Heap

Fundamentos de análisis y diseño de algoritmos

Montículos y Heapsort

Comparación de algoritmos de ordenamiento

Propiedades de orden y forma de los montones

Operaciones HEAPIFY, BUILD-HEAP Y HEAP-SORT

Análisis de complejidades

Colas de prioridad

Heapsort

Problema de ordenamiento

- Insertion
  - $O(n^2)$
  - Ordena in-place
- Merge
  - $\Theta(n\lg n)$
  - No ordena in-place
- Heapsort
  - $\boxed{O(n\lg n)}$
  - Ordena in-place
- Quicksort
  - $\Theta(n^2)$, Caso promedio: $\Theta(n\lg n)$
  - Ordena in-place

Heapsort

Insertion, Merge, Heapsort y Quicksort son algoritmos de ordenamiento basados en comparación. Estos tienen la característica de que son del orden de $\Omega(n \lg n)$

¿Es posible bajar esta cota?

Heapsort

Insertion, Merge, Heapsort y Quicksort son algoritmos de ordenamiento basados en comparación. Estos tienen la característica de que son del orden de $\Omega(n\lg n)$

¿Es posible bajar esta cota?

- Counting sort
- Radix sort
- Bucket sort

Heapsort

Heapsort

Idea: utilizar las fortalezas de MergeSort y de InsertionSort

Utiliza un representación lógica, conocida como montículo (*heap*), de un arreglo que permite ordenar los datos del arreglo in-place

Heapsort

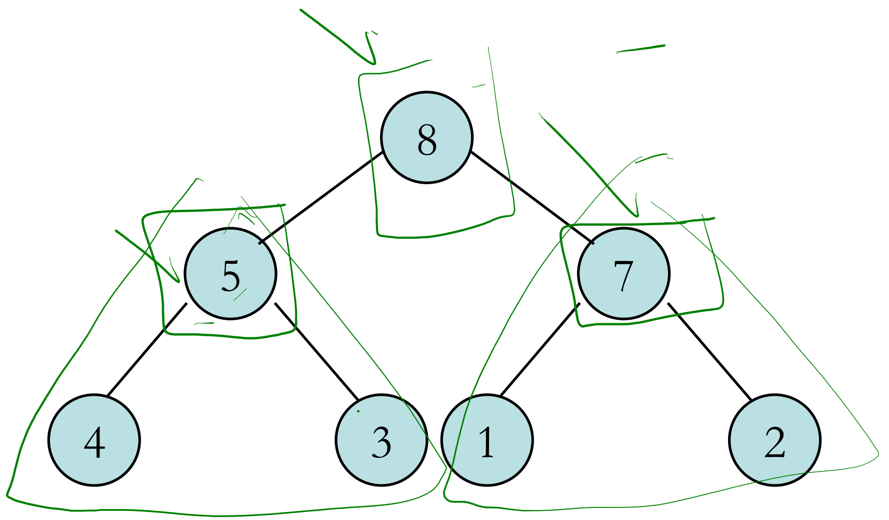
Montículos

Es un arreglo que puede ser visto como un árbol binario que cumple dos propiedades:

- *Propiedad del orden*: La raíz de cada subarbol es mayor o igual que cualquier de sus nodos restantes
- *Propiedad de forma*: La longitud de toda rama es h o h-1, donde h es la altura del árbol. Además, no puede existir un rama de longitud h a la derecha de una rama de longitud h-1

Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma

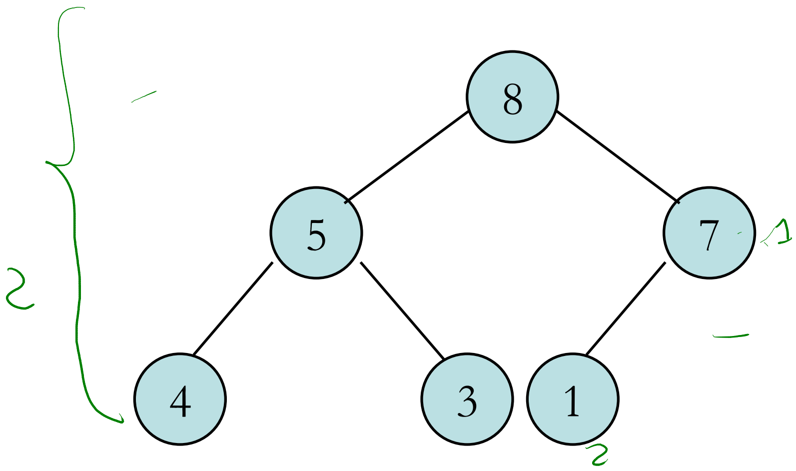


1) orden

2) forma

Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma

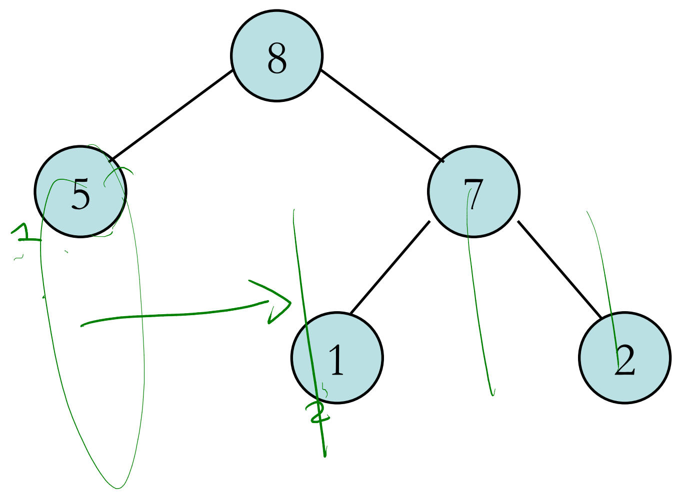


1) ¿orden? Si

2) ¿Forma? Si

Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma

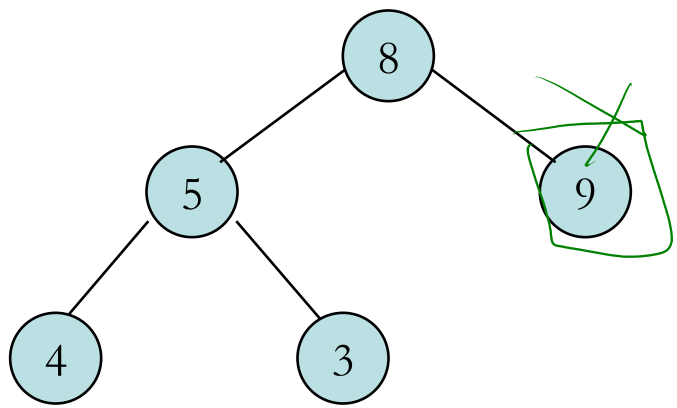


