Отчёт по лабораторной работе по дифференциальным уравнениям

Вариант: 1.1) Нахождение параметров линейного дифференциального однородного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами при известных значениях y` в ряде точек.

Цель работы: исследование способов построения ДУ согласно варианту по набору точек.

Инструменты: работа была написана на языке Python 3.11, использовались такие библиотеки как numpy, matplotlib, scipy.

Ход работы:

1) Анализ варианта.
2) Разбор аналитического решения.
3) Поиск и разбор других вариантов.
4) Вывод.

Выполнял: Скорняков Леонид M3236

Анализ варианта

Рассмотрим тип ДУ данного варианта. Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y` + ay + b = 0$$

где a, b - искомые коэффициенты.

Решением является функция вида:

$$y = C * e^{-at} - b / a$$

где C - какая-то константа.

Тогда производная имеет вид:

$$y` = -a * C * e^{-at}$$

где C - какая-то константа.

Можно заметить, что y` не зависит от b, следовательно по набору точек невозможно восстановить данный аргумент, так как он может быть произвольным. Чтобы решить эту проблему добавим условие $y(t_0) = y_0$, тогда задача превращается в задачу Коши.

То есть, чтобы задать график y`(t) нужен дополнительная константа C, а также необходимо задать дополнительное условие, чтобы аргумент b был вычисляем.

Дальше будет предъявлено точное аналитическое решение данной задачи в случае отсутствия шума на наборе данных, поэтому хотелось рассмотреть задачу с наличием шума.

Для генерации синтетических данных с шумом будет использоваться функция numpy.normal.random(mu, sigma, …) - генерирующая шум с нормальным (Гауссовским) распределением, где mu - среднее значение (“центр”) распределения, sigma - стандартное отклонение.

Для анализа полученных данных введем несколько метрик:

1. Mean Squared Error (MSE) - среднеквадратичное отклонение. Вычисляется по формуле:

   $$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i)^2$$, где e - отклонение

2. Mean Absolute Error (MAE) - среднее абсолютное отклонение. Вычисляется по формуле:

$$\mathrm{MAE} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |e_i|}{n}$$, где e - отклонение.

3. Huber Criterion (HC) - критерий Хубера. Вычисляется по формуле:

$$L_\delta(a) = \begin{cases} \frac{1}{2}a^2 & \text{for } |a| \le \delta, \\ \delta \cdot \left(|a| - \frac{1}{2}\delta\right), & \text{otherwise.} \end{cases}$$, где a - отклонение, delta - константа.

4. R-Squared (RS) - коэффициент детерминации. Вычисляется так.

Разбор аналитического решения

Заметим, что если нам даны значения y` в точках t_0 и t_1, то можно найти дифференциальное уравнение удовлетворяющее графику:

$$\begin{cases} y_1{}' = -a * c * e^{-a * x_1} \\ y_2{}' = -a * c * e^{-a * x_2} \end{cases}$$

