ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

– – – – – – – – – – –

HOÀNG THỊ DỊU

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - NĂM 2014

Mục lục

LỜI GIỚI THIỆU **2**

1 CÁC DẠNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN **3**

1.1 Hệ phương trình tuyến tính 3

1.2 Hệ phương trình đối xứng 4

1.3 Hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh 5

1.4 Hệ phương trình đẳng cấp 9

2 MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH **11**

2.1 Phương pháp thế 11

2.2 Phương pháp đặt ẩn phụ 11

2.3 Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số 12

2.4 Phương pháp sử dụng bất đẳng thức 13

2.5 Phối hợp nhiều phương pháp 14

3 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ **16**

3.1 Phương pháp tham số hóa giải hệ bất phương trình 16

3.2 Hệ phương trình và bất phương trình một ẩn 17

Kết luận **19**

Tài liệu tham khảo 20

LỜI GIỚI THIỆU

Hệ phương trình là một chuyên đề quan trọng trong chương trình học phổ thông. Đề thi đại học các năm hầu hết đều có câu hệ phương trình. Đó cũng là một phần học quan trọng ở đại số lớp 10. Từ khá lâu nay việc tìm cách tổng hợp các phương pháp để giải hệ phương trình cũng đã được rất nhiều người quan tâm.

Hệ bất phương trình thì lại là một lĩnh vực mà ít được mọi người quan tâm hơn. Các tài liệu tổng hợp về phương pháp giải hệ bất phương trình có thể nói là khá ít.

Dựa trên sự giúp đỡ chỉ dẫn của thầy Nguyễn Văn Mậu cùng với sự tìm tòi tham khảo tôi đã tổng hợp được một số phương pháp giải hệ phương trình và hệ bất phương trình đại số.

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận chung, danh mục các tài liệu tham khảo, cấu trúc của luận văn bao gồm có ba chương.

Chương 1 trình bày một số dạng cùng phương pháp và cách giải hệ phương trình đại số.

Chương 2 trình bày một số phương pháp và những ví dụ về giải hệ bất phương trình đại số.

Chương 3 xét các hệ chứa tham số và hệ bất phương trình một ẩn.

Chương 1

CÁC DẠNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

1.1 Hệ phương trình tuyến tính

Nhận dạng

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1X + b_1Y = c_1 \\ a_2X + b_2Y = c_2 \end{cases}$$

Phương pháp giải

Thường có ba phương pháp:

<u>Cách 1</u> phương pháp thế.

Tư một phương trình ta rút một ẩn theo ẩn kia và thế vào phương trình còn lại.

<u>Cách 2</u> phương pháp cộng đại số.

Cộng hoặc trừ từng vế hai phương trình một hợp lý để dễ dàng tìm được x hoặc y.

<u>Cách 3</u> dùng định thức.

Lưu ý: Đôi khi cũng cần một vài biến đổi như đặt ẩn phụ thì hệ mới quy về hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Sau đây là một số bài toán. Và thông thường, với một bài toán ta cũng có thể kết hợp vài phương pháp để giải một cách thuận lợi.

Bài toán 1.1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{y+7}{y+3} = 5 \\ \dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{3y+1}{y+3} = 5 \end{cases}$$

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 2+\dfrac{1}{x-2}+1+\dfrac{4}{y+3}=5 \\ 1+\dfrac{3}{x-2}+3-\dfrac{8}{y+3}=5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{y+3}=2 \\ \dfrac{3}{x-2}-\dfrac{8}{y+3}=1 \end{cases}$

Đặt $\dfrac{1}{x-2}=u, \dfrac{1}{y+3}=v$ với $u, v \neq 0$ hệ trở thành $\begin{cases} u+4v=2 \\ 3u-8v=1 \end{cases}$

Sử dụng định thức, ta tính được $D=-20, D_X=-20, D_Y=-5$. Từ đó thu được $u=\dfrac{D_X}{D}=1, v=\dfrac{D_Y}{D}=\dfrac{1}{4}$. Cuối cùng ta dễ dàng tính được $(x;y)=(3;1)$.