1) Orden: Si

2) Forma: No

Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma

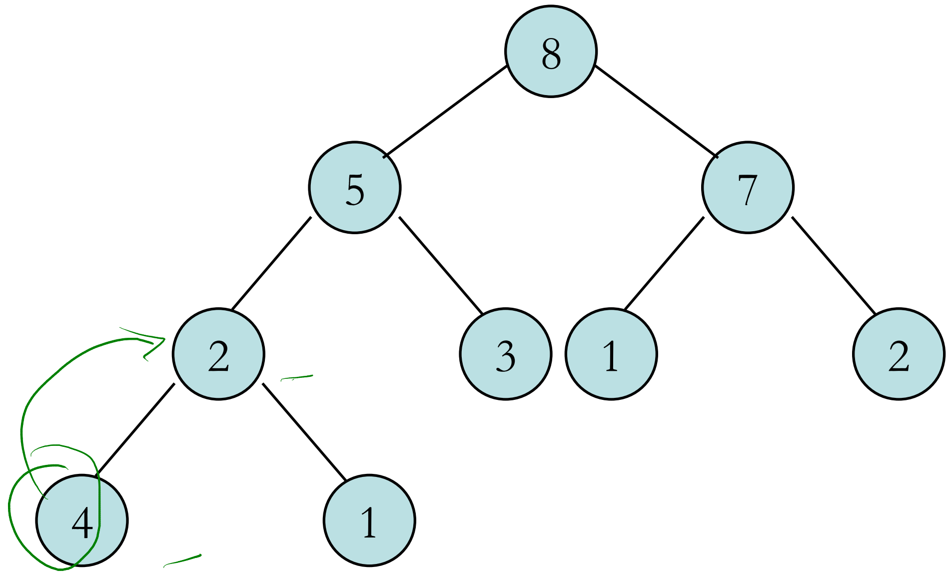


Orden: Nodo 9

NO es Heap

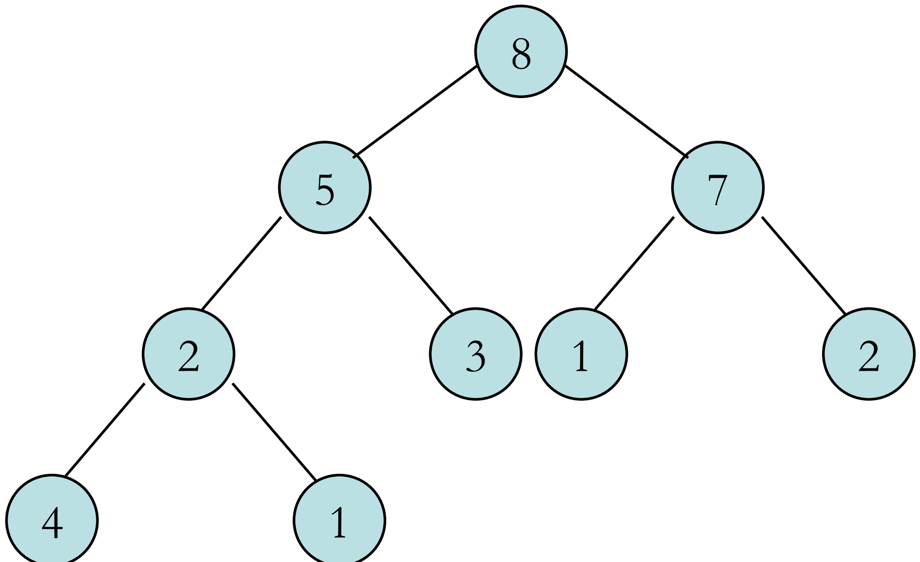
Heapsort

Analizar las propiedades de orden y de forma



Heapsort

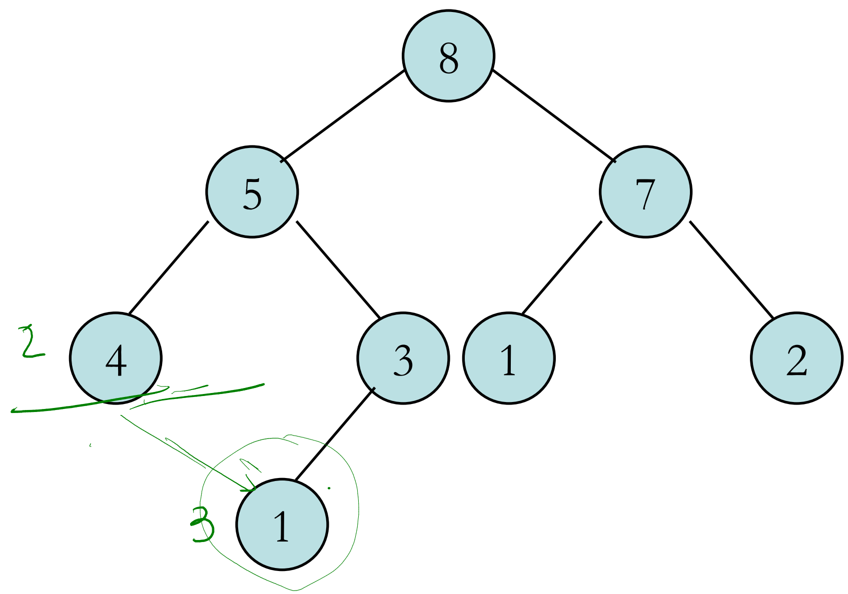
Analizar las propiedades de orden y de forma