$$\frac{y_1{}'}{y_2{}'} = \frac{e^{-a * x_1}}{e^{-a * x_2}}$$

$$\ln\frac{y_1}{y_2{}'} = -a * (x_1 - x_2)$$

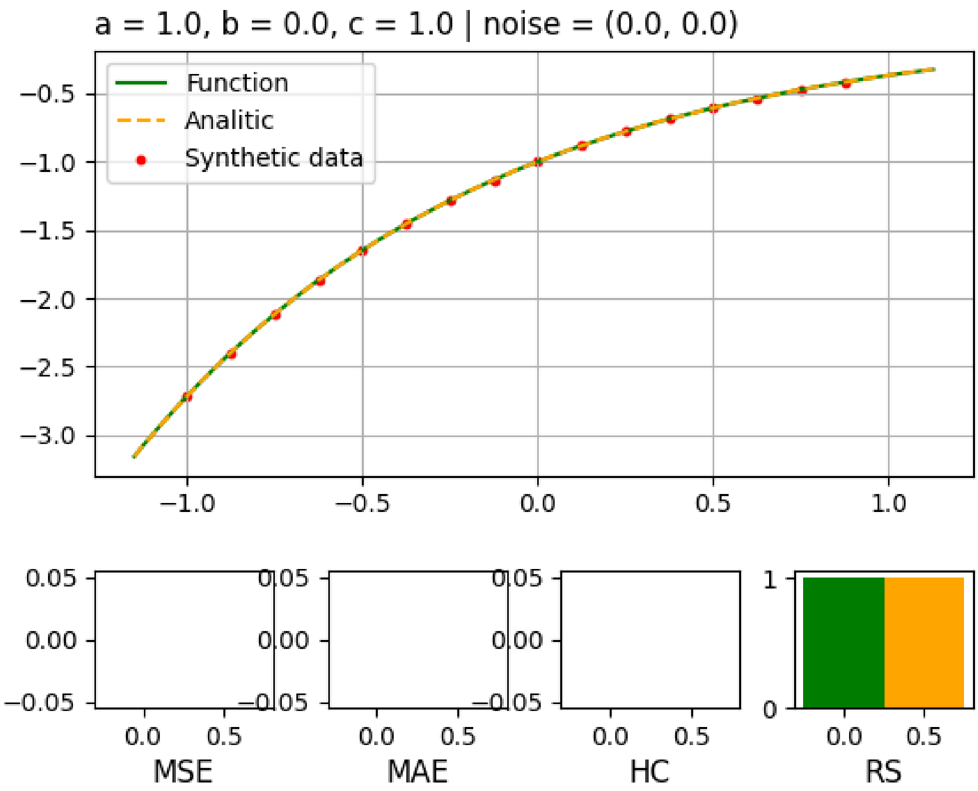
$$a = -\frac{\ln\frac{y_1{}'}{y_2{}'}}{x_1 - x_2}$$

$$c = -\frac{y_1{}'}{a * e^{-a * x_1}}$$

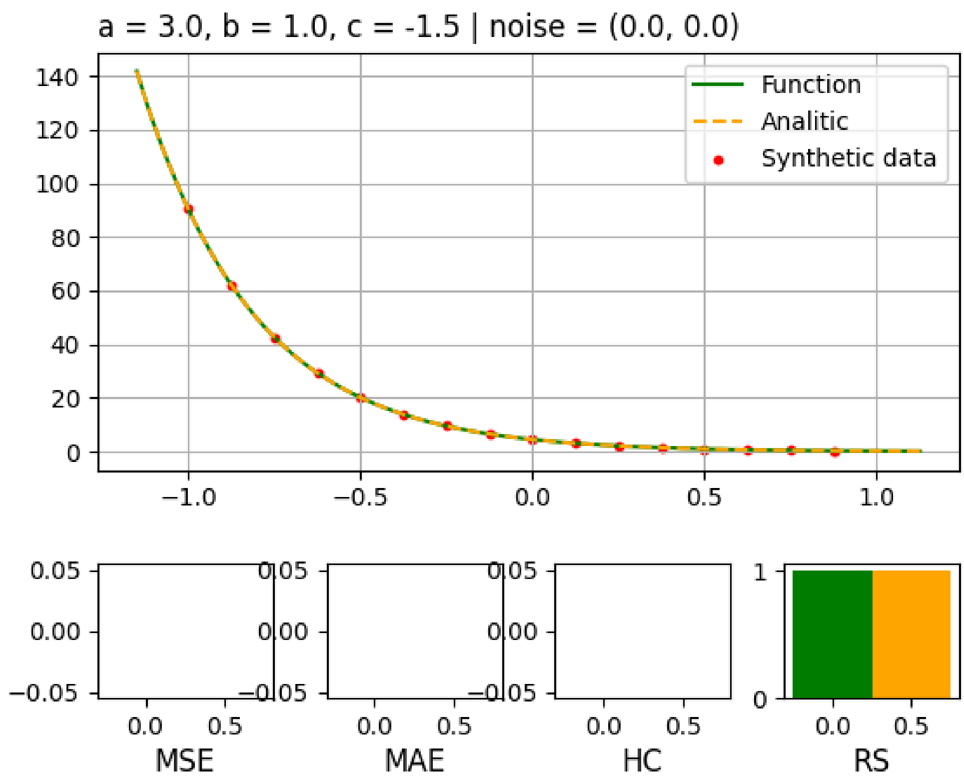
$$b = -a * (y - c * e^{-at})$$

где y, t - известны по начальному условию

Рассмотрим несколько графиков решений:

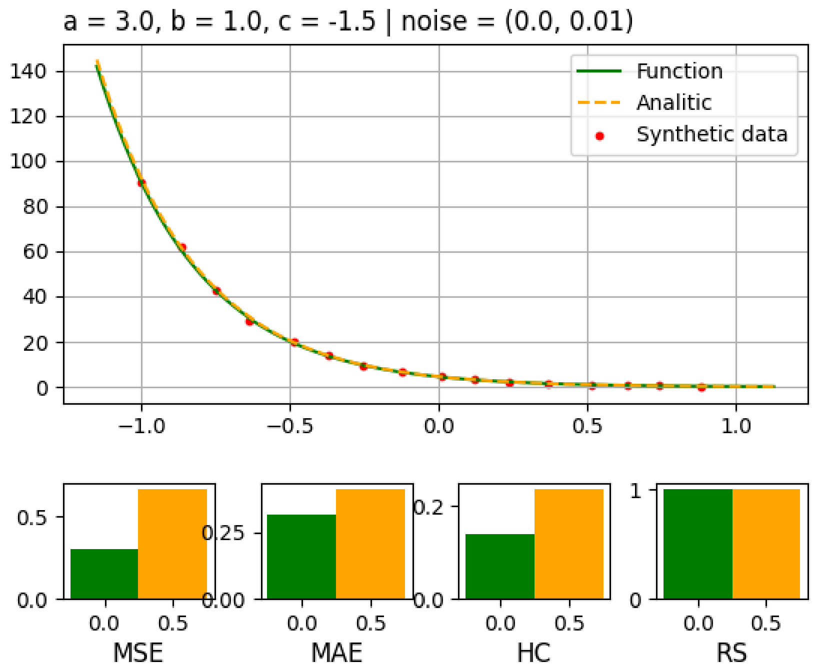


[1.0, 0.0, 1.0] MSE: 0.0 MAE: 0.0 HC: 0.0 RS: 1.0

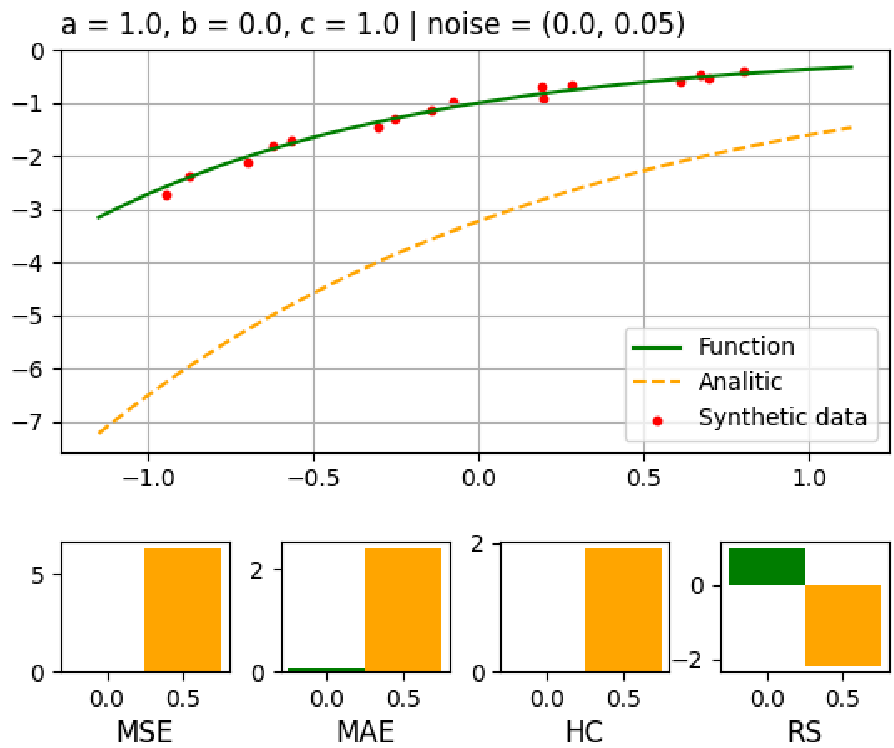


[3.0, 1.0, -1.5] MSE: 0.0 MAE: 0.0 HC: 0.0 RS: 1.0

Как видно по графикам, аналитическое решение при отсутствии шума генерирует абсолютно точное решение. Рассмотрим вариант с шумом (так как из-за шума в зависимости от того какие 2 точки выбрать получаются разные коэффициенты, то в ответ идёт среднее значение).

