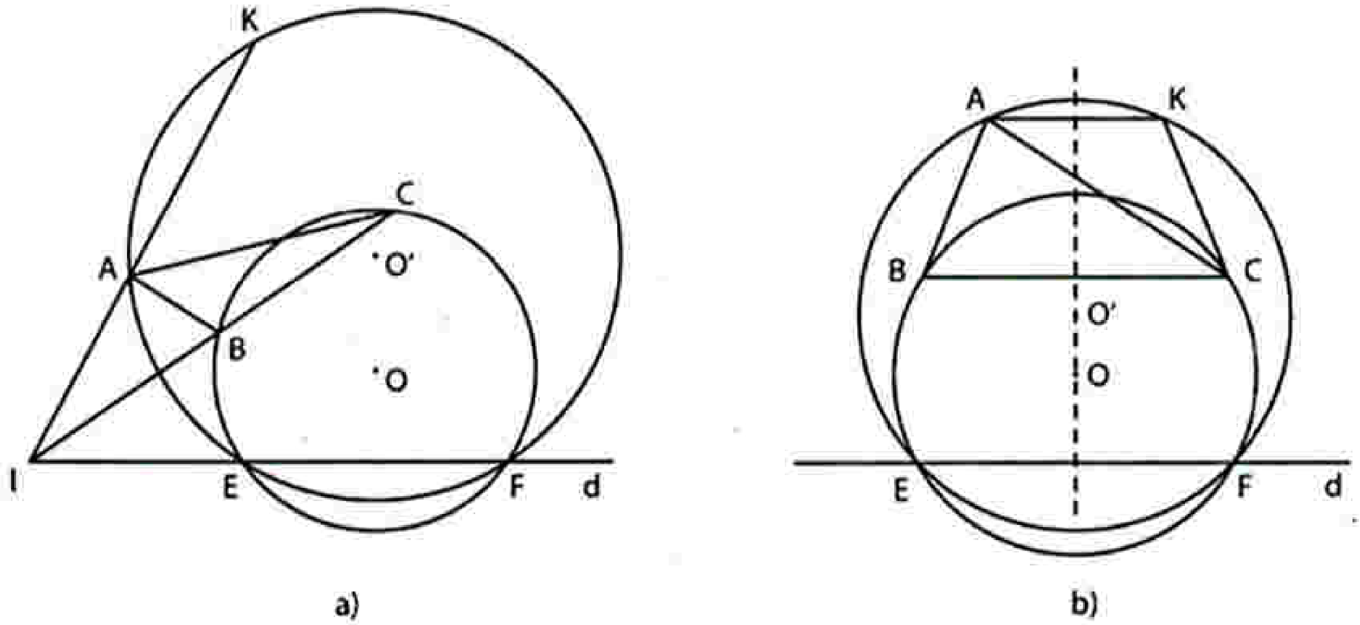
– *Trường hợp BC cắt d ở I* (h.367a) thì I cố định.

Gọi K là giao điểm của (O') và IA. Ta có IA.IK = IE.IF = IB.IC

$\Rightarrow$ A, K, B, C thuộc một đường tròn.

Vậy (O') đi qua hai điểm A, K cố định là giao điểm của đường tròn (ABC) và IA.

Trong trường hợp IA là tiếp tuyến của đường tròn (ABC) thì A và K trùng nhau.



Hình 367

– *Trường hợp BC // d* (h.367b).

Gọi K là điểm đối xứng với A qua OO'.

Do OO' là trục đối xứng của AK và BC nên K thuộc đường tròn (ABC).

Do OO' là trục đối xứng của AK và EF nên K thuộc đường tròn (O').

Vậy (O') đi qua hai điểm A, K cố định.

Trong trường hợp AB = AC thì A và K trùng nhau.

212. *(h.368)* a) $\widehat{ABE} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC} \Rightarrow BE \parallel AC$. Tương tự $CF \parallel AB$.

Suy ra $\Delta BEA \backsim \Delta CAF$ (g.g)

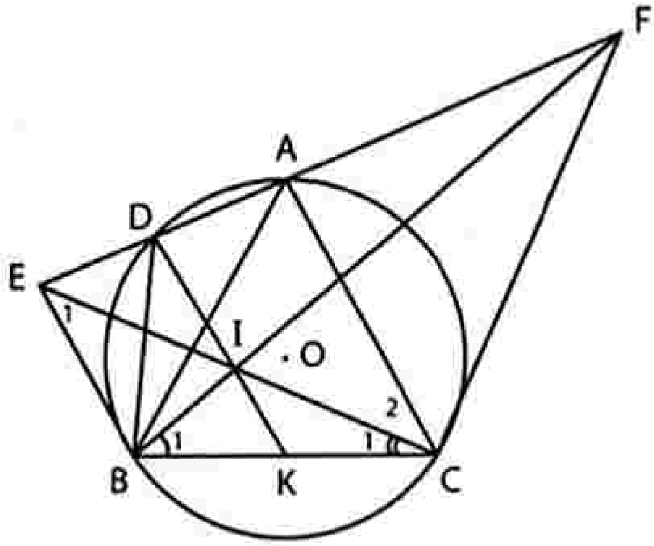
$\Rightarrow \dfrac{BE}{AC} = \dfrac{BA}{CF} \Rightarrow \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{CB}{CF}$

$\Rightarrow \Delta EBC \backsim \Delta BCF$ (c.g.c)

$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1$. Ta lại có

$\hat{E}_1 + \hat{C}_1 = \hat{C}_2 + \hat{C}_1 = 60^o$ nên

$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 60^o \Rightarrow \widehat{BIC} = 120^o$.



Hình 368

b) Từ câu a) suy ra $\widehat{BIE} = 60^o$. Ta lại có $\widehat{BDE} = \widehat{ACB} = 60^o$ nên BIDE là tứ giác nội tiếp. Tương tự CIDF là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC. Do $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$ nên BC là tiếp tuyến của đường tròn (BIE) tức là đường tròn (BIDE) $\Rightarrow KB^2 = KD.KI$. (1)

Tương tự BC là tiếp tuyến của đường tròn (CIDF) $\Rightarrow KC^2 = KD.KI$. (2)

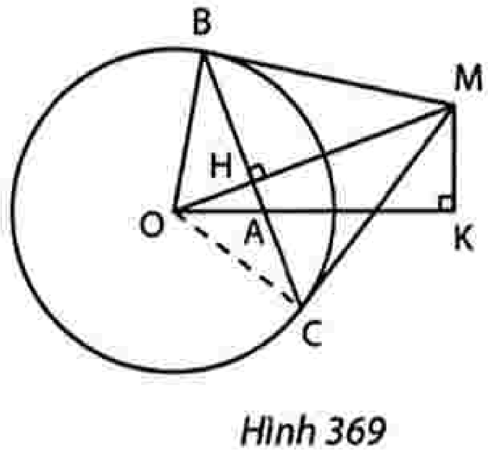
Từ (1) và (2) suy ra KB = KC.

Đường thẳng DI đi qua điểm cố định K là trung điểm của BC.

213. *(h.369)* Kẻ $MK \perp OA$. Gọi H là giao điểm của MO và BC. Tứ giác MHAK nội tiếp

$\Rightarrow OA.OK = OH.OM = OB^2 \Rightarrow$ K cố định.

Quỹ tích của M là đường vuông góc với OK tại K.



Hình 369

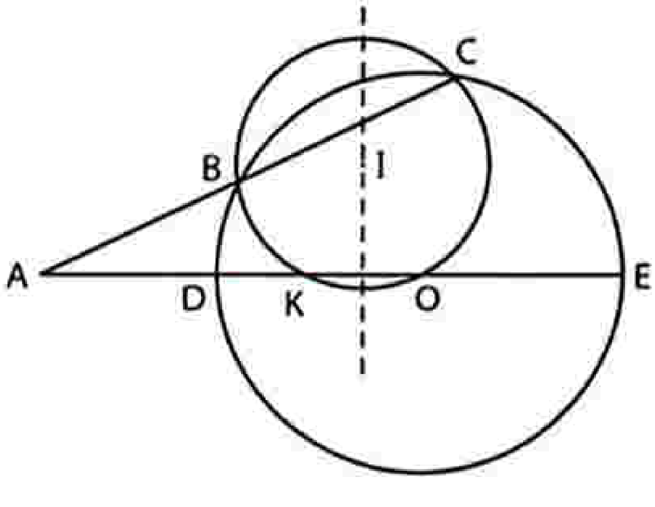
214. *(h.370)* AO cắt (I) ở điểm thứ hai K và cắt (O) ở D và E (D nằm giữa A và O).