1.2 Hệ phương trình đối xứng

Hệ phương trình đối xứng loại 1

Nhận dạng

Khi tráo đổi vai trò của x và y trong hệ thì từng phương trình không thay đổi.

Nhận xét Nếu hệ có $(x_0;y_0)$ là một nghiệm thì $(y_0;x_0)$ cũng là một nghiệm của hệ.

Phương pháp tổng quát

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$

Điều kiện để hệ có nghiệm là $S^2-4P \geq 0$.

Khi tìm được nghiệm S, P thì x, y sẽ là hai nghiệm của phương trình $t^2-St+P=0$.

Lưu ý đôi khi ta cũng cần qua một vài biến đổi như đặt ẩn phụ để đưa hệ về dạng đối xứng loại 1.

Bài toán 1.2. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 \end{cases}$$

Lời giải.

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=u, y+\dfrac{1}{y}=v$.

Suy ra $x^2+\dfrac{1}{x^2}=u^2-2; y^2+\dfrac{1}{y^2}=v^2-2$.

Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u^2+v^2=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ (u+v)^2-2uv=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

1.3 Hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh

Dạng 1: Xét hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} f(x_1)=g(x_2) \\ f(x_2)=g(x_3) \\ ... \\ f(x_{n-1})=g(x_n) \\ f(x_n)=g(x_1) \end{cases}$$

Nếu hai hàm số f và g cùng đồng biến trên một tập A và $(x_1; x_2; ...; x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình, trong đó $x_i \in A, \forall i=1,2,..,n$ thì $x_1=x_2=...=x_n$.

Để chứng minh khẳng định trên, không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1=\min\{x_1; x_2; ...; x_n\}$.

Khi đó ta có $x_1 \le x_2$ suy ra $f(x_1) \le f(x_2)$. Từ đó $g(x_2) \le g(x_3)$, suy ra $x_2 \le x_3$.

Tiếp tục quá trình đó, cuối cùng ta sẽ suy ra $x_n \le x_1$.

Tóm lại $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le x_1$.

Từ đó suy ra $x_1=x_2=...=x_n$.

Bài toán 1.3 (Đề thi HSG Quốc Gia năm 1994)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+3x-3+\ln(x^2-x+1)=y \\ y^3+3y-3+\ln(y^2-y+1)=z \\ z^3+3z-3+\ln(z^2-z+1)=x \end{cases}$$

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1)$.

Ta có $f'(t) = 3(t^2 + 1) + \dfrac{2t - 1}{t^2 - t + 1} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Hệ phương trình có thể được viết thành

$$\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases}$$

Không mất tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z\}$. Khi đó ta có

$x \leq y$ suy ra $f(x) \leq f(y)$ hay $y \leq z$. Từ đó $f(y) \leq f(z)$ hay $z \leq x$.

Tóm lại $x \leq y \leq z \leq x$. Suy ra $x = y = z$.

Xét phương trình $x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = 0$

Phương trình đó có một nghiệm là $x = 1$.

Mà hàm số $h(x) = x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$.

Dạng 2: Xét hệ phương trình có dạng (với n lẻ)

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ ... \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

Nếu hàm số f nghịch biến trên tập A, g đồng biến trên A và $(x_1; x_2; ...; x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình với $x_i \in A$ thì $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Để chứng minh khẳng định trên, không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 = \min\{x_1; x_2; ...; x_n\}$.

Ta có

$x_1 \leq x_2$ suy ra $f(x_1) \geq f(x_2)$ hay $g(x_2) \geq g(x_1)$. Từ đó $x_2 \geq x_3$,...

Tiếp tục như vậy ta sẽ thu được $f(x_n) \geq f(x_1)$ hay $g(x_1) \geq g(x_2)$, suy ra $x_1 \geq x_2$.