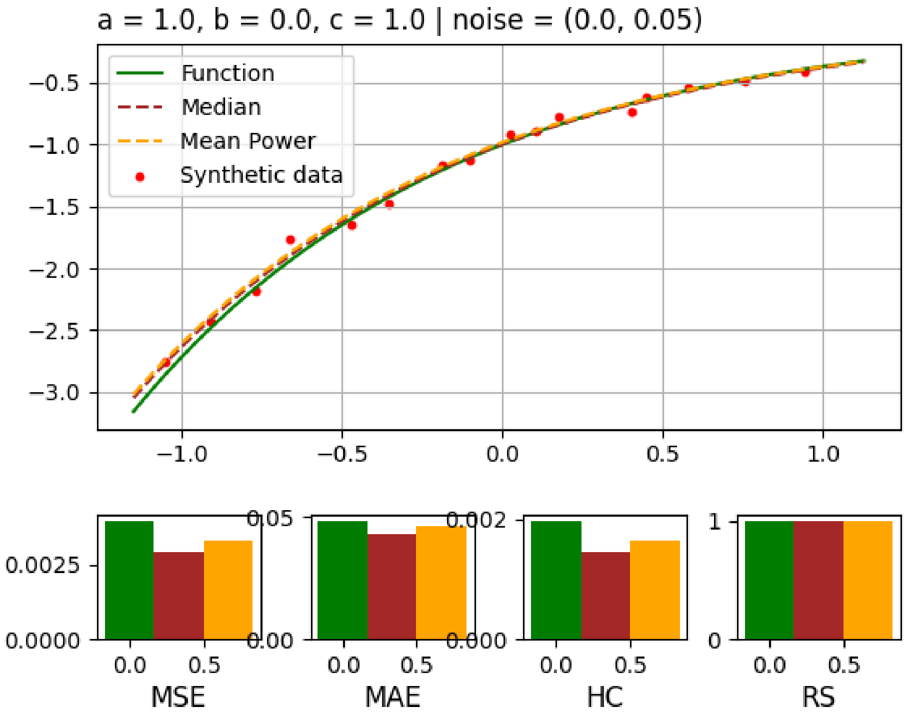


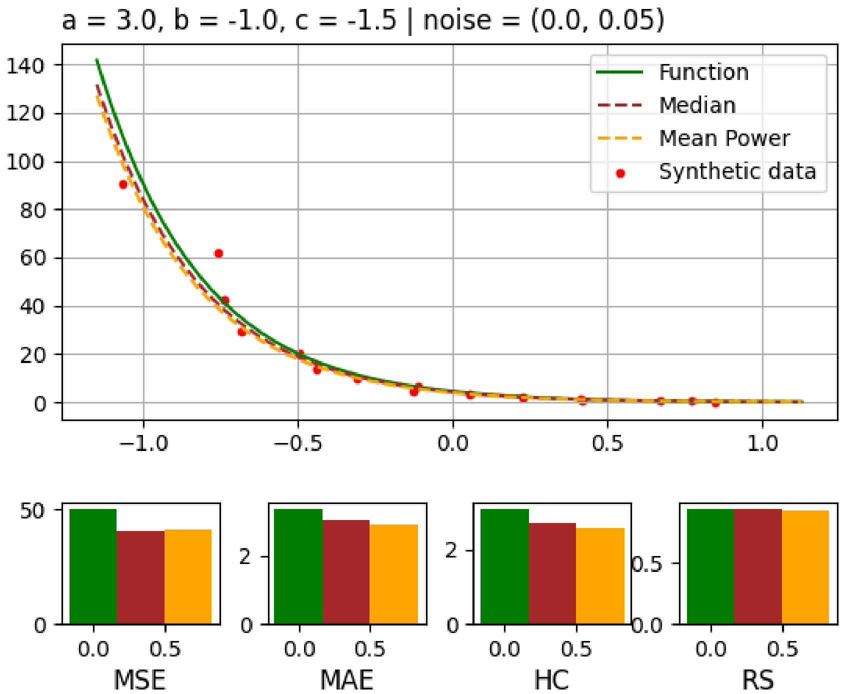
[3.00, -0.71, -1.52] MSE: 0.66 MAE: 0.41 HC: 0.24 RS: 0.999