Falla la propiedad de orden, en el subarbol 4-2-1, la raíz no cumple con ser mayor o igual los demás elementos

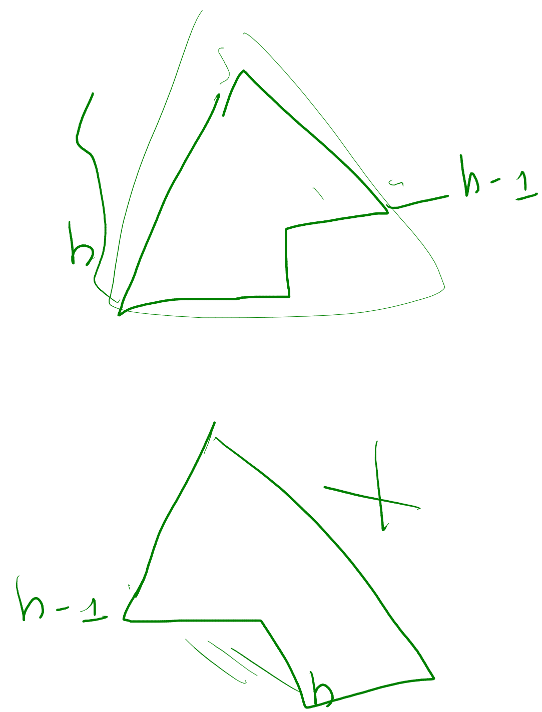
Heapsort

Indique si se cumplen las propiedades de orden y de forma