Chứng tỏ $x_1 = x_2$.

Tóm lại từ quá trình trên ta suy ra được $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Bài toán 1.4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2x^3+x^2} = y \\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2y^3+y^2} = z \\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2z^3+z^2} = x \end{cases}$$

Lời giải Nhận thấy vế trái của các phương trình trong hệ đều dương nên hệ chỉ có nghiệm $x, y, z > 0$.
Xét hàm số $f(t) = (14)^{2t^3+t^2}$.
Ta có $f'(t) = -(2\ln 4)(3t^2+t)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2t^3+t^2} < 0, \forall t > 0$.
Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
Không mất tổng quát, giả sử $x = \min\{x; y; z\}$.
Khi đó $x \leq y$ suy ra $f(x) \geq f(y)$ hay $y \geq z$. Từ đó suy ra $f(y) \leq f(z)$ hay $z \geq x$.
Do đó $x = z$. Suy ra $f(x) = f(z)$, nên $y = x$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

Dạng 3 Xét hệ phương trình có dạng (với n chẵn)

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ ... \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

Nếu hàm số f nghịch biến trên tập A, g đồng biến trên A và $(x_1; x_2; ...; x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình với $x_i \in A, \forall i = 1, 2, ..., n$ thì

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = ... = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = ... = x_n \end{cases}$$

Để chứng minh khẳng định trên, ta giả sử $x_1 = \min\{x_1; x_2; ...; x_n\}$.
Ta có
$x_1 \leq x_3$ suy ra $f(x_1) \geq f(x_3)$ hay $g(x_2) \geq g(x_4)$. Suy ra $x_2 \geq x_4$.
Do đó $f(x_2) \leq f(x_4)$, suy ra $g(x_3) \leq g(x_5)$.
Do đó $x_3 \leq x_5$
... Tiếp tục quá trình, đến $f(x_{n-2}) \leq f(x_n)$, suy ra $g(x_{n-1}) \leq g(x_1)$. Do đó $x_{n-1} \leq x_1$.
Suy ra $f(x_{n-1}) \geq f(x_1)$ hay $g(x_n) \geq g(x_2)$, từ đó $x_n \geq x_2$.
Tóm lại ta có

+ $x_1 \leq x_3 \leq ... \leq x_{n-1} \leq x_1$, suy ra $x_1 = x_3 = ... = x_{n-1}$;
+ $x_2 \geq x_4 \geq ... \geq x_n \geq x_2$, suy ra $x_2 = x_4 = ... = x_n$.

Bài toán 1.5. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases}(x-1)^2 = 2y\\(y-1)^2 = 2z\\(z-1)^2 = 2t\\(t-1)^2 = 2x\end{cases}$$

Lời giải Nhận xét vế trái của các phương trình trong hệ đều không âm nên hệ chỉ có nghiệm $x, y, z, t \geq 0$.
Xét hàm số $f(s) = (s-1)^2$. Ta có $f'(s) = 2(s-1)$. Do đó hàm số f đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $[0; 1]$.
Không mất tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z, t\}$.
+ Nếu $x \in (1; +\infty)$ thì $x, y, z, t \in (1; +\infty)$, nên theo dạng 1 ở trên ta vừa xét, hệ sẽ có nghiệm duy nhất $x = y = z = t = 2 + \sqrt{3}$.
+ Nếu $s \in [0; 1]$ thì do tính liên tục và nghịch biến trên khoảng này của hàm f nên $0 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2y \leq 1$, từ đó cũng có $y \in [0; 1]$. Tương tự cũng có $z, t \in [0; 1]$.
Với $x, y, z, t \in [0; 1]$, ta có
$x \leq y$ suy ra $f(x) \geq f(y)$ hay $y \geq z$. Từ đó suy ra $f(y) \leq f(z)$ hay $z \leq x$. Suy ra $x = z$, và $f(x) = f(z)$. Do đó $y = t$
Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}(x-1)^2 = 2y\\(y-1)^2 = 2x\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = y = 2 + \sqrt{3}$ hoặc $x = y = 2 - \sqrt{3}$
Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $x = y = z = t = 2 - \sqrt{3}; x = y = z = t = 2 + \sqrt{3}$