Ta có AK.AO = AB.AC = AD.AE

$\Rightarrow$ AK.2R = R.3R $\Rightarrow$ AK $= \frac{3}{2}$R

$\Rightarrow$ K là trung điểm của OD.

Quỹ tích của I là đường trung trực của OK.



Hình 370

215. *(h.371)* a) Đường tròn ngoại tiếp ΔMAB đi qua O, có tâm I là trung điểm của OM.

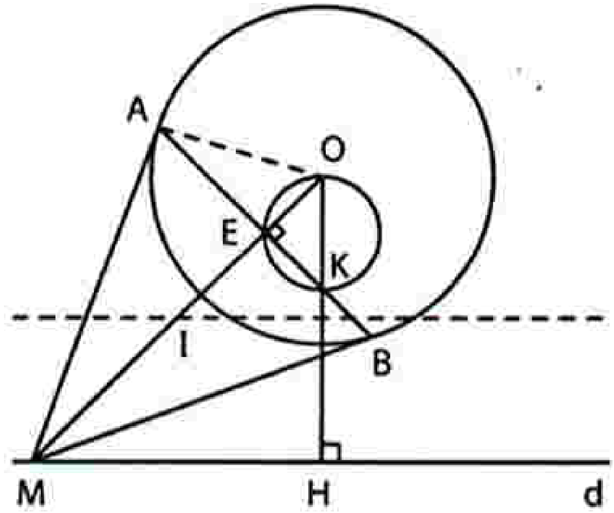
Quỹ tích của I là đường trung trực của OH (H là hình chiếu của O trên d).

b) Gọi K là giao điểm của AB và OH.

Ta có OK.OH = OE.OM = OA^2

$\Rightarrow$ K cố định.

Quỹ tích của E là đường tròn đường kính OK.



Hình 371

216. (h.372) *Phân tích:* Giả sử đã dựng được các điểm H, I, K thỏa mãn AI = AK, BK = BH, CH = CI.

Kẻ IE $\perp$ AC, KF $\perp$ AB, HD $\perp$ BC.

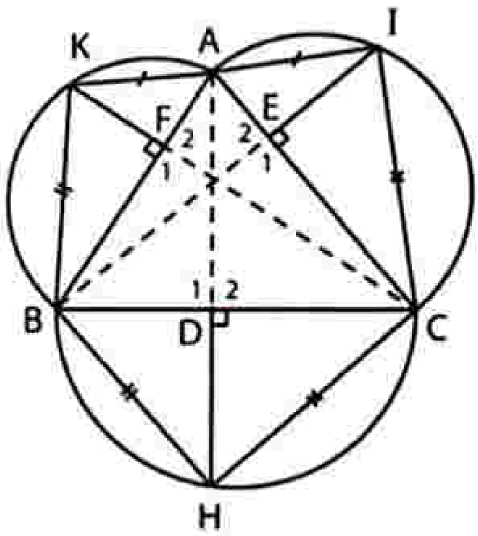
Ta có AE.AC = AI^2 = AK^2 = AF.AB

$\Rightarrow$ BFEC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{F}_1$. (*)

Tương tự $\hat{D}_1 = \hat{E}_2$, $\hat{D}_2 = \hat{F}_2$. Do (*) nên $\hat{E}_2 = \hat{F}_2 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^o$

$\Rightarrow$ A, D, H thẳng hàng. Tương tự B, E, I thẳng hàng và C, F, K thẳng hàng.



Hình 372

Cách dựng: Dựng H, I, K là giao điểm của các đường thẳng chứa đường cao của ΔABC với các nửa đường tròn.

217. *(h.373)* a) Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔBIC.

Tia phân giác của góc BID cắt (O) ở M, ID cắt (O) ở E.

Ta có $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \hat{I}_3$ nên

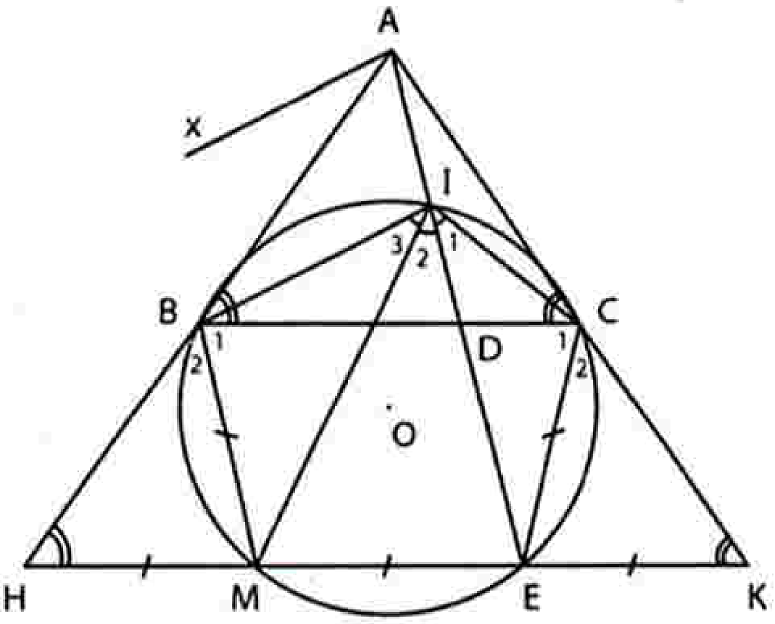
$\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{EM} = \overset{\frown}{MB}$

$\Rightarrow CE = EM = MB.$

Gọi H, K là giao điểm của AB, AC với ME.

Dễ chứng minh BC // ME nên BC // HK

$\Rightarrow \dfrac{HE}{EK} = \dfrac{BD}{DC} = 2$



Hình 373

$\Rightarrow HE = 2EK.$ (1)

BC // HK nên BH = CK.

BCEM là hình thang cân $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}_2$.

$\Delta MBH = \Delta ECK$ (c.g.c) $\Rightarrow HM = EK.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra HM = ME = EK.

ΔMHB có HM = ME = MB nên là tam giác cân.

Các tam giác cân MHB và ABC có góc đáy bằng nhau nên $\widehat{BMH} = \widehat{BAC}$, lại có $\widehat{BMH} = \widehat{BIE}$ (BIEM nội tiếp) nên $\widehat{BIE} = \widehat{BAC}$, tức là $\widehat{BID} = \widehat{BAC}$.

b) Dựng I trên AD sao cho $\widehat{BID} = \widehat{BAC}$ như sau :

– Dựng tia Ax sao cho $\widehat{DAx} = \widehat{BAC}$ (Ax và B cùng phía đối với AD).

– Dựng đường thẳng đi qua B và song song với Ax, cắt AD ở I.

218. *(h.374)*

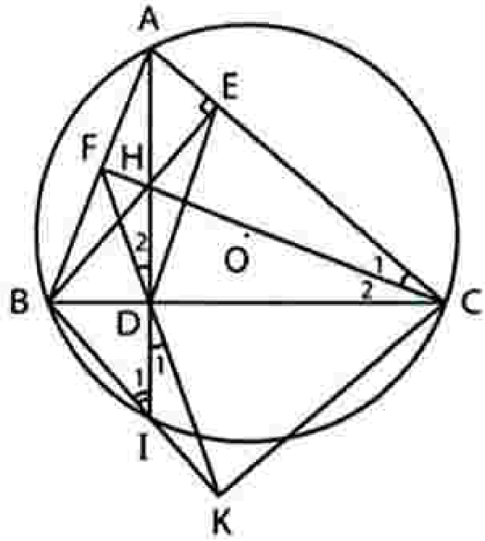
Ta có $\widehat{BKF} = \hat{I}_1 - \hat{D}_1$. (1)

$\hat{C}_2 = \widehat{ACB} - \hat{C}_1$. (2)

Ta lại có $\hat{I}_1 = \widehat{ACB}$ và $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{C}_1$

nên từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BKF} = \hat{C}_2$

$\Rightarrow$ BFCK là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKC} = 90^o$.



Hình 374

219. *(h.375)*

Đường tròn đường kính AH đi qua E và F.

