ĐẶNG THÀNH NAM

(Giám đốc trung tâm nghiên cứu, tư vấn và phát triển sản phẩm giáo dục Newstudy.vn)

NHỮNG ĐIỀU CẦN BIẾT LUYỆN THI QUỐC GIA

THEO CẤU TRÚC ĐỀ THI MỚI NHẤT CỦA BỘ GD & ĐT

KỸ THUẬT GIẢI NHANH

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2+1} = 2\left(y \quad 1\right) + \sqrt{y^2 \quad 2 + y \quad 2+} \\ x^2 + 2y^2 = 2x - 4y + 3 \end{cases}$$

- **Dành cho học sinh lớp 10,11,12**
- **Ôn thi quốc gia và bồi dưỡng học sinh giỏi**
- **Dành cho giáo viên giảng dạy và luyện thi Quốc gia**

ĐHQG Hà Nội **NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**

Mục Lục

CHƯƠNG 1: KIẾN THỨC BỔ SUNG
KHI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

- Nội dung chương này đề cập đến các nội dung
- Phương trình, bất phương trình bậc nhất và bậc hai.
- Các phương trình bậc ba, bậc bốn dạng đặc biệt.
- Các phương trình dạng phân thức đặc biệt.
- Phương pháp giải phương trình bậc ba, bậc bốn tổng quát.
- Hệ phương trình cơ bản gồm hệ bậc nhất hai ẩn, hệ bậc nhất ba ẩn, hệ gồm một phương trình bậc nhất hai ẩn và một phương trình bậc hai hai ẩn.
- Hệ phương trình bậc hai hai ẩn dạng tổng quát.

Đây là những kiến thức cơ bản và cần thiết trước khi tiếp cận với hệ phương trình nên hy vọng sẽ cung cấp đủ những kỹ năng về giải phương trình và hệ phương trình trước khi chúng ta đến với các hệ phương trình dạng nâng cao hơn.

Chủ Đề 1: PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

1. Phương trình bậc nhất $ax + b = 0, (a \neq 0)$

+ Nếu $a = 0, b \neq 0$ phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $a = 0, b = 0$, phương trình vô số nghiệm.

+ Nếu $a \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ là nghiệm của phương trình.

Bất phương trình bậc nhất $ax + b > 0$.

+ Nếu $a > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \left(\frac{b}{a};\ +\infty \right)$

+ Nếu $a < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \left(-\infty \ \frac{b}{a} \right)$

2. Phương trình và bất phương trình bậc hai

a) Phương trình bậc hai $ax^2 + bx^2 + c = 0, (a \neq 0)$. Định thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

+ Nếu $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta = b^2 - 4ac$, phương trình có nghiệm duy nhất $x_0 = \frac{b}{2a}$.

+ Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ và khi đó $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

b) Bất phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c > 0\ (a \neq 0)$.

+ Nếu $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ khi đó $a.f(x) \geq 0, \forall x \in R$.

+ Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

- Nếu $a > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > x_2 \\ x < x_1 \end{array}\right. \\ f(x) < 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \end{array}\right.$

- Nếu $a < 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2 \\ f(x) < 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > x_2 \\ x < x_1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Chủ Đề 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

1. Phương trình dạng $4x^3 + 3x = m$.

Hàm số $f(x) = 4x^3 + 3x$ có $f'(x) = 12x^2 + 3 > 0, \forall x \in R$ nên phương trình $4x^3 + 3x = m$ có không quá một nghiệm.

Ta chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất.

Đặt $m = \dfrac{1}{2}\left(a^3 - \dfrac{1}{a^3}\right) \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{m \pm \sqrt{m^2 + 1}}$.

Khi đó $4\left[\dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)\right]^3 + 3\left[\dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)\right] = \dfrac{1}{2}\left(a^3 - \dfrac{1}{a^3}\right) = m$.

Do đó $x = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$ là nghiệm của phương trình hay phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $4x^3 + 3x = 2$.

Lời giải

Hàm số $f(x) = 4x^3 + 3x - 2$ có $f'(x) = 12x^2 + 3 > 0, \forall x \in R$ nên phương trình có tối đa một nghiệm.

Đặt $2=\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{2\pm\sqrt{5}}$.

Chọn $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{1}{a}=-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

Khi đó: $4\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]^3+3\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)$.

Vậy: phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right).$$

2. Phương trình dạng $4x^3-3x=m$.

TH1: Nếu $|m|\le 1$ đặt $m=\cos\alpha$ khi đó do $\cos\alpha=4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}$ nên phương trình có ba nghiệm $x_1=\cos\frac{\alpha}{3},x_2=\cos\frac{\alpha+2\pi}{3},x_3=\cos\frac{\alpha-2\pi}{3}$.

TH2: Nếu $|m|>1$ đặt $m=\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{m\pm\sqrt{m^2-1}}$.

Khi đó $\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)=4\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]^3-3\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$.

Vì vậy $x_0=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ là một nghiệm của phương trình.

Ta chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Thật vậy ta có: $4x^3-3x=4x_0^3-3x_0\Leftrightarrow(x-x_0)\left(4x^2+4x_0x+4x_0^2-3\right)=0$.

Phương trình $4x^2+4x_0x+4x_0^2-3=0$ có $\Delta'=12\left(1-x_0^2\right)<0$ do $|x_0|>1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)=\frac{\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2-1}}+\sqrt[3]{m-\sqrt{m^2-1}}}{2}.$$

3. Phương trình dạng $x^3+px=q$.

TH1: Nếu $p=0\Rightarrow x^3=q\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{q}$.

TH2: Nếu $p>0$ đặt $x=2\sqrt{\frac{p}{3}}t$ đưa về phương trình dạng: $4t^3+3t=m$.

TH3: Nếu $p < 0$ đặt $x = 2\sqrt{\ \frac{p}{3}}t$ đưa về phương trình dạng: $4x^3 - 3x = m$.

4. Phương trình bậc ba dạng tổng quát $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a \neq 0)$.

Phương pháp phân tích nhân tử.

Nếu phương trình có nghiệm x_0 thì ta có thể phân tích:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \left(x - x_0\right)\left(ax^2 + \left(b + ax_0\right)x + c + bx_0 + ax_0^2\right).$$

Từ đó để giải phương trình bậc ba trên ta đi giải phương trình bậc hai:

$$ax^2 + \left(b + ax_0\right)x + c + bx_0 + ax_0^2 = 0.$$

Phương pháp Cardano. Chia hai vế phương trình cho a đưa phương trình về dạng: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Bằng cách đặt $y = x\ \ \frac{a}{3}$ luôn đưa phương trình về dạng chính tắc:

$$y^3 + py + q = 0 \ (1) \text{ trong đó } p = q - \frac{a^2}{3}, q = c + G\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) = 0 \ \overline{\ \text{PP}\ }.$$

Ta chỉ cần xét $p, q \neq 0$ vì nếu $p = 0$ hoặc $q = 0$ phương trình đơn giản, tiếp tục đặt $y = u + v$ thay vào (1), ta được:

$$\left(u + v\right)^3 + p\left(u + v\right) + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + \left(3uv + p\right)\left(u + v\right) + q = 0.$$

Ta chọn u, v sao cho $3uv + p = 0$ khi đó $u^3 + v^3 + q = 0$.

Vậy : ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3v^3 = \ \frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = \ q \end{cases}$.

Theo định lý Vi–ét u, v là hai nghiệm của phương trình $X^3 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$ (3)

Đặt $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

+ Nếu $\Delta > 0$ khi đó (3) có hai nghiệm $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$, $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}$ và phương trình (2) có nghiệm duy nhất $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$ nên phương trình (1) có nghiệm thực duy nhất $x = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$.

+ Nếu $\Delta = 0$ khi đó (3) có nghiệm kép $u = v = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ và phương trình (2) có hai nghiệm thực trong đó có một nghiệm kép $y_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}; y_2 = y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

Do đó: (1) có hai nghiệm thực, trong đó có một nghiệm kép:

$x_1 = \frac{a}{3} + 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}; x_2 = x_3 = \frac{a}{3} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

+ Nếu $\Delta < 0$ khi đó (3) có nghiệm phức, giả sử là u_0, v_0 khi đó (1) có ba nghiệm phức:

$$\begin{cases} y_1 = u_0 + v_0 \\ y_2 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0) \\ y_3 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a}{3} + u_0 + v_0 \\ x_2 = \frac{a}{3} - \frac{1}{2}(u_0 + v_0) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0) \\ x_3 = \frac{a}{3} - \frac{1}{2}(u_0 + v_0) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0) \end{cases}$$

Ngoài hai cách trên có thể giải phương trình bậc ba bằng phương pháp lượng giác hóa hoặc biến đổi đưa về đẳng thức $a^3 = b^3$.

Chủ Đề 3: PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

1. Phương trình dạng trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0, (a \neq 0)$**.**

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$ phương trình trở thành: $at^2 + bt + c = 0$. Đây là phương trình bậc hai đã biết cách giải.

2. Phương trình dạng $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$**.**

Đặt $t = x - \frac{a+b}{2}$ phương trình trở thành: $\left(t + \frac{b-a}{2}\right)^4 + \left(t + \frac{a-b}{2}\right)^4 = c$ đưa về phương trình dạng trùng phương.

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x-2)^4 + (x-6)^4 = 82$.

Lời giải

Đặt $t = x - 4$ phương trình trở thành: $(t+2)^4 + (t-2)^4 = 82$.

$$\Leftrightarrow t^4+24t^2-25=0 \Leftrightarrow \left(t^2-1\right)\left(t^2+25\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=-1 \\ x-4=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=3, x=5$.

3. Phương trình dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ **với** $a+d=b+c$**.**

Đặt $t=(x+a)(x+d)$ hoặc $t=(x+b)(x+c)$ đưa về phương trình bậc hai với ẩn t.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x(x-1)(x-2)(x-3)=24$.

Lời giải

Đặt $t=x(x-3)=x^2-3x \Rightarrow (x-1)(x-2)=x^2-3x+2=t+2$ phương trình trở thành:

$$t(t+2)=24 \Leftrightarrow t^2+2t-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-6 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x=-6 \\ x^2-3x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Vậy: phương trình có hai nghiệm là $x=-1, x=4$.

4. Phương trình dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=ex^2$ **với** $ad=bc=m$**.**

Viết lại phương trình dưới dạng: $\left[(x+a)(x+d)\right].\left[(x+b)(x+c)\right]=ex^2$.

$$\Leftrightarrow \left(x^2+(a+d)x+ad\right)\left(x^2+(b+c)x+bc\right)=ex^2.$$

Xét trường hợp $x=0$ xem thỏa mãn phương trình hay không.

Với $x \neq 0$ chia hai vế của phương trình cho x^2, ta được:

$$\left(x+\frac{ad}{x}+a+d\right)\left(x+\frac{bc}{x}+b+c\right)=e.$$

Đặt $t=x+\frac{ad}{x}=x+\frac{bc}{x}$ đưa về phương trình bậc hai với ẩn t.

Ví dụ 3. Giải phương trình $(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)=30x^2$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left[(x+2)(x+6)\right].\left[(x+3)(x+4)\right]=30x^2 \Leftrightarrow \left(x^2+8x+12\right)\left(x^2+7x+12\right)=30x^2$$

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $x \neq 0$ chia hai vế của phương trình cho x^2, ta được:

$\left(x+\frac{12}{x}+8\right)\left(x+\frac{12}{x}+7\right)=30$.

Đặt $t=x+\frac{12}{x},\left(|t|\geq 4\sqrt{3}\right)$ phương trình trở thành:

$(t+8)(t+7)=30 \Leftrightarrow t^2+15t+26=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-13 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $t=-13 \Leftrightarrow x+\frac{12}{x}=-13$.

$\Leftrightarrow x^2+13x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-12 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-12, x=-1$.

5. Phương trình dạng $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ **với** $\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2$**.**

<u>TH1:</u> Nếu $e=0$ đưa về phương trình:

$ax^4+bx^3+cx^2+dx=x\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=0$, phương trình tích có chứa phương trình bậc ba dạng tổng quát đã biết cách giải.

<u>TH2:</u> Nếu $e\neq 0 \Rightarrow x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x\neq 0$ chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$ax^2+\frac{e}{x^2}+\left(bx+\frac{d}{x}\right)+c=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{e}{ax^2}\right)+b\left(x+\frac{d}{bx}\right)+c=0$.

Đặt $t=x+\frac{d}{bx} \Rightarrow t^2=x^2+\frac{d^2}{b^2x^2}+2\frac{d}{b}=x^2+\frac{e}{ax^2}+2\frac{d}{b}$ đưa về phương trình bậc hai với ẩn t.

Ví dụ 4. Giải phương trình $x^4+3x^3-6x^2+6x+4=0$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $x\neq 0$ chia hai vế phương trình cho x^2, ta được:

$x^2+3x-6+\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{2}{x}\right)-10=0$.

Đặt $t=x+\frac{2}{x},|t|\geq 2\sqrt{2}$ phương trình trở thành: $t^2+3t-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-5 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm:

$$t=-5 \Leftrightarrow x+\frac{2}{x}=-5 \Leftrightarrow x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

6. Phương trình dạng $x^4=ax^2+bx+c$.

<u>TH1:</u> Nếu $\Delta=b^2-4ac=0$ biến đổi đưa phương trình về dạng:

$$x^4=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

<u>TH2:</u> Nếu $\Delta=b^2-4ac\neq 0$ ta chọn số thực m sao cho:

$$x^4=\left[\left(x^2-m\right)+m\right]^2=\left(x^2-m\right)^2+2m\left(x^2-m\right)+m^2=ax^2+bx+c.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-m\right)^2=\left(a-2m\right)x^2+bx+c+m^2.$$

Ta chọn m sao cho: $b^2-4\left(a-2m\right)\left(c+m^2\right)=0$.

Ví dụ 5. Giải phương trình $x^4=7x^2-3x-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(x^2+1\right)^2=\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1=3x-\frac{1}{2} \\ x^2+1=-3x+\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm là $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}, x=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$.

7. Phương trình bậc bốn tổng quát $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$.

<u>Cách 1:</u> Đặt $x=-\frac{b}{4a}+t$ đưa về phương trình dạng: $t^4=\alpha t^2+\beta t+\lambda$.

<u>Cách 2:</u> Viết lại phương trình dưới dạng:

$$4a^2x^4+4bax^3+4cax^2+4dax+4ae=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2ax^2+bx\right)^2=\left(b^2-4ac\right)x^2-4adx-4ae.$$

Thêm vào hai vế của phương trình đại lượng $2y\left(2ax^2+bx\right)+y^2$ (với y là hằng số tìm sau).

Khi đó: $\left(2ax^2+bx+y\right)^2=\left(b^2-4ac+4ay\right)x^2+2\left(by-2ad\right)x-4ae+y^2$.

Ta chọn y sao cho: $\Delta'_x=\left(by-2ad\right)^2-\left(b^2-4ac+4ay\right)\left(y^2-4ae\right)=0$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $x^4-16x^3+57x^2-52x-35=0$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^4-16x^3+64x^2=7x^2+52x+35\Leftrightarrow\left(x^2-8x\right)^2=7x^2+52x+35.$$

Ta thêm và hằng số y thỏa mãn:

$$\left(x^2-8x\right)^2+2y\left(x^2-8x\right)+y^2=7x^2+52x+35+2y\left(x^2-8x\right)+y^2.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+y\right)^2=\left(2y+7\right)x^2+x\left(52-16y\right)+35+y^2.$$

Ta chọn y sao cho $\Delta'_x=\left(26-8y\right)^2-\left(2y+7\right)\left(35+y^2\right)=0$.

$$\Leftrightarrow\left(y-1\right)\left(2y^2-55y+431\right)=0\Leftrightarrow y=1.$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(x^2-8x+1\right)^2=9\left(x+2\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-8x+1=3\left(x+2\right)\\x^2-8x+1=-3\left(x+2\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{11-\sqrt{141}}{2}\\x=\dfrac{11+\sqrt{141}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\dfrac{11-\sqrt{141}}{2},x=\dfrac{11+\sqrt{141}}{2}$.

Chủ Đề 4: PHƯƠNG TRÌNH PHÂN THỨC HỮU TỶ

1. Phương trình dạng $x^2+\frac{a^2x^2}{(x+a)^2}=b$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(x-\frac{ax}{x+a}\right)^2+\frac{2ax^2}{x+a}=b\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x+a}\right)^2+2a.\frac{x^2}{x+a}=b.$$

Đặt $t=\frac{x^2}{x+a}$ đưa về phương trình bậc hai với ẩn t: $t^2+2at=b$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=1$.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{x+1}=1\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2.\frac{x^2}{x+1}=1.$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2.\frac{x^2}{x+1}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x+1}=-1+\sqrt{2}\\ \frac{x^2}{x+1}=-1-\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\\ x=\frac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là:

$$x=\frac{-1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2};x=\frac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

2. Phương trình dạng $\frac{x^2+mx+a}{x^2+nx+a}+\frac{x^2+px+a}{x^2+qx+a}=b$.

Xét xem $x=0$ có là nghiệm của phương trình hay không.

Trường hợp $x\neq 0$ viết lại phương trình dưới dạng: $\frac{x+\frac{a}{x}+m}{x+\frac{a}{x}+n}+\frac{x+\frac{a}{x}+p}{x+\frac{a}{x}+q}=b$.

Đặt $t=x+\frac{a}{x}$ đưa về phương trình bậc hai với ẩn t.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\frac{x^2+5x+3}{x^2-7x+3}+\frac{x^2+4x+3}{x^2+5x+3}=-\frac{184}{119}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+5x+3\neq 0, x^2-7x+3\neq 0$.

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $x\neq 0$ viết lại phương trình dưới dạng: $\frac{x+\frac{3}{x}+5}{x+\frac{3}{x}-7}+\frac{x+\frac{3}{x}+4}{x+\frac{3}{x}+5}=-\frac{184}{119}$.

Đặt $t=x+\frac{3}{x},\left(\left|t\right|\geq 2\sqrt{3}\right)$ phương trình trở thành:

$$\frac{t+5}{t-7}+\frac{t+4}{t+5}=-\frac{184}{119}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{7}{2} \\ y=-\frac{971}{211}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+\frac{3}{x}=\frac{7}{2} \\ x+\frac{3}{x}=-\frac{971}{211}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{-971\pm\sqrt{408589}}{422}\end{array}\right..$$

Chủ Đề 5: HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN CÓ CHỨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

1. **Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:** $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases},\left(a_1^2+b_1^2>0, a_2^2+b_2^2>0\right)$.

Đây là hệ phương trình cơ bản để giải chúng ta có thể thực hiện phép thế, sử dụng máy tính bỏ túi hoặc sử dụng định thức Crame(hay được dùng trong biện luận).

$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2\end{vmatrix}, D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2\end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$.

Các trường hợp	Kết quả
$D\neq 0$	Hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\left(x;y\right)=\left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right)$.
$D=D_x=D_y=0$	Hệ phương trình có vô số nghiệm.
$D=0$ nhưng $D_x\neq 0$ hoặc $D_y\neq 0$	Hệ phương trình vô nghiệm.

2. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}, \left(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0\right).$

Hệ này dùng phép thế đưa về hệ bậc nhất hai ẩn hoặc dùng máy tính bỏ túi.

3. Hệ phương trình hai ẩn gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai: $\begin{cases} mx + ny = a \\ ax^2 + bxy + cy^2 = d \end{cases}.$

Rút x theo y hoặc rút y theo x từ phương trình đầu của hệ thế vào phương trình thứ hai của hệ đưa về giải phương trình bậc hai.

Chủ Đề 6: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN DẠNG TỔNG QUÁT

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Hệ phương trình bậc hai hai ẩn là hệ có dạng:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y + f_1 = 0 & (1) \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y + f_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

a) Nếu một trong hai phương trình là bậc nhất thì dễ dàng giải hệ bằng phương pháp thế.

b) Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ bằng cách loại bỏ $x^2 + y^2$ đưa về hệ phương trình bậc hai có một phương trình bậc nhất và giải hệ bằng phương pháp thế.

c) Nếu một trong hai phương trình là thuần nhất bậc hai(chẳng hạn $d_1 = e_1 = f_1$)khi đó phương trình đầu là $a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy = 0$ phương trình nãy cho phép ta tính được $t = \frac{x}{y}$.

d) Hệ đẳng cấp bậc hai nếu $d_1 = e_1 = d_2 = e_2 = 0$ hệ trở thành hệ đẳng cấp bậc hai. Bằng cách khử đi hệ số tự do ta đưa về một phương trình thuần nhất bậc hai cho phép ta tính được $t = \frac{x}{y}$.

e) Đưa về hệ bậc nhất bằng cách đặt $y = tx$ và đặt $z = x^2$ giải hệ với hai ẩn là $(x;z)$ lúc sau giải phương trình $z = x^2$.

f) Trong nhiều trường hợp ta có thể áp dụng phương pháp tịnh tiến nghiệm. Bằng cách đặt $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$ (với u, v là các ẩn và a, b là hai nghiệm của hệ phương trình). Để tìm a, b có hai cách thực hiện ta cho các hạng tử bậc nhất sau khi khai triển triệt tiêu từ đó ta có hệ đẳng cấp bậc hai với hai ẩn u, v cách giải tương tự trường hợp c) hoặc đạo hàm một phương trình lần lượt theo biến x, theo biến y giải hệ phương trình thu được ta được nghiệm $(x_0; y_0)$ khi đó $a = x_0, b = y_0$.

g) Dùng hệ số bất định(xem thêm chủ đề hệ số bất định).

Cách 1: Lấy $(1) + k.(2)$ đưa về một phương trình bậc hai với ẩn $t = ax + by + c$ ta tìm k hợp lý sao cho phương trình bậc hai có Delta là số chính phương.

Cách 2: Tìm hai cặp nghiệm của hệ phương trình. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó. Lấy một điểm khác hai điểm trên thay vào hai vế các phương trình của hệ từ đó suy ra hệ số bất định cần tìm.

h) Đạo hàm lần lượt theo biến x hoặc theo y đối với một trong hai phương trình của hệ tìm ra nghiệm $x = a, y = b$ khi đó đặt ẩn phụ $\begin{cases} u = x - a \\ v = y - b \end{cases}$ đưa về hệ phương trình đẳng cấp.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = -3 \\ x^2 + y^2 - xy + x - 2y = 12 \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng phương pháp thế. Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được: $5x - 4y - xy = 15$. Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 5x - 4y - xy = 15 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5x - 15}{x + 4} \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = -3 \end{cases} \quad (x \neq -4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5x-15}{x+4} \\ x^2 + \left(\dfrac{5x-15}{x+4}\right)^2 - 4x + 2.\dfrac{5x-15}{x+4} + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5x-15}{x+4} \\ x^4 + 4x^3 + 22x^2 - 180x + 153 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5x-15}{x+4} \\ (x-1)(x-3)\left(x^2+8x+51\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = -2 \\ x = 3, y = 0 \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (3;0);(1;-2)$.

<u>Cách 2:</u> Đưa về hệ bậc nhất

Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x \neq 0$ đặt $y = tx$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \left(1+t^2\right)x^2 + 2(t-2)x = -3 \\ \left(t^2-t+1\right)x^2 + (1-2t)x = 12 \end{cases}.$$

Đặt $z = x^2$ khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} \left(1+t^2\right)z + 2(t-2)x = -3 \\ \left(t^2-t+1\right)z + (1-2t)x = 12 \end{cases}$.

Ta có các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} 1+t^2 & 2t-4 \\ t^2-t+1 & 1-2t \end{vmatrix} = -4t^3 + 7t^2 - 8t + 5$$

$$D_z = \begin{vmatrix} -3 & 2t-4 \\ 12 & 1-2t \end{vmatrix} = -18t + 45; D_x = \begin{vmatrix} 1+t^2 & -3 \\ t^2-t+1 & 12 \end{vmatrix} = 15t^2 - 3t + 15.$$

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow -4t^3 + 7t^2 - 8t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(4t^2 - 3t + 5\right) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow D_z = 27 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Xét $t \neq 1 \Rightarrow D \neq 0$ khi đó $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ z = \dfrac{D_z}{D} \end{cases} \Rightarrow z = x^2 \Leftrightarrow D_z.D = D_x^2$.

$$\left(-18t + 45\right)\left(-4t^3 + 7t^2 - 8t + 5\right) = \left(15t^2 - 3t + 15\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 153t^4 + 216t^3 + 360t = 0 \ \Leftrightarrow 9t\left(t + 2\right)\left(17t^2 - 10t + 20\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

__TH1 :__ Nếu $t = 0 \Rightarrow D = 5, D_x = 15 \Rightarrow x = \dfrac{D_x}{D} = 3 \Rightarrow y = 0$.

__TH2 :__ Nếu $t = -2 \Rightarrow D = 81, D_x = 81 \Rightarrow x = \dfrac{D_x}{D} = 1 \Rightarrow y = -2$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(3;0\right);\left(1;-2\right)$.

__Cách 3 :__ Đặt ẩn phụ đưa về hệ đẳng cấp

Đặt $\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v - 2 \end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \left(u+1\right)^2 + \left(v-2\right)^2 - 4\left(u+1\right) + 2\left(v-2\right) = -3 \\ \left(u+1\right)^2 + \left(v-2\right)^2 - \left(u+1\right)\left(v-2\right) + u + 1 - 2\left(v-2\right) = 12 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - 2u - 2v = 0 \\ u^2 - uv + v^2 + 5u - 7v = 0 \end{cases}.$$

__Cách 4__: Hệ số bất định(2 hướng xử lý).

Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = -3 & (1) \\ x^2 + y^2 - xy + x - 2y = 12 & (2) \end{cases}$

Lấy $(1) + k.(2)$ theo vế ta được:

$$\left(k+1\right)x^2 - \left(ky + k + 4\right)x + k\left(y^2 - 2y - 12\right) + y^2 + 2y + 3 = 0.$$

Ta có: $\Delta_x = \left(ky + k + 4\right)^2 - 4\left(k+1\right)\left(k\left(y^2 - 2y - 12\right) + y^2 + 2y + 3\right)$

$$= \left(-3k^2 - 8k - 4\right)y^2 + \left(10k^2 + 8k - 8\right)y + 49k^2 + 44k + 4 = 0.$$

Ta chọn k sao cho Δ_x là số chính phương muốn vậy cho $\Delta'_y = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(5k^2+4k-4\right)^2-\left(-3k^2-8k-4\right)\left(49k^2+44k+4\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow 43k^4+141k^3+134k^2+44k+8=0 \Rightarrow k=-1$$

Tức là trừ theo vế hai phương trình của hệ như lời giải 1 ở trên.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3y^2+4xy-18x-22y+31=0 \\ 2x^2+4y^2+2xy+6x-46y+175=0 \end{cases}$.

Lời giải

__**Cách 1:**__ Đặt $\begin{cases} x=u+a \\ y=v+b \end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} (u+a)^2+3(v+b)^2+4(u+a)(v+b)-18(u+a)-22(v+b)+31=0 \\ 2(u+a)^2+4(v+b)^2+2(u+a)(v+b)+6(u+a)-46(v+b)+175=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+3v^2+4uv+(2a+4b-18)u+(6b+4a-22)v \\ \qquad +a^2+3b^2+4ab-18a-22b+31=0 \\ 2u^2+4v^2+2uv+(4a+2b+6)u+(8b+2a-46)v \\ \qquad +2a^2+4b^2+2ab+6a-46b+175=0 \end{cases}$$

Ta sẽ chọn các hệ số $(a;b)$ sao cho hệ trên trở thành hệ đẳng cấp bậc hai.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b-18=0 \\ 6b+4a-22=0 \\ 4a+2b+6=0 \\ 8b+2a-46=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=7 \end{cases}.$$

Thay vào hệ trên ta được:

$$\begin{cases} u^2+3v^2+4uv=1 \\ 2u^2+4v^2+2uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2-2uv=0 \\ 2u^2+4v^2+2uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ 8u^2=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ u=v=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-5 \\ y=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+7 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-5 \\ y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+7 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}-5;-\frac{1}{2\sqrt{2}}+7\right);\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-5;\frac{1}{2\sqrt{2}}+7\right).$$

<u>Nhận xét:</u> Việc đặt ẩn phụ thực hiện bằng thủ thuật nhanh như sau :

Đạo hàm theo biến x và đạo hàm theo biến y một trong hai phương trình của hệ(ta lựa chọn phương trình đầu của hệ)ta được:

$$\begin{cases} 2x+4y-18=0 \\ 6y+4x-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=x+5 \\ v=y-7 \end{cases}.$$

<u>Cách 2:</u> Lấy $(2)+k.(1)$ ta được:

$$\left(k+2\right)x^2+2\left(y+3+2ky-9k\right)x+4y^2+3ky^2-46y+175-22ky+31k=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là x.

Ta có:

$$\Delta'_x=\left[\left(2k+1\right)y+3-9k\right]^2-\left(k+2\right)\left(4y^2+3ky^2-46y+175-22ky+31k\right)$$
$$=\left(k^2-6k-7\right)y^2-14\left(k^2-6k-7\right)y+50k^2-291k-341$$

Chọn $k=-1$ thì $\Delta'_x=0$ suy ra $x=-\dfrac{\left(2k+1\right)y+3-9k}{k+2}=y-12$.

Lời giải

Lấy $(2)-(1)$ theo vế ta được: $x^2+2\left(12-y\right)x+y^2-24y+144=0$.

$$\Leftrightarrow \left(x+12-y\right)^2=0 \Leftrightarrow x=y-12.$$

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\left(y-12\right)^2+3y^2+4y\left(y-12\right)-18\left(y-12\right)-22y+31=0.$$

$$\Leftrightarrow \quad 8y^2 - 112y + 391 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 7 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = 7 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} - 5, y = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 7 \\ x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - 5, y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 7 \end{array}\right..$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+y-2)(2x-y-1) = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 2 - x \\ y = 2x - 1 \end{array}\right. \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = -\dfrac{4}{5}, y = -\dfrac{13}{5} \end{array}\right. \cdot$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;1); \left(-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{13}{5}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 2y + 3 = 0 \\ y^2 - 2xy + 2x + 4 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y = 1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y \neq 1$ rút $x = \dfrac{y^2 + 4}{2y - 2}$ từ phương trình thứ hai thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\left(\frac{y^2 + 4}{2y - 2}\right)^2 - y^2 - 2.\frac{y^2 + 4}{2y - 2} + 2y + 3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 3y^4 - 12y^3 - 4y^2 + 32y - 44 = 0 \Leftrightarrow \left(y^2 - 2y + 2\right)\left(3y^2 - 6y - 22\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 3y^2-6y-22=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1-\dfrac{5}{\sqrt{3}} \\ y=1+\dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\dfrac{4}{\sqrt{3}}, y=1-\dfrac{5}{\sqrt{3}} \\ x=1+\dfrac{4}{\sqrt{3}}, y=1+\dfrac{5}{\sqrt{3}} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(1-\frac{4}{\sqrt{3}};1-\frac{5}{\sqrt{3}}\right);\left(1+\frac{4}{\sqrt{3}};1+\frac{5}{\sqrt{3}}\right).$$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy+2y+15=0 \\ 2x-2xy+y^2+5=0 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x\neq 1$ rút $y=\dfrac{x^2+15}{2x-2}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x-2x.\frac{x^2+15}{2x-2}+\left(\frac{x^2+15}{2x-2}\right)^2+5=0.$$

$$\Leftrightarrow 3x^4-12x^3+26x^2-28x-245=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x-7\right)\left(3x^2-6x+35\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-2\sqrt{2} \\ x=1+2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-2\sqrt{2}, y=1-3\sqrt{2} \\ x=1+2\sqrt{2}, y=1+3\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(1-2\sqrt{2};1-3\sqrt{2}\right);\left(1+2\sqrt{2};1+3\sqrt{2}\right).$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x-2y=2 \\ x^2+y^2+2\left(x+y\right)=11 \end{cases}$.

Lời giải

<u>**Cách 1 :**</u> Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được $x+4y=9$.

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x-2y=2 \\ x+4y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(9-4y\right)^2+y^2+9-4y-2y=2 \\ x=9-4y \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17y^2 - 78y + 88 = 0 \\ x = 9 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 2 \\ x = -\dfrac{23}{17}, y = \dfrac{44}{17} \end{array} \right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;2); \left(-\dfrac{23}{17}; \dfrac{44}{17}\right)$.

<u>Cách 2 :</u> Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x \neq 0$ đặt $y = tx$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \left(1+t^2\right)x^2 + \left(1-2t\right)x = 2 \\ \left(1+t^2\right)x^2 + 2\left(1+t\right)x = 11 \end{cases}.$$

Đặt $z = x^2$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} \left(1+t^2\right)z + \left(1-2t\right)x = 2 \\ \left(1+t^2\right)z + 2\left(1+t\right)x = 11 \end{cases}$

Tính được $D = \left(4t+1\right)\left(t^2+1\right), D_x = 9\left(t^2+1\right), D_z = 26t - 7$.

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow D_z = -\dfrac{27}{2} \neq 0$ hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -\dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} \\ z = \dfrac{D_z}{D} \end{cases} \Rightarrow z = x^2 \Leftrightarrow D_z.D = D_x^2$.

$$\Leftrightarrow 81\left(t^2+1\right)^2 = \left(26t-7\right)\left(4t+1\right)\left(t^2+1\right) \Leftrightarrow 23t^2 - 2t - 88 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{44}{23} \end{array} \right. .$$

<u>TH1 :</u> Nếu $t = 2 \Rightarrow D = 45, D_x = 45 \Rightarrow x = \dfrac{D_x}{D} = 1 \Rightarrow y = 2$.

<u>TH2 :</u> Nếu $t = -\dfrac{44}{23} \Rightarrow x = -\dfrac{23}{17}, y = \dfrac{44}{17}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;2); \left(-\dfrac{23}{17}; \dfrac{44}{17}\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 11 = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 2xy - x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$\left(2x+8\right)y+23-3x=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{3x-23}{2x+8}$ (do $x=-4$ không thỏa mãn hệ phương trình).

Thay $y=\dfrac{3x-23}{2x+8}$ vào phương trình đầu của hệ ta được :

$$x^2+4\left(\frac{3x-23}{2x+8}\right)^2-4x+12.\frac{3x-23}{2x+8}+11=0.$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+22x^2-180x+153=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x-3\right)\left(x^2+8x+51\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=-2 \\ x=3, y=-\dfrac{12}{7} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;-2\right);\left(3;-\dfrac{12}{7}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2y^2+xy+x-10y=-12 \\ 3x^2-y^2-xy+15x+4y=-8 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $u=x+2, v=y-3$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \left(u-2\right)^2+2\left(v+3\right)^2+\left(u-2\right)\left(v+3\right)+u-2-10\left(v+3\right)=-12 \\ 3\left(u-2\right)^2-\left(v+3\right)^2-\left(u-2\right)\left(v+3\right)+15\left(u-2\right)+4\left(v+3\right)=-8 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+uv+2v^2=4 \\ 3u^2-uv-v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+uv+2v^2=4\left(3u^2-uv-v^2\right) \\ 3u^2-uv-v^2=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11u^2-5uv-6v^2=0 \\ 3u^2-uv-v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-\dfrac{6v}{11} \end{array}\right. \\ 3u^2-uv-v^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=v\\ 3u^2-uv-v^2=1\end{cases}\\ \begin{cases}u=-\dfrac{6}{11}v\\ 3u^2-uv-v^2=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=-1,v=-1\\ u=1,v=1\\ u=-\dfrac{6}{\sqrt{53}},v=\dfrac{11}{\sqrt{53}}\\ u=\dfrac{6}{\sqrt{53}},v=-\dfrac{11}{\sqrt{53}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3,y=2\\ x=-1,y=4\\ x=-\dfrac{6}{\sqrt{53}}-2,y=\dfrac{11}{\sqrt{53}}+3\\ x=\dfrac{6}{\sqrt{53}}-2,y=-\dfrac{11}{\sqrt{53}}+3\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=(-3;2);(-1;4);\left(-\frac{6}{\sqrt{53}}-2;\frac{11}{\sqrt{53}}+3\right);\left(\frac{6}{\sqrt{53}}-2;-\frac{11}{\sqrt{53}}+3\right).$$

<u>Nhận xét:</u> Cách đặt ẩn phụ như trên xuất phát từ thủ thuật. Đạo hàm một trong hai phương trình của hệ theo biến x và theo biến y ta được(ở đây ta lựa chọn phương trình đầu của hệ).

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\ 4y+x-10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=x+2\\ v=y-3\end{cases}.$$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1 & (1)\\ 48\left(x^2-y^2\right)+28xy+21x+3y=69 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Lấy $50.(1)+(2)$ theo vế ta được:

$$98x^2+28xy+21x+2y^2+3y-119=0.$$

$$\Leftrightarrow (7x+y-7)(14x+2y+17)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=7-7x\\ y=-\dfrac{14x+17}{2}\end{array}\right..$$

Hệ phương trình có hai nghiệm là: $(x;y)=(1;0);\left(\dfrac{24}{25};\dfrac{7}{25}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+x=3\\ x^2-2y^2-xy+y+1=0\end{cases}.$

Lời giải

Lấy $2.(1)+(2)$ theo vế ta được:

$$3x^2+2x-5-xy+y=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+5-y)=0.$$

Xét trường hợp tìm được các nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x;y)=(1;1);(1;-1);(-2;-1);\left(-\frac{11}{10};\frac{17}{10}\right).$$

CHƯƠNG 2. CÁC KỸ THUẬT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Chương này là nội dung chính của cuốn sách. Tôi trình bày theo các dạng toán điển hình phân theo các chủ đề. Mỗi chủ đề cung cấp các phương pháp cũng như kỹ thuật giải nhanh đồng thời là một số lưu ý đối với bạn đọc trong quá trình xử lý từng bài toán cụ thể.

Chủ đề 1. KỸ THUẬT SỬ DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Ta đã biết một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ luôn giải được bằng phép thế hoặc thông qua công thức Định thức $x=\dfrac{D_x}{D}, y=\dfrac{D_y}{D}$ với $D\neq 0$, trong đó: $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Nếu tinh ý quan sát hệ phương trình ta có thể đưa 1 hệ phương trình phức tạp về hệ bậc nhất hai ẩn như trên và ta sử dụng công thức nghiệm để giải.

<u>Dấu hiện nhận biết phương pháp:</u>

+ Các phương trình của hệ chỉ là phương trình bậc nhất hoặc bậc 2 của một ẩn x và y.

+ Có 1 nhân tử lặp lại ở cả 2 phương trình của hệ và các thành phần còn lại chỉ có dạng bậc nhất của x và y(1 căn thức; 1 biểu thức của x và y).

+ Có 2 nhân tử lặp lạiở cả 2 phương trình của hệ(có 2 căn thức; 2 biểu thức của x và y).

Để rõ hơn bạn đọc theo dõi các ví dụ trình bày dưới đây chắc chắn sẽ hình thành kỹ năng nhận diện hệ phương trình được giải bằng kỹ thuật này.

Chú ý. Trong chương 1 các bài toán về hệ phương trình bậc hai hai ẩn dạng tổng quát tôi đã trình bày kỹ thuật này.

Cần nhấn mạnh thêm rằng phương pháp này giúp ta giải quyết được bài toán khi nhận biết được hệ bậc nhất hai ẩn. Tuy nhiên có 1 thực tế rằng đối với 1 số hệ phương trình sẽ yêu cầu bạn đọc tính toán khá nặng. Do vậy mục đích của bài viết là cung cấp thêm cho bạn đọc 1 kỹ thuật để giải hệ. Nhìn hệ phương trình dưới con mắt linh hoạt hơn và tư duy suy nghĩ ta sẽ có thêm các cách giải hay khác nhau.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y=-3 \\ x^2+y^2-xy+x-2y=12 \end{cases}$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Cả hai phương trình của hệ có dạng phương trình bậc 2 của x hoặc của y. Vì vậy ta có thể đưa về hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn. Ta có thể coi x là tham số hoặc y là tham số. Lời giải dưới đây ta coi x là tham số.

Đặt $a=y^2, b=y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} a+2b=-x^2+4x-3 \\ a-(x+2)b=-x^2-x+12 \end{cases}.$$

Coi đây là phương trình bậc nhất hai ẩn a và b khi đó

Hệ này hệ số của a và b khá đơn giản nên ta dùng phương pháp thế:

Trừ theo vế hai phương trình của hệ suy ra: $(x+4)b=5(x-3)$

$\Rightarrow b=\dfrac{5(x-3)}{x+4}$ (vì $x=-4$ không thoả mãn hệ phương trình).

$$a=\frac{-x^3+3x+18}{x+4}; b=\frac{5(x-3)}{x+4}.$$

Mặt khác $a=b^2 \Leftrightarrow \dfrac{-x^3+3x+18}{x+4}=25\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^2$.

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x^2+8x+51)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=-2 \\ x=3, y=0 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;-2);(3;0)$.

Còn nhiều giải khác cho 1 hệ phương trình bậc hai hai ẩn dạng tổng quát đã trình bày trong chương trước.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+4x^2+y^2-4y=2 \\ x^2y+2x^2+6y=23 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận xét. Coi x là tham số và y là ẩn thì rõ ràng cả 2 phương trình của hệ có dạng bậc 2 và bậc 1 của y.

Đặt $t = y^2$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} t - 4y = 2 - x^4 - 4x^2 \\ \left(x^2 + 6\right)y = 23 - 2x^2 \end{cases}$.

Ta coi hệ phương trình trình trên là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn t và y ta được: $D = x^2 + 6; D_t = -x^6 - 10x^4 - 30x^2 + 104; D_y = 23 - 2x^2$.

Suy ra: $t = y^2 \Rightarrow \dfrac{D_t}{D} = \left(\dfrac{D_y}{D}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2 + 6\right)\left(-x^6 - 10x^4 - 30x^2 + 104\right) = \left(23 - 2x^2\right)^2$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)(1+x^2)(x^4 + 16x^2 + 95) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $\left(x; y\right) = \left(-1; 3\right); \left(1; 3\right)$.

Nhận xét. Ta hoàn toàn dùng phép thế cho hệ phương trình trên bằng cách rút $y = \dfrac{23 - 2x^2}{x^2 + 6}$ từ phương trình thứ hai của hệ và thế vào phương trình đầu của hệ ta có kết quả tương tự.

Bài 3. (TSĐH Khối A 2008) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy\left(1 + 2x\right) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}.$$

Lời giải

Nhận xét. Lời giải tham khảo và đáp án chính thức sử dụng ẩn phụ khá đơn giản. Nhìn nhận cả 2 phương trình của hệ là phương trình bậc 2 của y. Vì vậy theo dấu hiệu đã biết ta hoàn toàn đưa được hệ về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng $\begin{cases} xy^2 + \left(x^3 + x + 1\right)y = -x^2 - \dfrac{5}{4} \\ y^2 + \left(2x^2 + x\right)y = -x^4 - \dfrac{5}{4} \end{cases}$.

Đặt $a = y^2, b = y$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} xa + \left(x^3 + x + 1\right)b = -x^2 - \dfrac{5}{4} \\ a + \left(2x^2 + x\right)b = -x^4 - \dfrac{5}{4} \end{cases}$.

Ta có $D=x\left(2x^2+x\right)-\left(x^3+x+1\right)=x^3+x^2-x-1=\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2$.

+ Nếu $x=1\Rightarrow y=-\frac{3}{2}$.

+ Nếu $x=-1$ thay vào hệ ban đầu ta thấy vô nghiệm.

Tính tiếp D_x,D_y ta tìm được:

$$a=\frac{4x^6+4x^5+8x^4+4x^3+5x^2-5x-5}{4\left(x+1\right)^2};b=-\frac{4x^4+4x^3+4x^2+5}{4\left(x+1\right)^2}$$

với $\left(x-1\right)\left(x+1\right)\neq 0$.

Mặt khác:

$$a=b^2\Leftrightarrow\frac{4x^6+4x^5+8x^4+4x^3+5x^2-5x-5}{4\left(x+1\right)^2}=\left(\frac{4x^4+4x^3+4x^2+5}{4\left(x+1\right)^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+2x+3\right)^2\left(4x^3-5\right)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\Rightarrow y=-\sqrt[3]{\frac{25}{16}}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là: $\left(x;y\right)=\left(1;-\frac{3}{2}\right);\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}};-\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)$.

Xem thêm lời giải đặt ẩn phụ trong chủ đề kỷ thuật ẩn phụ đại số.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+y\right)\left(2-y\right)=\left(1-2y\right)\left(1+xy\right)\\ \left(x-y\right)\left(3-x\right)=\left(1-3x\right)\left(1-xy\right)\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Nhận xét. Sau khi khai triển ta đưa về một hệ phương trình bậc hai hai ẩn dạng tổng quát. Vậy áp dụng kỹ thuậ đưa về hệ bậc nhất hai ẩn ta được:

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}2x\left(y^2-y+1\right)=y^2-4y+1\\ 2x\left(y+3\right)=\left(3y+1\right)\left(x^2+1\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y^2-4y+1}{2\left(y^2-y+1\right)}\\ 2.\dfrac{y^2-4y+1}{2\left(y^2-y+1\right)}\left(y+3\right)-\left(3y+1\right)\left(\left(\dfrac{y^2-4y+1}{2\left(y^2-y+1\right)}\right)^2+1\right)=0\ (1)\end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 11y^5-35y^4+110y^3-70y^2+55y-7=0$.

Để giải phương trình đa thức trên ta đặt $y=\dfrac{v-1}{v+1}$ và sau khi rút gọn đưa phương trình về dạng: $2v^5-9=0 \Leftrightarrow v=\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}} \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}-1}{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}+1}$.

Thay ngược lại ta tìm được $x=\dfrac{\sqrt[5]{12}-1}{\sqrt[5]{12}+1}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{\sqrt[5]{12}-1}{\sqrt[5]{12}+1};\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}-1}{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}+1}\right)$.

Nhận xét. Câu hỏi đặt ra là tại sao nghĩ đến việc giải phương trình đa thức bậc 5 như trên bằng phép đặt $y=\dfrac{v-1}{v+1}$. Để làm rõ điều này trước hết ta xét cách khác cho bài toán như sau:

Với $\left(x^2y^2-1\right)\left(x-3\right)\left(y-2\right)\neq 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases}\dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{1-2y}{2-y}\\ \dfrac{x-y}{1-xy}=\dfrac{1-3x}{3-x}\end{cases}$

Đặt $x=\dfrac{u-1}{u+1},y=\dfrac{v-1}{v+1}$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}\dfrac{u-v}{u+v}=\dfrac{2-u}{u+2} \quad (1)\\ \dfrac{uv-1}{uv+1}=\dfrac{3-v}{3+v} \quad (2)\end{cases}$.

Từ (1) kết hợp với tính chất của tỷ lệ thức ta có:

$\dfrac{u-v}{u+v}=\dfrac{2-u}{u+2}=\dfrac{2-v}{2+v+2u}=\dfrac{2+v-2u}{2-v}$.

$\Rightarrow (2-v)^2=(2+v)^2-4u^2 \Leftrightarrow u^2=2v$

Tương tự từ (2) ta có: $\dfrac{uv-1}{uv+1}=\dfrac{3-v}{3+v}=\dfrac{3u-uv}{3u+uv}=\dfrac{3u-1}{3u+1+2uv}=\dfrac{3u+1-2uv}{3u-1}$

$\Rightarrow (3u-1)^2=(3u+1)^2-4u^2v^2 \Leftrightarrow u^2v^2=3u$.

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u^2 = 2v \\ u^2v^2 = 3u \end{cases}$.

Xét $u = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow x = y = -1 \Rightarrow xy = 1$ (loại do $1 - xy \neq 0$).

Vậy $u.\frac{u^4}{4} = 3 \Leftrightarrow u = \sqrt[5]{12} \Rightarrow v = \sqrt[5]{\frac{9}{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[5]{12} - 1}{\sqrt[5]{12} + 1}, y = \frac{\sqrt[5]{\frac{9}{2}} - 1}{\sqrt[5]{\frac{9}{2}} + 1}$.

Đây là một hệ được xây dựng một cách khá đặc biệt. Nguyên do đâu ta có phép đặt trên và cơ sở nào xây dựng dạng hệ trên xin nhường cho bạn đọc. Để áp dụng bạn đọc rèn luyện qua bài toán tương tự sau:

Ví dụ. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{1-3y}{3-y} \\ \dfrac{x-y}{1-xy} = \dfrac{1-5x}{5-x} \end{cases}$.

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)\sqrt{2xy+5} = 4xy - 3y + 1 \\ (x+2y)\sqrt{2xy+5} = 6xy + x - 7y - 6 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Chú ý căn thức $\sqrt{2xy+5}$ và cả hai phương trình của hệ có chứa thêm đại lượng $4xy, 6xy$ hoàn toàn biểu diễn được theo căn thức trên và các thành phần còn lại đều dạng bậc nhất của x và y. Vì vậy nếu coi $u = \sqrt{2xy+5}$ là tham số ta đưa được hệ phương trình về hệ bậc nhất 2 ẩn x và y.

<u>Cách 1:</u> Điều kiện $2xy + 5 \geq 0$.

Đặt $u = \sqrt{2xy+5}, (u \geq 0) \Rightarrow 2xy = u^2 - 5$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} (x+y)u = 2(u^2 - 5) - 3y + 1 \\ (x+2y)u = 3(u^2 - 5) + x - 7y - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 - (x+y)u - 3y - 9 = 0 \\ 3u^2 - (x+2y)u + x - 7y - 21 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -ux - (u+3)y = -2u^2 + 9 \\ (1-u)x - (7+2u)y = 21 - 3u^2 \end{cases}.$$

Coi đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn của x và y; u là tham số ta được:

$$D=\begin{vmatrix}-u & -(u+3)\\ 1-u & -(7+2u)\end{vmatrix}=u^2+5u+3.$$

Tương tự ta có: $D_x=u\left(u^2+5u+3\right)$, $D_y=\left(u-3\right)\left(u^2+5u+3\right)$.

Với $D=0$ hệ phương trình vô nghiệm.

Với $D\neq 0\Rightarrow x=\dfrac{D_x}{D}=u, y=\dfrac{D_y}{D}=u-3\Rightarrow xy=u\left(u-3\right)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{u^2-5}{2}=u\left(u-3\right)\Leftrightarrow u^2-6u+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=1\\ u=5\end{array}\right.$.

Thay ngược lại công thức nghiệm ta có các nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(1;-2\right);\left(5;2\right) \text{ thoả mãn điều kiện.}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;-2\right);\left(5;2\right)$.

Cách 2: Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}\left(x+y\right)\sqrt{2xy+5}=4xy-3y+1 & (1)\\ \left(x+2y\right)\sqrt{2xy+5}=6xy+x-7y-6 & (2)\end{cases}.$$

Lấy $2.(1)-(2)$ và $3.(1)-2.(2)$ theo vế ta được:

$$\begin{cases}x\sqrt{2xy+5}=-2xy-x+4y+7\\ \left(x-y\right)\sqrt{2xy+5}=-2x+5y+15\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-3=2xy+5-x\sqrt{2xy+5}\\ \left(x-y-3\right)\left(\sqrt{2xy+5}+5\right)=3\left(x-\sqrt{2xy+5}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-3=2xy+5-x\sqrt{2xy+5}\\ \left(2xy+5-x\sqrt{2xy+5}\right)\left(\sqrt{2xy+5}+5\right)=3\left(x-\sqrt{2xy+5}\right)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-3=2xy+5-x\sqrt{2xy+5}\\ \left(x-\sqrt{2xy+5}\right)\left(2xy+5+5\sqrt{2xy+5}+3\right)=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-3=2xy+5-x\sqrt{2xy+5}\\ x=\sqrt{2xy+5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y-3=x^2-x^2\\ x=\sqrt{2xy+5}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x = \sqrt{2x(x-3)+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x \ge 0 \\ x^2 = 2x^2 - 6x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5, y = 2 \\ x = 1, y = -2 \end{array}\right. .$$

Nhận xét. Qua bài toán ~~trên 1 lần nữa~~ khẳng định kỹ thuật này tỏ ra rất hiệu quả.

Bài 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)\sqrt{\dfrac{y^3+3}{y^3}} + y\sqrt{2x^2-1} = xy + 2y^2 \\ 2x\sqrt{\dfrac{y^3+3}{y^3}} + (x+y)\sqrt{2x^2-1} = 3xy - x^2 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Việc lặp lại 2 căn thức $\sqrt{\dfrac{y^3+3}{y^3}}, \sqrt{2x^2-1}$ ở hai phương trình của hệ lúc này coi hai ẩn là 2 căn và x,y là tham số. Hy vọng đưa về hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn có thể tìm được 2 căn thức theo x và y.

Điều kiện: $2x^2 - 1 \ge 0, \dfrac{y^3+3}{y^3} \ge 0, y \ne 0$.

Đặt $u = \sqrt{\dfrac{y^3+3}{y^3}}, v = \sqrt{2x^2-1}, (u, v \ge 0)$

Hệ phương trình trở thành : $\begin{cases} (x+y)u + yv = xy + 2y^2 \\ 2xu + (x+y)v = 3xy - x^2 \end{cases}$.

Coi đây là hệ phương trình bậc nhất với hai ẩn là u và v ta được:

$D = x^2 + y^2, D_u = 2y(x^2+y^2), D_v = -x(x^2+y^2)$.

Vì vậy $\begin{cases} u = \dfrac{D_u}{D} = 2y \\ v = \dfrac{D_v}{D} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{y^3+3}{y^3}} = 2y \\ \sqrt{2x^2-1} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-1; 1)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x-y+\dfrac{3x+y}{x^2-y^2}=8 \\ 3x+y+\dfrac{3x-y}{x^2-y^2}=7 \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Phân tích tìm lời giải:

Nhìn nhận cả 2 phương trình của hệ có chung $\dfrac{1}{x^2-y^2}$ và nếu coi đại lượng này là tham số thì hệ trở thành hệ bậc nhất 2 ẩn với x và y.

Điều kiện: $x^2-y^2\neq 0$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} 3x\left(1+\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)-y\left(1-\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)=8 \\ 3x\left(1+\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)+y\left(1-\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)=7 \end{cases}$.

Đặt $m=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} 3(1+m)x-(1-m)y=8 \\ 3(1+m)x+(1-m)y=7 \end{cases}$.

Coi đây là hệ phương trình bậc nhất với hai ẩn x,y và m là tham số.

Ta có: $D=6(m+1)(1-m), D_x=15(1-m), D_y=-3(m+1)$.

Với $D=0\Leftrightarrow(m+1)(1-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1\Rightarrow D_x=0 \\ m=-1\Rightarrow D_y=0 \end{array}\right.$ hệ phương trình vô nghiệm.

Với $D\neq 0\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{5}{2(m+1)} \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{1}{2(m-1)} \end{cases}$.

Mặt khác: $x^2-y^2=\dfrac{1}{m}\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{2(m+1)}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2(m-1)}\right)^2=\dfrac{1}{m}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Thay ngược lại công thức nghiệm ở trên ta có $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}, y=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}, y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$.

Cách 2:Cộng theo vế và trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{cases} 6x+\dfrac{6x}{x^2-y^2}=15 \\ -2y+\dfrac{2y}{x^2-y^2}=1 \end{cases}.$$

Nhận thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $xy\neq 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 2+\dfrac{2}{x^2-y^2}=\dfrac{5}{x} \\ -2+\dfrac{2}{x^2-y^2}=\dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{x^2-y^2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{25}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{16}{x^2-y^2} \Leftrightarrow x^2=5y^2 \ (1).$$

Thay $x^2=5y^2$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$-2+\dfrac{2}{4y^2}=\dfrac{1}{y} \Leftrightarrow 8y^2+4y-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}, y=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}, y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{4};-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right);\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{4};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right).$$

Ghi chú. (1) xem thêm kỹ thuật cộng, trừ lấy tích hai phương trình của hệ. Ngoài ra ta có thể giải hệ phương trình trên bằng số phức.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2(y+1)+y=y^2x+6x+1 \\ y^2+y(1-10x)=-25x^2+\dfrac{1}{x}+1 \end{cases}$.

Lời giải

Phân tích tìm lời giải: Rõ ràng cả hai phương trình của hệ là phương trình bậc hai của y. Do vậy nếu đặt $a=y^2, b=y$ hệ trở thành một hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn.

Điều kiện: $x \neq 0$.

Đặt $a = y^2, b = y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x.a - \left(5x^2+1\right)b - 5x^2 + 6x + 1 = 0 \\ x.a + \left(x - 10x^2\right)b + 25x^3 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{25x^3 + 15x^2 - x + 1}{x} \\ b = 5x + 2 \end{cases}, \left(x\left(5x^2 - x - 1\right) \neq 0\right)$$

Ta có $a = b^2 \Leftrightarrow \dfrac{25x^3 + 15x^2 - x + 1}{x} = \left(5x+2\right)^2$.

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ x = -\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}, y = -\dfrac{3\sqrt{5}+1}{2} \\ x = -\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}, y = \dfrac{3\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right..$$

Nếu $x\left(5x^2 - x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow VN \\ x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{10} \Rightarrow y = \dfrac{\pm 1 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{10} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{21}-1}{2} \end{array}\right..$

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(-\frac{5+3\sqrt{5}}{10}; -\frac{3\sqrt{5}+1}{2}\right); \left(-\frac{5-3\sqrt{5}}{10}; \frac{3\sqrt{5}-1}{2}\right);$$
$$\left(\frac{1-\sqrt{21}}{10}; \frac{\pm 1-\sqrt{21}}{2}\right); \left(\frac{1+\sqrt{21}}{10}; \frac{\sqrt{21}-1}{2}\right).$$

<u>Cách 2:</u> Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} y^2x - \left(5x^2+1\right)y - 5x^2 + 6x + 1 = 0 \\ xy^2 + \left(x - 10x^2\right)y + 25x^3 - x - 1 = 0 \end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\Leftrightarrow \left(5x^2 - x - 1\right)\left(5x - y + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{10} \Rightarrow y = \dfrac{\pm 1 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{10} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{21}-1}{2} \\ y = 5x + 2 \end{array}\right..$$

+ Với $y=5x+2$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\left(5x+2\right)^2x-\left(5x^2+1\right)\left(5x+2\right)-5x^2+6x+1=0.$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+5x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\\ x=-\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10},y=-\dfrac{3\sqrt{5}+1}{2}\\ x=-\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10},y=\dfrac{3\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm là

$$\begin{array}{c}\left(x;y\right)=\left(-\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10};-\dfrac{3\sqrt{5}+1}{2}\right);\left(-\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10};\dfrac{3\sqrt{5}-1}{2}\right);\\ \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{10};\dfrac{\pm1-\sqrt{21}}{2}\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{10};\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}\right)\end{array}.$$

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^2=(x-y)(xy-1)\\ x^3-x^2+y+1=xy(x-y+1)\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$

Nhận xét. Cũng tương tự bài toán trên coi x là tham số và y là biến thì cả 2 phương trình của hệ nếu viết lại đều là phương trình bậc 2 của y. Do vậy hoàn toàn sử dụng được phương pháp trên.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases}x^3+y^2=x^2y-xy^2+y-x\\ x^3-x^2+y+1=x^2y-xy^2+xy\end{cases}.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+1\right)y^2-\left(x^2+1\right)y+x^3+x=0\ (1)\\ xy^2-\left(x^2+x-1\right)y+x^3-x^2+1=0\ (2)\end{cases}.$$

Nhận thấy từ hệ trên ta hoàn toàn giải bằng phương pháp thế bằng cách lược bỏ đi nhân tử y^2 từ hai phương trình của hệ.

Do vậy ta lấy $x.(1)-(x+1).(2)$ theo vế ta được:

$$-x\left(x^2+1\right)y+x\left(x^3+x\right)+\left(x+1\right)\left(x^2+x-1\right)y-\left(x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(2x+1\right)\left(x-1\right)\left(y+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ y=-1\end{array}\right..$$

+ **TH1:** Nếu $x=-\frac{1}{2}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\frac{1}{2}y^2-\frac{5}{4}y-\frac{5}{8}=0\Leftrightarrow 4y^2-10y-5=0\Leftrightarrow y=\frac{5\pm 3\sqrt{5}}{4}.$$

+ TH2: Nếu $x=1$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$2y^2-2y+2=0\Leftrightarrow 2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=0 \text{ vô nghiệm.}$$

+ **TH3:** Nếu $y=-1$ thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases} x^3+x^2+2x+2=0 \\ x^3+2x=0 \end{cases} \text{(hệ vô nghiệm).}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{-1}{2};\frac{5+3\sqrt{5}}{4}\right),\left(\frac{-1}{2};\frac{5-3\sqrt{5}}{4}\right)$.

Cách 2: Dùng hệ hai phương trình bậc nhất

Chú ý nếu đặt $a=y^2, b=y\Rightarrow a=b^2$ và hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} (x+1)a-\left(x^2+1\right)b+x^3+x=0 \\ xa-\left(x^2+x-1\right)b+x^3-x^2+1=0 \end{cases}.$$

Thì rõ ràng đây là hệ phương trình hai ẩn bậc nhất và ta coi x là tham số.

Lúc này chỉ cần tìm a và b theo x rồi giải phương trình $a=b^2$ ta được 1 phương trình của x và ta có ngay kết quả của bài toán.

Thật vậy ta có: $D=-(x+1)\left(x^2+x-1\right)+x\left(x^2+1\right)=-2x^2+x+1$.

$D_a=\left(x^2+1\right)\left(2x^2-x-1\right), D_b=2x^2-x-1$.

+ Nếu $D=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$ thay lại vào hệ ta tìm được nghiệm như cách 1.

+ Nếu $D\neq 0\Rightarrow a=\frac{D_a}{D}=-x^2-1<0$ vô lý.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-\frac{1}{2};\frac{5-3\sqrt{5}}{4}\right);\left(-\frac{1}{2};\frac{5+3\sqrt{5}}{4}\right)$.

Cách 3: Hệ số bất định.

Lấy $-1.(1)+2.(2)$ ta được: $(x-1)(x^2+y^2-x-3y-xy-2)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+y^2-x-3y-xy-2=0 \end{array}\right.$$

Với $x=1$ thay vào hệ ta ta được: $\begin{cases} x^3+x^2+2x+2=0 \\ x^3+2x=0 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

Với $x^2+y^2-x-3y-xy-2=0 \qquad (3)$.

Lấy $2.(1)-(3)$ ta được: $(2x+1)(x^2+y^2-x+y-xy+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x^2+y^2-x+y-xy+2=0 \end{array}\right. .$$

Với $x=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow y=\dfrac{5\pm 3\sqrt{5}}{4}$.

Với $x^2+y^2-x+y-xy+2=0 \qquad (4)$.

Lấy $(4)-(3)$ ta được: $y=-1$ thay vào (3) thấy vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4}\right),\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{5-3\sqrt{5}}{4}\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x+\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=3 \\ 4\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=3y \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Phân tích tìm lời giải: Khi bắt gặp hệ xuất hiện hai căn thức lặp lại trong hai phương trình của hệ trên ý tưởng đầu tiên là rút từng căn thức theo x và y. Rõ ràng khi biểu diễn được mỗi căn thức theo x và y rồi chỉ cần thực hiện phép bình phương ta đưa về hệ phương trình bậc 2 hai ẩn dạng tổng quát. Và theo kỹ thuật hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta hoàn toàn giải được hệ mới sinh ra.

Điều kiện: $|x|\ge\sqrt{7}$.

Hệ phuơng trình tuwong đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=3-3x \\ 4\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=3y \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{x^2-7}=x+y-1 \\ \sqrt{y^2+24}=4x+y-4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1\ge 0, 4x+y-4\ge 0 \\ x^2-7=(x+y-1)^2 \\ y^2+24=(4x+y-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1\ge 0, 4x+y-4\ge 0 \\ x^2-7=(x+y-1)^2 \\ y^2+24=(4x+y-4)^2 \end{cases} \quad (1).$$

Ta có : $\begin{cases} x^2-7=(x+y-1)^2 \\ y^2+24=(4x+y-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+2y(x-1)-2x+8=0 \\ (x-1)y=-2x^2+4x+1 \end{cases}.$

Do $|x|\ge\sqrt{7}$ hệ trên khá đơn giản ta sử dụng phép thế từ phương trình thứ hai của hệ ta được:

$y=\dfrac{-2x^2+4x+1}{x-1}$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\left(\frac{-2x^2+4x+1}{x-1}\right)^2+2.\frac{-2x^2+4x+1}{x-1}.(x-1)-2x+8=0.$$

$\Leftrightarrow 2x^3-6x^2+6x-11=0.$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^3=9 \Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}} \Rightarrow y=\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{36}.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}};\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{36}\right).$

<u>Cách 2:</u> Ta có: $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1\ge 0, 4x+y-4\ge 0 \\ (y-1)(2x+y-1)+7=0 \\ (x-1)(2x+y-2)-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1\ge 0, 4x+y-4\ge 0 \\ y-1=-\dfrac{7}{2x+y-1} \quad (1) \\ x-1=\dfrac{3}{2x+y-2} \quad (2) \end{cases}$

Lấy $(1)+2.(2)$ theo vế ta được: $2x+y-3=\dfrac{6}{2x+y-2}-\dfrac{7}{2x+y-1}.$

Đặt $t=2x+y-2$ phương trình trở thành:

$$t-1=\frac{6}{t}-\frac{7}{t+1} \Leftrightarrow t=\sqrt[3]{6} \Leftrightarrow 2x+y-2=\sqrt[3]{6}.$$

Thay vào (1), (2) tìm được nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x;y)=\left(1+\sqrt[3]{\frac{9}{2}};\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{36}\right).$$

Nhận xét. Đây là một bài toán hay và khó cả 2 lời giải cho bài toán hết sức đẹp mắt. Với lời giải 1 tự nhiên và dễ nghĩ đến hơn tuy nhiên lời giải 2 cho ta 1 lối tư duy giải hệ đưa về ẩn phụ giữa 2 ẩn rất hay.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình sau có nghiệm x^2+y^2 không đổi: $\begin{cases} 2x-my=m \\ mx+y=\dfrac{3m^2+4}{m^2+4} \end{cases}$

Lời giải

Dễ tính được $x=\dfrac{4m}{m^2+4}, y=\dfrac{4-m^2}{m^2+4}$.

Khi đó $x^2+y^2=\dfrac{16m^2+\left(4-m^2\right)^2}{\left(m^2+4\right)^2}=1$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4-y^2-8x^2-6y=-2 \\ x^2y+y^2+y=-1 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $a=x^4, b=x^2 \Rightarrow \begin{cases} a-8b=y^2+6y-2 \\ by=-y^2-y-1 \end{cases}$.

Dễ tính được $a=\dfrac{y^3-2y^2-10y-8}{y}, b=-\dfrac{y^2+y+1}{y}$.

Mặt khác $a=b^2 \Leftrightarrow \dfrac{y^3-2y^2-10y-8}{y}=\left(\dfrac{y^2+y+1}{y}\right)^2$.

$$\Leftrightarrow (y+1)\left(4y^2+9y+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=\dfrac{-9\pm\sqrt{65}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1, y=-1 \\ x=-\dfrac{3+\sqrt{65}}{4}, y=\dfrac{-9+\sqrt{65}}{8} \\ x=\pm\dfrac{3-\sqrt{65}}{4}, y=-\dfrac{9+\sqrt{65}}{8} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm là

$$(x;y)=(\pm 1;-1);\left(-\frac{3+\sqrt{65}}{4};\frac{-9+\sqrt{65}}{8}\right);\left(\pm\frac{3-\sqrt{65}}{4};-\frac{9+\sqrt{65}}{8}\right).$$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(y+x)\sqrt{2xy+8}=4xy-3y+7\\(x+2y)\sqrt{2xy+8}=x-7y+6xy+3\end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Đặt $u=\sqrt{2xy+8},(u\ge 0)\Rightarrow xy=\dfrac{u^2-8}{2}$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}-ux-(u+3)y=-2u^2+9\\(1-u)x-(7+2u)y=21-3u^2\end{cases}.$$

Coi đây là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn của x và y; u là tham số ta được:

$$D=\begin{vmatrix}-u & -(u+3)\\1-u & -(7+2u)\end{vmatrix}=u^2+5u+3$$

Tương tự ta có: $D_x=u(u^2+5u+3)$, $D_y=(u-3)(u^2+5u+3)$.

Với $D=0$ hệ phương trình vô nghiệm.

Với $D\ne 0\Rightarrow x=\dfrac{D_x}{D}=u, y=\dfrac{D_y}{D}=u-3\Rightarrow xy=u(u-3)$.

Ta có phương trình: $\dfrac{u^2-8}{2}=u(u-3)\Leftrightarrow u^2-6u+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=2\\u=4\end{array}\right.$.

Thay ngược lại công thức nghiệm ta có các nghiệm là:

$(x;y)=(2;-1);(4;1)$ thoả mãn điều kiện.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;-1);(4;1)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)\sqrt{x^2+7}+y\sqrt{2y^2+1}=xy+2y^2\\2x\sqrt{x^2+7}+(x+y)\sqrt{2y^2+1}=3xy-x^2\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $a=\sqrt{x^2+7}, b=\sqrt{2y^2+1},(a,b>0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}(x+y)a+yb=xy+2y^2\\2xa+(x+y)b=3xy-x^2\end{cases}.$$

Ta có $D=x^2+y^2, D_a=2y(x^2+y^2), D_b=-x(x^2+y^2)$.

+ Nếu $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ thoả mãn.

+ Nếu $x^2+y^2>0$ ta có $\begin{cases} a=\dfrac{D_a}{D}=2y \\ b=\dfrac{D_b}{D}=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+7}=2y \\ \sqrt{2y^2+1}=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;0);(-3;2)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)\sqrt{x+y}+y\sqrt{x-y}=xy+2y^2 \\ 2x\sqrt{x+y}+(x+y)\sqrt{x-y}=3xy-x^2 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $a=\sqrt{x+y}, b=\sqrt{x-y}, (a,b\ge 0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} (x+y)a+yb=xy+2y^2 \\ 2xa+(x+y)b=3xy-x^2 \end{cases}.$$

Ta có $D=x^2+y^2, D_a=2y(x^2+y^2), D_b=-x(x^2+y^2)$.

+ Nếu $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ thoả mãn.

+ Nếu $x^2+y^2>0$ ta có $\begin{cases} a=\dfrac{D_a}{D}=2y \\ b=\dfrac{D_b}{D}=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}=2y \\ \sqrt{x-y}=-x \end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;0)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=2 \\ 4\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=7y \end{cases}, (x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Điều kiện: $|x|\ge\sqrt{7}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} \sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=2-x \\ 4\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=7y \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^2-7}=7y+x-2 \\ 3\sqrt{y^2+24}=4x+7y-8 \end{cases}.$$

Điều kiện trước tiên: $\begin{cases} 7y + x - 2 \geq 0 \\ 4x + 7y - 8 \geq 0 \end{cases}$.

Bình phương hai vế của hệ phương trình bậc hai tổng quát:

$$\begin{cases} 8x^2 + (4 - 14y)x - 49y^2 + 28y - 67 = 0 \\ 2x^2 + (7y - 8)x + 5y^2 - 14y - 19 = 0 \end{cases}.$$

Đặt $a = x^2, b = x, a = b^2$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 8a + (4 - 14y)b - 49y^2 + 28y - 67 = 0 \\ 2a + (7y - 8)b + 5y^2 - 14y - 19 = 0 \end{cases}.$$

Tương tự ta tính được $a = \dfrac{91y^3 - 124y^2 + 301y - 204}{4(7y - 6)}, b = \dfrac{-23y^2 + 28y + 3}{2(7y - 6)}$.

Mặt khác do $b^2 = x^2 \geq 7 \Leftrightarrow \left(\dfrac{-23y^2 + 28y + 3}{2(7y - 6)}\right)^2 \geq 7$ (1).

Mặt khác $a = b^2 \Leftrightarrow \dfrac{91y^3 - 124y^2 + 301y - 204}{4(7y - 6)} = \left(\dfrac{-23y^2 + 28y + 3}{2(7y - 6)}\right)^2$.

$\Leftrightarrow 12y^4 - 14y^3 + 245y^2 - 378y + 135 = 0$.

$\Leftrightarrow (y - 1)(12y^3 - 2y^2 + 243y - 135) = 0 \xleftrightarrow{(1)} y = 1 \Rightarrow x = 4$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 1)$.

__Cách 2:__ Đặt $\begin{cases} u = x + \sqrt{x^2 - 7} \\ v = y + \sqrt{y^2 + 24} \end{cases}, (v > 0) \Rightarrow \begin{cases} u^2 - 2ux + x^2 = x^2 - 7 \\ v^2 - 2vy + y^2 = y^2 + 24 \end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u^2 + 7}{2u}; y = \dfrac{v^2 - 24}{2v} \\ \sqrt{x^2 - 7} = \dfrac{u^2 - 7}{2u}; \sqrt{y^2 + 24} = \dfrac{v^2 + 24}{2v} \end{cases}.$$

(Do $u = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình).

Khi đó, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u - \dfrac{v^2 + 24}{2v} = 2 \\ 4.\dfrac{u^2 - 7}{2u} - \dfrac{v^2 + 24}{2v} = 7.\dfrac{v^2 - 24}{2v} \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{v^2+4v+24}{2v}\\ 2.\dfrac{u^2-7}{u}=\dfrac{4v^2-72}{v}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{v^2+4v+24}{2v}\\ 2.\dfrac{\left(\dfrac{v^2+4v+24}{2v}\right)^2-7}{\dfrac{v^2+4v+24}{2v}}=\dfrac{4v^2-72}{v}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{v^2+4v+24}{2v}\\ \dfrac{\left(v^2+4v+24\right)^2-28v^2}{v^2+4v+24}=4v^2-72\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{v^2+4v+24}{2v}\\ \left(v-6\right)\left(3v^3+26v^2+144v+384\right)=0\end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{v>0}\begin{cases}u=7\\ v=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\sqrt{x^2-7}=7\\ y+\sqrt{y^2+24}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\left(x;y\right)=\left(4;1\right)$.

<u>Nhận xét.</u> Với phép đặt ẩn phụ như trên ta xử lý toàn bộ những hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}a_1x+b_1\sqrt{a^2x^2+b}+c_1y+d_1\sqrt{c^2y^2+d}=e\\ a_2x+b_2\sqrt{a^2x^2+b}+c_2y+d_2\sqrt{c^2y^2+d}=f\end{cases}$.

Phép đặt ẩn phụ $\begin{cases}u=ax+\sqrt{a^2x^2+b}\\ v=cy+\sqrt{c^2y^2+d}\end{cases}$ là phép đặt ẩn phụ khử căn thức dạng Euler (xem thêm chủ đề hệ phương trình chứ căn thức).

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x^2+3}-2\sqrt{y^2+5}=-y\\ 3\sqrt{x^2+3}-\sqrt{y^2+5}=3x\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Tìm được $\begin{cases}4\sqrt{x^2+3}=6x+y\\ 4\sqrt{y^2+5}=6x+3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+y>0,6x+3y>0\\ 16\left(x^2+3\right)=36x^2+12xy+y^2\\ 16\left(y^2+5\right)=36x^2+36xy+9y^2\end{cases}$.

Đưa về giải hệ phương trình: $\begin{cases} 20x^2+12xy+y^2-48=0 \ (1) \\ 7y^2-36xy-36x^2+80=0 \ (2) \end{cases}$.

Lấy $(2)-7.(1)$ theo vế ta được:

$$120xy+176x^2-426=0 \Rightarrow y=\frac{416-176x^2}{120x}.$$

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$20x^2+12x.\frac{416-176x^2}{120x}+\left(\frac{416-176x^2}{120x}\right)^2-48=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(64x^2-169\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm\frac{13}{8} \end{array}\right. \xrightarrow{DK} \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=\frac{13}{8}, y=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;2\right);\left(\frac{13}{8};-\frac{1}{4}\right)$.

Nhận xét. Để sáng tạo ra các hệ phương trình dạng như trên ta xuất phát từ các đẳng thức $\begin{cases} \sqrt{x^2+a}=c_1x+d_1y+e_1 \\ \sqrt{y^2+b}=c_2x+d_2y+e_2 \end{cases}$.

Ta chỉ việc lấy tổng bất kỳ $k_1\sqrt{x^2+a}+k_2\sqrt{y^2+b}$ được 1 phương trình của hệ.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y+xy-2\sqrt{y}+1=0 \\ x^2\left(4-2y^2\right)+y^2-9=0 \end{cases}, \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $y\ge 0$.

Đặt $a=x^2, b=x \Rightarrow a=b^2$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} ya+yb-2\sqrt{y}+1=0 \\ a\left(4-2y^2\right)+y^2-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{y^2-9}{2y^2-4} \\ b=\dfrac{2\sqrt{y}-1-y.\dfrac{y^2-9}{2y^2-4}}{y}=\dfrac{2\sqrt{y}-1}{y}-\dfrac{y^2-9}{2y^2-4} \end{cases}$$

(do $y=\sqrt{2}$ không thoả mãn hệ phương trình).

Mặt khác $a=b^2 \Leftrightarrow \dfrac{y^2-9}{2y^2-4}=\left(\dfrac{2\sqrt{y}-1}{y}-\dfrac{y^2-9}{2y^2-4}\right)^2$.

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}-2\right)\left(\begin{array}{l}\sqrt{y^{11}}+10y^5+16y^4+24\sqrt{y^7}\\-40y^3+28\sqrt{y^5}-8y^2-45\sqrt{y^3}+54y-28\sqrt{y}+8\end{array}\right)=0.$$

$\Leftrightarrow \sqrt{y}=2 \Leftrightarrow y=4 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{2};4\right)$.

Chủ đề 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI I

Nội dung chủ đề này tôi đề cập đến phương pháp chung giải hệ phương trình đối xứng loại I và một số hệ đưa được về hệ đối xứng loại I thông qua các phép đặt ẩn phụ cơ bản. Ngoài ra đề cập ứng dụng của hệ đối xứng loại I trong giải phương trình vô tỷ và chứng minh bất đẳng thức.

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Đa thức đối xứng: Xét đa thức hai biến x,y là $P\left(x;y\right)$.

Nếu $P\left(x;y\right)=P\left(y;x\right)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ thì ta nói $P\left(x;y\right)$ là đa thức đối xứng.

Hệ phương trình đối xứng loại I là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases}F(x,y)=0\\G(x,y)=0\end{cases}.$$

trong đó: $F(x,y);G(x,y)$ là các đa thức đối xứng với x,y.

- Hệ đối xứng loại I là hệ mà vai trò của x,y trong mỗi phương trình của hệ là như nhau.
- Nếu $\left(x_0,y_0\right)$ là nghiệm của hệ thì $\left(y_0,x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ.

Ví dụ 1. Hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=xy+x+y\\xy=x+y-1\end{cases}$.

Với hệ này đổi vay trò của x,y thì hệ không thay đổi.

Phương pháp chung:

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$ với điều kiện $S^2 \ge 4P$ tìm được S, P.

Khi đó theo định lý Vi-ét x, y là hai nghiệm của phương trình:

$t^2 - St + P = 0$.

<u>Lưu ý:</u> Một số trường hợp ta phải đặt $S = x - y, P = xy$ và lúc này ta phải có $S^2 \ge -4P$ thực chất là hệ được suy ra từ hệ đối xứng loại 1 khi thay y bởi $-y$. Một số bài toán đơn giản mà khi biến đổi S, P chỉ có dạng bậc nhất hoặc dạng bậc hai ta có thể không cần đặt ẩn phụ và cứ thế tiến hành biến đổi tương đương. Khi tìm được S, P việc tìm x, y không cần chi tiết mà chỉ ra chỉ ra nghiệm $(x; y)$ bằng bao nhiêu.

Một số hằng đẳng thức hay được sử dụng:

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$

$x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy = S^2 - 3P$

$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = S^2 - P$

$x^3 + y^3 = (x + y)\left[(x + y)^2 - 3xy\right] = S(S^2 - 3P)$

$x^4 + y^4 = \left[(x + y)^2 - 2xy\right]^2 - 2x^2y^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

$x^4 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy) = (S^2 - 2P)^2 - P^2$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{S}{P}$

$\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2y^2} = \dfrac{S^2 - 2P}{P^2}$

Đặc điểm của dạng toán này là đôi khi số nghiệm của hệ thì chỉ có nghiệm duy nhất hoặc có số nhiệm chẵn và đôi khi rất nhiều nghiệm có khi đến 8 hoặc 16 nghiệm.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x^2+y^2+x+y+xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ xy=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy+x+y=4 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$(x;y)=\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right);(1;-2);(-2;1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+2xy=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases},\left(S^2\ge 4P\right)$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S+2P=2 \\ S\left(S^2-3P\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{2-S}{2} \\ S\left(S^2-\dfrac{6-3S}{2}\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S^3+3S^2-6S-16=0 \\ P=\dfrac{2-S}{2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (S-2)\left(2S^2+7S+8\right)=0 \\ P=\dfrac{2-S}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy: hệ phương trình có hai nghiệm là $(x,y)=(2,0);(0,2)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (x+y)(8+xy)=2 \end{cases}.$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \geq 4P\right)$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S\left(S^2 - 3P\right) = 19 \\ S\left(8 + P\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 2 - 8S \\ S^3 - 3\left(2 - 8S\right) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 + 24S - 25 = 0 \\ P = \dfrac{2 - 8S}{S} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(S - 1\right)\left(S^2 + S + 25\right) = 0 \\ P = \dfrac{2 - 8S}{S} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x, y\right) = \left(3, -2\right); \left(-2, 3\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(x + y\right) = 3\left(\sqrt[3]{x^2 y} + \sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b$ khi đó hệ phương trình trở thành trở thành:

$$\begin{cases} 2\left(a^3 + b^3\right) = 3\left(a^2 b + b^2 a\right) \\ a + b = 6 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \geq 4P\right)$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2S\left(S^2 - 3P\right) = 3SP \\ S = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ ab = 8 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 64 \\ y = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 8 \\ y = 64 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x, y\right) = \left(64, 8\right); \left(8, 64\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$.

Lời giải

Ý tưởng: Bình phương hai vế phương trình hai của hệ và rút $x+y$ theo xy thế vào phương trình đầu của hệ.

Điều kiện $x \ge 0, y \ge 0$.

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{\left[\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{xy}\right]^2-2xy}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\left(16-2\sqrt{xy}\right)^2-2xy}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2xy-64\sqrt{xy}+256}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{xy-32\sqrt{xy}+128}=8-\sqrt{xy}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}xy-32\sqrt{xy}+128=64-16\sqrt{xy}+xy\\ \sqrt{xy}\le 8\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy=16\\ x+y=8\end{cases} \Leftrightarrow x=y=4.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;4)$.

Cách 2: Từ hai phương trình của hệ ta có

$$\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=x+y.$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2\right)=x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta có kết quả tương tự.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4+y^4+6x^2y^2=41\\ xy\left(x^2+y^2\right)=10\end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $xy>0$.

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^2+4x^2y^2=41\\ xy\left(x^2+y^2\right)=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy\left(x^2+y^2\right)=10\\ \dfrac{100}{x^2y^2}+4x^2y^2=41\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy\left[(x+y)^2-2xy\right]=10\\ 4x^4y^4-41x^2y^2+100=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \vee xy = \dfrac{5}{2} \\ xy\left[\left(x+y\right)^2 - 2xy\right] = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pm 3 \\ xy = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y = \pm 3 \\ xy = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x+y=\pm 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \\ x=-1; y=-2 \\ x=-2; y=-1 \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} x+y=\pm 3 \\ xy = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ trường hợp này không thỏa mãn $\left(x+y\right)^2 \geq 4xy$ nên vô nghiệm.

Vậy: hệ có bốn nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(1;2\right);\left(2;1\right);\left(-1;-2\right);\left(-2;-1\right)$.

<u>Cách 2:</u> Nhận thấy hai phương trình của hệ vế trái đều cùng bậc 4.

Ta đưa về phương trình:

$$x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = \frac{41}{10}xy\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow \left(2x-y\right)\left(x-2y\right)\left(x^2 - \frac{8}{5}xy + y^2\right) = 0.$$

Do $xy \neq 0 \Rightarrow x^2 - \dfrac{8}{5}xy + y^2 > 0$.

Do đó hoặc $y = 2x$ hoặc $x = 2y$.

Chỉ việc thế vào một trong hai phương trình của hệ ta tìm được $\left(x;y\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \\ \left(x+y\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right) = 5 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} = 49 \\ x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2 = 53 \\ x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}\right]^2 - 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right) = 53 \\ x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right) = -14 \\ x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} = 5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=7 \\ y+\dfrac{1}{y}=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=-2 \\ y+\dfrac{1}{y}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{2} \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{7\pm 3\sqrt{5}}{2};-1\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+y\right)\left(1+xy\right)=18xy \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+x^2y^2\right)=208x^2y^2 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận xét: Hệ phương trình này tương tự bài toán trên khi khử đi xy và x^2y^2 bên vế phải của phương trình của hệ.

Nhận thấy $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Xét với $xy\neq 0$ khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \left(x+y\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=18 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=208 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=18 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=208 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=18 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=212 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=18 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=212 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=18 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=14 \\ y+\dfrac{1}{y}=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=4 \\ y+\dfrac{1}{y}=14 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7\pm 4\sqrt{3} \\ y=2\pm\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2\pm\sqrt{3} \\ y=y\pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có nghiệm là:

$\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(7\pm 4\sqrt{3};2\pm\sqrt{3}\right);\left(2\pm\sqrt{3};7\pm 4\sqrt{3}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình **(TSĐH Khối A 2006)** $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} xy \ge 0 \\ x, y \ge -1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \ge 4P\right)$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$A^2 = B^2, A^3 = B^3, A^4 = B^4, ... \begin{cases} \dfrac{3}{y} = (x-1)\left(\sqrt{x^3+2}+1\right) \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases} \begin{cases} 1 - y^2 = 4xy \\ 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \end{cases}$

$4\sqrt{x^2+1} - x^2 + y^3 - 3y - 2 \ge 0$

$$\begin{cases} S - \sqrt{P} = 3 \\ S + 2 + 2\sqrt{S+P+1} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = (S-3)^2, S \ge 3 \\ 2\sqrt{S + (S-3)^2 + 1} = 14 - S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = (S-3)^2, S \ge 3 \\ 2\sqrt{S^2 - 5S + 10} = 14 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = (S-3)^2, S \ge 3 \\ 4\left(S^2 - 5S + 10\right) = S^2 - 28S + 196 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3S^2 + 8S - 156 = 0 \\ P = (S-3)^2, S \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 3)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = \sqrt{xy+2} \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $|x| \ge 1, |y| \ge 1, xy + 2 \ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 - 1 + 2\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)} + y^2 - 1 = xy + 2 \\ x^2 + y^2 = x^2y^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy - 4 + 2\sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1} = 0 \\ x^2 + y^2 = x^2y^2 \end{cases}.$$

Đặt $u=x^2+y^2, v=xy, (u\ge 2, v\ge -2)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u-v-4+2\sqrt{v^2-u+1}=0 \\ u=v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1, v=-1 \\ u=4, v=2 \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $\begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2}, y=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2}, y=\sqrt{2} \end{array}\right..$

Vậy: hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình **(TSĐH Khối A,A1 2012):**

$$\begin{cases} x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y \\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} (x-y)^2+2xy-(x-y)=\dfrac{1}{2} \\ \left(x^3-y^3\right)-3\left(x^2+y^2\right)-9(x-y)+22=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2+2xy-(x-y)=\dfrac{1}{2} \\ (x-y)\left((x-y)^2+3xy\right)-3\left((x-y)^2+2xy\right)-9(x-y)+22=0 \end{cases}.$$

Khi đó ta đặt $\begin{cases} a=x-y \\ b=xy \end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} a^2+2b-a=\dfrac{1}{2} \\ a\left(a^2+3b\right)-3\left(a^2+2b\right)-9a+22=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{2}-\dfrac{a^2}{2} \\ a\left(a^2+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3a}{2}-\dfrac{3a^2}{2}\right)-3\left(a^2+\dfrac{1}{2}+a-a^2\right)-9a+22=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{2}-\dfrac{a^2}{2} \\ -2a^3+6a^2-45a+82=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{2}-\dfrac{a^2}{2} \\ (a-2)\left(-2a^2+2a-41\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Do phương trình: $-2a^2+2a-41=0$ có $\Delta'=-81<0$ nên vô nghiệm.

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ y(y+2)=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ (y+1)^2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2};y=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{2};y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

<u>Cách 2:</u> Viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases} (x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1) \\ x^2+y^2-x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Đến đây đặt $u=x-1;v=y+1$ và đưa về hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-12u=v^3-12v \ (1) \\ (u+1)^2+(v-1)^2-(u+1)+(v-1)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)\left(u^2+uv+v^2-12\right)=0 \\ u^2+v^2+2u-2v-\dfrac{1}{2}=0 \ (2) \end{cases}.$$

<u>Cách 3:</u> Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} (x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1) & (1) \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=1 & (2) \end{cases}.$$

Từ (2) ta có: $\begin{cases} \left|x-\dfrac{1}{2}\right|\le 1 \\ \left|y+\dfrac{1}{2}\right|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{3}{2}\le y\le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\le x-1\le \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}\le y+1\le \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow x-1, y+1 \in \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t$ trên $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ ta có:

$f'(t)=3\left(t^2-4\right)<0, \forall t\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ tức $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x-1)=f(y+1) \Leftrightarrow x-1=y+1 \Leftrightarrow x=y+2$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(y+2\right)^2+y^2-y-2+y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2y^2+4y+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}, y=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2}, y=-\frac{3}{2} \end{array}\right..$$

Bài 12. (VMO 2005) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

Lời giải

Điều kiện : $x \geq -1, y \geq -2$.

Ta cần tìm tập giá trị của P, xét hệ phương trình :

$$\begin{cases} x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y \\ x+y=P \end{cases}.$$

Những giá trị của P để hệ trên có nghiệm chính là tập giá trị của P.

Viết lại hệ dưới dạng : $\begin{cases} x+y=3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}\right) \\ x+y=P \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+1} \\ v=\sqrt{y+2} \end{cases}, \left(u, v \geq 0\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2+v^2-3=3\left(u+v\right) \\ u^2+v^2-3=P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(u+v\right)=P \\ u^2+v^2=P+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\frac{P}{3} \\ uv=\frac{\left(u+v\right)^2-\left(u^2+v^2\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{P^2}{9}-P-3\right) \end{cases}$$

Khi đó u, v là hai nghiệm của phương trình: $t^2-\frac{P}{3}t+\frac{1}{2}\left(\frac{P^2}{9}-P-3\right)=0$ (1).

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm không âm.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\dfrac{P^2}{9}-2\left(\dfrac{P^2}{9}-P-3\right)\ge 0\\ \dfrac{P}{3}\ge 0\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{P^2}{9}-P-3\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{9+3\sqrt{21}}{2}\le P\le 9+3\sqrt{15}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $9+3\sqrt{15}$, giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2}$.

Bài 13. (TSĐH Khối A 2006) Cho x,y là hai số thực $x,y\ne 0$ thỏa mãn $xy(x+y)=x^2-xy+y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có :

$$\frac{xy(x+y)}{x^2y^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2y^2}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}.$$

Đặt $u=\dfrac{1}{x},v=\dfrac{1}{y},(u,v\ne 0)$ khi đó $u+v=u^2-uv+v^2$;

Và $A=u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)=(u+v)^2$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}u+v=u^2-uv+v^2\\(u+v)^2=A\end{cases}$.

Khi đó giá trị lớn nhất của A để hệ trên có nghiệm chính là giá trị lớn nhất của A.

Trước tiên ta phải có $A\ge 0$ và để ý :

$$u+v=u^2-uv+v^2=\left(u-\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3v^2}{4}>0,\forall u,v\ne 0$$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}u+v=(u+v)^2-3uv\\(u+v)^2=A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv=\dfrac{(u+v)^2-(u+v)}{3}\\u+v=\sqrt{A}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv=\dfrac{A-\sqrt{A}}{3}\\u+v=\sqrt{A}\end{cases}.$$

Khi đó u,v là hai nghiệm của hệ phương trình :

$$t^2 - \sqrt{A}t + \frac{A-\sqrt{A}}{3} = 0 \qquad (1).$$

Hệ có nghiệm thỏa mãn yêu cầu trên $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $u, v \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = A - 4.\dfrac{A-\sqrt{A}}{3} \geq 0 \\ P = \dfrac{A-\sqrt{A}}{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < A \leq 16 \\ A \neq 1 \end{cases}.$$

Khi $A = 16 \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 16.

Bài 14. (TSĐH Khối B 2009) Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn:

$$(x+y)^3 + 4xy \geq 2.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3\left(x^4 + y^4 + x^2y^2\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$.

Lời giải

Ta có $(x+y)^2 \geq 4xy$ kết hợp với giả thiết suy ra :

$$(x+y)^3 + (x+y)^2 \geq (x+y)^3 + 4xy \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x+y)^2 + 2(x+y) + 2\right] \geq 0 \Leftrightarrow x+y \geq 1.$$

Ta có:

$$P = 3\left(x^4 + y^4 + x^2y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right) + 1$$

$$= \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 + \frac{3}{2}\left(x^4+y^4\right) - 2\left(x^2+y^2\right) + 1$$

$$\geq \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x^2+y^2\right)^2 - 2\left(x^2+y^2\right) + 1 = \frac{9}{4}\left(x^2+y^2\right)^2 - 2\left(x^2+y^2\right) + 1$$

Đặt $t = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{1}{2}$ khi đó $P \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, ta có :

$$f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0, \forall t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min_{t \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}.$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{9}{16}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

<u>DẠNG 3:</u> Ứng dụng hệ đối xứng loại I giải phương trình vô tỷ

Một số phương trình vô tỷ nếu khéo léo đặt ẩn phụ dạng hai ẩn ta đưa được về hệ đối xứng loại I dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình.

Bài 1. Giải phương trình sau: $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$.

Lời giải

Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}\Rightarrow x^3+y^3=35$.

Và phương trình ban đầu trở thành: $xy\left(x+y\right)=30$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^3+y^3=35\\ xy\left(x+y\right)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=35\\ xy\left(x+y\right)=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,y=3\\ x=3,y=2\end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2,x=3$.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt[4]{1+x}$.

Lời giải

Điều kiện: $0\le x\le 1$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Xét với $0<x\le 1$.

Khi đó chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[4]{x}$ ta được:

$$1+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}\Leftrightarrow\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}=1.$$

Đặt $u=\sqrt[4]{1+\frac{1}{x}};v=\sqrt[4]{1-\frac{1}{x}}$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}u-v=1\\ u^4+v^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1\\ \left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1\\ \left(\left(u-v\right)^2+2uv\right)^2-2u^2v^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1\\ 2u^2v^2+4uv-1=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 1 \\ uv = -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{4\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}}{2}} - 3} + 1}{2} \\ v = \dfrac{\sqrt{4\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}}{2}} - 3} - 1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{4\sqrt{\dfrac{\sqrt{6}}{2}} - 3} + 1}{2} \right)^4 - 1}.$$

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{33 - 2x - x^2} = \left(2 - \sqrt{x+1}\right)^2$.

Lời giải

Điều kiện: $-1 \le x \le -1 + \sqrt{34}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\left\{ \sqrt{34 - (x+1)^2} = \left(2 - \sqrt{x+1}\right)^2 \right.$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = 2 - \sqrt{x+1} \end{cases}, (u \ge 0) \Rightarrow u + v = 2$.

Khi đó ta có $v^4 = \left(2 - \sqrt{x+1}\right)^4 = \left(\sqrt{34 - (x+1)^2}\right)^2 = 34 - (x+1)^2 = 34 - u^4$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u^4 + v^4 = 34 \end{cases} \xleftrightarrow{u,v \ge 0} \left[\begin{array}{l} u = 1 + \sqrt{2} \\ v = 1 - \sqrt{2} \end{array} \right. \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{2}.$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ xy + x + y = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 8 \\ xy + x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + 2(x+y) = 8 \\ xy + x + y = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=-4 \\ x+y=2 \end{array}\right. \\ xy+x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2 \\ xy=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\sqrt{3} \\ y=1+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\sqrt{3} \\ y=1-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(-2;-2);\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right);\left(1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right).$$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x+xy+y=3 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+y)^2-xy=3 \\ xy=3-(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-xy=3 \\ xy=3-(x+y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+x+y-6=0 \\ xy=3-(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình **(Dự Bị Khối A 2005)** $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x(x+y+1)+y(y+1)=2 \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x^2+y^2+x+y+xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ xy=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy+x+y=4 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=0\\ xy=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-1\\ xy=-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}, y=\sqrt{2}\\ x=-2, y=1\\ x=1, y=-2\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right);(1;-2);(-2;1).$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2y+xy^2=2\\ x+y+xy=3\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}xy(x+y)=2\\ x+y+xy=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3-x-y)(x+y)=2\\ xy=3-(x+y)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-3(x+y)+2=0\\ xy=3-(x+y)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=1\\ xy=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Đáp số: $(x;y)=(1;1)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-xy+y^2=x+y\\ x^3+y^3-\dfrac{1}{4}=x^2y^2-xy\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^2-xy+y^2=x+y\\ (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=\left(xy-\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-xy+y^2=x+y\\ \left(x^2-xy+y^2\right)^2=\left(xy-\dfrac{1}{2}\right)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-xy+y^2=x+y\\ \left[\begin{array}{l}x^2-xy+y^2=xy-\dfrac{1}{2}\\ x^2-xy+y^2=-xy+\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-xy+y^2=x+y\\ x^2+y^2=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+xy=\dfrac{1}{2}\\ x^2+y^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=\frac{1}{2} \\ (x+y)^2-2xy=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\frac{1}{2}-(x+y) \\ (x+y)^2-2\left(\frac{1}{2}-(x+y)\right)=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=\frac{1}{2}-(x+y) \\ (x+y)^2+2(x+y)-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-1-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ xy=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-1+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ xy=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right..$$

Bài 6. Giải các hệ phương trình sau:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2y+y^2x=6 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+xy=5 \\ xy(x+y)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=5 \\ (5-x-y)(x+y)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=5 \\ (x+y)^2-5(x+y)+6=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=1 \\ x=1, y=2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2);(2;1)$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x-y)=-2 \\ x^3-y^3=2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} xy(x-y)=-2 \\ (x-y)\left[(x-y)^2+3xy\right]=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x-y)=-2 \\ (x-y)^3-6=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ xy=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-1)$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=2 \\ xy(x+y)=2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]=2 \\ xy(x+y)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=8 \\ xy(x+y)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=8-x-y \\ xy(x+y+xy+1)=12 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} (x+y)^2+x+y-2xy=8 \\ xy(x+y+xy+1)=12 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}, \left(S^2\geq 4P\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S^2+S-2P=8 \\ P(S+P+1)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{S^2+S-8}{2} \\ \dfrac{S^2+S-8}{2}.\left(S+\dfrac{S^2+S-8}{2}+1\right)=12 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{S^2+S-8}{2} \\ \dfrac{S^2+S-8}{2}.\left(S+\dfrac{S^2+S-8}{2}+1\right)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{S^2+S-8}{2} \\ S(S-3)(S+2)(S+5)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=0,P=-4 \\ S=3,P=2 \\ S=-2,P=-3 \\ S=-5,P=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,y=-2 \\ x=-2,y=2 \\ x=2,y=1 \\ x=1,y=2 \\ x=-3,y=1 \\ x=1,y=-3 \\ x=-2,y=-3 \\ x=-3,y=-2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có tám nghiệm là
$(x;y)=(1;2);(2;1);(1;-3);(-3;1);(-2;2);(2;-2);(-2;-3);(-3;-2)$.

5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)^4+2(x+y)^3=3(x+y)\\ 5(x^2+y^2)-8xy=18\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x+y)(x+y-1)\left[(x+y)^2+3(x+y)+3\right]=0\\ 5(x^2+y^2)-8xy=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=0\\ x+y=1\end{array}\right.\\ 5(x^2+y^2)-8xy=18\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=0\\ x+y=1\end{array}\right.\\ 5(x+y)^2-18xy=18\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=0\\ xy=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=1\\ xy=-\dfrac{13}{18}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,y=1\\ x=1,y=-1\\ x=\dfrac{3-\sqrt{35}}{6},y=\dfrac{3+\sqrt{35}}{6}\\ x=\dfrac{3+\sqrt{35}}{6},y=\dfrac{3-\sqrt{35}}{6}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$(x;y)=(-1;1);(1;-1);\left(\dfrac{3-\sqrt{35}}{6};\dfrac{3+\sqrt{35}}{6}\right);\left(\dfrac{3+\sqrt{35}}{6};\dfrac{3-\sqrt{35}}{6}\right)$.

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2}\\ x^2+y^2=5\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}xy=-2(x+y)\\ (x+y)^2-2xy=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=-2(x+y)\\ (x+y)^2+4(x+y)-5=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1\\ xy=-2\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-5\\ xy=10\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,y=-1\\ x=-1,y=2\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;2);(2;-1)$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=1-2xy \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y=1-2xy \\ (x+y)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-2xy \\ (1-2xy)^2-2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-2xy \\ 4x^2y^2-6xy=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=0 \\ x=0, y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;1);(1;0)$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=9 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=2, y+\dfrac{1}{y}=3 \\ x+\dfrac{1}{x}=3, y+\dfrac{1}{y}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=1, y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, y=1 \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(1;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right);\left(1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};1\right);\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};1\right).$$

4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=13\\3(x+y)+2xy+9=0\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x+y)^2-2xy=13\\3(x+y)+2xy+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{(x+y)^2-13}{2}\\3(x+y)+(x+y)^2-13+9=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1\\xy=-6\end{cases}\\\begin{cases}x+y=-4\\xy=\dfrac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,y=-2\\x=-2,y=3\\x=\dfrac{-4\pm\sqrt{10}}{2},y=\dfrac{-4\mp\sqrt{10}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=(-2;3);(3;-2);\left(\frac{-4\pm\sqrt{10}}{2};\frac{-4\mp\sqrt{10}}{2}\right).$$

5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2-x+y=2\\xy+x-y=-1\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x-y)^2+2xy-(x-y)=2\\xy+(x-y)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{2-(x-y)^2+(x-y)}{2}\\\dfrac{2-(x-y)^2+(x-y)}{2}+(x-y)=-1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{2-(x-y)^2+(x-y)}{2}\\(x-y)^2-3(x-y)-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=-1\\xy=0\end{cases}\\\begin{cases}x-y=4\\xy=-5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,y=0\\x=0,y=1\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;0);(0;1)$.

6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x+y-x^2y-xy^2=-3 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x+y-xy(x+y)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=5-(x+y) \\ x+y-(x+y)\left[5-(x+y)\right]=-3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=5-(x+y) \\ (x+y)^2-4(x+y)+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=1 \\ xy=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,y=2 \\ x=2,y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2);(2;1)$.

7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x+y+2xy=2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]=8 \\ x+y+2xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3.\dfrac{2-x-y}{2}(x+y)-8=0 \\ x+y+2xy=2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-2)\left[2(x+y)^2+7(x+y)+8\right]=0 \\ x+y+2xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,y=2 \\ x=2,y=0 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;0);(0;2)$.

8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ x^2y+y^2x=20 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=6 \\ xy(x+y)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy\left(x+y+2\sqrt{xy}\right)=36 \\ xy(x+y)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20+2xy\sqrt{xy}=36 \\ xy(x+y)=20 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=4 \\ xy(x+y)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,y=4 \\ x=4,y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;4);(4;1)$.

9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+xy=11\\x^2+y^2+3(x+y)=28\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases},(S^2\geq 4P)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}S+P=11\\S^2-2P+3S=28\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=11-S\\S^2-2(11-S)+3S=28\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P=11-S\\S^2+5S-50=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=11-S\\S=5\vee S=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=5\\P=6\end{cases}\vee\begin{cases}S=-10\\P=21\end{cases}.$$

Đáp số. $(x;y)=(2;3);(3;2);(-3;-7);(-7;-3)$.

10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y=2\\x^4+y^4=34\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases},(S^2\geq 4P)$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}S=2\\(S^2-2P)^2-2P^2=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=2\\2P^2-16P-18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=2\\P=9\vee P=-1\end{cases}.$$

Đáp số. $(x;y)=(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2});(1+\sqrt{2};1-\sqrt{2})$.

11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y=4\\(x^4+y^4)(x^3+y^3)=280\end{cases}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases},(S^2\geq 4P)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}S=4\\\left[(S^2-2P)^2-2P^2\right].\left[S(S^2-3P)\right]=280\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S=4\\\left[2P^2-64P+256\right].\left[4(16-3P)\right]=280\end{cases}.$$

Đáp số. $(x;y)=(1;3);(3;1)$.

12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^{10}+y^{10}=\dfrac{1}{8} \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $x^{10}+y^{10}=\left(x^2+y^2\right)\left(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8\right)$

$=x^8+y^8-x^2y^2\left(x^4+y^4\right)+x^4y^4$

$=\left(x^4+y^4\right)^2-2x^4y^4-x^2y^2\left(\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2\right)+x^4y^4$

$=\left(\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2\right)^2-x^4y^4-x^2y^2\left(1-2x^2y^2\right)$.

$=\left(1-2x^2y^2\right)^2-x^4y^4-x^2y^2\left(1-2x^2y^2\right)=5x^4y^4-5x^2y^2+1$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 5x^4y^4-5x^2y^2+1=\dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=1 \\ 5x^4y^4-5x^2y^2+\dfrac{7}{8}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=-\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{6}{5}}}},\ xy=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{6}{5}}} \\ x+y=\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{6}{5}}}},\ xy=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{6}{5}}} \\ x+y=-\sqrt{1+\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{6}{5}}}},\ xy=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{6}{5}}} \\ x+y=\sqrt{1+\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{6}{5}}}},\ xy=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{6}{5}}} \\ x+y=-\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{6}{5}}}},\ xy=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{6}{5}}} \end{array}\right..$$

13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=21 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S^2 - P = 7 \\ \left(S^2 - 2P\right)^2 - 2P^2 + P^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - P = 7 \\ \left(7 - P\right)^2 - P^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \pm 3 \\ P = 2 \end{cases}.$$

Đáp số. $\left(x;y\right) = \left(1;2\right);\left(2;1\right);\left(-1;-2\right);\left(-2;-1\right)$.

14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 91 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} S^2 - P = 13 \\ \left(S^2 - 2P\right)^2 - 2P^2 + P^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \pm 4 \\ P = 3 \end{cases}.$$

Đáp số. $\left(x;y\right) = \left(1;3\right);\left(3;1\right);\left(-1;-3\right);\left(-3;-1\right)$.

15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^5 + y^5 = 11\left(x + y\right) \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \left(x + y\right)\left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4\right) = 11\left(x + y\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \left(x + y\right)\left(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 - 11\right) = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 - 11 = 0 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Giải hệ phương trình (1): $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ y=\sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ y=-\sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right.$.

Giải hệ phương trình (2): $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4-11=0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ \left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2-xy\left(x^2+y^2\right)+x^2y^2-11=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2y^2+5x^2y^2-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=-7 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, y=-1 \\ x=-1, y=-2 \\ x=1, y=2 \\ x=2, y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có sáu nghiệm:

$$\left(x;y\right)=\left(\sqrt{\frac{5}{2}};-\sqrt{\frac{5}{2}}\right);\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};\sqrt{\frac{5}{2}}\right);\left(-1;-2\right);\left(-2;-1\right);\left(1;2\right);\left(2;1\right).$$

16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+y\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ xy+\dfrac{1}{xy}=4 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases},\left(S^2\geq 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S\left(1+\dfrac{1}{P}\right)=5 \\ P+\dfrac{1}{P}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S\left(1+\dfrac{1}{P}\right)=5 \\ P^2-4P+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=\dfrac{5}{3+\sqrt{3}} \\ P=2-\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} S=\dfrac{5}{3-\sqrt{3}} \\ P=2+\sqrt{3} \end{cases}.$$

17. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=4\\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x^2+y^2}{xy}=4\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4\\ xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=4\\ x\left(y+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{y}+y\right)=4\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=4\\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=2\\ y+\dfrac{1}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=0\\ y^2-2y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=6\\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=18\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=6\\ x^2+y^2+2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=6\\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=18\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=6\\ \left[x+\dfrac{1}{y}+y+\dfrac{1}{x}\right]^2-2\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=6\\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=9\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=3\\ y+\dfrac{1}{x}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+1=3y\\ xy+1=3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ x^2-3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

19. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=8\\ \left(x^3+y^3\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3=16\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=8\\ \left(x^3+y^3\right)\left(1+\dfrac{3}{x^2y^2}+\dfrac{3}{xy}+\dfrac{1}{x^3y^3}\right)=16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}=8\\ x^3+y^3+\dfrac{3x}{y^2}+\dfrac{3y}{x^2}+\dfrac{3x^2}{y}+\dfrac{3y^2}{x}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=8\\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^3+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^3=16\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases}u=x+\dfrac{1}{y}\\ v=y+\dfrac{1}{x}\end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u^2+v^2=8\\ u^3+v^3=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=8\\ \left(u+v\right)\left(u^2+v^2-uv\right)=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(u+v\right)^2-2uv=8\\ \left(u+v\right)\left(8-uv\right)=16\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = \dfrac{(u+v)^2 - 8}{2} \\ (u+v)\left(8 - \dfrac{(u+v)^2 - 8}{2}\right) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = \dfrac{(u+v)^2 - 8}{2} \\ (u+v)^3 - 24(u+v) + 32 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u+v=4 \\ uv=4 \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=-2-2\sqrt{3} \\ uv=4+4\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=-2+2\sqrt{3} \\ uv=8-4\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}+y+\dfrac{1}{x}=4 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}+y+\dfrac{1}{x}=-2-2\sqrt{3} \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=4+4\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}+y+\dfrac{1}{x}=-2+2\sqrt{3} \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=4-4\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1 \\ \begin{cases} (x+y).\dfrac{xy+1}{xy} = -2+2\sqrt{3} \\ xy + \dfrac{1}{xy} = 2-4\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right..$$

Bạn đọc tự giải tiếp hệ phương trình có năm nghiệm.

20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4xy \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x}{y^2}=4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4xy \\ xy(x+y)+x^3+y^3=4x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=4xy \\ xy(x+y)+x^3+y^3=4x^2y^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=4xy \\ (x+y)(x^2+y^2)=4x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2xy \\ x+y=2xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x=2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=1, y=1 \end{array}\right. .$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $(x;y)=(1;1)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)(x+y)=4 \\ \left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)(x^2+y^2)=4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)(x+y)=4 \\ \left[\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-2\right].\left[(x+y)^2-2xy\right]=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)(x+y)=4 \\ (x+y)^2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2-2(x+y)^2+4xy-2xy\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)(x+y)=4 \\ (x^2+y^2)+\dfrac{(x^2+y^2)^2}{xy}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy}.(x+y)=4 \\ (x^2+y^2)+\dfrac{(x^2+y^2)^2}{xy}=6 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}, (S^2 \geq 4P)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\dfrac{S^2-2P}{P}.S=4\\ S^2-2P+\dfrac{\left(S^2-2P\right)^2}{P}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{S^3}{2S+4}\\ S^2-2.\dfrac{S^3}{2S+4}+\dfrac{\left(S^2-2.\dfrac{S^3}{2S+4}\right)^2}{\dfrac{S^3}{2S+4}}=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{S^3}{2S+4}\\ \dfrac{4S^2}{2S+4}+\dfrac{16S}{2S+4}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{S^3}{2S+4}\\ S^2+S-6=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}S=-3\\ P=\dfrac{27}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}S=2\\ P=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

22. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}=2\sqrt{7}\\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{6}{x+y}=1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\left(x+y\right)\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}=2\sqrt{7}\\ 6+\dfrac{x+y}{xy}=x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}+\sqrt{\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2+2}=2\sqrt{7}\\ \left(x-\dfrac{1}{x}\right)+\left(y-\dfrac{1}{y}\right)=6\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}u=x-\dfrac{1}{x}\\ v=y-\dfrac{1}{y}\end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=6 \\ \sqrt{u^2+2}+\sqrt{v^2+2}=2\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2+2uv=36 \\ u^2+v^2+4+2\sqrt{u^2v^2+2\left(u^2+v^2\right)+4}=28 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2+2uv=36 \\ \sqrt{u^2v^2+2\left(36-2uv\right)+4}=uv-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=6 \\ uv \ge 6 \\ uv=-5 \end{cases} \text{(hệ phương trình vô nghiệm).}$$

<u>Cách 2:</u>

Ta có: $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}=\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}+\sqrt{\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2+2}$

$$\ge \sqrt{\left(x-\frac{1}{x}+y-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{11}>2\sqrt{7}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{x^2}}=2\sqrt{2} \\ x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \ne 0$.

Ta có: $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{x^2}} \ge \sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2} \ge \sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Thay vào phương trình thứ hai thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=3 \\ x+y=5+\sqrt{\left(x-1\right)\left(y-1\right)} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 1, y \ge 1$.

Khi đó đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x-1} \\ v=\sqrt{y-1} \end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=3 \\ u^2+v^2+2=5+uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ u^2+v^2-uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ (u+v)^2-3uv=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2,v=1 \\ u=1,v=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x-1}=2 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{y-1}=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5,y=2 \\ x=2,y=5 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(2;5);(5;2)$.

25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+xy}+\sqrt{3xy}=4\sqrt{3} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2-xy}+\sqrt{3xy}=4\sqrt{3} \\ x+y+2\sqrt{xy}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(8-2\sqrt{xy}\right)^2-xy}+\sqrt{3xy}=4\sqrt{3} \\ x+y=8-2\sqrt{xy} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3xy-32\sqrt{xy}+64}+\sqrt{3xy}=4\sqrt{3} \\ x+y=8-2\sqrt{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3xy-32\sqrt{xy}+64}=4\sqrt{3}-\sqrt{3xy} \\ x+y=8-2\sqrt{xy} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} \leq 4 \\ 3xy-32\sqrt{xy}+64=3xy-24\sqrt{xy}+48 \\ x+y=8-2\sqrt{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ x(x+1)y(y+1)=72 \end{cases}$.

Lời giải

__**Cách 1:**__ Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x+y)^2+x+y-2xy=18\\ xy(xy+x+y+1)=72\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{(x+y)^2+(x+y)-18}{2}\\ \dfrac{(x+y)^2+(x+y)-18}{2}.\left(\dfrac{(x+y)^2+(x+y)-18}{2}+x+y+1\right)=72\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{(x+y)^2+(x+y)-18}{2}\\ (x+y)^4+4(x+y)^3-31(x+y)^2-70(x+y)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=0\\ xy=-9\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=7\\ xy=12\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-2\\ xy=-8\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,y=-3\\ x=-3,y=3\\ x=2,y=3\\ x=3,y=2\\ x=4,y=3\\ x=3,y=4\\ x=-4,y=2\\ x=2,y=-4\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có tám nghiệm là:

$(x;y)=(3;-3);(-3;3);(-4;2);(2;-4);(3;4);(4;3);(-3;-4);(-4;-3)$.

Cách 2: Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}x^2+x+y^2+y=18\\ (x^2+x)(y^2+y)=72\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x=12\\ y^2+y=6\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+x=6\\ y^2+y=12\end{cases}\end{array}\right..$$

27. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5\\ (x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=9\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=13 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=3 \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}, y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=\left(1;\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2};1\right)$.

28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy > 0$.

Từ phương trình thứ hai suy ra $x+y>0$ do đó $x>0, y>0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}=\dfrac{7+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} \\ \sqrt{xy}(x+y)=78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7+\sqrt{xy} \\ \sqrt{xy}(x+y)=78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7+\sqrt{xy} \\ \sqrt{xy}\left(7+\sqrt{xy}\right)=78 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7+\sqrt{xy} \\ \left(\sqrt{xy}\right)^2+7\sqrt{xy}-78=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=13 \\ \sqrt{xy}=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-6 \\ \sqrt{xy}=-13 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=13 \\ xy=36 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9, y=4 \\ x=4, y=9 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(4;9);(9;4)$.

29. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=185\\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=65\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=250\\ \left(x^2-xy+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=65\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=5\\ (25-xy).5=65\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25\\ xy=12\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=25\\ xy=12\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=7\\ xy=12\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-7\\ xy=12\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,y=4\\ x=4,y=3\\ x=-3,y=-4\\ x=-4,y=-3\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=(3;4);(4;3);(-3;-4);(-4;-3)$.

Cách 2: Nhân chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$65\left(x^2+xy+y^2\right)=185\left(x^2-xy+y^2\right)\Leftrightarrow(4x-3y)^2=0\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x.$$

Thay $y=\frac{4}{3}x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được kết quả tương tự.

30. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^5+y^5=1\\ x^9+y^9=x^4+y^4\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^5+y^5=1\\ x^9+y^9=\left(x^4+y^4\right)\left(x^5+y^5\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^5+y^5=1\\ x^4y^4(x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=1\\ x=1,y=0\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;1);(1;0)$.

31. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+x^3y^3+y^3=17\\ x+xy+y=5\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}(x+y)^3-3xy(x+y)+x^3y^3=17\\ (x+y)+xy=5\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S^3 - 3SP + P^3 = 17 \\ S + P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3S\left(5 - S\right) + \left(5 - S\right)^3 = 17 \\ S + P = 5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^3 - 3S\left(5 - S\right) + \left(5 - S\right)^3 = 17 \\ S + P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18S^2 - 90S + 108 = 0 \\ S + P = 5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 2 \\ x = 2, y = 1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(1;2\right);\left(2;1\right)$.

32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + 15xy\left(x + y\right) = 32 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + 5xy\left(x + y\right)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ \left(x + y\right)^5 = 32 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ \left(x + y\right)^2 - xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$.

33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 \\ \dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{y}{y + 1} = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\left(x + 1\right)\left(y + 1\right) \ne 0$.

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-1}{xy} = \dfrac{x^2+y^2-x^2y^2}{x^2y^2} \\ \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-1)\left(x^2+xy+y^2\right)=0 \\ \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{xy} \end{cases}.$$

Do $xy \neq 0$ nên $x^2+xy+y^2>0$ do đó hệ tương đương với:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ \dfrac{2xy+x+y}{xy+x+y+1} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{xy} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=-1 \\ x=1, y=1 \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $(x;y)=(1;1)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

34. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=1+xy \\ \left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x, y \neq -1$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1+xy \\ \left[\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}\right]^2-\dfrac{2xy}{(x+1)(y+1)}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1+xy \\ \left[\dfrac{x^2+y^2+x+y}{xy+x+y+1}\right]^2-\dfrac{2xy}{(x+1)(y+1)}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1+xy \\ \left[\dfrac{1+xy+x+y}{xy+x+y+1}\right]^2-\dfrac{2xy}{(x+1)(y+1)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1+xy \\ \dfrac{2xy}{(x+1)(y+1)}=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = 0 \\ x = 1, y = 0 \\ x = 0, y = -1 \\ x = 0, y = 1 \end{array} \right. .$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y) = (-1;0);(1;0);(0;-1);(0;1)$.

35. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+1)^2} + \dfrac{y^2}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{2} \\ x + y + 1 = 3xy \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq -1, y \neq -1$.

<u>Cách 1:</u>

Ta có $\dfrac{x^2}{(y+1)^2} + \dfrac{y^2}{(x+1)^2} \geq \dfrac{2xy}{(x+1)(y+1)} = \dfrac{2xy}{xy + x + y + 1} = \dfrac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y + 1 = 3xy \\ \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{y}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{1}{3} \end{array} \right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = \left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right); (1;1)$.

<u>Cách 2:</u> Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x}{y+1} - \dfrac{y}{x+1} \right]^2 + \dfrac{2xy}{(x+1)(y+1)} = \dfrac{1}{2} \\ x + y + 1 = 3xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\dfrac{x}{y+1} - \dfrac{y}{x+1} \right]^2 + \dfrac{2xy}{xy + x + y + 1} = \dfrac{1}{2} \\ x + y + 1 = 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\dfrac{x}{y+1} - \dfrac{y}{x+1} \right]^2 = 0 \\ x + y + 1 = 3xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y+1} = \dfrac{y}{x+1} \\ x + y + 1 = 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{1}{3} \end{array} \right. .$$

36. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(xy+3\right)^2+\left(x+y\right)^2=8\\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^2y^2+x^2+y^2+8xy+9=8\\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=-8xy\\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}.\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{8}\\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{y}{y^2+1}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\pm\sqrt{3}\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=2\pm\sqrt{3}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;2\pm\sqrt{3}\right);\left(2\pm\sqrt{3};-1\right)$.

37. (VMO 2009) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}}\\ \sqrt{x\left(1-2x\right)}+\sqrt{y\left(1-2y\right)}=\dfrac{2}{9}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $0\le x,y\le\dfrac{1}{2}$.

Xuất phát từ phương trình đầu của hệ ta được:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2=\frac{4}{1+2xy}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}+\frac{2}{\sqrt{\left(1+2x^2\right)\left(1+2y^2\right)}}=\frac{4}{1+2xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}-\frac{2}{1+2xy}+\frac{2}{\sqrt{\left(1+2x^2\right)\left(1+2y^2\right)}}-\frac{2}{1+2xy}=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x-y\right)^2\left(2xy-1\right)}{\left(1+2xy\right)\left(1+2x^2\right)\left(1+2y^2\right)^2}$$

$$+\frac{-4\left(x-y\right)^2}{\left(1+2xy\right)\left(1+2xy+\sqrt{\left(1+2x^2\right)\left(1+2y^2\right)}\right)}=0 \qquad (1)$$

Do $x,y\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ nên vế trái của (1) luôn nhỏ hơn hoặc bằng 0 do đó dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x\left(1-2x\right)}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 2x^2-x+\frac{1}{81}=0\Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}$$

$$\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(\frac{9\pm\sqrt{73}}{36};\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}\right)$$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{9+\sqrt{73}}{36};\frac{9+\sqrt{73}}{36}\right);\left(\frac{9-\sqrt{73}}{36};\frac{9-\sqrt{73}}{36}\right).$$

38. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}\\ \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}.\sqrt{1+\sqrt{1-y^2}}=x+y-1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\ge 0,\left|x\right|\le 1,\left|y\right|\le 1$.

Biến đổi phương trình đầu tiên của hệ tương tự bài trên suy ra $x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$1+\sqrt{1-x^2}=2x-1\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=2x-2\Leftrightarrow x=1\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(1;1\right).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

39. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy+y^2=19\left(x-y\right)^2\\ x^2-xy+y^2=7\left(x-y\right)\end{cases}$.

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}(x-y)^2+3xy=19(x-y)^2\\(x-y)^2+xy=7(x-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=6(x-y)^2\\7(x-y)^2=7(x-y)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0\\xy=0\end{cases}\\\begin{cases}x-y=1\\xy=6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=0\\x=3,y=2\\x=-2,y=-3\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=(0;0);(3;2);(-2;-3)$.

40. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3-xy\\\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=7-\dfrac{3x^2y^2+2}{xy}\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3-xy\\\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2-\dfrac{2}{xy}=7-\dfrac{3x^2y^2+2}{xy}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3-xy\\(3-xy)^2-\dfrac{2}{xy}=7-\dfrac{3x^2y^2+2}{xy}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3-xy\\x^2y^2-3xy+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=2\\xy=1\end{cases}\\\begin{cases}x+y=2\\xy=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

41. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy=12\\x^3+y^3+2xy(x+y)=x^2+xy+y^2\end{cases}.$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy=12\\ \left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)+2xy\left(x+y\right)=x^2+xy+y^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy=12\\ \left(x+y-1\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(4x^2y^2+9xy+12\left(x^3+y^3\right)\right)+25xy=12\\ x+y=1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(4x^2y^2+9xy+12\left(x+y\right)\left[\left(x+y\right)^2-3xy\right]\right)+25xy=12\\ x+y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(4x^2y^2+9xy+12\left(1-3xy\right)\right)+25xy=12\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2y^2-2xy+12=12\\ x+y=1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2y^2-2xy+12=12\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}xy=0\\ xy=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=1\\ x=1,y=0\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(1;0\right)$.

42. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(3x+y\right)\left(x+3y\right)\sqrt{xy}=14\\ \left(x+y\right)\left(x^2+14xy+y^2\right)=36\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(3x^2+10xy+3y^2\right)\sqrt{xy}=14\\ \left(x+y\right)\left(x^2+14xy+y^2\right)=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(3\left(x+y\right)^2+4xy\right)\sqrt{xy}=14\\ \left(x+y\right)\left(\left(x+y\right)^2+12xy\right)=36\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\ P=\sqrt{xy}\end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}\left(3S^2+4P^2\right)P=14\\ S\left(S^2+12P^2\right)=36\end{cases}$.

Đây là hệ đẳng cấp nhân chéo theo vế ta được:

$$18\left(3S^2+4P^2\right)P=7S\left(S^2+12P^2\right)\Leftrightarrow\left(S-6P\right)\left(7S^2-12SP+12P^2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(S-6P\right)\left[7\left(S-\frac{6}{7}P\right)^2+\frac{48}{7}P^2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}S=0\\P=0\end{cases}.\\S=6P\end{array}\right.$$

Chỉ có nghiệm $S=6P$ thỏa mãn.

Khi đó $\begin{cases}S=6P\\S\left(S^2+12P^2\right)=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=6P\\6P\left(36P^2+12P^2\right)=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\P=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\\sqrt{xy}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\xy=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2},y=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\\x=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2},y=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2};\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right);\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2};\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right).$$

43. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(3x+y\right)\left(x+3y\right)\sqrt{xy}=35\sqrt{2}\\\left(x-y\right)\left(x^2+14xy+y^2\right)=33\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $xy\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(3x^2+3y^2+10xy\right)\sqrt{xy}=35\sqrt{2}\\\left(x-y\right)\left(x^2+14xy+y^2\right)=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(3\left(x-y\right)^2+16xy\right)\sqrt{xy}=35\sqrt{2}\\\left(x-y\right)\left(\left(x-y\right)^2+16xy\right)=33\end{cases}.$$

44. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{1+xy}+\sqrt{1+x+y}=2\\x^2y^2-xy=x^2+y^2+x+y\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $xy\ge -1,x+y\ge -1$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{1+xy}+\sqrt{1+x+y}=2\\x^2y^2-xy=\left(x+y\right)^2-2xy+x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1+xy}+\sqrt{1+x+y}=2\\\left(x+y-xy\right)\left(x+y+xy+1\right)=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+xy}+\sqrt{1+x+y}=2 \\ x+y-xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y+1}+\sqrt{1+x+y}=2 \\ x+y-xy=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$.

45. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}=2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>1, y>1$.

Xuất phát từ phương trình đầu tiên của hệ suy ra $x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\frac{2}{\sqrt{1-x}}=2 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(2;2\right).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;2\right)$.

46. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y\right)}}+\dfrac{y}{\sqrt{\left(1-y\right)\left(1-x^2\right)}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $-1<x<1, -1<y<1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$.

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski và Cô si ta có:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(2-x^2-y^2\right)} \le \frac{x^2+y^2+2-x^2-y^2}{2}=1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Thử lại vào phương trình thứ nhất chỉ có nghiệm $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

47. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{\left(x+y\right)^4}=\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}-\dfrac{3}{8}\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}-3=2\left(x+y\right)\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0,y>0$.

Ta có: $\dfrac{x^4+y^4}{\left(x+y\right)^4}\ge\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2\left(x+y\right)^4}\ge\dfrac{\left(\dfrac{\left(x+y\right)^2}{2}\right)^2}{2\left(x+y\right)^4}=\dfrac{1}{8}$.

Mặt khác: $\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}-\dfrac{3}{8}\le\dfrac{x+y}{2\left(x+y\right)}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\frac{2}{\sqrt{x}}-3=4x\Leftrightarrow 2-3\sqrt{x}=4x\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(4x+3\right)=2.$$

$$\Leftrightarrow x\left(4x+3\right)^2=4\Leftrightarrow\left(4x-1\right)\left(4x^2+7x+4\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\frac{1}{4}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

48. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}-2\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+x^2y^2+\dfrac{2}{\sqrt{xy}}=0\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{xy}-2\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0,y>0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}-xy\right)^2=0\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{xy}-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}-xy=0\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{xy}-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=xy\sqrt{xy}\\ xy\sqrt{xy}=3\sqrt{xy}-2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=xy\sqrt{xy} \\ \left(\sqrt{xy}-1\right)^2\left(\sqrt{xy}+2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ \sqrt{xy}=1 \end{cases}$$

(Hệ vô nghiệm do $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 2\sqrt{\sqrt{xy}}=2>1$).

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

49. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)^2\left(\sqrt{x^2-2xy+y^2+3}+1\right)=3 \\ x^2+xy+y^2=2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} (x-y)^2\left(\sqrt{(x-y)^2+3}+1\right)=3 \\ x^2+xy+y^2=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1 \\ x^2+xy+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2xy+y^2=1 \\ x^2+xy+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{1}{3} \\ x^2+y^2=\dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{1}{3} \\ (x+y)^2-2xy=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{1}{3} \\ x+y=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}, y=\dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}, y=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6} \\ x=-\dfrac{3+\sqrt{21}}{6}, y=\dfrac{3-\sqrt{21}}{6} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{6}, y=-\dfrac{3+\sqrt{21}}{6} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{6};\frac{3+\sqrt{21}}{6}\right);\left(\frac{3+\sqrt{21}}{6};\frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right);$$
$$\left(-\frac{3+\sqrt{21}}{6};\frac{3-\sqrt{21}}{6}\right);\left(\frac{3-\sqrt{21}}{6};-\frac{3+\sqrt{21}}{6}\right)$$

<u>Nhận xét:</u> Phương trình đầu tương đương với $(x-y)^2=1$ được suy ra từ tính đồng biến của hàm số $f(x)=x\left(\sqrt{x+3}+1\right)$ trên $\mathbb{R}$ (xem thêm kỹ thuật sử dụng hàm số trong giải hệ phương trình). Để tạo ra các hệ phương trình khó hơn ta ta thay phương trình thứ hai vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\begin{cases}(x-y)^2\left(\sqrt{x^2-2xy+y^2+3+m\left(x^2+xy+y^2\right)-2m+1}\right)=3\\ x^2+xy+y^2=2\end{cases}.$$

Chọn $m=2$ ta có bài toán.

50. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=2\left(\sqrt{xy}-1\right)\\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+3x}}\right)=2\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện : $x\ge 1, y\ge 1$.

Ta có: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x+y}{x+3y}\right);\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2y}{x+3y}\right)$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{x+3y}{x+3y}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{3}{2}\right).$$

Tương tự ta có: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right)$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên suy ra :

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}}+\frac{1}{\sqrt{y+3x}}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{x+y}+3\right)=2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$2\sqrt{x-1}=2\left(\sqrt{x^2}-1\right)\Leftrightarrow x-1=(x-1)^2\Leftrightarrow(x-1)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=1\\x=2,y=2\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);(2;2)$.

51. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=9 \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}+1\right)=18 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $xy \neq 0$.

Trước tiên khử căn cho đơn giản ta đặt $u=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, v=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^3+v^3=9 \\ (u+v)(u+1)(v+1)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3-3uv(u+v)=9 \\ (u+v)(uv+u+v+1)=18 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=\dfrac{(u+v)^3-9}{3(u+v)} \\ (u+v)\left(\dfrac{(u+v)^3-9}{3(u+v)}+u+v+1\right)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=\dfrac{(u+v)^3-9}{3(u+v)} \\ (u+v)^3+3(u+v)^2+3(u+v)-63=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=\dfrac{(u+v)^3-9}{3(u+v)} \\ (u+v-3)\left((u+v)^2+6(u+v)+21\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv=2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1, v=2 \\ u=2, v=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=2 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{8} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{8} \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{8}\right);\left(\dfrac{1}{8};1\right)$.

52. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+7y)\sqrt{x}+(y+7x)\sqrt{y}=8\sqrt{2xy(x+y)}\\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x \ge 0, y \ge 0$.

Phương trình đầu của hệ viết lại dưới dạng:

$$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+7\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=8\sqrt{2xy(x+y)}.$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(x-\sqrt{xy}+y\right)+7\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=8\sqrt{2xy(x+y)}.$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=8\sqrt{xy}\left(\sqrt{2(x+y)}-\sqrt{x}-\sqrt{y}\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=8\sqrt{xy}.\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{2(x+y)}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left[\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{2(x+y)}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-8\sqrt{xy}\right]=0 \ (1).$$

Ta có: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{2(x+y)}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-8\sqrt{xy}$

$$\ge\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-8\sqrt{xy}$$

$$=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-8\sqrt{xy}=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chi khi $x=y$ do đó $(1)\Leftrightarrow x=y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$\sqrt{2x^2}+\sqrt{2x^2}=8\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x=8\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}\Rightarrow y=2\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

53. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3\left(x^2+y^2\right)-2(x+y+xy)=15\\ x^3+y^3=\dfrac{25}{4}\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases}3\left((x+y)^2-2xy\right)-2(x+y+xy)=15\\ (x+y)^3-3xy(x+y)=\dfrac{25}{4}\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 3\left(S^2 - 2P\right) - 2\left(S + P\right) = 15 \\ S^3 - 3SP = \dfrac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{3S^2 - 2S - 15}{8} \\ S^3 - 3S.\dfrac{3S^2 - 2S - 15}{8} = \dfrac{25}{4} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{3S^2 - 2S - 15}{8} \\ \left(S - 1\right)\left(S - 10\right)\left(S + 5\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 1, P = -\dfrac{7}{4} \\ S = 10, P = \dfrac{265}{8} \\ S = -5, P = \dfrac{35}{4} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $S = 1, P = -\dfrac{7}{4}$.

$$\begin{cases} S = 1 \\ P = -\dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -\dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + 2\sqrt{2}}{2}, y = \dfrac{1 - 2\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{1 - 2\sqrt{2}}{2}, y = \dfrac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x; y\right) = \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}; \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}; \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\right).$$

54. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2 + xy + y^2}{3}} = x + y \\ 2xy - \dfrac{3\left(x + y\right)}{2} = 5 \end{cases}.$

Lời giải

Để hệ phương trình có nghiệm ta phải có $x + y \ge 0$.

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}} \ge \dfrac{x + y}{2} \\ \sqrt{\dfrac{x^2 + xy + y^2}{3}} \ge \dfrac{x + y}{2} \end{cases}.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$2x^2-3x=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=-1\\x=y=\dfrac{5}{2}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất :

$$(x;y)=\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right).$$

55. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)^2(y+1)^2=-9xy\\(x^2+1)(y^2+1)=-10xy\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases}(x^2+1+2x)(y^2+1+2y)=-9xy\\(x^2+1)(y^2+1)=-10xy\end{cases}\xleftrightarrow{xy\neq 0}\begin{cases}\left(\dfrac{x^2+1}{x}+2\right)\left(\dfrac{y^2+1}{y}+2\right)=-9\\\dfrac{x^2+1}{x}.\dfrac{y^2+1}{y}=-10\end{cases}.$$

56. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y=\sqrt{xy}+xy\\\sqrt{1+3x^2}+\sqrt{1+3y^2}=4xy\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $xy\ge 0\Rightarrow x+y\ge 0\Rightarrow x\ge 0;y\ge 0$.

Nhận thấy $xy=0$ không là nghiệm của hệ nên $x>0;y>0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$x+y=xy+\sqrt{xy}\le xy+\frac{x+y}{2}\Rightarrow x+y\le 2xy\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le 2$$

Từ phương trình thứ hai của hệ :

$$16x^2y^2=\left(\sqrt{1+3x^2}+\sqrt{1+3y^2}\right)^2\le\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\left(y\left(1+3x^2\right)+x\left(1+3y^2\right)\right).$$

$$=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)(x+y)(1+3xy)\le 2.2xy(1+3xy)=4xy+12x^2y^2\Rightarrow xy\le 1.$$

Lại có $2xy\ge x+y\ge 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\ge 1$.

Như vậy tất cả các bất đẳng thức trên phải xảy ra dấu bằng, điều này tương đương với $x=y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Chủ đề 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI II

Nội dung chủ đề này tôi đề cập đến phương pháp chung để giải một bài toán hệ phương trình đối xứng loại II và một số hệ phương trình có cách giải tương tự. Một số hệ đưa được về hệ đối xứng loại II bằng phương pháp đặt ẩn phụ và ứng dụng hệ phương trình đối xứng loại II trong bài toán giải phương trình vô tỷ.

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Hệ đối xứng loại II là hệ có dạng: $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F(y,x)=0 \end{cases}$.

Trong đó $F(x,y)$ là một đa thức không đối xứng.

Hay cách khác hệ đối xứng loại II là hệ mà khi ta đổi vai trò x,y cho nhau thì phương trình này chuyển thành phương trình kia.

Ví dụ: Hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3=2y+1 \\ 3y^3=2x+1 \end{cases}$.

Khi thay y bởi x thì phương trình thứ hai trở thành $3x^3=2y+1$ đây chính là phương trình thứ nhất của hệ.

Phương pháp chung.

Trừ theo vế hai phương trình trong hệ ta được một nhân tử chung $\left(x-y\right)$ nhóm lại đưa về phương trình tích và sau đó xét hai trường hợp

$$F(x,y)-F(y,x)=\left(x-y\right)f\left(x,y\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ f\left(x,y\right)=0 \end{array}\right..$$

Việc trừ theo vế thường sử dụng các hằng đẳng thức hoặc nhân liên hợp (nếu chứa dấu căn).

$$\left|\begin{array}{l} a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right) \\ a^3\pm b^3=\left(a\pm b\right)\left(a^2\mp ab+b^2\right) \\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \\ \sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}=\dfrac{a\pm b}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $y = x$ thay vào một trong hai phương trình của hệ tìm được nghiệm.

TH2: Nếu $f(x,y) = 0$ ta có các hướng xử lý như sau:

- Nếu $f(x,y)$ có dạng bậc nhất hoặc rút được y theo x hay x rút được theo y thực hiện phép thế vào một phương trình của hệ tìm ra nghiệm.
- Nếu $f(x,y)$ có dạng bậc cao chú ý $f(x,y)$ và $F(x,y)+F(y,x)$ là các đa thức đối xứng ta đưa về giải hệ phương trình: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ F(x,y)+F(y,x)=0 \end{cases}$ đây là hệ đối xứng loại I đã biết cách giải.

Chú ý: Nếu hệ phương trình bao gồm các hàm dạng đa thức, căn thức, hàm mũ và Logarit, lượng giác sau khi trừ theo vế hai vế một phương trình dạng $g(x) = g(y)$, trong đó $g(t)$ là một hàm đơn điệu thì chúng ta sử dụng tính chất của hàm số để chỉ ra rằng $x = y$.

Ví dụ: Hệ phương trình $\begin{cases} 2x = y^2 + 1 \\ 2y = x^2 + 1 \end{cases}$.

Trừ theo vế ta được $2(x-y) = y^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x = y^2 + 2y \Leftrightarrow g(x) = g(y)$.

Trong đó $g(t) = t^2 + 2t$ là hàm đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$. Từ đó suy ra $x = y$.

A. BÀI TẬP MẪU

DẠNG 1: GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x = 3y \\ y^2 - 4y = 3x \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2 - y^2 - 4x + 4y = 3y - 3x \Leftrightarrow (x-y)(x+y) - (x-y) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = 1 - x \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $y = x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2 - 4x = 3x \Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 7 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \end{cases} \end{array}\right..$$

TH2: Nếu $y=1-x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2-4x=3\left(1-x\right)\Leftrightarrow x^2-x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\\ y=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy: hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(7;7\right);\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right).$$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^3=x^2+2y^2\\ 3y^3=y^2+2x^2\end{cases}$.

Lời giải

Từ hai phương trình của hệ suy ra hệ có nghiệm khi $x,y\geq 0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$3\left(x^3-y^3\right)=-\left(x^2-y^2\right)\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(3\left(x^2+y^2+xy\right)+x+y\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ 3\left(x^2+y^2+xy\right)+x+y=0\end{array}\right..$$

Nếu $x=y$, khi đó ta được hệ $\begin{cases}x=y\\ 3x^3=x^2+2y^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=0\\ x=y=1\end{array}\right.$.

Nếu $3\left(x^2+y^2+xy\right)+x+y=0$, khi đó ta có hệ $\begin{cases}3\left(x^2+y^2+xy\right)+x+y=0\\ 3x^3=x^2+2y^2\end{cases}$.

Từ $x\geq 0$ suy ra để hệ có nghiệm thì phương trình thứ nhất phải có nghiệm, suy ra $y\leq 0$. Do đó $x=y=0$, thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x,y\right)=\left(0,0\right);\left(1,1\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình **(TSĐH Khối B 2003)** $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$.

Lời giải

Hệ có nghiệm khi $x > 0, y > 0$ khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 3x^2y = y^2+2 \\ 3y^2x = x^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(3xy+x+y) = 0 \\ 3xy^2 = x^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3xy^2 = x^2+2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^3 - x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3x^2+2x+2) = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy: hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;1)$.

__Nhận xét:__ Đối với hệ có dạng phân thức trước tiên ta biến đổi đưa về dạng đa thức và điều kiện có nghiệm của hệ phương trình giúp ta xử lý bài toán nhanh gọn hơn.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y^2 = x^3 \\ y + x^2 = y^3 \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x - y + y^2 - x^2 = x^3 - y^3 \Leftrightarrow x - y - (x-y)(x+y) = (x-y)(x^2+xy+y^2).$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2+xy+y^2+x+y-1 = 0 \end{array}\right..$$

__TH1:__ Nếu $y = x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x + x^2 = x^3 \Leftrightarrow x(x^2-x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

__TH2:__ Nếu $x^2+xy+y^2+x+y-1 = 0$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được: $x + y + x^2 + y^2 = x^3 + y^3$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=x^3+y^3 \\ x^2+y^2+xy+x+y-1=0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=(x+y)^2-2xy+x+y \\ (x+y)^2-xy+x+y-1=0 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}, (S^2 \geq 4P)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S^3-3SP=S^2-2P+S \\ S^2-P+S-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=S^2+S-1 \\ S^3-3S(S^2+S-1)=S^2-2(S^2+S-1)+S \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=S^2+S-1 \\ 2S^3+2S^2-4S+2=0 \ (1) \end{cases}.$$

Mặt khác: $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow S^2 \geq 4(S^2+S-1) \Leftrightarrow 3S^2+4S-4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq S \leq \frac{2}{3}$.

Khi đó: $2S^3+2S^2-4S+2>0, \forall S \geq -2 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(0;0);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+y=\dfrac{3}{x^2} \\ 2y+x=\dfrac{3}{y^2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x, y \neq 0$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được $x+y=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}>0$.

Khi đó trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$2(x-y)=\frac{3}{x^2}-\frac{3}{y^2} \Leftrightarrow (x-y)\left(2+\frac{3(x+y)}{x^2y^2}\right)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Vì vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} x = y \\ 2x + y = \dfrac{3}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x-1\right)\left(y^2+6\right) = y\left(x^2+1\right) \\ \left(y-1\right)\left(x^2+6\right) = x\left(y^2+1\right) \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y \\ yx^2 + 6y - x^2 - 6 = xy^2 + x \end{cases}$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$\left(x - y\right)\left(x + y - 2xy + 7\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{array}\right.$.

<u>TH1 :</u> Nếu $x = y$ khi đó ta có hệ phương trình :

$\begin{cases} x = y \\ xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 2 \\ x = y = 3 \end{array}\right.$.

<u>TH2:</u> Nếu $x + y - 2xy + 7 = 0$, khi đó cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được: $x^2 + y^2 - 5\left(x + y\right) + 12 = 0$.

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5\left(x+y\right) + 12 = 0 \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+y\right)^2 - 5\left(x+y\right) - 2xy + 12 = 0 \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \geq 4P\right)$.

Khi đó hệ phương trình trên trở thành:

$\begin{cases} S^2 - 5S - 2P + 12 = 0 \\ S - 2P + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 6S + 5 = 0 \\ P = \dfrac{S+7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 1, P = 4 \\ S = 5, P = 6 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện chỉ nhận nghiệm $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 3 \\ x = 3; y = 2 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $\left(2,2\right);\left(3,3\right);\left(3,2\right);\left(2,3\right)$.

<u>Nhận xét:</u> Việc lấy tổng hai phương trình của hệ đưa về một đa thức đối xứng rất có ý nghĩa khi ta thực hiện trừ theo vế hai phương trình của hệ mà phương trình lúc sau khó xử lý. Đây là một kinh nghiệm quý báu khi giải hệ đối xứng loại II. Phần bài tập rèn luyện tôi có đưa ra một số bài tập cùng dạng này cho bạn đọc rèn luyện.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}y + \frac{y^2}{x^2} = \frac{7x}{2y} \\ y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{y^2} = \frac{7y}{2x} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^2 + 2y + \frac{y^2}{x^2} = \frac{7x}{2y} + \frac{7y}{2} \\ y^2 + 2x + \frac{x^2}{y^2} = \frac{7y}{2x} + \frac{7x}{2} \end{cases}$.

$$\begin{cases} \left(x + \frac{y}{x}\right)^2 = \frac{7}{2}\left(y + \frac{x}{y}\right) \\ \left(y + \frac{x}{y}\right)^2 = \frac{7}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right) \end{cases}.$$

Đặt $u = x + \frac{y}{x}, v = y + \frac{x}{y}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2 = \frac{7}{2}v \\ v^2 = \frac{7}{2}u \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0, v = 0 \\ u = \frac{7}{2}, v = \frac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + \frac{y}{x} = 0 \\ y + \frac{x}{y} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + \frac{y}{x} = \frac{7}{2} \\ y + \frac{x}{y} = \frac{7}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = -1 \\ x = \frac{5}{2}, y = \frac{5}{2} \\ x = 3, y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2}, y = 3 \end{array}\right..$$

Vậy: hệ phương trình có bốn nghiệm là: $(x;y) = (-1;-1); \left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right); \left(3;\frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2};3\right)$.

Nhận xét: Với dạng hệ đối xứng loại II biểu thức phương trình có dạng phức tạp hoặc bậc cao cần chú ý biến đổi phương trình đưa về hệ đơn giản hơn.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=7\\ \sqrt{y+5}+\sqrt{x-2}=7\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x \ge 2, y \ge 2$.

Nhận thấy $x=2$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x>2$ khi đó trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{y+5}+\sqrt{y-2}-\sqrt{x-2}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}}-\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}\right)=0 \Leftrightarrow x=y,$$

do $\dfrac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}<0$.

Vì vậy ta có hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}x=y\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=7\end{cases} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ \sqrt{x^2+3x-10}=23-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ x\le 23\\ x^2+3x-10=529-46x+x^2\end{cases} \Leftrightarrow x=y=11.$$

Vậy: hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(11;11)$.

Nhận xét: Phương trình (1) có thể chỉ ra nghiệm duy nhất bằng phương pháp hàm số (xem cuốn phương trình, bất phương trình vô tỷ cùng tác giả) và một hệ đơn giản như này ta có thể tiếp cận với 10 lời giải khác nhau. Đưa ra cho các bạn tìm tòi.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=x-y^2\\ y\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=y-x^2\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $(1-x^2)(1-y^2)\ge 0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(x-y\right)\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}=x-y+x^2-y^2.$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}-1-x-y\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}=1+x+y\end{array}\right..$$

TH1: Nếu $y=x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}=x-x^2\Leftrightarrow x\left(\left|1-x^2\right|-1+x\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\left|1-x^2\right|-1+x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=0\\x=1,y=1\end{array}\right..$$

TH2: Nếu $\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}=1+x+y$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x\left(1+x+y\right)=x-y^2\Leftrightarrow x^2+xy+y^2=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(1;1\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=2\\x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}=2\end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x\sqrt{1+y^2}-x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+x^2}-y\sqrt{1+y^2}=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+y^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\y=-x\end{array}\right..$$

TH1: Nếu $y=-x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$x\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{1+x^2}=2$ (vô nghiệm).

TH2: Nếu $y=x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+x^2}=2\Leftrightarrow x\sqrt{1+x^2}=1\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$\Rightarrow (x;y)=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$$

Vậy: hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}+5y=\left(\sqrt{y}+2\sqrt{y+1}\right)^2 \\ 4\sqrt{1+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{(y+1)^2}}+5x=\left(\sqrt{x}+2\sqrt{x+1}\right)^2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y>0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 4\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)^2+\dfrac{2}{x(x+1)}}+5y=y+4(y+1)+4\sqrt{y(y+1)} \\ 4\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+1}\right)^2+\dfrac{2}{y(y+1)}}+5x=x+4(x+1)+4\sqrt{x(x+1)} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x(x+1)}\right)^2}=4\sqrt{y(y+1)}+4 \\ 4\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{y(y+1)}\right)^2}=4\sqrt{x(x+1)}+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(1+\dfrac{1}{x(x+1)}\right)=4\sqrt{y(y+1)}+4 \\ 4\left(1+\dfrac{1}{y(y+1)}\right)=4\sqrt{x(x+1)}+4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)}=\sqrt{y(y+1)} \\ \dfrac{1}{y(y+1)}=\sqrt{x(x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)}=\sqrt{y(y+1)} \\ \dfrac{1}{y(y+1)x(x+1)}=\sqrt{x(x+1)y(y+1)} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)}=\sqrt{y(y+1)} \\ \sqrt{x(x+1)y(y+1)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x+1)}=1 \\ \sqrt{y(y+1)}=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1=0 \\ y^2+y-1=0 \end{cases} \xleftrightarrow{x,y>0} \begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y} \\ \sqrt{y^2+3}+2\sqrt{y}=3+\sqrt{x} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x\ge 0, y\ge 0$. Nhận thấy $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$ không là nghiệm của hệ vậy xét với $x>0, y>0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2+3}-\sqrt{y^2+3}+3\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[\frac{x+y}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3}}+\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Vì vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=y \\ \sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x}=3+\sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x^2+3}-2+\sqrt{x}-1=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \left(x-1\right)\left[\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

Vậy: hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+3x^2+x+2=\sqrt{2y+11}+2y^2\sqrt{y+4} \ (1) \\ y^3+3y^2+y+2=\sqrt{2x+11}+2x^2\sqrt{x+4} \ (2) \end{cases}, \left(x\ge 0, y\ge 0\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x, y\ge 0$.

Lấy $(1)-(2)$ theo vế ta được:

$$x^3-y^3+3\left(x^2-y^2\right)+x-y=\sqrt{2y+11}-\sqrt{2x+11}+2y^2\sqrt{y+4}-2x^2\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left[x^2+xy+y^2+3\left(x+y\right)+1+\frac{2}{\sqrt{2x+11}+\sqrt{2y+11}}+2.\frac{x^2+xy+y^2+4\left(x+y\right)}{x^2\sqrt{x+4}+y^2\sqrt{y+4}}\right]=0$$

$\Leftrightarrow x=y$ (do $x,y\ge 0$).

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$x^3+3x^2+x+2=\sqrt{2x+11}+2x^2\sqrt{x+4}$.

Như vậy mấu chốt của bài toán là xử lý phương trình vô tỷ trên. Ta có ba cách xử lý như sau:

Cách 1: Điều kiện: $x\ge 0$ từ giả thiết.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\left(x+2-\sqrt{2x+11}\right)+x^2\left(x+3-2\sqrt{x+4}\right)=0.$$

TH1: Nếu $x+2>\sqrt{2x+11}\Leftrightarrow x>2\sqrt{2}-1\Rightarrow x+3>2\sqrt{x+4}$ phương trình vô nghiệm.

TH2: Nếu $x+2<\sqrt{2x+11}\Leftrightarrow -4\le x<2\sqrt{2}-1\Rightarrow x+3<2\sqrt{x+4}$ phương trình vô nghiệm.

TH3: Nếu $x+2=\sqrt{2x+11}\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}-1$ phương trình thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2\sqrt{2}-1$ suy ra hệ có nghiệm duy nhất: $\left(x;y\right)=\left(2\sqrt{2}-1;2\sqrt{2}-1\right)$.

Cách 2: Nhân liên hợp ta được:

$$\left(x+2-\sqrt{2x+11}\right)+x^2\left(x+3-2\sqrt{x+4}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+2x-7}{x+2+\sqrt{2x+11}}+x^2.\frac{x^2+2x-7}{x+3+2\sqrt{x+4}}=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2x-7\right)\left(\frac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{2x+11}}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-7=0\\ \dfrac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\dfrac{1}{x+2+\sqrt{2x+11}}=0\qquad(1)\end{array}\right.$$

Để xử lý phương trình (1) ta làm như sau:

$$\frac{x^2}{x+3+2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{2x+11}}=0$$

$\Leftrightarrow x^3+2x^2+x+3+x^2\sqrt{2x+11}+2\sqrt{x+4}=0$.

Kết hợp với phương trình đầu tiên ta được hệ:

$$\begin{cases} x^3+2x^2+x+3+x^2\sqrt{2x+11}+2\sqrt{x+4}=0 \\ x^3+3x^2+x+2=\sqrt{2x+11}+2x^2\sqrt{x+4} \end{cases}.$$

Suy ra $-x^2+1+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x+4}+\left(x^2+1\right)\sqrt{2x+11}=0$.

$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)\left(\sqrt{2x+11}+2\sqrt{x+4}-1\right)+2=0$.

Phương trình này vô nghiệm do đó $x^2+2x-7=0 \Leftrightarrow x=-1\pm 2\sqrt{2}$.

Kết hợp với điều kiện suy ra $x=2\sqrt{2}-1 \Rightarrow y=2\sqrt{2}-1$.

<u>**Cách 3:**</u> Đặt $t=\sqrt{x+4}$ phương trình trở thành:

$$\left(t^2-4\right)^2\left(t^2-2t-1\right)+t^2-2-\sqrt{2t^2+3}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2-2t-1\right)\left[\left(t^2-4\right)^2+1+\frac{2}{2t-1+\sqrt{2t^2+3}}\right]=0 \xleftrightarrow{t\ge 0} t=1+\sqrt{2}.$$

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\sqrt{x}=2y \\ y^2+\sqrt{y}=2x \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x,y\ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+\sqrt{t}$ trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=2t+\frac{1}{2\sqrt{t}}>0, \forall t\in\left(0;+\infty\right)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 2y=f(x) \\ 2x=f(y) \end{cases} \Rightarrow 2\left(y-x\right)=f(x)-f(y)$

Do $f(t)$ là hàm đồng biến nên, nếu $y\ge x \Rightarrow f(x)\le f(y)$ và nếu $y\le x \Rightarrow f(x)\ge f(y)$. Vậy $x=y$, khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} x=y \\ x^2+\sqrt{x}=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-2x+\sqrt{x}=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}-1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 1 \\ x = y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $\left(x,y\right)=\left(0;0\right);\left(1;1\right);\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

<u>Nhận xét:</u>Ngoài sử dụng hàm số ta thực hiện theo hai cách sau:

<u>Cách 1:</u> Nhận thấy $\left(0;0\right)$ là nghiệm của hệ, xét với $x^2+y^2>0$ khi đó trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$x^2-y^2+2\left(x-y\right)+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[x+y+2+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right]=0 \Leftrightarrow x=y.$$

<u>Cách 2:</u> Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$x^2+2x+\sqrt{x}=y^2+2y+\sqrt{y}$.

Khi đó hàm số $f(t)=t^2+2t+\sqrt{t}$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ nên:

$$f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y.$$

Bài 15. (VMO1994 Bảng B) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3x+\ln\left(2x+1\right)=y \\ y^2+3y+\ln\left(2y+1\right)=x \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y>-\dfrac{1}{2}$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2-y^2+3x-3y+\ln\left(2x+1\right)-\ln\left(2y+1\right)=y-x.$$

$\Leftrightarrow x^2+4x+\ln\left(2x+1\right)=y^2+4y+\ln\left(2y+1\right)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t^2+4t+\ln\left(2t+1\right)$ trên $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, ta có:

$f'(t)=2t+4+\dfrac{2}{2t+1}=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{2}{2t+1}+3>0, \forall t>-\dfrac{1}{2}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$x^2+3x+\ln(2x+1)=x \Leftrightarrow x^2+2x+\ln(2x+1)=0$ (2).

Xét hàm số $g(t)=t^2+2t+\ln(2t+1)$ trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$, ta có:

$g'(t)=2t+2+\frac{2}{2t+1}=2\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{2t+1}+1>0, \forall t>-\frac{1}{2}$ nên $g(t)$ là hàm đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Vì vậy $(2) \Leftrightarrow g(x)=g(0) \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;0)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+1+\sqrt{x^2-2x+2}=3^y \\ y+1+\sqrt{y^2-2y+2}=3^x \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x-y+\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{y^2-2y+2}=3^y-3^x.$$

$$\Leftrightarrow 3^x+x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^y+y+\sqrt{y^2-2y+2} \ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=3^t+t+\sqrt{t^2-2t+2}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$f'(t)=3^t\ln 3+1+\frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}=3^t\ln 3+\frac{\sqrt{(t-1)^2+1}+t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}>3^t\ln 3+\frac{|t-1|+t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}>0,$$

$\forall t \in R$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x+1+\sqrt{x^2-2x+2}=3^x \Leftrightarrow 3^{-x}\left(x+1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)-1=0 \ (2).$$

Xét hàm số $g(t)=3^{-t}\left(t+1+\sqrt{t^2-2t+2}\right)-1$, ta có:

$$g'(t)=-3^{-t}\ln 3\left(t+1+\sqrt{t^2-2t+2}\right)+3^{-t}\left(1+\frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right).$$

$$=3^{-t}\left(1+\frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}-\ln 3\left(t+1+\sqrt{t^2-2t+2}\right)\right)<0,\ \forall t\in R$$

Do $1+\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}-\ln 3\left(t+1+\sqrt{t^2-2t+2}\right)$

$$=\frac{\sqrt{t^2-2t+2}+t-1-\sqrt{t^2-2t+2}\ln 3\left(t+1+\sqrt{t^2-2t+2}\right)}{\sqrt{t^2-2t+2}}$$

$$<\frac{\sqrt{t^2-2t+2}+t-1-\left(t+1+\sqrt{t^2-2t+2}\right)}{\sqrt{t^2-2t+2}}=-\frac{2}{\sqrt{t^2-2t+2}}<0$$

Do đó $g(t)$ là hàm nghịch biến trên R.

