SeaTech Toulon

Détection
Rapport

Travaux pratique de détection

Élève :
Arthur Gautier

30 avril 2023

Table des matières

1 Introduction

L'analyse de la densité spectrale de puissance est un domaine clé de la signalisation et du traitement du signal, qui permet de comprendre la distribution de l'énergie d'un signal en fonction de la fréquence. Pour réaliser cette analyse, nous avons besoin d'estimateurs fiables qui nous permettent d'obtenir des estimations précises de la densité spectrale de puissance. Dans ce TP, nous allons étudier deux de ces estimateurs populaires : le corrélogramme et le périodogramme. Nous comparerons les performances de ces deux estimateurs sur différents types de signaux, en étudiant leur sensibilité aux bruits, leur précision, leur robustesse et d'autres critères importants. À la fin de ce TP, nous aurons acquis une meilleure compréhension de l'utilisation de ces estimateurs dans la pratique pour l'analyse de la densité spectrale de puissance.

2 Création du jeu de données

$$\begin{cases} H_0 : z(t) = b(t) \\ H_1 : z(t) = b(t) + x(t) \end{cases} \tag{1}$$

Soient $b(t)$ un processus aléatoire perturbateur et $x(t)$ le signal connu à détecter. On considère N échantillons aux dates t_1 à t_n. On note le vecteur de mesures $Z = [z(t_1), ..., z(t_n)]^t$, le vecteur bruit $B = [b(t_1), ..., b_(t_n)]^t$ et le vecteur signal $X = [x(t_1), ..., x_(t_n)]^t$. Ici B est un bruit centré de loi p_b. On commence par créer les Z mesures pour 10000 valeurs où X est présent que sur les 5000 dernières.

3 Exercice 1

3.1 Partie 1

Dans cet exercice le bruit est de densité de de probabilité gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma_B^2)$.
Afin de simplifier, nous prenons $N = 1$, $\sigma_B^2 = 4$ et $X = 2$. On commence par définir le détecteur au sens de Bayes.

On calcule ensuite le couple optimal (P_{fa}, P_D) que l'on compare aux résultats trouvés.
On trouve $P_D = 0.4228$, $P_{fa} = 0.1170$ et Risque $= 0.3998$. Or on trouve théoriquement que $P_{D_{th}} = 0.4246$, $P_{fa_{th}} = 0.1170$, et Risque$_t h = 0.4047$. Ces résultats sont donc bien conformes aux résultats théorique.

On met ensuite en place le test sur la fonction de vraisemblance que l'on compare aux résultats précédents. On utilise le détecteur de Bayes définit ainsi :

$\Lambda(x) = \frac{P_{x/H_1}(x)}{P_{x/H_0(x)}} > \Lambda_0$ pour l'hypothèse δ_1 et $\Lambda(x) = \frac{P_{x/H_1}(x)}{P_{x/H_0(x)}} < \Lambda_0$ pour l'hypothèse δ_0
Avec les données du test de mesures on obtient ce rapport de vraisemblance :

$$\Lambda(x) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-X}{\sigma_b})^2 + \frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma_b})^2}$$

Pour obtenir la fonction de vraisemblance, on peut calculer le produit des probabilités conditionnelles P(xi/H) pour chaque échantillon dans l'échantillon de taille n, étant donné que les mesures sont indépendantes les unes des autres. En d'autres termes, la fonction de vraisemblance est obtenue en multipliant les probabilités conditionnelles de chaque échantillon.

$$\Lambda(x) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_i - X_i}{\sigma_b})^2 + \frac{1}{2}(\frac{x_i}{\sigma_b})^2}$$

On trace ensuite le risque en fonction du seuil.

