

1 Фильтрация сигнала от шума на основе преобразования Фурье

1.1 Цель учебной задачи

Целью данной задачи является закрепление навыков практического применения алгоритма быстрого преобразования Фурье для анализа и обработки экспериментальных данных, в частности, при решении одной из важных задач цифровой обработки, связанной с фильтрацией зашумленных сигналов в частотной области. Поскольку в практических приложениях обычно имеют дело с результатами измерений, которые представляют собой дискретные данные, в цифровой обработке принято, что сигнал представлен в цифровой форме, т.е. является дискретным по времени и квантованным по величине. Для упрощения моделирования в данной задаче будем считать сигнал дискретным по времени и непрерывным по величине (тип «float» или «double»). Такое представление сигнала соответствует выборкам аналогового сигнала $x(t)$ в дискретные равноотстоящие моменты времени $n \cdot T_d$, ($T_d = \frac{1}{f_d}$ – период дискретизации сигнала). При дискретизации сигнала должны выполняться требования теоремы дискретизации (Котельникова – Шеннона). В цифровой обработке обычно принято спектральное представление сигналов в долях частоты дискретизации, при этом полагается $T_d = 1$, а частоты гармонических составляющих сигнала при моделировании задаются в интервале Найквиста $[0, 0.5]$. Если ограничиться дискретными последовательностями данных, длина которых является степенью двух, то может быть применён алгоритм так называемого быстрого преобразования Фурье (БПФ), который имеет значительно меньшую вычислительную сложность по сравнению с прямым вычислением дискретного преобразования Фурье. Выполнение фильтрации сигналов основано на различии спектральных характеристик сигналов и шумов, что необходимо учитывать при моделировании зашумленных сигналов.

1.2 Теоретические сведения

Дискретно-временное преобразование Фурье

Дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ) представляет собой численную реализацию алгоритма разложения в ряд функций, заданных дискретными отсчетами, по гармоническим (тригонометрическим) функциям. Данный метод разложения функций в тригонометрический ряд впервые предложил Жан–Батист Жозеф Фурье (1768–1830).

Для существования преобразования Фурье функции достаточно выполнение следующих условий:

1. анализируемая функция ограничена при всех значениях аргумента (времени);
2. анализируемая функция абсолютно интегрируема;
3. число точек разрыва, максимума и минимума функции конечно.

Дискретное преобразование Фурье разделяют на прямое и обратное преобразования. Прямое дискретное преобразование Фурье позволяет рассчитать периодический спектр $X(2\pi k\Delta f)$ по дискретным отсчётам сигнала $x_n = x(n\Delta t)$. Примем $\Delta t = 1$, как это принято в цифровой обработке сигналов. Формально количество отсчётов спектра M и, соответственно, шаг вычисления по частоте Δf можно выбрать произвольными, однако при практической реализации более удобно выбрать количество отсчётов спектра равным количеству отсчётов сигнала $M = N$ и вычислять спектр в интервале Найквиста, тогда $\Delta f = \frac{1}{N}$. Выражение для прямого ДВПФ имеет вид:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-\frac{2\pi j}{N} kn\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j \cdot \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right], \quad (1)$$

где j – мнимая единица и $k = 0, \dots, N-1$. В общем случае спектр X_k является комплексным.

Преобразование Фурье является обратимым. Обратное ДВПФ позволяет получить (восстановить) дискретные отсчеты сигнала x_n по имеющимся отсчетам спектра:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \exp\left(\frac{2\pi j}{N} kn\right), \quad (n = 0, \dots, N-1). \quad (2)$$

Можно отметить, что обратное преобразование Фурье имеет практически такую же форму, как и прямое преобразование: обратное преобразование имеет противоположный знак комплексной экспоненты и содержит нормирующий множитель $\frac{1}{N}$. Следует обратить внимание, что спектр сигнала (в приведённых выше выражениях при $\frac{N}{2} < k < N-1$) содержит отрицательные частоты, введённые математически формально.