Vì vậy: $(2)\Leftrightarrow g(x)=g(1)\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1$.

Vậy: hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Tương tự cách trên ta giải được hệ tổng quát:

$$\begin{cases} x-1+\sqrt{x^2-2x+a^2+1}=a^y \\ y-1+\sqrt{y^2-2y+a^2+1}=a^x \end{cases},(a\ge 1).$$

Hệ phương trình này cũng có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

<u>DẠNG 2:</u> ỨNG DỤNG HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI II TRONG BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ.

<u>Dạng 1</u>: Phương trình $(ax+b)^n=p\sqrt[n]{cx+d}+qx+r$.

Đặt $\sqrt[n]{cx+d}=ay+b$ nếu $pc>0$.

Đặt $\sqrt[n]{cx+d}=-(ay+b)$ nếu $pc<0$.

Dạng 2: Phương trình $\left[f(x)\right]^n+b(x)=a(x)\sqrt[n]{a(x)f(x)-b(x)}$.

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ v=\sqrt[n]{a(x)f(x)-b(x)} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} u^n+b(x)=a(x)v \\ v^n+b(x)=a(x)u \end{cases}$.

Đây là hệ đối xứng loại II có nhân tử chứa biến $a(x)$.

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25$.

Lời giải

Cách 1: Viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$\sqrt[3]{3x-5}=(2x-3)^3-(x-2)$.

Đặt $\sqrt[3]{3x-5}=2y-3$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2y-3=(2x-3)^3-(x-2)\\ 3x-5=(2y-3)^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y+x-5=(2x-3)^3\\ 3x-5=(2y-3)^3\end{cases}.$$

Đây là hệ nửa đối xứng loại II. Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$2(x-y)\left((2x-3)^2+(2x-3)(2y-3)+(2y-3)^2\right)=y-x.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[2(2x-3)^2+2(2x-3)(2y-3)+2(2y-3)^2+1\right]=0.$$

$\Leftrightarrow x=y$ (do $2(2x-3)^2+2(2x-3)(2y-3)+2(2y-3)^2+1>0$).

Vậy: bài toán đưa về giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-5}=2x-3$.

Cách 2: Đặt $y=\sqrt[3]{3x-5}\Rightarrow\begin{cases}y^3=3x-5\\ y=8x^3-36x^2+53x-25\end{cases}$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$y^3+y=(2x-3)^3+(2x-3)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$, ta có: $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(y)=f(2x-3)\Leftrightarrow y=2x-3\Leftrightarrow\sqrt[3]{3x-5}=2x-3$.

$$\Leftrightarrow 8x^3-36x^2+51x-22=0\Leftrightarrow(x-2)(8x^2-20x+11)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}\end{array}\right..$$

Vậy: phương trình có ba nghiệm là $x=2, x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$.

Bài 2. Giải phương trình: $8x^2-13x+7=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với: $8x^3-13x^2+7x=(x+1)\sqrt[3]{3x^2-2}$

$$\Leftrightarrow(2x-1)^3-(x^2-x-1)=(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+(x^2-x-1)}$$

Đặt $u=2x-1, v=\sqrt[3]{3x^2-2}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3-\left(x^2-x-1\right)=\left(x+1\right)v \\ v^3-\left(x^2-x-1\right)=\left(x+1\right)u \end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình trong hệ ta được:

$$\left(u-v\right)\left(u^2+uv+v^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u^2+uv+v^2+x+1=0 \end{array}\right.$$

TH1: Với $u=v \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{3x^2-2} \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(8x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{1}{8}$

TH2: Với $u^2+uv+v^2+x+1=0 \Leftrightarrow \left(v+\frac{u}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(2x-1\right)^2+x+1=0$

$\Leftrightarrow 4\left(v+\frac{u}{2}\right)^2+4x^2+2\left(2x-1\right)^2+5=0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1; x=-\frac{1}{8}$.

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\frac{1}{y}=y+1 \\ y+\frac{1}{x}=x+1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} xy+1=y^2+y \\ xy+1=x^2+x \end{cases}$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$y^2-x^2+y-x=0 \Leftrightarrow \left(y-x\right)\left(x+y+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-1-x \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $y=x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2+1=x^2+x \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1.$$

TH2: Nếu $y=-1-x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x\left(-1-x\right)+1=\left(-1-x\right)^2+x \Leftrightarrow 2x^2+4x=0 \xleftrightarrow{x\neq 0} x=-2 \Rightarrow y=1.$$

Vậy: hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(-2;1\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy=3\left(2+y\right) \\ y^2-xy=3\left(2+x\right) \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2-y^2=3y-3x \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x+y+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-3-x \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay vào phương trình đầu của hệ tìm được các nghiệm

$$\left(x;y\right)=\left(-2;-2\right);\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{2};\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2};-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy: hệ phương trình có ba nghiệm:

$$\left(x;y\right)=\left(-2;-2\right);\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{2};\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2};-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(4x+2\right)^2=2y+15 \\ \left(4y+2\right)^2=2x+15 \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(4x+2\right)^2-\left(4y+2\right)^2=2y-2x \Leftrightarrow 4\left(x-y\right)\left(4x+4y+4\right)=2\left(y-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(8x+8y+10\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-\dfrac{5+4x}{4} \end{array}\right..$$

Hệ phương trình có bốn nghiệm:

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{11}{8};-\frac{11}{8}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{9+\sqrt{221}}{6};\frac{-9+\sqrt{221}}{6}\right);\left(\frac{-9+\sqrt{221}}{6};-\frac{9+\sqrt{221}}{6}\right).$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y^2=y^3 \\ y+x^2=x^3 \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x-y+y^2-x^2=y^3-x^3 \Leftrightarrow x-y+(y-x)(y+x)=(y-x)(y^2+xy+x^2).$$

$$\Leftrightarrow (y-x)(x^2+xy+y^2-x-y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ x^2+xy+y^2-x-y+1=0 \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $y=x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x+x^2=x^3 \Leftrightarrow x(x^2-x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, y=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

TH2: Nếu $x^2+xy+y^2-x-y+1=0$ cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được: $x+y+x^2+y^2=x^3+y^3$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=x^3+y^3 \\ x^2+xy+y^2-x-y+1=0 \end{cases}$ (đây là hệ đối xứng loại I).

Cách 2: Viết lại:

$$x^2+xy+y^2-x-y+1=0 \Leftrightarrow (x+y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{(vô lý).}$$

Vậy trường hợp này hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm:

$$(x;y)=(0;0);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+1=2(x^2-x+y) \\ y^3+1=2(y^2-y+x) \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^3-y^3=2x^2-2y^2-4x+4y.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=2(x-y)(x+y)-4(x-y).$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2-2x-2y+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ x^2+xy+y^2-2x-2y+4=0 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x^3+1=2x^2 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

<u>TH2:</u> Nếu $x^2+xy+y^2-2x-2y+4=0$.

$$\Leftrightarrow (x+y)^2+(x-2)^2+(y-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{(vô lý).}$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(1;1);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^3-y^3=2y-2x \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=-2(x-y).$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+2\right)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Với $y=x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^3+1=2x \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1 \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm:

$$(x;y)=(1;1);\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-y^2=3x-2 \\ 2y^2-x^2=3y-2 \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$3x^2-3y^2=3x-3y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=1-x \end{array}\right. .$$

Xét trường hợp thay vào phương trình đầu của hệ ta được: $(x;y)=(1;1);(2;2)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)=y^7+1 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=x^7+1 \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)-(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=y^7-x^7.$$

$$\Leftrightarrow x^7+(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=y^7+(1+y)(1+y^2)(1+y^4)\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^7+(1+t)(1+t^2)(1+t^4)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=14t^6+(t+1)^2(3t^4+2t^2+1)>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay ngược lại phương trình của hệ ta được:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+x^7.$$

Nhận thấy $x=1$ không là nghiệm của phương trình nên nhân theo vế hai phương trình với $1-x$ ta được:

$$\left(1-x\right)\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)=\left(1+x^7\right)\left(1-x\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-x^8=1+x^7-x-x^8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Kết hợp với $x\neq 1$ suy ra $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(-1;-1\right)$.

Vậy: hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(-1;-1\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+xy-\dfrac{2}{y}=4 \\ y^4+xy-\dfrac{2}{x}=4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^4-y^4-\frac{2}{y}+\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)-\frac{2\left(x-y\right)}{xy}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)-\frac{2}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)-2=0 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay vào phương trình đầu của hệ tìm được nghiệm.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(5x-4y\right)\left(3x+2y\right)=7y-2x \\ \left(5y-4x\right)\left(3y+2x\right)=7x-2y \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(x-y\right)\left(23x+23y+9\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 23x+23y+9=0 \end{array}\right..$$

Xét các trường hợp thay vào phương trình đầu của hệ, suy ra:
$\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(1;1\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(5x-4y)(3x+2y)^2=7y-2x+20\\(5y-4x)(3y+2x)^2=7x-2y+20\end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$(x-y)(61x^2+113xy+61y^2+9)=0 \Leftrightarrow x=y$ (do $61x^2+113xy+61y^2+9>0$).

Thay $y=x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$25x^3=5x+20 \Leftrightarrow 5x^3-x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(5x^2+5x+4)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 12. Tìm các số thực dương x,y thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}(5x-4y)(3x+2y)^3=5(7y-2x+20)\\(5y-4x)(3y+2x)^3=5(7x-2y+20)\end{cases}.$$

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$(x-y)\left[(x+y)(167x^2+266xy+167y^2)+45\right]=0 \Leftrightarrow x=y$ (do $x,y>0$).

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được nghiệm dương duy nhất $x=1 \Rightarrow y=1$.

Vậy: hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(3x+2y)(y^2+6)=\dfrac{35}{2}y(x^2+1)\\(3y+2x)(x^2+6)=\dfrac{35}{2}x(y^2+1)\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}2(3x+2y)(y^2+6)=35y(x^2+1)\\2(3y+2x)(x^2+6)=35x(y^2+1)\end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(x-y\right)\left(4x^2+45xy+4y^2-47\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\4x^2+45xy+4y^2-47=0\end{array}\right..$$

TH1: Nếu $y=x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$10x\left(x^2+6\right)=35x\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow x\left(25x^2-25\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=0\\x=-1,y=-1\\x=1,y=1\end{array}\right..$$

TH2: Nếu $4x^2+45xy+4y^2-47=0$ cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(x+y\right)\left(4x^2-33xy+4y^2+25\right)=0.$$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}\left(x+y\right)\left(4x^2-33xy+4y^2+25\right)=0\\4x^2+45xy+4y^2-47=0\end{cases}.$

Đây là hệ đối xứng loại I đã biết cách giải(hệ phương trình này vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(-1;-1\right);\left(1;1\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(6x+4y\right)\left(x^2+y^2-1\right)=5y\left(x^2+1\right)\\\left(6y+4x\right)\left(x^2+y^2-1\right)=5x\left(y^2+1\right)\end{cases}.$

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(x-y\right)\left(2x^2-5xy+2y^2+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\2x^2-5xy+2y^2+3=0\end{array}\right..$$

Xét trường hợp và thực hiện tương tự bài toán trên tìm được các nghiệm của hệ là: $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(-1;-1\right);\left(1;1\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+9}+\sqrt{y-7}=4\\\sqrt{y+9}+\sqrt{x-7}=4\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện $x\ge 7,y\ge 7$.

Nhận thấy $x=7\Rightarrow y=7$. Xét với $x>7$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{x+9}-\sqrt{y+9}+\sqrt{y-7}-\sqrt{x-7}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{1}{\sqrt{x+9}+\sqrt{y+9}}-\frac{1}{\sqrt{x-7}+\sqrt{y-7}}\right]=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Vì vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+9}+\sqrt{y-7}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+9}+\sqrt{x-7}=4 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x^2+2x-63}=7-x \end{cases} \Leftrightarrow x=y=7.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(7;7)$.

Nhận xét: Để ý $\sqrt{x+9}+\sqrt{y-7}\ge\sqrt{7+9}=4$ nên hệ tương đương với $x=7, y=7$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{2} \\ \sqrt{y}+\sqrt{2-x}=\sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $0\le x,y\le 2$.

Nếu $x=0\Rightarrow y=0$. Nếu $x=2\Rightarrow y=2$.

Xét với $0<x,y<2$ trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{2-y}-\sqrt{2-x}=0 \Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{x-y}{\sqrt{2-y}+\sqrt{2-x}}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2-y}}\right)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay ngược lại $y=x$ vào phương trình đầu của hệ ta được $x=0, x=2$ (vô lý).

Vậy: hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(0;0);(2;2)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2 \\ \sqrt{y^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge 2$.

Lấy $(1)-(2)$ theo vế ta được:

$$\sqrt{x^2+91}-\sqrt{y^2+91}=\sqrt{y-2}-\sqrt{x-2}+y^2-x^2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}=\frac{y-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+(y-x)(y+x).$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+x+y\right)=0.$$

$\Leftrightarrow x=y$ (do $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+x+y>0$).

Thay $x=y$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+91}-10=\sqrt{x-2}-1+x^2-9.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10}=\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+(x-3)(x+3)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-x-3\right)=0.$$

$\Leftrightarrow x=3$ (do $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-x-3<\dfrac{x+3}{x+10}-x-3<1-2-3=-4<0$).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;3)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+21}=y^2+\sqrt{y-1}\\ \sqrt{y^2+21}=x^2+\sqrt{x-1}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1, y\ge 1$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2+21}-\sqrt{y^2+21}=y^2-x^2+\sqrt{y-1}-\sqrt{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+21}+x^2+\sqrt{x-1}=\sqrt{y^2+21}+y^2+\sqrt{y-1}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+21}+t^2+\sqrt{t-1}$ trên $[1;+\infty)$ ta có:

$f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+21}}+2t+\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}>0, \forall t>1$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình đầu của hệ suy ra $x=2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[3]{7x-8}+\sqrt{\dfrac{7-2x^2}{6}}=y \\ \sqrt[3]{7y-8}+\sqrt{\dfrac{7-2y^2}{6}}=x \end{cases},\left(x,y\le 0\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $-\sqrt{\dfrac{7}{2}}\le x,y\le 0$.

Nhận thấy $x=-\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x>-\sqrt{\dfrac{7}{2}}$ trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt[3]{7x-8}-\sqrt[3]{7y-8}+\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}-\sqrt{\frac{7-2y^2}{6}}=y-x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\left(x-y\right)}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+\sqrt[3]{7x-8}\sqrt[3]{7y-8}+\left(\sqrt[3]{7y-8}\right)^2}-\frac{2\left(x^2-y^2\right)}{6\left(\sqrt{\dfrac{7-2x^2}{6}}+\sqrt{\dfrac{7-2y^2}{6}}\right)}=y-x$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(\frac{7}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+\sqrt[3]{7x-8}\sqrt[3]{7y-8}+\left(\sqrt[3]{7y-8}\right)^2}-\frac{2\left(x+y\right)}{6\left(\sqrt{\dfrac{7-2x^2}{6}}+\sqrt{\dfrac{7-2y^2}{6}}\right)}+1\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=y$ do $x,y\le 0$.

Thay $y=x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt[3]{7x-8}+\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}=x\Leftrightarrow \sqrt[3]{7x-8}-\left(2x-2\right)+\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}-\left(2-x\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x-8-\left(2x-2\right)^3}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+\left(2x-2\right)\sqrt[3]{7x-8}+\left(2x-2\right)^2}+\frac{\dfrac{7-2x^2}{6}-\left(2-x\right)^2}{\sqrt{\dfrac{7-2x^2}{6}}+2-x}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(8x^2-24x+17\right)\left(\frac{x}{\left(\sqrt[3]{7x-8}\right)^2+(2x-2)\sqrt[3]{7x-8}+(2x-2)^2}+\frac{1}{6\left(\sqrt{\frac{7-2x^2}{6}}+2-x\right)}\right)=0.$$

$\Leftrightarrow 8x^2-24x+17=0$ (do $x \le 0$) phương trình này vô nghiệm với $x \le 0$.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x=\left(\frac{1}{4}\right)^y \\ y=\left(\frac{1}{4}\right)^x \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình có nghiệm khi $x>0, y>0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} y=\left(\frac{1}{4}\right)^x \\ y=\log_{\frac{1}{4}} x \end{cases}$.

Hai hàm số $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x, g(x)=\log_{\frac{1}{4}} x$ là hàm ngược của nhau nên có đồ thị đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần từ thứ nhất suy ra $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x=\left(\frac{1}{4}\right)^x \Leftrightarrow x.4^x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(1+\sqrt{2}\right)^x=y+\sqrt{1+y^2} \\ \left(1+\sqrt{2}\right)^y=x+\sqrt{1+x^2} \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^x-\left(1+\sqrt{2}\right)^y=y+\sqrt{y^2+1}-x-\sqrt{x^2+1}.$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2}+\left(1+\sqrt{2}\right)^x=y+\sqrt{1+y^2}+\left(1+\sqrt{2}\right)^y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}+\left(1+\sqrt{2}\right)^t$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^t>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^x=x+\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-1=0 \ (2).$$

Xét hàm số $g(x)=\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-1$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$g'(x)=-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Nên $g(x)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy: $(2)\Leftrightarrow g(x)=g(0)\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} e^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+1}{y^2+1} \\ \sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}=2\sqrt{1-xy} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge -1, xy\le 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{e^{y^2}}{e^{x^2}}=\frac{x^2+1}{y^2+1}\Leftrightarrow e^{x^2}\left(x^2+1\right)=e^{y^2}\left(y^2+1\right)\Leftrightarrow x^2=y^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right..$$

Xét trường hợp và tìm được các nghiệm của hệ là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(-1;-1\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8x^3 + y^2 + 5x = \sqrt{3} - y + x^2 \\ 8y^3 + x^2 + 5y = \sqrt{3} - x + y^2 \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$8x^3 - 8y^3 + y^2 - x^2 + 5x - 5y = x - y + x^2 - y^2.$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 2x^2 + 4x = 8y^3 - 2y^2 + 4y \Leftrightarrow x = y.$$

Thay $y = x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$8x^3 + 6x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 4x^3 + 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (giải phương trình này bằng phương pháp lượng giác hóa hoặc ẩn phụ dạng đại số xem chương 1).

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\left(x;y\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{16}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{16}};\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{16}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{16}}\right).$$

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3x + \ln\left(x-1\right) = y + 8 \\ y^2 + 3y + \ln\left(y-1\right) = x + 8 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 1, y > 1$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2 - y^2 + 3x - 3y + \ln\left(x-1\right) - \ln\left(y-1\right) = y - x.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + \ln\left(x-1\right) = y^2 + 4y + \ln\left(y-1\right) \Leftrightarrow x = y.$$

Thay $y = x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2 + 2x + \ln\left(x-1\right) - 8 = 0.$$

Vế trái là một hàm đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2 \Rightarrow y = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(2;2\right)$.

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + \dfrac{1}{x} = x^2 + \dfrac{1}{1 + y\ln y} \\ xy + \dfrac{1}{y} = y^2 + \dfrac{1}{1 + x\ln x} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x, y > 0$.

Vì $x\ln x + 1 > 0, y\ln y + 1 > 0, \forall x, y > 0$ (chú ý xét hàm số).

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = x^2 - y^2 + \frac{1}{1 + y\ln y} - \frac{1}{1 + x\ln x}.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x\ln x} = y^2 - \frac{1}{y} - \frac{1}{1 + y\ln y} \ (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - \frac{1}{t} - \frac{1}{1 + t\ln t}$ trên $(0; +\infty)$, ta có:

$$f'(t) = 2t + \frac{1}{t^2} + \frac{1 + \ln t}{(1 + t\ln t)^2} = 2t + \frac{(1 + t\ln t)^2 + t^2 + t^2\ln t}{(1 + t\ln t)^2} > 0, \forall t > 0 \ (\text{do } t^2 + t^2\ln t > 0)$$

Nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay $y = x$ vào phương trình đầu của hệ và thực hiện xét hàm số ta có $x = y = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_2(1 + 3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1 + 3\sin y) = \log_3(\cos x) + 2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x > 0, \sin y > 0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\log_2(1 + 3\cos x) - \log_2(1 + 3\sin y) = \log_3(\sin y) - \log_3(\cos x).$$

$$\Leftrightarrow \log_2(1 + 3\cos x) + \log_3(\cos x) = \log_2(1 + 3\sin y) + \log_3(\sin y) \ (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \Leftrightarrow \log_2(1 + 3t) + \log_3 t$ trên $(0; +\infty)$, ta có:

$f'(t) = \frac{3}{(1 + 3t)\ln 2} + \frac{1}{t\ln 3} > 0, \forall t > 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(\cos x) = f(\sin y) \Leftrightarrow \cos x = \sin y$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$\log_2(1 + 3\cos x) = \log_3(\cos x) + 2 \Leftrightarrow \log_2(1 + 3\cos x) - \log_3(\cos x) - 2 = 0 \ (2)$.

Khảo sát hàm $g(t)=\log_2\left(1+3t\right)-\log_3\left(\cos t\right)-2$ suy ra (2) có tối đa hai nghiệm.

Ta có: $g(1)=g\left(\dfrac{1}{3}\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=1\\ \sin y=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{3}\\ \sin y=\dfrac{1}{3}\end{cases}\end{array}\right.$.

Chủ đề 4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ YẾU TỐ ĐẲNG CẤP

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1. Hệ đẳng cấp là hệ có dạng:

$$\begin{cases} P^k(x,y)=c_1 \\ Q^k(x,y)=c_2 \end{cases},\left(c_1,c_2\in\mathbb{R}\right).$$

trong đó $P^k(x,y),Q^k(x,y)$ là các đa thức bậc $k,\left(k=\frac{1}{2},1,2,3,4,5,...\right)$ của x,y không chứa thành phần bậc nhỏ hơn k:

$$P^k(x,y)=\sum_{i=0}^{k}p_ix^{k-i}y^i;Q^k(x,y)=\sum_{i=0}^{k}q_ix^{k-i}y^i,\left(p_i,q_i\in\mathbb{R}\right).$$

Ví dụ 1. Hệ phương trình $\begin{cases} xy\left(x^2+y^2\right)=30 \\ xy\left(x^2-y^2\right)=24 \end{cases}$ thì vế trái các phương trình của hệ là đa thức bậc 4 của x,y.

Ví dụ 2. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-5xy+3y^2=1 \\ 3x^2+4xy-y^2=3 \end{cases}$ thì vế trái các phương trình của hệ là đa thức bậc 2 của x,y.

<u>**Phương pháp:**</u> Xét xem $x=0$ hoặc $y=0$ có phải là nghiệm của hệ phương trình hay không?

Xét trường hợp $x\neq 0$ khi đó đặt $y=tx,\left(t\in\mathbb{R}\right)$ và đưa về hệ phương trình

$$\begin{cases} P^k(x,tx)=c_1 \\ Q^k(x,tx)=c_2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^kP^k(t,1)=c_1 \\ x^kQ^k(t,1)=c_2 \end{cases}.$$

Đến đây suy ra $c_2.P^k(t,1)=c_1.Q^k(t,1)$, đây là phương trình đa thức đã biết cách giải. Tìm được t từ đó suy ra mối liên hệ giữa x,y và đưa về phương trình đa thức với biến x hoặc biến y.

1. Một số hệ quy được về dạng hệ đồng bậc

<u>**Dạng 1:**</u> **Hệ phương trình bậc hai** $\begin{cases} a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+d_1x+e_1y=0 \\ a_2x^2+b_2y^2+c_2xy+d_2x+e_2y=0 \end{cases}.$

Phương pháp:

Xét $x=0$ hoặc $y=0$ có là nghiệm của hệ phương trình hay không?

Xét với $x\neq 0$ khi đó đặt $y=tx,\left(t\in\mathbb{R}\right)$.

Đưa về hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2\left(a_1+b_1t^2+c_1t\right)+x\left(d_1+e_1t\right)=0\\x^2\left(a_2+b_2t^2+c_2t\right)+x\left(d_2+e_2t\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(a_1+b_1t^2+c_1t\right)=-\left(d_1+e_1t\right)\\x\left(a_2+b_2t^2+c_2t\right)=-\left(d_2+e_2t\right)\end{cases}.$$

Suy ra: $\dfrac{d_1+e_1t}{a_1+b_1t^2+c_1t}=\dfrac{d_2+e_2t}{a_2+b_2t^2+c_2t}$.

$\Leftrightarrow\left(d_1+e_1t\right)\left(a_2+b_2t^2+c_2t\right)=\left(d_2+e_2t\right)\left(a_1+b_1t^2+c_1t\right)$.

Đây là một phương trình bậc ba có phương pháp giải tổng quát nên tìm được nghiệm t.

Thay ngược lại hệ ta tìm được $\left(x;y\right)$.

Ngoài ra dạng hệ này còn được giải bằng phương pháp hệ số bất định(xem phương pháp hệ số bất định).

Dạng 2: **Hệ bậc hai hai ẩn** $\begin{cases}a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+d_1x+e_1y+f_1=0\\a_2x^2+b_2y^2+c_2xy+d_2x+e_2y+f_2=0\end{cases}$.

Phương pháp:

Thử tìm các nghiệm đơn giản chẳng hạn tìm được $x=x_0,y=y_0$.

Khi đó đặt $\begin{cases}x=u+x_0\\y=v+y_0\end{cases}$ thay vào hệ phương trình và đưa về hệ có dạng 1.

Dạng 3: **Hệ phương trình có dạng** $\begin{cases}\left(a_1x+b_1y\right)\left(c_1x^2+d_1xy+e_1y^2\right)=f_1\\\left(a_2x+b_2y\right)\left(c_2x^2+d_2xy+e_2y^2\right)=f_2\end{cases}$.

Phương pháp:

Xét $y=0$ có là nghiệm của hệ phương trình hay không.

Xét $y\neq 0$ đặt $x=ty$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} y^3\left(a_1t+b_1\right)\left(c_1t^2+d_1t+e_1\right)=f_1 \\ y^3\left(a_2t+b_2\right)\left(c_2t^2+d_2t+e_2\right)=f_2 \end{cases}.$$

Suy ra: $f_2\left(a_1t+b_1\right)\left(c_1t^2+d_1t+e_1\right)=f_1\left(a_2t+b_2\right)\left(c_2t^2+d_2t+e_2\right)$.

Đây là phương trình bậc ba có phương pháp giải tổng quát nên tìm được t, thay ngược lại hệ ta tìm được $\left(x;y\right)$.

<u>Chú ý</u>: Trong một số trường hợp đặc biệt hệ giải được bằng phương pháp hệ số bất định hoặc phức hóa(Xem phương pháp hệ số bất định và phức hóa trong cùng cuốn sách).

<u>Dạng 4:</u> Hệ dạng $\begin{cases} P^m(x,y)=a \\ Q^n(x,y)=R^k(x,y) \end{cases}$, trong đó $m+n=k$ khi đó ta phải đưa về một phương trình đẳng cấp bậc k để làm được điều này ta thế từ phương trình đầu vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$P^m(x,y).Q^n(x,y)=a.R^k(x,y)$, đây là phương trình đẳng cấp bậc k ta giải được.

Ví dụ 3. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^3+x^2y=x+y \end{cases}$.

Ta viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^3+x^2y=\dfrac{1}{2}\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^3+x^2y-xy^2-y^3=0 \end{cases}.$$

<u>Lưu ý</u>:Đôi khi cần biến đổi đặt ẩn phụ để đưa về dạng hệ đẳng cấp.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9 \\ 2x^2-13xy+15y^2=0 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x\neq 0$ ta đặt $y=tx,\left(t\in\mathbb{R}\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x^2\left(1-2t+3t^2\right)=9 \\ x^2\left(2-13t+15t^2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(1-2t+3t^2\right)=9 \\ 15t^2-13t+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(1-2t+3t^2\right)=9 \\ t=\dfrac{2}{3}\vee t=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ t = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y) = (\pm 3;\pm 2);\left(\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2};\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $x \neq 0$ ta đặt $y = tx, (t \in \mathbb{R})$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2\left(1 + 2t + 3t^2\right) = 9 \\ x^2\left(2 + 2t + t^2\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(1 + 2t + 3t^2\right) = 9\left(2 + 2t + t^2\right) \\ x^2\left(2 + 2t + t^2\right) = 2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 + 14t + 16 = 0 \\ x^2\left(2 + 2t + t^2\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \vee t = -\dfrac{8}{3} \\ x^2\left(2 + 2t + t^2\right) = 2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} t = -\dfrac{8}{3} \\ x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{17}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \mp 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{17}} \\ y = \mp\dfrac{8}{\sqrt{17}} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y) = (\pm 1;\mp 2);\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{17}};\mp\dfrac{8}{\sqrt{17}}\right)$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $x \neq 0$ ta đặt $y = tx, (t \in \mathbb{R})$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2\left(3 + 2t + t^2\right) = 11 \\ x^2\left(1 + 2t + 3t^2\right) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(3 + 2t + t^2\right) = 11 \\ 11\left(1 + 2t + 3t^2\right) = 17\left(3 + 2t + t^2\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(3+2t+t^2\right)=11 \\ 16t^2-12t-40=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ x=\pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} t=-\dfrac{5}{4} \\ x=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ y=\mp\dfrac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=(\pm 1;\pm 2);\left(\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3};\mp\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x^2-xy-2y^2=56 \\ 5x^2-xy-y^2=49 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $x\neq 0$ ta đặt $y=tx,(t\in\mathbb{R})$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2\left(6-t-2t^2\right)=56 \\ x^2\left(5-t-t^2\right)=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(6-t-2t^2\right)=56 \\ 56\left(5-t-t^2\right)=49\left(6-t-2t^2\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 42t^2-7t-14=0 \\ x^2\left(6-t-2t^2\right)=56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{1}{2} \\ x=\pm 2\sqrt{\dfrac{7}{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} t=\dfrac{2}{3} \\ x=\pm 3\sqrt{\dfrac{7}{5}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2\sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ y=\mp\sqrt{\dfrac{7}{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\pm 3\sqrt{\dfrac{7}{5}} \\ y=\pm 2\sqrt{\dfrac{7}{5}} \end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có bốn nghiệm là: $(x;y)=\left(\pm 2\sqrt{\dfrac{7}{3}};\mp\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)\left(\pm 3\sqrt{\dfrac{7}{5}};\pm 2\sqrt{\dfrac{7}{5}}\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-x(y-1)+y^2=3y \\ x^2+xy-3y^2=x-2y \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2x^2-xy+y^2+x-3y=0 \\ x^2+xy-3y^2-x+2y=0 \end{cases}.$$

Nhận thấy $x=0\Rightarrow y=0$ suy ra $(x;y)=(0;0)$ là nghiệm của hệ.

Xét $x \neq 0$ ta đặt $y = tx, (t \in \mathbb{R})$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x^2(2-t+t^2)+x(1-3t)=0 \\ x^2(1+t-3t^2)+x(-1+2t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3t-1}{2-t+t^2} \\ x=\dfrac{1-2t}{1+t-3t^2} \end{cases}.$$

Suy ra: $\dfrac{3t-1}{2-t+t^2}=\dfrac{1-2t}{1+t-3t^2}$.

$\Leftrightarrow 7t^3-3t^2-7t+3=0 \Leftrightarrow (t^2-1)(7t-3)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=\dfrac{3}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} t=-1 \\ x=-1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} t=\dfrac{3}{7} \\ x=\dfrac{7}{43} \\ y=\dfrac{3}{43} \end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=(0;0);(1;1);(-1;1);\left(\dfrac{7}{43};\dfrac{3}{43}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 14x^2-21y^2+22x-39y=0 \\ 35x^2+28y^2+111x-10y=0 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0 \Rightarrow y=0$ nên $(0;0)$ là nghiệm của hệ.

Xét $x \neq 0$ ta đặt $y=tx, (t \in \mathbb{R})$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^2(14-21t^2)+x(22-39t)=0 \\ x^2(35+28t^2)+x(111-10t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{39t-22}{14-21t^2} \\ x=\dfrac{10t-111}{35+28t^2} \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow \dfrac{39t-22}{14-21t^2}=\dfrac{10t-111}{35+28t^2} \Leftrightarrow 186t^3-421t^2+175t+112=0$.

$\Leftrightarrow (3t+1)(62t^2-161t+112)=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3}$.

Với $t=-\dfrac{1}{3}$ suy ra $x=\dfrac{39t-22}{14-21t^2}=-3 \Rightarrow y=tx=1$.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(0;0);(-3;1)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y\left(x^2-y^2\right)=3x \\ x\left(x^2+y^2\right)=10y \end{cases}$.

Lời giải

Nếu $x=0\Rightarrow y=0$ suy ra $\left(0;0\right)$ là nghiệm của hệ.

Xét $x\neq 0$ ta đặt $y=tx,\left(t\in\mathbb{R}\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2tx\left(x^2-t^2x^2\right)=3x \\ x\left(x^2+t^2x^2\right)=10tx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t\left(1-t^2\right)x^2=3 \\ \left(1+t^2\right)x^2=10t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t\left(1-t^2\right).10t=3\left(1+t^2\right) \\ \left(1+t^2\right)x^2=10t \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20t^4-17t^2+3=0 \\ \left(1+t^2\right)x^2=10t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}} \vee t=\pm\dfrac{1}{2} \\ \left(1+t^2\right)x^2=10t \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ x=\pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} t=\sqrt{\dfrac{3}{5}} \\ x=\pm\dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\pm\dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}} \\ y=\pm\dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}} \end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có bốn nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\pm 2;\pm 1\right);\left(\pm\dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}};\pm\dfrac{5}{2}\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(x^2-y^2\right)=6y \\ 2y\left(x^2+y^2\right)=5x \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0\Rightarrow y=0$ suy ra $\left(0;0\right)$ là nghiệm của hệ.

Xét $x\neq 0$ ta đặt $y=tx,\left(t\in\mathbb{R}\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^3\left(1-t^2\right)=6tx \\ 2t\left(1+t^2\right)x^3=5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(1-t^2\right)=6t.2t\left(1+t^2\right) \\ x^2\left(1-t^2\right)=3t \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12t^4+17t^2-5=0 \\ x^2\left(1-t^2\right)=6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(4t^2-1\right)\left(3t^2+5\right)=0 \\ x^2\left(1-t^2\right)=6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ x=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(\pm2;\pm1\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3\\\left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)=15\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $x\neq0$ ta đặt $y=tx,\left(t\in\mathbb{R}\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}x\left(1-t\right).x^2\left(1-t^2\right)=3\\x\left(1+t\right).x^2\left(1+t^2\right)=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15\left(1-t\right)\left(1-t^2\right)=3\left(1+t\right)\left(1+t^2\right)\\x^3\left(1-t\right)\left(1-t^2\right)=3\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(1+t\right)\left(2t^2-10t+2\right)=0\\x^3\left(1-t\right)\left(1-t^2\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\vee t=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}\\x^3\left(1-t\right)\left(1-t^2\right)=3\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\\x=\sqrt[3]{2+\dfrac{\sqrt{21}}{14}}\end{cases}\vee\begin{cases}t=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\\x=\sqrt[3]{2+\dfrac{3\sqrt{21}}{7}}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt[3]{2+\dfrac{\sqrt{21}}{14}}\\y=\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}.\sqrt[3]{2+\dfrac{\sqrt{21}}{14}}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\sqrt[3]{2+\dfrac{3\sqrt{21}}{7}}\\y=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}.\sqrt[3]{2+\dfrac{3\sqrt{21}}{7}}\end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình có hai nghiệm là

$$\left(x;y\right)=\left(\sqrt[3]{2+\frac{\sqrt{21}}{14}};\frac{5+\sqrt{21}}{2}.\sqrt[3]{2+\frac{\sqrt{21}}{14}}\right);\left(\sqrt[3]{2+\frac{3\sqrt{21}}{7}};\frac{5-\sqrt{21}}{2}.\sqrt[3]{2+\frac{3\sqrt{21}}{7}}\right)$$

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\left(x^2-xy+y^2\right)=6y\\2y\left(x^2+xy+y^2\right)=7x\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0\Rightarrow y=0$ suy ra $\left(0;0\right)$ là nghiệm của hệ.

Xét với $x\neq0$ ta đặt $y=tx,\left(t\in\mathbb{R}\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}2x^3t\left(1+t+t^2\right)=7x\\x^3\left(1-t+t^2\right)=6tx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6t.2t\left(1+t+t^2\right)=7\left(1-t+t^2\right)\\x^2\left(1-t+t^2\right)=6t\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}12t^4+12t^3+5t^2+7t-7=0\\x^2\left(1-t+t^2\right)=6t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2t-1\right)\left(6t^3+9t^2+7t+7\right)=0\\x^2\left(1-t+t^2\right)=6t\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{2}\\x=\pm2\end{cases}\vee\begin{cases}6t^3+9t^2+7t+7=0\\x^2\left(1-t+t^2\right)=6t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm2\\y=\pm1\end{cases}\vee\begin{cases}6t^3+9t^2+7t+7=0\ (1)\\x^2\left(1-t+t^2\right)=6t\end{cases}.$$

Nhưng do $x^2=\dfrac{6t}{t^2-t+1}>0\Rightarrow t>0$ do đó (1) vô nghiệm.

Vậy hệ có ba nghiệm là $\left(0;0\right);\left(\pm2;\pm1\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-8x=y^3+2y\\x^2-3=3\left(y^2+1\right)\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}x^3-y^3=8x+2y\ (1)\\x^2-3y^2=6\qquad (2)\end{cases}$.

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ xét với $x\neq0$ ta đặt $y=tx$, khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases}x^3\left(1-t^3\right)=\left(2t+8\right)x\\x^2\left(1-3t^2\right)=6\end{cases}$$

Từ đây suy ra $6\left(1-t^3\right)=\left(2t+8\right)\left(1-3t^2\right)\Leftrightarrow12t^2-t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{3}\\t=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$.

<u>TH1:</u> Với $t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{3}x\\x^2\left(1-3t^2\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm3\\y=\pm1\end{cases}$.

TH2: Với $t=-\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}y=-\frac{x}{4}\\x^2\left(1-3t^2\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{4\sqrt{78}}{13}\\y=\pm\frac{\sqrt{78}}{13}\end{cases}$.

Vậy hệ có bốn nghiệm là:

$\left(x,y\right)=\left(3,1\right);\left(-3,-1\right);\left(\frac{4\sqrt{78}}{13},-\frac{\sqrt{78}}{13}\right);\left(\frac{-4\sqrt{78}}{13},\frac{\sqrt{78}}{13}\right)$.

Nhận xét:Từ hệ trên ta có thể biến đổi như sau Vế trái của (1) là đa thức bậc ba, vế phải (1) là đa thức bậc một. Vế trái của (2) là đa thức bậc hai do vậy nhân vế trái của (2) vào vế phải của (1) để được một phương trình đẳng cấp bậc ba từ đó suy ra mối liên hệ giữa x,y. Các bài toán sau tôi trình bày cách như trên(đương nhiên các bạn có thể xử lý bằng cách đặt $y=tx$).

$$\begin{cases}x^3-y^3=8x+2y\\x^2-3y^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-y^3=\frac{8x+2y}{6}.\left(x^2-3y^2\right)\\x^2-3y^2=6\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2y-12xy^2=0\\x^2-3y^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x-3y\right)\left(x+4y\right)=0\\x^2-3y^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y\vee x=-4y\\x^2-3y^2=6\end{cases}.$$

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=1\\x^2y+2xy^2+y^3=2\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^3+y^3=1\\x^2y+2xy^2+y^3=2\left(x^3+y^3\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3-x^2y-2xy^2+y^3=0\\x^3+y^3=1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-y\right)\left(x+y\right)\left(2x-y\right)=0\\x^3+y^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^3+y^3=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-y\\x^3+y^3=1\end{cases}\vee\begin{cases}y=2x\\x^3+y^3=1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\\y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\\y=\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\end{cases}.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}};\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \left(x+y\right)\left(4-x^2y^2-2xy\right)=2y^5 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy vế phải của phương trình thứ hai có bậc 5 nên biểu diễn $4-x^2y^2-2xy$ dưới dạng bậc 4. Thật vậy ta có:

$$4-x^2y^2-2xy=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2-\left(x^2+y^2\right)xy=x^4+y^4+x^2y^2-xy\left(x^2+y^2\right).$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \left(x+y\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2-xy\left(x^2+y^2\right)\right)=2y^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^5+y^5=2y^5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm 1.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\pm 1;\pm 1\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2-3y=x-3xy \\ x^3-x^2=y^2-3y^3 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} 5x^2+3xy=x+3y \\ x^3+3y^3=x^2+y^2 \end{cases}$.

Nhận thấy $x=0 \Rightarrow y=0$ suy ra $\left(0;0\right)$ là nghiệm của hệ.

Xét với $x\neq 0$ đặt $y=tx,\left(t\in\mathbb{R}\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x^2\left(5+3t\right)=x\left(1+3t\right) \\ x^3\left(1+3t^3\right)=x^2\left(1+t^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(5+3t\right)=1+3t \\ \left(5+3t\right)\left(1+t^2\right)=\left(1+3t\right)\left(1+3t^3\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(5+3t\right)=1+3t \\ 9t^4-5t^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(5+3t\right)=1+3t \\ \left(t^2-1\right)\left(9t^2+4\right)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} t=-1 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ có ba nghiệm là $(0;0);\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right);(-1;1)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$.

Phân tích lời giải. Vế trái phương trình đầu của hệ dạng bậc 3 vì vậy nhân vào vế phải phương trình thứ hai của hệ ta được một phương trình đẳng cấp bậc 4.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=(4x+y)\left(x^3+y^3-xy^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ xy\left(3y^2-4xy+x^2\right)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ xy(x-y)(x-3y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc} \begin{cases} x=y \\ x^3+y^3-xy^2=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3y \\ x^3+y^3-xy^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} \\ y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$(x;y)=(0;1);\ (1;0);\ (1;1);\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}\right)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y.(x-y)^2=2 \\ x^3-y^3=19 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y.(x-y)^2=2 \\ x^3-y^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19y.(x-y)^2=2\left(x^3-y^3\right) \\ x^3-y^3=19 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-21y^3+38xy^2-19x^2y=0 \\ x^3-y^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-7y)(2x-3y)=0 \\ x^3-y^3=19 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^3-y^3=19 \end{cases} \vee \begin{cases} x=7y \\ x^3-y^3=19 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y \\ x^3-y^3=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7}{\sqrt[3]{18}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{18}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{7}{\sqrt[3]{18}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{18}}\right);(3;2)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=x^2+y^2 \end{cases}$.

Phân tích lời giải. Vế trái phương trình nhất của hệ là đa thức bậc 3 nên nhân với vế phải của phương trình thứ hai ta được một phương trình đẳng cấp bậc 5.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=\left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y^3+x^3y^2=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy\left(x^2+y^2\right)=0 \\ x^3+y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;1);(1;0)$.

<u>Nhận xét:</u> Tổng quát cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^m+y^m=1 \\ x^k+y^k=x^{k-m}+y^{k-m} \end{cases},(k>m)$.

Nghiệm của hệ là $(0;1);(1;0)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3x=448y^3+6y \\ 385x^2-16y^2=96 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3-448y^3=6y-3x \\ 385x^2-16y^2=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-448y^3=\dfrac{1}{96}(6y-3x)\left(385x^2-16y^2\right) \\ 385x^2-16y^2=96 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1251x^3-42912y^3-2310x^2y-48xy^2=0 \\ 385x^2-16y^2=96 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4y)\left(1251x^2+2694xy+10728y^2\right)=0 \\ 385x^2-16y^2=96 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ 385x^2-16y^2=96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{2} \\ y=\pm\dfrac{1}{8} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\pm\dfrac{1}{2};\pm\dfrac{1}{8}\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+y)(1+xy)^4=32 \end{cases}$.

Phân tích lời giải. Để ý $1+xy=\dfrac{x^2+y^2}{2}+xy=\dfrac{(x+y)^2}{2}$ khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành $\dfrac{(x+y)^9}{16}=32 \Leftrightarrow x+y=2$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x+y)\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}+xy\right)^4=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^9=2^9 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=\dfrac{(x+y)^2-x^2-y^2}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy: hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \dfrac{1}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Phân tích lời giải. Quy đồng phương trình thứ nhất ta được vế trái là đa thức bậc 4 vậy chỉ nhân vế phải phương trình đó với bình phương vế trái của phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình đẳng cấp bậc 4.

Lời giải

Điều kiện $x + y \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+y)(3x^3 - y^3) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(3x^3 - y^3) = (x^2 + y^2)^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 - 2y^4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(2x^3 + 5x^2y + 3xy^2 + 2y^3) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+2y)(2x^2 + xy + y^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm là:

$$(x;y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\mp\frac{2}{\sqrt{5}};\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + 15xy(x+y) = 32 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận xét: Đây là hệ đối xứng loại I tuy nhiên theo cách giải thông thường đặt $S = x + y, P = xy$ bài toán sẽ biến đổi tương đối dài và khó khăn.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ (x+y)^5 = 32 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+4y-y^3-16x=0 \\ y^2=5x^2+4 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^3-y^3=16x-4y \\ 5x^2-y^2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=(y-4x)(5x^2-y^2) \\ 5x^2-y^2=-4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x^3-5x^2y-4xy^2=0 \\ 5x^2-y^2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(7x-4y)(3x+y)=0 \\ 5x^2-y^2=-4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{4}{7}y \\ \dfrac{80}{49}y^2-y^2=-4 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\mp 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\mp 3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=(0;\pm 2);(\pm 1;\mp 3)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=2\left(4\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \\ x-3y=6 \end{cases}$.

Phân tích lời giải: Vế trái của phương trình thứ nhất có dạng bậc $\dfrac{3}{2}$ và vế phải là bậc $\dfrac{1}{2}$ do vậy chỉ cần nhân thêm vào vế phải với vế trái của phương trình thứ hai đưa về phương trình đồng bậc $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Điều kiện $x \ge 0, y \ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=\dfrac{1}{3}\left(4\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x-3y) \\ x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x}+x\sqrt{y}-12y\sqrt{x}=0 \\ x-3y=6 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+4\sqrt{y}\right)=0 \\ x-3y=6 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3y=6 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x}=3\sqrt{y} \\ x-3y=6 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{x}+4\sqrt{y}=0 \\ x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(9;1)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(4xy-1) \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}$.

Phân tích lời giải: Thay $-1=x^2-3xy+y^2$ từ phương trình thứ hai của hệ vào phương trình thứ nhất ta được một phương trình đẳng cấp bậc 3.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)\left(4xy+x^2-3xy+y^2\right) \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-9y^3=x^3-y^3 \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=8y^3 \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\pm 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(\pm 2;\pm 1)$.

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2y^2+x^2+2x=2 \\ 2x^2y-x^2y^2+2xy=1 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} 2x^2y^2+(x+1)^2=3 \\ 2xy(x+1)-x^2y^2=1 \end{cases}$.

Đặt $u=x+1, v=xy$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u^2+2v^2=3 \\ 2uv-v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+2v^2=3\left(2uv-v^2\right) \\ 2uv-v^2=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2-6uv+5v^2=0 \\ 2uv-v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u-5v)=0 \\ 2uv-v^2=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2uv - v^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 5v \\ 2uv - v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \pm 1 \vee \begin{cases} u = \pm \dfrac{5}{3} \\ v = \pm \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \pm 1 \\ xy = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x + 1 = \pm \dfrac{5}{3} \\ xy = \pm \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{1}{8} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(-2;\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{2}{3};2\right);\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{1}{8}\right)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét với $x \neq 0$ đặt $y = tx, \left(t \in \mathbb{R}\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^3\left(1 + 3t^2\right) = -49 \\ x^2\left(1 - 8t + t^2\right) = x\left(8t - 7\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8t - 7}{1 - 8t + t^2} = \dfrac{8t - 7}{\left(t^2 - 16\right) - \left(8t - 17\right)} = \dfrac{b}{a - b} \\ x^3 = \dfrac{-49}{1 + 3t^2} = \dfrac{-49}{3\left(t^2 - 16\right) + 49} = \dfrac{-49}{49 + 4a} \end{cases}.$$

trong đó $a = t^2 - 16, b = 8t - 17$.

Từ đó suy ra : $\dfrac{b^3}{\left(a - b\right)^3} = \dfrac{-49}{49 + 3a} \Leftrightarrow 49\left(b^3 + \left(a - b\right)^3\right) + 3a = 0$

$$\Leftrightarrow a\left(49b^2 - 49b\left(a - b\right) + 49\left(a - b\right)^2 + 3\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Suy ra $t^2 = 16 \Rightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = \pm 4$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(x,y\right) = \left(-1,4\right);\left(-1,-4\right)$.

Nhận xét: Ngoài ra có thể giải hệ trên bằng phương pháp hệ số bất định và đặt ẩn phụ dạng tổng hiệu khi có dấu hiệu(xem phương pháp hệ số bất định trong cùng cuốn sách) hoặc đặt ẩn phụ dạng tổng hiệu.

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ y(x-y)^3 = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ y(x-y)^3 = \dfrac{2}{25}\left(x^2 - y^2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ (x-y)^2\left(2x^2 - 21xy + 27y^2\right) = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ (x-y)^2(2x-3y)(x-9y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ 2x = 3y \\ x = 9y \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, y = -2 \\ x = -\dfrac{9}{4}, y = -\dfrac{1}{4} \\ x = \dfrac{9}{4}, y = \dfrac{1}{4} \\ x = 3, y = 2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y) = (-3;-2); \left(-\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}\right); (3;2); \left(\frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

<u>Nhận xét:</u> Từ bài toán giải hệ trên ta hoàn toàn giải được phương trình:

$\sqrt{x-5}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-5}\right)^3 = 2$ bằng phép đặt ẩn phụ:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{x-5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 5 \\ v(u-v)^3 = 2 \end{cases}.$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 + 22x - 39y = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 111x - 10y = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} 14x^2 - 21y^2 = -22x + 39y \\ 35x^2 + 28y^2 = -111x + 10y \end{cases}$.

Nhận thấy $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 14x^2 = -22x \\ 35x^2 = -111x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow (x;y) = (0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Xét $y \neq 0$, đặt $x = ty$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} y^2\left(14t^2 - 21\right) = y\left(-22t + 39\right) \\ y^2\left(35t^2 + 28\right) = y\left(-111t + 10\right) \end{cases}.$$

Suy ra: $\left(-111t + 10\right)\left(14t^2 - 21\right) = \left(-22t + 39\right)\left(35t^2 + 28\right)$.

$\Leftrightarrow 112t^3 + 175t^2 - 421t + 186 = 0 \Leftrightarrow \left(t + 3\right)\left(112t^2 - 162t + 62\right) = 0 \Leftrightarrow t = -3$.

Khi đó: $\begin{cases} y^2\left(14t^2 - 21\right) = y\left(-22t + 39\right) \\ x = -3y \\ t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(0;0\right);\left(-3;1\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 16 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận chéo hai phương trình của hệ ta được:

$8\left(3x^2 - 2xy\right) = 16\left(x^2 - 3xy - 2y^2\right) \Leftrightarrow \left(x + 2y\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2y$.

Thay vào phương trình của hệ ta được: $16y^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = -1 \\ x = -2, y = 1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(-2;1\right);\left(2;-1\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 18 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$2\left(x^2 - 2xy + 3y^2\right) = 1\left(2x^2 - 13xy + 15y^2\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = y \end{array}\right..$$

<u>**TH1:**</u> Nếu $y = 0$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được: $x = \pm 3$.

<u>**TH2:**</u> Nếu $y = x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$2x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=(-3;0);\ (3;0);\ \left(-\frac{3}{\sqrt{2}};-\frac{3}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1 \\ x^2+2xy-2y^2=1 \end{cases}$.

Lời giải

Nhân chéo theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$1\left(x^2-3xy+y^2\right)=-1\left(x^2+2xy-2y^2\right)\Leftrightarrow 2x^2-xy-y^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=-2x \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay ngược lại hệ phương trình tìm được các nghiệm:

$$(x;y)=(-1;-1);(1;1).$$

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)\left(x^2+y^2\right)=13 \\ (x+y)\left(x^2-y^2\right)=25 \end{cases}$.

Lời giải

Nhân chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$25(x-y)\left(x^2+y^2\right)=13(x+y)\left(x^2-y^2\right).$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(2x-3y)(3x-2y)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2x=3y \\ 3x=2y \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay ngược lại hệ tìm được các nghiệm $(x;y)=(-2;-3);(3;2)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-\left(x^2+y^2\right)(x+y)=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 2y^3-5xy^2+4x^2y-x^3=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (y-x)^2(2y-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=2y \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=-1 \\ x=1, y=1 \\ x=-2\sqrt{\frac{2}{5}}, y=-\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x=2\sqrt{\frac{2}{5}}, y=\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm:

$$(x;y)=(-1;-1);\ (1;1);\ \left(2\sqrt{\frac{2}{5}};-\sqrt{\frac{2}{5}}\right);\ \left(2\sqrt{\frac{2}{5}};\sqrt{\frac{2}{5}}\right).$$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^2+xy-3y^2+1\right)x^2=-48 \\ \left(y^2+xy+1\right)y^2=-12 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2\left(x^2+xy-3y^2+1\right)=4y^2\left(y^2+xy+1\right) \Leftrightarrow \left(x^2-4y^2\right)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2-4y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-2y \end{array}\right..$$

__**TH1:**__ Nếu $x=2y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$\left(3y^2+1\right)y^2=-12$ vô nghiệm.

__**TH2:**__ Nếu $x=-2y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$\left(1-y^2\right)y^2=-2 \Leftrightarrow y^4-y^2-12=0 \Leftrightarrow y=\pm 2 \Rightarrow x=\mp 4$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-2;4);(2;-4)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (6-x)\left(x^2+y^2\right)=6x+8y \\ (3-y)\left(x^2+y^2\right)=8x-6y \end{cases}$.

Lời giải

Nếu $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ.

Xét $x^2+y^2>0$ nhân chéo hai phương trình của hệ và lược đi x^2+y^2 hai vế ta được:

$$(6-x)(8x-6y)=(3-y)(6x+8y) \Leftrightarrow (x-2y)(4x+2y-15)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ 4x + 2y - 15 = 0 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay ngược lại một trong hai phương trình của hệ tìm được các nghiệm là $(x;y) = (0;0);(2;1);(4;2);\left(6;-\frac{9}{2}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (6-x)(x^2-y^2) = 6x+8y \\ (3-y)(x^2-y^2) = 8x-6y \end{cases}$.

Lời giải

Nếu $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

Xét $x^2 - y^2 \neq 0$ nhân chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$(6-x)(8x-6y) = (3-y)(6x+8y) \Leftrightarrow (x-2y)(4x+2y-15) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ 4x + 2y - 15 = 0 \end{array}\right..$$

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (-2x^2+7)(x-y)^2 + 1 = 0 \\ (3x^2-4xy+4y^2-7)(x-y)^2 - 1 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x = y$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x \neq y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} -2x^2 + 7 = -\dfrac{1}{(x-y)^2} \\ 3x^2 - 4xy + 4y^2 - 7 = \dfrac{1}{(x-y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 7 = -(3x^2 - 4xy + 4y^2 - 7) \\ (-2x^2+7)(x-y)^2 + 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 = 0 \\ (-2x^2+7)(x-y)^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ (-8y^2+7)y^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (-2;-1);(2;1)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 8y^3 - 4xy^2 = 1 \\ 2x^4 + 8y^4 - 2x - y = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2=1 \\ 2x^4+8y^4-(2x+y)\left(x^3+8y^3-4xy^2\right)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2=1 \\ 2x^4-8x^2y^2+12xy^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2=1 \\ 2x(x-2y)(x-6y)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2=1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2y \\ x=6y \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=\dfrac{1}{2} \\ x=1, y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}, y=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{25}} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là: $(x;y)=\left(0;\dfrac{1}{2}\right);\left(1;\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{1}{2\sqrt[3]{25}}\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-2xy^2=-1 \\ x^4+y^4+x-3y=0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3-2xy^2=-1 \\ x^4+y^4+(x-3y)\left(-x^3+2xy^2\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2xy^2=-1 \\ 3x^3+2x^2y-6xy^2+y^3=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2xy^2=-1 \\ (x-y)\left(3x^2+5xy-y^2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2xy^2=-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=y \\ 3x^2+5xy-y^2=0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Xét trường hợp tìm ra nghiệm của hệ phương trình là:

$$\left(x;y\right)=\left(-1;0\right);\left(1;1\right);\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{37}-6}{5}};\frac{5+\sqrt{37}}{2}.\sqrt[3]{\frac{\sqrt{37}-6}{5}}\right);$$

$$\left(-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{37}-6}{5}};\frac{-5+\sqrt{37}}{2}.\sqrt[3]{\frac{\sqrt{37}-6}{5}}\right).$$

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases}16x^2y^2-17y^2=-1\\4xy+2x-7y=-1\end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với :

$$4xy+1=7y-2x\Rightarrow\left(4xy+1\right)^2=\left(7y-2x\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow 16x^2y^2+8xy+1=4x^2-28xy+49y^2\Leftrightarrow 17y^2+8xy=4x^2-28xy+49y^2.$$

$$\Leftrightarrow x^2-9xy+8y^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=8y\end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $x=y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$4x^2+2x-7x=-1\Leftrightarrow 4x^2-5x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=1\\x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

(thử lại thấy thỏa mãn).

<u>TH2:</u> Nếu $x=8y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$32y^2-9y+1=0\text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=7x+7y\\x^3-y^3=19x-19y\end{cases}$.

Lời giải

Nhân chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$19\left(x-y\right)\left(x^3+y^3\right)=7\left(x+y\right)\left(x^3-y^3\right)$$

$$\Leftrightarrow 6x^4-13x^3y+13xy^3-6y^4=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)(2x-3y)(3x-2y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \\ y=\dfrac{3}{2}x \\ y=\dfrac{2}{3}x \end{array}\right. .$$

Xét trường hợp thay vào phương trình đầu của hệ tìm được các nghiệm:

$(x;y)=(-3;-2);\ (3;2);\ (-2;-3);\ (2;3);\ (0;0)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=4x^2+4y^2 \\ x^3-y^3=6x^2-6y^2 \end{cases}$.

Lời giải

Nhân chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$6(x^2-y^2)(x^3+y^3)=4(x^2+y^2)(x^3-y^3).$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^3(x^2+3xy+y^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ x^2+3xy+y^2=0 \end{array}\right. .$$

<u>TH1 :</u> Nếu $y=x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được :

$$2x^3=8x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=4, y=4 \end{array}\right. .$$

<u>TH2 :</u> Nếu $x^2+3xy+y^2=0$ kết hợp với phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$\begin{cases} x^2+3xy+y^2=0 \\ x^3-y^3=6(x^2-y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3xy+y^2=0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2-6x-6y)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x^2+3xy+y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+3xy+y^2 \\ x^2+xy+y^2-6x-6y=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm:

$$(x;y)=(0;0);\ (4;4);\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right);\ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=x+4y \\ x^2-4y^2=1 \end{cases}$.

Lời giải

Từ hệ phương trình suy ra: $\left(x^2+xy+y^2\right)^2=\left(x+4y\right)^2\left(x^2-4y^2\right)$.

$\Leftrightarrow \left(2x-5y\right)\left(3x^2+12xy+13y^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=5y \\ 3x^2+12xy+13y^2=0 \end{array}\right.$.

__TH1:__ Nếu $2x=5y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ suy ra:

$\frac{25}{4}y^2-4y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{2}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{5}{3}$.

__TH2:__ Nếu $3x^2+12xy+13y^2=0 \Leftrightarrow 3\left(x+2y\right)^2+y^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ (thử lại thấy không thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right);\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+y^4=17\left(x+y\right) \\ x^4-y^4=45\left(x-y\right) \end{cases}$.

Lời giải

Nhân chéo hai phương trình của hệ ta được :

$$45\left(x-y\right)\left(x^4+y^4\right)=17\left(x+y\right)\left(x^4-y^4\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2y\right)\left(x-y\right)\left(2x-y\right)\left(7x^2+9xy+7y^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=2y \\ y=2x \\ x=y=0 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp và thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\ \left(\sqrt[3]{3};2\sqrt[3]{3}\right);\ \left(2\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{3}\right);\ \left(\sqrt[3]{17};\sqrt[3]{17}\right).$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm:

$$\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\ \left(\sqrt[3]{3};2\sqrt[3]{3}\right);\ \left(2\sqrt[3]{3};\sqrt[3]{3}\right);\ \left(\sqrt[3]{17};\sqrt[3]{17}\right).$$

Chủ đề 5. KỸ THUẬT SỬ DỤNG PHÉP THẾ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Hệ gồm hai phương trình trong đó có thể rút được một biến theo biến còn lại và theo suy nghĩ đơn giản thế vào phương trình còn lại của hệ ta được một phương trình đa thức bậc cao giải được. Đôi khi ta cũng thực hiện phép thế hằng số hoặc thế một biểu thức vào phương trình còn lại.

Dấu hiệu nhận biết

- Hệ gồm một phương trình là phương trình bậc nhất đối với x, y.
- Có thể rút một biến theo biến còn lại từ một phương trình của hệ.

Các dạng hệ đã gặp

Hệ phương trình cơ bản gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai hai ẩn.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y-1=0 & (1) \\ 3x^3+x^2(7y-3)+x(2y^2-7y)=2y^2 & (2) \end{cases}$

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Nhận thấy từ (1) ta có thể rút $y=1-x$ hoặc $x=1-y$ để thế vào phương trình (2) và để ý sẽ đưa về phương trình bậc ba với ẩn x hoặc ẩn y. ở đây ta lựa chọn phép thế $y=1-x$ vào (2) vì bậc của .y ở (2) cao nhất là 2 nên việc tính các biểu thức $(1-x),(1-x)^2$ đơn giản hơn việc tính các biểu thức $(1-y)^3$.

Rút $y=1-x$ từ (1) thế vào (2) ta được:

$$3x^3+x^2\left[7(1-x)-3\right]+x\left[2(1-x)^2-7(1-x)\right]=2(1-x)^2.$$

$(x;y)=(1;-2);\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);(-2;1)$.

Suy ra $(x;y)=\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);(1;0);(2;-1)$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);(1;0);(2;-1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy = x + 7y + 1 \\ x^2y^2 = 10y^2 - 1 \end{cases}$.

Phân tích lời giải:

Ta rút được y theo x từ phương trình đầu của hệ thế vào phương trình thứ hai của hệ đưa về một phương trình bậc 4 với x.

Lời giải

Nhận thấy $y = 1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $y \neq 0$ từ phương trình đầu của hệ ta có $x = \dfrac{7y+1}{y-1}$ thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(\frac{7y+1}{y-1}\right)^2 y^2 = 10y^2 - 1 \Leftrightarrow 39y^4 + 34y^3 - 8y^2 - 2y + 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\left(39y^3 - 5y^2 - 3y + 1\right) = 0 \Leftrightarrow (y+1)(3y+1)\left(13y^2 - 6y + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Với $y = -1$ suy ra $x = 3$.

Với $y = -\dfrac{1}{3}$ suy ra $x = 1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = \left(1;-\dfrac{1}{3}\right);(3;-1)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 2xy + 5y = 7 \\ 3x^2 - 2x + y = 3 \end{cases}$.

Phân tích lời giải:

Cả hai phương trình của hệ đều có thể rút được biến y theo biến x nhưng việc rút từ phương trình thứ hai đơn giản hơn.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^3 - 2xy + 5y = 7 \\ y = -3x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x\left(-3x^2 + 2x + 3\right) + 5\left(-3x^2 + 2x + 3\right) = 7 \\ y = -3x^2 + 2x + 3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^3 - 19x^2 + 4x + 8 = 0 \\ y = -3x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(7x^2 - 12x - 8) = 0 \\ y = -3x^2 + 2x + 3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{6 - 2\sqrt{33}}{7} \\ y = \dfrac{-153 + 44\sqrt{23}}{49} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{6 + 2\sqrt{33}}{7} \\ y = \dfrac{-153 - 44\sqrt{23}}{49} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y) = (1;2); \left(\frac{6 - 2\sqrt{33}}{7}; \frac{-153 + 44\sqrt{23}}{49} \right); \left(= \frac{6 + 2\sqrt{33}}{7}; \frac{-153 - 44\sqrt{23}}{49} \right).$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + y(x+1) = 4x^2 \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 \end{cases}$.

Phân tích lời giải:

Phương trình đầu của hệ chỉ chứa y tự do nên ta rút y theo x và thế vào phương trình thứ hai của hệ và hy vọng đưa về một phương trình bậc cao đối với x phân tích được nghiệm.

Lời giải

Nhận thấy $x = -1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $x \neq -1$ khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} y = \dfrac{4x^2 - 2x^3}{x+1} \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4x^2 - 2x^3}{x+1} \\ 5x^4 - 4x^6 = \left(\dfrac{4x^2 - 2x^3}{x+1} \right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4x^2 - 2x^3}{x+1} \\ x^4 \left[(5 - 4x^2) - \dfrac{4(2-x)^2}{(x+1)^2} \right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \dfrac{4x^2 - 2x^3}{x+1} \\ (5 - 4x^2)(x+1)^2 - 4(2-x)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \dfrac{4x^2 - 2x^3}{x+1} \\ 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 26x + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=\dfrac{4x^2-2x^3}{x+1} \\ (x-1)(2x-1)(2x^2+7x+11)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=(0;0);(1;1);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\sqrt{y+1}=\dfrac{5}{2} \\ y+2(x-3)\sqrt{x+1}=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Phân tích lời giải:

Phương trình đầu của hệ nếu bình phương khử căn thức ta rút được y theo x do vậy ta thực hiện phép thế.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x\ge -1 \\ y\ge -1 \end{cases}$ khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x\ge \dfrac{5}{2} \\ y=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-1 \\ y+2(x-3)\sqrt{x+1}=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{2} \\ y=x^2-5x+\dfrac{21}{4} \\ x^2-5x+2(x-3)\sqrt{x+1}+6=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{2} \\ y=x^2-5x+\dfrac{21}{4} \\ (x-3)\left[x-2+2\sqrt{x+1}\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(3;-\frac{3}{4}\right)$.

Bài 6. (TSĐH Khối B 2008) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases}$.

Phân tích lời giải:

Cả hai phương trình của hệ có điểm chung là có chứa nhân tử chung x^2+xy do vậy ta sẽ thế $xy=\dfrac{6x+6-x^2}{2}$ từ phương trình thứ hai của hệ vào phương trình đầu đưa về phương trình bậc 4 với ẩn x.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x^2+xy\right)^2=2x+9\\ xy=\dfrac{6x+6-x^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2+\dfrac{6x+6-x^2}{2}\right)^2=2x+9\\ xy=\dfrac{6x+6-x^2}{2}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+12x^3+48x^2+64x=0\\ xy=\dfrac{6x+6-x^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x+4\right)^3=0\\ xy=\dfrac{6x+6-x^2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4\\ y=\dfrac{17}{4}\end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(-4;\dfrac{17}{4}\right)$.

Bài 7. (TSĐH Khối B 2006) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+1+y\left(y+x\right)=4y\\ \left(x^2+1\right)\left(y+x-2\right)=y\end{cases}$.

Phân tích lời giải:

Cả hai phương trình có nhân tử chung x^2+1 nếu rút từ phương trình đầu thế vào phương trình thứ hai ta có nhân tử chung y.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^2+1=y\left(4-y-x\right)\\ \left(x^2+1\right)\left(y+x-2\right)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=y\left(4-y-x\right)\\ y\left(4-x-y\right)\left(y+x-2\right)=y\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=0\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x^2+1=y\left(4-y-x\right)\\ \left(4-x-y\right)\left(y+x-2\right)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=y\left(4-y-x\right)\\ -\left(x+y\right)^2+6\left(x+y\right)-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=y\left(4-x-y\right)\\ \left(x+y-3\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\ x^2+1=y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 + 1 = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;3);(-2;5)$.

<u>Nhận xét:</u> Ngoài ra có thể đưa về hệ $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} + x + y = 4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}.(y + x - 2) = 1 \end{cases}$.

Đặt ẩn phụ $u = \dfrac{x^2+1}{y}; v = x + y - 2$ (xem thêm phương pháp đặt ẩn phụ).

Bài 8. (TSĐH Khối D 2009) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \dfrac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x \neq 0$ khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{x} - 1 \\ \left(\dfrac{3}{x} - 1\right)^2 - \dfrac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{3}{x} - 1 \\ \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x} + 2 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{x} - x - 1 \\ (x-1)(2x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;1);\left(2;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^3 - 3x = y^3 - 3y \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = -1 - x \\ x^3 - 3x = y^3 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - x \\ x^3 - 3x = (-1-x)^3 - 3(-1-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - x \\ 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x+1)(x+2) = 0 \\ y = -1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = (1;-2);\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);(-2;1)$.

Nhận xét: Qua các ví dụ trên nhận thấy phương pháp thế hết sức đơn giản mà bất kỳ học sinh nào cũng nghĩ đến đầu tiên khi giải hệ. Thông thường các hệ có nghiệm đẹp khi đưa về phương trình bậc cao ta sẽ giải được nhờ phân tích thành nhân tử. Hạn chế của phương pháp này là đôi khi tính toán cồng kềnh dễ dẫn đến sai sót và một điểm nữa là nếu hệ có nghiệm lẻ việc giải phương trình bậc cao sẽ hết sức khó khăn. Lúc này thử nghĩ đến các phương pháp khác chẳng hạn như đặt ẩn phụ. Một lưu ý của phương pháp này là ta có thể thế một biểu thức, một hằng số từ một phương trình vào phương trình còn lại.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$.

Phân tích lời giải:

Rút $y^2 = xy - 1$ từ phương trình đầu thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình đưa được về phương trình tích nên ta sử dụng phương pháp thế.

$$x^2 + xy + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow x(x+y) + 2(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -y \end{array}\right..$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ x^2 + xy + 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = xy - 1 \\ (x+2)(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y^2 = -2y - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -y \\ y^2 = -y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (-2;-1)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x^2 + y)(x+y) + x(2x+1) = 7 - 2y \\ x(4x+1) = 7 - 3y \end{cases}$.

Phân tích lời giải.
Nếu thực hiện phép thế biến thông thường trong trường hợp này không thực hiện được để ý đến số 7 tự do ở hai phương trình thử thế từ phương trình dưới lên phương trình trên xem ta được gì? Hy vọng đưa về được một phương trinh tích.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\left(2x^2+y\right)\left(x+y\right)+x\left(2x+1\right)=7-2y\\ 7=4x^2+x+3y\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2x^2+y\right)\left(x+y\right)+x\left(2x+1\right)=4x^2+x+3y-2y\\ 7=4x^2+x+3y\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2x^2+y\right)\left(x+y\right)=2x^2+y\\ 7=4x^2+x+3y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2x^2+y\right)\left(x+y-1\right)=0\\ 7=4x^2+x+3y\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x^2\\ 7=4x^2+x+3y\end{cases}\vee\begin{cases}y=1-x\\ 7=4x^2+x+3y\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x^2\\ 2x^2-x+7=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=1-x\\ 2x^2-x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}\\ y=\dfrac{3\mp\sqrt{17}}{4}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4};\dfrac{3\mp\sqrt{17}}{4}\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+7y=\left(x+y\right)^2+x^2y+7x+4\\ 3x^2+y^2+8y+4=8x\end{cases}.$

Phân tích lời giải. Bài toán này ta thực hiện tương tự bài toán trên rút 4 tự do từ phương trình hai thế vào phương trình đầu của hệ.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^3+7y=(x+y)^2+x^2y+7x+8x-8y-3x^2-y^2\\4=8x-8y-3x^2-y^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+2x^2-x^2y-2xy-15x+15y=0\\4=8x-8y-3x^2-y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x^2+2x-15)=0\\4=8x-8y-3x^2-y^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\4=8x-8y-3x^2-y^2\end{cases}\vee\begin{cases}x^2+2x-15=0\\4=8x-8y-3x^2-y^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\2y^2+4=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=-5\\y^2+8y+119=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=3\\y^2+8y+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=3\\y=-7\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(3;-1);(3;-7)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2(y+1)=6y-2\\x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1\end{cases}.$

Phân tích lời giải. Cả hai phương trình có nhân tử chung x^2 từ phương trình của hệ rút được $x^2=\dfrac{6y-2}{y+1}$ tới đây thế vào phương trình thứ hai của hệ đưa về phương trình đa thức bậc bốn với ẩn y. Nhưng trước tiên phải xét xem $y=-1$ có là nghiệm của hệ hay không?

Lời giải

Nhận thấy $y=-1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y\neq-1$ khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x^2=\dfrac{6y-2}{y+1}\\\left(\dfrac{6y-2}{y+1}\right)^2y^2+2y^2\left(\dfrac{6y-2}{y+1}\right)+y\left(\dfrac{6y-2}{y+1}+1\right)=12y^2-1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{6y-2}{y+1}\\\dfrac{4(y-1)(9y+1)y^2}{(y+1)^2}=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{6y-2}{y+1}\\y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x^2=\dfrac{6y-2}{y+1}\\4(9y+1)y^2=(y+1)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 36y^3 + 3y^2 - 2y - 1 = 0 \\ x^2 = \dfrac{6y-2}{y+1} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} (3y-1)(12y^2 + 5y + 1) = 0 \\ x^2 = \dfrac{6y-2}{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = (\pm\sqrt{2};1);\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + 2x + 2y = 16 \\ (x+y)(4+xy) = 32 \end{cases}$.

Bài giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)(x+2) = 16 \\ (x+y)(4+xy) = 32 \end{cases}.$$

Nhận thấy $x = -2$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $x \neq -2$ khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{16}{x+2} \\ (x+y)(4+xy) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{16}{x+2} \\ \dfrac{16}{x+2}.(4+xy) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{16}{x+2} \\ 4 + xy = 2x + 4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{16}{x+2} \\ x(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \vee x = -6 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = (0;8);(2;2);(2;-6)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-1)^2 + 6(x-1)y + 4y^2 = 20 \\ x^2 + (2y+1)^2 = 2 \end{cases}$.

Phân tích lời giải: Chưa thấy mối liên hệ nào giữa hai phương trình của hệ ta thử khai triển các biểu thức tích và hằng đẳng thức ra xem sao? Nhận thấy có nhân tử chung $x^2 + 4y^2$ ta sử dụng phép thế cho hệ này.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2-2x+1+6xy-6y+4y^2=20 \\ x^2+4y^2+4y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1+1-4y+6xy-6y=20 \\ x^2+4y^2=1-4y \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-5)y=x+9 \\ x^2+4y^2=1-4y \end{cases}.$$

Nhận thấy $x=\frac{5}{3}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Khi đó với $x\neq\frac{5}{3}$ hệ tương đương với:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x+9}{3x-5} \\ x^2+(2y+1)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x+9}{3x-5} \\ x^2+\left(\dfrac{2x+18}{3x-5}+1\right)^2=2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x+9}{3x-5} \\ 9x^4-30x^3+32x^2+190x+119=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x+9}{3x-5} \\ (x+1)^2\left(9x^2-48x+119\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;-1)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2xy^2=5 \\ 2x^2+xy+y^2=4x+y \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, với $x\neq 0$ rút $y^2=\dfrac{5-x^3}{2x}$ từ phương trình thứ nhất và thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x^2+xy+\frac{5-x^3}{2x}=4x+y \Leftrightarrow 3x^3-8x^2+5+2x^2y-2xy=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2-5x-5\right)+2xy(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(3x^2-5x-5+2xy\right)=0.$$

Với $x=1$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases}1+2y^2=5\\2+y+y^2=4+y\end{cases}\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2}$.

Với $3x^2-5x-5+2xy$ khi đó thay vào phương trình thứ hai ta được

$$2x^2-\frac{1}{2}\left(3x^2-5x-5\right)+y^2=4x+y.$$

$\Leftrightarrow x^2+5x+5+2y^2=8x+2y\Leftrightarrow x^2-3x+5=2y\left(1-y\right)$ (1).

Vế trái $x^2-3x+5=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\geq\frac{11}{4}$.

Vế phải $2y\left(1-y\right)\leq\frac{1}{2}\left(y+1-y\right)^2=\frac{1}{2}$.

Từ đây suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;\sqrt{2}\right);\left(1;-\sqrt{2}\right)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases}13y^3-3x^2=1\\y^2+4y+1=5x+4xy\end{cases}$

Lời giải

Nhận thấy $y=-\frac{5}{4}$ không thỏa mãn hệ, nên với $y\neq-\frac{5}{4}$ rút $x=\frac{y^2+4y+1}{4+5y}$

từ phương trình thứ hai thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$13y^3-3\left(\frac{y^2+4y+1}{4+5y}\right)^2=1.\Leftrightarrow\left(y-2\right)^3\left(y+2\right)\left(13y^2+16y+7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\\y=2\end{array}\right..$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;-2\right);\left(1;2\right)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy-x+y=2\\x^3-4x^2+x+18=2y^3+5y^2-y\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=-1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq-1$ rút $y=\frac{x+2}{x+1}$ từ phương trình đầu thay vào phương trình thứ hai

của hệ ta được: $x^3-4x^2+x+18=2\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3+5\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2-\frac{x+2}{x+1}$.

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)^2\left(x^2-x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2}, y=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2}, y=\sqrt{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}, y=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, y=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2};\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right);\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$$

<u>Nhận xét:</u> Xem thêm một số bài toán cùng dạng này được đề cập trong chủ đề Kỹ thuật hệ số bất định.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x-1=3y \\ x^2(y-x)=2y^2 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=3$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq 3$ từ phương trình đầu suy ra $y=\dfrac{x-1}{3-x}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2\left(\frac{x-1}{3-x}-x\right)=2\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^2 \Leftrightarrow x^5-5x^4+5x^3+5x^2-4x+2=0.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^4-6x^3+11x^2-6x+2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\left(x^2-3x+1\right)^2+1\right]=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y-3)-9y=1 \\ (x-1)^2y^2+2y=-1 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y=3$ không thỏa mãn phương trình từ phương trình đầu của hệ suy ra hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x(y-3)-(y-3)=8y+4 \\ (x-1)^2y^2+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{4(2y+1)}{y-3} \\ (x-1)^2y^2+2y=-1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{4(2y+1)}{y-3} \\ (x-1)^2y^2+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{4(2y+1)}{y-3} \\ \left(\dfrac{4(2y+1)}{y-3}\right)^2 y^2+2y+1=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{4(2y+1)}{y-3} \\ (2y+1)\left(16y^2(2y+1)+(y-3)^2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{4(2y+1)}{y-3} \\ (2y+1)(y+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=-1 \\ x=1, y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;-1);\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+2)^2=y+19 \\ 2(y+2)^2=x+1 \end{cases}$.

Lời giải

Rút $x=2(y+2)^2-1$ từ phương trình hai của hệ thế vào phương trình đầu ta được:

$$2\left[2(y+2)^2-1+2\right]^2=y+19 \Leftrightarrow 8y^4+64y^3+200y^2+287y+143=0.$$

$$\Leftrightarrow (y+1)\left(8y^3+56y^2+144y+143\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-\dfrac{7}{3}-\dfrac{10}{3k}+\dfrac{k}{6} \end{array}\right., k=\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{12081}-277}{2}}.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,\ y=-1 \\ x=2\left(-\dfrac{1}{3}-\dfrac{10}{3k}+\dfrac{k}{6}\right)^2-1, y=-\dfrac{7}{3}-\dfrac{10}{3k}+\dfrac{k}{6} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=(1;-1);\left(2\left(-\dfrac{1}{3}-\dfrac{10}{3k}+\dfrac{k}{6}\right)^2-1;-\dfrac{7}{3}-\dfrac{10}{3k}+\dfrac{k}{6}\right) \text{ với } k=\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{12081}-277}{2}}.$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2y^2+xy^2+4xy-3y^3+1=7y^2\\3xy-3y^2-y+1=0\end{cases}$.

Lời giải

Viết lại hệ dưới dạng: $\begin{cases}xy\left(4xy+y+4\right)=7y^2+3y^3-1\\xy=\dfrac{3y^2+y-1}{3}\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{3y^2+y-1}{3}\left(4.\frac{3y^2+y-1}{3}+y+4\right)=7y^2+3y^3-1$$

$$\Leftrightarrow\left(y-1\right)\left(6y-1\right)\left(6y^2+8y+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=\dfrac{1}{6}\\y=-\dfrac{4+\sqrt{10}}{6}\\y=\dfrac{-4+\sqrt{10}}{6}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=1\\x=-\dfrac{3}{2},y=\dfrac{1}{6}\\x=1-\sqrt{\dfrac{5}{2}},y=-\dfrac{4+\sqrt{10}}{6}\\x=1+\sqrt{\dfrac{5}{2}},y=\dfrac{-4+\sqrt{10}}{6}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{6}\right);\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}};-\frac{4+\sqrt{10}}{6}\right);\left(1+\sqrt{\frac{5}{2}};\frac{-4+\sqrt{10}}{6}\right)$$

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+4y+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=8\\4x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=6\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq0$.

Rút $y=\dfrac{6x-4x^2-1}{x}$ từ phương trình thứ hai và thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$2x+4.\frac{6x-4x^2-1}{x}+\frac{x^2}{6x-4x^2-1}+\frac{6x-4x^2-1}{x^2}=8.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(8x^3-20x^2+24x-5\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5}{6}-\dfrac{11}{6}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3\sqrt{3261}-155}}+\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3261}-155}{2}}}{6} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,y=1 \\ x=k,y=\dfrac{6k-4k^2-1}{k} \end{array}\right.$$

với $k=\dfrac{5}{6}-\dfrac{11}{6}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3\sqrt{3261}-155}}+\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3261}-155}{2}}}{6}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);\left(k;\dfrac{6k-4k^2-1}{k}\right)$

với $k=\dfrac{5}{6}-\dfrac{11}{6}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3\sqrt{3261}-155}}+\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{3\sqrt{3261}-155}{2}}}{6}$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-3x-2y=6 \\ x^2+y^2-2x-4y=8 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=2$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq 2$ rút $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$ từ phương trình đầu thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$x^2+\left(\frac{3x+6}{x-2}\right)^2-2x-4.\frac{3x+6}{x-2}=8\Leftrightarrow x^4-6x^3+x^2+60x+52=0.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)\left(x^2-9x+26\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,y=-1 \\ x=-2,y=0 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;-1);(-2;0)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+2)(2x+y)=9 \\ x^2+4x+y=6 \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1: Rút $y=-x^2-4x+6$ từ phương trình thứ hai của hệ thế vào phương trình đầu ta được:

$$x(x+2)(2x-x^2-4x+6)=9 \Leftrightarrow x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+3)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, y=9 \\ x=1, y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);(-3;9)$.

Cách 2: Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} (x^2+2x)(2x+y)=9 \\ x^2+2x+2x+y=6 \end{cases}$.

Đặt $u=x^2+2x, v=2x+y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=6 \\ uv=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=3 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1 \\ x=-3, y=9 \end{array}\right..$$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy=x+2 \\ (2y^2+5)x+13x^2=26 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x \neq 0$ rút $y=\dfrac{x+2-x^2}{x}$ từ phương trình đầu thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x\left(2\left(\frac{x+2-x^2}{x}\right)^2+5\right)+13x^2=26 \Leftrightarrow 2x^4+9x^3-x^2-18x+8=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1)(x+2)(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=-2 \\ x=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=\frac{1}{2}, y=\frac{9}{2} \\ x=-2, y=2 \\ x=-4, y=\frac{9}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=(1;2);\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right);(-2;2);\left(-4;\frac{9}{2}\right)$.

Bài 9. (TSĐH Khối D 2012) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 & (1) \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Khi đó rút $y = \dfrac{2-x}{x}$ từ (1) thế vào (2) ta được:

$$2x^3 - x^2.\frac{2-x}{x} + x^2 + \left(\frac{2-x}{x}\right)^2 - 2x.\frac{2-x}{x} - \frac{2-x}{x} = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2\left(x-1\right)\left(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x - 2\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left[\left(x^2+x\right)^2 + \left(x^2+x\right) - 2\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+x-1\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Suy ra $\left(x;y\right) = \left(1;1\right);\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\pm\sqrt{5}\right)$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(1;1\right);\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\pm\sqrt{5}\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 5x + y = 9 & (1) \\ 3x^3 + x^2y + 2xy + 6x^2 = 18 & (2) \end{cases}.$

Lời giải

Rút $y = 9 - x^2 - 5x$ từ (1) thay vào (2) ta được:

$$x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 18x + 18 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x+3\right)\left(x^2+x-6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \\ x = -1 \pm \sqrt{7} \end{array}\right..$$

Suy ra: $\left(x;y\right) = \left(-3;15\right);\left(1;3\right);\left(-1-\sqrt{7};6+3\sqrt{7}\right);\left(-1+\sqrt{7};6-3\sqrt{7}\right)$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(-3;15\right);\left(1;3\right);\left(-1-\sqrt{7};6+3\sqrt{7}\right);\left(-1+\sqrt{7};6-3\sqrt{7}\right).$$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ 2x^3=x+y \end{cases}$.

Lời giải

Rút $y=2x^3-x$ từ phương trình thứ hai của hệ thay vào phương trình đầu ta được:

$$x^2+\left(2x^3-x\right)^2-x\left(2x^3-x\right)=1 \Leftrightarrow 4x^6-6x^4+3x^2-1=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(4x^4-2x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=-1 \\ x=1, y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;-1\right);\left(1;1\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2\left(y+1\right)\left(x+y+1\right)=3x^2-4x+1 \\ xy+y+1=x^2 \end{cases}$.

Lời giải

Rút $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ từ phương trình thứ hai thế vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x}+x+1\right)=3x^2-4x+1.$$

$$\Leftrightarrow x\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=0 \\ x=-2, y=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;0\right);\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 9y^4-xy^2=12-4x \\ 4x^2-y^2x^2=3 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 9y^4-xy^2=12-4x \\ y^2=4-\dfrac{3}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\left(4x^2-3\right)^2-x^3\left(4x^2-3\right)=\left(12-4x\right)x^4 \\ y^2=4-\dfrac{3}{x^2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 132x^4 + 3x^3 - 216x^2 + 81 = 0 \\ y^2 = 4 - \dfrac{3}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(132x^3 + 135x^2 - 81) = 0 \\ y^2 = 4 - \dfrac{3}{x^2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 132x^3 + 135x^2 - 81 = 0 \\ y^2 = 4 - \dfrac{3}{x^2} \end{cases} \end{array} \right.\cdot$$

Do $y^2 \ge 0 \Rightarrow 4 - \dfrac{3}{x^2} \ge 0 \Leftrightarrow |x| \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Khi đó phương trình $132x^3 + 135x^2 - 81 = 0$ vô nghiệm với $|x| \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;-1);(1;1)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + x^2y = y + 2 \\ (2x+y)^2 + 3y^2 = 12 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} y(x^2-1) = 2 - x \ (1) \\ (2x+y)^2 + 3y^2 = 12 \ (2) \end{cases}$.

- Nếu $x = 1$ thay vào (2) ta được:

$(2+y)^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -2 \end{array} \right.$.

Suy ra $(x;y) = (1;1);(1;-2)$.

- Nếu $x = -1$ thay vào (2) ta được:

$(2-y)^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow 4y^2 - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 2 \end{array} \right.$.

Suy ra $(x;y) = (-1;-1);(-1;2)$.

- Nếu $x \ne \pm 1$ khi đó rút $y = \dfrac{2-x}{x^2-1}$ từ (1) thế vào (2) ta được:

$$\left(2x+\frac{2-x}{x^2-1}\right)^2+3\left(\frac{2-x}{x^2-1}\right)^2=12 . \Leftrightarrow x^6-3x^4-x^3+9x^2-6x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-3x+1\right)^2=0 \Leftrightarrow x^3-3x+1=0 .$$

Ta xét nghiệm $x\in\left[-2;2\right]$, đặt $x=2\cos t,\left(t\in\left[0;\pi\right]\right)$ phương trình trở thành:

$$8\cos^3 t-6\cos t+1=0\Leftrightarrow \cos 3t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\pm\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z} .$$

Do $t\in\left[0;\pi\right]\Rightarrow t\in\left\{\frac{2\pi}{9};\frac{4\pi}{9};\frac{8\pi}{9}\right\}\Rightarrow x=2\cos\frac{2\pi}{9},x=2\cos\frac{4\pi}{9},x=2\cos\frac{8\pi}{9}$.

Do phương trình bậc ba có tối đa ba nghiệm nên đây là ba nghiệm của phương trình.

Vậy hệ phương trình có bảy nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(1;-2\right);\left(-1;-1\right);\left(-1;2\right);\left(2\cos t;\frac{2\left(1-\cos t\right)}{\cos^2 t-1}\right) \text{ với } t\in\left\{\frac{2\pi}{9};\frac{4\pi}{9};\frac{8\pi}{9}\right\}.$$

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 & (1)\\ x^2y+x^2+2y-22=0 & (2)\end{cases}$.

Lời giải

Rút $y=\dfrac{22-x^2}{x^2+2}$ từ (2) thay vào (1) ta được:

$$x^4-4x^2+\left(\frac{22-x^2}{x^2+2}-3\right)^2=0\Leftrightarrow x^2\left(x^2-4\right)+\frac{16\left(x^2-4\right)^2}{\left(x^2+2\right)^2}=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-4\right)\left(x^2-2\right)\left(x^4+6x^2+32\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm2\\ x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right. .$$

Đáp số. $\left(x;y\right)=\left(\pm2;3\right);\left(\pm\sqrt{2};5\right)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x-1\right)^2+6\left(x-1\right)y+4y^2=20\\ x^2+\left(2y+1\right)^2=2\end{cases}$.

Lời giải

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2+4y^2-2x+6(x-1)y=19 \\ x^2+4y^2=1-4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-4y-2x+6(x-1)y=19 \\ x^2+4y^2=1-4y \end{cases}.$$

Rút $y=\dfrac{x+9}{3x-5}$ thế vào phương trình thứ hai tìm được nghiệm: $(x;y)=(-1;-1)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8x^6-\dfrac{1}{2}xy=y-3x^4 \\ x^3-4x^2y=y \end{cases}$.

Lời giải

Rút y theo x từ hai phương trình của hệ rồi so sánh với nhau tìm được nghiệm $(x;y)=(0;0)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1 \end{cases}$.

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} (x^2+1)^2y^2+y(x^2+1)=13y^2-1 \\ (y+1)(x^2+1)=7y-1 \end{cases}$.

Đặt $u=x^2+1, v=y, (u\ge 1)$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u^2v^2+uv=13v^2-1 \\ u(v+1)=7v-1 \end{cases}$.

Rút $u=\dfrac{7v-1}{v+1}$ từ phương trình thứ hai của hệ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\left(\frac{7v-1}{v+1}\right)^2v^2+\frac{7v-1}{v+1}.v=13v^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=1 \\ v=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=\dfrac{1}{3} \\ x=\pm\sqrt{2}, y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(0;\dfrac{1}{3}\right);(\pm\sqrt{2};1)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2\sqrt{4x-1}+\sqrt{3}=5y^2-\sqrt{12x-3} \\ 2y^2\sqrt{3-2x}=\sqrt{6} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{2}$.

Rút $y^2 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3-2x}}$ từ phương trình thứ hai của hệ thay vào phương trình đầu, ta được: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{6-4x} + \sqrt{(6-4x)(4x-1)} - 5 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{4x-1} + \sqrt{6-4x} \Rightarrow t^2 = 5 + 2\sqrt{(6-4x)(4x-1)}, (t > 0)$.

Phương trình trở thành: $t + \frac{t^2-5}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -5 \end{array}\right.$.

Suy ra $t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{4x-1} + \sqrt{6-4x} = 3 \Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{(6-4x)(4x-1)} = 9$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ x = \frac{5}{4}, y = \pm\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y) = \left(\frac{1}{2}; \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right); \left(\frac{5}{4}; \pm\sqrt{3}\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1 - y^2 = 4xy \\ 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y \ne 0$ rút $x = \frac{1-y^2}{4y}$ từ phương trình đầu thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $4\left(\frac{1-y^2}{4y}\right)^2 + y^4 - 4\left(\frac{1-y^2}{4y}\right)y^3 = 1. \Leftrightarrow (y^2-1)(8y^4 + 5y^2 - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 1 \\ y = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{57}-5}}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = -1 \\ x = 0, y = 1 \\ x = \pm\frac{21-\sqrt{57}}{16\sqrt{\sqrt{57}-5}}, y = \pm\frac{\sqrt{\sqrt{57}-5}}{4} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(0;-1\right);\left(0;1\right);\left(\pm\frac{21-\sqrt{57}}{16\sqrt{\sqrt{57}-5}};\pm\frac{\sqrt{\sqrt{57}-5}}{4}\right).$$

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3y+x^3+xy+x=1\\4x^3y^2+4x^3-8xy-17x=-8\end{cases}$

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq 0$ khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x^3+x\right)\left(y+1\right)=1\\4x^3y^2+4x^3-8xy-17x=-8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{x^3+x}-1\\4x^3\left(\dfrac{1}{x^3+x}-1\right)^2+4x^3-8x\left(\dfrac{1}{x^3+x}-1\right)-17x=-8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{x^3+x}-1\\x\left(8x^6+7x^4-10x^2-5\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{x^3+x}-1\\x\left(x^2-1\right)\left(8x^4+15x^2+5\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=1\\y=\dfrac{1}{x^3+x}-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,y=-\dfrac{3}{2}\\x=1,y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;-\frac{3}{2}\right);\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{3}{y}=\left(x-1\right)\left(\sqrt{x^3+2}+1\right)\\y=x^2+x+1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y\neq 0,x\geq-\sqrt[3]{2}$.

Thế $y=x^2+x+1$ từ phương trình hai vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$3=\left(x^3-1\right)\left(\sqrt{x^3+2}+1\right).$$

Đặt $u=\sqrt{x^3+2}$ phương trình trở thành:

$$3=\left(u^2-3\right)\left(u+1\right)\Leftrightarrow u^3+u^2-3u-6=0$$

$$\Leftrightarrow\left(u-2\right)\left(u^2+3u+3\right)=0\Leftrightarrow u=2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^3+2}=2\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}\Rightarrow y=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+xy-2=0\\y^3+3xy+3=0\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq0$ khi đó từ phương trình đầu của hệ ta có $y=\dfrac{2-x^3}{x}$.

Thay $y=\dfrac{2-x^3}{x}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(\frac{2-x^3}{x}\right)^3+3x.\frac{2-x^3}{x}+3=0\Leftrightarrow\left(x^3-1\right)^3=7.$$

$$\Leftrightarrow x^3-1=\sqrt[3]{7}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{7}}\Rightarrow y=\frac{1-\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{7}}}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{7}};\dfrac{1-\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{7}}}\right)$.

<u>Nhận xét:</u> Dạng hệ này được nhắc tới trong chủ đề Cộng trừ và nhân theo theo vế hai phương trình của hệ các em theo dõi.

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2y+3xy=4x^2+9y\\7y+6=2x^2+9x\end{cases}$

Lời giải

Nhận thấy $2x^2+3x-9=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Rút $y=\dfrac{4x^2}{2x^2+3x-9}$ từ phương trình đầu của hệ thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$7.\frac{4x^2}{2x^2+3x-9}+6=2x^2+9x \Leftrightarrow (x+2)(2x-1)(2x^2+9x-27)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{-9\pm 3\sqrt{33}}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, y=-\frac{16}{7} \\ x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{7} \\ x=\frac{-9\pm 3\sqrt{33}}{4}, y=3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm:

$$(x;y)=\left(-2;-\frac{16}{7}\right);\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{7}\right);\left(\frac{-9\pm 3\sqrt{33}}{4};=3\right).$$

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4y^2-4xy+y^2=1 \\ 2x^2-2x+y=-1 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^4y^2-4xy+y^2=1 \\ y=-2x^2+2x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4(-2x^2+2x-1)-4x(-2x^2+2x-1)+(-2x^2+2x-1)^2=1 \\ y=-2x^2+2x-1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4(4x^4-8x^3+8x^2-4x+5)=0 \\ y=-2x^2+2x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4\left(4(x^2-x)^2+(2x-1)^2+4\right)=0 \\ y=-2x^2+2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;-1)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{(4-x)(13-y)}=\frac{2x+3y+25}{2x+y+2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $(4-x)(13-y)\ge 0, 2x+y+2\ne 0$.

Rút $y=1-x$ từ phương trình đầu và thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{(4-x)(12+x)}=\frac{-x+28}{x+3}\Leftrightarrow (x+3)\sqrt{(4-x)(x+12)}=28-x.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+3)(28-x)\ge 0\\ (x+3)^2(4-x)(x+12)=(28-x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+3)(28-x)\ge 0\\ \left(x^2+6x-22\right)\left(x^2+8x-16\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{31}-3\\ x=4\sqrt{2}-4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{31}-3, y=4-\sqrt{31}\\ x=4\sqrt{2}-4, y=5-4\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm:

$$(x;y)=\left(\sqrt{31}-3;4-\sqrt{31}\right);\left(4\sqrt{2}-4;5-4\sqrt{2}\right).$$

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+y(x+1)=4x^2\\ 5x^4-4x^6=y^2\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=-1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Rút $y=\dfrac{4x^2-2x^3}{x+1}$ từ phương trình đầu thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $5x^4-4x^6=\left(\dfrac{4x^2-2x^3}{x+1}\right)^2$.

$$\Leftrightarrow x^4(x-1)(2x-1)\left(2x^2+7x+11\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0, y=0\\ x=1, y=1\\ x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $(x;y)=(0;0);(1;1);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-2xy+x+y=0\\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=\dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x \ne \frac{1}{2}$ từ phương trình đầu của hệ suy ra $y = \frac{x^2 + x}{2x - 1}$.

Thay $y = \frac{x^2 + x}{2x - 1}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^4 - 4x^2.\frac{x^2 + x}{2x - 1} + 3x^2 + \left(\frac{x^2 + x}{2x - 1}\right)^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)\left(2x^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = 1, y = 2 \\ x = 2, y = 2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $(x;y) = (0;0);(1;2);(2;2)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 12xy^3 + 8y^4 + 1 = 0 \\ 2x^3y + y^4 = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2xy - 3y^2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy - 3y^2 = 0.$$

Ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ 2x^3y + y^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = x \\ x = -3y \end{array}\right. \\ 2x^3y + y^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, y = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $(x;y) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}};-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + 3 = y\sqrt{x^2 + 3} \\ y^2 + 4x + 2(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x^2 + 5 \end{cases}$.

Lời giải

__**Cách 1:**__ Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y\left(\sqrt{x^2 + 3} - x\right) = 3 \\ y^2 + 4x + 2(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 2x^2 + 5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x^2+3} + x \\ y^2 + 4x + 2(x-1)\sqrt{x^2-2x+4} = 2x^2 + 5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x^2+3} + x \\ \left(x + \sqrt{x^2+3}\right)^2 + 4x + 2(x-1)\sqrt{x^2-2x+4} = 2x^2 + 5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x^2+3} + x \\ 4x - 2 + 2x\sqrt{x^2+3} + 2(x-1)\sqrt{x^2-2x+4} = 0 \ (1) \end{cases}.$$

Xét phương trình (1):

$$4x - 2 + 2x\sqrt{x^2+3} + 2(x-1)\sqrt{x^2-2x+4} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2+3} = 1 - x + (1-x)\sqrt{(x-1)^2+3} \ (2).$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2+3}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+3} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(2) \Leftrightarrow f(x) = f(1-x) \Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

<u>**Cách 2:**</u> Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} y = x + \sqrt{x^2+3} \\ y^2 = \left(\sqrt{(1-x)^2+3} + 1 - x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \sqrt{x^2+3} \\ \left(x + \sqrt{x^2+3}\right)^2 = \left(\sqrt{(1-x)^2+3} + 1 - x\right)^2 \end{cases}.$$

<u>Nhận xét</u>: $x + \sqrt{x^2+3} > 0, \sqrt{(1-x)^2+3} + 1 - x > 0$ do đó

$$\left(x + \sqrt{x^2+3}\right)^2 = \left(\sqrt{(1-x)^2+3} + 1 - x\right)^2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+3} = \sqrt{(1-x)^2+3} + 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x-3)y^2 - 48y - 48x + 155 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Rút $y=\dfrac{9-x^2}{3}$ từ phương trình đầu thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(\frac{9-x^2}{3}\right)^4+4(2x-3)\left(\frac{9-x^2}{3}\right)^2-48.\frac{9-x^2}{3}-48x+155=0.$$

$$\Leftrightarrow x^4-18x^2+36x-18=0\Leftrightarrow x^4=18(x-1)^2.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=3\sqrt{2}(x-1)\\ x^2=-3\sqrt{2}(x-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{\dfrac{9+6\sqrt{2}}{2}}\\ x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{\dfrac{9-6\sqrt{2}}{2}}\end{array}\right..$$

Chủ đề 6. KỸ THUẬT PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Hệ có dạng $\begin{cases}F(x,y)=0\\ G(x,y)=0\end{cases}$.

Trong đó có một phương trình của hệ đưa được về phương trình tích.

Chẳng hạn $F(x,y)=f(x,y).g(x,y)$ là một đa thức phân tích được thành nhân tử.

Thông thường $F(x,y)$ là phương trình bậc hai hai ẩn hoặc là phương trình đẳng cấp tìm được mối liên hệ giữa các biến trong phương trình.

Một số tích hay gặp:

$$\left|\begin{array}{l}a+b=1+ab\Leftrightarrow(a-1)(b-1)=0\\ au+bv=ab+uv\Leftrightarrow(a-v)(b-u)=0\end{array}\right..$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}f(x,y).g(x,y)=0\\ G(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x,y)=0\\ G(x,y)=0\end{cases}\vee\begin{cases}g(x,y)=0\\ G(x,y)=0\end{cases}.$$

Phương pháp phân tích thành nhân tử đối với phương trình bậc hai hai ẩn

Phương trình bậc hai hai ẩn có dạng:

$$F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Viết lại phương trình dưới dạng: $ax^2+(by+d)x+cy^2+ey+f=0$.

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn x và tham số là y ta được:

$$\Delta=(by+d)^2-4(cy^2+ey+f)=(my+p)^2.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\left(by+d\right)+my+p}{2a} \\ x = \dfrac{-\left(by+d\right)-my-p}{2a} \end{array}\right.$.

Do đó $F(x,y) = a\left(x - \dfrac{-\left(by+d\right)+my+p}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-\left(by+d\right)-my-p}{2a}\right)$.

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} a\left(x - \dfrac{-\left(by+d\right)+my+p}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-\left(by+d\right)-my-p}{2a}\right) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}.$$

Đối với phương trình đẳng cấp bậc cao các em xem thêm hệ đẳng cấp trong cùng cuốn sách.

<u>Chú ý:</u> Dấu hiệu nhận biết đưa về tích đối với phương trình của hệ.

- Hệ có một phương hoặc hai phương trình bậc hai(nhưng nhớ là có thể là bậc bốn hoặc bậc sáu vì bằng phép đặt $x = t^2, x = t^3$ đưa phương trình bậc hai về phương trình bậc cao hơn).
- Hệ có phương trình đẳng cấp.
- Hệ có một phương trình có dạng tích $uv - Av - Bu + AB = 0$.
- Hệ có một phương trình là hằng đẳng thức dạng ...
- Hệ có một phương trình chứa căn(thường đưa về nhân tử chung bằng phép đặt ẩn phụ; phép nhân liên hợp hoặc đánh giá hàm số).

Nhận xét. Ngoài ra nếu thành thạo sử dụng máy tính cầm tay ta phân tích phương trình thành nhân tử hết sức đơn giản:

Một ví dụ phân tích thành nhân tử bằng máy tính Bỏ túi:

$$x^3 - 3x^2 + 2 - \left(y^2 - 3\right)y = 0\,(1).$$

Ta cần tìm mối liên hệ giữa x và y thông thường sẽ chúng sẽ có dạng tuyến tính $y = ax + b$.

+ **<u>Bước 1:</u>** Nhập vào máy số 1000 và lưu vào biến nhớ A(SHIFT + STO + A).

+ **<u>Bước 2:</u>** Nhập vào máy tính phương trình (1) với chú ý ở đâu có y ta thay bằng biến nhớ A vừa lưu.

+ **<u>Bước 3:</u>** Giải nghiệm trên máy (SHIFT + SOLVE).

+ **<u>Bước 4:</u>** Máy hiện kết quả 1000 tức là $x = y + 1$.

Vậy ta viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^3-3x^2-y^3+3y=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2-\left(y+1\right)^3+3\left(y+1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y-1\right)\left(x^2+x\left(y+1\right)+\left(y+1\right)^2\right)-3\left(x-y-1\right)\left(x+y+1\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y-1\right)\left(x^2+x\left(y+1\right)+\left(y+1\right)^2-3x-3y-3\right)=0$$

Như vậy nếu sử dụng thành thục máy tính Bỏ túi các bài toán sử dụng tính đơn điệu của hàm số việc tìm ra hàm đặc trưng khá đơn giản.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. (TSĐH Khối A 2011) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0 \\ xy\left(x^2+y^2\right)+2=\left(x+y\right)^2 \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0 \\ xy\left(x^2+y^2\right)+2-\left(x^2+y^2\right)-2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0 \\ \left(xy-1\right)\left(x^2+y^2-2\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0 \\ \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=1 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 5x^2y-4xy^2+3y^3-2\left(x+y\right)=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=1 \\ 5x^2y^2-4xy.y^2+3y^4-2\left(xy+y^2\right)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 3y\left(x^2+y^2\right)+2x^2y-4xy^2-2\left(x+y\right)=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=1\\3y^4-6y^2+3=0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2=2\\6y+2x^2y-4xy^2-2(x+y)=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2=2\\(1-xy)(2y-x)=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}\end{array}\right. \vee \begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\\y=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\end{cases} \vee \begin{cases}x=-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\\y=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=(-1;-1);(1;1);\left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right);\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right).$$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2=(5x+4)(4-x)\\y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0\end{cases}$.

Lời giải

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$y^2-(4x+8)y-5x^2+16x+16=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là y ta được

$$\Delta_y=(4x+8)^2-4\left(-5x^2+16x+16\right)=36x^2.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{4x+8+6x}{2}=5x+4\\y=\dfrac{4x+8-6x}{2}=4-x\end{array}\right.$.

TH1: Với $y=5x+4$, thay vào phương trình đầu của hệ ta được

$$x(5x+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4\\x=-\dfrac{4}{5}\Rightarrow y=0\end{array}\right..$$

TH2: Với $y=4-x$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$x(4-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \\ x=4 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=(0;4),(4;0),\left(-\frac{4}{5};0\right)$.

Nhận xét: Đây là dạng hệ phương trình bậc hai hai ẩn đã được bàn tới ta hoàn toàn xử lý bằng phương pháp đã trình bày trong chủ đề trước.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-4y^3=6x^2y-9xy^2 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+y \ge 0 \\ x-y \ge 0 \end{cases}$.

Nhận xét: Hệ có phương trình đầu là phương trình đẳng cấp nên ta xử lý phương trình này trước tiên.

$$x^3-4y^3=6x^2y-9xy^2 \Leftrightarrow (x-4y)\left(x^2-2xy+y^2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-4y)(x-y)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4y \\ x=y \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $x=y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$\sqrt{2x}=2 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2$.

TH2: Nếu $x=4y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$\sqrt{3y}+\sqrt{5y}=2 \Leftrightarrow y=8-2\sqrt{15} \Rightarrow x=32-8\sqrt{15}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;2);\left(32-8\sqrt{15};8-2\sqrt{15}\right)$.

Bài 4. (TSĐH Khối D 2008) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2(x-y) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 1, y \ge 0$.

Nhận xét: Rõ ràng phương trình thứ hai chứa căn có dạng phức tạp ta không xử lý được gì nên tập trung nghiên cứu phương trình đầu của hệ có dạng bậc hai.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(x+y\right)^2-\left(x+y\right)-3y^2-3xy=0 \Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x-2y-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=2y+1 \end{array}\right..$$

Do $x \geq 1, y \geq 0$ nên $x=-y$ vô lý.

Vậy $x=2y+1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(2y+1\right)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=2y+2 \Leftrightarrow \left(y+1\right)\left(\sqrt{2y}-2\right)=0 \Leftrightarrow y=2 \text{ (do } y \geq 0\text{)}.$$

Suy ra $\left(x;y\right)=\left(5;2\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài 5. (TSĐH Khối B 2013) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} \end{cases}, \left(x, y \in \mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $2x+y \geq 0, x+4y \geq 0$.

Thực hiện tương tự các bài toán trên ta viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng: $\left(y-x-1\right)\left(y-2x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=2x+1 \end{array}\right.$.

+ <u>TH1</u>: Nếu $y=x+1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}.$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(3+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=1 \\ x=1, y=2 \end{array}\right..$$

+ <u>TH2:</u> Nếu $y=2x+1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3-3x=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}.$$

$$\Leftrightarrow 3x+\left(\sqrt{4x+1}-1\right)+\left(\sqrt{9x+4}-2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x\left(3+\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1}+\frac{9}{\sqrt{9x+4}+2}\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(1;2\right)$.

Nhận xét: Như vậy mấu chốt của bài toán là đưa về giải một phương trình vô tỷ bằng phép nhân liên hợp. Các năm gần đây Bộ giáo dục vào đào tạo rất hay đưa bài toán giải hệ phương trình về một bài toán giải phương trình vô tỷ bằng cách nhân liên hợp. Để chi tiết thêm về phương pháp bạn đọc tham khảo Cuốn " *Những điều cần biết LTĐH Kỹ thuật giải nhanh Phương trình, bất phương trình vô tỷ*" cùng tác giả.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)^3 + xy + \dfrac{3}{2} = y^3 \\ (xy+2)^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2y + \dfrac{4}{x} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$(xy+2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2.\frac{xy+2}{x} \Leftrightarrow \left(xy+2-\frac{1}{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow xy+2-\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$$

Thay $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)^3 + x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) + \frac{3}{x} = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)^3.$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)\left(3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x + 6\right) = 0 \xleftrightarrow{x \neq 0} x = 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}.$$

Do $3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x + 6 > 0, \forall x$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(2; -\dfrac{3}{4}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2x + (xy-1)^2 = 2x^2y \\ x^3y^3 + 3xy^2 - 7y^3 = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ hai nhất của hệ tương đương với:

$$x^2 + 2x + x^2y^2 - 2xy + 1 - 2x^2y = 0 \Leftrightarrow (xy-x)^2 - 2(xy-x) + 1 = 0.$$

$\Leftrightarrow (xy-x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow xy - x - 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{x}$ (do $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình).

Thay $y=\dfrac{x+1}{x}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(x+1\right)^3+3x\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-7\left(\frac{x+1}{x}\right)^3=1\Leftrightarrow x^3\left(x+1\right)^3+3x^2\left(x+1\right)^2-7\left(x+1\right)^3=x^3$$

$$\Leftrightarrow\left(x\left(x+1\right)+1\right)^3=8\left(x+1\right)^3\Leftrightarrow x^2+x+1=2\left(x+1\right).$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y}=16\\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y\neq 0,y\neq 0,\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}\geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\frac{x^2}{8y}+\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{x^3}{3y}+\frac{x^2}{4}}\Leftrightarrow\frac{x^2}{8y}+\frac{4x+3y}{6}=\sqrt{\frac{x^2}{3y}\left(x+\frac{3y}{4}\right)}=2\sqrt{\frac{x^2}{8y}.\frac{4x+6y}{8}}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^2}{8y}+\frac{4x+3y}{6}\right)^2=4\frac{x^2}{8y}.\frac{4x+6y}{8}\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{8y}-\frac{4x+3y}{6}\right)^2=0.$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{8y}=\frac{4x+3y}{6}\Leftrightarrow 3x^2=2y\left(4x+3y\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6y\\ 3x=-2y\end{array}\right..$$

<u>**TH1:**</u> Nếu $x=6y$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$36y^2+y^2+\frac{48y^2}{7y}=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\frac{28}{37}\\ y=\frac{4}{7}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{168}{37},y=-\frac{28}{37}\\ x=\frac{24}{7},y=\frac{4}{7}\end{array}\right..$$

TH2: Nếu $3x=-2y$ thay vào phương trình đầu của hệ suy ra:

$(x;y)=(-8;12);\left(\frac{8}{13};-\frac{12}{13}\right)$.

Đối chiếu lại điều kiện chỉ nhận hai nghiệm $(x;y)=(-8;12);\left(\frac{24}{7};\frac{4}{7}\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-8;12);\left(\frac{24}{7};\frac{4}{7}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-5}+\sqrt{2y-4}=x-y+1\\ 8\sqrt{y(x-2)}+4-8y=(y-x)^2\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 5, y\ge 2$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$8\sqrt{xy-2y}+4-8y=x^2-2xy+y^2 \Leftrightarrow 4(xy-2y)+8\sqrt{xy-2}+4=(x+y)^2.$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{xy-2y}+2\right)^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy-2y}+2=x+y$$

(do $2\sqrt{xy-2y}+2>0, x+y>0$).

Vì vậy hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}2\sqrt{xy-2y}+2=x+y\\ \sqrt{x-5}+\sqrt{2y-4}=x-y+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2-2\sqrt{y(x-2)}+y=0\\ \sqrt{x-5}+\sqrt{2y-4}=x-y+1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{y}\right)^2=0\\ \sqrt{x-5}+\sqrt{2y-4}=x-y+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-2}=\sqrt{y}\\ \sqrt{x-5}+\sqrt{2y-4}=x-y+1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=x-2\\ \sqrt{x-5}+\sqrt{2y-4}=x-y+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x-2\\ \sqrt{x-5}+\sqrt{2x-8}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ y=4\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(6;4)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3y^2+1+2(x+1)y=4y\sqrt{x^2+2y+1}\\ y(y-x)=3-3x\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+2y+1\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$4y^2-4y\sqrt{x^2+2y+1}+x^2+2y+1=x^2-2xy+y^2.$$

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{x^2+2y+1}\right)^2=\left(x-y\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2y-\sqrt{x^2+2y+1}=x-y\\2y-\sqrt{x^2+2y+1}=y-x\end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $2y-\sqrt{x^2+2y+1}=x-y$ kết hợp với phương trình thứ hai ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}3y-x=\sqrt{x^2+2y+1}\\y\left(y-x\right)=3-3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y-x\ge 0\\9y^2-6xy-2y-1=0\\y^2-xy+3x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y-x\ge 0\\9y^2-6xy-2y-1=0\\3y^2-2y-18x+17=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y-x\ge 0\\9y^2-y.\dfrac{3y^2-2y+17}{3}-2y-1=0\\x=\dfrac{3y^2-2y+17}{18}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{62+4\sqrt{178}}{9}\\y=\dfrac{13+\sqrt{178}}{3}\end{cases}\end{array}\right..$$

<u>TH2:</u> Nếu $2y-\sqrt{x^2+2y+1}=y-x$ kết hợp với phương trình thứ hai ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=\sqrt{x^2+2y+1}\\y\left(y-x\right)=3-3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\ge 0\\y^2+2xy-2y-1=0\\y^2-xy+3x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=1\\x=\dfrac{2}{3},y=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(\frac{62+4\sqrt{178}}{9};\frac{13+\sqrt{178}}{3}\right);\left(\frac{2}{3};\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right).$$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+y+1\right)\sqrt{x-y}+2y+2=0\\\left(x^2+2\right)\left(x-y-3\right)=y^2+2\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$

<u>Phân tích tìm lời giải:</u> Ta sẽ phân tích phương trình đầu của hệ suy nghĩ tự nhiên nhất là đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x-y}\\b=x+y\end{cases},\left(a\ge 0\right)\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a^2+b}{2}\\y=\dfrac{b-a^2}{2}\end{cases}.$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$\left(b+1\right)a+b-a^2+2=0\Leftrightarrow a^2-\left(b+1\right)a-b-2=0\ (1)\quad .$$

Ta có (1) là phương trình bậc 2 của a có $\Delta_a=\left(b+1\right)^2+4\left(b+2\right)=\left(b+3\right)^2$.

Suy ra $a=\dfrac{b+1-\left(b+3\right)}{2}=-1$ hoặc $a=\dfrac{b+1+b+3}{2}=b+2$.

Do vậy viết lại phương trình thứ nhất dưới dạng:

$$\left(a+1\right)\left(a-b-2\right)=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-y}+1\right)\left(\sqrt{x-y}-x-y-2\right)=0.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x+y+2-\sqrt{x-y}\right)\left(\sqrt{x-y}+1\right)=0\\ \left(x^2+2\right)\left(x-y-3\right)=y^2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+2=\sqrt{x-y}\\ \left(x^2+2\right)\left(x-y-3\right)=y^2+2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=\left(x-y\right)\left(\sqrt{x-y}-2\right)\\ \left(x^2+2\right)\left(x-y-3\right)=y^2+2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=x^2-\sqrt{\left(x-y\right)^3}+2\left(x-y\right)\\ \left(x^2+2\right)\left(x-y-3\right)=x^2+2-\sqrt{\left(x-y\right)^3}+2\left(x-y\right)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=x^2-\sqrt{\left(x-y\right)^3}+2\left(x-y\right)\\ x^2\left(x-y-4\right)+\sqrt{\left(x-y\right)^3}-8=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=x^2-\sqrt{\left(x-y\right)^3}+2\left(x-y\right)\\ \left(x-y-4\right)\left(x^2+\dfrac{x-y+2\sqrt{x-y}+4}{\sqrt{x-y}+2}\right)=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=4\\ x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;-1\right)$.

<u>Nhận xét</u>. Cách khác xem chủ đề Kỹ thuật đặt ẩn phụ dạng tổng hiệu.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. (TSĐH Khối D 2012) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}.$$

Lời giải

Bài toán này đã được nhắc đến trong chủ đề phương pháp thế. Tinh ý ta phân tích được phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$\left(x^2 - y\right)\left(2x - y + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right..$$

Xét từng trường hợp kết hợp với phương trình đầu của hệ tìm được các nghiệm:

$$\left(x;y\right) = \left(1;1\right);\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2};-\sqrt{5}\right);\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right).$$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = \left(x+8\right)\left(x^2+2\right) \\ y^2 - \left(8+4x\right)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0 \end{cases}.$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y^2 = \left(x+8\right)\left(x^2+2\right) \\ \left(y - 5x - 4\right)\left(y + x - 4\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 = \left(x+8\right)\left(x^2+2\right) \\ y = 4 - x \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = \left(x+8\right)\left(x^2+2\right) \\ y = 5x + 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 4 \\ x = -2, y = 6 \\ x = -5, y = 9 \\ x = 19, y = 99 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm $\left(x;y\right) = \left(0;4\right);\left(-2;6\right);\left(-5;9\right);\left(19;99\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x = y^2 - y - 2 \\ \left(x+y\right)\sqrt{x^2 - 4x + 5} = \left(2-x\right)\sqrt{\left(x+y\right)^2 + 1} \end{cases}.$

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x^2 - 3x + 2 = y^2 - y \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 2 - x \end{array}\right..$$

Xét từng trường hợp và thay vào phương trình thứ hai của hệ tìm được các nghiệm: $(x;y)=(0;2);(1;0)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0);(2;0)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+2y+3}+2y-3=0\\ 2(x^3+2y^3)+3y(x+1)^2+6x^2+6x+2=0\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+2y+3\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$2x^3+6x^2+6x+2+4y^3+3y(x+1)^2=0.$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^3+3y(x+1)^2+4y^3=0 \Leftrightarrow (x+1+2y)\left(2(x+1)^2-y(x+1)+2y^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2y=-x-1\\ 2(x+1)^2-y(x+1)+2y^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2y=-x-1\\ \begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}\end{array}\right. .$$

<u>TH1:</u> Nếu $(x;y)=(-1;0)$ thử lại thấy không thỏa mãn.

<u>TH2:</u> Nếu $2y=-x-1$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2-x+2}=x+4 \Leftrightarrow x=-\frac{14}{9} \Rightarrow y=\frac{5}{8}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-\frac{14}{9};\frac{5}{8}\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+2x^2y-3xy^2+xy+x-2y=2y^2(5y+1)\\ (x^2+17y+12)^2=4(x+y+7)(x^2+3x+8y+5)\end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$(x-2y)(x^2+4xy+5y^2+y+1)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)\left((x+2y)^2+y^2+y+1\right)=0 \Leftrightarrow x=2y.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(4y^2+17y+12\right)^2=4\left(3y+7\right)\left(4y^2+14y+5\right)\Leftrightarrow\left(4y^2+11y-2\right)^2=0.$$

$$\Leftrightarrow 4y^2+11y-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{11+3\sqrt{17}}{8} \\ y=\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{8}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{11+3\sqrt{17}}{4},y=-\dfrac{11+3\sqrt{17}}{8} \\ x=\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{4},y=\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{8}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{11+3\sqrt{17}}{4};-\frac{11+3\sqrt{17}}{8}\right);\left(\frac{-11+3\sqrt{17}}{4};\frac{-11+3\sqrt{17}}{8}\right).$$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2+9\right)\left(x^2+9y\right)=22\left(y-1\right)^2 \\ x^2-2=4y\sqrt{y+1}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y\geq-1$.

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại dưới dạng:

$$\left(x^2+9\right)\left(x^2+9+9\left(y-1\right)\right)=22\left(y-1\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+9\right)^2+9\left(y-1\right)\left(x^2+9\right)-22\left(y-1\right)^2=0\ (1).$$

Coi (1) là phương trình bậc hai với ẩn là x^2+9 và tham số là y, ta được:

$$\Delta_{x^2+9}=81\left(y-1\right)^2+4.22\left(y-1\right)^2=169\left(y-1\right)^2.$$

Suy ra $x^2=2y-11$ hoặc $x^2=-11y+2$.

<u>TH1:</u> Nếu $x^2=2y-11$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

$2y-13=4y\sqrt{y+1}$.

Phương trình này vô nghiệm vì để phương trình có nghiệm ta có

$$2y-13\geq0\Rightarrow y\geq\frac{13}{2}\Rightarrow 4y\sqrt{y+1}>2y>2y-13.$$

<u>TH2:</u> Nếu $x^2=-11y+2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$-11y=4y\sqrt{y+1}\Leftrightarrow y=0\Rightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\pm\sqrt{2};0\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2 \\ 4x^2+y^2=5(2x-y)\sqrt{xy} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \ge 0$.

Rõ ràng hệ này có một phương trình bậc nhất nên ta có thể xử lý bằng phép thế. Tuy nhiên nếu để ý phương trình thứ hai:

$$4x^2+y^2=5(2x-y)\sqrt{xy} \Leftrightarrow (2x-y)^2-5(2y-y)\sqrt{xy}+4xy=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-y-\sqrt{xy}\right)\left(2x-y-4\sqrt{xy}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-y-\sqrt{xy}=0 \\ 2x-y-4\sqrt{xy}=0 \end{array}\right..$$

Tới đây thực hiện xét trường hợp và thế từ phương trình đầu vào hai phương trình trên dễ dàng tìm được nghiệm $(x;y)=(1;1);\left(\frac{25+8\sqrt{6}}{25};\frac{28-8\sqrt{6}}{25}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)\left(x^2+xy+y^2+3\right)=3\left(x^2+y^2\right)+2 \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge -2, y \le \frac{16}{3}$.

Phương trình đầu của hệ viết lại dưới dạng:

$$x^3-y^3+3(x-y)=3x^2+3y^2+2 \Leftrightarrow (x-1)^3=(y+1)^3 \Leftrightarrow x=y+2.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4\sqrt{y+4}+\sqrt{16-3y}=(y+2)^2+8.$$

Để giải phương trình vô tỷ trên ta dùng kỹ thuật nhân liên hợp tìm được nghiệm $y=0, y=-3$.

Hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;0);(-1;-3)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3y^2+1+2(x+1)y=4y\sqrt{x^2+2y+1} \\ y(y-x)=3-3y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+2y+1 \ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$4y^2-4y\sqrt{x^2+2y+1}+x^2+2y+1=x^2-2xy+y^2.$$

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{x^2+2y+1}\right)^2=(x-y)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2y-\sqrt{x^2+2y+1}=x-y\\2y-\sqrt{x^2+2y+1}=y-x\end{array}\right..$$

Xét trường hợp và kết hợp với phương trình thứ hai của hệ tìm được $(x;y)=(1;1);\left(\frac{415}{51};\frac{17}{3}\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);\left(\frac{415}{51};\frac{17}{3}\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+x=3\\x^2-4y^2+\dfrac{2xy}{x+y-1}=-1\end{cases}$.

Điều kiện: $x+y-1\neq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$(x+y-1)\left(x^2-4y^2\right)+x+y+2xy+1=0.$$

$$\Leftrightarrow(x+2y-1)\left(x^2-xy-2y^2+y+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2y-1=0\\x^2-xy-2y^2+y+1=0\end{array}\right..$$

Xét trường hợp tìm được các nghiệm của hệ phương trình là

$(x;y)=(1;1);(1;-1);(-2;-1);\left(-\frac{11}{10};\frac{17}{10}\right)$; $\left(-\frac{1+2\sqrt{14}}{5};\frac{3+\sqrt{14}}{5}\right)$;

$\left(\frac{-1+2\sqrt{14}}{5};\frac{3-\sqrt{14}}{5}\right)$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{y+3}=x^2-x-y-3\\12\dfrac{y}{x}=x+3-2\sqrt{4y-x}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq 0,y\geq -3,4y-x\geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y+3+\sqrt{y+3}=x^2-x \\ 3(4y-x)=x^2-2x\sqrt{4y-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{y+3}+\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ \left(\sqrt{4y-x}+x\right)\left(\sqrt{4y-x}-x\right)=0 \end{cases}.$$

Bạn đọc tự chia trường hợp và giải tiếp tìm được:

$$(x;y)=(3;1);\left(\frac{1-\sqrt{145}}{6};\frac{19-\sqrt{145}}{18}\right).$$

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(x+y)\left(x^2+y^2\right)+2xy=x+y.$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left((x+y)^2-2xy\right)+2xy-x-y=0.$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x+y-1)(x+y+1)-2xy(x+y-1)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left(x^2+y^2+x+y\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ x^2+y^2+x+y=0 \end{array}\right..$$

Vì $x+y>0 \Rightarrow x^2+y^2+x+y>0$ do đó $x+y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0);(-2;3)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^3-y^2 \end{cases}$.

Lời giải

Thực hiện tương tự bài trên đưa về giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=1\\x^3-y^2=\sqrt{x+y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\x^3-(1-x)^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\(x-1)(x^2+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;0)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2-\sqrt{x^2y^4+2xy^2-y^4+1}=2\left(3-\sqrt{2}-x\right)y^2\\\sqrt{x-y^2}+x=3\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x-y^2\ge 0, x^2y^4+2xy^2-y^4+1\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$\sqrt{\left(xy^2+1\right)^2-y^4}=2\left(1+xy^2-\left(3-\sqrt{2}\right)y^2\right).$$

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình nên chia hai vế phương trình trên cho y^2 và đặt $t=\dfrac{xy^2+1}{y^2}$ ta được:

$$\sqrt{t^2-1}=2t-2\left(3-\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 3-\sqrt{2}\\t^2-1=4t^2-8t\left(3-\sqrt{2}\right)+4\left(3-\sqrt{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow t=3.$$

Vậy hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\dfrac{xy^2+1}{y^2}=3\\\sqrt{x-y^2}+x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=\dfrac{1}{3-x}\\\sqrt{x-\dfrac{1}{3-x}}=3-x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=\pm 1\end{cases}\\\begin{cases}x=4-\sqrt{2}\\y=\pm\sqrt{\sqrt{2}+1}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là

$(x;y)=(2;-1);(2;1);\left(4-\sqrt{2};-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right);\left(4-\sqrt{2};\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-2y^3+3(x-2y)=3xy(x-y)\\2x^3=\left(1+4y-3x^2\right)\sqrt{2x+1}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{2}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x-2y)\left(x^2-xy+y^2\right)+3(x-2y)=0\\ 2x^3=\left(1+4y-3x^2\right)\sqrt{2x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2y)\left(x^2-xy+y^2+3\right)=0\\ 2x^3=\left(1+4y-3x^2\right)\sqrt{2x+1}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\ 2x^3=\left(1+2x-3x^2\right)\sqrt{2x+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\ 2x^3+3x^2\sqrt{2x+1}-\left(\sqrt{2x+1}\right)^3=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\ \left(x+\sqrt{2x+1}\right)^2\left(2x+\sqrt{2x+1}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\ \left[\begin{array}{l}x+\sqrt{2x+1}=0\\ 2x+\sqrt{2x+1}=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{2},y=2-2\sqrt{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4},y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(1-\sqrt{2};2-2\sqrt{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x^2y+4y^3=4(x-2y)^2\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-2y}=3\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y\ge 0,x-2y\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x+y)\left(x^2-4xy+4y^2\right)=(x-2y)^2\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-2y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2y\\ x+y=1\end{array}\right.\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-2y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6\\ y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(6;3);(2;-1)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^4-2xy^2+7y^2=-x^2+7x+8\\ \sqrt{3y^2+13}=\sqrt{15-2x}+\sqrt{x+1}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-1 \le x \le \dfrac{15}{2}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(y^2-x\right)^2+7\left(y^2-x\right)-8=0 \\ \sqrt{3y^2+13}=\sqrt{15-2x}+\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y^2-x-1\right)\left(y^2-x+8\right)=0 \\ \sqrt{3y^2+13}=\sqrt{15-2x}+\sqrt{x+1} \end{cases}.$$

Xét trường hợp và tìm được nghiệm của hệ là $\left(x;y\right)=\left(3;-2\right);\left(3;2\right)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{xy-y}+x+y=5 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy-y \ge 0, y \le 1, x \le 5$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2\sqrt{xy-y}=5-x-y \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \le 5 \\ 4\left(xy-y\right)=25-10\left(x+y\right)+x^2+y^2+2xy \\ 6-x-y+2\sqrt{5-x-5y+xy}=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \le 5 \\ x^2+y^2-2xy-10x-6y+25=0 \\ 2\sqrt{5-x-5y+xy}=x+y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2-2xy-10x-6y+25=0 \\ 2\sqrt{5-x-5y+xy}=x+y-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(5;0\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 1, y \ge \dfrac{1}{2}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x-y-\left(y+\sqrt{xy}\right)=0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)=0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ \sqrt{4y-1}-\sqrt{2y-1}=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ \sqrt{4y-1}=1+\sqrt{2y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ 4y-1=2y+2\sqrt{2y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=10 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(2;\dfrac{1}{2}\right);\left(10;\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ \left(x+y-1\right)\sqrt{y-1}=\left(y-2\right)\sqrt{x+y} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y\ge 0, y\ge 1$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ \left(x+y\right)\sqrt{y-1}-\sqrt{y-1}-\left(y-1\right)\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y}=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ \left(\sqrt{x+y}\sqrt{y-1}+1\right)\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{y-1}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ \sqrt{x+y}=\sqrt{y-1} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=-1 \\ x=1, y=1 \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2+6y=\dfrac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y\ne 0, x-2y\ge 0, x+\sqrt{x-2y}\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x-2y-y\sqrt{x-2y}-6y^2=0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x-2y}-3y\right)\left(\sqrt{x-2y}+2y\right)=0 \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 \end{cases}.$$

Xét trường hợp và tìm ra nghiệm của hệ là $\left(x;y\right)=\left(12;-2\right);\left(\frac{8}{3};\frac{4}{9}\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{x^2-y^2}+1 \\ \left(x^2+y^2\right)^2=1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y\ge 0, x-y\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x+y}-1\right)\left(\sqrt{x-y}-1\right)=0 \\ \left(x^2+y^2\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=1 \end{array}\right. \\ \left(x^2+y^2\right)^2=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=1 \\ \left(\left(x+y\right)^2-2xy\right)^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=1 \\ \left(\left(x-y\right)^2+2xy\right)^2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=1 \\ 4x^2y^2-4xy=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=1 \\ 4x^2y^2+4xy=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=1 \\ x=1, y=0 \\ x=0, y=-1 \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện nhận hai nghiệm $\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(1;0\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(1;0\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y} \\ x^3=2y-1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y\left(x^2-1\right)=x\left(y^2-1\right) \\ x^3=2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-y\right)\left(xy+1\right)=0 \\ x^3=2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=-1 \end{array}\right. \\ x^3=2y-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\ x^3-2x+1=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=-\dfrac{1}{x}\\ x^4+x+2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ (x-1)(x^2+x-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(1;1);\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2};-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x^2+x+3y=xy+3\\ 2y^2-9x^2-3xy=y-3x\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x-3)(x^2-y+1)=0\\ (y-3x)(3x+2y-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\ x^2-y+1=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}y=3x\\ 3x+2y-1=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\ y=3x\end{cases}\\ \begin{cases}x=3\\ 3x+2y-1=0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-y+1=0\\ y=3x\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-y+1=0\\ 3x+2y-1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,y=-4\\ x=3,y=9\\ x=-1,y=2\\ x=-\dfrac{1}{2},y=\dfrac{5}{4}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=(3;-4);(3;9);(-1;2);\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right).$$

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2}\\ (x+y)(x+2y)+3x+2y=4\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{2}, y \ge -\frac{1}{2}$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$x^2 + 3(y+1)x + 2y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 - x \\ y = -\dfrac{x+4}{2} \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y = 1 - x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3+4x-4x^2} = \left(\frac{4x^2-4x+1}{4}\right)^2.$$

Đặt $u = \sqrt{3+4x-4x^2}$ đưa về phương trình bậc bốn với ẩn là u cuối cùng tìm được hai nghiệm của phương trình là:

$$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2} \Rightarrow (x;y) = \left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

<u>TH2:</u> Nếu $y = -\frac{x+4}{2} \ge -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \le -3$ vô lý do $x \ge -\frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = \left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x-3} = (2y^2+11)(17-y) + \sqrt{y} \\ y(y-3x+3) = 5(3x+2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge \frac{3}{5}, y \ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$(y+5)(y-3x-2) = 0 \xleftrightarrow{y \ge 0} y = 3x+2.$$

Thay $x = \frac{y-2}{3}$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\sqrt{4.\frac{y-2}{3} - 3} = (2y^2+11)(17-y) + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4y-17}{3}} - \sqrt{y} = (2y^2+11)(17-y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-17}{\sqrt{\frac{4y-17}{3}}+\sqrt{y}} = \left(2y^2+11\right)\left(17-y\right) \Leftrightarrow \left(y-17\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4y-17}{3}}+\sqrt{y}}+2y^2+11\right)=0$$

$\Leftrightarrow y = 17 \Rightarrow x = 5$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất . $\left(x;y\right) = \left(5;17\right)$.

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 = \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2-y^3+3y-2\right) \\ x^2+\left(y+1\right)^2 = 2\left(1+\dfrac{1-x^2}{y}\right) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y \neq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\left(y+2\right)\left(x^2+y^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right.$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=-2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$4x^2 = x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Suy ra $\left(x;y\right) = \left(0;-2\right);\left(-2\sqrt{2};-2\right);\left(2\sqrt{2};-2\right)$.

<u>TH2:</u> Nếu $x^2+y^2=1 \Rightarrow -1 \le x,y \le 1$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$4\sqrt{x^2+1}-x^2+y^3-3y-2=0.$$

Ta có: $4\sqrt{x^2+1}-x^2 = \dfrac{4x^2+4-x^4}{4\sqrt{x^2+1}+x^2} = \dfrac{4+x^2\left(4-x^2\right)}{4\sqrt{x^2+1}+x^2} \ge 4, \forall x \in \left[-1;1\right]$.

Mặt khác: $y^3-3y-2+4 = y^3-3y+2 = \left(y-1\right)^2\left(y+2\right) \ge 0, \forall y \in \left[-1;1\right]$.

Suy ra $4\sqrt{x^2+1}-x^2+y^3-3y-2 \ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=0, y=1$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(0;-2\right);\left(0;1\right);\left(-2\sqrt{2};-2\right);\left(2\sqrt{2};-2\right).$$

Bài 28. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^5+(7-4y)x^3+(4-y)x^4+(4-9y)x^2+\left(4y^2-6y+2\right)x-2y^3+2y^2-2y=0 \\ 4\sqrt{x+y^2+1}=1+5x-2y^3+4y^2-x^4 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x+y^2+1\ge 0$.

Nhận xét. Việc phương trình đầu của hệ rất cồng kềnh có dụng ý của tác giả nên suy nghĩ ngay đến việc rút được y theo x và ngược lại.

Viết lại phương trình thứ nhất của hệ phương trình dưới dạng:

$$(x-y)\left((x+1)^4+x^2+y^2+(y-1)^2\right)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4\sqrt{x^2+x+1}=1+5x-2x^3+4x^2-x^4$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x\right)\left(x^2+x-5\right)+4\sqrt{x^2+x+1}-1=0.$$

Đặt $u=\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ khi đó phương trình trở thành:

$$\left(u^2-1\right)\left(u^2-6\right)+4u-1=0 \Leftrightarrow \left(u^2-u-1\right)\left(u^2+u-5\right)=0$$

$$\xleftrightarrow{u\ge\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ u=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x^2+x+1}=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2} \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{-1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}\right);\left(\frac{-1\pm\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2};\frac{-1\pm\sqrt{19-2\sqrt{21}}}{2}\right)$$

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy^3-3y^2-4xy+\dfrac{43}{27}=0 \\ 6x^3y+3xy^3+5xy=6x^2y^2+2x^2+y^2+1 \end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng:

$$(3xy-1)\left(2x^2+y^2+xy+1\right)=0 \Leftrightarrow xy=\frac{1}{3}.$$

Vì $2x^2+y^2+xy+1=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+x^2+\dfrac{3y^2}{4}+1>0, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Thay $xy=\dfrac{1}{3}$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$2xy.y^2-3y^2-4xy+\frac{43}{27}=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}y^2-3y^2-\frac{4}{3}+\frac{43}{27}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=-\dfrac{1}{3} \\ x=1, y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là: $(x;y)=\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right);\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (xy+1)^3+x(y-1)=x^3-1 \\ x^3-4xy-4=0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (xy+1)^3+xy+1=x^3+x \\ x^3-4xy-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+1=x \\ x^3-4xy-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, y=\dfrac{3}{2} \\ x=2, y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-2;\dfrac{3}{2}\right);\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-x-y+2=\sqrt{2x+2y+3}+\sqrt{4x+2y+6} \\ x^2-y^2+x-3y=2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $2x+2y+3\ge 0, 4x+2y+6\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng:

$$(x+y+2)(x-y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ x+y=-2 \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$2x^2-2x+3=\sqrt{4x+1}+\sqrt{6x+4}$.

$\Leftrightarrow 2x^2-4x=\sqrt{4x+1}-(x+1)+\left(\sqrt{6x+4}-(x+2)\right)$.

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}+x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{6x+4}+x+2}\right)=0$.

$\Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=-1 \\ x=2, y=1 \end{array}\right..$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;-1);(2;1)$.

Bài 32. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x^3+y^3+3xy(x-y)-12x^2+6x-1=0 \\ y^2+7y-17=9x+2(x+6)\sqrt{5-2y} \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $y\le \dfrac{5}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$(2x-1)^3=(x-y)^3 \Leftrightarrow 2x-1=x-y \Leftrightarrow x=1-y.$$

Thay $x=1-y$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$y^2+7y-17=9(1-y)+2(7-y)\sqrt{5-2y}$.

$\Leftrightarrow y^2+16y-26=(14-2y)\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} (14-2y)\left(y^2+16y-26\right)\ge 0 \\ \left(y^2+16y-26\right)^2=(14-2y)^2(5-2y) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (14-2y)\left(y^2+16y-26\right)\ge 0 \\ y^4+40y^3+72y^2-160y-304=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-38 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=2 \\ x=39, y=-38 \end{array}\right..$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;2);(39;-38)$.

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)+2xy=x+y\\ \log_2\sqrt{x+y}=\log_3\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y>0,x^2+y^2>0$.

Phương trình đầu của hệ viết lại dưới dạng:

$$(x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0.$$

<u>TH1:</u> Nếu $x+y=1\Leftrightarrow y=1-x$ thay vo phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\log_3\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2+1}-1=1.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2+1}=2\Leftrightarrow x^2+y^2=3.$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}y=1-x\\ x^2+y^2=3\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\ x^2+(1-x)^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt5}{2},y=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\\ x=\dfrac{1+\sqrt5}{2},y=\dfrac{1-\sqrt5}{2}\end{array}\right..$$

<u>TH2:</u> Nếu $x^2+y^2+x+y=0$ vì do $x^2+y^2>0,x+y>0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{1-\sqrt5}{2};\frac{1+\sqrt5}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt5}{2};\frac{1-\sqrt5}{2}\right).$$

Bài 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+3=2\sqrt{(3y-x)(y+1)}\\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\dfrac{x+5}{2}}=xy-2y-2\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge-5,3y-x\ge0,y\ge\dfrac{2}{3}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$3y-x+2\sqrt{(3y-x)(y+1)}-3(y+1)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3y-x}-\sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{3y-x}+3\sqrt{y+1}\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{3y-x}=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow x=2y-1$$

Thay $x=2y-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{3y-2}-\sqrt{y+2}=2y^2-3y-2.$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(y-2\right)}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}=\left(y-2\right)\left(2y+1\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(y-2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}-2y-1\right)=0\Leftrightarrow y=2\Rightarrow x=1.$$

Do $\dfrac{2}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{y+2}}-2y-1\le\dfrac{2}{\sqrt{2+\frac{2}{3}}}-2.\dfrac{2}{3}-1<0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;2\right)$.

Bài 35. Tìm nghiệm hữu tỷ của hệ phương trình

$$\begin{cases}3\sqrt{17x^2-y^2-6x+4}+x=6\sqrt{2x^2+x+y}-3y+2\\ \sqrt{3x^2+xy+1}=\sqrt{x+1}\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}17x^2-y^2-6x+y\ge 0\\ 2x^2+x+y\ge 0\\ 3x^2+xy+1\ge 0\\ x+1\ge 0\end{cases}$

Bình phương hai vế phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3x^2+xy+1=x+1\Leftrightarrow x\left(3x+y-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 3x+y-1=0\end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $x=0$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3\sqrt{4-y^2}+3y-6\sqrt{y}-2=0.$$

Để giải phương trình này ta đặt $t=\sqrt{y},\left(t\ge 0\right)$ phương trình trở thành:

$$3\sqrt{4-t^4}+3t^2-6t-2=0\Leftrightarrow 3\sqrt{4-t^4}=-3t^2+6t+2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3t^2+6t+2\ge 0 \\ 9\left(4-t^4\right)=\left(-3t^2+6t+2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t^2+6t+2\ge 0 \\ 18t^4-36t^3+24t^2+24t-32=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3t^2+6t+2\ge 0 \\ 18t^4-36t^3+24t^2+24t-32=0 \end{cases}$$ (phương trình này không có nghiệm hữu tỷ).

<u>TH2:</u> Nếu $3x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-3x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được: $3\sqrt{8x^2+3}-8x-6\sqrt{2x^2-2x+1}+1=0$.

Để giải phương trình này ta đặt hai ẩn phụ:

$\begin{cases} u=\sqrt{8x^2+3} \\ v=\sqrt{2x^2-2x+1} \end{cases} \Rightarrow u^2-4v^2=8x-1$ thay vào phương trình ta được:

$$u^2-4v^2=3u-6v \Leftrightarrow \left(u-2v\right)\left(u+2v-3\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{8x^2+3}-3\right)\left(\sqrt{8x^2+3}-2\sqrt{2x^2-2x+1}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8x^2+3}-2\sqrt{2x^2-2x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{8x^2+3}=2\sqrt{2x^2-2x+1}.$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+3=4\left(2x^2-2x+1\right) \Leftrightarrow x=\frac{1}{8} \Rightarrow y=\frac{5}{8}.$$

Vì $2\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{8x^2+3}-3=2\sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\sqrt{8x^2+3}-3$.

$$\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{3}-3=\sqrt{2}+\sqrt{3}-3>0$$

Vậy nghiệm duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{8};\frac{5}{8}\right)$.

Bài 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+\left(2-y\right)x^2+\left(2-3y\right)x=5\left(y+1\right) \\ 3\sqrt{y+1}=3x^2-14x+14 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y\ge -1$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$\left(x-y-1\right)\left(x^2+3x+5\right)=0 \Leftrightarrow x=y+1.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3\sqrt{y+1}=3\left(y+1\right)^2-14\left(y+1\right)+14\Leftrightarrow 3\sqrt{y+1}=3y^2-8y+3.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y^2-8y+3\ge 0\\9\left(y+1\right)=\left(3y^2-8y+3\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3y^2-8y+3\ge 0\\9y^4-48y^3+82y^2-57y=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\y=3\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;0\right);\left(4;3\right)$.

Bài 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}=8y^2+8y+1\\4\left(x^3-8y^3\right)-6\left(x^2+4y^2\right)+3\left(x-2y\right)-1=0\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -1$.

Phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng:

$$\left(2x-1\right)^3=\left(4y+1\right)^3\Leftrightarrow 2x-1=4y+1\Leftrightarrow 2y=x-1.$$

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{\frac{x+1}{2}}=2\left(x-1\right)^2+4\left(x-1\right)+1\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x+1}{2}}=2x^2-1.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-1\ge 0\\8x^4-8x^2-x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=0\\x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4},y=-\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;0\right);\left(-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4};-\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}\right)$.

Bài 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-3y+2+2\sqrt{x^2y+2y}=0\\\sqrt{x^2+4x-y+1}+\sqrt[3]{2x-1}=1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y\ge 0,x^2+4x-y+1\ge 0$.

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y>0$ phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$\frac{x^2+2}{y}+2\sqrt{\frac{x^2+2}{y}}-3=0\xleftrightarrow{y>0}\sqrt{\frac{x^2+2}{y}}=1\Leftrightarrow y=x^2+2.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{4x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{9}{4}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$.

Bài 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+xy=\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{2}{\sqrt{xy}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x+y=4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0, y>0$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{\sqrt{xy}}+xy-2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2-2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+xy=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)^2-2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)+xy=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}-\sqrt{xy}\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y}=xy \Leftrightarrow \begin{cases} x>y \\ x+y-2\sqrt{xy}=x^2y^2 \end{cases}.$$

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} x>y \\ x+y-2\sqrt{xy}=x^2y^2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 40. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y+2)^2+\left(x^2+4x+3\right)\left(y^2-1\right)=81 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y-2}=\sqrt{(x+1)(y-1)} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0, y \ge 2$.

Bình phương hai vế phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x + y - 2 + 2\sqrt{x\left(y-2\right)} = \left(x+1\right)\left(y-1\right).$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2\sqrt{xy-2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{xy-2x} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{xy-2x} = 1$$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x} + 2$ (do $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình).

Thay $y = 2 + \dfrac{1}{x}$ vào phương trình đầu của hệ tìm được các nghiệm:

$$\left(x;y\right) = \left(\frac{1}{2};4\right);\left(2;\frac{5}{2}\right).$$

Bài 41. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 4x^2 + y^4 = 4 - 4xy^2 \\ x^2 - 2\left(xy^2 + 8\right) = -y^4 \end{cases}$.

Lờii giải

Phương trình thứ hai của hệ phân tích được thành:

$$\left(y^2 - x - 4\right)\left(y^2 - x + 4\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y^2 + 4 \\ x = y^2 - 4 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $x = y^2 + 4$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$4\left(y^2+4\right)^2 + y^4 = 4 - 4\left(y^2+4\right)y^2$ phương trình vô nghiệm.

<u>TH2:</u> Nếu $x = y^2 - 4$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$4\left(y^2-4\right)^2 + y^4 = 4 - 4\left(y^2-4\right)y^2 \Leftrightarrow 9y^4 - 48y^2 + 60 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 2 \\ y^2 = \dfrac{10}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, y = \pm\sqrt{2} \\ x = -\dfrac{2}{3}, y = \pm\sqrt{\dfrac{10}{3}} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(-2;-\sqrt{2}\right);\left(-2;\sqrt{2}\right);\left(-\frac{2}{3};-\sqrt{\frac{10}{3}}\right);\left(-\frac{2}{3};\sqrt{\frac{10}{3}}\right).$$

Chủ đề 8. KỸ THUẬT ĐẶT ẨN PHỤ DẠNG ĐẠI SỐ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Nội dung chủ đề này đề cập đến phương pháp chung khi đặt ẩn phụ dạng đại số đó là tìm nhân tử chung giữa hai phương trình của hệ(Các bài toán đặt ẩn phụ được còn được nhắc đến trong các chủ đề khác như hệ phương trình có chứ căn thức, đặt ẩn phụ dạng tổng hiệu).

Các dấu hiện đặt ẩn phụ

- Hệ đối xứng loại I.
- Hệ có các nhân tử lặp lại trong hai phương trình của hệ.
- Hệ có tổng và hiệu $x+y$; $x-y$.
- Có chứa căn thức đặt ẩn mới bằng căn thức(các bài toán đặt ẩn phụ đối với hệ chứa căn thức rất hay).
- Một số hệ sau khi đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại I và loại II.

Áp dụng với hệ có số hạng chung xuất hiện ở các phương trình trong hệ.

Thường thì các bài toán biến đổi đơn giản ta đặt ẩn phụ với $\begin{cases} u = x \pm y \\ v = xy \end{cases}$

Ví dụ 1. $\begin{cases} x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 = 4 \\ (x+y)(x^2+xy+y^2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\left((x+y)^2 - 2xy\right) = 4 \\ (x+y)\left((x+y)^2 - xy\right) = 6 \end{cases}$

Ta đặt ẩn phụ như sau: $\begin{cases} u = x+y \\ v = xy \end{cases}$ khi đó được hệ mới: $\begin{cases} u(u^2 - 2v) = 4 \\ u(u^2 - v) = 6 \end{cases}$ đơn giản hơn nhiều.

Đôi khi chia(hoặc nhân) hai vế của phương trình trong hệ với một biểu thức nào đó của biến(thường đơn giản là $x, x^2, x^3; y, y^2, y^3$ *) lúc này sẽ được hệ mới có thể đặt ẩn phụ được.*

Ví dụ 2. $\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$.

Mới đầu nhìn hệ này chưa có gì đặc biệt tuy nhiên, với $x \neq 0$ ta chia hai vế của phương trình đầu cho x và chia hai vế của phương trình thứ hai cho x^2 ta được hệ mới như sau:

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ x^2+\dfrac{y^2}{x^2}+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2+y-5=0 \end{cases}.$$

Đến đây ta đặt $u=x+\dfrac{y}{x};v=y-3$. Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} u+v=0 \\ u^2+v-2=0 \end{cases}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x-1)^2+4(y-1)^2=25 \\ xy(x-1)(y-2)=-6 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} (2x-1)^2+4(y-1)^2=25 \\ (x^2-x)(y^2-2y)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2+4(y-1)^2=25 \\ (4x^2-4x)(y^2-2y)=-24 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2+4(y-1)^2=25 \\ \left((2x-1)^2-1\right)\left((y-1)^2-1\right)=-24 \end{cases}.$$

Đặt $u=(2x-1)^2, v=(y-1)^2, (u,v\ge 0)$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u+4v=25 \\ (u-1)(v-1)=-24 \end{cases} \xleftrightarrow{u,v\ge 0} \begin{cases} u=25 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2=25 \\ (y-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(3;1);(-2;1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình**(TSĐH Khối A 2008)** $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^2+y+xy(x^2+y+1)=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = xy \end{cases}$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u + v(u+1) = -\frac{5}{4} \\ u^2 + v = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{5}{4} - u^2 \\ u + v(u+1) = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{5}{4} - u^2 \\ u^3 + u^2 + \frac{u}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{5}{4} - u^2 \\ u(2u+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0, v = -\frac{5}{4} \\ u = -\frac{1}{2}, v = -\frac{3}{2} \end{array}\right..$$

TH1 : Nếu $\begin{cases} u = 0 \\ v = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \end{cases}.$

TH2 : Nếu $\begin{cases} u = -\frac{1}{2} \\ v = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + x - 3 = 0 \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = \left(1; -\frac{3}{2}\right); \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3y + x^3 + xy + x = 1 \\ 4x^3y^2 + 4x^3 - 8xy - 17x = -8 \end{cases}.$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x^3(y+1) + x(y+1) = 1 \\ 4x(x^2y^2 + x^2 + 2x^2y) - 8x^3y - 8xy - 17x = -8 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy + x)(x^2 + 1) = 1 \\ 4x(xy + x)^2 - 8xy(x^2 + 1) - 17x = -8 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy+x)(x^2+1)=1 \\ 4x(xy+x)^2-8(xy+x)(x^2+1)+8x(x^2+1)-17x=-8 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy+x)(x^2+1)=1 \\ 4x(xy+x)^2+8x(x^2+1)-17x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4(xy+x)^2+8(x^2+1)-17=0 \end{array}\right. \\ (xy+x)(x^2+1)=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(xy+x)^2+8(x^2+1)-17=0 \\ (xy+x)(x^2+1)=1 \end{cases}.$$

Đặt $u=xy+x, v=x^2+1, (v\ge 1)$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} uv=1 \\ 4u^2+8v-17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=1 \\ 4u^2v^2+8v^3-17v^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=1 \\ 8v^3-17v^2+4=0 \end{cases} \xleftrightarrow{v\ge 1} \begin{cases} u=\dfrac{1}{2} \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+x=\dfrac{1}{2} \\ x^2+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-1;-\dfrac{3}{2}\right);\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(3y+55)=64 \\ xy(y^2+3y+3)=12+51x \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\ne 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{4}{x}\right)^3=3y+55 \\ y^3+3y^2+3y=\dfrac{12}{x}+51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{4}{x}\right)^3=3(y+1)+52 \\ (y+1)^3=3.\dfrac{4}{x}+52 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{4}{x} \\ v = y + 1 \end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^3 = 3v + 52 \\ v^3 = 3u + 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - v^3 = 3(v - u) \\ u^3 = 3v + 52 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u - v)\left[u^2 + uv + v^2 + 3\right] = 0 \\ u^3 = 3v + 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^3 = 3u + 52 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u - 4)(u^2 + 4u + 13) = 0 \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{x} = 4 \\ y + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;3)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + xy = 1 \\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4} = 1 + \dfrac{3xy}{2(1-x)^2} \end{cases}$.

Lời giải

__**Cách 1:**__ Điều kiện : $x \neq 1$.

Đặt $u = -\dfrac{3x}{2(1-x)^2}$ khi đó hệ phương trình trở thành :

$\begin{cases} 2x^2 + xy = 1 \\ 2u^2 + uy = 1 \end{cases} \Rightarrow x, u$ là hai nghiệm của phương trình $2t^2 + yt - 1 = 0$.

Theo vi-ét ta có : $xu = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{3x}{2(1-x)^2}.x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 2$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y) = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};2\right);\left(-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};2\right)$.

__**Cách 2:**__ Rút $y = \dfrac{1-2x^2}{x}$ thế vào phương trình thứ hai của hệ.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y(2x+1) = 2x + 9 \\ x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{35}{8} = -2y^3 + 4y \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} y\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=x+\dfrac{1}{2}+4 \\ \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-4=-2y^3+4y \end{cases}$

Đặt $t=x+\dfrac{1}{2}$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} yt=t+4 \\ t^3-t-4=-2y^3+4y \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yt=t+4 \\ t^3+2y^3-(t+4)-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yt=t+4 \\ t^3+2y^3-yt-4y=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yt=t+4 \\ t^3+2y^3-y(t+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yt=t+4 \\ t^3+2y^3-y.yt=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yt=t+4 \\ t^3+2y^3-y^2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yt=t+4 \\ (t-y)^2(t+2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=t \\ yt=t+4 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-2y \\ yt=t+4 \end{cases} \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=t \\ t^2=t+4 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-2y \\ -2y^2=-2y+4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y=t \\ t^2=t+4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} t=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{17}}{2} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{\sqrt{17}}{2};\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{17}}{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right).$$

<u>Nhận xét:</u> Bạn đọc tham khảo một số bài tập tương tự dạng này trong chủ đề Kỹ thuật hệ số bất định.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y^3=2xy^2\\x^3+y^9=2xy^4\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x+y^3=2xy^2\\\left(x+y^3\right)\left(x^2-xy^3+y^6\right)=2xy^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y^3=2xy^2\\2xy^2\left(x^2-xy^3+y^6\right)=2xy^4\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y^3=2xy^2\\2xy^2\left(x^2-xy^3+y^6-y^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y^3=2xy^2\\\left[\begin{array}{l}2xy^2=0\\x^2-xy^3+y^6-y^2=0\end{array}\right.\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2xy^2=0\\x+y^3=2xy^2\end{cases}\\\begin{cases}x+y^3=2xy^2\\x^2-xy^3+y^6-y^2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\\begin{cases}x+y^3=2xy^2\\x^2-xy^3+y^6-y^2=0\end{cases}\end{array}\right..$$

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x+y^3=2xy^2\\x^2-xy^3+y^6-y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y^3=2xy^2\\x^2-xy^3+y^6=y^2\end{cases}$.