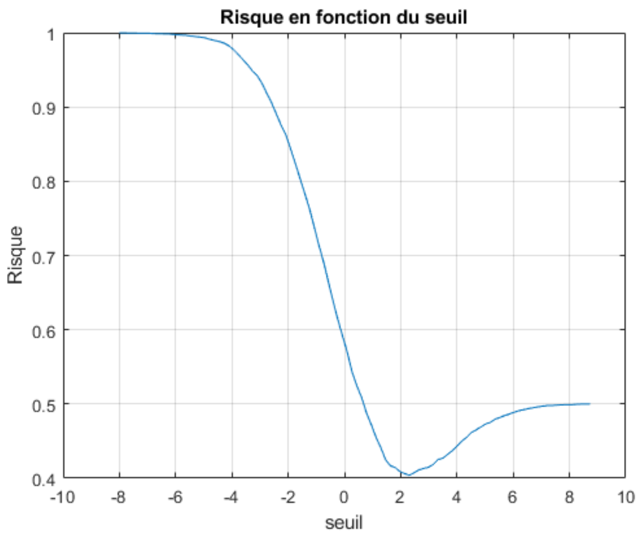


FIGURE 1 – Courbe de risque

On trace les courbes COR pour différents valeurs de X.

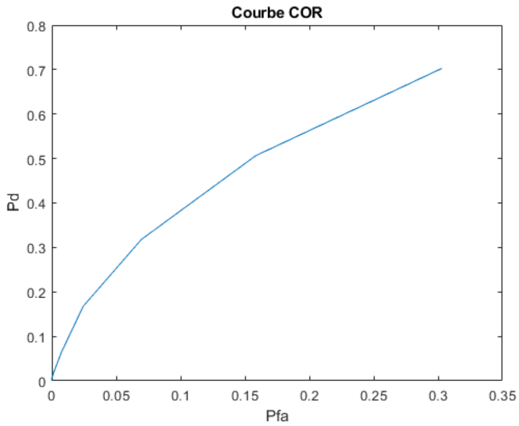


FIGURE 2 – X=2

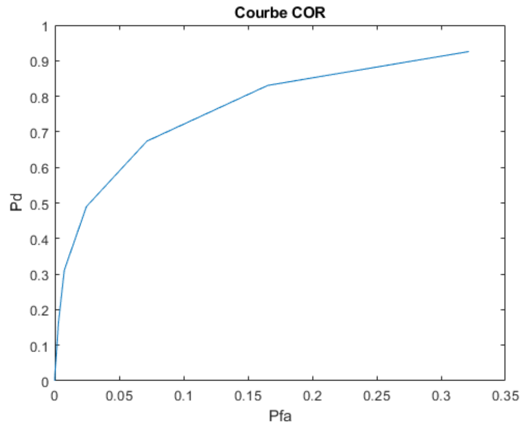


FIGURE 3 – X=4

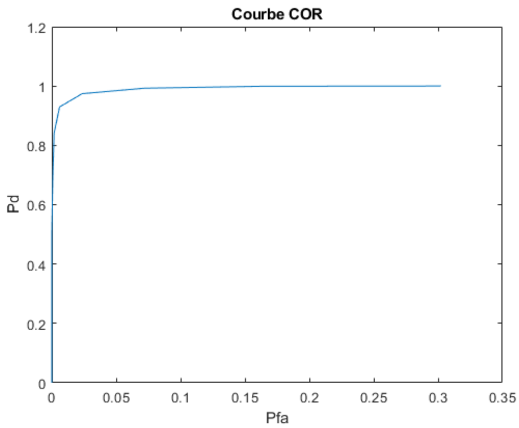


FIGURE 4 – X=8

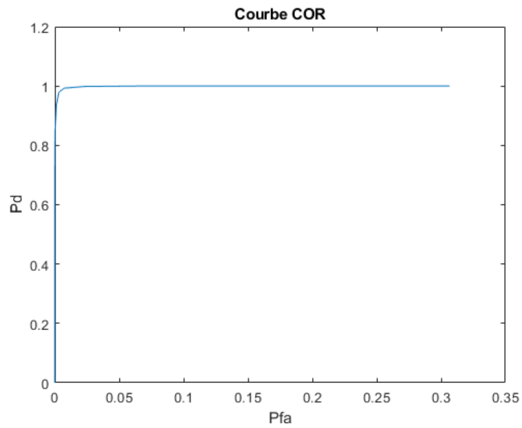


FIGURE 5 – X=8

FIGURE 6 – Courbes COR en faisant varier X

On observe que plus X est grand, plus la courbe COR se rapproche d'une droite verticale en 0 et horizontale en 1. Plus X est grand, plus le signal bruit va être difficile à différencier et donc plus le détecteur sera performant.

3.2 Partie 2

Nous prenons maintenant deux échantillons avant de prendre une décision c.à.d $N = 2$, et nous prenons pour signal $X = [2, 4]^t$. Le bruit est une séquence indépendante et identiquement distribuée.