Sau đây ta xét một số hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh với hai ẩn số mà trong chương trình phổ thông còn gọi là hệ phương trình đối xứng loại hai và cũng có cách giải đặc trưng riêng là trừ từng vế hai phương trình để tạo nhân tử chung $x - y$.

Bài toán 1.6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3 + 4x = y + 4(1)\\y^3 + 4y = x + 4\end{cases}$$

Lời giải.

Trừ từng vế hai phương trình ta thu được
$(x-y)(x^2+y^2+xy)+4(x-y)=-(x-y)$
$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2+xy+5)=0$
Vì $x^2+y^2+xy+5=(x+\dfrac{y}{2})^2+\dfrac{3}{4}y^2+5>0$ với mọi x, y nên suy ra $x-y=0$ hay $y=x$, thế vào (1) ta có
$x^3+4x=x+4$
$\Leftrightarrow x^3+3x-4=0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0$
$\Leftrightarrow x=1$
Vậy hệ có một nghiệm duy nhất là $x=y=1$.

1.4 Hệ phương trình đẳng cấp

Hệ phương trình đại số đẳng cấp bậc hai theo x, y.
Dạng tổng quát
$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}$$
Phương pháp tổng quát
* Xét $x=0$. Thay vào hệ nếu tìm được y thỏa mãn thì hệ có nghiệm không thì vô nghiệm trong trong trường hợp này.
* Xét $x \neq 0$
- Nếu có một trong hai d hoặc d' bằng 0, như $d=0$ thì ta chia cả hai vế của phương trình thứ nhất cho x^2, từ đó thu được phương trình có dạng
$A\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+B\dfrac{y}{x}+C=0$
Giải phương trình này tìm được tỉ số $\dfrac{y}{x}$, từ đó rút y được theo x , lại thay vào phương trình thứ hai thì tìm được y, từ đó thu được x.
- Nếu cả d và d' đều khác 0 thì ta cũng có thể tạo ra một phương trình thuần nhất (hệ số tự do bằng 0) được bằng cách nhân cả hai vế của từng phương trình với hệ số phụ tương ứng của d và d' rồi lại trừ từng vế các phương trình thu được. Tiếp đó ta lại làm hoàn toàn tương tự như trên.

Bài toán 1.7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0(1) \\ x|x|+y|y|=-2(2) \end{cases}$$

Lời giải.

- Nếu $y = 0$, thì theo (1) ta có $x = 0$, nhưng thay $x = y = 0$ vào (2) thì vô lý, do đó $y = 0$ không thỏa mãn.

- Nếu $y \neq 0$, chia cả hai vế phương trình (1) cho y^2 ta được

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 2\dfrac{x}{y} - 3 = 0$ Từ đó ta có hai trường hợp sau:

<u>TH1</u> $\dfrac{x}{y} = -1$ hay $x = -y$, thế vào phương trình (2) ta có

$-y|y| + y|y| = -2 \Leftrightarrow 0 = -2$ (VN).

<u>TH2</u> $\dfrac{x}{y} = 3$ hay $x = 3y$, thê vào phương trình (2) ta có

$3y|3y| + y|y| = -2 \Leftrightarrow 10y|y| = 2 \Leftrightarrow y|y| = -\dfrac{1}{5}(3)$

+ Nếu $y > 0$ thì $|y| = y$, thay vào (3) vô nghiệm.