Nghiệm $x=0,y=0$ đã xét ở trên ta xét $xy\neq 0$ khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}+y^2=2xy\\\frac{x^2}{y^2}-xy+y^4=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}+y^2=2xy\\\left(\frac{x}{y}+y^2\right)^2-3xy=1\end{cases}.$$

Đặt $u=\frac{x}{y}+y^2,v=xy$ hệ phương trình trở thành:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ u^2 - 3v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ 4v^2 - 3v - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -\dfrac{1}{2} \\ v = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{y} + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{y} + y^2 = -\dfrac{1}{2} \\ xy = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right. \vee \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{4} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{5}}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{4} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{5}}} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Vậy hệ phương trình có năm nghiệm là:

$$(x;y) = (0;0);(-1;-1);(1;1);\left(-\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{4};\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}\right);\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{4};-\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{5}}}\right).$$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y \neq 0$ khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \left(x + \dfrac{1}{y}\right) = 7 \\ \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} = 13 \end{cases}.$$

Đặt $u = x + \dfrac{1}{y}, v = \dfrac{x}{y}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=7 \\ u^2-v=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=7-u \\ u^2-(7-u)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=7-u \\ u^2+u-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-5 \\ v=12 \end{cases} \\ \begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-5 \\ \dfrac{x}{y}=12 \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 12y^2+5y+1=0 \\ x=12y \end{cases} \\ \begin{cases} 3y^2-4y+1=0 \\ x=3y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(3;1);\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy-3x+y=0 \\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0 \end{cases}$.

Lời giải

Nếu $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow (x;y)=(0;0)$ là môt nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x \neq 0$ chia phương trình thứ nhất của hệ cho x, chia phương trình thứ hai của hệ cho x^2 ta được:

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ x^2+\dfrac{y^2}{x^2}+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2+y-5=0 \end{cases}.$$

Đặt $u=x+\dfrac{y}{x}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+y-3=0 \\ u^2+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+y-3=0 \\ u^2-u-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-1 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} u=2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}=-1\\ y=4\end{cases}\\ \begin{cases}x+\dfrac{y}{x}=2\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x+4=0\\ y=4\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x+1=0\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+xy+1=4y\\ y\left(x+y\right)^2=2x^2+7y+2\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}x^2+1+y\left(x+y\right)=4y\\ y\left(x+y\right)^2=2\left(x^2+1\right)+7y\end{cases}$.

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y\neq 0$ viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4\\ \left(x+y\right)^2=2.\dfrac{x^2+1}{y}+7\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{x^2+1}{y}\\ v=x+y\end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u+v=4\\ 2u+7=v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4-v\\ 2\left(4-v\right)+7=v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4-v\\ v^2+2v-15=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=9,v=-5\\ u=1,v=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}=9\\ x+y=-5\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}=1\\ x+y=3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,y=5\\ x=1,y=2\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-2;5\right);\left(1;2\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2y + y^2 + 2 = 7xy \\ 16x^4y^2 + y^4 + 4 = 25y^2\left(x^2 - \dfrac{4}{25}\right) \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $xy = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $xy \neq 0$ khi đó viết lại hệ phương trình dưới dạng :

$$\begin{cases} 4x + \dfrac{y^2 + 2}{xy} = 7 \\ 16x^2 + \dfrac{y^4 + 4y^2 + 4}{x^2y^2} = 25 \end{cases}.$$

Đặt $u = 4x, v = \dfrac{y^2 + 2}{xy}$ khi đó hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 + v^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 7 \\ uv = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 4, v = 3 \\ u = 3, v = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x = 4 \\ \dfrac{y^2 + 2}{xy} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x = 3 \\ \dfrac{y^2 + 2}{xy} = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = 1, y = 2 \\ x = \dfrac{3}{4}, y = 1 \\ x = \dfrac{3}{4}, y = -3 \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x; y) = (1;1); (1;2); \left(\dfrac{3}{4};1\right); \left(\dfrac{3}{4};-3\right)$.

Nhận xét. Ta có thể thực hiện tương tự với bài toán sau :

$$\begin{cases} 4x^2y + y^2 + 2 = 7y \\ 16x^4y^2 + y^4 + 4 = 25y^2\left(x^2 - \dfrac{4}{25}\right) \end{cases}.$$

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y - xy^2 = 2xy(1 - x) \\ \left(x^2 + 2y^2\right)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right)^2 = 12 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} 2x^2y - xy^2 + 2x - y = 2xy \\ \left(x^2 + 2y^2\right)\left(\dfrac{1}{x^2y^2} + \dfrac{2}{xy} + 1\right) = 12 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\left(xy+1\right) - y\left(xy+1\right) = 2xy \\ \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2x}{y^2} + x^2 + 2\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2y}{x} + y^2\right) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.\dfrac{xy+1}{y} - \dfrac{xy+1}{x} = 2 \\ \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 + 2\left(y + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 12 \end{cases}.$$

Đặt $u = \dfrac{xy+1}{y}, v = \dfrac{xy+1}{x}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2u - v = 2 \\ u^2 + 2v^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2u - 2 \\ u^2 + 2\left(2u-2\right)^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2, v = 2 \\ u = -\dfrac{2}{9}, v = -\dfrac{22}{9} \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{xy+1}{y} = 2 \\ \dfrac{xy+1}{x} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{xy+1}{y} = -\dfrac{2}{9} \\ \dfrac{xy+1}{x} = -\dfrac{22}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x^4 - \left(x^3 - x\right)y^2 - \left(y+12\right)x^2 = -6 \\ 5x^4 - \left(x^2-1\right)^2 y^2 - 11x^2 = -5 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 6\left(x^2-1\right)^2 - x\left(x^2-1\right)y^2 - x^2y = 0 \\ 5\left(x^2-1\right)^2 - \left(x^2-1\right)^2 y^2 - x^2 = 0 \end{cases}.$$

Nhận thấy $x = \pm 1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x^2-1\neq 0$ chia hai vế của phương trình cho $\left(x^2-1\right)^2$ ta được:

$$\begin{cases} 6-\dfrac{xy^2}{x^2-1}-\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)^2 y=0 \\ 5-y^2-\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)^2=0 \end{cases}.$$

Đặt $u=\dfrac{x}{x^2-1}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} uy^2+u^2y-6=0 \\ u^2+y^2-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uy\left(u+y\right)=6 \\ \left(u+y\right)^2-2uy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uy=\dfrac{6}{u+y} \\ \left(u+y\right)^2-\dfrac{12}{u+y}=5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uy=\dfrac{6}{u+y} \\ \left(u+y\right)^3-5\left(u+y\right)-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uy=\dfrac{6}{u+y} \\ \left(u+y-3\right)\left(\left(u+y\right)^2+3\left(u+y\right)+4\right)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uy=2 \\ u+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1}=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1}=1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};2\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right);\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4};1\right);\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};1\right).$$

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 9xy^3-24y^2+\left(27x^2+40\right)y+3x-16=0 \\ y^2+\left(9x-10\right)y+3\left(x+3\right)=0 \end{cases}.$

Lời giải

Cách 1: Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} y^2+3x+9xy+1=2\left(5y-4\right) \\ \left(y^2+3x\right)\left(9xy+1\right)=\left(5y-4\right)^2 \end{cases}.$$

Đặt $u = y^2 + 3x, v = 9xy + 1$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases} u + v = 2(5y-4) \\ uv = (5y-4)^2 \end{cases} \Rightarrow u, v$ là hai nghiệm của phương trình:

$t^2 - 2(5y-4)t + (5y-4)^2 = 0 \Leftrightarrow (t-(5y-4))^2 = 0 \Leftrightarrow t = 5y-4$.

Vì vậy $\begin{cases} u = 5y-4 \\ v = 5y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 3x = 5y-4 \\ 9xy + 1 = 5y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 1 \\ x = -\dfrac{1+\sqrt{21}}{9}, y = 2 - \sqrt{\dfrac{7}{3}} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{9}, y = 2 + \sqrt{\dfrac{7}{3}} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y) = (0;-1); \left(-\frac{1+\sqrt{21}}{9}; 2 - \sqrt{\frac{7}{3}}\right); \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{9}; 2 + \sqrt{\frac{7}{3}}\right).$$

<u>Cách 2:</u> Viết lại hệ phương trình dưới dạng $\begin{cases} (y^2+3x)(9xy+1) = (5y-4)^2 & (1) \\ y^2 + 3x = 10y - 9xy - 9 & (2) \end{cases}$

Nhận thấy $xy = -\dfrac{1}{9}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $xy \neq -\dfrac{1}{9}$ khi đó nhân theo vế vào (2) với $9xy+1$ và so sánh với (1) ta được:

$$(9xy+1)(10y-9xy-9) = (5y-4)^2 .$$

$$\Leftrightarrow (9xy+1)\left[2(5y-4) - (9xy+1)\right] = (5y-4)^2 .$$

$$\Leftrightarrow \left[(5y-4) - (9xy+1)\right]^2 = 0 \Leftrightarrow 9xy = 5y - 5 \Leftrightarrow xy = \frac{5}{9}(y-1) .$$

Khi đó (2) trở thành $y^2 + 3x - 5y + 4 = 0$. Nhận thấy $y = 0$ không thỏa mãn do vậy nhân vào hai vế với y ta được:

$$y^3 + 3xy - 5y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow y^3 + \frac{1}{3}(5y-5) - 5y^2 + 4y = 0 .$$

$$\Leftrightarrow 3y^3 - 15y^2 + 17y - 5 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(3y^2 - 12y + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 2 \pm \sqrt{\dfrac{7}{3}} \end{array}\right. .$$

Nhận xét: Tổng quát dạng hệ này có dạng $\begin{cases} u(x,y)+v(x,y)=t(x,y) \\ u(x,y).v(x,y)=s(x,y) \end{cases}$ trong đó $t^2\left(x,y\right)\le 4s(x,y)$. Dưới đây tôi trình bày một số bài tập tương tự cho các em rèn luyện phản xạ khi gặp hệ dạng trên.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x^2-8xy+4y^2=6xy+4 \\ 12x^4-4xy\left(7x^2+4y^2\right)=4+12xy-23x^2y^2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã ho tương đương với:

$$\begin{cases} 7x^2-8xy+4y^2=6xy+4 \\ 12x^4-28x^3y-16xy^3+32x^2y^2=\left(3xy+2\right)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(3x^2-4xy+4y^2\right)+\left(4x^2-4xy\right)=2\left(3xy+2\right) \\ 4x\left(x-y\right)\left(3x^2-4xy+4y^2\right)=\left(3xy+2\right)^2 \end{cases}.$$

Đặt $u=3x^2-4xy+4y^2, v=4x^2-4xy$ khi đó ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} u+v=2\left(3xy+2\right) \\ uv=\left(3xy+2\right)^2 \end{cases} \Rightarrow u,v$ là hai nghiệm của phương trình:

$t^2-2\left(3xy+2\right)t+\left(3xy+2\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(t-3xy-2\right)^2=0 \Leftrightarrow t=3xy+2$.

Vậy bài toán đưa về giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2-4xy+4y^2=3xy+2 \\ 4x^2-4xy=3xy+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ 4x^2-4xy=3xy+2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-2y \end{array}\right. \\ 4x^2-4xy=3xy+2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=1 \\ x=-2, y=-1 \\ x=-\dfrac{2}{\sqrt{15}}, y=\dfrac{1}{\sqrt{15}} \\ x=\dfrac{2}{\sqrt{15}}, y=-\dfrac{1}{\sqrt{15}} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(2;1\right);\left(-2;-1\right);\left(\frac{2}{\sqrt{15}};-\frac{1}{\sqrt{15}}\right);\left(-\frac{2}{\sqrt{15}};\frac{1}{\sqrt{15}}\right).$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3x(y-4)+4y^2+4=0 \\ 12(y^3+1)x+8y^2+(3xy-34)x^2-1=0 \end{cases}$.

Lời giải

Giải hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x^2+4y^2)(3xy+2)=(6x-1)^2 \\ x^2+4y^2+3xy+2=2(6x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y^2=6x-1 \\ 3xy+2=6x-1 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế hoặc hệ bậc hai hai ẩn tổng quát tìm được các nghiệm:

$$(x;y)=(1;1);\left(k;\frac{5k-k^2-4}{4}\right), k=5-\frac{11}{\sqrt[3]{6\sqrt{267}-91}}+\sqrt[3]{6\sqrt{267}-91}.$$

Hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=(1;1);\left(k;\frac{5k-k^2-4}{4}\right), k=5-\frac{11}{\sqrt[3]{6\sqrt{267}-91}}+\sqrt[3]{6\sqrt{267}-91}.$$

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy-y^2=-1 \\ 3yx^3+(1-5y^2)x^2+3y(2-3y^2)x=y^2+1 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2-y^2+3xy+1=4xy \\ (x^2-y^2)(3xy+1)=5x^2y^2-6xy+1 \end{cases}.$$

Đặt $u=x^2-y^2, v=3xy+1$ hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases} u+v=4xy \\ uv=5x^2y^2-6xy+1 \end{cases} \Rightarrow u,v$ là hai nghiệm của phương trình:

$t^2-4xy+5x^2y^2-6xy+1=0$.

Suy ra $t=2xy\pm\sqrt{-x^2y^2+6xy-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=2xy+\sqrt{-x^2y^2+6xy-1} \\ xy=2xy-\sqrt{-x^2y^2+6xy-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow xy=1$.

Vậy hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} xy=1 \\ x^2-xy-y^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ x^2-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;-1);(1;1)$.

<u>Cách 2:</u> Đặt $u=x^2-y^2, v=xy$ đưa về hệ phương trình:

$$\begin{cases} u-v=-1 \\ u(3v+1)=5v^2-6v+1 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này bằng phương pháp thế ta có kết quả tương tự.

$$(v-1)(3v+1)=5v^2-6v+1 \Leftrightarrow (v-1)^2=0 \Leftrightarrow v=1.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-y^2=0 \\ xy=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=-1 \\ x=1, y=1 \end{array}\right. .$$

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5\left(x^2+y^2\right)+6xy+3x+y=0 \\ 7(x+y)^3+2x^3+6xy^2+2=0 \end{cases}$.

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} (3x+y)^2+2\left(3x^2+6xy+7y^2\right)+3(3x+y)=0 \\ (3x+y)\left(3x^2+6xy+7y^2\right)=-2 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=3x+y \\ v=3x^2+6xy+7y^2 \end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2+2v+3u=0 \\ uv=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv=-2 \\ u^3+3u^2-4=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=-2 \\ (u-1)(u+2)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1, v=-2 \\ u=-2, v=1 \end{array}\right. .$$

TH1: Nếu $u=1, v=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=1 \\ 3x^2+6xy+7y^2=-2 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

TH2: Nếu $u=-2, v=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=-2 \\ 3x^2+6xy+7y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Cách 2: Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 4(x+y)^2+(x-y)^2+2(x+y)+(x-y)=0 \\ 8(x+y)^3+(x-y)^3=-2 \end{cases}.$$

Đến đây đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ đưa về hệ phương trình: $\begin{cases} 4u^2+v^2+2u+v=0 \\ 8u^3+v^3=-2 \end{cases}$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-3y)(20x-9y+33)+49y^2+33y=0 \\ 2(x-y)^2(x+y)+x^2y-10y^3+3=0 \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1: Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} 18(x-2y)^2+33(x-2y)+\left(2x^2+3xy+4y^2\right)=0 \\ (x-2y)\left(2x^2+3xy+4y^2\right)+3=0 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=x-2y \\ v=2x^2+3xy+4y^2 \end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 18u^2+33u+v=0 \\ uv+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18u^3+33u^2+3=0 \\ uv+3=0 \end{cases}.$$

Cách 2: Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 20x^2-69xy+33x+76y^2-66y=0 \\ 2x^3-x^2y-2xy^2-8y^3+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20(x-2y)^2+33(x-2y)+\left(-4y^2+11xy\right)=0 \\ (x-2y)\left[2x^2+3xy+4y^2\right]+3=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20(x-2y)^2+33(x-2y)+\left(-4y^2+11xy\right)=0 \\ (x-2y)\left[2(x-2y)^2+\left(-4y^2+11xy\right)\right]+3=0 \end{cases}.$$

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x\sqrt{y}-\sqrt{y}\right)^2+xy\left(x^3y-2xy+2\right)=3y \\ x^2-2x^2y-\dfrac{1}{x^4y}=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $xy \neq 0$.

Khi đó viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} y(x-1)^2+y\left(x^4y-2x^2y+2x\right)=3y \\ x^2-2x^2y-\dfrac{1}{x^4y}=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+\left(x^4y-2x^2y+2x\right)=3 \\ x^2-2x^2y-\dfrac{1}{x^4y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x^2y+x^4y=2 \\ x^2-2x^2y-\dfrac{1}{x^4y}=0 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=x^2-2x^2y \\ v=x^4y \end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u-\dfrac{1}{v}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x^2y=1 \\ x^4y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{2}{x^2}=1 \\ y=\dfrac{1}{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-x^2-2=0 \\ y=\dfrac{1}{x^4} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)=0 \\ y=\dfrac{1}{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-\sqrt{2};\dfrac{1}{4}\right),\left(\sqrt{2};\dfrac{1}{4}\right)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y-2}+\dfrac{2(x-1)}{x+y}=3 \\ (x+y)\sqrt{x-y+2}=6\sqrt{x+y-2} \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+y-2} \\ v=\sqrt{x-y+2} \end{cases},(u,v\ge 0)\Rightarrow \begin{cases} x+y=u^2+2 \\ x-y=y^2-2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u^2+v^2}{2} \\ y=\dfrac{u^2-v^2+4}{2} \end{cases}$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} v+\dfrac{2\left(\dfrac{u^2+v^2}{2}-1\right)}{u^2+2}=3 \\ (u^2+2)v=6u \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} v(u^2+2)+u^2+v^2-2=3(u^2+2) \\ (u^2+2)v=6u \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6u+u^2+v^2-2=3(u^2+2) \\ (u^2+2)v=6u \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2-v^2-6u+8=0 \\ (u^2+2)v=6u \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2-\left(\dfrac{6u}{u^2+2}\right)^2-6u+8=0 \\ v=\dfrac{6u}{u^2+2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} (u-1)(u-2)(u^4+6u^2+6u+8)=0 \\ v=\dfrac{6u}{u^2+2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-1)(u-2)=0 \\ v=\dfrac{6u}{u^2+2} \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1,v=2 \\ u=2,v=2 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+y-2}=1 \\ \sqrt{x-y+2}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+y-2}=2 \\ \sqrt{x-y+2}=2 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(4;2);\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y^2+6}+y\sqrt{x^2+3}=7xy \\ x\sqrt{x^2+3}+y\sqrt{y^2+6}=2+x^2+y^2 \end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Với $x=0$ hoặc $y=0$ hệ phương trình không thỏa mãn.

Xét $x\ne 0, y\ne 0$ khi đó biến đổi hệ phương trình thành

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}+\dfrac{\sqrt{y^2+6}}{y}=7\\ x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)+y\left(\sqrt{y^2+6}-y\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}+\dfrac{\sqrt{y^2+6}}{y}=7\\ \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x}+\dfrac{6y}{\sqrt{y^2+6}+y}=2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}+\dfrac{\sqrt{y^2+6}}{y}=7\\ \dfrac{3}{\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}+1}+\dfrac{6}{\dfrac{\sqrt{y^2+6}}{y}+1}=2\end{cases}.$$

Đặt $u=\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}; v=\dfrac{\sqrt{y^2+6}}{y}$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}u+v=7\\ \dfrac{3}{u+1}+\dfrac{6}{v+1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=7-v\\ 3(v+1)+6(8-v)=2(v+1)(8-v)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=7-v\\ 2v^2-17v+35=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\ v=5\end{cases}\vee\begin{cases}u=\dfrac{7}{2}\\ v=\dfrac{7}{2}\end{cases}.$$

Với $\begin{cases}u=2\\ v=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}=2\\ \dfrac{\sqrt{y^2+6}}{y}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$

Với $\begin{cases}u=\dfrac{7}{2}\\ v=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}=\dfrac{7}{2}\\ \dfrac{\sqrt{y^2+6}}{y}=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}\\ y=\dfrac{2\sqrt{30}}{15}\end{cases}.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{2\sqrt{15}}{15};\dfrac{2\sqrt{30}}{15}\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2y^2+3xy+3=0 \\ \dfrac{x-y+18}{(x+y)^2}=9\sqrt{x-y} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x-y\ge 0, x+y\ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} u=x+y \\ v=\sqrt{x-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=u \\ x-y=v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v^2}{2} \\ y=\dfrac{u-v^2}{2} \end{cases}.$$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u+v^2}{2}\right)^2+2\left(\dfrac{u-v^2}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{u+v^2}{2}\right)\left(\dfrac{u-v^2}{2}\right)+3=0 \\ \dfrac{v^2+18}{u^2}=9v \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6u^2-2uv^2}{4}+3=0 \\ \dfrac{v^2+18}{u^2}=9v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2-uv^2+6=0 \\ v^2-9u^2v+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u^2-3uv^2+18=0 \\ v^2-9u^2v+18=0 \end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9u^2-v^2-3uv(v-3u)=0 \\ v^2-9u^2v+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3u-v)(3u+v+3uv)=0 \\ v^2-9u^2v+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ \sqrt{x-y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;-4)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=2 \\ 4\sqrt{x^2-7}-\sqrt{y^2+24}=7y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $|x|\ge\sqrt{7}$.

Đặt $\begin{cases} u = x + \sqrt{x^2 - 7} \\ v = y + \sqrt{y^2 + 24} \end{cases}, (v > 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 - 2ux + x^2 = x^2 - 7 \\ v^2 - 2vy + y^2 = y^2 + 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u^2 + 7}{2u} \\ y = \dfrac{v^2 - 24}{2v} \\ \sqrt{x^2 - 7} = \dfrac{u^2 - 7}{2u} \\ \sqrt{y^2 + 24} = \dfrac{v^2 + 24}{2v} \end{cases}$$

(do $u = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình).

Khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u - \dfrac{v^2 + 24}{2v} = 2 \\ 4.\dfrac{u^2 - 7}{2u} - \dfrac{v^2 + 24}{2v} = 7.\dfrac{v^2 - 24}{2v} \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{v^2 + 4v + 24}{2v} \\ 2.\dfrac{u^2 - 7}{u} = \dfrac{4v^2 - 72}{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{v^2 + 4v + 24}{2v} \\ 2.\dfrac{\left(\dfrac{v^2 + 4v + 24}{2v}\right)^2 - 7}{\dfrac{v^2 + 4v + 24}{2v}} = \dfrac{4v^2 - 72}{v} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{v^2 + 4v + 24}{2v} \\ \dfrac{\left(v^2 + 4v + 24\right)^2 - 28v^2}{v^2 + 4v + 24} = 4v^2 - 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{v^2 + 4v + 24}{2v} \\ \left(v - 6\right)\left(3v^3 + 26v^2 + 144v + 384\right) = 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{v>0} \begin{cases} u = 7 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 7} = 7 \\ y + \sqrt{y^2 + 24} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x; y\right) = \left(4; 1\right)$.

Nhận xét: Với phép đặt ẩn phụ như trên ta xử lý toàn bộ những hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1\sqrt{a^2x^2 + b} + c_1y + d_1\sqrt{c^2y^2 + d} = e \\ a_2x + b_2\sqrt{a^2x^2 + b} + c_2y + d_2\sqrt{c^2y^2 + d} = f \end{cases}.$$

Bằng phép đặt ẩn phụ $\begin{cases} u = ax + \sqrt{a^2x^2 + b} \\ v = cy + \sqrt{c^2y^2 + d} \end{cases}$ (xem thêm chủ đề hệ phương trình chứ căn thức).

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (6x + y - 5)(2x - y) = 1 \\ 2(6 - 4x^2 - y^2)(2x - y)^2 = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận xét: Dễ thấy $y - 2x \neq 0$ khi đó phương trình thứ hai của hệ có dạng tích phức tạp ta không thể nhân ra để tìm mối liên hệ gì ở đó được mà ta thử nghĩ đến chia hai vế phương trình cho $(2x - y)^2$ xem sao? Và làm tương tự cho phương trình đầu của hệ.

Nhận thấy $y - 2x \neq 0$ khi đó viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} 6x + y - 5 = \dfrac{1}{2x - y} \\ 2(6 - 4x^2 - y^2) = \dfrac{1}{(2x - y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x + y) + (2x - y) - 5 = \dfrac{1}{2x - y} \\ 12 - (2x + y)^2 - (2x - y)^2 = \dfrac{1}{(2x - y)^2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x + y) - 5 = \dfrac{1}{2x - y} - (2x - y) \\ 12 - (2x + y)^2 = \dfrac{1}{(2x - y)^2} + (2x - y)^2 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u = 2x + y \\ v = \dfrac{1}{2x - y} - (2x - y) \end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u - 5 = v \\ 12 - u^2 = v^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u - 5 = v \\ 10 - u^2 = (2u - 5)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u-5=v \\ 5u^2-20u+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} u=1 \\ v=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ \dfrac{1}{2x-y}-(2x-y)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ (2x-y)^2-3(2x-y)-1=0 \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{8} \\ y=\dfrac{-1\mp\sqrt{13}}{4} \end{cases}.$$

Với $\begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ \dfrac{1}{2x-y}-(2x-y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ (2x-y)^2+(2x-y)-1=0 \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ 2x-y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{8} \\ y=\dfrac{7\mp\sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{5\pm\sqrt{13}}{8};\frac{-1\mp\sqrt{13}}{4}\right);\left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{8};\frac{7\mp\sqrt{5}}{4}\right).$$

<u>Cách 2:</u> Rút $\dfrac{1}{2x-y}=6x+y-5$ từ phương trình đầu thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{cases} (6x+y-5)(2x-y)=1 \\ (6x+y-5)^2=-8x^2-2y^2+12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2-4xy-y^2-10x+5y-1=0 \quad (1) \\ 44x^2+12xy+3y^2-60x-10y+13=0 \quad (2) \end{cases}.$$

Đây là hệ được giải bằng phương pháp đồng bậc hoặc hệ số bất định.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x-y)^4+(2y-x)^4=1 \\ (x-y)(x^2-xy+y^2)=\dfrac{1}{9} \end{cases}.$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 3(x - y) \\ u^2 - uv + v^2 = 3(x^2 - xy + y^2) \end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^4 + v^4 = 1 \\ (u + v)(u^2 - uv + v^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 + v^4 = 1 \ (1) \\ u^3 + v^3 = 1 \ (2) \end{cases}.$$

Từ phương trình (1) suy ra $u, v \in [-1;1]$.

Từ phương trình (2) ta có: $\begin{cases} u^3 = 1 - v^3 \geq 0 \\ v^3 = 1 - u^3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{cases}$.

Vậy $u, v \in [0;1]$.

Khi đó lấy $(1) - (2)$ theo vế ta được:

$$u^3(u - 1) + v^3(v - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(u - 1) = 0 \\ v(v - 1) = 0 \end{cases}.$$

Kết hợp với $u^4 + v^4 = 1$ ta có $\left[\begin{array}{l} u = 0, v = 1 \\ u = 1, v = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3}, y = \dfrac{1}{3} \\ x = -\dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right);\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

<u>Nhận xét:</u> Nhiều em thấy khó ở biến đổi đầu thì có thể rút $\begin{cases} x = \dfrac{2u - v}{3} \\ y = \dfrac{u - 2v}{3} \end{cases}$ thay vào hệ ta có kết quả tương tự trên.

Kết quả trên cho ta xử lý được bài toán tổng quát:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{2n} + y^{2n} = 1 \\ x^{2k+1} + y^{2k+1} = 1 \end{cases}, (n, k \in \mathbb{N})$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4 \\ 5x+y+\dfrac{x^2-5y^2}{xy}=5 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0, x^2-y\neq 0, x+y^2\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4 \\ \dfrac{5x^2y+xy^2+x^2-5y^2}{xy}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4 \\ \dfrac{x+y^2}{y}+5.\dfrac{x^2-y}{x}=5 \end{cases}.$$

Đặt $u=\dfrac{x}{x^2-y}, v=\dfrac{y}{x+y^2}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+5v=4 \\ \dfrac{1}{v}+\dfrac{5}{u}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-5v \\ 4-5v+5v=5v(4-5v) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=\dfrac{2}{5} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-y}=2 \\ \dfrac{y}{x+y^2}=\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-2y=0 \\ 2y^2+2x-5y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2x^2-x}{2} \\ 2y^2+2x-5.\dfrac{2x^2-x}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}, y=3 \\ x=1, y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=\left(-\dfrac{3}{2};3\right);\left(1;\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1 \\ x^2+y^2-\dfrac{2x}{y}=4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \ne 0, x^2 + y^2 \ne 1$.

Đặt $u = x^2 + y^2 - 1, v = \dfrac{x}{y}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{u} + \dfrac{2}{v} = 1 \\ u + 1 - 2v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + 3 \\ 3v + 2(2v + 3) = v(2v + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v + 3 \\ v^2 - 2v - 3 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 9, v = 3 \\ u = 1, v = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 9 \\ \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 1 \\ \dfrac{x}{y} = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = -1 \\ x = -1, y = 1 \\ x = 3, y = 1 \\ x = -3, y = -1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y) = (-1;1);(1;-1);(-3;-1);(3;1)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 4y - 1 \\ x - y = \dfrac{y}{x^2 + 1} + 2 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Với $y \ne 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y - x) = 4y \\ x - y = \dfrac{y}{x^2 + 1} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{y} + y - x = 4 \\ x - y = \dfrac{y}{x^2 + 1} + 2 \end{cases}.$$

Đặt $u = \dfrac{x^2 + 1}{y}, v = x - y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u - v = 4 \\ v = \dfrac{1}{u} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u - 4 \\ u(u - 4) = 2u + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 3 - \sqrt{10}, v = -1 - \sqrt{10} \\ u = 3 + \sqrt{10}, v = -1 + \sqrt{10} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}=3-\sqrt{10}\\ x-y=-1-\sqrt{10}\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}=3+\sqrt{10}\\ x-y=-1+\sqrt{10}\end{cases}\end{array}\right..$$

Hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=4\\ 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+y+\dfrac{1}{y}=6\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Đặt $u=x+\dfrac{1}{x}, v=y+\dfrac{1}{y}, \left(|u|,|v|\geq 2\right)$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}2u+v=6\\ uv=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=6-2u\\ u\left(6-2u\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2-3u+2=0\\ v=6-2u\end{cases}\xleftrightarrow{|u|\geq 2}\begin{cases}u=2\\ v=2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=2\\ y+\dfrac{1}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=0\\ y^2-2y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y\left(x^2+1\right)=2x\left(y^2+1\right)\\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=16\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=2\left(y+\dfrac{1}{y}\right)\\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=2\left(y+\dfrac{1}{y}\right)\\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=20\end{cases}.$$

Đặt $u = x + \frac{1}{x}, v = y + \frac{1}{y}, (|u|,|v| \ge 2)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u = 2v \\ u^2 + v^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ 5v^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 4, v = 2 \\ u = -4, v = -2 \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 4 \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -4 \\ y + \frac{1}{y} = -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 4x + 1 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{3}, y = 1 \\ x = 2 + \sqrt{3}, y = 1 \\ x = -2 + \sqrt{3}, y = -1 \\ x = -2 - \sqrt{3}, y = -1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y) = \left(2 + \sqrt{3};1\right); \left(2 - \sqrt{3};1\right); \left(-2 - \sqrt{3};-1\right); \left(-2 + \sqrt{3};-1\right).$$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x - y)\left(x^2 - y^2\right) = 3 \\ (x + y)\left(x^2 + y^2\right) = 15 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy(x + y) = 3 \\ x^3 + y^3 + xy(x + y) = 15 \end{cases}$.

Đặt $u = x^3 + y^3, v = xy(x + y)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u - v = 3 \\ u + v = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy(x + y) = 6 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^3 = 27 \\ xy(x + y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 2 \\ x = 2, y = 1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;2);(2;1)$.

<u>**Nhận xét:**</u> Đây là hệ có yếu tố đẳng cấp nên nhân chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$15(x - y)\left(x^2 - y^2\right) = 3(x + y)\left(x^2 + y^2\right) \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y)(2x - y) = 0.$$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy\left(2x+y-6\right)+y+2x=0 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=8 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2x\left(xy+1\right)+y\left(xy+1\right)=6xy \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)+y\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=6 \\ x^2+y^2+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=8 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=6 \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=8 \end{cases}.$$

Đặt $u=x+\dfrac{1}{y}, v=y+\dfrac{1}{x}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2u+v=6 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=6-2u \\ u^2+\left(6-2u\right)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u^2-24u+28=0 \\ v=6-2u \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=2 \\ u=\dfrac{14}{5} \end{array}\right. \\ v=6-2u \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2, v=2 \\ u=\dfrac{14}{5}, v=\dfrac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ y+\dfrac{1}{x}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{14}{5} \\ y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+y\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=\dfrac{9}{2} \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=\dfrac{45}{4} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=\dfrac{45}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{45}{4} \end{cases}.$$

Đặt $u=x+\dfrac{1}{y}, v=y+\dfrac{1}{x}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{9}{2} \\ u^2+v^2=\dfrac{45}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{9}{2} \\ (u+v)^2-2uv=\dfrac{45}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{9}{2} \\ uv=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=3, v=\dfrac{3}{2} \\ u=\dfrac{3}{2}, v=3 \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=3 \\ y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ y+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=\dfrac{1}{2} \\ x=2, y=1 \\ x=\dfrac{1}{2}, y=1 \\ x=1, y=2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=(1;2);(2;1);\left(\dfrac{1}{2};1\right);\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=\dfrac{25}{2} \\ \left(x^3+y^3\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3=\dfrac{125}{4} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=\dfrac{25}{2} \\ \left(x^3+y^3\right)\left(1+\dfrac{3}{xy}+\dfrac{3}{x^2y^2}+\dfrac{1}{x^3y^3}\right)=\dfrac{125}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{25}{2} \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^3+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^3=\dfrac{125}{4} \end{cases}.$$

Đặt $u = x + \frac{1}{y}, v = y + \frac{1}{x}$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u^2 + v^2 = \frac{25}{2} \\ u^3 + v^3 = \frac{125}{4} \end{cases}$.

Đây là hệ đối xứng loại I đã biết cách giải.

Tìm được các nghiệm $(u;v) = \left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right);\left(5k;5\left(1+k-2k^2-4k^3\right)\right)$, với:

$$k = -1 \pm \sqrt[4]{12} + \sqrt{3}.$$

Bài 10. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5 \\ \left(x^2-1\right)\left(y^2+1\right)\left(xy(x+y)+x-y\right) = x^2y^2 + \left(x^2+y^2\right)\left(x^2y^2+1\right) \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5 \\ \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(x + y + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = 1 + \left(x^2+y^2\right)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5 \\ \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(x + y + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 5 \\ \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(x + y + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = 6 \end{cases}$$

Đặt $u = x - \frac{1}{x}, v = y + \frac{1}{y}, \left(|v| \geq 2\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 5 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 5 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - \frac{12}{u+v} = 5 \\ uv = \frac{6}{u+v} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\uv=2\end{cases}\xleftrightarrow{|v|\ge 2}\begin{cases}u=1\\v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}=1\\y+\dfrac{1}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},y=1\\x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},y=1\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};1\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};1\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2+y^2-7\right)(x+y)^2=-2\\(x-3)(x+y)=-1\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x+y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x+y\neq 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}x^2+y^2-7=-\dfrac{2}{(x+y)^2}\\x-3=-\dfrac{1}{x+y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2+\dfrac{4}{(x+y)^2}+(x-y)^2=14\\x+y+x-y+\dfrac{2}{x+y}=6\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}u=x+y+\dfrac{2}{x+y},\left(|u|\ge 2\sqrt{2}\right)\\v=x-y\end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u^2-4+v^2=14\\u+v=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^2-2uv=18\\u+v=6\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=6\\uv=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=3\\v=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+\dfrac{2}{x+y}=3\\x-y=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,y=-1\\x=\dfrac{5}{2},y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;-1),\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

<u>**Cách 2:**</u> Rút $x+y=-\dfrac{1}{x-3}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\begin{cases}x^2+y^2-7+2(x-3)^2=0\ (1)\\x^2+xy-3x-3y+1=0\ (2)\end{cases}.$$

Lấy $(1)-2.(2)$ theo vế ta được: $\left(x-y-3\right)^2=0\Leftrightarrow x-y-3=0$.

Khi đó đưa về giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-y-3=0\\ \left(x-3\right)\left(x+y\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,y=-1\\ x=\dfrac{5}{2},y=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(4x^2+4y^2-4xy-51\right)\left(x-y\right)^2+3=0\\ \left(2x-7\right)\left(x-y\right)+1=0\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x-y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $x-y\neq 0$ khi đó viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases}4x^2+4y^2-4xy-51+\dfrac{3}{\left(x-y\right)^2}=0\\ 2x-7+\dfrac{1}{x-y}=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\left(x-y\right)^2+\left(x+y\right)^2+\dfrac{3}{\left(x-y\right)^2}=51\\ x-y+\dfrac{1}{x-y}+x+y=7\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}u=x-y+\dfrac{1}{x-y}\\ v=x+y\end{cases},\left(\left|u\right|\geq 2\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}3\left(u^2-2\right)+v^2=51\\ u+v=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=7-u\\ 3u^2+\left(7-u\right)^2=57\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=7-u\\ 4u^2-14u-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=4,v=3\\ u=-\dfrac{1}{2},v=\dfrac{15}{2}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $\left(u;v\right)=\left(4;3\right)$.

Vậy ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y+\dfrac{1}{x-y}=4 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}, y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}, y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right);\left(=\frac{5+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

<u>Cách 2:</u> Rút $x-y=-\dfrac{1}{2x-7}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2-4xy-51+3(2x-7)^2=0 \ (1) \\ (2x-7)(x-y)+1=0 \ (2) \end{cases}.$$

Lấy $2.(1)-3.(2)$ ta được: $(x+y-3)(2x+2y-15)=0$.

Đến đây xét từng trường hợp thế vào hệ ban đầu ta được nghiệm tương tự kết quả trên.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (6x+y-5)(2x-y)=1 \\ 2(6-4x^2-y^2)(2x-y)^2=1 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y=2x$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y \neq 2x$ viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 6x+y-5=\dfrac{1}{2x-y} \\ 2(6-4x^2-y^2)=\dfrac{1}{(2x-y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x+y)+2x-y-\dfrac{1}{2x-y}=5 \\ (2x+y)^2+(2x-y)^2+\dfrac{1}{(2x-y)^2}=12 \end{cases}.$$

Đặt $u=2x+y, v=2x-y-\dfrac{1}{2x-y}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2u+v=5 \\ u^2+v^2+2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5-2u \\ u^2+(5-2u)^2-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1, v=3 \\ u=3, v=-1 \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+y=1\\ 2x-y-\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}\\ \begin{cases}2x+y=3\\ 2x-y-\dfrac{1}{2x-y}=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5-\sqrt{13}}{8},y=\dfrac{\sqrt{13}-1}{4}\\ x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{8},y=-\dfrac{1+\sqrt{13}}{4}\\ x=\dfrac{5-\sqrt{5}}{8},y=\dfrac{7+\sqrt{5}}{4}\\ x=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8},y=\dfrac{7-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{5-\sqrt{13}}{8};\frac{\sqrt{13}-1}{4}\right);\left(\frac{5+\sqrt{13}}{8};-\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right);$$

$$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8};\frac{7+\sqrt{5}}{4}\right);\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8};\frac{7-\sqrt{5}}{4}\right).$$

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{y(xy-1)}{y^2+1}=\dfrac{2}{5}\\ \dfrac{x(xy-1)}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $xy=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $xy\neq 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases}\dfrac{x-\dfrac{1}{y}}{1+\dfrac{1}{y^2}}=\dfrac{2}{5}\\ \dfrac{y-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Đặt $u=\dfrac{1}{x},v=\dfrac{1}{y}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{u}-v}{1+v^2}=\dfrac{2}{5}\\ \dfrac{\frac{1}{v}-u}{1+u^2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-uv}{u\left(1+v^2\right)}=\dfrac{2}{5}\\ \dfrac{1-uv}{v\left(u^2+1\right)}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{u\left(v^2+1\right)}{1-uv}=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{v\left(u^2+1\right)}{1-uv}=2\end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được: $u-v=\frac{1}{2}\Leftrightarrow u=v+\frac{1}{2}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$\left(\frac{1}{2}+v\right)\left(v^2+1\right)=\frac{5}{2}\left(1-v\left(\frac{1}{2}+v\right)\right)\Leftrightarrow v=\frac{1}{2}\Rightarrow u=1$. Vậy $\begin{cases}\frac{1}{x}=1\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;2\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x-y}{1-xy}=\dfrac{1-3x}{3-x}\\ \dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{1-2y}{2-y}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\left(x^2y^2-1\right)\left(2-y\right)\left(3-x\right)\neq 0$.

Để ý các nhân tử có hình thức tương tự nhau có dạng $\dfrac{x\pm y}{1\pm xy}$ nên ta vận dụng các đẳng thức:

$$\begin{cases}u+v+1+uv=\left(u+1\right)\left(v+1\right)\\ u+v-1-uv=\left(u-1\right)\left(1-v\right)\\ u-v+1-uv=\left(u+1\right)\left(1-v\right)\\ u-v-1+uv=\left(u-1\right)\left(v+1\right)\end{cases}.$$

Nhận thấy $x=\pm 1, y=\pm 1$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x\neq\pm 1, y\neq\pm 1$ ta biến đổi các phương trình của hệ:

Phương trình đầu của hệ viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{1+xy}+1=\dfrac{1-2y}{2-y}+1\\ \dfrac{x+y}{1+xy}-1=\dfrac{1-2y}{2-y}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}=\dfrac{-3(y-1)}{2-y}\\ -\dfrac{(x-1)(y-1)}{1+xy}=\dfrac{-(y+1)}{2-y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+1)(y+1)}{-3(y-1)}=\dfrac{1+xy}{2-y}\\ \dfrac{(x-1)(y-1)}{y+1}=\dfrac{1+xy}{2-y}\end{cases}$$

So sánh hai phương trình của hệ ta được:

$$\frac{(x+1)(y+1)}{-3(y-1)}=\frac{(x-1)(y-1)}{y+1}\Leftrightarrow(x+1)(y+1)^2=-3(x-1)(y-1)^2\ \ (1).$$

Phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases}\dfrac{x-y}{1-xy}+1=\dfrac{1-3x}{3-x}+1\\ \dfrac{x-y}{1-xy}-1=\dfrac{1-3x}{3-x}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-(x+1)(y-1)}{1-xy}=\dfrac{-4(x-1)}{3-x}\\ \dfrac{(x-1)(y+1)}{1-xy}=\dfrac{-2(x+1)}{3-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-(x+1)(y-1)}{-4(x-1)}=\dfrac{1-xy}{3-x}\\ \dfrac{(x-1)(y+1)}{-2(x+1)}=\dfrac{1-xy}{3-x}\end{cases}$$

So sánh hai phương trình của hệ ta được:

$$\frac{-(x+1)(y-1)}{-4(x-1)}=\frac{(x-1)(y+1)}{-2(x+1)}\Leftrightarrow(x+1)^2(y-1)=-2(x-1)^2(y+1)\ \ (2).$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)^2=-3(x-1)(y-1)^2\\ (x+1)^2(y-1)=-2(x-1)^2(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}=-3\left(\dfrac{y-1}{y+1}\right)^2\\ \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2=-2.\dfrac{y+1}{y-1}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}=-3\left(\dfrac{y-1}{y+1}\right)^2\\ \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3=6.\dfrac{y-1}{y+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}=-3\left(\dfrac{y-1}{y+1}\right)^2\\ -27\left(\dfrac{y-1}{y+1}\right)^6=6.\dfrac{y-1}{y+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}=\sqrt[5]{-12}\\ \dfrac{y-1}{y+1}=\sqrt[5]{-\dfrac{2}{9}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt[5]{12}-1}{\sqrt[5]{12}+1}\\ y=\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}-1}{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}+1}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt[5]{12}-1}{\sqrt[5]{12}+1};\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}-1}{\sqrt[5]{\dfrac{9}{2}}+1}\right)$.

Nhận xét: Tổng quát ta giải hệ phương trình $\begin{cases} f(x,y) = g(a,y) \\ g(x,y) = f(b,x) \end{cases}$.

Trong đó $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+xy}; g(x,y) = \dfrac{x-y}{1-xy}$.

Với bài toán trên ta có $a = \dfrac{1}{2}, b = \dfrac{1}{3}$.

Hai hàm $f(x,y)$ và $g(x,y)$ là các hàm có tính chất khá đặc biệt :

$$f(x,y) + g(x,y) = \frac{x+y}{1+xy} + \frac{x-y}{1-xy} = \frac{2x\left(1-y^2\right)}{\left(1+xy\right)\left(1-xy\right)}$$

$$f(x,y) - g(x,y) = \frac{x+y}{1+xy} - \frac{x-y}{1-xy} = \frac{2y\left(1-x^2\right)}{\left(1+xy\right)\left(1-xy\right)}$$

Cách 2 : Đặt $x = \dfrac{u-1}{u+1}, y = \dfrac{v-1}{v+1}$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} \dfrac{u-v}{u+v} = \dfrac{4-2u}{2u+4} \\ \dfrac{uv-1}{uv+1} = \dfrac{3-v}{v+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 + 4u - 2uv - 4v = 4u + 4v - 2u^2 - 2uv \\ uv^2 - v + 3uv - 3 = 3uv + 3 - uv^2 - v \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u^2 - 8v = 0 \\ 2uv^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 2v \\ uv^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{u^2}{2} \\ u^5 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt[5]{12} \\ v = \sqrt[5]{\dfrac{9}{2}} \end{cases}.$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x^2 + y^2) + \dfrac{1}{\left(x-y\right)^2} = 2(10 - xy) \\ 2x + \dfrac{1}{x-y} = 5 \end{cases}$.

Lời giải

\+ Điều kiện $x \neq y$.

\+ Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2 + (x-y)^2 + \dfrac{1}{(x-y)^2} = 20 \\ x + y + x - y + \dfrac{1}{x-y} = 5 \end{cases}$.

Đặt $u = x + y;\quad v = x - y + \dfrac{1}{x-y}\left(\left|v\right| \geq 2\right)$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} 2u^2 + v^2 - 2 = 20 \\ u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 - v \\ 3v^2 - 20v + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = \dfrac{14}{3} \end{cases}.$$

\+ Với $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + \dfrac{1}{x-y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$

\+ Với $\begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = \dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3} \\ x - y + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 \pm \sqrt{10}}{3} \\ y = \dfrac{-3 \mp \sqrt{10}}{3} \end{cases}.$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(2;1\right), \left(\dfrac{4 \pm \sqrt{10}}{3}; \dfrac{-3 \mp \sqrt{10}}{3}\right)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + x + xy - 6y + 1 = 0 \\ y^3x - 8y^2 + x^2y + x = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$\begin{cases} y^2 + x + xy + 1 = 6y \\ \left(y^2 + x\right)\left(xy + 1\right) = 9y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + x, xy + 1$ là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 6yt + 9y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(t - 3y\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3y.$$

Vì vậy $\begin{cases} y^2 + x = 3y \\ xy + 1 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - y^2 \\ y\left(3y - y^2\right) + 1 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(2;1\right)$.

<u>**Nhận xét:**</u> Ta có thể chia phương trình đầu của hệ cho y, phương trình thứ hai của hệ cho y^2 và đặt ẩn phụ.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 4x^2 + y^2 - 4y = 2 \\ x^2y + 2x^2 + 6y = 23 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $t=y^2$, khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} t-4y=2-x^4-4x^2 \\ \left(x^2+6\right)y=23-2x^2 \end{cases}$, ta coi x là hằng số khi đó ta được hệ đơn giản với 2 ẩn là t, y.

Ta có: $D=x^2+6; D_t=-x^6-10x^4-30x^2+104; D_y=23-2x^2$.

Ta có $t=y^2 \Rightarrow \frac{D_t}{D}=\left(\frac{D_y}{D}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2+6\right)\left(-x^6-10x^4-30x^2+104\right)=\left(23-2x^2\right)^2$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)(1+x^2)(x^4+16x^2+95)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=-1 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;3);(1;3)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3y-1 \\ x^3+x^2y=x^2-x+1 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+1+y\left(x+y-3\right)=0 \\ x\left(x^2+1\right)+y\left(x^2+1\right)-y=x^2+1 \end{cases}.$$

Nếu $y=0 \Rightarrow x=1$.

Xét $y \neq 0$ hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y-3=0 \\ \dfrac{x\left(x^2+1\right)}{y}+x^2+1-1=\dfrac{x^2+1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y-3=0 \\ \dfrac{x^2+1}{y}\left(x+y\right)-1=\dfrac{x^2+1}{y} \end{cases}.$$

Đặt $u=\frac{x^2+1}{y}, v=x+y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v-3=0 \\ uv-1=u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là: $(x;y)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy+2x=7y \\ x^3+x^2y-x^2+2xy-6x+3y=0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+2x+y\left(x+y-7\right)=0 \\ \left(x^2+2x\right)\left(x+y\right)-3\left(x^2+2x\right)+3y=0 \end{cases}.$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x=0 \\ x^3-x^2-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

<u>TH2:</u> Nếu $y \neq 0$ chia hai vế của phương trình đầu cho y, phương trình thứ hai cho y ta được: $\begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{y}+x+y-7=0 \\ \dfrac{x^2+2x}{y}.\left(x+y\right)-3.\dfrac{x^2+2x}{y}+3=0 \end{cases}$.

Đặt $u=\dfrac{x^2+2x}{y}, v=x+y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v-7=0 \\ uv-3u+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=7-u \\ u\left(7-u\right)-3u+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2-\sqrt{7} \\ v=5+\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} u=2+\sqrt{7} \\ v=5-\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{y}=2-\sqrt{7} \\ x+y=5+\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{y}=2+\sqrt{7} \\ x+y=5-\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\dfrac{4+\sqrt{7}+\sqrt{5\left(7+4\sqrt{7}\right)}}{2} \\ y=\dfrac{14-\sqrt{7}+\sqrt{5\left(7+4\sqrt{7}\right)}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-4-\sqrt{7}+\sqrt{5\left(7+4\sqrt{7}\right)}}{2} \\ y=\dfrac{14-\sqrt{7}-\sqrt{5\left(7+4\sqrt{7}\right)}}{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=(0;0);(-2;0);\left(-\frac{4+\sqrt{7}+\sqrt{5\left(7+4\sqrt{7}\right)}}{2};\frac{14-\sqrt{7}+\sqrt{5\left(7+4\sqrt{7}\right)}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{-4-\sqrt{7}+\sqrt{5\left(7+4\sqrt{7}\right)}}{2};\frac{14-\sqrt{7}-\sqrt{5\left(7+4\sqrt{7}\right)}}{2}\right).$$

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2-3y=2\\ \left(2x^2+y\right)\left(4x^4-3x^2+y\left(4x^2+y+6\right)\right)=8\end{cases}$.

Lời giải

<u>Nhận xét:</u> Ta có thể rút $y=\dfrac{4x^2-2}{3}$ thế xuống phương trình thứ hai của hệ.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}2x^2+y+2\left(x^2-2y\right)=2\\ \left(2x^2+y\right)\left(\left(2x^2+y\right)^2-3\left(x^2-2y\right)\right)=8\end{cases}.$$

Đặt $u=2x^2+y, v=x^2-2y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u+2v=2\\ u\left(u^2-3v\right)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\ v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+y=2\\ x^2-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{\frac{4}{5}},y=\frac{2}{5}\\ x=\sqrt{\frac{4}{5}},y=\frac{2}{5}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-\sqrt{\frac{4}{5}};\frac{2}{5}\right);\left(\sqrt{\frac{4}{5}};\frac{2}{5}\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases}9y^3(3x^3-1)=-125 & (1)\\ 45x^2y+75x=6y^2 & (2)\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ, khi đó chia 2 vế của phương trình (1) cho y^3; và chia 2 vế của phương trình (2) cho y^2 ta được:

$$\begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9 \\ 45\dfrac{x^2}{y} + 75\dfrac{x}{y^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9 \\ 15\dfrac{x}{y}(3x + \dfrac{5}{y}) = 6 \end{cases}.$$

Đặt $u = 3x; v = \dfrac{5}{y}$, khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u+v\right)^3 - 3uv(u+v) = 9 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}.$$

\+ Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ \dfrac{5}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = 5 \end{cases}.$

\+ Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ \dfrac{5}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{2}{3};5\right);\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(1+x) + \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{y} + 1\right) = 4 \\ x^3y^3 + y^2x^2 + xy + 1 = 4y^3 \end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện $y \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x + x^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{y^3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{y}\right) + \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - 2\dfrac{x}{y} = 4 \\ \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^3 - 2\dfrac{x}{y}\left(x + \dfrac{1}{y}\right) = 4 \end{cases}.$$

Đặt $u = x + \frac{1}{y}; v = \frac{x}{y}$, khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} u + u^2 - 2v = 4 \\ u^3 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2v = 4 - u - u^2 \\ u^3 + u(4 - u - u^2) = 4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2v = 4 - u - u^2 \\ (u-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(2+3y) = 1 & (1) \\ x(y^3 - 2) = 3 & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Nhận thấy $x = 0$, không là nghiệm của hệ, khi đó chia 2 vế của (1) cho x^3 và chia 2 vế của (2) cho x, hệ trở thành: $\begin{cases} 2 + 3y = \frac{1}{x^3} \\ y^3 - 2 = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 3y = \frac{1}{x^3} \\ 2 + \frac{3}{x} = y^3 \end{cases}$,

Đặt $\begin{cases} u = y \\ v = \frac{1}{x} \end{cases}$ đưa về hệ phương trình đối xứng loại II tìm được:

$$\left[\begin{array}{l} u = y = 1 \\ u = y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;1); \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 1 + y(x+y) = 4y & (1) \\ (x^2+1)(x+y-2) = y & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Nhận thấy $y = 0$, không là nghiệm của hệ, nên ta chia cả 2 vế của (1) và (2) cho y ta được: $\begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + (x+y) = 4 \\ \frac{x^2+1}{y}(x+y-2) = 1 \end{cases}$

Đđặt $u=\frac{x^2+1}{y};v=x+y-2$, hệ trở thành:

$$\begin{cases}u+v=2\\uv=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2+1}{y}=1\\x+y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\vee\begin{cases}x=-2\\y=5\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2);(-2;5)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{3x}+\frac{2x}{3y}=\frac{x+\sqrt{y}}{2x^2+y}\\2\left(2x+\sqrt{y}\right)=\sqrt{2x+6}-y\end{cases}\quad\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$

Lời giải

Điều kiện : $-3\le x\ne 0;y>0$.

Khi đó ta đặt $\sqrt{y}=kx\Leftrightarrow\begin{cases}kx>0\\y=k^2x^2\end{cases}$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành :

$$\frac{1}{3x}+\frac{2x}{3k^2x^2}=\frac{x+kx}{2x^2+k^2x^2}\Leftrightarrow(k-2)^2\left(k^2+k+1\right)=0\Leftrightarrow k=2.$$

Với $k=2$ ta có $\sqrt{y}=2x\Rightarrow x>0$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được : $4x^2+8x=\sqrt{2x+6}\Leftrightarrow(2x+2)^2-4=\sqrt{2x+6}$.

Đặt $\sqrt{2x+6}=2t+2$, khi đó ta có hệ đối xứng loại II.

$$\begin{cases}2x+6=(2t+2)^2\\(2x+2)^2-4=2t+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6=(2t+2)^2\\(x-t)(1+2x+2t+4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\\y=\frac{13-3\sqrt{17}}{2}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4},\frac{13-3\sqrt{17}}{2}\right)$.

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{y-1}=6\\\sqrt{x^2+2x+y+2x\sqrt{y-1}+2\sqrt{y-1}}=29\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y\ge 1$.

Đặt $a=\sqrt{y-1}\Rightarrow y=a^2+1$, khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x+a=6 \\ \sqrt{x^2+2x+a^2+1}+2(x+1)a=29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1+a=7 \\ \sqrt{(x+1)^2+a^2}+2(x+1)a=29 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2+a^2+2(x+1)a=49 & (1) \\ \sqrt{(x+1)^2+a^2}+2(x+1)a=29 & (2) \end{cases}.$$

Lấy phương trình (1) trừ theo vế cho phương trình (2), ta được:

$$(x+1)^2+a^2-\sqrt{(x+1)^2+a^2}-20=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+a^2}=5>0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+a^2=25$$

Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+a=6 \\ (x+1)^2+a^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2;a=4 \\ x=3;a=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2;y=17 \\ x=3;y=10 \end{array}\right..$$

Thử lại thấy hai nghiệm này đều thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x,y)=(2,17);(3,10)$.

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy-3x+y=0 \\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x\neq 0$, khi đó chia hai vế của phương trình thứ nhất cho x và chia hai vế của phương trình thứ hai cho x^2 ta được:

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ x^2+\dfrac{y^2}{x^2}+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2+y-5=0 \end{cases}$$

Đến đây ta đặt $u=x+\dfrac{y}{x};v=y-3$.

Khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u+v=0 \\ u^2+v-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-u \\ u^2-u-2=0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=-1\\ v=1\end{cases}\\ \begin{cases}u=2\\ v=-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}=-1\\ y-3=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+\dfrac{y}{x}=2\\ y-3=-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;0);(1;1)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y^2+x+xy-6y+1=0\\ y^3x-9y^2+x^2y+x=0\end{cases}$

Lời giải

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ, nên với $y\neq 0$ ta chia hai vế của phương trình thứ nhất của hệ cho y và hai vế của phương trình thứ hai của hệ cho y^2, ta được: $\begin{cases}\dfrac{x+y^2}{y}+\dfrac{xy+1}{y}=6\\ \dfrac{x+y^2}{y}.\dfrac{xy+1}{y}=9\end{cases}$.

Vậy ta đặt $u=\dfrac{x+y^2}{y};v=\dfrac{xy+1}{y}$. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}u+v=6\\ uv=9\end{cases}\Leftrightarrow u=v=3\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+y^2}{y}=3\\ \dfrac{xy+1}{y}=3\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=3y-y^2\\ x=3-\dfrac{1}{y}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(y-1)^3=0\\ x=3-\dfrac{1}{y}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Bài 30. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(x^2+x\right)y^2-4y^2+y+1=0\\ xy+x^2y^2+1-\left(4-x^3\right)y^3=0\end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}\left(x^2+x\right)y^2+y+1=4y^2\\ xy+x^2y^2+1+x^3y^3=4y^3\end{cases}$.

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ, nên với $y\neq 0$ ta chia hai vế của phương trình thứ nhất cho y^2 và chia hai vế của phương trình thứ hai cho y^3 ta được:

$$\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{xy+1}{y}=4\\ \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{xy+1}{y}\right)=4\end{cases}.$$

Ta đặt $\begin{cases}u=x^2+\dfrac{1}{y^2}\\ v=\dfrac{xy+1}{y}\end{cases}$ khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases}u+v=4\\ uv=4\end{cases}\Leftrightarrow u=v=2\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{xy+1}{y}=2\\ x^2+\dfrac{1}{y^2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2\left(y+1\right)=6y-2\\ x^4y^2+2x^2y^2+y\left(x^2+1\right)=12y^2-1\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^2\left(y+1\right)+2=6y\\ \left(x^4y^2+2x^2y^2+y^2\right)+y\left(x^2+1\right)=13y^2-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left(y+1\right)+2=6y & (1)\\ y^2\left(x^2+1\right)^2+y\left(x^2+1\right)+1=13y^2 & (2)\end{cases}.$$

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, nên với $y\neq 0$ ta chia hai vế phương trình (1) cho y và chia hai vế phương trình (2) cho y^2, ta được :

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{2}{y} = 6 \\ \left(x^2+1\right)^2 + \dfrac{x^2+1}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x^2+1}{y} = 7 \\ \left(x^2+1\right)^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{x^2+1}{y} = 13 \end{cases}.$$

Đến đây ta đặt $S = x^2 + 1 + \dfrac{1}{y}; P = \dfrac{x^2+1}{y};\quad \left(S^2 - 4P \ge 0\right)$ khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} S + P = 7 \\ S^2 - P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 7 - S \\ S^2 + S - 20 = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{S^2 \ge 4P} \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + \dfrac{1}{y} = 4 \\ \dfrac{x^2+1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 1 = 3 \\ \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ \dfrac{1}{y} = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = \left(-\sqrt{2};1\right);\left(\sqrt{2};1\right);\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

Bài 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\left(1 + 2x^3y\right) = 3x^6 \\ 1 + 4x^6y^2 = 5x^6 \end{cases}$

Lời giải

Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ, với $x \ne 0$ ta chia hai vế của các phương trình trong hệ cho x^6 ta được: $\begin{cases} \dfrac{y}{x^3}\left(\dfrac{1}{x^3} + 2y\right) = 3 \\ \dfrac{1}{x^6} + 4y^2 = 5 \end{cases}$.

Đặt $a = \dfrac{y}{x^3}; b = \dfrac{1}{x^3} + 2y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} ab = 3 \\ b^2 - 4a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{b^2-5}{4} \\ b\left(\dfrac{b^2-5}{4}\right) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x^3} = 1 \\ \dfrac{1}{x^3} + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}, y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3y+xy=5+x \\ x^2\left(x^4y^2-y^2+2y\right)=5+x^2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^3y+xy-x=5 \\ x^6y^2-\left(xy-x\right)^2=5 \end{cases}$.

Đặt $u=x^3y, v=xy-x$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^2-v^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u-v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3y=3 \\ xy-x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;3)$.

Bài 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+x^2+xy\left(x^2-2x-y\right)=-2 \\ 2\left(x^2-y\right)-xy\left(2x^2-2y+1\right)=5 \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} \left(x^2-y\right)^2+xy\left(x^2-y\right)+2=0 \\ 2\left(x^2-y\right)\left(1-xy\right)-xy-5=0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=x^2-y \\ v=1-xy \end{cases}$, khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2+u\left(1-v\right)+2=0 \\ 2uv+v-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-uv+u+2=0 \\ v\left(2u+1\right)=6 \end{cases}$$

<u>**TH1:**</u> Nếu $u=-\frac{1}{2} \Rightarrow v=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y=-\frac{1}{2} \\ 1-xy=-\frac{7}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + \dfrac{1}{2} \\ 1 - x\left(x^2 + \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right) \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)^2 \end{cases} \text{ (với } a = \sqrt[3]{\dfrac{2\left(81 + \sqrt{6567}\right)}{9}}\text{).}$$

TH2: Nếu $u \neq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow v = \dfrac{6}{2u+1}$ thế vào phương trình đầu tiên của hệ ta được:

$$u^2 - \frac{6u}{2u+1} + u + 2 = 0 \Leftrightarrow 2u^3 + 3u^2 - u + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+2)\left(2u^2 - u + 1\right) = 0 \Leftrightarrow u = -2 \Rightarrow v = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = -2 \\ 1 - xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 2 \\ x\left(x^2 + 2\right) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x^2 + x + 3\right) = 0 \\ y = x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y) = (1;3); \left(\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right); \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(a - \frac{1}{a}\right)^2\right) \text{ (với } a = \sqrt[3]{\frac{2\left(81 + \sqrt{6567}\right)}{9}}\text{).}$$

Bài 35. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3y(1+y) + x^2y^2(2+y) + xy^3 - 30 = 0 \\ x^2y + x\left(1 + y + y^2\right) + y - 11 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 - 30 = 0 \\ x^2y + x + xy + xy^2 + y - 11 = 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy\left(x^2 + y^2\right) + x^2y^2(x+y) + 2x^2y^2 - 30 = 0 \\ xy(x+y) + x + y + xy - 11 = 0 \end{cases}.$$

Đây là hệ phương trình đối xứng loại I tìm được các nghiệm:

Hệ phương trình có bốn nghiệm:

$$(x;y) = (1;2); (2;1); \left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right); \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}; \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right).$$

Bài 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5}{x^2 + y^2} - \dfrac{2}{x^2y^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $xy \neq 0, x+y \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(x+y\right) \\ 5-2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{2}{x}+y-\frac{2}{y}=2 \\ x^2+\frac{4}{x^2}+y^2+\frac{4}{y^2}=10 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=x-\frac{2}{x} \\ v=y-\frac{2}{y}=2 \end{cases}$

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u+v=2 \\ u^2+4+v^2+4=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ uv=2 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{10}{2x+3y}+\frac{1}{xy}=1 \\ \frac{124}{4x^2+9y^2}-\frac{1}{x^2y^2}=1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $xy \neq 0, 2x+3y \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} 10+\frac{2x+3y}{xy}=2x+3y \\ 124-\frac{4x^2+9y^2}{x^2y^2}=4x^2+9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{3}{x}+3y-\frac{2}{y}=10 \\ 4x^2+\frac{9}{x^2}+9y^2+\frac{4}{y^2}=124 \end{cases}.$$

Đặt $u=2x-\frac{3}{x}, v=3y-\frac{2}{y}$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u+v=10 \\ u^2+12+v^2+12=124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=10 \\ u^2+v^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0, v=10 \\ u=10, v=0 \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - \dfrac{3}{x} = 0 \\ 3y - \dfrac{2}{y} = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - \dfrac{3}{x} = 10 \\ 3y - \dfrac{2}{y} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 10y - 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2 - 10x - 3 = 0 \\ 3y^2 - 2 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}, y = \dfrac{5-\sqrt{31}}{3} \\ x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}, y = \dfrac{5+\sqrt{31}}{3} \\ x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}, y = \dfrac{5-\sqrt{31}}{3} \\ x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}, y = \dfrac{5+\sqrt{31}}{2} \end{array}\right. \vee \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5-\sqrt{31}}{2}, y = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{31}}{2}, y = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x = \dfrac{5+\sqrt{31}}{2}, y = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x = \dfrac{5+\sqrt{31}}{2}, y = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có tám nghiệm như trên.

Bài 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = x - 4y - 4 \\ y^4 + 8y^3 - 3x^3 + 24y^2 - 9x^2 + 32y - 9x + 37 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 - (x+1) = 0 \\ 3(x+1)^3 - (y+2)^4 = 24 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = x + 1 \\ v = y + 2 \end{cases}$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - u = 0 \\ 3u^3 - v^4 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 = -u^2 + u \\ 3u^3 - \left(-u^2 + u\right)^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 = -u^2 + u \\ u^4 - 5u^3 + u^2 + 24 = 0 \end{cases}.$$

Phương trình cuối là phương trình bậc bốn tổng quát đã biết cách giải (xem chương 1).

Bài 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3x}{2x-y+1}+x^2+3y=-\dfrac{17}{4} \\ \dfrac{3x^3+9xy}{2x-y+1}=-\dfrac{15}{4} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $2x-y+1\neq 0$.

Đặt $u=\dfrac{3x}{2x-y+1}, v=x^2+3y$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u+v=-\dfrac{17}{4} \\ uv=-\dfrac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=-\dfrac{17}{4} \\ u\left(-\dfrac{17}{4}-u\right)+\dfrac{15}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-5, v=\dfrac{3}{4} \\ u=\dfrac{3}{4}, v=-5 \end{array}\right.$$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3x}{2x-y+1}=-5 \\ x^2+3y=\dfrac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3x}{2x-y+1}=\dfrac{3}{4} \\ x^2+3y=-5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x=-10x+5y-5 \\ x^2+3y=\dfrac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} 4x=2x-y+1 \\ x^2+3y=-5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=-3 \\ x=4, y=-7 \\ x=-\dfrac{15}{2}, y=-\dfrac{37}{2} \\ x=-\dfrac{3}{10}, y=\dfrac{11}{50} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(-\frac{15}{2};-\frac{37}{2}\right);\left(-\frac{3}{10};\frac{11}{50}\right);(2;-3);(4;-7).$$

Bài 40. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(21y-20)=1 \\ x(y^3+20)=21 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq 0$ hệ phương trình viết lại dưới dạng : $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}=21y-20 \\ y^3=\dfrac{21}{x}-20 \end{cases}$.

Đặt $u=\dfrac{1}{x}, v=y$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u^3 = 21v - 20 \\ v^3 = 21u - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u^3 = 21v - 20 \\ u^3 - v^3 = 21(v-u) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v = 1 \\ u = v = 4 \\ u = v = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = \frac{1}{4}, y = 4 \\ x = -\frac{1}{5}, y = -5 \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = (1;1); \left(\frac{1}{4};4\right); \left(-\frac{1}{5};-5\right)$.

Bài 41. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6 \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x + y \geq 0$. Đặt $u = \sqrt{x+y}, v = \sqrt[3]{x-y}, (u \geq 0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 6 \\ \sqrt[6]{u^6v^6} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ \left[\begin{array}{l} uv = -8 \\ uv = 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = 6 \\ uv = -8 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = 6 \\ uv = 8 \end{cases} \end{array}\right. \xleftrightarrow{u \geq 0} \left[\begin{array}{l} u = 4, v = 2 \\ u = 2, v = 4 \\ u = 3 + \sqrt{17}, v = 3 - \sqrt{17} \end{array}\right.$$

Thay ngược lại ta tìm được nghiệm của hệ phương trình :

$$(x;y) = (12;4); (34;-30); (103 - 19\sqrt{17}; 25\sqrt{17} - 77).$$

Bài 42. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x - y + 2} + \sqrt{x + 2y - 3} = 3 \\ x^2 - y^2 - xy + 9x + 9y - 25 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $2x - y + 2 \geq 0, x + 2y - 3 \geq 0$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2x - y + 2} \\ v = \sqrt{x + 2y - 3} \end{cases}, (u, v \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2u^2 + v^2 - 1}{5} \\ y = \dfrac{2v^2 - u^2 + 8}{5} \end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^4 - v^4 + u^2v^2 + 8u^2 + 19v^2 - 73 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ u^4 + 6u^3 - 18u^2 - 6u + 17 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ \left(u^2-1\right)\left(u^2+6u-17\right)=0 \end{cases} \xleftrightarrow{u,v\geq 0} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-3+\sqrt{26} \\ v=6-\sqrt{26} \end{cases} \end{array}\right..$$

Thay ngược lại tìm được các nghiệm của hệ là:

$$\left(x;y\right)=\left(1;3\right);\left(\frac{131-24\sqrt{26}}{5};\frac{97-18\sqrt{26}}{5}\right).$$

Bài 43. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19\left(x-y\right)^2 \\ x^2-xy+y^2=7\left(x-y\right)^3 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases} \left(x-y\right)^2+3xy=19\left(x-y\right)^2 \\ \left(x-y\right)^2+xy=7\left(x-y\right)^3 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=6\left(x-y\right)^2 \\ \left(x-y\right)^2+6\left(x-y\right)^2=7\left(x-y\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ xy=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=1 \\ xy=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(3;2\right);\left(-2;-3\right)$.

Bài 44. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19\left(x+y\right)^2 \\ x^2-xy+y^2=5\left(x+y\right)^3 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases} \left(x+y\right)^2-xy=19\left(x+y\right)^2 \\ \left(x+y\right)^2-3xy=5\left(x+y\right)^3 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = -18(x+y)^2 \\ 5(x+y)^3 = 55(x+y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=11 \\ xy=-2178 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=-\dfrac{11}{2}\left(\sqrt{73}-1\right), y=\dfrac{11}{2}\left(\sqrt{73}+1\right) \\ x=\dfrac{11}{2}\left(\sqrt{73}+1\right), y=-\dfrac{11}{2}\left(\sqrt{73}-1\right) \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(0;0);\left(-\frac{11}{2}\left(\sqrt{73}-1\right);\frac{11}{2}\left(\sqrt{73}+1\right)\right);\left(\frac{11}{2}\left(\sqrt{73}+1\right);-\frac{11}{2}\left(\sqrt{73}-1\right)\right).$$

Bài 45. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8\left(x^2+y^2\right)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x+y \neq 0$.

Hệ phương trình tương đương với : $\begin{cases} 5(x+y)^2+3(x-y)^2+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13 \\ x+y+x-y+\dfrac{1}{x+y}=1 \end{cases}$.

Đặt $u=x+y+\dfrac{1}{x+y}, v=x-y, \left(|u| \geq 2\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=1 \\ 5\left(u^2-2\right)+3v^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2, v=-1 \\ u=-\dfrac{5}{4}, v=\dfrac{9}{4} \end{array}\right. \xleftrightarrow{|u|\geq 2} \begin{cases} u=2 \\ v=-1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y}=2 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;-1)$.

Bài 46. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 5\left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{\left(x^2-y^2\right)^2}\right)+2xy\left(1-\dfrac{1}{\left(x^2-y^2\right)^2}\right)=35 \\ \dfrac{3x-y}{x^2-y^2}+3x+y=9 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $x \neq \pm y$ khi đó hệ phương trình được viết lại :

$$\begin{cases} 3(x+y)^2 + \dfrac{3}{(x+y)^2} + 2(x-y)^2 + \dfrac{2}{(x-y)^2} = 35 \\ 2\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right) + x - y + \dfrac{1}{x-y} = 9 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u = x+y+\dfrac{1}{x+y} \\ v = x-y+\dfrac{1}{x-y} \end{cases}, \left(|u| \geq, |v| \geq 2\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} 3\left(u^2-2\right)+2\left(v^2-2\right)=35 \\ 2u+v=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2+2v^2=45 \\ 2u+v=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=3 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=\dfrac{39}{11} \\ v=\dfrac{21}{11} \end{cases} \end{array}\right..$$

Do $\left(|u| \geq, |v| \geq 2\right)$ nên chỉ nhận nghiệm $u = v = 3$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y}=3 \\ x-y+\dfrac{1}{x-y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-3(x+y)+1=0 \\ (x-y)^2-3(x-y)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2}, y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}, y=0 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};0\right);\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};0\right).$$

Bài 47. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+2x=3 \\ 2x^3+2y^3=3y^2-3x^2+5 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=3 \\ 2x^3+2y^3=3y^2+3x^2-6x^2+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x=3 \\ 2x^3+2y^3=3(3-2x)-6x^2+5 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+y^2=4 \\ (x+1)^3+y^3=8 \end{cases}$. Đặt $u = x+1, v = y$ dễ tìm được $(u;v)=(0;2);(2;0)$

Suy ra $(x;y)=(1;0);(-1;2)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(1;0);(-1;2)$.

Bài 48. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+xy+y=5\\x^4+x^3y+x^2(y+1)+xy+y=9\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases}x^2+1+x^2+xy+y=6\\(x^2+1)(x^2+xy+y)=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=3\\x^2+xy+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{2},y=-1-\sqrt{2}\\x=\sqrt{2},y=\sqrt{2}-1\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right);\left(\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right)$.

Bài 49. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+xy=3x-2\\(x^2+xy)^4+(y^2+2)^4=17x^4\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq 0$ hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x}+\dfrac{y^2+2}{x}=3\\\left(\dfrac{x^2+xy}{x}\right)^4+\left(\dfrac{y^2+2}{x}\right)^4=17\end{cases}$

Đặt $u=\dfrac{x^2+xy}{x},v=\dfrac{y^2+2}{x}$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases}u+v=3\\u^4+v^4=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=3-u\\u^4+(3-u)^4=17\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=2,v=1\\u=1,v=2\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x}=2\\\dfrac{y^2+2}{x}=1\end{cases}\\\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{x}=1\\\dfrac{y^2+2}{x}=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+xy=2x\\y^2+2=x\end{cases}\\\begin{cases}x^2+xy=x\\y^2+2=2x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=0\\x=3,y=-2\\x=2,y=0\\x=3,y=-1\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=(1;0);(3;-2);(2;0);(3;-1)$.

Bài 50. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^4 + xy = 2xy^2 + 7 \\ xy^3 - x^2y + 4xy + 11\left(x - y^2\right) = 28 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} \left(x - y^2\right)^2 + xy - 7 = 0 \\ xy\left(y^2 - x\right) + 4xy + 11\left(x - y^2\right) = 28 \end{cases}$

Đặt $u = y^2 - x, v = xy$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u^2 + v - 7 = 0 \\ uv + 4v - 11u = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 - u^2 \\ u\left(7 - u^2\right) + 4\left(7 - u^2\right) - 11u = 28 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 - u^2 \\ u\left(u + 2\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 - x = 0 \\ xy = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 - x = -2 \\ xy = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt[3]{49} \\ y = \sqrt[3]{7} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(3;1\right);\left(\sqrt[3]{49};\sqrt[3]{7}\right)$.

Bài 51. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)\left(x + y + 1\right) = 25\left(y + 1\right) \\ x^2 + xy + 2y^2 + x - 8y = 9 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)\left(x + y + 1\right) = 25\left(y + 1\right) \\ x^2 + y^2 + x\left(y + 1\right) + \left(y + 1\right)^2 = 10\left(y + 1\right) \end{cases}$

Nhận thấy $y = -1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y \ne -1$ hệ phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{y + 1}.\left(x + y + 1\right) = 25 \\ \dfrac{x^2 + y^2}{y + 1} + x + y + 1 = 10 \end{cases}$

Đặt $u = \dfrac{x^2 + y^2}{y + 1}, v = x + y + 1$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u+v=10 \\ uv=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y+1}=5 \\ x+y+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=1 \\ x=-\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{11}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(3;1);\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{11}{2}\right)$.

Bài 52. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 81x^3y^2-81x^2y^2+33xy^2-29y^2=4 \\ 25y^3+9x^2y^3-6xy^3-4y^2=24 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y\neq 0$ chia hai vế phương trình đầu của hệ cho y^2, chia hai vế phương trình hai của hệ cho y^3 ta được :

$$\begin{cases} 81x^3-81x^2+33x-29=\dfrac{4}{y^2} \\ 25+9x^2-6x-\dfrac{4}{y}=\dfrac{24}{y^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3x-1)^3+2(3x-1)=24+\dfrac{4}{y^2} \\ 3\left(\dfrac{2}{y}\right)^3+2.\dfrac{2}{y}=24+(3x-1)^2 \end{cases}.$$

Đặt $u=3x-1, v=\dfrac{2}{y}$ hệ phương trình trở thành : $\begin{cases} 3u^3+2u=24+v^2 \\ 3v^3+2v=24+u^2 \end{cases}$.

Đây là hệ đối xứng loại II dễ tìm được $u=v=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=2 \\ \dfrac{2}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 53. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{(x+y-1)^3}+\dfrac{1}{(x-y+1)^3}-2=0 \\ x^2-y^2+2y-2=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x+y-1\neq 0, x-y+1\neq 0$.

Đặt $\begin{cases} u=x+y-1 \\ v=x-y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v+2}{2} \end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u^3}+\dfrac{1}{v^3}-2=0 \\ \left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2-\left(\dfrac{u-v+2}{2}\right)^2+2.\dfrac{u-v+2}{2}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{u^3}+\dfrac{1}{v^3}-2=0 \\ uv=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3+v^3-2=0 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3-3uv(u+v)-2=0 \\ uv=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u+v=2 \\ u+v=-1 \end{array}\right. \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=1 \\ x-y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 54. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{(2x-3y+2)^3}+\dfrac{1}{(4x-2y-1)^3}-2=0 \\ 8x^2+2(3-8y)x+6y^2-y-3=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $2x-3y+2\neq 0, 4x-2y-1\neq 0$.

Đặt $\begin{cases} u=2x-3y+2 \\ v=4x-2y-1 \end{cases},(u,v\neq 0) \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3v-2u+7}{8} \\ y=\dfrac{v-2u+5}{4} \end{cases}$.

Hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u^3}+\dfrac{1}{v^3}-2=0 \\ 8\left(\dfrac{3v-2u+7}{8}\right)^2+2\left(3-8.\dfrac{v-2u+5}{4}\right).\dfrac{3v-2u+7}{8}+6\left(\dfrac{v-2u+5}{4}\right)^2-\dfrac{v-2u+5}{4}-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{u^3}+\dfrac{1}{v^3}-2=0 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3-3uv(u+v)-2=0 \\ uv=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u+v=2 \\ u+v=-1 \end{array}\right. \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+2=1 \\ 4x-2y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 55. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy - x = 2 \\ \dfrac{1}{(x+1)^4} + \dfrac{16}{(y+1)^4} = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x, y \neq -1$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 2(x+1) + y + 1 \\ \dfrac{1}{(x+1)^4} + \dfrac{16}{(y+1)^4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{y+1} = 1 \\ \dfrac{1}{(x+1)^4} + \dfrac{16}{(y+1)^4} = 1 \end{cases}.$$

Đặt $u = \dfrac{1}{x+1}, v = \dfrac{2}{y+1}, (u, v \neq 0)$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ \left((u+v)^2 - 2uv\right)^2 - 2u^2v^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ 2u^2v^2 - 4uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0, v = 1 \\ u = 1, v = 0 \end{array}\right. \text{(không thỏa mãn).}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 56. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 3} = 3 \\ 2xy + y^2 + 1 = 8y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x + y - 3 \geq 0, x + \dfrac{1}{y} \geq 0, y \neq 0$.

Chia 2 vế phương trình thứ hai của hệ cho y ta được : $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 3} = 3 \\ 2x + y + \dfrac{1}{y} = 8 \end{cases}$

Đặt $u = \sqrt{x + \dfrac{1}{y}}; v = \sqrt{x + y - 3} \Rightarrow$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 + v^2 + 3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2; v = 1 \\ u = 1; v = 2 \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=2 \\ \sqrt{x+y-3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$.

TH2: Nếu $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=1 \\ \sqrt{x+y-3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4\mp\sqrt{10} \\ y=3\pm\sqrt{10} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$(x;y)=(3;1);(5;-1);\left(4-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right);\left(4+\sqrt{10};3-\sqrt{10}\right)$.

Bài 57. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-2011)\left(2011+2012\sqrt[3]{y-2013}\right)=1 \\ \sqrt[3]{x-2010}(y-4024)=2012 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $u=\sqrt[3]{x-2010}, v=\sqrt[3]{y-2013}$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} \left(u^3-1\right)(2011-2012v)=1 \\ u\left(v^3-2011\right)=2012 \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được :

$2011u^3+2012u^3v+2011u-uv^3-2012v=0 \Leftrightarrow u=v=0 \Leftrightarrow x=2010, y=2013$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2010;2013)$.

Bài 58. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y-3)^3=4y^3\left(x^2y^2+xy+\dfrac{45}{4}\right) \\ x+4y-3=2xy^2 \end{cases}$.

Lời giải

TH1 : Xét $y=0 \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^3=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow (3,0)$ là một nghiệm của hệ.

TH2 : Xét $y\neq 0$, khi đó chia hai vế của phương trình thứ nhất của hệ cho y^3 và chia hai vế phương trình thứ hai của hệ cho y, ta được:

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{y}+1-\frac{3}{y}\right)^3=4\left(x^2y^2+xy+\frac{45}{4}\right)\\ \frac{x}{y}+4-\frac{3}{y}=2xy\end{cases}.$$

Đặt $u=\frac{x}{y}+1-\frac{3}{y}, v=xy$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u^3=4\left(v^2+v+\frac{45}{4}\right)\\ u+3=2v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3=4\left(\left(\frac{u+3}{2}\right)^2+\frac{u+3}{2}+\frac{45}{4}\right)\\ v=\frac{u+3}{2}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^3-u^2-8u-60=0\\ v=\frac{u+3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u-5)(u^2+4u+12)=0\\ v=\frac{u+3}{2}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=5\\ v=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{y}+1-\frac{3}{y}=5\\ xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-3=5y\\ xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{3-\sqrt{73}}{2}\\ y=-\frac{3+\sqrt{73}}{8}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{3+\sqrt{73}}{2}\\ y=\frac{-3+\sqrt{73}}{8}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(3;0);\left(\frac{3-\sqrt{73}}{2};-\frac{3+\sqrt{73}}{8}\right);\left(\frac{3+\sqrt{73}}{2};\frac{-3+\sqrt{73}}{8}\right).$$

Bài 59. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y+1)^3=4x^3\left(x^2y^2-xy+\frac{251}{16}\right)\\ 1-y+x=-16x^2y\end{cases}.$

Lời giải

<u>TH1:</u> Nếu $x=0\Rightarrow y=1$ là nghiệm của hệ.

<u>TH2:</u> Nếu $x\neq 0$ chia hai vế phương trình đầu của hệ cho x^3, chia hai vế phương trình hai của hệ cho x ta được:

$$\begin{cases} \left(1-\frac{y}{x}+\frac{1}{x}\right)^3 = 4\left(x^2y^2 - xy + \frac{251}{16}\right) \\ \frac{1}{x} - \frac{y}{x} + 1 = -16xy \end{cases}.$$

Đặt $u = \frac{1}{x} - \frac{y}{x} + 1, v = xy$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^3 = 4\left(v^2 - v + \frac{251}{16}\right) \\ u = -16v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = 4\left(v^2 - v + \frac{251}{16}\right) \\ u = -16v \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4v+1)\left(4096v^2 - 1020v + 251\right) = 0 \\ u = -16v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = -\frac{1}{4}v \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{y}{x} + 1 = 4 \\ xy = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - y + x = 4x \\ xy = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{6}, y = \frac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = (0;1);\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right)$.

Bài 60. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + y^4 + 16 = 6\left(x^2y^2 - x^2 + 2xy + y^2\right) \\ x^2 - y^2 - 3 = 3\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - \frac{1}{xy}\right) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(x^2 - y^2\right)^2 + 16 = 4x^2y^2 - 6\left(x^2 - y^2\right) + 12xy \\ x^2 - y^2 - 3 = 3\left(\frac{x^2 - y^2 - 1}{xy}\right) \end{cases}.$$

Thấy sự lặp lại của xy và $x^2 - y^2$ nên ta đặt $u = x^2 - y^2, v = xy, (v \neq 0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2+16=4v^2-6u+12v \\ u-3=3.\dfrac{u-1}{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+16=36\left(\dfrac{u-1}{u-3}\right)^2-6u+36.\dfrac{u-1}{u-3} \\ v=\dfrac{3(u-1)}{u-3} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\left(u^3-83u+174\right)=0 \\ v=\dfrac{3(u-1)}{u-3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u^3-83u+174=0 \ (1) \\ v=\dfrac{3(u-1)}{u-3} \end{cases} \end{array}\right.\cdot$$

Phương trình (1) là phương trình bậc ba giải được bằng phương pháp lượng giác hóa tìm được u,v suy ra x,y.

Bài 61. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-\dfrac{2x^2}{y}+\dfrac{2x}{y^2}=\dfrac{1}{y^3} \\ x^2+\dfrac{1}{y^2}-x+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện : $y\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x^3-\dfrac{1}{y^3}-2\dfrac{x}{y}\left(x-\dfrac{x}{y}\right)=0 \\ \left(x-\dfrac{1}{y}\right)^2+\dfrac{2x}{y}-\left(x-\dfrac{1}{y}\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{y}\right)^3+\dfrac{x}{y}\left(x-\dfrac{1}{y}\right)=0 \\ \left(x-\dfrac{1}{y}\right)^2+\dfrac{2x}{y}-\left(x-\dfrac{1}{y}\right)=2 \end{cases}.$$

Đặt $u=x-\dfrac{1}{y}, v=\dfrac{x}{y}$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u^3+uv=0 \\ u^2+2v-u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(u^2+v\right)=0 \\ u^2+2v-u=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=0 \\ u^2+2v-u=2 \end{cases} \\ \begin{cases} v=-u^2 \\ u^2+2v-u=2 \end{cases} \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=0\\ v=1\end{cases}\\ \begin{cases}v=-u^2\\ u^2-2u^2-u=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}u=0\\ v=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-\dfrac{1}{y}=0\\ \dfrac{x}{y}=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,y=-1\\ x=1,y=1\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;-1);(1;1)$.

Bài 62. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+1+y^2+xy=4y\\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1}\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y\neq 0$ chia hai vế phương trình đầu của hệ cho y, ta được : $\dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4\\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1}\end{cases}$.

Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y}, v=x+y$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases}u+v=4\\ v-2=\dfrac{1}{u}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=4-v\\ (4-v)(v-2)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=4-v\\ -v^2+6v-9=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u=1\\ v=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}=1\\ x+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-x\\ x^2+1=3-x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,y=2\\ x=-2,y=5\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2);(-2;5)$.

Bài 63. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2y^2+2y^2+16=11xy\\ x^2+2y^2+12y=3xy^2\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y\neq 0$ chia hai vế phương trình của hệ cho y^2 ta được :

$$\begin{cases} x^2+2+\dfrac{16}{y^2}=11\dfrac{x}{y} \\ \dfrac{x^2}{y^2}+2+\dfrac{12}{y}=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{4}{y}\right)^2+2=3\dfrac{x}{y} \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2=3\left(x-\dfrac{4}{y}\right) \end{cases}.$$

Đặt $u=x-\dfrac{4}{y}, v=\dfrac{x}{y}$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u^2+2=3v \\ v^2+2=3u \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1, v=1 \\ u=2, v=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-\dfrac{4}{y}=1 \\ \dfrac{x}{y}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-\dfrac{4}{y}=2 \\ \dfrac{x}{y}=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}, y=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, y=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \\ x=-2, y=-1 \\ x=4, y=2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=(-2;-1);(4;2);\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2};\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right).$$

Bài 64. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2\left(y^2+1\right)+2y\left(x^2+x+1\right)=3 \\ \left(x^2+x\right)\left(y^2+y\right)=1 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x^2y^2+2x^2y+x^2+2xy+2y=3 \\ (xy+y)(xy+x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+x)^2+2(xy+y)=3 \\ (xy+y)(xy+x)=1 \end{cases}.$$

Đặt $u=xy+x, v=xy+y$ dễ tìm được $\left[\begin{array}{l} u=1, v=1 \\ u=-2, v=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy+x=1 \\ xy+y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy+x=-2 \\ xy+y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, y=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm:

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2};-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 65. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2=3x-4y+1\\3x^2\left(x^2+9\right)-2y^2\left(y^2+9\right)=18\left(x^3+y^3\right)+2y^2\left(7-y\right)+3\end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases}x^2-3x+y^2+4y=1\\3\left(x^2-3x\right)^2-2\left(y^2+4y\right)^2=3\end{cases}$.

Đặt $u=x^2-3x, v=y^2+4y,\left(u\geq-\frac{9}{4}, v\geq-4\right)$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases}u+v=1\\3u^2-2v^2=3\end{cases}\xleftrightarrow{u\geq-\frac{9}{4},v\geq-4}\begin{cases}u=1\\v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x=1\\y^2+4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3-\sqrt{13}}{2},y=0\\x=\frac{3-\sqrt{13}}{2},y=-4\\x=\frac{3+\sqrt{13}}{2},y=0\\x=\frac{3+\sqrt{13}}{2},y=-4\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2};-4\right);\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2};0\right);\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};0\right);\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};-4\right).$$

Bài 66. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy+y^2+x+\frac{y^3}{x+1}=2\\2x+y+\frac{y^2}{x+1}=2\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x\neq-1$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases}\left(x+y+1\right)\left(\frac{y^2}{x+1}+x\right)=2\\x+y+1+\frac{y^2}{x+1}+x=3\end{cases}$.

Đặt $u = x + y + 1, v = \dfrac{y^2}{x+1} + x$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} uv = 2 \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1, v = 2 \\ u = 2, v = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ \dfrac{y^2}{x+1} + x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + 1 = 2 \\ \dfrac{y^2}{x+1} + x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 0 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}, y = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}, y = -\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y) = (0;1);(1;0);\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4};\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right);\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};-\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right).$$

Bài 67. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^4 - 4x^3y^2 - 4x^2y + 6x^2 - 4xy^2 + 3 = 0 \\ 5x^4 - 4x^4y^2 - 8x^2y^2 + 6x^2 - 4y^2 + 5 = 0 \end{cases}.$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} 3\left(x^2+1\right)^2 - 4x\left(x^2+1\right)y^2 - 4x^2y = 0 \\ 5\left(x^2+1\right)^2 - 4\left(x^2+1\right)^2y^2 - 4x^2 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4\dfrac{xy^2}{x^2+1} - 4\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2 y = 0 \\ 5 - 4y^2 - 4\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2 = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{u=\frac{x}{x^2+1}} \begin{cases} 4\left(u^2y + y^2u\right) - 3 = 0 \\ 4\left(u^2 + y^2\right) - 5 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ u = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;1)$.

Bài 68. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[3]{2x-y} + \sqrt[3]{3x-2y} = 2 \\ 2\sqrt[3]{3x-2y} + 5x + y = 8 \end{cases}.$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}\sqrt[3]{2x-y}+\sqrt[3]{3x-2y}=2\\ 2\sqrt[3]{3x-2y}+13(2x-y)-7(3x-2y)=8\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[3]{2x-y}\\ v=\sqrt[3]{3x-2y}\end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u+v=2\\ 2v+13u^3-7v^3=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\\ 2(2-u)+13u^3-7(2-u)^3=8\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\\ 20u^3-42u^2+82u-60=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\\ (u-1)(20u^2-22u+60)=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\ v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{2x-y}=1\\ \sqrt[3]{3x-2y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=1\\ 3x-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 69. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2-x\sqrt{\dfrac{y^2+2}{x}}=2x-2\\ x^3+4x^2-12x=y^4+y^2-\dfrac{39}{8}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$ phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$y^2+2-x\sqrt{\frac{y^2+2}{x}}-2x=0\Leftrightarrow\frac{y^2+2}{x}-\sqrt{\frac{y^2+2}{x}}-2=0\ (1).$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{y^2+2}{x}}=2\Leftrightarrow y^2=4x-2.$$

Thay $y^2=4x-2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^3+4x^2-12x=(4x-2)^2+4x-2-\frac{39}{8}\Leftrightarrow x^3-12x^2+\frac{23}{8}=0.$$

$$\Leftrightarrow(2x-1)(4x^2-46x-23)=0\xleftrightarrow{x>0}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{23+3\sqrt{69}}{4}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}, y=0 \\ x=\dfrac{23+3\sqrt{69}}{4}, y=\pm\sqrt{3\left(7+\sqrt{69}\right)} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm:

$$(x;y)=\left(\frac{1}{2};0\right);\left(\frac{23+3\sqrt{69}}{4};-\sqrt{3\left(7+\sqrt{69}\right)}\right);\left(\frac{23+3\sqrt{69}}{4};\sqrt{3\left(7+\sqrt{69}\right)}\right).$$

<u>Nhận xét</u>: Để giải phương trình (1) ta đặt $t=\sqrt{\dfrac{y^2+2}{x}},(t>0)$ tìm được $t=2$.

Bài 70. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \left(\dfrac{2x}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{y}{x^2}-9\right)=18 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0, 9x+\dfrac{y}{x}\geq 0, y+\dfrac{2x}{y}\geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \left(2x-y^2\right)\left(y-9x^2\right)=18x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ 18x^3+y^3+9x^2y^2=2xy \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \dfrac{9x^2}{y}+\dfrac{y^2}{2x}+\dfrac{9}{2}xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \dfrac{9}{2}x\left(y+\dfrac{2x}{y}\right)+\dfrac{y^2}{2x}=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \dfrac{9}{2}x\left(y+\dfrac{2x}{y}\right)+\dfrac{y}{2x}\left(y+\dfrac{2x}{y}\right)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \left(y+\dfrac{2x}{y}\right)\left(9x+\dfrac{y}{x}\right)=4 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{9x+\dfrac{y}{x}} \\ v=\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}} \end{cases},(u,v\geq 0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+2v=4 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}=2 \\ \sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x+\dfrac{y}{x}=4 \\ y+\dfrac{2x}{y}=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+y=4x \\ y^2+2x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x-9x^2 \\ \left(4x-9x^2\right)^2+2x=4x-9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=\dfrac{1}{9}, y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 71. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x-2\right)\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}}=2x-y \\ y^2\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}}=2x^2+y^2-4x \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y \neq 0, 1+\dfrac{3x}{y} \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{2}{y}\right)\sqrt{1+\dfrac{3x}{y}}=2\dfrac{x}{y}-1 \\ \sqrt{1+\dfrac{3x}{y}}=2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1-4\dfrac{x}{y}.\dfrac{1}{y} \end{cases}$.

Đặt $u=\dfrac{x}{y}, v=\dfrac{1}{y}$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} \left(u-2v\right)\sqrt{1+3u}=2u-1 \\ \sqrt{1+3u}=2u^2-4uv+1 \end{cases}$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(u-2v+1\right)\sqrt{1+3u}=2u\left(u-2v+1\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(u-2v+1\right)\left(\sqrt{1+3u}-2u\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2v-1 \\ 2u=\sqrt{1+3u} \end{array}\right..$$

Xét trường hợp suy ra hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;2\right);\left(4;4\right)$.

Bài 72. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+y\right)^2+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{1}{x^2}+2y=4x+5 \\ x^2+x\left(y-\sqrt{2x-y}\right)=2x-1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0, 2x - y \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} (x+y)^2 + \dfrac{2(x+y)}{x} - 2 + \dfrac{1}{x^2} + 2y = 4x + 5 \\ x^2 + x\left(y - \sqrt{2x-y}\right) = 2x - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + y + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2(y - 2x) = 7 \\ x + y - \sqrt{2x-y} = 2 - \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + y + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2(y - 2x) = 7 \\ x + y + \dfrac{1}{x} - \sqrt{2x-y} = 2 \end{cases}.$$

Đặt $u = x + y + \dfrac{1}{x}, v = \sqrt{2x-y}, (v \geq 0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2 - 2v^2 = 7 \\ u - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u - 2 \\ u^2 - 2(u-2)^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 3, v = 1 \\ u = 5, v = 3 \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} = 3 \\ \sqrt{2x-y} = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} = 5 \\ \sqrt{2x-y} = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + xy + 1 = 3x \\ 2x - y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + xy + 1 = 5x \\ 2x - y = 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = \dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{7 - \sqrt{46}}{3}, y = -\dfrac{13 + 2\sqrt{46}}{3} \\ x = \dfrac{7 + \sqrt{46}}{3}, y = \dfrac{-13 + 2\sqrt{46}}{3} \end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y) = (1;1); \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right); \left(\frac{7 - \sqrt{46}}{3}; -\frac{13 + 2\sqrt{46}}{3}\right); \left(\frac{7 + \sqrt{46}}{3}; \frac{-13 + 2\sqrt{46}}{3}\right).$$

Bài 73. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 2x^3 - 5x^2 + y^2 - 6x - 11 = 0 \\ x^2 + x = \dfrac{3\sqrt{y^2 - 7} - 6}{\sqrt{y^2 - 7}} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $|y| > \sqrt{7}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases} (x^2 + x - 6)(x^2 + x) + y^2 - 11 = 0 \\ x^2 + x = \dfrac{3\sqrt{y^2 - 7} - 6}{\sqrt{y^2 - 7}} \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + x \\ v = \sqrt{y^2 - 7} \end{cases}, (v > 0)$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} (u-6)u + v^2 - 4 = 0 \\ u = \dfrac{3v-6}{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3v-6}{v}\right)^2 - 6.\dfrac{3v-6}{v} + v^2 - 4 = 0 \\ u = \dfrac{3v-6}{v} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v^4 - 13v^2 + 36 = 0 \\ u = \dfrac{3v-6}{v} \end{cases} \xleftrightarrow{v>0} \left[\begin{array}{l} u = 0, v = 2 \\ u = 1, v = 3 \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ \sqrt{y^2 - 7} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + x = 1 \\ \sqrt{y^2 - 7} = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = \pm\sqrt{11} \\ x = -1, y = \pm\sqrt{11} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, y = \pm 4 \\ x = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, y = \pm 4 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có tám nghiệm là:

$$(x;y) = \left(0; \pm\sqrt{11}\right); \left(-1; \pm\sqrt{11}\right); \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \pm 4\right); \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \pm 4\right).$$

Bài 74. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 1 - y\sqrt{x+y} = y \\ x^2(x+y-2) + x - 2 = 5y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x + y \ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases} x^2 + 1 - y\sqrt{x+y} = y \\ x^2(x+y-2) + x + y - 2 = 6y \end{cases}$.

Nhận thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y \ne 0$ hệ phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} - \sqrt{x+y} = 1 \\ \dfrac{x^2+1}{y}.(x+y-2) = 6 \end{cases}$.

Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y}, v=\sqrt{x+y}\ge 0$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases}u-v=1\\ u\left(v^2-2\right)=6\end{cases}\xleftrightarrow{v\ge 0}\begin{cases}u=3\\ v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}=3\\ \sqrt{x+y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{3+\sqrt{53}}{2}, y=\dfrac{11+\sqrt{53}}{2}\\ x=\dfrac{-3+\sqrt{53}}{2}, y=\dfrac{11-\sqrt{53}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{3+\sqrt{53}}{2};\frac{11+\sqrt{53}}{2}\right);\left(\frac{-3+\sqrt{53}}{2};\frac{11-\sqrt{53}}{2}\right).$$

Bài 75. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-3\sqrt{y}=3x+y\\ x\sqrt{y}\left(y-1\right)=3\left(x+\sqrt{y}\right)\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $y\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{y}$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases}x^4-3t=3x+t^2\\ xt\left(t^2-1\right)=3\left(x+t\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-t^2=3\left(x+t\right)\\ xt^3-xt=3\left(x+t\right)\end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được :

$$x^4-t^2=xt^3-xt\Leftrightarrow x\left(x^3-t^3\right)+t\left(x-t\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x-t\right)\left(x\left(x^2+xt+t^2\right)+t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=t\\ x\left(x^2+xt+t^2\right)+t=0\end{array}\right..$$

<u>TH1 :</u> Nếu $x=t\Leftrightarrow x=\sqrt{y}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được :

$$y^2-3\sqrt{y}=3\sqrt{y}+y\Leftrightarrow y^2-y-6\sqrt{y}=0\Leftrightarrow\sqrt{y}\left(y\sqrt{y}-\sqrt{y}-6\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-2\right)\left(y+2\sqrt{y}+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0, y=0\\ x=2, y=4\end{array}\right..$$

<u>TH2 :</u> Nếu $x\left(x^2+xt+t^2\right)+t=0$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}x\left(x^2+xt+t^2\right)+t=0\\ xt^3-xt=3\left(x+t\right)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\left(x\left(x^2+xt+t^2\right)+t\right)-xt^3+xt+3x+3t=0 \\ xt^3-xt=3\left(x+t\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+t\right)\left(x^2t+t+3\right)=0 \\ xt^3-xt=3\left(x+t\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ xt^3-xt=3\left(x+t\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ t^2-t^4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,t=0 \\ x=-1,t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,y=0 \\ x=-1,y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(-1;1\right);\left(2;4\right)$.

Bài 76. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(2x+y-1\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)=8\sqrt{x} \\ \left(\sqrt{x+3}+\sqrt{xy}\right)^2+xy=2x\left(6-x\right) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x\ge 0, xy\ge 0$.

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x>0$ chia hai vế phương trình đầu của hệ cho $\sqrt{x}$, phương trình thứ hai của hệ cho x ta được :

$$\begin{cases} \left(2x+y-1\right)\left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}+1\right)=8 \\ \left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}\right)^2+y=2\left(6-x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x+y-1\right)\left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}+1\right)=8 \\ \left(\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}\right)^2+2x+y=12 \end{cases}.$$

Đặt $u=\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}, v=2x+y, \left(u,v>0\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \left(u+1\right)\left(v-1\right)=8 \\ u^2+v=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=12-u^2 \\ \left(u+1\right)\left(11-u^2\right)=8 \end{cases} \xleftrightarrow{u,v>0} \begin{cases} u=3 \\ v=3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{y}=3 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{3-2x}=3 \\ y=3-2x \end{cases}.$$

Để ý hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{3-2x}$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{3}{2}\right]$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=1\Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 77. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}+x}+y^2=0 \\ \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $y\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+y+\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0 \\ \left(\dfrac{x}{y}+y\right)^2+2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=3 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{x}{y}+y \\ v=\sqrt{x^2+1}-x \end{cases}$, $\left(v>0\right)$ hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u+v=0 \\ u^2+2v=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u=-v \\ v^2+2v-3=0 \end{cases}\xleftrightarrow{v>0}\begin{cases} u=-1 \\ v=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{x}{y}+y=-1 \\ \sqrt{x^2+1}-x=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-y-y^2 \\ \sqrt{x^2+1}=x+1 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0,y=0 \\ x=0,y=-1 \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;-1\right)$.

Bài 78. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2y^2+3xy-2=0 \\ \dfrac{x-y+20}{\left(x+y\right)^2}=3\sqrt{x-y} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x-y\geq 0, x+y\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \sqrt{x - y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = u \\ x - y = v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u + v^2}{2} \\ y = \dfrac{u - v^2}{2} \end{cases}.$$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u + v^2}{2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{u - v^2}{2}\right)^2 + 3\left(\dfrac{u + v^2}{2}\right)\left(\dfrac{u - v^2}{2}\right) - 2 = 0 \\ \dfrac{v^2 + 20}{u^2} = 3v \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6u^2 - 2uv^2}{4} - 2 = 0 \\ \dfrac{v^2 + 20}{u^2} = 3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - uv^2 - 4 = 0 \\ v^2 - 3u^2v + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ \sqrt{x - y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(3;-1\right)$.

Bài 79. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-1} - y\left(1 + 2\sqrt{2x-1}\right) = -8 \\ y^2 + y\sqrt{2y - 4x - 1} - 2x + y = 13 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}, 2y - 1 - 4x \ge 0$.

Đặt $u = \sqrt{2x-1}, \left(u \ge 0\right) \Rightarrow x = \dfrac{u^2 + 1}{2}$.

Từ phương trình của hệ suy ra $y = \dfrac{u+8}{1+2u}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(\frac{u+8}{1+2u}\right)^2 + \frac{u+8}{1+2u}\sqrt{2.\frac{u+8}{1+2u} - 1 - 4.\frac{u^2+1}{2}} - 2.\frac{u^2+1}{2} + \frac{u+8}{1+2u} = 13.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{u+8}{1+2u}\right)^2 + \frac{u+8}{1+2u}\sqrt{\frac{-4u^3 - 2u^2 - 4u + 13}{1+2u}} - u^2 + \frac{u+8}{1+2u} - 14 = 0 \text{ (1)}.$$

Xét hàm số: $f(u)=\left(\dfrac{u+8}{1+2u}\right)^2+\dfrac{u+8}{1+2u}\sqrt{\dfrac{-4u^3-2u^2-4u+13}{1+2u}}-u^2+\dfrac{u+8}{1+2u}-14$

trên $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'(u)=-30.\dfrac{u+8}{\left(2u+1\right)^3}-\dfrac{15}{\left(2u+1\right)^2}\sqrt{\dfrac{-4u^3-2u^2-4u+13}{1+2u}}$

$$+\frac{u+8}{2u+1}.\frac{\dfrac{-16u^3-16u^2-4u-30}{\left(2u+1\right)^2}}{2\sqrt{\dfrac{-4u^3-2u^2-4u+13}{1+2u}}}-2u-\frac{15}{\left(2u+1\right)^2}<0,\forall u\ge 0$$

Nên $f(u)$ là hàm nghịch biến trên $\left[0;+\infty\right)$

Vì vậy: $(1)\Leftrightarrow f(u)=f(1)\Leftrightarrow u=1\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;3\right)$.

Chủ đề 9. KỸ THUẬT ĐẶT ẨN PHỤ DẠNG TỔNG - HIỆU

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Đặt $\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{u-v}{2}\end{cases}$ thay vào hệ đưa về giải một hệ phương trình đối với $\left(u;v\right)$ dễ xử lý hơn.

Dấu hiện nhận biết:

Phương trình trong hệ có chứa các đại lượng đối xứng đi cùng nửa đối xứng dưới đây:

- $x^2-y^2=\left(x+y\right)\left(x-y\right)=uv$.
- $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)=\left(x+y\right)\left(\dfrac{3\left(x-y\right)^2+\left(x+y\right)^2}{4}\right)=\dfrac{1}{4}u\left(3v^2+u^2\right)$

- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = (x-y)\left[\dfrac{3(x+y)^2+(x-y)^2}{4}\right] = \dfrac{1}{4}v(3u^2+v^2)$

- $x^4 - y^4 = (x^2-y^2)(x^2+y^2) = (x-y)(x+y)\left[\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}uv(u^2+v^2)$$

- $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = \dfrac{(u^2+v^2)^2}{4} - \dfrac{1}{8}(u^2-v^2)^2 = \dfrac{u^4+6u^2v^2+v^4}{8}$

- $x^3 + 3xy^2 = \dfrac{u^3+v^3}{2}; y^3 + 3yx^2 = \dfrac{u^3-v^3}{2}$.

Tổng quát ta đặt $\begin{cases} u = mx + ny \\ v = px + qy \end{cases}$.

A. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{3}{2y} - \dfrac{1}{x} \\ (x+y)^3 = 5 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} 2xy(x^2-y^2) = 3x - 2y \\ (x+y)^3 = 5 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{u^2-v^2}{4} \\ x^2 - y^2 = uv \\ 3x - 2y = \dfrac{3(u+v)}{2} - 2.\dfrac{u-v}{2} = \dfrac{u+5v}{2} \end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2uv.\dfrac{u^2-v^2}{4} = \dfrac{u+5v}{2} \\ u^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u^2-v^2) = u + vu^3 \\ u^3 = 5 \end{cases}.$$

.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\left(v^3+1\right)=0 \\ u^3=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\sqrt[3]{5} \\ v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[3]{5} \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[3]{5}+1}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{\sqrt{2}};\dfrac{\sqrt[3]{5}+1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+y+3\right)\sqrt{x-y}+2y+4=0 \\ \left(x-y\right)\left(x^2+\sqrt{4}\right)=y^2+1 \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge y$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\left(x+y+3\right)\sqrt{x-y}+x+y+3+1-\left(x-y\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+3\right)\left(\sqrt{x-y}+1\right)+\left(1-\sqrt{x-y}\right)\left(1+\sqrt{x-y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-y}+1\right)\left(x+y+4-\sqrt{x-y}\right)=0 \Leftrightarrow x+y+4=\sqrt{x-y}.$$

Vậy hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} x+y+4=\sqrt{x-y} \\ \left(x-y\right)\left(x^2+4\right)=y^2+1 \end{cases}$.

Đến đây có nhiều cách xử lý hệ phương trình trên:

<u>Cách 1:</u> Thế $4=\sqrt{x-y}-x-y$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(x-y\right)\left(x^2+\sqrt{x-y}-x-y\right)=y^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x^2-x\right)+\sqrt{\left(x-y\right)^3}-xy-1=0$$

$$\Leftrightarrow x\left[\left(x-y\right)\left(x-1\right)-y\right]+\left(\sqrt{\left(x-y\right)^3}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-y-1\right)+\frac{\left(x-y-1\right)\left(x-y+\sqrt{x-y}+1\right)}{\sqrt{x-y}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y-1\right)\left[x^2+\frac{x-y+\sqrt{x-y+1}}{\sqrt{x-y+1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x-y=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;-2)$.

Cách 2: Viết lại $\begin{cases} x^2-y^2=(x-y)\left(\sqrt{x-y}-4\right) \\ (x-y)\left(x^2+4\right)=y^2+1 \end{cases}$ $\sqrt{}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2+4(x-y)-\sqrt{(x-y)^3} \\ (x-y)\left(x^2+4\right)=x^2+4(x-y)-\sqrt{(x-y)^3}+1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2+4(x-y)-\sqrt{(x-y)^3} \\ x^2(x-y)=x^2-\sqrt{(x-y)^3}+1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2+4(x-y)-\sqrt{(x-y)^3} \\ x^2(x-y-1)+\sqrt{(x-y)^3}-1=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2+4(x-y)-\sqrt{(x-y)^3} \\ (x-y-1)\left[x^2+\dfrac{x-y+\sqrt{x-y}+1}{\sqrt{x-y}+1}\right]=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^2+4(x-y)-\sqrt{(x-y)^3} \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Cách 3: Thấy xuất hiện dấu hiệu của tổng và hiệu nên đặt

$$\begin{cases} u=\sqrt{x-y} \\ v=x+y \end{cases},(u\ge 0) \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u^2+v}{2} \\ y=\dfrac{u^2-v}{2} \end{cases}.$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u = v + 4 \\ u^2\left[\left(\dfrac{u^2+v}{2}\right)^2 + 4\right] = \left(\dfrac{u^2-v}{2}\right)^2 + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = u - 4 \\ (u-1)\left(u^5 + 3u^4 - 5u^3 - 11u^2 + 12u + 20\right) = 0 \end{cases}.$$

Ta có: $u^5 + 3u^4 - 5u^3 - 11u^2 + 12u + 20 \geq$

$$\geq 3u^4 - 5u^3 - 11u^2 + 12u + 20 > 0, \forall u \geq 0$$

Do đó hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} u = v - 4 \\ u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Nhận xét. Nếu ta đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = \sqrt{x-y} \end{cases}, (v \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v^2}{2} \\ y = \dfrac{u-v^2}{2} \end{cases}$ ngay từ đầu phương trình thứ nhất của hệ trở thành: $(u+3)v + u - v^2 + 4 = 0$.

$$\Leftrightarrow (v+1)(u-v+4) = 0 \Leftrightarrow u - v + 4 = 0 .$$

Ta có các kết quả tương tự trên.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x-y)^4 + (2y-x)^4 = 1 \\ (x-y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = \dfrac{1}{9} \end{cases}$.

Lời giải

Bài này đã được nhắc đến trong chủ đề đặt ẩn phụ dạng đại số.

Ta trình bày lời giải cho dạng đặt ẩn phụ tổng hiệu.

Viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$\left[(2x-y)^2 + (2y-x)^2\right]^2 - 2(2x-y)^2(2y-x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[5\left(x^2+y^2\right) - 8xy\right]^2 - 2\left(5xy - 2x^2 - 2y^2\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[5.\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2} - 8xy\right]^2 - 2\left(5xy - \left[(x+y)^2 + (x-y)^2\right]\right)^2 = 1$$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \left(5.\dfrac{u^2+v^2}{2} - 8.\dfrac{u^2-v^2}{4}\right)^2 - 2\left(5.\dfrac{u^2-v^2}{4} - u^2 - v^2\right)^2 = 1 \\ v.\dfrac{3v^2+u^2}{4} = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(u^2+9v^2\right)^2 - \dfrac{1}{8}\left(u^2-9v^2\right)^2 = 1 \\ 3v^3 + u^2v = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^4 + 54u^2v^2 + 81v^4 = 8 \\ 3v^3 + u^2v = \dfrac{4}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1, v = \dfrac{1}{3} \\ u = 1, v = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - 2014x = y^4 - 2013y \\ \left(x^2 - y^2\right)^3 = 4027 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ cho có số khủng ta chưa quan tâm đến điều này.

Phương trình thứ hai của hệ có tích số $(x-y)(x+y)$ và phương trình đầu viết được $x^4 - y^4 = 2013(x-y) + x = 2013(x-y) + \dfrac{x+y+x-y}{2}$ biểu diễn được theo $x-y$ và $x+y$ nên thử đặt ẩn phụ xem sao.

Hệ phương trình được viết lại:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 2013(x-y) + x \\ \left[(x-y)(x+y)\right]^3 = 4027 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)\left[\dfrac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{2}\right] = 2013(x-y) + \dfrac{x-y+x+y}{2} \\ \left[(x-y)(x+y)\right]^3 = 4027 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $uv \neq 0$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} uv.\dfrac{u^2+v^2}{2} = 2013v + \dfrac{u+v}{2} \\ u^3v^3 = 4027 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv\left(u^2+v^2\right) = 4027v + u \\ u^3v^3 = 4027 \end{cases}.$$

Để ý một chút nếu thế 4027 theo uv từ phương trình thứ hai lên phương trình thứ nhất ta có nhân tử chung u.

Do vậy ta có:

$$uv\left(u^2+v^2\right) = u^3v^3.v + u \Leftrightarrow u\left[u^2v + v^3 - u^2v^4 - 1\right] = 0.$$

$$\Leftrightarrow u\left[u^2v\left(1-v^3\right) + v^3 - 1\right] = 0 \Leftrightarrow u\left(u^2v-1\right)\left(1-v^3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u^2v = 1 \\ v^3 = 1 \end{array}\right..$$

Đối chiếu với $uv \neq 0$ ta được $u^2v = 1$ hoặc $v^3 = 1$.

<u>TH1:</u> Nếu $v^3 = 1$ đưa về giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} v^3 = 1 \\ u^3v^3 = 4027 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt[3]{4027} \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[3]{4027} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{4027}+1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{4027}-1}{2} \end{cases}.$$

<u>TH2:</u> Nếu $u^2v = 1$ đưa về giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2v = 1 \\ u^3v^3 = 4027 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = \sqrt[3]{4027} \\ u = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4027}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4027}} \\ v = \left(\sqrt[3]{4027}\right)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4027}} \\ x - y = \left(\sqrt[3]{4027}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{4027}} + \left(\sqrt[3]{4027}\right)^2}{2} \\ y = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{4027}} - \left(\sqrt[3]{4027}\right)^2}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{4027}+1}{2};\frac{\sqrt[3]{4027}-1}{2}\right);\left(\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{4027}} + \left(\sqrt[3]{4027}\right)^2}{2};\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{4027}} - \left(\sqrt[3]{4027}\right)^2}{2}\right).$$

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^3 - 7x + y^3 - 13y + 18 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y) = 3 \\ (x+y)\left(\dfrac{3(x-y)^2 + (x+y)^2}{4}\right) - 7(x+y) - 3\big(x+y-(x-y)\big) + 18 = 0 \end{cases}.$$

Đặt $u = x + y, v = x - y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} uv = 3 \\ u\left(\dfrac{u^2 + 3v^2}{4}\right) - 7u - 3(u - v) + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3 \\ u^3 + 3uv^2 - 40u + 12v + 72 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3 \\ u^3 + 9v - 40u + 12v + 72 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{3}{u} \\ u^3 + \dfrac{63}{u} - 40u + 72 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{3}{u} \\ u^4 - 40u^2 + 72u + 63 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{3}{u} \\ (u-3)(u+7)(u^2 - 4u - 3) = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 3, v = 1 \\ u = -7, v = -\dfrac{3}{7} \\ u = 2 - \sqrt{7}, v = -2 - \sqrt{7} \\ u = 2 + \sqrt{7}, v = -2 + \sqrt{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = -\dfrac{3}{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 2 - \sqrt{7} \\ x - y = -2 - \sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 2 + \sqrt{7} \\ x - y = -2 + \sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 1 \\ x = \pm\sqrt{7}, y = 2 \\ x = -\dfrac{26}{7}, y = -\dfrac{23}{7} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y) = (2;1);\left(\pm\sqrt{7};2\right);\left(-\dfrac{26}{7};-\dfrac{23}{7}\right)$.

__Cách 2:__ Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x \neq 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^3 - 7x + y^3 - 13y + 18 = 0 \\ x^3 - xy^2 - 3x = 0 \end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình trên ta được:

$$x\left(y^2 - 4\right) + y^3 - 13y + 18 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(y-2\right)\left(x\left(y+2\right) + y^2 + 2y - 9\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ x\left(y+2\right) + y^2 + 2y - 9 = 0 \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $y = 2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2 - 4 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}.$$

TH2: Nếu $x\left(y+2\right) + y^2 + 2y - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{y+2} - y$ (do $y = -2$ không thỏa mãn hệ phương trình).

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(\frac{9}{y+2} - y\right)^2 - y^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{23}{7} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 1 \\ x = -\dfrac{26}{7}, y = -\dfrac{23}{7} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(2;1\right);\left(\pm\sqrt{7};2\right);\left(-\dfrac{26}{7};-\dfrac{23}{7}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^2 + 3y^2 - 8xy - 1\right)\left(x+y\right)^2 - 48 = 0 \\ \left(2x^2 - 2xy + 1\right)\left(x-y\right)^2 + 12 = 0 \end{cases}.$

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \left(\left(x+y\right)^2 + x^2 - y^2 - 3\left(x-y\right)^2 + 1\right)\left(x+y\right)^2 = -48 \\ \left(x^2 - y^2 + \left(x-y\right)^2 + 1\right)\left(x-y\right)^2 = -12 \end{cases}.$$

Đặt $u = x + y, v = x - y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\left(u^2+uv-3v^2+1\right)u^2=-48\\\left(v^2+uv+1\right)v^2=-12\end{cases}.$$

Nhận chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$u^2\left(u^2+uv-3v^2+1\right)=4v^2\left(v^2+uv+1\right)\Leftrightarrow\left(u^2-4v^2\right)\left(u^2+uv+v^2+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow u^2-4v^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=2v\\u=-2v\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=2x-2y\\x+y=-2x+2y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3y\\y=3x\end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $x=3y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$\left(12y^2+1\right).4y^2+12=0$ vô nghiệm.

<u>TH2:</u> Nếu $y=3x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(1-4x^2\right).4x^2+12=0\Leftrightarrow 4x^4-x^2-3=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(4x^2+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,y=-3\\x=1,y=3\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;-3\right);\left(1;3\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-y^4=\dfrac{3}{4y}-\dfrac{1}{2x}\\\left(x+y\right)^5=5\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases}4xy\left(x^4-y^4\right)=3x-2y\\\left(x+y\right)^5=5\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}u=x+y\\v=x-y\end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}4.\dfrac{u^2-v^2}{4}.\dfrac{uv}{2}\left(u^2+v^2\right)=3.\dfrac{u+v}{2}-2.\dfrac{u-v}{2}\\u^5=5\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}uv\left(u^4-v^4\right)=u+5v\\u^5=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv\left(u^4-v^4\right)=u+u^5v\\v^5=5\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v\left(u^4 - v^4\right) = 1 + u^4 v \\ u^5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^5 = -1 \\ u^5 = 5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \sqrt[5]{5} \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[5]{5} \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[5]{5} - 1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt[5]{5} + 1}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{\sqrt[5]{5} - 1}{2}; \dfrac{\sqrt[5]{5} + 1}{2}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - y^4 = \dfrac{3}{4y} - \dfrac{1}{2x} \\ \left(x^2 - y^2\right)^5 = -5 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{uv\left(u^2 + v^2\right)}{2} = \dfrac{u + 5v}{2\left(u^2 - v^2\right)} \\ u^5 v^5 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv\left(u^4 - v^4\right) = u + 5v \\ u^5 v^5 = -5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv\left(u^4 - v^4\right) = u - u^5 v^6 \\ u^5 v^5 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v\left(u^4 - v^4\right) = 1 - u^4 v^6 \\ u^5 v^5 = -5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(v^5 + 1\right)\left(u^4 v - 1\right) = 0 \\ u^5 v^5 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u^5 = 5 \\ v = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} u^4 v = 1 \\ u^5 v^5 = -5 \end{cases} \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = \sqrt[3]{5} \\ v = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = -\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}} \\ v = \sqrt[15]{625} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = \sqrt[3]{5} \\ x - y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}} \\ x - y = \sqrt[15]{625} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{5} - 1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{5} + 1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}} + \sqrt[15]{625}}{2} \\ y = \dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}} - \sqrt[15]{625}}{2} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{5} - 1}{2}; \frac{\sqrt[3]{5} + 1}{2}\right); \left(\frac{-\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}} + \sqrt[15]{625}}{2}; \frac{-\dfrac{1}{\sqrt[15]{5}} - \sqrt[15]{625}}{2}\right).$$

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\left(x^6 - y^6\right) + 7x^4y^2 - 7x^2y^4 = \dfrac{2}{y} - \dfrac{3}{2x} \\ \left(x^2 - y^2\right)^7 = -7 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 3\left(x^6 - y^6\right) + 7x^2y^2\left(x^2 - y^2\right) = \dfrac{4x - 3y}{2xy} \\ \left(x^2 - y^2\right)^7 = -7 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy\left(x^2 - y^2\right)\left(3x^2 + y^2\right)\left(3y^2 + x^2\right) = 4x - 3y \\ \left(x^2 - y^2\right)^7 = -7 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 = u^2 - uv + v^2 \\ 3x^2 + y^2 = u^2 + uv + v^2 \\ 4x - 3y = \dfrac{u + 7v}{2} \end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} uv\left(u^6 - v^6\right) = u + 7v \\ u^7v^7 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv\left(u^6 - v^6\right) = u - u^7v^8 \\ u^7v^7 = -7 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\left(v^7 + 1\right)\left(u^6v - 1\right) = 0 \\ u^7v^7 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \sqrt[7]{7}, v = -1 \\ u = -\dfrac{1}{\sqrt[35]{7}}, v = \sqrt[35]{7^6} \end{array}\right..$$

Thay ngược lại biến $(x;y)$

Suy ra: $(x;y) = \left(\dfrac{\sqrt[7]{7} - 1}{2}; \dfrac{\sqrt[7]{7} + 1}{2}\right); \left(\dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt[35]{7}} + \sqrt[35]{7^6}}{2}; \dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt[35]{7}} - \sqrt[35]{7^6}}{2}\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 + 3xy^2 = -\dfrac{35}{2} \\ 5x^2 + 5y^2 + 2xy + 5x + 13y = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $u = x + y, v = x - y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{u^3 - v^3}{2} = -\dfrac{35}{2} \\ \dfrac{5}{2}\left(u^2 + v^2\right) + \dfrac{u^2 - v^2}{2} + 9u - 4v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - v^3 + 35 = 0 \ (1) \\ 3u^2 + 2v^2 + 9u - 4v = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

Giải hệ này bằng phương pháp hệ số bất định bằng cách lấy $(1) + 3.(2)$ theo vế ta được: $\left(u - v + 5\right)\left(u^2 + uv + 4u + v^2 - v + 7\right) = 0$.

Tìm được: $(u;v) = (-3;2); (-2;3)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = \left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{2}\right); \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$.

<u>**Cách khác:**</u> Lấy $(1) + 3.(2)$ ta được:

$$(2y + 5)\left(3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{5}{2} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=xy+x+y \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $u=x+y, v=x-y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{u^2+v^2}{2}=\dfrac{u^2-v^2}{4}+u \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+3v^2-4u=0 \\ uv=3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+\dfrac{27}{u^2}-4u=0 \\ v=\dfrac{3}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4-4u^3+27=0 \\ v=\dfrac{3}{u} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-3)^2(u^2+2u+3) \\ v=\dfrac{3}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Bài 1.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}=y+1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $y \ge -1$, khi đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+2x+6=y^2+2y+1 \\ \dfrac{1}{4}\left((x-y)^2+3(x+y)^2\right)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2(x-y)+5=0 \\ \dfrac{1}{4}\left((x-y)^2+3(x+y)^2\right)=28 \end{cases}.$$

Đặt $u=x+y, v=x-y$, khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} uv+2v+5=0 \\ 3u^2+v^2=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} u=3 \\ v=-1 \end{cases}.$$

\+ Với $\begin{cases} u=-1 \\ v=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

\+ Với $\begin{cases} u=3 \\ v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;2),(-3;2)$.

Bài 1.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = \dfrac{x^2 - y^2 - 4}{5} \\ 3x^2 - 4y^2 + \dfrac{45}{2}(x + y) = 16 \end{cases}$.

Lời giải

Đây là hệ tổng quát bậc hai đã biết cách giải dưới đây trình bày theo phương pháp đặt ẩn phụ dạng tổng hiệu.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{x^2 - y^2 - 4}{5} \\ -\dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \dfrac{7}{2}\left(x^2 - y^2\right) + \dfrac{45}{2}(x + y) = 16 \end{cases}.$$

Đặt $u = x + y, v = x - y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} v = \dfrac{uv - 4}{5} \\ -\dfrac{1}{4}\left(u^2 + v^2\right) + \dfrac{7}{2}uv + \dfrac{45}{2}u = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv - 4 - 5v = 0 \\ 14uv - u^2 - v^2 + 90u = 64 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv - 4 - 5v = 0 \\ (u + v)^2 - 16(4 + 5v) - 90u + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv - 4 - 5v = 0 \\ (u + v)^2 - 90(u + v) = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u + v = 0 \\ u + v = 90 \end{array}\right. \\ uv - 4 - 5v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = 0 \\ uv - 4 - 5v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = 90 \\ uv - 4 - 5v = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1, v = -1 \\ u = 4, v = -4 \\ u = \dfrac{95 - 9\sqrt{89}}{2}, v = \dfrac{85 + 9\sqrt{89}}{2} \\ u = \dfrac{95 + 9\sqrt{89}}{2}, v = \dfrac{85 - 9\sqrt{89}}{2} \end{array}\right..$$

Thay ngược lại tìm được nghiệm của hệ là:

$$(x; y) = (0;1); (0;4); \left(45; \frac{5 - 9\sqrt{89}}{2}\right); \left(45; \frac{5 + 9\sqrt{89}}{2}\right).$$

Bài 1.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = (x - y)^4 \\ x^2 - xy + y^2 = x - y \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $u = x + y, v = x - y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\dfrac{3u^2+v^2}{4}=v^4\\ \dfrac{u^2+3v^2}{4}=v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=\dfrac{4v^4-v^2}{3}\\ \dfrac{4v^4-v^2}{3}+3v^2-4v=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=\dfrac{4v^4-v^2}{3}\\ v(v-1)\left(4v^2+4v+12\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0,v=0\\ u=-1,v=1\\ u=1,v=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=0\\ x-y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=-1\\ x-y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=1\\ x-y=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=0\\ x=0,y=-1\\ x=1,y=0\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;0);(1;0);(0;-1)$.

<u>Cách 2:</u> Ta viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases}(x-y)^2+3xy=(x-y)^4\\ (x-y)^2+xy=x-y\end{cases}\Rightarrow(x-y)^4-(x-y)^2=3\left(x-y-(x-y)^2\right).$$

Bài 1.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-y^2=8x-6y+1\\ \left(x^2-y^2\right)^2=10(x-y)^2-1\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $u=x+y,v=x-y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}uv=u+7v+1\\ u^2v^2=10v^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{7v+1}{v-1}\\ v^2\left(\dfrac{7v+1}{v-1}\right)^2=10v^2-1\end{cases}$$

Do $v=1$ không thoa mãn hệ phương trình.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{7v+1}{v-1}\\ (v+1)(3v+1)\left(13v^2-6v+1\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=3,v=-1\\ u=1,v=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right);(1;2)$.

Bài 1.6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4\left(x^4+2x^3y+x^2y^2\right)=2x+2y+9 \\ 3x^2+2xy-y^2=6(x+y+1) \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+y+x-y)^2(x+y)^2=2(x+y)+9 \\ (x+y)^2+2(x-y)(x+y)=6(x+y)+6 \end{cases}.$$

Đặt $u=x+y, v=x-y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} (u+v)^2u^2=2u+9 \\ u^2+2uv=6u+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u^2+uv\right)^2=2u+9 \\ uv=\dfrac{6u+6-u^2}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(u^2+\dfrac{6u+6-u^2}{2}\right)^2=2u+9 \\ uv=\dfrac{6u+6-u^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4+12u^3+48u^2+64u=0 \\ uv=\dfrac{6u+6-u^2}{2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(u+4)^3=0 \\ uv=\dfrac{6u+6-u^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-4 \\ v=\dfrac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=\dfrac{17}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{8} \\ y=-\dfrac{33}{8} \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{1}{8};-\dfrac{33}{8}\right)$.

Bài 1.7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+y)^2(x-y+1)=6x-6y-2\\(x^2-y^2)\left(2x^2-2y^2+(x^2-y^2)(x+y)^2+x+y\right)=12(x-y)^2-x+y-1\end{cases}.$$

Lời giải

Đặt $u=x+y, v=x-y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u^2(v+1)=6v-2\\uv\left(u^3v+2uv+u\right)=12v^2-v-1\end{cases}.$$

Nhận thấy $v=-1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $v\neq-1$ khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}u^2=\dfrac{6v-2}{v+1}\\\left(\dfrac{6v-2}{v+1}\right)^2v^2+2v^2\left(\dfrac{6v-2}{v+1}\right)+\dfrac{6v-2}{v+1}.v=12y^2-v-1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=\dfrac{6v-2}{v+1}\\\dfrac{4(v-1)(9v+1)v^2}{(v+1)^2}=v-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=\dfrac{6v-2}{v+1}\\v=1\end{cases}\vee\begin{cases}u^2=\dfrac{6v-2}{v+1}\\4(9v+1)v^2=(v+1)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=\pm\sqrt{2}\\v=1\end{cases}\vee\begin{cases}36v^3+3v^2-2v-1=0\\u^2=\dfrac{6v-2}{v+1}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=\pm\sqrt{2}\\v=1\end{cases}\vee\begin{cases}(3v-1)(12v^2+5v+1)=0\\u^2=\dfrac{6v-2}{v+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\pm\sqrt{2}\\v=1\end{cases}\vee\begin{cases}u=0\\v=\dfrac{1}{3}\end{cases}.$$

Thay ngược lại x,y ta tìm được:

$$(x;y)=\left(\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right);\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right);\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Bài 1.8. Tìm nghiệm dương của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(2x-7)(x-y)+3=0\\ (3x^2-4xy+4y^2-7)(x-y)^2=1\end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x+y+x-y-7)(x-y)+3=0\\ \left(3(x+y)^2-2(x^2-y^2)+11(x-y)^2-28\right)(x-y)^2=4\end{cases}.$$

Đặt $u=x+y, v=x-y, (u>0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}(u+v-7)v+3=0\\ (3u^2-2uv+11v^2-28)v^2=4\end{cases}.$$

Giải hệ này bằng phương pháp thế chú ý $u>0$ tìm được $u=4\Rightarrow v=2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm dương duy nhất $(x;y)=(3;1)$.

<u>Tổng quát:</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-(a+1)x=y^4-ay\\ (x^2-y^2)^2=\end{cases}$

Bài 1.9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-y^4=4x-3y\\ (x+y)^3=7\end{cases}$

Lời giải

Đặt $u=x+y, v=x-y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}uv.\dfrac{u^2+v^2}{2}=4.\dfrac{u+v}{2}-3.\dfrac{u-v}{2}\\ u^3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv(u^2+v^2)=u+7v\\ u^3=7\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}uv(u^2+v^2)=u+u^3v\\ u^3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u(v^3-1)=0\\ u^3=7\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=\sqrt[3]{7}\\ v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\sqrt[3]{7}\\ x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt[3]{7}+1}{2}\\ y=\dfrac{\sqrt[3]{7}-1}{2}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{\sqrt[3]{7}+1}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt[3]{7}-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài 1.10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-2x=y^4-y\\ \left(x^2-y^2\right)^3=3\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $u=x+y,v=x-y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}uv\left(u^2+v^2\right)=u+3v\\ (uv)^3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv\left(u^2+v^2\right)=u+u^3v^4\\ (uv)^3=3\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u\left(v^3-1\right)\left(1-u^2v\right)=0\\ (uv)^3=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\sqrt[3]{3},v=1\\ u=\frac{1}{\sqrt[3]{3}},v=\sqrt[3]{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2},y=\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\\ x=\frac{2}{\sqrt[3]{3}},y=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt là:

$$(x;y)=\left(\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2};\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right);\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}};-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right).$$

Bài 1.11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-y^2=4x+6y\\ x^4+y^4-5x^2-5y^2=2x^2y^2-10xy\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^2-y^2=5(x+y)-(x-y)\\ x^4+y^4-\frac{5}{2}\left((x+y)^2+(x-y)^2\right)=2x^2y^2-10xy\end{cases}.$$

Đặt $u=x+y,v=x-y$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}uv=5u-v\\ \frac{u^4+6u^2v^2+v^4}{8}-\frac{5}{2}\left(u^2+v^2\right)=2\left(\frac{u^2-v^2}{4}\right)^2-10.\frac{u^2-v^2}{2}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}uv=5u-v\\ 8u^2v^2+20u^2-60v^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv=5u-v\\ 8(5u-v)^2+20u^2-60v^2=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0, v=0 \\ u=-\dfrac{1+\sqrt{815}}{11}, v=\dfrac{75+\sqrt{815}}{3} \\ u=\dfrac{-1+\sqrt{815}}{11}, v=\dfrac{75-\sqrt{815}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=-\dfrac{812+2\sqrt{815}}{143}, y=-\dfrac{838+24\sqrt{815}}{143} \\ x=\dfrac{812+2\sqrt{815}}{143}, y=\dfrac{-838+24\sqrt{815}}{143} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(0;0);\left(-\frac{812+2\sqrt{815}}{143};-\frac{838+24\sqrt{815}}{143}\right);\left(\frac{812+2\sqrt{815}}{143};\frac{-838+24\sqrt{815}}{143}\right)$$

Bài 1.12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y\geq 0, x-y\geq 0$.

Đặt $u=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}, v=\sqrt{\dfrac{x-y}{2}}$ từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $u+v>0$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{2\left(u^2+v^2\right)\left(u^2-v^2\right)+2uv\left(u^2-v^2\right)}{14}=u+v \\ u^3+v^3=9 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(u^2+v^2\right)\left(u^2-v^2\right)+uv\left(u^2-v^2\right)=7(u+v) \\ u^3+v^3=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)\left(u^2+v^2\right)+uv(u-v)=7 \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)\left(u^2+uv+v^2\right)=7 \\ u^3+v^3=9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3-v^3=7 \\ u^3+v^3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}=2 \\ \sqrt{\dfrac{x-y}{2}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;3)$.

Bài 1.13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 - 6 = 0 \\ (x+y-1)^2 - \dfrac{4}{(x-y)^2} - 3 = 0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải

Điều kiện: $x - y \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 6 \\ (x+y-1)^2 - \dfrac{4}{(x-y)^2} - 3 = 0 \end{cases}$.

Đặt $a = x + y; b = x - y$ khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} ab = 6 \\ (a-1)^2 - \dfrac{4}{b^2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{6}{a} \\ a^2 - 2a + 1 - \dfrac{a^2}{9} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{6}{a} \\ 8a^2 - 18a - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3, b = 2 \\ a = -\dfrac{3}{4}, b = -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -\dfrac{3}{4} \\ x + y = -8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{2}, y = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{35}{8}, y = \dfrac{29}{8} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x; y) = \left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{2}\right); \left(-\dfrac{35}{8}; \dfrac{29}{8}\right)$.

Bài 1.14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 2 \\ \dfrac{72xy}{x-y} + 29\sqrt[3]{x^2 - y^2} = 4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x - y \neq 0, x, y \geq -1$.

Bình phương hai vế phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x + y + 2 + 2\sqrt{xy + x + y + 1} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy + x + y + 1} = 2 - x - y.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 2 \\ 4(xy + x + y + 1) = (2 - x - y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 2 \\ (x - y)^2 = 8(x + y) \end{cases}.$$

Đặt $u = x + y, v = x - y, (v \neq 0, -2 \leq u \leq 2)$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} v^2 = 8u \\ \dfrac{18\left(u^2 - v^2\right)}{v} + 29\sqrt[3]{uv} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 = 8u \\ 9v^3 - 112v - 108 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 4, u = 2 \\ v = -\dfrac{8}{3}, u = \dfrac{8}{9} \\ v = -\dfrac{4}{3}, u = \dfrac{2}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = \dfrac{8}{9} \\ x - y = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = \dfrac{2}{9} \\ x - y = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{8}{9} \\ y = \dfrac{16}{9} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{5}{9} \\ y = \dfrac{7}{9} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(3;-1\right);\left(-\dfrac{8}{9};\dfrac{16}{9}\right);\left(-\dfrac{5}{9};\dfrac{7}{9}\right)$.

Bài 1.15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^4 + 3y^4 + 10x^2y^2 = 2 - 6x^2 + 6y^2 \\ 3x^2 + y^2 = 4x \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(x + y\right)^4 + \left(x - y\right)^4 + \left(x^2 - y^2\right)^2 + 6\left(x^2 - y^2\right) = 2 \\ \left(x + y\right)^2 + \left(x - y\right)^2 + x^2 - y^2 = 2\left(x + y + x - y\right) \end{cases}.$$

Đặt $u = x + y, v = x - y$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^4 + v^4 + u^2v^2 + 6uv = 2 \\ u^2 + uv + v^2 = 2\left(u + v\right) \end{cases}.$$

Đây là hệ đối xứng loại I đã biết cách giải. Chú ý đẳng thức

$$u^4 + v^4 + u^2v^2 = \left(u^2 + v^2 - uv\right)\left(u^2 + v^2 + uv\right)$$

$$= 2\left(u + v\right)\left(u^2 + v^2 - uv\right) = 2\left(u^3 + v^3\right)$$

Suy ra $\begin{cases} u^3+v^3+3uv=1 \\ u^2+v^2+uv=2(u+v) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, v=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ u=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, v=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x-y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x-y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

<u>Cách 2:</u> Rút $y^2=4x-3x^2$ từ phương trình thứ hai vào phương trình đầu của hệ ta được kết quả tương tự.

$$3x^4+3\left(4x-3x^2\right)^2+10x^2\left(4x-3x^2\right)=2-6x^2+6\left(4x-3x^2\right).$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\left(8x^2-14x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{7-\sqrt{57}}{8} \\ x=\dfrac{7+\sqrt{57}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right);\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 1.16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+x\left(3y^2+1\right)+y\left(3x^2+1\right)=\dfrac{1}{x-y+1} \\ 4\left(x^2-y^2\right)^2+4(x+y)^2-8x+8y-17=-\dfrac{8}{x+y} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $(x+y)(x-y+1)\neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x+y)^3+x+y=\dfrac{1}{x-y+1}\\ 4\left(x^2-y^2\right)^2+4(x+y)^2-8(x-y)-17=-\dfrac{8}{x+y}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y+1)\left((x+y)^3+x+y\right)=1\\ (x+y)\left(4\left(x^2-y^2\right)^2+4(x+y)^2-8(x-y)-17\right)=-8\end{cases}.$$

Đặt $u=x+y, v=x-y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u^3v+u^3+uv+u=1\\ 4u^3v^2+4u^3-8uv-17u=-8\end{cases}.$$

Nhận thấy $u=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $u\neq 0$ khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\left(u^3+u\right)(v+1)=1\\ 4u^3v^2+4u^3-8uv-17u=-8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{1}{u^3+u}-1\\ 4u^3\left(\dfrac{1}{u^3+u}-1\right)^2+4u^3-8u\left(\dfrac{1}{u^3+u}-1\right)-17u=-8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{1}{u^3+u}-1\\ u\left(8u^6+7u^4-10u^2-5\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{1}{u^3+u}-1\\ u\left(u^2-1\right)\left(8u^4+15u^2+5\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=1\\ v=\dfrac{1}{u^3+u}-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-1, v=-\dfrac{3}{2}\\ u=1, v=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Thay ngược lại tìm ra $(x;y)=\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right);\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right);\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

Chủ đề 10. KỸ THUẬT SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Định lý 1: Nếu $f(x)$ là hàm đồng biến(hoặc nghịch biến) trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=0$ nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất trên $(a;b)$.

Định lý 2: Nếu $f(x)$ là hàm đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $(a;b)$ khi đó với mọi $u,v\in(a;b)$ thỏa mãn $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

Một số dạng phương trình xuất phát từ hàm số như sau:

Dạng 1: Phương trình có dạng $f(u)=f(v)$.

- Thông thường từ một phương trình của hệ ta nhận ra đẳng thức $f(u)=f(v)$.
- Cộng, trừ theo vế hai phương trình của hệ đưa về $f(u)=f(v)$.
- Việc cần làm là xét hàm hàm trưng $f(t)$ chứng minh $f(t)$ nghịch biến hoặc đồng biến trên tập K.

Dạng 2: Phương trình có dạng $f(x)+g(x)=0$.

- Từ một phương trình của hệ ta tìm được miền xác định $x\in[a;b]$ và $y\in[c;d]$.
- Chứng minh $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)+\min\limits_{y\in[c;d]} g(y)=f(x_0)+g(y_0)=0$.
- Chứng minh $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)+\max\limits_{y\in[c;d]} g(y)=f(x_0)+g(y_0)=0$.
- Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=x_0\\ y=y_0\end{cases}$.

Do vậy kỹ năng xử lý là tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số và nhớ kiểm tra nghiệm $(x_0;y_0)$ có thỏa mãn hay không.

Chú ý. Đối với các em lớp 10 chưa được học về đạo hàm để chứng minh hàm đồng biến, nghịch biến ta xử lý như sau:

Xét tỷ số $k=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ với mọi $x_1,x_2\in(a;b)$ và $x_1\neq x_2$.

- Nếu $k>0$ thì f là hàm đồng biến trên $(a;b)$.
- Nếu $k<0$ thì f là hàm nghịch biến trên $(a;b)$.

Một số dạng hệ thường sử dụng phương pháp hàm số

- Hệ đối xứng loại II.
- Hệ hoán vị vòng quanh(xem chương 4).

Lưu ý. Với hệ xử lý được bằng phương pháp hàm số thì cũng có thể xử lý được bằng phương pháp nhân liên hợp.

Chẳng hạn hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \ (1) \\ \left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x-y\right)+x^4y^4 \ \ (2) \end{cases}$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y \ (3)$.

Đến đây ta có hai hướng xử lý cơ bản hay được xử dụng như sau:

Hướng 1: $x+y+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}=0 \Leftrightarrow x+y+\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0$.

$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(1+\frac{x-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0 \Leftrightarrow x=-y.$$

Do $1+\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x+\sqrt{y^2+1}-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}>\dfrac{|x|+x+|y|-y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\geq 0$.

Hướng 2: Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}}\geq 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì vậy phương trình

$(3) \Leftrightarrow f(x)=f(-y) \Leftrightarrow x=-y$.

Việc còn lại là thế vào phương trình thứ hai của hệ tìm được nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$.

A. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4-4x=y^4-4y \ (1) \\ x^{2014}+y^{2014}=1 \ (2) \end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình (2) suy ra $\begin{cases} x^{2014}\leq 1 \\ y^{2014}\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ -1\leq y\leq 1 \end{cases}$.

Xét hàm số $f(t)=t^4-4t$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ ta chứng minh $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[-1;1\right]$ bằng hai cách như sau:

Cách 1: Phù hợp với kiến thức lớp 10 chưa được học về đạo hàm.

Với mọi $t_1, t_2 \in \left[-1;1\right], t_1 \neq t_2$ ta có

$$k = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^4 - t_2^4 - 4\left(t_1 - t_2\right)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + t_2\right)\left(t_1^2 + t_2^2\right) - 4 \leq 4 - 4 = 0.$$

Do đó $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[-1;1\right]$ vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào (2) ta tìm được $x = y = \pm\sqrt[2014]{\frac{1}{2}}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(\pm\sqrt[2014]{\frac{1}{2}}; \pm\sqrt[2014]{\frac{1}{2}}\right)$.

Cách 2: Sử dụng đạo hàm

Ta có $f'(t) = 4t^3 - 4 \leq 4 - 4 = 0$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[-1;1\right]$ đến đây xử lý tiếp như lời giải trên.

Nhận xét. Với cách xét tỷ số $k = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2}$ ta chứng minh được hàm đồng biến hoặc nghịch biến rất phù hợp với kiến thức của một học sinh lớp 10 nhưng hạn chế của phương pháp này là nếu hàm $f(t)$ có dạng phức tạp thì bước chứng minh $k > 0\left(k < 0\right)$ khó khăn hơn rất nhiều.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1} = 27 - x^3 \ (1) \\ \left(x-2\right)^4 + 1 = y \ (2) \end{cases}$.

Phân tích lời giải. Nhận thấy từ (2) ta có thể rút y tự do theo biến x do vậy việc thế được lựa chọn đầu tiên tuy nhiên sau khi thế đưa về một phương trình có chứa các nhân tử từ x^3 cho đến $\sqrt{x-2}$ do vậy ta suy nghĩ đến một cách nào đó có thể tìm được nghiệm của phương trình một cách dễ dàng. Như đã nói ở phần trên đó là nhẩm nghiệm và xử lý theo hai hướng

- Hướng 1: Xét hàm số
- Hướng 2: Nhân liên hợp.

Lời giải

Điều kiện $x \geq 2, y \geq 1$.

Thế $y = \left(x-2\right)^4 + 1$ từ phương trình (2) vào phương trình (1) ta được:

$$\sqrt{x-2} - \left(x-2\right)^2 = 27 - x^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 4x + \sqrt{x-2} - 31 = 0 \ (3).$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2+4x+\sqrt{x-2}-31$ trên $\left[2;+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=3x^2-2x+3+\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}>0,\forall x\in\left(2;+\infty\right)$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$. Mặt khác $f(3)=0$ do đó $(3)\Leftrightarrow x=3$ suy ra $\left(x;y\right)=\left(3;2\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;2\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ x\sqrt{6x+2x^2+1}=4xy+6x+1\end{cases}$.

Lời giải

Do $\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=1$ nên từ phương trình thứ nhất của hệ, ta suy ra: $x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{y^2+1}\Leftrightarrow f(x)=f(-y)$.

Xét hàm số $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ ta có:

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}>\frac{|x|+x}{\sqrt{1+x^2}}\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\ .$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có phương trình :

$$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{6x+2x^2+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25}{4}x^2.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{6x+2x^2+1}=3x\\ \sqrt{6x+2x^2+1}=-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-1\\ x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\end{array}\right.\cdot$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x,y\right)=\left(1,-1\right);\left(\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Bài 4. (TSĐH Khối A 2010) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2)\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \le \dfrac{3}{4} \\ y \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$, khi đó phương trình (1) tương đương với:

$$(4x^2+1)x + (\frac{-(5-2y)-1}{2})\sqrt{5-2y} = 0 .$$

$\Leftrightarrow (4x^2+1)(2x) = ((\sqrt{5-2y})^2+1)\sqrt{5-2y}$ (3).

Xét hàm số $f(t) = t\left(t^2+1\right)$ trên $\mathbb{R}$, ta có: $f'(t) = 3t^2+1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy: $(3) \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{5-2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y = \dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases}$.

Thay $y = \dfrac{5-4x^2}{2}$ vào (2) ta được phương trình:

$$4x^2 + (\frac{5-4x^2}{2})^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \ (4).$$

Suy ra $0 \le x \le \dfrac{3}{4}$. Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + (\dfrac{5-4x^2}{2})^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$.

Ta có $f'(x) = -4x(3+4x^2) + \dfrac{-4}{\sqrt{3-4x}} < 0, \forall x \in \left[0;\dfrac{3}{4}\right)$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$.

Vì vậy phương trình $(4) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

<u>Nhận xét</u>. Ngoài ra hệ trên còn giải được bằng cách đưa về hệ hoán vị lặp vòng quanh(xem chương 4). Qua bài toán trên ta có một dấu hiệu nhận diện phương pháp hàm số khi một phương trình của hệ có dạng:

$$\left(mx+n\right)\sqrt{ax+b} = \left(py+q\right)\sqrt{cy+d} .$$

Bài 5. (TSĐH Khối A,A1 2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện $x\geq 1$.

Khi đó biến đổi phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$(x+y-1)^2=4y\geq 0\Rightarrow y\geq 0.$$

Viết lại phương trình thứ nhất của hệ thành

$$\sqrt{\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{y^4+2}+y \ (1).$$

Đến đây ta xét hàm số $f(u)=u+\sqrt{u^4+2}$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(u)=1+\dfrac{2u^3}{\sqrt{u^4+2}}>0,\forall u\geq 0$ nên $f(u)$ là hàm tăng trên $[0;+\infty)$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[4]{x-1}\right)=f(y)\Leftrightarrow y=\sqrt[4]{x-1}\Leftrightarrow x=y^4+1$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình $\left(y^4+y\right)^2=4y$.

$$\Leftrightarrow y\left[y\left(y^3+1\right)^2-4\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\ y\left(y^3+1\right)^2-4=0\end{array}\right..$$

Với $y=0\Rightarrow x=1$.

Với $y\left(y^3+1\right)^2-4=0$ ta xét hàm số $g(u)=u\left(u^3+1\right)^2-4$.

Ta có: $g'(u)=\left(u^3+1\right)^2+3u^3\left(u^3+1\right)>0,\forall u\geq 0$. Mặt khác: $g(1)=0$.

Do đó $y=1$ suy ra $(x;y)=(2;1)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0);(2;1)$.

Nhận xét. Như đã nói một bài toán xử lý được bằng phương pháp hàm số thì cũng có thể xử lý bằng phương pháp nhân liên hợp. Vì vậy ta có thể tìm ra $x=y^4+1$ bằng nhân liên hợp như sau. Với $y\geq 0$ và từ (1), ta có:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{y^4+2}=y-\sqrt[4]{x-1}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y^4-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}=\frac{y^4-x+1}{\left(y+\sqrt[4]{x-1}\right)\left(y^2+\sqrt{x-1}\right)}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y^4-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y^4+2}}+\frac{1}{\left(y+\sqrt[4]{x-1}\right)\left(y^2+\sqrt{x-1}\right)}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x-y^4-1=0 \Leftrightarrow x=y^4+1.$$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2+2\sqrt{4y^2+1}}{x+\sqrt{x^2-2x+2}-1}=\dfrac{1}{y(x-1)^2} \\ 4y\sqrt{x-1}-x^2-4y^2+3x-3=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>1, y\neq 0$.

Do $\dfrac{2+2\sqrt{4y^2+1}}{x+\sqrt{x^2-2x+2}-1}=\dfrac{2+2\sqrt{4y^2+1}}{x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}}>0$ nên để hệ phương trình có nghiệm ta phải có $y>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}}{(x-1)^2}.$$

$$\Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+1}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{t^2+1}$ trên $(0;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=1+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0, \forall t>0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(2y)=f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\Leftrightarrow 2y=\dfrac{1}{x-1}\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2(x-1)}$.

Thay $y=\dfrac{1}{2(x-1)}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$-\left(2y-\sqrt{x-1}\right)^2-\left(x-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-1}-\sqrt{x-1}\right)^2+\left(x-2\right)^2=0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \dfrac{1}{x-1}=\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+3y^2+5=10xy \\ \left(1+\dfrac{3}{2\left(x-y\right)}\right)\sqrt{2\left(x-y\right)+2}=x^2+2xy+y^2-4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-1 \le x-y \ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(x+y\right)^2=4\left(x-y\right)^2+5 \\ \left(1+\dfrac{3}{2\left(x-y\right)}\right)\sqrt{2\left(x-y\right)+2}=\left(x+y\right)^2-4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+y\right)^2=4\left(x-y\right)^2+5 \\ \left(1+\dfrac{3}{2\left(x-y\right)}\right)\sqrt{2\left(x-y\right)+2}=4\left(x-y\right)^2+1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+y\right)^2=4\left(x-y\right)^2+5 \\ \left(2\left(x-y\right)+3\right)\sqrt{2\left(x-y\right)+2}=8\left(x-y\right)^3+2\left(x-y\right)\ (1) \end{cases}.$$

Phương trình (1) chỉ chứa biến $t=x-y$ nên ta đặt $t=x-y$ đưa về phương trình:

$$\left(2t+3\right)\sqrt{2t+2}=8t^3+2t \Leftrightarrow \left(\sqrt{2t+2}\right)^3+\sqrt{2t+2}=(2t)^3+2t \qquad (2).$$

Phương trình này có dạng hàm đặc trưng $f(u)=f(v)$ nên ta xử lý bằng hàm số.

Vậy xét hàm số $f(u)=u^3+u$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(u)=3u^2+1>0, \forall u>0$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2t+2}\right)=f(2t) \Leftrightarrow \sqrt{2t+2}=2t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ 4t^2 - 2t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x - y = 1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 4(x-y)^2 + 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + y = -3 \end{array}\right. \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 1 \\ x = -1, y = -2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (-1;-2); (2;1)$.

<u>Nhận xét.</u> Ví dụ này cho ta thấy để xét hàm đôi khi từ một phương trình của hệ ta chưa có dấu hiệu của hàm đặc trưng và phép toán thế hoặc cộng trừ theo vế hai phương trình của hệ sẽ cho ta một hàm đặc trưng. Điều này đòi hỏi các em tinh ý nhìn nhận hai phương trình của hệ có điểm nào chung.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 3y + \sqrt{y^2 + 4} \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$.

Phân tích lời giải. Phương trình thứ nhất được viết lại thành :

$x + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = 3y + \sqrt{y^2 + 4}$.

Hai vế có dạng gần tương tự nhau ; tuy nhiên sai khác nhau đại lượng x và $3y$; bây giờ thế $3y$ từ phương trình thứ hai của hệ vào chúng ta sẽ được gì .

$$x + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = y^2 + 3x - 1 - x^2 + \sqrt{y^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = y^2 + \sqrt{y^2 + 4}.$$

Lời giải

Rút $3y = y^2 + 3x - 1 - x^2$ từ phương trình thứ hai của hệ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được :

$$x + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = y^2 + 3x - 1 - x^2 + \sqrt{y^2 + 4}.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = y^2 + \sqrt{y^2 + 4}.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 + \sqrt{(x-1)^2 + 4} - \sqrt{y^2 + 4} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 + \frac{(x-1)^2 - y^2}{\sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 4}} = 0.$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{y^2+4}}\right)\left((x-1)^2-y^2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=1-x \end{array}\right..$$

Nếu $y=x-1$ khi đó ta có hệ phương trình : $\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-(x-1)^2-3x+3(x-1)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Nếu $y=1-x$ khi đó ta có hệ phương trình : $\begin{cases} y=1-x \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2-(1-x)^2-3x+3(1-x)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{4} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right);\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \\ x^2+2y^2=2x-4y+3 \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được :

$$2x^2-2y^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1}-2x+4y-3.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2x\sqrt{x^2+1}=2y^2+4y+2+2(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1}.$$

$$\Leftrightarrow x^2+x\sqrt{x^2+1}=(y+1)^2+(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ trên $\mathbb{R}$, ta có :

$$f'(t)=t+\sqrt{t^2+1}+t\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)=\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)$$

$$=\frac{\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^2}{\sqrt{t^2+2}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y+1)\Leftrightarrow x=y+1$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases}x=y+1\\x^2+2y^2=2x-4y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\\left(y+1\right)^2+2y^2=2\left(y+1\right)-4y+3\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\3y^2+4y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{2}{3}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;-2\right);\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x^2-9x+22=y^3+3y^2-9y\\2x^4+2y^4-4x^3+4y^3+3x^2+3y^2=x-y+\dfrac{7}{4}\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x-1\right)^3-12\left(x-1\right)=\left(y+1\right)^3-12\left(y+1\right) & (1)\\\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^4+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^4=1 & (2)\end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra:

$$\begin{cases}\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\le 1\\\left|y+\dfrac{1}{2}\right|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}\\-\dfrac{3}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\le x-1\le\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\le y+1\le\dfrac{3}{2}\end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t$ trên $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ ta có:

$f'(t)=3\left(t^2-4\right)<0,\forall t\in\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ tức $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(x-1)=f(y+1)\Leftrightarrow x-1=y+1\Leftrightarrow x=y+2$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(y+\frac{3}{2}\right)^4+\left(y+\frac{1}{2}\right)^4=1 \Leftrightarrow 2y^4+8y^3+15y^2+14y+\frac{33}{8}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)\left(2y^2+4y+\frac{11}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}, y=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2}, y=-\frac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

<u>Nhận xét.</u> Như vậy phương trình đầu của hệ cho ta một hàm đặc trưng tuy nhiên bản thân hàm số $f(t)=t^3-12t$ không thực sự đơn điệu trên một tập số thực. Chính điều này làm ta suy nghĩ đến việc tìm miền của nghiệm. Dưới đây tôi trình bày một bài toán có hình thức tương tự nhưng cách áp dụng hàm số tương đối khác.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2(4x+1)+2y^2(2y+1)=y+32 \\ x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2} \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 8x^3+2x^2+4y^3+2y^2-y-32=0 \ (1) \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra: $\begin{cases} \left|x-\frac{1}{2}\right|\le 1 \\ \left|y+\frac{1}{2}\right|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}\le y\le \frac{1}{2} \end{cases}$.