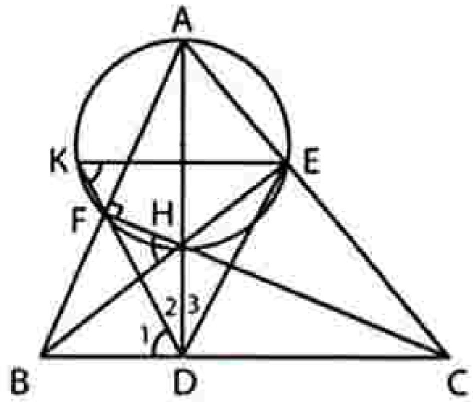
Ta có $\hat{K} = \widehat{BHF} = \hat{D}_1 \Rightarrow KE \parallel BC$.

Ta lại có $DH \perp BC$ nên $DH \perp KE$. (1)

Dễ chứng minh $\hat{D}_2 = \hat{D}_3$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔDEK cân tại D

$\Rightarrow DE = DK$.



Hình 375

220. (*h.376*, hình vẽ ứng với ΔABC nhọn, các trường hợp khác tương tự).

a) IK.IA = IB.IC = IE.ID

$\Rightarrow$ AKED là tứ giác nội tiếp.

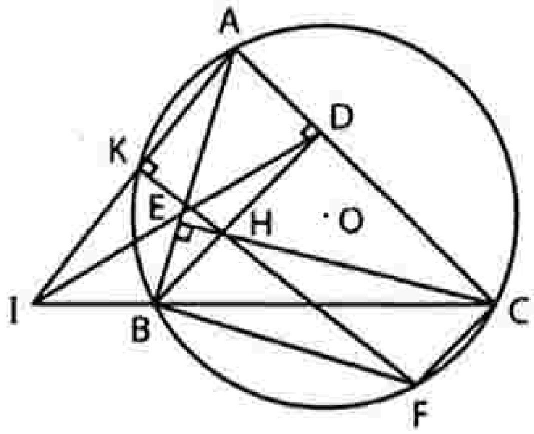
Lại có tứ giác AEHD nội tiếp nên

A, K, E, H, D thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow \widehat{AKH} = 90^o$.

b) Gọi F là giao điểm của KH và (O).

Do câu a) nên $\widehat{AKF} = 90^o \Rightarrow \widehat{ACF} = 90^o$.

Hãy chứng minh BHCF là hình bình hành để suy ra KH đi qua trung điểm của BC, và đó là điểm cố định.



Hình 376

221. *(h.377)*

a) Ta có $\widehat{EKD} = 360^o - \widehat{EKI} - \widehat{DKI}$

$= 360^o - (180^o - \hat{B}) - (180^o - \hat{C})$

$= \hat{B} + \hat{C}$ nên $\widehat{EKD} + \hat{A} = 180^o$

$\Rightarrow$ AEKD là tứ giác nội tiếp.

Ta lại có AEHD là tứ giác nội tiếp nên A, E, H, K, D thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow \widehat{AKH} = 90^o$.

b) $\widehat{AKE} = \widehat{ADE}$ (AEKD nội tiếp)

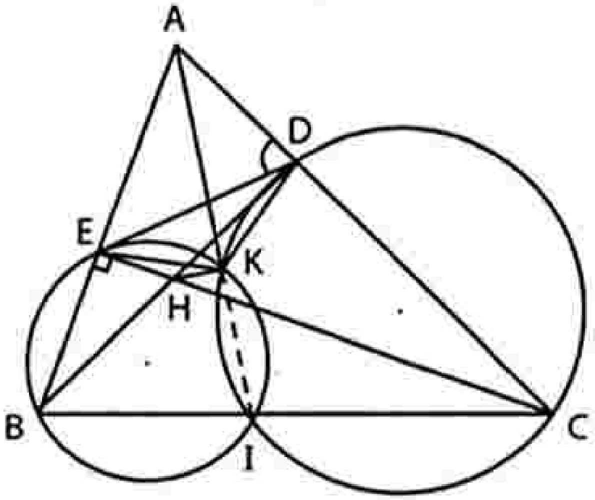
$= \widehat{ABC}$ (BEDC nội tiếp). (1)

$\widehat{EKI}$ bù $\widehat{ABC}$ (BEKI nội tiếp). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AKE}$ bù $\widehat{EKI}$

$\Rightarrow$ A, K, I thẳng hàng.

Do $\widehat{AKH} = 90^o$ nên $\widehat{HKI} = 90^o$.



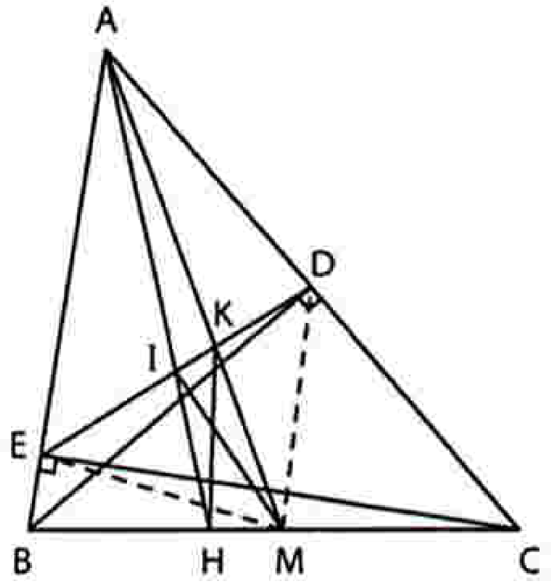
Hình 377

222. *(h.378)* Dễ chứng minh $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (g.g), lại có AI và AM là các đường trung tuyến tương ứng nên

$\widehat{AID} = \widehat{AMB}$, suy ra IKMH là tứ giác nội tiếp.

Ta có MD = ME và ID = IE nên $MI \perp DE$.

IKMH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KHM} = \widehat{KIM} = 90^o$.



Hình 378

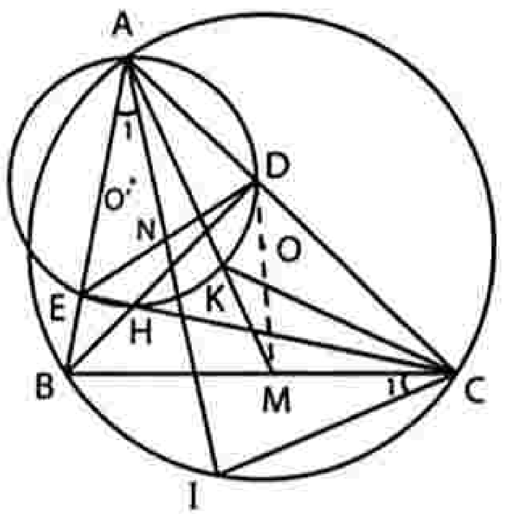
223. *(h.379)* a) $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (g.g), AN và AM là các đường trung tuyến tương ứng

$\Rightarrow \widehat{NAE} = \widehat{MAC}$. (1)

b) Dễ chứng minh MD là tiếp tuyến của (O') $\Rightarrow MK.MA = MD^2 = MC^2$

$\Rightarrow \dfrac{MC}{MK} = \dfrac{MA}{MC}$

$\Rightarrow \Delta MCK \backsim \Delta MAC$ (c.g.c).



Hình 379

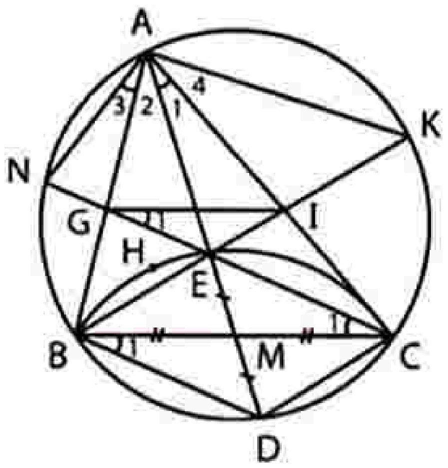
c) Từ câu b suy ra $\widehat{MCK} = \widehat{MAC}$. (2)

Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ tức là $\widehat{NAE} = \widehat{MCI}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MCK} = \widehat{MCI}$. Chứng minh tương tự $\widehat{MBK} = \widehat{MBI}$.

Vậy I đối xứng với K qua BC.

224. *(h.380)* a) Do điểm đối xứng với H qua BC nằm trên (O) nên cung BHC đối xứng với cung BC qua BC và cũng đối xứng với cung BC qua M.



Hình 380

Gọi D là giao điểm thứ hai của AM và (O) thì ME = MD.

BECD là hình bình hành

$\Rightarrow$ EC // BD và $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = \widehat{GEI}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{GEI} = \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^o$

$\Rightarrow$ AIEG là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{G}_1 = \widehat{A}_1$.