Дискретное преобразование Фурье является вычислительно трудоёмкой операцией. Широкое распространение в обработке сигналов прямое и обратное ДВПФ получили после разработки алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), среди которых наиболее известным и широко применяемым является алгоритм БПФ Кули–Тьюки (J.W. Cooley,

J.W. Tukey). Для реализации алгоритмов быстрого суммирования рядов Фурье принципиально важным является возможность разбиения числа отсчётов сигнала N на сомножители. Особенностью алгоритма БПФ Кули–Тьюки является необходимость задавать количество отсчётов сигнала как степень двойки $N = 2^p$. На современных компьютерах алгоритмы БПФ позволяют практически в реальном масштабе времени осуществлять спектральную обработку больших массивов данных, что существенно повысило быстродействие в задачах обработки и анализа сигналов и изображений и численного моделирования различных физических процессов.

Свойства преобразования Фурье

Преобразование Фурье, в том числе и ДВПФ, является линейным, имеет соответствующую нормировку и обладает рядом важных свойств, широко используемых в практических приложениях. Применение свойств преобразования Фурье позволяет упростить выполнение многих операций при обработке сигналов, часто позволяет выполнить анализ изменений сигнала или спектра без применения непосредственных вычислений. Двойственность преобразования Фурье позволяет формулировать свойства как для временного так и для частотного представления одновременно. Основные свойства преобразования Фурье:

1. Линейность:

$$a \cdot g(t) + b \cdot h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a \cdot G(f) + b \cdot H(f).$$

2. Сдвиг по времени:

$$h(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(f) \cdot \exp(-j2\pi f t_0).$$

3. Сдвиг по частоте:

$$h(t) \cdot \exp(j2\pi f_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(f - f_0).$$

4. Масштабирование:

$$\frac{1}{|\alpha|} \cdot h\left(\frac{1}{\alpha}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(\alpha f).$$

5. Теорема свёртки:

$$g(t) \otimes h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f) \cdot H(f),$$

$$g(t) \cdot h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f) \otimes H(f).$$

Аддитивный белый гауссов шум

Аддитивный белый гауссов шум (АБГШ) является одной из основных моделей шумов, используемых в обработке сигналов. Данный вид шума характеризуется равномерной спектральной плотностью, нормальным законом распределения значений (амплитуды) отсчетов и аддитивным способом воздействия на сигнал:

1. Шум *белый*, т.е. является реализацией некоррелированного случайного процесса. Это означает, что его автокорреляционная функция – $\delta(\tau)$ (дельта-функция Дирака) и, соответственно, имеет равномерный спектр на всех частотах. Основной характеристикой является дисперсия ρ_ω , определяющая среднюю плотность энергии белозумового процесса.
2. Шум *гауссов*, то есть его значения случайны и имеют нормальное (гауссово) распределение с нулевым средним значением и заданной дисперсией. Аддитивность означает, что отсчеты шума суммируются с отсчётами сигнала и статистически не зависят от сигнала.
3. Спектральная плотность мощности (СПМ) белозумового процесса равна

$$P_{xx}(f) = \rho_\omega \cdot T, \quad (3)$$

где T – период равномерной дискретизации. Отсюда следует, что спектральная плотность мощности белого шума постоянна. Формально это означает, что полная энергия белозумового процесса равна бесконечности, что указывает на нефизичную природу такого процесса. Однако на практике спектральная полоса анализируемых сигналов всегда ограничена, соответственно, будет ограничена и энергия шума. Кроме того, на практике математическая модель белого гауссова шума также вполне применима для моделирования и анализа сигналов в случае, когда спектральный диапазон шума является ограниченным, но существенно более широким, чем спектральная полоса полезного сигнала.

Свойства спектральной плотности мощности

Спектральная плотность мощности (СПМ) является действительной и неотрицательной функцией, симметричной относительно нуля и определяется как дискретно-временное преобразование Фурье от автокорреляционной последовательности (АКП) r_{xx} :

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_{xx}[m] \cdot \exp(-j2\pi f m T), \quad -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T}, \quad (4)$$

где T – период размерной дискретизации.

СПМ непрерывного бесконечного полигармонического сигнала имеет вид пиков (дельта-функций Дирака), находящихся в тех местах на оси частот, которые соответствуют частотам гармоник сигнала. Во всех остальных местах СПМ полигармонического сигнала равна нулю. Для дискретного сигнала Фурье-образ является периодической функцией частоты, т.е. будет периодически повторяться с интервалом, равным частоте дискретизации. В практических приложениях при преобразовании непрерывных (аналоговых) сигналов в дискретные необходимо соблюдать условия теоремы дискретизации Котельникова-Шеннона, нарушение которой приводит к перекрытию периодических продолжений Фурье-образов, их искажению и, соответственно, невозможности восстановить сигнал без потери информации.