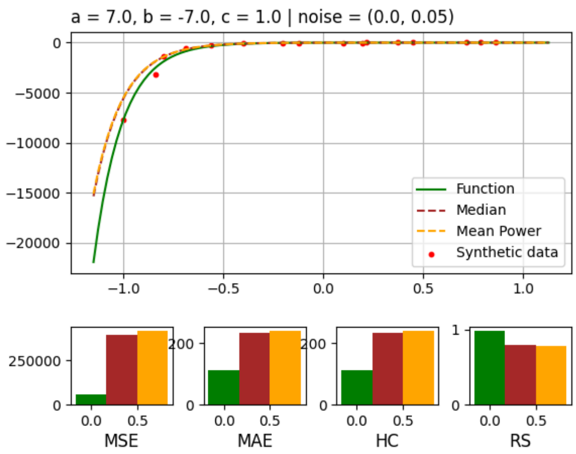
[0.70, 4.46, 4.60] MSE: 6.30 MAE: 2.41 HC: 1.91 RS: -2.19

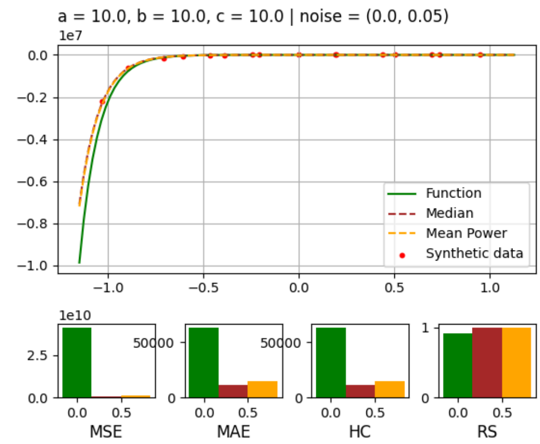
Как видно по графикам, аналитическое решение в случае наличия шума обладает очень низкой точности, отрицательное значение метрики R-Squared на втором графике говорит о том, что полученная функция обладает большим отклонением чем модель на основе среднего значения точек. Но есть другие способы как можно обработать аналитическое решение, например, медианное значение или среднее степенное от половины медианных значений.

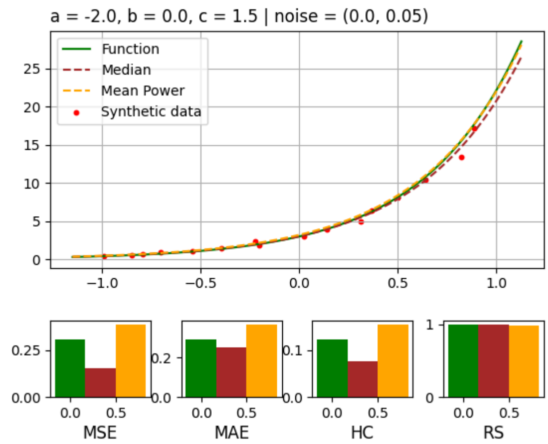


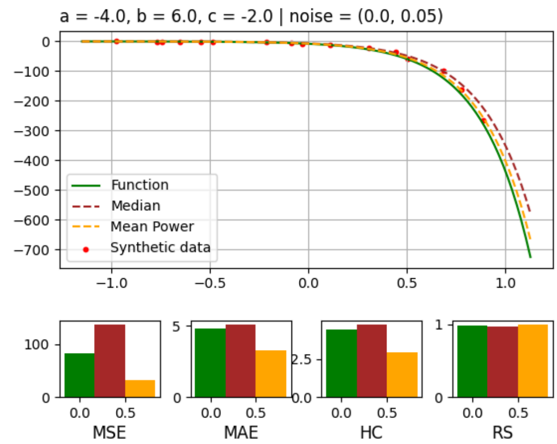


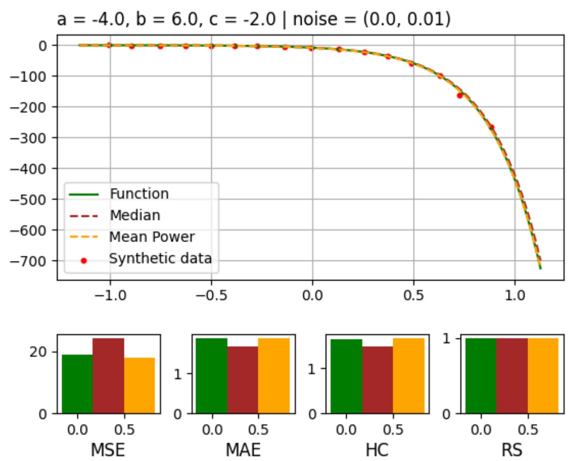
При таких обработках данных результаты метрик могут быть лучше чем у оригинальной функции. Но в большинстве случаев он на примерном уровне с случайными положительными/отрицательными отклонениями.