Xét hàm số $f(x)=8x^3+2x^2$ trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$, ta có:

$$f'(x)=24x^2+4x=4x(6x+1); f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{1}{6} \end{array}\right..$$

Ta có: $f(0)=0, f\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{54}, f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{63}{2}$.

Suy ra $\max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{63}{2}$.

Xét hàm số $g(y)=4y^3+2y^2-y-32$ trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]$, ta có:

$$g'(y)=12y^2+4y-1; g'(y)=0\Leftrightarrow 12y^2+4y-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{6} \end{array}\right..$$

Ta có: $g\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{79}{2}, g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{63}{2}, g\left(\frac{1}{6}\right)=-\frac{1733}{54}, g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{63}{2}$.

Suy ra $\max\limits_{y\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]} g(y)=g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{63}{2}$.

Suy ra $f(x)+g(y)\le \max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]} f(x)+\max\limits_{y\in\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right]} g(y)=\frac{63}{2}-\frac{63}{2}=0$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(x)+g(y)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}.$

Thử lại vào phương trình thứ hai của hệ ta được nghiệm $(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^3-3x+(y-1)\sqrt{2y+1}=\frac{1}{2} & (1) \\ 2x^2+x+\sqrt{-y(2y+1)}=0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $-\frac{1}{2}\le y\le 0$.

Viết lại phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng:

$$8x^3-6x+\left[(2y+1)-3\right]\sqrt{2y+1}=1.$$

$\Leftrightarrow (2x)^3 - 3.(2x) + \left(\sqrt{2y+1}\right)^3 - 3\sqrt{2y+1} = 1\ (3)$.

Từ (2) ta có $2x^2 + x + \sqrt{-y\left(2y+1\right)} = 0 \Rightarrow 2x^2 + x \le 0 \Leftrightarrow -1 \le 2x \le 0$.

Và ta cũng có $0 \le 2y + 1 \le 1$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ với $\left|t\right| \le 1$ khi đó $f'(t) = 3\left(t^2 - 1\right) \le 0$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[-1;1\right]$. Vì vậy $(3) \Leftrightarrow f(2x) + f\left(\sqrt{2y+1}\right) = 1$.

Mặt khác $f(2x) + f\left(\sqrt{2y+1}\right) \le f(-1) + f(0) = 1$. Vì vậy $\begin{cases} 2x = -1 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \dfrac{7}{x^2}} + y^3 - \dfrac{3}{2}y^2 - 7 = 0\ (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có :

$$\begin{cases} x^2 + x\left(y-7\right) + y^2 - 6y + 14 = 0 \\ y^2 + y\left(x-6\right) + x^2 - 7x + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_x = \left(y-7\right)^2 - 4\left(y^2 - 6y + 14\right) \ge 0 \\ \Delta_y = \left(x-6\right)^2 - 4\left(x^2 - 7x + 14\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le \dfrac{10}{3} \\ 1 \le y \le \dfrac{7}{3} \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \dfrac{7}{x^2}}$ trên $\left[2; \dfrac{10}{3}\right]$ và $g(y) = y^3 - \dfrac{3}{2}y^2 - 7$ trên $\left[1; \dfrac{7}{3}\right]$.

Ta có: $g'(y) = 3y^2 - 3y = 3y\left(y-1\right) \ge 0, \forall y \in \left[1; \dfrac{7}{3}\right] \Rightarrow \min\limits_{y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]} g(y) = g(1) = -\dfrac{15}{2}$.

Ta có: $f'(x) = 1 - \dfrac{11}{2x^2} - \dfrac{14}{x^3\sqrt{1 + \dfrac{7}{x^2}}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{11}{2x^2} - \dfrac{14}{x^3\sqrt{1 + \dfrac{7}{x^2}}} = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-11\right)\sqrt{x^2+7}=28 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \sqrt{\dfrac{11}{2}} \\ \left(2x^2-11\right)^2\left(x^2+7\right)=784 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=3$ (vế trái là hàm đồng biến).

Ta có: $f(2)=\dfrac{19}{4}+\sqrt{11}, f(3)=\dfrac{15}{2}, f\left(\dfrac{10}{3}\right)=\dfrac{299}{60}+\dfrac{\sqrt{163}}{5} \Rightarrow \min\limits_{x\in\left[2;\frac{10}{3}\right]} f(x)=f(3)=\dfrac{15}{2}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x)+g(y)=\min\limits_{x\in\left[2;\frac{10}{3}\right]} f(x)+\min\limits_{y\in\left[1;\frac{7}{3}\right]} g(y)=\dfrac{15}{2}-\dfrac{15}{2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(thử lại thấy thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x+y\right)\sqrt{x^2-4x+5}+\left(x-2\right)\sqrt{x^2+2xy+y^2+1}=0 \\ x-y\left(x^2-y^2\right)=2\left(1-x^2+y^2\right) \end{cases}$

Lời giải

Nếu $x=2 \Rightarrow y=-2$.

Nếu $x+y=0 \Rightarrow x=2, y=-2$.

Xét với $\left(x+y\right)\left(2-x\right)\ne 0$ phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{\sqrt{\left(2-x\right)^2+1}}{2-x}=\frac{\sqrt{\left(x+y\right)^2+1}}{x+y} \quad (1).$$

Từ (1) suy ra $\left(2-x\right)\left(x+y\right)>0$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}$ trên $\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$, ta có:

$$f'(t)=-\frac{1}{t^2\sqrt{t^2+1}}<0, \forall t\ne 0.$$

Do đó $f(t)$ là hàm nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$.

Vậy $(1) \Leftrightarrow f(2-x)=f(x+y) \Leftrightarrow 2-x=x+y \Leftrightarrow y=2-2x$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x-\left(2-2x\right)\left(x^2-\left(2-2x\right)^2\right)=2\left(1-x^2+\left(2-2x\right)^2\right).$$

$$\Leftrightarrow 6x^3-16x^2+7x+2=0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(6x^2-4x-1\right)=0.$$

Trước tiên ta có: $\left(2-x\right)\left(x+y\right)>0\Rightarrow\left(2-x\right)\left(x+2-2x\right)>0\Leftrightarrow x\neq 2$.

Do đó $6x^2-4x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2-\sqrt{10}}{6}\\ x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{6}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2-\sqrt{10}}{6},y=\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}\\ x=\dfrac{2+\sqrt{10}}{6},y=\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{2-\sqrt{10}}{6};\frac{4+\sqrt{10}}{3}\right);\left(\frac{2+\sqrt{10}}{6};\frac{4-\sqrt{10}}{3}\right);\left(2;-2\right).$$

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2-12xy+20y^2=0\\ \ln\left(1+x\right)-\ln\left(1+y\right)=x-y\end{cases}$.

<u>Nhận xét.</u> Phương trình thứ hai cho ta hàm đặc trưng $y=\ln\left(1+x\right)-x$ tuy nhiên $y'=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Do vậy ta cần xác định được miền giá trị của hai ẩn x,y.

Ta có: $x^2-12xy+20y^2=0\Leftrightarrow\left(x-2y\right)\left(x-10y\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\ x=10y\end{array}\right.$.

Suy ra x,y cùng dấu với nhau do đó ta xét hàm số được.

Lời giải

Điều kiện: $x>-1,y>-1$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(x-2y\right)\left(x-10y\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\ x=10y\end{array}\right..$$

Suy ra x,y cùng dấu với nhau.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với: $\ln\left(1+x\right)-x=\ln\left(1+y\right)-y$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\ln\left(1+t\right)-t$ trên $\left(-1;+\infty\right)$ ta có:

$$f'(t)=\frac{1}{t+1}-1=-\frac{t}{t+1};f'(t)=0\Leftrightarrow t=0.$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Mặt khác x,y cùng dấu nên $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Khi đó ta có hệ phương trình: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\x=2y\end{cases}\\\begin{cases}x=y\\x=10y\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;0)$.

<u>Nhận xét.</u> Như vậy với một số bài toán tính mà hàm số đơn điệu trên hai khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ ta không trực tiếp sử dụng được tính đơn điệu của hàm số khi đó cần tìm miền giá trị của xy và thường là chứng minh $xy>0$ (tức hai ẩn cùng dấu khi đó chúng cùng thuộc khoảng $(-\infty;0)$ hoặc $(0;+\infty)$ lúc này ta sử dụng hàm số như các bài toán hay làm.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^{y+1}=(y+1)^x\\\sqrt{-4x^2+18x-20}+\dfrac{2x^2-9x+6}{2x^2-9x+8}=\sqrt{y+1}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases}-4x^2+18x-20\ge 0\\2x^2-9x+8\ne 0\\y+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le\dfrac{5}{2}\\y\ge -1\end{cases}$.

Đặt $t=\sqrt{-4x^2+18x-20}=\sqrt{-4\left(x+\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{1}{4}}\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow t\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành : $t+1+\dfrac{4}{t^2+4}=\sqrt{y+1}$.

Xét hàm số $f(t)=t+1+\dfrac{4}{t^2+4}$, ta có:

$$f'(t)=1-\frac{8t}{\left(t^2+4\right)^2}\ge\frac{t^4+7t^2+(t-4)^2}{\left(t^2+4\right)^2}>0.$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow f(t)\ge f(0)=2$.

Từ đó suy ra ta phải có $\sqrt{y+1}\ge 2\Leftrightarrow y\ge 3$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ lấy logarit tự nhiên hai vế ta được :

$$(y+1)\ln x = x\ln(y+1) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(y+1)}{y+1} \ (*)$$

Xét hàm số $g(u)=\frac{\ln u}{u}$, ta có $g'(u)=\frac{1-\ln u}{u^2}=0 \Leftrightarrow u=e$

Suy ra hàm số tăng trong khoảng $(0;e)$, giảm trong khoảng $(e;+\infty)$

Vậy ta có: $x \in \left[2;\frac{5}{2}\right] \Rightarrow g(x) \ge g(2) = \frac{\ln 2}{2}$

Và $y \in [3;+\infty) \Rightarrow g(y) \le g(3) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$

Từ đó suy ra phương trình (*) tương đương với : $x=2; y=3$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;3)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y\left(4y^2+3x^2\right)=x^4\left(x^2+3\right) \\ 2^x\left(\sqrt{2y-2x+5}-x+1\right)=4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $2y-2x+5 \ge 0$.

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ ; nên chia hai vế phương trình thứ nhất của hệ cho x^3, ta được: $\left(\frac{2y}{x}\right)^3+3.\frac{2y}{x}=x^3+3x$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ có $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì vậy $f\left(\frac{2y}{x}\right)=f(x) \Leftrightarrow x=\frac{2y}{x} \Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2}$; thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $2^{x-1}\left(\sqrt{(x-1)^2+4}-(x-1)\right)=2$ (1).

Xét hàm số $f(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)-2$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$$f'(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)\left(\ln 2-\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}\right)>0 \ ; \text{do} \begin{cases} \sqrt{u^2+4}>|u|\ge u \\ \ln 2>1>\frac{1}{\sqrt{u^2+4}} \end{cases}.$$

Vậy $f(u)$ đồng biến. Mặt khác $f(0)=0$ do đó $(1)\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$;

Suy ra $y=\frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(2x-1\right)\sqrt{x+y}=\left(6-x-y\right)\sqrt{2-x}\ (1)\\ 2\sqrt[3]{12x^2+3xy-18x}=x^3-6x-y+5\ (2)\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x+y\ge 0, x\le 2$.

Phân tích lời giải. Nhận thấy (2) là phương trình chứa căn thức bậc ba việc tìm ra mối liên hệ đơn giản giữa hai ẩn x và y không khả thi vậy ta tập trung xử lý phương trình (1).

Nhận thấy có nhân tử chung $x+y$ hai vế và $2x-1$ có thể biểu diễn theo $\sqrt{2-x}$ nên chưa cần xét vội liệu $\left(x+y\right)\sqrt{2-x}=0$ hay không ta chia hai vế phương trình cho $\left(x+y\right)\sqrt{2-x}$ ta được: $\frac{6-x-y}{\sqrt{x+y}}=\frac{2x-1}{\sqrt{2-x}}$.

Điều này làm ta suy nghĩ đến việc xét hàm số và phương trình trên có dạng $f(u)=f(v)$.

Đơn giản ta đặt $u=\sqrt{x+y}$ và $v=\sqrt{2-x}$ khi đó ta được: $\frac{6-u^2}{u}=\frac{3-2v^2}{v}$

Phương trình này ta chưa thể xét hàm được tuy nhiên để ý ta tìm cách biểu diễn $\frac{3-2v^2}{v}$ cho có dạng vế trái và viết lại:

$$\frac{6-u^2}{u}=\frac{3-2v^2}{v}=\frac{6-4v^2}{2v}=\frac{6-(2v)^2}{2v}.$$

Rõ ràng đây có dạng $f(u)=f(v)$ và đi vào giải chi tiết ta đặt $u=\sqrt{x+y}$ và $v=2\sqrt{2-x}$.

Lời giải

Nếu $x+y=0$ khi đó từ (1) suy ra $x=2, y=-2$ thay vào (2) thấy không thỏa mãn.

Vậy $x+y>0$ và $\sqrt{2-x}>0$ khi đó viết lại (1) dưới dạng:

$$\frac{6-x-y}{\sqrt{x+y}}=\frac{2x-1}{\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow \frac{6-\left(\sqrt{x+y}\right)^2}{\sqrt{x+y}}=\frac{6-\left(2\sqrt{2-x}\right)^2}{2\sqrt{2-x}} \quad (3).$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{6-t^2}{t}$ với $t>0$ ta có $f'(t)=-\frac{6}{t^2}-1<0, \forall t>0$

Do đó $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Vì vậy (3) tương đương với:

$$f\left(\sqrt{x+y}\right)=f\left(2\sqrt{2-x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=2\sqrt{2-x} \Leftrightarrow y=8-5x.$$

Thay $y=8-5x$ vào (3) ta được:

$$2\sqrt[3]{12x^2+3x\left(8-5x\right)-18x}=x^3-6x-\left(8-5x\right)+5 .$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt[3]{-3x^2+6x}=x^3-x-3 \Leftrightarrow x^3-3x-1=2\left(\sqrt[3]{-3x^2+6x}-\left(x-1\right)\right).$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x-1=-2.\frac{x^3-3x-1}{\left(\sqrt[3]{-3x^2+6x}\right)^2+\left(x-1\right)\sqrt[3]{-3x^2+6x}+\left(x-1\right)^2} .$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-3x-1\right)\left(1+\frac{2}{\left(\sqrt[3]{-3x^2+6x}\right)^2+\left(x-1\right)\sqrt[3]{-3x^2+6x}+\left(x-1\right)^2}\right)=0 .$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x-1=0 .$$

Để giải phương trình này ta xét nghiệm $x\in\left[-2;2\right]$ và đặt $x=2\cos t, t\in\left[0;\pi\right]$

ta được $2\cos 3t=1 \Leftrightarrow \cos 3t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\pm\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}$.

Nhưng vì $t\in\left[0;\pi\right]$ nên $t\in\left\{\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}\right\}$ suy ra: $x\in\left\{2\cos\frac{\pi}{9};2\cos\frac{5\pi}{9};2\cos\frac{7\pi}{9}\right\}$

nhưng vì phương trình bậc ba có tối đa ba nghiệm nên đó là tất cả các nghiệm của phương trình trên.

Kết hợp với điều kiện $x+y>0$ ta có suy ra $\left(x;y\right)=\left(2\cos\frac{\pi}{9};16\cos\frac{\pi}{9}-5\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2\cos\frac{\pi}{9};16\cos\frac{\pi}{9}-5\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x^2+y^2-5xy-7x+3y+2=0 & (1) \\ \dfrac{x-y}{3}=\ln(x+2)-\ln(y+2) & (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x>-2;y>-2$.

Coi (1) là phương trình bậc 2 với ẩn là y và viết lại ta được:

$y^2+(3-5x)y+6x^2-7x+2=0$, ta có:

$$\Delta_y=(x-1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{5x-3+x-1}{2}=3x-2 \\ y=\dfrac{5x-3-(x-1)}{2}=2x-1 \end{array}\right. .$$

Từ phương trình (2) ta có:

$x-3\ln(x+2)=y-3\ln(y+2) \Leftrightarrow f(x)=f(y); f(t)=t-3\ln(t+2), t>-2$

Ta có $f'(t)=\dfrac{t-1}{t+2} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Nhận thấy với $x=y=1$ là nghiệm của hệ.

Với $x<1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y-x=2x-2<0 \\ y-x=x-1<0 \end{array}\right. \Rightarrow y<x, \forall x<1 \Rightarrow f(y)>f(x) \Rightarrow VN$.

Với $x>1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y-x=2(x-1)>0 \\ y-x=x-1>0 \end{array}\right. \Rightarrow y>x>1, \forall x>1 \Rightarrow f(y)>f(x) \Rightarrow VN$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1,1)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} \\ 4^x+4=4x+4\sqrt{2y-2x+4} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $y-x+2\ge 0$.

Đặt $t=x^2-2y$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$4+3^{t+2}=\left(4+9^t\right).7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{4+3^{t+2}}{7^{t+2}}=\frac{4+3^{2t}}{7^{2t}} \Leftrightarrow f(t+2)=f(2t).$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{4+3^x}{7^x}=4\left(\frac{1}{7}\right)^x+\left(\frac{3}{7}\right)^x$ là hàm nghịch biến.

Do đó $f(t+2)=f(2t)\Leftrightarrow 2t=t+2\Leftrightarrow t=2$.

Từ đó suy ra $x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$4^x+4=4x+4\sqrt{x^2-2-2x+4}\Leftrightarrow 4^{x-1}=x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}\Leftrightarrow 4^s=s+\sqrt{s^2+1}$$

Với $s=x-1$. Do $\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\left(\sqrt{s^2+1}-s\right)=1\Rightarrow 4^{-s}=\sqrt{s^2+1}-s$

Từ đó ta có phương trình : $4^s-4^{-s}-2s=0(*)$

Ta xét hàm số $f(x)=4^x-4^{-x}-2x$ ta có:

$$f'(x)=\ln 4\left(4^x+4^{-x}\right)-2\geq 2\ln 4-2>0.$$

Do đó hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f(0)=0$ nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $s=0$. Từ đây suy ra $x=1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}4^{x^2-16}+3\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=4^{y^2-8y}+3\sqrt{y-4}+\sqrt{y^2-8y+17}\\ y\left(x^2-1\right)-4x^2+3x-8+\ln\left(x^2-3x+3\right)=0\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện : $x\geq 0, y\geq 4$.

Khi đó biến đổi phương trình thứ nhất thành :

$$4^{x^2-16}+3\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=4^{(y-4)^2}+3\sqrt{y-4}+\sqrt{(y-4)^2+1}$$

Xét hàm số $f(t)=4^{t^2-16}+3\sqrt{t}+\sqrt{t^2+1}$ trên đoạn $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=2t4^{t^2-16}\ln 4+\frac{3}{2\sqrt{t}}+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in[0;+\infty)$. Nên hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng trên đoạn $[0;+\infty)$. Vậy phương trình $f(x)=f(y-4)\Leftrightarrow x=y-4\Leftrightarrow y=x+4$ lúc này thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình

$x^3+2x-12+\ln\left(x^2-3x+3\right)=0(*)$

Ta xét hàm số $f(x)=x^3+2x-12+\ln\left(x^2-3x+3\right)$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+2+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3}=3x^2+\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3}>0$, nên hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$.

Mặt khác nhận thấy $f(2)=0$, từ đó suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=2\Rightarrow y=6$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x,y\right)=\left(2,6\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\log_2 x=2^{y+2}\\ 4\sqrt{1+x}+xy\sqrt{4+y^2}=0\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x>0$, từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $y<0$.

Từ phương trình thứ hai ta suy ra:

$$16\left(x+1\right)=x^2y^2\left(4+y^2\right)\Leftrightarrow x^2y^4+4x^2y^2-16\left(x+1\right)=0$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là y^2, ta được:

$\Delta'_{y^2}=4x^4+16x^2\left(x+1\right)=4x^2\left(x+2\right)^2$

Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{l} y^2=\dfrac{-2x^2+2x\left(x+2\right)}{x^2}=\dfrac{4}{x}\\ y^2=\dfrac{-2x^2-2x\left(x+2\right)}{x^2}=\dfrac{-4x^2-4x}{x^2}<0\end{array}\right.$.

Chỉ nhận nghiệm $y^2=\dfrac{4}{x}\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{y^2}$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được :

$$\log_2\frac{4}{y^2}=2^{y+2}\Leftrightarrow 2-\log_2 y^2-2^{y+2}=0\ (*)$$

Xét hàm số $f(y)=2-\log_2 y^2-2^{y+2}$ với $y<0$

Ta có $f'(y)=-2^{y+2}\ln 2-\dfrac{2}{y\ln 2}=\dfrac{-2}{y\ln 2}\left(1-y\left(\ln 2\right)^2.2^{y+1}\right)>0,\forall y\in\left(-\infty;0\right)$

Vậy $f(y)$ là hàm đơn điệu tăng trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. Mặt khác lại có $f(-1)=0\Rightarrow y=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

Từ đây suy ra $x=4$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(4;-1\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ x\left(x^3-y^3\right)+x^2y\left(x-y\right)-9\left(x-y\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ \left(x-y\right)\left(x\left(x^2+xy+y^2\right)+x^2y-9\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ x\left(x^2+xy+y^2\right)+x^2y-9=0 \end{cases}$$

Do $x\neq y$ không thỏa mãn hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(y^3-x^3\right)=7 \\ x\left(x+y\right)^2=9 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $x>0$ do đó từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y>x>0$ và từ phương trình thứ hai rút ra $y=\dfrac{3}{\sqrt{x}}-x$, thay vào phương trình thứ nhất ta được: $x\left(\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}-x\right)^3-x^3\right)=7$.

Đặt $t=\sqrt{x},\left(t>0\right)$ phương trình trở thành :

$$t^2\left(\frac{3}{t}-t^2\right)^3-t^6=7\Leftrightarrow\left(t^3-3\right)^3+t^7+7t=0 \ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=\left(t^3-3\right)^3+t^7+7t$ trên $\left(0;+\infty\right)$, ta có :

$f'(t)=9t^2\left(t^3-3\right)^2+7t^6+7>0,\forall t>0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Vì vậy phương trình $(1)\Leftrightarrow f(t)=f(1)\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;2\right)$.

Nhận xét. Để giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(y^3 - x^3\right) = 7 \\ x\left(x + y\right)^2 = 9 \end{cases}$ ta có cách khác như sau xuất phát từ hệ đưa được về dạng đồng bậc được nên ta xử lý như sau :

Đặt $y = tx, \left(t > 0\right)$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^4\left(t^3 - 1\right) = 7 \\ x^3\left(t + 1\right)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{\left(t^3 - 1\right)^3}{\left(t + 1\right)^8} = \frac{7^3}{9^4}.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\left(t^3 - 1\right)^3}{\left(t + 1\right)^8} - \dfrac{7^3}{9^4}$ đồng biến trên $\left(0; +\infty\right)$ và $f(2) = 0$ nên phương trình trên có nghiệm duy nhất $t = 2 \Leftrightarrow y = 2x$ thay ngược lại phương trình thứ hai của hệ ta được $\left(x; y\right) = \left(1; 2\right)$.

\+ Ngoài ra ta hoàn toàn có thể rút $x = \dfrac{3}{\sqrt{y}} - y, \left(x > 0 \Rightarrow y < \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\right)$ và thay vào phương trình đầu của hệ đưa về xét hàm số $f(y) = y\left(\left(\dfrac{3}{\sqrt{y}} - y\right)^3 - y^3\right) - 7$ trên $\left(0; \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\right)$. Đây là một hàm nghịch biến trên $\left(0; \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\right)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 6 = \sqrt{8y + 17} \\ \left(\sqrt{8y^2 + 24y + 18 + 2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}y + 3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{2}} - x\right) = 2 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện : $y \geq -\dfrac{17}{8}$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với :

$$\sqrt{8y^2 + 24y + 18 + 2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}y + 3\sqrt{2} = \sqrt{x^2 + \sqrt{2}} + x.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(2y + 3\right)^2 + \sqrt{2}} + 2y + 3 = \sqrt{x^2 + \sqrt{2}} + x.$$

Đến đây ta xét hàm số : $f(x)=\sqrt{x^2+\sqrt{2}}+x$, ta có

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}}+1=\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}+x}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}}>\frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}}=\frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}}\geq 0.$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng .

Vậy $f(2y+3)=f(x)\Leftrightarrow x=2y+3\Leftrightarrow y=\frac{x-3}{2}$, thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được :

$$x^2-x-3=\sqrt{4x+5}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-3\geq 0\\ \left(x^2-x-3\right)^2=4x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\geq\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\ x\leq\frac{1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\\ (x-1)(x+1)\left(x^2-2x-4\right)=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x^2-2x-4=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{5}\Rightarrow y=-1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, thỏa mãn điều kiện (*)

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(1\pm\sqrt{5};-1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

B. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^3\\ (x-1)^4=y\end{cases}$.

Lời giải

Thế $y=(x-1)^4$ vào phương trình đầu của hệ ta được

$$x^3-(x-1)^2+\sqrt{x-1}-8=0\Leftrightarrow x^3-x^2+2x+\sqrt{x-1}-9=0.$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-x^2+2x+\sqrt{x-1}-9$ trên $[1;+\infty)$ là hàm đồng biến trên $[1;+\infty)$. Mặt khác $f(2)=0$ suy ra $(x;y)=(2;1)$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+5}=\sqrt{y-1}+\sqrt{y-3}+\sqrt{y-5}\\ x+y+x^2+y^2=80\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\geq -1, y\geq 5$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)+2}+\sqrt{(x+1)+4}=\sqrt{y-5}+\sqrt{(y-5)+2}+\sqrt{(y-5)+4} \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}+\sqrt{t+2}+\sqrt{t+4}$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(x+1)=f(y-5) \Leftrightarrow x+1=y-5 \Leftrightarrow y=x+6$.

Thay $y=x+6$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x^2+14x-38=0 \xleftrightarrow{x\ge -1} x=\frac{5\sqrt{5}-7}{2} \Rightarrow y=\frac{5\sqrt{5}+5}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{5\sqrt{5}-7}{2};\dfrac{5\sqrt{5}+5}{2}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1}+y=4+\sqrt{x+4} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-4 \le x \le 1$.

Phương trình đầu của hệ viết lại dưới dạng:

$$2y^3+y=2\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\sqrt{1-x} \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x=1-y^2 \end{cases}.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $\sqrt{2y^2+1}+y=4+\sqrt{5-y^2}$.

Vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến suy ra nghiệm duy nhất $y=2 \Rightarrow x=-3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-3;2)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=3x^2-6x-3y+4 \\ x^2+y^2-6x+y-10=\sqrt{y+5}-\sqrt{4x+y} \end{cases}$.

Lời giải

Phương trình đầu của hệ viết lại dưới dạng:

$$(x-1)^3+3(x-1)=(-y)^3+3.(-y) \Leftrightarrow x-1=-y \Leftrightarrow y=1-x.$$

Thay $y=1-x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x^2-9x-8=\sqrt{6-x}-\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-9x-5+\left(\sqrt{3x+1}-4\right)+\left(1-\sqrt{6-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(2x+1)+\frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(2x+1+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}\right)=0 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=-4.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;-4)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^6-y^3+x^2-9y^2-30=28y \\ 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{y+2}\right)=\sqrt{x(y+3)} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 1, y \ge -2$.

Phương trình đầu của hệ viết lại dưới dạng:

$$(x^2)^3+x^2=(y+3)^3+(y+3) \Leftrightarrow x^2=y+3 \Leftrightarrow y=x^2-3.$$

Thay $y=x^2-3$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{x^2-1}\right)=x\sqrt{x}.$$

Phương trình này có nghiệm và kỹ thuật xử lý rất đẹp mắt. Để giải phương trình này ta dùng kỹ thuật nhân liên hợp đưa về hệ (xem thêm cuốn Những điều cần biết LTĐH Kỹ thuật giải nhanh phương trình, bất phương trình vô tỷ cùng tác giả).

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}};\frac{2}{\sqrt{5}}-1\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6\sqrt{2-x}+3y\sqrt{1-y}+2y+2=3\sqrt{1-y}+3x\sqrt{2-x}+2x \\ \sqrt{4y+x+7}-\sqrt{y+1}=\sqrt{6+x-x^2} \end{cases}.$$

Lời giải

Từ điều kiện của hệ phương trình và viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$2(2-x)-3(2-x)\sqrt{2-x}=2(1-y)-3(1-y)\sqrt{1-y}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{1-y} \Leftrightarrow y=x-1.$$

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{4(x-1)+x+7}-\sqrt{x}=\sqrt{6+x-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{5x+3}-\sqrt{x}=\sqrt{6+x-x^2}.$$

Giải phương trình này bằng cách bình phương hai vế và kết hợp điều kiện của hệ, suy ra $x=\frac{-5-2\sqrt{2}+\sqrt{69+44\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow y=\frac{-7-2\sqrt{2}+\sqrt{69+44\sqrt{2}}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$(x;y)=\left(\frac{-5-2\sqrt{2}+\sqrt{69+44\sqrt{2}}}{2};\frac{-7-2\sqrt{2}+\sqrt{69+44\sqrt{2}}}{2}\right).$$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x^2+7}-2y+1=0\\(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0\end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng:

$$\left(\sqrt{2-x}\right)^3+\sqrt{2-x}=\left(\sqrt{2y-1}\right)^3+\sqrt{2y-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 2y-1=2-x$$

Thay $2y-1=2-x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{2x^2+7}=2-x \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\2x^2+7=x^2-4x+4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,y=2\\x=-3,y=3\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;2);(-3;3)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2.x^{\log_2 y}=y^2\\\ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $1\neq x>0, y>0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với: $\ln(1+x)-x=\ln(1+y)-y$.

Xét hàm số $f(t)=\ln(1+t)-t$ trên $(0;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=\frac{1}{t+1}-1=\frac{-t}{t+1}<0, \forall t>0$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Vì vậy $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$2.x^{\log_2 x}=x^2 \Leftrightarrow \log_2 x\left(1+\log_2 x\right)=2\log_2 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=0\\\log_2 x=1\end{array}\right. \xleftrightarrow{x\neq 1} x=2 \Rightarrow y=2$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-11x=2y-9 \ (1) \\ y^3+3y^2+y+4x^2-22x+21=(2x+1)\sqrt{2x-1} \ (2) \end{cases}$

Lời giải

Thế $4x^2-22x=4y-18$ từ (1) vào (2) đưa về phương trình dạng

$$(y+1)^3+2(y+1)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+2\sqrt{2x-1}.$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ và tìm được $\sqrt{2x-1}=y+1$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x-1}=y+1 \\ 2x^2-11x=2y-9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=0 \\ x=5, y=2 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0);(5;2)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3y-x^2=\sqrt{x^4+x^2}-2x^3y\sqrt{4y^2+1} \ (1) \\ 4\sqrt{1+2x^2y}-1=3x+2\sqrt{1-2x^2y}+\sqrt{1-x^2} \ (2) \end{cases}$.

Lời giải

Viết lại (1) dưới dạng $2x^3y\left(1+\sqrt{4y^2+1}\right)=\sqrt{x^4+x^2}+x^2$.

$$\Leftrightarrow 2y\left(1+\sqrt{4y^2+1}\right)=\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right) \Leftrightarrow f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right),$$

Trong đó: $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)$ là hàm đồng biến suy ra $2y=\frac{1}{x}$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5\left(x^2+y^2\right)=6xy-1 \\ \left(1+\frac{1}{x-y}\right)\sqrt{2x-2y+1}+(x+y)^2=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-\frac{1}{2}\le x-y\ne 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi thành:

$(x+y)^2=-4(x-y)^2-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(1+\frac{1}{x-y}\right)\sqrt{2x-2y+1}=4(x-y)^2+1.$$

$\Leftrightarrow (x-y+1)\sqrt{2x-2y+1} = 4(x-y)^3 + (x-y)$.

$\Leftrightarrow (2x-2y+2)\sqrt{2x-2y+1} = 8(x-y)^3 + 2(x-y)$.

Xét hàm chú ý $x-y>0$ ta tìm được $2(x-y) = \sqrt{2x-2y+1} \Leftrightarrow x-y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Thay ngược lại phương trình đầu ta tìm được nghiệm của hệ phương trình.

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)^2\left(\sqrt{3x^2-xy+2y^2+2}+1\right)=3 \\ 2x^2+y^2+xy=1 \end{cases}$.

Lời giải

Bài này tương tự bài trên ta không xử lý được độc lập hai phương trình của hệ nên ta xem chúng có mối liên hệ nào với nhau.

Ta có: $3x^2-xy+2y^2+2 = (2x^2+xy+y^2) + x^2-2xy+y^2+2 = 3+(x-y)^2$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x-y)^2\left(\sqrt{(x-y)^2+3}+1\right)=3 \quad (1) \\ 2x^2+y^2+xy=1 \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t) = t\left(\sqrt{t+3}+1\right)$ trên $[0;+\infty)$, ta có:

$$f'(t) = \sqrt{t+3}+1+\frac{t}{\sqrt{t+3}} > 0, \forall t \ge 0$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[0;+\infty)$

Vì vậy phương trình: $(1) \Leftrightarrow f\left((x-y)^2\right) = f(1) \Leftrightarrow (x-y)^2 = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x-y)^2=1 \\ 2x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-y=-1 \end{array}\right. \\ 2x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=-1 \\ x=0, y=1 \\ x=-\dfrac{3}{4}, y=\dfrac{1}{4} \\ x=\dfrac{3}{4}, y=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y) = \left(-\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right);\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{4}\right);(0;-1);(0;1)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+y)\left(\sqrt{x^4+y^4+3x^2+3y^2-2\left(xy-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+1}\right)=2\\ \left(x^2-y^2\right)^2=1\end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(x+y)\left(\sqrt{3(x+y)^2+\left(x^2-y^2\right)^2}+1\right)=2\\ \left(x^2-y^2\right)^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\left(\sqrt{3(x+y)^2+1}+1\right)=2 \qquad (1)\\ \left(x^2-y^2\right)^2=1\end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(\sqrt{3t^2+1}+1\right)$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t)=\sqrt{3t^2+1}+1+\dfrac{3t^2}{\sqrt{3t^2+1}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(x+y)=f(1)\Leftrightarrow x+y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x+y=1\\ \left(x^2-y^2\right)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ \left[\begin{array}{l}x-y=1\\ x-y=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;1);(1;0)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x^2-y\right)\sqrt{4y^2-5xy+2}=(y-x)\sqrt{3x^4+6x\left(y^2+1-3x^2\right)+3y^2+1}\\ 3x^2-xy-y^2=1\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 4y^2 - 5xy + 2 \geq 0 \\ 3x^4 + 6x\left(y^2 + 1 - 3x^2\right) + 3y^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$.

Nhận thấy không thể xử lý độc lập hai phương trình của hệ vậy ta xem chúng có mối liên hệ nào với nhau.

Thực hiện phép thế $y^2 = 3x^2 - xy - 1$ từ phương trình thứ hai của hệ vào vế trái phương trình đầu của hệ; thế $xy = 3x^2 - y^2 - 1$ vào vế phải phương trình đầu của hệ ta được:

$$\begin{cases} \left(x^2 - y\right)\sqrt{3\left(y - x\right)^2 + 1} = \left(y - x\right)\sqrt{3\left(x^2 - y\right)^2 + 1} \\ 3x^2 - xy - y^2 = 1 \end{cases}.$$

TH1: Nếu $x = y$ khi đó thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3x^2 - x^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = -1 \\ x = 1, y = 1 \end{array}\right..$$

Thử lại thấy cả hai nghiệm này đều thỏa mãn.

TH2: Nếu $x^2 - y = 0$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3x^2 - x.x^2 - x^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 1\right)\left(x + 1\right)\left(x^2 + x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = 1 \\ x = 1, y = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, y = \left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{array}\right.$$

Thử lại chỉ có nghiệm $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$ thỏa mãn.

TH3: Xét $\left(x - y\right)\left(x^2 - y\right) \neq 0$. Khi đó phương trình thứ nhất suy ra $\left(y - x\right)\left(x^2 - y\right) > 0$ và viết lại dưới dạng:

$$\frac{\sqrt{3\left(y - x\right)^2 + 1}}{y - x} = \frac{\sqrt{3\left(x^2 - y\right)^2 + 1}}{x^2 - y} \qquad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt{3t^2 + 1}}{t}$ trên $\left(-\infty;0\right) \cup \left(0;+\infty\right)$, ta có:

$f'(t) = -\frac{1}{t^2\sqrt{3t^2+1}} < 0, \forall t \neq 0$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Mặt khác $y-x$ và x^2-y cùng dấu nên

$(1) \Leftrightarrow f(y-x) = f(x^2-y) \Leftrightarrow y-x = x^2-y \Leftrightarrow y = \frac{x^2+x}{2}$.

Khi đó $(y-x)(x^2-y) = \frac{x^2(x-1)^2}{4} > 0 \Leftrightarrow x \neq \{0;1\}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ và tìm được nghiệm của hệ.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2x+1}{2y} = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{y^2+3}} \\ x^3(3y-11) = 2-\sqrt{(xy-x+2)^3} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy-x+2 \geq 0, y \neq 0$.

Nhận thấy $x = -\frac{1}{2}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x \neq -\frac{1}{2}$ phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với:

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{2x+1} = \frac{\sqrt{y^2+3}}{2y} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4x^2+4x+4}}{2x+1} = \frac{\sqrt{y^2+3}}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(2x+1)^2+3}}{2x+1} = \frac{\sqrt{y^2+3}}{y} \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $(2x+1)y > 0$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t^2+3}}{t}$ trên $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ ta có:

$$f'(t) = -\frac{3}{t^2\sqrt{t^2+3}} < 0, \forall t \neq 0.$$

Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Mặt khác $(2x+1)y > 0$ nên $(1) \Leftrightarrow f(2x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2x+1$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$1-3x^4+4x^3=\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Để giải phương trình vô tỷ này ta có các cách xử lý như sau:

Cách 1:

Ta có:

$$\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}-\left(1+\frac{3}{2}x^2\right)=\frac{x^6+3x^4+3x^2-\frac{9}{4}x^4-3x^2}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}+1+\frac{3}{2}x^2}=\frac{x^6+\frac{3}{4}x^4}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}+1+\frac{3}{2}x^2}\geq 0,\forall x$$

Do đó $\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}\geq 1+\frac{3}{2}x^2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $1-3x^4+4x^3\geq 1+\frac{3}{2}x^2\Leftrightarrow x^2\left(6x^2-8x+3\right)\leq 0\Leftrightarrow x=0$.

Thử lại thấy thỏa mãn vậy $x=0\Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;1\right)$.

Cách 2: Phương trình tương đương với:

$$9x^4-12x^3+4x^2+3\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3-4\left(x^2+1\right)+1=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(3x^2-2x\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(3x^2+2-\sqrt{x^2+1}\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2x=0\\\sqrt{x^2+1}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$$

Cách 3: Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}-1$, ta có:

$$f'(x)=12x^3-12x^2+3x\sqrt{x^2+1}=3x\left(4x^2-4x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$=3x\left(\left(2x-1\right)^2+\sqrt{x^2+1}-1\right);f'(x)=0\Leftrightarrow x=0.$$

Suy ra $\min\limits_{x\in\mathbb{R}}f(x)=f(0)=0$ và phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Cách 4: Nhân liên hợp ta được:

$$x^2\left(3x^2-4x\right)=1-\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}=\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x^2+2+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$=-\frac{x^2\left(x^2+2+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+1}.$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2+5x^2+2}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y \\ y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x,y \ge -\frac{1}{2}$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^3+4x+\sqrt{2x+1}=y^3+4y+\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow f(x)=f(y)$$

Xét hàm số $f(x)=x^3+4x+\sqrt{2x+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có : $f'(x)=3x^2+4+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>0$, nên $f(x)$ đơn điệu tăng trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$

Vậy phương trình $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được phương trình: $x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}=0$.

Ta xét hàm số $f(x)=x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=3x^2+2+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>0$, nên hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Mặt khác nhận thấy $f(0)=0$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$, từ đó suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(0,0)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2+21}-\sqrt{y}=(y+1)^2 \quad (1) \\ \sqrt{(y+1)^2+21}-\sqrt{x}=(x+1)^2 \quad (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y \ge 0$.

Nhận thấy $xy=0$, không là nghiệm của hệ nên $x>0;y>0$.

Trừ theo vế 2 phương trình của hệ ta được

$$\sqrt{(x+1)^2+21}+\sqrt{x}+(x+1)^2=\sqrt{(y+1)^2+21}+\sqrt{y}+(y+1)^2.$$

$\Leftrightarrow f(x)=f(y)$, trong đó $f(t)=\sqrt{(t+1)^2+21}+\sqrt{t}+(t+1)^2, t>0$.

Ta có $f'(t)=2(t+1)+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+\dfrac{t+1}{\sqrt{(t+1)^2+21}}>0, \forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$, khi đó thay vào (1) ta được:

$$(x+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{(x+1)^2+21}=0 \ (3).$$

Xét hàm số $g(x)=(x+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{(x+1)^2+21}$.

Ta có $g'(x)=2x+2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+21}}>2-\dfrac{x+1}{|x+1|}>0$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến.

Mặt khác ta có, $g(1)=0$. Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3).

Suy ra $y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x^2+2=y^3-3y^2-2 \\ \log_y\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right)=(x-2012)^2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<y<1 \\ 0<x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} y>1 \\ x>2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Đặt $y = u - 1$, khi đó phương trình thứ nhất trở thành $x^3 - 3x^2 = u^3 - 3u^2$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên miền xác định, ta có $f'(t) = 3t^2 - 3$ nên đơn điệu trên miền xác định. Do đó $f(x) = f(u) \Leftrightarrow x = u \Leftrightarrow x = y + 1$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta suy ra nghiệm $x = 2012$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 2\left(\sqrt{y} - \sqrt{x+1} - x\right) \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} + x - y = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge -1, y \ge 3$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(x+1\right)^2 + 2\sqrt{x+1} = y^2 + 2\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 4.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(3;4\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 12xy^3 + 8y^4 + 1 = 0 \\ y^4 + \left(x^3 + y\right)^2 = 1 + x^6 + \sqrt{1 - 2x^3y} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $1 - 2x^3y \ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$y^4 + y^2 = \left(\sqrt{1 - 2x^3y}\right)^2 + \sqrt{1 - 2x^3y} \ (1).$$

Hàm số $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(y^2) = f\left(\sqrt{1 - 2x^3y}\right) \Leftrightarrow y^2 = \sqrt{1 - 2x^3y} \Leftrightarrow y^4 + 2x^3y = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y^4 + 2x^3y = 1 \\ x^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 12xy^3 + 8y^4 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^4 + 2x^3y = 1 \\ x^4 + 4x^3y - 2x^2y^2 - 12xy^3 + 9y^4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^4+2x^3y=1 \\ (x-y)^2(x+3y)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ y^4+2x^3y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3y \\ y^4+2x^3y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}};-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right);\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}};\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x}-y\sqrt{y}+\sqrt{xy}+y-2\sqrt{y}-\sqrt{x}+2=0 \\ 3x-y+5\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{xy}=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 0$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(\sqrt{x}+1\right)^3+\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{y}\right)^3+\sqrt{y}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\left[0;+\infty\right)$, ta có:

$f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$ do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(\sqrt{x}+1)=f(\sqrt{y})\Leftrightarrow \sqrt{x}+1=\sqrt{y}$.

Thay $\sqrt{y}=\sqrt{x}+1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x+3\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+3\sqrt{y}-7\sqrt{x}=4 \\ \left(2\sqrt{y}-1\right)^2-y\sqrt{xy}=\left(2\sqrt{x}-1\right)^2-x\sqrt{xy} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$3\left(x+\sqrt{y}\right)+\sqrt{x+\sqrt{y}}=3\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\sqrt{x}+1\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=3t^2+t$ trên $\left[0;+\infty\right)$ ta có:

$f'(t)=6t+1>0,\forall t\geq 0$ do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(\sqrt{x+\sqrt{y}})=f(\sqrt{x}+1)\Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{x}+1$.

$\Leftrightarrow x+\sqrt{y}=x+1+2\sqrt{x}\Leftrightarrow \sqrt{y}=2\sqrt{x}+1$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ tìm được nghiệm $\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(1;9\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2-2\right)=6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right)\\ x-\sqrt{y}=1-\sqrt{2\left(x^2-y+1\right)}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y\geq 0, x^2-y+1\geq 0$.

Khi đó viết lại phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng:

$$x^3-y^3-2\left(x-y\right)=6\left(\frac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right).$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x+6\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=y^3-2y+6\ln\left(y+\sqrt{y^2+9}\right)\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t+6\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right)$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$f'(t)=3t^2-2+\frac{6}{\sqrt{t^2+9}}=\frac{3}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{3}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{t^2+9}{9}+\frac{8t^2}{9}-1$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{t^2+9}}.\frac{3}{\sqrt{t^2+9}}.\frac{t^2+9}{9}}+\frac{8t^2}{9}-1=2+\frac{8t^2}{9}>0,\forall t\in\mathbb{R}.$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x-\sqrt{x}=1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}=\sqrt{x}+1-x\Leftrightarrow 2\left(x^2-x+1\right)=x^2+x+1-2x-2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2\sqrt{x}(x-1) + x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 1 + \sqrt{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = e^x - e^y \\ \log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} y + 2 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x, y > 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với: $e^x - x = e^y - y$.

Xét hàm số $f(t) = e^t - t$ trên $(0;+\infty)$ ta có $f'(t) = e^t - 1 > 0, \forall t > 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì vậy $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay $y = x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 2 \\ x = 4, y = 4 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (2;2); (4;4)$.

Bài 25. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_3\left(\frac{2x+1}{x-y}\right) = \sqrt{4x^2 + 4x + 2} - \sqrt{(x-y)^2 + 1} - 3x^2 + y^2 - 4x - 2xy - 1 \\ \log_3(2x) + 4x^2 - \sqrt{4x^2 + 1} = 1 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành:

$$\sqrt{(2x+1)^2 + 1} - (2x+1)^2 - \log_3(2x+1) = \sqrt{(x-y)^2 + 1} - (x-y)^2 - \log_3(x-y)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}-t^2-\log_3 t$ với $t>0$, ta có

$f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}-2t-\dfrac{1}{t\ln 3}<0$ nên hàm số $f(t)$ nghịch biến.

Do đó phương trình đầu tiên $f(2x+1)=f(x-y)\Leftrightarrow 2x+1=x-y \quad (*)$

Xét hàm số $f(x)=\log_3\left(2x\right)+4x^2-\sqrt{4x^2+1},\forall x>0$

Ta có $f'(x)=4x\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right)+\dfrac{1}{x\ln 3}>0$, nên hàm số đơn điệu tăng.

Mặt khác: ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\sqrt{2}$.

Suy ra $x=1-\sqrt{2}$ kết hợp với phương trình (*) ta có nghiệm $y=-\dfrac{3}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1-\sqrt{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases}5^x+4^{2y}=3^x+2^x+10x^2-12y\\ e^x+\left(x-2y\right)\ln\left(2x^2+y^2-2xy+x+2\right)=e^{2y}\end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $2x^2+y^2-2xy+x+2=\left(x-y\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\ge\dfrac{7}{4},\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Ta xét phương trình thứ hai của hệ như sau:

- Nếu $x>2y\Rightarrow VT>e^x>e^{2y}=VP$ hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $x<2y\Rightarrow VT<e^x<e^{2y}=VP$ hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $x=2y$ thấy thỏa mãn phương trình.

Vậy $x=2y$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$5^x+4^x=3^x+2^x+10x^2-6x\Leftrightarrow 5^x+4^x-3^x-2^x-10x^2+6x=0.$$

Nếu $x<0$ khi đó $VT<0$ phương trình vô nghiệm suy ra $x\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=5^x+4^x-3^x-2^x-10x^2+6x$ trên $\left[0;+\infty\right)$, ta có:

$f'''(x)=5^x\ln^3 5+4^x\ln^3 4-3^x\ln^3 3-2^x\ln^3 2\ge 0,\forall x\ge 0$ nên phương trình $f''(x)=0$ có tối đa một nghiệm. Lập bảng biến thiên suy ra phương trình

$f'(x)=0$ có tối đa hai nghiệm. Lập bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x)=0$ có tối đa ba nghiệm(chú ý có đây là một tính chất của định lý Rolle). Mặt khác $f(0)=f(1)=f(2)=0$. Do đó phương trình có đúng ba nghiệm $x=0, x=1, x=2$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $(x;y)=(0;0);(1;2);(2;4)$.

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^{x+1}-3^y=y-x-1 \\ 2.3^x+2^y=3x^2+2y^2-2x-y+3 \end{cases}$.

Lời giải

Viết phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng: $3^{x+1}+x+1=3^y+y$. Từ phương trình này dễ tìm được $y=x+1$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2.3^x+2.2^x-5x^2-x-4=0.$$

Xét hàm số $f(x)=2.3^x+2.2^x-5x^2-x-4$ và thực hiện tương tự bài toán trên tìm được các nghiệm $x=0, x=1, x=2$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=(0;1);(1;2);(2;3)$.

Bài 28. Giải hệ phương trình:

$\begin{cases} 4^{x+1}-4^{y-1}=2y^2-2x^2-4y-4x-\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1} \\ y+\sqrt{x^2+2x+2}-1=4^{x+1} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -1, y\ge 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại dưới dạng:

$$4^{x+1}+2(x+1)^2+\sqrt{x+1}=4^{y-1}+2(y-1)^2+\sqrt{y-1}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=4^t+2t^2+\sqrt{t}$ trên $\left[0;+\infty\right)$, ta có:

$f'(t)=4^t\ln 4+4t+\dfrac{1}{2\sqrt{t}}>0, \forall t>0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f(y-1)\Leftrightarrow x+1=y-1\Leftrightarrow y=x+2$.

Thay $y=x+2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4^{x+1}=x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\Leftrightarrow 4^{x+1}\left(\sqrt{(x+1)^2+1}-x-1\right)=1\ (2).$$

Hàm số $g(t)=4^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)$ có $g'(t)=4^t\left(\ln 4-1\right).\dfrac{\sqrt{t^2+1}-t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(2)\Leftrightarrow g(x+1)=g(0)\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(-1;1\right)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=y^2+8\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-2\le x\le\dfrac{22}{3}$.

Từ phương trình đầu của hệ dễ tìm được $y=-x$. Thay $y=-x$ vào phương trình hai của hệ ta được: $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8$.

Để giải phương trình này ta có hai cách xử lý bằng nhân liên hợp như sau(xem thêm kỹ thuật và phương pháp giải đặc sắc giải phương trình, bất phương trình vô tỷ).

<u>Cách 1:</u> Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$4\left(\sqrt{x+2}-2\right)+\sqrt{22-3x}-4=x^2-4.$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\left(x-2\right)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{3\left(2-x\right)}{\sqrt{22-3x}+4}=\left(x-2\right)\left(x+2\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}-\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}-x-2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \dfrac{4}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}-x-2=0\end{array}\right..$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x+2}+2}-\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}-x-2$ trên $\left[-2;\dfrac{22}{3}\right]$, ta có:

$$f'(x)=-\frac{4}{2\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)^2}-\frac{9}{2\sqrt{22-3x}\left(\sqrt{22-3x}+4\right)^2}-1<0,\forall x\in\left(-2;\frac{22}{3}\right)$$

nên $f(x)$ là hàm nghịch biến trên $\left[-2;\dfrac{22}{3}\right]$.

Vì vậy $\frac{4}{\sqrt{x+2}+2}-\frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}-x-2=0 \Leftrightarrow f(x)=f(-1) \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;-2);(-1;1)$.

<u>Cách 2:</u> Viết lại phương trình dưới dạng:

$$4\left(\sqrt{x+2}-\frac{x+4}{3}\right)+\left(\sqrt{22-3x}-\frac{14-x}{3}\right)=x^2-x-2.$$

$$\Leftrightarrow 4.\frac{-x^2+x+2}{9\left(\sqrt{x+2}+\frac{x+4}{3}\right)}+\frac{-x^2+x+2}{9\left(\sqrt{22-3x}+\frac{14-x}{3}\right)}=x^2-x-2.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(1+\frac{1}{9\left(\sqrt{22-3x}+\frac{14-x}{3}\right)}+\frac{4}{9\left(\sqrt{x+2}+\frac{x+4}{3}\right)}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3\left(2-y\right)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge -2, y \le \frac{3}{2}$.

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x \ne 0$ viết phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+1-\frac{1}{x}=\left(4-2y\right)\sqrt{3-2y} \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)^3+1-\frac{1}{x}=\left(\sqrt{3-2y}\right)^2+\sqrt{3-2y}.$$

Từ đây dễ tìm được $1-\frac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$. Thay $\sqrt{3-2y}=1-\frac{1}{x}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{15-x}+1 \Leftrightarrow x=7 \Rightarrow y=\frac{111}{98}$ (vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(7;\frac{111}{98}\right)$.

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+3=4\left(x^2-2yx^2\right)\sqrt{3-2y}+\dfrac{4x^2+1}{x} \\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}}=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ne\left\{0;-\dfrac{1}{2}\right\},-\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{3}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+1-\frac{1}{x}=\left(4-2y\right)\sqrt{3-2y}\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)^3+1-\frac{1}{x}=\left(\sqrt{3-2y}\right)^2+\sqrt{3-2y}.$$

Từ đây dễ tìm được $1-\dfrac{1}{x}=\sqrt{3-2y}$. Thay $\sqrt{3-2y}=1-\dfrac{1}{x}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1}\Leftrightarrow\left(2x+1\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2.$$

$$\Leftrightarrow\left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{\frac{2}{x}+1}+\frac{2}{x}+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^3+\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{\frac{2}{x}+1}+\frac{2}{x}+1.$$

Xét hàm số suy ra $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}+1}\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3=\left(\dfrac{2}{x}+1\right)^2\Leftrightarrow x^2+x-1=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.\Rightarrow\left(x;y\right)=\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\right)$.

Bài 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-11x-2y+9=0 \\ y^3+3y^2+y+4x^2+22x+21=\left(2x+1\right)\sqrt{2x-1} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$.

Phương trình thứ hai của hệ được viết lại dưới dạng:

$$\left(y+1\right)^3+y+1=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+\sqrt{2x-1}.$$

$\Leftrightarrow y+1=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y^2+2y-2x+2=0 \end{cases}$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-11x-2y+9=0 \\ y^2+2y-2x+2=0 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình này bằng phương pháp thế tìm được các nghiệm $(x;y)=(1;0);\left(\frac{5}{2};-3\right);(5;2)$.

Kết hợp với điều kiện chỉ nhận hai nghiệm $(1;0);(5;2)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0);(5;2)$.

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y-x^3=x+1 \\ x^3+5x+\left(x^3-2y+6\right)\sqrt{x^3-2y+1}=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^3-2y+1 \geq 0$.

Đặt $t=\sqrt{x^3-2y+1}$ thì phương trình thứ hai của hệ được viết lại thành :

$$x^5+5x+\left(t^2+5\right)t=0 \Leftrightarrow x^5+5x=(-t)^5+5(-t).$$

Xét hàm số $f(u)=u^5+5u$ có $f'(u)=5u^4+5>0$ nên hàm số $f(u)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$, từ đó suy ra:

$$f(x)=f(-t) \Leftrightarrow x=-t \Leftrightarrow x=-\sqrt{x^3-2y+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ y=\frac{1}{2}\left(x^3+1-x^2\right) \end{cases}.$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được :

$$1-x^2=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=\frac{1}{2} \\ x=-1, y=-\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(0;\frac{1}{2}\right);\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

Bài 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + \dfrac{5}{3}(x+y)^2 + 5x^2 - \dfrac{8}{3}xy + 13x = \dfrac{100}{3} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có :

$$\begin{cases} x^2 + x(y-3) + y^2 - 4y + 4 = 0 \\ y^2 + y(x-4) + x^2 - 3x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_x = (y-3)^2 - 4(y^2 - 4y + 4) \geq 0 \\ \Delta_y = (x-4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{4}{3} \\ 1 \leq y \leq \dfrac{7}{3} \end{cases}.$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + \dfrac{20}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}y^2 + \dfrac{2}{3}xy + 13x = \dfrac{100}{3} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - 3y^3 + 20x^2 + 5y^2 + 2xy + 39x = 100 \ (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \ (2) \end{cases}.$$

Lấy $(1) - 2.(2)$ theo vế ta được:

$3x^3 + 18x^2 + 45x - 3y^3 + 3y^2 + 8y - 108 = 0 \quad (3)$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^3 + 18x^2 + 45x$ trên $\left[0; \dfrac{4}{3}\right]$ và:

$g(y) = -3y^3 + 3y^2 + 8y - 108$ trên $\left[1; \dfrac{7}{3}\right]$.

Ta có: $\max\limits_{x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]} f(x) = f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{892}{9}$, $\max\limits_{x \in \left[1; \frac{7}{3}\right]} g(y) = g\left(\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{892}{9}$.

Suy ra $f(x) + g(y) \leq \max\limits_{x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]} f(x) + \max\limits_{x \in \left[1; \frac{7}{3}\right]} g(y) = 0 \Rightarrow (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

Bài 35. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+15)-(x+y)^2=x^2-9y^2-15y+94\\4x^2+4y^2+6x+6y-2xy-9=0\end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases}x^3-y^3+15x-2x^2+8y^2-2xy-94=0 & (1)\\4x^2+4y^2+6x+6y+2xy-9=0 & (2)\end{cases}.$$

Từ phương trình (2) suy ra $x\in[-3;1], y\in[-3;1]$.

Lấy $(1)-(2)$ theo vế ta được :

$$x^3-6x^2+9x-y^3+4y^2-6y-85=0 \qquad (3).$$

Xét hai hàm số x^3-6x^2+9x và $g(y)=-y^3+4y^2-6y-85$ trên $[-3;1]$ thực hiện tương tự bài toán trên ta được:

$$(3)\Leftrightarrow f(x)+g(x)=\max_{x\in[-3;1]} f(x)+\max_{x\in[-3;1]} g(y)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-3)$.

Bài 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3-3x^2-3xy+17x+13y-27=0 \ (1)\\x^2+y^2+xy-5x-6y+10=0 \ (2)\end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $x\in\left[\frac{2}{3};2\right], y\in\left[\frac{5}{3};3\right]$.

Lấy $(1)+3.(2)$ theo vế ta được : $(y-1)^3+2(y-1)=x^3+2x \qquad (3)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ trên $\left[\frac{2}{3};2\right]$ là hàm đồng biến.

Do đó: $(3)\Leftrightarrow f(y-1)=f(x)\Leftrightarrow y-1=x$.

Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai của hệ tìm được các nghiệm $(x;y)=(1;2);\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2);\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Bài 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + x^2 - 2y^2 + xy - \dfrac{136}{9}x - 10y = -12 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y = -14 \end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right], y \in \left[\frac{5}{3}; 3\right]$

Lấy $(1) - (2)$ theo vế ta được :

$x^3 - \dfrac{73}{9}x - y^3 - 3y^2 - 4y - 2 = 0$ (3).

Xét hàm số $f(x) = x^3 - \dfrac{73}{9}x$ trên $\left[2; \dfrac{10}{3}\right]$ và $g(y) = -y^3 - 3y^2 - 4y - 2$ trên $\left[1; \dfrac{7}{3}\right]$.

Ta có : $\max\limits_{x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]} f(x) = f\left(\dfrac{10}{3}\right) = 10$; và $\max\limits_{x \in \left[1; \frac{7}{3}\right]} g(y) = g(1) = -10$.

Do đó: $(3) \Leftrightarrow f(x) + g(x) = \max\limits_{x \in \left[2; \frac{10}{3}\right]} f(x) + \max\limits_{x \in \left[1; \frac{7}{3}\right]} g(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{3} \\ y = 1 \end{cases}$.

Thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + x^2 + 3y^2 + xy - \dfrac{136}{9}x - 6y = -\dfrac{76}{27} \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y = -14 \end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $x \in \left[2; \frac{10}{3}\right], y \in \left[1; \frac{7}{3}\right]$.

Lấy $(1) - (2)$ theo vế ta được :

$$x^3 - \frac{73}{9}x - y^3 + 2y^2 - \frac{302}{27} = 0 \ (3).$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - \dfrac{73}{9}x$ trên $\left[2; \dfrac{10}{3}\right]$ và $g(y) = -y^3 + 2y^2 - \dfrac{302}{27}$ trên $\left[1; \dfrac{7}{3}\right]$.

Ta có : $\max\limits_{x\in\left[2;\frac{10}{3}\right]} f(x)=f\left(\frac{10}{3}\right)=10$; và $\max\limits_{x\in\left[1;\frac{7}{3}\right]} g(y)=g\left(\frac{4}{3}\right)=-10$.

Do đó $(3)\Leftrightarrow f(x)+g(x)=\max\limits_{x\in\left[2;\frac{10}{3}\right]} f(x)+\max\limits_{x\in\left[1;\frac{7}{3}\right]} g(y)\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Bài 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2x^2-2xy-y^3+\frac{2y}{3}-\frac{25}{54}=0 \\ 2x^2-x-2xy+2y^2+3y+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được :

$$x^3+x=\left(y+\frac{2}{3}\right)^3+y+\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=y+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=x-\frac{2}{3}.$$

Thay $y=x-\frac{2}{3}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta tìm được các nghiệm :

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{5}{6}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{5}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm:

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{5}{6}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{5}{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Bài 40. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+1\right)\sqrt{x-1}-4y\left(2y^2+1\right)=0 \\ 2y^2-3xy+x+8=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x\geq 1$.

Viết lại phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng :

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^3+2\sqrt{x-1}=(2y)^3+2.2y\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2y\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ x=4y^2+1 \end{cases}.$$

Thay $x = 4y^2 + 1$ vào phương trình thứ hai của hệ tìm được nghiệm $(x;y) = (5;1)$.

Bài 41. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 6x^2y = 8y^3 - 6 \ (1) \\ 4xy^2 + x = 2y + \sqrt{2y - x + 1} + 1 \ (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $2y - x + 1 \geq 0$.

Lấy $(1) + 3.(2)$ theo vế ta được :

$$(x - 2y)^3 + 3(x - 2y) + 3 = 3\sqrt{1 - (x - 2y)}.$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)^3 + 3(x - 2y) + 3 - 3\sqrt{1 - (x - 2y)} = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

Thay $x = 2y$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta tìm được nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\sqrt[3]{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

Bài 42. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - \frac{13}{2}x^2 + 4\left(x^2 + 2\right)\left(\sqrt{y} + 1\right) + 4x - 15 = 0 \\ \left(x^2 - 2\right)\sqrt{x^2 + 1} = 3y + y\sqrt{y} - 2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $y \geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng :

$$\left(\sqrt{x^2 + 1} - 1\right)^3 + 3\left(\sqrt{x^2 + 1} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{y}\right)^3 + 3(\sqrt{y})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} - 1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x^2 + 1} - 1\right)^2.$$

Thay $y = \left(\sqrt{x^2 + 1} - 1\right)^2$ vào phương trình đầu của hệ ta được :

$$x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + 1\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{16\sqrt{2} - 7}}{2\sqrt{2}}.$$

Bài 43. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 8y^3 - 3x^2 + 12y^2 + 6x - 12y = \sqrt{2y - 1} - \sqrt{x - 1} \\ \sqrt{2x}\left(2xy + 1\right) = 6y\sqrt{x^2 + 4y + 1} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện : $x \ge 1, y \ge \frac{1}{2}$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\left(x-1\right)^3 + 3\left(x-1\right) + \sqrt{x-1} = \left(2y-1\right)^3 + 3\left(2y-1\right) + \sqrt{2y-1}$$

$\Leftrightarrow x - 1 = 2y - 1 \Leftrightarrow x = 2y$.

Thay $x = 2y$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(x;y\right) = \left(0;0\right);\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}\right);\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $\left(x;y\right) = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}\right)$.

Bài 44. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x^2 - 7x = \left(3y^2 - 6y + 4\right)\sqrt{3y^2 - 6y + 7} \\ \left(x^3 - 3x^2\right)\left(\sqrt{x^2 + \left(y-1\right)^2} + 3\right) + 8 = \left(x^2 + y^2 - 2y\right)^2 - 7\left(x^2 + y^2 - 2y\right) \end{cases}.$$

Lời giải

Ta có : $\left(3y^2 - 6y + 4\right)\sqrt{3y^2 - 6y + 7} = \left(3\left(y-1\right)^2 + 1\right)\sqrt{3\left(y-1\right)^2 + 4} \ge 2$.

$$\Rightarrow 4x^3 - 4x^2 - 7x \ge 2 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(4x^2 + 4x + 1\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Nhận thấy $x = -\frac{1}{2}$ không thỏa mãn hệ phương trình vì vậy $x \ge 2$.

Viết phương trình thứ hai của hệ dưới dạng :

$$x^3 - 3x^2 = \left(\sqrt{x^2 + \left(y-1\right)^2}\right)^3 - 3\left(x^2 + \left(y-1\right)^2\right) \ (1).$$

Hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2$ đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$ nên phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt{x^2 + \left(y-1\right)^2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{x^2 + \left(y-1\right)^2} \Leftrightarrow y = 1.$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $x = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(2;1\right)$.

Bài 45. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{1-y} - \sqrt{1-x} = 0\\ \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = \sqrt{2}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại dưới dạng :

$$\sqrt{x} - \sqrt{1-x} = \sqrt{y} - \sqrt{1-y}.$$

Dễ tìm được $x = y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x\left(1-x\right)} = 1 \Leftrightarrow 4x\left(1-x\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 46. Giải hệ phương trình $\begin{cases}8x^3 - 4x^2 - 3x = 3y - \frac{1}{2}\\ x^3 + 5x + \left(x^3 - 2y + 6\right)\sqrt{x^3 - 2y + 1} = 0\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x^3 - 2y + 1 \ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với :

$$\left(\sqrt{x^3 - 2y + 1}\right)^3 + 5\sqrt{x^3 - 2y + 1} = (-x)^3 + 5.(-x).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3 - 2y + 1} = -x \Leftrightarrow \begin{cases}x \le 0\\ x^3 - 2y + 1 = x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \le 0\\ 2y = x^3 - x^2 + 1\end{cases}.$$

Thay $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{2}$ vào phương trình thứ nhất của hệ tìm được nghiệm duy nhất của hệ là $\left(x;y\right) = \left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 47. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+5y-6=0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{-x^2-x+4}-x^2-x+4}{1+\sqrt{-x^2-x+4}}-\dfrac{\sqrt{y^2+y}}{1+\sqrt{-y^2-y+4}}=\sqrt{-x^2-x+4} \end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng:

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{-x^2-x+4}}=\frac{\sqrt{y^2+y}}{1+\sqrt{-y^2-y+4}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}=\sqrt{y^2+y}.$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2+x-y=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y+1=0 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp và tìm được nghiệm của hệ phương trình là

$$(x;y)=(1;1);\left(\frac{5-\sqrt{69}}{2};\frac{-7+\sqrt{69}}{2}\right).$$

Bài 48. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=3y^2+4y-x+2 \\ \sqrt{x+y}+3\sqrt{x+3y+19}=105-y^3-xy \end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện : $x+y\ge 0, x+3y+19\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x^3+x=(y+1)^3+y+1 \Leftrightarrow x=y+1.$$

Thay $x=y+1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{2y+1}+3\sqrt{4y+20}=105-y^3-y^2-y.$$

$$\Leftrightarrow y^3+y^2+y+\sqrt{2y+1}+6\sqrt{y+5}-105=0.$$

Hàm số $f(y)=y^3+y^2+y+\sqrt{2y+1}+6\sqrt{y+5}-105$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ nên $y=4$ là nghiệm duy nhất suy ra $x=5$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;4)$.

Bài 49. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \dfrac{18}{x^2+1}+9\sqrt{8y-7+8\sqrt{3-2y}}=17+4y+4\sqrt{3-2y} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $y \le \frac{3}{2}, 8y - 7 + 8\sqrt{3-3y} \ge 0$.

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x \ne 0$ khi đó phương trình đầu của hệ tương đương với :

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 + \left(1-\frac{1}{x}\right) = \left(\sqrt{3-2y}\right)^3 + \sqrt{3-2y} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x} = \sqrt{3-2y}.$$

Thay $\frac{1}{x} = 1-\sqrt{3-2y}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$\frac{18\left(1-\sqrt{3-2y}\right)^2}{\left(1-\sqrt{3-2y}\right)^2+1} + 9\sqrt{9-4\left(1-\sqrt{3-2y}\right)^2} = 25 - 2\left(1-\sqrt{3-2y}\right)^2.$$

Đặt $t = \left(1-\sqrt{3-2y}\right)^2, t \ge 0$ phương trình trở thành:

$$\frac{18t}{t+1} + 9\sqrt{9-4t} = 25-2t \Leftrightarrow 9(t+1)\sqrt{9-4t} = (25-2t)(t+1) - 18t.$$

$$\Leftrightarrow 9(t+1)\sqrt{9-4t} = -2t^2 + 5t + 25 \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ -2t^2 + 5t + 25 \ge 0 \\ 81(t+1)^2(9-4t) = (-2t+5t+25)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{3-2y}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{3-2y} = \sqrt{2} \\ 1-\sqrt{3-2y} = -\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{3-2y} = 1+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow y = -\sqrt{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right)$.

Bài 50. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x - \frac{13y}{x} = 2x\sqrt[3]{x\left(4+3y-x^2\right)} + \frac{5}{2y-x+2} \\ 2\sqrt{x-y+1} - 6(x-y)^2 + 3 = 2\sqrt{2(x-y)} - 3(x-y) \end{cases}$

Lời giải

Phương trình thứ hai của hệ có chỉ có nhân tử $x-y$ nên ta có thể tìm được $t = x-y$ khi đặt ẩn phụ. Dưới đây sử dụng hàm số như sau:

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$2(x-y+1)^2 + x-y+1 + 2\sqrt{x-y+1} = 2.4(x-y)^2 + 2(x-y) + \sqrt{2(x-y)}.$$

$\Leftrightarrow x-y+1=2\left(x-y\right)\Leftrightarrow x-y=1\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$7x+\frac{8}{x}-13=2x\sqrt[3]{x\left(1+3x-x^2\right)}$$

$$\xleftrightarrow{x\neq 0}\left(\frac{2}{x}-1\right)^3+2\left(\frac{2}{x}-1\right)=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-1\right)+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{x}-1=\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-1}\Leftrightarrow 2-x=\sqrt[3]{x+3x^2-x^3}\Leftrightarrow\left(2-x\right)^3=x+3x^2-x^3.$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-13x+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{13-\sqrt{73}}{6}\\ x=\dfrac{13+\sqrt{73}}{6}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{13-\sqrt{73}}{6}\\ y=\dfrac{7-\sqrt{73}}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{13+\sqrt{73}}{6}\\ y=\dfrac{7+\sqrt{73}}{6}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{13-\sqrt{73}}{6};\frac{7-\sqrt{73}}{6}\right);\left(\frac{13+\sqrt{73}}{6};\frac{7+\sqrt{73}}{6}\right).$$

Bài 51. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+x+\log_2\dfrac{x}{y}=8y^3+2y+1\\ \sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}-1=0\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x\geq 1,y\geq 1$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ được biến đổi thành :

$$x^3+x+\log_2 x=\left(2y\right)^3+2y+\log_2 2y$$

Ta xét hàm số $f(t)=t^3+t+\log_2 t,t>0$. Ta có $f'(t)=3t^2+1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0,t>0$.

Suy ra hàm số đơn điệu tăng. Từ đó suy ra $f(x)=f(2y)\Leftrightarrow x=2y$.

Thay $x=2y$ vào phương trình thứ hai ta được :

$$\sqrt{2y-1}-\sqrt{y-1}-1=0\Leftrightarrow 2y-1=y-2\sqrt{y-1}\Leftrightarrow 2\sqrt{y-1}=1-y\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$.

Bài 52. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(x-2\right)\sqrt{x+6}=6-y \\ \left(x-2\right)\sqrt{y+2}=\sqrt{y+1}.\sqrt{x^2-4x+5} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x\geq -6, y\geq -1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\frac{x-2}{\sqrt{\left(x-2\right)^2+1}}=\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{\left(\sqrt{y+1}\right)^2+1}} \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}-\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}=\dfrac{1}{\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2+1}}>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f\left(x-2\right)=f\left(\sqrt{y+1}\right)\Leftrightarrow x-2=\sqrt{y+1}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq 2 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$.

Thay $y=x^2-4x+3$ vào phương trình đầu của hệ ta được :

$$2\left(x-2\right)\sqrt{x+6}=3-x^2+4x\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=0.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;0\right)$.

Bài 53. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(53-5x\right)\sqrt{10-x}+\left(5y-48\right)\sqrt{9-y}=0 \\ \sqrt{2x-y+6}+x^2-2x-66=\sqrt{-2x+y+11} \end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với :

$$5\left(\sqrt{10-x}\right)^3+3\sqrt{10-x}=5\left(\sqrt{9-y}\right)^3+3\sqrt{9-y}\Leftrightarrow\sqrt{10-x}=\sqrt{9-y}\Leftrightarrow y=x-1$$

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x+7}+x^2-2x-66=\sqrt{10-x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+7}-4\right)+x^2-2x-63+\left(1-\sqrt{10-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-9}{\sqrt{x+7}+4}+(x-9)(x+7)+\frac{x-9}{1+\sqrt{10-x}}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-9)\left(\frac{1}{\sqrt{x+7}+4}+x+7+\frac{1}{1+\sqrt{10-x}}\right)=0 \Leftrightarrow x=9 \Rightarrow y=8.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(9;8)$.

Bài 54. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2-11x-2y+10=0 \\ y^3+3y^2+4x^2+22x+y+21=(2x+1)\sqrt{2x-1} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x \ge \frac{1}{2}$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$(y+1)^3+y+1=\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow y+1=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -1 \\ y^2+2y+1=2x-1 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} y \ge -1 \\ y^2+2y+1=2x-1 \\ x^2-11x-2y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;0)$.

Bài 55. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6 \\ 2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x \ge -\frac{1}{2}, y \ge 2$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với :

$$2(2x+1)^3+2x+1=2\left(\sqrt{y-2}\right)^3+\sqrt{y-2} \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t>0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(2x+1)=f\left(\sqrt{y-2}\right) \Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{y-2} \Leftrightarrow y=4x^2+4x+3$.

Thay $y=4x^2+4x+3$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\sqrt{4x+2}+\sqrt{2\left(4x^2+4x+3\right)+4}=6.$$

Vế trái là hàm đồng biến nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=6$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{2};6\right)$.

Bài 56. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\ y+\dfrac{y}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}\end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình đầu của hệ suy ra $x=-y$.

Thay $x=-y$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$y+\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{35}{12}\Rightarrow y>0$$

Bình phương hai vế của phương trình ta được :

$$y^2+\frac{y^2}{y^2-1}+\frac{2y^2}{\sqrt{y^2-1}}=\left(\frac{35}{12}\right)^2\Leftrightarrow\frac{y^4}{y^2-1}+\frac{2y^2}{\sqrt{y^2-1}}-\left(\frac{35}{12}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{25}{12}\xleftrightarrow{y>0}\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{5}{3}\\ y=\dfrac{5}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{5}{3},y=\dfrac{5}{3}\\ x=-\dfrac{5}{4},y=\dfrac{5}{4}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right);\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)$.

Bài 57. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x^2+2+\left(y^2+2\right)\sqrt{1-y^2}=0\\ \sqrt{2x-x^2}=2\sqrt{1-y^2}+2x-1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $0\le x\le 2,-1\le y\le 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(x-1\right)^3-3\left(x-1\right)=\left(\sqrt{1-y^2}\right)^3-3\sqrt{1-y^2}.$$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên $\left[-1;1\right]$, ta có:

$f'(t)=3t^2-3\le 0,\forall t\in\left[-1;1\right]$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[-1;1\right]$.

Vì vậy: $f(x-1)=f\left(\sqrt{1-y^2}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt{1-y^2}$.

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}x-1=\sqrt{1-y^2}\\ \sqrt{2x-x^2}=2\sqrt{1-y^2}+2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\sqrt{1-y^2}\\ \sqrt{2x-x^2}=4x-3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=1\\ x=1,y=-1\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(1;-1\right)$.

Bài 58. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x=2\\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}=-2\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $-1\le x\le 1, 0\le y\le 2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với : $\left(x+1\right)^3-3\left(x+1\right)^2=y^3-3y^2$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t^2$ trên $\left[0;2\right]$, ta có :

$f'(t)=3t^2-6t\le 0,\forall t\in\left[0;2\right]$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[0;2\right]$.

Vì vậy $f(x+1)=f(y)\Leftrightarrow x+1=y$.

Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2\left(x+1\right)-\left(x+1\right)^2}=-2.$$

$$\Leftrightarrow x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{1-x^2}+2=0\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=x^2+2\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;1\right)$.

Bài 59. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+x-2=y^3+3y^2+4y\\ x^5+y^3+1=0\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^3+x-2=\left(y+1\right)^3+y+1-2\\ x^5+y^3+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\ x^5+y^3+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;-1\right)$.

Bài 60. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x-1}+4(2x+1)=\sqrt{y-1}+3y \\ (x+y)(2x-y)+6x+3y+4=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x \ge \frac{1}{3}, y \ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với :

$(x+y+1)(2x-y+4)=0 \xleftrightarrow{x\ge\frac{1}{3}, y\ge 1} y=2x+4$.

Thay $y=2x+4$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được :

$\sqrt{3x-1}+2x-8=\sqrt{2x+3}$.

$\Leftrightarrow 2(3x-1)+\sqrt{3x-1}=2(2x+3)+\sqrt{2x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-1}=\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow y=12$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;12)$.

Bài 61. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (8x-3)\sqrt{2x-1}=4y^3+y \\ 4x^2-8x+2y^3+y^2-2y+3=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x \ge \frac{1}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với :

$4\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+\sqrt{2x-1}=4y^3+y \Leftrightarrow y=\sqrt{2x-1}$.

Thay $y=\sqrt{2x-1}$ vào phương trình thứ hai của hệ thực hiện xét tính đơn điệu của hàm số tìm được nghiệm duy nhất của hệ là $(x;y)=(1;1)$.

Bài 62. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2012-3x)\sqrt{4-x}+(6y-2009)\sqrt{3-2y}=0 \\ 2\sqrt{7x-8y}+3\sqrt{14x-18y}=x^2+6x+13 \end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với :

$3\left(\sqrt{4-x}\right)^3+2000\sqrt{4-x}=3\left(\sqrt{3-2y}\right)^3+2000\sqrt{3-2y}$.

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x}=\sqrt{3-2y} \Leftrightarrow 4-x=3-2y \Leftrightarrow y=\frac{x-1}{2}$.

Thay $y=\dfrac{x-1}{2}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13$.

$\Leftrightarrow\left[2\sqrt{3x+4}-2\left(x+2\right)\right]+\left[3\sqrt{5x+9}-3\left(x+3\right)\right]=x^2+x$.

$\Leftrightarrow x\left(x+1\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3x+4}+x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{5x+9}+x+3}\right)=0$.

$\Leftrightarrow x\left(x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=-\dfrac{1}{2}\\x=-1,y=-1\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;-\dfrac{1}{2}\right);\left(-1;-1\right)$.

Bài 63. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^3x-x^4=28\\xy^2+2x^2y+x^3=18\sqrt{2}\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases}x\left(y^3-x^3\right)=28\\x\left(x+y\right)^2=18\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow x,y>0$.

Rút $y=\sqrt{\dfrac{18\sqrt{2}}{x}}-x=\dfrac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt{x}}-x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$x\left(\left(\dfrac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt{x}}-x\right)^3-x^3\right)=28$.

Đặt $t=\sqrt{x},\left(t>0\right)$ phương trình trở thành : $t^2\left(\left(\dfrac{3\sqrt[4]{8}}{t}-t^2\right)^3-t^6\right)=28$.

$\Leftrightarrow t^9-\left(3\sqrt[4]{8}-t^3\right)^3+28t=0$.

Vế trái là hàm đồng biến nên phương trình có nghiệm duy nhất:

$t=\sqrt[4]{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}\Rightarrow y=2\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

Bài 64. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^{2015} + xy^{2014} = y^{2030} + y^{2016} \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4\sqrt[3]{x\left(3x^2 + 3y^2 - 1\right)} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x\left(3x^2 + 3y^2 - 1\right) \ge 0$.

Nhận thấy $xy = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $xy \ne 0$ viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{2015} + \frac{x}{y} = y^{2015} + y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2 > 0.$$

Thay $y^2 = x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$7x^2 + 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x\left(3x^2 + 3x - 1\right)} \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} + \frac{13}{x^2} + \frac{7}{x} = 2\sqrt[3]{3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{x} + 1\right)^3 + 2\left(\frac{2}{x} + 1\right) = \left(\sqrt[3]{3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}\right)^3 + 2\sqrt[3]{3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} + 1 = \sqrt[3]{3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} \xleftrightarrow{x>0} x = \frac{6}{\sqrt{89} - 5} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{6}{\sqrt{89} - 5}}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(\frac{6}{\sqrt{89} - 5};\sqrt{\frac{6}{\sqrt{89} - 5}}\right);\left(\frac{6}{\sqrt{89} - 5};-\sqrt{\frac{6}{\sqrt{89} - 5}}\right).$$

Bài 65. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 30x^{2015} + 4xy^{2014} = 30y^{4030} + 4y^{2016} \\ 162y^2 + 27\sqrt{3} = \left(8x^3 - \sqrt{3}\right)^3 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $xy = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $xy \ne 0$ viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng :

$$30\left(\frac{x}{y}\right)^{2015} + 4.\frac{x}{y} = 30y^{2015} + 4y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2 > 0.$$

Thay $y^2 = x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$162x + 27\sqrt{3} = \left(8x^3 - \sqrt{3}\right)^3.$$

Để giải phương trình này ta đưa về giải hệ bằng phép đặt ẩn phụ $8x^3-\sqrt{3}=6u$ ta được:

$$\begin{cases}8x^3-\sqrt{3}=6u\\162x+27\sqrt{3}=216u^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6u=8x^3-\sqrt{3}\\6x=8u^3-\sqrt{3}\end{cases}.$$

Đây là hệ đối xứng loại II dễ tìm được nghiệm $x=y$ là nghiệm của phương trình :

$$8x^3-\sqrt{3}=6x\Leftrightarrow 8x^3-6x=\sqrt{3}\xleftrightarrow{x>0}x=\cos\frac{\pi}{18}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\cos\frac{\pi}{18}}$$

(xem thêm chương 1).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\cos\frac{\pi}{18};-\sqrt{\cos\frac{\pi}{18}}\right);\left(\cos\frac{\pi}{18};\sqrt{\cos\frac{\pi}{18}}\right).$$

Bài 66. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1\\y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1\end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được :

$$x+\sqrt{x^2-2x+2}+3^{x-1}=y+\sqrt{y^2-2y+2}+3^{y-1}.$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2-2t+2}+3^{t-1}$ ta có :

$$f'(t)=1+\frac{t-1}{\sqrt{(t-1)^2+1}}+3^{t-1}\ln 3=3^{t-1}\ln 3+\frac{\sqrt{(t-1)^2+1}+t-1}{\sqrt{(t-1)^2+1}}$$

$$>3^{t-1}\ln 3+\frac{|t-1|+t-1}{\sqrt{(t-1)^2+1}}\geq 3^{t-1}\ln 3>0.$$

Nên $f(t)$ là hàm đồng biến vì vậy $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình đầu của hệ ta được :

$$x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}=3^{x-1}\Leftrightarrow 3^{x-1}\left(\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)\right)=1\ (1).$$

Xét hàm số $f(x)=3^{x-1}\left(\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)\right)$ trên $\mathbb{R}$, ta có :

$$f'(x)=3^{x-1}\ln 3\left(\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)\right)+3^{x-1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}-1\right)$$

$$=3^{x-1}\left(\sqrt{(x-1)^2+1}-(x-1)\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$$

Nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(1)\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Chủ đề 11. KỸ THUẬT SỬ DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1. Dạng hệ phương trình $\begin{cases} f^2(x,y)=0 \\ g^k(x,y)=0 \end{cases}$, trong đó $f^2(x,y)=0$ là một phương trình bậc hai hai biến và $g^k(x,y)=0$ là một phương trình bậc cao hoặc có chứa căn đối với hai biến. Suy nghĩ đầu tiên là coi $f^2(x,y)=0$ là phương trình bậc hai đối với một biến và biến còn lại ta coi là tham số từ đó tìm ra miền giá trị của từng biến. Ta dựa vào miền giá trị của biến để đánh giá phương trình còn lại.

Ví dụ 1. Phương trình $x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0$ (1).

Coi (1) là phương trình bậc hai với ẩn là x và y là tham số ta được

$$x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0.$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta_y = (y-7)^2 - 4\left(y^2 - 6y + 14\right) \ge 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 7 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le \frac{7}{3}.$$

Coi (1) là phương trình bậc hai với ẩn là y và x là tham số ta được:

$$y^2 + (x-6)y + x^2 - 7x + 14 = 0.$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta_x = (x-6)^2 - 4\left(x^2 - 7x + 14\right) \ge 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 16x - 20 \ge 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le \frac{10}{3}.$$

Vậy ta có $x \in \left[2;\frac{10}{3}\right], y \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$.

2. Hệ phương trình có chứa căn thức $\begin{cases} \sqrt{A(x;y)} = B(x;y) \\ C(x;y) = 0 \end{cases}$.

Xuất phát từ điều kiện để hệ có nghiệm là $\begin{cases} A(x;y) \ge 0 \\ B(x;y) \ge 0 \end{cases}$ ta tim được ràng buộc giữa x, y.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-1)^2 = -y^3 - 3y^2 - 3y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng

$$x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là x và tham số là y ta được

$$\Delta'_x = (y-1)^2 - \left(y^2 - 6y + 1\right) = 4y \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 0.$$

Khi đó phương trình đầu của hệ được viết lại: $(x-1)^2 = 1 - (y+1)^3$.

Do $y \ge 0$ nên $VT = (x-1)^2 \ge 0 \ge VP = 1 - (y+1)^3$.

Do vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x = 1; y = 0$ thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;0)$.

<u>Nhận xét.</u> Ngoài cách tính Δ'_x như trên để tìm điều kiện của y ta có thể viết lại phương trình như sau

$(x+y-1)^2=4y\Rightarrow 4y\ge 0\Leftrightarrow y\ge 0$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0\\ \sqrt{x^3+xy+6y}-\sqrt{y^3+x^2-1}=2\end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$10x^2-2(y+19)x+5y^2-6y+41=0.$$

Suy ra $\Delta'_x=(y+19)^2-10(5y^2-6y+41)=-49(y-1)^2\ge 0\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2$.

Thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x^2+y^2-2y+5=0\\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\end{cases}$.

Lời giải

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng

$$x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\ (1).$$

Coi (1) là phương trình bậc hai với ẩn là x và y là tham số ta được

$$x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0.$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta_y=(y-7)^2-4(y^2-6y+14)\ge 0\Leftrightarrow -3y^2+10y-7\ge 0\Leftrightarrow 1\le y\le \frac{7}{3}.$$

Coi (1) là phương trình bậc hai với ẩn là y và x là tham số ta được:

$$y^2+(x-6)y+x^2-7x+14=0.$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta_x=(x-6)^2-4(x^2-7x+14)\ge 0\Leftrightarrow -3x^2+16x-20\ge 0\Leftrightarrow 2\le x\le \frac{10}{3}.$$

Vậy ta có $x \in \left[2;\frac{10}{3}\right], y \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$.

Phương trình đầu của hệ trở thành $f(x)+g(y)=0$, trong đó $\begin{cases} f(x)=x^3-3x^2 \\ g(y)=y^2-2y+5 \end{cases}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x=3x\left(x-2\right)\ge 0, \forall x \in \left[2;\frac{10}{3}\right]$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[2;\frac{10}{3}\right]$. Suy ra $f(x)\ge f(2)=-4$.

$g'(y)=y^2-2y+5=\left(y-1\right)^2+4\ge 4, \forall y \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$.

Do đó $f(x)+g(y)\ge 0$. Vì vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} f(x)=-4 \\ g(y)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ thử lại thấy thỏa mãn phương trình thứ hai của hệ.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(2x^2-1\right)\left(2y^2-1\right)=\frac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases}$.

Lời giải

Theo trên ta có $2\le x\le \frac{10}{3}; 1\le y\le \frac{7}{3}$.

Khi đó viết phương trình của hệ dưới dạng

$\left(2x-\frac{1}{x}\right)\left(2y-\frac{1}{y}\right)=\frac{7}{2}$ (1).

Xét hàm số $f(t)=2t-\frac{1}{t}$ với $t\ge 1$. Ta có $f'(t)=2+\frac{1}{t^2}>0, \forall t\ge 1$ vì vậy $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$ và rõ ràng $f(t)>0, \forall t\ge 1$.

Do đó $VT_{(1)}=f(x).f(y)\ge f(2).f(1)=\left(2.2-\frac{1}{2}\right)\left(2.1-\frac{1}{1}\right)=\frac{7}{2}=VP_{(1)}$.

Vì vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x=2; y=1$ thử lại phương trình thứ hai của thấy không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(2x^2-3x+4\right)\left(2y^2-3y+4\right)=18\\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\end{cases}$.

Lời giải

Tương tự bài trên ta có $f(t)=2t^2-3t+4$ là hàm đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

Suy ra $\left(2x^2-3x+4\right)\left(2y^2-3y+4\right)=f(x).f(y)\ge f(2).f(1)=6.3=18$.

Vì vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x=2;y=1$ thỏa mãn phương trình thứ hai của hệ.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4+y^2=9\\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0\end{cases}$.

Lời giải

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng

$$x^2+\left(y-3\right)x+y^2-4y+4=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là x ta được

$$\Delta_x=\left(y-3\right)^2-4\left(y^2-4y+4\right)=-3y^2+10y-7\ge 0\Leftrightarrow 1\le y\le\frac{7}{3}.$$

Tương tự viết lại: $y^2+\left(x-4\right)y+x^2-3x+4=0$.

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là y ta được

$$\Delta_y=\left(x-4\right)^2-4\left(x^2-3x+4\right)=-3x^2+4x\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{4}{3}.$$

Khi đó $x^4+y^2\le\left(\frac{4}{3}\right)^4+\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{697}{81}<9$. Vì vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3+\frac{5}{3}\left(x+y\right)^2+5x^2-\frac{8}{3}xy+13x=\frac{100}{3}\\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0\end{cases}$.

Lời giải

Viết lại phương trình thứ hai của hệ trở thành

$$x^2+x\left(y-3\right)+y^2-4y+4=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là x và tham số là y ta được

$$\Delta_x = (y-3)^2 - 4(y^2-4y+4) = -3y^2+10y-7 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le \frac{7}{3}.$$

Tương tự viết lại: $y^2 + y(x-4) + x^2 - 3x + 4 = 0$.

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là y và tham số x ta được

$$\Delta_y = (x-4)^2 - 4(x^2-3x+4) = -3x^2+4x \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{4}{3}.$$

Rút xy từ phương trình thứ hai của hệ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$3x^3+18x^2+45x-3y^3+3y^2+8y-108=0$ (1).

Xét hàm số $f(x)=3x^3+18x^2+45x$ trên $\left[0;\frac{4}{3}\right]$.

Ta có $f'(x)=9x^2+36x+45>0, \forall x \in \left[0;\frac{4}{3}\right]$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[0;\frac{4}{3}\right]$.

Suy ra $f(x) \le f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{892}{9}$.

Xét hàm số $g(y) = -3y^3+3y^2+8y-108$ trên $\left[1;\frac{7}{3}\right]$.

Ta có $g'(y) = -9y^2+6y+8; g'(y)=0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} \in \left[1;\frac{7}{3}\right]$.

Tính được $g(1)=-100; g\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{892}{9}; g\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{1000}{9}$.

Suy ra $\max\limits_{y\in\left[1;\frac{7}{3}\right]} g(y) = g\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{80}{9}$.

Do đó $VT_{(1)} = f(x)+g(y) \le f\left(\frac{4}{3}\right) + g\left(\frac{4}{3}\right) = 0$.

Vì vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $x = y = \frac{4}{3}$.

Thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2+15)-(x+y)^2=x^2-9y^2-15y+94\\4x^2+4y^2+6x+6y-2xy-9=0\end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}x^3-2x^2+15x-y^3+9y^2-94-2xy=0 \quad (1)\\4x^2+4y^2+6x+6y-2xy-9=0 \qquad (2)\end{cases}.$$

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng

$$4x^2+2(3-y)x+4y^2+6y-9=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn x và tham số là y ta được

$$\Delta'_x=(3-y)^2-4(4y^2+6y-9)\ge 0 \Leftrightarrow -15y^2-30y+45\ge 0 \Leftrightarrow -3\le y\le 1.$$

Tương tự viết lại phương trình dưới dạng

$$4y^2+2(3-x)y+4x^2+6x-9=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là y ta được

$$\Delta'_y=(3-x)^2-4(4x^2+6x-9)\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 1.$$

Vậy ta có $x,y\in[-3;1]$.

Rút xy từ phương trinh (1) thay vào phương trình (2) ta có phương trình:

$$x^3-6x^2+9x-y^3+4y^2-6y-85=0 \ (3).$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x$ trên $[-3;1]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)\ge 0, \forall x\in[-3;1]$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[-3;1]$. Suy ra $f(x)\le f(1)=4$.

Xét hàm số $g(y)=-y^3+4y^2-6y-85$ trên $[-3;1]$.

Ta có $g'(y)=-3y^2+8y-6<0, \forall y\in[-3;1]$ nên $g(y)$ là hàm nghịch biến trên $[-3;1]$. Suy ra $g(y)\le g(-3)=-4$.

Vì vậy $VT_{(3)}=f(x)+g(y)\le f(1)+g(-3)=0$.

Do đó hệ có nghiệm khi và chỉ khi $x=1; y=-3$ thử lại phương trình thứ hai của hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-3)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x-y)^3-4xy-3=0 \\ (x-y)^4-2x^2+4xy+2y^2+x+3y+1=0 \end{cases}$.

Lời giải

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$(x-y)^4+2(x-y)^3-2x^2+2y^2+x+3y-2=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^4+2(x-y)^3-3+2y^2-2x^2+x+3y+1=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left((x-y)^3+3(x-y)^2+3(x-y)+3\right)+(y+1-x)(2x+2y+1)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left((x-y)^3+3(x-y)^2+x+y+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ (x-y)^3+3(x-y)^2+x+y+2=0 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=x-1$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$2-4x(x-1)-3=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}.$$

<u>TH2:</u> Nếu $(x-y)^3+3(x-y)^2+x+y+2=0$.

Kết hợp với phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\begin{cases} (x-y)^3+3(x-y)^2+x+y+2=0 \\ 2(x-y)^3-4xy-3=0 \end{cases} \Rightarrow 4xy+3+6(x-y)^2+2x+2y+4=0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2+2x(1-4y)+6y^2-10y+7=0.$$

$\Rightarrow \Delta'_x=(1-4y)^2-6(6y^2-10y+7)=-20y^2+52y-41<0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3+3xy-17x+18=x^3-3x^2+13y-9 \\ x^2+y^2+xy-5x-6y+10=0 \end{cases}$.

Lời giải

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng: $x^2+(y-5)x+y^2-6y+10=0$.

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn x ta được

$$\Delta_x = (y-5)^2 - 4(y^2-6y+10) = -3y^2+14y-15 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \le y \le 3.$$

Tương tự viết lại dưới dạng: $y^2 + (x-6)y + x^2 - 5x + 10 = 0$.

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn y ta được

$$\Delta_y = (x-6)^2 - 4(x^2-5x+10) = -3x^2+8x-4 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le x \le 2.$$

Rút xy từ phương tình thứ hai của hệ thế vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^3 + 2x = (y-1)^3 + 2(y-1) \ (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ trên $\left[\frac{2}{3};2\right]$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \left[\frac{2}{3};2\right]$.

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[\frac{2}{3};2\right]$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y-1$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3y^2 - 14y + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \Rightarrow x = 1 \\ y = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y) = (1;2); \left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{5y^4 - x^4} - 6(x^2 - y^2) - 2xy = 0 \\ (5y^2 + x^2)^2 - 36 = 2\sqrt{xy}(6 - 5y^2 - x^2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \ge 0, 5y^4 - x^4 \ge 0$.

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$(5y^2 + x^2)^2 + 2\sqrt{xy}(5y^2 + x^2) - 12\sqrt{xy} - 36 = 0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là $5y^2 + x^2$, ta được:

$$\Delta'_x = xy + 12\sqrt{xy} + 36 = (\sqrt{xy} + 6)^2.$$

Suy ra $5y^2 + x^2 = 6$ hoặc $5y^2 + x^2 = -2\sqrt{xy} - 6$ (loại do vế trái không âm vế phải âm).

Vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{5y^4-x^4}-6\left(x^2-y^2\right)-2xy=0\\ 5y^2+x^2=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5y^4-x^4}-\left(5y^2+x^2\right)\left(x^2-y^2\right)-2xy=0\\ 5y^2+x^2=6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5y^4-x^4}+5y^4-x^4=4x^2y^2+2xy\\ 5y^2+x^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5y^4-x^4}=2xy\\ 5y^2+x^2=6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,y=-1\\ x=1,y=1\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;-1\right);\left(1;1\right)$.

Tổng kết: Vấn đề đặt ra khi sáng tác hệ phương trình dạng này là tạo ra một phương trình bậc hai hai ẩn x,y sao cho $x\in\left[a,b\right],y\in\left[c;d\right]$ ta xuất phát từ một hằng đẳng thức sau:

$y=mx+n+p\sqrt{-\left(x-a\right)\left(x-b\right)}$.

Chuyển vế bình phương ta được: $\left(y-mx-n\right)^2=-p^2\left(x-a\right)\left(x-b\right)$ đây là một phương trình bậc hai cho ta tìm được miền giá trị của hai ẩn x,y.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy=y-y^2\\ x^3+y^2=2\end{cases}$

Lời giải

Từ phương trình hai suy ra:

$x^2+xy+y^2-y=0\Rightarrow\Delta_x=y\left(4-3y\right)\geq 0\Leftrightarrow 0\leq y\leq\dfrac{4}{3}$.

Kết hợp với phương trình đầu của hệ ta được:

$x^3=2-y^2\geq 2-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ -3x+1\leq-\sqrt[3]{6}+1<0\end{cases}$.

Mặt khác $y^2+y\left(x-1\right)+x^2=0\Rightarrow\Delta_y=\left(x+1\right)\left(-3x+1\right)<0$.

Từ đó suy ra hệ vô nghiệm.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2x=\dfrac{121}{9}-27^{\frac{x}{2}}\\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0\end{cases}$.

Lời giải

Coi phương trình thứ hai là phương trình bậc hai ẩn y, khi đó phương trình này tương đương với: $y^2+\left(x-4\right)y+x^2-3x+4=0$, phương trình này có nghiệm nếu : $\Delta_y=\left(x-4\right)^2-4\left(x^2-3x+4\right)\ge 0 \Leftrightarrow 0\le x\le \frac{4}{3}$.

Khi đó $x^2+2x+27^{\frac{x}{2}}\le \left(\frac{4}{3}\right)^2+\frac{8}{3}+27^{\frac{2}{3}}=\frac{121}{9}$.

Vậy dấu bằng xảy ra, suy ra $x=\frac{4}{3}\Rightarrow y=\frac{4}{3}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x,y\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2y^2=x^2y+2xy \\ 2\sqrt{x^2-2y+1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x^2-2y-1\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi thành:

$\left(x^2-2y\right)\left(x-y\right)=0$, so sánh với điều trên suy ra $x=y$, lúc này ta thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$2\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}=x-2$, phương trình này có nghiệm nếu:

$\sqrt[3]{x^3-14}\le x-2\Rightarrow x^2-2x-1\le 0$.

Kết hợp với điều kiện suy ra $x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$, thử lại ta thấy nghiệm thỏa mãn.

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x,y\right)=\left(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right);\left(1-\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2\left(x+15\right)+4=12y+\left(7y^2-2y\right)\sqrt{x+1} \\ y^2+\left(\frac{7y}{2x+1}\right)\sqrt{x+1}=8 \end{cases}, \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải

Điều kiện $-1\le x\ne -\frac{1}{2}$.

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ nên viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} x+15+\dfrac{4}{y^2}=\dfrac{12}{y}+\left(7-\dfrac{2}{y}\right)\sqrt{x+1} \\ 2x+1+\dfrac{7}{y}\sqrt{x+1}=\dfrac{8}{y^2}(2x+1) \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+1}\ge 0 \\ v=\dfrac{2}{y} \end{cases}$

Khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u^2+v^2+14=7u+6v \\ (2u^2-1)(2v^2-1)=\dfrac{7}{2}uv \end{cases}.$

Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm đối với phương trình đầu ta được: $u\in\left[2;\dfrac{10}{3}\right]$ và $v\in\left[1;\dfrac{7}{3}\right]$.

Kết hợp với phương trình còn lại suy ra nghiệm $u=2, v=1$ thử lại thấy không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x+2y}=y^2+y+2 \\ y^2+3xy+x+y-10=0 \end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $x+2y\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x+2y+\sqrt{x+2y}-y^2-3y-2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2y}+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2y}+\dfrac{1}{2}=y+\dfrac{3}{2} \\ \sqrt{x+2y}+\dfrac{1}{2}=-y-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2y}=y+1 \\ \sqrt{x+2y}=-y-2 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp và thay vào phương trình thứ hai của hệ tìm được nghiệm $(x;y)=(2;1)$.

Chủ đề 12. KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Nội dung chủ đề này tôi đề cập đến đánh giá hệ phương trình thông qua điều kiện nghiệm của hệ phương trình và các bất đẳng thức Cơ bản như Cô si, Bunhiacopski, bất đẳng thức Véc tơ.

BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI (AM-GM)

Cho hai số thực không âm a,b ta có: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Tổng quát. Cho n số thực không âm $a_1,a_2,...,a_n$ ta có

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} .$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$.

Một số dạng tương đương của bất đẳng thức Cô si hay được sử dụng:

$$x^2+y^2 \ge 2xy, \quad xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \quad (x+y)^2 \le 2(x^2+y^2).$$

$$(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx), \quad (xy+yz+zx)^2 \ge 3xyz(x+y+z).$$

BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

Định lý(Bất đẳng thức Holder)

Với m dãy số dương $\left(a_{1,1},a_{1,2},...,a_{1,n}\right),\left(a_{2,1},a_{2,2},...,a_{2,n}\right),...,\left(a_{m,1},a_{m,2},...,a_{m,n}\right)$

ta có: $\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)\geq\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{i,j}}\right)^{m}$.

Một hệ quả thường sử dụng khi vận dụng bất đẳng thức Holder

Hệ quả 1. Với dãy số dương $a_1,a_2,..,a_n$ ta có

$$\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)...\left(1+a_n\right)\geq\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\right)^n.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cô si cho n số dương ta có:

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{\sqrt[n]{\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)...\left(1+a_n\right)}}$$
$$\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{1+a_2}+...+\frac{a_n}{1+a_n}\geq\frac{n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}{\sqrt[n]{\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)...\left(1+a_n\right)}}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPSKI (C-S)

Cho bốn số thực a,b,x,y.

Ta có: $\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)\geq\left(ax+by\right)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=kx\\b=ky\end{cases}$ nếu $xy\neq0$ thì $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Tổng quát. Cho 2 bộ số thực $a_i,b_i,\left(i=1,2,...,n\right)$ ta có

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i=kb_i,i=1,2,...,n$.

Bất đẳng thức véc tơ

$$\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}=k\vec{v},\left(k\in\mathbb{R}\right)$.

Bất đẳng thức Mincopski

Cho a,b,c,d là các số thực ta luôn có:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{\left(a+c\right)^2+\left(b+d\right)^2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ad = bc$.

Bất đẳng thức Mincopski hay còn được gọi là bất đẳng thức Véc tơ. Một số bài toán vận dụng bất đẳng thức Véc tơ bạn đọc xem chủ đề kỹ thuật sử dụng tính chất hình giải tích trong cùng cuốn sách.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-4\sqrt{3x-2}-2y=-10 \\ y^2-6\sqrt{4y-3}-x=-11 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge \dfrac{2}{3}, y \ge \dfrac{3}{4}$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2+y^2-4\sqrt{3x-2}-6\sqrt{4y-3}-x-2y=-21.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2+\left(\sqrt{3x-2}-2\right)^2+\left(\sqrt{4y-3}-3\right)^2=0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ \sqrt{3x-2}=2 \\ \sqrt{4y-3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;3\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2+\left(4x-1\right)^2=\sqrt[3]{4x\left(8x+1\right)} \\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1} \end{cases}, \left(x,y \in \mathbb{R}\right)$.

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{14} \Rightarrow y \ge 0$.

Nhận xét. Rõ ràng rất khó để tìm được một mối liên hệ đơn giản nào giữa hai ẩn từ một trong hai phương trình của hệ.Phép thế từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất của hệ không khả thi khi một phương trình của hệ có chứa căn bậc 3.

Bài toán đánh giá thông qua bất đẳng thức nhưng cái khó nhất đó chính là dự đoán dấu bằng đạt tại đâu?

Vậy chú ý đến y^2 xuất hiện ở phương trình đầu của hệ. Phương trình thứ hai của hệ có y vậy ta thử dùng AM-GM đánh giá cho xuất hiện y^2 xem sao?

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}&40x^2+x=y\sqrt{14x-1}\le\frac{y^2+14x-1}{2}\\&\Rightarrow y^2\ge 2\left(40x^2+x\right)-14x+1=80x^2-12x+1\end{aligned}.$$

Do vậy kết hợp với phương trình đầu của hệ ta được:

$y^2=\sqrt[3]{4x\left(8x+1\right)}-\left(4x-1\right)^2\ge 80x^2-12x+1$.

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{4x\left(8x+1\right)}\ge 96x^2-20x+2$.

Lúc này dùng máy tính bỏ túi ta tìm được 1 nghiệm $x=\frac{1}{8}$.

Thay ngược lại hệ ta có $y=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{14x-1}$ tức hướng đi của chúng ta đã đúng.

Tiếp tục lời giải như sau:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}&2\sqrt[3]{4x\left(8x+1\right)}=\sqrt[3]{2.16x\left(8x+1\right)}\le\frac{2+16x+8x+1}{3}\\&\Rightarrow 2\left(96x^2-20x+2\right)\le\frac{2+16x+8x+1}{3}\\&\Leftrightarrow\left(8x-1\right)^2\le 0\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{8};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 3. (A/A1 2014) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=12\\x^3-8x-1=2\sqrt{y-2}\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải

Điều kiện: $2\le y\le 12,-2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3}$.

Phương trình thứ nhất của ta có:

$$12 - x\sqrt{12-y} = \sqrt{y\left(12-x^2\right)}.$$

$$\Rightarrow y\left(12-x^2\right) = 144 - 24x\sqrt{12-y} + x^2\left(12-y\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{12-y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{12-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}.$$

Thay $y = 12 - x^2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2\left(1-\sqrt{10-x^2}\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2 + 3x + 1 + 2.\frac{x+3}{1+\sqrt{10-x^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3.$$

Vì $x^2 + 3x + 1 + 2.\dfrac{x+3}{1+\sqrt{10-x^2}} > 0, \forall x \ge 0$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(3;3\right)$.

<u>Cách 2:</u> Điều kiện $-2\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{3}$ và $2 \le y \le 12$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$x\sqrt{12-y} \le \frac{x^2 + 12 - y}{2} \text{ và } \sqrt{y\left(12-x^2\right)} \le \frac{y + 12 - x^2}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x \ge 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}$.

Do đó $x\sqrt{12-y} + \sqrt{y\left(12-x^2\right)} \le \dfrac{x^2+12-y}{2} + \dfrac{y+12-x^2}{2} = 12$.

Do đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y = 12 - x^2 \end{cases}$.

Thay $y = 12 - x^2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2\left(1-\sqrt{10-x^2}\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(x^2 + 3x + 1 + 2.\frac{x+3}{1+\sqrt{10-x^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3.$$

Vì $x^2+3x+1+2.\dfrac{x+3}{1+\sqrt{10-x^2}}>0,\forall x\ge 0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;3)$.

Nhận xét. Dựa vào bất đẳng thức cơ bản ta tìm được mối liên hệ giữa y và x từ phương trình đầu của hệ. Ngoài ra ta có một số cách khác như sau:

<u>Cách 1</u>: Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$12^2=\left(x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}\right)^2\le\left(x^2+12-x^2\right)\left(12-y+y\right)=12^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{\sqrt{12-y}}=\frac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2y=(12-y)\left(12-x^2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\y=12-x^2\end{cases}.$$

<u>Cách 3:</u> Xét hai véc tơ $\vec{u}=\left(x;\sqrt{12-x^2}\right),\vec{v}=\left(\sqrt{12-y};\sqrt{y}\right)$ ta có:

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v}&=x\sqrt{12-y}+\sqrt{y\left(12-x^2\right)}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\\&\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\left(x^2+12-x^2\right)\left(12-y+y\right)}=12\end{aligned}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}=k\vec{v},(k\ge 0)\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{12-y}}=\dfrac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^2y=(12-y)\left(12-x^2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\y=12-x^2\end{cases}.$$

Do đó phương trình đầu của hệ tương đương với: $\begin{cases}x\ge 0\\y=12-x^2\end{cases}$.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^3+3x^2y-2\left(y^4+y^2\right)\sqrt{2y-1}=0\\2x^2+2y^2+4x-y-\sqrt{2-x}-2\sqrt{3x+6}=0\end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $-2\le x\le 2,y\ge\dfrac{1}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2=2(y+1)\sqrt{2y-1}.$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2=\left(\sqrt{2y-1}\right)^3+3\sqrt{2y-1}\ (1).$$

Có dạng hàm đặc trưng tuy nhiên để chỉ xử lý được khi:

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2+6\frac{x}{y}=3\frac{x}{y}.\left(\frac{x}{y}+2\right)\geq 0.$$

Vì vậy ta cần sử dụng phương trình thứ hai của hệ để tìm điều kiện của $\frac{x}{y}$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$$2x^2+2y^2+4x-y=\sqrt{2-x}+2\sqrt{3x+6}=\sqrt{1(2-x)}+\frac{2}{3}\sqrt{9(3x+6)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{1(2-x)}&\leq\frac{1+2-x}{2}=\frac{3-x}{2}\\ \sqrt{9(3x+6)}&\leq\frac{9+3x+6}{2}=\frac{3x+15}{2}\end{aligned}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Suy ra $2x^2+2y^2+4x-y\leq\frac{3-x}{2}+\frac{3x+15}{3}=\frac{x+13}{2}$.

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+7x-2y-13\leq 0$.

$\Leftrightarrow 4y^2-2y-2\leq -4x^2-7x+11$.

$\Leftrightarrow 2(y-1)(2y+1)\leq -(x-1)(4x+11)\ (2)$.

+ Nếu $y>1\Rightarrow(2)\Rightarrow x<1$.

Mặt khác từ (1) ta có: $\left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2=\left(\sqrt{2y-1}\right)^3+3\sqrt{2y-1}>1^3+3\sqrt{1}=4$.

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}+2\right)^2>0\Leftrightarrow\frac{x}{y}>1\Leftrightarrow x>y\text{ (vô lý).}$$

Vậy $y\leq 1\Rightarrow\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}+2\right)^2\leq 0\Rightarrow x\leq y\leq 1$.

Khi đó ta có $2x^2+2y^2+4x-y-\sqrt{2-x}-2\sqrt{3x+6}=0$.

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2+2x-\sqrt{3x+6}\right)+\left(2y^2-y-1\right)+\left(1-\sqrt{2-x}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)(x+2)\left(x^2+3x+3\right)}{x^2+2x+\sqrt{3x+6}}+(y-1)(2y+1)+\frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}=0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay và khó một phương trình của hệ có dạng hàm đặc trưng đánh lừa được rất nhiều học sinh khi tập trung khai thác phương trình này. Điểm nhấn của bài toán dựa trên đánh giá thông qua các bất đẳng thức cơ bản.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y^2+16}=y\sqrt{x^2-16}+16 \\ (x-y)^3+x+4=4y+(y+2)\sqrt{y-2} \end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Điều kiện: $y\ge 2, x\ge 4$ hoặc $x\le -4$.

Bình phương hai vế phương trình đầu của hệ ta được

$$x^2\left(y^2+16\right)=y^2\left(x^2-16\right)+32y\sqrt{x^2-16}+256.$$

$$\Leftrightarrow x^2-16-2y\sqrt{x^2-16}+y^2=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-16}-y\right)^2=0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}=y \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0 \\ x^2=y^2+16 \end{cases}.$$

Phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$(x-y)^3+x-y=3y-4+(y+2)\sqrt{y-2}.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^3+(x-y)=\left(\sqrt{y-2}+1\right)^3+\left(\sqrt{y-2}+1\right) \ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$, ta có: $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Vì vậy f(t) đồng biến do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(x-y)=f\left(\sqrt{y-2}+1\right) \Leftrightarrow x-y=\sqrt{y-2}+1.$$

Vì vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y \ge 0 \\ x^2 = y^2 + 16 \\ x - y = \sqrt{y-2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x^2 = y^2 + 16 \\ x = y + \sqrt{y-2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = \sqrt{y^2 + 16} \\ x = y + \sqrt{y-2} + 1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = \sqrt{y^2 + 16} \\ \sqrt{y^2+16} = y + \sqrt{y-2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = \sqrt{y^2 + 16} \\ \sqrt{y^2+16} - 5 = (y-3) + \left(\sqrt{y-2} - 1\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = \sqrt{y^2 + 16} \\ \dfrac{y^2 - 9}{\sqrt{y^2+16} + 5} = y - 3 + \dfrac{y-3}{\sqrt{y-2} + 1} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x = \sqrt{y^2 + 16} \\ (y-3)\left[\dfrac{y+3}{\sqrt{y^2+16} + 5} - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{y-2} + 1}\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (5;3)$.

Chú ý: $\dfrac{y+3}{\sqrt{y^2+16}+5} - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{y-2}+1} < \dfrac{y+3}{y+5} - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{y-2}+1} < 1 - 1 - \dfrac{1}{\sqrt{y-2}+1} < 0$

Nhận xét. Ta có thể giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = y^2 + 16 \\ x - y = \sqrt{y-2} + 1 \end{cases}$ như sau:

Đặt $a = \sqrt{y-2}, (a \ge 0) \Rightarrow y = a^2 + 2$ hệ phương trình trình trở thành:

$$\begin{cases} x^2 = \left(a^2+2\right)^2 + 16 \\ x = a^2 + 3 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a^2+2\right)^2 + 16 = \left(a^2 + a + 3\right)^2 \\ x = a^2 + a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}.$$

+ Ta có một bất đẳng thức giả C-S như sau:

$$ab - xy \ge \sqrt{\left(a^2 - x^2\right)\left(b^2 - y^2\right)}, \forall ab \ge xy, \left(a^2 - x^2\right)\left(b^2 - y^2\right) \ge 0.$$

Thật vậy bất đẳng thức tương đương với:

$$a^2b^2 - 2abxy + x^2y^2 \ge \left(a^2 - x^2\right)\left(b^2 - y^2\right).$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(bx - ay\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow bx = ay.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $bx = ay$.

Áp dụng vào bài toán ta được

$$16 = x\sqrt{y^2+16} - y\sqrt{x^2-16} \ge \sqrt{\left(x^2 - \left(x^2-16\right)\right)\left(y^2+16-y^2\right)} = 16.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x^2-16}.\sqrt{y^2+16} = xy \Leftrightarrow \begin{cases} xy \ge 0 \\ \left(x^2-16\right)\left(y^2+16\right) = x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \ge 0 \\ x^2 = y^2+16 \end{cases}.$$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2} + x - 1 = \sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)} \\ \sqrt{1+2x-y^2} - y - 1 = \sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)} \end{cases}, \left(x, y \in \mathbb{R}\right).$

Lời giải

Điều kiện: $1-2y-x^2 \ge 0, 1+2x-y^2 \ge 0, -2 \le x^2-y^2 \le 2$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\begin{aligned} &\left[\sqrt{1-2y-x^2} - \left(y+1\right)\right] + \left[\sqrt{1+2x-y^2} + \left(x-1\right)\right] \\ &= \sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)} + \sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)} \qquad (1) \end{aligned}.$$

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$\begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2} - \left(y+1\right) \le \sqrt{2\left(1-2y-x^2+\left(y+1\right)^2\right)} = \sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)} \\ \sqrt{1+2x-y^2} + \left(x-1\right) \le \sqrt{2\left(1+2x-y^2+\left(-x+1\right)^2\right)} = \sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)} \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được:

$$VT_{(1)} = VP_{(1)} \Leftrightarrow \text{ đẳng thức xảy ra.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2} = -y-1 \\ \sqrt{1+2x-y^2} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, y \le -1 \\ 1-2y-x^2 = y^2+2y+1 \\ 1+2x-y^2 = x^2-2x+1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, y \le -1 \\ x^2 + y^2 + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, y \le -1 \\ y = -x \\ x^2 + y^2 + 4y = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, y \le -1 \\ y = -x \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, y \le -1 \\ y = -x \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(2;-2\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{8y-5} + y\sqrt{8x-5} = \sqrt[4]{24(x^2+y^2+4)} \\ 11x^2 - 6xy + 3y^2 = 12x - 4y \end{cases}, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

Lời giải

Điều kiện: $x, y \ge \dfrac{5}{8}$.

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Nhận thấy sự phức tạp đến từ phương trình đầu hệ và phương trình thứ hai của hệ là phương trình bậc hai tổng quát không phân tích được nghiệm nên ta chỉ khai thác được điều kiện của x,y để phương trình đó có nghiệm. Vậy điều cần làm là xử lý phương trình đầu của hệ với hình thức như trên kỹ thuật đánh giá thông qua bất đẳng thức cơ bản được nghĩ đến đầu tiên. Vậy trước tiên dự đoán nghiệm của hệ dễ thấy $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$ là nghiệm.

Sử dụng bất đẳng thức AM- GM ta được

$$\begin{aligned} x\sqrt{8y-5} &= \sqrt{3}x.\sqrt{\frac{8y-5}{3}.1} \le \frac{\sqrt{3}x}{2}\left(\frac{8y-5}{3}+1\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}x\left(4y-1\right) \\ y\sqrt{8x-5} &= \sqrt{3}y.\sqrt{\frac{8x-5}{3}.1} \le \frac{\sqrt{3}y}{2}\left(\frac{8x-5}{3}+1\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}y\left(4x-1\right) \end{aligned}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên và sử dụng AM-GM ta được

$$x\sqrt{8y-5} + y\sqrt{8x-5} \le \frac{\sqrt{3}}{3}\left(8xy - x - y\right) \le \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\left(x+y\right)^2 - x - y\right).$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$\sqrt[4]{24(x^2+y^2+4)} \ge \sqrt[4]{24\left(\frac{1}{2}(x+y)^2+4\right)} = \sqrt[4]{12(x+y)^2+96}.$$

Ta chứng minh $\sqrt[4]{12(x+y)^2+96} \ge \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2(x+y)^2-x-y\right)$.

Thật vậy đặt $t=x+y, \left(t \ge \frac{5}{4}\right)$ đưa về chứng minh $\sqrt[4]{12t^2+96} \ge \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2t^2-t\right)$.

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(t^7+\frac{3t^5}{2}+\frac{5t^4}{2}+\frac{81t^3}{16}+\frac{81t^2}{8}+\frac{27t}{2}+27\right) \le 0 \Leftrightarrow t \le 2.$$

Để chứng minh bất đẳng thức trên đúng ta cần có $t=x+y \le 2$.

Ta tìm điều kiện này từ phương trình thứ hai của hệ

$$11x^2-6xy+3y^2=12x-4y$$

$$\Leftrightarrow 11x^2-6x(t-x)+3(t-x)^2=12x-4(t-x)$$

$$\Leftrightarrow 20x^2-(16+12t)x+3t^2+4t=0$$

$$\Rightarrow \Delta'_x=(8+6t)^2-20(3t^2+4t) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left(t+\frac{4}{3}\right) \le 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le t \le 2$$

Do đó bất đẳng thức đúng.

Vì vậy phương trình đầu của hệ tương đương với dấu bằng xảy ra tại mọi bất đẳng thức $\Leftrightarrow x=y=1$

Thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$

Nhận xét. Bằng sự khéo léo đánh giá $x+y \le 2$ ta có lời giải hoàn thiện của bài toán. Nhiều em có kỹ năng cần thiết xử lý 1 phương trình bậc hai dạng tổng quát tìm cách chặn miền giá trị của x và y sau đó suy ra miền giá trị của $x+y$.

Tuy nhiên khi áp dụng cho bài toán này ta có:

$$\begin{cases} \Delta'_x=9(y+2)^2-11(3y^2+4y) \ge 0 \\ \Delta'_y=(3x-2)^2-3(11x^2-12x) \ge 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1+\sqrt{65}}{6} \le y \le \dfrac{-1+\sqrt{65}}{6} \\ \dfrac{3-\sqrt{15}}{6} \le x \le \dfrac{3+\sqrt{15}}{6} \end{cases} \Rightarrow x+y \le \frac{-1+\sqrt{65}}{6} + \frac{3+\sqrt{15}}{6} = \frac{2+\sqrt{65}+\sqrt{15}}{6}.$$

Như vậy đánh giá theo cách này chặn trên mong đợi của $x+y$ không nhỏ hơn hoặc bằng 2.

Bài 8. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(1+x^2\right)\sqrt{3+x} + 2\left(y+1\right)\left(y+2\right) = 2x^2 + \left(y^2+3y+3\right)\sqrt{1+y} \\ 26x^3 + 4y + 17\sqrt{x+3} + 6\sqrt{y+1} = 84 \end{cases}.$$

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Rõ ràng mối liên hệ giữa 2 biến của phương trình thứ 2 không cho phép ta đánh giá được điều gì. Nhìn lại phương trình đầu của hệ ta hoàn toàn tách riêng x và y về một vế và hy vọng đưa về một dạng hàm số đặc trưng.

Điều kiện: $x \ge -3, y \ge -1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(1+x^2\right)\sqrt{3+x} + 2\left(y^2+3y+2\right) = 2x^2 + \left(y^2+3y+3\right)\sqrt{1+y}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right) = \left(y^2+3y+3\right)\left(\sqrt{y+1}-2\right) \quad (1).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{\left(y^2+3y+3\right)\left(y-3\right)}{\sqrt{y+1}+2}$$

Do $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}+2} > 0; \dfrac{y^2+3y+3}{\sqrt{y+1}+2} > 0$ nên $\left(x-1\right)\left(y-3\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1 \\ y \le 3 \end{cases} \end{array}\right.$.

+ Nếu $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 3 \end{cases} \Rightarrow 26x^3 + 4y + 17\sqrt{x+3} + 6\sqrt{y+1} \ge 84$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

+ Nếu $\begin{cases} x \le 1 \\ y \le 3 \end{cases} \Rightarrow 26x^3 + 4y + 17\sqrt{x+3} + 6\sqrt{y+1} \le 84$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;3)$.

Chú ý. Trong (1) ta không sử dụng hàm số được vì không đưa được về hàm đặc trưng. Nhưng mấu chốt của bài toán là đánh giá phương trình đầu của hệ nên nghĩ ngay đến việc nhân liên hợp để chặn miền giá trị của x và y. Điều này hợp lý vì phương trình thứ 2 của hệ là một hàm đồng biến của x hoặc của y.

Dưới đây ta cùng xét một bài toán cùng dạng nhưng xử lý theo 1 hướng khác.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+x+y+3\sqrt{x+y}=11 \\ xy\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y+2}+\sqrt{2y}=0 \end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Điều kiện: $y\ge 0, x+y\ge 0$.

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Với $y>0$ viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$-x\sqrt{x^2+3}=\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}}.$$

Ta có $p=\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}}\ge 2,\forall y\in(0;2];p\le 2,\forall y\in(2;+\infty)$.

Suy ra $x<0$ và $-x\sqrt{x^2+3}=p\Leftrightarrow\begin{cases} x<0 \\ x^2(x^2+3)=p^2 \end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{\sqrt{4p^2+9}-3}{2}}$.

Suy ra $x\le -1,\forall y\in(0;2]$ và $x>-1,\forall y\in(2;+\infty)$.

+ **<u>TH1:</u>** Nếu $y\in(0;2]$ ta có

$x^3+y^3+x+y+3\sqrt{x+y}\le -1^3+2^3-1+2+3\sqrt{-1+2}=11$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=-1, y=2$.

+ **<u>TH2:</u>** Nếu $y\in(2;+\infty)$ ta có

$$x^3+y^3+x+y+3\sqrt{x+y}>-1^3+2^3-1+2+3\sqrt{-1+2}=11$$

(hệ phương trình vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;2)$.

Nhận xét. Nhờ dự đoán trước được nghiệm $(x;y)=(-1;2)$ ta có thể đánh giá từ phương trình thứ hai của hệ. Cách hay dùng đó là dựa vào hàm số để tìm giá trị biến nọ theo biến kia hoặc rút biến nọ theo giá trị biến kia như lời giải trên.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{x}-8x}+2\sqrt{1-2x}=\frac{y}{x}+\frac{1}{4xy} \\ 4x=\sqrt{4y+3}-\sqrt{2y}\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Điều kiện: $y>0$ từ phương trình đầu của hệ ta có $\Rightarrow 0<x\le\frac{1}{2}$.

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Bài toán này cũng tương tự bài toán trên đó là tách được riêng x và y.

Ta thực hiện đánh giá phương trình đầu của hệ như sau

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\sqrt{2x\left(1-4x^2\right)}+2\sqrt{x^2\left(1-2x\right)}=y+\frac{1}{4y}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $y+\frac{1}{4y}\ge 2\sqrt{y.\frac{1}{4y}}=1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y=\frac{1}{2}$.

Suy ra $\sqrt{2x\left(1-4x^2\right)}+2\sqrt{x^2\left(1-2x\right)}\ge 1$.

$\Leftrightarrow\sqrt{2x\left(1-2x\right)}\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{2x}\right)\ge 1$

$\Leftrightarrow\sqrt{2x\left(1-2x\right)}\ge\sqrt{1+2x}-\sqrt{2x}$.

$\Leftrightarrow 2x\left(1-2x\right)\ge 1+4x-2\sqrt{2x\left(1+2x\right)}$

$\Leftrightarrow 4x^2+2x-2\sqrt{2x\left(1+2x\right)}+1\le 0$.

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x\left(1+2x\right)}-1\right)^2\le 0\Leftrightarrow\sqrt{2x\left(1+2x\right)}=1$.

$$\Leftrightarrow 2x\left(1+2x\right)=1\Leftrightarrow 4x^2+2x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện ta có $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Thử lại với $(x;y)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ vào phương trình thứ hai của hệ thấy thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2=(\sqrt{x^2+1}+1)(x^2-y^3+3y-2)\\(x^2+y^2)^2+1=x^2+2y\end{cases}, (x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}4x^2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2\left(x^2-y^3+3y-2\right)\\(x^2+y^2)^2+1=x^2+2y\end{cases}.$$

\+ **TH1:** Nếu $x=0$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$y^4-2y+1=0\Leftrightarrow(y-1)\left(y^3+y^2+y-1\right)=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=\dfrac{-1+\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{17-3\sqrt{33}}}{3}\end{array}\right..$$

\+ **TH2:**

Nếu $4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2-y^3+3y-2\Rightarrow\begin{cases}4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2-y^3+3y-2\\(x^2+y^2)^2+1=x^2+2y\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2-y^3+3y-2\\(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)=2y-y^2-1=-\left(y-1\right)^2\end{cases}.$$

Từ phương trình thứ hai suy ra $x^2+y^2-1\le 0\Rightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\end{cases}$.

Khi đó biến đổi phương trình đầu của hệ thành

$4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)-x^2=-y^3+3y-2$.

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{\sqrt{x^2+1}+1}-1\right)=-\left(y-1\right)^2\left(y+2\right).$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{3-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)=-\left(y-1\right)^2\left(y+2\right)\ (1).$$

Với mọi $x,y\in\left[-1;1\right]\Rightarrow VT_{(1)}\ge 0, VP_{(1)}\le 0$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow VT=VP=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(0;\frac{-1+\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{17-3\sqrt{33}}}{3}\right)$$

Nhận xét. Khá dễ dàng ta có trường hợp $x=0$ tuy nhiên để xử lý trường hợp còn lại bạn đọc cần khéo léo biến đổi phương trình thứ hai của hệ để có điều kiện ràng buộc $x^2+y^2\le 1$.

Bài 12. Tìm nghiệm dương của hệ phương trình $\begin{cases}9\sqrt{\dfrac{41}{2}\left(x^2+\dfrac{1}{2x+y}\right)}=2+40x\\x^2+5xy+6y=4y^2+9x+9\end{cases}$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có:

$$9\sqrt{\frac{41}{2}\left(x^2+\frac{1}{2x+y}\right)}=\frac{9}{2}\sqrt{\left(9^2+1^2\right)\left(x^2+\frac{1}{2x+y}\right)}\ge\frac{9}{2}\left(9x+\frac{1}{\sqrt{2x+y}}\right)$$

$$=\frac{9}{2}\left(9x+\frac{3}{\sqrt{9\left(2x+y\right)}}\right)\ge\frac{9}{2}\left(9x+\frac{6}{2x+y+9}\right)$$

$$\Rightarrow 3+40x\ge\frac{9}{2}\left(9x+\frac{6}{2x+y+9}\right)\Leftrightarrow 3x-2x^2-xy+6y\ge 0\ (1)$$

Cộng theo vế bất phương trình (1) có phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3x-2x^2-xy+6y+x^2+5xy+6y\ge 4y^2+9x+9.$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2y+3\right)^2\le 0\Leftrightarrow x=2y-3.$$

Vì vậy tất cả các dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 3 \\ 2x + y = 9 \\ \dfrac{x}{9} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (3;3)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{xy+1}{x+y-1} + \dfrac{x+y-4}{x+y-xy} = 0 \\ \sqrt[4]{x+y-xy} + \sqrt[4]{x+y-1} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0, x + y > 1, x + y > xy$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra hệ phương trình có nghiệm khi $x + y - 4 < 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{x^2y^2 - xy(x+y) + xy - (x+y)^2 + 4(x+y) - 4}{(x+y-1)(x+y-xy)} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 - xy(x+y) + xy - (x+y)^2 + 4(x+y) - 4 = 0.$$

$$\Leftrightarrow xy(xy - x - y + 1) - (x+y-2)^2 = 0.$$

<u>TH1:</u> Nếu $xy - x - y + 1 < 0$ suy ra $xy(xy - x - y + 1) - (x+y-2)^2 \leq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ (thử lại thấy không thỏa mãn).

<u>TH2:</u> Nếu $xy - x - y + 1 \geq 0$ khi đó ta có:

$$\begin{aligned} xy(xy - x - y + 1) - (x+y-2)^2 &\leq xy\left(\frac{(x+y)^2}{4} - x - y + 1\right) - (x+y-2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(xy-4)(x+y-2)^2 \end{aligned}.$$

Suy ra $\left(xy-4\right)\left(x+y-2\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ xy \ge 4 \end{array}\right.$.

Mặt khác: $xy \le \dfrac{\left(x+y\right)^2}{4} < \dfrac{4^2}{4} = 4$ nên $x+y=2$

Khi đó: $xy-2+1 \ge 0 \Leftrightarrow xy \ge 1 \Leftrightarrow xy \ge \dfrac{\left(x+y\right)^2}{4} \Leftrightarrow x=y \Rightarrow x=y=1$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2} \\ y-6x+11=\sqrt{10-4x-2x^2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $10-4x-2x^2 \ge 0, -y^2-4y-2 \ge 0$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2} \le \frac{1+\left(-y^2-4y-2\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+y^2+4x+4y-3 \le 0 \qquad (1)$$

$$y-6x+11=\sqrt{10-4-2x^2}=\frac{\sqrt{4\left(10-4x-2x^2\right)}}{2} \le \frac{4+10-4x-2x^2}{4}.$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x+2y+15 \le 0 \ (2)$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức (1) và (2) ta được :

$$3x^2+y^2-6x+6y+12 \le 0 \Leftrightarrow 3\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;-3\right)$.

<u>**Nhận xét.**</u> Từ hai bài toán trên ta cần tinh ý kết hợp hai phương trình của hệ trong quá trình đánh giá, thông thường là các phép cộng và trừ theo vế hai phương trình của hệ.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+6y+3\right)\sqrt{xy+3y}=y\left(3x+8y+9\right) \\ \sqrt{-x^2+8x-24y+417}=\left(y+3\right)\sqrt{y-1}+3y+17 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y \ge 1, x \ge -3, -x^2 + 8x - 24y + 417 \ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(x+3+6y\right)\sqrt{y\left(x+3\right)} = 3\left(x+3\right)y + 8y^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{y}+6\right)\sqrt{\frac{x+3}{y}} = 3.\frac{x+3}{y}+8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{y}} = 2 \Leftrightarrow x+3 = 4y \Leftrightarrow x = 4y-3.$$

Thay $x = 4y - 3$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4\sqrt{\left(y+4\right)\left(6-y\right)} = \left(y+3\right)\sqrt{y-1} + 3y + 17 \ (1).$$

Ta có: $\begin{cases} 4\sqrt{\left(y+4\right)\left(6-y\right)} \le 2\left(y+4+6-y\right) = 20 \\ \left(y+3\right)\sqrt{y-1} + 3y + 17 \ge 3y + 17 \ge 3.1 + 17 = 20 \end{cases}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4+y = 6-y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$.

<u>Cách 2:</u> Để ý một chút nhận thấy phương trình (1) có vế trái là hàm nghịch biến và vế phải là hàm đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$ từ đó suy ra (1) có nghiệm duy nhất $y = 1$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right) = 1 \\ \dfrac{1}{1+3^x} + \dfrac{1}{1+2^y} + \dfrac{1}{1+5^x} = \dfrac{3}{1+4^x} \end{cases}, \left(x, y \ge 0\right)$.

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$2x + \sqrt{4x^2+1} = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow y = 2x.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\frac{1}{1+3^x} + \frac{1}{1+4^x} + \frac{1}{1+5^x} = \frac{3}{1+4^x}.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$\frac{1}{1+3^x}+\frac{1}{1+4^x}+\frac{1}{1+5^x}\ge\frac{3}{1+\sqrt[3]{3^x.4^x.5^x}}\ge\frac{3}{1+\sqrt[3]{64^x}}=\frac{3}{1+4^x}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3^x=4^x=5^x\\60^x=64^x\end{cases}\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;0)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{4x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{4x^2+2xy+y^2}{3}}=2x+y & (1)\\ x\sqrt{xy+5x+3}=2xy-5x-3 & (2)\end{cases}$

Phân tích lời giải: Ta không xử lý được gì từ phương trình (2) quay lại phương trình (1) thì rõ ràng đây là phương trình đồng bậc ta có thể đặt $y=tx$ hoặc đánh giá bất đẳng thức như sau

Lời giải

Điều kiện $xy+5x+3\ge 0$. Khi đó điều kiện để phương trình có nghiệm là $2x+y\ge 0$.

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski và bất đẳng thức Cô si ta được:

$$\sqrt{\frac{4x^2+y^2}{2}}\ge\sqrt{\frac{(2x+y)^2}{2.2}}=\frac{2x+y}{2}\quad(3)$$

$$\sqrt{\frac{4x^2+2xy+y^2}{3}}=\sqrt{\frac{(2x+y)^2-2xy}{3}}\ge\sqrt{\frac{(2x+y)^2-\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2}{3}}=\frac{2x+y}{2}\quad(4)$$

Cộng theo vế của (3) và (4) ta được:

$$\sqrt{\frac{4x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\frac{4x^2+2xy+y^2}{3}}\ge 2x+y.$$

Do đó $(1)\Leftrightarrow$ các dấu bằng ở bất đẳng thức $(3),(4)$ xảy ra $\Leftrightarrow y=2x$.

Thay vào (2) ta được:

$x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3$ (5).

Nhẩm được nghiệm $x_0=3$ đến đây có các hướng xử lý sau:

Hướng 1: Biến đổi tương đương

Để ý là $y+2x=4x\geq 0$ nhưng do $x=0$ không thỏa mãn hệ nên $x>0$. Do đó:

$$(5)\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\4x^2-5x-3\geq 0\\x^2\left(2x^2+5x+3\right)=\left[4x^2-\left(5x+3\right)\right]^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{5+\sqrt{73}}{8}\\14x^4-45x^3-2x^2+30x+9=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{5+\sqrt{73}}{8}\\\left(x-3\right)\left(14x^3-3x^2-11x+3\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3\ .$$

Do với mọi $x\geq\dfrac{5+\sqrt{73}}{8}$ thì $f(x)=14x^3-3x^2-11x+3>0$.

Suy ra $\left(x;y\right)=\left(3;6\right)$.

Vây hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;6\right)$.

Hướng 2: Nhân liên hợp

$$(5)\Leftrightarrow x\left(\sqrt{2x^2+5x+3}-6\right)=4x^2-5x-21\ .$$

$$\Leftrightarrow\frac{x\left(x-3\right)\left(2x+11\right)}{\sqrt{2x^2+5x+3}+6}=\left(x-3\right)\left(4x+7\right)\ .$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x\left(2x+11\right)=\left(4x+7\right)\left(\sqrt{2x^2+5x+3}+6\right)\ (6)\end{array}\right..$$

Với mọi $x\geq\dfrac{5+\sqrt{73}}{8}$ thì:

$$\left(4x+7\right)\left(\sqrt{2x^2+5x+3}+6\right)>\left(4x+7\right)\left(\sqrt{2\left(x+1\right)^2+x+1}+6\right)$$

$$>\left(4x+7\right)\left(x+1+6\right)=\left(4x+7\right)\left(x+7\right)>x\left(2x+11\right)$$

Nên phương trình (6) vô nghiệm và ta có kết quả tương tự trên.

Bài 18. (VMO 2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\sin^2 y+\dfrac{1}{\sin^2 y}}=\sqrt{\dfrac{20x}{x+y}}\\ \sqrt{\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}}+\sqrt{\cos^2 y+\dfrac{1}{\cos^2 y}}=\sqrt{\dfrac{20y}{x+y}}\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x\neq\dfrac{k\pi}{2},y\neq\dfrac{l\pi}{2},\left(k,l\in\mathbb{Z}\right);\dfrac{x}{x+y}\geq 0;\dfrac{y}{x+y}\geq 0;x+y\neq 0$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}}+\sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}}+\sqrt{\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}}=\sqrt{\frac{20x}{x+y}}+\sqrt{\frac{20y}{x+y}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Mincopski ta có:

$$\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}}\geq\sqrt{\left(\sin x+\cos x\right)^2+\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(1+\sin 2x\right)\left(1+\frac{4}{\sin^2 2x}\right)}=\sqrt{\frac{\left(\sin 2x-1\right)\left(\sin^2 2x-8\sin 2x+4\right)}{\sin^2 2x}+10}\geq\sqrt{10}.$$

Tương tự ta có: $\sqrt{\sin^2 y+\dfrac{1}{\sin^2 y}}+\sqrt{\cos^2 y+\dfrac{1}{\cos^2 y}}\geq\sqrt{10}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sin 2x=1\\ \sin 2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ y=\dfrac{\pi}{4}+l\pi\end{cases}$.

Mặt khác: $\sqrt{\dfrac{20x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{20y}{x+y}}\leq\sqrt{2\left(\dfrac{20x}{x+y}+\dfrac{20y}{x+y}\right)}=2\sqrt{10}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{y}{x+y}\Leftrightarrow x=y$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=y=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Bài 19. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^2\left(1-2x^2\right)=y^4\\ 1+\sqrt{x^2+y^2-2xy+1}+x^2\left(x^4-2x^2-2xy^2+1\right)=0\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $3+2x^2y-x^4y^2\geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{4-\left(x^2y-1\right)^2}+x^2-2x^4-y^4=0 & (1)\\ \sqrt{\left(x-y\right)^2+1}+x^6-2x^4-2x^3y^2+x^2+1=0 & (2)\end{cases}.$$

Lấy $(1)-(2)$ theo vế ta được:

$$\sqrt{4-\left(x^2y-1\right)^2}-\sqrt{\left(x-y\right)^2+1}=1+\left(x^3-y^2\right)^2.$$

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{4-\left(x^2y-1\right)^2}-\sqrt{\left(x-y\right)^2+1}\leq\sqrt{4}-\sqrt{1}=1\\ 1+\left(x^3-y^2\right)^2\geq 1\end{cases}.$

Do đó dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=y^2\\ x=y\\ x^2y=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2\sqrt{2\left(x-3\right)}+xy+y-x-1=\sqrt[3]{3x-\dfrac{1}{2}}\\ \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{y^2-y+1}=\sqrt{x^2-xy+y^2}\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 3$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt{x^2+x+1}.$$

Ta có: $VT=\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}$

$$\geq\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}=\sqrt{x^2+x+1}=VP.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}x-y\right)\Leftrightarrow xy-x+y=0$.

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được: $x^2\sqrt{2(x-3)}-1=\sqrt[3]{3x-\frac{1}{2}}$.

Nhận xét: Phương trình vô tỷ này rất đẹp mắt cả hình thức và cái đẹp ở nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ tuy nhiên để xử lý nó không đơn giản.

Ta có: $x^2\sqrt{2(x-3)}-1=\sqrt[3]{3x-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2x\sqrt{2(x-3)}-\frac{2}{x}=\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{2(x-3)}-2=\frac{2}{x}+\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}-2$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\left(2x^3-6x^2-1\right)}{2x\sqrt{2(x-3)}+2}=\frac{-4\left(2x^3-6x^2-1\right)}{\left(\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}\right)^2+\left(2-\frac{2}{x}\right)\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}+\left(2-\frac{2}{x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(2x^3-6x^2-1\right)\left(\frac{1}{2x\sqrt{2(x-3)}+2}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}\right)^2+\left(2-\frac{2}{x}\right)\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}+\left(2-\frac{2}{x}\right)^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-6x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)^3-3(x-1)-\frac{5}{2}=0.$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^3-3(x-1)=\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3-3\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

$$\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

(với $f(t)=t^3-3t$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x;y)=\left(1+\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};\dfrac{1+\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}{2+\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}\right)$

Cách 2:

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{2(x-3)}\\ v=\sqrt[3]{3x-\dfrac{1}{2}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u^2+6}{2}\\ x=\dfrac{2v^3+1}{6}\end{cases}\Rightarrow 3\left(u^2+6\right)=2v^3+1\Leftrightarrow 2v^3-3u^2-17=0$

Phương trình đã cho trở thành: $\left(\dfrac{u^2+6}{2}\right)^2u-1=v\Rightarrow\begin{cases}2v^3-3u^2-17=0\\ \left(\dfrac{u^2+6}{2}\right)^2u-1=v\end{cases}$

Ta có phương trình: $2\left[\left(\dfrac{u^2+6}{2}\right)^2u-1\right]^3-3u^2-17=0$.

$$\Leftrightarrow\left(u^3+6u-2\right)\left(u^{12}+30u^{10}+2u^9+360u^8+36u^7+2164u^6+216u^5+6528u^4+440u^3+7968u^2+48u+304\right)=0$$

$\Leftrightarrow u^3+6u-2=0$.

$\Leftrightarrow u=\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\Leftrightarrow\sqrt{2(x-3)}=\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$

$\Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}{2+\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}$.

Để rèn luyện cho kỹ năng giải phương trình vô tỷ bằng kỹ thuật nhân liên hợp mời bạn đọc xử lý phương trình sau $x^2\sqrt{3(x-3)}-5x+4=\sqrt[3]{-5x^2-4}$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt[4]{y^2-2y+2}=2\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{y+3}=3\end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt[4]{(y-1)^2+1}=2\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$ (thay vào phương trình thứ hai của hệ thấy thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}7\sqrt{16-y^2}=(x-1)(x+6)\\ (x+2)^2+2(y-4)^2=9\end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình đầu của hệ suy ra $(x-1)(x+6)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -6\end{array}\right.$.

Tù phương trình thứ hai của hệ suy ra $(x+2)^2\le 9\Leftrightarrow -5\le x\le 1$.

Vì vậy $x=1\Rightarrow\begin{cases}16-y^2=0\\ (y-4)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow y=4$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;4)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2y^2-36xy+324}=12-x^2\\ xy=9+\frac{1}{3}y^2\end{cases}$.

Lời giải

Ta có $12-x^2\ge 0\Rightarrow |x|\le 2\sqrt{3}$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$xy=9+\frac{y^2}{3}\ge 2\sqrt{3}|y|\Rightarrow |xy|\ge xy\ge 2\sqrt{3}|y|\Rightarrow |x|\ge 2\sqrt{3}.$$

Vậy $|x|=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\sqrt{3}\\ x=2\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\sqrt{3},y=-3\sqrt{3}\\ x=2\sqrt{3},y=3\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-2\sqrt{3};-3\sqrt{3}\right);\left(2\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-3\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}=-6y+24\end{cases}$.

Lời giải

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được :

$$\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-6y+21.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}=(y-3)^2+12.$$

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\le\sqrt{(1+1)(x+32-x)}=8\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le\sqrt{(1+1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{32-x}\right)}\le 4\end{cases}$.

Suy ra: $\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}\le 12$.

Mặt khác $(y-3)^2+12\ge 12$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=32-x\\ y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=16\\ y=3\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(16;3)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3y=1\\ 3x+y=4\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình có nghiệm khi $\begin{cases}xy>0\\ 3x+y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$.

Ta có : $3x+y=x+x+x+y\ge 2x+2\sqrt{xy}\ge 4\sqrt[4]{x^3y}=4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x\left(9\sqrt{2x^2+y^2}+\sqrt{1-x^2}\right)=16\end{cases}$.

Lời giải

Từ hệ phương trình suy ra $0\le x\le 1, -1\le y\le 1$.

Thay $y^2=1-x^2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x\left(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2}\right)=16.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} x\left(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2}\right)&=\frac{3}{2}.3x.2\sqrt{1+x^2}+\frac{13}{2}.x.2\sqrt{1-x^2}\\ &\le\frac{3}{4}\left(9x^2+4\left(1+x^2\right)\right)+\frac{13}{4}\left(x^2+4\left(1-x^2\right)\right)=16\end{aligned}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2\sqrt{1+x^2}\\ x=2\sqrt{1-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt5}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt5}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{2}{\sqrt5};-\frac{1}{\sqrt5}\right);\left(\frac{2}{\sqrt5};\frac{1}{\sqrt5}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3\sqrt{1+2x^2}+2\sqrt{40+9y^2}=5\sqrt{11}\\ x+6y=\frac{13}{3}\end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{1+2x^2}\ge\frac{1}{\sqrt{11}}(2x+3),\forall x\in\mathbb{R}\\ \sqrt{40+9y^2}\ge\frac{1}{\sqrt{11}}(18y+10),\forall y\in\mathbb{R}\end{cases}$

$$\Rightarrow 3\sqrt{1+2x^2}+2\sqrt{40+9y^2}\ge\frac{1}{\sqrt{11}}(6x+36y+29)=5\sqrt{11}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac13,y=\frac23$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\left(x^2+y^2\right)=2xy+4\\ x\sqrt{3x^2+6xy}+y\sqrt{3y^2+6xy}=6\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge0,y\ge0$.

Từ phương trình đầu của hệ ta có:

$$2xy+4=\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\left(x^2+y^2\right)\ge2\sqrt[4]{xy}+4xy\Rightarrow2\ge\sqrt[4]{xy}+xy\Rightarrow xy\le1.$$

Mặt khác từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$6=x\sqrt{3x^2+6xy}+y\sqrt{3y^2+6xy}\le\frac{9x^2+3x^2+6xy}{6}+\frac{9y^2+3y^2+6xy}{6}=2\left(x^2+y^2\right)+2xy$$

Lại có: $2\left(x^2+y^2\right)+2xy=4xy+4-\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\le 4.1+4-2=6$.

Do đó dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^{2013}+\dfrac{2xy}{\sqrt[2014]{x^2-2x+2^{2014}+1}}=x^2+y^{2013}\\y^{2013}+\dfrac{2xy}{\sqrt[2014]{y^2-2y+2^{2014}+1}}=y^2+x^{2013}\end{cases}$.

Lời giải

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\frac{2xy}{\sqrt[2014]{x^2-2x+2^{2014}+1}}+\frac{2xy}{\sqrt[2014]{y^2-2y+2^{2014}+1}}=x^2+y^2.$$

Mặt khác:

$$\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt[2014]{x^2-2x+2^{2014}+1}}+\dfrac{2xy}{\sqrt[2014]{y^2-2y+2^{2014}+1}}\le\dfrac{2\left|xy\right|}{\sqrt[2014]{2^{2014}}}+\dfrac{2\left|xy\right|}{\sqrt[2014]{2^{2014}}}=2\left|xy\right|\\x^2+y^2\ge 2\left|xy\right|\end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{5-x^2}+\sqrt{5-\dfrac{1}{x^2}}=3+y^2\\x+\dfrac{1}{x}=2\left(3-2y\right)\end{cases}$.

Lời giải

Nhân thêm 2 vào hai vế của phương trình thứ nhất sau đó cộng theo vế với phương trình thứ hai, ta được:

$$2\sqrt{5-x^2}+x+\frac{1}{x}+2\sqrt{5-\frac{1}{x^2}}=2y^2-4y+12.$$

Sử dụng bất đẳng thức cauchy-shar ta có

$$\begin{cases} x+2\sqrt{5-x^2} \le \sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left(x^2+5-x^2\right)}=5 \\ \dfrac{1}{x}+2\sqrt{5-\dfrac{1}{x^2}} \le \sqrt{\left(1^2+2^2\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+5-\dfrac{1}{x^2}\right)}=5 \end{cases} \Rightarrow VT \le 10.$$

Mặt khác lại có $VP=2y^2-4y+12=2\left(y-1\right)^2+10 \ge 10$.

Vậy $VT=VP=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{3}{\sqrt{y-1}}=4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x>1, y>1$.

Ta có: $\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{x+y+1}{y+1}+\dfrac{x+y+1}{x+1}-2=\left(x+y+1\right)\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}\right)-2$.

$$\ge \left(2\sqrt{xy}+1\right).\frac{2}{1+\sqrt{xy}}-2=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ tìm được nghiệm $\left(x;y\right)=\left(5;5\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(5;5\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \sqrt[2013]{x}-\sqrt[2013]{y}=\left(\sqrt[2015]{y}-\sqrt[2015]{x}\right)\left(x+y+xy+2014\right) \end{cases}$$

Lời giải

Từ phương trình đầu của hệ suy ra $-1 \le x \le 1$.

Ta có : $x+y+xy+2014=\left(x+1\right)\left(y+1\right)+2013 \ge 2013>0$.

Do đó phương trình thứ hai suy ra $x=y$.

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được : $x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}}, x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^3+3xy^2=7y \\ y^3+6x^2y=7 \end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ , ta có:

$$y^3+6x^2y=7 \Leftrightarrow y\left(y^2+6x^2\right)=7 \Rightarrow y>0.$$

Khi đó từ phương trình thứ nhất ta suy ra $x>0$. Vậy $x,y>0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(x-y\right)\left(4x^2-2xy+y^2\right)=7\left(y-1\right)(*)$$

Xét phương trình (*).

<u>TH1 :</u> Với $0<y<1$ thì $VP<0 \Rightarrow VT<0 \Leftrightarrow x<y \Rightarrow 0<x<y<1$, từ đó ta suy ra $y^3+6x^2y<7$, hệ vô nghiệm.

<u>TH2 :</u> Với $y>1 \Rightarrow 7\left(y-1\right)>0 \Rightarrow VP>0 \Rightarrow VT>0 \Rightarrow x>y>1$, từ đó suy ra $y^3+6x^2y>7$, hệ vô nghiệm.

Vậy với $y=1$, ta có nghiệm $x=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x,y\right)=\left(1,1\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3+x^2=\sqrt{64-x^2y} \\ y+6=\left(x^2+3\right)^3 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} y^3+x^2=\sqrt{64-x^2y} \\ y+6=\left(x^2+2\right)^3 \geq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3+x^2 \leq 8 \\ y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;2\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2}-\sqrt{y}=1\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{4x+y^2}}=\dfrac{1}{6}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-2\le x\ne 0, y\ge 0, 4x+y^2>0$.

Vì $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình nên $y>0$ suy ra

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}=\sqrt{y}+1>1\\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{\sqrt{4x+y^2}}<\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{\sqrt{4x}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{3\left(7-\sqrt{33}\right)}{2}\\ y>0\end{cases}.$$

<u>TH1:</u> Nếu $y<x-1$

Suy ra: $\begin{cases}x>\dfrac{3\left(7-\sqrt{33}\right)}{2}\\ \sqrt{x+2}=\sqrt{y}+1<\sqrt{x-1}+1\end{cases}\Leftrightarrow x>2\Rightarrow\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{4x+y^2}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{6}$

(hệ vô nghiệm).

<u>TH2:</u> Nếu $y>x-1$ thực hiện tương tự ta có hệ vô nghiệm.

<u>TH3:</u> Nếu $y=x-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ suy ra $x=2\Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{x-4}-\sqrt{y-1}=2\\ x+\sqrt{12x+y^2}=19\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 4, y\ge 1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$2\sqrt{x-4}-4=\sqrt{y-1}-2\Leftrightarrow\frac{2(x-8)}{2\sqrt{x-4}+4}=\frac{y-5}{\sqrt{y-1}+2}\Rightarrow(x-8)(y-5)\ge 0.$$

Nếu $x>8, y>5\Rightarrow x+\sqrt{12x+y^2}>19$ hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $x<8, y<5\Rightarrow x+\sqrt{12x+y^2}<19$ hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $x=8, y=5$ hệ phương trình thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(8;5)$.

Nhận xét: Hệ trên hoàn toàn giải được bằng phép đặt ẩn phụ $\begin{cases} u=\sqrt{x-4} \\ v=\sqrt{y-1} \end{cases}$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y+y=2x \\ y^4-x^2=2(1-x) \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} y=\dfrac{2x}{1+x^2} \\ y^4=(x-1)^2+1 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $-1\le y\le 1 \Rightarrow y^4\le (x-1)^2+1$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=1, y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (5-x)(1+x^4y^4)=(1+x^2y^2)^3 \\ x^2y^2+x^2+x+y^2=4 \end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra:

$5-x=(x^2+1)(y^2+1)$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$(x^2+1)(y^2+1)(x^4y^4+1)=(1+x^2y^2)^3.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$(x^2+1)(y^2+1)(x^4y^4+1)\ge \left(1+\sqrt[3]{x^2y^2x^4y^4}\right)^3=(1+x^2y^2)^3.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x^2=y^2=1$ thử lại vào phương trình thứ hai của hệ suy ra $(x;y)=(1;-1);(1;1)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \\ 3x^2-xy^2+4x=1 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\le\sqrt{\left(x^2+1-x^2\right)\left(1-y^2+y^2\right)}=1$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x^2+y^2=1,\left(x,y\ge 0\right)$.

Khi đó thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^3+3x^2+3x-1=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)^3=2\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}-1\Rightarrow y=1-\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^2.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\sqrt[3]{2}-1;1-\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^2\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x-1\right)^2\sqrt{y}+\sqrt{x}\left(y-1\right)=0\\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)\left(xy+\dfrac{1}{x}\right)=4y\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0,y\ge 0$.