On obtient théoriquement avec ces paramètres $P_{d_{th}} = 0.791$, $P_{fa_{th}} = 0.0764$ et $\text{Risque}_{th} = 0.1809$. On obtient avec les résultats du test : $Pd = 0.7898$, $P_{fa} = 0.0784$ et $\text{Risque} = 0.1835$. On voit qu'une nouvelle fois, les résultats du tests sont très similaires aux théoriques.

On peut donc comme précédemment tracer les courbes COR et de risque :

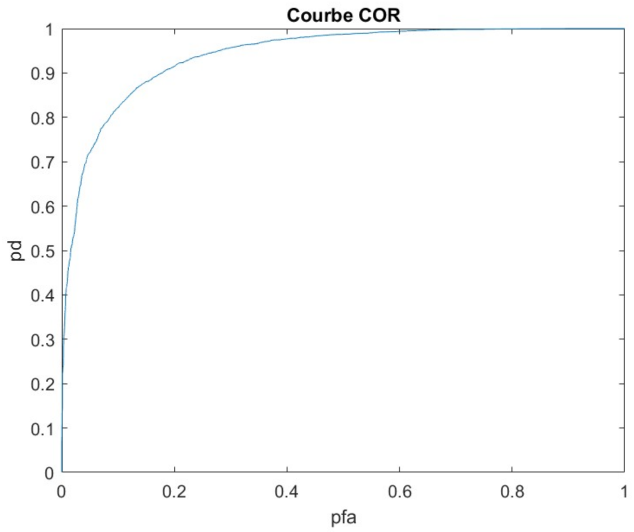


FIGURE 7 – Courbe COR

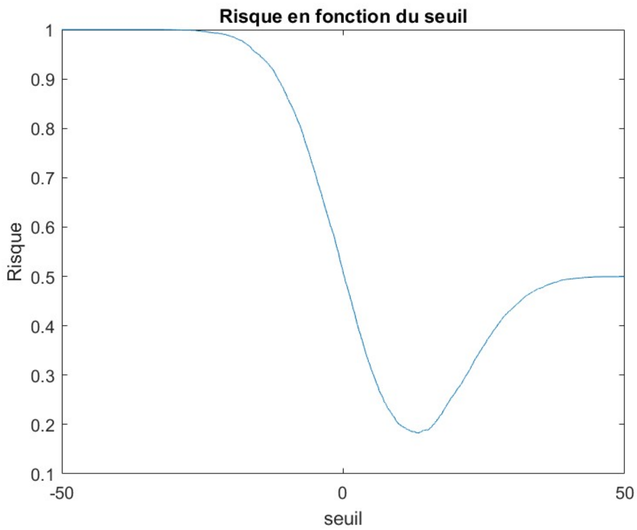


FIGURE 8 – Courbe de risque

3.3 Partie 3

Nous prenons deux échantillons avant de prendre une décision et le signal est $X = [2, 4]^t$. Le bruit centré n'est pas une séquence indépendante. On prend pour matrice de covariance :

$$E(ZZ') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \frac{\sigma^2}{2} \\ \frac{\sigma^2}{2} & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

On commence par créer un jeu de test adéquat c.à.d. une séquence de bruit gaussien centré et de matrice de covariance définit plus haut.

On peut créer deux mesures corrélées :

$$Y = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ ax_2 + bx_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x(n)$$
$$\mathrm{x}_2 = x(n-1)$$
$$\mathrm{x}_3 = x(n+2)$$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (calculé en TD).

Avec ces mesures on peut définit le signal Z sous les hypothèses H_0 et H_1.