Ta lại có $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ nên $\widehat{G}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow$ GI // BC.

b) $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{A}_3$. Tương tự $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_4$.

Suy ra $\widehat{A}_3 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_4$

$\Rightarrow \widehat{MAN} = \widehat{MAK}$.

225. *(h.381)*

a) $\widehat{AKC} = \widehat{H}_1 = \widehat{ABC} = \widehat{ADE}$

$\Rightarrow$ CKID là tứ giác nội tiếp.

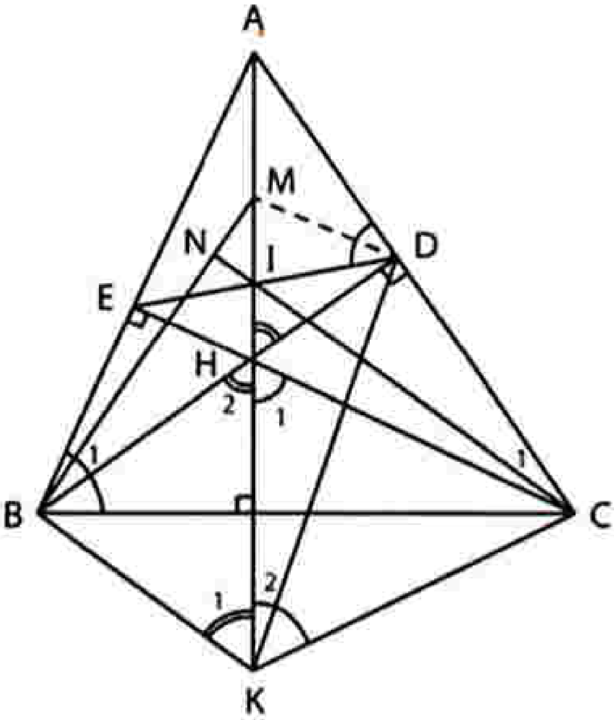
Ta có $\widehat{MDH} = \widehat{MHD} = \widehat{H}_2 = \widehat{K}_1$

$\Rightarrow$ BKDM là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi N là giao điểm của CI và BM.

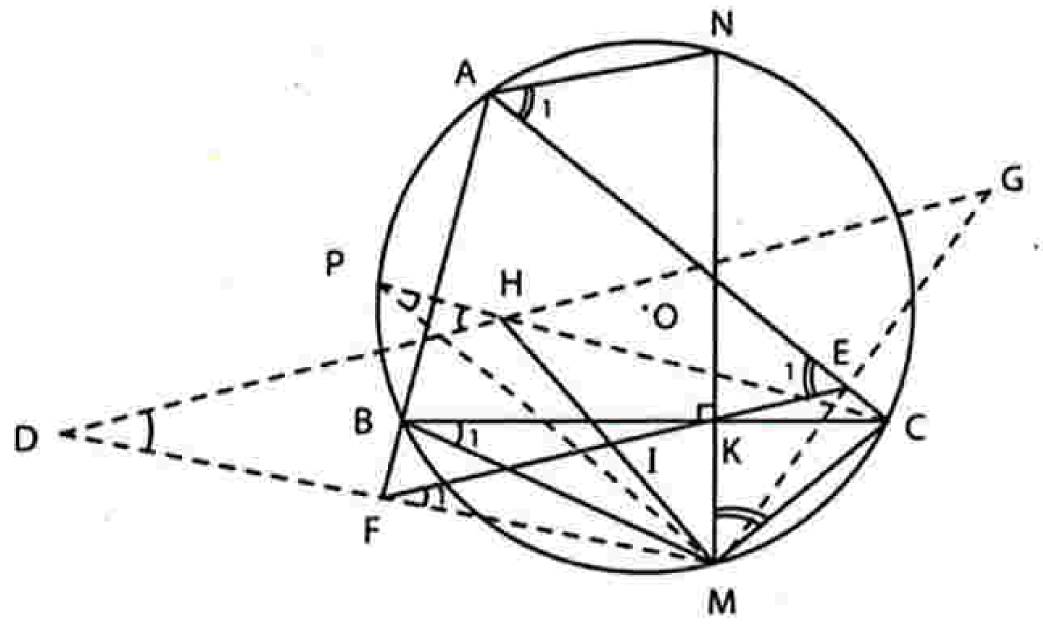
Từ các tứ giác nội tiếp ở câu a) suy ra $\widehat{C}_1 = \widehat{K}_2 = \widehat{B}_1$

$\Rightarrow$ BCDN là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BNC} = \widehat{BDC} = 90^o$.



Hình 381

226. (*h.382*, hình vẽ ứng với E thuộc cạnh AC).



Hình 382

a) $\widehat{E}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{NMC} \Rightarrow$ MKEC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MKC} = 90^o$

$\Rightarrow$ ME $\perp$ AC. Tương tự MF $\perp$ AB.

b) Gọi giao điểm của CH với (O) là P thì P đối xứng với H qua AB.

Ta có $\widehat{D} = \widehat{DHP}$ (HP // MD) $= \widehat{P} = \widehat{B}_1 = \widehat{F}_1 \Rightarrow$ DH // FE.

Tương tự GH // FE nên D, H, G thẳng hàng.

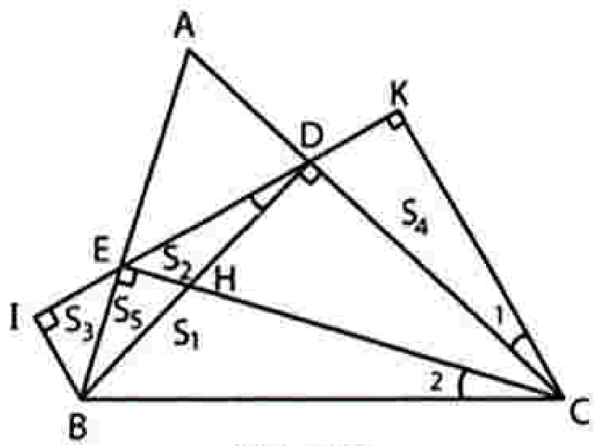
c) EF là đường trung bình của ΔMDG nên IH = IM.

227. *(h.383)*

Đặt $S_{BEH} = S_5$. Ta có $\widehat{EDB} = \widehat{C}_1$ (cùng phụ $\widehat{CDK}$) và $\widehat{EDB} = \widehat{C}_2$ nên $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$

$\Rightarrow \Delta DIB \backsim \Delta CKD \backsim \Delta CEB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{S_{DIB}}{S_{CEB}} + \frac{S_{CKD}}{S_{CEB}} = \left(\frac{DB}{CB}\right)^2 + \left(\frac{CD}{CB}\right)^2 = 1$$



Hình 383

$\Rightarrow S_{DIB} + S_{CKD} = S_{CEB} \Rightarrow S_2 + S_3 + S_5 + S_4 = S_1 + S_5 \Rightarrow S_3 + S_4 = S_1 - S_2.$

228. *(h.384)* Dễ chứng minh OA ⊥ EF, OB ⊥ DF, OC ⊥ DE.

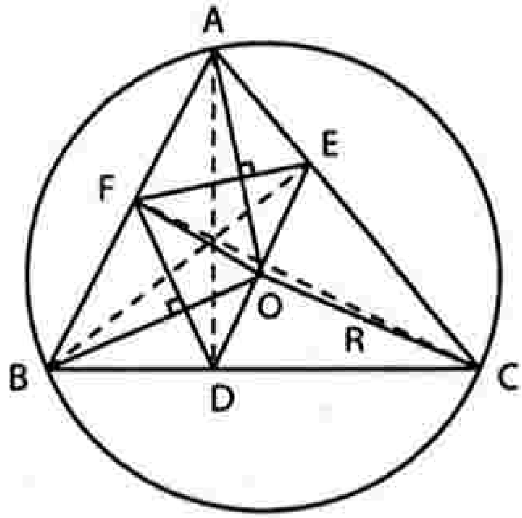
Điểm O nằm trong tam giác ABC nên

$S_{ABC} = S_{OEAF} + S_{ODBF} + S_{ODCE}$

$= \dfrac{1}{2}R(EF + DF + DE).$

Do đó chu vi ΔDEF lớn nhất ⇔ S_{ABC} lớn nhất

⇔ A là điểm chính giữa của cung lớn BC.