Ta có: $\left(x+\dfrac{y}{x}\right)\left(xy+\dfrac{1}{x}\right)\ge 2\sqrt{x.\dfrac{y}{x}}.2\sqrt{xy.\dfrac{1}{x}}=4y$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y}{x}\\ xy=\dfrac{1}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$.

Thử lại vào phương trình đầu của hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2-1\right)^2+1=2y\left(2x+1\right)\\ x^2-y^2=3\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x^2-1\right)^2+1=4xy+2y\\ x^2=y^2+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(y^2+2\right)^2+1=4xy+2y\\ x^2=y^2+3\end{cases}.$$

Ta có: $4xy+2y\le x^2+4y^2+2y=5y^2+2y+3$

$$\Rightarrow\left(y^2+2\right)^2+1\le 5y^2+2y+3\Leftrightarrow y^4-y^2-2y+2\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(y-1\right)^2\left(y^2+2y+2\right)\le 0\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{y^2+x+y+3}=3\sqrt{y}+\sqrt{x+2}\\ y^3+y^2-3y-5=3x-3\sqrt{x+2}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y\ge 0,x\ge -2$.

Ta có: $\sqrt{x+2}+3\sqrt{y}\le\sqrt{\left(1+3\right)\left(x+2+3y\right)}=2\sqrt{x+3y+2}\le 2\sqrt{y^2+x+y+3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3y}}{\sqrt{3}}\\ x+3y+2=y^2+x+y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$.

Thử lại thấy thỏa mãn phương trình thứ hai.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(-1;1\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2^{x^2+y}+2^{y^2+x}=8\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge 0$.

Ta có: $\begin{cases}x+y\ge\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=2\\ x^2+y^2\ge\dfrac{1}{2}\left(x+y\right)^2\ge 2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+x+y\ge 4$.

Suy ra: $2^{x^2+y}+2^{y^2+x}\ge 2\sqrt{2^{x^2+y^2+x+y}}\ge 2\sqrt{2^4}=8$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x^9-18y-27x-29}{3}}-\sqrt{x-y-1}=2x+\sqrt{x^2+x-2} \\ x\left(x^3+2xy-2x+2\right)+\left(y-2\right)^2+7=6\sqrt[3]{4\left(x-y+1\right)} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x-y-1\ge 0,\left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -2 \end{array}\right.$.

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$x^4+2x^2y-2x^2+2x+y^2-4y+11=6\sqrt[3]{4\left(x-y+1\right)}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y\right)^2-2\left(x^2+y\right)+2\left(x-y+1\right)+9=6\sqrt[3]{4\left(x-y+1\right)}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y-1\right)^2+2\left(x-y+1\right)+8=6\sqrt[3]{4\left(x-y+1\right)}.$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(x^2+y-1\right)^2+2\left(x-y+1\right)+8\ge 2\left(x-y+1\right)+8 \\ &=2\left(\left(x-y+1\right)+2+2\right)\ge 2.3\sqrt[3]{2.2.\left(x-y+1\right)}=6\sqrt[3]{4\left(x-y+1\right)} \end{aligned}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y-1=0 \\ x-y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,y=0 \\ x=-2,y=-3 \end{array}\right.$.

Thử lại chỉ có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-2;-3\right)$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(-2;-3\right)$.

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2\left(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2y}\right) \\ x^2+y^2-7xy+1=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $0\ne x\le \dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\le y\ne 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ suy ra $x+\dfrac{1}{x}-2\sqrt{1-2x}+y+\dfrac{1}{y}-2\sqrt{1+2y}=0$.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x\sqrt{1-2x}+1-2x}{x}+\frac{y^2-2y\sqrt{1+2y}+1+2y}{y}=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}\left(x-\sqrt{1-2x}\right)^2+\frac{1}{y}\left(\sqrt{1+2y}-y\right)^2=0 \ (1).$$

Mặt khác từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$7xy=x^2+y^2+1>0 \Rightarrow xy>0$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{1-2x} \\ y=\sqrt{1+2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{9+8x^2y-x^4y^2}=y^3\left(16y^3-3x^2\right)+y \\ \sqrt{16+(x-2y)^2}=x^2\left(5y^3-x^2\right)+y-1 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{25-\left(x^2y-4\right)^2}=16y^6-3x^2y^3+y & (1) \\ \sqrt{16+(x-2y)^2}=-x^4+5x^2y^3+y-1 & (2) \end{cases}$$

Lấy $(1)-(2)$ theo vế ta được:

$$\sqrt{25-\left(x^2y-4\right)^2}-\sqrt{16+(x-2y)^2}=\left(4y^3-x\right)^2+1.$$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{25-\left(x^2y-4\right)^2}-\sqrt{16+(x-2y)^2}\le\sqrt{25}-\sqrt{16}=1 \\ \left(4y^3-x\right)^2+1\ge 1 \end{cases}$.

Do đó dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y=4 \\ x=2y \\ 4y^3=x \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 27. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 8xy^3 + 2y^3 + \dfrac{1}{2} = 4x^4 + 3x^2 + x + 2\sqrt{4x^2 - 4xy + y^2 + 1} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $0 \le xy \le 1$.

Ta có: $\sqrt{xy - x^2y^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \left(xy - \dfrac{1}{2}\right)^2} \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 \le 1$.

$$8xy^3 + 2y^3 + \frac{1}{2} = 4x^4 + 3x^2 + x + 2\sqrt{4x^2 - 4xy + y^2 + 1} \ge 4x^4 + 3x^2 + x + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y^6 + 2y^3 + 4x^2 \le 1 \\ 4x^4 + 3x^2 + x + 2 \le 8xy^3 + 2y^3 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên suy ra:

$$2\left(y^3 - 2x\right)^2 + \left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 2x \\ 2x^2 = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(-\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{5}{4} + x^2y^2 + 4x^4y^2 + 4x^2y^4 = \sqrt{xy(1-xy)} + 2 \\ \dfrac{5}{2} - xy - 2\sqrt{2}xy(x+y) = x + y - \sqrt{2(x^2+y^2)} \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{xy(1-xy)} + 2 \le \dfrac{xy + 1 - xy}{2} + 2 = \dfrac{5}{2} \\ x + y - \sqrt{2(x^2+y^2)} \le 0 \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} \dfrac{5}{4} + x^2y^2 + 4x^4y^2 + 4x^2y^4 \le \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{5}{2} - xy - 2\sqrt{2}xy(x+y) \le 0 \end{cases}$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được:

$$\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2x^2y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(2y^2x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{1}{2}\\2x^2y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\2xy^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}8y\left(x+\sqrt{1-x+\left(y-1\right)^2}\right)=12x+1+7\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}\right)\\\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\sqrt{xy}=4y\sqrt{y}-x\sqrt{x}\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1,y\ge 2,1-x+\left(y-1\right)^2\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(x+3\sqrt{xy}+4y\right)=0\Leftrightarrow x=y.$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$8x^2+8x\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=12x+1+7\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right).$$

Để giải phương trình này ta có hai cách xử lý như sau:

$$\begin{cases}8x\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}\ge 7\sqrt{x-2}\\8x^2-12x-1-7\sqrt{x-1}\ge 0\end{cases}\Rightarrow 8x^2+8x\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}\ge 12x+1+7\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;2\right)$.

<u>Cách 2:</u> Đặt $u=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\ge\sqrt{2-1}+\sqrt{2-2}=1$

$\Rightarrow u^2=2x-3+2\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}$.

Suy ra: $8x^2+8x\sqrt{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}-12x-1-7\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)$

$$=8x^2+4x\left(u^2-2x+3\right)-12x-1-7u=4xu^2-7u-1\ge 8u^2-7u-1=\left(u-1\right)\left(8u+1\right)\ge 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 2 \\ u = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y+1} = y - x \\ 16x^2y^2 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^2y + x} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x, y \geq -\frac{1}{2}$ khi đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{2(x-y)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}} = y - x \\ 16x^2y^2 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^2y + x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}} + 1\right) \\ 16x^2y^2 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^2y + x} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3 + x} \end{cases}$$

Từ đây suy ra $x, y > 0$

Ta có $\sqrt[3]{4x^3 + x} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4x\left(4x^2+1\right).2} \leq \frac{3}{2}\left(4x + 4x^2 + 1 + 2\right) = \frac{3}{2}\left(4x^2 + 4x + 3\right)$

Từ đó suy ra $:16x^5 + 5 \leq \frac{3}{2}\left(4x^2 + 4x + 3\right) \Leftrightarrow 2\left(2x^2 + 2x + 1\right)(2x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Thử lại thấy $x = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn phương trình trên

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 8y^2 = 2xy(1-2y) \\ \sqrt{x^3 + 4x} = 1 + \dfrac{4y^2 + 4y + 1}{3} \end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $x^3 + 4x > 0 \Rightarrow x > 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(x - 2y)\left(x + 4y^2\right) = 0 \xleftrightarrow{x>0} x = 2y.$$

Thay $y = \frac{x}{2}$ vào phương trình thứ hai ta được: $3\sqrt{x^3 + 4x} = x^2 + 2x + 4$.

Ta có : $3\sqrt{x^3+4x}=3\sqrt{2x.\frac{x^2+4}{2}}\le\frac{3}{2}\left(2x+\frac{x^2+4}{2}\right)\le x^2+2x+4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=2\Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$.

Bài 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+y-1\right)\sqrt{x+y-1}+6x+2y=20\\ \left(3x+y-2\right)\sqrt{3x+y-2}+2x+2y=18\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}x+y-1\ge 0\\ 3x+2y-1\ge 0\end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}\left(x+y-1\right)\sqrt{x+y-1}+2\left(3x+y-2\right)=16\\ \left(3x+y-2\right)\sqrt{3x+y-2}+2\left(x+y-1\right)=16\end{cases}\quad(1)$$

Trừ theo vế hai phương trình trên ta được

$$\left(x+y-1\right)\sqrt{x+y-1}-2\left(x+y-1\right)-\left(3x+y-2\right)\sqrt{3x+y-2}+2\left(3x+y-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y-1\right)\left(\sqrt{x+y-1}-2\right)+\left(3x+y-2\right)\left(2-\sqrt{3x+y-2}\right)=0\ (*)$$

Từ (*) ta có nhận xét sau :

Nếu $x+y-1\ge 4$ thì từ (*) suy ra $3x+2y-2\ge 4$

Nếu $x+y-1\le 4$ thì từ (*) suy ra $3x+2y-2\le 4$

Như vậy hệ có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y-1\ge 4\\ 3x+y-2\ge 4\end{cases}\\ \begin{cases}x+y-1\le 4\\ 3x+y-2\le 4\end{cases}\end{array}\right.$

Từ đây kết hợp với hệ (1) ta suy ra hệ tương đương với:

$$\begin{cases}x+y-1=4\\ 3x+y-2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{9}{2}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{xy+1}{x+y-1}+\dfrac{x+y-4}{x+y-xy}=0 \\ \sqrt{x+y-1}+\sqrt{x+y-xy}=2x^2+3y^2-3 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0, y \ge 0, x+y>1, x+y>xy$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra hệ phương trình có nghiệm khi $x+y-4<0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{x^2y^2-xy(x+y)+xy-(x+y)^2+4(x+y)-4}{(x+y-1)(x+y-xy)}=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2-xy(x+y)+xy-(x+y)^2+4(x+y)-4=0.$$

$$\Leftrightarrow xy(xy-x-y+1)-(x+y-2)^2=0.$$

TH1: Nếu $xy-x-y+1<0$ suy ra $xy(xy-x-y+1)-(x+y-2)^2 \le 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xy=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$ (thử lại thấy không thỏa mãn).

TH2: Nếu $xy-x-y+1 \ge 0$ khi đó ta có:

$$xy(xy-x-y+1)-(x+y-2)^2 \le xy\left(\frac{(x+y)^2}{4}-x-y+1\right)-(x+y-2)^2$$

$$=\frac{1}{4}(xy-4)(x+y-2)^2$$

Suy ra $(xy-4)(x+y-2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ xy \ge 4 \end{array}\right.$.

Mặt khác $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} < \dfrac{4^2}{4}=4$ nên $x+y=2$

Khi đó: $xy-2+1 \ge 0 \Leftrightarrow xy \ge 1 \Leftrightarrow xy \ge \dfrac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow x=y \Rightarrow x=y=1$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 27y^3-3x^2+9y=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{3y}=\sqrt[4]{72\left(\dfrac{x^2}{9}+y^2\right)} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge 0$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{3y}\right)^4\le 4\left(x+3y\right)^2\le 4\left(1+1\right)\left(x^2+9y^2\right)=72\left(\frac{x^2}{9}+y^2\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{3y}\le\sqrt[4]{72\left(\frac{x^2}{9}+y^2\right)}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x}=\sqrt{3y}\Leftrightarrow x=3y$.

Thay $x=3y$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$27y^3-27y^2+9y=1\Leftrightarrow\left(3y-1\right)^3=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}\Rightarrow x=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 35. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 \\ 17\left(x^4+y^4-14y^2+49\right)-\left(x+2y\right)^4=-8\left(xy+7\right)\left(x^2+2xy+4y^2-14\right) \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 \\ 17\left(x^4+\left(y^2-7\right)^2\right)=\left(x^2+4y^2-28\right)^2 \end{cases}.$$

Ta có: $17\left(x^4+\left(y^2-7\right)^2\right)\ge\left(1.x^2+4\left(y^2-7\right)\right)^2=\left(x^2+4y^2-28\right)^2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x^2}{1}=\frac{y^2-7}{4}\Leftrightarrow 4x^2-y^2+7=0$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}4x^2-y^2+7=0\\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0\end{cases}.$$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $x\in\left[0;\frac{4}{3}\right], y\in\left[1;\frac{7}{3}\right]$

(Xem thêm kỹ thuật sử dụng điều kiện có nghiệm của hệ phương trình).

Do đó: $4x^2-y^2+7\ge-\left(\frac{7}{3}\right)^2+7>0$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{2x-y}+\sqrt{3x-2y}=\frac{3}{2}\\ (x+1)\left(6x^2+2y^2-7xy+5x-3y+1\right)=\frac{125}{64}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, 3x-2y\ge 0$.

Để ý một chút ta nhận ra:

$$(x+1)\left(6x^2+2y^2-7xy+5x-3y+1\right)=\left((\sqrt{x})^2+1\right)\left(\left(\sqrt{2x-y}\right)^2+1\right)\left(\left(\sqrt{3x-2y}\right)^2+1\right)$$

Ta có bất đẳng thức: $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\ge\frac{125}{4},\left(a,b,c\ge 0, a+b+c=\frac{3}{2}\right)$.

Chứng minh bất đẳng thức này ta xét hàm số:

$$f(t)=\ln\left(t^2+1\right)-\frac{4}{5}t, t\in\left[0;\frac{3}{2}\right]$$

Suy ra:

$$\ln\left(t^2+1\right)\ge\ln\frac{5}{4}-\frac{2}{5}\Rightarrow\ln\left(1+a^2\right)+\ln\left(1+b^2\right)+\ln\left(1+c^2\right)\ge 3\ln\frac{5}{4}-\frac{6}{5}=\ln\frac{125}{64}$$

$$\Leftrightarrow\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\ge\frac{125}{64}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Áp dụng vào bài toán ta có: $\sqrt{x}=\sqrt{2x-y}=\sqrt{3x-2y}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{4}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Bài 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(1+x^2\right)^2\left(1+\frac{1}{y^4}\right)=8\\\left(1+y^2\right)^2\left(1+\frac{1}{x^4}\right)=8\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Nhận theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(1+x^2\right)^2\left(1+y^2\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\left(1+\frac{1}{y^4}\right)=64.$$

Ta có: $\left(1+x^2\right)^2\left(1+y^2\right)\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\left(1+\frac{1}{y^4}\right)\geq\left(1+\sqrt[6]{x^2.x^2.y^2.y^2.\frac{1}{x^4}.\frac{1}{y^4}}\right)^6=64$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2=y^2=\frac{1}{x^4}=\frac{1}{y^4}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=\pm1\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-1;-1\right);\left(1;1\right);\left(-1;1\right);\left(1;-1\right)$.

<u>**Nhận xét:**</u> Ta có thể đặt $u=x^2,v=y^2$ để giảm bậc của hệ và đưa về hệ đối xứng loại II đã biết cách giải.

Bài 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+6\sqrt{xy}-y=6\\x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}=\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}+3\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\geq 0,x^2+y^2>0$.

Từ phương trình đầu của hệ ta có:

$$6=x+6\sqrt{xy}-y\leq x+3\left(x+y\right)-y=4x+2y\Rightarrow 2x+y\geq 3.$$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2} \ge \dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2+\dfrac{x^2+y^2}{2}} = \dfrac{4\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} \ge 2\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \\ 3 = x + \dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2} - \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \ge x + \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \ge x+x+y = 2x+y \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x+y \ge 3$.

Vì vậy tất cả các dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x-1\right)\sqrt{y}+\left(y-1\right)\sqrt{x}=\sqrt{2xy} \\ x\sqrt{2y-2}+y\sqrt{2x-2}=\sqrt{2}xy \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 1, y \ge 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với: $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}+\dfrac{\sqrt{y-1}}{y}=1$.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x} \le \dfrac{1+x-1}{2x} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{y-1}}{y} \le \dfrac{1+y-1}{2y} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}+\dfrac{\sqrt{y-1}}{y} \le 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=2$ thay vào phương trình đầu của hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;2\right)$.

Bài 40. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x^2+y+3}=2 \\ 2\sqrt{x+4}+3\sqrt{y+8}=13 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0, y \ge -8, x^2+y+3 \ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$\sqrt{x}+\sqrt{x^2+y+3}=2 \Leftrightarrow x+x^2+y+3+2\sqrt{x\left(x^2+y+3\right)}=4$.

$\Leftrightarrow x+y=1-x^2-2\sqrt{x\left(x^2+y+3\right)} \Rightarrow x+y\le 1$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$13=2\sqrt{x+4}+3\sqrt{y+8}\le\sqrt{\left(2^2+3^2\right)\left(x+4+y+8\right)}\Rightarrow x+y\ge 1.$$

Vì vậy tất cả các dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2\sqrt{x\left(x^2+y+3\right)}=0 \\ \dfrac{\sqrt{x+4}}{2}=\dfrac{\sqrt{y+8}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

Bài 41. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $0\le x,y\le 1$.

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}\le\sqrt{2\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}\right)}\le\dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}},\forall xy\le 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$ (Xem chủ đề kỹ thuật lượng giác hóa).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right);(1;1)$.

Bài 42. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)^4+3=4(x+y) \\ \dfrac{x^4-y^4}{64}+\dfrac{9\left(x^2-y^2\right)}{32}+\dfrac{7(x-y)}{8}+3\ln\left(\dfrac{x-3}{y-3}\right)=0 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $\frac{x-3}{y-3} > 0, y \neq 3$.

Ta có: $(x+y)^4 + 3 = (x+y)^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{(x+y)^4} = 4|x+y| \geq 4(x+y)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x+y=1$.

Do $\frac{x-3}{y-3} > 0 \Rightarrow -2 < x, y < 3$.

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$\frac{x^4}{64} + \frac{9x^2}{32} + \frac{7x}{8} + 3\ln(3-x) = \frac{y^4}{64} + \frac{9y^2}{32} + \frac{7y}{8} + 3\ln(3-y) \qquad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^4}{64} + \frac{9t^2}{32} + \frac{7t}{8} + 3\ln(3-t)$ trên $(-2;3)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{(t-1)^2(t^2-t+6)}{16(t-3)} \leq 0, \forall t \in (-2;3)$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(-2;3)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 43. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2x\sqrt{xy} = y^2\sqrt{y} \\ \left(4x^3 + y^3 + 3x^2\sqrt{x}\right)\left(15\sqrt{x} + y\right) = 3\sqrt{x}\left(y\sqrt{y} + x\sqrt{y} + 4x\sqrt{x}\right)^2 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$.

Đặt $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}, (u, v \geq 0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^4 + 2u^3v = v^5 \\ \left(4u^6 + v^6 + 3u^5\right)\left(15u + v^2\right) = 3u\left(4u^3 + u^2v + v^3\right)^2 \end{cases}.$$

Nếu $u = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow (x;y) = (0;0)$.

Xét $u > 0$ đặt $v = tu, (t > 0)$ phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$u^4 + 2u^4 t = t^5 u^5 \Leftrightarrow u = \frac{1+2t}{t^5}.$$

Thay $u = \frac{1+2t}{t^5}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(4 + t^6 + \frac{3t^5}{1+2t}\right)\left(5 + \frac{1+2t}{3t^3}\right) = \left(t^3 + t + 4\right)^2.$$

Ta có: $\left(4 + t^6 + \frac{3t^5}{1+2t}\right)\left(5 + \frac{1+2t}{3t^3}\right) \ge \left(\sqrt{5\left(4+t^6\right)} + \sqrt{\frac{3t^5}{1+2t}.\frac{1+2t}{3t^3}}\right)^2$.

$$= \left(t + \sqrt{\left(2^2 + 1^2\right)\left(4 + t^6\right)}\right)^2 \ge \left(t + t^3 + 4\right)^2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow u = v \Rightarrow u = v = 3 \Leftrightarrow x = y = 9$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (0;0);(9;9)$.

Bài 44. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 4x + 12y - 28 = 8\sqrt{y(x-2)} + 8\sqrt{(y-2)(x-4)} \\ \sqrt{y-2} + \sqrt{x-4} = (x-y)^2 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 4, y \ge 2$.

Xét phương trình đầu của hệ ta có:

$$\begin{cases} 8\sqrt{y(x-2)} \le 4(x-2+y) \\ 8\sqrt{(y-2)(x-4)} \le 4(x-4+y-2) \end{cases} \Rightarrow VP \le 8(x+y) - 32.$$

Mặt khác: $VT - \left(8(x+y) - 32\right) = (x-y)^2 - 4x + 4y + 4 = (x-y-2)^2 \ge 0$.

Vì vậy dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y = x + 2$.

Thay $y = x + 2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{y-2} + \sqrt{y-2} = 4 \Leftrightarrow y = 6 \Rightarrow x = 8.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (8;6)$.

Bài 45. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy}=4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)(x+y)-1} \\ \sqrt{(x+1)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x(y+3)}}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases}$$

Lời giải

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\sqrt{\left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+2(x+y+3)}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3}.$$

Ta có: $VT \ge \sqrt{2(x+y+3)}=\sqrt{(1+1)\left(x+(y+3)\right)} \ge \sqrt{x}+\sqrt{y+3}=VP$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y+3$ thay vào phương trình đầu của hệ tìm được nghiệm $(x;y)=(4;1)$.

Bài 46. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(1+y^2)=2y \\ y(1+x^2)=2x \end{cases}$.

Lời giải

<u>Cách 1</u>. Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x=\dfrac{2y}{1+y^2} \\ y=\dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases}$.

Suy ra $x,y\in[-1;1]$. Nhân theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$xy=\frac{4xy}{(1+x^2)(1+y^2)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0 \\ (1+x^2)(1+y^2)=4 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $xy=0 \Rightarrow x=y=0$.

<u>TH2:</u> Nếu $(1+x^2)(1+y^2)=4$.

Ta có $\begin{cases} 1+x^2 \le 2 \\ 1+y^2 \le 2 \end{cases} \Rightarrow (1+x^2)(1+y^2)\le 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\pm1, y=\pm1$ thử lại nhận hai nghiệm $(x;y)=(-1;-1);(1;1)$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $(x;y)=(-1;-1);(0;0);(1;1)$.

Cách 2: Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x-y+xy^2-yx^2=2y-2x \Leftrightarrow 3(x-y)+xy(y-x)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(3-xy)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ xy=3 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có kết quả tương tự.

Bài 47. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x+y}=3 \\ \sqrt{x}+\sqrt{(y-4)^2+9}=3 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, x+y\ge 0$.

Ta có: $\sqrt{x}+\sqrt{(y-4)^2+9}=3\ge\sqrt{x}+\sqrt{9}\ge 3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$.

Thử lại vào phương trình thứ nhất của hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;4)$.

Bài 48. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4y^2+3x+8=5y(x+1) \\ \sqrt{5\left(x^2+\dfrac{4}{x+y}\right)}=x+3 \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}^+\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y>0$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S cho phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{5\left(x^2+\frac{4}{x+y}\right)}=\sqrt{\left(2^2+1^2\right)\left(x^2+\frac{4}{x+y}\right)}\ge 2x+\frac{2}{\sqrt{x+y}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{x+y}}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{x+y}=\frac{1}{2}\sqrt{4(x+y)}\le\frac{x+y+4}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x+y=4$.

Suy ra $x+3=\sqrt{5\left(x^2+\frac{4}{x+y}\right)}\ge 2x+\frac{8}{x+y+4}$.

$\Leftrightarrow x^2+xy-3y+x-4\le 0$.

Cộng theo vế với phương trình đầu của hệ ta được

$x^2+4y^2-4xy-8y+4x+4\le 0$.

$\Leftrightarrow (x+2-2y)^2\le 0\Leftrightarrow x+2-2y=0$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+2-2y=0 \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{x+y}} \\ x+y=4 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Bài 49. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$

Lời giải

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=x^2+y^2.$$

Phương trình này có nghiệm nếu $xy\ge 0$.

Nhận thấy $x=y=0$ là một nghiệm của hệ.

Xét $xy>0$

Phương trình này có:

$$VP\ge 2xy; VT=\frac{2xy}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\le xy+xy=2xy$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x,y)=(0,0);(1,1)$.

Chủ đề 13. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Trong các năm gần đây không riêng gì kỳ thi TSĐH mà các kỳ thi HSG các tỉnh, Thành phố bài toán hệ phương trình được đề cập luôn xoay quay các hệ chứa căn thức. Bởi lẽ hệ chứa căn thức có rất nhiều cách tiếp cận và cuối cùng đưa về một phương trình vô tỷ từ cơ bản đến hay và khó. Do vậy với xu hướng ra đề kết hợp 2 trong 1 vừa xử lý hệ phương trình vừa xử lý phương trình vô tỷ đòi hỏi bạn đọc cần trang bị những kiến thức cơ bản nhất đến dạng toán này. Dưới đây tôi đề cập các phương pháp cơ bản đứng trước một hệ phương trình có chứa căn thức.

1. Phương pháp Biến đổi tương đương

Phản xạ tự nhiên khi đứng trước một phương trình của hệ có chứa căn thức đó là khử căn. Để thực hiện đưa về hai vế không âm rồi bình phương(hoặc bình phương luôn đưa về phương trình hệ quả) để tìm ra mối liên hệ giữa hai ẩn x,y.

2. Phương pháp đặt ẩn phụ

Mục đích của việc đặt ẩn phụ đối với hệ có chứa căn thức là chuyển hệ ban đầu về hệ phương trình có hai phương trình dạng đa thức. Các phép biến đổi đối với hệ đa thức được xử lý dễ dàng hơn với hệ có chứa căn.

Tôi đề cập thêm một phép khử căn sau đây:

Nếu đặt $t = ax + \sqrt{a^2x^2 + b}$ ta hoàn toàn rút được x theo t.

Thật vậy: $t - ax = \sqrt{a^2x^2 + b} \Rightarrow t^2 - 2atx + a^2x^2 = a^2x^2 + b$

$$\Leftrightarrow x = \frac{t^2 - b}{2at} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{t^2 - b}{2at} \\ \sqrt{a^2x^2 + b} = t - a.\dfrac{t^2 - b}{2at} = \dfrac{t^2 + b}{2t} \end{cases}$$

(Xem bài tập mẫu).

Chú ý. Xem thêm kỹ thuật đặt ẩn phụ dạng đại số.

3. Phương pháp xét hàm số

Khi phương trình của hệ có các tích của đa thức và căn thức thông thường ta sử dụng phương pháp hàm số.

Áp dụng định lý. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $(a;b)$

Khi đó: $\forall u,v \in (a;b); f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Từ đây suy ra mối liên hệ giữa hai biến x, y.

Việc còn lại là thế vào phương trình còn lại của hệ để tìm ra nghiệm của hệ phương trình.

Chú ý. Xem thêm chủ đề kỹ thuật sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

4. Phương pháp nhân liên hợp

Các bài toán vận dụng kỹ thuật này tôi đề cập chi tiết trong chủ đề 19.

5. Phương pháp đánh giá bất đẳng thức

Đối với hệ phương trình có chứa căn thức thường đánh giá thông qua các bất đẳng thức cơ bản sau(rõ hơn về phương pháp này xem chủ đề kỹ thuật đánh giá):

+ Bất đẳng thức Côsi(AM-GM) cho hai số không âm:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

+ Bất đẳng thức Bunhiacopski(C-S):

$$\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} \geq \left|a+b\right|.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

+ Bất đẳng thức Mincopski:

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{\left(x+a\right)^2 + \left(y+b\right)^2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $bx = ay$.

<u>Chú ý.</u>

- Phương trình chứa căn thức trong hệ nên ta phải đặt điều kiện. Điều kiện có thể đặt điều kiện thô(hệ phương trình có nghĩa) hoặc đặt điều kiện chặt(hệ phương trình có nghiệm).

- Phương pháp chung là xử lý đối với phương trình đơn giản hơn của hệ. Nếu cả hai phương trình của hệ không có không biến đổi đơn giản được nghĩ đến cộng trừ theo vế hai phương trình của hệ.

6. Đẳng thức cơ bản

$$\left(f(x) + \sqrt{f^2(x)+a}\right)\left(g(x) + \sqrt{g^2(x)+a}\right) = a \Leftrightarrow f(x) + g(x) = 0, \forall a > 0.$$

Chứng minh: Nhân vào hai vế của đẳng thức trên với $\sqrt{g^2(x)+a} - g(x)$ ta được:

$$f(x) + \sqrt{f^2(x)+a} = \sqrt{g^2(x)+a} - g(x).$$

$$\Leftrightarrow f(x)+g(x)+\sqrt{f^2(x)+a}-\sqrt{g^2(x)+a}=0.$$

$$\Leftrightarrow f(x)+g(x)+\frac{f^2(x)-g^2(x)}{\sqrt{f^2(x)+a}+\sqrt{g^2(x)+a}}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)+g(x)\right)\left(1+\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f^2(x)+a}+\sqrt{g^2(x)+a}}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow f(x)+g(x)=0$$

Vì: $1+\dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f^2(x)+a}+\sqrt{g^2(x)+a}}=\dfrac{\sqrt{f^2(x)+a}+\sqrt{g^2(x)+a}+f(x)-g(x)}{\sqrt{f^2(x)+a}+\sqrt{g^2(x)+a}}$.

$$>\frac{\left|f(x)\right|+f(x)+\left|g(x)\right|-g(x)}{\sqrt{f^2(x)+a}+\sqrt{g^2(x)+a}}\geq 0$$

Từ đây ta có một phương trình đẹp mắt thường xuất hiện trong các hệ phương trình:

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \text{ hoặc } \left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1.$$

Ta có một nhận xét là hai đẳng thức trên tương đương(xem bài tập mẫu). Các bài toán xoay quanh hai đẳng thức trên rất đẹp và có nhiều hướng xử lý bằng kỹ thuật đặt ẩn phụ cũng như hàm số.

Để chi tiết hơn về các phương pháp này xem thêm các chủ đề tương ứng trong cùng cuốn sách.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+6xy+5y^2}+5=\sqrt{2x^2+6xy+5y^2+14x+20y+25}\\ x^2-9y^2=\dfrac{x-y+44}{2}\end{cases}$$

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Điều kiện: $2x^2+6xy+5y^2\geq 0, 2x^2+6xy+5y^2+14x+20y+25\geq 0$.

<u>Nhận xét:</u> Phương trình của hệ có sự lặp lại $2x^2+6xy+5y^2$ ở hai vế nên phép bình phương hai vế để loại đi nhân tử chung này là điều tự nhiên.

Bình phương hai vế phương trình đầu của hệ ta được:

$$10\sqrt{2x^2+6xy+5y^2}=14x+20y\Leftrightarrow\begin{cases}7x+10y\ge 0\\25\left(2x^2+6xy+5y^2\right)=\left(7x+10y\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7x+10y\ge 0\\x^2+10xy+25y^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+10y\ge 0\\\left(x+5y\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x+10y\ge 0\\x=-5y\end{cases}.$$

Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$16y^2=\frac{-6y+44}{2}\Leftrightarrow 16y^2+6y-22=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-\dfrac{11}{8}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5,y=1\\x=\dfrac{55}{8},y=-\dfrac{11}{8}\end{array}\right..$$

Đối chiếu lại điều kiện chỉ nhận nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{55}{8};-\dfrac{11}{8}\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{55}{8};-\dfrac{11}{8}\right)$.

<u>Cách 2:</u> Viết lại phương trình thứ nhất dưới dạng:

$$\sqrt{\left(x+y\right)^2+\left(x+2y\right)^2}+\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{\left(x+y+4\right)^2+\left(x+2y+3\right)^2}.$$

Đặt $u=\left(x+y;x+2y\right),v=\left(4;3\right)$ ta luôn có $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}=k\vec{v}\Leftrightarrow\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{x+2y}{3}\Leftrightarrow x=-5y$

(xem thêm kỹ thuật sử dụng tính chất hình giải tích giải hệ phương trình).

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+2y^2=x^2y+2xy\\2\sqrt{x^2-2y-1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-2y-1\ge 0$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$x\left(x^2-2y\right)-y\left(x^2-2y\right)=0\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^2-2y\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x^2=2y\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $x=y$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}=x-2\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x-1}=x-2-\sqrt[3]{x^3-14}.$$

Phương trình cuối này có hai cách xử lý như sau:

<u>Cách 1:</u> Xuất phát từ $\sqrt{x^2-2x-1}\ge 0$ ta phải có:

$$x-2-\sqrt[3]{x^3-14}\ge 0\Leftrightarrow (x-2)^3\ge x^3-14\Leftrightarrow x^2-2x-1\le 0.$$

Do đó: $\begin{cases} x^2-2x-1\ge 0\\ x^2-2x-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}\Rightarrow (x;y)=\left(1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{2}\right)$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{2}\right)$.

<u>Cách 2:</u> Ta đặt $u=2-x, v=\sqrt{x^2-2x-1}\Rightarrow u^3-6v^2=14-x^3$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$\sqrt[3]{u^3-6v^2}=u+2v\Leftrightarrow u^3-6v^2=(u+2v)^3\Leftrightarrow v\left[v^2+3(u+v)^2+3v\right]=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=0\\ u=v=0\end{array}\right.$ (do $v\ge 0$).

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x-1}=0\\ \begin{cases}\sqrt{x^2-2x-1}=0\\ 2-x=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-1}=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(1\pm\sqrt{2};1\pm\sqrt{2}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7\\ 3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}2x+3y\ge 0\\ 5-x-y\ge 0\\ 2x+y-3\ge 0\end{cases}$.

Phân tích. Nhận thấy hệ có chứa ba căn thức khác nhau trong đó $\sqrt{5-x-y}$ lặp lại nên ta có thể đặt ẩn phụ $u=\sqrt{5-x-y}$ và một ẩn phụ khác là một trong hai căn thức còn lại.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{5-x-y}\\ v=\sqrt{2x+3y}\end{cases},(u,v\ge 0)\Rightarrow\begin{cases}5-x-y=u^2\\ 2x+3y=v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3u^2-v^2+15\\ y=2u^2+v^2-10\end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+2v=7 \\ 3u-\sqrt{2\left(-3u^2-v^2+15\right)+2u^2+v^2-10-3}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+2v=7 \\ \sqrt{-4u^2-v^2+17}=3u-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{7-u}{2} \\ \sqrt{-4u^2-\left(\dfrac{7-u}{2}\right)^2+17}=3u-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{7-u}{2} \\ 3u-1\ge 0 \\ -4u^2-\left(\dfrac{7-u}{2}\right)^2+17=\left(3u-1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{7-u}{2} \\ u\ge\dfrac{1}{3} \\ 53u^2-38u-15=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x-y}=1 \\ \sqrt{2x+3y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$.

<u>Nhận xét:</u> Hệ phương trình có chứa căn và không chứa các nhân tử bậc cao nên ta có thể xử lý bằng cách bình phương hai vế không âm đưa về giải hệ phương trình đa thức. Hoặc đặt ẩn phụ như sau:

Đặt $a=\sqrt{2x+3y}, b=\sqrt{2x+y-3}, c=\sqrt{5-x-y}, \left(a,b,c\ge 0\right)$.

Khi đó $a^2+b^2+4c^2=\left(2x+3y\right)+\left(2x+y-3\right)+4\left(5-x-y\right)=17$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2+b^2+4c^2=17 \\ 2a+c=7 \\ 3c-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7-c}{2} \\ b=3c-1 \\ \left(\dfrac{7-c}{2}\right)^2+\left(3c-1\right)^2+4c^2=17 \end{cases} \xleftrightarrow{c\ge 0} \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}.$$

Ta có kết quả tương tự. Ta cùng xem xét một hệ phương trình có chứa nhiều căn khác.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{5x-y}-\sqrt{2y-x}=1 \\ 2\sqrt{2y-x}+3xy=2x^2+y^2+3x-1 \end{cases}$.

Lời giải

<u>Nhận xét.</u> Hệ phương trình này ta hoàn toàn thực hiện tương tự bài toán trên bằng cách đặt ẩn phụ $\begin{cases} u=\sqrt{5x-y} \\ v=\sqrt{2y-x} \end{cases}$ sau đó rút x,y theo u,v. Tuy nhiên nếu thực hiện phép bình phương hai vế phương trình đầu của hệ ta có lời giải gọn như sau:

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{5x-y}=1+\sqrt{2y-x} \\ 2\sqrt{2y-x}+3xy=2x^2+y^2+3x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-y=1+2y-x+2\sqrt{2y-x} \\ 2\sqrt{2y-x}+3xy=2x^2+y^2+3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2y-x}=6x-2y-1 \\ 2\sqrt{2y-x}+3xy=2x^2+y^2+3x-1 \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$(x-y)(2x-y-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=2x-3 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay vào phương trình đầu của hệ tìm được: $(x;y)=(1;1);\left(\frac{22}{3};\frac{35}{3}\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x}+\sqrt{8y-1}+2=16y^2+9x \\ \sqrt{x-y}+\sqrt{7x-y}+\sqrt{3x-y}=\sqrt{x+7y}+2\sqrt{x} \end{cases}$.

Lời giải

Không xử lý được phương trình đầu gì ngoài điều kiện nên chuyển hướng xuống phương trình thứ hai tuy nhiên nó nhiều căn . Để ý một chút là nó chỉ có x,y nên đặt $y=tx$ như phương trình đẳng cấp là hợp lý nhất.

Vậy ta đưa về giải phương trình vô tỷ.

$$\sqrt{1-t}+\sqrt{7-t}+\sqrt{3-t}=\sqrt{1+7t}+2.$$

Giải phương trình này để ý hai vế là hai hàm đơn điệu ngược chiều nên phương trình có nghiệm duy nhất $t=\frac{3}{4}$ hay $x=\frac{4}{3}y$.

Thay $x=\frac{4}{3}y$ và phương trình đầu ta được:

$$2\sqrt{y}+\sqrt{8y-1}+2=16y^2+12y$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\right)+\left(\sqrt{8y-1}-1\right)=16y^2+12y-4$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{y-\frac{1}{4}}{\sqrt{y}+\frac{1}{2}}+\frac{8y-2}{\sqrt{8y-1}+1}=4\left(4y-1\right)\left(y+1\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(4y-1\right)\left(4y+4-\frac{2}{\sqrt{8y-1}+1}-\frac{1}{2\sqrt{y}+1}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}\text{(do } 4y+4-\frac{2}{\sqrt{8y-1}+1}-\frac{1}{2\sqrt{y}+1}>4-\frac{2}{1}-\frac{1}{1}=1>0\text{)}\Rightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x-y}+2\sqrt{x+y}=2\\ \sqrt{2x+y}+2\sqrt{x+\frac{31}{8}y}=3\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $2x-y\ge 0, 2x+y\ge 0, x+y\ge 0, x+\frac{31}{8}y\ge 0$.

<u>Nhận xét.</u> Hệ này tương tự hệ phương trình trên khi xuất hiện đến bốn căn thức khác nhau. Tuy nhiên tinh ý một chút ta nhận ra tính đẳng cấp của hệ phương trình:

Nhân chéo theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$2\left(\sqrt{2x+y}+2\sqrt{x+\frac{31}{8}y}\right)=3\left(\sqrt{2x-y}+2\sqrt{x+y}\right).$$

Đến đây chú ý ta có $\begin{cases}2x-y\ge 0\\ x+y\ge 0\end{cases}\Rightarrow 3x\ge 0\Rightarrow x\ge 0$.

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình:

Xét $x>0$ ta đặt $y=tx$ và phương trình trên trở thành:

$$2\left(\sqrt{2+t}+2\sqrt{1+\frac{31}{8}t}\right)=3\left(\sqrt{2-t}+2\sqrt{1+t}\right).$$

Giải phương trình này ta được $t=\frac{10}{13}\Leftrightarrow y=\frac{10}{13}x$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\sqrt{2x-\frac{10}{13}x}+2\sqrt{x+\frac{10}{13}x}=2\Leftrightarrow x=\frac{4}{\left(\frac{4}{\sqrt{13}}+2\sqrt{\frac{23}{13}}\right)^2}\Rightarrow y=\frac{40}{\left(4+2\sqrt{23}\right)^2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $\left(x;y\right)=\left(\frac{4}{\left(\frac{4}{\sqrt{13}}+2\sqrt{\frac{23}{13}}\right)^2};\frac{40}{\left(4+2\sqrt{23}\right)^2}\right)$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+3y+2}+\sqrt{3x-2y-5}=3\sqrt{y+1}\\ \sqrt{2x-3}-\sqrt{y+2}=x+y-4\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y\ge -1, x\ge \frac{3}{2}, 3x-2y-5\ge 0$.

<u>Nhận xét</u>. Hệ phương trình này có nhiều căn như hai hệ đã trình bày ở trên tuy nhiên xuất hiện các số 2 và 5, 1 nên ta không được phương trình đầu của hệ về dạng thuần nhất. Tuy nhiên để ý một chút ta có:

$$\begin{cases}x+3y+2=x-1+3\left(y+1\right)\\ 3x-2y-5=3\left(x-1\right)-2\left(y+1\right)\end{cases}.$$

Vì vậy đặt $u=x-1, v=y+1$ phương trình thứ nhất của hệ phương trình trở thành:

$$\sqrt{u+3v}+\sqrt{3u-2v}=3\sqrt{v}\Leftrightarrow 4u+v+2\sqrt{\left(u+3v\right)\left(3u-2v\right)}=9v.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(u+3v\right)\left(3u-2v\right)}=4v-2u\Leftrightarrow \begin{cases}4v-2u\ge 0\\ \left(u+3v\right)\left(3u-2v\right)=\left(4v-2u\right)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4v-2u\ge 0\\ \left(u-v\right)\left(u-22v\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\ u=v=0\end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $u=v=0\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=0\\ y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

<u>TH2:</u> Nếu $u=v\Leftrightarrow x-1=y+1\Leftrightarrow y=x-2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6 \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2\left(x-3\right).$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-3}\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{y^2-8x+9}-\sqrt[3]{xy+12-6x}=1 \\ \sqrt{2x^2+2y^2+2\left(2-y\right)\left(3+x\right)+6x}-\sqrt{y}=\sqrt{x+2} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge -2, y \ge 0, 2x^2+2y^2+2\left(2-y\right)\left(3+x\right)+6x \ge 0, y^2-8x+9 \ge 0$.

Nhận xét. Phương trình thứ nhất của hệ có chứa hai căn bậc khác nhau nên không hy vọng xử lý được nên tập trung vào phương trình thứ hai của hệ. Loại phương trình này tôi đã đề cập đến trong chủ đề kỹ thuật nhân liên hợp khi giải hệ phương trình có chứa căn thức.

Viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}-2\sqrt{x+2}=\sqrt{y}-\sqrt{x+2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+2y^2-4xy+6x-6y+4}{\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}+2\sqrt{x+2}}=\frac{y-x-2}{\sqrt{y}+\sqrt{x+2}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x+1-y\right)\left(x+2-y\right)}{\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}+2\sqrt{x+2}}=-\frac{x+2-y}{\sqrt{y}+\sqrt{x+2}}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2-y\right)\left(\frac{2x+2-2y}{\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}+2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x+2}}\right)=0$$

Do vậy với cách này nếu nhân liên hợp trực tiếp rất khó xử lý nhân tử lúc sau ở phương trình tích trên.

Ta biến đổi tương đương phương trình thứ hai của hệ như sau:

$$\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}=\sqrt{y}+\sqrt{x+2}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12=x+y+2+2\sqrt{y\left(x+2\right)}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-4xy+9x-7y+10-2\sqrt{y\left(x+2\right)}=0.$$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{x+2}\right)^2+2x^2+2y^2-4xy+8x-8y+8=0$.

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{y}-\sqrt{x+2}\right)^2+2\left(x-y+2\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+2=0\\\sqrt{y}-\sqrt{x+2}=0\end{cases}\Leftrightarrow y=x+2$.

Thay $y=x+2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$\sqrt{\left(x+2\right)^2-8x+9}-\sqrt[3]{x\left(x+2\right)+12-6x}=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x+13}-\sqrt[3]{x^2-4x+12}=1$

Đặt $u=\sqrt{x^2-4x+13}=\sqrt{\left(x-2\right)^2+9}\ge 3$ phương trình trở thành:

$$u-1=\sqrt[3]{u^2-1}\Leftrightarrow\left(u-1\right)^3=u^2-1\Leftrightarrow\left(u-1\right)\left(u^2-3u\right)=0\xleftrightarrow{u\ge 3}u=3.$$

Vì vậy $\sqrt{x^2-4x+13}=3\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=4$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;4\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x-y-2}-\sqrt{2+2y}=3y^2-x^2+2xy+2x+10y+8\\\sqrt{2x+3y+1}-\sqrt{x+3y+5}=x-4\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $y\ge -1, x-y-2\ge 0\Rightarrow x\ge y+2\ge 1$.

Nếu $\begin{cases}x-y-2=0\\2y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $\left(x-y-2\right)^2+\left(2y+2\right)^2>0$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$\frac{x-3y-4}{\sqrt{x-y-2}+\sqrt{2y+2}}=\left(3y-x+4\right)\left(y+x+2\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(3y-x+4\right)\left(x+y+2+\frac{1}{\sqrt{x-y-2}+\sqrt{2y+2}}\right)=0.$$

$\Leftrightarrow 3y-x+4=0$ (do $x+y+2+\dfrac{1}{\sqrt{x-y-2}+\sqrt{2y+2}}>x+y+2\ge x+1>0$).

Thay $3y=x-4$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{3x-3}-\sqrt{2x+1}=x-4\Leftrightarrow\frac{x-4}{\sqrt{3x-3}+\sqrt{2x+1}}=x-4\Leftrightarrow x=4\Rightarrow y=0.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;0)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ x\sqrt{3x-2xy+1}=4xy+3x+1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $3x-2xy+1\ge 0$.

Viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$x+\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+y^2}-y=-y+\sqrt{1+(-y)^2}$ (1).

Thấy dấu hiệu của hàm đặc trưng nên đến đây xét hàm số hoặc nhân liên hợp để tìm ra $x=-y$.

<u>Cách 1:</u> $x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{1+(-y)^2}\Leftrightarrow x+y+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}=0$.

$$\Leftrightarrow (x+y)\left(1+\frac{x-y}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}\right)=0\Leftrightarrow x+y=0\Leftrightarrow x=-y.$$

Vì $1+\dfrac{x-y}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+x-y}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}>\dfrac{|x|+|y|+x-y}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}}\ge 0$.

<u>Cách 2:</u> Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}}\ge 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$.

<u>Nhận xét</u>. Đối với học sinh lớp 10 chưa được trang bị kiến thức về đạo hàm có thể chứng minh tính đồng biến của hàm số $f(t)$ như sau :

$\forall t_1,t_2\in\mathbb{R}, t_1\ne t_2$ ta có :

$$k=\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}=\frac{t_1-t_2+\sqrt{1+t_1^2}-\sqrt{1+t_2^2}}{t_1-t_2}=1+\frac{t_1+t_2}{\sqrt{1+t_1^2}+\sqrt{1+t_2^2}}>0.$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

<u>Cách 3</u>: $x+\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+y^2}-y\Leftrightarrow x+y=\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}$.

Suy ra $(x+y)^2=1+x^2+1+y^2-2\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} = 1-xy \Leftrightarrow \begin{cases} 1-xy \ge 0 \\ 1+x^2+y^2+x^2y^2 = 1-2xy+x^2y^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-xy \ge 0 \\ \left(x+y\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \le 1 \\ x+y=0 \end{cases}.$$

Như vậy với cách 3 ta có thể tìm ra mối liên hệ giữa $\left(x;y\right)$ trong trường hợp không áp dụng được phương pháp hàm số hoặc nhân liên hợp. Ngoài ra dạng bài toán này có thể xử lý bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Trở lại bài toán.

Với $y=-x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$x\sqrt{3x+2x^2+1} = -4x^2+3x+1 \Rightarrow x^2\left(2x^2+3x+1\right) = \left(-4x^2+3x+1\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow 14x^4-27x^3-9x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow \left(2x^2-3x-1\right)\left(7x^2-3x-1\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{4} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{37}}{14} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{4}, y=-\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{4} \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{37}}{14}, y=-\dfrac{3\pm\sqrt{37}}{14} \end{array}\right..$$

Đối chiếu lại điều kiện chỉ nhận nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{3+\sqrt{37}}{14};-\dfrac{3+\sqrt{37}}{14}\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{3+\sqrt{37}}{14};-\dfrac{3+\sqrt{37}}{14}\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{4+y^2}\right)=1 \\ 100x^2+56xy+10y^2-39x-3y=18 \end{cases}$

Lời giải

Nhìn vào phương trình đầu của hệ tưởng chừng như ta liên hợp được và rút được x theo y tuy nhiên biểu thức trong căn của hai biểu thức sai khác nhau hằng số 1 và 4. Nên cách này không thực hiện được.

Ta thử đặt ẩn phụ cho hai biểu thức đó xem sao.

Đặt $\begin{cases} u = x + \sqrt{1+x^2} \\ v = y + \sqrt{4+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x^2} = u - x \\ \sqrt{4+y^2} = v - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u^2-1}{2u} \\ y = \dfrac{v^2-4}{2v} \end{cases}, \left(u \ge x, v \ge y\right)$.

Ta có: $u = x + \sqrt{x^2+1} > x + \sqrt{x^2} = |x| + x \ge 0; v = y + \sqrt{4+y^2} > y + \sqrt{y^2} = |y| + y \ge 0$

Do đó $u > 0, v > 0$.

Mặt khác $uv = 1 \Rightarrow y = \dfrac{\dfrac{1}{u^2} - 4}{\dfrac{2}{u}} = \dfrac{1-4u^2}{2u}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$100\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2 + 56.\frac{u^2-1}{2u}.\frac{1-4u^2}{2u} + 10\left(\frac{1-4u^2}{2u}\right)^2 - 39.\frac{u^2-1}{2u} - 3.\frac{1-4u^2}{2u} = 18$$

$$\Leftrightarrow 100\left(u^2-1\right)^2 + 56\left(u^2-1\right)\left(1-4u^2\right) + 10\left(1-4u^2\right)^2 - 78u\left(u^2-1\right) - 6u\left(1-4u^2\right) = 72u^2$$

$$\Leftrightarrow 36u^4 - 54u^3 - 72u^2 + 72u + 54 = 0 \Leftrightarrow (u+1)(2u-3)\left(2u-1-\sqrt{5}\right)\left(2u-1+\sqrt{5}\right) = 0$$

Đối chiếu với điều kiện nhận nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} u = \dfrac{3}{2} \\ u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = \dfrac{3}{2} \\ v = \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ v = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{3}{2} \\ y + \sqrt{4+y^2} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y + \sqrt{4+y^2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{5}{12} \\ y = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4} \end{cases} \end{array}\right.$$

(thỏa mãn điều kiện $x \le u, y \le v$).

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y) = \left(\dfrac{5}{12}; -\dfrac{8}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5+3\sqrt{5}}{4}\right)$.

<u>Cách 2:</u> Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ thành:

$$\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+4}\right) = 1 \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2+4} = \sqrt{x^2+1} - x.$$

$$\Leftrightarrow x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+4}\Rightarrow (x+y)^2=x^2+y^2+5-2\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}.$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+y^2+4+x^2y^2}=5-2xy\Leftrightarrow \begin{cases}5-2xy\ge 0\\ 4(4x^2+y^2+4)=25-20xy+4x^2y^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 16x^2+4y^2+20xy-9=0.$$

Vậy đưa bài toán về giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}16x^2+4y^2+20xy-9=0\\ 100x^2+56xy+10y^2-39x-3y=18\end{cases}.$$

Hệ này đã biết cách giải bằng phương pháp đưa về hệ đẳng cấp hoặc phương pháp hệ số bất định(giải xong cần thử lại vì phép bình phương đầu tiên là không tương đương). Hướng đi này rất tự nhiên đơn giản vì chỉ bình phương hai vế. Tuy nhiên lại đưa về một hệ tương đối phức tạp với các em không được rèn luyện giải dạng hệ phương trình cuối cũng như nếu vế phải của phương trình đầu khác 1 sau khi bình phương đưa về phương trình cuối phức tạp hơn cách 1 rất nhiều(Chi tiết xem chủ dề 1).

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-3}=y+\sqrt{y^2+3}\\ x^3-y^3=3x-3y+4\end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Điều kiện: $|x|\ge\sqrt{3}$.

Đặt $\begin{cases}u=x+\sqrt{x^2-3}\\ v=y+\sqrt{y^2+3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u\ge x, v\ge y\\ x=\dfrac{u^2+3}{2u}\\ y=\dfrac{v^2-3}{2v}\end{cases}.$

Từ phương trình đầu suy ra $u=v\Rightarrow y=\dfrac{u^2-3}{2u}\Rightarrow x-y=\dfrac{3}{u}$.

Phương trình thứ hai của hệ được biến đổi thành:

$$(x-y)(x^2+y^2+xy)=3(x-y)+4.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[(x-y)^2+3xy-3\right]=4\Leftrightarrow \frac{3}{u}\left(\frac{9}{u^2}+3.\frac{u^2+3}{2u}.\frac{u^2-3}{2u}-3\right)=4.$$

$\Leftrightarrow 9u^4 - 16u^3 - 36u^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow (u-3)(9u^3 + 11u^2 - 3u - 9) = 0$ (1).

Nếu $x \le 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 3} < x + |x| = x - x = 0$.

Mặt khác $y + \sqrt{y^2 + 3} > y + |y| \ge 0$ do đó vô lý.

Vậy $x > 0$ đối chiếu với $|x| \ge \sqrt{3} \Rightarrow x \ge \sqrt{3} \Rightarrow u \ge \sqrt{3} > 1$.

Khi đó $9u^3 + 11u^2 - 3u - 9 > 9.1^3 + 3u(u-1) + 8u^2 - 9 > 0$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow u = 3 \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 3} = 3 \\ y + \sqrt{y^2 + 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện $u \ge x, v \ge y$ thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) = (2;1)$.

Cách 2:

Biến đổi phương trình đầu của hệ thành:

$$x - y = \sqrt{y^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 3} \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{(x^2 - 3)(y^2 + 3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 3)(y^2 + 3)} = xy \Leftrightarrow \begin{cases} xy \ge 0 \\ (x^2 - 3)(y^2 + 3) = x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \ge 0 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}.$$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^3 - y^3 = 3(x-y) + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = 3 \\ (x-y)\left[\dfrac{3(x+y)^2 + (x-y)^2}{4}\right] = 3(x-y) + 4 \end{cases}.$$

Đặt $u = x + y, v = x - y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} uv = 3 \\ v\left(\dfrac{3u^2 + v^2}{4}\right) = 3v + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3 \\ v^4 - 12v^2 - 16v + 27 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3 \\ (v-1)(v^3 + v^2 - 11v - 27) = 0 \end{cases}.$$

Thực hiện đánh giá như cách 1 và thử lại nghiệm tìm được $(x;y) = (2;1)$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 3: Vì $x+\sqrt{x^2-3}=y+\sqrt{y^2+3}>0 \Rightarrow x\ge\sqrt{3}$.

Viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$\sqrt{x^2-3}+\sqrt{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2+3}=y+\sqrt{y^2+3}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+3}$, ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}=\dfrac{\sqrt{t^2+3}+t}{\sqrt{t^2+3}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+3}}\ge 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(y)=f\left(\sqrt{x^2-3}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2-3}$.

Khi đó đưa về giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^3-y^3=3(x-y)+4 \end{cases}$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\sqrt{x^4+1}=1-y^2+\sqrt{y^4-2y^2+2} \\ 4\sqrt{x^2+1}=x^2-y^3+3y+2 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với :

$$x^2+y^2-1+\sqrt{x^4+1}-\sqrt{\left(y^2-1\right)^2+1}=0\Leftrightarrow x^2+y^2=1.$$

Từ $x^2+y^2=1\Rightarrow -1\le x,y\le 1$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng:

$$4\sqrt{x^2+1}-x^2+y^3-3y-2=0.$$

Ta có: $4\sqrt{x^2+1}-x^2=\dfrac{4x^2+4-x^4}{4\sqrt{x^2+1}+x^2}=\dfrac{4+x^2\left(4-x^2\right)}{4\sqrt{x^2+1}+x^2}\ge 4,\forall x\in[-1;1]$.

Mặt khác: $y^3-3y-2+4=y^3-3y+2=(y-1)^2(y+2)\ge 0,\forall y\in[-1;1]$.

Suy ra $4\sqrt{x^2+1}-x^2+y^3-3y-2\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=0, y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}+y\right)\left(\sqrt{y^2+1}+x\right)=1\\ \sqrt{3x^3+2y^2+2}+\sqrt{3y^3+x^2+2x-1}=2\left(y^2+x+1\right)\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases}3x^3+2y^2+2\ge 0\\ 3y^3+x^2+2x-1\ge 0\end{cases}$.

<u>Nhận xét.</u> Nhìn vào hai phương trình việc tìm ra mối ràng buộc giữa hai ẩn từ phương trình đầu đơn giản hơn. Vậy ta tập trung vào nó.

Đặt $\begin{cases}u=x+\sqrt{1+x^2}\\ v=y+\sqrt{1+y^2}\end{cases},(u,v>0)\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u^2-1}{2u}\\ \sqrt{x^2+1}=u-\dfrac{u^2-1}{2u}=\dfrac{u^2+1}{2u}\\ y=\dfrac{v^2-1}{2v}\\ \sqrt{y^2+1}=\dfrac{v^2+1}{2v}\end{cases}$.

Khi đó phương trình đầu tiên viết lại thành :

$$\left(\frac{u^2+1}{2u}+\frac{v^2-1}{2v}\right)\left(\frac{v^2+1}{2v}+\frac{u^2-1}{2u}\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}uv=1\\ uv\left(u+v\right)^2+\left(u-v\right)^2=0\end{array}\right..$$

Nhưng do $uv\left(u+v\right)^2+\left(u-v\right)^2>0,\forall u,v>0$ nên $uv=1$.

Vậy ta có: $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{1+y^2}$.

Là một phương trình quen thuộc ta nhân liên hợp hoặc sử dụng hàm số suy ra $x=-y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2\left(x^2+x+1\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}\le\frac{3x^3+2x^2+2+1}{2}+\frac{-3x^3+x^2+2x-1+1}{2}$$

$$=\frac{3x^2+2x+3}{2}=2\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{2}\left(x+1\right)^2\le 2\left(x^2+x+1\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 3x^3+2x^2+2=1 \\ -3x^3+x^2+2x-1=1 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=1$.

Thử lại thấy thỏa mãn điều kiện.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;1)$.

Nhận xét. Như vậy mấu chốt của bài toán là đẳng thức sau :

$$\begin{aligned} &\left(x+\sqrt{y^2+1}\right)\left(y+\sqrt{x^2+1}\right)=1 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow x=-y \end{aligned}.$$

Để kết thúc bài toán xoay quanh đẳng thức trên ta xét bài toán sau:

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=2 \\ x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}=3 \end{cases}$

Lời giải

<u>Nhận xét.</u> Bài toán trên tôi đưa lên một diễn đàn toán và nhận được nhiều phản hồi và các hướng xử lý đẹp mắt cho hệ phương trình dưới đây tôi trình bày các cách tiếp cận khác nhau hệ phương trình trên và có thể tổng quát được hệ lặp nhiều ẩn.

Đặt $\begin{cases} u=x+\sqrt{1+x^2} \\ v=y+\sqrt{1+y^2} \end{cases},(u,v>0) \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u^2-1}{2u} \\ \sqrt{x^2+1}=u-\dfrac{u^2-1}{2u}=\dfrac{u^2+1}{2u} \\ y=\dfrac{v^2-1}{2v} \\ \sqrt{y^2+1}=\dfrac{v^2+1}{2v} \end{cases}$.

Hệ phương trình trở thành : $\begin{cases} \dfrac{u^2-1}{2u}.\dfrac{v^2+1}{2v}+\dfrac{v^2-1}{2v}.\dfrac{u^2+1}{2u}=2 \\ \dfrac{u^2-1}{2u}.\dfrac{u^2+1}{2u}+\dfrac{v^2-1}{2v}.\dfrac{v^2+1}{2v}=3 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(u^2-1\right)\left(v^2+1\right)+\left(v^2-1\right)\left(u^2+1\right)=8uv \\ v^2\left(u^4-1\right)+u^2\left(v^4-1\right)=12u^2v^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2v^2-2=8uv \\ \left(\left(u+v\right)^2-2uv\right)\left(u^2v^2-1\right)=12u^2v^2 \end{cases} \xleftrightarrow{u,v>0} \begin{cases} uv=2+\sqrt{5} \\ u+v=\sqrt{5\left(2+\sqrt{5}\right)} \end{cases}.$$

Đây là hệ đối xứng loại I dễ tìm được:

$$\left[\begin{array}{l} u=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.\sqrt{2+\sqrt{5}},v=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.\sqrt{2+\sqrt{5}} \\ u=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}.\sqrt{2+\sqrt{5}},v=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}.\sqrt{2+\sqrt{5}} \end{array}\right..$$

Thay ngược lại ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2};\frac{4+\sqrt{5}}{2}.\sqrt{\sqrt{5}-2}\right);\left(\frac{\sqrt{5\sqrt{5}-2}}{2};\frac{4-\sqrt{5}}{22}.\sqrt{5\sqrt{5}-2}\right).$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2};\frac{4+\sqrt{5}}{2}.\sqrt{\sqrt{5}-2}\right);\left(\frac{\sqrt{5\sqrt{5}-2}}{2};\frac{4-\sqrt{5}}{22}.\sqrt{5\sqrt{5}-2}\right).$$

<u>Nhận xét:</u>. Nếu hệ có dạng đối xứng tức $\begin{cases} x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=2 \\ x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}=2 \end{cases}$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(x-y\right)\left(\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}\right)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=-y \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay ngược lại hệ phương trình ta có kết quả bài toán. Tuy nhiên với hệ mà có dạng không đối xứng như bài toán trên ta có thực hiện được cách trên hay không. Ta quay trở lại bài toán bằng các cách xử lý khác sau đây.

<u>Cách 2 :</u>

Đặt $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ y=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right) \end{cases},(a,b>0)\Rightarrow\begin{cases} x^2+1=\frac{1}{4}\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right)+1=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 \\ y^2+1=\frac{1}{4}\left(b^2-2+\frac{1}{b^2}\right)+1=\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \end{cases}$

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right).\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)=2 \\ \frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right).\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)=3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \left(a^2-1\right)\left(b^2+1\right)+\left(b^2-1\right)\left(a^2+1\right)=8ab \\ b^2\left(a^4-1\right)+a^2\left(b^4-1\right)=12a^2b^2 \end{cases}.$$

Đây là một hệ phương trình tương tự cách 1 trình bày ở trên.

Cách 3 : Đặt $a_1=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2},a_2=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2},b_1=x+y,b_2=x-y$

Suy ra $a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2=4;a_1a_2=b_1b_2$.

Cộng trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{cases} (x+y)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\right)=5 \\ (x-y)\left(\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1-x^2}\right)=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_1b_1=5 \\ a_2b_2=1 \\ b_1>0 \end{cases}.$$

Vậy ta có hệ phương trình : $\begin{cases} a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2=4 \\ a_1a_2=b_1b_2 \\ a_1b_1=5 \\ a_2b_2=1 \end{cases}$.

Ta có: $a_1^2a_2^2=b_1^2b_2^2=a_1a_2b_1b_2=5\Rightarrow b_2^2=\frac{5}{b_1^2},a_1^2=\frac{25}{b_1^2},a_2^2=\frac{1}{b_2^2}=\frac{b_1^2}{5}$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được :

$$\frac{25}{b_1^2}+\frac{b_1^2}{5}-b_1^2-\frac{5}{b_1^2}=4\Leftrightarrow b_1^4+5b_1^2-25\Leftrightarrow b_1=\sqrt{\frac{5\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}}\Rightarrow b_2=\pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}$$

Mọi thứ trở nên đơn giản rồi.

Cách 4 : Theo trên ta có $\begin{cases}(x+y)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}\right)=5\\(x-y)\left(\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1-x^2}\right)=-1\end{cases}$.

Nhân theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(x^2-y^2\right)\left(y^2-x^2\right)=-5\Leftrightarrow\left(x^2-y^2\right)^2=5.$$

Đặt $\begin{cases}u=x\sqrt{1+y^2}\\v=y\sqrt{1+x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u+v=2\\\left(u^2-v^2\right)^2=\left(x^2\left(1+y^2\right)-y^2\left(1+x^2\right)\right)^2=\left(x^2-y^2\right)^2=5\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\\(u+v)^2(u-v)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\\\left[\begin{array}{l}u-v=-\dfrac{\sqrt5}{2}\\u-v=\dfrac{\sqrt5}{2}\end{array}\right.\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\dfrac{4-\sqrt5}{4},v=\dfrac{4+\sqrt5}{4}\\u=\dfrac{4+\sqrt5}{4},v=\dfrac{4-\sqrt5}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\sqrt{1+y^2}=\dfrac{4-\sqrt5}{4}\\y\sqrt{1+x^2}=\dfrac{4+\sqrt5}{4}\end{cases}\\\begin{cases}x\sqrt{1+y^2}=\dfrac{4+\sqrt5}{4}\\y\sqrt{1+x^2}=\dfrac{4-\sqrt5}{4}\end{cases}\end{array}\right..$$

Hệ phương trình cuối là hệ đối xứng loại II đã biết cách giải.

Tổng quát: $\begin{cases}x_1\sqrt{1+x_2^2}+x_2\sqrt{1+x_3^2}=a_1\\x_2\sqrt{1+x_3^2}+x_3\sqrt{1+x_4^2}=a_2\\\ldots\\x_n\sqrt{1+x_1^2}+x_1\sqrt{1+x_1^2}=a_n\end{cases},\left(a_k>0,k=1,2,...,n\right)$ (xem chương 3).

Nhận xét. Với phép đặt ẩn phụ như trên ta xử lý toàn bộ những hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_1x+b_1\sqrt{a^2x^2+b}+c_1y+d_1\sqrt{c^2y^2+d}=e \\ a_2x+b_2\sqrt{a^2x^2+b}+c_2y+d_2\sqrt{c^2y^2+d}=f \end{cases}.$$

Bằng phép đặt ẩn phụ $\begin{cases} u=ax+\sqrt{a^2x^2+b} \\ v=cy+\sqrt{c^2y^2+d} \end{cases}$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2}=3 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận xét. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta thấy hệ có nghiệm khi

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}>0 \Leftrightarrow y>0 \Rightarrow x\ge y>0.$$

Khi đó bình phương hai vế phương trình thứ nhất ta được:

$$2x-2\sqrt{x^2-y^2}=4 \Leftrightarrow x-2=\sqrt{x^2-y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ (x-2)^2=x^2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ y^2=4x-4 \end{cases}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2+4x-4+1}-(x-2)=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x-3}=x+1 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Cách 2: Ta có thể đặt:

$$\begin{cases} u=\sqrt{x+y} \\ v=\sqrt{x-y} \end{cases},(u\ge 0, v\ge 0) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=uv \\ u^4+v^4=(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2) \end{cases}.$$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u-v=2 \\ \sqrt{\dfrac{u^4+v^4}{2}+1}-uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ \sqrt{\dfrac{\left[(u-v)^2+2uv\right]^2-2u^2v^2}{2}+1}=uv+3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ \sqrt{2(2+uv)^2-2u^2v^2+1}=uv+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ \sqrt{8uv+9}=uv+3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ u^2v^2+uv=0 \end{cases} \xleftrightarrow{uv\ge 0} \begin{cases} u-v=2 \\ uv=0 \end{cases} \xleftrightarrow{u\ge 0, v\ge 0} \begin{cases} u=2 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2+(y^2-y-1)\sqrt{x^2+2}=y^3-y \ (1) \\ 2x+xy+2+(x+2)\sqrt{y^2+4x+4}=0 \ (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $y^2+4x+4\ge 0$.

Nhận thấy nhân tử $\sqrt{x^2+2}$ lặp lại ở phương trình (1) làm ta suy nghĩ đến phương trình bậc hai phụ thuộc tham số.

Đặt $t=\sqrt{x^2+2}\ge\sqrt{2}$ khi đó (1) trở thành:

$t^2+(y^2-y-1)t-y^3+y=0$.

Coi đây là phương trình bậc hai ẩn t phụ thuộc tham số y, ta có:

$\Delta_t=(y^2-y-1)^2-4(-y^3+y)=(y^2+y-1)^2$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-(y^2-y-1)+y^2+y-1}{2}=y \\ t=\dfrac{-(y^2-y-1)-(y^2+y-1)}{2}=-y^2+1 \end{array}\right.$.

Do $t\ge\sqrt{2}$ nên $t=y\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+2}$ khi đó đưa về giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y=\sqrt{x^2+2} \\ 2x+xy+2+(x+2)\sqrt{y^2+4x+4}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=\sqrt{x^2+2} \\ 2x+x\sqrt{x^2+2}+2+(x+2)\sqrt{x^2+4x+6}=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y=\sqrt{x^2+2} \\ (x+2)\left(1+\sqrt{(x+2)^2+2}\right)=-x\left(1+\sqrt{(-x)^2+2}\right) \ (3) \end{cases}.$$

Phương trình (3) có dạng hàm đặc trưng nên lựa chọn phương pháp hàm số:

Xét hàm số $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+2}\right)$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t)=1+\sqrt{t^2+2}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(3)\Leftrightarrow f(x+2)=f(-x)\Leftrightarrow x+2=-x\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=\sqrt{3}$.

Đối chiếu với điều kiện thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-1;\sqrt{3}\right)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-5\sqrt{x}+5=0 \\ \sqrt{x+2}=\sqrt{y^2+2y+3}-\dfrac{1}{5}y^2+y \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $x\ge 0$.

Khi đó viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} y^2-5\sqrt{x}+5=0 \qquad (1) \\ 5\sqrt{y^2+2y+3}-y^2+5y-5\sqrt{x+2}=0 \qquad (2) \end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)$ theo vế ta được :

$$5\sqrt{y^2+2y+3}+5y+5-5\sqrt{x}-5\sqrt{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2+2}+y+1=\sqrt{x}+\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2+2} \qquad (3)$$

Phương trình (3) có dạng hàm đặc trưng nên lựa chọn phương pháp hàm số.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+2}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}}=\dfrac{\sqrt{t^2+2}+t}{\sqrt{t^2+2}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{t^2+2}}\ge 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(3)\Leftrightarrow f(\sqrt{x})=f\left(y+1\right)\Leftrightarrow \sqrt{x}=y+1$.

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được :

$y^2-5\left(y+1\right)+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=5 \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,y=0 \\ x=36,y=5 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0);(36;5)$.

<u>**Nhận xét.**</u> Có thể dùng phương pháp thế để giải.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x + 1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x \ge -\frac{1}{2}, y \ge 2$.

Khi đó viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$2(2x+1)^3 + 2x + 1 = 2\left(\sqrt{y-2}\right)^3 + y - 2 \ (1).$$

Phương trình (1) có dạng hàm đặc trưng nên sử dụng hàm số.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$, ta có :

$f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(2x+1) = f\left(\sqrt{y-2}\right) \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt{y-2}$.

Thay vào phương trình thứ hai ta được :

$\sqrt{2\sqrt{y-2}} + \sqrt{2y+4} = 6 \Leftrightarrow \sqrt[4]{4y-8} + \sqrt{2y+4} = 6$.

Hàm số $g(y) = \sqrt[4]{4y-8} + \sqrt{2y+4}$ đồng biến trên $[2;+\infty)$ mặt khác $g(6) = 6$.

Do đó phương trình trên có nghiệm duy nhất $y = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{1}{2};6\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+y^2+y+3} - 3\sqrt{y} = \sqrt{x+2} \\ y^3 + y^2 - 3y - 5 = 3x - 3\sqrt[3]{x+2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -2 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$2\sqrt{x+y^2+y+3} = \sqrt{x+2} + 3\sqrt{y}.$$

Ta có:

$2\sqrt{x+y^2+y+3} = 2\sqrt{x+2+(y-1)^2+3y} \ge 2\sqrt{x+2+3y} \ge \sqrt{x+2} + 3\sqrt{y}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y=1 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3y}}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$.

Thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;1)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-2)(2y-1)=x^3+20y-28 \\ 2\left(\sqrt{x+2y}+y\right)=x^2+x \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+2y\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ được viết lại:

$$x+2y+2\sqrt{x+2y}+1=x^2+2x+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2y}+1\right)^2=(x+1)^2.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2y}+1=x+1 \\ \sqrt{x+2y}+1=-x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2y}=x \\ \sqrt{x+2y}=-2-x \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $\sqrt{x+2y}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x+2y=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2y=x^2-x \end{cases}$.

Thế vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$(x-2)\left(x^2-x-1\right)=x^3+10\left(x^2-x\right)-28.$$

$$\Leftrightarrow 13x^2-11x-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\dfrac{15}{13} \end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện chỉ nhận nghiệm $x=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (x;y)=(2;1)$.

<u>TH2:</u> Nếu $\sqrt{x+2y}=-2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -2 \\ x+2y=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -2 \\ 2y=x^2+3x+4 \end{cases}$.

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$(x-2)\left(x^2+3x+4-1\right)=x^3+10\left(x^2+3x+4\right)-28.$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+33x+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm:

$$x=-\frac{2}{3}\Rightarrow y=\frac{11}{9}\Rightarrow (x;y)=\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{9}\right).$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;1);\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{9}\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=4\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2\end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Để phương trình có nghiệm ta phải có:

$\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}>0\Leftrightarrow x+y>x-y\Leftrightarrow y>0$.

Khi đó điều kiện của hệ phương trình là: $x\geq y>0$.

<u>**Cách 1:**</u> Biến đổi tương đương

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}2x^2+2\sqrt{x^4-y^4}=16\\ 2x-2\sqrt{x^2-y^2}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^4-y^4}=8-x^2\\ \sqrt{x^2-y^2}=x-2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\geq 0,8-x^2\geq 0\\ x^4-y^4=\left(8-x^2\right)^2\\ x^2-y^2=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq x\leq 2\sqrt{2}\\ y^4=16x^2-64\\ y^2=4x-4\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq x\leq 2\sqrt{2}\\ 16x^2-64=(4x-4)^2\\ y^2=4x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq x\leq 2\sqrt{2}\\ x=\dfrac{5}{2}\\ y=\pm\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=\pm\sqrt{6}\end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $(x;y)=\left(\frac{5}{2};\sqrt{6}\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{5}{2};\sqrt{6}\right)$.

Cách 2: Bình phương hai vế của phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=4\\ x-\sqrt{x^2-y^2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\sqrt{x^2+y^2}=6\\ x-\sqrt{x^2-y^2}=2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+\sqrt{x^2+y^2}=6\\ x-\sqrt{x^2-y^2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6-x\ge 0, x-2\ge 0\\ x^2+y^2=\left(6-x\right)^2\\ x^2-y^2=\left(x-2\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=\pm\sqrt{6}\end{cases}.$$

Đối chiếu lại điều kiện suy ra $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{5}{2};\sqrt{6}\right)$.

Cách 3: Đặt ẩn phụ

Nhận thấy có sự lặp lại của hai căn thức $\sqrt{x+y},\sqrt{x-y}$ nên ta đặt ẩn phụ như sau:

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x+y}\\ v=\sqrt{x-y}\end{cases},\left(u>0,v\ge 0\right)\Rightarrow\begin{cases}uv=\sqrt{x^2-y^2}\\ \sqrt{\dfrac{u^4+v^4}{2}}=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}.$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{u^4+v^4}{2}}+uv=4\\ u-v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{\dfrac{u^4+\left(u-2\right)^4}{2}}+u\left(u-2\right)=4\\ v=u-2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4+2u-u^2\ge 0\\ \dfrac{u^4+\left(u-2\right)^4}{2}=\left(4+2u-u^2\right)^2\\ v=u-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\\ v=\sqrt{\dfrac{3}{2}}-1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+y}=1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\\ \sqrt{x-y}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{2}\\ x-y=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=\sqrt{6}\end{cases}.$$

Cách 4:

Nhận thấy vế trái phương trình thứ nhất có bậc 1, vế trái phương trình thứ hai của hệ dạng bậc $\frac{1}{2}$ nên ta đưa về phương trình đẳng cấp như sau:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=2x-2\sqrt{x^2-y^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}+3\sqrt{x^2-y^2}=2x \Leftrightarrow x^2+y^2+9\left(x^2-y^2\right)+6\sqrt{x^4-y^4}=4x^2.$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^4-y^4}=4y^2-3x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2-3x^2\ge 0 \\ 9\left(x^4-y^4\right)=9x^4-24x^2y^2+16y^4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2-3x^2\ge 0 \\ y^2\left(25y^2-24x^2\right)=0 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $y=\frac{2\sqrt{6}}{5}x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x+\frac{2\sqrt{6}}{5}x}-\sqrt{x-\frac{2\sqrt{6}}{5}x}=2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow y=\sqrt{6}.$$

Hoặc đơn giản ta đặt $x=ty, t\ge 1$.

Cách 5: Lượng giác hóa:

Đặt $x=R\sin\alpha, y=R\cos\alpha, \left(\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right), R=\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{R}\left(\sqrt{\sin\alpha+\cos\alpha}-\sqrt{\sin\alpha-\cos\alpha}\right)=2 \\ R\left(1+\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\right)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{\sin\alpha+\cos\alpha}-\sqrt{\sin\alpha-\cos\alpha}\right)^2=1+\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} \\ R\left(1+\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\right)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2\sin^2\alpha - 1} = 2\sin\alpha - 1 \\ R\left(1+\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\alpha - 1 \ge 0 \\ 9\left(2\sin^2\alpha - 1\right) = \left(2\sin\alpha - 1\right)^2 \\ R\left(1+\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}\right) = 4 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{5}{7}, \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{7} \\ R\left(1+\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{5}{7}, \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{7} \\ R = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \sqrt{6} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(x;y\right) = \left(\dfrac{5}{2};\sqrt{6}\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^6 - y^3 + x^2 - 9y^2 - 30 = 28y \\ \sqrt{2x+3} + x = y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{3}{2}$.

Phương trình đầu của hệ được viết lại dưới dạng:

$$x^6 + x^2 = y^3 + 9y^2 + 28y + 30 \Leftrightarrow x^2\left(x^4+1\right) = \left(y+3\right)\left[\left(y+3\right)^2+1\right] \ (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t(t^2+1)$ trên $\mathbb{R}$, ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(x^2) = f(y+3) \Leftrightarrow x^2 = y+3 \Leftrightarrow y = x^2 - 3$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{2x+3} + x = x^2 - 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x^2 - x - 3.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 \ge 0 \\ 2x+3 = \left(x^2 - x - 3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 \ge 0 \\ x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 \ge 0 \\ \left(x-3\right)\left(x+1\right)\left(x^2-2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, y = 6 \\ x = \sqrt{2}, y = -1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(-3;6\right), \left(-\sqrt{2};-1\right)$.

Nhận xét. Phương trình vô tỷ cuối có dạng cơ bản nên phép bình phương hai vế là tự nhiên ngoài ra có thể đặt ẩn phụ $t=\sqrt{2x+3}$ hoặc viết lại dưới dạng:

$$\left(\sqrt{2x+3}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x+3}+\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x+3}+\frac{1}{2}=-x-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=-\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y\left(x-y\sqrt{1-x^2}\right)+y^3=(x+1)\sqrt{1-x^2}-y\\ x^3+\left(1-x^2\right)y=\sqrt{2}xy\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $-1\le x\le 1$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ được viết lại dưới dạng:

$$\left(y-\sqrt{1-x^2}\right)\left(x+1+y^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y^2+x+1=0\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y^2+x+1=0\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=-1\end{cases}$ thử lại thấy không thỏa mãn.

<u>TH2:</u> Nếu $y=\sqrt{1-x^2}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$x^3+\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{2\left(1-x^2\right)}.$$

Để giải phương trình này ta có thể quy về giải hệ phương trình hoặc đặt ẩn phụ:

<u>Cách 1:</u> Nhận thấy $x=\pm 1$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $x\ne\pm 1$ khi đó viết lại phương trình dưới dạng:

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^3-\sqrt{2\left(\frac{x^2}{1-x^2}+1\right)}.\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1=0.$$

Đặt $t=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ phương trình trở thành:

$$t^3-t\sqrt{2\left(t^2+1\right)}+1=0\Leftrightarrow t^3+1=t\sqrt{2\left(t^2+1\right)}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\left(t^3+1\right) \geq 0 \\ t^6+2t^3+1=2t^2\left(t^2+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 0 \\ t \leq -1 \end{array}\right. \\ t^6-2t^4+2t^3-2t^2+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 0 \\ t \leq -1 \end{array}\right. \\ \left(t-1\right)^2\left(t^4+2t^3+t^2+2t+1\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 0 \\ t \leq -1 \end{array}\right. \\ \left(t-1\right)^2\left(t^2+\left(1+\sqrt{2}\right)t+1\right)\left(t^2+\left(1-\sqrt{2}\right)t+1\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \end{array}\right.$$

Đáp số: $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2};\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right)$

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u=x \\ v=\sqrt{1-x^2} \end{cases},\left(u\in\left[-1;1\right],v\in\left[0;1\right]\right)$.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3+v^3=\sqrt{2}uv \\ u^2+v^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u+v\right)\left(u^2+v^2-uv\right)=\sqrt{2}uv \\ \left(u+v\right)^2-2uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u+v\right)\left(1-uv\right)=\sqrt{2}uv \\ \left(u+v\right)^2-2uv=1 \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại I đã biết cách giải:

Đặt $\begin{cases} S=u+v \\ P=uv \end{cases},\left(S^2\geq 4P\right)$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S\left(1-P\right)=\sqrt{2}P \\ S^2-2P=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S\left(1-\dfrac{S^2-1}{2}\right)=\sqrt{2}.\dfrac{S^2-1}{2} \\ S^2-2P=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(S-\sqrt{2}\right)\left(S^2+2\sqrt{2}S+1\right)=0\\ S^2-2P=1\end{cases}\xleftrightarrow{S^2\ge 4P}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}S=\sqrt{2}\\ P=\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}S=1-\sqrt{2}\\ P=1-\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u+v=\sqrt{2}\\ uv=\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}u+v=1-\sqrt{2}\\ uv=1-\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right.\xleftrightarrow{u\in\left[-1[1\right],v\in\left[0;1\right]}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ v=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}u=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\\ v=\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2};\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right).$$

Bài 25. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(23-3x\right)\sqrt{7-x}+\left(3y-20\right)\sqrt{6-y}=0 & (1)\\ \sqrt{2x+y+2}-\sqrt{-3x+2y+8}+3x^2-14x-8=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}7-x\ge 0\\ 6-y\ge 0\\ 2x+y+2\ge 0\\ -3x+2y+8\ge 0\end{cases}$

Để ý phương trình đầu của hệ ta viết lại dưới dạng:

$$\left[3\left(7-x\right)+2\right]\sqrt{7-x}=\left[3\left(6-y\right)+2\right]\sqrt{6-y} \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t)=\left(3t^4+2\right)t$, ta có: $f'(t)=3t^4+2+12t^4>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $(3)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{7-x}\right)=f\left(\sqrt{6-y}\right)\Leftrightarrow\sqrt{7-x}=\sqrt{6-y}\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{-x+6}+3x^2-14x-8=0.$$

Suy ra $-\frac{1}{3}\le x\le 6$.

Phương trình cuối là phương trình vô tỷ nhẩm được nghiệm $x_0=5$ ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp:

$$\Leftrightarrow\frac{3\left(x-5\right)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{\sqrt{-x+6}+1}+3\left(x-5\right)\left(x+\frac{11}{15}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x-5\right)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{-x+6}+1}+3\left(x+\frac{11}{15}\right)\right]=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{-x+6}+1}+3\left(x+\dfrac{11}{15}\right)=0\end{array}\right..$$

Do $-\frac{1}{3}\le x\le 6\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{-x+6}+1}+3\left(x+\frac{11}{15}\right)>0$.

Do đó phương trình trên chỉ có nghiệm $x=5\Rightarrow y=4$. Đối chiếu lại điều kiện thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(5;4\right)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}y^3+\left(y^2-2x-4\right)\sqrt{x+2}=0 & (1)\\ \left(4y^2-7\right)\sqrt{x+2}-\left(4x-1\right)\sqrt{y^2-4}=21 & (2)\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $x\ge-2,\left|y\right|\ge 2$.

Khi đó phương trình $(1) \Leftrightarrow y^3 + y^2\sqrt{x+2} - 2\left(\sqrt{x+2}\right)^3 = 0$.

$\Leftrightarrow \left(y - \sqrt{x+2}\right)\left(y^2 + 2y\sqrt{x+2} + 2x + 4\right) = 0$.

$\Leftrightarrow \left(y - \sqrt{x+2}\right)\left[\left(y + \sqrt{x+2}\right)^2 + x + 2\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{x+2} \\ \left(y + \sqrt{x+2}\right)^2 + x + 2 = 0 \end{array}\right.$.

TH1: Nếu $\left(y + \sqrt{x+2}\right)^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ y + \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ đối chiếu với điều kiện thấy không thỏa mãn.

TH2: Nếu $y = \sqrt{x+2}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$(4x+1)\sqrt{x+2} - (4x-1)\sqrt{x-2} = 21 \qquad (3)$.

Để giải phương trình (3) ta sử dụng phương pháp đưa về hệ tạm như sau:

$$\begin{cases} (4x+1)\sqrt{x+2} - (4x-1)\sqrt{x-2} = 21 \\ (4x+1)^2(x+2) - (4x-1)^2(x-2) = 4\left(20x^2+1\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4x+1)\sqrt{x+2} - (4x-1)\sqrt{x-2} = 21 \\ (4x+1)\sqrt{x+2} + (4x-1)\sqrt{x-2} = \dfrac{4}{21}\left(20x^2+1\right) \end{cases}.$$

Suy ra: $42(4x+1)\sqrt{x+2} = 80x^2 + 445$.

Để giải phương trình cuối bình phương hai vế hoặc đặt $t = \sqrt{x+2}$ ta tìm được nghiệm $x = \dfrac{17}{4} \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{17}{4}; \dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3(x+y)} \\ \sqrt{5x^3 - 1} - \sqrt[3]{2y} + x = 4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x \ge \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}, x + y \ge 0$.

Phương trình thứ hai không rút ra được gì ta đi xử lý phương trình đầu của hệ có nhân tử chung $x+y$.

Viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$1-4(x+y)^2=\sqrt{3(x+y)}-\sqrt{x+y+1}.$$

$$\Leftrightarrow [1-2(x+y)].[1+2(x+y)]=\frac{2(x+y)-1}{\sqrt{3(x+y)}+\sqrt{x+y+1}}.$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{3(x+y)}+\sqrt{x+y+1}}+1+2x+2y\right)=0.$$

$\Leftrightarrow 2x+2y-1=0$ (do $x+y\ge 0$).

Suy ra $2y=1-2x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{5x^3-1}-\sqrt[3]{1-2x}+x=4.$$

Vế trái là một hàm đồng biến nên phương trình trên nếu có nghiệm thì đó là duy nhất.

Nhận thấy $x=1$ thỏa mãn phương trình.

Suy ra $(x;y)=\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=3\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=4\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y>0, x-y>0$.

Nhân theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(\sqrt{x+y}\right)^2-\left(\sqrt{x-y}\right)^2=3\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.4\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\Leftrightarrow 2y=12\Leftrightarrow y=6.$$

Khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}=3\sqrt{\dfrac{x+6}{x-6}} & (1)\\ \sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}=4\sqrt{\dfrac{x-6}{x+6}} & (2)\end{cases}$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}-3\sqrt{\frac{x+6}{x-6}}$.

Đây là một hàm đồng biến trên $(6;+\infty)$ nên phương trình nếu có nghiệm đó là nghiệm duy nhất.

Nhận thấy $f(10)=0$ vậy (1) có nghiệm duy nhất $x=6$ thử lại vào (2) thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(10;6)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x^2+1}-1=x\left(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}\right)\\ x(x-2)+(y-1)^4=2xy(y-2)\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y\ge 1$.

Khi đó phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\frac{2x}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x\left(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}\right)=\sqrt{2x^2+1}+1\end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $x=0$ thay vào hệ ta được $y=1\Rightarrow(x;y)=(0;1)$.

<u>TH2:</u> Nếu $\sqrt{2x^2+1}+1=x\left(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}\right)$.

Cộng theo vế với phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{2x^2+1}=x\sqrt{y+1}\Rightarrow y=\frac{x^2+1}{x^2}.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x(x-2)+\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)^4=2x.\frac{x^2+1}{x^2}\left(\frac{x^2+1}{x^2}-2\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(x^5-1\right)^8=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=2.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;1);(1;2)$.

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2, y\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3-3x^2+2=y\sqrt{y+3} \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3-3(x-1)=\left(\sqrt{y+3}\right)^3-3\sqrt{y+3} \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases}$$

Phương trình (1) có dạng phương trình đặc trưng nên xét hàm số.

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên $[1;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=3\left(t^2-1\right)\ge 0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt{y+3}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt{y+3}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x-1=\sqrt{y+3} \\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=y+3 \\ 9(x-2)=y^2+8y \end{cases} \xleftrightarrow{x\ge 2, y\ge 0} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;1)$.

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y+1)^2+y\sqrt{y^2+1}=x+\dfrac{3}{2} \\ x+\sqrt{x^2-2x+5}=1+2\sqrt{2x-4y+2} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $x-2y+1\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2=2(x-2y+1) \\ \left(x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}\right)^2=8(x-2y+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2 = 2\left(x-2y+1\right) \\ \left(x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}\right)^2 = 4\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2 = 2\left(x-2y+1\right) \\ \left[\begin{array}{l} x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4} = 2y+2\sqrt{y^2+1} \\ x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4} = -2y-2\sqrt{y^2+1} \end{array}\right. \end{cases}$$

Do $x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4} > x-1+\left|x-1\right| \geq 0$ và $-2\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) < 0$ nên:

$$x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4} > -2y-2\sqrt{y^2+1}.$$

Vì vậy hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2 = 2\left(x-2y+1\right) \\ x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4} = 2y+2\sqrt{y^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2 = 2\left(x-2y+1\right) \\ x-1-2y+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}-2\sqrt{y^2+1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2 = 2\left(x-2y+1\right) \\ x-1-2y+\dfrac{\left(x-1-2y\right)\left(x-1+2y\right)}{\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}+2\sqrt{y^2+1}} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2 = 2\left(x-2y+1\right) \\ \left(x-1-2y\right)\left(1+\dfrac{x+2y-1}{\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}+2\sqrt{y^2+1}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2 = 2\left(x-2y+1\right) \\ x-1-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2 = 4 \\ x-1-2y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y^2+1}+y=2 \\ x-1-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{4} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{5x-y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{2x-4y} \\ x\left(10y-x\right)+x+y^2-11=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $5x-y\ge 0, x-y\ge 0, 2x-4y\ge 0$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{5x-y}=\sqrt{x-y}+\sqrt{2x-4y} \Leftrightarrow 5x-y=3x-5y+2\sqrt{\left(x-y\right)\left(2x-4y\right)}$$

$$\Leftrightarrow x+2y=\sqrt{\left(x-y\right)\left(2x-4y\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y\ge 0 \\ x^2+4xy+4y^2=\left(x-y\right)\left(2x-4y\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=10y \end{array}\right. \end{cases}.$$

<u>TH1:</u> Nếu $x=0\Rightarrow y=0$ thử lại thấy không thỏa mãn.

<u>TH2:</u> Nếu $x=10y$ suy ra $x\ge y\ge 0$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$10y+y^2-11=0 \Leftrightarrow \left(y-1\right)\left(y+11\right)=0 \xleftrightarrow{y\ge 0} y=1\Rightarrow x=10$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(10;1\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+3y}+\sqrt{3x+y}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2y} \\ \sqrt{2x-1}+y^2-3x+1=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge \dfrac{1}{2}, x+3y\ge 0, 3x+y\ge 0, x+y\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{x+3y}-2\sqrt{x}=\sqrt{2x+2y}-\sqrt{3x+y}$$

$$\Rightarrow 5x+3y-4\sqrt{x\left(x+3y\right)}=5x+3y-2\sqrt{2\left(x+y\right)\left(3x+y\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x\left(x+3y\right)}=\sqrt{2\left(x+y\right)\left(3x+y\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(x+3y\right)=\left(x+y\right)\left(3x+y\right)\Leftrightarrow \left(x-y\right)^2=0\Leftrightarrow x=y$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=3x-x^2-1\Leftrightarrow \begin{cases}3x-x^2-1\ge 0\\ 2x-1=\left(3x-x^2-1\right)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-x^2-1\ge 0\\ \left(x-1\right)^2\left(x^2-4x+2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2-\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,y=1\\ x=2-\sqrt{2},y=2-\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+\sqrt{x^2+y^2-4xy}=3\sqrt{xy}\\ 2x\left(x-6y\right)+x^2+y^2=1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+y^2-4y\ge 0,\sqrt{xy}\ge 0$.

Nếu $y=0\Rightarrow \begin{cases}x+\sqrt{x^2}=0\\ 3x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, hệ phương trình có nghiệm:

$\left(x;y\right)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};0\right)$.

Với $y\ne 0$, ta xét hai trường hợp:

__**TH1:**__ Nếu $y>0\Rightarrow x\ge 0$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với: $\dfrac{x}{y}+1+\sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}-4\dfrac{x}{y}+1}=3\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

Đặt $t=\dfrac{x}{y}\ge 0$ phương trình trở thành:

$$t+1+\sqrt{t^2-4t+1}=3\sqrt{t}\Leftrightarrow \sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}-4}=3.$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2-6}=3 \xleftrightarrow{u=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\ge 2} \sqrt{u^2-6}=3-u \Leftrightarrow u=\frac{5}{2}.$$

Vậy $\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{t}=2\\ \sqrt{t}=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=4\\ t=\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4y\\ y=4x\end{array}\right.$.

- Với $x=4y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$8y\left(4y-6y\right)+16y^2+y^2=1 \Leftrightarrow y^2=1 \xleftrightarrow{y>0} y=1 \Rightarrow x=4$.

- Với $y=4x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$2x\left(x-24x\right)+x^2+16x^2=1$ phương trình vô nghiệm.

<u>TH2:</u> Nếu $y<0 \Rightarrow x\le 0$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với: $\frac{x}{y}+1+-\sqrt{\frac{x^2}{y^2}-4\frac{x}{y}+1}=-3\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Đặt $t=\frac{x}{y}\ge 0$ phương trình trở thành:

$$t+1-\sqrt{t^2-4t+1}=-3\sqrt{t} \Leftrightarrow \sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}-4}=-3.$$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)-\sqrt{\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2-6}=-3 \xleftrightarrow{u=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\ge 2} \sqrt{u^2-6}=u+3$: phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};0\right);\left(4;1\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x^2+4y^2\right)\sqrt{2x+4y}=\left(3x^2+6xy-4y^2\right)\sqrt{y}\\ x^2-y^2=2x-y+4\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -2, y\ge 0$.

Nếu $y=0 \Rightarrow \begin{cases}x^2\sqrt{2x+4}=0\\ x^2=2x-4\end{cases}$ hệ phương trình vô nghiệm.

Xét $y>0$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$\left(\frac{x^2}{y^2}+4\right)\sqrt{\frac{2x}{y}+4}=3\frac{x^2}{y^2}+\frac{6x}{y}-4$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$ phương trình trở thành:

$$\left(t^2+4\right)\sqrt{2t+4}=3t^2+6t-4\Leftrightarrow\begin{cases}3t^2+6t-4\ge 0\\ \left(t^2+4\right)^2\left(2t+4\right)=\left(3t^2+6t-4\right)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3t^2+6t-4\ge 0\\ \left(2t+3\right)\left(t^2-2t-4\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow t=1+\sqrt{5}\Leftrightarrow x=\left(1+\sqrt{5}\right)y.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$y^2\left(5+2\sqrt{5}\right)=2\left(1+\sqrt{5}\right)y-y+4\Leftrightarrow\left(5+2\sqrt{5}\right)y^2-\left(2\sqrt{5}+1\right)y-4=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-\dfrac{4}{5+2\sqrt{5}}\end{array}\right.\Rightarrow y=1\Rightarrow x=1+\sqrt{5}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1+\sqrt{5};1\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-\sqrt{xy}=y-\sqrt{2\left(x^2-xy+y^2\right)}\\ x^2+3y^2=3x+5y-3\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\ge 0$ từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$5y=x^2-3x+3+3y^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+3y^2>0\Rightarrow y>0\Rightarrow x>0.$$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{x}{y}-\sqrt{\frac{x}{y}}=1-\sqrt{2\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+1\right)}.$$

Đặt $t=\frac{x}{y}>0$ khi đó phương trình trở thành:

$$t-\sqrt{t}=1-\sqrt{2\left(t^2-t+1\right)}\Leftrightarrow\sqrt{2\left(t^2-t+1\right)}=1+\sqrt{t}-t$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+\sqrt{t}-t\ge 0\\ 2\left(t^2-t+1\right)=\left(1+\sqrt{t}-t\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\sqrt{t}-t\ge 0\\ \left(t-1\right)^2+t+2\sqrt{t}\left(t-1\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+\sqrt{t}-t\geq 0\\ \left(t-1+\sqrt{t}\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow t-1+\sqrt{t}=0\Leftrightarrow t=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}y.$$

Thay $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}y$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2y^2+3y^2=3.\frac{3-\sqrt{5}}{2}y+5y-3\Leftrightarrow\frac{13-3\sqrt{5}}{2}y^2-\frac{19-3\sqrt{5}}{2}y+3=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=\dfrac{6}{13-3\sqrt{5}}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},y=1\\ x=\dfrac{3\left(3-\sqrt{5}\right)}{13-3\sqrt{5}},y=\dfrac{6}{13-3\sqrt{5}}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};1\right);\left(\frac{3\left(3-\sqrt{5}\right)}{13-3\sqrt{5}};\frac{6}{13-3\sqrt{5}}\right).$$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+2y}+3\sqrt{4x+y}=10\sqrt{y}+\sqrt{3y-x}\\ \sqrt{4x+y}+\sqrt{y+3}=\sqrt{5y+10x}\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $y\geq 0,x+2y\geq 0,4x+y\geq 9,3y-x\geq 0,2x+y\geq 0$.

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y>0$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{\frac{x}{y}+2}+3\sqrt{4\frac{x}{y}+1}=10+\sqrt{3-\frac{x}{y}}.$$

Vế trái là một hàm đồng biến và vế phải là một hàm nghịch biến với $\frac{x}{y}$ nên

có nghiệm duy nhất $\frac{x}{y}=2\Leftrightarrow x=2y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$3\sqrt{y}+\sqrt{y+3}=5\sqrt{y}\Leftrightarrow\sqrt{y+3}=2\sqrt{y}\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{9x}{5} \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{5+3x}{6\left(5-y\right)} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $\left|x\right|\ge\left|y\right|, y\ne\left\{0;5\right\}, x-\sqrt{x^2-y^2}\ne 0$.

Khi đó viết lại phương trình thứ hai của hệ thành:

$$6x\left(5-y\right)=y\left(5+3x\right)\Leftrightarrow 9xy+5y-30x=0\Leftrightarrow\frac{9x}{5}=6\frac{x}{y}-1 \qquad (1).$$

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được: $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=6\dfrac{x}{y}-1$.

Đây là phương trình đồng bậc nên nghĩ đến đặt $x=ty$.

TH1: Nếu $y>0$ khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}}{\frac{x}{y}-\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}}=6\frac{x}{y}-1\xleftrightarrow{x=ty}t+\sqrt{t^2-1}=\left(6t-1\right)\left(t-\sqrt{t^2-1}\right).$$

$$\Leftrightarrow 6t^2-6t\sqrt{t^2-1}-2t=0\Leftrightarrow t\left[3t-1-3\sqrt{t^2-1}\right]=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0 \\ 3\sqrt{t^2-1}=3t-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0 \\ \begin{cases} t\ge\dfrac{1}{3} \\ 9\left(t^2-1\right)=9t^2-6t+1 \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{5}{3} \end{array}\right..$$

- Với $t=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=0$ (không thỏa mãn).
- Với $t=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}y$ khi đó thay vào (1) ta được:

$$\frac{9x}{5}=6.\frac{5}{3}-1\Leftrightarrow x=5\Rightarrow y=3 \text{ (thỏa mãn).}$$

TH2: Nếu $y<0$ khi đó viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{\frac{x}{y}-\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}}{\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}}=6\frac{x}{y}-1\xleftrightarrow{x=ty}t-\sqrt{t^2-1}=(6t-1)\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 6t^2-2t+6t\sqrt{t^2-1}=0\Leftrightarrow t\left(3t-1+3\sqrt{t^2-1}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\3\sqrt{t^2-1}=1-3t\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ \begin{cases}t\le\frac{1}{3}\\9\left(t^2-1\right)=9t^2-6t+1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=0\text{ (loại).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;3)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}=y+\sqrt{y^2-1}\\x^2+y^2-xy=1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $|x|,|y|\ge 1$.

Khi đó phương trình đầu của hệ được viết lại:

$$x-y=\sqrt{y^2-1}-\sqrt{x^2-1}\Rightarrow(x-y)^2=y^2+x^2-2-2\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)}.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)}=-1+xy\Leftrightarrow\begin{cases}xy\ge1\\\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)=x^2y^2-2xy+1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}xy\ge1\\(x-y)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, suy ra:

$$x^2+x^2-x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\Rightarrow(x;y)=(\pm;\pm1).$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;-1);(1;1)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{7x+y}-\sqrt{2x+y}=4\\2\sqrt{2x+y}-\sqrt{5x+8}=2\end{cases}$.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $x \ge -\frac{8}{5}, 7x+y \ge 0, 2x+y \ge 0$.

Khi đó viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} = \sqrt{2x+y}+4 \\ 2\sqrt{2x+y}-2 = \sqrt{5x+8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+y = 16+2x+y+8\sqrt{2x+y} \\ 4(2x+y)+4-8\sqrt{2x+y} = 5x+8 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\sqrt{2x+y}-5x+16=0 \\ -8\sqrt{2x+y}+3x+4y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sqrt{2x+y}-5x+16=0 \\ -2x+4y+12=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\sqrt{2(2y+6)+y}-5(2y+6)+16=0 \\ x=2y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{5y+12}=5y+7 \\ x=2y+6 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{5y+12}=5y+7 \\ x=2y+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{56}{5} \\ y=\frac{13}{5} \end{cases}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{56}{5};\frac{13}{5}\right)$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{7x+y} \ge 0 \\ v=\sqrt{2x+y} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=5x$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u-v=4 \\ 2v-\sqrt{u^2-v^2+8}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v+4 \\ \sqrt{8v+24}=2v-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=9 \\ v=5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7x+y}=9 \\ \sqrt{2x+y}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y=81 \\ 2x+y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{56}{5} \\ y=\frac{13}{5} \end{cases}.$$

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{7x+y}-\sqrt{2x+y}=4 \\ 2\sqrt{2x+y}-\frac{7}{10}\sqrt{5x+10y}=2 \end{cases}$.

Lời giải

Nhân chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{7x+y}-\sqrt{2x+y}=2\left(2\sqrt{2x+y}-\frac{7}{10}\sqrt{5x+10y}\right).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7x+y}+\frac{7}{5}\sqrt{5x+10y}=5\sqrt{2x+y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=-\dfrac{2587x}{369} \end{array}\right. \cdot$$

Đối chiếu với điều kiện có nghĩa của hệ suy ra $y=2x$.

Thay $y=2x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$\sqrt{7x+2x}-\sqrt{2x+2x}=4 \Leftrightarrow x=16 \Rightarrow y=32$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(16;32)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2y+3}+\sqrt{9x+10y+11}=10 \\ \sqrt{12x+13y+14}+\sqrt{28x+29y+30}=20 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+2y+3 \geq 0, 9x+10y+11 \geq 0, 12x+13y+14 \geq 0, 28x+29y+30 \geq 0$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1+y+2}+\sqrt{9(x+y+1)+y+2}=10 \\ \sqrt{12(x+y+1)+y+2}+\sqrt{28(x+y+1)+y+2}=20 \end{cases}.$$

Đặt $u=x+y+1, v=y+2$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{u+v}+\sqrt{9u+v}=10 \\ \sqrt{12u+v}+\sqrt{28u+v}=20 \end{cases}.$$

Suy ra $\sqrt{12u+v}+\sqrt{28u+v}=2\left(\sqrt{u+v}+\sqrt{9u+v}\right) \Leftrightarrow u=\frac{5}{4}v$.

Vì vậy $\begin{cases} u=\dfrac{5}{4}v \\ \sqrt{u+v}+\sqrt{9u+v}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=5 \\ y+2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Bài 12. (VMO 2001) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5 \\ \sqrt{2x+y}+x-y=2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $2x+y \geq 0, 7x+y \geq 0$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{7x+y} \\ v=\sqrt{2x+y} \end{cases},\left(u,v\ge 0\right)\Rightarrow \begin{cases} 7x+y=u^2 \\ 2x+y=v^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u^2-v^2}{5} \\ y=\dfrac{7v^2-2u^2}{5} \end{cases}$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ v+\dfrac{u^2-v^2}{5}-\dfrac{7v^2-2u^2}{5}=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ 5v+3u^2-8v^2=10 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v \\ 5v+3\left(5-v\right)^2-8v^2=10 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v \\ 5v^2+25v-65=0 \end{cases}\xleftrightarrow{u,v\ge 0}\begin{cases} u=\dfrac{15-\sqrt{77}}{2} \\ v=\dfrac{-5+\sqrt{77}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7x+y}=\dfrac{15-\sqrt{77}}{2} \\ \sqrt{2x+y}=\dfrac{-5+\sqrt{77}}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y=\left(\dfrac{15-\sqrt{77}}{2}\right)^2 \\ 2x+y=\left(\dfrac{-5+\sqrt{77}}{2}\right)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=10-\sqrt{77} \\ y=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(10-\sqrt{77};\dfrac{11-\sqrt{77}}{2}\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $11x-y\ge 0,y\ge x$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{11x-y} \\ v=\sqrt{y-x} \end{cases},\left(u,v\ge 0\right)\Rightarrow \begin{cases} 11x-y=u^2 \\ y-x=v^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u^2+v^2}{10} \\ y=\dfrac{u^2+11v^2}{10} \end{cases}$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u-v=1 \\ 7v+6.\dfrac{u^2+11v^2}{10}-26.\dfrac{u^2+v^2}{10}=3 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1 \\ 4v^2-2u^2+7v-3=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=v+1 \\ 4v^2-2(v+1)^2+7v-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v+1 \\ 2v^2+3v-5=0 \end{cases} \xleftrightarrow{u,v\ge 0} \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{11x-y}=2 \\ \sqrt{y-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x-y=4 \\ y-x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2y}+\sqrt{2x+2y+3}=5 \\ \sqrt{2x+2y+3}+x^2-2y=5 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+2y\ge 0, 2x+2y+3\ge 0$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+2y} \\ v=\sqrt{2x+2y+3} \end{cases}, (u,v\ge 0) \Rightarrow \begin{cases} x+2y=u^2 \\ 2x+2y+3=v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=v^2-u^2-3 \\ y=\dfrac{2u^2-v^2+3}{2} \end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ v+(v^2-u^2-3)^2-2.\dfrac{2u^2-v^2+3}{2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ v+(5(v-u)-3)^2-2.\dfrac{2u^2-v^2+3}{2}=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=5-u \\ 5-u+(5(5-2u)-3)^2-2.\dfrac{2u^2-(5-u)^2+3}{2}=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=5-u \\ 99u^2-451u+506=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=\dfrac{23}{9} \\ v=\dfrac{22}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+2y}=2 \\ \sqrt{2x+2y+3}=3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+2y}=\dfrac{23}{9} \\ \sqrt{2x+2y+3}=\dfrac{22}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{32}{9} \\ y=\dfrac{817}{162} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;1);\left(-\frac{32}{9};\frac{817}{162}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+y}+\sqrt{x+y}=2 \\ \sqrt{x+y}+x-y=1 \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{3x+y} \\ v=\sqrt{x+y} \end{cases},\left(u,v\ge 0\right)\Rightarrow \begin{cases} 3x+y=u^2 \\ x+y=v^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u^2-v^2}{2} \\ y=\dfrac{3v^2-u^2}{2} \end{cases}$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=2 \\ v+\dfrac{u^2-v^2}{2}-\dfrac{3v^2-u^2}{2}=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2 \\ v+u^2-2v^2=1 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{u,v\ge 0}\begin{cases} u=\dfrac{7-\sqrt{21}}{2} \\ v=\dfrac{\sqrt{21}-3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{9-\sqrt{21}} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\sqrt{9-\sqrt{21}};\sqrt{2}\right)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 14x^2-15xy+4y^2-24x+12y=0 \\ \sqrt{-7x^2+12x+4xy+36}+\sqrt{x^2+8x+32}=6 \end{cases}$.

Lời giải

Phương trình đầu của hệ viết lại dưới dạng:

$$\left(2x-y\right)\left(7x-4y-12\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=\dfrac{7x-12}{4} \end{array}\right..$$

Xét trường hợp và thay vào phương trình thứ hai của hệ tìm được các nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-7;-14\right);\left(-4;-8\right)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x\sqrt{y}\left(x\sqrt{y}+4\right)+\left(x-y\right)\sqrt{x\left(y+2\right)}+4}=\sqrt{y}\left(x+1\right)+2-\sqrt{x} \\ x^2-2x-3y+4y^2=0 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0,y\ge 0,x\sqrt{y}\left(x\sqrt{y}+4\right)+\left(x-y\right)\sqrt{x\left(y+2\right)}+4\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{y}\left(x+1\right)+2-\sqrt{x}\ge 0\\ x\sqrt{y}\left(x\sqrt{y}+4\right)+\left(x-y\right)\sqrt{x\left(y+2\right)}+4=\left(\sqrt{y}\left(x+1\right)+2-\sqrt{x}\right)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y}\left(x+1\right)+2-\sqrt{x}\ge 0\\ \left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\left(4+2x\sqrt{y}+\sqrt{y}-\sqrt{x}+x\sqrt{y+2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ tìm được các nghiệm:

$$\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(1;1\right).$$

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+1\right)^2+y\sqrt{y^2+1}=x+\dfrac{3}{2}\\ x-1+\sqrt{x^2-2x+5}=2\sqrt{2x-4y+2}\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $x-2y+1\ge 0$.

Viết lại hệ phương trình đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases}2x-4y-2=\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2\\ 4\left(2x-4y-2\right)=\left(x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}\right)^2\end{cases}.$$

Suy ra $4\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)^2=\left(x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}\right)^2$.

$$\Leftrightarrow\left(2y+\sqrt{4y^2+4}\right)^2=\left(x-1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}\right)^2\Leftrightarrow x-1=2y\Leftrightarrow x=2y+1.$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ tìm được nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{4}\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x-y+3\sqrt{y+1}=0\\ 4\sqrt{\left(x+1\right)\left(y+1\right)}-6\sqrt{x+1}+1=0\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -1, y\ge -1$.

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x+1}\\ v=\sqrt{y+1}\end{cases},\left(u,v\ge 0\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}4\left(u^2-1\right)-\left(v^2-1\right)+3v=0\\4uv-6u+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4u^2-v^2+3v-3=0\\4uv-6u+1=0\end{cases}.$$

Nhận thấy $u=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $u>0$ hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}4u^2-\left(\dfrac{6u-1}{4u}\right)^2+3.\dfrac{6u-1}{4u}-3=0\\v=\dfrac{6u-1}{4u}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}64u^4-12u^2-1=0\\v=\dfrac{6u-1}{4u}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}u=-\dfrac{1}{2}\\u=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\v=\dfrac{6u-1}{4u}\end{cases}\xleftrightarrow{u,v\ge 0}\begin{cases}u=\dfrac{1}{2}\\v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}\\\sqrt{y+1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{4}\\y=0\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x^2-xy^2-2xy+y^3-y^2+2x=0\\\sqrt{\dfrac{2x^2-2xy+y^2-4x+4}{2}}+\sqrt{x^2-xy+y^2-2x-2y+4}=2-y\end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\left(y^2-2x\right)\left(x-y+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y-1\\x=\dfrac{y^2}{2}\end{array}\right..$$

Xét trường hợp và thay vào phương trình thứ hai của hệ tìm được nghiệm.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y}\\\sqrt{x^2-16}=\sqrt{y-3x}+2\end{cases}$.

Lời giải

Bình phương hai vế phương trình đầu của hệ tìm ra $y=4x-4$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{x-4}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-16}-3=\sqrt{x-4}-1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5}{\sqrt{x^2-16}+3}=\frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1}\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}-\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=5\Rightarrow y=16$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;16)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y+5}-\sqrt{3x+2y}+1=0\\ \sqrt{x+1}+x-y+3=0\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x+1},(t\ge 0)$ từ phương trình thứ hai của hệ rút ra $y=t^2+t+2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\sqrt{2t^2+t+1}+1=\sqrt{5t^2+2t+1}.$$

Suy ra $\begin{cases}\sqrt{5t^2+2t+1}-\sqrt{2t^2+t+1}=1\\ \sqrt{5t^2+2t+1}+\sqrt{2t^2+t+1}=\dfrac{3t^2+t}{\sqrt{5t^2+2t+1}-\sqrt{2t^2+t+1}}=3t^2+t\end{cases}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5t^2+2t+1}=3t^2+t+1\Leftrightarrow 4\left(5t^2+2t+1\right)=\left(3t^2+t+1\right)^2\Leftrightarrow t=2$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;8)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^3+3}=xy+1\\ x^2+y^2=\sqrt{x^2\left(y^2+y+1\right)+y\left(y^3+y^2+1\right)}\end{cases}$.

Lời giải

Bình phương hai vế phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(x^2+y^2+1\right)\left(y-x^2\right)=0\Leftrightarrow y=x^2.$$

Thay $y=x^2$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{x^3+2}=x^3+1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2-\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}=3\\ \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2+2}=4\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^2+y^2-\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}=3 \\ x^2+y^2+2+2\sqrt{x^2\left(y^2+2\right)}=16 \end{cases}$.

Đặt $u=x^2, v=y^2, \left(u,v\ge 0\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v-\sqrt{uv+u+v+1}=3 \\ u+v+2\sqrt{uv+2u}=14 \end{cases}.$$

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+3y^2-3}+2\sqrt{2x^2-2y+1}=3y \\ 3x^2+y^2=2y+2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+3y^2-3\ge 0, 2x^2-2y+1\ge 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $y\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3y^2-3}+2\sqrt{2x^2-2y+1}=3y \\ 2x^2-2y+1=-x^2-y^2+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3y^2-3}+2\sqrt{-x^2-y^2+3}=3y \qquad (1) \\ 2x^2-2y+1=-x^2-y^2+3 \end{cases}.$$

Ta xử lý phương trình (1) như sau:

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $y>0$ khi đó $(1)\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^2-3}{y^2}+3}+2\sqrt{-1-\dfrac{x^2-3}{y^2}}=3$.

Đặt $t=\dfrac{x^2-3}{y^2}$ ta có phương trình: $\sqrt{t+3}+2\sqrt{-t-1}=3$.

$$\Leftrightarrow t+3+4\left(-t-1\right)+4\sqrt{\left(t+3\right)\left(-t-1\right)}=9 \Leftrightarrow 4\sqrt{-t^2-4t-3}=10+3t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t+10\ge 0 \\ 16\left(-t^2-4t-3\right)=9t^2+60t+100 \end{cases} \Leftrightarrow t=-2 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{y^2}=-2.$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{y^2}=-2\\ 3x^2+y^2=2y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=-2y^2+3\\ 3\left(-2y^2+3\right)+y^2=2y+2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;1\right);\left(1;1\right)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{3y^3-4xy^2}}-\dfrac{1}{2x}\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\\ x^2+4y^2-2x-2y=-\dfrac{1}{9}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy>0,\dfrac{x}{3y^3-4xy^2}\geq 0,3y^3-4xy^2\neq 0$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$2\left(x+y\right)=x^2+4y^2+\dfrac{1}{9}>0\Rightarrow x+y>0\Rightarrow x,y>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{\frac{x^3}{3y^3-4xy^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^3}{3-4\dfrac{x}{y}}}=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{y}}}+\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}>0$ phương trình trở thành: $\sqrt{\dfrac{t^6}{3-4t^2}}=t+\dfrac{1}{2t}\Leftrightarrow\dfrac{t^6}{3-4t^2}=t^2+1+\dfrac{1}{4t^2}$

$\Leftrightarrow\left(2t^4-1\right)\left(2t^4+5t^2+3\right)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\Leftrightarrow y=\sqrt{2}x$.

Thay $y=\sqrt{2}x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2+8x^2-2\left(x+\sqrt{2}x\right)=-\frac{1}{9}\Leftrightarrow 9x^2-2\left(\sqrt{2}+1\right)x+\frac{1}{9}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{9} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{9} \end{array}\right. \Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{9}, y=\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{9} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{9}, y=\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{9} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{9};\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{9}\right);$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{9};\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}+4}}{9}\right)$$

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}+\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}-y}=x^2+y^2+3xy \\ \left(y+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)=\dfrac{25}{4}xy \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+y\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=x^2+y^2+3xy \\ \left(y+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)=\dfrac{25}{4}xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x\sqrt{x^2+1}+y\sqrt{y^2+1}=3xy \\ \left(y+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)=\dfrac{25}{4}xy \end{cases}.$$

Nhận thấy $xy=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $xy\neq 0$ hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{y}+\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{x}=3 \\ \left(1+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{y}\right)\left(1+\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{x}\right)=\dfrac{25}{4} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{y}+\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{x}=3 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{y}.\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{x}=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{y}=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{x}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x,y>0\\ 4\left(x^2+1\right)=9y^2\\ 4\left(y^2+1\right)=9x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{12-2x^2}=y+4\\ \sqrt{1-2y-y^2}=5-2x\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6},-1-\sqrt{2}\le y\le -1+\sqrt{2}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}12-2x^2=y^2+8y+16\\ 1-2y-y^2=25-20x+4x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+y^2+8y+4=0\ (1)\\ 4x^2+y^2-20x+2y+24=0\ (2)\end{cases}.$$

Đây là hệ bậc hai hai ẩn tổng quát đã biết cách giải hoặc xử lý nhanh như sau:

Lấy $(1)+2.(2)$ theo vế ta được:

$$10\left(x-2\right)^2+3\left(y+2\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;-2\right)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2xy^2+2y=x+2xy+4y^3\\ 2\sqrt{3x-5}+\sqrt[3]{8y^3-3x+9}=7\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge\dfrac{5}{3}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(2y-x\right)\left(2y^2+x-1\right)=0\xleftrightarrow{x\ge\frac{5}{3}}x=2y.$$

Thay $2y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2\sqrt{3x-5}+\sqrt[3]{x^3-3x+9}=7.$$

Vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm hằng nên phương trình có nghiệm duy nhất $x=3\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;\frac{3}{2}\right)$.

Bài 30. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2+6xy+4y^2+2y+1}=3x+2y-1\\4\sqrt{x+y+2}+4y\sqrt{2\left(y+1\right)}=5y^2+6x+3+\sqrt{2\left(x+y^2\right)}\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $3x^2+6xy+4y^2+2y+1\ge 0, y\ge -1, x+y^2\ge 0, x+y+2\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{3\left(x+y\right)^2+\left(y+1\right)^2}=3\left(x+y\right)-\left(y+1\right).$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y-1\ge 0\\3\left(x+y\right)^2+\left(y+1\right)^2=9\left(x+y\right)^2-6\left(x+y\right)\left(y+1\right)+\left(y+1\right)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y-1\ge 0\\\left[\begin{array}{l}x+y=0\\x+y=y+1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2y-1\ge 0\\\left[\begin{array}{l}y=-x\\x=1\end{array}\right.\end{cases}.$$

<u>TH1:</u> Nếu $x=1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4\sqrt{y+3}+4y\sqrt{2\left(y+1\right)}=5y^2+9+\sqrt{2\left(y^2+1\right)}.$$

Để giải phương trình này ta đánh giá thông qua bất đẳng thức Cô si như sau:

$$\begin{cases}4\sqrt{y+3}\le 4+y+3=y+7\\4y\sqrt{2\left(y+1\right)}\le 2y\left(2+y+1\right)=2y^2+6y\end{cases}\Rightarrow VT\le 2y^2+7y+7$$

$$5y^2+9+\sqrt{2\left(y^2+1\right)}\ge 5y^2+9+y+1=5y^2+y+10\Rightarrow VP\ge 5y^2+y+10$$

Mặt khác: $5y^2+y+10-2y^2-7y-7=3y^2-6y+3=3\left(y-1\right)^2\ge 0$.

Vì vậy dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow y=1$.

Vậy trường hợp này hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

<u>TH2:</u> Nếu $y=-x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4\sqrt{2}-4x\sqrt{2\left(1-x\right)}=5x^2-6x+3+\sqrt{2\left(x^2+x\right)}.$$

Đây coi như một bài tập dành cho bạn đọc.

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3=2\sqrt{(y+1)(3y-x)} \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\dfrac{x+5}{2}}=xy-2y-2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y \ge \dfrac{2}{3}, 3y-x \ge 0, x \ge -5$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$3(y+1)-(3y-x)=2\sqrt{(y+1)(3y-x)}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 9(y+1)^2-10(y+1)(3y-x)+(3y-x)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \ge 0 \\ y+1=3y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \ge 0 \\ x=2y-1 \end{cases}$$

Thay $x=2y-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{3y-2}-\sqrt{y+2}=2y^2-3y-2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3y-2}-2\right)+\left(2-\sqrt{y+2}\right)=2y^2-3y-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(y-2)}{\sqrt{3y-2}+2}+\frac{2-y}{2+\sqrt{y+2}}=(y-2)(2y+1).$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left(2y+1+\frac{1}{\sqrt{y+2}+2}-\frac{3}{\sqrt{3y-2}+2}\right)=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=3.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;2)$.

Bài 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y+(y+1)\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)=44 \\ x^2+x\sqrt{x^2-y^2}=40 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-y^2 \ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y+(y+1)\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)=44 \\ \left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)^2+y^2=80 \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=x+\sqrt{x^2-y^2} \\ v=y \end{cases}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^2+v^2=80 \\ v+u(v+1)=44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=80 \\ u+v+uv=44 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=4 \\ v=8 \end{cases} \\ \begin{cases} u=8 \\ v=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\sqrt{x^2-y^2}=4 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x+\sqrt{x^2-y^2}=8 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;4)$.

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2-1)^2+3=\dfrac{6x^5y}{x^2+2} \\ 3y-x=\sqrt{\dfrac{4x-3x^2y-9xy^2}{x+3y}} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\dfrac{4x-3x^2y-9xy^2}{x+3y}\ge 0, x+3y\ne 0$.

Để hệ có nghiệm ta phải có $3y-x\ge 0$.

Khi đó viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 6x^5y=(x^2+2)(x^4-2x^2+1)+3(x^2+2) \\ (x+3y)(3y-x)^2=4x-3x^2y-9xy^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5y=x^6+8 \\ x^3+27y^3=4x \end{cases}.$$

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\ne 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3+1=2.\dfrac{3y}{x} \\ 1+\left(\dfrac{3y}{x}\right)^3=2.\dfrac{2}{x^2} \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{2}{x^2} \\ v=\dfrac{3y}{x} \end{cases},(u>0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^3+1=2v \\ v^3+1=2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3-v^3=-2(u-v) \\ v^3+1=2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0 \\ v^3+1=2u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ v^3 + 1 = 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^3 - 2u + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ \left(u-1\right)\left(u^2 + u - 1\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1, v = 1 \\ u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, v = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ u = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, v = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $u = v = 1, u = v = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

TH1: Nếu $\begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} = 1 \\ \dfrac{3y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện suy ra $\left(x;y\right) = \left(\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right);\left(-\sqrt{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

TH2: Nếu $\begin{cases} u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ v = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{3y}{x} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{1+\sqrt{5}} \\ y = \pm\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{1+\sqrt{5}} \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện suy ra $\left(x;y\right) = \left(-\sqrt{1+\sqrt{5}};-\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là

$\left(x;y\right) = \left(\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right);\left(-\sqrt{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right);\left(-\sqrt{1+\sqrt{5}};-\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)$.

Bài 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = y + \sqrt{y^2-1} \\ x^2 + y^2 - xy = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\left|y\right| \ge 1$.

Cách 1: Viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$x - y = \sqrt{y^2-1} - \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \left(x-y\right)^2 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)}=xy \Leftrightarrow \begin{cases} xy \ge 0 \\ x^2y^2-x^2+y^2-1=x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \ge 0 \\ y^2-x^2=1 \end{cases}.$$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ y^2-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-xy=0 \\ y^2-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=\pm 1 \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, y=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right..$$

Thử lại nghiệm chỉ có $(x;y)=(0;1),\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;1);\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

<u>Cách 2:</u> Viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$x-\sqrt{y^2-1}=y-\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \left(x-\sqrt{y^2-1}\right)^2=\left(y-\sqrt{x^2+1}\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow -2x\sqrt{y^2-1}-1=-2y\sqrt{x^2+1}+1 \Leftrightarrow y\sqrt{x^2+1}=1+x\sqrt{y^2-1}.$$

$$\Rightarrow y^2\left(x^2+1\right)=1+2x\sqrt{y^2-1}+x^2\left(y^2-1\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{y^2-1}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{y^2-1} \Rightarrow y^2-x^2=1.$$

Vậy đưa về giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-x^2=1 \\ x^2+y^2-xy=1 \end{cases}$.

Thực hiện tương tự cách 1.

<u>Cách 3:</u>

Vì $x+\sqrt{x^2+1}>0 \Rightarrow y+\sqrt{y^2-1}>0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1}>-y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -y<0 \\ \begin{cases} -y \ge 0 \\ y^2-1>y^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow y>0$.

Kết hợp với điều kiện suy ra $y \ge 1$.

Khi đó viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2-1}+\sqrt{\left(\sqrt{y^2-1}\right)^2+1} \qquad (1).$$

Phương trình (1) có dạng hàm đặc trưng nên sử dụng hàm số.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$, ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow f(x)=f\left(\sqrt{y^2-1}\right)\Leftrightarrow x=\sqrt{y^2-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ y^2-x^2=1\end{cases}$.

Đưa về giải hệ tương tự cách 1.

<u>Cách 4 :</u> Đặt $\begin{cases}u=x+\sqrt{x^2+1}\\ v=y+\sqrt{y^2-1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(u-x)^2=x^2+1\\ (v-y)^2=y^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u^2-1}{2u}\\ y=\dfrac{v^2+1}{2v}\end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases}u=v\\ \left(\dfrac{u^2-1}{2u}\right)^2+\left(\dfrac{v^2+1}{2v}\right)^2-\dfrac{u^2-1}{2u}.\dfrac{v^2+1}{2v}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v\\ u^4-4u^2+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v=-1\\ u=v=1\\ u=v=-\sqrt{3}\\ u=v=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bài 35. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(y-x+1)(2x+y-1)^3=8x^3\\ x+y+\sqrt[3]{y-x+1}=3\end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases}(y-x+1)(2x+y-1)^3=8x^3\\ y-x+1=(3-x-y)^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[(3-x-y)(2x+y-1)\right]^3=8x^3\\ y-x+1=(3-x-y)^3\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x-y)(2x+y-1)=2x\\ y-x+1=(3-x-y)^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+(3x-4)y+2x^2-5x+3=0\ (1)\\ y-x+1=(3-x-y)^3\end{cases}.$$

Coi phương trình (1) là phương trình bậc 2 với ẩn là y và tham số là x.

Ta có $\Delta_y=(3x-4)^2-4\left(2x^2-5x+3\right)=(x-2)^2$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}y=3-2x\\ y=1-x\end{array}\right.$.

Bài 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^3-xy=\sqrt{x+1}\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}=1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x, y \ge 2$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y^3 - xy = \sqrt{x+1} \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - xy = \sqrt{x+1} \\ \sqrt{y-2} = 1 - \sqrt{x-2} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - xy = \sqrt{x+1} \\ 1 - \sqrt{x-2} \ge 0 \\ y - 2 = x - 1 - 2\sqrt{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - xy = \sqrt{x+1} \\ x \le 3 \\ y = x + 1 - 2\sqrt{x-2} \end{cases}.$$

Mặt khác $y^3 - xy = y\left(y^2 - x\right) \ge 2\left(2^2 - 3\right) \ge 2 \ge \sqrt{x+1}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2, y = 3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(2;3\right)$.

Bài 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x\left(y+1\right) - 2y\left(y-1\right) = -186 \\ \sqrt{x^2+y} - x = \dfrac{4+y}{2\sqrt{x^2+y}} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 + y > 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2xy - 2y^2 + 2x + 2y + 186 = 0 \\ 2\left(x^2 + y\right) - 2x\sqrt{x^2+y} = 4 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 2y^2 + 2x + 2y + 186 = 0 \\ x^2 + y - 2x\sqrt{x^2+y} + x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 2y^2 + 2x + 2y + 186 = 0 \\ \left(\sqrt{x^2+y} - x\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 2y^2 + 2x + 2y + 186 = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+y} - x = 2 \\ \sqrt{x^2+y} - x = -2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2xy - 2y^2 + 2x + 2y + 186 = 0 \\ \sqrt{x^2+y} = x + 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2xy - 2y^2 + 2x + 2y + 186 = 0 \\ \sqrt{x^2+y} = x - 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2xy - 2y^2 + 2x + 2y + 186 = 0 \\ x \ge -2 \\ y = 4 + 4x \end{cases} \\ \begin{cases} 2xy - 2y^2 + 2x + 2y + 186 = 0 \\ x \ge 2 \\ y = 4 - 4x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-23+\sqrt{4417}}{24}, y=\dfrac{1+\sqrt{4417}}{6} \\ x=3, y=-8 \end{array}\right. .$$

Đối chiếu lại điều kiện thấy cả hai nghiệm đều thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=(3;-8);\left(\frac{-23+\sqrt{4417}}{24};\frac{1+\sqrt{4417}}{6}\right).$$

Bài 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+y-2}+\sqrt{y-x+1}=3 \\ x+2\left(y-\sqrt{x-1}\right)=\dfrac{19}{5}+\dfrac{1}{y^2+1} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 1 \\ 2x+y-2 \ge 0 \\ y-x+1 \ge 0 \end{cases}$.

Bình phương hai vế phương trình đầu của hệ ta được:

$$x+2y-1+2\sqrt{(2x+y-2)(y-x+1)}=9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+y-2)(y-x+1)}=10-x-2y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-x-2y \ge 0 \\ 4(2x+y-2)(y-x+1)=(10-x-2y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-x-2y \ge 0 \\ 4y=x^2-4x+12=(x-2)^2+8 \end{cases} \Rightarrow y \ge 2$$

Phương trình thứ hai của hệ được viết lại dưới dạng:

$$x-2\sqrt{x-1}+2y=\frac{19}{5}+\frac{1}{y^2+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+2y-\frac{1}{y^2+1}-\frac{19}{5}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\frac{(y-2)\left(10y^2+y+12\right)}{5\left(y^2+1\right)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}-1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Bài 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+7y)\sqrt{x}+(y+7x)\sqrt{y}=8\sqrt{2xy(x+y)}\\ 2(1-y)\sqrt{x^2+2x-1}=y^2-2x-1\end{cases}$.

Lời giải

Từ phương trình của hệ suy ra $x=y$ (xem chủ đề hệ phương trình đối xứng Loại I).

Thay vào phương trình thứ hai của hệ và đặt $t=\sqrt{x^2+2x-1}$ đưa về phương trình bậc hai không hoàn toàn(xem cuốn phương trình, bất phương trình vô tỷ cùng tác giả).

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(-1+\sqrt{6};-1+\sqrt{6}\right)$.

Bài 40. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)^4=13x-4\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}=\sqrt{2}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x+y\ge 0\\ 3x-y\ge 0\end{cases}$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}=\sqrt{2}\Leftrightarrow 4x+2\sqrt{(x+y)(3x-y)}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+y)(3x-y)}=1-2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{2}\\ (x+y)(3x-y)=1-4x+4x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{1}{2}\\ (x-y)^2=4x-1\end{cases}.$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$(4x-1)^2=13x-4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{5}{16}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra: $x=\dfrac{5}{16}\Rightarrow\left(\dfrac{5}{16}-y\right)^2=1-4.\dfrac{5}{16}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\dfrac{3}{16}\\ y=\dfrac{13}{16}\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{5}{16};-\dfrac{3}{16}\right);\left(\dfrac{5}{16};\dfrac{13}{16}\right)$.

Bài 41. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+1}=y+2\sqrt{2}\\ 9y^2\left(x+3y\right)=1-x^3y^3\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình. Phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng:

$$\frac{9}{y}\left(x+3y\right)=\frac{1}{y^3}-x^3\Leftrightarrow\frac{9x}{y}+27=\frac{1}{y^3}-x^3.$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{y}-x\right)^3+\frac{3x}{y^2}-\frac{3x^2}{y}=27+\frac{9x}{y}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{y}-x\right)^3+\frac{3x}{y}\left(\frac{1}{y}-x-3\right)=27.$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{y}-x-3\right)\left[\left(\frac{1}{y}-x\right)^2+3\left(\frac{1}{y}-x\right)+9+\frac{3x}{y}\right]=0\Leftrightarrow\frac{1}{y}=x+3.$$

Đáp số: $\left(x;y\right)=\left(2\sqrt{2};3-2\sqrt{2}\right)$.

Bài 42. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right)\left(3y+\sqrt{9y^2+3}\right)=9\\ xy+x^2+y^2=\dfrac{19}{36}\end{cases}$.

Lời giải

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\left(\frac{2x}{3}+\sqrt{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\Leftrightarrow y=-\frac{2x}{3}.$$

Thay $y=-\dfrac{2x}{3}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$-\frac{2}{3}x^2+x^2+\frac{4}{9}x^2=\frac{19}{36}\Leftrightarrow\frac{7x^2}{9}=\frac{19}{36}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{7}}\\ x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{7}}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{7}},y=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{7}}\\ x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{7}},y=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{7}}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{7}};\frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{7}}\right);\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{19}{7}};-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{7}}\right).$$

Bài 43. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2\\ 6y^2+5y+\dfrac{1}{2}=\sqrt{x^3+1}\end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=-y.$$

Thay $y=-\dfrac{x}{2}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$6\left(-\frac{x}{2}\right)^2+5\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}=\sqrt{x^3+1} \Leftrightarrow 6x^2-10x+2=\sqrt{x^3+1}.$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^2-x+1\right)-4\left(x+1\right)=\sqrt{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}.$$

$$\Leftrightarrow 6-4.\frac{x+1}{x^2-x+1}=\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}=\frac{\sqrt{97}-1}{8}.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{121+\sqrt{97}-\sqrt{8114+530\sqrt{97}}}{144},\ y=-\dfrac{121+\sqrt{97}-\sqrt{8114+530\sqrt{97}}}{288}\\ x=\dfrac{121+\sqrt{97}+\sqrt{8114+530\sqrt{97}}}{144},\ y=-\dfrac{121+\sqrt{97}+\sqrt{8114+530\sqrt{97}}}{288}\end{array}\right..$$

Bài 44. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3-6x^2-6y^2+13x+13y=20\\ x+2\sqrt{x^2-y+8}=8\sqrt{2x+y-4}+2\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-y+8\ge 0, 2x+y-4\ge 0$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\left(x-2\right)^3+x-2=\left(2-y\right)^3+2-y \Leftrightarrow x-2=2-y \Leftrightarrow y=4-x.$$

Thay $y=4-x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x+2\sqrt{x^2+x+4}=8\sqrt{x}+2 \Leftrightarrow x-2+2\sqrt{x^2+x+4}=8\sqrt{x}.$$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x>0$ chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x}$ ta được:

$$\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x+1+\frac{4}{x}}=8 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+2\sqrt{\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2+5}=8.$$

Đặt $t=\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$ phương trình trở thành:

$$t+2\sqrt{t^2+5}=8 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+5}=8-t \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 8 \\ 4\left(t^2+5\right)=64-16t+t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\frac{22}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=2 \\ \sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=-\frac{22}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4+2\sqrt{3} \\ x=\frac{260-22\sqrt{139}}{9} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4+2\sqrt{3}, y=-2\sqrt{3} \\ x=\frac{260-22\sqrt{139}}{9}, y=\frac{22\sqrt{139}-224}{9} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là

$$\left(x;y\right)=\left(4+2\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right);\left(\frac{260-22\sqrt{139}}{9};\frac{22\sqrt{139}-224}{9}\right).$$

Bài 45. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x^3-y^3\right)\sqrt{xy-x-y+1}=\sqrt{1-x}-\sqrt{1-y} \\ 2x^3-y^3+x^2-2y^2-2x-2y+4=0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\le 1, y\le 1, xy-x-y+1\ge 0$.

Nếu $x=1 \Rightarrow y=1$.

Xét $x,y<1$ khi đó phương trình đầu của hệ viết lại dưới dạng:

$$\left(x^3-y^3\right)\sqrt{xy-x-y+1}=\frac{y-x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[\left(x^2+xy+y^2\right)\sqrt{xy-x-y+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}}\right]=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ tìm được các nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-2;-2\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(-2;-2\right)$.

Bài 46. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy} = 4\sqrt{(x+y)\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)}-1 \\ \sqrt{x^2+5x+2y+xy+6-2x\sqrt{x(y+3)}} = \sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\sqrt{\left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+2(x+y+3)} = \sqrt{x}+\sqrt{y+3}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+2(x+y+3) = x+y+3+2\sqrt{x(y+3)}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x(y+3)}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y+3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{x(y+3)} \\ \sqrt{x}=\sqrt{y+3} \end{cases} \Leftrightarrow x=y+3.$$

Thay $x=y+3$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\frac{2(y+3)^2+4y^2}{y(y+3)} = 4\sqrt{\frac{(2y+3)(6-y)}{y(y+3)}}-1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{7y^2+15y+18}{y(y+3)} = 4\sqrt{\frac{-2y^2+9y+18}{y(y+3)}}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{y(y+3)(-2y^2+9y+18)} = 7y^2+15y+18$$

$$\Leftrightarrow 16y(y+3)(-2y^2+9y+18) = (7y^2+15y+18)^2.$$

$$\Leftrightarrow 81(y-1)^2(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;-2);(4;1)$.

Bài 47. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{2x-3y}-\sqrt{5-x+y}=7 \\ 3\sqrt{5-x+y}-\sqrt{2x-y-3}=1 \end{cases}$.

Phân tích lời giải. Nhận thấy hệ có đến bốn căn thức trong đó lặp lại $\sqrt{5-x+y}$ nên ta đặt một ẩn phụ $u=\sqrt{5-x+y}$ đặt tiếp một trong hai căn còn lại là ẩn tiếp theo vì khi đó căn thức còn sót lại cuối cùng đều biểu diễn được theo hai căn thức đã đặt ẩn phụ ở trên.

Lời giải

Điều kiện $5-x+y\ge 0, 2x-y-3\ge 0, 2x-3y\ge 0$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{5-x+y} \\ v=\sqrt{2x-y-3} \end{cases} \Rightarrow 2x-3y=17-4u^2-v^2$.

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 3u-v=1 \\ 2\sqrt{17-4u^2-v^2}+u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3u-1 \\ 2\sqrt{17-4u^2-(3u-1)^2}=7-u \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\le 7 \\ v=3u-1 \\ 4\left(-13u^2+6u+16\right)=u^2-14u+49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le u\le 7 \\ v=3u-1 \\ 53u^2-38u-15=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x+y}=1 \\ \sqrt{2x-y-3}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=-4 \\ 2x-y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;-1)$.

Bài 48. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}=\sqrt{x-y}+2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1}=\sqrt{x^2-y^2}+3 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x+y\ge 0, x-y\ge 0$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+y} \\ v=\sqrt{x-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=uv \\ 2\left(x^2+y^2\right)=u^4+v^4 \end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u=v+2 \\ \sqrt{\dfrac{u^4+v^4}{2}+1}=uv+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v+2 \\ \sqrt{\dfrac{\left[(u-v)^2+2uv\right]^2-2u^2v^2}{2}+1}=uv+3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2 \\ \sqrt{u^2v^2 + 8uv + 9} = uv + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2 \\ u^2v^2 + 8uv + 9 = u^2v^2 + 6uv + 9 \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 2 \\ uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 0 \\ v = -2 \end{cases}$. Nhưng do $u, v \geq 0$ nên chỉ nhận nghiệm $u = 2, v = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + y} = 2 \\ \sqrt{x - y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 2)$.

Bài 49. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3x}{y} + \sqrt{3x + 2y} = 6y - 2 \ (1) \\ 2\sqrt{3x + \sqrt{3x + 2y}} = 3x - 3y + 2 \ (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $y \neq 0, 3x + 2y \geq 0, 3x + \sqrt{3x + 2y} \geq 0$.

Đặt $u = \sqrt{3x + 2y} \Rightarrow 3x = u^2 - 2y$ khi đó (1) trở thành

$$\frac{u^2 - 2y}{y} + u = 6y - 2 \Leftrightarrow u^2 + u.y - 6y^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (u + 3y)(u - 2y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -3y \\ u = 2y \end{array} \right..$$

- Với $u = -3y$ khi đó (2) trở thành:

$$2\sqrt{3x - 3y} = 3x - 3y + 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x - 3y} - 1\right)^2 + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

- Với $u = 2y$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3x + 2y} = 2y \\ 2\sqrt{3x + 2y} = 3x - 3y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 3x = 4y^2 - 2y \\ 4y = 3x - 3y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{12}, y = \dfrac{1}{4} \\ x = 4, y = 2 \end{array} \right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x; y) = \left(-\dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{4}\right); (4; 2)$.

Bài 50. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x + 1)^2 + 3(x - 1)\sqrt{y + 1} + y + 1 = 0 \\ 7x + (2 + x)\sqrt{y + 1} = 5 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $y \ge -1$.

Đặt $\begin{cases} u = x + 1 \\ v = \sqrt{y+1} \end{cases}, \left(v \ge 0\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u^2 + 3\left(u-2\right)v + v^2 = 0 \\ 7\left(u-1\right) + \left(u+1\right)v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + 3\left(u-2\right)v + v^2 = 0 \ (1) \\ u\left(7+v\right) = 12 - v \ (2) \end{cases}.$$

Rút $u = \dfrac{12-v}{7+v}$ từ (2) thay vào (1) ta được

$$\left(\frac{12-v}{7+v}\right)^2 + 3\left(\frac{12-v}{7+v} - 2\right)v + v^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(12-v\right)^2 - 3v\left(7+v\right)\left(3v+2\right) + v^2\left(7+v\right)^2 = 0 .$$

$$\Leftrightarrow v^4 + 5v^3 - 19v^2 - 66v + 144 = 0 .$$

$$\Leftrightarrow \left(2v^2 + 5v - 25\right)^2 = \left(v+7\right)^2 .$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v^2 + 2v - 16 = 0 \\ v^2 + 3v - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = -1 \pm \sqrt{17} \\ v = -\dfrac{3}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right) \end{array}\right. .$$

Nhưng do $v \ge 0$ nên $\left[\begin{array}{l} v = -1 + \sqrt{17} \\ v = -\dfrac{3}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 17 - 2\sqrt{17} \\ y = \dfrac{9}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right) - 1 \end{array}\right.$.

Suy ra $\left(x;y\right) = \left(\ \ \right) y = 17 - 2\sqrt{17}; y = \dfrac{9}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right) - 1$.

Bài 51. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{x}\left(3\sqrt{x} - y\right) + x\sqrt{x} = 3y + \sqrt{y-1} \\ 3xy^2 + 4 = 4x^2 + x + 2y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 1, y \ge 1$.

Nếu $x = 1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $y = 1$.

Xét $x > 1$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1}\right) + 3\left(x-y\right) + \sqrt{x}\left(x-y\right) = 0 .$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}+3+\sqrt{x}\right)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3x^3-4x^2-3x+4=0 \Leftrightarrow (3x-4)(x^2-1)=0 \xleftrightarrow{x>1} x=\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{4}{3}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(1;1);\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Bài 52. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-y}+\sqrt{x^2+4xy+4y^2}=9\\ x(x+4y-2)+y(4y+2)=41\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x-y\ge 0$.

Đặt $u=\sqrt{x-y}, v=\sqrt{x^2+4xy+4y^2}, (u,v\ge 0)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u+v=9\\ v^2-2u^2=41\end{cases} \xleftrightarrow{u,v\ge 0} \begin{cases}u=2\\ v=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-y}=2\\ \sqrt{x^2+4xy+4y^2}=7\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-y=4\\ \left[\begin{array}{l}x+2y=-7\\ x+2y=7\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{11}{3}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(5;1);\left(\frac{1}{3};-\frac{11}{3}\right)$.

Bài 53. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+\dfrac{2}{y}=y^2+\dfrac{2}{x}\\ \sqrt[3]{4(x^3+y^3)}=-2xy\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\ne 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\left(x-y\right)\left(x+y+\frac{2}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y+\frac{2}{xy}=0 \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $y=x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$2x=-2x^2 \xleftrightarrow{x\neq 0} x=-1 \Rightarrow y=-1$.

TH2: Nếu $x+y+\frac{2}{xy}=0$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+\frac{2}{xy}=0 \\ \sqrt[3]{4\left(x^3+y^3\right)}=-2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\frac{2}{xy}=0 \\ \sqrt[3]{4\left(x+y\right)\left(\left(x+y\right)^2-3xy\right)}=-2xy \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\frac{2}{xy}=0 \\ \sqrt[3]{-\frac{8}{xy}\left(\frac{4}{x^2y^2}-3xy\right)}=-2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\frac{2}{xy}=0 \\ x^6y^6+3x^3y^3-4=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\frac{2}{xy}=0 \\ \left(x^3y^3-1\right)\left(x^3y^3+4\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\frac{2}{xy}=0 \\ \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ xy=-\sqrt[3]{4} \end{array}\right. \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\sqrt[3]{2} \\ xy=-\sqrt[3]{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt[3]{2}-\sqrt{5\sqrt[3]{4}}}{2} \\ y=\dfrac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt{5\sqrt[3]{4}}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt{5\sqrt[3]{4}}}{2} \\ y=\dfrac{-\sqrt[3]{2}-\sqrt{5\sqrt[3]{4}}}{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Bài 54. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x}+\sqrt{3y}=6\\ \sqrt{3x+16}+\sqrt{3y+16}=10\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge 0$.

Ta có: $\sqrt{3x+16}+\sqrt{3y+16}\ge\sqrt{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{3y}\right)^2+\left(4+4\right)^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{3x}}{4}=\dfrac{\sqrt{3y}}{4}\Leftrightarrow x=y\Rightarrow x=y=3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;3\right)$.

Bài 55. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}xy+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=1\\ \left(1-y\right)\sqrt{x^2+2x+3}=x^2+1\end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\ \left(1-y\right)\sqrt{x^2+2x+3}=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1\\ \left(1-y\right)\sqrt{x^2+2x+3}=x^2+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{(-y)^2+1}\\ \left(1-y\right)\sqrt{x^2+2x+3}=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-y\\ \left(1-y\right)\sqrt{x^2+2x+3}=x^2+1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\ \left(x+1\right)\sqrt{x^2+2x+3}=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\ x\ge -1\\ \left(x+1\right)^2\left(x^2+2x+3\right)=\left(x^2+1\right)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x \geq -1 \\ 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{9+2\sqrt{114}}{9}}}{2} - \dfrac{5}{2\sqrt[3]{3\left(9+2\sqrt{114}\right)}} \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{9+2\sqrt{114}}{9}}}{2} + \dfrac{5}{2\sqrt[3]{3\left(9+2\sqrt{114}\right)}} \end{cases}.$$

Bài 56. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+2} + \sqrt{y^2+3} + x + y = 5 \\ \sqrt{x^2+2} + \sqrt{y^2+3} - x - y = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2} + \sqrt{y^2+3} = \dfrac{7}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - y \\ \sqrt{\left(\dfrac{3}{2} - y\right)^2 + 2} + \sqrt{y^2+3} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - y \\ 2\sqrt{y^2+3} + \sqrt{(2y-3)^2 + 8} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{17}{20} \\ y = \dfrac{13}{20} \end{cases} \end{array}\right.\cdot$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = \left(\dfrac{1}{2};1\right);\left(\dfrac{17}{20};\dfrac{13}{20}\right)$.

Bài 57. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2xy} = \sqrt{x-2xy} + 2 \\ \sqrt{x^2+4x^2y^2+1} - x\sqrt{1-4y^2} = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x + 2xy \geq 0 \\ x - 2xy \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ 1 - 4y^2 \geq 0 \end{cases}$.

Nhận thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x>0$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{x+2xy}-\sqrt{x-2xy}=2\Rightarrow 2x-2\sqrt{x^2-4x^2y^2}=4.$$

$$\Leftrightarrow x-2=\sqrt{x^2-4x^2y^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x^2-4x+4=x^2-4x^2y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ y^2=\dfrac{x-1}{x^2}\end{cases}.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2+4x-3}-\sqrt{x^2-4x+4}=3.$$

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{x^2+4x-3}-\sqrt{x^2-4x+4}=3\\ \sqrt{x^2+4x-3}+\sqrt{x^2-4x+4}=\dfrac{8x-7}{\sqrt{x^2+4x-3}-\sqrt{x^2-4x+4}}=\dfrac{8x-7}{3}\end{cases}$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+4x-3}=\frac{8x+2}{3}\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+4x-3}=4x+1\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $(x;y)=\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 58. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-4\sqrt{y}+2\sqrt{x-y}=4\sqrt{xy}\\ 2y+\sqrt{x}=\sqrt{x-y}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge 0, x-y\ge 0$.

Nhận thấy $x=0\Rightarrow y=0$.

Xét $x>0,y>0$ khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x-4\sqrt{y}+2\sqrt{x-y}=4\sqrt{xy}\\ 2y+\sqrt{x}-\sqrt{x-y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4\sqrt{y}+2\sqrt{x-y}=4\sqrt{xy}\\ y\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}\right)=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-4\sqrt{y}+2\sqrt{x-y}=4\sqrt{xy}\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\sqrt{x}=0\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;0)$.

Bài 59. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{1-y}=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \\ \dfrac{4xy}{x+y}+\sqrt{x^2-y^2}=x+y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0, x+y \neq 0, x \geq -1, \dfrac{x-1}{x} \geq 0, x^2-y^2 \geq 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$x+y-\frac{4xy}{x+y}=\sqrt{x^2-y^2} \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{x+y}=\sqrt{x^2-y^2} \Rightarrow \frac{(x-y)^4}{(x+y)^2}=x^2-y^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[(x-y)^3-(x+y)^3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x-y=x+y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=0 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=0$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{x-1}{x}}+1 \Leftrightarrow x+1=\frac{x-1}{x}+1+2\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}-1=2\sqrt{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{x}=2\sqrt{\frac{x-1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left(\dfrac{x^2-x+1}{x}\right)^2=4.\dfrac{x-1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

<u>TH2:</u> Nếu $y=x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=\sqrt{\frac{x-1}{x}} \Rightarrow 2-2\sqrt{1-x^2}=\frac{x-1}{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2}=1+\frac{1}{x}.$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1-x^2\right)=\frac{(x+1)^2}{x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 4x^2(1-x)-x-1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6\sqrt[3]{28-3\sqrt{87}}}-\dfrac{\sqrt[3]{28-3\sqrt{87}}}{6} \end{array}\right.$$

Thử lại thấy không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

Bài 60. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y^2=\dfrac{y^2}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ y+x^2=\dfrac{x+y^2}{y+\sqrt{1-y^2}} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-1\le y\le 1, y+\sqrt{1-y^2}\ne 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x+y^2\left(1-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=0\Leftrightarrow x+y^2.\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0.$$

$$\Leftrightarrow x+y^2.\frac{2x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x+1\right)}=0.$$

$$\Leftrightarrow x\left(1+\frac{2y^2}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x+1\right)}\right)=0\Leftrightarrow x=0\text{ (do}$$

$\sqrt{x^2+1}+x>0, \sqrt{x^2+1}-x+1>0$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$y=\frac{y^2}{y+\sqrt{1-y^2}}\Leftrightarrow y\left(\frac{y}{y+\sqrt{1-y^2}}-1\right)=0\Leftrightarrow\frac{y\sqrt{1-y^2}}{y+\sqrt{1-y^2}}=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=0 \\ \sqrt{1-y^2}=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\pm 1 \end{array}\right..$$

Suy ra $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(0;-1\right);\left(0;1\right)$ thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(0;-1\right);\left(0;1\right)$.

Bài 61. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y-2}=\sqrt{\left(x+1\right)\left(y-1\right)} \\ \left(x-y+2\right)^2+\left(x^2+4x+3\right)\left(y^2-1\right)=81 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 0, y \ge 2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-2}=\sqrt{(x+1)(y-1)} \Leftrightarrow x+y-2+2\sqrt{x(y-2)}=(x+1)(y-1)$$

$$\Leftrightarrow xy-2x+1-2\sqrt{x(y-2)}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x(y-2)}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x(y-2)}=1.$$

$\Leftrightarrow x(y-2)=1$. Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình nên với $x \ne 0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{x}+2$.

Thay $y=\dfrac{1}{x}+2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+4x+3\right)\left(\left(\frac{1}{x}+2\right)^2-1\right)=81 \Leftrightarrow 4(x+1)^4=81x^2.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2(x+1)^2=9x \\ 2(x+1)^2=-9x \end{array}\right. \xleftrightarrow{x>0} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}, y=4 \\ x=2, y=\dfrac{5}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};4\right);\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 62. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1+2x-2x^2\sqrt{1+y}=4x^3y+7x^2 \\ x^2(xy+1)+(x+1)^2=x^2y+5x \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y \ge -1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$x^2y(x-1)+2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2y+2x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2y+2x-1=0 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $x=1$ thay vào hệ ta được $y=-1$.

<u>TH2:</u> Nếu $x^2y+2x-1=0 \Rightarrow y=\dfrac{1-2x}{x^2}$ (do $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình).

Thay $y=\dfrac{1-2x}{x^2}$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$1+2x-2x^2\sqrt{1+\frac{1-2x}{x^2}}=4x^3.\frac{1-2x}{x^2}+7x^2 \Leftrightarrow 2x^2\sqrt{\left(x-1\right)^2}=\left(1-2x\right)\sqrt{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-2x\ge 0\\ 4x^4\left(x-1\right)^2=\left(1-2x\right)^2x^2\end{cases} \xleftrightarrow{x\neq 0} \begin{cases}1-2x\ge 0\\ 4x^2\left(x-1\right)^2=\left(1-2x\right)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ x=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},y=2+2\sqrt{2}\\ x=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}},y=2+2\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};2+2\sqrt{2}\right);\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}};2+2\sqrt{2}\right)$.

Bài 63. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(x-y\right)\left(\left(x+3\right)^2+\left(y+3\right)^2+xy-2\right)=3y^2+15y+13\\ x^2+\sqrt{2x+y+2}=3\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $2x+y+2\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$\left(x+2\right)^3+4\left(x+2\right)=\left(y+3\right)^3+4\left(y+3\right)\Leftrightarrow x+2=y+3\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2+\sqrt{3x+1}=3\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)+\left(\sqrt{3x+1}-2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+1\right)+\frac{3\left(x-1\right)}{\sqrt{3x+1}+2}=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x+1+\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}\right)=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=0.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;0\right)$.

Bài 64. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=4 \\ x^4+(y+1)^2=x^3(y+2)+xy+1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge 1, y \ge -1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$(x^3-y)(x-y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x^3 \\ y=x-2 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=x-2$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=4 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=3.$$

<u>TH2:</u> Nếu $y=x^3$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+1}=4 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=8.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)=(5;3);(2;8)$.

Bài 65. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y-1)+2y=x(x+1) \\ 4x^2+3x+3=4y\sqrt{y+3}+2\sqrt{2x-1} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \ge \frac{1}{2}, y \ge -3$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x-y)(x+2)=0 \\ 4x^2+3x+3=4y\sqrt{y+3}+2\sqrt{2x-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \left(2x-\sqrt{x+3}\right)^2+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x=\sqrt{x+3} \\ \sqrt{2x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Chủ đề 14. KỸ THUẬT LƯỢNG GIÁC HÓA

Nội dung chủ đề này đề cập đến phép thế lượng giác khi giải hệ. Ky thuật này tôi đã nhắc đến trong cuốn phương trình, bất phương trình vô tỷ. Mục đích cung cấp cho các em đầy đủ các công cụ khi tiếp xúc với hệ phương trình giúp phản xạ khi hệ có các dấu hiệu nhận biết phép thế lượng giác. Kỹ thuật này được nhắc lại một lần nữa trong chương 3 khi xử lý hệ lặp nhiều ẩn.