$H_0 : Z = Y$

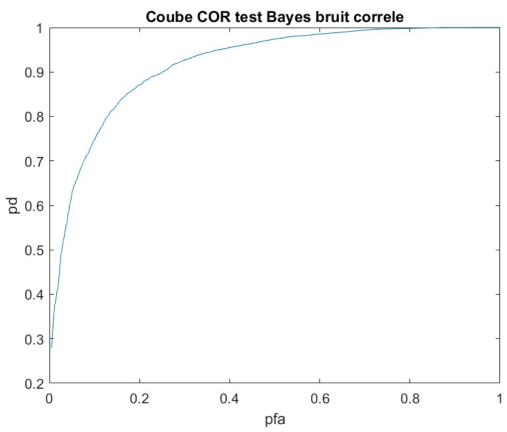
$H_1 : Z = Y + X$

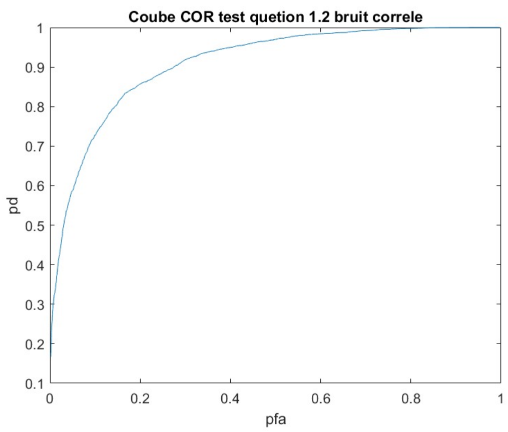
Comme les mesures sont corrélés, les probabilités conditionnelles dépendent de la matrice de covariance. On a donc :

$$P_{x/H_1} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} det(\Gamma)} e^{-\frac{1}{2}(Z-X)^t \Gamma^{-1}(Z-X)}$$

La fonction de vraisemblance est alors définit ainsi :

$$\Lambda(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(Z-X)^t \Gamma^{-1}(Z-X)}}{e^{-\frac{1}{2} Z^t \Gamma^{-1} Z}}$$





Les résultats montrent que la courbe COR obtenue avec le nouveau test de Bayes est légèrement supérieure à celle obtenue avec le test de la question 1.2. Cela démontre que ce nouveau test est mieux adapté à ce signal corrélé. En outre, quelques paramètres ont été calculés :

Pour un seuil de 2, le nouveau test donne les résultats suivants : on obtient une $P_d = 0,7474, P_{fa} = 0,0976, \text{Risque} = 0,2239$. Pour un seuil de 12,77, le test de la question 1.2 donne les résultats suivants : $P_d = 0,7452, P_{fa} = 0,1152, \text{Risque} = 0,2426$..

On observe que, avec ce nouveau test, la P_d augmente légèrement tandis que la P_{fa} diminue légèrement, ce qui réduit le risque minimal de 0,02 point. En comparaison avec les résultats de la question 1.2, on constate que le détecteur optimal pour le signal corrélé est moins performant que le détecteur optimal pour un signal non corrélé.

4 Exercice 2

Soient ε_k une séquence indépendante et identiquement distribuée de loi de probabilité gaussienne centrée de variance σ_ε^2. δ_k une séquence d'impulsions unitaires espacées de 10 échantillons (1/10 du nombre total d'échantillons).

$$L(z) = 1 + cz^{-1}, F(z) = d + z^{-1}, c = 0.8, \sigma_\varepsilon = 0.5, d = -2.05$$