+ Nếu $y < 0$ thì $|y| = -y$, thay vào (3) được $y^2 = \dfrac{1}{5}$. Từ đây ta giải được hai nghiệm của hệ phương trình là

$\Big(\dfrac{3}{\sqrt{5}}; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big), \Big(-\dfrac{3}{\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\Big).$

Chương 2

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

2.1 Phương pháp thế

Bài toán 2.1 (Đề thi đại học khối D năm 2008)**.** Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$$
Lời giải.
Điều kiện: $x \geqslant 1; y \geqslant 0$.
$(1) \Leftrightarrow xy + y^2 + x + y + y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y(x+y) + (x+y) + (x+y)(y-x) = 0$
$\Leftrightarrow (x+y)(2y - x + 1) = 0$.
- TH1: $y = -x$. Vì $y \geqslant 0$ nên $x \leqslant 0$, loại.
- TH2: $x = 2y + 1$, thay vào (2) ta được:
$(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2y + 2 \Leftrightarrow (y+1)(\sqrt{2y} - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 2$ (vì $y \geqslant 0$).
Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là $(5; 2)$.

2.2 Phương pháp đặt ẩn phụ

Có những bài toán cần phải đặt ẩn phụ để việc giải quyết bài toán trở nên dễ dàng hơn (thường là khi thấy trong hệ phương trình xuất hiện cụm ẩn nào đó được lặp lại). Sau đây là một số bài toán minh họa cho phương pháp này.

Bài toán 2.2. Giải hệ phương trình sau

$\begin{cases} x^2+1+y(y+x)=4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases}$

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với:

$\begin{cases} x^2+1+y(y+x-2)=2y \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=x^2+1 \\ v=y+x-2 \end{cases}$, $(u \geqslant 1)$, khi đó hệ trở thành

$\begin{cases} u+yv=2y \\ uv=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2y-yv & (2) \\ (2y-yv)v=y & (3) \end{cases}$

$(3) \Leftrightarrow yv^2-2yv+y=0 \Leftrightarrow y(v^2-2v+1)=0 \Leftrightarrow y(v-1)^2$

- Nếu $y=0$, thế vào (2) thì $u=0$ không thỏa mãn.
- Nếu $v=1$, ta có $y=3-x$, thế vào (1) ta được

$x^2+1+(3-x).3=4(3-x) \Leftrightarrow x^2+x-2=0.$

Từ đó ta tìm được hai nghiệm

$(1;2),(-2;5)$

2.3 Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Một số hệ phương trình có thể giải bằng phương pháp hàm số. Để nhận biết có thể giải bằng phương pháp này không ta chú ý hai tính chất sau:

- Tính chất 1: Giả sử hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$. Khi đó ta có

$f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$ (với $u,v \in (a;b)$).

- Tính chất 2: Nếu hàm số $y=f(x)$ tăng trên $(a;b)$ và $y=g(x)$ là hàm hằng hoặc là một hàm số giảm trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Bài toán 2.3. Giải hệ phương trình sau

$\begin{cases} x^3-5x=y^3-5y & (1) \\ x^8+y^4=1 & (2) \end{cases}$

Lời giải.

Từ phương trình (2) ta suy ra $|x| \geqslant 1, |y| \geqslant 1$.

Ta xét hàm số $f(t) = t^3 - 5t$ trên $[-1;1]$. Ta có $f'(t) = 3t^2 - 5 < 0, \forall t \in [-1;1]$. Do đó hàm số nghịch biến trên $[-1;1]$.
Mà theo (1) thì $f(x) = f(y)$, do đó suy ra $x = y$. Từ đấy thay $y = x$ vào phương trình (2) ta có
$x^8 + x^4 = 1 \Leftrightarrow x^8 + x^4 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^4 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.
Từ đó tìm được hai nghiệm của hệ phương trình là
$(\sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}; \sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}), (-\sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}; -\sqrt[4]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}})$.