Hình 384

229. *(h.385)*

a) Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$. $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \cos\alpha$ (không đổi) ⇒ DE có độ dài không đổi.

b) $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ (đối xứng qua AH)

$\Rightarrow \widehat{EHI} = \widehat{DHK}$

$\Rightarrow \Delta EHI \backsim \Delta DHK$ (g.g)

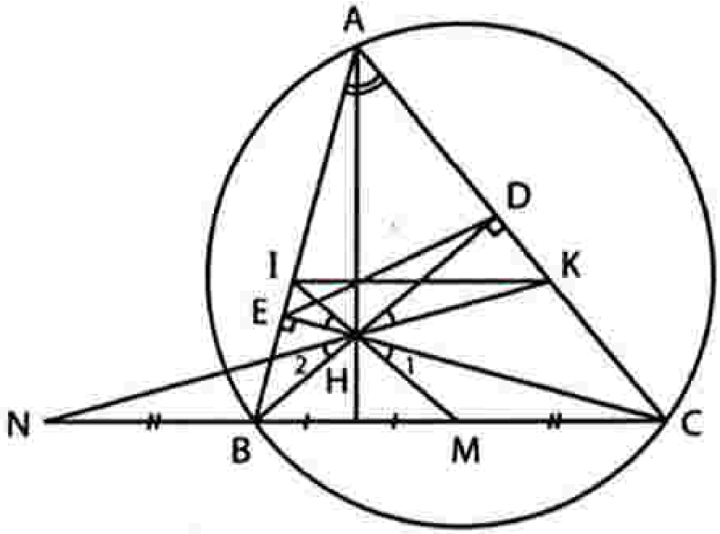
$\Rightarrow \dfrac{HI}{HK} = \dfrac{HE}{HD}$

$\Rightarrow \Delta HIK \backsim \Delta HED$ (c.g.c)

$\Rightarrow \dfrac{IK}{DE} = \dfrac{HI}{HE} \geq 1 \Rightarrow IK \geq DE$ (không đổi).

minIK = DE ⇔ I trùng E và K trùng D

⇔ A là điểm chính giữa của cung lớn BC.



Hình 385

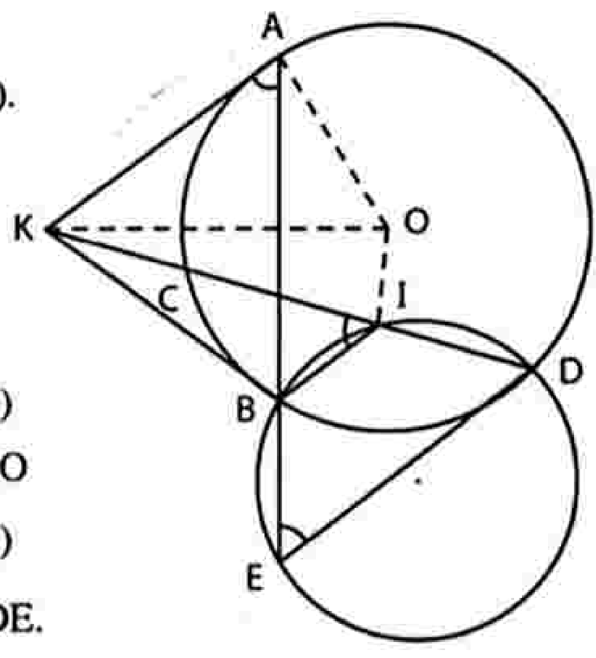
230. *(h.386)* Tứ giác BIDE nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{BIK}$. (1)

A, K, B, I thuộc đường tròn đường kính KO

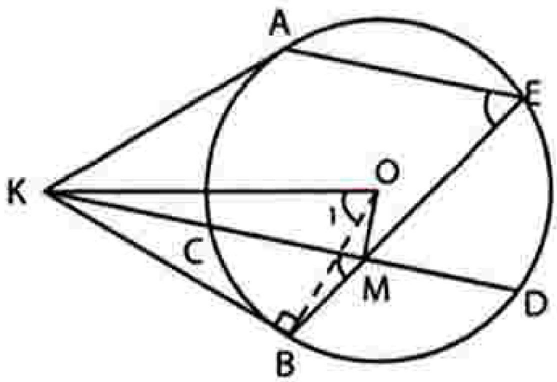
$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{BIK}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{E} = \widehat{A}$, do đó AK // DE.



Hình 386

231. *(h.387)* $\widehat{KMB} = \hat{E} = \hat{O}_1 \Rightarrow$ K, O, M, B thuộc một đường tròn, mà $\widehat{OBK} = 90^o$ nên $\widehat{OMK} = 90^o$. Vậy MC = MD.



Hình 387

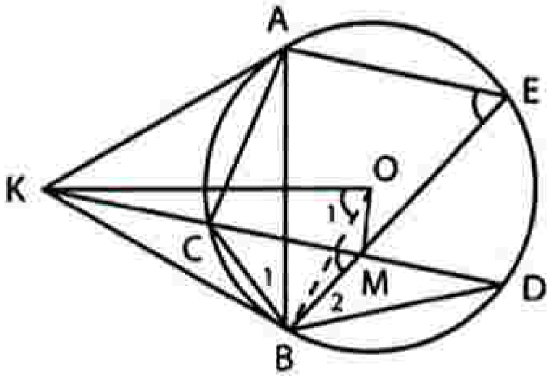
232. *(h.388)* a) K, O, M, B thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{KMB} = \hat{O}_1 = \hat{E} \Rightarrow AE // CD$.

b) AE // CD (câu a) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

$\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD}$

$\Rightarrow$ AC là tiếp tuyến của đường tròn (BMC).



Hình 388

233. *(h.389)*

a) Xem Ví dụ 118 (Cách 1).

b) $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (câu a) và $\widehat{AEG} = \widehat{ABH}$ nên $\Delta AEG \backsim \Delta ABH$ (g.g)

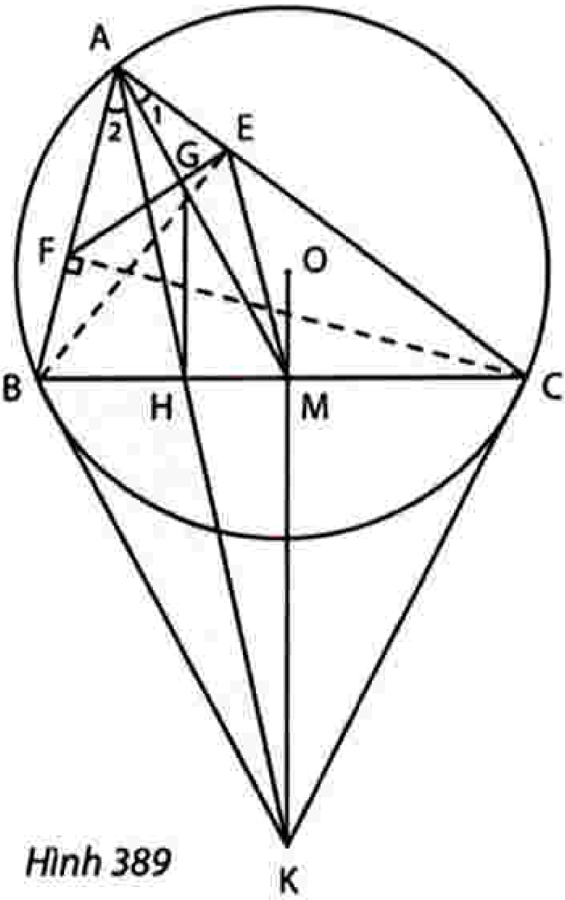
$\Rightarrow \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{AE}{AB}$. (1)

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (câu a) và $\widehat{AEM} = \widehat{ABK}$ (đã chứng minh trong cách giải câu a) nên $\Delta AEM \backsim \Delta ABK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AM}{AK}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AG}{AH} = \dfrac{AM}{AK}$

$\Rightarrow \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{AH}{AK} \Rightarrow GH // MK$.



Hình 389

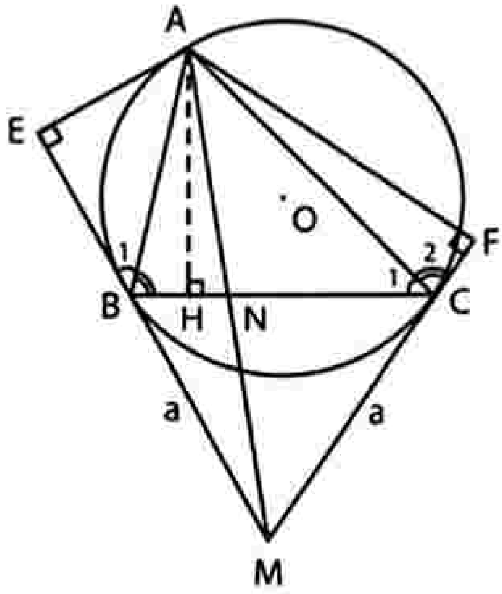
234. *(h.390)* Kẻ $AE \perp MB$, $AF \perp MC$.