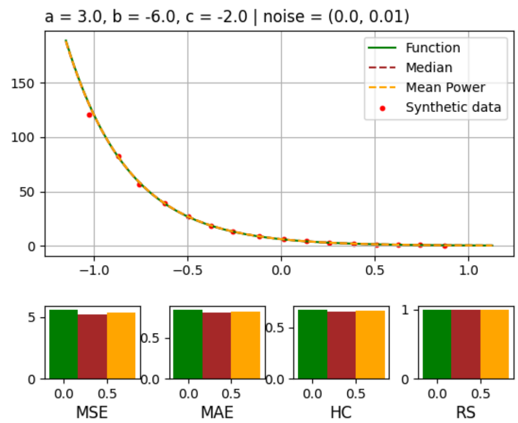








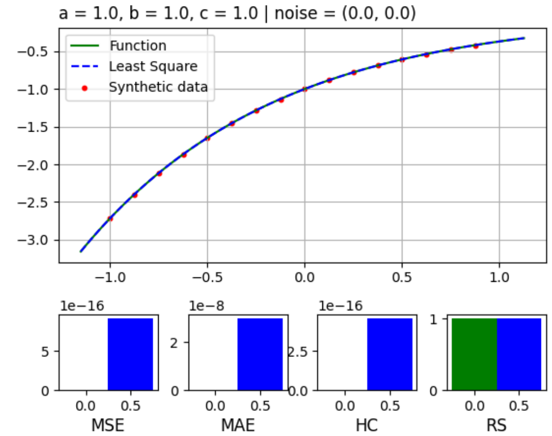


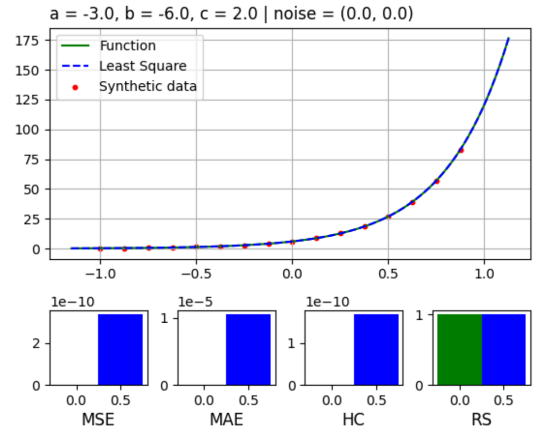


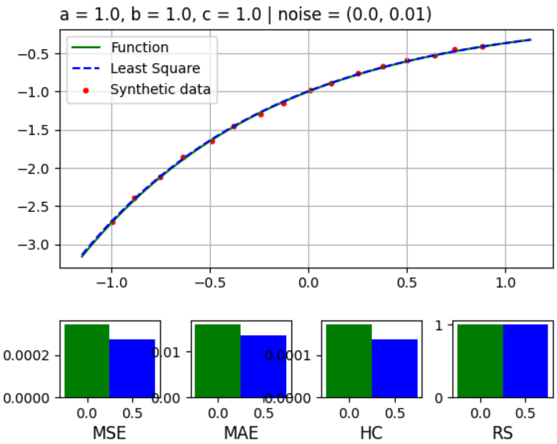
Анализируя график можно сказать, что если данные имеют небольшой шум (порядка 0.01 стандартное отклонение), то допустимо использовать аналитический способ, в ином случае результат становится слишком случайным и непредсказуемым. Другие способы обработать аналитические данные ситуацию не исправляют, крайние случаи, а также точки с наибольшим шумом, вносят слишком большое отклонение, поэтому нельзя рассматривать все пары точек отдельно друг от друга.