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Phương trình lượng giác cơ bản: $\begin{cases} \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi \\ \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \\ \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \end{cases}$.

Dấu hiện nhận biết

- Một phương trình của hệ có dạng: $(px - a)^2 + (qy - b)^2 = c^2$ đặt $\begin{cases} px = a + c\sin\alpha \\ qy = b + c\cos\alpha \end{cases}, \alpha \in [0;2\pi]$.
- Nếu từ hệ phương trình suy ra $x \in [-a;a], y \in [-b;b]$

Đặt $\begin{cases} x = a\sin\alpha \\ y = b\sin\beta \end{cases}, (\alpha, \beta \in [0;2\pi])$.

Dạng này thường đi cùng các căn thức $\sqrt{a^2 - x^2}$ và $\sqrt{b^2 - y^2}$.

Các giá trị lượng giác của các góc đặc biệt:

- $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.
- $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; \cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

Một số công thức lượng giác hay sử dụng:

Công thức cộng, trừ bậc nhất:

- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \cos x\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$.

- $\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(x \mp \frac{\pi}{6}\right)$.
- $\sqrt{3}\sin x \pm \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \pm \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x \pm \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(x \mp \frac{\pi}{3}\right)$.

Góc nhân đôi:

- $\sin 2x = 2\sin x\cos x; \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}; \sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}; \cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

Góc nhân ba:

- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
- $\tan 3x = \dfrac{\tan x\left(3-\tan^2 x\right)}{1-3\tan^2 x}; \cot 3x = \dfrac{\cot x\left(\cot^2 x - 3\right)}{3\cot^2 x - 1}$.

Góc nhân bốn:

- $\sin 4x = 4\cos x\left(\sin x - 2\sin^3 x\right); \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

Góc nhân 5:

- $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x; \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$.

Tổng quát: $\cos nx$ là đa thức bậc n với $\cos x$ và $\sin nx$ là đa thức bậc n với $\sin x$ (với n lẻ).

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = \dfrac{1}{4} \\ y\sqrt{1-x^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Lời giải

<u>**Cách 1**</u>: Điều kiện: $|x| \le 1, |y| \le 1$ để hệ phương trình có nghiệm ta phải có $x > 0, y > 0$ vậy $0 < x \le 1, 0 < y \le 1$.

Đặt $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\sin\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{1}{4}\\ \cos\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\\ 2\cos\beta\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos(\alpha-\beta)=1\\ 2\cos(\alpha+\beta)=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=\pm\dfrac{\pi}{3}\\ \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha=\dfrac{5\pi}{12}\\ \beta=\dfrac{\pi}{12}\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha=\dfrac{\pi}{12}\\ \beta=\dfrac{5\pi}{12}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ y=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right);\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right).$$

<u>Cách 2:</u> Nhận xét đây là hệ đối xứng loại II trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được: $y\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{1-y^2}\xleftrightarrow{x,y\geq 0}x^2(1-y^2)=y^2(1-x^2)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 16x^2(1-x^2)=1\xleftrightarrow{x\geq 0}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{array}\right..$$

Ta có kết quả tương tự.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ (3x-4x^3)(3y-4y^3)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in[0;2\pi]\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)(3\cos\alpha-4\cos^3\alpha)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin 3\alpha\cos 3\alpha=-\frac{1}{2}.$$

$\Leftrightarrow \sin 6\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$.

Do $\alpha \in \left[0;2\pi\right] \Rightarrow \alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{7\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{19\pi}{12}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(\sin\alpha;\cos\alpha\right), \alpha \in \left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{7\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12};\dfrac{15\pi}{12};\dfrac{19\pi}{12}\right\}.$$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2}\left(x-y\right)\left(1+4xy\right) = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1\end{cases}$.

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên tồn tại $\alpha \in \left[0;2\pi\right]$ sao cho $x = \sin\alpha, y = \cos\alpha$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$\sqrt{2}\left(\sin\alpha - \cos\alpha\right)\left(1 + 4\sin\alpha\cos\alpha\right) = \sqrt{3}$.

Đặt $t = \sin\alpha - \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{2}, t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Phương trình trở thành:

$\sqrt{2}t\left(1 + 4.\dfrac{1-t^2}{2}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{2}t - 2\sqrt{2}t^3 - \sqrt{3} = 0$.

Phương trình này có nghiệm lẻ nên ta xử lý theo hướng khác.

$$\sqrt{2}\left(\sin\alpha - \cos\alpha\right)\left(1 + 4\sin\alpha\cos\alpha\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 4\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin 2\alpha + \sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow 8\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow 4\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{12}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - \cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{12}\right) - 4\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

$$\Leftrightarrow -2\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\3\alpha-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{13\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\\\alpha=-\frac{7\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Vì $\alpha\in\left[0;2\pi\right]\Rightarrow\alpha=\left\{\frac{13\pi}{36},\frac{37\pi}{36},\frac{61\pi}{36},\frac{17\pi}{36},\frac{41\pi}{36},\frac{65\pi}{36}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có sáu nghiệm

$\left(x;y\right)=\left(\sin\alpha;\cos\alpha\right),\alpha=\left\{\frac{13\pi}{36},\frac{37\pi}{36},\frac{61\pi}{36},\frac{17\pi}{36},\frac{41\pi}{36},\frac{65\pi}{36}\right\}$.

<u>Nhận xét.</u> Để giải phương trình $\sqrt{2}\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)\left(1+4\sin\alpha\cos\alpha\right)=\sqrt{3}$ ta có thể thực hiện cách khác như sau:

$$\sin\alpha-\cos\alpha+2\sin\alpha\sin2\alpha-2\cos\alpha\sin2\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\sin\alpha-\cos\alpha+\cos\alpha-\cos3\alpha-\sin3\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\cos3\alpha+\sin3\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\left(1-y^2\right)=2y\\y\left(1-x^2\right)=2x\end{cases}$.

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Nhận thấy $x=\pm1,y=\pm1$ không thỏa mãn hệ phương trình:

Xét $x,y\ne\pm1$ khi đó hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases}x=\dfrac{2y}{1-y^2}\\y=\dfrac{2x}{1-x^2}\end{cases}$.

Đặt $x=\tan\alpha,y=\tan\beta,\left(\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\backslash\left\{\pm\frac{\pi}{4}\right\}\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}\\\tan\beta=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\tan\alpha=\tan2\beta\\\tan\beta=\tan2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\beta+k\pi\\\beta=2\alpha+l\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{k+2l}{3}\pi\\\beta=-\dfrac{l+2k}{3}\pi\end{cases}.$$

Vì $\alpha,\beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \backslash \left\{\pm\frac{\pi}{4}\right\} \Rightarrow (k;l) = (0;0);(-1;1);(1;-1)$.

Suy ra $(x;y) = (0;0);(-\sqrt{3};\sqrt{3});(\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = (0;0);(-\sqrt{3};\sqrt{3});(\sqrt{3};-\sqrt{3})$.

<u>Cách 2:</u> Đây là một hệ đối xứng loại II nên trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x - y - xy^2 + yx^2 = 2y - 2x \Leftrightarrow 3(x-y) + xy(x-y) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(xy+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ xy = -3 \end{array}\right..$$

Xét từng trường hợp thay ngược lại hệ ta có kết quả tương tự trên. Chú ý với trường hợp $xy = -3$ ta cần cộng theo vế hai phương trình của hệ đưa về hệ mới dạng đối xứng loại I dễ xử lý hơn(hoặc có thể thực hiện phép thế).

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(1-y^2) = 2y \\ y(1-3x^2) = 3x - x^3 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $y = \pm 1, x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y \neq \pm 1, x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ khi đó hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} x = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ y = \dfrac{3x - x^3}{1-3x^2} \end{cases}$.

Đặt $x = \tan\alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \backslash \left\{\pm\frac{\pi}{6}\right\}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ y = \dfrac{\tan\alpha(3-\tan^2\alpha)}{1-3\tan^2\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ y = \tan 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha} \\ y = \tan 3\alpha \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \tan 6\alpha \\ y = \tan 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{k\pi}{5} \\ y = \tan 3\alpha \end{cases} \xleftrightarrow{\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{6}\right\}} \alpha \in \left\{-\frac{2\pi}{5};-\frac{\pi}{5};0;\frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Vậy hệ phương trình có năm nghiệm là:

$$(x;y) = (\tan\alpha;\tan 3\alpha), \alpha \in \left\{-\frac{2\pi}{5};-\frac{\pi}{5};0;\frac{\pi}{5};\frac{2\pi}{5}\right\}.$$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 4x^3 + 4y^3 = 3x^2y + 2\sqrt{3}xy + 2x \end{cases}.$

Lời giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $x^2 = y^2 + 1 \ge 1 \Rightarrow |x| \ge 1$.

Đặt $x = \dfrac{1}{\cos\alpha}, \alpha \in [0;\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow y = \tan\alpha$.

Phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$\frac{4}{\cos^3\alpha} + 4\tan^3\alpha = \frac{3}{\cos^2\alpha}\tan\alpha + \frac{2\sqrt{3}}{\cos\alpha}\tan\alpha + \frac{2}{\cos\alpha}.$$

$$\Leftrightarrow \sin 3\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \sin 3\alpha + 2\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 3.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 3\alpha = 1 \\ \sin\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1 \end{array}\right. \xleftrightarrow{\alpha \in [0;\pi]} \alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + y}}} \\ y = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} \end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện để hệ phương trình có nghiệm là:

$$\begin{cases} x, y \ge 0 \\ \sqrt{x + 2} \le 2, \sqrt{y + 2} \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}.$$

Nếu $x > y \Rightarrow x - y = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + y}}} - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} < 0$ vô lý.

Nếu $x<y\Rightarrow x-y=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+y}}}-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}>0$ vô lý.

Vậy $x=y\Leftrightarrow x=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}$.

Đặt $x=2\cos\alpha,\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$2\cos t=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos t}}}\Leftrightarrow 2\cos t=\sqrt{2+\sqrt{2-2\cos\frac{t}{2}}}.$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t=\sqrt{2+2\sin\frac{t}{4}}\Leftrightarrow 2\cos t=\sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{4}\right)\right)}.$$

$$\Leftrightarrow 2\cos t=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8}+k2\pi\\ t=-\frac{\pi}{4}+\frac{t}{8}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{2\pi}{9}+k\frac{16\pi}{9}\\ t=-\frac{2\pi}{7}+k\frac{16\pi}{7}\end{array}\right..$$

Vì $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t=\frac{2\pi}{9},-\frac{2\pi}{7}\Rightarrow(x;y)=(2\cos t;2\cos t),t=\left\{\frac{2\pi}{9},-\frac{2\pi}{7}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2\cos t;2\cos t),t=\left\{\frac{2\pi}{9},-\frac{2\pi}{7}\right\}$.

<u>Nhận xét.</u> Ta có thể tổng quát cho n dấu căn:

$$\begin{cases}x=\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2-\sqrt{2+y}}}}\\ y=\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}}\end{cases}\text{(n dấu căn).}$$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(\sqrt{x(1-y)}-\sqrt{y(1-x)}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2x}+\sqrt{2y}\\ \left(\sqrt{xy}+\sqrt{(1-x)(1-y)}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}x+\sqrt{2y}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $0\le x\le 1,0\le y\le 1$.

Nhận thấy $x=y=0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x>0,y>0$ khi đó đặt $\sqrt{x}=\cos a,\sqrt{y}=\cos b,\left(a,b\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{\cos^2 a\left(1-\cos^2 b\right)}-\sqrt{\cos^2 b\left(1-\cos^2 a\right)}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\left(\cos a+\cos b\right)\\ \left(\sqrt{\cos^2 a\cos^2 b}+\sqrt{\left(1-\cos^2 a\right)\left(1-\cos^2 b\right)}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\left(\cos a+\cos b\right)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(3+\sqrt{3}\right)\sin\left(b-a\right)=\sqrt{2}\left(\cos a+\cos b\right)\\ \left(1+\sqrt{3}\right)\cos\left(b-a\right)=\sqrt{2}\left(\cos a+\cos b\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(3+\sqrt{3}\right)\sin\left(b-a\right)=\sqrt{2}\left(\cos a+\cos b\right)\\ \tan\left(b-a\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(3+\sqrt{3}\right)\sin\left(b-a\right)=\sqrt{2}\left(\cos a+\cos b\right)\\ b-a=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{2}\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{\pi}{12}\\ b-a=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2.2\sqrt{2}.\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ b-a=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{\pi}{3}\\ b-a=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{\pi}{12}\\ b=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\cos\dfrac{\pi}{12}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ y=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+3y^2-2y=0\\ 36\left(x\sqrt{x}+3y^3\right)-27\left(4y^2-y\right)+\left(2\sqrt{3}-9\right)\sqrt{x}=1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{3x}\right)^2+\left(3y-1\right)^2=1\\ 36x\sqrt{x}+\left(2\sqrt{3}-9\right)\sqrt{x}+4\left(3y-1\right)^3-3\left(3y-1\right)=0\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{3x}=\sin\alpha\\ 3y-1=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in\left[0;\pi\right]\right)$ khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$\frac{36\sin^3\alpha}{3\sqrt{3}}+\left(2\sqrt{3}-9\right)\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}+4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=0.$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}\sin^3\alpha-3\sqrt{3}\sin\alpha+\cos3\alpha=-2\sin\alpha.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin3\alpha-\cos3\alpha=2\sin\alpha\Leftrightarrow\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\alpha-\frac{\pi}{6}=\alpha+k2\pi\\ 3\alpha-\frac{\pi}{6}=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ \alpha=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.\xleftrightarrow{\alpha\in\left[0;\pi\right]}\alpha\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{24},\frac{19\pi}{24}\right\}.$$

Suy ra $\left(x;y\right)=\left(\frac{\sin^2\alpha}{3};\frac{1+\cos\alpha}{3}\right),\alpha\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{24},\frac{19\pi}{24}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{\sin^2\alpha}{3};\frac{1+\cos\alpha}{3}\right),\alpha\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{24},\frac{19\pi}{24}\right\}.$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ \dfrac{2x^2+3y+\sqrt{3}\left(2xy-3x\right)}{4\sqrt{3}xy-3}=1\end{cases}$.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $xy\neq\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases},\alpha\in\left[0;2\pi\right]$ khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$2\sin^2\alpha+3\cos\alpha+\sqrt{3}\left(\sin2\alpha-3\sin\alpha\right)=2\sqrt{3}\sin2\alpha-3.$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+2=0.$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-1\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha+\frac{\pi}{3}=\pi+k2\pi\\ \alpha+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ \alpha=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ \alpha=-\pi+k2\pi\end{array}\right..$$

Do $\alpha\in[0;2\pi]\Rightarrow\alpha\in\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3};\pi\right\}$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $(x;y)=(\sin\alpha;\cos\alpha),\alpha\in\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3};\pi\right\}$.

<u>Cách 2:</u> Viết phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$\left(\sqrt{3}-2x\right)\left(x-\sqrt{3}y-\sqrt{3}\right)=0.$$

Xét trường hợp thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có kết quả tương tự.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ \left(3x-4x^3\right)\left(3y-4y^3\right)=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in[0;2\pi]\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)\left(3\cos\alpha-4\cos^3\alpha\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin3\alpha\cos3\alpha=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \sin6\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3}.$$

Do $\alpha\in[0;2\pi]\Rightarrow\alpha\in\left\{\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12};\frac{3\pi}{4};\frac{13\pi}{12};\frac{17\pi}{12};\frac{7\pi}{4}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\sin\alpha;\cos\alpha\right),\alpha\in\left\{\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12};\frac{3\pi}{4};\frac{13\pi}{12};\frac{17\pi}{12};\frac{7\pi}{4}\right\}.$$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\3\left(x+y\right)-4\left(x^3+y^3\right)=x-y\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\y=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in\left[0;2\pi\right]\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$3\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)-4\sin^3\alpha-4\cos^3\alpha=\sin\alpha-\cos\alpha.$$

$$\Leftrightarrow\sin3\alpha-\cos3\alpha=\sin\alpha-\cos\alpha\Leftrightarrow\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\alpha-\frac{\pi}{4}=\alpha-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\3\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}-\alpha+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=k\pi\\\alpha=\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right..$$

Do $\alpha\in\left[0;2\pi\right]\Rightarrow\alpha\in\left\{0;\pi;2\pi;\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8};\frac{11\pi}{8};\frac{15\pi}{8}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có bẩy nghiệm là

$$\left(x;y\right)=\left(\sin\alpha;\cos\alpha\right),\alpha\in\left\{0;\pi;2\pi;\frac{3\pi}{8};\frac{7\pi}{8};\frac{11\pi}{8};\frac{15\pi}{8}\right\}.$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\\sqrt{3}\left(3x-4x^3\right)+3y-4y^3=2\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\y=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in\left[0;2\pi\right]\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$\sqrt{3}\left(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\right)+3\cos\alpha-4\cos^3\alpha=2\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin3\alpha-\cos3\alpha=2.$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow3\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow\alpha=\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}.$$

Do $\alpha\in\left[0;2\pi\right]\Rightarrow\alpha\in\left\{\frac{2\pi}{9};\frac{8\pi}{9};\frac{14\pi}{9}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\sin\alpha;\cos\alpha\right),\alpha\in\left\{\frac{2\pi}{9};\frac{8\pi}{9};\frac{14\pi}{9}\right\}.$$

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y\left(x-2x^3\right)\left(8y^4-8y^2+1\right)=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in\left[0;2\pi\right]\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$4\cos\alpha\left(\sin\alpha-2\sin^3\alpha\right)\left(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1\right)=1.$$

$$\Leftrightarrow\sin4\alpha\cos4\alpha=1\Leftrightarrow\sin8\alpha=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{\pi}{48}+k\dfrac{\pi}{4}\\ \alpha=\dfrac{5\pi}{48}+k\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right..$$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 4xy-8x^3y+8y^4-8y^2+1=x+y\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in\left[0;2\pi\right]\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$4\cos\alpha\left(\sin\alpha-2\sin^3\alpha\right)+8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

$$\Leftrightarrow\sin4\alpha+\cos4\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha\Leftrightarrow\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\alpha+\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ 4\alpha+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=k\dfrac{2\pi}{3}\\ \alpha=\dfrac{\pi}{10}+k\dfrac{2\pi}{5}\end{array}\right..$$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 4xy-8x^3y+8y^4-8y^2=0\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in\left[0;2\pi\right]\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$4\cos\alpha\left(\sin\alpha-2\sin^3\alpha\right)+8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha=0.$$

$$\Leftrightarrow \sin4\alpha+\cos4\alpha-1=0\Leftrightarrow \sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=k\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right..$$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 4\sqrt{3}y-8\sqrt{3}x^3y+8y^4-8y^2=1\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in\left[0;2\pi\right]\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$4\sqrt{3}\cos\alpha\left(\sin\alpha-2\sin^3\alpha\right)+8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha=1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin4\alpha+\cos4\alpha=2\Leftrightarrow \sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}.$$

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ \left(16x^4-20x^2+5\right)\left(16y^4-20y^2+5\right)=\dfrac{1}{xy}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq0$.

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases},\left(\alpha\in\left[0;2\pi\right]\setminus\left\{0;\pi;2\pi;\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right\}\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$\left(16\sin^4\alpha-20\sin^2\alpha+5\right)\left(16\cos^4\alpha-20\cos^2\alpha+5\right)=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

$$\Leftrightarrow \sin5\alpha\cos5\alpha=1\Leftrightarrow \sin10\alpha=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{\pi}{60}+k\dfrac{\pi}{5}\\ \alpha=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{5}\end{array}\right..$$

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 16x^4-20x^2+16y^4-20y^2+10=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\neq0$.

Đặt $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\alpha \end{cases}, \left(\alpha \in \left[0; 2\pi\right] \setminus \left\{0; \pi; 2\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}\right)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$\left(16\sin^4\alpha - 20\sin^2\alpha + 5\right) + \left(16\cos^4\alpha - 20\cos^2\alpha + 5\right) = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}.$$

$\Leftrightarrow \sin 5\alpha + \cos 5\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \sin\left(5\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = k\frac{\pi}{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{1 - y^2} = 1 \\ y + \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3} \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x = \cos a \\ y = \cos b \end{cases}, \left(a, b \in \left[0; \pi\right]\right)$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \cos a + \sqrt{1 - \cos^2 b} = 1 \\ \cos b + \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos a + \sin b = 1 \\ \cos b + \sin a = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Nhân chéo hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{3}\left(\cos a + \sin b\right) = \sin a + \cos b \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos a - \sin a = \cos b - \sqrt{3}\sin b.$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(b + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + \frac{\pi}{6} = b + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ a + \frac{\pi}{6} = -b - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right..$$

Do $a, b \in \left[0; \pi\right] \Rightarrow a - b = \frac{\pi}{6}$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ, suy ra:

$$a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x; y\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2} \\ y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $x = \tan\alpha, \alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{1-y^2}{1+y^2} \\ y = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{1-y^2}{1+y^2} \\ y = \cos 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{\sin^2 2\alpha}{1+\cos^2 2\alpha} \\ y = \cos 2\alpha \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 + \left(\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)^2\right)\tan\alpha = \left(\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)^2 \\ y = \cos 2\alpha \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \tan\alpha = 0 \\ \tan\alpha = 1 \\ \tan\alpha = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}} + \dfrac{\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}}{3} \end{array}\right. \\ y = \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 0 \\ x = y = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}} + \dfrac{\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}}{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(1;0\right);\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}}+\frac{\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}}{3};-\frac{1}{3}-\frac{2}{3\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}}+\frac{\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}}{3}\right)$$

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2}=1-y^2\\ \sqrt{y^2}=1-x^2\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy nếu $\left(x_0;y_0\right)$ là nghiệm của hệ phương trình thì $\left(\pm x_0;\pm y_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ vậy ta chỉ cần xét các nghiệm không âm sau đó lấy $\pm$ ta sẽ được đầy đủ nghiệm của hệ.

Đặt $\begin{cases}x=\sin a\\ y=\sin b\end{cases},\left(a,b\in\left[0;\pi\right]\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin^2 a}=1-\sin^2 b\\ \sqrt{\sin^2 b}=1-\sin^2 a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin a=\cos^2 b\\ \sin b=\cos^2 a\end{cases}\Rightarrow \sin b=1-\sin^2 a=1-\cos^4 b.$$

$$\Leftrightarrow \sin b=1-\left(1-\sin^2 b\right)^2\xleftrightarrow{0\le\sin b\le 1}\left[\begin{array}{l}\sin b=0\\ \sin b=1\\ \sin b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bảy nghiệm:

$$\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(0;-1\right);\left(1;0\right);\left(-1;0\right);\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2};\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1\\ \left(1-x\right)\left(1+y\right)=2\end{cases}$.

Lời giải

__**Cách 1:**__ Điều kiện: $-1\le x,y\le 1$.

Đặt $\begin{cases}x=\sin a\\ y=\sin b\end{cases},\left(a,b\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\sin a\cos b+\sin b\cos a=1\\ (1-\sin a)(1+\sin b)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(a+b)=1\\ (1-\sin a)(1+\sin b)=2\end{cases}.$$

$$\xleftrightarrow{a,b\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}\begin{cases}a+b=\dfrac{\pi}{2}\\ (1-\sin a)(1+\cos a)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{\pi}{2}\\ \left[\begin{array}{l}\sin a=-1\\ \cos a=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\dfrac{\pi}{2}\\ \left[\begin{array}{l}a=-\dfrac{\pi}{2}\\ a=0\end{array}\right.\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

<u>Cách 2:</u> Nhận thấy $x=1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq 1$ từ phương trình thứ hai của hệ rút ra $y=\dfrac{2}{1-x}-1=\dfrac{x+1}{1-x}$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}+\frac{x+1}{1-x}\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{-4x}{(x-1)^2}}+\frac{x+1}{1-x}\sqrt{1-x}=1\Rightarrow x\leq 0.$$

Mặt khác:

$$x\sqrt{\frac{-4x}{(x-1)^2}}+\frac{x+1}{1-x}\sqrt{1-x}=x\sqrt{\frac{-4x}{(x-1)^2}}+\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}\leq\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}\leq x+1\leq 1,\forall x\leq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=0\Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y(1-3x^2)=3x-x^3\\ x(1-3y^2)=3y-y^3\end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},y\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ khi đó hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases}y=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\\ x=\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}\end{cases}$.

Đặt $x=\tan\alpha, \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\backslash\left\{\pm\frac{\pi}{6}\right\}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} y=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \\ \tan\alpha=\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\tan 3\alpha \\ \tan\alpha=\tan 9\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{k\pi}{8} \\ y=\tan 3\alpha \end{cases}, k\in\mathbb{Z}.$$

Vì $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\backslash\left\{\pm\frac{\pi}{6}\right\}\Rightarrow\alpha\in\left\{-\frac{3\pi}{8};-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{8};0;\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{8}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có bẩy nghiệm là

$\left(x;y\right)=\left(\tan\alpha;\tan 3\alpha\right), \alpha\in\left\{-\frac{3\pi}{8};-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{8};0;\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{8}\right\}$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y+2x+2x^3=3x^2y \\ x^2-y^2=-1 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x=0, x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq 0, x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ khi đó từ phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$x-y=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\Rightarrow x-y\neq 0.$$

Đặt $x=\tan\alpha, \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\backslash\left\{\pm\frac{\pi}{6};0\right\}$ suy ra $x-y=\tan 3\alpha$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$x^2-y^2=-1\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x+y\right)=-1\Leftrightarrow x+y=-\frac{1}{x-y}$$

$$\Rightarrow x=\frac{x+y+x-y}{2}=\frac{x-y}{2}-\frac{1}{x-y}=\frac{\tan^2 3\alpha-2}{2\tan 3\alpha}=-\cot 6\alpha.$$

Suy ra $\tan\alpha=-\cot 6\alpha\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}\Rightarrow\alpha\in\left\{-\frac{3\pi}{10};-\frac{\pi}{10};\frac{\pi}{10};\frac{3\pi}{10}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là

$$\left(x;y\right)=\left(\tan\alpha;\tan\alpha-\tan 3\alpha\right),\alpha\in\left\{-\frac{3\pi}{10};-\frac{\pi}{10};\frac{\pi}{10};\frac{3\pi}{10}\right\}.$$

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+4y^2=1\\16x^5-20x^3+5x+512y^5-160y^3+10y+\sqrt{2}=0\end{cases}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}x=\sin\alpha\\2y=\cos\alpha\end{cases},\alpha\in\left[0;2\pi\right]$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$\left(16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha\right)+\left(16\cos^5\alpha-20\cos^3\alpha+5\cos\alpha\right)+\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 5\alpha+\cos 5\alpha=-\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin\left(5\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow \alpha=-\frac{3\pi}{20}+k\frac{2\pi}{5},k\in\mathbb{Z}.$$

Do $\alpha\in\left[0;2\pi\right]\Rightarrow \alpha\in\left\{\frac{\pi}{4};\frac{13\pi}{20};\frac{21\pi}{20};\frac{29\pi}{20};\frac{37\pi}{20}\right\}.$

Vậy hệ phương trình có năm nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\sin\alpha;\frac{\cos\alpha}{2}\right),\alpha\in\left\{\frac{\pi}{4};\frac{13\pi}{20};\frac{21\pi}{20};\frac{29\pi}{20};\frac{37\pi}{20}\right\}.$$

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=1\\4y^3-3y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $x=y$ (xem chủ đề kỹ thuật sử dụng tính đơn điệu của hàm số).

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $4x^3-3x=\sqrt{1-x^2}$.

Đặt $x=\cos\alpha,\alpha\in\left[0;\pi\right]$ phương trình trở thành:

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\Leftrightarrow \cos 3\alpha=\sin\alpha\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\ \alpha=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right..$$

Do $\alpha \in \left[0;\pi\right] \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{8}\right\}$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\cos\alpha;\cos\alpha\right),\alpha \in \left\{\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{8}\right\}$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=y\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right)\\ \sqrt{x}-\ln\left(y+1\right)=\sqrt{y}-\ln\left(x+1\right)\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $0 \le x,y \le 1$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$\sqrt{x}+\ln\left(x+1\right)=\sqrt{y}+\ln\left(y+1\right) \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}+\ln\left(t+1\right)$ trên $\left[0;+\infty\right)$, ta có:

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{t+1}>0,\forall t>0$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$.

Đặt $x=\sin\alpha,\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ khi đó phương trình trở thành:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\sin\alpha\left(1+2\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos\alpha}=\sin\alpha\left(1+2\cos\alpha\right).$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{\alpha}{2}=0\\ \sin\frac{3\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \xleftrightarrow{\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]} \alpha \in \left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(1;1\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2\left(3y^5-10y^3+3y\right)\sqrt{x^2+1}=\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)^2\\ \sqrt{3x-2y}+\sqrt{2x-y}=\sqrt{y}-\sqrt{x}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge 0,3x-2y\ge 0,2x-y\ge 0$.

Nhận thấy $x=y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x^2+y^2>0$ phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\left(\sqrt{3x-2y}-\sqrt{2x-y}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{3x-2y}+\sqrt{2x-y}}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{3x-2y}+\sqrt{2x-y}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0\Leftrightarrow x=y.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$2\left(3x^5-10x^3+3x\right)\sqrt{x^2+1}=\left(x^2+1\right)^3\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{6x}{1+x^2}-4\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3.$$

Đặt $x=\tan\alpha,\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ phương trình trở thành:

$$\cos\alpha=3\sin 2\alpha-4\sin^3 2\alpha\Leftrightarrow \cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-6\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi}{14}+k\frac{2\pi}{7}\\ \alpha=\frac{\pi}{10}-k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right.\xleftrightarrow{\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)}\alpha\in\left\{\frac{\pi}{14},\frac{3\pi}{14},\frac{5\pi}{14}\right\}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(\tan\alpha;\tan\alpha),\alpha\in\left\{\frac{\pi}{14},\frac{3\pi}{14},\frac{5\pi}{14}\right\}.$$

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1-2y\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2y^2\\ 4x^3-y^3-6x^2y+3xy^2+3x-3y=0\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1,1-2y\sqrt{1-x^2}\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$\left(2x-y\right)^3+3\left(2-y\right)=y^3+3y \Leftrightarrow 2x-y=y \Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$\sqrt{\dfrac{1-2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$.

Đặt $x=\cos\alpha, \alpha\in\left[0;\pi\right]$ phương trình trở thành:

$$\sqrt{\frac{1-2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2}}=1-2\cos^2\alpha \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-\sin 2\alpha}{2}}=-\cos 2\alpha.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha \le 0 \\ \dfrac{1-\sin 2\alpha}{2}=\cos^2 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\le \alpha \le \dfrac{3\pi}{4} \\ \dfrac{1-\sin 2\alpha}{2}=\cos^2 2\alpha \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\le \alpha \le \dfrac{3\pi}{4} \\ 1-\sin 2\alpha=0 \\ 2\left(1+\sin 2\alpha\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{\pi}{4} \\ \alpha=\dfrac{7\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, y=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x=-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}, y=-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right).$$

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{1-x}=2y^2-1+2x\sqrt{1-y^2} \\ \left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-y\right)=1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\le 1, -1\le y\le 1$.

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $y=x$ (xem chủ đề hệ phương trình chứa căn thức).

Thay $y=x$ vào phương trình đầu của hệ ta được: $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.

Đặt $x=\cos\alpha, \alpha \in [0;\pi]$ phương trình trở thành:

$$\sqrt{1-\cos\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-\cos\alpha} = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \geq 0 \\ 1-\cos\alpha = 1+\sin 4\alpha \end{cases} \xleftrightarrow{\alpha\in[0;\pi]} \alpha = \frac{3\pi}{10}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\cos\frac{3\pi}{10};\cos\frac{3\pi}{10}\right)$.

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2y^3 + y = 2\left(\sqrt{1-x}\right)^3 + \sqrt{1-x} \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1-x} \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1-x} \\ \sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \quad (1) \end{cases}.$$

Để giải phương trình (1) thực hiện tương tự bài toán trên tìm được nghiệm của hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\cos\frac{3\pi}{10};\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{20}\right)$.

Chủ đề 15. KỸ THUẬT HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

DẠNG 1: HỆ SỐ BẤT ĐỊNH LÀ HẰNG SỐ

Phương trình có dạng $\begin{cases} A = F(x,y) = 0 \ (1) \\ B = G(x,y) = 0 \ (2) \end{cases}$.

Khi đó lấy $a.(1) + b.(2)$, (trong đó a,b là các hằng số được xác định sau) ta được một phương trình và mục đích của ta là đưa phương trình đó về dạng tích(hay phân tích được thành nhân tử). Thông thường lấy $a = 1$ hoặc $b = 1$.

Nếu $F(x,y)$ bậc cao hơn $G(x,y)$ khi đó lấy $(1) + k.(2)$.

Thông thường việc dùng hệ số bất định mục đích chúng ta hướng tới là đưa về các đẳng thức có dạng sau:

Dạng 1: $\underline{\alpha\left(mx + ny\right)^2 + \beta\left(mx + ny\right) + \lambda = 0}$.

Dạng 2: $\left(x + a\right)^3 = \left(y + b\right)^3$ hoặc $\left(ax + b\right)^3 = \left(cx + d\right)^3$.

Dạng 3: $\left(x + a\right)^4 = \left(y + b\right)^4$ hoặc $\left(ax + b\right)^4 = \left(cy + d\right)^4$.

Chú ý:

- Hệ phương trình bậc hai giải được bằng phương pháp hệ số bất định.
- Nếu trong hệ phương trình có đa thức bậc cao nhất là bậc 2 ta nghĩ đến dạng 1, nếu đa thức cao nhất là bậc 3 ta nghĩ đến dạng 2 và nếu đa thức bậc cao nhất là 4 ta nghĩ đến dạng 3.
- Nếu cả hai phương trình của hệ đều viết lại được thành phương trình bậc hai của x hoặc y ta thử cho các hệ số của hai phương trình tỷ lệ với nhau (xem dạng 2).
- Hạn chế của phương pháp này là việc đồng nhất hệ số để tìm các hệ số bất định ở trên lại đưa về giải một hệ phương trình nhiều ẩn, các bước tính toán phải hết sức cẩn thận và như vậy việc giải bài toán bằng phương pháp này làm ngược lại tư duy giải hệ.

DẠNG 2: HỆ SỐ BẤT ĐỊNH LÀ BIỂU THỨC CHỨA BIẾN

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} A = A(x,y) = 0 \\ B = B(x,y) = 0 \end{cases}$.

Trong đó $A(x,y)$ có bậc cao hơn bậc của $B(x,y)$. Trường hợp hệ số bất định là biểu thức chứa biến tức ta lấy $A + p(x,y).B$, (với $p(x,y) = ax + by + c$ hoặc

$p(x,y)=ax^2+by^2+cxy+d$) mục đích là đưa phương trình $A+p(x,y).B=0$ phân tích được thành nhân tử.

Bước 1: Tìm tập nghiệm của phương trình ít nhất là hai cặp nghiệm phân biệt chẳng hạn là $(x;y)=(m;n);(p;q)$.

Việc tìm nghiệm này bằng cách thử các giá trị đặc biệt của ẩn như $0;\pm\frac{1}{2};\pm1;\pm2;\pm3;...$

Bước 2: Xác định mối liên hệ giữa hai nghiệm đó bằng cách xác định phương trình đường thẳng đi qua hai điểm trên là:

$$\Delta:(n-q)x-(m-p)y+mq-np=0 .$$

Mục đích của chúng ta là phân tích phương trình $A+p(x,y).B$ sao cho có nhân tử chung $(n-q)x-(m-p)y+mq-np$.

Bước 3: Thay $x=\frac{m-p}{n-q}y-\frac{mq-np}{n-q}$ hoặc $y=\frac{n-q}{m-p}x+\frac{mq-np}{m-p}$ vào hai phương trình của hệ ta được $\begin{cases}A=A_1(x,y)\\B=B_1(x,y)\end{cases}$.

Khi đó biểu thức chứa biến(hệ số bất định ở đây) là $p(x,y)=-\frac{A_1(x,y)}{B_1(x,y)}$.

Ưu điểm: Bài toán có thể giải theo rất nhiều cách với mỗi hệ số $p(x,y)$ xác định ta có một cách.

Hạn chế: Phương pháp này yêu cầu chúng ta phải đoán trước được ít nhất hai nghiệm của hệ và dễ mắc sai lầm trong khi tính toán.

Trong chủ đề này đề cập lại 1 số hệ phương trình bậc hai hai ẩn dạng tổng quát đã biết cách giải trong chủ chương 1 hoặc chủ đề 1 trong chương 2. Với hy vọng cung cấp cho bạn đọc nhiều hướng tiếp cận khác nhau với một bài toán hệ phương trình.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{1}{5}\\4x^2+3x+3xy+y=\frac{57}{25}\end{cases}$.

Nhận xét. Đây là hệ phương trình bậc hai hai ẩn dạng tổng quát ta dễ dàng xử lý được bằng kỹ thuật đưa về hệ bậc nhất hai ẩn đề cập trong chủ đề 1. Dưới đây trình bày lại lời giải bài toán bằng kỹ thuật hệ số bất định.

Lời giải

Cách 1: Viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{1}{5}=0 & (1) \\ 4x^2+3x+3xy+y-\dfrac{57}{25}=0 & (2) \end{cases}$

Lấy $a.(1)+b.(2)$ (trong đó a,b là các hằng số xác định sau) theo vế ta được

$$a\left(x^2+y^2-\frac{1}{5}\right)+b\left(4x^2+3xy+3x+y-\frac{57}{25}\right)=0 .$$

$$\Leftrightarrow a\left[\left(1+\frac{4b}{a}\right)x^2+\frac{3b}{a}xy+y^2\right]+b\left(3x+y\right)-\frac{a}{5}-\frac{57}{25}b=0 .$$

Ta tìm các hằng số a,b thích hợp sao cho $\left(1+\dfrac{4b}{a}\right)x^2+\dfrac{3b}{a}xy+y^2=k\left(3x+y\right)^2$,

điều này tương đương với $\begin{cases} k=1 \\ 1+\dfrac{4b}{a}=9 \\ \dfrac{3b}{a}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ b=2a \end{cases}$. Chọn $\left(a;b\right)=\left(1;2\right)$ và ta

được phương trình $\left(3x+y\right)^2+2\left(3x+y\right)-\dfrac{119}{25}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+y=\dfrac{7}{5} \\ 3x+y=-\dfrac{17}{5} \end{array}\right.$.

- Với $3x+y=\dfrac{7}{5}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x+y=\dfrac{7}{5} \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{7}{5}-3x \\ 10x^2-\dfrac{42}{5}x+\dfrac{44}{25}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5};y=\dfrac{1}{5} \\ x=\dfrac{11}{25};y=\dfrac{2}{25} \end{array}\right. .$$

- Với $3x+y=-\dfrac{17}{5}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x+y=-\dfrac{17}{5} \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{17}{5}-3x \\ 10x^2+\dfrac{102}{5}x+\dfrac{284}{25}=0 \end{cases} \text{(vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right);\left(\frac{11}{25};\frac{2}{25}\right)$.

Cách 2: Viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases}(2x-y)^2+(x+2y)^2=1\\(2x-y)(x+2y)+(2x-y)+(x+2y)=\frac{47}{25}\end{cases}$.

Đến đây đặt ẩn phụ $u=2x-y, v=x+2y$ và giải bằng phép thế.

Tổng quát: Giải hệ phương trình $\begin{cases}A=a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+d_1x+e_1y+f_1=0\\B=a_2x^2+b_2y^2+c_2xy+d_2x+e_2y+f_2=0\end{cases}$

Ta cần tìm hằng số k sao cho $A+k.B$ phân tích được thành nhân tử.

Cách 1: Ta tìm ít nhất hai cặp nghiệm của phương trình(thông thường là thử thay các giá trị $\pm2,\pm1,0$ vào hai phương trình của hệ) giả sử hai cặp nghiệm đó là $(x;y)=(m;n);(p;q)$.

Khi đó đường thẳng đi qua hai điểm này là:

$$\Delta:(n-q)x-(m-p)y+mq-np=0 .$$

Gọi $(a;b)$ là một điểm nằm trên Δ khác hai điểm trên.

Khi đó tại $(x;y)=(a;b)$ thì $A=A_1, B=B_1$ và hệ số k cần tìm là $k=-\frac{A_1}{B_1}$.

Áp dụng vào bài toán trên ta biết hai nghiệm là $\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right);\left(\frac{11}{25};\frac{2}{25}\right)$ nên đường thẳng đi qua hai điểm này là $\Delta:3x+y-\frac{7}{5}$.

Lấy điểm $A\left(0;\frac{7}{5}\right)\in\Delta$ khi đó $A_1=\frac{44}{25}, B_1=-\frac{22}{25}\Rightarrow k=2$.

Như vậy với mỗi cách lấy điểm A ta lại có một giá trị của k và đưa bài toán đến rất nhiều cách giải.

Cách 2: Đặt $a=a_1+ka_2, b=b_1+kb_2, c=c_1+kc_2, d=d_1+kd_2$ và $e=e_1+ke_2, f=f_1+kf_2$

Khi đó $k(k\neq0)$ là nghiệm của phương trình sau:

$$(cd-2ae)^2=(c^2-4ab)(d^2-4af)$$

Hoặc được rút gọn thành: $cde+4abf=ae^2+bd^2+fc^2$.

Đây là phương trình bậc ba đối với k nên luôn có nghiệm do đó hệ phương trình trên luôn giải được bằng phương pháp hệ số bất định(một trường hợp đặc biệt của hệ này đã được bàn ở hệ đẳng cấp).

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)^2+y=3\\ x^2+2xy-5y^2-5x+13y=6\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^2+y^2-2xy+y-3=0\ (1)\\ x^2+2xy-5y^2-5x+13y-6=0\ (2)\end{cases}.$$

Thử các giá trị đặc biệt ta tìm được hai nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;2);(3;3)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm này là $x-2y+3=0$.

Lấy điểm $A(-3;0)$ thuộc đường thẳng trên.

Khi đó $A_1=6, B_1=18$ hệ số bất định cần tìm là $k=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{1}{3}$.

Vậy lấy $(1)-\frac{1}{3}.(2)$ theo vế ta được:

$$x^2+y^2-2xy+y-3-\frac{1}{3}\left(x^2+2xy-5y^2-5x+13y-6\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(2x-4y-1)(x-2y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2y+3=0\\ 2x-4y-1=0\end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $x-2y+3=0$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-2y+3=0\\ (x-y)^2+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y-3\\ (y-3)^2+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=2\\ x=3, y=3\end{array}\right..$$

<u>TH2:</u> Nếu $2x-4y-1=0$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-4y-1=0\\ (x-y)^2+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y+\frac{1}{2}\\ \left(y+\frac{1}{2}\right)^2+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{3}{2}-\sqrt{15}, y=-1-\frac{\sqrt{15}}{2}\\ x=-\frac{3}{2}+\sqrt{15}, y=-1+\frac{\sqrt{15}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(1;2\right);\left(3;3\right);\left(-\frac{3}{2}-\sqrt{15};-1-\frac{\sqrt{15}}{2}\right);\left(-\frac{3}{2}+\sqrt{15};-1+\frac{\sqrt{15}}{2}\right).$$

<u>Cách 2:</u> Đưa về hệ đẳng cấp

Đặt $\begin{cases}u=x-1\\v=y-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=u+1\\y=v+2\end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\left(u-v-1\right)^2+v+2=3\\\left(u+1\right)^2+2\left(u+1\right)\left(v+2\right)-5\left(v+2\right)^2-5\left(u+1\right)+13\left(v+2\right)=6\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2-2uv=2u-3v\\u^2-5v^2+2uv=5v-u\end{cases}.$$

<u>TH1:</u> Nếu $v=0$ khi đó $u=0\Rightarrow\left(u;v\right)=\left(0;0\right)$.

<u>TH2:</u> Nếu $v\neq0$ đặt $u=tv$ hệ trở thành:

$$\begin{cases}v^2\left(t^2+1-2t\right)=v\left(2t-3\right)\\v^2\left(t^2+2t-5\right)=v\left(5-t\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v\left(t^2+1-2t\right)=2t-3\\v\left(t^2+2t-5\right)=5-t\end{cases}.$$

Suy ra $\left(t^2+1-2t\right)\left(5-t\right)=\left(2t-3\right)\left(t^2+2t-5\right)\Leftrightarrow3t^3-6t^2-5t+10=0$.

$$\Leftrightarrow\left(t-2\right)\left(3t^2-5\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\end{array}\right..$$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+8y^2-6xy+x-3y-624=0 & (1)\\21x^2-24y^2-30xy-83x+49y+585=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Lấy $(1)+k.(2)$ ta theo vế ta được:

$$x^2+8y^2-6xy+x-3y-624+k\left(21x^2-24y^2-30xy-83x+49y+585\right)=0\ .$$

Với k là nghiệm của phương trình $cde+4abf=ae^2+bd^2+fc^2$.

Với $a=1+21k,\ b=8-24k,\ c=-6-30k, d=1-83k,\ e=-3+49k$ và $f=-624+585k$.

Vì vậy $(9k-11)(31k-1)(5265k-227)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=11/9 \\ k=1/31 \\ k=227/5265 \end{array}\right.$.

Vậy theo cách này có ba cách lấy giá trị của k và sẽ có 3 cách xử lý bài toán theo hướng trên. Bài toán này ta lấy $k=1/31$ khi đó ta được

$$52x^2+224y^2-186xy-52x-44y-18.759=0\ .$$

$$\Leftrightarrow (2x-4y+37)(26x-56y-507)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-4y+37=0 \\ 26x-56y-507=0 \end{array}\right. .$$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-y+2}+\sqrt{x+2y-3}=3 \\ x^2-y^2-xy+9(x+y)=25 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận xét. Phương trình đầu của hệ chứa căn nên ta bình phương hai vế của phương trình đưa về một phương trình đa thức bậc hai cùng dạng với phương trình thứ hai của hệ.

Cách 1: Điều kiện $\begin{cases} 2x-y+2\ge 0 \\ x+2y-3\ge 0 \end{cases}$.

Khi đó bình phương hai vế phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$3x+y-1+2\sqrt{2x-y+2}.\sqrt{x+2y-3}=9\ .$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x-y+2)(x+2y-3)}=10-3x-y\ .$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-3x-y\ge 0 \\ 4(2x-y+2)(x+2y-3)=(10-3x-y)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10-3x-y\ge 0 \\ x^2+9y^2-6xy-44x-48y+124=0 \end{cases}.$$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2-xy+9(x+y)-25=0\ (1) \\ x^2+9y^2-6xy-44x-48y+124=0\ (2) \end{cases}$.

Lấy $a.(1)+(2)$ theo vế ta được:

$$(a+1)x^2-\left[(a-6)y+9a-44\right]x+9y^2+(9a-48)y+124-25a=0\ (3)\ .$$

Ta sẽ tìm hằng số a sao cho phương trình (3) có Deltal là số chính phương.

Tính được $\Delta_x = \left[(a-6)y + 9a - 44\right]^2 - 4(a+1)\left(9y^2 + (9a-48)y + 124 - 25a\right)$

$$= \left(a^2 - 24a\right)y^2 + 2\left(9a^2 + 70a + 362\right)y + 181a^2 - 792a + 1440 \ .$$

Để Δ_x là số chính phương ta cần có:

$$\Delta'_y = 0 \Leftrightarrow \left(9a^2 + 70a + 362\right)^2 - \left(a^2 - 24a\right)\left(181a^2 - 792a + 1440\right) = 0 \ .$$

Nhập phương trình này vào máy tính bỏ tính và tìm được nghiệm $a = \dfrac{1}{5}$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 3x - 4y - 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{array}\right.$.

- Với $3x - 4y - 1 = 0$ khi đó ta có hệ $\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 0 \\ x^2 - y^2 - xy + 9(x+y) = 25 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3x-1}{4} \\ -5x^2 + 262x - 437 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{131 - \sqrt{14.976}}{5}; y = \dfrac{388 - 3\sqrt{14.976}}{20} \\ x = \dfrac{131 + \sqrt{14.976}}{5}; y = \dfrac{388 + 3\sqrt{14.976}}{20} \end{array}\right. .$$

- Với $2x - y + 1 = 0$ khi đó ta có hệ $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 - y^2 - xy + 9(x+y) = 25 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ -5x^2 + 22x - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 3 \\ x = \dfrac{17}{5}; y = \dfrac{39}{5} \end{array}\right. .$$

Đối chiếu lại điều kiện ta có ba nghiệm thỏa mãn là

$$(x;y) = (1;3); \left(\frac{17}{5}; \frac{39}{5}\right); \left(\frac{131 + \sqrt{14.976}}{5}; \frac{388 + 3\sqrt{14.976}}{20}\right) .$$

Cách 2: Ngoài phương pháp hệ số bất định như trên khi nhìn vào phương trình có chứa hai căn thức mà biểu thức trong căn có dạng bậc nhất đối với hai biến x và y nên ta có thể đặt ẩn phụ mới đưa hệ về dạng :

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2x-y+2} \\ v=\sqrt{x+2y-3} \end{cases},\left(u,v\ge 0\right)$ khi đó $\begin{cases} x=\dfrac{2u^2+v^2-1}{5} \\ y=\dfrac{2v^2-u^2+8}{5} \end{cases}$ thay ngược lại hệ và biến đổi rút gọn ta được $\begin{cases} u+v=3 \\ u^4-v^4+u^2v^2+8u^2+19v^2-73=0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \\ u^4+6u^3-18u^2-7u+17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \\ \left(u^2-1\right)\left(u^2+6u-17\right)=0 \end{cases}.$$

Đến đây đã đơn giản các em tìm ra u rồi suy ra v từ đó tìm được nghiệm của hệ phương trình.

Nhận xét. Đối với hệ phương trình mà phương trình của hệ có chứa căn thức ta có thể bình phương hai vế hoặc đặt ẩn phụ để đưa về hệ đơn giản hơn.

Qua bốn bài toán trên bạn đọc tự đúc rút kinh nghiệm cho mình nên sử dụng kỹ thuật hệ hệ phương trình bậc nhất hai ẩn hay là hệ số bất định đối với hệ phương trình bậc hai hai ẩn dạng tổng quát.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+\sqrt{2-x+y-x^2-y^2}=1 \\ 2x^3=2y^3+1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $2-x+y-x^2-y^2\ge 0$.

Chuyển vế bình phương hai vế phương trình đầu của hệ ta được :

$$\sqrt{2-x+y-x^2-y^2}=1-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{2} \\ 2-x+y-x^2-y^2=1-4x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{1}{2} \\ 5x^2+y^2-3x-y-1=0 \end{cases}.$$

Kết hợp với phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$\begin{cases} 5x^2+y^2-3x-y-1=0 & (1) \\ 2x^3-2y^3-1=0 & (2) \end{cases}.$$

Lấy $(1)-(2)$ theo vế ta được :

$$\left(y-x+1\right)\left(2x^2+2y^2+2xy-3x-y\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ 2x^2+2y^2+2xy-3x-y=0 \end{array}\right..$$

TH1 : Nếu $y=x-1$ thay vào phương trình (1) ta được :

$$5x^2+\left(x-1\right)^2-3x-\left(x-1\right)-1=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x+1=0$$

$$\xleftrightarrow{x\le\frac{1}{2}} x=\frac{3-\sqrt{3}}{6} \Rightarrow y=-\frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

TH2 : Nếu $2x^2+2y^2+2xy-3x-y=0$ kết hợp với phương trình (1) ta được hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x^2+2y^2+2xy-3x-y=0 \\ 5x^2+y^2-3x-y-1=0 \end{cases}$ (đây là hệ bậc hai tổng quát đã biết cách giải xem chương 1).

Hệ phương trình này có hai nghiệm không thỏa mãn điều kiện $x\le\frac{1}{2}$ nên loại.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6};-\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(x+y\right)\left(25-xy\right)=4x^2+17y^2+105 \\ x^2+y^2+2x-2y=7 \end{cases}$.

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng :

$$\begin{cases} y^2-2y+x^2+2x-7=0 \quad (1) \\ \left(2x+17\right)y^2+2\left(x^2-25\right)y+4x^2-50x+105=0 \quad (2) \end{cases}$$

Cả hai phương trình của hệ được viết lại dưới dạng phương trình bậc hai của y. Ta có một kinh nghiệm nhỏ là thông thường cho hệ số hai phương trình tỷ lệ với nhau để tìm nghiệm.

Cho hệ số các phương trình tỷ lệ với nhau ta được:

$$\frac{2x+17}{1}=\frac{2\left(x^2-25\right)}{-2}=\frac{4x^2-50x+105}{x^2+2x-7} \Leftrightarrow x=2.$$

Thay $x=2$ vào hai phương trình của hệ trên ta được :

$$\begin{cases} y^2-2y+1=0 \\ 21\left(y^2-2y+1\right)=0 \end{cases} \Rightarrow k=-\frac{1}{21}.$$

Lấy $(1)-\frac{1}{21}.(2)$ ta được :

$$\left(x-2\right)\left(2y^2+2xy+4y-17x-126\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2y^2+2xy+4y-17x-126=0 \end{array}\right..$$

TH1 : Nếu $x=2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4+y^2+4-2y-7=0 \Leftrightarrow y=1.$$

TH2 : Nếu $2y^2+2xy+4y-17x-126=0$ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2y^2+2xy+4y-17x-126=0 & (3) \\ x^2+y^2+2x-2y-7=0 & (4) \end{cases}.$$

Lấy $3.(4)-(3)$ theo vế ta được :

$$3x^2+y^2-2xy+11x-10y+105=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y+5\right)^2+2x^2+x+80=0$$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-x+y=\frac{1}{2} \\ \left(x+y\right)\left(17-4xy\right)=6x^2+8y+\frac{21}{2} \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} A=x^2+y^2-x+y-\frac{1}{2}=0 \ (1) \\ B=4x^2\left(2y+3\right)+\left(8y^2-34\right)x+21-18y=0 \ \ (2) \end{cases}.$$

Lấy $2.(1)-(2)$ theo vế ta được:

$$2\left(x^2+y^2-x+y-\frac{1}{2}\right)-\left[4x^2\left(2y+3\right)+\left(8y^2-34\right)x+21-18y\right]=0.$$

$$\Leftrightarrow -2\left(x+y-1\right)\left(4xy+5x-y-11\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1-x \\ 4xy+5x-y-11=0 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=1-x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$x^2+\left(1-x\right)^2-x+\left(1-x\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

<u>TH2:</u> Nếu $4xy+5x-y-11=0$ với $x=\frac{1}{4}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x\neq\frac{1}{4}$ rút được $y=\frac{11-5x}{4x-1}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2+\left(\frac{11-5x}{4x-1}\right)^2-x+\frac{11-5x}{4x-1}=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2\left(4x-1\right)^2+2\left(11-5x\right)^2-2x\left(4x-1\right)^2+2\left(11-5x\right)\left(4x-1\right)=\left(4x-1\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow 32x^4-48x^3+12x^2-116x+219=0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là: $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right).$

Nhận xét. Câu hỏi đặt ra là tại sao ta tìm được hai nghiệm như trên. Cái này dựa vào kinh nghiệm vì bài toán này không cho phép ta thế để đưa về phương trình đa thức rồi dung Casio tìm nghiệm.

Có cách tìm nghiệm như sau:

Trực quan ta viết lại phương trình đầu của hệ trở thành:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1\Rightarrow\begin{cases}\left|x-\frac{1}{2}\right|\le 1\\ \left|y+\frac{1}{2}\right|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}\le y\le\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Thử thay các giá trị đặc biệt $x=-\frac{1}{2},x=0,x=\frac{1}{2},x=1,x=\frac{3}{2}$ vào hệ ta dễ tìm được hai nghiệm trên.

Hệ số bất định được tìm như sau

$$\begin{cases}A=x^2+y^2-x+y-\frac{1}{2}=0 & (1)\\ B=4x^2\left(2y+3\right)+\left(8y^2-34\right)x+21-18y=0 & (2)\end{cases}.$$

Tìm được hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ suy ra đường thẳng đi qua hai điểm này là $y=1-x$.

Khi đó thay $y=1-x$ vào A và B thì ta có:

$$\begin{cases}A=x^2+\left(1-x\right)^2-x+\left(1-x\right)-\frac{1}{2}=2x^2-4x+\frac{3}{2}\\ B=4x^2\left(2\left(1-x\right)+3\right)+\left(8\left(1-x\right)^2-34\right)x+21-18\left(1-x\right)=4x^2-8x+3\end{cases}.$$

Suy ra hệ số bất định là $k=-\frac{A}{B}=-\frac{2x^2-4x+\frac{3}{2}}{4x^2-8x+3}=-\frac{1}{2}$ tức ta thực hiện phép toán lấy $(1)-\frac{1}{2}.(2)$ theo vế hay $2.(1)-(2)$ theo vế ta được:

Bài 8. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(x+y\right)\left(25-4xy\right)=\frac{105}{4}+4x^2+17y^2\\ 4x^2+4y^2+4x-4y=7\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Đặt $x=\frac{3a-1}{2},y=\frac{3b+1}{2}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}-6b^3+9b^2=6a^3+14a-20 & (1)\\ a^2+b^2=1 & (2)\end{cases}$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3b^2(3-2b)=(a-1)(6a^2+6a+20)$.

$\Leftrightarrow 3(1-a^2)(3-2b)=(a-1)(6a^2+6a+20)$.

$\Leftrightarrow (a-1)(6a^2+6a+20+9-6b+9a-6ab)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ 6a^2+15a-6b-6ab+29=0 \end{array}\right.$.

+ **TH1:** Nếu $a=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

+ **TH2:** Nếu $6a^2+15a-6b-6ab+29=0$ (vô nghiệm) vì:

$6a^2+15a-6b-6ab+29 \ge 15a-6b-6ab+29 \ge 29-15-6-6=2>0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Cách 2: Từ phương trình thứ hai của hệ ta được

$$(2x+1)^2+(2y-1)^2=9 \Rightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 \le 9 \\ (2x-1) \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 2 \end{cases}.$$

Viết lại phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$(4x+17)y^2+(4x^2-25)y+4x^2-25x+\frac{105}{4}=0.$$

Vế trái là một tam thức bậc hai của y với hệ số $a=4x+17>0$ nên đạt giá trị nhỏ nhất tại $y=\dfrac{25-4x^2}{2(4x+17)}$.

Giá trị nhỏ nhất bằng

$$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(4x^2-25)^2-4(4x+17)\left(4x^2-25x+\frac{105}{4}\right)}{4(4x+17)}.$$

$$=-\frac{2x^4-8x^3-9x^2+160x-145}{2(4x+17)}$$

Vậy ta phải có $-\frac{2x^4-8x^3-9x^2+160x-145}{2(4x+17)}\ge 0$.

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^3-6x^2-15x+145)\ge 0, \forall x\in[-2;1]$.

$\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$ vì $\begin{cases} x-1\le 0 \\ 2x^3-6x^2-15x+145>0 \end{cases}, \forall x\in[-2;1]$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

<u>Cách 3:</u> Tương tự trên ta tìm được $-2\le x\le 1, -1\le y\le 2$.

Viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$(x+y)\big(25-4(xy+x-y)\big)=\frac{17}{4}+21y^2.$$

Thay $4(x-y)=7-4x^2-4y^2$ từ phương trình thứ hai của hệ vào ta được:

$$(x+y)\left(18+4\left(x^2+y^2-xy\right)\right)=\frac{17}{4}+21y^2.$$

$\Leftrightarrow 4x^3+18x-\frac{17}{4}+4y^3-21y^2+18y=0\ (1)$.

Xét hàm số $f(x)=4x^3+18x-\frac{17}{4}$ trên đoạn $[-2;1]$ và $g(y)=4y^3-21y^2+18y$ trên đoạn $[-1;2]$ ta có $f(x)+g(y)\le 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1, y=\frac{1}{2}$.

Vì vậy $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2xy-2x+y-9=0 \\ 2x+8+\sqrt{2x+1}=4y^2-3y+\sqrt{2y-1} \end{cases}, (x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{2}, y \ge \frac{1}{2}$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 2x + y - 9 = 0 \\ \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y-1} + 2x + 8 - 4y^2 + 3y = 0 \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$\sqrt{2x+1} - \sqrt{2y-1} + x^2 - 3y^2 + 2xy + 4y - 1 = 0$.

Nhận thấy $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x \ne -\frac{1}{2}, y \ne \frac{1}{2}$ thực hiện nhân liên hợp đưa phương trình về dạng tương đương:

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-y+1)}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-1}} + (x-y+1)(x+3y-1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-1}} + x + 3y - 1\right) = 0 \ (1).$$

Do $x \ge -\frac{1}{2}, y \ge \frac{1}{2}$ nên:

$$\frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-1}} > 0; x + 3y - 1 \ge 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-1}} + x + 3y - 1 > 0.$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1$.

Thay $y = x + 1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$x^2 + (x+1)^2 + 2x(x+1) - 2x + (x+1) - 9 = 0$.

$\Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{7}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 2 \\ x = -\frac{7}{4}, y = -\frac{3}{4} \end{array}\right.$ (chỉ nghiệm $(1;2)$ thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;2)$.

Nhận xét: Cơ sở của lời giải bài toán dựa vào kỹ thuật hệ số bất định như sau:

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} A = x^2 + y^2 + 2xy - 2x + y - 9 = 0 \ (1) \\ B = \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y-1} + 2x + 8 - 4y^2 + 3y = 0 \ (2) \end{cases}.$$

Nhận xét: Dự đoán $\sqrt{2x+1} = \sqrt{2y-1} \Leftrightarrow y = x + 1$ khi đó

$$\begin{cases} A = x^2 + \left(x+1\right)^2 + 2x\left(x+1\right) - 2x + \left(x+1\right) - 9 = 4x^2 + 3x - 7 \\ B = 2x + 8 - 4\left(x+1\right)^2 + 3\left(x+1\right) = -4x^2 - 3x + 7 \end{cases}.$$

Hệ số bất đỉnh $k = -\dfrac{A}{B} = 1$ tức là ta thực hiện phép toán lấy $(1)+(2)$ theo vế như lời giải trên.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases}$.

Lời giải

<u>**Cách 1:**</u> Viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases} x^3 - y^3 - 35 = 0 \ (1) \\ 2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y = 0 \ (2) \end{cases}$.

Lấy $(1) + k.(2)$ theo vế ta được:

$$x^3 - y^3 - 35 + k\left(2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y\right) = 0 .$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2kx^2 - 4kx - y^3 + 3ky^2 + 9ky - 35 = 0 \ (3) .$$

Ta sẽ tìm các hằng số k, a, b sao cho $(3) \Leftrightarrow \left(x+a\right)^3 = \left(y+b\right)^3$.

Khai triển đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases} a^3 - b^3 = -35 \\ 3a = 2k \\ 3a^2 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$.

Suy ra $\left(x-2\right)^3 = \left(y+3\right)^3 \Leftrightarrow x - 2 = y + 3 \Leftrightarrow x = y + 5$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2\left(y+5\right)^2 + 3y^2 - 4\left(y+5\right) + 9y = 0 .$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 + 25y + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3; x = 2 \\ y = -2; x = 3 \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(2;-3\right);\left(3;-2\right)$.

Cách 2: Đặt $u = x + y, v = x - y$ đã được nhắc đến trong chủ đề đặt ẩn phụ dạng tổng hiệu.

> **Bài 11. (VMO 2010)** Giải hệ phương trình:
> $$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3\left(x^2 - 4y^2\right) - 4\left(x - 8y\right) \end{cases}.$$

Lời giải

Viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases} x^4 - y^4 - 240 = 0 & (1) \\ x^3 - 2y^3 - 3x^2 + 12y^2 + 4x - 32y = 0 & (2) \end{cases}$.

Lấy $(1) + k.(2)$ ta được:

$$x^4 - y^4 - 240 + k\left(x^3 - 2y^3 - 3x^2 + 12y^2 + 4x - 32y\right) = 0 \ (3)$$

Ta sẽ tìm các hằng số a, b, k sao cho $(3) \Leftrightarrow \left(x + a\right)^4 = \left(y + b\right)^4$.

Đồng nhất hệ số ta được $k = -8; a = -2; b = -4$.

Suy ra $\left(x - 2\right)^4 = \left(y - 4\right)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y - 2 \\ x = 6 - y \end{array}\right.$.

- Với $x = y - 2$ thay vào (1) ta được $8y^3 - 24y^2 + 32y + 224 = 0$.

$\Leftrightarrow \left(y + 2\right)\left(8y^2 - 40y + 112\right) = 0 \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = -4$.

- Với $x = 6 - y$ thay vào (1) ta được $y^3 - 9y^2 + 36y - 44 = 0$.

$\Leftrightarrow \left(y - 2\right)\left(y^2 - 7y + 22\right) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x; y\right) = \left(4; 2\right); \left(-4; -2\right)$.

> **Bài 12.** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = xy + 2y \\ 2x^3 + 3xy^2 = 2y^2 + 3x^2y \end{cases}$.

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - xy - 2y = 0 & (1) \\ 2x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 3x^2y = 0 & (2) \end{cases}$.

Tìm hệ số bất định: Thử các nghiệm $x = \pm 2, \pm 1, 0$ vào hệ ta thấy hệ có hai nghiệm là $\left(x; y\right) = \left(0; 0\right); \left(1; 1\right)$ nên đường thẳng đi qua hai điểm này là $y = x$.

Đặt $A = x^2 + 2y^2 - xy - 2y; B = 2x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 3x^2y$.

Thay $x = y$ vào hai biểu thức trên ta được $A_1(x,y) = 2y^2 - 2y = 2y\left(y-1\right)$ và $B_1(x,y) = 2y^3 - 2y^2 = 2y^2\left(y-1\right)$.

Do đó hệ số bất định là $p(x,y) = -\dfrac{A_1(x,y)}{B_1(x,y)} = -\dfrac{1}{y}$.

Vậy để có nhân tử chung ta thực hiện phép tính $(2) - y.(1)$.

- Với $y = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của hệ.
- Xét $y \neq 0$, Lấy $(2) - y.(1)$ theo vế ta được:

$$2x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 3x^2y - y\left(x^2 + 2y^2 - xy - 2y\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 2y^3 - 4x^2y + 4xy^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 - xy + y^2 = 0 \end{array}\right..$$

Nhưng do $y \neq 0$ nên $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} > 0$ vì vậy $x = y$.

Thay vào phương trình (1) ta được: $2y^2 = 2y \Leftrightarrow y = 1, (y \neq 0) \Rightarrow x = 1$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(0;0\right), \left(1;1\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = y^3 + 3y^2 \\ x^2 + 3y^2 + x - y = 2 \end{cases}$

<u>Tìm hệ số bất định:</u>

Tìm được các nghiệm của hệ phương trình $\left(x;y\right) = \left(1;0\right); \left(-2;0\right)$.

Khi đó đường thẳng đi qua hai điểm này là $y = 0$.

Thay ngược lại hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{cases} A_1(x,y) = x^3 - 3x + 2 = \left(x-1\right)^2\left(x+2\right) \\ B_1(x,y) = x^2 + x - 2 = \left(x-1\right)\left(x+2\right) \end{cases}.$$

Suy ra $p(x,y) = -\dfrac{A_1(x,y)}{B_1(x,y)} = -\left(x-1\right)$.

Lời giải

Viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases} x^3-3x+2-y^3-3y^2=0 \ (1) \\ x^2+3y^2+x-y-2=0 \ (2) \end{cases}$.

Nhận thấy $x=1 \Rightarrow y=0$ thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $x \neq 1$ khi đó lấy $(1)-(x-1).(2)$ theo vế ta được

$$x^3-3x+2-y^3-3y^2-(x-1)(x^2+3y^2+x-y-2)=0 .$$

$$\Leftrightarrow -3xy^2+xy-y^3-y=0 \Leftrightarrow y(y^2+3xy-x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y^2+3xy-x+1=0 \end{array}\right. .$$

- Với $y=0$ thay vào (2) ta được $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

- Với $y^2+3xy-x+1=0$ khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} y^2+3xy-x+1=0 \\ x^2+3y^2+x-y-2=0 \end{cases}$

Hệ này thực hiện cách tương tự dạng 1 ta có kết quả:

$$(x;y)=\left(-\frac{13}{7};\frac{4}{7}\right);(-1;1);\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);(1;0).$$

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm:

$$(x;y)=(-2;0);\left(-\frac{13}{7};\frac{4}{7}\right);(-1;1);\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);(1;0).$$

Bài 14. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x^3-y^3-24x^2+25x-3xy(x+y)-y-10=0 \\ 7x^2+4xy-10x+y^2-2y+3=0 \end{cases}.$$

Lời giải

Nhân vào hai vế của phương trình thứ hai với $-(x-y-2)$ rồi cộng theo vế với phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$7x^3-y^3-24x^2+25x-3xy(x+y)-y-10$$
$$-(x-y-2)(7x^2+4xy-10x+y^2-2y+3)=0$$

$\Leftrightarrow 2x-2y-4=0 \Leftrightarrow x=y+2$, thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$12y^2+24y+11=0 \Leftrightarrow y=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Thử lại thấy các nghiệm trên đều thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-1\pm\frac{\sqrt{3}}{6};1\pm\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4+2(3y+1)x^2+\left(5y^2+4y+11\right)x-y^2+10y+2=0 \\ y^3+(x-2)y+x^2+x+2=0 \end{cases}$$

<u>Tìm hệ số bất định:</u> Nhận thấy hệ có hai nghiệm $(x;y)=(-1;1);(2;-2)$ nên đường thẳng đi qua hai điểm này là $y=-x$. Thay ngược lại hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{cases} A_1(x,y)=(x+1)^2(x-1)(x-2) \\ B_1(x,y)=-(x+1)^2(x-2) \end{cases} \Rightarrow p(x,y)=-\frac{A_1(x,y)}{B_1(x,y)}=x-1.$$

Ta có thể nhân vào hai vế của phương trình thứ hai với $x-1$ hoặc $(-y)-1=-(y+1)$ ở đây ta lựa chọn $y+1$ để xuất hiện một đa thức cùng bậc với đa thức ở phương trình thứ nhất.

Lời giải

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} x^4+2(3y+1)x^2+\left(5y^2+4y+11\right)x-y^2+10y+2=0 \quad (1) \\ y^3+(x-2)y+x^2+x+2=0 \quad (2) \end{cases}$$

Nhận thấy $y=-1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $y\neq-1$ khi đó lấy $(1)-(y+1).(2)$ theo vế ta được:

$$(x+y)(x-y+2)\left(x^2-2x+y^2+3y+5\right)=0.$$

- Với $x=-y$ thay vào (2) ta được $(y+2)(y-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2\Rightarrow x=2 \\ y=1\Rightarrow x=-1 \end{array}\right.$.
- Với $x=y-2$ thay vào (2) ta được $(y-1)^2(y+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=-1 \\ y=-4\Rightarrow x=-6 \end{array}\right.$

- Với $x^2-2x+y^2+3y+5=0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0$ (vô lý).

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;1\right);\left(2;-2\right);\left(-6;-4\right)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-x+y=3 \\ 4x^3+12x^2+9x=-y^3+6y+5 \end{cases}$.

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3xy-3x+3y=9 \quad (1) \\ 4x^3+12x^2+9x=-y^3+6y+5 \quad (2) \end{cases}.$$

Lấy $(2)-(1)$ theo vế ta được:

$$4x^3+12x^2+12x+4=-y^3+3xy+9y.$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x+1\right)^3+4y^3=3y^3+3xy+9y.$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x+1+y\right)\left(\left(x+1\right)^2-y\left(x+1\right)+y^2\right)=3y\left(y^2+x+3\right).$$

Thay $x=xy+y-3$ vào vế phải của phương trình trên ta được:

$$4\left(x+1+y\right)\left(\left(x+1\right)^2-y\left(x+1\right)+y^2\right)=3y\left(y^2+xy+y\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+1\right)\left(4\left(x+1\right)^2-4y\left(x+1\right)+4y^2\right)=3y^2\left(x+y+1\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+1\right)\left(2x+2-y\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1-x \\ y=2x+2 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=-1-x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$x\left(-1-x\right)-x-1-x=3 \Leftrightarrow x^2+3x+4=0$ (vô nghiệm).

<u>TH2:</u> Nếu $y=2x+2$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x\left(2x+2\right)-x+2x+3=3 \Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3+\sqrt{17}}{4}, y=\frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}, y=\frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{3+\sqrt{17}}{4};\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right).$$

Cách 2: Nhận thấy $x=-1$ không thỏa mãn phương trình.

Xét $x\neq -1$ rút $y=\frac{x+3}{x+1}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4x^3+12x^2+9x=-\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^3+6.\frac{x+3}{x+1}+5.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+3x+4\right)\left(2x^2+3x-1\right)^2=0\Leftrightarrow 2x^2+3x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{3+\sqrt{17}}{4}\\ x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\end{array}\right..$$

Cách 3: Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}y\left(x+1\right)=x+1+2\\ 4\left(x+1\right)^3-3\left(x+1\right)=-y^3+6y+6\end{cases}.$$

Đặt $t=x+1$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}yt=t+2\\ 4t^3-3t=-y^3+6y+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}yt=t+2\\ 4t^3+y^3-3\left(t+2\right)-6y=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}yt=t+2\\ 4t^3+y^3-3yt-6y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}yt=t+2\\ 4t^3+y^3-3y\left(t+2\right)=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}yt=t+2\\ 4t^3+y^3-3y^2t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}yt=t+2\\ \left(t+y\right)\left(2t-y\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-t\\ y=2t\end{array}\right.\\ y=t+2\end{cases}.$$

Nhận xét. Cách 3 tự nhiên hơn cách 1 nhưng cùng một ý tưởng đó là phép thế.

Cách 4: Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}\left(x+1\right)\left(y-1\right)=2\\ 4\left(x+1\right)^3-3\left(x+1\right)+\left(y-1\right)^3+3\left(y-1\right)^2-3\left(y-1\right)-11=0\end{cases}.$$

Đặt ẩn phụ $u=x+1,v=y-1$ sau đó dùng phép thế.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 \ (1) \\ xy+y^2+3y+1=0 \ (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)+2.(2)$ theo vế ta được

$$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=-1 \\ x+2y=-2 \end{array}\right. .$$

Đáp số. $(x;y)=\left(-3\pm\sqrt{2};1\mp\sqrt{2}\right);\left(-3\pm\sqrt{5};\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$.

Cách khác: Xem phương pháp giải hệ đẳng cấp.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 & (1) \\ x^2+2xy-7x-5y+9=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Lấy $(1)+(2)$ theo vế ta được $(x+y-2)(2x+y-3)=0$.

Đáp số. $(x;y)=(1;1);(2;-1)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y+xy^2+x-5y=0 & (1) \\ 2xy+y^2-5y+1=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Lấy $(1)-2.(2)$ theo vế ta được $(x+y-2)(xy-2y+1)=0$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-3x+2y^2+2xy=0 & (1) \\ xy(x+y)+x^2+3y^2-2x-3y+1=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Lấy $(2)-(1)$ theo vế ta được $(x+1)\left(xy+y^2-3y+1\right)=0$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x+y^2-3=0 & (1) \\ x^2-2y^2-xy+y+1=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Lấy $2.(1)+(2)$ theo vế ta được $(x-1)(3x-y+5)=0$.

Hoặc lấy $5.(1)+13.(2)$ theo vế ta được $(2x-3y+1)(9x+7y-2)=0$.

Hoặc lấy $(1)-(2)$ theo vế ta được $(y+1)(x+3y-4)=0$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+5xy^2+42=0 & (1) \\ 2x^2-5xy-5y^2+x+10y-35=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Lấy $(1)+2.(2)$ theo vế ta được $(x-2)\left((x+3)^2+5(y-1)^2\right)=0$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x^2y+2y^3+35=0 & (1) \\ 5(x^2+y^2)+2xy+5x+13y=0 & (2) \end{cases}$

Lời giải

Lấy $(1)+3.(2)$ theo vế ta được:

$$(2y+5)\left[3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{5}{2}; x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2}; y=-\frac{5}{2} \end{array}\right. .$$

Đáp số. $(x;y)=\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right);\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy+2x=5y \\ x^3+x^2y-x^2+2xy-6x+3y=0 \end{cases}$.

Lời giải

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$(x+y-2)(x^2+2x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2-x \\ y=-x^2-2x \end{array}\right. .$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=2-x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2+(2-x)^2+x(2-x)+2x=5(2-x).$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1 \\ x=-6, y=8 \end{array}\right. .$$

<u>TH2:</u> Nếu $y=-x^2-2x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2+\left(-x^2-2x\right)^2+x\left(-x^2-2x\right)+2x=5\left(-x^2-2x\right).$$

$$\Leftrightarrow x\left(x+2\right)\left(x+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=-4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=0\\x=-2,y=0\\x=-4,y=-8\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có năm nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(1;1\right);\left(-2;0\right);\left(-6;8\right);\left(-4;-8\right).$$

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=5x\\-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2y\end{cases}.$

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$3x^3+y^3-10x^2+17x-8=5x-2x^2y.$$

$$\Leftrightarrow\left(x+y-2\right)\left(3x^2-xy-4x+y^2+2y+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2-x\\3x^2-xy-4x+y^2+2y+4=0\end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=2-x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^3+\left(2-x\right)^3=5x\Leftrightarrow 6x^2-17x+8=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{17-\sqrt{97}}{12}\\x=\dfrac{17+\sqrt{97}}{12}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{17-\sqrt{97}}{12},y=\dfrac{7+\sqrt{97}}{12}\\x=\dfrac{17+\sqrt{97}}{12},y=\dfrac{7-\sqrt{97}}{12}\end{array}\right..$$

<u>TH2:</u> Nếu $3x^2-xy-4x+y^2+2y+4=0\Leftrightarrow 3x^2-x\left(y+4\right)+y^2+2y+4=0$.

Suy ra $\Delta_x=\left(y+4\right)^2-12\left(y^2+2y+4\right)=-11y^2-16y-32<0,\forall y\in\mathbb{R}$ nên phương trình vô nghiệm suy ra hệ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{17-\sqrt{97}}{12};\frac{7+\sqrt{97}}{12}\right);\left(\frac{17+\sqrt{97}}{12};\frac{7-\sqrt{97}}{12}\right).$$

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=91 & (1) \\ 4x^2+3y^2=16x+9y & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)-3.(2)$ theo vế ta được $(x-4)^3=(3-y)^3 \Leftrightarrow x=7-y$.

Thế vào phương trình thứ (2) tìm được hai nghiệm của hệ là:

$$(x;y)=(3;4);(4;3) .$$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3xy^2=25 & (1) \\ x^2+6xy+y^2=10x+6y-1 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)-3.(2)$ theo vế ta được $(x-1)\left[(x-1)^2+3(y-3)^2\right]=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (x-1)^2+3(y-3)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Với $x=1$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được: $y^2=8 \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$.

Cặp nghiệm $(x;y)=(1;3)$ không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(1;\pm 2\sqrt{2}\right)$

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=9 & (1) \\ x^2+2y^2=x+4y & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)-3.(2)$ theo vế ta được:

$$x^3-3x^2+y^3-6y^2=9-3x-12y .$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=-y^3+6y^2-12y+8 .$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3=(2-y)^3 \Leftrightarrow x-1=2-y \Leftrightarrow y=3-x .$$

Thay $y=3-x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^3+(3-x)^3=9 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=2, y=1 \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2);(2;1)$.

Bài 13. (VMO 2004, bảng B) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 & (1) \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2) \end{cases}.$$

Lời giải

Lấy $(1)+3.(2)$ theo vế ta được:

$$(x+1)\left[(x+1)^2+3(y-4)^2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; y=-4 \\ x=-1; y=4 \end{array}\right..$$

<u>Cách khác:</u> Xem phương pháp giải hệ đẳng cấp.

Bài 14. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4-y^4=1215 & (1) \\ 2x^3-4y^3=9\left(x^2-4y^2\right)-18(x-8y) & (2) \end{cases}.$$

Lời giải

Lấy $(1)-6.(2)$ theo vế ta được:

$$\left(x^4-12x^3+54x^2-108x+81\right)-\left(y^4-24y^3+216y^2-864y+1296\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^4=(y-6)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=y-6 \\ x-3=6-y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+3 \\ y=9-x \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Nếu $y=x+3$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^4-(x+3)^4=1215 \Leftrightarrow (x+6)\left(2x^2-3x+36\right)=0 \Leftrightarrow x=-6 \Rightarrow y=-3.$$

<u>TH2:</u> Nếu $y=9-x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^4-(9-x)^4=1215 \Leftrightarrow (x-6)\left(2x^2-15x+72\right)=0 \Leftrightarrow x=6 \Rightarrow y=3.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(6;3);(-6;-3)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=91 & (1) \\ 4x^2+3y^2=16x+19y & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)-3.(2)$ theo vế ta được:

$$(4-x)^3=(y-3)^3 \Leftrightarrow 4-x=y-3 \Leftrightarrow y=7-x.$$

Thay $y=7-x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^3+(7-x)^3=91 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=4 \\ x=4, y=3 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(3;4);(4;3)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3=35 & (1) \\ 2x^2+3y^2=4x-9y & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)-3.(2)$ theo vế ta được:

$$(x-2)^3=(y+3)^3 \Leftrightarrow x-2=y+3 \Leftrightarrow y=x-5.$$

Thay $y=x-5$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^3-(x-5)^3=35 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=-3 \\ x=3, y=-2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(2;-3);(3;-2)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2+y^4-4xy^3=1 \\ 4x^2+2y^2-4xy=2 \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)-(2)$ theo vế ta được: $(y^2-1)(y^2-4xy-1)=0$.

<u>TH1:</u> Nếu $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=1 \\ x=1, y=1 \\ x=0, y=-1 \\ x=-1, y=-1 \end{array}\right.$.

<u>TH2</u>: Nếu $y^2=4xy+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-1}{4y}, (y \neq 0)$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4\left(\frac{y^2-1}{4y}\right)^2+2y^2-4.\frac{y^2-1}{4y}.y=2.$$

$$\Leftrightarrow 5y^4-6y^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=1 \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=-1 \\ x=0, y=1 \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}, y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, y=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có sáu nghiệm:

$$(x;y)=(0;1);(0;-1);(1;1);(-1;-1);\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x-y^3=8 \\ 2x^2+6(x-y)^2=7 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x\left(2x^2+6(x-y)^2\right)-y^3=8 \\ 2x^2+6(x-y)^2=7 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)^3=8 \\ 2x^2+6(x-y)^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6\pm\sqrt{2}}{4} \\ y=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{6+\sqrt{2}}{4};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{6-\sqrt{2}}{4};1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-x-y=1 \\ 4x^3-12x^2+9x=-y^3+6y+7 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3xy-3x-3y=3 \\ 4x^3-12x^2+9x=-y^3+6y+7 \end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$4(x-1)^3=-y^3+3xy+3y \Leftrightarrow 4(x-1)^3+4y^3=3y^3+3xy+3y.$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x+y-1\right)\left(\left(x-1\right)^2-y\left(x-1\right)+y^2\right)=3y\left(y^2+x+1\right).$$

Thay $x=xy-y-1$ vào vế phải của phương trình ta được:

$$4\left(x+y-1\right)\left(\left(x-1\right)^2-y\left(x-1\right)+y^2\right)=3y^2\left(x+y-1\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y-1\right)\left(2x-2-y\right)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1-x \\ y=2x-2 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4};\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right).$$

<u>Cách 2:</u> Rút $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ từ phương trình đầu thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4x^3-12x^2+9x+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3-6.\frac{x+1}{x-1}-7=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x+2\right)\left(2x^2-5x+1\right)^2=0\Leftrightarrow 2x^2-5x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right..$$

Bài 20. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy-x+2y=4 \\ 4x^3+24x^2+45x=-y^3+6y-20 \end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3xy-3x+6y=12 \\ 4x^3+24x^2+45x=-y^3+6y-20 \end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$4\left(x+2\right)^3=-y^3+3xy+12y\Leftrightarrow 4\left(x+2\right)^3+4y^3=3y^3+3xy+12y.$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x+y+2\right)\left(\left(x+2\right)^2-y\left(x+2\right)+y^2\right)=3y\left(y^2+x+4\right).$$

Thay $x=xy+2y-4$ vào vế phải của phương trình trên ta được:

$$\Leftrightarrow 4(x+y+2)\left((x+2)^2-y(x+2)+y^2\right)=3y\left(y^2+xy+2y\right).$$

$$\Leftrightarrow (x+y+2)(2x+4-y)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2-x \\ y=2x+4 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay vào phương trình đầu của hệ tìm được:

$$(x;y)=\left(\frac{-7+\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right);\left(-\frac{7+\sqrt{17}}{4};\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right).$$

<u>Cách 2:</u> Rút $y=\dfrac{x+4}{x+2}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4x^3+24x^2+45x+\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^3-6.\frac{x+4}{x+2}+20=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+5x+8\right)\left(2x^2+7x+4\right)^2=0 \Leftrightarrow 2x^2+7x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-7+\sqrt{17}}{4} \\ x=-\dfrac{7+\sqrt{17}}{4} \end{array}\right..$$

Bài 21. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x+4+\sqrt{2x+1}=4y^2-4y+\sqrt{2y-1} \\ x^2+y^2=x+y+2 \end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ y\ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} A=4y^2-4y-4x-4+\sqrt{2y-1}-\sqrt{2x+1}=0 & (1) \\ B=x^2+y^2-x-y-2=0 & (2) \end{cases}.$$

Nhận xét. Dự đoán $\sqrt{2y-1}=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow y=x+1$ thay vào hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{cases} A=4(x+1)^2-4(x+1)-4x-4=4x^2-4 \\ B=x^2+(x+1)^2-x-(x+1)-2=2x^2-2 \end{cases}.$$

Hệ số bất định là $k=-\dfrac{A}{B}=-2$ tức ta thực hiện phép toán lấy $(1)-2.(2)$ theo vế:

Nhận thấy $x=-\frac{1}{2}$ hoặc $y=\frac{1}{2}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x>-\frac{1}{2}, y>\frac{1}{2}$ khi đó lấy $(1)-2.(2)$ theo vế ta được:

$4y^2-4y-4x-4-2\left(x^2+y^2-x-y-2\right)+\left(\sqrt{2y-1}-\sqrt{2x+1}\right)=0$.

$\Leftrightarrow 2y^2-2y-2x^2-2x+\left(\sqrt{2y-1}-\sqrt{2x+1}\right)=0$.

$\Leftrightarrow 2\left(y-x-1\right)\left(y+x\right)+\dfrac{2\left(y-x-1\right)}{\sqrt{2y-1}+\sqrt{2x+1}}=0$.

$\Leftrightarrow 2\left(y-x-1\right)\left(y+x+\dfrac{1}{\sqrt{2y-1}+\sqrt{2x+1}}\right)=0$.

$\Leftrightarrow y=x+1$ (vì $y+x+\dfrac{1}{\sqrt{2y-1}+\sqrt{2x+1}}>\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$).

Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$x^2+\left(x+1\right)^2-x-\left(x+1\right)-2=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2$ (do $x>-\frac{1}{2}$).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;2\right)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1} \\ x^2+2y^2-2x+y-2=0 \end{cases}, \left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -2,\ y\ge -\frac{1}{2}$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $x^2=-2y^2+2x-y+2$.

Thế vào phương trình thứ nhất, ta được

$$x^2+(-2y^2+2x-y+2)+x+\sqrt{x+2}=2y^2+y+\sqrt{2y+1}$$

$\Leftrightarrow x^2+3x+2+\sqrt{x+2}=4y^2+2y+\sqrt{2y+1}$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(x+1)+\sqrt{(x+1)+1}=(2y)^2+2y+\sqrt{2y+1}.\qquad (1)$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t+\sqrt{t+1}$ với $t\ge -1$.

Ta có $f'(t)=2t+1+\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}$; $f''(t)=2-\dfrac{1}{4\sqrt{(t+1)^3}}$; $f''(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{4}$.

Suy ra $f'(t)\ge f'\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{2}>0$ với mọi $t\in(-1;+\infty)$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên $[-1;+\infty)$.

Suy ra phương trình $(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f(2y)\Leftrightarrow x+1=2y\Leftrightarrow x=2y-1$.

Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$(2y-1)^2+2y^2-2(2y-1)+y-2=0 \Leftrightarrow 6y^2-7y+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$$

Suy ra nghiệm $(x;y)$ của hệ là $(1;1),\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{6}\right)$.

Nhận xét. Để đưa đến lời giải trên ta có suy nghĩ đơn giản là hai căn triệt tiêu nhau tức $\sqrt{x+2}=\sqrt{2y+1}$ hay $x=2y-1$ thế vào phương trình thứ hai của hệ tìm được nghiệm thấy thỏa mãn. Vậy là hướng đi đã đúng. Đây là cơ sở để tìm cách cộng gộp hai phương trình của hệ một cách hợp lý và đưa về xét hàm số như trên. Một số bài toán cùng dạng trên nhưng đưa về phân tích nhân tử đã được trình ở trên các em chú ý.

Với dạng hệ đa thức tôi đã trình bày trong chủ đề kỹ thuật hệ số bất định.

Áp dụng vào bài toán này ta thực hiện như sau:

Ta viết lại hệ dưới dạng sau:

$$\begin{cases} A=2x^2-2y^2+x-y+\sqrt{x+2}-\sqrt{2y+1}=0 & (1) \\ B=x^2+2y^2-2x+y-2=0 & (2) \end{cases}.$$

Với $x=2y-1\Rightarrow \begin{cases} A=2\left(2y-1\right)^2-2y^2+\left(2y-1\right)-y=6y^2+7y+1 \\ B=\left(2y-1\right)^2+2y^2-2\left(2y-1\right)+y-2=6y^2-7y+1 \end{cases}.$

Hệ số bất định cần tìm là $k=-\dfrac{A}{B}=-1$ tức ta lấy $(1)-(2)$ theo vế ta có lời giải của bài toán trên.

Bài 23. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}2x^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=2xy+x\\2y^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=-xy+2y\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\le 2, y\ge 1$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$2x^2-2y^2=3xy+x-2y\Leftrightarrow\left(x-2y\right)\left(2x+y-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\2x+y=1\end{array}\right..$$

+ Nếu $x=2y\Rightarrow 2\ge x=2y\ge 2\Rightarrow x=2,y=1$ thử lại thấy thỏa mãn.

+ Nếu $y=1-2x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$6x^2-3x-34+\sqrt{2-x}+\sqrt{-2x}=0.$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x+2\right)\left(2x-5\right)-\frac{x+2}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{2\left(x+2\right)}{\sqrt{-2x}+2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(3\left(2x-5\right)-\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{2}{\sqrt{-2x}+2}\right)=0.$$

$$\xleftrightarrow{x\le 2}x+2=0\Leftrightarrow x=-2\Rightarrow y=5$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(2;1\right);\left(-2;5\right)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2+xy+2x=5y\\x^3+x^2y-x^2+2xy-6x+3y=0\end{cases}.$$

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x^2+y^2+xy+2x-5y=0 & (1)\\x^3+x^2y-x^2+2xy-6x+3y=0 & (2)\end{cases}.$$

<u>Tìm hệ số bất định:</u>

Dễ thấy hệ phương trình có hai nghiệm $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(1;1\right)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm này là $y=x$.

Thay $y=x$ vào hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{cases}A_1=3x\left(x-1\right)\\B_1=x\left(x-1\right)\left(2x+3\right)\end{cases}\Rightarrow k=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{3}{2x+3}.$$

Lời giải

Lấy $-(2x+3).(1)+3.(2)$ theo vế ta được:

$\left(x-y\right)\left(x^2+2xy-10x+3y-24\right)=0$.

Đáp số: $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(1;1\right);\left(-2;0\right);\left(-6;8\right)$.

<u>Cách 2:</u> Rút $y=\dfrac{-x^3+x^2+6x}{x^2+2x+3}$ từ phương trình thứ hai thay vào phương trình đầu ta được:

$$\frac{x\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x+6\right)\left(x^2+x+6\right)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\\x=-6\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,y=0\\x=1,y=1\\x=-2,y=0\\x=-6,y=8\end{array}\right..$$

<u>Cách 3:</u> Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}x^2+2x+y\left(x+y-3\right)=2y\\\left(x^2+2x\right)\left(x+y-3\right)=-3y\end{cases}.$$

Với $y=0\Rightarrow x=0$.

Với $y\neq0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{y}+x+y-3=2\\\dfrac{x^2+2x}{y}\left(x+y-3\right)=-3\end{cases}$

Đến đây đặt $\begin{cases}u=\dfrac{x^2+2x}{y}\\v=x+y-3\end{cases}$

Đưa về hệ phương trình đối xứng loại I $\begin{cases}u+v=2\\uv=-3\end{cases}$.

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2+xy-9x-y^2-9y=0\\2x^3-20x-x^2y-20y=0\end{cases}$.

<u>Tìm hệ số bất định:</u> Nhẩm được hai nghiệm của hệ là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(2;-1\right)$ khi đó đường thẳng đi qua hai điểm này là $x=-2y$ thay ngược lại hai phương trình của hệ ta được

$$\begin{cases} A_1(x,y) = 9y(y+1) \\ B_1(x,y) = -20y(y+1)(y-1) \end{cases} \Rightarrow p(x,y) = -\frac{A_1(x,y)}{B_1(x,y)} = \frac{9}{20(y-1)} .$$

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng $\begin{cases} 3x^2 + xy - 9x - y^2 - 9y = 0 \ (1) \\ 2x^3 - 20x - x^2y - 20y = 0 \ (2) \end{cases}$.

Nhận thấy $y = 1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $y \neq 1$ khi đó lấy $20(y-1).(1) + 9.(2)$ theo vế ta được:

$$(x+2y)(18x^2 + 15xy - 60x - 10y^2 - 80y) = 0 .$$

Khi đó đưa về giải hai hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 9x - y^2 - 9y = 0 \\ x = -2y \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 3x^2 + xy - 9x - y^2 - 9y = 0 \\ 18x^2 + 15xy - 60x - 10y^2 - 80y = 0 \end{cases} .$$

Giải hai hệ trên tìm được hai nghiệm $(x;y) = (0;0); \left(\frac{18}{13}; -\frac{9}{13}\right)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 3x + 3y - 3 = 0 \\ x^2y - 4xy - 3y^2 + 2y - x + 1 = 0 \end{cases} .$$

<u>Tìm hệ số bất định:</u> Nhận thấy hệ có hai nghiệm $(x;y) = (0;1);(1;0)$ khi đó đường thẳng đi qua hai điểm này là $x = 1 - y$ thay ngược lại hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{cases} A_1(x,y) = y^2(y-1)^2 \\ B_1(x,y) = y^2(y-1) \end{cases} \Rightarrow p(x,y) = -\frac{A_1(x,y)}{B_1(x,y)} = 1 - y .$$

Lời giải

Viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases} x^2y^2 + 3x + 3y - 3 = 0 \quad (1) \\ x^2y - 4xy - 3y^2 + 2y - x + 1 = 0 \ (2) \end{cases}$.

Nhận thấy $y = 1 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của hệ phương trình.

Xét với $y \neq 1$ khi đó lấy $(1) + (1-y).(2)$ ta được

$$\left(x+y-1\right)\left(3y^2+xy-2y+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ 3y^2+xy-2y+2=0 \end{array}\right. .$$

- Với $x+y-1=0$ khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2y^2+3x+3y-3=0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^2y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; y=1 \\ x=1; y=0 \end{array}\right. .$$

- Với $3y^2+xy-2y+2=0$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3y^2+xy-2y+2=0 \\ x^2y-4xy-3y^2+2y-x+1=0 \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai phương trình ta được $\left(x-3\right)\left(xy-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ xy-1=0 \end{array}\right.$

Thay ngược lại hệ thấy vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(1;0\right)$.

Bài 27. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(x-y\right)^2+x+y-y^2=0 \ (1) \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 \ (2) \end{cases}.$$

<u>Tìm hệ số bất định:</u> Nhận thấy hệ có hai nghiệm $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(2;2\right)$ khi đó đường thẳng đi qua hai điểm này là $y=x$.

Thay ngược lại hai phương trình của hệ ta được

$$\begin{cases} A_1(x,y)=-x\left(x-2\right) \\ B_1(x,y)=x^2\left(x-2\right)^2 \end{cases} \Rightarrow p(x,y)=-\frac{B_1(x,y)}{A_1(x,y)}=x\left(x-2\right) .$$

Lời giải

Nhận thấy $x=0$ và $x=2$ thì hệ có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(2;2\right)$.

Xét với $x \notin \left\{0;2\right\}$ khi đó lấy $x\left(x-2\right).(1)+(2)$ theo vế ta được

$$x\left(x-2\right)\left(x^2-2xy+x+y\right)+\left(x^4-4x^2y+3x^2+y^2\right)=0 .$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(2x^3-x^2+x-y\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2x^3-x^2+x-y=0 \end{array}\right. .$$

- Với $x=y$ thay ngược lại (1) ta được $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ (loại do $x\notin\{0;2\}$).

- Với $2x^3-x^2+x-y=0$ khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}2x^3-x^2+x-y=0\\x^2-2xy+x+y=0\end{cases}$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ này ta được:

$$2x\left(x^2+1-y\right)=0\Leftrightarrow y=x^2+1 \text{ (do } x\neq 0 \text{).}$$

Thay vào (1) ta được:

$-2x^3+x^2+1=0\Leftrightarrow(x-1)\left(-2x^2-x-1\right)=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=2$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=(0;0);(2;2);(1;2)$.

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 & (1)\\ x^2y+x^2+2y-22=0 & (2)\end{cases}$.

Phân tích lời giải: Nếu đặt $t=x^2$ ta đưa về dạng 1 và cách giải đã được xác định, ở đây ta xử lý bài toán theo một hướng khác đó là lấy $(1)+k.(2)$ và áp dụng phương pháp giải phương trình bậc bốn tổng quát với mục đích đưa phương trình này về dạng tích:

$x^4+(k-4+ky)x^2+y^2-6y+22ky+9-22k=0 \qquad (3)$.

Ta sẽ tìm k sao cho (3) phân tích được nghiệm. Muốn vậy Δ_{x^2} là số chính phương.

$\Delta_{x^2}=(k-4+ky)^2-4\left(y^2-6y+22ky+9-22k\right)$.

$\quad=\left(k^2-4\right)y^2+\left(2k^2-16k+24\right)y+k^2+80k-20$ có dạng chính phương.

Muốn vậy ta chọn k thỏa mãn

$\Delta_y=0\Leftrightarrow\left(2k^2-16k+24\right)^2-4\left(k^2-4\right)\left(k^2+80k-20\right)=0$.

Nhập phương trình vào máy tính bỏ túi ta tìm được $k=2$.

Lời giải

<u>**Cách 1:**</u> Lấy $(1)+2.(2)$ theo vế ta được:

$$x^4-4x^2+y^2-6y+9+2\left(x^2y+x^2+2y-22\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+y\right)^2-2\left(x^2+y\right)-35=0\Leftrightarrow\left(x^2+y+5\right)\left(x^2+y-7\right)=0.$$

- Với $y=-5-x^2$ thay vào (1) ta được $x^4+6x^2+32=0$ (vô nghiệm).
- Với $y=7-x^2$ thay vào (1) ta được:

$$x^4-6x^2+8=0\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}\vee x=\pm 2.$$

$\sqrt{\ }$

Suy ra $(x;y)=\left(\pm\sqrt{2};5\right);\left(\pm 2;3\right)$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=\left(-\sqrt{2};5\right);\left(\sqrt{2};5\right);\left(-2;3\right);\left(2;3\right)$.

Cách 2: Để ý từ phương trình thứ hai của hệ rút được $y=\dfrac{22-x^2}{x^2+2}$.

Thay $y=\dfrac{22-x^2}{x^2+2}$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^4-4x^2+\left(\frac{22-x^2}{x^2+2}\right)^2-6.\frac{22-x^2}{x^2+2}+9=0.$$

$$\Leftrightarrow(x-2)(x+2)\left(x^2-2\right)\left(x^4+6x^2+32\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\\x=-\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,y=3\\x=2,y=3\\x=-\sqrt{2},y=5\\x=\sqrt{2},y=5\end{array}\right.$$

Chủ đề 16. KỸ THUẬT PHỨC HÓA

Số phức có một ứng dụng rất rộng trong giải toán Sơ cấp từ Đại số, hình học và giải tích cho đến Toán cao cấp. Nội dung chủ đề này tôi trình bày một ứng dụng của số phức trong giải hệ phương trình. Trong bài viết này tôi tạm gọi là phương pháp phức hóa giải hệ phương trình.

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

1. Phương pháp chung

Phương pháp chung là đặt $z = x + iy$.

Khi đó chuyển bài toán tìm nghiệm $(x;y)$ về tìm phức z thỏa mãn hệ phương trình đã cho.

Dùng phương pháp giải phương trình nghiệm phức tìm được:

$$z = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}.$$

Căn bậc n của số phức:

$$z^n = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi) \Rightarrow z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i.\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right), k = 0,1,...,n-1 .$$

Một số đẳng thức thường sử dụng.

- $\overline{z} = x - iy$.
- $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.
- $z^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$.
- $z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4(x^3y - xy^3)i$.
- $z^5 = x^5 + 5xy^4 - 10y^2x^3 + i(y^5 + 5x^4y - 10x^2y^3)$.
- $z^6 = x^6 - 15y^2x^4 + 15y^4x^2 - y^6 + i(6yx^5 - 20y^3x^3 + 6y^5x)$.
- $z^7 = x^7 - 21y^2x^5 + 35y^4x^3 - 7y^6x + i(-y^7 + 21x^2y^5 - 35x^4y^3 + 7x^6y)$.
- $z^8 = x^8 - 28y^2x^6 + 70y^4x^4 - 28y^6x^2 + y^8 + i(8yx^7 - 56y^3x^5 + 56y^5x^3 - 8y^7x)$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$.

- $\frac{i}{z}=\frac{i\left(x-yi\right)}{x^2+y^2}=\frac{xi+y}{x^2+y^2}$.

- $\frac{1}{z^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{2xyi}{\left(x^2+y^2\right)}$.

Nhân thêm vào một phương trình của hệ với đại lượng i sau đó cộng(trừ-có hệ số nếu có) theo vế hợp lý đưa về phương trình có chứa các nhân tử $z,z^2,z^3,\frac{1}{z},\frac{i}{z},....$

2. Dấu hiệu nhận biết

Hai phương trình của hệ có dạng:

<u>Dạng 1:</u> $F\left(x;y;\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0\Rightarrow z=x+yi$.

<u>Dạng 2:</u> $F\left(\sqrt{x};\sqrt{y};\frac{1}{x+y}\right)\Rightarrow z=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$.

<u>Tổng quát:</u> $F\left(x^k;y^k;\frac{1}{ax^{2k}+by^{2k}}\right),\left(a,b>0,k\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow z=\sqrt{a}x^k+i\sqrt{b}y^k$.

<u>Chú ý.</u> Đôi khi đề bài làm triệt tiêu dấu hiện nhật biết ta cần biến đổi hệ trước tiên.

Ví dụ. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(6-x\right)\left(x^2+y^2\right)=6x+8y\\ \left(3-y\right)\left(x^2+y^2\right)=8x-6y\end{cases}$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases}6-x=\frac{6x+8y}{x^2+y^2}\\ 3-y=\frac{8x-6y}{x^2+y^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{6x+8y}{x^2+y^2}=6\\ y+\frac{8x-6y}{x^2+y^2}=3\end{cases}$.

3. Một số hệ xử lý bằng phương pháp phức hóa đồng thời cũng xử lý được bằng phương pháp khác.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\left(x^2-3y^2\right)=1\\ y\left(3x^2-y^2\right)=1\end{cases}$.

Lời giải phức hóa:

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ -y^3+3yx^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3xy^2=1 \\ i\left(-y^3+3yx^2\right)=i \end{cases} \Rightarrow x^3-3xy^2+\left(3x^2y-y^3\right)i=1+i.$$

Đặt $z=x+yi$ phương trình trở thành:

$$z^3=1+i \Leftrightarrow z^3=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}\right)+i.\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}\right)\right], k=0,1,2.$$

Lời giải

Nhận thấy vế trái của hai phương trình của hệ cùng bậc ba nên ta nghĩ đến phương pháp đồng bậc

Ta có: $x\left(x^2-3y^2\right)=y\left(3x^2-y^2\right) \Leftrightarrow x^3+y^3-3xy\left(x+y\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left[x^2+y^2-4xy\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x^2+y^2-4xy=0 \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} y=-x \\ x\left(x^2-3x^2\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}.$$

TH2: Nếu $x^2+y^2-4xy=0$ đến đây ta hoàn toàn có thể rút x theo y hoặc y theo x thế vào hệ tuy nhiên lúc sau được phương trình bậc ba mà các hệ số có chứa căn, điều đáng ngại nữa là hệ không có nghiệm đẹp.

Vậy ta suy nghĩ tìm hướng xử lý khác:

Để ý hai phương trình của hệ ta nhận thấy $xy\left(x^2-3y^2\right)\left(y^2-3x^2\right)\neq 0$ nên nhân theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$xy\left(x^2-3y^2\right)\left(y^2-3x^2\right)=1 \Leftrightarrow xy\left(3x^4+3y^4-10x^2y^2\right)=1.$$

$$\Leftrightarrow xy\left[3\left(x^2+y^2\right)-16x^2y^2\right]=1.$$

Kết hợp với $x^2+y^2-4xy=0$ ta đưa về giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy\left[3\left(x^2+y^2\right)-16x^2y^2\right]=1 \\ x^2+y^2-4xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy\left(3.16x^2y^2-16x^2y^2\right)=1 \\ x^2+y^2=4xy \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{4}} \\ x^2+y^2=4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{4}} \\ \left(x+y\right)^2=6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{4}} \\ x+y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}.$$

Hệ phương trình cuối là hệ đối xứng lại I đã biết cách giải.

<u>Đáp số:</u>

$$\left(x;y\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right);\left(-\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-5}}{2};-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{3\sqrt{3}-5}\right);\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-5}}{2};\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{3\sqrt{3}-5}\right)$$

<u>**Nhận xét.**</u> Lời giải phức hóa cho ta nghiệm nhanh gọn tuy nhiên không biểu diễn trực tiếp được nghiệm như lời giải đại số thuần túy như trên.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+5y=xy+2 \\ x^2+4y+21=y^2+10x \end{cases}$.

Lời giải

<u>**Cách 1:**</u> Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 2i\left(xy+2-2x-5y\right)=0 \\ x^2+4y+21-y^2-10x=0 \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2+4y+21-y^2-10x+2i\left(xy+2-2x-5y\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x+iy\right)^2-10\left(x+iy\right)-4i\left(x+iy\right)+4i+21=0 \text{ (1)}.$$

Đặt $z=x+iy$ khi đó (1) trở thành:

$$z^2-10z-4iz+4i+21=0 \Leftrightarrow z^2-2z\left(2i+5\right)+4i+21=0.$$

Phương trình có $\Delta'=\left(2i+5\right)^2-4i-21=16i=8\left(1+i\right)^2$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} z=2i+5+2\sqrt{2}\left(i+1\right) \\ z=2i+5-2\sqrt{2}\left(i+1\right) \end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+iy=5+2\sqrt{2}+\left(2+2\sqrt{2}\right)i \\ x+iy=5-2\sqrt{2}+\left(2-2\sqrt{2}\right)i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5+2\sqrt{2}, y=2+2\sqrt{2} \\ x=5-2\sqrt{2}, y=2-2\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(5+2\sqrt{2};2+2\sqrt{2}\right);\left(5-2\sqrt{2};2-2\sqrt{2}\right).$$

<u>Cách 2:</u> Nhận thấy phương trình đầu rút được x theo y hoặc y theo x nên ta sử dụng phương pháp thế.

Nhận thấy $y=2$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y\neq 2$ khi đó viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2-5y}{2-y} \\ y^2-4y-x^2+10x-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2-5y}{2-y} \\ y^2-4y-\left(\dfrac{2-5y}{2-y}\right)^2+10.\dfrac{2-5y}{2-y}-21=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2-5y}{2-y} \\ y^4-8y^3+24y^2-32y-48=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2-5y}{2-y} \\ \left(y^2-4y\right)^2+8\left(y^2-4y\right)-48=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2-5y}{2-y} \\ \left(y^2-4y-4\right)\left(y^2-4y+12\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2-5y}{2-y} \\ y^2-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5+2\sqrt{2}, y=2+2\sqrt{2} \\ x=5-2\sqrt{2}, y=2-2\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3xy^2-x+1=x^2-2xy-y^2 \\ y^3-3x^2y+y-1=y^2-2xy-x^2 \end{cases}$.

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Đặt $z=x+iy \Rightarrow \begin{cases} z^2=x^2-y^2+2xyi \\ z^3=x^3-3xy^2+\left(3x^2y-y^3\right)i \end{cases}$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^3-3xy^2-x+1-x^2+2xy+y^2=0 \\ i\left(-y^3+3x^2y-y+1-x^2-2xy+y^2\right)=0 \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^3-3xy^2-x+1-x^2+2xy+y^2+i\left(-y^3+3x^2y-y+1-x^2-2xy+y^2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^3-3xy^2+\left(3x^2y-y^3\right)i-\left(x^2-y^2+2xyi\right)+2xy+i\left(-x^2+y^2\right)-x+1+i\left(-y+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-3xy^2+\left(3x^2y-y^3\right)i-\left(1+i\right)\left(x^2-y^2+2xyi\right)-\left(x+yi\right)+1+i.$$

$$\Leftrightarrow z^3-\left(1+i\right)z^2-z+1+i=0 \Leftrightarrow \left(z-1\right)\left(z^2-iz-1-i\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(z-1\right)\left(z+1\right)\left(z-1-i\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-1 \\ z=1+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+yi=1 \\ x+yi=-1 \\ x+yi=1+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,y=0 \\ x=-1,y=0 \\ x=1,y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;0\right),\left(-1;0\right),\left(1;1\right)$.

<u>Cách 2:</u> Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \left(x-1\right)\left(x^2-1-y^2\right)=2xy\left(y-1\right) \\ \left(y-1\right)\left(y^2+1-x^2\right)=2xy\left(x-1\right) \end{cases}.$$

<u>TH1:</u> Nếu $2xy\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

- Nếu $x=0$ hệ trở thành $\begin{cases} y^2+1=0 \\ \left(y-1\right)\left(y^2+1\right)=0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.
- Nếu $y=0$ hệ trở thành $\begin{cases} \left(x-1\right)\left(x^2-1\right)=0 \\ -\left(1-x^2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(-1;0\right);\left(1;0\right)$
- Nếu $x=1$ hệ trở thành $\begin{cases} 0=0 \\ \left(y-1\right)y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(1;0\right);\left(1;1\right)$.

<u>TH2:</u> Nếu $2xy\left(x-1\right)\neq 1$ khi đó chia theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\frac{(x-1)(x^2-1-y^2)}{(y-1)(y^2+1-x^2)}=\frac{2xy(y-1)}{2xy(x-1)}$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=-(y-1)^2 \Leftrightarrow x=y=1$ không thỏa mãn điều kiện $2xy(x-1)\neq 0$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=(-1;0);(1;0);(1;1)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1: Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ iy-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}.i=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+yi+\dfrac{3x-y-xi-3yi}{x^2+y^2}-3=0 \\ yi-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}.i=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+yi+\dfrac{3(x-yi)-(y+xi)}{x^2+y^2}-3=0 \qquad (1) \\ yi-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}.i=0 \end{cases}.$$

Đặt $z=x+yi \Rightarrow \dfrac{1}{z}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}, \dfrac{i}{z}=\dfrac{y+xi}{x^2+y^2}$.

Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$z+\frac{3-i}{z}-3=0 \Leftrightarrow z^2-3z+3-i=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+i \\ z=1-i \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+yi=2+i \\ x+yi=1-i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=1 \\ x=1, y=-1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;-1);(2;1)$.

<u>Cách 2:</u> Nhận thấy $xy=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $xy\neq 0$ khi đó viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} xy+\dfrac{3xy-y^2}{x^2+y^2}=3x \\ xy-\dfrac{x^2+3xy}{x^2+y^2}=0 \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ trên ta được:

$$2xy-1=3x \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}.$$

Thay vào phương trình đầu tiên của hệ ta được:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}+\frac{3\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2y}\right)-y}{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2y}\right)^2+y^2}=3 \Leftrightarrow (y+1)(y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \Rightarrow x=1 \\ y=1 \Rightarrow x=2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;-1);(2;1)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (6-x)\left(x^2+y^2\right)=6x+8y \\ (3-y)\left(x^2+y^2\right)=8x-6y \end{cases}.$

Lời giải

<u>**Cách 1:**</u> Nhận thấy $x=y=0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x^2+y^2>0$ khi đó viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 6-x=\dfrac{6x+8y}{x^2+y^2} \\ 3-y=\dfrac{8x-6y}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{6x+8y}{x^2+y^2}=6 \\ y+\dfrac{8x-6y}{x^2+y^2}=3 \end{cases}.$$

Rõ ràng đến đây hệ phương trình có dạng như các bài toán trên.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x+\dfrac{6x+8y}{x^2+y^2}=6 \\ iy+\dfrac{8x-6y}{x^2+y^2}.i=3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+yi+\dfrac{6x+8y+8xi-6yi}{x^2+y^2}=6+3i \\ x+\dfrac{6x+8y}{x^2+y^2}=6 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + yi + \dfrac{6(x - yi) + 8(y + xi)}{x^2 + y^2} = 6 + 3i \ (1) \\ x + \dfrac{6x + 8y}{x^2 + y^2} = 6 \end{cases}.$$

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}, \dfrac{i}{z} = \dfrac{y + xi}{x^2 + y^2}$.

Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$z + \frac{6 + 8i}{z} = 6 + 3i \Leftrightarrow z^2 - (6 + 3i)z + 6 + 8i = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 + i \\ z = 4 + 2i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + yi = 2 + i \\ x + yi = 4 + 2i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, y = 1 \\ x = 4, y = 2 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = (0;0);(2;1);(4;2)$.

<u>Cách 2:</u> Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{6x + 8y}{x^2 + y^2} = 6 \\ y + \dfrac{8x - 6y}{x^2 + y^2} = 3 \end{cases}$.

Nhận thấy nếu nhân vào phương trình đầu với y và phương trình thứ hai với x sau đó cộng theo vế sẽ triệt tiêu hạng tử chứa $x^2 + y^2$.

Nhận thấy $xy = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình:

Xét với $xy \neq 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases} xy + \dfrac{6xy + 8y^2}{x^2 + y^2} = 6y \\ xy + \dfrac{8x^2 - 6xy}{x^2 + y^2} = 3x \end{cases}$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ trên ta được:

$$2xy + 8 = 3x + 6y \Leftrightarrow x = \frac{6y - 8}{2y - 3}, \left(y \neq \frac{3}{2}\right).$$

Thay vào phương trình đầu tiên của hệ ban đầu ta được:

$$\frac{6y - 8}{2y - 3} + \frac{6.\dfrac{6y - 8}{2y - 3} + 8y}{\left(\dfrac{6y - 8}{2y - 3}\right)^2 + y^2} = 6 \Leftrightarrow (y - 1)(y - 2)(3y - 4)(4y^2 - 12y + 13) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=2 \Rightarrow x=4 \\ y=\dfrac{4}{3} \Rightarrow x=0 \end{array}\right. .$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $(x;y)=(0;0);(2;1);(4;2)$.

Nhận xét. Rõ ràng nếu nghiệm của hệ là lẻ khi đó việc rút x theo y rồi thế vào phương trình của hệ đưa về một phương trình bậc cao của y tỏ ra không hiệu quả trong khi sử dụng số phức ta hoàn toàn tìm được nghiệm của z và tất nhiên tìm được $(x;y)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3xy^2=-4 \\ y^3-3x^2y=-4\sqrt{3} \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=-4 \\ i\left(y^3-3x^2y\right)=-4\sqrt{3}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3xy^2=-4 \\ x^3-3xy^2-\left(y^3-3x^2y\right)i=-4+4\sqrt{3}i \ (1) \end{cases}.$$

Đặt $z=x+yi$ khi đó (1) trở thành:

$$z^3=-4+4\sqrt{3}i=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i.\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\Leftrightarrow z=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\right)+i.\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\right)\right], k=0,1,2 .$$

Suy ra $(x;y)=\left(2\cos\frac{2\pi}{9};2\sin\frac{2\pi}{9}\right);\left(2\cos\frac{8\pi}{9};2\sin\frac{8\pi}{9}\right);\left(2\cos\frac{14\pi}{9};2\sin\frac{14\pi}{9}\right)$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là

$$(x;y)=\left(2\cos\frac{2\pi}{9};2\sin\frac{2\pi}{9}\right);\left(2\cos\frac{8\pi}{9};2\sin\frac{8\pi}{9}\right);\left(2\cos\frac{14\pi}{9};2\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4-6x^2y^2+y^4=8\sqrt{3} \\ x^3y-xy^3=2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 8\sqrt{3} \\ 4x^3y - 4xy^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 8\sqrt{3} \\ i\left(4x^3y - 4xy^3\right) = 8i \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i\left(4x^3y - 4xy^3\right) = 8\sqrt{3} + 8i \ (1) \\ i\left(4x^3y - 4xy^3\right) = 8i \end{cases}.$$

Đặt $z = x + yi \Rightarrow z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i\left(4x^3y - 4xy^3\right)$.

Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$z^4 = \sqrt{3} + i = 16\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow z = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{4} + i.\sin\frac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{4}\right), k = 0,1,2,3$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(2\cos\frac{\pi}{24}; 2\sin\frac{\pi}{24}\right); \left(2\cos\frac{13\pi}{24}; 2\sin\frac{13\pi}{24}\right); \left(2\cos\frac{25\pi}{24}; 2\sin\frac{25\pi}{24}\right).$$

Nhận xét. Qua hai bài toán trên hoàn toàn xử lý được với hệ cho bậc 5,6,7 và điều lưu ý là hệ dạng này là hệ đẳng cấp tuy nhiên bậc cao và nghiệm lẻ nên kinh nghiệm là các em sử dụng số phức như trên.

Bài 7. (VMO 1996) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1 - \dfrac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0, x + y > 0$.

Nhận thấy $xy = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Vì vậy điều kiện của ẩn để hệ phương trình có nghiệm là $x > 0, y > 0$.

Khi đó viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1 - \dfrac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{x+y} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{y} - \dfrac{\sqrt{y}}{x+y} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}.$$

Ta đặt $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u + \dfrac{u}{u^2 + v^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} & (1) \\ v - \dfrac{v}{u^2 + v^2} = 4\sqrt{\dfrac{2}{7}} & (2) \end{cases}.$$

Hệ đã đưa về dạng quen thuộc của số phức.

Lấy $(1) + i.(2)$ theo vế ta được: $u + vi + \dfrac{u - vi}{u^2 + v^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{\dfrac{2}{7}}i$.

Đặt $z = u + vi$ khi đó ta có phương trình:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{\frac{2}{7}}i \Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{\frac{2}{7}}i\right)z + 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{\dfrac{2}{7}}i + 2\sqrt{21} + 21\sqrt{2}i}{2} \\ z = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{\dfrac{2}{7}}i - 2\sqrt{21} - 21\sqrt{2}i}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + yi = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{\dfrac{2}{7}}i + 2\sqrt{21} + 21\sqrt{2}i}{2} \\ x + yi = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{\dfrac{2}{7}}i - 2\sqrt{21} - 21\sqrt{2}i}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{21}; 2\sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{21}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{21}; 2\sqrt{\frac{2}{7}} - \frac{21}{\sqrt{2}}\right).$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x - 3y - 2 = 0 & (1) \\ 3x + 2xy - 2y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1) + i.(2)$ theo vế ta được:

$$x^2 - y^2 - 2x - 3y - 2 + i(3x + 2xy - 2y - 4) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^2 - (2 - 3i)(x + yi) - 2 - 4i = 0.$$

Đặt $z = x + yi$ phương trình trở thành:

$$z^2 - (2 - 3i)z - 2 - 4i \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2i \\ z = 2 - i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + yi = -2i \\ x + yi = 2 - i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = -2 \\ x = 2, y = -1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (0;-2);(2;-1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x-1)(x^2+y^2)+2y=0\\(2y-3)(x^2+y^2)+2x=0\end{cases}$.

Lời giải

Nếu $x=0\Leftrightarrow y=0\Rightarrow (x;y)=(0;0)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $xy\neq 0$ viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{x^2+y^2}+2y-3=0\\\dfrac{2y}{x^2+y^2}+2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2xi}{x^2+y^2}+2yi-3i=0\\\dfrac{2y}{x^2+y^2}+2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2(xi+y)}{x^2+y^2}+2(x+yi)-3i-1=0\\\dfrac{2y}{x^2+y^2}+2x-1=0\end{cases}.$$

Đặt $z=x+yi$ ta có phương trình:

$$\frac{2i}{z}+2z-3i-1=0\Leftrightarrow 2z^2-(3i+1)z+2i=0.$$

Phương trình này có $\Delta=(3i+1)^2-16i=-8-10i=\left(\sqrt{\sqrt{41}-4}-i\sqrt{\sqrt{41}+4}\right)^2$.

Suy ra: $$\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1+\sqrt{\sqrt{41}-4}+\left(3-\sqrt{\sqrt{41}+4}\right)i}{4}\\z=\dfrac{1-\sqrt{\sqrt{41}-4}+\left(3+\sqrt{\sqrt{41}+4}\right)i}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{\sqrt{41}-4}}{4},y=\dfrac{3-\sqrt{\sqrt{41}+4}}{2}\\x=\dfrac{1-\sqrt{\sqrt{41}-4}}{4},y=\dfrac{3+\sqrt{\sqrt{41}+4}}{4}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(0;0);\left(\frac{1+\sqrt{\sqrt{41}-4}}{4};\frac{3-\sqrt{\sqrt{41}+4}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{\sqrt{41}-4}}{4};\frac{3+\sqrt{\sqrt{41}+4}}{4}\right).$$

Bài 3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^3-3xy^2-2x^2+2y^2-2xy+3x+5y-2=0 & (1)\\-y^3+3x^2y-4xy+x^2-y^2+3y-3x=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải

Lấy $(1)+i.(2)$ theo vế ta được:

$$x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)i-(2-i)(x^2-y^2+2xyi)+(3-3i)(x+yi)-2+2i=0.$$

$$\Leftrightarrow (x+yi)^3-(2-i)(x+yi)^2+(3-3i)(x+yi)-2+2i=0.$$

Đặt $z = x + yi$ khi đó ta có phương trình:

$$z^3 - (2-i)z^2 + (3-3i)z - 2 + 2i = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z+2i)(z-i-1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z+2i)(z-i-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -2i \\ z = i+1 \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + yi = 1 \\ x + yi = -2i \\ x + yi = i+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 0 \\ x = 0, y = -2 \\ x = 1, y = 1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = (1;0);(0;-2);(1;1)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 - x^3 - 6x^2y^2 + 6x^2y - 4x^2 + 3xy^2 + 2xy - x + y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 4y = 0 & (1) \\ 4x^3y - 2x^3 - 3x^2y - x^2 - 4xy^3 + 6xy^2 - 8xy + 4x + y^3 + y^2 - y + 13 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Lấy $(1) + i.(2)$ theo vế ta được:

$$(x+yi)^4 - (1+2i)(x+yi)^3 - (4+i)(x+yi)^2 - (1-4i)(x+yi) + 1 + 3i = 0.$$

Đặt $z = x + yi$ phương trình trở thành:

$$z^4 - (1+2i)z^3 - (4+i)z^2 - (1-4i)z + 1 + 3i = 0.$$

$$\Leftrightarrow (z+1)^2(z-2-i)(z-1-i) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z = 2+i \\ z = 1+i \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \\ z = 2+i \\ z = 1+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + yi = -1 \\ x + yi = 2+i \\ x + yi = 1+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = 0 \\ x = 2, y = 1 \\ x = 1, y = 1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y) = (-1;0);(2;1);(1;1)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - \dfrac{2}{y^2} - (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}x - 1) - \dfrac{xy^2}{x^2y^2+1} = 0 \\ 4x + \dfrac{y^2}{x^2y^2+1} = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $y \neq 0$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{2}x\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{y}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}x-\dfrac{2x}{2x^2+\dfrac{2}{y^2}}=-\left(\sqrt{2}+1\right)\\ 2.\sqrt{2}x.\dfrac{\sqrt{2}}{y}+-\left(\sqrt{2}+1\right).\dfrac{\sqrt{2}}{y}+\dfrac{\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{y}}{2x^2+\dfrac{2}{y^2}}=0\end{cases}.$$

Đặt $u=\sqrt{2}x, v=\dfrac{\sqrt{2}}{y},\left(v\neq 0\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u^2-v^2-\left(\sqrt{2}+1\right)u-\dfrac{\sqrt{2}u}{u^2+v^2}=-\left(\sqrt{2}+1\right) & (1)\\ 2uv-\left(\sqrt{2}+1\right)v+\dfrac{\sqrt{2}v}{u^2+v^2}=0 & (2)\end{cases}.$$

Lấy $(1)+i.(2)$ ta được: $\left(u+vi\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(u+vi\right)-\dfrac{\sqrt{2}\left(u-vi\right)}{u^2+v^2}=-\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Đặt $z=u+vi$ ta có phương trình:

$$z^2-\left(\sqrt{2}+1\right)z-\frac{\sqrt{2}}{z}=-\left(\sqrt{2}+1\right)\Leftrightarrow z^3-\left(\sqrt{2}+1\right)z^2+\left(\sqrt{2}+1\right)z-\sqrt{2}=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(z-\sqrt{2}\right)\left(z^2-z+1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\sqrt{2}\\ z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\\ z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u+vi=\sqrt{2}\\ u+vi=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\\ u+vi=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\sqrt{2}, v=0\\ u=\dfrac{1}{2}, v=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ u=\dfrac{1}{2}, v=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, y=-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\\ x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, y=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}};-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right);\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}};\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Nhận xét. Như vậy bằng việc thay $x := \sqrt{2}x, y := \dfrac{\sqrt{2}}{y}$ ta đưa về một phương trình hết sức cồng kềnh. Mục đích của bài tập này là rèn luyện cho các em khả năng nhận biết dấu hiện sử dụng số phức.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ i\left(y^3 - 3x^2y\right) = -\sqrt{3}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 1 = 0 \\ x^3 - 3xy^2 - \left(y^3 - 3x^2y\right)i = -1 + \sqrt{3}i \qquad (1) \end{cases}.$$

Đặt $z = x + yi$ khi đó (1) trở thành:

$$z^3 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}\right)\right], k = 0,1,2.$$

Suy ra: $\left(x;y\right) = \left(\sqrt[3]{2}\cos\dfrac{2\pi}{9};\sqrt[3]{2}\sin\dfrac{2\pi}{9}\right);\left(\sqrt[3]{2}\cos\dfrac{8\pi}{9};\sqrt[3]{2}\sin\dfrac{8\pi}{9}\right);$

$\left(\sqrt[3]{2}\cos\dfrac{14\pi}{9};\sqrt[3]{2}\sin\dfrac{14\pi}{9}\right).$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$\left(x;y\right) = \left(\sqrt[3]{2}\cos\frac{2\pi}{9};\sqrt[3]{2}\sin\frac{2\pi}{9}\right);\left(\sqrt[3]{2}\cos\frac{8\pi}{9};\sqrt[3]{2}\sin\frac{8\pi}{9}\right);\left(\sqrt[3]{2}\cos\frac{14\pi}{9};\sqrt[3]{2}\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = \sqrt{3} & (1) \\ x^3y - xy^3 = \dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1) + 4i.(2)$ theo vế ta được:

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4\left(x^3y - xy^3\right)i = \sqrt{3} + i.$$

$$\Leftrightarrow \left(x + yi\right)^4 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\Leftrightarrow x+yi=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4}+i.\sin\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4}\right),\left(k=0,1,...,3\right).$$

Hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\sqrt[4]{2}\cos\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4};\sqrt[4]{2}\sin\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4}\right),\left(k=0,1,...,3\right).$$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(x^4-10x^2y^2+5y^4\right)=\sqrt{3} & (1) \\ y\left(y^4-10x^2y^2+5x^4\right)=-1 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)+i.(2)$ ta được:

$$x^5+5xy^4-10y^2x^3+i\left(y^5+5x^4y-10x^2y^3\right)=\sqrt{3}-i.$$

$$\Leftrightarrow\left(x+yi\right)^5=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i.\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i.\sin\frac{-\pi}{6}\right).$$

$$\Leftrightarrow x+yi=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{-\pi}{6}+k2\pi}{5}+i.\sin\frac{\frac{-\pi}{6}+k2\pi}{5}\right),\left(k=0,1,...,4\right).$$

Hệ phương trình có năm nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\sqrt[5]{2}\cos\frac{\frac{-\pi}{6}+k2\pi}{5};\sqrt[5]{2}\sin\frac{\frac{-\pi}{6}+k2\pi}{5}\right),\left(k=0,1,...,4\right)$$

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^6-15y^2x^4+15y^4x^2-y^6=\dfrac{1}{2} & (1) \\ 6yx^5-20y^3x^3+6y^5x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$

Lời giải

Lấy $(1)+i.(2)$ theo vế ta được:

$$x^6-15y^2x^4+15y^4x^2-y^6+i\left(6yx^5-20y^3x^3+6y^5x\right)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x+yi\right)^6=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x+yi=\cos\frac{\frac{\pi}{3}+k2\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+k2\pi}{6},k=0,1,...,5.$$

Hệ phương trình có sáu nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+k2\pi}{6};\sin\frac{\frac{\pi}{3}+k2\pi}{6}\right),\left(k=0,1,2,3,4,5\right).$$

Bài 10. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^7-21y^2x^5+35y^4x^3-7y^6x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} & (1) \\ y^7-21x^2y^5+35x^4y^3-7x^6y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & (2) \end{cases}.$$

Lời giải

Lấy $(1)-i.(2)$ theo vế ta được:

$$x^7-21y^2x^5+35y^4x^3-7y^6x+i\left(-y^7+21x^2y^5-35x^4y^3+7x^6y\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+yi\right)^7=\frac{1}{\sqrt{2}}+i.\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x+yi=\cos\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{7}+i.\sin\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{7},\left(k=0,1,...,6\right)$$

Hệ phương trình có bẩy nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{7};\sin\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{7}\right),\left(k=0,1,...,6\right).$$

Bài 11. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^8 - 28y^2x^6 + 70y^4x^4 - 28y^6x^2 + y^8 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (1) \\ 8yx^7 - 56y^3x^5 + 56y^5x^3 - 8y^7x = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Lấy $(1) + i.(2)$ ta được:

$$x^8 - 28y^2x^6 + 70y^4x^4 - 28y^6x^2 + y^8$$

$$+i\left(8yx^7 - 56y^3x^5 + 56y^5x^3 - 8y^7x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x + yi\right)^8 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x + yi = \cos\frac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{8} + i.\sin\frac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{8}, \left(k = 0, 1, ..., 7\right)$$

Hệ phương trình có tám nghiệm là:

$$\left(x; y\right) = \left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{8}; \sin\frac{\frac{\pi}{6} + k2\pi}{8}\right), \left(k = 0, 1, ..., 7\right).$$

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(2 - x\right)\left(x^2 + y^2\right) = -5x + 5y \\ \left(5 - y\right)\left(x^2 + y^2\right) = 5x + 5y \end{cases}$.

Lời giải

Nhận thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x^2 + y^2 > 0$ khi đó viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x + \dfrac{-5x + 5y}{x^2 + y^2} = 2 \\ y + \dfrac{5x + 5y}{x^2 + y^2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{-5x + 5y}{x^2 + y^2} = 2 \\ yi + \dfrac{5x + 5y}{x^2 + y^2}.i = 5i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+yi+\dfrac{-5(x-yi)+5(xi+y)}{x^2+y^2}=2+5i & (1) \\ yi+\dfrac{5x+5y}{x^2+y^2}.i=5i \end{cases}.$$

Đặt $z=x+yi$ khi đó phương trình (1) trở thành:

$$z+\frac{5i-5}{z}=2+5i \Leftrightarrow z^2-(5i+2)z+5i-5=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2i+1 \\ z=3i+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+yi=2i+1 \\ x+yi=3i+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,y=1 \\ x=3,y=1 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=(0;0);(2;1);(3;1)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x-\dfrac{2x}{x^2+y^2}=2 & (1) \\ 3y+\dfrac{2y}{x^2+y^2}=4 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)+i.(2)$ ta được: $3(x+yi)-\dfrac{2(x-yi)}{x^2+y^2}=2+4i$.

Đặt $z=x+yi$ khi đó ta có phương trình:

$$3z-\frac{2}{z}=2+4i \Leftrightarrow 3z^2-(2+4i)z-2=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+i \\ z=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+yi=1+i \\ x+yi=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,y=1 \\ x=-\dfrac{1}{3},y=\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{5x+7\sqrt{5}y}{x^2+y^2}=7 \ (1) \\ y+\dfrac{7\sqrt{5}x-5y}{x^2+y^2}=0 \ (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)+i.(2)$ theo vế ta được: $x+yi+\dfrac{5(x-yi)+7\sqrt{5}(xi+y)}{x^2+y^2}=7$.

Đặt $z = x + yi$ khi đó ta có phương trình:

$$z + \frac{5 + 7\sqrt{5}i}{z} = 7 \Leftrightarrow z^2 - 7z + 5 + 7\sqrt{5}i = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 7 - \sqrt{5}i \\ z = \sqrt{5}i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + yi = 7 - \sqrt{5}i \\ x + yi = \sqrt{5}i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7, y = -\sqrt{5} \\ x = 0, y = \sqrt{5} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = \left(7;-\sqrt{5}\right);\left(0;\sqrt{5}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{ll} x + \dfrac{5x - y}{x^2 + y^2} = 3 & (1) \\ y - \dfrac{x + 5y}{x^2 + y^2} = 0 & (2) \end{array}\right.$.

Lời giải

Lấy $(1) + i.(2)$ theo vế ta được: $x + yi + \dfrac{5(x + yi) - (xi + y)}{x^2 + y^2} = 3$.

Đặt $z = x + yi$ khi đó ta có phương trình:

$$z + \frac{5 - i}{z} = 3 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 5 - i = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{3 + \sqrt{\dfrac{\sqrt{137} - 11}{2}} + \dfrac{1}{4}\left(11 + \sqrt{137}\right)\sqrt{\dfrac{\sqrt{137} - 11}{2}}i}{2} \\ z = \dfrac{3 - \sqrt{\dfrac{\sqrt{137} - 11}{2}} - \dfrac{1}{4}\left(11 + \sqrt{137}\right)\sqrt{\dfrac{\sqrt{137} - 11}{2}}i}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y) = \left(\frac{3 + \sqrt{\dfrac{\sqrt{137} - 11}{2}}}{2}; \frac{1}{8}\left(11 + \sqrt{137}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{137} - 11}{2}}\right);$$

$$(x;y) = \left(\frac{3 - \sqrt{\dfrac{\sqrt{137} - 11}{2}}}{2}; -\frac{1}{8}\left(11 + \sqrt{137}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{137} - 11}{2}}\right).$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{16x-11y}{x^2+y^2}=11 & (1) \\ y-\dfrac{11x+16y}{x^2+y^2}=-17 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)+i.(2)$ theo vế ta được: $x+yi+\dfrac{16\left(x-yi\right)-11\left(xi+y\right)}{x^2+y^2}=11-17i$.

Đặt $z=x+yi$ ta có phương trình:

$$z+\frac{16-11i}{z}=11-17i \Leftrightarrow z^2-\left(11-17i\right)z+16-11i=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-i \\ z=11-16i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+yi=-i \\ x+yi=11-16i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=-1 \\ x=11, y=-16 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;-1\right);\left(11;-16\right)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(1+\dfrac{6}{x^2+y^2}\right)=3\sqrt{2} & (1) \\ y\left(1-\dfrac{6}{x^2+y^2}\right)=1 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Lấy $(1)+i.(2)$ theo vế ta được : $x+yi+\dfrac{6\left(x-yi\right)}{x^2+y^2}=3\sqrt{2}+i$.

Đặt $z=x+yi$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$z+\frac{6}{z}=3\sqrt{2}+i \Leftrightarrow z^2-\left(3\sqrt{2}+i\right)z+6=0.$$

Ta có $\Delta=\left(3\sqrt{2}+i\right)^2-24=6\sqrt{2}i-7=\left(\sqrt{2}+3i\right)^2$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} z=\dfrac{3\sqrt{2}+i+\sqrt{2}+3i}{2} \\ z=\dfrac{3\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-3i}{2} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+yi=\dfrac{3\sqrt{2}+i+\sqrt{2}+3i}{2} \\ x+yi=\dfrac{3\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-3i}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{2}, y=2 \\ x=\sqrt{2}, y=-1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(2\sqrt{2};2\right);\left(\sqrt{2};-1\right)$.

Bài 18. (VMO 2007) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)=2 \\ \sqrt{y}\left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)=6 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 0, y+3x>0$.

Đặt $u=\sqrt{3x}\ge 0, v=\sqrt{y}\ge 0$.

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\sqrt{3}}\left(1-\dfrac{12}{u^2+v^2}\right)=2 \\ v\left(1+\dfrac{12}{u^2+v^2}\right)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-\dfrac{12u}{u^2+v^2}=2\sqrt{3} & (1) \\ v+\dfrac{12v}{u^2+v^2}=6 & (2) \end{cases}.$$

Lấy $(1)+i.(2)$ theo vế ta được: $u+vi-\dfrac{12(u-vi)}{u^2+v^2}=2\sqrt{3}+6i$.

Đặt $z=u+vi$ khi đó ta có phương trình:

$$z-\frac{12}{z}=2\sqrt{3}+6i \Leftrightarrow z^2-2\left(\sqrt{3}+3i\right)z-12=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\sqrt{3}+3i+3+\sqrt{3}i=3+\sqrt{3}+\left(3+\sqrt{3}\right)i \\ z=\sqrt{3}+3i-3-\sqrt{3}i=\sqrt{3}-3+\left(3-\sqrt{3}\right)i \end{array}\right..$$

Ta có $u,v\ge 0$ nên chỉ nhận nghiệm

$$\begin{cases} u=3+\sqrt{3} \\ v=3+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x}=3+\sqrt{3} \\ \sqrt{y}=3+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4+2\sqrt{3} \\ y=12+6\sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(4+2\sqrt{3};12+6\sqrt{3}\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{2\sqrt{x}}{x+y}=1+y \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=\sqrt{x} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x \ge 0, y > 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x-y+\dfrac{2\sqrt{x}}{x+y}=1 \\ 2\sqrt{xy}-\dfrac{2\sqrt{y}}{x+y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x-y+2\sqrt{xy}i+\frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}i\right)}{x+y}=1+i.$$

Đặt $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}i$ ta có phương trình:

$$z^2+\frac{2}{z}=1+i \Leftrightarrow z^3-\left(1+i\right)z+2=0 \Leftrightarrow \left(z-1-i\right)\left(z^2+\left(1+i\right)z-1+i\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+i \\ z^2+\left(1+i\right)z-1+i=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+i \\ z=\dfrac{-1+\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2}-i\dfrac{1+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2}+i\dfrac{-1+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2} \end{array}\right..$$

Vì $\sqrt{x},\sqrt{y} \ge 0$ nên phần thực và phần ảo của z đều không âm do đó chỉ nhận nghiệm $z=1+i$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}i=1+i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3-3xy^2+x+1=y^2+2xy-x^2 \\ y^3-3x^2y-y-1=x^2+2xy-y^2 \end{cases}.$$

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}(x+1)(x^2+1-y^2)=2xy(y+1)\\(y+1)(y^2-1-x^2)=2xy(x+1)\end{cases}.$$

Đáp số: $(x;y)=(-1;-1);(0;-1);(0;1)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^4-x^2y^2+2x^3-4xy^2+2x+1=y^2+2xy-2x^2\\y^4-x^2y^2+2y^3-4x^2y-2y-1=x^2+2xy\end{cases}.$$

Lời giải

Viết lại hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+1)^2(x^2+1-y^2)=2xy(y+1)\\(y+1)^2(y^2-1-x^2)=2xy(x+1)\end{cases}.$$

Đáp số: $(x;y)=\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right);(-1;-1);\left(-\frac{1}{3};-\frac{5}{3}\right);(0;-1);(0;1)$.

Chủ đề 17. KỸ THUẬT SỬ DỤNG TÍNH CHẤT HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Nội dung chủ đề này đề cập kỹ thuật sử dụng các tính chất cơ bản của hình giải tích phẳng Oxy và giải tích không gian như tính chất véc tơ, mối liên hệ giữa đường thẳng và đường tròn, giữa mặt phẳng và mặt cầu trong quá trình giải hệ phương trình hai ẩn và nhiều ẩn. Ta cùng xét các bài toán cơ bản.

Bài toán 1. Cho hai véc tơ $\vec{u},\vec{v}$ ta có: $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$.

a) Nếu $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ khi và chỉ khi tồn tại $k\ge 0$ sao cho $\vec{u}=k\vec{v}$.

b) Nếu $\vec{u}.\vec{v}=-\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ khi và chỉ khi tồn tại $k\le 0$ sao cho $\vec{u}=k\vec{v}$.

c) Với hai véc tơ ta có $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng.

d) Mở rộng cho ba véc tơ ta có $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{w}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right|$.

Bài toán 2. Cho đường thẳng $d:Ax+By+C=0,\left(A^2+B^2>0\right)$ và đường tròn $\left(C\right):\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$ có tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính R.

a) Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn $\left(C\right)\Leftrightarrow d\left(I;d\right)=R$ khi đó đường thẳng được gọi là tiếp tuyến với đường tròn $\left(C\right)$ và tiếp xúc tại duy nhất một điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d.

b) Đường thẳng d cắt đường tròn $\left(C\right)\Leftrightarrow d\left(I;d\right)<R$ khi đó đường thẳng cắt đường tròn $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A,B.

c) Đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn $\left(C\right)\Leftrightarrow d\left(I;d\right)>R$.

Bài toán 3. Cho hai đường tròn $\left(C_1\right):\left(x-a_1\right)^2+\left(y-b_1\right)^2=R_1^2$ có tâm $I_1\left(a_1;b_1\right)$, bán kính R_1 ; đường tròn $\left(C_2\right):\left(x-a_2\right)^2+\left(y-b_2\right)^2=R_2^2$ có tâm $I_2\left(a_2;b_2\right)$, bán kính R_2.

Hai đường tròn tiếp xúc nhau khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}I_1I_2=R_1+R_2\\ I_1I_2=\left|R_1-R_2\right|\end{array}\right.$ khi đó $\left(C_1\right),\left(C_2\right)$ có duy nhất một điểm chung.

Bài toán 4. Cho mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0,\left(A^2+B^2+C^2>0\right)$ và mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d\left(I;(P)\right)=R$ khi đó (P) tiếp xúc với (S) tại duy nhất một điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P).

Bài toán 5. Cho tam giác nhọn ABC và M là một điểm tùy ý nằm trong mặt phẳng khi đó gọi T là một điểm nhìn các cạnh BC,CA,AB dưới cùng một góc 120^0 thì T nằm trong tam giác ABC và $MA+MB+MC\ge TA+TB+TC$.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases}\left(m^2+2m\right)x+\left(1-m^2\right)y+m^2-2m-2=0\\ x^2+y^2+2x-9=0\end{cases}.$$

Chứng minh rằng hệ phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Tìm m để $P=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng: $\begin{cases}\left(m^2+2m\right)x+\left(1-m^2\right)y+m^2-2m-2=0\\ (x+1)^2+y^2=10\end{cases}$

Nghiệm của hệ đã cho là tọa độ giao điểm của đường tròn (T) có tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=\sqrt{10}$ và đường thẳng $d:\left(m^2+2m\right)x+\left(1-m^2\right)y+m^2-2m-2=0$.

Đường thẳng d luôn đi qua điểm cố định $N(1;2)$.

Vì $IN=2\sqrt{2}<R$ nên N nằm trong đường tròn do đó đường thẳng d luôn cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A,B hay hệ phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó $P=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=AB^2=2\left(R^2-d^2(I;d)\right)\ge 2\left(R^2-IN^2\right)$.

Dấu bằng xảy ra: $\Leftrightarrow IN\perp d\Rightarrow \overrightarrow{IN}.\overrightarrow{u_d}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(m^2-1\right)+\left(m^2+2m\right).2=0\Leftrightarrow m=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^{2014}+y^{2014}+z^{2014}=3 \end{cases}$.

Lời giải

Xét hai véc tơ $\vec{u}=(x;y;z), \vec{v}=(1;1;1)$ ta có :

$\vec{u}.\vec{v}=x+y+z=3=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{1^2+1^2+1^2}=|\vec{u}|.|\vec{v}|$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x:y:z=1:1:1$ và $x+y+z=3$ suy ra $x=y=z=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(1;1;1)$.

__**Nhận xét.**__ Xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản $x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ ta có ngay $x=y=z=1$.

Bài 3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2-2y^2-7xy=6 \\ \sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{y^2-2y+2}=\sqrt{x^2+2xy+y^2+9} \end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$\sqrt{(x+1)^2+2^2}+\sqrt{(y-1)^2+1^2}=\sqrt{(x+y)^2+3^2}$.

Xét hai véc tơ $\vec{u}=(x+1;2), \vec{v}=(y-1;1)$ ta có : $|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$ suy ra

$\sqrt{(x+1)^2+2^2}+\sqrt{(y-1)^2+1^2} \geq \sqrt{(x+y)^2+3^2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1} \Leftrightarrow x=2y-3$.

Thay $x=2y-3$ vào phương trình đầu của hệ tìm được các nghiệm:

$$(x;y)=(-1;1);\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right).$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;1);\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{4}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+y^2+y(x+z)=0 \\ x^2+x+y+2yz=0 \\ 3x^2+8y^2+8xy+8yz=2x+4z+2 \end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x(x+y)+y(y+z)=0 \\ x(x+1)+y(2z+1)=0 \\ 4(x+y)^2+4(y+z)^2=(x+1)^2+(2z+1)^2 \end{cases}.$$

Xét ba véc tơ $\vec{a}=(x;y),\vec{b}=(x+y;y+z),\vec{c}=(x+1;2z+1)$

Khi đó: $\vec{a}.\vec{b}=0,\vec{a}.\vec{c}=0,4\vec{b}^2=\vec{c}^2$.

<u>**TH1 :**</u> Nếu $\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow z=-\dfrac{1}{2}$.

<u>**TH2 :**</u> Nếu $\vec{a}\neq\vec{0}\Rightarrow\begin{cases} \vec{a}.\vec{b}=0 \\ \vec{a}.\vec{c}=0 \\ 4\vec{b}^2=\vec{c}^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \vec{b}//\vec{c} \\ 4\vec{b}^2=\vec{c}^2 \end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \vec{c}=2\vec{b} \\ \vec{c}=-2\vec{b} \end{array}\right.$.

\+ Nếu $\vec{c}=2\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases} x+1=2(x+y) \\ 2z+1=2(y+z) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được $z=-\dfrac{1}{2}$.

\+ Nếu $\vec{c}=-2\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases} x+1=-2(x+y) \\ 2z+1=-2(y+z) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-\dfrac{1+3x}{2} \\ z=\dfrac{3}{4}x \end{cases}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$x^2+\left(-\dfrac{1+3x}{2}\right)^2=\dfrac{1+3x}{2}\left(x+\dfrac{3x}{4}\right)\Leftrightarrow 5x^2+5x+2=0$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương rình có hai nghiệm $(x;y;z)=\left(0;0;-\dfrac{1}{2}\right);\left(0;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+(3-z)^2}+\sqrt{y^2+z^2+(3-x)^2}=2\sqrt{6}\\ \sqrt{y^2+z^2+(3-x)^2}+\sqrt{z^2+x^2+(3-y)^2}=2\sqrt{6}\\ \sqrt{z^2+x^2+(3-y)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(3-z)^2}=2\sqrt{6}\end{cases}.$$

Lời giải

Cộng theo vế ba phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2+y^2+(3-z)^2}+\sqrt{y^2+z^2+(3-x)^2}+\sqrt{z^2+x^2+(3-y)^2}=3\sqrt{6}.$$

Xét ba véc tơ $\vec{u}=(x;y;3-z),\vec{v}=(y;z;3-x);\vec{w}(z;x;3-y)$.

Ta có : $|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\ge|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$, ta có :

$$\begin{aligned}|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|&=\sqrt{x^2+y^2+(3-z)^2}+\sqrt{y^2+z^2+(3-x)^2}+\sqrt{z^2+x^2+(3-y)^2}\\&\ge\sqrt{(x+y+z)^2+(x+y+z)^2+(9-x-y-z)^2}\\&=\sqrt{3(x+y+z-3)^2+54}\ge 3\sqrt{6}\end{aligned}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ x:y:z=y:z:x=(3-z):(3-x):(3-y)\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(1;1;1)$.

Bài 6. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases}x+y+z-m-6=0\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}+\sqrt{z-3}=m\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện : $x\ge1,y\ge2,z\ge3$

Đặt $X=\sqrt{x-1},Y=\sqrt{y-2},Z=\sqrt{z-3},(X,Y,Z\ge0)$.

Hệ phương trình đã cho trở thành : $\begin{cases}X+Y+Z=m\ (1)\\ X^2+Y^2+Z^2=m\ (2)\end{cases}$.

Nếu $m<0$ hệ phương trình vô nghiệm.

Xét với $m \geq 0$: khi đó phương trình (1) là mặt phẳng $(P): X + Y + Z - m = 0$ nằm trong góc phần tám thứ nhất của hệ trục tọa độ $OXYZ$. Phương trình (2) là mặt cầu (S) có tâm là gốc tọa độ $O(0;0;0)$, bán kính $R = \sqrt{m}, (m \geq 0)$.

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (P)$ có một điểm chung duy nhất với (S) tại điểm thuộc góc phần tám thứ nhất.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ \dfrac{|-m|}{\sqrt{3}} = \sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = 0, m = 3$.

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 50 \\ x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} = 169 \\ x^2 + xz + \dfrac{z^2}{2} = 144 \end{cases}$$ tính giá trị của biểu thức $P = xy + yz + zx$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2} = 5^2 \\ x^2 + xy + \dfrac{y^2}{2} = 13^2 \\ x^2 + xz + \dfrac{z^2}{2} = 12^2 \end{cases}$.

Xét tam giác ABC có các cạnh tương ứng $AB = 13, AC = 5, BC = 12$.

Suy ra ABC là tam giác vuông tại C.

Xét O là điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{AOC} = 90^0, \widehat{BOC} = 135^0$.

Khi đó: $\begin{cases} OA^2 + OC^2 = AC^2 = 5^2 \\ OB^2 - 2OA.OB\cos 135^0 + OA^2 = AB^2 = 13^2 \\ OB^2 - 2OB.OC\cos 135^0 + OC^2 = BC^2 = 12^2 \end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{y}{\sqrt{2}}, \dfrac{z}{\sqrt{2}}, x$ tương ứng là độ dài các đoạn thẳng OA, OC, OB.

Khi đó $P = xy + yz + zx = 4s_{OBC} + 4S_{OAC} + 4S_{OAB} = 4S_{ABC} = 2AC.BC = 120$.

Bài 8. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực dương :

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 16xy \\ y + z + \sqrt{yz} = 25yz \\ z + x + \sqrt{zx} = 36zx \\ \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = m\sqrt{xyz} \end{cases}.$$

Lời giải

Giả sử $(x;y;z),(x,y,z>0)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Khi đó: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{\sqrt{xy}} = 16 \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\sqrt{yz}} = 25 \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{zx}} = 36 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}} = m \end{cases}.$

Đặt $a = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, b = \dfrac{1}{\sqrt{y}}, c = \dfrac{1}{\sqrt{z}}, (a,b,c>0)$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 4^2 \\ b^2 + bc + c^2 = 5^2 \\ c^2 + ac + a^2 = 6^2 \\ a + b + c = m \end{cases}.$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ ba đoạn thẳng $MA = a, MB = b, MC = c$ đôi một hợp nhau góc 120^0 khi đó theo định lý hàm số Côsin và hệ trên suy ra $AB = 4, BC = 5, CA = 6$.

Vậy tam giác ABC nhọn và M nằm trong tam giác ABC.

Khi đó theo diện tích tam giác ta có:

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}\left(ab\sin 120^0 + bc\sin 120^0 + ca\sin 120^0\right).$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca = 5\sqrt{21}$$

Mặt khác cộng theo vế ba phương trình đầu của hệ ta được :

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + ab + bc + ca = 77 \Rightarrow 2(a+b+c)^2 - 3(ab + bc + ca) = 77$$

$$\Leftrightarrow a+b+c=\sqrt{\frac{77+15\sqrt{21}}{2}} \Rightarrow m=\sqrt{\frac{77+15\sqrt{21}}{2}}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm dương khi và chỉ khi $m=\sqrt{\frac{77+15\sqrt{21}}{2}}$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $x^2+y^2=(a-x)^2+b^2=(b-y)^2+a^2$.

Lời giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét ba điểm $A(a;b), B(x;0), C(0;y)$ từ hệ phương trình. Suy ra: $AB=BC=CA$ tức tam giác ABC đều. Vậy bài toán quy về tìm tọa độ điểm B trên trục hoành và điểm C trên trục tung sao cho tam giác ABC đều. Đây là bài toán khá quen thuộc (xem thêm cuốn Hình học phẳng Oxy cùng tác giả trong cùng bộ sách).

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{x+a}{3} \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{y+b}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{x+a}{3};\frac{y+b}{3}\right).$$

Do tam giác ABC đều nên G đồng thời là trực tâm tam giác ABC suy ra:

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x\left(a-\frac{x+a}{3}\right)+y\left(b-\frac{y+b}{3}\right)=0 \\ -a\left(x-\frac{x+a}{3}\right)-\frac{y+b}{3}(y-b)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x(2a-x)+y(2b-y)=0 \\ a(2x-a)+(y+b)(y-b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-2ax+2by=0 \\ 2ax+y^2-a^2-b^2=0 \end{cases}.$$

<u>TH1 :</u> Nếu $a=0 \Rightarrow y=\pm b \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}b$.

<u>TH2 :</u> Nếu $a\neq 0$ từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $x=\frac{a^2+b^2-y^2}{2a}$.

Thay $x=\frac{a^2+b^2-y^2}{2a}$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được :

$$\left(\frac{a^2+b^2-y^2}{2a}\right)^2-y^2+y^2-a^2-b^2+2by=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(y-b\right)^2+a^2\right)\left(\left(y+b\right)^2-3a^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=a=b=0\\ x=-\sqrt{3}b-a;y=-\sqrt{3}a-b\\ x=\sqrt{3}b-a;y=\sqrt{3}a-b\end{array}\right..$$

Kết luận : Nếu $a=b=0$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$.

Nếu $a^2+b^2>0$ hệ phương trình có hai nghiệm là

$\left(x;y\right)=\left(-\sqrt{3}b-a;-\sqrt{3}a-b\right);\left(\sqrt{3}b-a;\sqrt{3}a-b\right)$.

Nhận xét. Như đã trình bày trong cuốn hình giải tích phẳng Oxy việc tìm các điểm B,C được thực hiện bằng phép quay ta có kết quả tương tự.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x+4y=26\\ \sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=10\end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2}+\sqrt{\left(10-x\right)^2+\left(5-y\right)^2}=\sqrt{8^2+6^2}.$$

Xét hai véc tơ $\vec{u}=\left(x-2;y+1\right),\vec{v}=\left(10-x;5-y\right)$, ta có:

$$\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\Rightarrow\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2}+\sqrt{\left(10-x\right)^2+\left(5-y\right)^2}\ge10.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{y+1}=\dfrac{10-x}{5-y}\Leftrightarrow3x-4y=10$.

Kết hợp với phương trình đầu của hệ suy ra $\left(x;y\right)=\left(6;2\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(6;2\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+6xy+5y^2}+5=\sqrt{2x^2+6xy+5y^2+14x+20y+25}\\ x^4+25y^2-2=0\end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{\left(x+y\right)^2+\left(x+2y\right)^2}+\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{\left(x+y+4\right)^2+\left(x+2y+3\right)^2}.$$

Xét hai véc tơ $\vec{u}=\left(x+y;x+2y\right),\vec{v}=\left(4;3\right)$, ta có : $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$

Suy ra: $\sqrt{(x+y)^2+(x+2y)^2}+\sqrt{4^2+3^2}\ge\sqrt{(x+y+4)^2+(x+2y+3)^2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x+y}{4}=\dfrac{x+2y}{3}\Leftrightarrow x=-5y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$625y^4+25y^2-2=0\Leftrightarrow y^2=\frac{1}{25}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\dfrac{1}{5}\\ y=\dfrac{1}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=-\dfrac{1}{5}\\ x=-1,y=\dfrac{1}{5}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(-1;\dfrac{1}{5}\right);\left(1;-\dfrac{1}{5}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ 2x-y+2z+3=0\end{cases}$.

Lời giải

Xét mặt cầu (S) có tâm là gốc tọa độ $O(0;0;0)$, bán kính $R=1$.

Mặt phẳng $(P): 2x-y+2z+3=0$.