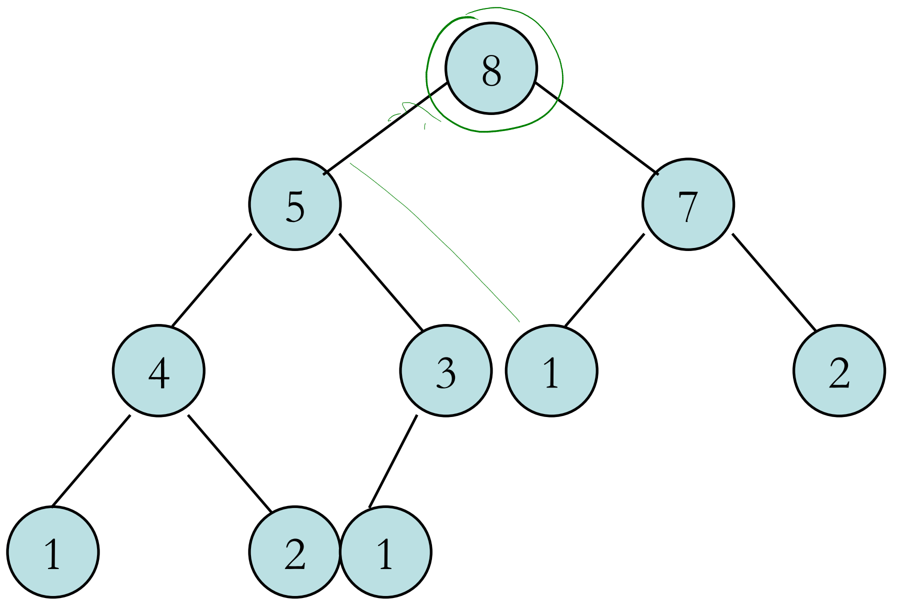
orden: Si

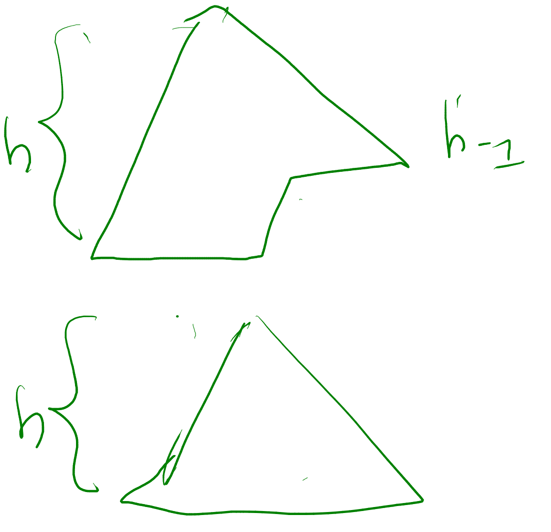
forma: No



Heapsort

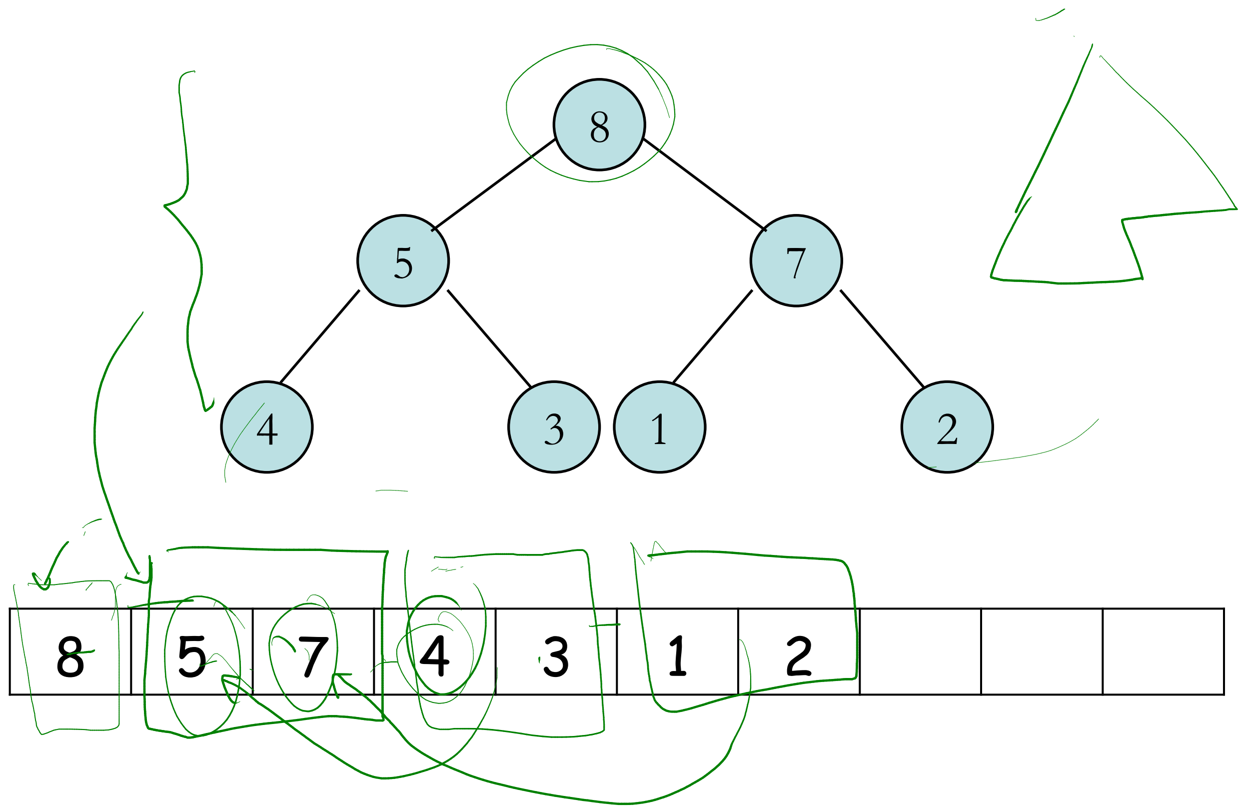
Indique si se cumplen las propiedades de orden y de forma