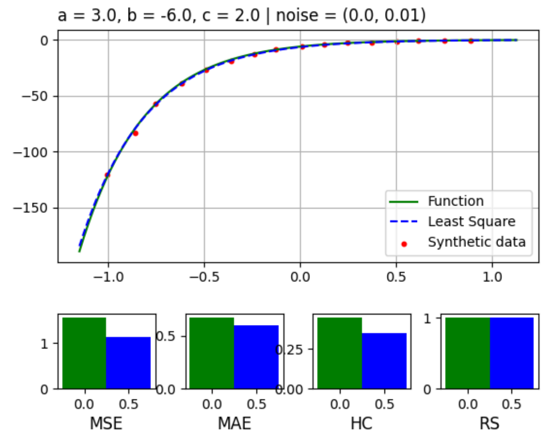
Поиск и разбор других вариантов

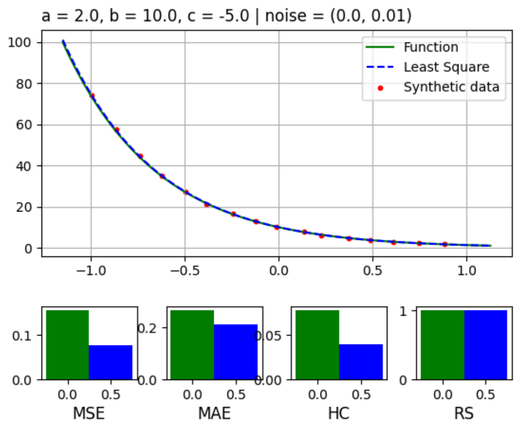
Рассмотрим другой способ который часто используется для решения нелинейной регрессии - метод нелинейных малых квадратов. Этот метод заключается в линеаризации нелинейной модели путем разложения ее в ряд Тейлора до первого члена. Затем полученная линейная модель решается с помощью метода наименьших квадратов. Так как это классическая задача, то воспользуемся готовой реализацией scipy.optimize.curve_fit. Рассмотрим результаты при разных значениях шума.