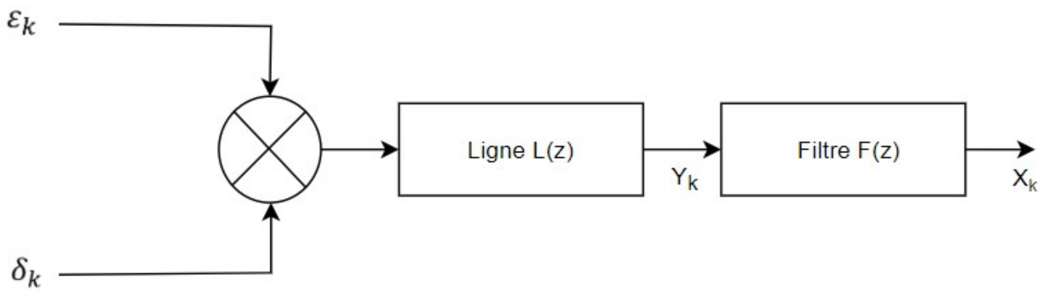


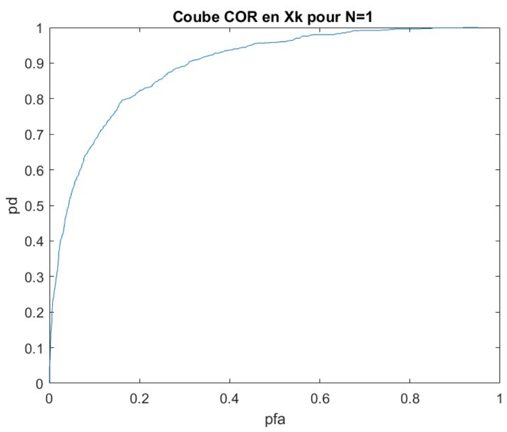
FIGURE 9 – Structure

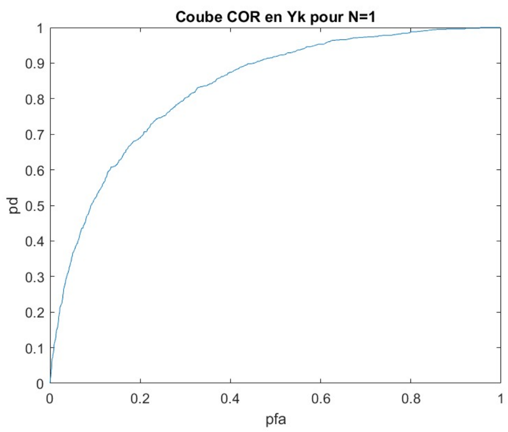
On va mettre en place des détecteurs Y_k et X_k pour voir lequel des deux est le plus performant.

$$Y_z = \varepsilon(z)(1 + cz^{-1}) \Rightarrow y(k) = \varepsilon + c\varepsilon(k-1)$$

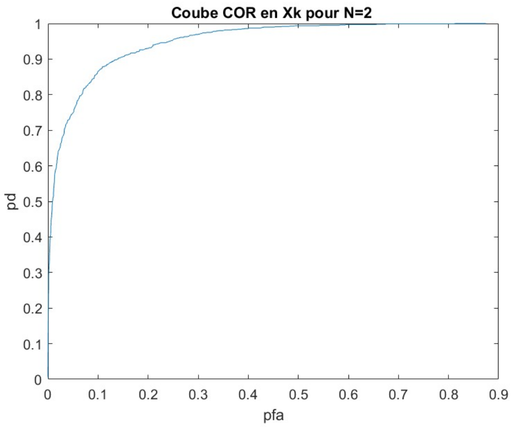
$$X_z = Y(z)(d + z^{-1}) \Rightarrow x(k) = dy(k) + y(k-1) = d\varepsilon(k) + (dc+1)\varepsilon(k-1) + c\varepsilon(k-2)$$

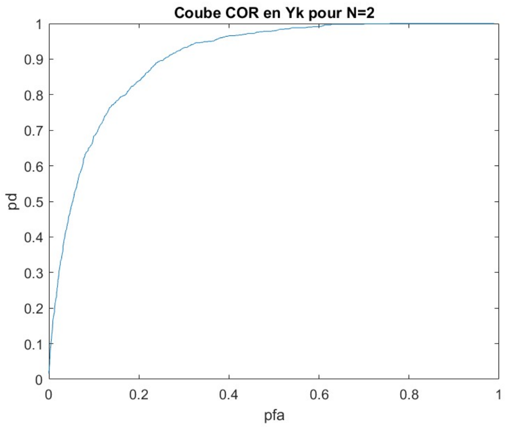
Pour Y_k et X_k, le coefficient le plus grand en valeur absolue est le premier c'est donc sur celui là que le détecteur sera placé pour assurer un rapport signal à bruit optimal. Notons que pour X_k ce rapport vaut -2.05 il est donc négatif donc l'inégalité dans le détecteur est inversé.





Le détecteur est plus efficace en X_k car le coefficient de détection en Y_k a une valeur absolue de 1 et 2,05 pour X_k. Plus le coefficient de détection en valeur absolue est grand, plus il est facile de séparer le signal du bruit pur.





On observe que le détecteur est plus performant en X_k. Pour une P_d de 0.9 on obtient une $P_{fa} = 0.134$ en X_k et de 0.253 pour Y_k. De plus il est logique que les valeurs de la P_{fa} en $N = 1$ soient inférieures à celles en $N = 2$ car plus on additionne de bruit, plus le bruit se compense et on tend alors vers sa valeur moyenne nul alors que le signal s'additionne et devient plus facile à distinguer du bruit.