Đặt $MB = MC = a$.

Ta có $\dfrac{NC}{NB} = \dfrac{S_{NCM}}{S_{NBM}} = \dfrac{S_{NCA}}{S_{NBA}}$

$= \dfrac{S_{NCM} + S_{NCA}}{S_{NBM} + S_{NBA}} = \dfrac{S_{ACM}}{S_{ABM}}$

$$= \frac{\frac{a}{2}.AF}{\frac{a}{2}.AE} = \frac{AF}{AE} = \frac{AC\sin\widehat{C_2}}{AB\sin\widehat{B_1}}. \qquad (1)$$



Hình 390

Kẻ $AH \perp BC$, ta có $\widehat{C_2} = \widehat{ABC}$, $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$

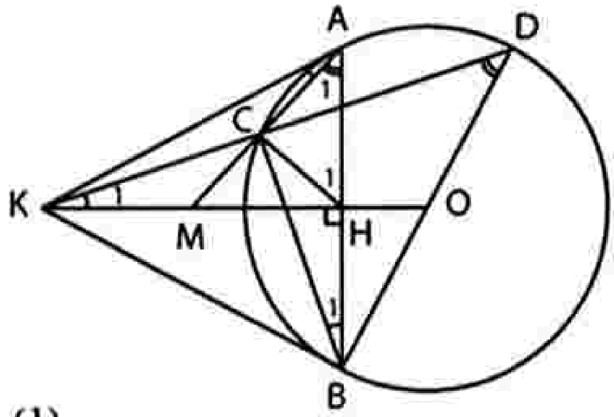
$$\text{nên } \frac{\sin\widehat{C_2}}{\sin\widehat{B_1}} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{C_1}} = \frac{AH}{AB} : \frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{NC}{NB} = \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 = k^2$.

235. *(h.391)* a) $\widehat{BCD} = 90^\circ$, KCHB là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{BKC}$

$\Rightarrow \widehat{H_1} + \widehat{A_1} = \widehat{BKC} + \widehat{D} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACH} = 90^\circ$.



Hình 391

b) Xét ΔAHM vuông tại H, ta có

$MH^2 = MA.MC$. (1)

$\widehat{K_1} = \widehat{B_1} = \widehat{KAC}$

$\Rightarrow \Delta KMC \backsim \Delta AMK$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{MK}{MA} = \dfrac{MC}{MK} \Rightarrow MK^2 = MA.MC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MH = MK$.

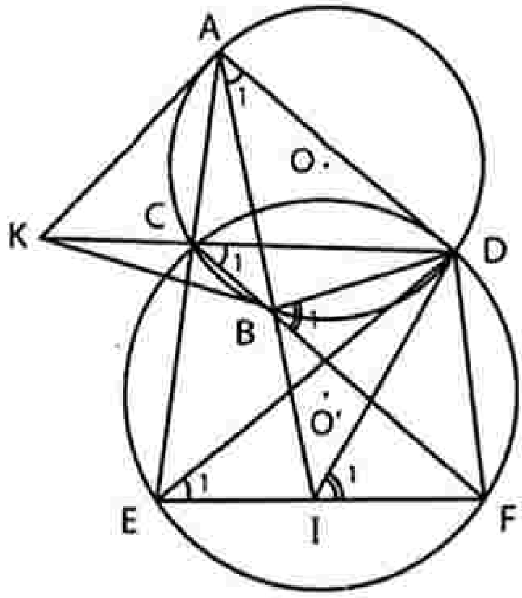
236. *(h.392)* a) $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 = \widehat{E}_1 \Rightarrow$ ADIE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{CAD}$.

Ta lại có $\widehat{CAD} = \widehat{B}_1$ nên $\widehat{I}_1 = \widehat{B}_1$, suy ra BDFI là tứ giác nội tiếp.

b) $\widehat{IFD} = \widehat{ACD}$ (CDFE nội tiếp) và $\widehat{I}_1 = \widehat{CAD}$ nên $\Delta IFD \backsim \Delta ACD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{IF}{ID} = \frac{AC}{AD}. \qquad (1)$$

$$\Delta EID \backsim \Delta CBD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{BC}{BD}. \qquad (2)$$



Hình 392

Từ (1), (2) và bổ đề $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$ suy ra IE = IF.

237. *(h.393)* Gọi K là trung điểm của AO. Ta có KF là đường trung bình của ΔOAB nên KF // AB, từ đó KF ⊥ OB.

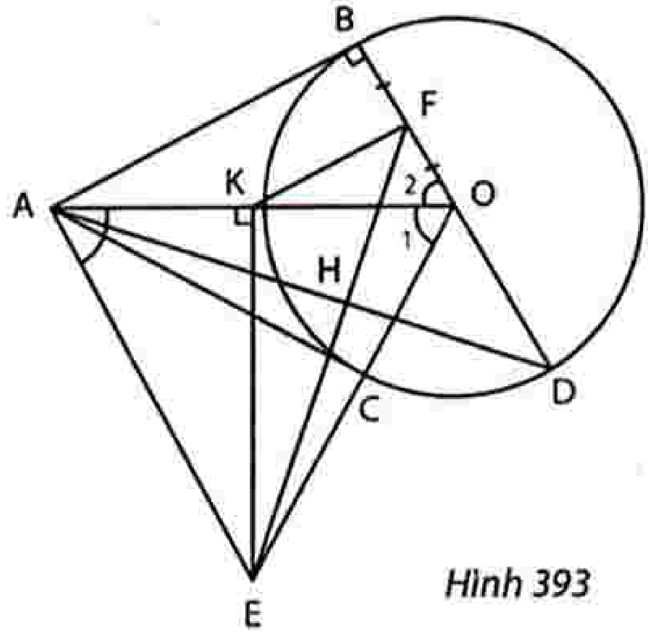
$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \widehat{OAE} \Rightarrow \Delta OAE$ cân và EK ⊥ OA.

$\Delta OFK \backsim \Delta OKE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KF}{KE} = \frac{OF}{OK} = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OA}$$

$\Rightarrow \Delta KEF \backsim \Delta OAD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{KEF} = \widehat{OAD}$



Hình 393

$\Rightarrow$ AEHK là tứ giác nội tiếp (H là giao điểm của EF và AD)

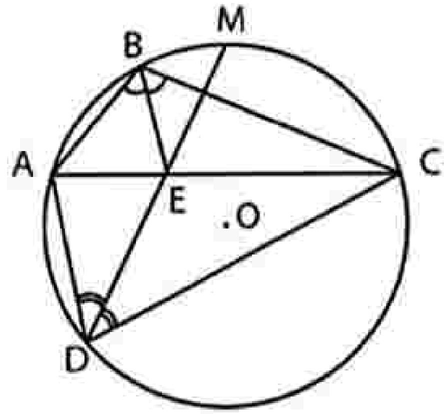
$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AKE} = 90^\circ$.

238. *(h.394)* *Cách dựng*: Dựng BE là đường phân giác của ΔABC.

Dựng M là điểm chính giữa cung AC có chứa B.

Dựng D là giao điểm của ME và (O).

Chứng minh: $\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC} = \frac{DA}{DC}$ (tính chất đường phân giác) $\Rightarrow$ AB.CD = AD.BC.



Hình 394

239. *(h.395)* a) Gọi K là giao điểm của các đường tròn (NAB), (MBC).

Bạn đọc chứng minh M, K, N thẳng hàng (xem Ví dụ 121).