Heapsort

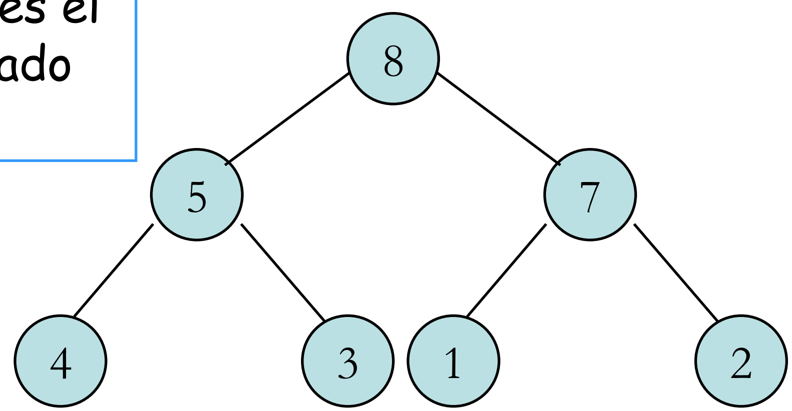
Los datos se almacenan en el arreglo recorriendo, por niveles, de izquierda a derecha



Heapsort

Los datos se almacenan en el arreglo recorriendo, por niveles, de izquierda a derecha