Теорема о дискретизации Котельникова-Шеннона

Теорема устанавливает принципиальную возможность полного восстановления детерминированной функции с ограниченным спектром и указывает предельное значение интервала времени между отсчетами (частоты дискретизации), при котором такое восстановление ещё возможно.

Если сигнал с ограниченным спектром дискретизовать с частотой $f_d > 2f_0$, где f_0 – максимальная частота сигнала, то он может быть точно восстановлен по его дискретным значениям, отсчитанным через интервал времени $T = \frac{1}{2f_d}$, путём интерполяции функциями вида $\frac{\sin(\pi t)}{(\pi t)}$ по формуле

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \frac{\sin(\pi [t - nT] / T)}{\pi (t - nT) / T}. \quad (5)$$

Данное выражение можно интерпретировать следующим образом: для восстановления аналогового сигнала по его дискретным отсчетам из спектра дискретного сигнала с помощью идеального прямоугольного частотного фильтра необходимо выделить область, соответствующую спектру аналогового сигнала.

При моделировании сигналов выполнение условий теоремы дискретизации накладывает ограничения на диапазон задаваемых частот гармонических составляющих сигнала.

Псевдослучайные числа с нормальным распределением

Реализация шумового процесса должна иметь равномерную СПМ и нормальное (гауссово) распределение значений временных отсчётов:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6)$$

где μ – математическое ожидание, σ^2 – дисперсия.

Однако не все современные языки программирования имеют встроенные методы генерации псевдослучайных чисел с нормальным распределением. В частности, в языке программирования С (C++) имеется функция `rand()`, позволяющая генерировать псевдослучайные числа в диапазоне значений от 0 до `RAND_MAX` (32767) с равномерным распределением. Генерируемая последовательность случайных чисел имеет достаточно большой период повторяемости, а сами отсчёты можно считать практически некоррелированными между собой, что позволяет с хорошим приближением считать реализацию случайных чисел белым шумовым процессом с равномерным распределением. Чтобы получить псевдослучайные числа, распределённые по нормальному закону распределения, можно воспользоваться центральной предельной теоремой теории вероятностей.

Центральная предельная теорема: *Распределение вероятностей средней выборочной случайной величины \bar{X}_n при достаточно большом объёме выборки N близко к распределению гауссовой случайной величины с параметрами $\bar{X}_n \in N\left[\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Иными словами, случайные величины Z_n , представляющие собой сумму большого количества слабо зависимых случайных величин, асимптотически нормальны: $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$.*

Таким образом, для приближения к нормальному распределению можно вычислять среднее нескольких реализаций равномерно распределённой случайной величины. Хотя, согласно теории, сумма должна вычисляться по бесконечному пределу, можно показать, что сумма 12 - 20 случайных чисел с равномерным распределением будет достаточной для получения реализации шумового процесса, для которого с хорошей точностью выполняется приближение к нормальному распределению.

1.3 Постановка задачи

В данной задаче требуется реализовать метод фильтрации в частотной области зашумленного сигнала с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье. В качестве полезного сигнала предлагается использовать полигармонический сигнал, который представляет собой сумму синусоид с разными амплитудами и частотами:

$$x[n] = \sum_{i=1}^M A_i \cdot \sin(2\pi f_i nT + \varphi_i), \quad (7)$$

где f_i , A_i , φ_i – частота, амплитуда и начальная фаза i -ой гармоники, соответственно. M – число гармоник, в данной задаче $M = (1...3)$. Поскольку Фурье-фильтрация предполагает различие частотных характеристик полезного сигнала и шума, предполагается, что сигнал является низкочастотным. Для простоты реализации период дискретизации полагаем равной единице: $T = 1$. Поскольку для решения задачи предполагается использовать быстрое преобразование Фурье, необходимо сгенерировать сигналы, длина которых равна степени двух. Полученный сигнал может иметь разный вид в зависимости от количества гармонических составляющих:

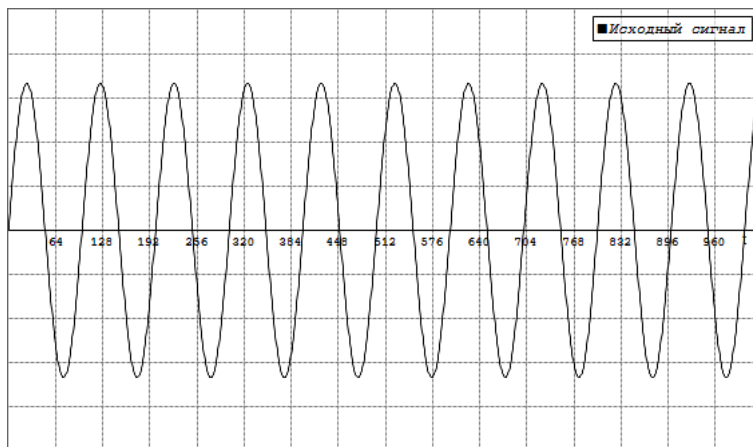


Рис. 1. Вид полигармонического сигнала $x[n]$ с одной гармоникой с частотой $f = 0.01$ и единичной амплитудой

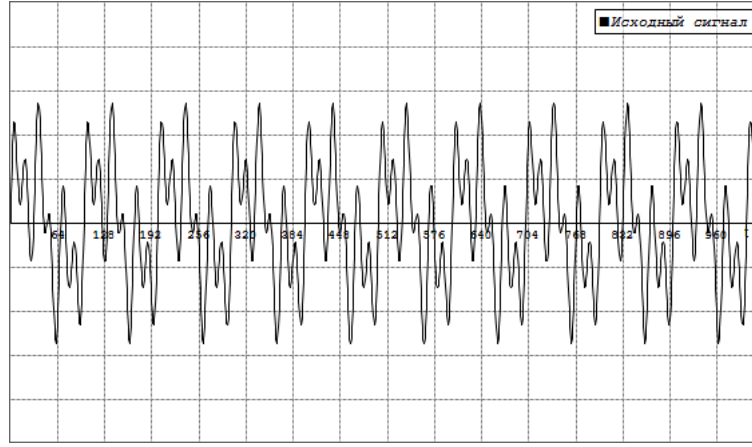


Рис. 2. Вид полигармонического сигнала $x[n]$ с тремя гармониками с частотами $f_1 = 0.01$, $f_2 = 0.03$, $f_3 = 0.06$ и единичными амплитудами

Далее к исходному сигналу необходимо добавить белый гауссов шум так, чтобы полученный зашумлённый сигнал характеризовался заданным отношением сигнал/шум (ОСШ). Значение ОСШ обычно задается в дециБелах (дБ) $20 \lg \left(\frac{\langle U_c \rangle}{\langle U_{\text{ш}} \rangle} \right)$ – для среднеквадратичных значений напряжений сигнала и шума или $10 \lg \left(\frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right)$ – для мощностей (энергии), однако для простоты в данной задаче уровень шума можно задавать как процентную долю энергии реализации шума по отношению к энергии реализации исходного сигнала. Для этого требуется сгенерировать последовательность нормально распределённых случайных чисел, например в интервале значений $[-1, 1]$. Если язык программирования не поддерживает генерацию таких чисел встроенными функциями, необходимо воспользоваться центральной предельной теоремой. В дальнейшем необходимо провести нормировку полученной последовательности таким образом, чтобы шум обладал заданной энергией:

$$\alpha \cdot E_{\text{ш}} = d \cdot E_c, \quad (8)$$

где $E_{\text{ш}}$ и E_c – полная энергии шума и сигнала, соответственно, d – заданная как процентная доля от общей энергии сигнала интенсивность шума, α – коэффициент нормировки, который требуется найти. Как известно, энергия сигнала вычисляется как сумма квадратов отсчётов сигнала.

Поскольку шум в данной задаче является аддитивным, он накладывается на исходный сигнал простым сложением:

$$\tilde{x}_i = x_i + \xi_i, \quad (9)$$

где \tilde{x}_i – отсчёты зашумлённого сигнала, x_i – отсчёты исходного сигнала, а ξ_i – отсчёты отнормированной шумовой последовательности.

На рис. 3 представлен характерный вид полученного таким образом гармонического сигнала с уровнем шума 10%.