Ta có $MN^2 = MN(MK + NK)$

$= MN.MK + NM.NK$. (1)

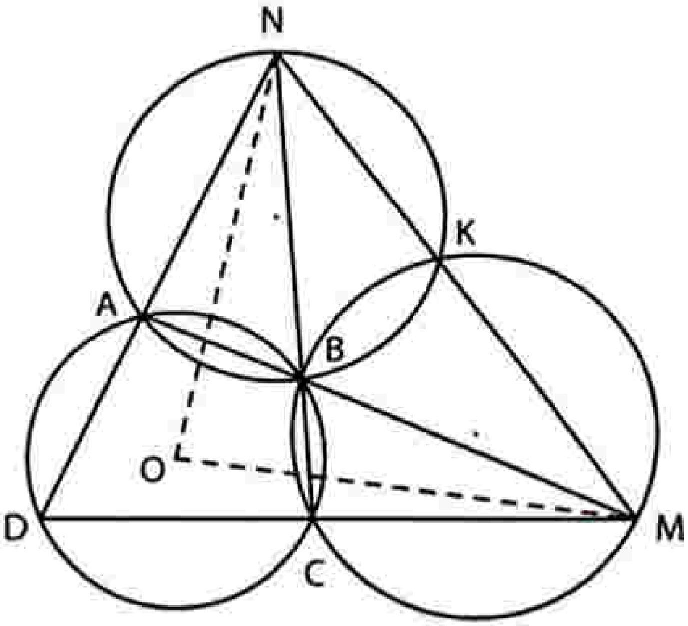
$MN.MK = MA.MB = MC.MD$. (2)

$NM.NK = NB.NC = NA.ND$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$MN^2 = MC.MD + NA.ND$. (4)

b) Gọi R là bán kính của đường tròn (O).



Hình 395

Theo hệ thức lượng trong đường tròn, từ (4) suy ra

$$MN^2 = (MO^2 - R^2) + (NO^2 - R^2) = MO^2 + NO^2 - 2R^2. \quad (5)$$

Giả sử $\widehat{MON} = 90^o$ thì $MN^2 = MO^2 + NO^2$ nên từ (5) suy ra R = 0, vô lí.

Vậy $\widehat{MON} \neq 90^o$.

240. *(h.396)* a) $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$

$\Rightarrow \widehat{NAI} = \widehat{NBD} = \widehat{NKD}$

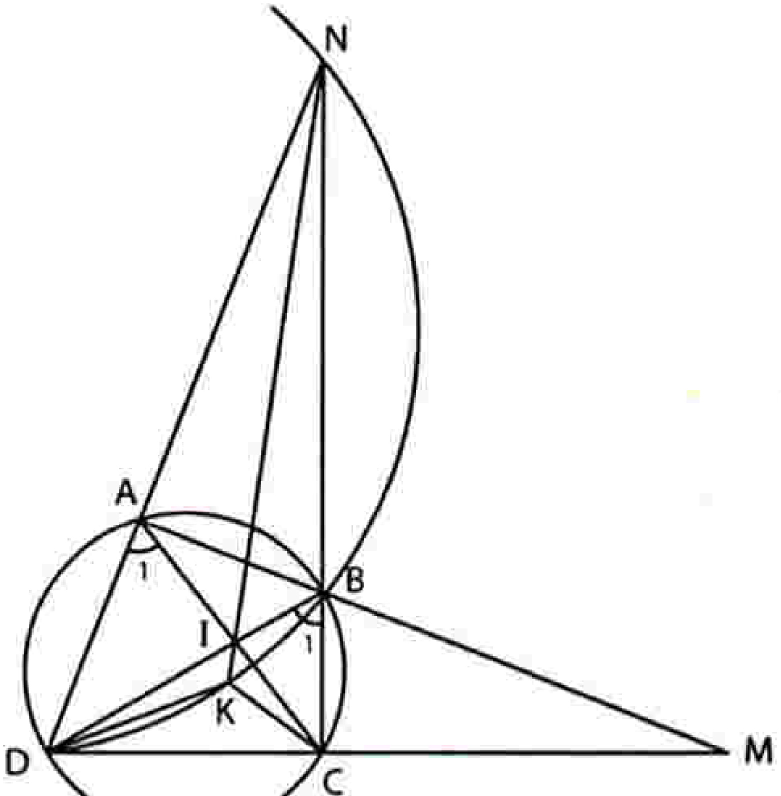
$\Rightarrow$ AIKD là tứ giác nội tiếp, tức là K thuộc đường tròn (IAD).

Tương tự K thuộc đường tròn (IBC). Ta có

$IN.IK = IB.ID = IA.IC$

$\Rightarrow$ K thuộc đường tròn (NAC).

b) Ta có $\widehat{NKD} = \widehat{NBD}$, lại có $\widehat{NBD} = \widehat{NKC}$ (IBCK nội tiếp) nên $\widehat{NKD} = \widehat{NKC}$.

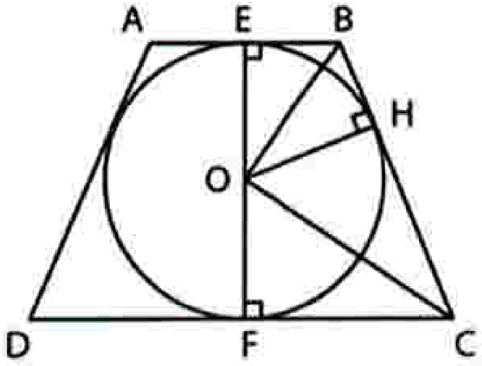


Hình 396

Chuyên đề 9

TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP ĐƯỜNG TRÒN. CHU VI VÀ DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN

241. *(h.397)* Xét hình thang ABCD (AB // CD) ngoại tiếp đường tròn (O), các tiếp điểm H, E, F như hình vẽ.



Hình 397

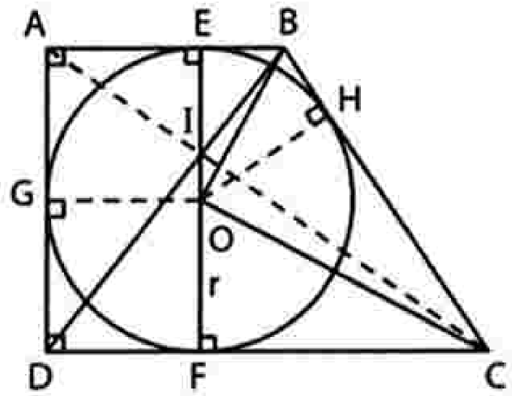
ΔBOC vuông tại O

$\Rightarrow OH^2 = HB.HC = EB.FC = \dfrac{ab}{4}$

$\Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{ab}}{2} \Rightarrow EF = 2.OH = \sqrt{ab}.$

$S_{ABCD} = \dfrac{AB + CD}{2}.EF = \dfrac{a + b}{2}.\sqrt{ab}.$

242. *(h.398)* Trước hết ta chứng minh A, I, C thẳng hàng.



Hình 398

Gọi G, H là tiếp điểm trên AD, BC.

Ta có OH = OE = OG = AE = DF.

ΔBOC vuông tại O

$\Rightarrow OH^2 = HB.HC = EB.FC$

$\Rightarrow AE.DF = EB.FC \Rightarrow \dfrac{AE}{FC} = \dfrac{EB}{DF} = \dfrac{IE}{IF}$

$\Rightarrow \Delta AIE \backsim \Delta CIF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AIE} = \widehat{CIF}$. Từ đó A, I, C thẳng hàng.

Do A, I, C thẳng hàng nên $S_{BIC} = S_{AID} = \dfrac{1}{2}AD.AE = \dfrac{1}{2}.2r.r = r^2.$

243. *(h.399)* a) $\hat{F}_1 = \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{F}_2$ nên FI là tia phân giác của góc EFG.

Tương tự I cũng là giao điểm các tia phân giác của các góc E, H, G của tứ giác EFGH.

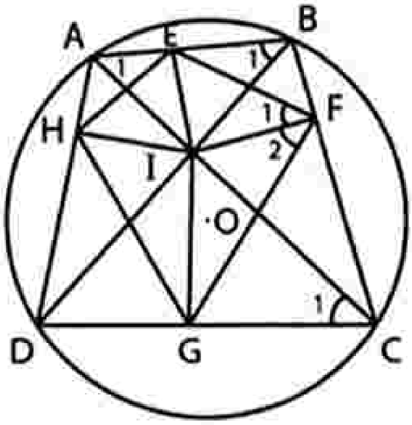
Vậy tứ giác EFGH ngoại tiếp đường tròn (I).

b) $\overset{\frown}{EFG} = 2\hat{F}_1 = 2\hat{B}_1$. Tương tự $\overset{\frown}{EHG} = 2\hat{A}_1$.

Tứ giác EFGH nội tiếp

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{EFG} + \overset{\frown}{EHG} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ$

$\Leftrightarrow AC \perp BD$.



Hình 399

244. *(h.400)*

Gọi K là tiếp điểm của (I) với CD.

Kẻ $CH \perp AB$. Đặt BC = x.