A[1, …, heap-size[A]] es el montículo representado



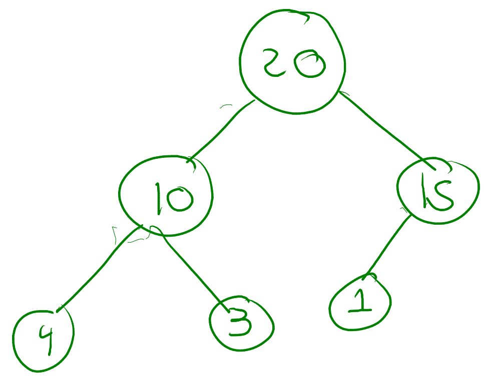
8	5	7	4	3	1	2			

heap-size[A]=7   length[A]=10

Heapsort

Indique si se cumplen las propiedades de orden y de forma

A={20, 10, 5, 4, 3, 1} donde heap-size[A]=6 y length[A]=10

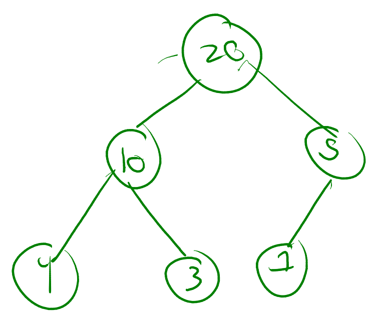


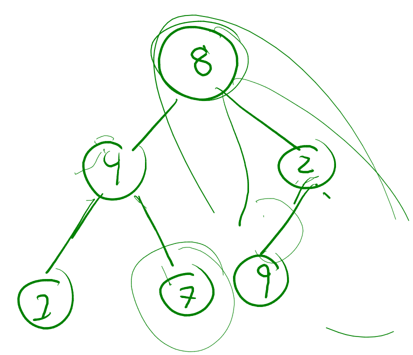
Heapsort

Indique si se cumplen las propiedades de orden y de forma

A={20, 10, 5, 4, 3, 1, } donde heap-size[A]=6 y length[A]=10

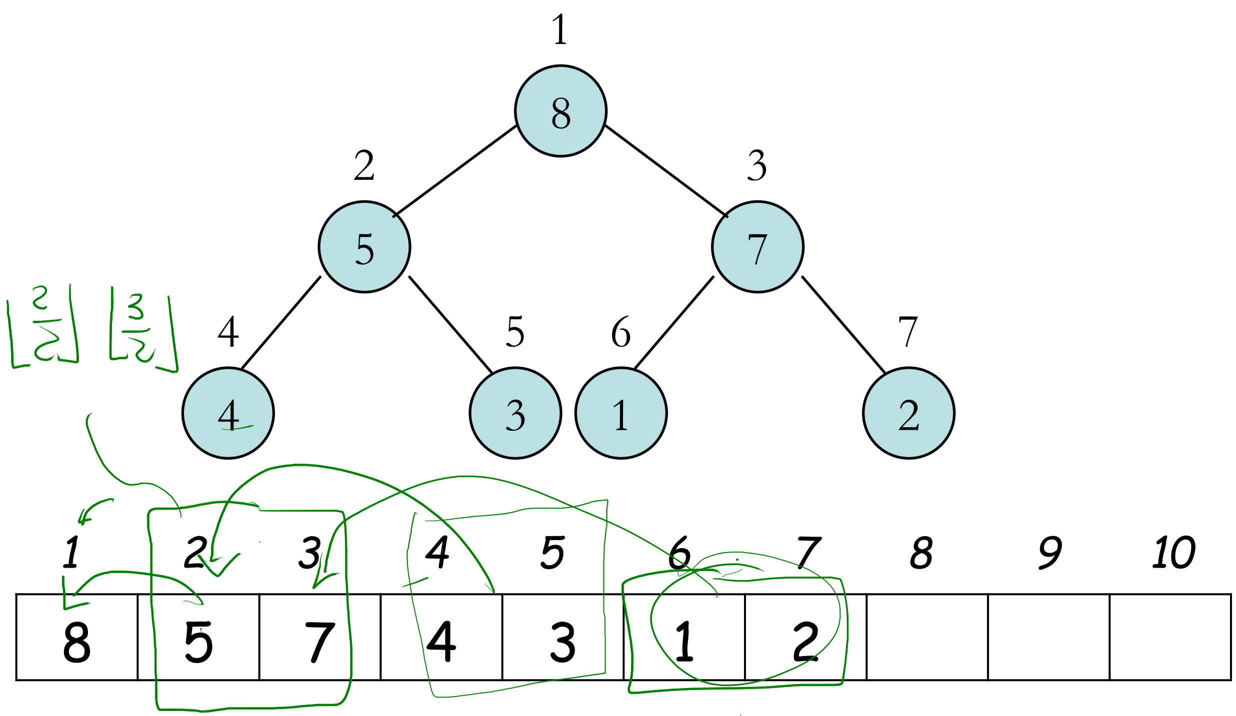
A={8, 4, 2, 1, 7, 9 } donde heap-size[A]=4 y length[A]=10





Heapsort

Los datos se almacenan en el arreglo recorriendo, por niveles, de izquierda a derecha



Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=2 y 3

Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=4 y 5

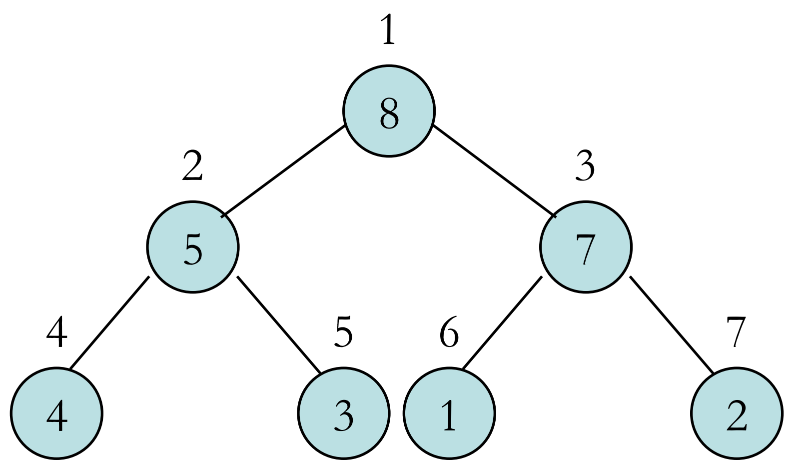
Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=6 y 7