2.4 Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

Bài toán 2.4. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^6 + y^8 + z^{10} = 1 & (1) \\ x^{2013} + y^{2015} + z^{2017} = 1 & (2) \end{cases}$$
Lời giải.
Từ (1) ta có $-1 \leqslant x, y, z \leqslant 1$.
Từ đó ta có $x^6 - x^{2013} = x^6(1 - x^{2007}) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^6 \geqslant x^{2013}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $|x| = 1$
$y^8 - y^{2015} = y^8(1 - y^{2007}) \geqslant 0 \Leftrightarrow y^8 \geqslant y^{2015}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = 0$ hoặc $|y| = 1$
$z^{10} - z^{2017} = z^{10}(1 - z^{2007}) \geqslant 0 \Leftrightarrow z^{10} \geqslant z^{2017}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $z = 0$ hoặc $|z| = 1$.
Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta suy ra
$1 = x^6 + y^8 + z^{10} \geqslant x^{2013} + y^{2015} + z^{2017} = 1$
Do đó dấu đẳng thức phải xảy ra, tức là
$$\begin{cases} x^6(1 - x^{2007}) = 0 \\ y^8(1 - y^{2007}) = 0 \\ z^{10}(1 - z^{2007}) = 0 \end{cases}$$
Kết hợp với (1), (2) ta thu được các nghiệm của hệ phương trình là
$(x; y; z) = (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)$.

2.5 Phối hợp nhiều phương pháp

Bài toán 2.5. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 & (1) \\ xy(x^2+y^2) + 2 = (x+y)^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.
Ta biến đổi phương trình (2)
(2) $\Leftrightarrow xy(x^2+y^2) + 2 = x^2 + y^2 + 2xy$
$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(xy-1) - 2(xy-1) = 0$
$\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2) = 0.$

<u>TH1</u>: $xy = 1$, vì $y \neq 0$ nên thế $x = \dfrac{1}{y}$ vào (1), ta được
$\dfrac{5}{y} - 4y + 3y^3 - 2\Big(\dfrac{1}{y} + y\Big) = 0$
$\Leftrightarrow 3y^4 - 6y^2 + 3 = 0$
$\Leftrightarrow y^2 = 1$
$\Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -1$.
Từ đó ta tìm được hai nghiệm của hệ: $(1;1), (-1;-1)$.

<u>TH2</u>: $x^2 + y^2 = 2$, thế $2 = x^2 + y^2$ vào phương trình (1) ta được:
$5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - (x+y)(x^2+y^2) = 0$
$\Leftrightarrow 4x^2y - 5xy^2 - x^3 + 2y^3 = 0.$
- Nếu $y = 0$ thì $x^2 = 2$, nhưng thế vào (1) lại không thoả mãn.
- Nếu $y \neq 0$, ta chia hai vế của phương trình cho y^3 thì được
$4\Big(\dfrac{x}{y}\Big)^2 - 5\Big(\dfrac{x}{y}\Big) - \Big(\dfrac{x}{y}\Big)^3 + 2 = 0$
$\Leftrightarrow \Big(\dfrac{x}{y}\Big)^3 - 4\Big(\dfrac{x}{y}\Big)^2 + 5\dfrac{x}{y} - 2 = 0.$
Đặt $\dfrac{x}{y} = t$, ta có phương trình $t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$
$\Leftrightarrow (t-1)^2(t-2) = 0$
$\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$.
+ Với $t = 1 \Leftrightarrow y = x$, do đó $2x^2 = 2 \Leftrightarrow$, ta lại giải được nghiệm $(1;1), (-1;-1)$.
+ Với $t = 2 \Leftrightarrow x = 2y$, suy ra $5y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$ hoặc $y = -\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.
Từ đó hệ có thêm hai nghiệm $\Big(\dfrac{\sqrt{10}}{5}; \dfrac{2\sqrt{10}}{5}\Big)$ và $-\Big(\dfrac{\sqrt{10}}{5}; -\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\Big)$.

Vậy hệ có bốn nghiệm:
$(1;1),(-1;-1),\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5};\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)$ và $-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5};-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right)$.