Hình thang cân ABCD ngoại tiếp

$\Leftrightarrow AB + CD = 2BC$

$\Rightarrow 2 + CD = 2x \Rightarrow CD = 2x - 2$

$\Rightarrow OH = KC = x - 1$

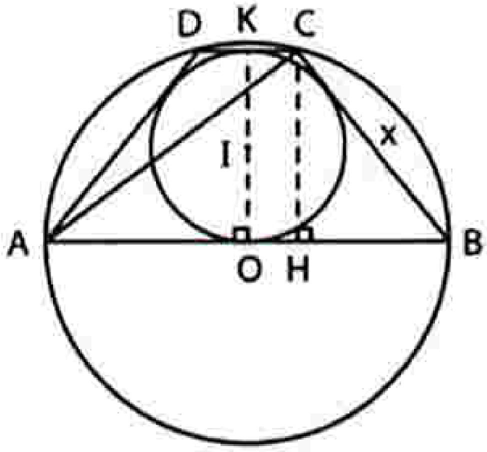
$\Rightarrow BH = OB - OH = 1 - (x - 1) = 2 - x$.

ΔABC vuông tại C nên $BC^2 = AB.BH$

$\Leftrightarrow x^2 = 2(2 - x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$.

Do $x > 0$ nên $x = \sqrt{5} - 1$.

$BC = \sqrt{5} - 1$; $CD = 2x - 2 = 2\sqrt{5} - 4$.



Hình 400

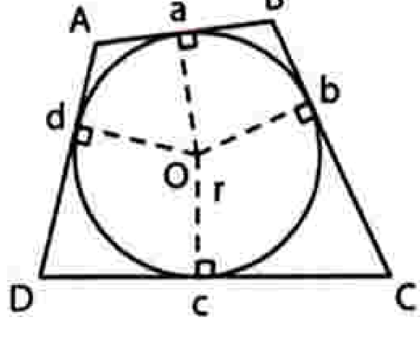
245. *(h.401)*

Xét tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O ; r).

Gọi S là diện tích, p là nửa chu vi của tứ giác, ta có S = pr. (1)

Gọi a, b, c, d là độ dài bốn cạnh liên tiếp của tứ giác.

Bạn đọc tự chứng minh $(a + c)(b + d) \geq 4S$, xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi ABCD là hình chữ nhật. (2)



Hình 401

Do ABCD là tứ giác ngoại tiếp nên a + c = b + d = p, do đó từ (2) suy ra $p^2 \geq 4S$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $p^2 \geq 4pr$ nên $p \geq 4r$.

Tứ giác ABCD có chu vi nhỏ nhất bằng 8r khi và chỉ khi ABCD là hình chữ nhật ngoại tiếp đường tròn (O ; r) tức là ABCD là hình vuông.

246. *(h.402)*

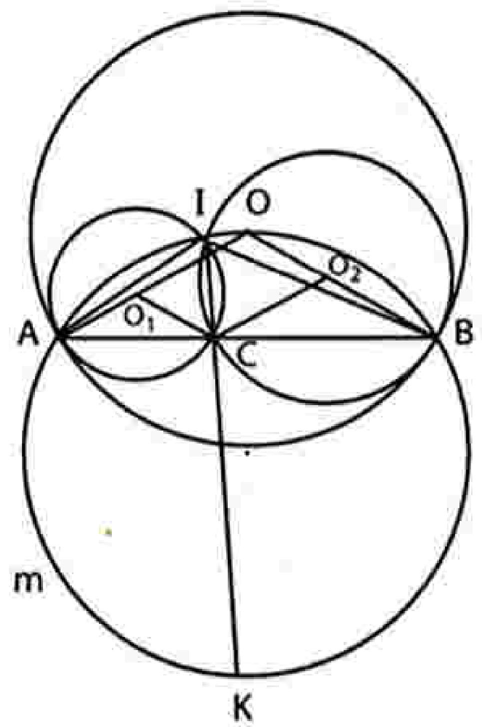
a) Ba điểm O, O_1, A thẳng hàng ; ba điểm O, O_2, B thẳng hàng ; OO_1CO_2 là hình bình hành.

Gọi R_1, R_2 là bán kính của các đường tròn (O_1), (O_2). Dễ chứng minh $R_1 + R_2 = R$.

Tổng các chu vi của hai hình tròn trên bằng $2\pi R$.

b) Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của các hình tròn (O_1) và (O_2). Ta có

$$S_1 + S_2 = \pi\left(R_1^2 + R_2^2\right) \geq \frac{\pi(R_1 + R_2)^2}{2}$$
$$= \frac{\pi R^2}{2}.$$



Hình 402

$\min(S_1 + S_2) = \dfrac{\pi R^2}{2} \Leftrightarrow R_1 = R_2 \Leftrightarrow$ C là trung điểm của AB.

c) Ta có $\widehat{CIA} = \dfrac{1}{2}\widehat{CO_1A}$, $\widehat{CIB} = \dfrac{1}{2}\widehat{CO_2B}$, từ đó $\widehat{AIB} = \widehat{AOB}$, dẫn đến quỹ tích của I là cung AOB của đường tròn ngoại tiếp ΔAOB.

d) Từ $\widehat{CIA} = \widehat{CIB}$ dẫn đến đường thẳng IC đi qua điểm K chính giữa cung AmB của đường tròn ngoại tiếp ΔAOB.

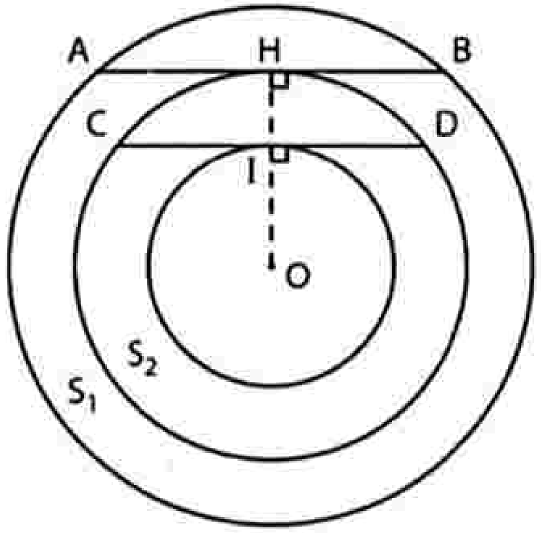
247. *(h.403)* Kẻ $OH \perp AB$, $OI \perp CD$ (không nhất thiết $AB \parallel CD$).

Ta có $S_1 = \pi.OA^2 - \pi.OH^2$

$$= \pi(OA^2 - OH^2) = \pi.AH^2 = \pi.\left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

Tương tự $S_2 = \pi.\left(\frac{CD}{2}\right)^2$.

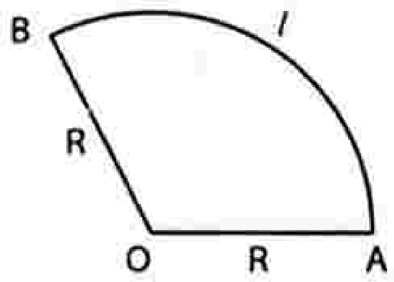
Do $AB > CD$ nên $S_1 > S_2$.



Hình 403

248. *(h.404)*

Gọi R là bán kính, l là độ dài cung của hình quạt, theo đề bài $2R + l = 12$.



Hình 404

Gọi S là diện tích hình quạt, ta có $S = \frac{Rl}{2}$

$\Rightarrow 4S = 2Rl$

$\Rightarrow 2\sqrt{S} = \sqrt{2R.l} \leq \frac{2R + l}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow \sqrt{S} \leq 3 \Rightarrow S \leq 9.$

$\max S = 9dm^2 \Leftrightarrow \begin{cases} R = 3dm \\ l = 6dm \end{cases}$ (khi đó $\widehat{AOB} \approx 115^o$).

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGƯT NGÔ TRẦN ÁI
Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH
Tổng Giám đốc CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập nội dung :
NGUYỄN TRỌNG THIỆP

Trình bày bìa :
ĐINH THANH LIÊM

Chế bản :
THÁI MỸ DUNG

Sửa bản in :
NGUYỄN TRỌNG THIỆP

Công ty Cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội –
Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

9 CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC TRUNG HỌC CƠ SỞ

- *Dùng bồi dưỡng học sinh giỏi các lớp 6, 7, 8, 9*
- *Giúp ôn thi vào lớp 10 chuyên Toán.*

Mã số : C2T10A4- ĐTH

Số ĐKKH xuất bản: 518 - 2014/CXB/11- 337/GD

In 3.000 cuốn (QĐ TK68), khổ 17x24 cm.
In tại Công ty TNHH MTV In và Thương mại TTXVN.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2014.