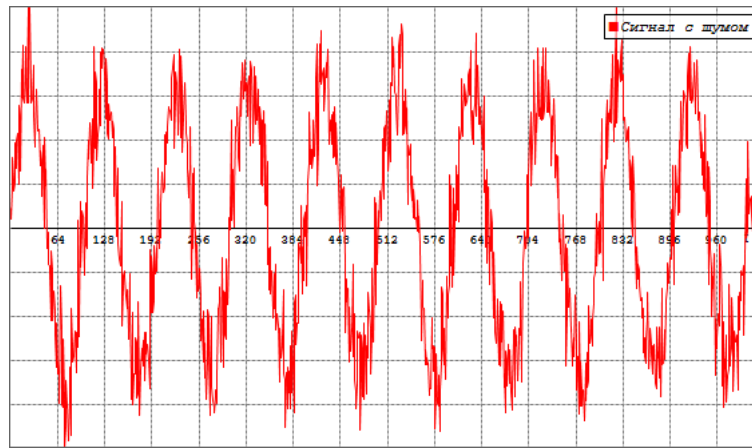


Рис. 3. Вид синусоидального сигнала с единичной амплитудой и частотой $f = 0.01$ с наложенным белым гауссовым шумом интенсивностью 10%

Поскольку белый шум является некоррелированным с сигналом случайным процессом и занимает всю полосу частот, а полезный сигнал является низкочастотным, это позволяет достаточно эффективно очистить исходный полигармонический сигнал от шума в частотной области. Чтобы перейти в частотную область, необходимо выполнить преобразование Фурье зашумлённого сигнала, для чего его нужно преобразовать в комплексный сигнал, добавив нулевую мнимую часть. Как уже отмечалось выше, на практике в большинстве случаев для этого используют алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). При реализации алгоритма фильтрации с использованием БПФ необходимо учитывать, что длина входной последовательности N – обязательно должна быть степенью двух. В общем случае применение алгоритма БПФ даёт комплексную выходную последовательность. Для наглядного представления графика спектра зашумлённого сигнала нужно сформировать амплитудный спектр (массив модулей) из комплексной последовательности отсчетов спектра (энергетический спектр представляет собой квадрат модуля отсчетов). Полученный график будет содержать спектральные отсчёты сигнала от нуля до частоты дискретизации, первая половина массива $[0, \frac{N}{2} - 1]$ соответствует положительным частотам, другая половина массива $[\frac{N}{2}, N - 1]$ соответствует отрицательным частотам, расположенным симметрично по отношению к положительным частотам относительно центра массива. При этом все операции, связанные с фильтрацией в частотной области, необходимо выполнять над комплексным спектром. На рис. 4 приведён пример графика спектра зашумлённого полигармонического сигнала с тремя гармониками.

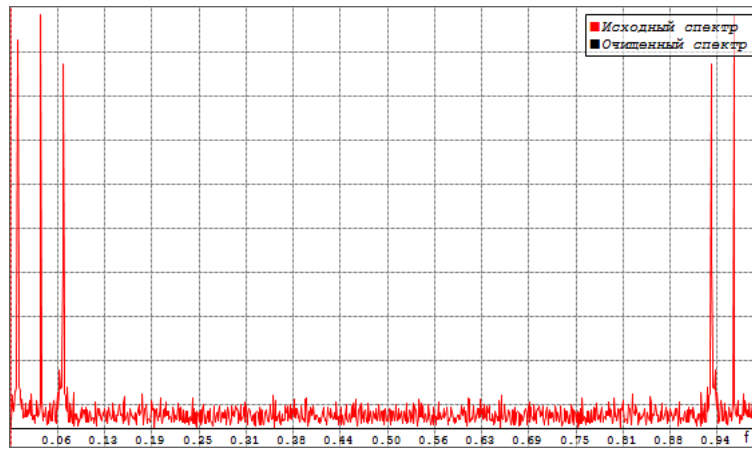


Рис. 4. Спектр полигармонического сигнала с тремя гармониками и наложенным белым гауссовым шумом

Алгоритм фильтрации низкочастотного сигнала состоит в следующем. Задается значение коэффициента (порога), определяющего долю энергии спектра сигнала, которая сохраняется в результате проведения фильтрации. Вычисляется полная энергия спектра зашумлённого сигнала. Далее с обоих концов массива суммируется энергия спектра до достижения заданного порога. По достижении порога все остальные отсчёты комплексного спектра зануляются. Идея заключается в том, чтобы сохранить частотную область, соответствующую спектральным составляющим исходного сигнала и отбросить шумовую составляющую, которую на рис. 4 можно отчётливо видеть в середине спектра между спектральными пиками. Результат такой очистки спектра выглядит как показано на рис. 5.