Chương 3

HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

3.1 Phương pháp tham số hóa giải hệ bất phương trình

Bài toán 3.1. Giải hệ

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Lời giải. Viết hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} x + y = 1 - a, a \geq 0 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - a \\ (x+y)^2 - xy = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - a \\ xy = (1 - a^2) - 1 \end{cases}.$$

Điều kiện đối với a :

$$\{ \Delta = (1-a)^2 - 4[(1-a)^2 - 1] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ (a-1)^2 \leq \dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{3.1}$$

Với điều kiện (3.1) thì ta có nghiệm

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{a - 1 - \sqrt{4 - 3(1-a)^2}}{2}, y = \frac{a - 1 + \sqrt{4 - 3(1-a)^2}}{2} \\ x &= \frac{a - 1 + \sqrt{4 - 3(1-a)^2}}{2}, y = \frac{a - 1 - \sqrt{4 - 3(1-a)^2}}{2} \end{aligned}\right.$$

3.2 Hệ phương trình và bất phương trình một ẩn

Sau đây ta sẽ đưa ra một số bài toán liên quan đến hệ phương trình và bất phương trình một ẩn.

Bài toán 3.2. Xác định các giá trị m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x+y \le m \\ x^4+y^4 \le m + x^2y^2 \end{cases}$$

Lời giải. Vì vai trò của x và y bình đẳng, nên nếu $(x,y)=(\alpha,\beta)$ là nghiệm của hệ thì $(x,y)=(\beta,\alpha)$ cũng là nghiệm. Vậy điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $\alpha=\beta$. Thế vào hệ, ta được

$$\begin{cases} \alpha \le \dfrac{m}{2} \\ \alpha^4 \le m \end{cases}$$

a) Nếu $m<0$ thì không tồn tại α.

b) Nếu $m>0$ thì tồn tại vô số α thỏa mãn

$$-\sqrt[4]{m} \le \alpha \le \min\left(\frac{m}{2}, \sqrt[4]{m}\right)$$

.

c) Xét $m=0$ khi đó $\alpha=0$. Hệ có dạng

$$\begin{cases} x+y \le 0 \\ x^4+y^4 \le x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \le 0 \\ (x^2-y^2)^2 + x^2y^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \le 0 \\ x^2-y^2 = 0 \\ x^2y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Kết luận: hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m=0$.

Bài toán 3.3. Giải hệ.

$$\begin{cases} x^2+3x+1 \le y \\ y^2+3y+1 \le z \\ z^2+3z+1 \le x \end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2+3x+1 \le y \\ y^2+3y+1 \le z \\ z^2+3z+1 \le x \\ (x^2+3x+1)+(y^2+3y+1)+(z^2+3z+1) \le y+z+x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x+1 \le y \\ y^2+3y+1 \le z \\ z^2+3z+1 \le x \\ (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$.

Kết luận

Luận văn đã hoàn thành và đạt một số kết quả sau:

1. Giới thiệu tổng quan các hệ phương trình đại số cơ bản với các tính chất và cách giải chúng.

2. Khảo sát một cách chi tiết và hệ thống các bài toán về giải hệ phương trình chứa tham số và phương pháp bất đẳng thức trong giải hệ phương trình.

3. Đưa ra một số ví dụ áp dụng từ các đề thi đại học, đề thi HSG và Olympic quốc gia và khu vực.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu (1993), *Một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Thủy Thanh, Đặng Huy Ruận (2003),*Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu, 2004, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ,* NXB Giáo dục.

[4] Nguyễn Văn Mậu (2006),*Bất đẳng thức, định lý và áp dụng,* NXB Giáo Dục.

[5] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Đăng Phất, Trịnh Đào Chiến (2007) *Chuyên đề chọn lọc về đa thức và áp dụng,* NXB Giáo dục.

[6] Trần Nam Dũng (Chủ biên), (2010) *Phương trình và hơn thế nữa,* NXB ĐHQG Tp HCM.