Ta có $d(O;(P))=\dfrac{|3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1=R$ nên (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất là tọa độ hình chiếu của O lên mặt phẳng (P).

Dễ tìm được $(x;y;z)=\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+y+4z-5=0\\ x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-7=0\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}2x+y+4z-5=0 & (1)\\ (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=21 & (2)\end{cases}$$

Phương trình (1) là mặt phẳng $(P): 2x:+y+4z-5=0$ và (2) là mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{21}$.

Ta có $d\left(I;\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|-1.2+-2.1+-3.4-5\right|}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}}=\sqrt{21}=R$ nên $\left(S\right)$ tiếp xúc với mặt phẳng $\left(P\right)$, suy ra nghiệm của hệ là tọa độ hình chiếu của I trên mặt phẳng $\left(P\right)$.

Đường thẳng d đi qua I và vuông góc $\left(P\right)$ có phương trình là $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2+t\\z=-3+4t\end{cases}$.

Tọa độ hình chiếu của I trên $\left(P\right)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2+t\\z=-3+4t\\2x+y+4z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=1\\t=1\end{cases}\Rightarrow\left(x;y;z\right)=\left(1;-1;1\right).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y;z\right)=\left(1;-1;1\right)$.

Bài 5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases}x+y+2z+m-2=0\\x^2+y^2+z^2-2mx+m^2+m-1=0\end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}x+y+2z+m-2=0 & (1)\\\left(x-m\right)^2+y^2+z^2=1-m & (2)\end{cases}$

Phương trình (1) là mặt phẳng $\left(P\right):x+y+2z+m-2=0$ và (2) là phương trình mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(m;0;0\right),R=\sqrt{1-m},\left(m\le 1\right)$.

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow d\left(I;\left(P\right)\right)\le R\Rightarrow m\ge -\dfrac{1}{2}\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le m\le 1$.

Bài 6. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm thực duy nhất:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-4y+1\le 0\\x^2+y^2+z^2-2y+2z-m\le 0\end{cases}.$$

Lời giải

Hệ bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+z^2\le 4 & (1)\\x^2+\left(y-1\right)^2+\left(z+1\right)^2\le m+2 & (2)\end{cases}$$

TH1 : Nếu $m+2<0 \Leftrightarrow m<-2$ hệ phương trình vô nghiệm.

TH2 : Nếu $m=-2$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+z^2 \le 4 \\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2 \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0 \\ y=1 \\ z=-1\end{cases}.$$

TH3 : Nếu $m>-2$ tập nghiệm của bất phương trình (1) là các điểm nằm trong mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1;2;0)$, bán kính $R_1=2$; tập nghiệm của bất phương trình (2) là các điểm nằm trong mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(0;1;-1)$, bán kính $R_2=\sqrt{m+2}$.

Hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (S_1)$ tiếp xúc ngoài với (S_2).

$\Leftrightarrow I_1I_2=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{3}=2+\sqrt{m+2}$ (vô nghiệm).

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25 \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9 \\ z^2+zx+x^2=16\end{cases}$$

Tính giá trị biểu thức $P=xy+2yz+3zx$.

Lời giải

Xét tam giác vuông ABC có $AB=5, BC=3, CA=4$ khi đó ABC vuông tại C.

Lấy O là một điểm trong tam giác ABC thỏa mãn:

$\widehat{AOC}=120^0, \widehat{BOC}=90^0, \widehat{AOB}=150^0$.

Khi đó: $AB^2=OA^2-2OA.OB\cos 150^0+OB^2; BC^2=OB^2+OC^2;$.

$AC^2=OA^2-2OA.OC\cos 120^0+OC^2$

Suy ra $OA=x; OB=\dfrac{y}{\sqrt{3}}; OC=z$.

Vì vậy $P=xy+2yz+3zx=4\sqrt{3}S_{ABC}=24\sqrt{3}$.

Chủ đề 18. KỸ THUẬT NHÂN LIÊN HỢP ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA CĂN THỨC

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Vận dụng kỹ thuật nhân liên hợp cơ bản khi giải phương vô tỷ vào bài toán giải hệ cho ta kết quả nhanh gọn. Mục tiêu của phương pháp này đó là tìm ra mối liên hệ giữa hai ẩn x và y từ một trong hai phương trình của hệ(thường là các phương trình có chứa căn).

Ta cần tìm đẳng thức $px+qy+r=0$.

Nhân liên hợp một cách hợp lý sao cho xuất hiện nhân tử $px+qy+r$ và đưa phương trình của hệ về dạng:

$$\left(px+qy+r\right).A(x,y)=0.$$

Thông thường chứng minh được $A(x,y)>0$ hoặc $A(x,y)<0,\forall x,y\in K$ (K là tập điều kiện của hệ phương trình).

Chú ý: Khi vận dụng kỹ thuật đòi hỏi khéo léo một chút khi xử lý phương trình tích sau cùng. Trong trường hợp khó chứng minh được phương trình $A(x,y)=0$ vô nghiệm ta quay ngược lại phương trình đó và tìm cách biến đổi tương đương bằng cách bình phương hai vế của phương trình.

Điều cần lưu ý tiếp theo đó là nếu giải được bằng nhân liên hợp ta cũng có thể xử lý được bằng ẩn phụ.

Ngoài ra cần kết hợp 1 số phương pháp khử căn(xem thêm chủ đề kỹ thuật xử lý hệ phương trình chứa căn thức).

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+2y-2}=y-x-1 \ (1)\\ x^2+y^2-2xy+4x-3y=0 \ (2)\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải

Điều kiện $2x+y-1\ge 0, x+2y-2\ge 0$.

Nếu $\begin{cases}2x+y-1=0\\ x+2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$ thử lại thấy không thỏa mãn.

Vậy $2x+y-1$ và $x+2y-2$ có ít nhất một số dương.

Khi đó viết lại (1) dưới dạng: $\dfrac{x-y+1}{\sqrt{2x+y-1}+\sqrt{x+2y-2}}+\left(x-y+1\right)=0$.

$$\Leftrightarrow\left(x-y+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+y-1}+\sqrt{x+2y-2}}+1\right)=0\Leftrightarrow x-y+1=0.$$

Với $y = x + 1$ thay vào (2) ta được:

$$x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1) + 4x - 3(x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Suy ra $y = 3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (2;3)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - y} = \dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}} & (1) \\ 2(x^2+y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11 & (2) \end{cases}$ $,(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $x - y \neq 0, x \geq \dfrac{1}{2}, x^2 - x - y \geq 0$.

Nếu $x^2 - x - y = 0$ từ (1) suy ra $y = 0$ và $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ thay vào (2) thấy không thỏa mãn.

Với $x^2 - x - y > 0$ khi đó viết lại (1) dưới dạng:

$$\sqrt[3]{x-y} = \frac{y}{\sqrt{x^2-x-y}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y} - 1 = \frac{y}{\sqrt{x^2-x-y}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\left(\sqrt[3]{x-y}\right)^2 + \sqrt[3]{x-y} + 1} = -\frac{(x+y)(x-y-1)}{\sqrt{x^2-x-y}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x-y}\right)^2 + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y}}\right) = 0 \qquad (3)$$

Để ý từ phương trình (1) nếu $y < 0$ thì vế phải âm do đó vô nghiệm.

Vậy ta phải có $y \geq 0$. Vì vậy $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x-y}\right)^2 + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y}} > 0$.

Vì vậy $(3) \Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$.

Thay vào (2) ta được: $(2x-1)^2 - 3\sqrt{2x-1} - 10 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1} - 2\right)\left((2x-1)\sqrt{2x-1} + 3(2x-1) + 4\sqrt{2x-1} + 5\right) = 0.$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$. Suy ra $\left(x;y\right)=\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(1-y\right)\sqrt{x+y}+x+3y=6+\left(x+y-4\right)\sqrt{y}\\ \sqrt{x-2y}-\sqrt{x+1}=\frac{5}{x-y-7}\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2y\ge 0, x-y-7\ne 0$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\left(1-y\right)\left(\sqrt{x+y}-2\right)+\left(x+y-4\right)\left(1-\sqrt{y}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1-y\right)\left(x+y-4\right)}{\sqrt{x+y}+2}+\frac{\left(x+y-4\right)\left(1-y\right)}{1+\sqrt{y}}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(1-y\right)\left(x+y-4\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{y}}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\ x+y-4=0\end{array}\right..$$

\+ **<u>TH1:</u>** Nếu $y=1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\frac{5}{x-8} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}}=\frac{5}{x-8}.$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)=-3\left(x-8\right) \Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)+3x-24=0.$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x-2}-1\right)+5\left(\sqrt{x+1}-2\right)+3\left(x-3\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3\right)\left(\frac{5}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{x+1}+2}+3\right)=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow \left(x;y\right)=\left(3;1\right) \text{(thỏa mãn)}.$$

\+ **<u>TH2:</u>** Nếu $x+y-4=0 \Leftrightarrow y=4-x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x-2\left(4-x\right)}-\sqrt{x+1}=\frac{5}{x-\left(4-x\right)-7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\frac{5}{2x-11}=0 \qquad (1).$$

Điều kiện: $x \in \left[\frac{8}{3};+\infty\right) \setminus \left\{\frac{11}{2}\right\}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} - \frac{5}{2x-11}$ với $x \in D = \left[\frac{8}{3};+\infty\right) \setminus \left\{\frac{11}{2}\right\}$ ta có

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-8}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{10}{(2x-11)^2} = \frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-8}}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}} + \frac{10}{(2x-11)^2} > 0, \forall x \in D$$

Vì $3\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-8} = \sqrt{9x+9} - \sqrt{3x-8} = \frac{6x+17}{\sqrt{9x+9}+\sqrt{3x-8}} > 0$.

Vì vậy *f(x)* là hàm đồng biến trên mỗi khoảng $\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)$ và $\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f(3) = f(8) = 0$. Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 8 \\ y = -4 \end{cases} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $(x;y) = (3;1)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (3;1)$.

<u>Cách 2:</u> Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+y} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}, (a, b \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = a^2 \\ y = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a^2 - b^2 \\ y = b^2 \end{cases}$.

Phương trình đầu của hệ trở thành: $(1-b^2)a + a^2 + 2b^2 = 6 + (a^2 - 4)b$.

$\Leftrightarrow a(1-b^2) + a^2(1-b) + 2b^2 + 4b - 6 = 0$.

$\Leftrightarrow a(1-b)(1+b) + a^2(1-b) + (b-1)(2b+6) = 0$.

$\Leftrightarrow (1-b)(a(1+b) + a^2 - 2b - 6) = 0$.

$\Leftrightarrow (1-b)(b(a-2) + a^2 + a - 6) = 0 \Leftrightarrow (1-b)(a-2)(b+a+3) = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+y} = 2 \\ \sqrt{y} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 4 \\ y = 1 \end{array}\right.$.

Ta có kết quả tương tự lời giải trên.

Chú ý. Nhiều học sinh sai lầm khi cho rằng (1) có nghiệm duy nhất vì là hàm đồng biến. Điều cần lưu ý là f(x) đồng biến trên mỗi khoảng $\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)$ và $\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$. Do đó nếu có nghiệm trên mỗi khoảng thì nghiệm đó là duy nhất trên khoảng đó.

Ngoài ra nếu chặn điều kiện $y=4-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 4 \Rightarrow \frac{8}{3}\le x\le 4$ lúc đó ta chỉ cần xét hàm số f(x) trên đoạn $\left[\frac{8}{3};4\right]$ và có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 4. (TSĐH Khối B 2014) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(1-y)\sqrt{x-y}+x=2+(x-y-1)\sqrt{y}\\ 2y^2-3x+6y+1=2\sqrt{x-2y}-\sqrt{4x-5y-3}\end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2y\ge 0, 4x-5y-3\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(1-y)\left(\sqrt{x-y}-1\right)+x-y+1=2+(x-y-1)\sqrt{y}.$$

$$\Leftrightarrow (1-y).\frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}+1}+x-y-1-(x-y-1)\sqrt{y}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left[\frac{1-y}{\sqrt{x-y}+1}+1-\sqrt{y}\right]=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)(1-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{y}}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y-1=0\\ 1-y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=x-1\end{array}\right..$$

\+ **<u>TH1:</u>** Nếu $y=1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $9-3x=0\Leftrightarrow x=3$.

\+ **<u>TH2:</u>** Nếu $y=x-1$ khi đó điều kiện trở thành: $1\le x\le 2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x^2-x-3=\sqrt{2-x} \qquad (1).$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x-1\right)+\left(x-1-\sqrt{2-x}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(2+\frac{1}{x-1+\sqrt{2-x}}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0 \xleftrightarrow{1\le x\le 2} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(3;1\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Chú ý. Ta có thể giải phương trình (1) bằng nhiều cách khác:

<u>**Cách 2:**</u> $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-x-3\ge 0\\ \left(2x^2-x-3\right)^2=2-x\end{cases}.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-x-3\ge 0\\ \left(4x^2-7\right)\left(x^2-x-1\right)=0\end{cases} \xleftrightarrow{1\le x\le 2} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Hoàn toàn tương tự bài toán trên ta có thể đặt $a=\sqrt{x-y},b=\sqrt{y}$ và phân tích a theo a từ phương trình đầu của hệ(ta có một công cụ hết sức mạnh đó là máy tính bỏ túi).

Bài 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x-y}+\sqrt{x-2}=2\\ \sqrt{x^2+y^2-xy\left(x-y\right)}+\sqrt{y\left(x-y\right)}=2\sqrt{2}\left(x-y-1\right)\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2,x\ge y,x^2+y^2-xy\left(x-y\right)\ge 0$.

+ Nếu $x=y$ vế trái phương trình thứ hai của hệ âm nên vô nghiệm.

+ Nếu $x>y$ viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}\sqrt{\left(x-y\right)^3}+\sqrt{\left(x-2\right)\left(x-y\right)^2}=2\left(x-y\right)\\ \sqrt{2x^2+2y^2-2xy\left(x-y\right)}+\sqrt{2y\left(x-y\right)}=4\left(x-y-1\right)\end{cases}.$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(\sqrt{(x-y)^3}-\sqrt{2x^2+2y^2-2xy(x-y)}\right)$$
$$+\left(\sqrt{(x-2)(x-y)^2}-\sqrt{2y(x-y)}\right)=2(2-x+y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left(\begin{array}{c}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{(x-y)^3}+\sqrt{2x^2+2y^2-2xy(x-y)}}\\ +\dfrac{x(x-y)}{\sqrt{(x-2)(x-y)^2}+\sqrt{2y(x-y)}}+2\end{array}\right)=0.$$

$\Leftrightarrow x-y-2=0 \Leftrightarrow y=x-2$.

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$\sqrt{2}+\sqrt{x-2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=2-\sqrt{2} \Leftrightarrow x=8-4\sqrt{2} \Rightarrow y=6-4\sqrt{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(8-4\sqrt{2};6-4\sqrt{2}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2\\ \left(3\sqrt{x^2+1}-4y\right)(x+3)=5\sqrt{13x^3+5x-2}\end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $13x^3+5x-2\ge 0$.

Nhận xét. Phương trình đầu của hệ có dạng tích để nhân liên hợp quen thuộc. Tuy nhiên bài toán sai lệch hằng số 1 bằng hằng số 2. Do vậy không đơn thuần $x=-y$. Để ý phương trình thứ hai của hệ phần tử $-4y$ xuất hiện trong 1 phương trình chỉ có chứa x. Vì vậy suy nghĩ cơ bản là rút y theo x. Vậy ta cần nhân liên hợp cho cả hai nhân tử của phương trình đầu của hệ.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\begin{cases}y+\sqrt{y^2+1}=2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\\ x+\sqrt{x^2+1}=2\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{x^2+1}-2x=y+\sqrt{y^2+1}\\ \sqrt{x^2+1}+x=2\sqrt{y^2+1}-2y\end{cases}.$$

Bằng cách loại bỏ $\sqrt{y^2+1}$ từ hai phương trình của hệ trên ta được:

$$2\left(2\sqrt{x^2+1}-2x\right)-\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=2\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)-\left(2\sqrt{y^2+1}-2y\right)$$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1}-5x=4y \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1}-4y=5x$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$5x\left(x+3\right)=5\sqrt{13x^3+5x-2} \Leftrightarrow x^2+3x=\sqrt{13x^3+5x-2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x\geq 0 \\ \left(x-1\right)\left(x^3-6x^2+3x-2\right)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x\geq 0 \\ \left(x-1\right)\left(3\left(x-1\right)^3-\left(x+1\right)^3\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9} \end{array}\right..$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=\dfrac{3\sqrt{2}-5}{4} \\ x=2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}, y=\dfrac{3\sqrt{\left(2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)^2+1}-5\left(2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{4} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là

$$\left(x;y\right)=\left(1,;\frac{3\sqrt{2}-5}{4}\right);\left(2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9};\frac{3\sqrt{\left(2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)^2+1}-5\left(2+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{4}\right).$$

Nhận xét. Ngoài ra ta có thể thực hiện nhân liên hợp rồi biến đổi tương đương như sau:

$$x+\sqrt{x^2+1}=2\left(\sqrt{y^2+1}-y\right) \Leftrightarrow x+2y=2\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}.$$

$$\Leftrightarrow x^2+4xy+4y^2=4\left(y^2+1\right)-4\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}+x^2+1$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)}=5-4xy \Leftrightarrow \begin{cases} 5-4xy\geq 0 \\ 16\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=25-40xy+16x^2y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-4xy\geq 0 \\ \left(5x+4y\right)^2-9\left(x^2+1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-4xy\geq 0 \\ 3\sqrt{x^2+1}=5x+4y \end{cases}.$$

Ta có kết quả tương tự trên.

Bài 7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2(x-y)^2+10x-6y+12}=\sqrt{x+2}+\sqrt{y} & (1) \\ \sqrt{x+4-y^2}=y-x-2 & (2) \end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải

Điều kiện: $2(x-y)^2+10x-6y+12\ge 0, x+4-y^2\ge 0, y\ge 0, x\ge -2$.

Viết lại phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng:

$$\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}-2\sqrt{x+2}=\sqrt{y}-\sqrt{x+2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+2y^2-4xy+6x-6y+4}{\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}+2\sqrt{x+2}}=\frac{y-x-2}{\sqrt{y}+\sqrt{x+2}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+1-y)(x+2-y)}{\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}+2\sqrt{x+2}}=-\frac{x+2-y}{\sqrt{y}+\sqrt{x+2}}.$$

$$\Leftrightarrow (x+2-y)\left(\frac{2x+2-2y}{\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}+2\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x+2}}\right)=0$$

Do vậy với cách này nếu nhân liên hợp trực tiếp rất khó xử lý nhân tử lúc sau ở phương trình tích trên.

Ta biến đổi tương đương phương trình (1) như sau:

$$\sqrt{2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12}=\sqrt{y}+\sqrt{x+2}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-4xy+10x-6y+12=x+y+2+2\sqrt{y(x+2)}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-4xy+9x-7y+10-2\sqrt{y(x+2)}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}-\sqrt{x+2}\right)^2+2x^2+2y^2-4xy+8x-8y+8=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y}-\sqrt{x+2}\right)^2+2(x-y+2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2=0 \\ \sqrt{y}-\sqrt{x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=x+2.$$

Thay $y=x+2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x+4-(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $x=0 \Rightarrow y=2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;2)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x-y}+\sqrt{y-2}+4x-3y=0 \\ \sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}=\dfrac{y^2}{\sqrt{x+xy+1}} \end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -1, y\ge 2, x^2+x-y\ge 0, x+xy+1>0$.

Phương trình thứ hai của hệ viết lại dưới dạng:

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}-y=\frac{y^2}{\sqrt{x+xy+1}}-y.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+y^2+xy)(x-y+1)}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}\right)^2+y\sqrt[3]{x^3+x^2+y^2+xy}+y^2}=\frac{y(y+1)(y-x-1)}{\sqrt{x+xy+1}}$$

$$\Leftrightarrow y=x+1$$

Thay $y=x+1$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$(x-1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}+x-3=0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\sqrt{x-1}-1+x-2=0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}.\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+x-2=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+1\right)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=3.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;3)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 25y+9\sqrt{9xy-4}=\dfrac{2y^2+18x^2+2}{x(y^2+1)} & (1) \\ x^2+y^2+\sqrt{8x^2-12xy+8y^2}=x+y+2xy & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Viết lại (2) dưới dạng $(x-y)^2+\sqrt{8x^2-12xy+8y^2}-(x+y)=0$.

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(1+\frac{7}{\sqrt{8x^2-12xy+8y^2}+x+y}\right)=0 \quad (3).$$

Mặt khác: $\sqrt{8x^2-12xy+8y^2}+x+y=\sqrt{(x+y)^2+7(x-y)^2}+x+y\ge |x+y|+x+y\ge 0$

Do đó $(3)\Leftrightarrow (x-y)^2=0\Leftrightarrow x=y$.

Thay vào (1) ta được:

$$25x+9\sqrt{9x^2-4}=\frac{20x^2+2}{x(x^2+1)}\Leftrightarrow 9x\sqrt{9x^2-4}=\frac{2-25x^4-5x^2}{x^2+1}.$$

Bình phương hai vế phương trình ta được

$$\frac{4(2x^2-1)(13x^6+117x^4+78x^2+1)}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Thử lại chỉ nhận nghiệm $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}$. Suy ra $(x;y)=\left(-\sqrt{\frac{1}{2}};-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-\sqrt{\frac{1}{2}};-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{2(x^2+y^2)+2(5x-3y)-4(xy-3)}-\sqrt{y}=\sqrt{x+2} & (1)\\ \sqrt{y^2-4(x+y)+17}-\sqrt[3]{xy-3(x+y)+18}=1 & (2)\end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải

Viết lại (1) dưới dạng $\sqrt{2(x^2+y^2)+2(5x-3y)-4(xy-3)}=\sqrt{y}+\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)+2(5x-3y)-4(xy-3)=x+y+2+2\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+9x-7y-4xy+10=2\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-4y(x+2)+y+9x+10=2\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+2)^2-4y(x+2)+2y^2+x+2+y=2\sqrt{y(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+2-y)^2+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{y}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+2-y=0\\ \sqrt{x+2}-\sqrt{y}=0\end{cases}\Leftrightarrow y=x+2.$$

Thay vào (2) ta được:

$$\sqrt{(x+2)^2-4(2x+2)+17}-\sqrt[3]{x(x+2)-3(2x+2)+18}=1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+13}-\sqrt[3]{x^2-4x+12}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+9}=\sqrt[3]{(x-2)^2+8}+1\ (3).$$

Đặt $u=\sqrt[3]{(x-2)^2+8},(u\geq 2)$. Khi đó (3) trở thành:

$$\sqrt{u^3+1}=u+1 \Leftrightarrow u^3-u^2-2u=0.$$

$$\Leftrightarrow u(u-2)(u+1)=0 \Leftrightarrow u=2 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2.$$ Suy ra $(x;y)=(2;4)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;4)$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=2y\\ \sqrt{x}+y\sqrt{5}=3\end{cases}$.

<u>Cách 1</u>. Điều kiện: $x\geq 0, x^2-y^2\geq 0$.

Từ phương trình đầu của hệ suy ra $y\geq 0$.

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình xét $y>0$.

Viết lại phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{3y}{2}\right)+\left(\sqrt{x^2-y^2}-\frac{y}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-\frac{5y^2}{4}}{\sqrt{x^2+y^2}+\frac{3y}{2}}+\frac{x^2-\frac{5y^2}{4}}{\sqrt{x^2-y^2}+\frac{y}{2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{5y^2}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}+\frac{3y}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}+\frac{y}{2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{5y^2}{4} \Leftrightarrow x=\frac{y\sqrt{5}}{2}.$$

Thay $y=\frac{2x}{\sqrt{5}}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x}+2x=3 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

<u>Cách 2:</u> Ta biến bình phương hai vế phương trình đầu của hệ ta được:

$\sqrt{x^2+y^2}=2y-\sqrt{x^2-y^2}\Rightarrow x^2+y^2=x^2+3y^2-4y\sqrt{x^2-y^2}$.

$$\Leftrightarrow 2y\left(y-2\sqrt{x^2-y^2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=2\sqrt{x^2-y^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ \begin{cases}y\ge 0\\ y^2=4\left(x^2-y^2\right)\end{cases}\end{array}\right.$$

Xét trường hợp thay vào phương trình thư hai của hệ ta có kết quả tương tự.

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-3\sqrt{x+3}=3\sqrt{y-5}-y\\ \sqrt{x^2+16(y-x)}+y=2\sqrt{xy}\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 5$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\sqrt{x^2+16(y-x)}-y=2\left(\sqrt{xy}-y\right)\Leftrightarrow\frac{x^2+16(y-x)-y^2}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+y}=\frac{2y(x-y)}{\sqrt{xy}+y}$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{x-16}{\sqrt{x^2+16(y-x)}+y}-\frac{2y}{\sqrt{xy}+y}\right)=0\qquad(1).$$

Ta chứng minh $x<16$.

Thật vậy từ phương trình đầu của hệ ta có:

$$x-3\sqrt{x+3}=3\sqrt{y-5}-y\Leftrightarrow\left(\sqrt{y-5}-\frac{3}{2}\right)^2+x-3\sqrt{x+3}+\frac{11}{4}=0.$$

$$\Rightarrow x-3\sqrt{x+3}+\frac{11}{4}\le 0\Leftrightarrow\left(x+\frac{11}{4}\right)^2\le 9(x+3)\Leftrightarrow -3\le x\le\frac{7+6\sqrt{10}}{4}<16.$$

Do đó $(1)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$2x=3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}\right)\Leftrightarrow 4x^2=9\left(2x-2+2\sqrt{x^2-2x-15}\right).$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{x^2-2x-15}=2x^2-9x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-9x+9\ge 0 \\ 81\left(x^2-2x-15\right)=\left(2x^2-9x+9\right)^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=6$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(6;6\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=y-x \\ 16x^2y^2+5=6\sqrt[3]{4x^2y+x} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge -\dfrac{1}{2}$.

Nhận thấy $x=-\dfrac{1}{2}$ hoặc $y=-\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của hệ khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{2\left(x-y\right)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}+x-y=0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}\right)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}$.

Để giải phương trình này ta đánh giá như sau:

$$16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}=3.\sqrt[3]{2.4x.\left(4x^2+1\right)}\le 2+4x+4x^2+1.$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1\right)^2\left(2x^2+2x+1\right)\le 0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+\sqrt{2y+3}=y+\sqrt{2x+1}+1 \\ 2x^3+\sqrt{x^3\left(y+1\right)}+3y+4=2x\sqrt{x^3+x^2}+2x^2\sqrt{1+\dfrac{y+2}{x}} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le x \ne 0, y \ge -\dfrac{3}{2} \\ x^3\left(y+1\right) \ge 0 \\ x^3+x^2 \ge 0 \\ 1+\dfrac{y+2}{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y \ge -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

TH1: Nếu $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ thử lại hệ thấy không thỏa mãn.

TH2: Nếu $x>0, y \ge -1$ khi đó biến đổi phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng:

$$x-y-1+\sqrt{2y+3}-\sqrt{2x+1}=0 \Leftrightarrow x-y-1+\frac{2\left(y+1-x\right)}{\sqrt{2y+3}+\sqrt{2x+1}}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y-1\right)\left(1-\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+3}}\right)=0.$$

$\Leftrightarrow x-y-1=0$ (do $1-\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+3}}=\dfrac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+3}-2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+3}}>0$).

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x^3+x^2+3x+1=2x\sqrt{x^3+x^2}+2x^2\sqrt{1+\frac{x+1}{x}}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+x^2+3x+1=2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}\right).$$

Để giải phương trình vô tỷ này ta có hai cách xử lý như sau:

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\begin{aligned} 2x^2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}\right) &= 2x\sqrt{x^2\left(x+1\right)}+2x\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+2\right)} \\ &\le x\left(x^2+x+1\right)+x\left(x^2+\frac{1}{x}+2\right)=2x^3+x^2+3x+1 \end{aligned}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$x^2=x+1=2+\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2-x-1=0\xleftrightarrow{x>0}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

<u>Cách 2:</u> Phương trình tương đương với:

$$2x^2-2x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}\right)+x+\frac{1}{x}+3=0.$$

Ta có: $\Delta'_x=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{\frac{1}{x}+2}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=-\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{1}{x}+2}\right)^2\le 0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{1}{x}+2}\Leftrightarrow x^2-x-1=0\xleftrightarrow{x>0}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ta có kết quả tương tự trên.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+1)\sqrt{y^2+y+2}+(y-1)\sqrt{x^2+x+1}=x+y\\(x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2x^2+x+y+1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x-y+3\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ được biến đổi thành:

$$(x^2+x)\sqrt{x-y+3}=2(x^2+x)-(x-y-1).$$

$$\Leftrightarrow(x^2+x)\left(\sqrt{x-y+3}-2\right)+x-y-1=0\Leftrightarrow(x^2+1).\frac{x-y-1}{\sqrt{x-y+3}+2}+x-y-1=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y-1)\left(\frac{x^2+x}{\sqrt{x-y+3}+2}+1\right)=0\Leftrightarrow(x-y-1).\frac{x^2+x+2+\sqrt{x-y+3}}{\sqrt{x-y+3}+2}=0$$

$\Leftrightarrow x-y-1=0\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$(x+1)\sqrt{x^2-x+2}+(x-2)\sqrt{x^2+x+1}=2x-1$.

Để giải phương trình vô tỷ này ta đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^2-x+2}\\v=\sqrt{x^2+x+1}\end{cases}$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\left(\frac{v^2-u^2+1}{2}+1\right)u+\left(\frac{v^2-u^2+1}{2}-2\right)v=v^2-u^2.$$

$$\Leftrightarrow (v-u)(u+v+1)(u+v-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u+v=3 \end{array}\right..$$

Từ đó tìm ra nghiệm: $x=\frac{1}{2}, x=-1, x=\frac{7}{8} \Rightarrow (x;y)=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);(-1;-2);\left(\frac{7}{8};-\frac{1}{8}\right)$.

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right);(-1;-2);\left(\frac{7}{8};-\frac{1}{8}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ (x+1)\left(y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right)=4 \end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 0, xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)\ge 0$.

Nhận thấy $xy=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét với $x>0$ và $y>0$. Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}-y+\sqrt{x}-\sqrt{y}=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)-y^2}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{y+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0 \qquad (1).$$

Ta chứng minh $y+\sqrt{xy}-2\ge 0$. Thật vậy từ phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$y+\sqrt{xy}=\frac{4}{x+1}-x(1-x)=\frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}+2\ge 2 \Rightarrow y+\sqrt{xy}-2\ge 0.$$

Do đó $(1)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\left(x+1\right)\left(3x-x^2\right)=4\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2-x-4\right)=0\xleftrightarrow{x\ge 0}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+\sqrt{x^2+2y+1}=x^2y+y+1\\ \left(x+y-1\right)\sqrt{y+1}=10\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+2y+1\ge 0, y>-1$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x^2\left(x-y\right)+\sqrt{x^2+2y+1}-\left(y+1\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-y\right)+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^2+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+y+1}\right)=0\ (1).$$

Để hệ có nghiệm ta phải có $x+y>1$ nên $(1)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$\left(2x-1\right)\sqrt{x+1}=10$.

Vế trái là một hàm đồng biến suy ra có nghiệm duy nhất $x=3\Rightarrow y=3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;3\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x\left(x+y\right)+\sqrt{x+y}=2y^2-\sqrt{2y}\\ x^2y-5x^2+7x+7y-4=6\sqrt[3]{xy-x+1}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y\ge 0, x+y\ge 0$.

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên với $y>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x^2+xy-2y^2+\sqrt{x+y}-\sqrt{2y}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y)+\frac{x-y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x+2y+\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}\right)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^3-5x^2+14x-4=6\sqrt[3]{x^2-x+1}.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+3(x+1)=8x^2-8x+8+3\sqrt[3]{8x^2-8x+8}$$

$$\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{8x^2-8x+8} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}=x+y+2xy \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=3x-4y+4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+y\ge 0, x-y\ge 0$.

Nhận thấy $x+y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình. Xét với $x+y>0$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$(x-y)^2+2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+\frac{7x^2-14xy+7y^2}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}+x+y}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(1+\frac{7}{2\sqrt{2x^2-3xy+2y^2}+x+y}\right)=0 \Leftrightarrow x=y.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{2x}=4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4 \\ x^2-8x+16=2x \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=1 \\ 100x^2+56xy+10y^2-39x-3y=18 \end{cases}$.

Lời giải

Thực hiện tương tự bài tập mẫu số 6 từ phương trình đầu của hệ ta được:

$$16x^2+4y^2+20xy-9=0.$$

Vậy bài toán quy về giải hệ phương trình

$$\begin{cases}16x^2+4y^2+20xy-9=0\\100x^2+56xy+10y^2-39x-3y=18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2+20xy=-16x^2+9\\10y^2+\left(56x-3\right)y=-100x^2+39x+18\end{cases}.$$

Sử dụng kỹ thuật hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta tìm được

Với $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{5+3\sqrt{5}}{4}$.

Với $x\neq\frac{1}{2}$ ta có $y^2=\frac{184x^2-30x+9}{4},y=\frac{3-20x}{2}$.

Ta có phương trình $\frac{184x^2-30x+9}{4}=\left(\frac{3-20x}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow VN\\x=\frac{5}{12},y=-\frac{8}{3}\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\frac{5}{12};-\frac{8}{3}\right);\left(\frac{1}{2};-\frac{5+3\sqrt{5}}{4}\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2\\18x^3+16y^2+40xy+34x^2=9\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x}\end{cases},x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right].$$

Lời giải

Tương tự bài tập mẫu số 06 và bài tập rèn luyện 10 từ phương trình đầu ta có:

$$40xy=9-16\left(x^2+y^2\right).$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x^3+3x^2+1=\sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x}\leq\frac{1+1+2x}{2}.\frac{1+1+1-3x}{3}=1-x^2.$$

$$\Leftrightarrow 2x^2\left(x+2\right)\leq 0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=\frac{3}{4}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất thoả mãn yêu cầu đề bài là:

$$\left(x;y\right)=\left(0;\frac{3}{4}\right).$$

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-y=(2x+1)(y-1) \\ \sqrt{3x-8}-\sqrt{y}=\dfrac{5}{x+y-12} \end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Từ phương trình đầu của hệ ta có $(x-y+1)^2=0 \Leftrightarrow y=x+1$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{2x-11}$.

Thực hiện tương tự bài tập mẫu số 03 ta được $(x;y)=(3;4);(8;9)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-y-1)\sqrt{x}+2=2x-y+(1-x)\sqrt{x-y} \\ \sqrt{x+y+3}=2\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{\dfrac{x+2y+1}{2x+y}}\right) \end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $0\le x\le 1, x-y\ge 0, x+y+3\ge 0, 2x+y\ne 0, \dfrac{x+2y+1}{2x+y}\ge 0$.

Từ phương trình đầu của hệ ta được:

$$(x-y-1)(\sqrt{x}-1)+x-y-1+2=2x-y+(1-x)\sqrt{x-y}.$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=(x-1)\left(1-\sqrt{x-y}\right).$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x-y}+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=x-1 \end{array}\right..$$

<u>+ TH1:</u> Nếu $x=1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{y+4}=2\sqrt{\frac{2y+2}{y+2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right. \Rightarrow (x;y)=(1;0).$$

<u>+ TH2:</u> Nếu $y=x-1 \Rightarrow \sqrt{2x+2}=2\left(\sqrt{x-1}+1\right) \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;0)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2xy-x^2}+\sqrt{2-xy^2}=2y \\ 2y(x-y)+2=x(x+y^2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $2xy - x^2 \ge 0, 2 - xy^2 \ge 0$.

Hệ phương trình có nghiệm khi $y > 0$.

Nhận xét: Thế $2 - xy^2 = x^2 - 2y\left(x - y\right)$ từ phương trình hai vào phương trình đầu ta được một phương trình đẳng cấp.

Khi đó:

$$\sqrt{2xy - x^2} + \sqrt{x^2 - 2y\left(x - y\right)} = 2y \Leftrightarrow \sqrt{2xy - x^2} - y + \sqrt{2y^2 + x^2 - 2xy} - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2xy - x^2 - y^2}{\sqrt{2xy - x^2} + y} + \frac{y^2 + x^2 - 2xy}{\sqrt{2y^2 + x^2 - 2xy} + y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - y\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2y^2 + x^2 - 2xy} + y} - \frac{1}{\sqrt{2xy - x^2} + y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ \sqrt{2y^2 + x^2 - 2xy} = \sqrt{2xy - x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 2\left(x - y\right)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2 = x\left(x + x^2\right) \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 1\right)\left(x^2 + 2x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(1;1\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y + \sqrt{3y^2 - 2y + 3x^2 + 6} = 3x + \sqrt{7x^2 + 7} + 2 \\ 3y^2 - 4x^2 - 3y + 3x + 1 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $3y^2 - 2y + 3x^2 + 6 \ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y - 3x - 2 + \sqrt{3y^2 - 2y + 3x^2 + 6} - \sqrt{7x^2 + 7} = 0 \\ 3y^2 - 4x^2 - 3y + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 3x - 2 + \dfrac{3y^2 - 4x^2 - 2y - 1}{\sqrt{3y^2 - 2y + 3x^2 + 6} + \sqrt{7x^2 + 7}} = 0 \\ 3y^2 - 4x^2 - 3y + 3x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-3x-2+\dfrac{\left(3y^2-4x^2-3y+3x+1\right)+y-3x-2}{\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}+\sqrt{7x^2+7}}=0 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-3x-2+\dfrac{y-3x-2}{\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}+\sqrt{7x^2+7}}=0 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y-3x-2\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}+\sqrt{7x^2+7}}\right)=0 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+2 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+2 \\ 23x^2+30x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=-1 \\ x=-\dfrac{7}{23}, y=\dfrac{25}{23} \end{array} \right.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(-1;-1\right);\left(-\dfrac{7}{23};\dfrac{25}{23}\right)$.

Nhận xét: Bằng kỹ thuật nhân liên hợp và sử dụng phép thế ở trên ta có thể sáng tác rất nhiều bài toán hay có dạng tương tự. Vận dụng kết hợp các phép toán này có nhắc đến một lần nữa trong kỹ thuật sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Bài 16. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}=3\left(x+y\right) \\ \sqrt{2x+y+1}+2\sqrt[3]{7x+12y+8}=2xy+y+5 \end{cases}$$

Lời giải

Để ý phân tích phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$\sqrt{5x^2+2xy+2y^2}+\sqrt{2x^2+2xy+5y^2}$$
$$=\sqrt{4x^2+y^2+\left(x+y\right)^2}+\sqrt{\left(x+y\right)^2+x^2+4y^2}.$$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{4x^2+y^2+\left(x+y\right)^2}\ge\sqrt{y^2+\dfrac{1}{2}\left(3x+y\right)^2} \\ \sqrt{\left(x+y\right)^2+x^2+4y^2}\ge\sqrt{x^2+\dfrac{1}{2}\left(x+3y\right)^2} \end{cases}.$

Mặt khác:

$$\sqrt{y^2+\frac{1}{2}(3x+y)^2}+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}(x+3y)^2}\ge\sqrt{(x+y)^2+\left(\frac{3x+y+x+3y}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

$$=\sqrt{9(x+y)^2}=3|x+y|\ge 3(x+y)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y\ge 0$.

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{19x+8}=2x^2+x+5.$$

$$\Leftrightarrow x+1-\sqrt{3x+1}+2\left(x+2-\sqrt[3]{19x+8}\right)+2x^2-2x=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+2.\frac{x^3+6x^2-7x}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}+2\left(x^2-x\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+2.\frac{x+7}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{19x+8}+\left(\sqrt[3]{19x+8}\right)^2}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=0\\x=y=1\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(0;0);(1;1)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} & (1)\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=4 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $x\ge 1, y\ge 1$.

Viết phương trình thứ nhất của hệ dưới dạng:

$$\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}-y=\sqrt{y}-\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy-y^2+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}=\frac{y-x}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+\sqrt{xy}-2}{\sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+y}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)=0\Leftrightarrow x=y$$

(Do $x+\sqrt{xy}-2\ge 0$).

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2\sqrt{x-1}=4\Leftrightarrow x=5\Rightarrow y=5.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(5;5\right)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2+2\left(y-1\right)\left(x-y\right)}+\sqrt{xy}=2y & (1)\\ x\left(2x+2y-5\right)+y\left(y-3\right)+3=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $x^2+2\left(y-1\right)\left(x-y\right),xy\ge 0$

Để hệ phương trình ta phải có $y\ge 0\Rightarrow x\ge 0$.

Nhận thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x>0,y>0$ khi đó viết lại (1) dưới dạng:

$$\sqrt{x^2+2\left(y-1\right)\left(x-y\right)}-y=y-\sqrt{xy}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-y^2+2\left(x-y\right)\left(y-1\right)}{\sqrt{x^2+2\left(y-1\right)\left(x-y\right)}+y}=\frac{y^2-xy}{y+\sqrt{xy}}.$$

$$\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(\frac{x+3y-2}{\sqrt{x^2+2\left(y-1\right)\left(x-y\right)}+y}+\frac{y}{y+\sqrt{xy}}\right)=0.$$

Do vậy việc xử lý phương trình tích sau cùng tương đối khó khăn ta biến đổi tương đương phương trình đầu của hệ như sau:

$$\sqrt{x^2+2\left(y-1\right)\left(x-y\right)}=2y-\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y-\sqrt{xy}\ge 0\\ x^2+2\left(y-1\right)\left(x-y\right)=4y^2-4y\sqrt{xy}+xy\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y-\sqrt{xy}\ge 0\\ 6y^2-4y\sqrt{xy}-xy+2x-2y-x^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y-\sqrt{xy}\ge 0\\ 4y\left(y-\sqrt{xy}\right)+\left(y-x\right)\left(2y+x\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-\sqrt{xy}\ge 0 \\ 4y^2.\dfrac{y-x}{y+\sqrt{xy}}+(y-x)(x+2y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y-\sqrt{xy}\ge 0 \\ (y-x)\left(\dfrac{4y^2}{y+\sqrt{xy}}+x+2y\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x(4x-5)+x(x-3)+3=0 \Leftrightarrow 5x^2-8x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1 \\ x=\dfrac{3}{5}, y=\dfrac{3}{5} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1);\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y & (1) \\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)}=3(x+3) & (2) \end{cases}$

Lời giải

Để phương trình có nghiệm ta phải có $y\ge 0$ do đó $x\ge 0$.

Viết lại (1) dưới dạng $\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}-2y=y-\sqrt{xy}$.

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2-4y^2+(4x-9)(x-y)}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}=\frac{y(y-x)}{y+\sqrt{xy}}.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{8x+4y-9}{\sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+2y}+\frac{y}{y+\sqrt{xy}}\right)=0 \ (3).$$

Mặt khác từ (2) ta có $16(x+2)(y+2x)=9(x+3)^2 \Leftrightarrow 8x+4y=\dfrac{9(x+3)^2}{2(x+2)}$.

Do đó $8x+4y-9=\dfrac{9(x+3)^2}{2(x+2)}-9=\dfrac{9x^2+36x+45}{2(x+2)}>0$.

Vì vậy $(3) \Leftrightarrow x=y$.

Thay $y=x$ vào (2) ta được:

$$4\sqrt{3x\left(x+2\right)}=3\left(x+3\right)\Leftrightarrow 39x^2+42x-81=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\dfrac{27}{13}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Nhận xét: Từ phương trình đầu của hệ ta có thể tìm ra $x=y$ bằng phép biến đổi tương đương như sau:

$$\sqrt{4x^2+\left(4x-9\right)\left(x-y\right)}=3y-\sqrt{xy}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y-\sqrt{xy}\geq 0\\ 4x^2+\left(4x-9\right)\left(x-y\right)=9y^2+xy-6y\sqrt{xy}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y-\sqrt{xy}\geq 0\\ 8x^2-9x-5xy+9y-9y^2+6y\sqrt{xy}=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y-\sqrt{xy}\geq 0\\ 8\left(x^2-y^2\right)+y\left(6\sqrt{xy}-5x-y\right)-9\left(x-y\right)=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3y-\sqrt{xy}\geq 0\\ \left(x-y\right)\left(8x+8y+\dfrac{y-25x}{6\sqrt{xy}+5x+y}-9\right)=0\end{cases}.$$

Do $8x+8y+\dfrac{y-25x}{6\sqrt{xy}+5x+y}-9=8x+4y-9+4y+\dfrac{y-25x}{6\sqrt{xy}+5x+y}$

$$\geq 4y+\frac{y-25x}{6\sqrt{xy}+5x+y}=\frac{24y\sqrt{xy}+20xy+4y^2+y-25x}{6\sqrt{xy}+5x+y}>0$$

Vì vậy $x=y$ ta có kết quả tương tự.

Chủ đề 19. MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC VÀ RÈN LUYỆN NÂNG CAO

+ Nội dung chủ đề này cung cấp một số bài toán tổng hợp để các em rèn luyện các kỹ thuật đã được học từ các chủ đề trước đó.

+ Bao gồm 60 bài toán chọn lọc đề cập đến phần lớn các kỹ thuật xử lý hệ phương trình.

+ Các bài toán đề xuất chọn lọc hay và khó đồng thời chứa đựng nhiều tư tưởng mới do đó sẽ kèm theo 1 số bài tập rèn luyện dành cho bạn đọc rèn luyện.

Nguồn: Được sưu tầm từ đề thi thử của Newstudy.vn, báo toán học tuổi trẻ và một số đề thi khác.

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}+3\sqrt{y-1}=\sqrt{5\left(x^2+y^2-3\right)}\\ \left(2x-1\right)^2+\left(2y-1\right)^2=18\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -2, y\ge 1; x^2+y^2-3\ge 0$.

Phân tích tìm lời giải:

Nhìn nhận hệ phương trình ta có 2 nhận định:

+ Phương trình thứ hai của hệ dạng bậc hai thử xem có phân tích được nhân tử hay khôhng.

+ Phương trình đầu của hệ chứa 3 căn thức thông thường suy nghĩ bình phương khử căn đầu tiên nếu không được thử áp dụng bất đẳng thức.

+ Nếu các hướng trên không được vậy thử xem cả 2 phương trình của hệ có mối liên hệ nào giữa 3 căn thức $\sqrt{x+2},\sqrt{y-1},\sqrt{5\left(x^2+y^2-3\right)}$ và thông thường để tìm mối liên hệ này ta cần tách phương trình thứ hai theo $x+2; y-1; x^2+y^2-3$.

Như đã phân tích 2 hướng đầu tiên không xử lý được vậy viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$4x^2-4x+4y^2-4y-16=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-3=x+y+1\Leftrightarrow\left(x+2\right)+\left(y-1\right)=x^2+y^2-3.$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{x+2}+3\sqrt{y-1}=\sqrt{5\left(x^2+y^2-3\right)}\\ \left(x+2\right)+\left(y-1\right)=x^2+y^2-3\end{cases}.$$

Rõ ràng khi viết lại hệ dưới dạng trên ta chỉ cần sử dụng phép thế để tìm mối liên hệ giữa 2 căn thức đầu tiên.

Thật vậy ta có $\sqrt{x+2}+3\sqrt{y-1}=\sqrt{5\left[\left(x+2\right)+\left(y-1\right)\right]}$.

$\Leftrightarrow x+2+6\sqrt{\left(x+2\right)\left(y-1\right)}+9\left(y-1\right)=5\left[\left(x+2\right)+\left(y-1\right)\right]$.

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+2}-6\sqrt{\left(x+2\right)\left(y-1\right)}-4\left(y-1\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{y-1}\right)\left(4\sqrt{x+2}+2\sqrt{y-1}\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=2\sqrt{y-1}\\ 4\sqrt{x+2}+2\sqrt{y-1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4y-6\\ \begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}\end{array}\right..$$

+ **<u>TH1:</u>** Thử lại $\left(x;y\right)=\left(-2;1\right)$ thấy không thoả mãn.

+ **<u>TH2:</u>** Với $x=4y-6$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$\left(8y-13\right)^2+\left(2y-1\right)^2=18$.

$$\Leftrightarrow 68y^2-212y+152=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\ y=\dfrac{19}{17}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2, y=2\\ x=-\dfrac{26}{17}, y=\dfrac{19}{17}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(2;2\right);\left(-\dfrac{26}{17};\dfrac{19}{17}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}3\left(2-x\right)\sqrt{2-y^2}=2-y+\dfrac{4}{x+1}\\ \left(x^2+xy-x+y-2\right)\sqrt{2-y^2}+2=x+y\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$.

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Với hình thức phương trình đầu của hệ thật khó để khai thác được gì.

Phương trình thứ hai của hệ có nhân tử đi cùng với $\sqrt{2-y^2}$ dạng bậc 2 nên tìm cách phân tích thành nhân tử.

Ta có: $x^2+xy-x+y-2=x^2+x\left(y-1\right)+y-2$.

Coi đây là tam thức bậc 2 của x ta có: $\Delta_x = (y-1)^2 - 4(y-2) = (y-3)^2$.

Suy ra $x = \dfrac{1-y+y-3}{2} = -1$ hoặc $x = \dfrac{1-y-y+3}{2} = -y+2$.

Do đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$(x+1)(x+y-2)\sqrt{2-y^2} = x+y-2.$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3(2-x)\sqrt{2-y^2} = 2-y+\dfrac{4}{x+1} \\ (x+1)(x+y-2)\sqrt{2-y^2} = x+y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2-x)\sqrt{2-y^2} = 2-y+\dfrac{4}{x+1} \\ \left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ (x+1)\sqrt{2-y^2} = 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x+y-2=0 \\ 3(2-x)\sqrt{2-y^2} = 2-y+\dfrac{4}{x+1} \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} (x+1)\sqrt{2-y^2} = 1 \\ 3(2-x)\sqrt{2-y^2} = 2-y+\dfrac{4}{x+1} \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ 3(2-x)\sqrt{2-(2-x)^2} = x+\dfrac{4}{x+1} \end{cases}$.

Chú ý hệ phương trình này có nghiệm khi $(2-x)(x+1) \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\begin{cases} 3(2-x)\sqrt{2-(2-x)^2} \le 3.\dfrac{(2-x)^2+2-(2-x)^2}{2} = 3 \\ x+\dfrac{4}{x+1} = x+1+\dfrac{4}{x+1}-1 \ge 2\sqrt{(x+1).\dfrac{4}{x+1}}-1 = 3 \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm khi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1 \Rightarrow y=1$.

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\sqrt{2-y^2} = 1 \\ 3(2-x)(x+1)\sqrt{2-y^2} = (2-y)(x+1)+4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\sqrt{2-y^2}=1 \\ 3(2-x)=(2-y)(x+1)+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ y=\dfrac{5x}{x+1} \\ (x+1)\sqrt{2-y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ y=\dfrac{5x}{x+1} \\ 2-y^2=\dfrac{1}{(x+1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ y=\dfrac{5x}{x+1} \\ 2-\dfrac{25x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{2-3\sqrt{3}}{23} \\ y=\dfrac{5-15\sqrt{3}}{26} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{2+3\sqrt{3}}{23} \\ y=\dfrac{5+15\sqrt{3}}{26} \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm là

$$(x;y)=(1;1);\left(\frac{2-3\sqrt{3}}{23};\frac{5-15\sqrt{3}}{26}\right);\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{23};\frac{5+15\sqrt{3}}{26}\right).$$

Nhận xét. Đây là một bài toán hay và khó mấu chốt của bài toán là phân tích thành nhân tử từ phương trình thứ hai của hệ. Đoạn xử lý phương trình lúc sau cần khéo léo.

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x-3)^2=2+\sqrt{y^3+3y^2} \\ 3\sqrt{x-3}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases}, (x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 3, y\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{y+3}, \left(t\ge\sqrt{3}\right)\Rightarrow y=t^2-3$ phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$x(x-3)^2=2+\left(t^2-3\right)t \Leftrightarrow x(x-3)^2-2=t^3-3t.$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3-3(x-2)=t^3-3t \ (1).$$

Với $x\ge 3\Rightarrow x-2\ge 1, t\ge\sqrt{3}>1$. Xét hàm số $f(u)=u^3-3u$ với $u\ge 1$ ta có $f'(u)=3u^2-3\ge 0, \forall u\ge 1$.

Vì vậy $f(u)$ là hàm đồng biến với $u\ge 1$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(x-2\right)=f(t) \Leftrightarrow x-2=t \Leftrightarrow x=t+2$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3\sqrt{t-1}=\sqrt{\left(t^2-3\right)\left(t^2+5\right)} \Leftrightarrow 9\left(t-1\right)=\left(t^2-3\right)\left(t^2+5\right).$$

$$\Leftrightarrow t^4+2t^2-9t-6=0 \Leftrightarrow \left(t-2\right)\left(t^3+2t^2+6t+3\right)=0 \Leftrightarrow t=2$$

(vì $t^3+2t^2+6t+3>0, \forall t \geq \sqrt{3}$).

Với $t=2 \Leftrightarrow \sqrt{y+3}=2 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=4$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(4;1\right)$.

Nhận xét. Sau khi đặt như trên suy nghĩ đến việc đưa phương trình về dạng hàm đặc trưng và vấn đề của ta làm tìm mối liên hệ giữa x và t. Muốn vậy ta có một công cụ rất mạnh là Máy tính cầm tay và ta thực hiện như sau:

Bước 1. Nhập vào máy tính số 1000 và gán vào biến nhớ A.

Bước 2. Nhập vào phương trình trên ở đâu có t ta thay bằng A.

Cụ thể như sau: $X\left(X-3\right)^2-2=A^3-3A$.

Bước 3. Nhấn SHIFT +SOLVE máy hiện kết quả 1002 tức là $x=t+2$ hay $t=x-2$ do đó ta viết lại phương trình dưới dạng: $\left(x-2\right)^3-3\left(x-2\right)=t^3-3t$.

Ngoài ra sau khi biến đổi phương trình về dạng như trên ta có thể phân tích nhân tử như sau:

$$\Leftrightarrow \left(x-t-2\right)\left(x^2+\left(t-4\right)x+t^2-2t+1\right)=0 \ (1).$$

Do $x \geq 3, t \geq \sqrt{3}$ nên

$$x^2+\left(t-4\right)x+t^2-2t+1=\left(x-1\right)\left(x-3\right)+\left(t-1\right)^2+tx-3>0.$$

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow x-t-2=0 \Leftrightarrow x=t+2$.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6x-y-\sqrt{6x-2y}=5 \\ 9x^2-y^2+4y\sqrt{6x-2y}=6xy-4y+12x+2 \end{cases}, \left(x,y \in \mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $3x-y \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} 2(3x-y)+y-\sqrt{6x-2y}=5 \\ (3x-y)^2-2(y-\sqrt{6x-2y})^2=2 \end{cases}$.

Đặt: $u=3x-y$, $v=y-\sqrt{6x-2y}, \left(u \geq 0\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}2u+v=5\\u^2-2v^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\v=1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}u=\dfrac{26}{7}\\v=-\dfrac{17}{7}\end{cases}.$$

TH1: Nếu $\begin{cases}u=2\\v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=2\\y-\sqrt{6x-2y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=y+2\\y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=3\end{cases}$

(thỏa mãn điều kiện).

TH2: Nếu $\begin{cases}u=\dfrac{26}{7}\\v=-\dfrac{17}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=\dfrac{26}{7}\\y-\sqrt{6x-2y}=-\dfrac{17}{7}\end{cases}.$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=\dfrac{26}{7}\\y-\sqrt{\dfrac{52}{7}}=-\dfrac{17}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9+2\sqrt{91}}{21}\\y=\dfrac{-17+2\sqrt{91}}{7}\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{5}{3};3\right);\left(\dfrac{9+2\sqrt{91}}{21};\dfrac{-17+2\sqrt{91}}{7}\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-3}=y+\sqrt{y^2+3}\\x^3-y^3=3x-3y+4\end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Phân tích tìm lời giải:

Bài toán có nhiều hướng tiếp cận:

+ Phương trình thứ nhất của hệ chứa 2 căn thức vậy đơn giản chuyển vế về dạng:

$$x-y=\sqrt{y^2+3}-\sqrt{x^2-3}.$$

Tiếp đến khử căn hai vế bằng phép bình phương. Với cách này ta chuyển vế như vậy vì sau khi bình phương ta lược bỏ đi được x^2+y^2 chung ở hai vế.

+ Nếu x,y cùng dương ta phát hiện được tính chất hàm đặc trưng từ phương trình đầu của hệ: $\sqrt{x^2-3}+\sqrt{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2+3}=y+\sqrt{y^2+3}$.

+ Ngoài ra tôi trình bày với bạn đọc 1 phương pháp khử căn khác đó là phép đặt: $\begin{cases} u = x + \sqrt{x^2 - 3} \\ v = y + \sqrt{y^2 + 3} \end{cases}$.

Với cách này có thể xử lý rất tốt các bài toán mà hệ chỉ chứa hai căn thức dạng $\sqrt{x^2 + a}; \sqrt{y^2 + b}$.

Điều kiện: $|x| \geq \sqrt{3}$.

Đặt $\begin{cases} u = x + \sqrt{x^2 - 3} \\ v = y + \sqrt{y^2 + 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq x, v \geq y \\ x = \dfrac{u^2 + 3}{2u} \\ y = \dfrac{v^2 - 3}{2v} \end{cases}$.

Từ phương trình đầu suy ra $u = v \Rightarrow y = \dfrac{u^2 - 3}{2u} \Rightarrow x - y = \dfrac{3}{u}$.

Phương trình thứ hai của hệ được biến đổi thành:

$$(x - y)(x^2 + y^2 + xy) = 3(x - y) + 4.$$

$$\Leftrightarrow (x - y)\left[(x - y)^2 + 3xy - 3\right] = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{u}\left(\frac{9}{u^2} + 3.\frac{u^2 + 3}{2u}.\frac{u^2 - 3}{2u} - 3\right) = 4.$$

$$\Leftrightarrow 9u^4 - 16u^3 - 36u^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow (u - 3)(9u^3 + 11u^2 - 3u - 9) = 0 \ (1).$$

Nếu $x \leq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2 - 3} < x + |x| = x - x = 0$.

Mặt khác $y + \sqrt{y^2 + 3} > y + |y| \geq 0$ do đó vô lý.

Vậy $x > 0$ đối chiếu với $|x| \geq \sqrt{3} \Rightarrow x \geq \sqrt{3} \Rightarrow u \geq \sqrt{3} > 1$.

Khi đó $9u^3 + 11u^2 - 3u - 9 > 9.1^3 + 3u(u - 1) + 8u^2 - 9 > 0$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow u = 3 \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 3} = 3 \\ y + \sqrt{y^2 + 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Đối chiếu với điều kiện $u \geq x, v \geq y$ thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (2; 1)$.

Cách 2:

Biến đổi phương trình đầu của hệ thành:

$$x-y=\sqrt{y^2+3}-\sqrt{x^2-3}\Rightarrow x^2-2xy+y^2=x^2+y^2-2\sqrt{\left(x^2-3\right)\left(y^2+3\right)}\ .$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-3\right)\left(y^2+3\right)}=xy\Leftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0\\ \left(x^2-3\right)\left(y^2+3\right)=x^2y^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} xy\ge 0\\ x^2-y^2=3\end{cases}.$$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-y^2=3\\ x^3-y^3=3\left(x-y\right)+4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-y\right)\left(x+y\right)=3\\ \left(x-y\right)\left[\dfrac{3\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2}{4}\right]=3\left(x-y\right)+4\end{cases}.$$

Đặt $u=x+y, v=x-y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} uv=3\\ v\left(\dfrac{3u^2+v^2}{4}\right)=3v+4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} uv=3\\ v^4-12v^2-16v+27=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=3\\ \left(v-1\right)\left(v^3+v^2-11v-27\right)=0\end{cases}.$$

Thực hiện đánh giá như cách 1 và thử lại nghiệm tìm được $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$ là nghiệm duy nhất của phương trình:

Chú ý. Theo trên ta có $x;y\ge 0$ do đó ta có thể viết phương trình đầu của hệ dưới dạng:

$$\sqrt{x^2-3}+\sqrt{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2+3}=y+\sqrt{y^2+3}.$$

Việc còn lại ta chỉ cần xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+3}, t\ge 0$.

Ta có f(t) đồng biến và dễ có $f(y)=\left(\sqrt{x^2-3}\right)\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2-3}\Leftrightarrow x^2-y^2=3$.

Lặp lại các bước tương tự cách 2 ta có kết quả tương tự.

Bài 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2y^2-7y+10-x\left(y+3\right)}+\sqrt{y+1}=x+1\\ \sqrt{y+1}+\dfrac{3}{x+1}=x+2y\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Phân tích tìm lời giải:

Bài toán có phần tương tự bài toán 2 với 2 đặc điểm phương trình đầu chứa căn thức; phương trình thứ hai có dạng phân thức.

+ Vậy đầu tiên quy đồng phương trình đầu của hệ ta có ngay nhân tử $(x+1)\sqrt{y+1}$.

+ Khi thấy nhân tử trên ta nghĩ ngay đến việc chuyển $\sqrt{y+1}$ sang phải rồi bình phương để có nhân tử $(x+1)\sqrt{y+1}$ từ phương trình đầu của hệ.

+ Do vậy cả 2 phương trình của hệ đều liên hệ với $(x+1)\sqrt{y+1}$ do đó nghĩ ngay đến sử dụng phép thế.

Điều kiện: $y \geq -1, x \neq -1, 2y^2 - 7y + 10 - x(y+3) \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{2y^2 - 7y + 10 - x(y+3)} = x + 1 - \sqrt{y+1} \\ (x+1)\sqrt{y+1} = (x+2y)(x+1) - 3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 - \sqrt{y+1} \geq 0 \\ 2y^2 - 7y + 10 - x(y+3) = (x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{y+1} + y + 1 \\ (x+1)\sqrt{y+1} = (x+2y)(x+1) - 3 \end{cases}.$$

Thay $(x+1)\sqrt{y+1} = (x+2y)(x+1) - 3$ từ phương trình dưới lên phương trình trên ta được:

$$2y^2 - 7y + 10 - x(y+3) = (x+1)^2 - 2\left[(x+2y)(x+1) - 3\right] + y + 1.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x(y-1) + 2(y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - y \\ x = 2 - 2y \end{array}\right..$$

TH1: Nếu $x = 1 - y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$(y-2)\sqrt{y+1} = y^2 - y + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ (y-2)^2(y+1) = (y^2 - y + 1)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y^4 - 3y^3 + 6y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ \left(y^2 - \dfrac{3y}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{4}\left(y - \dfrac{6}{5}\right)\left(y + \dfrac{2}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

(vô nghiệm).

TH2: Nếu $x=2-2y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$(3-2y)\sqrt{y+1}=3-4y \Leftrightarrow \begin{cases}(3-2y)(3-4y)\geq 0\\(3-2y)^2(y+1)=(3-4y)^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(3-2y)(3-4y)\geq 0\\4y^3-24y^2+21y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3-2y)(3-4y)\geq 0\\y\left(4y^2-24y+21\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-4-\sqrt{15}\\y=\dfrac{6+\sqrt{15}}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện ta chỉ nhận nghiệm $(x;y)=(2;0)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;0)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}12x+\dfrac{108}{y}-6=\sqrt{4xy+33}-\sqrt{2y-3}\\8\sqrt{xy-2y}-8y+4=(x-y)^2\end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 2, y\geq \dfrac{3}{2}$.

Xét phương trình thứ hai của hệ ta được: $8\sqrt{xy-2y}-8y+4=x^2-2xy+y^2$.

$\Leftrightarrow 4(xy-2y)+8\sqrt{xy-2y}+4=(x+y)^2$.

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{xy-2y}+2\right)^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy-2y}+2=x+y$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)y}+2=x+y \Leftrightarrow (x-2)-2\sqrt{(x-2)y}+y=0$.

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{y}\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=\sqrt{y} \Leftrightarrow y=x-2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$\frac{12xy-6y+108}{y}=\sqrt{4xy+33}-\sqrt{2y-3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{12xy-6y+108}{y}=\frac{4xy-2y+36}{\sqrt{4xy+33}+\sqrt{2y-33}}.$$

$\Leftrightarrow 2\left(2xy-y+18\right)\left(\sqrt{4xy+9}+\sqrt{2y-3}-3y\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2xy-y+18=0\\ \sqrt{4xy+33}+\sqrt{2y-3}=3y\end{array}\right.$.

<u>TH1:</u> Nếu $2xy-y+18=0$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}2xy-y+18=0\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\left(x-2\right)-\left(x-2\right)+18=0\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-5x+20=0\\ y=x-2\end{cases}$$

(vô nghiệm).

<u>TH2:</u> Nếu $\sqrt{4xy+33}+\sqrt{2x-3}=3y$ khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{4xy+33}+\sqrt{2y-3}=3y\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4x\left(x-2\right)+33}+\sqrt{2\left(x-2\right)-3}=3\left(x-2\right)\\ y=x-2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4x^2-8x+33}+\sqrt{2x-7}=3\left(x-2\right)\\ y=x-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=6\end{cases}.$$

Nhận xét. Để giải phương trình $\sqrt{4x^2-8x+33}+\sqrt{2x-7}=3\left(x-2\right)$ ta thực hiện như sau:

$$\sqrt{4x^2-8x+33}-15+\sqrt{2x-7}-3=3x-24.$$

$$\Leftrightarrow\frac{4x^2-8x-192}{\sqrt{4x^2-8x+33}+15}+\frac{2x-16}{\sqrt{2x-7}+3}=3\left(x-8\right).$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\left(x-8\right)\left(x+6\right)}{\sqrt{4x^2-8x+33}+15}+\frac{2\left(x-8\right)}{\sqrt{2x-7}+3}=3\left(x-8\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(x-8\right)\left[\frac{4\left(x+6\right)}{\sqrt{4x^2-8x+33}+15}+\frac{2}{\sqrt{2x-7}+3}-3\right]=0\ (1).$$

Với mọi $x\ge\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{2x-7}+3}\le\frac{2}{3}$ ta chứng minh

$$\frac{4\left(x+6\right)}{\sqrt{4x^2-8x+33}+15}<\frac{7}{3}\Leftrightarrow 7\sqrt{4x^2-8x+33}>12x-33.$$

$$7\sqrt{4x^2-8x+33}>12x-33\Leftrightarrow 49\left(4x^2-8x+33\right)>144x^2-792x+1089.$$

$\Leftrightarrow 52x^2+400x+528>0$ (luôn đúng).

Do đó $(1)\Leftrightarrow x-8=0\Leftrightarrow x=8\Rightarrow y=6$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(8;6)$.

Nhận xét. Một số hệ phương trình có một phương trình được tạo thành từ 1 hằng đẳng thức cơ bản. Ta cần khéo léo phân tích để nhận ra hằng đẳng thức đó.

+ Rõ ràng ta có thể xử lý phương trình đầu của hệ rồi thế vào phương trình còn lại. Tuy nhiên việc thế như vậy đưa về 1 phương trình vô tỷ hết sức phức tạp.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(6-x)(x^2+y^2)=6x+8y & (1)\\ (3-y)(x^2+y^2)=8x+6y & (2)\end{cases}$.

Lời giải

Nếu $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ thỏa mãn hệ phương trình.

Nếu $x^2+y^2>0$ khi đó nhân chéo theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$(6-x)(8x+6y)=(3-y)(6x+8y) \Leftrightarrow 4x^2-4y^2-6xy-15x+30y=0.$$

Coi đây là phương trình bậc với ẩn là x ta được: $4x^2-(6y+15)x-4y^2+30y=0$

Ta có $\Delta_x=(6y+15)^2-16(-4y^2+30y)=(10y-15)^2$.

Suy ra $x=2y$ hoặc $x=\frac{15}{4}-\frac{y}{2}$.

- Với $x=2y$ thay vào (1) ta được $(6-2y)5y^2=20y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\ y=2\\ y=4\end{array}\right.$

Suy ra $(x;y)=(1;2);(2;4)$.

- Với $y=\frac{15}{2}-2x$ thay vào (2) ta được:

$(4x-9)(4x^2-24x+37)=0 \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}$ suy ra $(x;y)=\left(\frac{9}{4};\frac{21}{4}\right)$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là $(x;y)=(0;0);(1;2);(2;4);\left(\frac{9}{4};\frac{21}{4}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3=\sqrt{4-x^2}+2\sqrt{y}\\ 3x^4+4y=2x\sqrt{y}(x^2+3)\end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Ta thấy x^2+y^2 lặp lại ở 2 phương trình của hệ và các nhân tử khác chỉ là bậc nhất của x và y do đó hoàn toàn xử dụng được kỹ thuật hệ phương trình bậc nhất hai ẩn đã đề cập trong chủ đề 1. Ngoài ra nếu chia mỗi phương trình của hệ cho x^2+y^2 ta lại có dấu hiệu của kỹ thuật số phức. Dưới đây tôi chỉ trình bày lời giải theo 1 hướng khác đó là suy nghĩ nhân chéo 2 phương trình của hệ tìm nhân tử chung. Hai cách kia xin dành cho bạn đọc.

Điều kiện $-2 \le x \le 2, y \ge 0$.

Khi đó viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$3x\left(x^3-2\sqrt{y}\right)+2\sqrt{y}\left(2\sqrt{y}-x^3\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^3-2\sqrt{y}\right)\left(3x-2\sqrt{y}\right)=0 .$$

- Với $2\sqrt{y}=3x$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$x^3=\sqrt{4-x^2}+3x \Leftrightarrow x^3-3x=\sqrt{4-x^2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x \ge 0 \\ x^6-6x^4+9x^2=4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x \ge 0 \\ x^6-6x^4+10x^2-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x \ge 0 \\ \left(x^2-2-\sqrt{2}\right)\left(x^4+\left(4-\sqrt{2}\right)x^2+4+2\sqrt{2}\right)=0 \end{cases} .$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{9}{4}\left(2+\sqrt{2}\right) .$$

Cách khác: Đặt $x=2\cos t, t \in \left[0;\pi\right]$ và:

$$(1) \Leftrightarrow 2\cos 3t = 2\sin t \Leftrightarrow \cos 3t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) .$$

- Với $2\sqrt{y}=x^3$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành $\sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$. Suy ra $\left(x;y\right)=\left(2;16\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(2;16\right);\left(\sqrt{2+\sqrt{2}};\frac{9}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\right)$.

Bài 10. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+2 & (1) \\ y\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} & (2) \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Dễ nhận thấy từ phương trình đầu của hệ có được nhân tử chung $y-2x$.

Điều kiện $x>0$ khi đó $y>0$.

Viết lại (1) dưới dạng:

$$y\sqrt{x}+y^2=2x\sqrt{x}+2xy \Leftrightarrow (y-2x)\left(\sqrt{x}+y\right)=0 \Leftrightarrow y=2x.$$

Thay vào (2) ta được:

$$2x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\left(2x-\sqrt{3}\right)=2x.$$

Để phương trình này có nghiệm ta phải có $x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ khi đó viết lại phương trình dưới dạng $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}}=0 \quad (3)$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}}$ trên $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\left(2x-\sqrt{3}\right)^2}>0,\forall x\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$.

Vì vậy $(3)\Leftrightarrow f(x)=f(\sqrt{3})\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$. Suy ra $(x;y)=\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+4}+\sqrt{y^2+2y-4}=4 \\ \sqrt{x^2+9}+y=5 \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $y^2+2y-4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\ge -1+\sqrt{5} \\ y\le -1-\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2+4}+y-\sqrt{y^2+2y-4}=1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2+4}+\left(y+1\right)-\sqrt{\left(y+1\right)^2-5}=2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2+4}}+\frac{5}{y+1+\sqrt{\left(y+1\right)^2-5}}=2.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+9}+y+1+\sqrt{\left(y+1\right)^2-5}=10.$$

Đặt $u=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+9}, v=y+1+\sqrt{\left(y+1\right)^2-5}$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u+v=10 \\ \dfrac{5}{u}+\dfrac{5}{v}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+9}=5 \\ y+1+\sqrt{\left(y+1\right)^2-5}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;2\right)$.

<u>Nhận xét</u>. Đây là một bài toán hay trước khi đặt ẩn phụ cần nhân liên hợp. Xem thêm kỹ thuật đặt ẩn phụ đại số tôi có trình bày một bài toán dạng tương tự nhưng khó hơn bài toán trên.

Bài 12. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy}+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{1}{xy} \\ x^2+y^2-\dfrac{1}{x+y}=-x^2+2x+1 \end{cases}, \left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $xy\left(x+y\right)\neq 0$.

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} \dfrac{\left(x+y\right)^2-2xy}{xy}+\dfrac{2}{x+y}=\dfrac{1}{xy} \\ \left(x+y\right)^2-2xy-\dfrac{1}{x+y}=2-\left(x-1\right)^2 \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+y)^2-1}{xy}+\dfrac{2}{x+y}=2\\(x+y)^2-2xy-\dfrac{1}{x+y}=2-(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y-1)\left[\dfrac{x+y+1}{xy}-\dfrac{2}{x+y}\right]=0\\(x+y)^2-2xy-\dfrac{1}{x+y}=2-(x-1)^2\end{cases}.$$

TH1: Nếu $x+y=1\Rightarrow y=1-x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$-2x(1-x)=2-(x-1)^2\Leftrightarrow 3x^2-4x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\\x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3},y=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\\x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3},y=\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\end{array}\right..$$

TH2: Nếu $\dfrac{x+y+1}{xy}-\dfrac{2}{x+y}=0\Leftrightarrow 2xy=(x+y)^2+x+y$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$-x-y-\frac{1}{x+y}=2-(x-1)^2\Leftrightarrow\frac{(x+y+1)^2}{x+y}=(x-1)^2.$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=0\\x+y+1=0\end{cases}\\\begin{cases}x\neq 1\\x+y+1\neq 0\\x+y>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}\\\begin{cases}x\neq 1\\x+y+1\neq 0\\x+y>0\end{cases}\end{array}\right..$

Thử lại $(x;y)=(1;-2)$ thấy không thỏa mãn.

Với $x+y>0$ khi đó $2xy=(x+y)^2+x+y\Leftrightarrow x^2+y^2+x+y=0$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3};\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right);\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3};\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right).$$

Bài 13. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}2y^3+y+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}\ \ (1)\\\sqrt{2y^2+1}+y=4+\sqrt{x+4}\ \ (2)\end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện $-4 \le x \le 1$. Khi đó viết lại (1) dưới dạng

$$2y^3 + y = \sqrt{1-x}\left(3-2x\right) = \sqrt{1-x}\left[2\left(1-x\right)+1\right] = 2\left(\sqrt{1-x}\right)^3 + \sqrt{1-x} \quad (3).$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left(-\infty; +\infty\right)$.

Vì vậy $(3) \Leftrightarrow f(y) = f\left(\sqrt{1-x}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x}$.

Thay vào (2) ta được:

$$\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} - \sqrt{3-2x} + 4 = 0.$$

Đến đây xét hàm số hoặc nhân liên hợp ta có nghiệm duy nhất: $x = -3 \Rightarrow y = 2$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(-3;2\right)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{9 + 8x^2y - x^4y^2} = y\left(16y^5 - 3x^2y^2 + 1\right) & (1) \\ 1 + \sqrt{16 + \left(x-2y\right)^2} = x^2\left(5y^3 - x^2\right) + y & (2) \end{cases}, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$$

Lời giải

Lấy $(1) - (2)$ theo vế ta được:

$$\sqrt{9 + 8x^2y - x^4y^2} - \sqrt{16 + \left(x-2y\right)^2} = 1 + y\left(16y^5 - 3x^2y^2 + 1\right) - \left[x^2\left(5y^3 - x^2\right) + y\right]$$

$$= \left(x^2 - 4y^3\right)^2 + 1 \ge 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Mặt khác: $\sqrt{9 + 8x^2y - x^4y^2} = \sqrt{25 - \left(x^2y - 4\right)^2} \le 5 \le 1 + \sqrt{16 + \left(x-2y\right)^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Vì vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi các dấu đẳng thức xảy ra đồng thời, điều này tương đương với $\begin{cases} x^2y = 4 \\ x - 2y = 0 \\ x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(2;1\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{x^2y^4 + 2xy^2 - y^4 + 1} = 2\left(3 - \sqrt{2} - x\right)y^2 & (1) \\ \sqrt{x - y^2} + x = 3 & (2) \end{cases}, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$$

Lời giải

Điều kiện $x-y^2\ge 0, x^2y^4+2xy^2-y^4+1\ge 0$.

Viết lại (1) dưới dạng: $2\left(xy^2+1\right)-\sqrt{\left(xy^2+1\right)-y^4}=\left(6-4\sqrt{2}\right)y^2$ $\quad$ (3).

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y\ne 0$ khi đó chia hai vế của (3) cho y^2 ta được

$$2.\frac{xy^2+1}{y^2}-\sqrt{\left(\frac{xy^2+1}{y^2}\right)^2-1}=6-4\sqrt{2}\ .$$

Đặt $u=\dfrac{xy^2+1}{y^2}$ khi đó ta có phương trình $2t-\sqrt{t^2-1}=6-4\sqrt{2}$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2-1}=2t+4\sqrt{2}-6\Leftrightarrow \begin{cases}2t+4\sqrt{2}-6\ge 0\\ t^2-1=4t^2+4\left(4\sqrt{2}-6\right)t+\left(4\sqrt{2}-6\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow t=3\ .$$

Vì vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{xy^2+1}{y^2}=3\\ \sqrt{x-y^2}+x=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3y^2-1}{y^2}\\ \sqrt{\dfrac{3y^2-1-y^4}{y^2}}=\dfrac{1}{y^2}\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3y^2-1}{y^2}\\ 3y^4-y^2-y^6-1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{3y^2-1}{y^2}\\ \left(y^2-1\right)\left(-y^4+2y^2+1\right)=0\end{cases}.$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y^2=1\end{cases}\vee \begin{cases}x=\dfrac{8+6\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\\ y^2=1+\sqrt{2}\end{cases}$ đối chiếu với điều kiện $x-y^2\ge 0$ ta chỉ nhận $x=2, y^2=1\Leftrightarrow \left(x;y\right)=\left(2;\pm 1\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(2;-1\right);\left(2;1\right)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-2y=\left(x^2-x\right)\left(2y+1\right) & (1)\\ x^2-2y^2-2y+3=\sqrt{3x+4}+\sqrt{4y+1} & (2)\end{cases}$

Lời giải

Từ (1) $\Leftrightarrow \left(x-2y\right)\left(x^2-x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=2y$.

Thay vào (2) ta được $2y^2-2y+3=\sqrt{4y+1}+\sqrt{6y+4}$.

$\Leftrightarrow \left(2y^2-4y\right)=\sqrt{4y+1}-\left(y+1\right)+\sqrt{6y+4}-\left(y+2\right)$.

$\Leftrightarrow \left(y^2-2y\right)\left[2+\dfrac{1}{\sqrt{4y+1}+y+1}+\dfrac{1}{\sqrt{6y+4}+y+2}\right]=0$.

$\Leftrightarrow y^2-2y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$. Suy ra $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(4;2\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right);\left(4;2\right)$.

Nhận xét. Bài toán trên có dạng quen thuộc từ 1 phương trình của hệ bằng phương pháp hàm số hoặc phân tích nhân tử tìm được mối liên hệ tuyến tính giữa 2 nghiệm của hệ. Quan trọng nhất của loại toán này đó là xử lý phương trình vô tỷ lúc sau. Với loại có 2 căn thức trở lên như trên kỹ thuật được sử dụng đó là nhân liên hợp.

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-x-y=1 \\ 4x^3-12x^2+9x=-y^3+6y+7 \end{cases}$.

Lời giải

<u>Cách 1:</u> Hệ số bất định chứa biểu thức của biến

Viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases} xy-x-y-1=0 & (1) \\ 4x^3-12x^2+9x+y^3-6y-7=0 & (2) \end{cases}$

Nhận thấy $y=1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y\neq 1$ khi đó lấy $(2)-3\left(y+1\right).(1)$ ta được

$$4x^3-12x^2+9x+y^3-6y-7-3\left(y+1\right)\left(xy-x-y-1\right)=0 \ .$$

$\Leftrightarrow \left(x+y-1\right)\left(2x-y-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ 2x-y-2=0 \end{array}\right.$.

- Với $y=1-x$ thay vào (1) ta được:

$x\left(1-x\right)-x-\left(1-x\right)-1=0 \Leftrightarrow -x^2+x-2=0$ (vô nghiệm).

- Với $y=2x-2$ thay vào (1) ta được:

$$x\left(2x-2\right)-x-\left(2x-2\right)-1=0\Leftrightarrow 2x^2-5x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4};y=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4};y=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4};\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{5+\sqrt{17}}{4};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right).$$

Cách 2: Phương pháp thế

Nhận thấy $y=1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y\neq 1$ khi đó rút $x=\dfrac{y+1}{y-1}$ từ phương trình (1) thế vào (2) ta được

$$\frac{y^6-3y^5-3y^4+11y^3-6y^2+32}{\left(y-1\right)^3}=0\Leftrightarrow\left(y^2-y+2\right)\left(y^2-y-4\right)^2=0.$$

Cách 3: Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp

Viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} y\left(x-1\right)=x+1 \\ 4\left(x-1\right)^3-3\left(x-1\right)=-y^3+6y+6\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y\left(x-1\right)=x+1 \\ 4\left(x-1\right)^3+y^3=3\left(x+2y+1\right)=3\left[2y+y\left(x-1\right)\right]\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y\left(x-1\right)=x+1 \\ 4\left(x-1\right)^3+y^3=3y\left(x+1\right)=3y^2\left(x-1\right)\end{cases}.$$

Vì vậy $4\left(x-1\right)^3+y^3-3y^2\left(x-1\right)=0$.

Bài tập tương tự xem thêm chủ đề hệ số bất định.

Bài 18. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y+\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}=3x+\sqrt{7x^2+7}+2 & (1) \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $3y^2-2y+3x^2+6\geq 0$.

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} y-3x-2+\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}-\sqrt{7x^2+7}=0 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-3x-2+\dfrac{3y^2-4x^2-3y+3x+1+(y-3x-2)}{\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}+\sqrt{7x^2+7}}=0 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-3x-2)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3y^2-2y+3x^2+6}+\sqrt{7x^2+7}}\right)=0 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+2 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+2 \\ 3(3x+2)^2-4x^2-3(3x+2)+3x+1=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+2 \\ 23x^2+30x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1; y=-1 \\ x=-\dfrac{7}{23}; y=\dfrac{25}{23} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(-1;-1);\left(-\dfrac{7}{23};\dfrac{25}{23}\right)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2-2x-5+2x\sqrt{x^2+1}=2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} & (1) \\ x^2+2y^2=2x-4y+3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Lấy $(1)-(2)$ theo vế rồi rút gọn ta được

$$x^2+x\sqrt{x^2+1}=(y+1)^2+(y+1)\sqrt{(y+1)^2+1} \quad (3).$$

Xét hàm số $f(t)=t^2+t\sqrt{t^2+1}$ trên $(-\infty;+\infty)$ ta có :

$$f'(t)=2t+\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} \geq 2t+2\sqrt{\sqrt{t^2+1}.\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}}=2|t|+2t \geq 0, \forall t \in (-\infty;+\infty)$$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Vì vậy $(3) \Leftrightarrow f(x)=f(y+1) \Leftrightarrow x=y+1$.

Thay vào (2) ta được $(y+1)^2+2y^2=2(y+1)-4y+3$.

$$\Leftrightarrow 3y^2+4y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$.

Suy ra $(x;y)=\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right);(-1;-2)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right);(-1;-2)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{3x^2+6xy}+y\sqrt{3y^2+6xy}=6 & (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+x^2+y^2=2+2xy & (2) \end{cases}$

Phân tích lời giải. Dự đoán $(x;y)=(1;1)$ nên ta sử dụng đánh giá bất đẳng thức qua bất đẳng thức cơ bản Cô si.

Lời giải

Điều kiện $x\ge 0, y\ge 0$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức cô si cho vế trái của (1) ta được

$$x\sqrt{3x^2+6xy}+y\sqrt{3y^2+6xy}\ge 2\sqrt{xy\sqrt{3x^2+6xy}.\sqrt{3y^2+6xy}}$$.

$$=2\sqrt{3xy\sqrt{xy\left[5xy+2\left(x^2+y^2\right)\right]}}\ge 2\sqrt{3xy\sqrt{xy\left[5xy+2.2xy\right]}}=6xy$$

Do đó $xy\le 1$.

Mặt khác cũng theo Cô si ta có:

$$x\sqrt{3x^2+6xy}+y\sqrt{3y^2+6xy}\le\frac{9x^2+3x^2+6xy}{6}+\frac{9y^2+3y^2+6xy}{6}=2\left(x^2+y^2+xy\right).$$

Do đó $x^2+y^2+xy\ge 3$. Mặt khác $xy\le 1\Rightarrow x^2+y^2\ge 2$. Nên từ (2) suy ra

$2+2xy\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\ge 2\sqrt[4]{xy}+2\Leftrightarrow xy\ge\sqrt[4]{xy}\Leftrightarrow xy\ge 1$.

Vì vậy $xy=1$ điều này kéo theo tất cả các dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{9y-5}+y\sqrt{9x-5}=2x^2+2y^2 \\ x\sqrt{9x-5}+y\sqrt{9y-5}=2x^2+2y^2 \end{cases}$.

Lời giải

Nhận xét. Đây là hệ đối xứng loại II phương pháp giải dạng hệ này là trừ theo vế hai phương trình của hệ.

Điều kiện $x \ge \frac{5}{9}, y \ge \frac{5}{9}$.

Khi đó trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$x\left(\sqrt{9y-5}-\sqrt{9x-5}\right)+y\left(\sqrt{9x-5}-\sqrt{9y-5}\right)=0 .$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\sqrt{9y-5}-\sqrt{9x-5}\right)=0 \Leftrightarrow -\frac{9(x-y)^2}{\sqrt{9y-5}+\sqrt{9x-5}}=0 \Leftrightarrow x=y .$$

Khi đó thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$2x\sqrt{9x-5}=4x^2 \Leftrightarrow 2x\left(\sqrt{9x-5}-2x\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{9x-5}=2x \text{ (do } x \ge \frac{5}{9}\text{).}$$

$$\Leftrightarrow 9-5x=4x^2 \Leftrightarrow (x-1)(4x+9)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1 .$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+y-1}=\left(x^4-1\right)\sqrt[4]{2x-1}+y^4+1 & (1) \\ 3x^2-y^2-2xy+3x-3y=0 & (2) \end{cases}$

Phân tích lời giải. Nhận thấy nếu $x=y$ thì (2) thỏa mãn vì vậy (2) đưa được về dạng tích. Ta xử lý (2) trước.

Lời giải

Điều kiện $x \ge \frac{1}{2}, x+y-1 \ge 0$.

Viết (2) dưới dạng $(x-y)(3x+y+3)=0$.

Do $x \ge \frac{1}{2}, x+y \ge 1 \Rightarrow 3x+y+3=x+y+2x+3 \ge 1+2.\frac{1}{2}+3>0$ do đó $y=x$.

- Nếu $y=x$ thay vào (1) ta được $2\sqrt{2x-1}=\left(x^4-1\right)\sqrt[4]{2x-1}+x^4+1$.

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}+\sqrt[4]{2x-1}-1=x^4\left(\sqrt[4]{2x-1}+1\right) .$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{2x-1}+1\right)\left(2\sqrt[4]{2x-1}-1\right)=x^4\left(\sqrt[4]{2x-1}+1\right) .$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt[4]{2x-1}-1=x^4 \Leftrightarrow x^4+1=2\sqrt[4]{2x-1} .$$

Đặt $\sqrt[4]{2x-1}=y$ đưa về hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4+1=2y \\ y^4+1=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+1=2y \\ (x-y)\left[(x+y)(x^2+y^2)+2\right]=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^4-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ (x-1)(x^3+x^2+x-1)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}}-\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}\right) \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là

$$(x;y)=(1;1);\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{9k}+\frac{k}{3};-\frac{1}{3}-\frac{2}{9k}+\frac{k}{3}\right) \text{với } k=\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}.$$

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{17-4x^2}+y\sqrt{19-9y^2}=3 \\ \sqrt{17-4x^2}+\sqrt{19-9y^2}=10-2x-3y \end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $|x|\le\sqrt{\dfrac{17}{4}},|y|\le\sqrt{\dfrac{19}{9}}$.

Viết lại hệ dưới dạng $\begin{cases} x\sqrt{17-4x^2}+y\sqrt{19-9y^2}=3 \\ 2x+\sqrt{17-4x^2}+3y+\sqrt{19-9y^2}=10 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=2x+\sqrt{17-4x^2} \\ v=3y+\sqrt{19-9y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{u^2-17}{4}=x\sqrt{17-4x^2} \\ \dfrac{v^2-19}{6}=y\sqrt{19-9y^2} \end{cases}$.

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{u^2-17}{4}+\dfrac{v^2-19}{6}=3 \\ u+v=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(u^2-17)+2\left[(10-u)^2-19\right]=36 \\ v=10-u \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u^2-40u+75=0 \\ v=10-u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=5 \end{cases} \vee \begin{cases} u=3 \\ v=7 \end{cases}.$$

- Với $\begin{cases} u=5 \\ v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{17-4x^2}=5 \\ 3y+\sqrt{19-9y^2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{17-4x^2}=5-2x \\ \sqrt{19-9y^2}=5-3y \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 5/2; y \le 5/3 \\ 17-4x^2=25-20x+4x^2 \\ 19-9y^2=25-30y+9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \vee x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{15\pm\sqrt{117}}{18} \end{cases}.$$

Suy ra $(x;y)=\left(x=2;\dfrac{15\pm\sqrt{117}}{18}\right);\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{15\pm\sqrt{117}}{18}\right)$.

- Với $\begin{cases} u=3 \\ v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{17-4x^2}=3 \\ 3y+\sqrt{19-9y^2}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{17-4x^2}=3-2x \\ \sqrt{19-9y^2}=7-3y \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3/2; y \le 7/3 \\ 17-4x^2=9-12x+4x^2 \\ 19-9y^2=49-42y+9y^2 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$(x;y)=\left(x=2;\frac{15\pm\sqrt{117}}{18}\right);\left(\frac{1}{2};\frac{15\pm\sqrt{117}}{18}\right).$$

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+\dfrac{x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 4x\sqrt{y+1}+8x=(4x^2-4x-3)\sqrt{x+1} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x>-1; y\ge -1$ khi đó biến đổi phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$\frac{x^3+x^2+x}{x+1}=(y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}}=(y+2)\sqrt{y+1}.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3+\frac{x}{\sqrt{x+1}}=(y+1)\sqrt{y+1}+\sqrt{y+1} \text{ (1)}.$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $(-\infty;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in(-\infty;+\infty)$ do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f\left(\sqrt{y+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}$.

Thay $\sqrt{y+1} = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\frac{4x^2}{\sqrt{x+1}} + 8x = \left(4x^2 - 4x - 3\right)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x+1} + \frac{8x}{\sqrt{x+1}} = 4x^2 - 4x - 3.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x}{\sqrt{x+1}} + 2\right)^2 = \left(2x-1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} + 2 = 2x - 1 \\ \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} + 2 = -2x + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} - 2x + 3 = 0 \\ \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} + 2x + 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Vì $\sqrt{y+1} = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow x \ge 0$ do đó (2) vô nghiệm nên ta chỉ cần giải phương trình: $\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = \left(2x-3\right)\sqrt{x+1} \quad (3)$.

Đặt $u = \sqrt{x+1} \ge 1 \Rightarrow x = u^2 - 1$ và phương trình (3) trở thành

$$2\left(u^2 - 1\right) = \left(2u^2 - 5\right)u \Leftrightarrow 2u^3 - 2u^2 - 5u + 2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(u-2\right)\left(2u^2 + 2u - 1\right) = 0 \Leftrightarrow u = 2 \text{ (do } u \ge 1\text{)}.$$

Vì vậy $\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \sqrt{y+1} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{4}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right) = \left(3;\dfrac{5}{4}\right)$.

Bài 24. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{x+3y+2y^2} + 4.2^{x+2y} = 2^{2x+3y} + 4^{(y+1)^2} \\ 2\sqrt{2x-2y-3} = \dfrac{2y^2 + 2y - x + xy}{2y^2 + 2y - 3x + 2} \end{cases}, \left(x, y \in \mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 2x - 2y - 3 \ge 0 \\ 2y^2 + 2y - 3x + 2 \ne 0 \end{cases}$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ được viết lại dưới dạng:

$$\left(2^{x+3y}-2^{4y+2}\right)\left(2^{x}-2^{2y^2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x+3y}=2^{4y+2}\\2^{x}=2^{2y^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y+2\\x=2y^2\end{array}\right..$$

- Với $x=y+2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$y^2-5y-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\\y=6\end{array}\right.$. Suy ra $(x;y)=(1;-1);(8;6)$.

- Với $x=2y^2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\left(-4y^2+2y+2\right)\sqrt{4y^2-2y-3}=y+y^3.$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{4y^2-2y-3}\right)^3+\sqrt{4y^2-2y-3}=(-y)+\left(-y\right)^3\ \ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\left(-\infty;+\infty\right)$. Ta có;

$f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\left(-\infty;+\infty\right)$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{4y^2-2y-3}\right)=f(-y)\Leftrightarrow\sqrt{4y^2-2y-3}=-y$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\le 0\\4y^2-2y-3=y^2\end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{1-\sqrt{10}}{3}\Rightarrow x=\frac{22-4\sqrt{10}}{9}.$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm là:

$$(x;y)=(1;-1);(8;6);\left(\frac{22-4\sqrt{10}}{9};\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right).$$

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-12x=y^3-6y^2+16\\x^2+xy+y^2-4x-6y+9=0\end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại dưới dạng:

$$\left(x+2\right)^3-6\left(x+2\right)^2=y^3-6y^2\qquad(1).$$

Viết phương trình thứ hai của hệ dưới dạng $x^2+x\left(y-4\right)+y^2-6y+9=0$.

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là x ta được

$$\Delta_x=\left(y-4\right)^2-4\left(y^2-6y+9\right)\ge 0\Leftrightarrow -3y^2+16y-20\ge 0\Leftrightarrow 2\le y\le\frac{10}{3}.$$

Tương tự viết lại dưới dạng $y^2+\left(x-6\right)y+x^2-4x+9=0$ ta được

$$\Delta_y = (x-6)^2 - 4(x^2-4x+9) \ge 0 \Leftrightarrow -3x^2+4x \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{4}{3}$$

Suy ra $2 \le x+2 \le \frac{10}{3}$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 6t^2$ trên $\left[2;\frac{10}{3}\right]$ ta có:

$$f'(t) = 3t^2 - 12t = 3t(t-4) \le 0, \forall t \in \left[2;\frac{10}{3}\right].$$

Do đó $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[2;\frac{10}{3}\right]$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow f(x+2) = f(y) \Leftrightarrow y = x+2$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2 + x(x+2) + (x+2)^2 - 4x - 6(x+2) + 9 = 0 .$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right. .$$

Suy ra $(x;y) = (1;3);\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;3);\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(y^3 - x^3) = 6x^2 + 7x - y + 3 \ (1) \\ 2\sqrt{3-y} + \sqrt{2(y+1)} = \sqrt{\frac{9}{4}x^2 + 4} \ (2) \end{cases}$.

Lời giải

Viết lại (1) dưới dạng $2y^3 + y = 2(x+1)^3 + (x+1) \quad (3)$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên là hàm đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ do đó $(3) \Leftrightarrow f(y) = f(x+1) \Leftrightarrow y = x+1$.

Thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2-x} + \sqrt{2(x+2)} = \frac{\sqrt{9x^2+16}}{2}$.

$$\sqrt{9x^2+16} = 2\left(2\sqrt{2-x} + \sqrt{2(x+2)}\right).$$

Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$9x^2+16=4\left(2x+4+4\left(2-x\right)+4\sqrt{2\left(4-x^2\right)}\right).$$

$$\Leftrightarrow 9x^2+8x-16\sqrt{2\left(4-x^2\right)}-32=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2\left(4-x^2\right)}-x\right)\left(2\sqrt{2\left(4-x^2\right)}+x+8\right)=0 \ (1)$$

Do $x\in\left[-2;2\right]$ nên $2\sqrt{2\left(4-x^2\right)}+x+8>0$ do đó phương trình tương đương với:

$$2\sqrt{2\left(4-x^2\right)}-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 8\left(4-x^2\right)=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y=\frac{4\sqrt{2}}{3}+1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{4\sqrt{2}}{3}+1\right)$.

Nhận xét. Để phân tích được (1) ta đặt $t=\sqrt{2\left(4-x^2\right)}$ đưa phương trình về:

$$at^2-16t+8x-32+9x^2-2a\left(4-x^2\right)=0.$$

$\Leftrightarrow at^2-16t+\left(9+2a\right)x^2+8x-8a-32=0$ (2) trong đó a là số thực tìm sau.

Ta chọn a sao cho (2) có nghiệm đẹp bằng cách lay Δ'_t là số chính phương.

Ta có: $\Delta'_t=64-a\left(\left(9+2a\right)x^2+8x-8a-32\right)$ là số chính phương tìm được $a=-4$.

Khi đó viết lại phương trình dưới dạng:

$$-4t^2-16t+x^2+8x=0 \Leftrightarrow \left(2t+4\right)^2=\left(x+4\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t=x \\ 2t=-x-8 \end{array}\right..$$

Đó chính là cách phân tích thành nhân tử trong phương trình (1).

\+ Ngoài ra ta có thể bình phương hai vế đưa về phương trình:

$$16\sqrt{8-2x^2}=9x^2+8x-32 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+8x-32\ge 0 \\ 256\left(8-2x^2\right)=\left(9x^2+8x-32\right)^2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+8x-32\ge 0 \\ \left(9x^2-32\right)\left(9x^2+16x+32\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y=\frac{4\sqrt{2}}{3}+1.$$

Bài 27. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)+2\left(5x-3y\right)-4\left(xy-3\right)}-3\sqrt{y}=-\sqrt{x+2} & (1) \\ \sqrt{y^2-4\left(x+y\right)+17}-\sqrt{x+3-y}=2 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải

Nhận thấy phương trình (2) có hai căn thức bậc khác nhau nên ta không thể xử lý từ phương trình này được và ta tập trung xử lý (1). Điều này chúng ta nghĩ đến (1) phân tích được nhân tử.

Viết lại (1) dưới dạng:

$$\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)+2\left(5x-3y\right)-4\left(xy-3\right)}-2\sqrt{y}=\sqrt{y}-\sqrt{x+2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x^2+\left(5-2y\right)x+y^2-5y+6\right)}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)+2\left(5x-3y\right)-4\left(xy-3\right)}+2\sqrt{y}}=\frac{y-x-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x+2-y\right)\left(x+3-y\right)}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)+2\left(5x-3y\right)-4\left(xy-3\right)}+2\sqrt{y}}=\frac{y-x-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2-y\right)\left[\frac{2\left(x+3-y\right)}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)+2\left(5x-3y\right)-4\left(xy-3\right)}+2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}\right]=0.$$

$$\Leftrightarrow x+2-y=0, \text{ do } \frac{2\left(x+3-y\right)}{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)+2\left(5x-3y\right)-4\left(xy-3\right)}+2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y}}>0$$

Thay $y=x+2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{\left(x+2\right)^2-4\left(x+x+2\right)+17}=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+13}=3.$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=4.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;4\right)$.

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=2 & (1) \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{7}{4} & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $0 \le x^2 - y^2 < 1$.

Lấy $(1)+(2)$ và $(1)-(2)$ theo vế ta được: $\begin{cases} \dfrac{x+y-(x+y)\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = \dfrac{15}{4} \\ \dfrac{x-y+(x-y)\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Tiếp đến nhân theo vế hai phương trình của hệ trên ta được:

$$\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(1-x^2+y^2\right)}{1-x^2+y^2} = \frac{15}{6} \Leftrightarrow x^2-y^2 = \frac{15}{6}.$$

Thay ngược lại hệ phương trình ban đầu ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{\dfrac{15}{16}}}{\sqrt{\dfrac{1}{16}}} = 2 \\ \dfrac{y-x\sqrt{\dfrac{15}{16}}}{\sqrt{\dfrac{1}{16}}} = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y\sqrt{15} = 2 \\ 4y-x\sqrt{15} = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{32+7\sqrt{15}}{4} \\ y = 7+2\sqrt{15} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{32+7\sqrt{15}}{4}; 7+2\sqrt{15}\right)$.

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y^2-y\sqrt{x+3y^2} = 0 & (1) \\ 2y^2-3y-x+1+\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+1}{21}} = 0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $x+3y^2 \ge 0$.

Viết lại (1) dưới dạng $\left(\sqrt{x+3y^2}\right) - y\sqrt{x+3y^2} - 2y^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3y^2}+y\right)\left(\sqrt{x+3y^2}-2y\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3y^2} = -y \\ \sqrt{x+3y^2} = 2y \end{array}\right..$$

- Nếu $\sqrt{x+3y^2}=-y \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0 \\ x=-2y^2 \end{cases}$ thay vào (2) ta được

$4y^2-3y+1+\sqrt{\dfrac{4y^4+y^2+1}{21}}=0$ (vô nghiệm do $4y^2-3y+1>0$).

- Nếu $\sqrt{x+3y^2}=2y \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x=y^2 \end{cases}$ thay vào (2) ta được:

$$y^2-3y+1+\sqrt{\frac{y^4+y^2+1}{21}}=0 .$$

$$\Leftrightarrow 2\left(y^2-y+1\right)-\left(y^2+y+1\right)+\sqrt{\frac{\left(y^2+y+1\right)\left(y^2-y+1\right)}{21}}=0 .$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{y^2-y+1}{y^2+y+1}+\sqrt{\frac{y^2-y+1}{21\left(y^2+y+1\right)}}-1=0 \ (3) .$$

Đặt $u=\sqrt{\dfrac{y^2-y+1}{21\left(y^2+y+1\right)}}>0$ khi đó (3) trở thành

$42u^2+u-1=0 \Leftrightarrow (7u-1)(6u+1)=0 \Leftrightarrow u=\dfrac{1}{7}$ (do $u>0$).

Vì vậy $\sqrt{\dfrac{y^2-y+1}{21\left(y^2+y+1\right)}}=\dfrac{1}{7} \Leftrightarrow 28y^2-70y+28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2} \\ y=2 \end{array}\right.$.

Suy ra $(x;y)=\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right);(4;2)$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right);(4;2)$.

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+3(y-1)(x-y)=2 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{8} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y \ge -1$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$x^3+y^3+3xy-3y^2-3x+3y-2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y-2)\left(x^2-xy+y^2+2x-y+1\right)=0.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2-x \\ x^2-xy+y^2+2x-y+1=0 \qquad (1) \end{array}\right.$$
Để ý phương trình (1) viết lại:

$$y^2-y(x+1)+(x+1)^2=0 \Rightarrow \Delta_y=(x+1)^2-4(x+1)^2=-3(x+1)^2\le 0.$$
Suy ra $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=0$.

Thử lại thấy không thỏa mãn.

Xét $y=2-x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=\frac{(x-1)^2}{2} \Leftrightarrow 4+2\sqrt{-x^2+2x+3}=\frac{(x-1)^4}{4}.$$
$$\Leftrightarrow 4+2\sqrt{4-(x-1)^2}=\frac{\left[(x-1)^2\right]^2}{4}.$$ Đặt $t=\sqrt{4-(x-1)^2},(0\le t\le 2)$

Phương trình trở thành:

$$4+2t=\frac{\left(4-t^2\right)^2}{4} \Leftrightarrow t\left(t^3-8t-8\right)=0$$
$$\Leftrightarrow t(t+2)\left(t-1+\sqrt{5}\right)\left(t-1-\sqrt{5}\right)=0 \xleftrightarrow{0\le t\le 2} t=0.$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4-(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=-1 \\ x=-1, y=3 \end{array}\right..$$
Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(3;-1);(-1;3)$.

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5+16.4^{x^2-2y}=\left(5+16^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} \\ x^3+17x+10y+17=2\left(x^2+4\right)\sqrt{4y+11} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $4y+11\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương ương với:

$$\frac{5+4.4^{x^2-2y+1}}{7^{x^2-2y+1}}=\frac{5+4.4^{2\left(x^2-2y\right)-1}}{7^{2\left(x^2-2y\right)-1}}\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=5.\left(\frac{1}{7}\right)^t+4.\left(\frac{4}{7}\right)^t$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow f\left(x^2-2y+1\right)=f\left(2x^2-4y-1\right)$

$$\Leftrightarrow x^2-2y+1=2x^2-4y-1\Leftrightarrow 2y=x^2-2.$$

Thay $2y=x^2-2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^3+5x^2+17x+7=2\left(x^2+4\right)\sqrt{2x^2+7}.$$

$$\Leftrightarrow\left(x+2\right)^3+\left(x+2\right)^2+x+2=\left(\sqrt{2x^2+7}\right)^3+\left(\sqrt{2x^2+7}\right)^2+\sqrt{2x^2+7}.$$

$$\Leftrightarrow x+2=\sqrt{2x^2+7}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=-\frac{1}{2}\\x=3,y=\frac{7}{2}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình cĩ hai nghiệm`1 $\left(x;y\right)=\left(1;-\frac{1}{2}\right);\left(3;\frac{7}{2}\right)$.

Nhận xét. Nếu thấy khó phân tích được hàm số như trên thông thường đặt $\sqrt{2x^2+7}=t$ đưa về hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+7}=t\\x^3+5x^2+17x+7=\left(t^2+1\right)t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+7=t^2\\x^3+5x^2+17x+7=t^3+t\end{cases}.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^3+7x^2+17x+14=t^3+t^2+t\Leftrightarrow\left(x+2\right)^3+\left(x+2\right)^2+x+2=t^3+t^2+t.$$

Ta có kết quả như lời giải trên.

Bài 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{3}{\sqrt{x+1}}-\frac{2}{x+y}=1\\\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{x+y}=2\end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $x > -1, y > 1, x + y \neq 0$.

Đặt $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{y-1}, (u, v > 0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{u} - \dfrac{2}{u^2+v^2} = 1 \\ \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{u^2+v^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{u} + \dfrac{2}{v} = 5 \\ \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{u^2+v^2} = 2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{2u}{5u-3} \\ \dfrac{1}{\dfrac{2u}{5u-3}} + \dfrac{1}{u^2 + \left(\dfrac{2u}{5u-3}\right)^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{2u}{5u-3} \\ 5u^2 - 12u + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{u,v>0} \begin{cases} u = \dfrac{6+\sqrt{21}}{5} \\ v = \dfrac{1+\sqrt{21}}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \dfrac{6+\sqrt{21}}{5} \\ \sqrt{y-1} = \dfrac{1+\sqrt{21}}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{32+12\sqrt{21}}{25} \\ y = \dfrac{61+\sqrt{21}}{50} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{32+12\sqrt{21}}{25}; \dfrac{61+\sqrt{21}}{50}\right)$.

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y+2)\sqrt{x+1} = \sqrt{y} \\ \sqrt{x+1}\left(4-\sqrt{1-x}\right) = 3y - 2 + 2\sqrt{1-x} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-1 \le x \le 1, y \ge 0$.

Nhận thấy $x = -1$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x \neq -1$ khi đó pương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(x-y+2)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = \sqrt{y} - \sqrt{x+1}.$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)\sqrt{x+1} = \frac{y-x-1}{\sqrt{y}+\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (x+1-y)\left(\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{x+1}}\right) = 0 \Leftrightarrow y = x+1.$$

Thay $y = x + 1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x+1}\left(4-\sqrt{1-x}\right) = 3x + 1 + 2\sqrt{1-x}.$$

Một phương trình vô tỷ có chứa hai căn thức ta thường lựa chọn phép đặt hai ẩn phụ đưa về tích.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{1-x} \end{cases}, (u, v \ge 0) \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ u^2 - v^2 = 2x \end{cases}$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ u(4-v) = \dfrac{3}{2}\left(u^2 - v^2\right) + 1 + 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ u(4-v) = \dfrac{3}{2}\left(2u^2 - 2\right) + 1 + 2v \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ v(u+2) = -3u^2 + 4u + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 2 \\ v = \dfrac{-3u^2 + 4u + 2}{u+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + \left(\dfrac{-3u^2 + 4u + 2}{u+2}\right)^2 = 2 \\ v = \dfrac{-3u^2 + 4u + 2}{u+2} \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{u,v \ge 0} \left[\begin{array}{l} u = 1, v = 1 \\ u = \sqrt{\dfrac{2}{5}}, v = 2\sqrt{\dfrac{2}{5}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{1-x} = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+1} = \sqrt{\dfrac{2}{5}} \\ \sqrt{1-x} = 2\sqrt{\dfrac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = -\dfrac{3}{5}, y = \dfrac{2}{5} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (0;1); \left(-\dfrac{3}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$.

<u>Nhận xét.</u> Phương trình $\sqrt{x+1}\left(4-\sqrt{1-x}\right) = 3x + 1 + 2\sqrt{1-x}$ ta có thể biến đổi đưa về tích như sau: $\left(2\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} - 2\right) = 0$.

Bài 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 12y^2 + \dfrac{8}{(x-2y)^2} = 10 \\ 2x^2 - 16y^2 + 4xy = -x + 2y - 2 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x - 2y \ne 0$.

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 2\left(x-2y\right)^2+\left(x+2y\right)^2+\dfrac{8}{\left(x-2y\right)^2}=10 \\ 3\left(x-2y\right)\left(x+2y\right)-\left(x-2y\right)^2=-\left(x-2y\right)-2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x-2y-\dfrac{2}{x-2y}\right)^2+\left(x+2y\right)^2+2 \\ 3\left(x+2y\right)-\left(x-2y-\dfrac{2}{x-2y}\right)=-1 \end{cases}.$$

Đặt $u=x-2y-\dfrac{2}{x-2y}, v=x+2y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2u^2+v^2=2 \\ 3v-u=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-\dfrac{17}{19}, v=-\dfrac{12}{19} \\ u=1, v=0 \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2y-\dfrac{2}{x-2y}=-\dfrac{17}{19} \\ x+2y=-\dfrac{12}{19} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y-\dfrac{2}{x-2y}=1 \\ x+2y=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=-\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{1}{4} \\ x=-\dfrac{41+3\sqrt{353}}{76}, y=\dfrac{3\sqrt{353}-7}{152} \\ x=\dfrac{-41+3\sqrt{353}}{76}, y=-\dfrac{3\sqrt{353}+7}{152} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là

$$\left(x;y\right)=\left(1;-\dfrac{1}{2}\right);\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right);\left(-\dfrac{41+3\sqrt{353}}{76};\dfrac{3\sqrt{353}-7}{152}\right)$$
$$;\left(\dfrac{-41+3\sqrt{353}}{76};-\dfrac{3\sqrt{353}+7}{152}\right).$$

Bài 35. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+4=2\left(x\sqrt{xy}+y\sqrt{y}+\sqrt{x}\right) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3-\sqrt{xy} \end{cases}.$

Lời giải

Điều kiện: $x, y \ge 0$.

$$\begin{cases} u^4+v^4+4=2\left(u^3v+v^3+u\right) \\ u+v+uv=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3-u}{u+1} \\ u^4+\left(\dfrac{3-u}{u+1}\right)^4+4=2\left(u^3.\dfrac{3-u}{u+1}+\left(\dfrac{3-u}{u+1}\right)^3+u\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{3-u}{u+1} \\ \left(u-1\right)^2\left(u^6+8u^5+21u^4+24u^3+11u^2-32u+31\right)=0 \end{cases}.$$

$$\xleftrightarrow{u,v\ge 0} \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

Bài 36. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+5y^2-4xy-6x-6y+9=0 \\ xy+2x=\left(y+3\right)\sqrt{\dfrac{\left(x-1\right)^3}{y+2}} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\dfrac{\left(x-1\right)^3}{y+2}\ge 0, y\ne -2$.

Khi nhìn vào phương trình thứ hai của hệ mang dáng dấp hàm số nếu ta viết được dưới dạng: $\dfrac{\sqrt{\left(y+2\right)^3}}{y+3}=\dfrac{\sqrt{\left(x-1\right)^3}}{x}$. Tuy nhiên với điều kiện của hệ trên chưa cho phép ta có biến đổi đó. Do vậy cần tìm điều kiện của hai ẩn x,y từ phương trình đầu của hệ.

Từ phương trình đầu của hệ ta có:

$$\begin{cases} 2x^2-2x\left(2y+3\right)+5y^2-6y+9=0 \\ 5y^2-2y\left(2x+3\right)+2x^2-6x+9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta'_x=\left(2y+3\right)^2-2\left(5y^2-6y+9\right)\ge 0 \\ \Delta'_y=\left(2x+3\right)^2-5\left(2x^2-6x+9\right)\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y^2 - 24y + 9 \le 0 \\ 6x^2 - 42x + 36 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4-\sqrt{10}}{2} \le y \le \dfrac{4+\sqrt{10}}{2} \\ 1 \le x \le 6 \end{cases}.$$

Do đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$x(y+2) = (y+3)\sqrt{\frac{(x-1)^3}{y+2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(y+2)^3}}{y+3} = \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x} \Leftrightarrow y+3 = x \Leftrightarrow y = x-3.$$

Thay $y = x - 3$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$2x^2 + 5(x-3)^2 - 4x(x-3) - 6x - 6(x-3) + 9 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 30x + 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, y = 1 \\ x = 6, y = 3 \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (4;1); (6;3)$.

Bài 37. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) = 3\sqrt{y^2+9} + 3y \\ (3x-1)\sqrt{x^2y + xy - 5} - 4x^3 + 3x^3y - 7x = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right) = \frac{3}{y}\left(\sqrt{\frac{9}{y^2}+1}+1\right) \Leftrightarrow x = \frac{3}{y} \Leftrightarrow y = \frac{3}{x}.$$

Thay $y = \dfrac{3}{x}$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$(3x-1)\sqrt{3x-2} - 4x^3 + 9x^2 - 7x = 0.$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left(\sqrt{3x-2} - x\right) = 4x^3 - 12x^2 + 8x.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 3x^2 + 2\right)\left(x + \frac{3x-1}{\sqrt{3x-2}+x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 3 \\ x = 2, y = \dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (1;3); \left(2;\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-y=(2x+1)(y-1) \\ \sqrt{3x-8}-\sqrt{y}=\dfrac{5}{x+y-12} \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x-y+1)^2=0 \\ \sqrt{3x-8}-\sqrt{y}=\dfrac{5}{x+y-12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ \sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{2x-11} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=4 \\ x=8, y=9 \end{array}\right..$$

<u>Nhận xét.</u> Để giải phương trình $\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{2x-11}$ ta thực hiện như sau:

$$\frac{2x-9}{\sqrt{3x-8}+\sqrt{x+1}}=\frac{5}{2x-11} \Leftrightarrow \sqrt{3x-8}+\sqrt{x+1}=\frac{(2x-9)(2x-11)}{5}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-8}-\frac{3x-4}{5}+\sqrt{x+1}-\frac{x+7}{5}=\frac{(2x-9)(2x-11)}{5}-\frac{4x+3}{5}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-8-\dfrac{9x^2-24x+16}{25}}{\sqrt{3x-8}+\dfrac{3x-4}{5}}+\frac{x+1-\dfrac{x^2+14x+49}{25}}{\sqrt{x+1}+\dfrac{x+7}{5}}=\frac{4x^2-11x+96}{5}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-11x+24\right)\left(\frac{4}{5}+\frac{9}{25}.\frac{1}{\sqrt{3x-8}+\dfrac{3x-4}{5}}+\frac{1}{25}.\frac{1}{\sqrt{x+1}+\dfrac{x+7}{5}}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2-11x+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=8 \end{array}\right..$$

Bài 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+xy^2-12x-y=4x^2+6y^2+7 \\ y^3+x^2y-x+2y=1-2xy \end{cases}$.

Lời giải

Nhẩm được nghiệm đẹp $x=-1, y=0$ nên ta đặt ẩn phụ $x=u-1, v=y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u\left(u^2+v^2\right)=u+v+7\left(u^2+v^2\right) \\ v\left(u^2+v^2+1\right)=u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-7)\left(u^2+v^2\right)=u+v \\ v\left(u^2+v^2\right)=u-v \end{cases}.$$

Trường hợp $u^2+v^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$.

Ta xét $u^2+v^2>0$.

Hệ phương trình tương đương với: $\begin{cases} u-7=\dfrac{u+v}{u^2+v^2} \quad (1) \\ v=\dfrac{u-v}{u^2+v^2} \quad (2) \end{cases}$.

Lấy $(1)+i.(2)$ theo vế ta được: $u+vi-7=\dfrac{u-vi+v+ui}{u^2+v^2}$.

$$u+vi-7=\frac{u-vi+v+ui}{u^2+v^2}=-$$

Đặt $z=u+vi$ phương trình trở thành: $z-7=\dfrac{1}{z}+\dfrac{i}{z} \Leftrightarrow z^2-7z-i-1=0$.

Phương trình số phức cuối thực hiện đơn giản.

Hệ phương trình có hai nghiệm ba nghiệm là

$$(x;y)=(-1;0);\left(\frac{10-\sqrt{106+10\sqrt{113}}}{4};\frac{53-5\sqrt{113}}{8}.\sqrt{\frac{53+5\sqrt{113}}{2}}\right)$$

$$\left(\frac{10+\sqrt{106+10\sqrt{113}}}{4};-\frac{53+5\sqrt{113}}{8}.\sqrt{\frac{53+5\sqrt{113}}{2}}\right).$$

Nhận xét. Như vậy hệ phương trình cần thông qua phép đặt ẩn phụ ta mới đưa được về hệ có dấu hiệu sử dụng số phức. Xuất phát từ các hệ phương trình quen thuộc ta đổi ẩn đi có những hệ phương trình hay và khó hơn rất nhiều.

Với hệ phương trình giải bằng số phức ban đầu $\begin{cases} (6-x)(x^2+y^2)=6x+8y \\ (3-y)(x^2+y^2)=8x-6y \end{cases}$.

Thay x bởi $x+1$ và thay y bởi $y-1$ đưa về hệ khó hơn như sau:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+(y^2-2y-2)x+18y=3x^2+5y^2+12 \\ y^3+(x^2+2x+4)y=4x^2+6y^2-6 \end{cases}$.

Đáp số: $(x;y)=(-1;1);(1;2);(3;3)$.

Bài 40. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{1}{y^2} = 32\left(y^4 - x^4\right) \\ 3x - y = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases}, \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 9x^2 = \dfrac{x^4}{y^2} + 32x^2\left(y^4 - x^4\right) \\ 3x = y + 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x^2 = \dfrac{x^4}{y^2} + 32x^4\left(y^4 - x^4\right) \\ 9x^2 = y^2 + 4\left(x^4 - y^4\right)^2 + 4\left(x^4 - y^4\right)y \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2} + 32x^4\left(y^4 - x^4\right) = y^2 + 4\left(x^4 - y^4\right)^2 + 4\left(x^4 - y^4\right)y \\ 3x - y = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - y^4 + 32x^4y^2\left(y^4 - x^4\right) - 4y^2\left(x^4 - y^4\right)^2 - 4y^3\left(x^4 - y^4\right) = 0 \\ 3x - y = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^4 - y^4\right)\left(1 - 32x^4y^2 - 4y^2\left(x^4 - y^4\right) - 4y^3\right) = 0 \\ 3x - y = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^4 - y^4\right)\left(\left(2y^3 - 1\right)^2 - 36x^4y^2\right) = 0 \\ 3x - y = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^4 - y^4\right)\left(2y^3 - 1 - 6x^2y\right)\left(2y^3 - 1 + 6x^2y\right) = 0 \\ 3x - y = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases}.$$

<u>TH1:</u> Nếu $x^4 - y^4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^4 - y^4 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (loại).

<u>TH2:</u> Nếu $2y^3 - 1 + 6x^2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 + 6x^2y = 0 \\ 3x - y = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 - 6x^2y = 0 \\ 3x - y\left(2y^3 + 6x^2y\right) = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 + 6x^2y = 0 \\ 3x - 6x^2y^2 = 2x^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 + 6x^2y = 0 \\ x\left(3 - 6xy^2 - 2x^3\right) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{x \neq 0} \begin{cases} 2y^3 + 6x^2y = 1 \\ 2x^3 + 6xy^2 = 3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x+y\right)^3 = 4 \\ 2\left(x-y\right)^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[3]{2} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2}+1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{2} \end{cases}.$$

TH3: Nếu $2y^3 - 1 - 6x^2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 - 6x^2y = 0 \\ 3x - y = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 - 6x^2y = 0 \\ 3x - y\left(2y^3 - 6x^2y\right) = 2\left(x^4 - y^4\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 - 6x^2y = 0 \\ 3x + 6x^2y^2 = 2x^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 1 - 6x^2y = 0 \\ x\left(3 + 6xy^2 - 2x^3\right) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{x \neq 0} \begin{cases} 2y^3 - 6x^2y = 1 \\ 2x^3 - 6xy^2 = 3 \end{cases}.$$

Để giải hệ phương trình này ta sử dụng kỹ thuật phức hóa.

Ta có: $x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)i = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Đặt $z = x + yi \Rightarrow z^3 = \dfrac{3-i}{2}$.

Ta có: $3 - i = \sqrt{10}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}} - i\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{10}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

với $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{10}}, \sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$.

Suy ra $z^3 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{\dfrac{5}{2}}\left(\cos\dfrac{\varphi + k2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\varphi + k2\pi}{3}\right), k = 0,1,2$

Do đó $x = \sqrt[6]{\dfrac{5}{2}}\cos\dfrac{\varphi + k2\pi}{3}, y = \sqrt[6]{\dfrac{5}{2}}\sin\dfrac{\varphi + k2\pi}{3}, k = 0,1,2$.

Vậy hệ phương trình có bốn nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{\sqrt[3]{2}+1}{2};\frac{\sqrt[3]{2}-1}{2}\right);\left(\sqrt[6]{\frac{5}{2}}\cos\frac{\varphi+k2\pi}{3};\sin\frac{\varphi+k2\pi}{3}\sqrt[6]{\frac{5}{2}},k=0,1,2\right).$$

với $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}},\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{10}},\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay và khó đòi hỏi học sinh kỹ năng biến đổi tốt. Nếu đề bài chỉ yêu cầu tìm nghiệm dương của hệ phương trình thì kết quả sẽ đẹp mắt hơn. Tuy nhiên đề bài tôi đưa ra muốn nhấn mạnh các em đến ứng dụng của số phức trong giải hệ phương trình.

Bài 41. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x+2y+2\sqrt{4x+y}=1\\ \sqrt{46-16y\left(x+y\right)-6y}+4\sqrt{4x+y}=8-4y\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}4x+y\ge 0\\ 46-16y\left(x+y\right)-6y\ge 0\end{cases}$.

Từ phương trình đầu của hệ ta được: $2\sqrt{4x+y}=1-x-2y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{46-16y\left(x+y\right)-6y}+2\left(1-x-2y\right)=8-4y.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{46-16y\left(x+y\right)-6y}=6+2x.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6\ge 0\\ 46-16y\left(x+y\right)-6y=4x^2+24x+36\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -3\\ 4x^2+16xy+16y^2+24x+6y-10=0\end{cases}.$$

Kết hợp với phương trình đầu của hệ ta được:

$$\begin{cases}x+2y+2\sqrt{4x+y}=1\\ 4x^2+16xy+16y^2+24x+6y-10=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y+2\sqrt{4x+y}=1\\ 4\left(x+2y\right)^2+6\left(4x+y\right)-10=0\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u = x + 2y \\ v = \sqrt{4x + y} \end{cases}, (v \ge 0)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u + 2v = 1 \\ 4u^2 + 6v^2 - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 - 2v \\ 4(1 - 2v)^2 + 6v^2 - 10 = 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 - 2v \\ 11v^2 - 8v - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = \dfrac{17}{11} \\ v = -\dfrac{3}{11} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \end{cases} \text{(vì n } v \ge 0\text{).}$$

Vì vậy $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ \sqrt{4x + y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = -\dfrac{5}{7} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{3}{7}; -\dfrac{5}{7}\right)$.

Bài 42. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + \left(y + \dfrac{1}{3}\right)^2 = \sqrt[3]{x^3 + x + 3(y+1)} \\ \sqrt{x - y + 2} + 1 = 9(x-y)^2 + \sqrt{7x - 7y} \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải

Điều kiện: $x - y \ge 0$.

Nhận xét. Từ phương trình thứ hai của hệ là phương trình vô tỷ đối với $x - y$ nên thực hiện tìm $x - y$ từ phương trình thứ hai của hệ

Đặt $t = x - y, (t \ge 0)$ phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$\sqrt{t+2} + 1 = 9t^2 + \sqrt{7t} \Leftrightarrow \sqrt{t+2} - \sqrt{7t} + 1 - 9t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1-3t)}{\sqrt{t+2} + \sqrt{7t}} + (1-3t)(1+3t) = 0 \Leftrightarrow (1-3t)\left(\frac{2}{\sqrt{t+2} + \sqrt{7t}} + 1 + 3t\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 3t = 1 \Leftrightarrow x - y = \frac{1}{3} \text{(do } \frac{2}{\sqrt{t+2} + \sqrt{7t}} + 1 + 3t > 0, \forall t \ge 0\text{).}$$

Thay $y = x - \dfrac{1}{3}$ vào phương trình trình thứ nhất của hệ ta được:

$$3x^2=\sqrt[3]{x^3+4x+2}\Leftrightarrow\left(x+1\right)^3+\left(x+1\right)=x^3+4x+2+\sqrt[3]{x^3+4x+2}\ (1).$$

Xét hàm số $f(a)=a^3+a$ ta có $f'(a)=3a^2+1>0,\forall a\in\mathbb{R}$.

Vì vậy f(a) là hàm đồng biến. Do đó

$(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f(\sqrt[3]{x^3+4x+2})\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{x^3+4x+2}$.

$$\Leftrightarrow 3x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{6},y=-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6},y=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6};-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right);\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6};\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right).$$

Bài 43. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(x+y\right)\sqrt{7xy+2}=x^2+\dfrac{161}{6}y^2-\dfrac{26}{3}xy-\dfrac{3}{2}\\ x\sqrt{7xy+2}=x^2+25y^2-10xy-1\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $7xy+2\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}6\left(x+y\right)\sqrt{7xy+2}=6x^2+161y^2-52xy-9\\ 6x\sqrt{7xy+2}=6\left(x^2+25y^2-10xy-1\right)\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\sqrt{7xy+2}=x^2+25y^2-10xy-1\\ 6y\sqrt{7xy+2}=11y^2+8xy-3\end{cases}.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left(x+6y\right)\sqrt{7xy+2}=x^2+36y^2-2xy-4.$$

$$\Leftrightarrow\left(x+6y\right)^2-\left(x+6y\right)\sqrt{7xy+2}-2\left(7xy+2\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(x+6y-2\sqrt{7xy+2}\right)\left(x+6y+\sqrt{7xy+2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+6y=2\sqrt{7xy+2}\\ x+6y=-\sqrt{7xy+2}\end{array}\right..$$

TH1: Nếu $\sqrt{7xy+2}=\dfrac{x+6y}{2}\Rightarrow x+6y\ge 0$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x.\dfrac{x+6y}{2}=x^2+25y^2-10xy-1 \\ 6y.\dfrac{x+6y}{2}=11y^2+8xy-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+6xy=2x^2+50y^2-20xy-2 \\ 3xy+18y^2=11y^2+8xy-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+50y^2-26xy=2 \\ 7y^2-5xy=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -3\left(x^2+50y^2-26xy\right)=2\left(7y^2-5xy\right) \\ 7y^2-5xy=-3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3x^2+164y^2-88xy=0 \\ 7y^2-5xy=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left(x-2y\right)\left(3x-82y\right)=0 \\ 7y^2-5xy=-3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2y \\ 3x=82y \end{array}\right. \\ 7y^2-5xy=-3 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2,y=-1 \\ x=2,y=1 \\ x=-\dfrac{82}{\sqrt{389}},y=-\dfrac{3}{\sqrt{389}} \\ x=\dfrac{82}{\sqrt{389}},y=\dfrac{3}{\sqrt{389}} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $\left(x;y\right)=\left(2;1\right);\left(\dfrac{82}{\sqrt{389}};\dfrac{3}{\sqrt{389}}\right)$.

TH2: Nếu $\sqrt{7xy+2}=-\left(x+6y\right)\Rightarrow x+6y\le 0$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} -x\left(x+6y\right)=x^2+25y^2-10xy-1 \\ -6y\left(x+6y\right)=11y^2+8xy-3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2+25y^2-4xy=1 \\ 47y^2+14xy=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3\left(2x^2+25y^2-4xy\right)=47y^2+14xy \\ 47y^2+14xy=3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 6x^2+28y^2-26xy=0 \\ 47y^2+14xy=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left(x-2y\right)\left(6x-14y\right)=0 \\ 47y^2+14xy=3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2y\\3x=7y\end{array}\right.\\47y^2+14xy=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{2}{5},y=-\dfrac{1}{5}\\x=\dfrac{2}{5},y=\dfrac{1}{5}\\x=-\dfrac{7}{\sqrt{239}},y=-\dfrac{3}{\sqrt{239}}\\x=\dfrac{7}{\sqrt{239}},y=\dfrac{3}{\sqrt{239}}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm

$$(x;y)=\left(-\frac{2}{5};-\frac{1}{5}\right);\left(-\frac{7}{\sqrt{239}};-\frac{3}{\sqrt{239}}\right).$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là:

$$(x;y)=(2;1);\left(-\frac{2}{5};-\frac{1}{5}\right);\left(-\frac{7}{\sqrt{239}};-\frac{3}{\sqrt{239}}\right);\left(\frac{82}{\sqrt{389}};\frac{3}{\sqrt{389}}\right).$$

Cách 2: Viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases}6(x+y)\sqrt{7xy+2}=6x^2+161y^2-52xy-9\ (1)\\6x\sqrt{7xy+2}=6\left(x^2+25y^2-10xy-1\right)\ (2)\end{cases}.$$

Lấy $2.(1)-3.(2)$ theo vế ta được:

$$3(x-2y)\sqrt{7xy+2}=(x-2y)(3x-32y)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y\\3\sqrt{7xy+2}=3x-32y\end{array}\right..$$

Xét trường hợp và ta có kết quả như lời giải 1.

Sau đây là một số bài toán tương tự dành cho bạn đọc rèn luyện

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(6-6x-y)\sqrt{xy-5}=18x^2-21xy+24x-11y+5y^2-2 & (1)\\(3x+y)\sqrt{xy-5}=-2y^2+2y+6xy+2 & (2)\end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$$

Hướng dẫn giải bài toán 1:

Lấy $(1)+4.(2)$ theo vế ta được:

$$3(2x+y+2)\sqrt{xy-5}=3(2x+y+2)(3x-y+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+y+2=0\\\sqrt{xy-5}=3x-y+1\end{array}\right..$$

TH1: Nếu $2x+y+2=0\Rightarrow y=-2x-2$

$\Rightarrow xy-5=x(-2x-2)-5=-2x^2-2x-5<0$ hệ phương trình vô nghiệm.

TH2: Nếu $\sqrt{xy-5}=3x-y+1$ thay vào (2) ta được:

$$\left(3x+y\right)\left(3x-y+1\right)=-2y^2+2y+6xy+2.$$

$$\Leftrightarrow\left(3x-y-1\right)\left(3x-y+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=3x-1\\y=3x+2\end{array}\right..$$

\+ Với $y=3x-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\left(6x-1\right)\sqrt{x\left(3x-1\right)-5}=-2\left(3x-1\right)^2+2\left(3x-1\right)+6x\left(3x-1\right)+2.$$

$$\Leftrightarrow\left(6x-1\right)\sqrt{3x^2-x-5}=2\left(6x-1\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(6x-1\right)\left(\sqrt{3x^2-x-5}-2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{6}\\\sqrt{3x^2-x-5}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{6}\\x=\dfrac{1-\sqrt{109}}{6}\\x=\dfrac{1+\sqrt{109}}{6}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{6},y=-\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{1-\sqrt{109}}{6},y=-\dfrac{1+\sqrt{109}}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{109}}{6},y=\dfrac{-1+\sqrt{109}}{2}\end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{1-\sqrt{109}}{6};-\frac{1+\sqrt{109}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{109}}{6};\frac{-1+\sqrt{109}}{2}\right).$$

\+ Với $y=3x+2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$\left(6x+2\right)\sqrt{x\left(3x+2\right)-5}=-2\left(3x+2\right)^2+2\left(3x+2\right)+6x\left(3x+2\right)+2.$$

$$\Leftrightarrow\left(3x+1\right)\sqrt{3x^2+2x-5}=-2\left(3x+1\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(3x+1\right)\left(\sqrt{3x^2+2x-5}+2\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3},y=1.$$

Đối chiếu với điều kiện không thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là

$$\left(x;y\right)=\left(\frac{1-\sqrt{109}}{6};-\frac{1+\sqrt{109}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{109}}{6};\frac{-1+\sqrt{109}}{2}\right).$$

Bài 44. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x^2-y^2+\ln\left(1-x^2\right)-3\ln\left(1-y^2\right)=0\\\left(x+\sqrt{1+y^2}\right)\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)=1\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$

Lời giải

Điều kiện : $\begin{cases}1-x^2>0\\1-y^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\-1<y<1\end{cases}$.

<u>Nhận xét.</u> Nhìn vào hai phương trình việc tìm ra mối ràng buộc giữa hai biến từ phương trình thứ hai của hệ khả thi.

Đặt $\begin{cases}u=x+\sqrt{1+x^2}\\v=y+\sqrt{1+y^2}\end{cases},(u,v>0)\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u^2-1}{2u}\\\sqrt{x^2+1}=u-\dfrac{u^2-1}{2u}=\dfrac{u^2+1}{2u}\\y=\dfrac{v^2-1}{2v}\\\sqrt{y^2+1}=\dfrac{v^2+1}{2v}\end{cases}$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành :

$$\left(\frac{u^2+1}{2u}+\frac{v^2-1}{2v}\right)\left(\frac{v^2+1}{2v}+\frac{u^2-1}{2u}\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}uv=1\\uv(u+v)^2+(u-v)^2=0\end{array}\right.$$.

Nhưng do $uv(u+v)^2+(u-v)^2>0,\forall u,v>0$ neân $uv=1$.

Vậy ta có $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{1+y^2}$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$ ta có

$$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\frac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+1}}\geq 0.$$

Do đó f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow(1)\Leftrightarrow f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$.

Thay $y=-x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$3x^2-x^2+\ln\left(1-x^2\right)-3\ln\left(1-x^2\right)=0\Leftrightarrow x^2-\ln\left(1-x^2\right)=0\ (2).$$

Nhận thấy x là nghiệm của phương trình thì $-x$ cũng là nghiệm của phương trình. Vậy ta chỉ cần xét với $x\geq 0$.

Xét hàm số $g(x)=x^2-\ln\left(1-x^2\right)$ với $x\in[0;1)$ ta có.

$$g'(x)=2x+\frac{2x}{1-x^2}\geq 0,\forall x\in[0;1).$$

Do đó $g(x)$ đồng biến và $g(0)=0$ nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất:

$$x=0 \text{ trên } \left[0;1\right).$$

Do đó trên cả khoảng $\left(-1;1\right)$ phương trình chỉ có nghiệm duy nhất:

$$x=0 \Rightarrow y=0.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$.

Bài 45. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-4x-5=4y\left(y-1-2\sqrt{x-y}\right) \\ x^2-4x\left(y+1\right)+4y^2+4y-5=-\dfrac{4y}{\sqrt[3]{y-\sqrt{x-y}}} \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge y \\ y-\sqrt{x-y}\ne 0 \end{cases}.$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2-4x-5=4y\left(y-1-2\sqrt{x-y}\right) \\ x^2-4x-5+\left(4y^2+4y-4xy\right)=-\dfrac{4y}{\sqrt[3]{y-\sqrt{x-y}}} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4\left(y-\sqrt{x-y}\right)^2=5 \\ 4y\left(y-1-2\sqrt{x-y}\right)+\left(4y^2+4y-4xy\right)=-\dfrac{4y}{\sqrt[3]{y-\sqrt{x-y}}} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4\left(y-\sqrt{x-y}\right)^2=5 \\ 4y\left(y-1-2\sqrt{x-y}+y+1-x\right)=-\dfrac{4y}{\sqrt[3]{y-\sqrt{x-y}}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4\left(y-\sqrt{x-y}\right)^2=5 \\ \left[\begin{array}{l} 4y=0 \\ \sqrt[3]{y-\sqrt{x-y}}\left(x-2y+2\sqrt{x-y}\right)=1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

+ **TH1:** Nếu $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-4\left(y-\sqrt{x-y}\right)^2=5 \\ y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$ chỉ nhận nghiệm $(x;y)=(5;0)$.

+ TH2: Nếu $\sqrt[3]{y-\sqrt{x-y}}\left(x-2y+2\sqrt{x-y}\right)=1$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-4\left(y-\sqrt{x-y}\right)^2=5 \\ \left(y-\sqrt{x-y}\right)\left(x-2y+2\sqrt{x-y}\right)^3=1 \end{cases}$

Đặt $u=x, v=2y-2\sqrt{x-y}$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u^2-v^2=5 \\ v(u-v)^3=2 \end{cases}$ (1).

Suy ra $v(u-v)^3=\dfrac{2}{25}\left(u^2-v^2\right)^2 \Leftrightarrow (u-v)^2\left[25v(u-v)-2(u+v)^2\right]=0$.

$\Leftrightarrow 25v(u-v)-2(u+v)^2=0$ (do $u\neq v$). $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=9v \\ 2u=3v \end{array}\right.$.

+ Nếu $u=9v$ thay vào (1) ta được: $80v^2=5 \Leftrightarrow v=\pm\dfrac{1}{4} \Rightarrow u=\pm\dfrac{9}{4}$.

+ Nếu $2u=3v$ thay vào (1) ta được: $u^2=9 \Leftrightarrow u=\pm 3 \Rightarrow v=\pm 2$.

Với $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2y-2\sqrt{x-y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y-1=\sqrt{3-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} u=-3 \\ v=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 2y-2\sqrt{x-y}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y+1=\sqrt{-3-y} \end{cases}$ (vô nghiệm).

Với $\begin{cases} u=\dfrac{9}{4} \\ v=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{4} \\ 2y-2\sqrt{x-y}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{4} \\ 2y-\dfrac{1}{4}=2\sqrt{\dfrac{9}{4}-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{4} \\ y=\dfrac{2\sqrt{83}-3}{8} \end{cases}$.

Với $\begin{cases} u=-\dfrac{9}{4} \\ v=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{9}{4} \\ 2y-2\sqrt{x-y}=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{9}{4} \\ 2y+\dfrac{1}{4}=2\sqrt{-\dfrac{9}{4}-y} \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm là:

$$\left(x;y\right)=\left(5;0\right);\left(3;2\right);\left(\frac{9}{4};\frac{2\sqrt{83}-3}{8}\right).$$

Bài 46. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+2xy-2x+y-9=0 \\ 2x+8+\sqrt{2x+1}=4y^2-3y+\sqrt{2y-1} \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{2},y\ge \dfrac{1}{2}$.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2xy-2x+y-9=0 \\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{2y-1}+2x+8-4y^2+3y=0 \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{2y-1}+x^2-3y^2+2xy+4y-1=0.$$

Nhận thấy $x=-\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\ne -\dfrac{1}{2},y\ne \dfrac{1}{2}$ thực hiện nhân liên hợp đưa phương trình về dạng tương đương

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x-y+1\right)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}+\left(x-y+1\right)\left(x+3y-1\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y+1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}+x+3y-1\right)=0 \text{ (1)}.$$

Do $x\ge -\dfrac{1}{2},y\ge \dfrac{1}{2}$ nên:

$$\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}>0; x+3y-1\ge 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y-1}}+x+3y-1>0.$$

Do đó $(1)\Leftrightarrow x-y+1=0\Leftrightarrow y=x+1$.

Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^2+(x+1)^2+2x(x+1)-2x+(x+1)-9=0.$$

$\Leftrightarrow 4x^2+3x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{7}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=-\dfrac{7}{4}, y=-\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$ (chỉ nghiệm $(1;2)$ thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;2)$.

Nhận xét. Cơ sở của lời giải bài toán dựa vào kỹ thuật hệ số bất định như sau(Xem thêm Cuốn "Những điều cần biết LTĐH Kỹ thuật giải nhanh Hệ phương trình" của cùng tác giả).

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} A=x^2+y^2+2xy-2x+y-9=0 \ (1) \\ B=\sqrt{2x+1}-\sqrt{2y-1}+2x+8-4y^2+3y=0 \ (2) \end{cases}.$$

Nhận xét. Dự đoán $\sqrt{2x+1}=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow y=x+1$ khi đó

$$\begin{cases} A=x^2+(x+1)^2+2x(x+1)-2x+(x+1)-9=4x^2+3x-7 \\ B=2x+8-4(x+1)^2+3(x+1)=-4x^2-3x+7 \end{cases}.$$

Hệ số bất đỉnh $k=-\dfrac{A}{B}=1$ tức là ta thực hiện phép toán lấy $(1)+(2)$ theo vế như lời giải trên.

Bài 47. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+3x^2y-2(y^4+y^2)\sqrt{2y-1}=0 \\ 2x^2+2y^2+4x-y-\sqrt{2-x}-2\sqrt{3x+6}=0 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2, y \ge \dfrac{1}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại dưới dạng:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2=2(y+1)\sqrt{2y-1}.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2=\left(\sqrt{2y-1}\right)^3+3\sqrt{2y-1} \ (1).$$

Có dạng hàm đặc trưng tuy nhiên để chỉ xử lý được khi:

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2+6\frac{x}{y}=3\frac{x}{y}.\left(\frac{x}{y}+2\right)\geq 0.$$

Vì vậy ta cần sử dụng phương trình thứ hai của hệ để tìm điều kiện của $\frac{x}{y}$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$$2x^2+2y^2+4x-y=\sqrt{2-x}+2\sqrt{3x+6}=\sqrt{1(2-x)}+\frac{2}{3}\sqrt{9(3x+6)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}&\sqrt{1(2-x)}\leq\frac{1+2-x}{2}=\frac{3-x}{2}\\&\sqrt{9(3x+6)}\leq\frac{9+3x+6}{2}=\frac{3x+15}{2}\end{aligned}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Suy ra $2x^2+2y^2+4x-y\leq\frac{3-x}{2}+\frac{3x+15}{3}=\frac{x+13}{2}$.

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+7x-2y-13\leq 0$.

$\Leftrightarrow 4y^2-2y-2\leq -4x^2-7x+11$.

$\Leftrightarrow 2(y-1)(2y+1)\leq -(x-1)(4x+11)$ (2).

\+ Nếu $y>1\Rightarrow(2)\Rightarrow x<1$. Mặt khác từ (1) ta có

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2=\left(\sqrt{2y-1}\right)^3+3\sqrt{2y-1}>1^3+3\sqrt{1}=4.$$

$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}+2\right)^2>0\Leftrightarrow\frac{x}{y}>1\Leftrightarrow x>y$ (vô lý).

Vậy $y\leq 1\Rightarrow\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}+2\right)^2\leq 0\Rightarrow x\leq y\leq 1$.

Khi đó ta có $2x^2+2y^2+4x-y-\sqrt{2-x}-2\sqrt{3x+6}=0$.

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+2x-\sqrt{3x+6}\right)+\left(2y^2-y-1\right)+\left(1-\sqrt{2-x}\right)=0$.

$$\Leftrightarrow\frac{2(x-1)(x+2)\left(x^2+3x+3\right)}{x^2+2x+\sqrt{3x+6}}+(y-1)(2y+1)+\frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}=0.$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (thử lại thấy thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$

Nhận xét. Đây là một bài toán hay và khó một phương trình của hệ có dạng hàm đặc trưng đánh lừa được rất nhiều học sinh khi tập trung khai thác phương trình này. Điểm nhấn của bài toán dựa trên đánh giá thông qua các bất đẳng thức cơ bản.

Bài 48. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x+y}+x+3y=6+(x+y-4)\sqrt{y} \\ \sqrt{x-2y}-\sqrt{x+1}=\dfrac{5}{x-y-7} \end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2y\ge 0, x-y-7\ne 0$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$(1-y)\left(\sqrt{x+y}-2\right)+(x+y-4)\left(1-\sqrt{y}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-y)(x+y-4)}{\sqrt{x+y}+2}+\frac{(x+y-4)(1-y)}{1+\sqrt{y}}=0.$$

$$\Leftrightarrow (1-y)(x+y-4)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{y}}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ x+y-4=0 \end{array}\right..$$

+ **<u>TH1:</u>** Nếu $y=1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\frac{5}{x-8} \Leftrightarrow \frac{-3}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}}=\frac{5}{x-8}.$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)=-3(x-8) \Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\right)+3x-24=0.$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x-2}-1\right)+5\left(\sqrt{x+1}-2\right)+3(x-3)=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{5}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{5}{\sqrt{x+1}+2}+3\right)=0 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow (x;y)=(3;1) \text{ (thỏa mãn)}.$$

+ **<u>TH2:</u>** Nếu $x+y-4=0 \Leftrightarrow y=4-x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x-2(4-x)}-\sqrt{x+1}=\frac{5}{x-(4-x)-7}.$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\dfrac{5}{2x-11}=0$ (1).

Điều kiện: $x \in \left[\dfrac{8}{3};+\infty\right) \setminus \left\{\dfrac{11}{2}\right\}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{3x-8}-\sqrt{x+1}-\dfrac{5}{2x-11}$ với $x \in D=\left[\dfrac{8}{3};+\infty\right) \setminus \left\{\dfrac{11}{2}\right\}$ ta có

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-8}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{10}{(2x-11)^2}=\frac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-8}}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}}+\frac{10}{(2x-11)^2}>0, \forall x \in D$$

Vì $3\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-8}=\sqrt{9x+9}-\sqrt{3x-8}=\dfrac{6x+17}{\sqrt{9x+9}+\sqrt{3x-8}}>0$.

Vì vậy *f(x)* là hàm đồng biến trên mỗi khoảng $\left[\dfrac{8}{3};\dfrac{11}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{11}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f(3)=f(8)=0$. Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=8 \\ y=-4 \end{cases} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện chỉ nhận nghiệm $(x;y)=(3;1)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;1)$.

<u>Cách 2:</u> Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+y} \\ b=\sqrt{y} \end{cases},(a,b \ge 0) \Rightarrow \begin{cases} x+y=a^2 \\ y=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a^2-b^2 \\ y=b^2 \end{cases}$.

Phương trình đầu của hệ trở thành: $(1-b^2)a+a^2+2b^2=6+(a^2-4)b$.

$\Leftrightarrow a(1-b^2)+a^2(1-b)+2b^2+4b-6=0$.

$\Leftrightarrow a(1-b)(1+b)+a^2(1-b)+(b-1)(2b+6)=0$.

$\Leftrightarrow (1-b)(a(1+b)+a^2-2b-6)=0$.

$\Leftrightarrow (1-b)(b(a-2)+a^2+a-6)=0 \Leftrightarrow (1-b)(a-2)(b+a+3)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ b=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+y}=2 \\ \sqrt{y}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=4 \\ y=1 \end{array}\right.$.

Ta có kết quả tương tự lời giải trên.

Chú ý. Nhiều học sinh sai lầm khi cho rằng (1) có nghiệm duy nhất vì là hàm đồng biến. Điều cần lưu ý là f(x) đồng biến trên mỗi khoảng $\left[\frac{8}{3};\frac{11}{2}\right)$ và $\left(\frac{11}{2};+\infty\right)$. Do đó nếu có nghiệm trên mỗi khoảng thì nghiệm đó là duy nhất trên khoảng đó.

Ngoài ra nếu chặn điều kiện $y=4-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 4\Rightarrow \frac{8}{3}\le x\le 4$ lúc đó ta chỉ cần xét hàm số f(x) trên đoạn $\left[\frac{8}{3};4\right]$ và có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 49 . Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}3^{x-y+1}-1=x-y+\sqrt{x^2+y^2+2x-2y-2xy+2}\\ \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y+7}\right)=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^4-4\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1, y\ge -7$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$3^{x-y+1}=x-y+1+\sqrt{\left(x-y+1\right)^2+1}.$$

$$\Leftrightarrow 3^{x-y+1}\left(\sqrt{\left(x-y+1\right)^2+1}-1\right)=1\ (1).$$

Xét hàm số $f(t)=3^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)$ với $t\in\mathbb{R}$ ta có

$$f'(t)=3^t\ln 3\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)+3^t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-1\right)=3^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)\left(\ln 3-1\right)>0,\forall t\in\mathbb{R}$$

Vì vậy f(t) là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(x-y+1)=f(0)\Leftrightarrow x-y+1=0$.

Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+8}\right)=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^4-4.$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+8x}=8\left(x^2-1-x\sqrt{x^2-1}\right).$$

$\Leftrightarrow x+8-\sqrt{x^2+8x}=8x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.

$\Leftrightarrow \sqrt{x+8}\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)=8x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{8\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}=\dfrac{8x}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

$\Leftrightarrow 8\sqrt{x+8}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=8x\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+8}\right)$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+8)(x^2-1)}=x\sqrt{x} \Leftrightarrow (x+8)(x^2-1)=x^3$.

$\Leftrightarrow 8x^2-x-8=0 \xleftrightarrow{x\geq 1} x=\dfrac{1+\sqrt{257}}{16} \Rightarrow y=\dfrac{17+\sqrt{257}}{16}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{257}}{16};\dfrac{17+\sqrt{257}}{16}\right)$ $\square$

Bài 50. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+x+y+3\sqrt{x+y}=11 \\ xy\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y+2}+\sqrt{2y}=0 \end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Điều kiện: $y\geq 0, x+y\geq 0$.

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Với $y>0$ viết lại phương trình thứ hai của hệ dưới dạng:

$$-x\sqrt{x^2+3}=\sqrt{\frac{2}{y}}+\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}}.$$

Ta có $p=\sqrt{\dfrac{2}{y}}+\sqrt{\dfrac{2}{y^2}+\dfrac{1}{y}}\geq 2,\forall y\in(0;2];p\leq 2,\forall y\in(2;+\infty)$.

Suy ra $x<0$ và $-x\sqrt{x^2+3}=p\Leftrightarrow\begin{cases} x<0 \\ x^2(x^2+3)=p^2 \end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{4p^2+9}-3}{2}}$.

Suy ra $x\leq -1,\forall y\in(0;2]$ và $x>-1,\forall y\in(2;+\infty)$.

+ <u>TH1</u>: Nếu $y\in(0;2]$ ta có

$x^3+y^3+x+y+3\sqrt{x+y}\leq -1^3+2^3-1+2+3\sqrt{-1+2}=11$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=-1,y=2$.

+ **TH2:** Nếu $y \in (2;+\infty)$ ta có:

$x^3 + y^3 + x + y + 3\sqrt{x+y} > -1^3 + 2^3 - 1 + 2 + 3\sqrt{-1+2} = 11$ (hệ phương trình vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (-1;2)$.

Bài 51. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (xy - x + y - 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{y} \\ x^3 - \dfrac{3}{\sqrt{y-1}} + 4 = \sqrt{11 + 6x - \dfrac{3}{y-1}} \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $y > 1, 11 + 6x - \dfrac{3}{y-1} > 0$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$(x+1)(y-1)\sqrt{(x+1)^2 + 1} = \sqrt{y}.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{(x+1)^2 + 1} = \frac{\sqrt{y}}{y-1} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{y-1} + 1}}{\sqrt{y-1}} \ (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2 + 1}$ ta có:

$$f'(t) = \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy f(t) là hàm đồng biến.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{y-1}}\right) \Leftrightarrow x + 1 = \dfrac{1}{\sqrt{y-1}}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^3 - 3(x+1) + 4 = \sqrt{11 + 6x - 3(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = \sqrt{8 - 3x^2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 - (2 - x) = \sqrt{8 - 3x^2} - (2 - x).$$

Chú ý $2 - x + \sqrt{8 - 3x^2} > 0, \forall x \in \left[-\sqrt{\dfrac{8}{3}}; \sqrt{\dfrac{8}{3}}\right]$ nên ta thực hiện nhân liên hợp như sau:

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2-x-1)+\frac{4(x^2-x-1)}{2-x+\sqrt{8-3x^2}}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left[x+1+\frac{4}{2-x+\sqrt{8-3x^2}}\right]=0\ (2).$$

Xét hàm số $f(x)=2-x+\sqrt{8-3x^2}$ trên đoạn $\left[-\sqrt{\frac{8}{3}};\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$ ta có

$$f'(x)=-1-\frac{3x}{\sqrt{8-3x^2}};f'(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{8-3x^2}=-3x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \\ 8-3x^2=9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ta có $f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=2+\sqrt{\frac{8}{3}};f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{6+4\sqrt{6}}{3};f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)=2-\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Suy ra $2-\sqrt{\frac{8}{3}}\le f(x)\le \frac{6+4\sqrt{6}}{3},\forall x\in\left[-\sqrt{\frac{8}{3}};\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$.

Do đó $x+1+\frac{4}{2-x+\sqrt{8-3x^2}}\ge x+1+\frac{6}{3+2\sqrt{6}}>\frac{7}{4}+x>0,\forall x\in\left[-\sqrt{\frac{8}{3}};\sqrt{\frac{8}{3}}\right]$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},y=\frac{9+3\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},y=\frac{9-3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là:

$$(x;y)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{9-3\sqrt{5}}{2}\right).$$

Nhận xét. Nhiều học sinh thắc mắc là tại sao thêm bớt đại lượng $2-x$ vào phương trình để thực hiện nhân liên hợp. Để làm được như vậy ta cần tìm nghiệm của phương trình(kể cả nghiệm ngoại lai) bằng cách bình phương hai vế của phương trình.

$$x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}\Rightarrow (x^3-3x+1)^2=8-3x^2.$$

Thực hiện tìm nghiệm của phương trình này bằng máy tính cầm tay như sau (áp dụng với FX 570ES PLUS và Vinacal 570ES PLUS).

Bước 1. Nhập vào phương trình trên như sau: $\left(X^3-3X+1\right)^2=8-3X^2$.

Bước 2. Nhấn SHIFT + SOLVE máy hiện nghiệm đầu tiên $X_1\simeq 1,6180339$ vì đây là nghiệm lẻ nên ta dung phím nhớ lưu nghiệm đó vào biến nhớ A như sau: SHIFT + STO +A.

Bước 3. Ta cần tìm một nghiệm lẻ thứ hai bằng cách thoát ra nhập vào phương trình và thao tác như bước 1 và 2 ta tìm được một nghiệm thứ hai $X_2\simeq -0,6180339$ ta lưu vào biến nhớ B như sau: SHIFT + STO + B.

Bước 4. Tìm hai nghiệm này bằng cách lấy tổng $\begin{cases}X_1+X_2=A+B=1\\X_1.X_2=A.B=-1\end{cases}$.

Theo định lý vi-ét X_1,X_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-x-1=0$.

Và dễ dàng tìm được hai nghiệm là $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bước 5. Để tìm được nhân tử $2-x$ ta thực hiện như sau:

Đặt $y=\sqrt{8-3x^2}$.

Với $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Ta có điểm thứ nhất $A\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Với $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Ta có điểm thứ hai $B\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm *A* và *B* là $y=2-x$.

Để tìm hiểu chi tiết về phương pháp này bạn đọc tham khảo cuốn “ *Những điều cần biết LTĐH Kỹ thuật giải nhanh Phương trình, bất phương trình vô tỷ* ” cùng tác giả.

Ngoài ra sau khi tìm được hai nghiệm như trên ta có thể đưa về giải phương trình bậc cao với x.

$$\left(x^3-3x+1\right)^2=8-3x^2\Leftrightarrow\left(x^3-3x+1\right)^2+3x^2-8=0.$$

$$\Leftrightarrow x^6-6x^4+2x^3+12x^2-6x-7=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)\left(x^4+x^3-4x^2-x+7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0 \\ x^4+x^3-4x^2-x+7=0 \end{array}\right..$$

Với chú ý

$$x^4+x^3-4x^2-x+7=8\left(x+\frac{1}{4}\right)^4-35\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+9\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1789}{32}$$

$$=8\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{2}\right]^2+5\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+9\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{189}{32}>0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Bài 52. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x+\sqrt{3y+1})=2-3y \\ (\sqrt{3y+1}+1)(x^2-5x+4)=15y-6xy \end{cases}, \left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $y\ge -\frac{1}{3}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+3y-2+x\sqrt{3y+1}=0 \\ \left(x^2-5x+4\right)\sqrt{3y+1}+x^2+6xy-5x-15y+4=0 \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

Đặt $t=\sqrt{3y+1}, \left(t\ge 0\right)\Rightarrow 3y=t^2-1$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x^2+t^2-3+xt=0 \\ \left(x^2-5x+4\right)t+x^2-5x+4+\left(t^2-1\right)\left(2x-5\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xt+t^2-3=0 \\ x^2+2tx-7x-5t+9=0 \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$t^2+\left(3x-5\right)t+2x^2-7x+6=0 \ (1).$$

$$\Leftrightarrow \left(t+x-2\right)\left(t+2x-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2-x \\ t=3-2x \end{array}\right..$$

+ <u>TH1:</u> Nếu

$$t=2-x \Rightarrow \begin{cases} t=2-x \\ x^2+xt+t^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2-x \\ x^2+x\left(2-x\right)+\left(2-x\right)^2-3=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{3y+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

+ <u>TH2:</u> Nếu

$$t = 3 - 2x \Rightarrow \begin{cases} t = 3 - 2x \\ x^2 + xt + t^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - 2x \\ x^2 + x(3-2x) + (3-2x)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - 2x \\ 3x^2 - 9x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ t = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ t = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow (x;t) = (1;1) \Rightarrow (x;y) = (1;0) \text{ vì } t \geq 0.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;0)$.