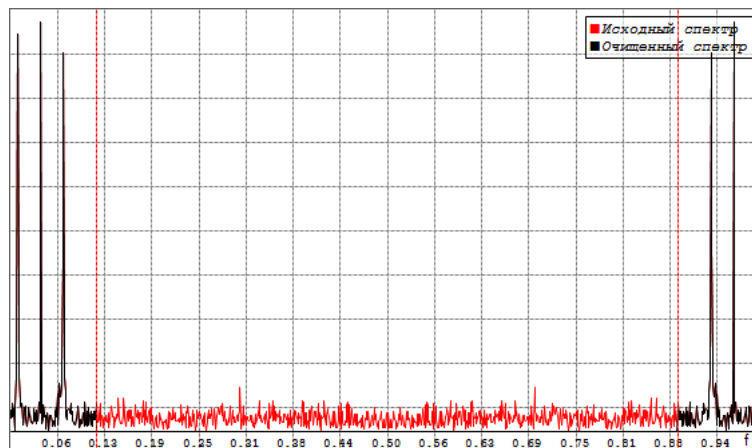


Рис. 5. Спектр полигармонического сигнала с тремя гармониками и наложенным белым гауссовым шумом после применения алгоритма фильтрации в частотной области

При проведении такого способа фильтрации в частотной области необходимо учитывать, что отсчет спектра с нулевым индексом $X[0]$ (для алгоритма БПФ Кули-Тьюки) соответствует постоянной составляющей в сигнале. Однако в нашем случае при моделировании полигармонического сигнала постоянная составляющая в сигнале практически отсутствует.

Заключительным этапом осталось вычислить обратное преобразование Фурье от полученного «очищенного» комплексного спектра и сравнить полученный сигнал во временной области с исходным сигналом. Если все операции по очистке над массивом комплексного спектра производились симметрично в области положительных и отрицательных частот (т.е. с учётом того, что в первой половине массива спектра содержится отсчет $X[0]$, соответствующий значению постоянной составляющей сигнала), после выполнения обратного преобразования Фурье должны получить комплексный выходной массив, содержащий отсчёты отфильтрованного сигнала, причём практически вся энергия сигнала будет сосредоточена в реальной части.

В качестве меры отклонения между двумя сигналами одинаковой длины принято использовать среднеквадратичную ошибку (СКО), нормированную на один отсчёт, которая вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\tilde{x}_i - x_i|^2. \quad (10)$$

Удобно также использовать относительную ошибку, определяемую как отношение энергии разности сравниваемых сигналов к энергии исходного (незашумлённого) сигнала.

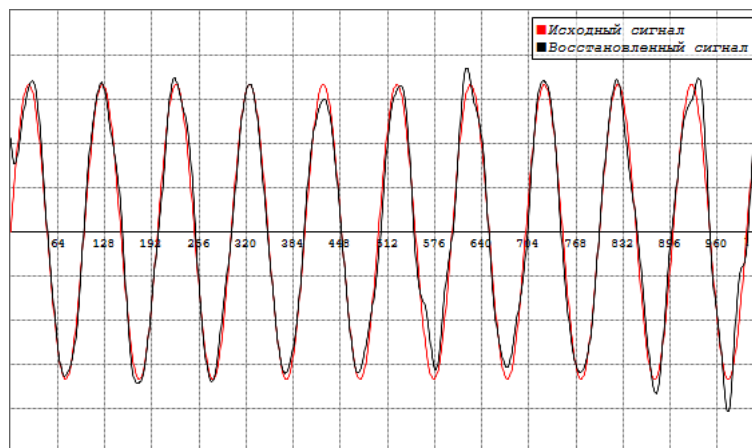


Рис. 6. Сравнение восстановленного и исходного сигналов

Поскольку влияние шума сохраняется в низкочастотной области спектра, не затронутой алгоритмом фильтрации, точность восстановления очищенного сигнала зависит от заданного уровня энергии (порога). Если он слишком большой, то будут присутствовать «лишние» шумовые составляющие в восстановленном сигнале. Если же уровень слишком маленький, спектр полезного сигнала будет искажён, поэтому будет большим отклонение между исходным и восстановленным сигналами.