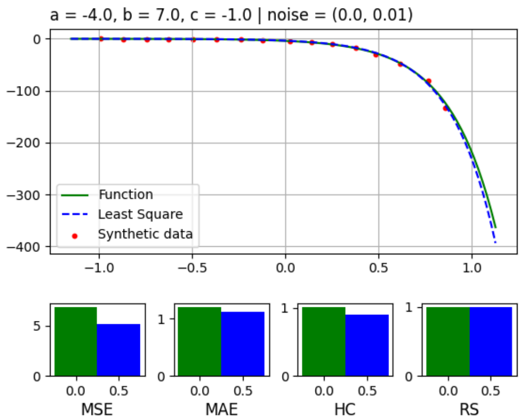


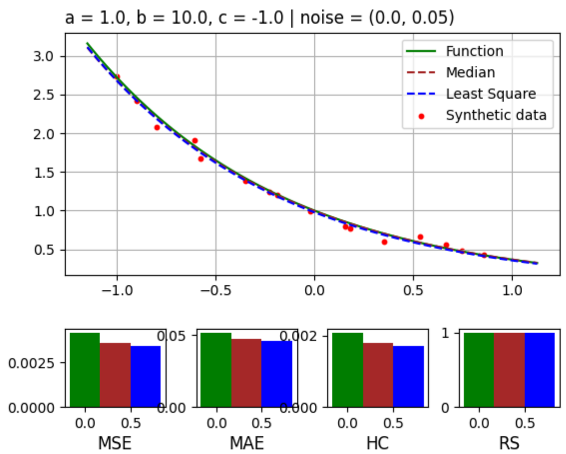


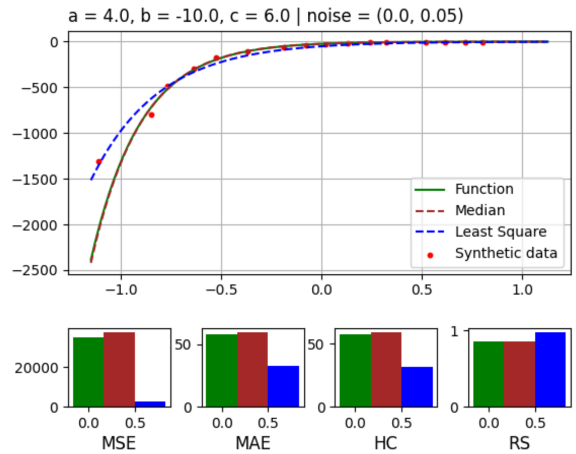


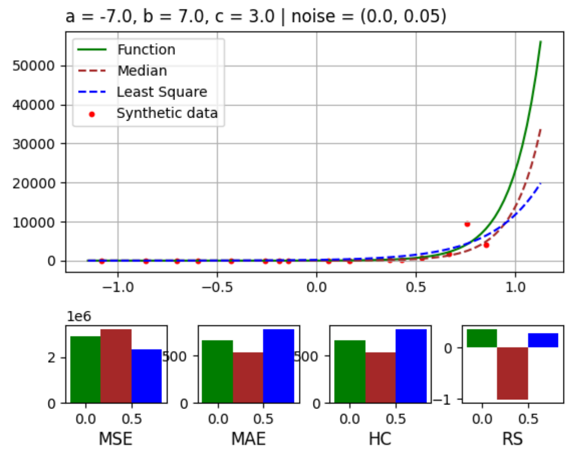


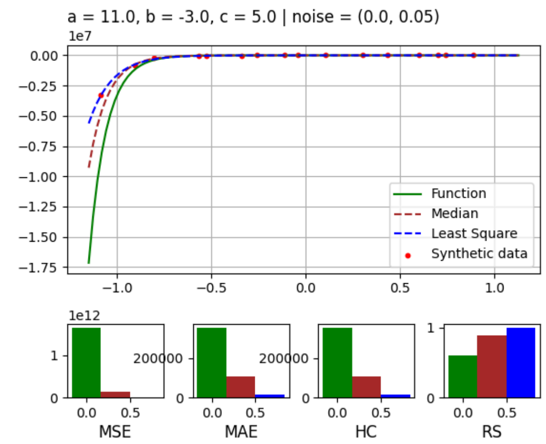


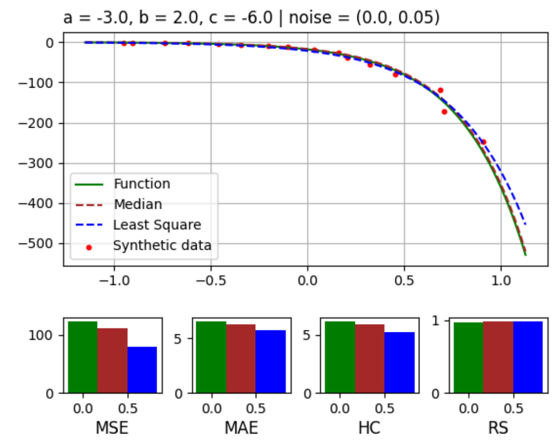


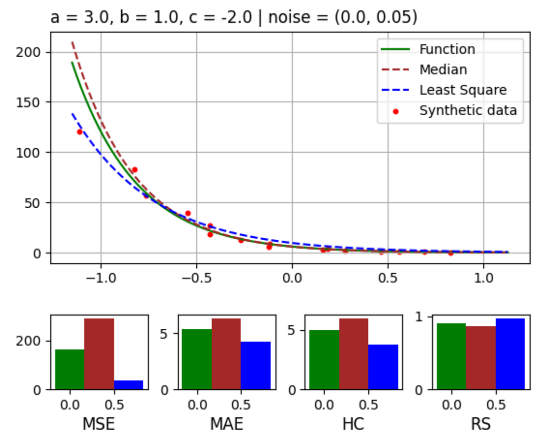












Смотря на графики можно сказать, что в подавляющем большинстве случаев метод малых квадратов имеет метрики лучше, чем исходная функция. При малом значении шума этот метод справляется с пренебрежительно малой погрешностью от исходной функции, а при больших шумах лишь иногда хуже по абсолютному отклонению от исходной функции. Также метод нелинейных малых квадратов оказывается лучше в абсолютном большинстве случаев чем аналитическое решение, а также результат всегда одинаково стабилен.

Вывод

При малом количестве шумов, или при их отсутствии очень хорошо справляется аналитическое решение, асимптотика такого подхода $O(N^2)$, где N - начальное количество точек. Но с увеличением погрешности аналитический подход теряет актуальность, вместо него лучше использовать метод нелинейных малых квадратов, который работает точно и стабильно, но более долго - количество шагов во время работы можешь быть кратно больше размера входных данных, но на данных небольшого размера это приоритетное решение задачи.