Nhận xét. Để có phân tích như phương trình (1) ta có thể coi (1) là phương trình bậc hai của t và có $\Delta_t = (3x-5)^2 - 4(2x^2 - 7x + 6) = (x-1)^2$. Từ đó tìm được t theo x.

+ Nếu một phương trình của hệ chỉ có $\sqrt{3y+1}$ ta có thể đặt ẩn phụ rồi dùng phép thế(xem bài toán tương tự).

Sau đây là một số bài toán tương tự dành cho bạn đọc rèn luyện

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2 + 3(x-1)\sqrt{y+1} + y + 1 = 0 \\ 7x + (2+x)\sqrt{y+1} = 5 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải bài toán 1

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2 + y - 5x + 7 + (2x-5)\sqrt{y+1} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{y+1}\right)^2 - 5\left(x + \sqrt{y+1}\right) + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \sqrt{y+1} = 2 \\ x + \sqrt{y+1} = 3 \end{array}\right..$$

Xét trường hợp thay vào phương trình thứ hai của hệ tìm được các nghiệm thoả mãn là:

$$(x;y) = \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}; \frac{16 - 3\sqrt{5}}{2}\right); \left(4 - \sqrt{17}; 17 - 2\sqrt{17}\right).$$

Nhận xét.

Từ phương trình thứ hai của hệ rút được $\sqrt{y+1}=\dfrac{5-7x}{x+2}\left(-2<x\le\dfrac{5}{7}\right)$do đó bằng phép thế ta hoàn toàn giải được hệ phương trình trên.

Thật vậy ta cần giải phương trình:

$$\left(x+1\right)^2+3\left(x-1\right).\frac{5-7x}{x+2}+\left(\frac{5-7x}{x+2}\right)^2=0.$$

$\Leftrightarrow x^4-15x^3+56x^2-x-1=0$.

$\Leftrightarrow \left(x^2-8x-1\right)\left(x^2-7x+1\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-8x-1=0\\ x^2-7x+1=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{-2<x\le\frac{5}{7}}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\\ x=4-\sqrt{17}\end{array}\right..$$

Ta có kết quả tương tự.

Bài 53. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}3y^2+1+2\left(x+1\right)y=4y\sqrt{x^2+2y+1}\\ y\left(y-x\right)=3-3y\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x^2+2y+1\ge 0$.

Ta có thể phân tích phương trình đầu của hệ như sau

$$4y^2-4y\sqrt{x^2+2y+1}+x^2+2y+1-\left(x^2-2xy+y^2\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left(2y-\sqrt{x^2+2y+1}\right)^2=\left(x-y\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2y-\sqrt{x^2+2y+1}=x-y\\ 2y-\sqrt{x^2+2y+1}=y-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2y+1}=3y-x\\ \sqrt{x^2+2y+1}=y+x\end{array}\right..$$

\+ **<u>TH1:</u>** Nếu $\sqrt{x^2+2y+1}=3y-x\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+2y+1}=3y-x\\ y\left(y-x\right)=3-3y\end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-x\ge 0 \\ x^2+2y+1=9y^2-6xy+x^2 \\ y(y-x)=3-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-x\ge 0 \\ x=\dfrac{9y^2-2y-1}{6y} \\ y\left(y-\dfrac{9y^2-2y-1}{6y}\right)=3-3y \end{cases}$$

(Do $y=0$ không thoả mãn hệ phương trình).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-x\ge 0 \\ x=\dfrac{9y^2-2y-1}{6y} \\ 3y^2-20y+17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{415}{51} \\ y=\dfrac{17}{3} \end{cases} \end{array}\right..$$

+ **TH2:** Nếu $\sqrt{x^2+2y+1}=y+x \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2y+1}=y+x \\ y(y-x)=3-3y \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x\ge 0 \\ x^2+2y+1=y^2+2xy+x^2 \\ y(y-x)=3-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x\ge 0 \\ x=\dfrac{2y-y^2+1}{2y} \\ y\left(y-\dfrac{2y-y^2+1}{2y}\right)=3-3y \end{cases}$$

(do $y=0$ không thoả mãn hệ phương trình).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x\ge 0 \\ x=\dfrac{2y-y^2+1}{2y} \\ 3y^2+4y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);\left(\dfrac{415}{51};\dfrac{17}{3}\right)$.

Cách 2: Đặt $t=\sqrt{x^2+2y+1}$ suy ra $2y=t^2-x^2-1$.

Phương trình đầu được viết lại dưới dạng: $3y^2+2xy+t^2-x^2=4yt$.

$\Leftrightarrow t^2-4yt+3y^2+2xy-x^2=0$.

Ta có $\Delta_y{}'=4y^2-\left(3y^2+2xy-x^2\right)=\left(x-y\right)^2$.

Suy ra $t=2y-\left(x-y\right)=3y-x$ hoặc $t=2y+\left(x-y\right)=x+y$.

Thực hiện tương tự cách 1 ta có kết quả tương tự.

Nhận xét. Với hệ phương trình có 1 phương trình của hệ chỉ chứa 1 căn thức hỗn hợp của cả hai biến x và y thông thường xử lý nhóm thành nhân tử chung. Trong lời giải trên ta nhóm về hằng đẳng thức dạng $A^2=B^2$ hoặc có thể đặt ẩn phụ không hoàn toàn luôn thực hiện được vì phương trình đó bản chất đã phân tích được thành nhân tử.

Bài 54. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}4x^2=(\sqrt{x^2+1}+1)(x^2-y^3+3y-2)\\(x^2+y^2)^2+1=x^2+2y\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}4x^2\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2\left(x^2-y^3+3y-2\right)\\(x^2+y^2)^2+1=x^2+2y\end{cases}$$

\+ **<u>TH1:</u>** Nếu $x=0$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$y^4-2y+1=0\Leftrightarrow\left(y-1\right)\left(y^3+y^2+y-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-\frac{1}{3}+\end{array}\right..$$

\+ **<u>TH2:</u>** Nếu:

$$4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2-y^3+3y-2\Rightarrow\begin{cases}4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2-y^3+3y-2\\(x^2+y^2)^2+1=x^2+2y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2-y^3+3y-2\\(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)=2y-y^2-1=-\left(y-1\right)^2\end{cases}.$$

Từ phương trình thứ hai suy ra $x^2+y^2-1\le 0\Rightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\end{cases}$.

Khi đó biến đổi phương trình đầu của hệ thành

$$4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)-x^2=-y^3+3y-2.$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{\sqrt{x^2+1}+1}-1\right)=-\left(y-1\right)^2\left(y+2\right).$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{3-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)=-\left(y-1\right)^2\left(y+2\right)\ (1).$$

Với mọi $x,y\in\left[-1;1\right]\Rightarrow VT_{(1)}\ge 0, VP_{(1)}\le 0$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow VT=VP=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;1\right);\left(0;-\frac{1}{3}+\right)$

Bài 55. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2\sqrt{2\left(x-3\right)}+xy+y-x-1=\sqrt[3]{3x-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{y^2-y+1}=\sqrt{x^2-xy+y^2}\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 3$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt{x^2+x+1}.$$

$$\text{Ta có VT}=\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}=\sqrt{x^2+x+1}=VP$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}x-y\right)\Leftrightarrow xy-x+y=0$.

Thay vào phương trình đầu của hệ ta được: $x^2\sqrt{2\left(x-3\right)}-1=\sqrt[3]{3x-\frac{1}{2}}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2\sqrt{2(x-3)}-1=\sqrt[3]{3x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x\sqrt{2(x-3)}-\frac{2}{x}=\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{2(x-3)}-2=\frac{2}{x}+\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(2x^3-6x^2-1)}{2x\sqrt{2(x-3)}+2}=\frac{-4(2x^3-6x^2-1)}{\left(\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}\right)^2+\left(2-\frac{2}{x}\right)\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}+\left(2-\frac{2}{x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(2x^3-6x^2-1)\left(\frac{1}{2x\sqrt{2(x-3)}+2}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}\right)^2+\left(2-\frac{2}{x}\right)\sqrt[3]{\frac{24}{x^2}-\frac{4}{x^3}}+\left(2-\frac{2}{x}\right)^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-6x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)-\frac{5}{2}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3-3\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

$$\Leftrightarrow f(x-1)=f\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

(vì $f(t)=t^3-3t$ đồng biến trên khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$(x;y)=\left(1+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{2+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\right)$$

<u>Cách 2</u>:

$$\begin{cases} u=\sqrt{2(x-3)} \\ v=\sqrt[3]{3x-\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u^2+6}{2} \\ x=\frac{2v^3+1}{6} \end{cases} \Rightarrow 3(u^2+6)=2v^3+1 \Leftrightarrow 2v^3-3u^2-17=0$$

Phương trình trở thành: $\left(\frac{u^2+6}{2}\right)^2 u-1=v \Rightarrow \begin{cases} 2v^3-3u^2-17=0 \\ \left(\frac{u^2+6}{2}\right)^2 u-1=v \end{cases}$

Ta có phương trình: $2\left[\left(\frac{u^2+6}{2}\right)^2 u-1\right]^3-3u^2-17=0$.

$$\Leftrightarrow \left(u^3+6u-2\right)\left(u^{12}+30u^{10}+2u^9+360u^8+36u^7+2164u^6 + 216u^5+6528u^4+440u^3+7968u^2+48u+304\right)=0$$

$\Leftrightarrow u^3+6u-2=0$.

$\Leftrightarrow u=\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}-1\right) \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x-3\right)}=\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$

$\Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{2+\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$.

Nhận xét. Bài toán đưa về giải phương trình vô tỷ với kỹ thuật nhân liên hợp hết sức khéo léo. Bạn đọc rèn luyện bài toán tương tự sau:

$$x^2\sqrt{3\left(x-3\right)}-5x+4=\sqrt[3]{-5x^2-4}.$$

Bài 56. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(x^3+y+3\right)\sqrt{x^3+3}=16\left(4x^2-3\right) \\ \left(2x^3+y-3\right)\sqrt{y-3}+\left(2xy-6x-5x^4\right)\sqrt{x}=0 \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 0, y\geq 3$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{y-3} \\ b=\sqrt{x^3} \end{cases},\left(a,b\geq 0\right) \Rightarrow \begin{cases} y=a^2+3 \\ x^3=b^2 \end{cases}$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$\left(2b^2+a^2\right)a+\left(2a^2-5b^2\right)b=0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a^2+3ab+5b^2\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a^2+3ab+5b^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=b=0 \end{array}\right.$.

+ **TH1:** Nếu $a = b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ thay vào phương trình đầu của hệ thấy không thoả mãn.

+ **TH2:** Nếu $a = b \Leftrightarrow \sqrt{y-3} = \sqrt{x^3} \Leftrightarrow y = x^3 + 3$.

Thay $y = x^3 + 3$ vào phương trình đầu của hệ ta được

$$\left(x^3+3\right)\sqrt{x^3+3} = 32x^2 - 24.$$

Nhận thấy $x = 0$ không thoả mãn phương trình.

Vì vậy ta chỉ cần xét với $x > 0$ khi đó phương trình tương đương với:

$$\frac{x^3+3}{x^2}.\frac{\sqrt{x^3+3}}{x} = \frac{32}{x} - \frac{24}{x^3} = 8\left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3}\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+3}{x^2}.\frac{\sqrt{x^3+3}}{x} - 8 = 8\left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x^3} - 1\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^3-4x^2+3\right)\left(x^3+3-2x\sqrt{x^3+3}+4x^2\right)}{x^3\left(\sqrt{x^3+3}+2x\right)} = -\frac{8\left(x^3-4x^2+3\right)}{x^3}.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-4x^2+3\right)\left[\frac{x^3+3-2x\sqrt{x^3+3}+4x^2}{x^3\left(\sqrt{x^3+3}+2x\right)} + \frac{8}{x^3}\right] = 0 \ (1).$$

Với mọi x dương ta có $\frac{x^3+3-2x\sqrt{x^3+3}+4x^2}{x^3\left(\sqrt{x^3+3}+2x\right)} + \frac{8}{x^3} > 0$.

Vì vậy $(1) \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-3x-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{3-\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện ta có $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 4 \\ x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}, y = 30 + 6\sqrt{21} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;4);\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2};30+6\sqrt{21}\right)$.

Nhận xét. Ta có thể giải phương trình trên như sau:

Đặt $y=\frac{\sqrt{x^3+3}}{2},(y>0)\Rightarrow\begin{cases}x^3=4y^2-3\\y^3=4x^2-3\end{cases}$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^3-y^3=4(y^2-x^2)\Leftrightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2+4x+4y)=0.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x^2+xy+y^2+4x+4y=0\ (1)\end{array}\right..$$

+ **<u>TH1:</u>** Nếu $x=y\Leftrightarrow\sqrt{x^3+3}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x^3-4x^2+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.$.

+ **<u>TH2:</u>** Vô nghiệm vì $x\ge 0,y>0$.

Bài 57. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x\sqrt{8y-5}+y\sqrt{8x-5}=\sqrt[4]{24(x^2+y^2+4)}\\11x^2-6xy+3y^2=12x-4y\end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge\frac{5}{8}$.

Nhận xét. Nhận thấy sự phức tạp đến từ phương trình đầu hệ và phương trình thứ hai của hệ là phương trình bậc hai tổng quát không phân tích được nghiệm nên ta chỉ khai thác được điều kiện của x,y để phương trình đó có nghiệm. Vậy điều cần làm là xử lý phương trình đầu của hệ với hình thức như trên kỹ thuật đánh giá thông qua bất đẳng thức cơ bản được nghĩ đến đầu tiên. Vậy trước tiên dự đoán nghiệm của hệ dễ thấy $(x;y)=(1;1)$ là nghiệm.

Sử dụng bất đẳng thức AM- GM ta được

$$\begin{array}{l}x\sqrt{8y-5}=\sqrt{3}x.\sqrt{\frac{8y-5}{3}.1}\le\frac{\sqrt{3}x}{2}\left(\frac{8y-5}{3}+1\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}x(4y-1)\\y\sqrt{8x-5}=\sqrt{3}y.\sqrt{\frac{8x-5}{3}.1}\le\frac{\sqrt{3}y}{2}\left(\frac{8x-5}{3}+1\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}y(4x-1)\end{array}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên và sử dụng AM-GM ta được

$$x\sqrt{8y-5}+y\sqrt{8x-5}\le\frac{\sqrt{3}}{3}\left(8xy-x-y\right)\le\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\left(x+y\right)^2-x-y\right).$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$\sqrt[4]{24(x^2+y^2+4)}\ge\sqrt[4]{24\left(\frac{1}{2}\left(x+y\right)^2+4\right)}=\sqrt[4]{12\left(x+y\right)^2+96}.$$

Ta chứng minh $\sqrt[4]{12\left(x+y\right)^2+96}\ge\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\left(x+y\right)^2-x-y\right)$.

Thật vậy đặt $t=x+y,\left(t\ge\frac{5}{4}\right)$ đưa về chứng minh $\sqrt[4]{12t^2+96}\ge\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2t^2-t\right)$.

$$\Leftrightarrow\left(t-2\right)\left(t^7+\frac{3t^5}{2}+\frac{5t^4}{2}+\frac{81t^3}{16}+\frac{81t^2}{8}+\frac{27t}{2}+27\right)\le0\Leftrightarrow t\le2.$$

Để chứng minh bất đẳng thức trên đúng ta cần có $t=x+y\le2$.

Ta tìm điều kiện này từ phương trình thứ hai của hệ

$$11x^2-6xy+3y^2=12x-4y$$

$$\Leftrightarrow11x^2-6x\left(t-x\right)+3\left(t-x\right)^2=12x-4\left(t-x\right)$$

$$\Leftrightarrow20x^2-\left(16+12t\right)x+3t^2+4t=0$$

$$\Rightarrow\Delta'_x=\left(8+6t\right)^2-20\left(3t^2+4t\right)\ge0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-2\right)\left(t+\frac{4}{3}\right)\le0\Leftrightarrow-\frac{4}{3}\le t\le2$$

Do đó bất đẳng thức đúng.

Vì vậy phương trình đầu của hệ tương đương với dấu bằng xảy ra tại mọi bất đẳng thức $\Leftrightarrow x=y=1$

Thử lại vào phương trình thứ hai của hệ thấy thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$

Bài 58. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2-y}\right)\left(2\sqrt{x+2}+1\right)=y-x-\frac{7}{2}\\ x\sqrt{5x^2+16x+4y+8}+\left(4x+y+4\right)^2=0\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge -2, y \le 2, 5x^2 + 16x + 4y + 8 \ge 0$.

Nhận xét. Phương trình đầu của hệ chứa 2 căn thức tinh ý nhận ra nếu đặt hai ẩn phụ tương ứng là a và b thì đưa về phương trình bậc hai tổng quát suy nghĩ đến việc phân tích thành nhân tử.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2-y} \\ b = \sqrt{x+2} \end{cases}, (a, b \ge 0) \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - a^2 \\ x = b^2 - 2 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$\left(\frac{1}{2} - a\right)(2b+1) = 2 - a^2 - \left(b^2 - 2\right) - \frac{7}{2}.$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab + b - a = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a-b-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = b+1 \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2-y} = \sqrt{x+2} \\ \sqrt{2-y} = \sqrt{x+2} + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -x \\ y = -x - 1 - 2\sqrt{x+2} \end{array}\right..$$

+ **<u>TH1:</u>** Nếu $y = -x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x\sqrt{5x^2 + 12x + 8} + (3x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{5x^2 + 12x + 8} = -(3x+4)^2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2\left(5x^2 + 12x + 8\right) = (3x+4)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, y = 2 \\ x = -1, y = 1 \end{array}\right..$$

+ **<u>TH2:</u>** Nếu $y = -x - 1 - 2\sqrt{x+2}$ ta phải có

$$\begin{cases} 5x^2 + 16x + 4\left(-x - 1 - 2\sqrt{x+2}\right) + 8 \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 12x + 4 \ge 8\sqrt{x+2} \\ x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 1$ thử lại thấy không thoả mãn.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y) = (-2;2);(-1;1)$.

Sau đây là một số bài toán tương tự dành cho bạn đọc rèn luyện

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)\sqrt{x-y+2} = x + 3y + 2 \\ (x-y)\sqrt{x-y+2} = (x+y+1)\sqrt{x+y-2} \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải bài toán 1

Điều kiện: $x-y+2\ge 0, x+y-2\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(x+y)\left(\sqrt{x-y+2}-2\right)=y-x+2 \Leftrightarrow \frac{(x+y)(x-y-2)}{\sqrt{x-y+2}+2}=y-x+2$$

$$\Leftrightarrow (y-x+2)\left(1+\frac{x+y}{\sqrt{x-y+2}+2}\right)=0 \Leftrightarrow y=x-2 \text{ do } 1+\frac{x+y}{\sqrt{x-y+2}+2}>0.$$

Thay $y=x-2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4=(2x-1)\sqrt{2(x-2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 2(x-2)(2x-1)^2=16 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 8x^3-24x^2+18x-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ (2x-5)(4x^2-2x+4)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Nhận xét. Để tìm mối liên hệ giữa x và y ta có thể đặt ẩn phụ

$$\begin{cases} a=\sqrt{x-y+2} \\ b=x+y \end{cases},(a\ge 0, b>0) \Rightarrow ab=2b-a+2.$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(b+1)=0 \Leftrightarrow a=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-y+2}=2 \Leftrightarrow y=x-2.$$

Ta có kết quả tương tự.

Bài 59. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{y+1}+\sqrt{y}-\sqrt{x^3-1} \\ 2x^3-3x-y-2=x\sqrt{2\sqrt{2x+1}+1} \end{cases},(x,y\in\mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1, y\ge 0$.

Nhận thấy $x=1$ hoặc $y=0$ không thoả mãn hệ phương trình.

Xét với $x>1, y>0$ phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x-\sqrt[3]{y+1}+\sqrt{x^3-1}-\sqrt{y}=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-y-1}{x^2+x\sqrt[3]{y+1}+\left(\sqrt[3]{y+1}\right)^2}+\frac{x^3-1-y}{\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y}}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-y-1\right)\left(\frac{1}{x^2+x\sqrt[3]{y+1}+\left(\sqrt[3]{y+1}\right)^2}+\frac{1}{\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y}}\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x^3-y-1=0 \Leftrightarrow y=x^3-1.$$

Thay $y=x^3-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$x^3-3x-1=x\sqrt{2\sqrt{2x+1}+1}.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-2x-1\right)=x\left(\sqrt{2\sqrt{2x+1}+1}-x\right).$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-2x-1\right)+\frac{x\left(x^2-1-2\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{2\sqrt{2x+1}+1}+x}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-2x-1\right)+\frac{x\left(x^4-2x^2+1-4(2x+1)\right)}{\left(\sqrt{2\sqrt{2x+1}+1}+x\right)\left(x^2-1+2\sqrt{2x+1}\right)}=0.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-2x-1\right)+\frac{x\left(x^4-2x^2+1-4(2x+1)\right)}{\left(\sqrt{2\sqrt{2x+1}+1}+x\right)\left(x^2-1+2\sqrt{2x+1}\right)}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x-1\right)\left[x+1+\frac{x\left(x^2+2x+3\right)}{\left(\sqrt{2\sqrt{2x+1}+1}+x\right)\left(x^2-1+2\sqrt{2x+1}\right)}\right]=0.$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1+\sqrt{2} \Rightarrow y=6+5\sqrt{2} \text{ vì } x>1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1+\sqrt{2};6+5\sqrt{2}\right)$.

Nhận xét. Phương trình đầu của hệ ta có thể nhận thấy sự tương ứng của hàm số như sau:

$$x+\sqrt{x^3-1}=\sqrt[3]{y+1}+\sqrt{\left(\sqrt[3]{y+1}\right)^3-1} \text{ (1)}.$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt[3]{t^3-1}$ với $t\ge 1$, ta có:

$$f'(t)=1+\frac{t^2}{\sqrt[3]{\left(t^3-1\right)^2}}>0,\forall t>1.$$

Vì vậy f(t) đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(x)=f\left(\sqrt[3]{y+1}\right)\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y+1}\Leftrightarrow y=x^3-1$.

+ Sau khi thế $y=x^3-1$ ta được 1 phương trình vô tỷ có 2 lớp căn nếu chú ý ta thấy sự tương ứng của chúng cho phép đặt ẩn phụ đưa về hệ nhiều ẩn.

$$\begin{cases} a=\sqrt{2x+1} \\ b=\sqrt{2\sqrt{2x+1}+1} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2=2x+1 \\ b^2=2a+1 \\ x^3-3x-1=xb \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a^2=2x+1 \\ b^2=2a+1 \\ x^3=bx+3x+a^2-2x=a^2+bx+x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^2=2x+1\ (2) \\ b^2=2a+1\ (3) \\ x^2=\dfrac{a^2}{x}+b+1\ (4) \end{cases}.$$

+ Nếu $a>b\Rightarrow(2),(3)\Rightarrow x>a;(4)\Rightarrow x^2<a+b+1<2a+1=b^2$.

$\Rightarrow a<x<b<a$ vô lý.

+ Nếu $a<b;(2),(3)\Rightarrow x<a;(4)\Rightarrow x^2>a+b+1>2a+1=b^2$.

$\Rightarrow a<b<x<a$ vô lý.

+ Nếu $a=b\Leftrightarrow x=a\Leftrightarrow x=\sqrt{2x+1}\xleftrightarrow{x>1}x^2-2x-1=0\xleftrightarrow{x>1}x=1+\sqrt{2}$.

Ta có kết quả tương tự.

Bài 60. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2}+x-1=\sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)} \\ \sqrt{1+2x-y^2}-y-1=\sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)} \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Điều kiện: $1-2y-x^2\ge 0,1+2x-y^2\ge 0,-2\le x^2-y^2\le 2$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\left[\sqrt{1-2y-x^2}-\left(y+1\right)\right]+\left[\sqrt{1+2x-y^2}+\left(x-1\right)\right]$$

$$=\sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)}+\sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)} \qquad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức C-S ta có

$$\begin{cases}\sqrt{1-2y-x^2}-\left(y+1\right)\le\sqrt{2\left(1-2y-x^2+\left(y+1\right)^2\right)}=\sqrt{2\left(y^2-x^2+2\right)}\\ \sqrt{1+2x-y^2}+\left(x-1\right)\le\sqrt{2\left(1+2x-y^2+\left(-x+1\right)^2\right)}=\sqrt{2\left(x^2-y^2+2\right)}\end{cases}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được:

$$VT_{(1)}=VP_{(1)}\Leftrightarrow \text{ đẳng thức xảy ra.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\sqrt{1-2y-x^2}=-y-1\\ \sqrt{1+2x-y^2}=x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ 1-2y-x^2=y^2+2y+1\\ 1+2x-y^2=x^2-2x+1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ x^2+y^2+4y=0\\ x^2+y^2-4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ y=-x\\ x^2+y^2+4y=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ y=-x\\ 2x^2-4x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1, y\le -1\\ y=-x\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;-2\right)$.

Sau đây là một số bài toán tương tự dành cho bạn đọc rèn luyện

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}4y^2+3x+8=5y\left(x+1\right)\\ \sqrt{5\left(x^2+\dfrac{4}{x+y}\right)}=x+3\end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}^+\right).$$

Hướng dẫn giải bài toán 1

Điều kiện: $x, y > 0$.

Sử dụng bất đẳng thức C-S cho phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{5\left(x^2+\frac{4}{x+y}\right)}=\sqrt{\left(2^2+1^2\right)\left(x^2+\frac{4}{x+y}\right)}\geq 2x+\frac{2}{\sqrt{x+y}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{2}=\frac{2}{\sqrt{x+y}}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{x+y}=\frac{1}{2}\sqrt{4\left(x+y\right)}\leq\frac{x+y+4}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x+y=4$.

Suy ra $x+3=\sqrt{5\left(x^2+\frac{4}{x+y}\right)}\geq 2x+\frac{8}{x+y+4}$.

$\Leftrightarrow x^2+xy-3y+x-4\leq 0$.

Cộng theo vế với phương trình đầu của hệ ta được

$x^2+4y^2-4xy-8y+4x+4\leq 0$.

$\Leftrightarrow \left(x+2-2y\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow x+2-2y=0$.

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+2-2y=0 \\ \frac{x}{2}=\frac{2}{\sqrt{x+y}} \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;2\right)$.

CHƯƠNG 3. BÀI TOÁN CÓ CHỨA THAM SỐ

Cũng giống như phương trình, bất phương trình đại số và phương trình, bất phương trình vô tỷ bài toán tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm trên miền K khi giá trị của tham số thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình và điều kiện ràng buộc giữa các nghiệm. Với mỗi loại hệ ta có cách xử lý riêng nhưng phương pháp chung đó là quy về bài toán xét hàm số khi tham số thuộc miền giá trị của hàm số đó. Để giúp các em có cái nhìn chi tiết đầy đủ về dạng toán này tôi trình bày chương 4 theo các chủ đề.

- Hệ đối xứng loại I.
- Hệ đối xứng loại II.
- Hệ đẳng cấp.
- Phương pháp hàm số trong bài toán tham số để hệ phương trình có nghiệm.

Chủ đề 1: HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI I

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

DẠNG 1. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ HỆ CÓ NGHIỆM DUY NHẤT

Áp dụng cho cả hệ đối xứng loại I và hệ đối xứng loại II

Điều kiện cần: Nếu $\left(x_0;y_0\right)$ là nghiệm của hệ thì $\left(y_0;x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ.

Do vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0=y_0$.

Thay vào hệ ta tìm được các giá trị của tham số.

Điều kiện đủ: Thử lại với các giá trị của tham số xem hệ có nghiệm duy nhất không?

DẠNG 2. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI I CÓ NGHIỆM

Đối với hệ đối xứng loại I để hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S^2\ge 4P$.

Nếu các nghiệm là không âm ta phải có thêm điều kiện $\begin{cases}S\ge 0\\P\ge 0\end{cases}$.

Bài toán thường gặp các tổng đối xứng $\left(x^2+x,y^2+y\right);\left(x+\frac{1}{x},y+\frac{1}{y}\right)$,... lúc đó đặt $u=x^2+x,v=y^2+y$.

Một số đẳng thức hay sử dụng:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2.$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-4\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right]-6\ .$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^5-5\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]-10\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} xy+x+y=m+1 \\ x^2y+y^2x=m \end{cases}.$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases},\left(S^2\ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} S+P=m+1 \\ SP=m \end{cases}$

Khi đó S,P là nghiệm của phương trình: $X^2-\left(m+1\right)X+m=0 \qquad (1)$

Mặt khác x,y là nghiệm của phương trình: $X^2-S.X+P=0 \qquad (2)$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì (2) phải có nghiệm duy nhất, điều này tương đương với $\Delta_{(2)}=0\Leftrightarrow S^2-4P=0\Leftrightarrow x=y$.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} x^2+2x-m-1=0 \\ 2x^3=m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\sqrt[3]{\frac{m}{2}} \\ x^2+2x-m-1=0 \end{cases} \qquad (3)$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì (3) phải có nghiệm duy nhất

$$x=\sqrt[3]{\frac{m}{2}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{m}{2}}=-1\Leftrightarrow m=-2.$$

Thử lại hệ ta được:

$$\begin{cases} xy+x+y=-1 \\ x^2y+y^2x=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy+x+y=-1 \\ xy\left(x+y\right)=-2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} xy+x+y=-1 \\ xy\left(-1-xy\right)=-2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy+x+y=-1 \\ xy=1 \vee xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=1 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(-1;-1\right)$ do đó $m=-2$ là giá trị cần tìm.

<u>Nhận xét.</u> Ta có lập luận đơn giản như sau, Nếu $\left(x_0;y_0\right)$ là nghiệm của hệ thì $\left(y_0;x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ. Do vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0=y_0$. Thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} x_0^2+2x_0-m-1=0 \\ 2x_0^3=m \end{cases}.$$

Đến đây xử lý bài toán hoàn toàn tương tự cách trên.

Bài 2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3\left(x^2+y^2\right)-2\left(x+y+xy\right)=15 \\ x^3+y^3=m \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3\left(\left(x+y\right)^2-2xy\right)-2\left(x+y+xy\right)=15 \\ \left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)=m \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases},\left(S^2\ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 3\left(S^2-2P\right)-2\left(S+P\right)=15 \\ S^3-3SP=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{3S^2-2S-15}{8} \\ S^3-3S.\dfrac{3S^2-2S-15}{8}=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{3S^2-2S-15}{8} \\ m=\dfrac{-S^3+6S^2+45S}{8} \qquad (1) \end{cases}$$

Ta có : $S^2\ge 4P \Leftrightarrow S^2\ge \dfrac{3S^2-2S-15}{8} \Leftrightarrow 5S^2+2S+15\ge 0,\forall S$.

Như vậy để hệ phương trình có nghiệm thì phương trình (1) có nghiệm S trên tập số thực.

Một phương trình bậc ba luôn có nghiệm nên giá trị của m là tập số thực.

Bài 3. Giả sử $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y=2m-1 \\ x^2+y^2=m^2+2m-3 \end{cases}$.

Xác định tham số m để biểu thức $P=xy$ đạt giá trị nhỏ nhất,lớn nhất.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y=2m-1 \\ (x+y)^2-2xy=m^2+2m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2m-1 \\ xy=\dfrac{(2m-1)^2-m^2-2m+3}{2}=\dfrac{3m^2-6m+4}{2} \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$(x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow (2m-1)^2 \ge 4.\frac{3m^2-6m+4}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 4m^2-4m+1 \ge 6m^2-12m+8 \Leftrightarrow 2m^2-8m+7 \le 0 \Leftrightarrow \frac{4-\sqrt{2}}{2} \le m \le \frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

Khi đó xét hàm số $f(m)=\dfrac{3m^2-6m+4}{2}$ trên $\left[\dfrac{4-\sqrt{2}}{2};\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Ta có: $f'(m)=3m-3; f'(m)=0 \Leftrightarrow 3m-3=0 \Leftrightarrow m=1$.

Ta có $f\left(\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{11-6\sqrt{2}}{4}; f(1)=\dfrac{1}{2}; f\left(\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{11+6\sqrt{2}}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $m=1$,giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{11+6\sqrt{2}}{4}$ khi $m=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$.

Bài 4. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=m \\ x+y-\sqrt{xy}=m \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $x \ge 0, y \ge 0$ khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

Đặt $\begin{cases} S=\sqrt{x}+\sqrt{y} \\ P=\sqrt{xy} \end{cases}, \left(S^2 \ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S = m \\ S^2 - 2P - P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = m \\ P = \dfrac{m^2 - m}{3} \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm trước tiên ta phải có $\begin{cases} S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ \dfrac{m^2 - m}{3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$ (1)

Mặt khác $S^2 \ge 4P \Leftrightarrow m^2 \ge \dfrac{4}{3}\left(m^2 - m\right) \Leftrightarrow m^2 - 4m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 4$.

Kết hợp với điều kiện (1) ta phải có $m = 0 \vee 1 \le m \le 4$.

Vậy để hệ phương trình có nghiệm khi $m = 0$ hoặc $1 \le m \le 4$.

Bài 5. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = m \\ x + y = 2m + 1 \end{cases}.$$

Lời giải

Nhận xét. Dạng toán này đã đề cập đến trong phần ứng dụng của tổng tích đối xứng trong bài toán tìm cực trị,dưới đây xét dưới góc độ tìm điều kiện để hệ phương trình có nghiệm.

Điều kiện $x \ge -1, y \ge -1$.

Khi đó đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{y+1} \end{cases}, \left(u, v \ge 0\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u + v = m \\ u^2 + v^2 - 2 = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m \\ \left(u + v\right)^2 - 2uv = 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m \\ uv = \dfrac{m^2 - 2m - 3}{2} \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} S = u + v \\ P = uv \end{cases}, \left(S^2 \ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S = m \\ P = \dfrac{m^2 - 2m - 3}{2} \end{cases}.$

Hệ phương trình có nghiệm trước tiên ta phải có:

$$\begin{cases} S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ \dfrac{m^2 - 2m - 3}{2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 3 \qquad (1)$$

Mặt khác: $S^2 \ge 4P \Leftrightarrow m^2 \ge 4.\dfrac{m^2 - 2m - 3}{2}$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 6 \le 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{10} \le m \le 2 + \sqrt{10}$.

Kết hợp với điều kiện (1) suy ra $3 \le m \le 2+\sqrt{10}$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\left[3;2+\sqrt{10}\right]$.

Bài 6. Tìm các giá trị của tham số m để hệ sau có ít nhất một nghiệm $(x;y)$ với $x>0$ và $y>0$: $\begin{cases} x+xy+y=m+1 \\ x^2y+y^2x=m \end{cases}$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases},\left(S^2 \ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} S+P=m+1 \\ SP=m \end{cases}$.

Suy ra S,P là hai nghiệm của phương trình $X^2-(m+1)X+m=0$ (1).

Để hệ có nghiệm $x>0,y>0$ trước hết (1) phải có hai nghiệm dương, điều này tương đương với: $\begin{cases} \Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2 \ge 0 \\ S=m+1>0 \\ P=m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>0$.

Khi đó (1) có hai nghiệm $X_1=m, X_2=1$.

Mặt khác $S^2 \ge 4P$ nên điều kiện này tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} X_1^2 \ge 4X_2 \\ X_2^2 \ge 4X_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 \ge 4 \\ 1^2 \ge 4m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 2 \\ m \le \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le \dfrac{1}{4} \end{array}\right..$$

Đối chiếu với điều kiện $m>0$ khi đó $0<m\le \dfrac{1}{4} \vee m \ge 2$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\left(0;\dfrac{1}{4}\right] \cup \left[2;+\infty\right)$.

Bài 7. (TSĐH Khối B 2007) Xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ sau đây có nghiệm thực: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$

Lời giải

Nhận xét. Hệ này có dạng đối xứng giữa x và y và xuất hiện hai biểu thức tương đương là $x+\frac{1}{x}$ và $y+\frac{1}{y}$, nên ta sẽ tìm cách biến đổi phương trình thứ hai của hệ theo hai biểu thức này.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5 \\ (x+\frac{1}{x})^3+(y+\frac{1}{y})^3-3(x+\frac{1}{x})-3(y+\frac{1}{y})=15m-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5 \\ (x+\frac{1}{x})^3+(y+\frac{1}{y})^3=15m+5 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5 \\ (x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y})^3-3(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y})=15m+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5 \\ (x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})=8-m \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=x+\frac{1}{x} \\ v=y+\frac{1}{y} \end{cases} (|u|;|v|\geq 2)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases} u+v=5 \\ uv=8-m \end{cases} \Rightarrow u,v$ là nghiệm của phương trình: $t^2-5t+(8-m)=0\,(1)$.

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn $|t|\geq 2$.

Từ (1) ta có: $m=f(t)=t^2-5t+8,(|t|\geq 2)\Rightarrow f'(t)=2t-5\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$.

Ta có: $f(-2)=22;f(2)=2;f(\frac{5}{2})=\frac{7}{4};\lim\limits_{t\to\infty}f(x)=+\infty$.

Để (1) có 2 nghiệm phân biệt ($|t| \geq 2$) thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$.

Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$, dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{7}{4} \leq m \leq 2 \\ 22 \leq m \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Bài 8. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) + \log_3(xy+2) = 2 \\ x^3 + y^3 - xy = m \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $a = \log_2(x+y); b = \log_3(xy+2)$ khi đó ta có $a + b = 2$.

Lại có:

$$(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (2^a)^2 \geq 4(3^b - 2) = 4(3^{2-a} - 2) \Leftrightarrow 12^a + 8.3^a - 36 \geq 0 \quad (1).$$

Hàm số $g(a) = 12^a + 8.3^a - 36$ đồng biến; lại có $g(1) = 0$ vậy $(1) \Leftrightarrow a \geq 1$.

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ:

$$m = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - xy = (2^a)^3 - 3(3^{2-a} - 2).2^a - (3^{2-a} - 2) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(a) = (2^a)^3 - 3(3^{2-a} - 2).2^a - (3^{2-a} - 2)$ trên $[1, +\infty)$.

Ta có $f'(a) = 8^a \ln 8 + 6.2^a \ln 2 - 27.\left(\dfrac{2}{3}\right)^a.\ln\dfrac{2}{3} - 9.\left(\dfrac{1}{3}\right)^a.\ln\dfrac{1}{3} > 0$ với mọi a.

Suy ra $f(a) \geq f(1) = 1$.

Để hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $a \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $m \geq 1$.

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hệ phương trình sau đây có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ |x-y| + |x^3 - y^3| = m^3 \end{cases}.$$

Lời giải

+ Điều kiện cần:

Ta có: $\left|x-y\right|+\left|x^3-y^3\right|=\left|x-y\right|\left(1+x^2+xy+y^2\right)=\left|x-y\right|\left(2+xy\right)$.

Suy ra $m^6=\left(x-y\right)^2\left(2+xy\right)^2=\left(1-2xy\right)\left(2+xy\right)\left(2+xy\right)$

Nhưng do $xy\le\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{2}$ nên:

$$m^6=\left(1-2xy\right)\left(2+xy\right)\left(2+xy\right)\le\left(\frac{1-2xy+2+xy+2+xy}{3}\right)^3=\left(\frac{5}{3}\right)^3\Rightarrow m\le\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của m là $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

+ Điều kiện đủ: Với $m=\sqrt{\frac{5}{3}}$ khi đó đẳng thức xảy ra:

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ xy=-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\\ xy=-\frac{1}{3}\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện $\left(x+y\right)^2\ge 4xy$ nên hệ này luôn có nghiệm).

Vậy giá trị cần tìm của m là $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Bài 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}\sqrt{2\left(x+y-1\right)}+2xy-x-y+2=x^2y+xy^2+\sqrt{x+y}\\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+2\sqrt{xy}=m\end{cases}.$$

Lời giải

<u>Nhận xét.</u> Nhìn vào hai phương trình của hệ, thấy phương trình thứ hai có chứa tham số m và không tìm được mối liên hệ giữa x và y, do đó ta nghĩ đến việc biến đổi phương trình thứ nhất của hệ xem có rút được x theo y hay không, hay là một biểu thức gọn nhẹ hơn phương trình thứ nhất.

Điều kiện: $\begin{cases}xy\ge 0\\ x+y\ge 1\end{cases}$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ được biến đổi thành:

$$\sqrt{2\left(x+y-1\right)}+2xy-x-y+2=x^2y+xy^2+\sqrt{x+y}.$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2\left(x+y-1\right)}+2\left(xy+1\right)=\left(xy+1\right)\left(x+y\right)+\sqrt{x+y}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\left(x+y-1\right)}-\sqrt{x+y}=\left(xy+1\right)\left(x+y-2\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y-2}{\sqrt{2\left(x+y-1\right)}+\sqrt{x+y}}=\left(xy+1\right)\left(x+y-2\right).$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\left(x+y-1\right)}+\sqrt{x+y}}=xy+1 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Nếu $y=2-x$, thế xuống phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình:

$$m=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}+2\sqrt{x\left(2-x\right)}.$$

xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}+2\sqrt{x\left(2-x\right)}, x\in\left[0;2\right]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(2-x\right)^2}}+\dfrac{2-2x}{\sqrt{x\left(2-x\right)}}$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(2-x\right)^2}}+\frac{2-2x}{\sqrt{x\left(2-x\right)}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{\left(2-x\right)^2}-\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2\left(2-x\right)^2}}+\frac{2-2x}{\sqrt{x\left(2-x\right)}}=0\Leftrightarrow x=1.$$

Ta có $f(0)=f(2)=\sqrt[3]{2}; f(1)=4\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{x\in\left[0,2\right]} f(x)=f(0)=f(2)=\sqrt[3]{2} \\ \max\limits_{x\in\left[0,2\right]} f(x)=f(1)=4 \end{cases}$.

Suy ra để hệ có nghiệm trong trường hợp này thì $\sqrt[3]{2}\le m\le 4$

Trường hợp 2: Xét phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{2\left(x+y-1\right)}+\sqrt{x+y}}=xy+1$.

Nếu $x+y>1$ thì $VT<1, VP>1$ phương trình vô nghiệm.

Nếu $x+y=1$ khi đó $xy=0$ tìm được $m=1$ và $\left(x;y\right)=\left(1;0\right),\left(0;1\right)$ là nghiệm của hệ. Vậy $m=1$ thỏa mãn.

Kết luận: Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m\in\left\{1\right\}\cup\left[\sqrt[3]{2};4\right]$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. (TSĐH Khối D 2004) Tìm các giá trị của m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x,y\ge 0$.

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x}\\ v=\sqrt{y}\end{cases},\left(u,v\ge 0\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u+v=1\\ u^3+v^3=1-3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1\\ \left(u+v\right)^3-3uv\left(u+v\right)=1-3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1\\ uv=m\end{cases}.$$

Suy ra u,v là hai nghiệm của phương trình: $t^2-t+m=0$ (1).

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm không âm.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=1-4m\ge 0\\ S=1\ge 0\\ P=m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{1}{4}.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Bài 2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}x+y+xy=1\\ x^3y+xy^3=m\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\ P=xy\end{cases},\left(S^2\ge 4P\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}S+P=1\\ S\left(S^2-2P\right)=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=1-S\\ S^3-2S\left(1-S\right)=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=1-S\\ m=S^3+2S^2-2S\ (1)\end{cases}.$$

Ta có: $S^2\ge 4P\Leftrightarrow S^2\ge 4\left(1-S\right)\Leftrightarrow S^2+4S-4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}S\ge -2+2\sqrt{2}\\ S\le -2-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l}S\ge -2+2\sqrt{2}\\ S\le -2-2\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(S)=S^3+2S^2-2S$ trên $\left(-\infty;-2-2\sqrt{2}\right]\cup\left[-2+2\sqrt{2};+\infty\right)$, ta có:

$$f'(S)=3S^2+4S-2; f'(S)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{3} \\ S=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{3} \end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên suy ra:

$$\min_{S\in\left(-\infty;-2-2\sqrt{2}\right]\cup\left[-2+2\sqrt{2};+\infty\right)} f(S)=f\left(-2+2\sqrt{2}\right)=26-16\sqrt{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge 26-16\sqrt{2}$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\left[26-16\sqrt{2};+\infty\right)$.

Bài 3. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} 2\left(x+y\right)+xy=1 \\ x^3+y^3=m \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases},\left(S^2\ge 4P\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2S+P=1 \\ S\left(S^2-3P\right)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=1-2S \\ S^3-3S\left(1-2S\right)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=1-2S \\ m=S^3+6S^2-3S \end{cases} \quad (1)$$

Ta có: $S^2\ge 4P \Leftrightarrow S^2\ge 4\left(1-2S\right) \Leftrightarrow S^2+8S-4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S\ge -4+2\sqrt{5} \\ S\le -4-2\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} S\ge -4+2\sqrt{5} \\ S\le -4-2\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(S)=S^3+6S^2-3S$ trên $\left(-\infty;-4-2\sqrt{5}\right]\cup\left[-4+2\sqrt{5};+\infty\right)$, ta có:

$f'(S)=3S^2+12S-3>0, \forall S\left(-\infty;-4-2\sqrt{5}\right]\cup\left[-4+2\sqrt{5};+\infty\right)$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le f\left(-4-2\sqrt{5}\right)=-76-34\sqrt{5} \\ m\ge f\left(-4+2\sqrt{5}\right)=-76+34\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m\le -76-34\sqrt{5} \\ m\ge -76+34\sqrt{5} \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ x^4+y^4=m \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \left[\left(x+y\right)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3-xy \\ \left[\left(3-xy\right)^2-2xy\right]^2-2x^2y^2=m \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3-xy \\ \left[x^2y^2-8xy+9\right]^2-2x^2y^2=m \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left(x+y\right)^2 \ge 4xy$.

$$\Leftrightarrow \left(3-xy\right)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow x^2y^2-10xy+9 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy \ge 9 \\ xy \le 1 \end{array}\right..$$

Đặt $t=xy$ khi đó $m=\left(t^2-8t+9\right)^2-2t^2$ (1).

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t \ge 9 \vee t \le 1$.

Xét hàm số $f(t)=\left(t^2-8t+9\right)^2-2t^2$ trên $\left(-\infty;1\right]\cup\left[9;+\infty\right)$, ta có:

$f'(t)=4\left(t^3-12t^2+40t-36\right); f'(t)=0$ vô nghiệm trên $\left(-\infty;1\right]\cup\left[9;+\infty\right)$.

Lập bảng biến thiên suy ra $\min\limits_{t\in\left(-\infty;1\right]\cup\left[9;+\infty\right)} f(t)=f(1)=2$.

Vì vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge 2$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m \ge 2$.

Bài 5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy\left(x+1\right)\left(y+1\right)=m \end{cases}$.

Lời giải

Cách 1: Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x+y+\left(x+y\right)^2-2xy=8 \\ xy\left(xy+x+y+1\right)=m \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}, \left(S^2 \ge 4P\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S+S^2-2P=8 \\ P(P+S+1)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{S^2+S-8}{2} \\ \dfrac{S^2+S-8}{2}\left(\dfrac{S^2+S-8}{2}+S+1\right)=m \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{S^2+S-8}{2} \\ m=\dfrac{S^4+4S^3-11S^2-30S+48}{4} \qquad (1) \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S^2 \ge 4P$.

$$\Leftrightarrow S^2 \ge 4.\frac{S^2+S-8}{2} \Leftrightarrow S^2+2S-16 \le 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{17} \le S \le -1+\sqrt{17}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $-1-\sqrt{17} \le S \le -1+\sqrt{17}$.

Xét hàm số $f(S)=\dfrac{S^4+4S^3-11S^2-30S+48}{4}$ trên $\left[-1-\sqrt{17};-1+\sqrt{17}\right]$, ta có:

$$f'(S)=\frac{4S^3+12S^2-22S-30}{4}; f'(S)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=-1 \\ S=-1-\sqrt{\dfrac{17}{2}} \\ S=-1+\sqrt{\dfrac{17}{2}} \end{array}\right..$$

Ta có: $f\left(-1-\sqrt{17}\right)=16; f(-1)=16; f\left(-1+\sqrt{17}\right)=16;$

$f\left(-1-\sqrt{\dfrac{17}{2}}\right)=-\dfrac{33}{16}; f\left(-1+\sqrt{\dfrac{17}{2}}\right)=-\dfrac{33}{16}$.

Vậy $\min\limits_{t\in\left[-1-\sqrt{17};-1+\sqrt{17}\right]} f(t)=-\dfrac{33}{16}; \max\limits_{t\in\left[-1-\sqrt{17};-1+\sqrt{17}\right]} f(t)=16$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{33}{16} \le m \le 16$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[-\dfrac{33}{16};16\right]$.

Cách 2: Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^2+x+y^2+y=8 \\ \left(x^2+x\right)\left(y^2+y\right)=m \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + x = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \\ v = y^2 + y = \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \end{cases}, \left(u, v \ge -\dfrac{1}{4}\right)$.

Hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases} u + v = 8 \\ uv = m \end{cases} \Rightarrow u, v$ là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - 8t + m = 0$ (1)

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm $t \ge -\dfrac{1}{4}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 - m \ge 0 \\ t_1 \ge -\dfrac{1}{4} \\ t_2 \ge -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 16 \\ t_1 + t_2 \ge -\dfrac{1}{2} \\ \left(t_1 + \dfrac{1}{4}\right)\left(t_2 + \dfrac{1}{4}\right) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 16 \\ t_1 + t_2 \ge -\dfrac{1}{2} \\ t_1 t_2 + \dfrac{1}{4}(t_1 + t_2) + \dfrac{1}{16} \ge 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 16 \\ 8 \ge -\dfrac{1}{2} \\ m + \dfrac{1}{4}.8 + \dfrac{1}{16} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 16 \\ m \ge -\dfrac{33}{16} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{33}{16} \le m \le 16.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[-\dfrac{33}{16}; 16\right]$.

<u>Nhận xét.</u> Ta nhận thấy khi đặt được ẩn phụ đưa về tìm điều kiện tham số với ẩn mới bài toán xử lý nhanh gọn.

Bài 6. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = m \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x, y \ge 0, m \ge 0$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ v = \sqrt{y} \end{cases}, (u, v \ge 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = uv \\ x^2 + y^2 = \left[\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy}\right]^2 - 2xy = \left[\left(u+v\right)^2 - 2uv\right]^2 - 2u^2v^2 \end{cases}.$$

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{\left[\left(u+v\right)^2 - 2uv\right]^2 - 2u^2v^2} + \sqrt{2}uv = 8 \\ u + v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\left[m^2 - 2uv\right]^2 - 2u^2v^2} + \sqrt{2}uv = 8 \\ u + v = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^4 - 4m^2uv + 2u^2v^2} + \sqrt{2}uv = 8 \\ u + v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m^4 - 4m^2uv + 2u^2v^2} = 8 - \sqrt{2}uv \\ u + v = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv \le 2\sqrt{2} \\ m^4 - 4m^2uv + 2u^2v^2 = 2u^2v^2 - 16\sqrt{2}uv + 64 \\ u + v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv \le 2\sqrt{2} \\ m^4 - 64 = 4uv\left(m^2 - 4\sqrt{2}\right) \\ u + v = m \end{cases}$$

Nhận thấy $m = 2\sqrt[4]{2}$ hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy với $m \ne 2\sqrt[4]{2}$ hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(u+v\right)^2 \ge 4uv \\ uv \le 2\sqrt{2} \\ m^4 - 64 = 4uv\left(m^2 - 4\sqrt{2}\right) \\ u + v = m \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^4 - 64}{4\left(m^2 - 4\sqrt{2}\right)} \le 2\sqrt{2} \\ m^2 \ge 4.\dfrac{m^4 - 64}{4\left(m^2 - 4\sqrt{2}\right)} \\ m \ge 0, m \ne 2\sqrt[4]{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt[4]{2} < m \le 2\sqrt[4]{8}.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left(2\sqrt[4]{2}; 2\sqrt[4]{8}\right]$.

<u>Nhận xét.</u> Với $m = 3$ ta có bài toán quen thuộc giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}.$$

Bài 7. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=m \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -1, y\ge -1, xy\ge 0, m\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{xy}=x+y-3 \\ x+y+2+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\ge 3 \\ xy=(x+y-3)^2 \\ x+y+2+2\sqrt{xy+x+y+1}=m^2 \end{cases}.$$

Do $x+y\ge 3 \Rightarrow x,y\ge 0$ hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$(x+y)^2\ge 4xy.$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4(x+y-3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y\ge 2(x+y-3) \\ x+y\le -2(x+y-3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y\le 6 \\ x+y\le 2 \end{array}\right..$$

Vậy $t=x+y\in[3;6]$.

Khi đó $m^2=t+2+2\sqrt{(t-3)^2+t+1}$ (1).

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t\in[3;6]$.

Xét hàm số $f(t)=t+2+2\sqrt{(t-3)^2+t+1}$ trên $[3;6]$, ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{2t-5}{\sqrt{t^2-5t+10}}>0, \forall t\in[3;6]$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[3;6]$.

Ta có $f(3)=9, f(6)=16$. Suy ra $9\le m^2\le 16 \Leftrightarrow 3\le m\le 4$ (vì $m\ge 0$).

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $[3;4]$.

Bài 8. Tìm m để hệ phương trình sau $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-1}=m\left(\sqrt{x+y}-1\right) \\ x+y=xy+1 \end{cases}$.

a) Có nghiệm duy nhất.

b) Có nghiệm.

Lời giải

Điều kiện: $x+y\ge 0, x^2+y^2\ge 1$.

a) Nhận thấy nếu $(x;y)$ là nghiệm của hệ thì $(y;x)$ cũng là nghiệm của hệ. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất trước tiên $x=y$ khi đó thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2-1}=m\left(\sqrt{2x}-1\right)\\ 2x=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ m=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1\end{cases}.$$

Ngược lại với $m=\sqrt{2}+1$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2-1}=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{x+y}-1\right)\\ x+y=xy+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(x+y)^2-2xy-1}=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{x+y}-1\right)\\ x+y=xy+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(x+y)^2-2(x+y-1)-1}=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{x+y}-1\right)\\ x+y=xy+1\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|x+y-1|=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{x+y}-1\right)\\ x+y=xy+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x+y-1|=\left(\sqrt{2}+1\right).\dfrac{x+y-1}{\sqrt{x+y}+1}\\ x+y=xy+1\end{cases}.$$

Dễ thấy hệ này có hai nghiệm $(x;y)=(0;1);(1;0)$ nên $m=\sqrt{2}+1$ không thỏa mãn.

Vậy không tồn tại m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Đặt $\begin{cases}S=x+y\\ P=xy\end{cases},\left(S^2\ge 4P,S\ge 0,S^2-2P\ge 1\right).$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\sqrt{S^2-2P-1}=m\left(\sqrt{S}-1\right)\\ S=P+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{S^2-2(S-1)-1}=m\left(\sqrt{S}-1\right)\\ P=S-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|S-1|=m\left(\sqrt{S}-1\right) \qquad (1)\\ P=S-1\end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S^2\ge 4P\\ S\ge 0\\ S^2-2P\ge 1\\ P=S-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S^2\ge 4(S-1)\\ S\ge 0\\ S^2-2(S-1)\ge 1\\ P=S-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(S-2)^2\ge 0\\ S\ge 0\\ (S-1)^2\ge 0\\ P=S-1\end{cases}\Leftrightarrow S\ge 0.$$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S \geq 0$. Dễ thấy (1) luôn có nghiệm $S = 1$ do đó hệ phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + m} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2} + m} = 4 \\ \frac{2}{x+y} + \frac{1}{xy} = 1 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} xy(x+y) \neq 0 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} + m \geq 0 \\ y^2 + \frac{1}{y^2} + m \geq 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + m} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2} + m} = 4 \\ 2 + \frac{x+y}{xy} = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m + 2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt{m + 2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2} = 4 \\ x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = x - \frac{1}{x} \\ v = y - \frac{1}{y} \end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m + 2 + u^2} + \sqrt{m + 2 + v^2} = 4 \\ u + v = 2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 4 + u^2 + v^2 + 2\sqrt{(m+2)^2 + (m+2)(u^2 + v^2) + u^2v^2} = 16 \\ u + v = 2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 4 + (u+v)^2 - 2uv + 2\sqrt{(m+2)^2 + (m+2)\left((u+v)^2 - 2uv\right) + u^2v^2} = 16 \\ u + v = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(m+2)^2+4(m+2)+u^2v^2-2(m+2)uv}=4-m+uv \\ u+v=2 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m+uv\ge 0 \\ (m+2)^2+4(m+2)+u^2v^2-2(m+2)uv=u^2v^2+2(4-m)uv+(4-m)^2 \\ u+v=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m+uv\ge 0 \\ 16m-4=12uv \\ u+v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m+\dfrac{16m-4}{12}\ge 0 \\ uv=\dfrac{16m-4}{12} \\ u+v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -11 \\ uv=\dfrac{16m-4}{12} \\ u+v=2 \end{cases}.$$

Mặt khác $(u+v)^2\ge 4uv \Leftrightarrow 4\ge 4uv \Leftrightarrow uv\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{16m-4}{12}\le 1 \Leftrightarrow m\le 1$.

Vậy $-11\le m\le 1$.

Mặt khác $\begin{cases} m+2+u^2\ge 0 \\ m+2+v^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+4+u^2+v^2\ge 0 \\ (m+2+u^2)(m+2+v^2)\ge 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+4+(u+v)^2-2uv\ge 0 \\ (m+2)^2+(m+2)\left[(u+v)^2-2uv\right]+u^2v^2\ge 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+4+4-2.\dfrac{16m-4}{12}\ge 0 \\ (m+2)^2+(m+2)\left[4-2.\dfrac{16m-4}{12}\right]+\left(\dfrac{16m-4}{12}\right)^2\ge 0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+4+4-2.\dfrac{16m-4}{12}\ge 0 \\ (m+2)^2+(m+2)\left[4-2.\dfrac{16m-4}{12}\right]+\left(\dfrac{16m-4}{12}\right)^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\le 13.$$

Vậy $-11\le m\le 1$. Để ý với mọi $-11\le m\le 1$ khi đó luôn tồn tại $(u;v)$.

Mặt khác với mọi u, v thì hệ $\begin{cases} u = x - \dfrac{1}{x} \\ v = y - \dfrac{1}{y} \end{cases}$ luôn có nghiệm $(x;y)$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $[-11;1]$.

Bài 10. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = m + 1 \\ \dfrac{(x^2 + y^2)^2 - m}{x + y} + x^2y^2 - \dfrac{1}{x + y} = 2 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x + y \neq 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = m + 1 \\ \dfrac{1 + 2x^2y^2}{x + y} + x^2y^2 - \dfrac{1}{x + y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left((x + y)^2 - 2xy\right)^2 - 2x^2y^2 = m + 1 \\ x^2y^2 + \dfrac{2x^2y^2}{x + y} = 2 \end{cases}.$$

Suy ra $x + y > 0, xy \neq 0$ và $x + y = \dfrac{2x^2y^2}{2 - x^2y^2} > 0 \Leftrightarrow 2 - x^2y^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < xy < \sqrt{2}$

Mặt khác:

$$(x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \left(\frac{2x^2y^2}{2 - x^2y^2}\right)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow 4x^4y^4 \geq 16xy - 16x^2y^2 + 4x^5y^5.$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x^4y^4 - x^3y^3 - 4xy + 4\right) \leq 0 \Leftrightarrow xy(xy - 1)\left(x^3y^3 - 4\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy \leq 0 \\ 1 \leq xy \leq \sqrt[3]{4} \end{array}\right..$$

Suy ra $t = xy, t \in \left(-\sqrt{2};0\right) \cup \left[1;\sqrt{2}\right)$.

Từ phương trình đầu của hệ ta có:

$$m + 1 = \left(\left(\frac{2t^2}{2 - t^2}\right)^2 - 2t\right)^2 - 2t^2 = 2t^2 + \frac{16t^8}{\left(2 - t^2\right)^4} - 16\frac{t^5}{\left(2 - t^2\right)^2}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + \dfrac{16t^8}{\left(2 - t^2\right)^4} - 16\dfrac{t^5}{\left(2 - t^2\right)^2}$ trên $\left(-\sqrt{2};0\right) \cup \left[1;\sqrt{2}\right)$.

Ta có :

$$f'(t)=\frac{4t\left(t^{10}-4t^9-10t^8+56t^7-24t^6-176t^5-80t^4+160t^3+80t^2-32\right)}{\left(t^2-2\right)^5}$$

Chứng minh được $f'(t)>0,\forall t\in\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $f'(t)>0,\forall t\in\left[1;\sqrt{2}\right)$.

Suy ra giá trị cần tìm của tham số m là

$$\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^+} f(t)>m+1>f(0)\\ f(1)\le m+1<\lim\limits_{t\to\sqrt{2}^-} f(t)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<m+1\\ m+1\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>-1\\ m\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow m>-1.$$

Vậy $m>-1$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}\sqrt{x+m}+\sqrt{y+m}=2\\ x^2+y^2=2m^2\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x+m\ge 0, y+m\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x+y+2m+2\sqrt{xy+m\left(x+y\right)+m^2}=4\\ \left(x+y\right)^2-2xy=2m^2\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\ P=xy\end{cases},\left(S^2\ge 4P\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}S+2m+2\sqrt{P+mS+m^2}=4\\ S^2-2P=2m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S+2m+2\sqrt{\dfrac{S^2}{2}+mS}=4\\ P=\dfrac{S^2}{2}-m^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{S^2}{2}+mS}=4-2m-S\\ P=\dfrac{S^2}{2}-m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-2m-S\ge 0\\ 4\left(\dfrac{S^2}{2}+mS\right)=\left(4-2m\right)^2-2\left(4-2m\right)S+S^2\\ P=\dfrac{S^2}{2}-m^2\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-2m-S\ge 0 \\ S^2+8S=(4-2m)^2 \\ P=\dfrac{S^2}{2}-m^2 \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2\ge 4P \\ 4-2m-S\ge 0 \\ P=\dfrac{S^2}{2}-m^2 \\ x+m\ge 0 \\ y+m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2m\ge 0 \\ (x+m)(y+m)\ge 0 \\ S^2\ge 4\left(\dfrac{S^2}{2}-m^2\right) \\ 4-2m\ge S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+2m\ge 0 \\ P+mS+m^2\ge 0 \\ 4m^2\ge S^2 \\ 4-2m\ge S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+2m\ge 0 \\ \dfrac{S^2}{2}+mS\ge 0 \\ 4m^2\ge S^2 \\ 4-2m\ge S \end{cases}$$

Kết hợp với $S^2+8S=(4-2m)^2$ suy ra $\dfrac{1}{2}\le m\le 2$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Bài 12. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x+y+4=2xy \\ 2^{x+y}=m\left(\sqrt{x^2+y^2+x+y+5}+x+y\right) \end{cases}$ có nghiệm (x,y) thỏa mãn $x,y\ge 1$.

Lời giải

Ta có: $(x+y)^2\ge 4xy \Leftrightarrow (2xy-4)^2\ge 4xy \Leftrightarrow x^2y^2-5xy+4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy\ge 4 \\ xy\le 1 \end{array}\right.$.

Suy ra $t=x+y\ge 4$ do $x,y\ge 1$.

Khi đó phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$2^{x+y}=m\left(\sqrt{(x+y)^2-2xy+x+y+5}+x+y\right)$$

$$\Leftrightarrow 2^t=m\left(\sqrt{t^2+1}+t\right)\Leftrightarrow m=2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right) \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)$ trên $[4;+\infty)$, ta có:

$$f'(t)=2^t\ln 2\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)+2^t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-1\right)=2^t\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)\left(\ln 2-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)>0,\forall t\ge 4$$

Vậy $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[4;+\infty\right)$

Do đó $f(t)\ge f(4)=16\left(\sqrt{17}-4\right),\forall t\ge 4$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t\ge 4\Leftrightarrow m\ge 16\left(\sqrt{17}-4\right)$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\left[16\left(\sqrt{17}-4\right);+\infty\right)$.

Bài 13. Cho hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3\\ y\sqrt{x+1}+x\sqrt{y+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=m\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=6$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để hệ trên có nghiệm.

Lời giải

a) Với $m=6$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3\\ y\sqrt{x+1}+x\sqrt{y+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=6\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3\\ \sqrt{x+1}\left(y+1\right)+\sqrt{y+1}\left(x+1\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3\\ \sqrt{x+1}\sqrt{y+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right)=6\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3\\ \sqrt{x+1}\sqrt{y+1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+1}=2\\ \sqrt{y+1}=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+1}=1\\ \sqrt{y+1}=2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ y=3\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;3\right);\left(3;0\right)$.

b) Điều kiện: $x,y\ge -1$.

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x+1}\\ v=\sqrt{y+1}\end{cases},\left(u,v\ge 0\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u+v=3\\ \left(u^2-1\right)v+\left(v^2-1\right)u+u+v=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ uv\left(u+v\right)=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ uv=\dfrac{m}{3}\end{cases}.$$

Suy ra u,v là hai nghiệm của phương trình: $t^2-3t+\dfrac{m}{3}=0$ (1)

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm không âm.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=9-\dfrac{4m}{3}\ge 0\\ S=3\ge 0\\ P=\dfrac{m}{3}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le\frac{27}{4}.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[0;\dfrac{27}{4}\right]$.

Bài 14. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5\\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=m\end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $xy\ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5\\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=m+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5\\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{21-m}{2}\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}u=x+\dfrac{1}{x}\\ v=y+\dfrac{1}{y}\end{cases},\left(\left|u\right|\ge 2,\left|v\right|\ge 2\right)$ hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases} u+v=5 \\ uv=\dfrac{21-m}{2} \end{cases} \Rightarrow u, v$ là hai nghiệm của phương trình:

$t^2-5t+\dfrac{21-m}{2}=0 \Leftrightarrow m=2t^2-10t+21 \qquad (1)$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm $|t| \ge 2$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2-10t+21$ trên $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$, ta có:

$$f'(t)=4t-10; f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}.$$

Lập bảng biến thiên suy ra để (1) có hai nghiệm $|t| \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 49 \\ \dfrac{17}{2} \le m \le 9 \end{array}\right.$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[\begin{array}{l} m \ge 49 \\ \dfrac{17}{2} \le m \le 9 \end{array}\right.$.

Bài 15. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=m \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $xy \ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^3-3\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=m \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}\right)=m+15 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ 125-15\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=m+15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{110-m}{15} \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y+\dfrac{1}{y} \end{cases},\left(|u|\ge 2,|v|\ge 2\right)$ hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases} u+v=5 \\ uv=\dfrac{110-m}{15} \end{cases} \Rightarrow u,v$ là hai nghiệm của hệ phương trình:

$t^2-5t+\dfrac{110-m}{15}=0 \Leftrightarrow m=15t^2-75t+110$ (1).

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm $|t|\ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 320 \\ \dfrac{65}{4}\le m\le 20 \end{array}\right.$.

Bài 16. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^4+\dfrac{1}{x^4}+y^4+\dfrac{1}{y^4}=m \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $xy\ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4-4\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right]-6+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^4-4\left[\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2-2\right]-6=m \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y+\dfrac{1}{y} \end{cases},\left(|u|\ge 2,|v|\ge 2\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4-4\left(u^2+v^2\right)+4=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ m=2u^2v^2-92uv+529 \end{cases}.$$

Bài toán này khác các bài toán trên ta ta xử lý đưa về một ẩn.

Ta có $v=5-u \Rightarrow |v|=|5-u|\ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u\ge 7 \\ u\le 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u\ge 7 \\ 2\le u\le 3 \\ u\le -2 \end{array}\right.$.

Thay $v=5-u$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$m=2u^2\left(5-u\right)^2-92u\left(5-u\right)+529$ (1).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} u\ge 7 \\ 2\le u\le 3 \\ u\le -2 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(u)=2u^2\left(5-u\right)^2-92u\left(5-u\right)+529$ với $\left[\begin{array}{l} u\ge 7 \\ 2\le u\le 3 \\ u\le -2 \end{array}\right.$.

Tính đạo hàm và lập bảng biến thiên suy ra giá trị cần tìm của tham số m là:

$$\left[\begin{array}{l} m\ge 2209 \\ \dfrac{257}{8}\le m\le 49 \end{array}\right..$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[\begin{array}{l} m\ge 2209 \\ \dfrac{257}{8}\le m\le 49 \end{array}\right.$.

Bài 17. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^5+\dfrac{1}{x^5}+y^5+\dfrac{1}{y^5}=m \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $xy\ne 0$. Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{x} \\ v=y+\dfrac{1}{y} \end{cases},\left(|u|\ge 2,|v|\ge 2\right)$.

Ta có: $x^5+\dfrac{1}{x^5}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5-5\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]-10\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=u^5-5u^3+5u$;

Và $y^5+\dfrac{1}{y^5}=\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^5-5\left[\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^3-3\left(y+\dfrac{1}{y}\right)\right]-10\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=v^5-5v^3+5v$

Hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} u+v=5 \\ u^5-5u^3+5u+v^5-5v^3+5v=m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ (u+v)^5-5uv\left((u+v)^3-3uv(u+v)\right)-10u^2v^2(u+v) \\ \qquad -5\left((u+v)^3-3uv(u+v)\right)+5(u+v)=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ m=25\left(u^2v^2-22uv+101\right) \end{cases}.$$

Thực hiện tương tự bài toán trên ta tìm được $\left[\begin{array}{l} m\ge 15125 \\ \dfrac{1025}{16}\le m\le 125 \end{array}\right.$.

Bài 18. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} (x+y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=m \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $xy\ne 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=m \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=m+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}\right)^2-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=m+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{21-m}{2} \end{cases}$$

Suy ra $x+\frac{1}{x}; y+\frac{1}{y}$ là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2-5t+\frac{21-m}{2}=0 \Leftrightarrow m=2t^2-10t+21 \qquad (1)$$

Ta có $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2, \left|y+\frac{1}{y}\right|\geq 2$. Do đó hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm $|t|\geq 2$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2-10t+21$ trên $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=4t-10; f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$		$-$		0		$+$	
$f(t)$	$+\infty$	↘	49		9	↘	$\frac{17}{2}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m\geq\frac{17}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 19. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^2=8 \\ \left(x^3+y^3\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^3=m \end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=8\\ \left(x^3+y^3\right)\left(1+\dfrac{3}{x^2y^2}+\dfrac{3}{xy}+\dfrac{1}{x^3y^3}\right)=m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}=8\\ x^3+y^3+\dfrac{3x}{y^2}+\dfrac{3y}{x^2}+\dfrac{3x^2}{y}+\dfrac{3y^2}{x}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^2=8\\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^3+\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^3=m\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases}u=x+\dfrac{1}{y}\\ v=y+\dfrac{1}{x}\end{cases}$

Trước tiên xét hệ phương trình: $\begin{cases}u=x+\dfrac{1}{y}\\ v=y+\dfrac{1}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+1=uy\\ xy+1=vx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uy=vx\\ xy+1=vx\end{cases}$.

<u>TH1:</u> Nếu $u=0\Rightarrow v=0$ (do $x\neq 0$).

Khi đó hệ phương trình có nghiệm $xy=-1$.

<u>TH2:</u> Nếu $u\neq 0\Rightarrow y=\dfrac{vx}{u}$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$\frac{vx^2}{u}+1=vx\Leftrightarrow vx^2-uvx+u=0\qquad(1)$$

Hệ có nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow u^2v^2-4uv\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}uv\geq 4\\ uv\leq 0\end{array}\right.$.

Vậy ta cần tìm điều kiện của tham số sao cho $\left[\begin{array}{l}uv\geq 4\\ uv\leq 0\end{array}\right.$.

Thay u,v vào hệ ta được:

$$\begin{cases}u^2+v^2=8\\ u^3+v^3=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=8\\ (u+v)\left(u^2+v^2-uv\right)=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^2-2uv=8\\ (u+v)(8-uv)=m\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} uv=\dfrac{(u+v)^2-8}{2} \\ (u+v)\left(8-\dfrac{(u+v)^2-8}{2}\right)=m \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} uv=\dfrac{(u+v)^2-8}{2} \\ m=\dfrac{-(u+v)^3}{2}+12(u+v) \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} S=u+v \\ P=uv \end{cases},\left(S^2\ge 4P\right)$ khi đó $\begin{cases} P=\dfrac{S^2-8}{2} \\ m=-\dfrac{S^3}{2}+12S\ (2) \end{cases}.$

Ta có:

$$\begin{cases} S^2\ge 4P \\ \left[\begin{array}{l} P=uv\ge 4 \\ P=uv\le 0 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} S^2\ge 4.\dfrac{S^2-8}{2} \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{S^2-8}{2}\ge 4 \\ \dfrac{S^2-8}{2}\le 0 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -4\le S\le 4 \\ \left[\begin{array}{l} |S|\ge 4 \\ -2\sqrt{2}\le S\le 2\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2}\le S\le 2\sqrt{2} \\ S=-4 \\ S=4 \end{array}\right..$$

Vậy để hệ phương trình có nghiệm ta cần tìm m để phương trình (2) có nghiệm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2}\le S\le 2\sqrt{2} \\ S=-4 \\ S=4 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(S)=-\dfrac{S^3}{2}+12S$ với $\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{2}\le S\le 2\sqrt{2} \\ S=-4 \\ S=4 \end{array}\right.$

Ta có: $f'(S)=12-\dfrac{3S^2}{2}; f'(S)=0\Leftrightarrow S=\pm 2\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} m=f(-4) \\ m=f(4) \\ f\left(-2\sqrt{2}\right)\le m\le f\left(2\sqrt{2}\right) \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-16 \\ m=16 \\ -16\sqrt{2}\le m\le 16\sqrt{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow -16\sqrt{2}\le m\le 16\sqrt{2}.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\left[-16\sqrt{2};16\sqrt{2}\right]$.

Bài 20. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm:

$$\begin{cases} x + xy + y = m \\ x^2 + y^2 + xy = 1 - 2m \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \geq 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S + P = m \\ S^2 - P = 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = m - S \\ S^2 + S = 1 - m \end{cases}$$

Hệ phương trình có đúng hai nghiệm:

$\Leftrightarrow S^2 > 4P \Leftrightarrow S^2 > 4\left(m - S\right) \Leftrightarrow S^2 + 4S > 4m$.

Mặt khác:

$$m = 1 - S^2 - S \ (1) \Rightarrow S^2 + 4S > 4\left(1 - S^2 - S\right) \Leftrightarrow 5S^2 + 8S - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S > \dfrac{2}{5} \\ S < -2 \end{array}\right. .$$

Vậy hệ phương trình có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} S > \dfrac{2}{5} \\ S < -2 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(S) = 1 - S^2 - S$ trên $\left(-\infty; 2\right) \cup \left(\dfrac{2}{5}; +\infty\right) \Rightarrow m < \dfrac{11}{25}$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\left(-\infty; \dfrac{11}{25}\right)$.

Bài 21. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2\left(1 + m\right) \\ \left(x + y\right)^2 = 4 \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng nếu $\left(x_0; y_0\right)$ là nghiệm của hệ thì $\left(-x_0; -y_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ. Từ đó tìm điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Tìm các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Nếu $\left(x; y\right)$ là nghiệm của hệ thì $\left(y; x\right)$ cũng là nghiệm của hệ. Vì vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất trước tiên phải có $x = y$.

Khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} 2x^2 = 2\left(1 + m\right) \\ 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

Ngược lại với $m=0$ hệ luôn có hai nghiệm $\left(x;y\right)=\left(-1;-1\right);\left(1;1\right)$.

Vậy không tồn tại giá trị của tham số để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 22. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}x^2+y^2=m\\x+y-xy=1\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\left(x+y\right)^2-2xy=m\\x+y-xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(1+xy\right)^2-2xy=m\\x+y=1+xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2y^2=m-1\ (1)\\x+y=1+xy\end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$\left(x+y\right)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\left(1+xy\right)^2\ge 4xy\Leftrightarrow\left(xy-1\right)^2\ge 0$ luôn đúng.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m-1\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m\ge 1$.

Bài 23. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}5\left(x+y\right)-4xy=4\\x+y-xy=1-m\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases},\left(S^2\ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}5S-4P=4\\S-P=1-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=4m\\P=5m-1\end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$S^2\ge 4P\Leftrightarrow 16m^2\ge 4\left(5m-1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\m\le\dfrac{1}{4}\end{array}\right..$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

Bài 24. Tìm m để hệ phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases}x+y=1\\x^3-y^3=m\left(x-y\right)\end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)\left(x^2+xy+y^2-m\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ \left[\begin{array}{l} x=y \\ x^2+xy+y^2-m=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+xy+y^2-m=0 \end{cases} \quad (1) \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x^2-x+1-m=0 \ (2) \end{cases}$

(1) có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=1-4(1-m)>0 \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{3}{4}$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m>\frac{3}{4}$.

Bài 25. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x+xy+y=m+2 \\ xy(x+y)=m+1 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+xy=m+2 \\ xy(x+y)=m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=m+1 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ xy=m+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)^2 \geq 4.1 \\ 1^2 \geq 4.(m+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m\leq -\dfrac{3}{4} \end{array}\right. .$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

Bài 26. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì hệ phương trình sau luôn có nghiệm: $\begin{cases} x+y+xy=2m+1 \\ xy(x+y)=m^2+m \end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+xy=2m+1 \\ xy(x+y)=m(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=m+1 \\ xy=m \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=m \\ xy=m+1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Với $x+y=m+1, xy=m$ ta có:

$(x+y)^2-4xy=(m+1)^2-4m=(m-1)^2 \geq 0, \forall m$.

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm.

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

+ Điều kiện cần:

Hệ có nghiệm $(x;y)$ thì $(y;x)$ cũng là nghiệm của hệ vì vậy hệ có nghiệm duy nhất ta phải có $x=y$.

Khi đó $(x+y)^2=4xy \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)^2=4m \\ m^2=4(m+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=2\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

+ Điều kiện đủ:

- Với $m=1$ hệ phương trình trở thành:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ xy=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$ nên $m=1$ thỏa mãn.

- Với $m=2-2\sqrt{2}$ hệ phương trình trở thành:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3-2\sqrt{2} \\ xy=2-2\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2-2\sqrt{2} \\ xy=3-2\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ hệ này có hai nghiệm $(x;y)=(1;2-2\sqrt{2});(2-2\sqrt{2};1)$ nên

không thỏa mãn.

- Với $m=2+2\sqrt{2}$ hệ phương trình có nhiều hơn một nghiệm nên không thỏa mãn.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m=1$.

Bài 27. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right),x\ge 4$ $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=m\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 4,y\ge 0$.

Đặt $u=\sqrt{x},v=\sqrt{y},\left(u\ge 2,v\ge 0\right)$ hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}u+v=3\\ \sqrt{u^2+5}+\sqrt{v^2+5}=m\end{cases}\xleftrightarrow{u\ge 2,v\ge 0}\begin{cases}v=3-u\\ 2\le u\le 3.\\ \sqrt{u^2+5}+\sqrt{\left(3-u\right)^2+5}=m\ (1)\end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $u\in\left[2;3\right]$.

Xét hàm số $f(u)=\sqrt{u^2+5}+\sqrt{\left(3-u\right)^2+5}$ trên $\left[2;3\right]$, ta có:

$$f'(u)=\frac{u}{\sqrt{u^2+5}}+\frac{u-3}{\sqrt{\left(u-3\right)^2+5}};f'(u)=0\Leftrightarrow u\sqrt{\left(u-3\right)^2+5}=\left(3-u\right)\sqrt{u^2+5}\Leftrightarrow u=\frac{3}{2}$$

Ta có $f(2)=3+\sqrt{6},f(3)=\sqrt{5}+\sqrt{14}$.

Suy ra $3+\sqrt{6}\le m\le\sqrt{5}+\sqrt{14}$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[3+\sqrt{6};\sqrt{5}+\sqrt{14}\right]$.

Bài 28. Chứng minh rằng hệ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số: $\begin{cases}x+y=m+1\\ x^2y+xy^2=2m^2-m-3\end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}x+y=m+1\\ xy\left(x+y\right)=\left(m+1\right)\left(2m-3\right)\end{cases}$.

<u>**TH1:**</u> Nếu $m=-1$ hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$.

<u>**TH2:**</u> Nếu $m\ne -1$ hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y=m+1 \\ xy=2m-3 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2-4xy=(m+1)^2-4(2m-3)=m^2-6m+13>0, \forall m$$

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm .

Bài 29. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=6-m^2 \end{cases}$.

Giả sử hệ có nghiệm $(x;y)$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=xy+2(x+y).$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x+y=m \\ (x+y)^2-2xy=6-m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m \\ xy=m^2-3 \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm:

$\Leftrightarrow (x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow m^2 \ge 4(m^2-3) \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

Khi đó $P=xy+2(x+y)=m^2-3+2m=(m+1)^2-4 \ge -4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=-1$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m=-1$.

Bài 30. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x^2+y^2=m \\ x^4+y^4=3m-2 \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2=m \\ (x^2+y^2)^2-2x^2y^2=3m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=m \\ x^2y^2=\dfrac{m^2-3m+2}{2} \end{cases}.$$

Suy ra x^2, y^2 là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2-mt+\frac{m^2-3m+2}{2}=0 \ (1).$$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm không âm.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta = m^2-4.\dfrac{m^2-3m+2}{2}\ge 0\\ S=m\ge 0\\ P=\dfrac{m^2-3m+2}{2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-\sqrt{5}\le m\le 3+\sqrt{5}\\ m\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\le m\ge 3+\sqrt{5}\\ 3-\sqrt{5}\le m\le 1\end{array}\right..$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[2;3+\sqrt{5}\right]\cup\left[3-\sqrt{5};1\right]$.

Bài 31. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=m\\ x+y-\sqrt{xy}=m\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 0$.

Đặt $u=\sqrt{x}, v=\sqrt{y}, \left(u,v\ge 0\right)$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}u+v=m\\ u^2+v^2-uv=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=m\\ \left(u+v\right)^2-3uv=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=m\\ uv=\dfrac{m^2-m}{3}\end{cases}.$$

Suy ra u,v là hai nghiệm của phương trình:

$t^2-mt+\dfrac{m^2-m}{3}=0$ (1).

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm không âm.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2-4.\dfrac{m^2-m}{3}\ge 0\\ S=m\ge 0\\ P=\dfrac{m^2-m}{3}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ 1\le m\le 4\end{array}\right..$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[1;4\right]\cup\left\{0\right\}$.

Bài 32. Tìm m để hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm:

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\left(m+1\right)\\ \left(x+y\right)^2=4\end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^2+y^2=2(m+1) & (1) \\ \left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ x+y+2=0 \end{array}\right. & \begin{array}{l}(2)\\(3)\end{array} \end{cases}$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$, bán kính $R=\sqrt{2(m+1)},(m>-1)$.

Phương trình (2) và (3) tương ứng là hai đường thẳng $d_1: x+y-2=0$ và $d_2: x+y+2=0$.

Ta có $d(O;d_1)=d(O;d_2)=\sqrt{2}$ nên hệ có đúng hai nghiệm xảy ra khi và chỉ khi: Cả hai đường thẳng d_1,d_2 tiếp xúc với (C).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(O;d_1)=R \\ d(O;d_2)=R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2(m+1)} \\ \dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2(m+1)} \end{cases} \Leftrightarrow m=0.$$

<u>Nhận xét.</u> Nếu $d(O;d_1)\neq d(O;d_2)$ ta xét hai trường hợp nữa đó là

<u>TH2:</u> Đường thẳng d_1 cắt đường tròn (C), đường thẳng d_2 không có điểm chung với (C).

<u>TH3:</u> Đường thẳng d_2 cắt đường tròn (C), đường thẳng d_1 không có điểm chung với (C).

Bài 33. Tìm m để hệ phương trình sau $\begin{cases} x^3-y^3=m(x-y) \\ x+y=-1 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt $(x_1;y_1),(x_2;y_2),(x_3;y_3)$ trong đó x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số cộng và có hai số có trị tuyệt đối lớn hơn 1.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-m)=0 \\ x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=-\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+xy+y^2-m=0 \end{cases} \end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} y = -1 - x \\ x^2 + x(-1-x) + (-1-x)^2 - m = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} y = -1 - x \\ x^2 + x + 1 - m = 0 \ (1) \end{cases} \end{array}\right. .$$

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \\ |x_1| > 1 \\ |x_2| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(1-m) > 0 \\ -1 = -1 \\ \left|\frac{-1-\sqrt{4m-3}}{2}\right| > 1 \\ \left|\frac{-1+\sqrt{4m-3}}{2}\right| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $(3;+\infty)$.

Bài 34. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, (S^2 \geq 4P)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S + P = m \\ S^2 - 2P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = m - S \\ S^2 - 2(m-S) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = m - S \\ S^2 + 2S = 3m \end{cases}.$$

Ta có: $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow S^2 \geq 4(m-S) \Leftrightarrow S^2 + 4S \geq 4m$.

Mặt khác $m = \frac{S^2 + 2S}{3}$ do đó $S^2 + 4S \geq 4.\frac{S^2 + 2S}{3} \Leftrightarrow S^2 - 4S \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq S \leq 4$.

Suy ra $m = \frac{S^2 + 2S}{3} \in [0;8]$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $[0;8]$.

Bài 35. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = m + 6 \\ 2x + xy + 2y = m \end{cases}$.

a) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm.

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

Lời giải

a) Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 \ge 4P\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S^2 - 2P + P = m + 6 \\ 2S + P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S = 2m + 6 \ (1) \\ P = m - 2S \end{cases}.$$

Ta có: $S^2 \ge 4P \Leftrightarrow S^2 \ge 4\left(m - 2S\right) \Leftrightarrow S^2 + 8S \ge 4m$.

Mặt khác: $m = \dfrac{S^2 + 2S - 6}{2}$ suy ra:

$S^2 + 8S \ge 4.\dfrac{S^2 + 2S - 6}{2} \Leftrightarrow 2S^2 - 8S - 24 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le S \le 6$.

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $-2 \le S \le 6$.

Xét hàm số $f(S) = \dfrac{S^2 + 2S - 6}{2}$ trên $\left[-2;6\right]$, ta có:

$f'(S) = S + 1; f'(S) = 0 \Leftrightarrow S = -1$.

Ta có: $f(-2) = -3; f(6) = 21; f(-1) = -\dfrac{7}{2}$.

Suy ra giá trị cần tìm của tham số là $\left[-\dfrac{7}{2};21\right]$.

b) Nếu hệ có nghiệm $\left(x;y\right)$ thì $\left(y;x\right)$ cũng là nghiệm của hệ đã cho. Vì vậy để hệ có nghiệm duy nhất trước tiên phải có $x = y$. Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 3x^2 = m + 6 \\ x^2 + 4x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3x^2 - 6 \\ x^2 + 4x = 3x^2 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3x^2 - 6 \\ 2x^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, m = -3 \\ x = 3, m = 21 \end{array}\right.$$

TH1: Nếu $m = -3$ khi đó hệ trở thành:

$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ 2x + xy + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, y = -1 \\ x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3} \\ x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3} \end{array}\right.$ nên không thỏa mãn.

TH2: Nếu $m = 21$: khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 27 \\ 2x + xy + 2y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất nên thỏa mãn.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m = 21$.

Bài 36. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x-3\sqrt{x+1}=3\sqrt{y+2}-y \\ x+y=m \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x\ge -1, y\ge -2$.

Viết lại hệ dưới dạng : $\begin{cases} x+y=3\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}\right) \\ x+y=m \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+1} \\ v=\sqrt{y+2} \end{cases}, \left(u,v\ge 0\right)$ khi đó hệ phương trình trở thành :

$$\begin{cases} u^2+v^2-3=3\left(u+v\right) \\ u^2+v^2-3=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(u+v\right)=m \\ u^2+v^2=m+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=\dfrac{m}{3} \\ uv=\dfrac{\left(u+v\right)^2-\left(u^2+v^2\right)}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m^2}{9}-m-3\right) \end{cases}.$$

Khi đó u,v là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2-\frac{m}{3}t+\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{9}-m-3\right)=0 \ (1).$$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm không âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=\dfrac{m^2}{9}-2\left(\dfrac{m^2}{9}-m-3\right)\ge 0 \\ \dfrac{m}{3}\ge 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m^2}{9}-m-3\right)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2}\le m\le 9+3\sqrt{15}.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[\dfrac{9+3\sqrt{21}}{2};9+3\sqrt{15}\right]$.

Bài 37. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực $x, y \neq 0$:

$$\begin{cases} xy(x+y) = x^2 - xy + y^2 \\ \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = m \end{cases}$$

Lời giải

Từ phương trình đầu của hệ ta có:

$$\frac{xy(x+y)}{x^2y^2} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}.$$

Đặt $u = \dfrac{1}{x}, v = \dfrac{1}{y}, (u, v \neq 0)$ khi đó $u + v = u^2 - uv + v^2$;

Và $m = u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) = (u+v)^2$.

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} u + v = u^2 - uv + v^2 \\ (u+v)^2 = m \end{cases}$.

Trước tiên ta phải có $m \geq 0$ và để ý:

$$u + v = u^2 - uv + v^2 = \left(u - \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3v^2}{4} > 0, \forall u, v \neq 0$$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng :

$$\begin{cases} u + v = (u+v)^2 - 3uv \\ (u+v)^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = \dfrac{(u+v)^2 - (u+v)}{3} \\ u + v = \sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = \dfrac{m - \sqrt{m}}{3} \\ u + v = \sqrt{m} \end{cases}.$$

Khi đó u, v là hai nghiệm của hệ phương trình: $t^2 - \sqrt{m}t + \dfrac{m - \sqrt{m}}{3} = 0$ (1)

Hệ có nghiệm thỏa mãn yêu cầu trên $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $u, v \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m - 4.\dfrac{m - \sqrt{m}}{3} \geq 0 \\ P = \dfrac{m - \sqrt{m}}{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 16 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $(0;1) \cup (1;16]$.

Chủ đề 2. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI II

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp giải và biện luận giống như giải hệ phương trình đối xứng loại II đó là trừ theo vế hai phương trình của hệ.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 3x^2 = y^3 - 2y^2 + my \\ 3y^2 = x^3 - 2x^2 + mx \end{cases}.$$

Lời giải

+ Điều kiện cần:

Giả sử hệ phương trình có nghiệm (x_0, y_0), khi đó (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0 = y_0$.

Thay vào hệ ta được $x_0{}^3 - 5x_0{}^2 + mx_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0{}^2 - 5x_0 + m = 0 (*) \end{array}\right.$

Hệ có nghiệm duy nhất thì (*) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$, điều này tương đương với: $\left[\begin{array}{l} \Delta = 25 - 4m < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 25 - 4m = 0 \\ m = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m > \frac{25}{4}$.

+ Điều kiện đủ:

Với $m > \frac{25}{4}$, khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 3x^2 = y\left(y^2 - 2y + m\right) = y\left((y-1)^2 + m - 1\right) \geq 0 \\ 3y^2 = x\left(x^2 - 2x + m\right) = x\left((x-1)^2 + m - 1\right) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x, y \geq 0.$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x\left(x^2 - 5x + m\right) + y\left(y^2 - 5y + m\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + m - \frac{25}{4}\right) + y\left(\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + m - \frac{25}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Vậy với $m > \frac{25}{4}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = (0;0)$.

Kết luận: Vậy $m > \frac{25}{4}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 2. Chứng minh rằng hệ phương trình:

$$\begin{cases} e^x = 2014 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2014 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$$ có đúng 2 nghiệm thỏa mãn $x > 0; y > 0$.

Lời giải

Điều kiện: $|x| > 1, |y| > 1$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$e^x - e^y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \Leftrightarrow e^x - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = e^y - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \ (1).$$

Xét hàm số $f(t) = e^t - \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ trên $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, ta có:

$f'(t) = e^t + \dfrac{1}{(t^2-1)\sqrt{t^2-1}} > 0, \forall |t| > 1$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Với $x > 0, y > 0$ ta có $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$e^x - 2014 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \ (2).$$

Xét hàm số $g(x) = e^x - 2014 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ liên tục trên $(1;+\infty)$, ta có:

$g'(x) = e^x - \dfrac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}; g''(x) = e^x + \dfrac{3x}{(x^2-1)^2\sqrt{x^2-1}} > 0, \forall x > 1$ nên phương trình $g'(x) = 0$ có tối đa một nghiệm suy ra phương trình $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm trên $(1;+\infty)$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty; g(2) = e^2 - 2014 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} < 0; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Do đó tồn tại $x_1 \in (1;2), x_2 \in (2;+\infty)$ sao cho $g(x_1) = g(x_2) = 0$ hay phương trình (2) có đúng hai nghiệm trên $(1;+\infty)$. Từ đó suy ra hệ phương trình có đúng hai nghiệm $x > 0, y > 0$ (đpcm).

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=m\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x-2}=m\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2, y\ge 2, m\ge 0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}-\sqrt{y+1}-\sqrt{x-2}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}\right)+\left(\sqrt{y-2}-\sqrt{x-2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-y}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{y-x}{\sqrt{y-2}+\sqrt{x-2}}=0.$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}-\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=y$ (do $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}>0$).

Khi đó thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=m \quad (1).$$

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}$ đồng biến trên $\left[2;+\infty\right)$ nên $f(x)\ge f(2)=\sqrt{3}$ với mọi $x\ge 2$.

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge\sqrt{3}$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m\ge\sqrt{3}$.

Bài 2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x^2y+m=y^2\\ xy^2+m=x^2\end{cases}$.

Lời giải

+ Điều kiện cần:

Giả sử hệ phương trình có nghiệm (x_0,y_0), khi đó (y_0,x_0) cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0=y_0$.

Thay vào hệ ta được: $m=x_0^2-x_0^3$ (1).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi (1) có nghiệm duy nhất.

Xét hàm số $f(x_0)=x_0^2-x_0^3$ lập bảng biến thiên suy ra giá trị của m là $m<0$.

+ Điều kiện đủ:

Với $m<0$ khi đó trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$xy\left(x-y\right)=y^2-x^2 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(xy+x+y\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy+x+y=0 \end{array}\right..$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$xy\left(x+y\right)+2m=x^2+y^2$. Do $m<0, x^2+y^2\ge 0$ suy ra $xy\left(x+y\right)>0$ do đó $xy+x+y\ne 0$. Vì vậy $x=y$.

Với $x=y$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được: $m=x^2-x^3$ có nghiệm duy nhất với mọi $m<0$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m<0$.

Bài 3. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} \left(x+1\right)^2=y+m \\ \left(y+1\right)^2=x+m \end{cases}.$

Lời giải

+ Điều kiện cần:

Giả sử hệ phương trình có nghiệm $\left(x_0,y_0\right)$, khi đó $\left(y_0,x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0=y_0$.

Thay vào phương trình của hệ ta được: $m=x_0^2+x_0+1$ (1).

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta=4m-3=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{4}$.

+ Điều kiện đủ: Với $m=\dfrac{3}{4}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \left(x+1\right)^2=y+\dfrac{3}{4} \\ \left(y+1\right)^2=x+\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-y\right)\left(x+y+3\right)=0 \\ \left(x+1\right)^2=y+\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{(thỏa mãn).}$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m=\dfrac{3}{4}$.

Bài 3. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x^3=2y+x+m \\ y^3=2x+y+m \end{cases}.$

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$x^3 - y^3 = y - x \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow y = x$.

Thay $y = x$ vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^3 = 3x + m \Leftrightarrow m = x^3 - 3x \ (1).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm duy nhất.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và lập bảng biến thiên suy ra (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m > 2$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m > 2$.

Nhận xét. Hệ phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow m = -2$ hoặc $m = 2$.

Hệ phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Bài 4. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} y^2 - (x+y) = 2m \\ x^2 - (x+y) = 2m \end{cases}$.

Lời giải

\+ Điều kiện cần:

Giả sử hệ phương trình có nghiệm (x_0, y_0), khi đó (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0 = y_0$.

Thay vào phương trình của hệ ta được: $2m = x_0^2 - 2x_0$ (1).

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

\+ Điều kiện đủ: Với $m = -\frac{1}{2}$ hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases} y^2 - (x+y) = -1 \\ x^2 - (x+y) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = 0 \\ x^2 - (x+y) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m = -\frac{1}{2}$.

Bài 5. Tìm m để hệ phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$\begin{cases} x^2 + (m+2)x = my \\ y^2 + (m+2)y = mx \end{cases}.$$

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^2-y^2+(m+2)(x-y)=m(y-x).$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+2m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y+2m+2=0 \end{array}\right..$$

<u>TH1:</u> Với $x=y$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2+(m+2)x=mx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=-2, y=-2 \end{array}\right..$$

<u>TH2:</u> Với $x+y+2m+2=0 \Rightarrow y=-2m-2-x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$x^2+(m+2)x=m(-2m-2-x) \Leftrightarrow x^2+2(m+1)x+2m^2+2m=0 \ (1).$$

Hệ phương trình có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=0$ hoặc $x=-2$ hoặc có hai nghiệm phân biệt $x_1=0, x_2=-2$ và $y=0, y=-2$ tương ứng.

Xét trường hợp ta có kết quả của tham số là $|m|>1$.

Bài 6. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^3=y^2+7x^2-mx \\ y^3=x^2+7y^2-my \end{cases}.$$

Lời giải

+ Điều kiện cần:

Giả sử hệ phương trình có nghiệm (x_0, y_0), khi đó (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0=y_0$.

Thay vào phương trình của hệ ta được:

$$x_0^3=8x_0^2-mx_0 \Leftrightarrow x_0\left(x_0^2-8x_0+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x_0=0 & \\ x_0^2-8x_0+m=0 & (1) \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$x_0=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'=16-m<0 \\ \begin{cases} \Delta'=16-m=0 \\ 0^2-8.0+m=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m>16.$$

+ Điều kiện đủ: Với $m>16$:

Hệ phương trình viết lại dưới dạng: $\begin{cases} x\left(x^2+m\right)=y^2+7x^2 \\ y\left(y^2+m\right)=x^2+7y^2 \end{cases} \Rightarrow x,y\ge 0$.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^3+y^3=8x^2+8y^2-mx-my \Leftrightarrow x^3-8x^2+mx+y^3-8y^2+my=0.$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-8x+m\right)+y\left(y^2-8y+m\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow x\left(\left(x-4\right)^2+m-16\right)+y\left(\left(y-4\right)^2+m-16\right)=0 \Leftrightarrow x=y=0.$$

Vậy với $m>16$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m>16$.

Bài 7. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} y^2=x^3-4x^2+mx \\ x^2=y^3-4y^2+my \end{cases}$.

Lời giải

Với mọi giá trị của tham số m hệ phương trình trên luôn có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$. Vậy giá trị cần tìm của tham số là tập số thực.

Bài 8. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{3-y}=m \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{3-x}=m \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $-1\le x\le 3,-1\le y\le 3$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}+\sqrt{3-y}-\sqrt{3-x}=0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}=\sqrt{y+1}-\sqrt{3-y} \Leftrightarrow x=y.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$m=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\ (1).$$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm.

Ta có: $\begin{cases} \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)^2=4+2\sqrt{\left(x+1\right)\left(3-x\right)}\ge 4 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\le\sqrt{2\left(x+1+3-x\right)}=2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow 2 \le \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \le 2\sqrt{2}$.

Suy ra $2 \le m \le 2\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm của tham số.

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} 3x^2y - 2y^2 - m = 0 \\ 3y^2x - 2x^2 - m = 0 \end{cases}.$$

Lời giải

Với mọi $m > 0$ cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$3x^2y + 3xy^2 = 2m + 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 3xy\left(x+y\right) = 2m + 2x^2 + 2y^2 > 0.$$

$\Rightarrow xy\left(x+y\right) > 0$ hay $xy, x+y$ cùng dấu .

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$3x^2y - 3y^2x + 2x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left(3xy + x + y\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (do $xy, x+y$ cùng dấu).

Với $y = x$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được:

$3x^3 - 2x^2 = m$. Xét hàm số $f(x) = 3x^3 - 2x^2$ và lập bảng biến suy ra với $m > 0$ phương trình trên có nghiệm duy nhất do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất(đpcm).

Bài 10. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} xy + x^2 = m\left(y-1\right) \\ xy + y^2 = m\left(x-1\right) \end{cases}.$$

Lời giải

+ Điều kiện cần:

Giả sử hệ phương trình có nghiệm $\left(x_0, y_0\right)$, khi đó $\left(y_0, x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0 = y_0$.

Thay vào phương trình của hệ ta được:

$2x_0^2 = m\left(x_0 - 1\right) \Leftrightarrow 2x_0^2 - mx_0 + m = 0$ (1).

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 8 \end{array}\right.$.

+ Điều kiện đủ:

Với $m=0$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} xy+x^2=0 \\ xy+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Với $m=8$ hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} xy+x^2=8\left(y-1\right) \\ xy+y^2=8\left(x-1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m=0$ hoặc $m=8$.

Bài 11. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}-4=m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}-4=m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \end{cases}.$$

Lời giải

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{7+x}-\sqrt{11-x}=\sqrt{7+y}-\sqrt{11-y} \Leftrightarrow x=y.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$\sqrt{7+x}+\sqrt{11-x}=4+m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \ (1).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm duy nhất.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{7+x}+\sqrt{11-x}$ trên $\left[-7;11\right]$, ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{7+x}}-\frac{1}{2\sqrt{11-x}}; f'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{11-x}=\sqrt{x+7} \Leftrightarrow x=2.$$

Lập bảng biến thiên của $f(x)$ suy ra (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

$$4+m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}}=6 \Leftrightarrow m-2=\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \Leftrightarrow m=3.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m=3$.

Chủ đề 3. **HỆ ĐẲNG CẤP**

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Nội dung chủ đề này chủ yếu đề cập đến các bài toán chứa tham số xoay quanh dạng hệ đẳng cấp bậc hai:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}.$$

Như đã đề cập trong phương pháp giải hệ đẳng cấp ta nhân chéo hai phương trình của hệ đưa về phương trình đồng bậc:

$$d_2\left(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2\right) = d_1\left(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2\right).$$

Phương pháp sử dụng chủ yếu đó là kỹ năng khảo sát tìm miền giá trị của hàm số bậc hai/bậc hai.

Dạng hệ bất phương trình đẳng cấp đòi hỏi vận dụng một số kỹ năng khác như cộng,trừ theo vế hai phương trình của hệ, xét nghiệm thỏa mãn và chứng minh tùy thuộc vào từng bài toán.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 1 & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = m \end{cases}$$

Lời giải

Từ hai phương trình trong hệ ta có: $m = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{2x^2 + xy - y^2}$ (2).

<u>TH1:</u> Nếu $y = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$ và hệ có nghiệm $\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}};0\right)$.

<u>TH2:</u> Nếu $y \neq 0$ chia cả tử và mẫu của (2) cho y và đặt $t = \dfrac{x}{y}$, khi đó ta được:

$m = \dfrac{t^2 + t + 1}{2t^2 + t - 1}$ (3). Từ (1) ta có: $2t^2 + t - 1 = \dfrac{1}{y^2} > 0 \Rightarrow \left(t > \dfrac{1}{2}\right) \vee \left(t < -1\right)$.

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm:

$$t \in \left(-\infty;-1\right) \cup \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right).$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+t+1}{2t^2+t-1}$ trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, ta có:

$$f'(t)=-\frac{t^2+6t+2}{\left(2t^2+t-1\right)^2};f'(t)=0\Leftrightarrow t^2+6t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3-\sqrt{7}\\t=-3+\sqrt{7}\end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên suy ra giá trị của m là $m\ge\dfrac{14+5\sqrt{7}}{28+11\sqrt{7}}$.

Bài 2. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases}5x^2-4xy+2y^2\ge 3\\7x^2+4xy+2y^2\le\dfrac{2m-1}{2m+5}\end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}-5x^2+4xy-2y^2\le -3\\21x^2+12xy+6y^2\le 3-\dfrac{18}{2m+5}\end{cases}.$

Cộng theo vế hai phương trình trong hệ trên ta được:

$$\left(4x+2y\right)^2=16x^2+16xy+4y^2\le -\frac{18}{2m+5}.$$

Suy ra để hệ có nghiệm thì cần $-\dfrac{18}{2m+5}\ge 0\Leftrightarrow 2m+5<0\Leftrightarrow m<-\dfrac{5}{2}$.

Bây giờ ta chứng minh với $m<-\dfrac{5}{2}$ thì hệ bất phương trình có nghiệm.

Thật vậy, xét hệ phương trình sau:

$\begin{cases}5x^2-4xy+2y^2=3\\21x^2+12xy+6y^2=3\end{cases}(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{1}{7}\\y=\mp\dfrac{2}{7}\end{cases}$, suy ra hệ này có nghiệm.

Giả sử $\left(x_0,y_0\right)$ là nghiệm của hệ phương trình (*), khi đó ta có:

$\begin{cases}5x_0{}^2-4x_0y_0+2y_0{}^2=3\\21x_0{}^2+4x_0y_0+6y_0{}^2=3<3-\dfrac{18}{2m+5}\end{cases}$ với $m<-\dfrac{5}{2}$.

Suy ra $\left(x_0,y_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m < -\frac{5}{2}$.

<u>Nhận xét.</u> Nút thắt của bài toán là tìm ra bất đẳng thức: $(4x+2y)^2 \le -\frac{18}{2m+5}$.

Để làm được điều này ta viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} -5x^2+4xy-2y^2 \le -3 \\ 7kx^2+4kxy+2ky^2 \le k.\frac{2m-1}{2m+5} \end{cases}, (k>0).$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$(7k-5)x^2+4(k+1)xy+2(k-1)y^2 \le -3+k.\frac{2m-1}{2m+5}.$$

Ta cần tạo ra một hằng đẳng thức ở vế trái của bất đẳng thức trên muốn vậy $k>0, 7k-5>0, k-1>0$ và

$$\sqrt{(7k-5)}.\sqrt{2(k-1)} = 2(k+1) \Leftrightarrow 5k^2-16k+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=3 \\ k=\frac{1}{5} \end{array}\right..$$

Vậy $k=3$ đó chính là giải thích vì sao nhân hai vế bất phương trình thứ hai của hệ với 3.

Bài 3. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x^2-xy+2y^2-x \le m \\ x^2-2xy-2x \le m-2 \end{cases}.$$

Lời giải

Hệ bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2-xy+2y^2-x \le m \\ x^2-2xy-2x+2 \le m \\ 2(x^2-xy+2y^2-x)+(x^2-2xy-2x+2) \le 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy+2y^2-x \le m \\ x^2-2xy-2x+2 \le m \\ 2(x-2y)^2+2(x-1)^2 \le 3m \end{cases}$$

Suy ra để hệ có nghiệm thì trước tiên $3m \ge 0 \Rightarrow m \ge 0$

Ngược lại với $m \ge 0$; thì hệ luôn có nghiệm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Vậy $m \ge 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Tìm m để hệ phương trình sau có 3 nghiệm thực phân biệt:

$$\begin{cases} 2x^2y+9x = my^2 \\ xy^2+2y = x^2 \end{cases}.$$

Lời giải

Nếu $x=0 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow (x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình với mọi m.

Xét $xy \neq 0$ khi đó đặt $t=xy$ và viết hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} xy(2xy+9)=my^3 \\ xy(xy+2)=x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(2t+9)=my^3 \\ t(t+2)=x^3 \end{cases}.$$

Nếu $m=0 \Rightarrow t=-\dfrac{9}{2}$ hệ phương trình vô nghiệm.

Vậy $m \neq 0 \Rightarrow t \neq \left\{0;-\dfrac{9}{2};-2\right\}$.

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{t(t+2)} \\ y=\sqrt[3]{\dfrac{t(2t+9)}{m}} \end{cases} \Rightarrow t=\sqrt[3]{t(t+2)}.\sqrt[3]{\dfrac{t(2t+9)}{m}} \Leftrightarrow 2t^2+(13-m)t+18=0 \ (1).$$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm phân biệt khi (1) có hai nghiệm phân biệt $t \notin \left\{0;-\dfrac{9}{2};-2\right\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(13-m)^2-144>0 \\ 18 \neq 0 \\ 8-2(13-m)+18 \neq 0 \\ \dfrac{81}{2}-\dfrac{9}{2}(13-m)+18 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>25 \end{array}\right. \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $m \in (-\infty;0) \cup (0;1) \cup (25;+\infty)$.

Bài 5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=8 \\ 2x^2+4xy+5y^2=m^4-4m^3+4m^2-12+\sqrt{105} \end{cases}.$$

Lời giải

Để cho đơn giản ta đặt $a=m^4-4m^3+4m^2-12+\sqrt{105}$.

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ phương trình:

Khi đó đặt $t=\frac{y}{x}$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x^2\left(1-2t-3t^2\right)=8 \\ x^2\left(2+4t+5t^2\right)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8.\dfrac{5t^2+4t+2}{-3t^2-2t+1} \\ 1-2t-3t^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8.\dfrac{5t^2+4t+2}{-3t^2-2t+1} \\ -1<t<\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=8.\frac{5t^2+4t+2}{-3t^2-2t+1}$ trên $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$, ta có:

$$f'(t)=8.\frac{2t^2+22t+8}{\left(-3t^2-2t+1\right)^2}; f'(t)=0 \Leftrightarrow 2t^2+22t+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-11-\sqrt{105}}{2} \\ t=\dfrac{-11+\sqrt{105}}{2} \end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên suy ra:

$$\min_{t\in\left(-1;\frac{1}{3}\right)} f(t)=f\left(\frac{-11+\sqrt{105}}{2}\right)=\sqrt{105}-3; \lim_{t\to -1} f(t)=\lim_{t\to \frac{1}{3}} f(t)=+\infty.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm $t\in\left(-1;\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow a\ge\sqrt{105}-3$.

$\Leftrightarrow m^4-4m^3+4m^2-12+\sqrt{105}\ge\sqrt{105}-3 \Leftrightarrow m^4-4m^3+4m^2-9\ge 0$.

$\Leftrightarrow (m-3)(m+1)\left(m^2-2m+3\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 3 \\ m\le -1 \end{array}\right.$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left(-\infty;-1\right]\cup\left[3;+\infty\right)$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+3y^2=m \end{cases}.$$

Lời giải

Từ hệ phương trình suy ra: $m=11.\frac{x^2+2xy+3y^2}{3x^2+2xy+y^2}$.

<u>TH1:</u> Nếu $y=0$ khi đó $m=\frac{11}{3}$ hệ phương trình có nghiệm $\left(\pm\sqrt{\frac{11}{3}};0\right)$.

TH2: Nếu $y \neq 0$ khi đó $m = 11.\dfrac{t^2+2t+3}{3t^2+2t+1}$ (1) với $t = \dfrac{x}{y}$.

Xét hàm số $f(t) = 11.\dfrac{t^2+2t+3}{3t^2+2t+1}$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t) = -44.\frac{t^2+4t+1}{\left(3t^2+2t+1\right)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2+4t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2-\sqrt{3} \\ t=-2+\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Lập bảng biến thiên suy ra:

$$\min_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f\left(-2-\sqrt{3}\right) = 11\left(2-\sqrt{3}\right); \max_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f\left(-2+\sqrt{3}\right) = 11\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Kết hợp với trường hợp 1 suy ra để hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thực

$\Leftrightarrow 11\left(2-\sqrt{3}\right) \le m \le 11\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[11\left(2-\sqrt{3}\right); 11\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$.

Bài 2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ x^2+xy-2y^2=m \end{cases}.$$

Lời giải

Từ hệ phương trình suy ra: $m = 3.\dfrac{x^2+xy-2y^2}{x^2-xy+y^2}$.

TH1: Nếu $y = 0 \Leftrightarrow m = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ hệ phương trình có nghiệm $\left(\pm\sqrt{3};0\right)$.

TH2: Nếu $y \neq 0$ khi đó $m = 3.\dfrac{t^2+t-2}{t^2-t+1}$ (1) với $t = \dfrac{x}{y}$.

Xét hàm số $f(t) = 3.\dfrac{t^2+t-2}{t^2-t+1}$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t) = 3.\frac{-2t^2+6t-1}{\left(t^2-t+1\right)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2+6t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \\ t=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \end{array}\right..$$

Suy ra $\min\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right) = -1-2\sqrt{7}; \max\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right) = -1+2\sqrt{7}$.

Hệ phương trình có nghiệm khi (1) có nghiệm thực:

$\Leftrightarrow -1-2\sqrt{7} \le m \le -1+2\sqrt{7}$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[-1-2\sqrt{7}; -1+2\sqrt{7}\right]$.

Bài 3. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 \le m \\ x^2 + 2xy - 2y^2 \le 2m+1 \end{cases}.$$

Lời giải

Với $x = 0$ hệ bất phương trình trở thành:

$\begin{cases} -y^2 \le m \\ -2y^2 \le 2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \ge -m \\ y^2 \ge -\dfrac{2m+1}{2} \end{cases} \Rightarrow y \ge \max\left\{\sqrt{|m|}, \sqrt{\dfrac{|2m+1|}{2}}\right\}$ là nghiệm của hệ bất phương trình.

Do đó hệ đã cho không thể có nghiệm duy nhất. Vậy không tồn tại m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 4. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 \le m \\ x^2 - 4xy - y^2 \le m \end{cases}$$

Lời giải

Ta có $x^2 + 2xy + 2y^2 = \left(x+y\right)^2 + y^2 \ge 0$ nên với $m < 0$ hệ bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $m > 0$ hệ bất phương trình có nghiệm $\left(0;0\right); \left(\sqrt{m};0\right)$ nên không có nghiệm duy nhất.

Xét $m = 0$ hệ bất phương trình trở thành:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 \le 0 \\ x^2 - 4xy - y^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+y\right)^2 + y^2 \le 0 \\ x^2 - 4xy - y^2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \\ x^2-4xy-y^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$.

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} xy-y^2=12 \\ x^2-xy=26+m \end{cases}$

Lời giải

Nếu $y=0$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Xét $y\neq 0$ khi đó đặt $t=\dfrac{x}{y}$ ta có:

$$\begin{cases} y^2\left(t-1\right)=12 \\ y^2\left(t^2-t\right)=26+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>1 \\ m+26=12.\dfrac{t^2-t}{t-1}=12t \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m+26=12t>12 \Leftrightarrow m>-14$.

Vậy $m>-14$ là giá trị cần tìm của tham số.

Bài 6. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3x^2+10xy-5y^2<-2 \\ x^2+2xy-7y^2 \ge \dfrac{1-m}{1+m} \end{cases}$$

Lời giải

Hệ bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3x^2+10xy-5y^2<-2 \\ -2x^2-4xy+14y^2 \le -2.\dfrac{1-m}{1+m} \end{cases}.$$

Cộng theo vế hai bất phương trình của hệ ta được:

$$x^2+6xy+9y^2<-2-2.\frac{1-m}{1+m} \Leftrightarrow \left(x+3y\right)^2<\frac{-4}{m+1}.$$

Vậy để hệ bất phương trình có nghiệm trước tiên ta phải có:

$$\frac{-4}{m+1}>0 \Leftrightarrow m<-1.$$

Ta chứng minh với $m < -1$ thì hệ bất phương trình có nghiệm.

Thật vậy xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2 + 10xy - 5y^2 < -2 \\ -x^2 - 2xy + 7y^2 = 1 \end{cases}.$$

Hệ này luôn có nghiệm $(x_0; y_0)$

Khi đó $\begin{cases} 3x_0^2 + 10x_0y_0 - 5y_0^2 < -2 \\ x_0^2 + 2x_0y_0 - 7y_0^2 = -1 \geq \dfrac{1-m}{1+m}, \forall m < -1 \end{cases}.$

Tức $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m < -1$.

Bài 7. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 < m^2 \\ x^2 + xy - 4y^2 \geq m + 4 \end{cases}.$$

Lời giải

Hệ bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 < m^2 \\ -2x^2 - 2xy + 8y^2 \leq -2(m+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 < m^2 \\ (x-3y)^2 < m^2 - 2m - 8 \end{cases}.$$

Hệ bất phương trình có nghiệm trước tiên ta phải có:

$m^2 - 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

Mặt khác với mọi $m > 4 \vee m < -2$ hệ bất phương trình luôn có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

Bài 8. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 4y^2 \leq 6 & (1) \\ x^2 + xy - 2y^2 = m & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Lấy $(1) + k.(2)$ theo vế ta được:

$$4x^2 - 3xy + 4y^2 + k\left(x^2 + xy - 2y^2\right) \leq 6 + km.$$

$\Leftrightarrow (k+4)x^2 + (k-3)xy + (4-2k)y^2 \le 6 + km$.

Ta chọn k sao cho $4-2k>0, 4+k>0$ và $\sqrt{(k+4)(4-2k)} = \dfrac{3-k}{2}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \le 3 \\ 4(k+4)(4-2k) = 9-6k+k^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{2\sqrt{130}-5}{9} \\ k = -\dfrac{2\sqrt{130}+5}{9} \end{array} \right.$$

Khi đó $m.k + 6 \ge \left(\sqrt{k+4}x - \sqrt{4-2k}y\right)^2 \ge 0 \Rightarrow m.k \ge -6$.

Nếu $k = \dfrac{2\sqrt{130}-5}{9} \Rightarrow m \ge -\dfrac{54}{2\sqrt{130}-5}$.

Nếu $k = -\dfrac{2\sqrt{130}+5}{9} \Rightarrow m \le \dfrac{54}{2\sqrt{130}+5}$.

Vậy $-\dfrac{54}{2\sqrt{130}-5} \le m \le m \le \dfrac{54}{2\sqrt{130}+5}$ là những giá trị cần tìm.

Chủ đề 4. KỸ THUẬT SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ - XỬ LÝ BÀI TOÁN HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA THAM SỐ

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Nội dung chủ đề này tôi xin trình bày với các bạn bài toán Biện luận hệ phương trình dựa vào tính đơn điệu của hàm số. Các bài toán chứa tham số giải bằng phương pháp tính đơn điệu của hàm số thường xuất phát từ Bài toán tìm điều kiện của tham số để phương trình, bất phương trình có nghiệm. Phương pháp chung để giải các bài toán dạng này đó là khử tham số đưa biến về một vế (vế trái) và đưa tham số về một vế (vể phải) của phương trình. Xét miền giá trị của hàm số chứa biến từ đó suy ra các giá trị của tham số cần tìm. Với các bài toán biện luận chúng ta cần lưu ý kiến thức về dấu của tam thức bậc hai

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$; $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình có hai nghiệm thì theo vi–ét ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

– Dấu của $f(x)$:

$$+\ f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

$$+\ f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

$$+\ f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$$

$$+\ f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$$

– Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$.

– Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})^3$$

– Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt không âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta = b^2 - 4ac > 0\\ S = -\dfrac{b}{a} > 0\\ P = \dfrac{c}{a} \geq 0\end{cases}$$

– Phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt âm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta = b^2 - 4ac > 0\\ S = -\dfrac{b}{a} < 0\\ P = \dfrac{c}{a} > 0\end{cases}$$

– So sánh nghiệm của phương trình với một số $\alpha \neq 0$ ta vận dụng tính chất dấu của tam thức bậc hai (Định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai – ngoài khoảng hai nghiệm thì cùng dấu với *a* và trong khoảng hai nghiệm thì trái dấu với *a*).

– $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta = b^2 - 4ac > 0\\ af(\alpha) < 0\end{cases}$

– $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta = b^2 - 4ac > 0\\ \dfrac{S}{2} = -\dfrac{b}{2a} < \alpha\\ af(\alpha) > 0\end{cases}$

– $x_2 > x_1 > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta = b^2 - 4ac > 0\\ \dfrac{S}{2} = -\dfrac{b}{2a} > \alpha\\ af(\alpha) > 0\end{cases}$

Tuy nhiên từ năm học 2009 bộ giáo dục và đào tạo chủ trương cắt bỏ phần này nên khi thi đại học nên không sử dụng được cách này. Mà có thể xử lý bằng ba cách khác như sau

Cách 2. Khử tham số m tự do và sử dụng tính đơn điệu của hàm số. Cách này có một hạn chế là khi tăng bậc của tham số lên chẳng hạn xuất hiện $m, m^2, m^3, \ldots$ thì cách này không hiệu quả.

Cách 3. Dùng nguyên lý cực hạn, tức ta lấy nghiệm nhỏ nhất hoặc nghiệm lớn nhất của phương trình so sánh với số α.

Khơng mất tính tổng quát giả sử $a>0$ và $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}<x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ tùy thuộc yêu cầu bài toán ta có bốn hướng xử lý như sau:

- Nếu $x_1<\alpha<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}<\alpha<\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$.

- Nếu $x_2>x_1>\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}>\alpha\end{cases}$.

- Nếu $x_1<x_2<\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}<\alpha\end{cases}$.

Cách 4. Dùng định lý vi–ét

– $x_1<\alpha<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ x_1x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2<0\end{cases}$

– $x_1<x_2<\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ x_1-\alpha<0\\ x_2-\alpha<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ x_1+x_2-\alpha<0\\ (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\end{cases}$

– $x_2>x_1>\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ x_1-\alpha>0\\ x_2-\alpha>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=b^2-4ac>0\\ x_1+x_2-\alpha>0\\ (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\end{cases}$

Nhận xét. *Nội dung của cách dùng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai với cách 4 có nội dung giống nhau chỉ khác nhau về hình thức áp dụng. Chỉ duy nhất cách hai dùng tính đơn điệu hàm số đôi khi giải quyết bài toán nhanh gọn nhưng một số trường hợp không khử được tham số dạng tự do thì ta không làm được theo cách này. Còn ba cách còn lại phù hợp với kiến thức lớp 10 hoàn toàn dùng những kiến thức cơ bản. Cả bốn cách đều dùng được trong trường hợp khử được tham số m về trạng thái tự do (thông thường là bậc 1 đối với m). Để hiểu rõ hơn các em xem lời giải chi tiết các bài tập mẫu bên dưới.*

Bài toán tìm điều kiện của tham số thường quy về sử dụng tính đơn điệu của hàm số, thường là tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một miền điều kiện đề bài cho trước (hoặc xuất phát từ điều kiện của phương trình).

Một phương trình có dạng $G(x, m) = 0$ ta phải biến đổi phương trình về dạng $f(x) = g(m)$, trong đó $g(m)$ là một hàm đối với tham số và miền xác định ở đây là $D = [a; b]$ hoặc $(a; b)$ hoặc $(a; +\infty)$ hoặc $(-\infty; a)$,...

Sau khi biến đổi ta được một số dạng phương trình, bất phương trình sau:

– $g(m) = f(t), t \in D \Rightarrow \min\limits_{t\in D} f(t) \le g(m) \le \max\limits_{t\in D} f(t)$

– $g(m) \ge f(t), t \in D$ có nghiệm $t \in D \Rightarrow g(m) \ge \min\limits_{t\in D} f(t)$

– $g(m) \le f(t), t \in D$ có nghiệm $t \in D \Rightarrow g(m) \le \max\limits_{t\in D} f(t)$

– $g(m) \ge f(t), t \in D$ có nghiệm với mọi t thuộc D khi và chỉ khi $g(m) \ge \max\limits_{t\in D} f(t)$.

– $g(m) \le f(t), t \in D$ có nghiệm với mọi t thuộc D khi và chỉ khi $g(m) \le \min\limits_{t\in D} f(t)$.

Thông thường chúng ta biến đổi tương đương và xét hàm trực tiếp. Một số khác phương trình có dạng thức đặt ẩn phụ như đã đề cập đến trong phần giải phương trình, bất phương trình vô tỷ thì chúng ta đặt ẩn phụ sau đó xét hàm với biến mới (nhưng phải tìm miền giá trị của biến mới trước).

Nhắc lại một số dấu hiệu đặt ẩn phụ

– Nếu xuất hiện biểu thức đối xứng $\begin{cases} \sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} \\ \sqrt{(ax+b)(cx+d)} \end{cases}$, thì đặt:

$$t = \sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}.$$

– Nếu xuất hiện $\sqrt{a+bx}; \sqrt{c-bx} \Rightarrow (\sqrt{a+bx})^2 + (\sqrt{c-bx})^2 = a + c$, thì đặt:

$$\begin{cases} \sqrt{a+bx} = \sqrt{a+c}.\sin\alpha \\ \sqrt{c-bx} = \sqrt{a+c}.\cos\alpha \end{cases};$$

Và sử dụng hệ thức $\sin\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}; \cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

Tiếp tục đặt $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ đưa về xét hàm với biến mới t.

– Nhân hai vế với hệ thức liên hợp nếu có.

Các dạng toán hay gặp:

Dạng 1. Tìm các giá trị của tham số để phương trình $G(x, m) = 0$ có nghiệm trên miền D.

Bước 1. Viết lại phương trình dưới dạng $f(x) = g(m)$.

Bước 2. Khảo sát tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên D (hoặc lập bảng biến thiên), giả sử $a = \min\limits_{x\in D} f(x) \le f(x) \le A = \max\limits_{x\in D} f(x)$.

Bước 3. Giá trị cần tìm của tham số thỏa mãn $a \le g(m) \le A$.

Lưu ý: Bài toán yêu cầu tìm điều kiện của tham số để phương trình có k nghiệm lúc này ta phải dựa vào bảng biến thiên của hàm số. Đường thẳng $y = g(m)$ cắt ngang bảng biến thiên tại bao nhiêu điểm thì phương trình có bấy nhiêu nghiệm (hoặc cắt ngang đồ thị hàm số).

Bước 4. Đưa ra kết luận.

Dạng 2. Tìm các giá trị của tham số để bất phương trình $G(x, m) \ge 0$ hoặc $G(x, m) \le 0$ có nghiệm trên miền D.

Bước 1. Viết lại bất phương trình dưới dạng $f(x) \ge g(m)$ hoặc $f(x) \le g(m)$.

Bước 2. Khảo sát tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên miền D. Giả sử $a = \min\limits_{x\in D} f(x) \le f(x) \le A = \max\limits_{x\in D} f(x)$.

Bước 3. Tìm điều kiện của tham số

+ Phương trình $f(x) \ge g(m) \Leftrightarrow g(m) \le A = \max\limits_{x\in D} f(x)$

+ Phương trình $f(x) \le g(m) \Leftrightarrow g(m) \ge a = \min\limits_{x\in D} f(x)$

Bước 4. Đưa ra kết luận.

Dạng 3. Tìm các giá trị của tham số để bất phương trình $f(x) \ge g(m)$ hoặc $f(x) \le g(m)$ với mọi $x \in D$.

+ Phương trình $f(x) \ge g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \le a = \min\limits_{x\in D} f(x)$

+ Phương trình $f(x) \le g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \ge A = \max\limits_{x\in D} f(x)$

Lưu ý. Với dạng đặt $t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{c-ax}$ thì ta có

$t^2 = b + c + 2\sqrt{(ax-b)(c-ax)} \ge b + c \le t \ge \sqrt{b+c}$;

Và sử dụng Bunhiacopski ta được $t \le \sqrt{(1^2+1^2)(ax-b+c-ax)} = \sqrt{2(b+c)}$.

Vậy ta có miền giá trị của t là $\left[\sqrt{b+c}; \sqrt{2(b+c)}\right]$

Ngoài ra sử dụng Cô si ta có ngay:

$$t^2 \le b + c + \left[ax + b + c - ax\right] = 2(b+c) \Rightarrow t \le \sqrt{2(b+c)}$$

Chẳng hạn với $t = \sqrt{10-3x} + \sqrt{3x-1}$ thì $t \in \left[3;\, 3\sqrt{2}\right]$

Với các bài toán tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm duy nhất thông thường chúng ta lập luận. Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình thì $-x_0$ là nghiệm của phương trình và do đó để phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ và thay vào phương trình ta tìm được giá trị của tham số m. Tuy nhiên cần có bước thử lại xem phương trình có nghiệm duy nhất hay không.

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + \left(8y^2 + 14y + 15\right)x = 12y^3 + 8y^2 + 15y \\ \sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{y} = m \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $y \ge 0$.

Phương trình đầu của hệ tương đương với:

$$\left(x-y\right)\left(\left(x-1\right)^2 + \left(x-1\right)\left(y+\frac{1}{2}\right) + 3\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Thay $y = x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $m = \sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x}$ (1).

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x}$ trên $\left[0;+\infty\right)$, ta có:

$$f'(x) = \frac{x}{2\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} - \sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}}{2\sqrt[4]{\left(x^2+1\right)^3}\sqrt{x}} < 0, \forall x \ge 0$$ nên $f(x)$ là hàm nghịch biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có:

$$f(0) = 1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt[4]{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2}}{\sqrt[4]{x^2+1} + \sqrt[4]{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^2+1} + \sqrt[4]{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2}\right)} = 0.$$

Suy ra $0 < f(x) \le 1, \forall x \ge 0$.

Vậy để hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm ta phải có $0 < m \le 1$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $0 < m \le 1$.

Bài 2. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm thực

$$\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 & (1) \\ 3\sqrt{y-1} - m\sqrt{10-2x} = 2\sqrt[4]{y^2-1} & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \le 2; y \ge 1$.

Khi đó phương trình (1) tương đương với:

$(1+2-x)\sqrt{2-x} = (1+2y-1)\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1})$, trong đó:

$$f(t) = (1+t)\sqrt{t}, (t \ge 0).$$

Ta có $f'(t) = \sqrt{t} + \dfrac{1+t}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[0; +\infty\right)$.

$\Rightarrow f(\sqrt{2-x}) = f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{2y-1} \Rightarrow x = 3-2y \le 1 < 2, (y \ge 1)$.

Thay $x = 3-2y$ vào (2) ta được : $3\sqrt{y-1} - 2m\sqrt{y+1} = 2\sqrt[4]{y^2-1} (1)$.

Do vậy ta chỉ cần tìm m để phương trình (1) có nghiệm $y \ge 1$.

Chia cả hai vế của (1) cho $\sqrt[4]{y+1}$ ta được:

$$3\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} - 2m = 2\sqrt[4]{\frac{y-1}{y+1}} \qquad (i).$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{y-1}{y+1}} \Rightarrow 0 \le t < 1$. Khi đó phương trình (i) trở thành: $m = \dfrac{3}{2}t^2 - t$.

Xét hàm số $f(t) = t - 3t^2$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right)$.

Ta có $f'(t) = 3t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$.

Lại có: $f(0) = 0; f(\dfrac{1}{3}) = \dfrac{-1}{6}; f(1) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{-1}{6} \le f(t) < \dfrac{1}{2}$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $\dfrac{-1}{6} \le m < \dfrac{1}{2}$ chính là giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $\left[-\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 3. (TSĐH Khối D 2011) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm thực: $\begin{cases}2x^3-(y+2)x^2+xy=m\\x^2+x-y=1-2m\end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases}(x^2-x)(2x-y)=m\\x^2-x+2x-y=1-2m\end{cases}$

Ta đặt $\begin{cases}u=x^2-x\geq\frac{-1}{4}\\v=2x-y\end{cases}$.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases}uv=m\\u+v=1-2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+(2m-1)u+m=0\ (1)\\v=1-2m-u\end{cases}$.

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm thỏa mãn $u\geq\frac{-1}{4}$

Với $u\geq\frac{-1}{4}$, Từ $(1)\Rightarrow m(2u+1)=-u^2+u\Leftrightarrow m=\frac{-u^2+u}{2u+1}$.

Xét hàm số $f(u)=\frac{-u^2+u}{2u+1}$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Ta có: $f'(u)=-\frac{2u^2+2u-1}{(2u+1)^2}\Rightarrow f'(u)=0\Leftrightarrow u=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Lại có: $f(\frac{-1}{4})=\frac{-5}{8};f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})=\frac{2-\sqrt{3}}{2};\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=-\infty$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(u)$ ta suy ra để hệ có nghiệm khi $m\leq\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm thực duy nhất:

$$\begin{cases} x^3+6x=3x^2+y^3+3y+4 \\ m\sqrt{x^2+9}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{y-3}-\sqrt{x-3} \end{cases},\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải

Ta có $(1)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3+3\left(x-1\right)=y^3+3y\ (3)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$, ta có $f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$ vì vậy $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(3)\Leftrightarrow f\left(x-1\right)=f(y)\Leftrightarrow x-1=y\Leftrightarrow x=y+1$.

Thay $y=x-1$ vào (2) ta được: $m\sqrt{x^2+9}=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}$.

$$\Leftrightarrow m=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2+9}}\ (3).$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ trên $\left[4;+\infty\right)$.

Trong đó:

$$\begin{cases} u(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}}<0 \\ v(x)=\sqrt{x^2+9}>0 \end{cases},\forall x\geq 4$$

Ta có:

$$u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-3}\sqrt{x-4}\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}\right)}-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}>0,\forall x>4$$

$$v'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}>0,\forall x\geq 4.$$

Suy ra $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}>0,\forall x>4$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[4;+\infty\right)$.

Ta có $f(4)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Nhận thấy với mỗi nghiệm x, ta được một nghiệm tương ứng y. Do vậy để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{5} \le m < 0$.

Vậy $\frac{1-\sqrt{3}}{5} \le m < 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 5. Xác định tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} m(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ m(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (m-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}.$$

Lời giải

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow (*) \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ -\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$.

+ Nếu $m \ne 0$; Đặt $t = \sqrt[3]{x}$, khi đó $t = 0$ không là nghiệm của hpt; và hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} m(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 \\ m(t^8 + t^6 + t^2 + 1) + (m-1)t^4 = 2yt^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 & (1) \\ m(t^8 + t^6 + t^4 + t^2 + 1) = (2y+1)t^4 & (2) \end{cases}$$

+ Do $t = 0$ không là nghiệm của hpt, nên chia 2 vế của (1) cho t^3 và của (2) cho t^4, ta được:

$$\begin{cases} m(t^3 + \frac{1}{t^3} + t + \frac{1}{t}) = y \\ m(t^4 + \frac{1}{t^4} + t^2 + \frac{1}{t^2} + 1) = 2y + 1 \end{cases}$$

+ $t^3 + \frac{1}{t^3} = (t + \frac{1}{t})^3 - 3(t + \frac{1}{t}); t^4 + \frac{1}{t^4} = (t^2 + \frac{1}{t^2})^2 - 2; t^2 + \frac{1}{t^2} = (t + \frac{1}{t})^2 - 2$.

Đặt $u = t + \frac{1}{t} (|u| \ge 2)$, Khi đó HPT trở thành:

$$\begin{cases} m(u^3 - 3u + u) = y \\ m[(u^2 - 2)^2 - 2 + u^2 - 2 + 1] = 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3 - 2u) = y \\ m(u^4 - 3u^2 + 1) = 2y + 1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3 - 2u) = y \\ m(u^4 - 3u^2 + 1) = 2m(u^3 - 2u) + 1 \ (3) \end{cases}.$$

+ Hệ có nghiệm khi và chỉ khi (3) có nghiệm $|u| \geq 2$.

Ta có: $(3) \Leftrightarrow m(u^4 - 3u^2 + 1 - 2u^3 + 4u) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = f(u) = u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 1$

Ta có: $f'(u) = 4u^3 - 6u^2 - 6u + 4; f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 2, (|u| \geq 2)$.

Lập bảng biến thiên của $f(u)$ ta suy ra (3) có nghiệm thỏa mãn $(|u| \geq 2)$ khi và chỉ khi: $\frac{1}{m} \geq -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m \leq \frac{-1}{3} \end{array}\right.$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $\left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bài 6. Tìm m để hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2012x \leq 2012 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$ có nghiệm

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -1$.

Khi đó ta có: $(1) \Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2012x \leq 2012$.

$\Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} + 1006(2x + \sqrt{x+1}) = 7^{2+\sqrt{x+1}} + 1006(2 + \sqrt{x+1})$.

$\Leftrightarrow f(2x + \sqrt{x+1}) \leq f(2 + \sqrt{x+1})(*)$.

Với $f(t) = 7^t + 1006t$, ta có $f'(t) = 7^t \ln 7 + 1006 > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên R, và từ $(*) \Rightarrow 2x + \sqrt{x+1} \leq 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0$ có nghiệm $x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow m \geq g(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}; x \in [-1;1]. \Leftrightarrow m \geq \min\limits_{x \in [-1;1]} g(x)$.

Ta có: $g'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} \in [-1;1]$.

Ta có: $g(-1) = -2; g(2 - \sqrt{3}) = 2 - 2\sqrt{3}; g(1) = -2 \Rightarrow \min\limits_{x \in [-1;1]} g(x) = g(\pm 1) = -2$.

Vậy $m \geq -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 7. Xác định giá trị tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực

$$\begin{cases} (x+\frac{3}{2})\sqrt{x^2+2x+3}+(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+1}+2x+2\ge 0 & (1) \\ \log_{m^2+1}(3\sqrt[3]{x^2}+1)\le \log_{m^2+1}(m-2x) & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+1}>0 \\ v=\sqrt{x^2+2x+3}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=x^2+1 \\ v^2=x^2+2x+3 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{v^2-u^2-2}{2}$.

Thay vào (1), ta được:

$$(v^2-u^2+1)\frac{v}{2}+(v^2-u^2-1)\frac{u}{2}+v^2-u^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (v-u)(u+v+1)^2\ge 0 \Leftrightarrow v-u\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1.$$

Điều kiện: $m^2+1>1 \Leftrightarrow m\ne 0$. Khi đó phương trình (2) tương đương với:

$$\begin{cases} m\ne 0 \\ 0<3\sqrt[3]{x^2}+1\le m-2x \end{cases} \Leftrightarrow m\ge f(x)=3\sqrt[3]{x^2}+2x+1; x\ge -1 (m\ne 0).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $x\ge -1$, điều này tương đương với $m\ge \min\limits_{x\in[-1;+\infty]} f(x)$.

Ta có: $f'(x)=2+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta suy ra $\min\limits_{x\in[-1;+\infty]} f(x)=f(0)=1 \Rightarrow m\ge 1$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $(1;+\infty)$.

Bài 8. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2-3x-4\le 0 & (1) \\ x^3-3|x|x-m^2-15m\ge 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Ta có $(1)\Leftrightarrow (x+1)(x-4)\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 4$.

Phương trinh: $(2)\Leftrightarrow m^2+15m\le f(x)=x^3-3|x|x$.

Vậy hệ phương trình có nghệm khi và chỉ khi, bất phương trình (2) có nghiệm thuộc $[-1;4]$, khi và chỉ khi $m^2+15m\le \max\limits_{x\in[-1;4]} f(x)$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3|x|x = \begin{cases} x^3 + 3x^2 (-1 \le x < 0) \\ x^3 - 3x^2 (0 \le x \le 4) \end{cases}$.

Ta có $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x (-1 \le x < 0) \\ 3x^2 - 6x (0 \le x \le 4) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 2$.

Ta có $f(-1) = 2; f(0) = 0; f(-2) = 4; f(2) = -4; f(4) = 16$.

Từ đó suy ra: $\max\limits_{x \in [-1;4]} f(x) = f(4) = 16$.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi :

$$m^2 + 15m \le 16 \Leftrightarrow -16 \le m \le 1.$$

Vậy $m \in \left[-16,1\right]$ là giá trị cần tìm.

Bài 9. Tìm m để hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 & (2) \end{cases}$$ có nghiệm thực.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$.

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow t \in \left[0;2\right]$, khi đó phương trình (1) trở thành:

$$t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2 \qquad (*).$$

Xét hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ trên đoạn $\left[0;2\right]$, ta có:

$f'(u) = 3u^2 - 6u \le 0, \forall u \in \left[0;2\right]$, suy ra $f(u)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Do đó phương trình (*) tương đương với $f(t) = f(y) \Leftrightarrow t = y \Leftrightarrow y = x + 1$.

Khi đó $x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{1 - x^2} + m = 0$ (i).

Đặt $v = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow v \in \left[0;1\right] \Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = m$.

Xét hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, ta có $g'(v) = 2v + 2 > 0, \forall v \in \left[0;1\right]$

Suy ra $\min\limits_{v \in \left[0;1\right]} g(v) = g(0) = -1;\ \max\limits_{v \in \left[0;1\right]} g(v) = g(1) = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le 2$.

Bài 10. Tìm m để hệ phương trình sau $\begin{cases} 2\sqrt{xy-y}+x+y=5 \\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=m \end{cases}$ có nghiệm thực.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} y(x-1)\ge 0 \\ x\le 5 \\ y\le 1 \end{cases}$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ biến đổi thành:

$$y+2\sqrt{y(x-1)}+(x-1)=4 \qquad (1)$$

Nếu $x<1;y<0$ thì ta có (1) tương đương với:

$-\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{-y}\right)^2=4$ vô nghiệm, nên hệ vô nghiệm

Vậy $1\le x\le 5;0\le y\le 1$ và (1) tương đương với:

$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y}\right)^2=4\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{y}=4$, đặt $t=\sqrt{y}\in[0;1]\Rightarrow x=t^2-4t+5$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$m=\sqrt{4t-t^2}+\sqrt{1-t^2}$ (*).

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{4t-t^2}+\sqrt{1-t^2}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2-t}{\sqrt{4t-t^2}}-\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}};f'(t)=0\Leftrightarrow (2-t)\sqrt{1-t^2}=t\sqrt{4t-t^2}$.

$\Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}\in[0;1]$.

Ta có $f(0)=1;f(1)=\sqrt{3};f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Vậy để hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm, tương đương với m thuộc tập giá trị của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ từ đó suy ra $m\in\left[\dfrac{\sqrt{5}}{3},\sqrt{3}\right]$ là giá trị cần tìm.

Bài 11. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2y-3x-1\ge mx\sqrt{y}\left(\sqrt{1-x}-1\right)^3 \\ \sqrt{8x^2-3xy+4y^2}+\sqrt{xy}=4y \end{cases}.$$

Lời giải

Nhận xét. Nhận thấy là phương trình thứ nhất của chứa tham số và khá phức tạp, do vậy việc tìm ra mối liên hệ giữa x và y là không khả quan. Ta biến đổi từ phương trinh hai, để ý đây chính là phương trình đẳng cấp do vậy sẽ rút được x theo y.

Điều kiện: $y\ge 0, x\le 1$.

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình, ta xét $y>0$ khi đó phương trình thứ 2 của hệ tương đương với:

$\sqrt{8x^2-3xy+4y^2}+\sqrt{xy}=4y \Leftrightarrow \sqrt{8\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}+4}+\sqrt{\frac{x}{y}}=4$, đến đây ta đặt $t=\sqrt{\frac{x}{y}}$ ta đưa về phương trình:

$$\sqrt{8t^4-3t^2+4}=4-t \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le t\le 4 \\ 8t^4-3t^2+4=16-8t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=y$$

Khi đó thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được bất phương trình:

$x^3-3x-1\ge mx\sqrt{x}\left(\sqrt{1-x}-1\right)^3 \Leftrightarrow x^3-3x-1\ge m\left(\sqrt{x(1-x)}-\sqrt{x}\right)^3$. Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của bất phương trình nên, xét $0<x\le 1$.

Khi đó $m\ge \dfrac{1+3x-x^3}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}\right)^3}\ge \dfrac{1+3x-x^3}{x\sqrt{x}}=f(x)\ (1)$.

Ta tìm được giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x)$ trên $(0,1]$ bằng 3. Tại $x=1$ thì dấu bằng ở (1) xảy ra và bằng 3. Từ đó suy ra để hệ có nghiệm thì $m\ge 3$.

Bài 12. Chứng minh rằng với mọi $a>0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} e^x-e^y=\ln(1+x)-\ln(-3x+y) \\ y-x=a \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x > -1, -3x + y > 0$.

Thay $y = x + a$ từ phương trình thứ hai vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$e^x - e^{x+a} = \ln(x+1) - \ln(-2x+a) \Leftrightarrow e^x\left(1 - e^a\right) - \ln\left(\frac{x+1}{-2x+a}\right) = 0 \ (1).$$

Ta chứng minh phương trình (1) có nghiệm duy nhất với mọi $a > 0$ khi đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất với mọi $a > 0$.

Xét hàm số $f(x) = e^x\left(1 - e^a\right) - \ln\left(\frac{x+1}{-2x+a}\right)$ trên $\left(-1; \frac{a}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x) = e^x\left(1 - e^a\right) - \frac{a+2}{(2x+a)(x+1)} < 0, \forall x \in \left(-1; \frac{a}{2}\right), a > 0$.

Mặt khác $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x \to \frac{a}{2}^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists x_0 \in \left(-1; \frac{a}{2}\right)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất trên $\left(-1; \frac{a}{2}\right)$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 13. Tìm các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 + 2 = 3x + 9y \\ x^2 + \ln\left(1 - x^2\right) - 3\ln\left(4y - y^2 - 3\right) + m = 0 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $|x| < 1, 4y - y^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1, 1 < y < 3 \Rightarrow x, y - 2 \in (-1;1)$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x^3 - 3x = (y-2)^3 - 3(y-2) \ (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên $(-1;1)$, ta có:

$f'(t) = 3t^2 - 3 < 0, \forall t \in (-1;1)$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(-1;1)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y-2) \Leftrightarrow x = y - 2 \Leftrightarrow y = x + 2$.

Thay $y = x + 2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$m = 2\ln\left(1 - x^2\right) - x^2 \ (2).$$

Để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-1;1\right)$. Xét hàm số $g(x)=2\ln\left(1-x^2\right)-x$ trên $\left(-1;1\right)$, ta có:

$$g'(x)=-\frac{4x}{1-x^2}-2x=-2x\left(\frac{2}{1-x^2}+1\right); g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Lập bảng biến thiên suy ra để (2) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<0$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\left(-\infty;0\right)$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Tìm m để hệ phương trình sau có ba nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x^2y-x^2+y=2 \\ m\left(x^2+y\right)-x^2y=4 \end{cases}.$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1} \\ m\left(x^2+y\right)-x^2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1} \\ \left(m-1\right)x^4+2\left(m-3\right)x^2+2m-4=0 \quad (1) \end{cases}.$$

Đặt $t=x^2$ khi đó (1) trở thành: $\left(m-1\right)t^2+2\left(m-3\right)t+2m-4=0$ (2).

Để hệ phương trình có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1\neq 0 \\ \Delta'=\left(m-3\right)^2-\left(2m-4\right)\left(m-2\right)>0 \\ 2m-4=0 \\ S=-\dfrac{2\left(m-3\right)}{m-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $m=2$.

Bài 2. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau đây có nghiệm thực thỏa mãn $x^2+y>0$: $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=\dfrac{-5}{4}+m \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=\dfrac{-5}{4}+m \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^2+y+xy\left(x^2+y+1\right)=m-\dfrac{5}{4} \\ \left(x^2+y\right)^2+xy=m-\dfrac{5}{4} \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=x^2+y \\ v=xy \end{cases},\left(u>0\right)$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases} u+v\left(u+1\right)=m-\dfrac{5}{4} \\ u^2+v=m-\dfrac{5}{4} \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=m-\dfrac{5}{4}-u^2 \\ u+\left(u+1\right)\left(m-\dfrac{5}{4}-u^2\right)=m-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=m-\dfrac{5}{4}-u^2 \\ u\left(m-u^2-u-\dfrac{1}{4}\right)=0 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=m-\dfrac{5}{4}-u^2 \\ m=u^2+u+\dfrac{1}{4} \end{cases} \text{(do } u>0\text{)}.$$

Ta có $u^2+u+\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{4},\forall u>0 \Rightarrow m>\dfrac{1}{4}$.

Với $m>\dfrac{1}{4}$ hệ phương trình luôn có nghiệm thỏa mãn điều kiện $x^2+y>0$.

Thật vậy $\begin{cases} u=x^2+y \\ v=xy \end{cases} \Rightarrow v=x\left(u-x^2\right) \Leftrightarrow x^3-ux+v=0$.

Phương trình bậc ba luôn có nghiệm nên hệ luôn có nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn $x^2+y>0$ khi $m>\dfrac{1}{4}$.

Bài 3. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} 2x-y-m=0 \\ x+\sqrt{xy}=1 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $xy\ge 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với:

$$\sqrt{xy}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ xy=x^2-2x+1 \end{cases}.$$

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x\neq 0$ suy ra $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x}$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$2x-\frac{x^2-2x+1}{x}=m\Leftrightarrow m=\frac{x^2+2x-1}{x}\ (1).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (1)$ có duy nhất một nghiệm thỏa mãn $0\neq x\leq 1$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$ trên $\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;1\right]$.

Ta có: $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0,\forall x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;1\right]$ nên $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Lập bảng biến thiên suy ra để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thuộc khoảng $\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;1\right]\Leftrightarrow m>2$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số m là $\left(2;+\infty\right)$.

Bài 4. Tìm m để hệ phương trình sau có hai nghiệm thực thực phân biệt:

$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ \sqrt[8]{5-2y}+\sqrt[4]{5-2y}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x\leq 6,y\leq\dfrac{5}{2}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$8x^3+2x=\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}\Leftrightarrow\sqrt{5-2y}=2x.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}=m\ (1).$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Ý tưởng. Rõ ràng bài toán này chúng ta không thể đặt bất kỳ ẩn phu nào mà chỉ có thể xét trực tiếp hàm số bên vế trái và mong rằng phương trình đạo hàm giải được nghiệm.

Điều kiện $0\leq x\leq 6$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x}$ trên [0; 6].

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}-\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}-\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}.\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^2}}\right)+\frac{1}{\sqrt[4]{2x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{6-x}}\right]$$

Suy ra $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt[4]{6-x}=\sqrt[4]{2x}\Leftrightarrow x=2$ và $f'(x)$ dương trên (0; 2) và âm trên (2; 6).

Bảng biến thiên

x	0		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3\sqrt{2}+6$	$\searrow$	
	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$				$2\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}$

Nhìn vào bảng biến thiên suy ra để phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m<3\sqrt{2}+6$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m<3\sqrt{2}+6$.

- **Nhận xét.** Nhìn vào bảng biến thiên suy ra:

+ Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m=3\sqrt{2}+6$ hoặc: $2\sqrt{3}+\sqrt[4]{12}<m<2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$.

Bài 5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x-2=0\\-x^2-\sqrt{1-x^2}+3\sqrt{2y-y^2}+m=0\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}-1\le x\le 1\\0\le y\le 2\end{cases}$.

Đặt $t=x+1\Rightarrow t\in[0;2]$, khi đó phương trình (1) trở thành:

$$t^3-3t^2=y^3-3y^2 \qquad (*).$$

Xét hàm số $f(u)=u^3-3u^2$ trên đoạn $[0;2]$, ta có:

$f'(u)=3u^2-6u\le 0,\forall u\in[0;2]$, suy ra $f(u)$ nghịch biến trên đoạn $[0;2]$.

Do đó phương trình (*) tương đương với $f(t)=f(y)\Leftrightarrow t=y\Leftrightarrow y=x+1$.

Khi đó $-x^2-\sqrt{1-x^2}+3\sqrt{2y-y^2}+m=0\Leftrightarrow -x^2+2\sqrt{1-x^2}+m=0$ (i).

Đặt $v=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow v\in\left[0;1\right]\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow -v^2-2v+1=m$.

Xét hàm số $g(v)=-v^2-2v+1$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$, ta có $g'(v)=-2v-2<0,\forall v\in\left[0;1\right]$

Suy ra $\min\limits_{v\in\left[0;1\right]} g(v)=g(1)=-2;\ \max\limits_{v\in\left[0;1\right]} g(v)=g(0)=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-2\le m\le 1$.

Bài 6. Tìm các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1\\ -x^3-3y-3\ge m(\sqrt{x}-\sqrt{1-y})^3\end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0,y\ge -1,2x+y\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x+\sqrt{1+x^2}=(-y)+\sqrt{1+(-y)^2}\Leftrightarrow x=-y.$$

Thay $y=-x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$-x^3+3x-3\ge m(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})^3\ (1).$$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm.

Ý tưởng. Ta phải khử tham số về tự do làm được điều này chỉ việc nhân vào hai vế của bất phương trình với biểu thức liên hợp của $(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})^3$ là $(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^3$ và để ý $(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})^3(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^3=-1$ và khi đó bất phương trình đổi dấu.

Điều kiện: $x\ge 1$.

Khi đó nhân cả 2 vế của bất phương trình với $(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3>0$, bất phương trình trở thành: $m\ge(x^3-3x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3$.

Xét hàm số $f(x)=(x^3-3x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3$ trên $[1;+\infty)$.

Suy ra để bất phương trình có nghiệm là $m\ge\min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x)$.

Viết lại $f(x)=u(x).v(x)$, trong đó $\begin{cases} u(x)=x^3-3x+3\geq 1 \\ v(x)=(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3>0 \end{cases}, \forall x\geq 1$.

Ta có $u'(x)=3x^2-3>0; v'(x)=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^2>0$

Suy ra $f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)>0$. Hàm số *f(x)* đồng biến trên khoảng [1; +∞). Do đó $\min\limits_{x\in[1;+\infty)} f(x)=f(1)=1, \forall x\geq 1$. Để bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\geq 1$. Vậy giá trị cần tìm của m là (1; +∞).

Bài 7. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+4)=-3(x^2-2y^2)+9y+8 \\ \sqrt{11+2(2x-y)-y^2}=2m+\sqrt{5+2y-x^2} \end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x^3-y^3+4(x-y)=-3x^2+6y^2+9y+8.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3+x+1=(y+2)^3+y+2 \Leftrightarrow x+1=y+2 \Leftrightarrow y=x-1.$$

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\sqrt{11+2(2x-(x-1))-(x-1)^2}=2m+\sqrt{5+2(x-1)-x^2}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+4x+12}=2m+\sqrt{-x^2+2x+3}.$$

$$\Leftrightarrow 2m=\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}\ (1).$$

Điều kiện: $-1\leq x\leq 3$.

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm trên $[-1;3]$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}$ liên tục trên $[-1;3]$, ta có:

$$f'(x)=\frac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+12}}-\frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}; f'(x)=0.$$

$$\Leftrightarrow (-x+2)\sqrt{-x^2+2x+3}=(-x+1)\sqrt{-x^2+4x+12}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x+1)(-x+2)\geq 0 \\ (-x+2)^2(-x^2+2x+3)=(-x+1)^2(-x^2+4x+12) \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Ta có: $f(-1)=\sqrt{7}, f(0)=\sqrt{3}, f(3)=\sqrt{15}$.

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[-1;3]} f(x)=f(0)=\sqrt{3}; \max\limits_{x\in[-1;3]} f(x)=f(3)=\sqrt{15}$.

Vậy phương trình có (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{3}\le 2m\le\sqrt{15} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\le m\le\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le m\le\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Bài 8. Tìm m để hệ sau có nghiệm thực $\begin{cases} x^3+(y+2)x^2+2xy=-2m-3 \\ x^2+3x+y=m \end{cases}$.

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} (x^2+2x)(x+y)=-2m-3 \\ x^2+2x+x+y=m \end{cases}$.

Đặt $u=x^2+2x=(x+1)^2-1\ge -1, v=x+y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} uv=-2m-3 \\ u+v=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=m-u \\ u(m-u)=-2m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=m-u \\ m=\dfrac{u^2-3}{u+2} \ (1) \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $u\in[1;+\infty)$.

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{u^2-3}{u+2}$ trên $[1;+\infty)$, ta có:

$f'(u)=\dfrac{u^2+4u+3}{(u+2)^2}=\dfrac{(u+1)(u+3)}{(u+2)^2}\ge 0, \forall u\ge -1$ nên $f(u)$ là hàm đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Suy ra $f(u)\ge f(-1)=-2, \forall u\ge -1$. Vậy (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge -2$.

Vậy giá trị cần tìm của tham số là $[-2;+\infty)$.

Bài 9. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất và $x\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$

$$\begin{cases} x^2-x=y \\ 3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2(x^2-y)^2+1}=m \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $x^2 - y = x$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m \ (1).$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất và $x \in \left[-\frac{1}{2};1\right] \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất trên $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Xét hàm số $f(x) = 3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Ta có $f'(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} - x\left[\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right]$

Do $x \in \left[-\frac{1}{2};1\right] \Rightarrow 3x+4 > 0 \Rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} > 0$.

Vì vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4

Dựa vào bảng biến thiên suy ra để phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ -4 \le m < \dfrac{-\sqrt{22}+3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

◆ ***Nhận xét.*** *Hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:*

$$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2} \le m < 1.$$

Bài 10. Chứng minh hệ phương trình sau luôn có hai nghiệm thực với mọi m:

$$\begin{cases}\left(2x^3-3x^2+x\right)\sqrt{x^2-x+3+m^2}+\left(2y^3-3y^2+y\right)\sqrt{y^2-y+3+m^2}=0\\ x^2-2my=m+3\end{cases}.$$

Lời giải

Phương trình đầu của hệ được viết lại dưới dạng:

$$\left(2y^3-3y^2+y\right)\sqrt{y^2-y+3+m^2}=-\left(2x^3-3x^2+x\right)\sqrt{x^2-x+3+m^2}.$$

$$\Leftrightarrow\left(2y^3-3y^2+y\right)\sqrt{y^2-y+3+m^2}$$
$$=\left(2\left(1-x\right)^3-3\left(1-x\right)^2+1-x\right)\sqrt{\left(1-x\right)^2-\left(1-x\right)+3+m^2}.$$

Suy ra $y=1-x$ thỏa mãn phương trình đầu của hệ.

Thay $y=1-x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$x^2-2m\left(1-x\right)=m+3\Leftrightarrow x^2+2mx-3m-3=0$.

Phương trình này có $\Delta'_x=m^2+3m+3>0,\forall m$ nên luôn có hai nghiệm thực phân biệt. Kéo theo hệ luôn có hai nghiệm thực (đpcm).