1.4 Замечания по реализации

В данной задаче необходимо задавать через пользовательский интерфейс:

- Количество гармоник в исходном сигнале от единицы до трёх;
- Длину исходного сигнала как степень двух, рекомендуется выбрать значение в диапазоне от 256 до 2048 отсчётов;
- Интенсивность белого шума – как дисперсию белого шума или процентную долю от полной энергии исходного сигнала;
- Амплитуды, частоты и начальные фазы гармонических составляющих сигнала;
- Процентную долю полной энергии спектра (порог) для фильтрации шумовой составляющей.

Требуется вывести на экран:

- График исходного полигармонического сигнала;
- График исходного сигнала с наложенным белым гауссовым шумом заданной интенсивности;
- График модуля (или квадрата модуля) спектра зашумлённого сигнала, на том же графике разными цветами выделить часть спектра, оставшуюся после очистки от шума;
- График исходного и отфильтрованного сигнала для визуального сравнения (см. рис. 6);
- Среднеквадратичное отклонение между исходным и восстановленным сигналами.

1.5 Дополнительные вопросы

1. Для каких сигналов применим данный алгоритм отчистки от шума? С чем связаны границы применимости алгоритма?
2. Чисто шумовые составляющие полученного спектра сигнала нельзя считать постоянными. Не противоречит ли это теории, согласно которой СПМ белого шума является постоянной величиной?
3. В данной задаче программно вычисляем спектральную оценку с помощью быстрого преобразования Фурье на основе ограниченной дискретной выборки. Объясните, почему при этом не наблюдается появление главного и боковых лепестков.
4. Что будет если обрезать боковые лепестки и попытаться восстановить сигнал? Как это можно объяснить?

1.6 Пример пользовательского интерфейса

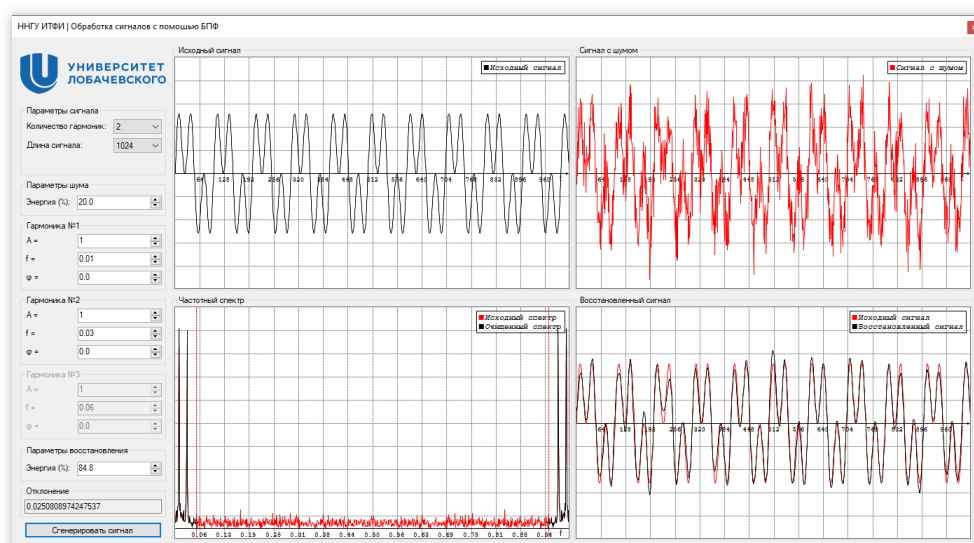


Рис. 7. Пример пользовательского интерфейса

На рисунке 7 приведен пример пользовательского интерфейса моделирующей программы. В верхних окнах программы представлены исходный и зашумлённый сигналы, в нижних окнах представлены квадрат модуля спектра зашумлённого сигнала и очищенный сигнал, соответственно. Меню слева позволяет задавать параметры генерируемых сигналов и управлять процессом очистки.