$\lfloor \frac{4}{2} \rfloor \; \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$

$\lfloor \frac{6}{2} \rfloor \; \lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3$

Heapsort

Los datos se almacenan en el arreglo recorriendo, por niveles, de izquierda a derecha



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	5	7	4	3	1	2			

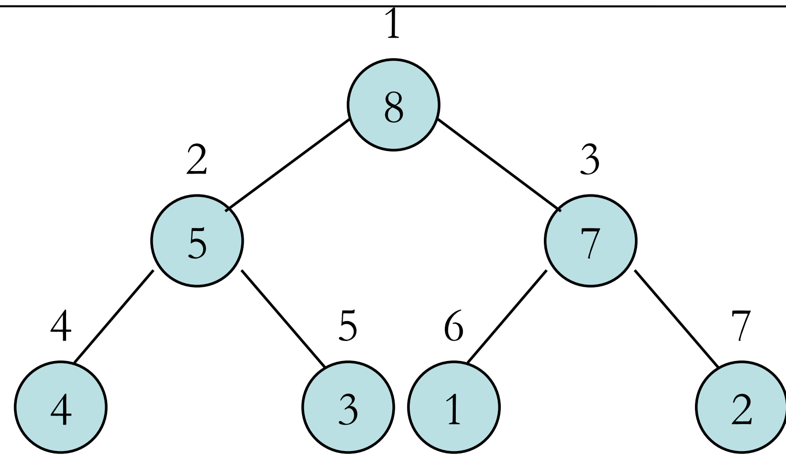
Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=2 y 3

Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=4 y 5

Evalue $\lfloor i/2 \rfloor$ para i=6 y 7

Padre(i): $\lfloor i/2 \rfloor$

Heapsort



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	5	7	4	3	1	2			

Raíz del árbol: A[1]

Padre(i): $\lfloor i/2 \rfloor$

Izq(i): A[2*i]

Der(i): A[2*i + 1]

Indices a partir de 1

Heapsort

Operaciones con montículos:

- Heapify: $O(\lg n)$
- Build-Heap: $O(n)$ O(nlog(n))
- HeapSort: $O(n\lg n)$
- Max-Heap-Insert, Heap-Extract-Max, Heap-Increase-Key, Heap-Maximum: $O(\lg n)$ Colas de prioridad

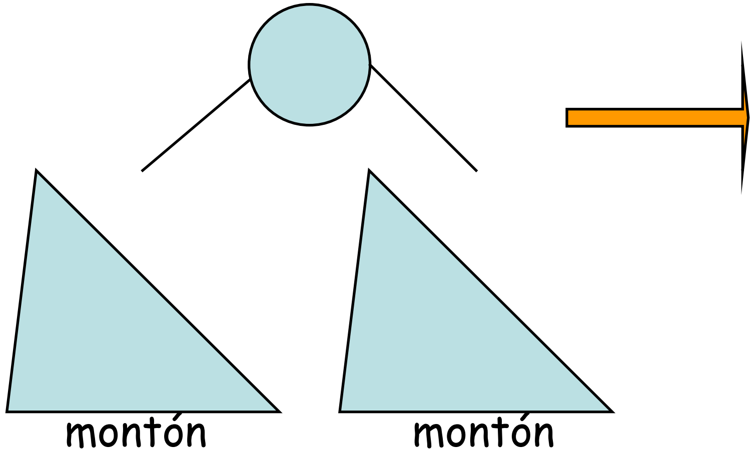
La altura de un montículo de n elementos es $\Theta(\lg n)$

Heapsort

Heapify

Precondición: subarbol con raíz Izq(i) y subarbol con raíz Der(i) son montículos

Poscondición: subárbol con raíz es un montículo



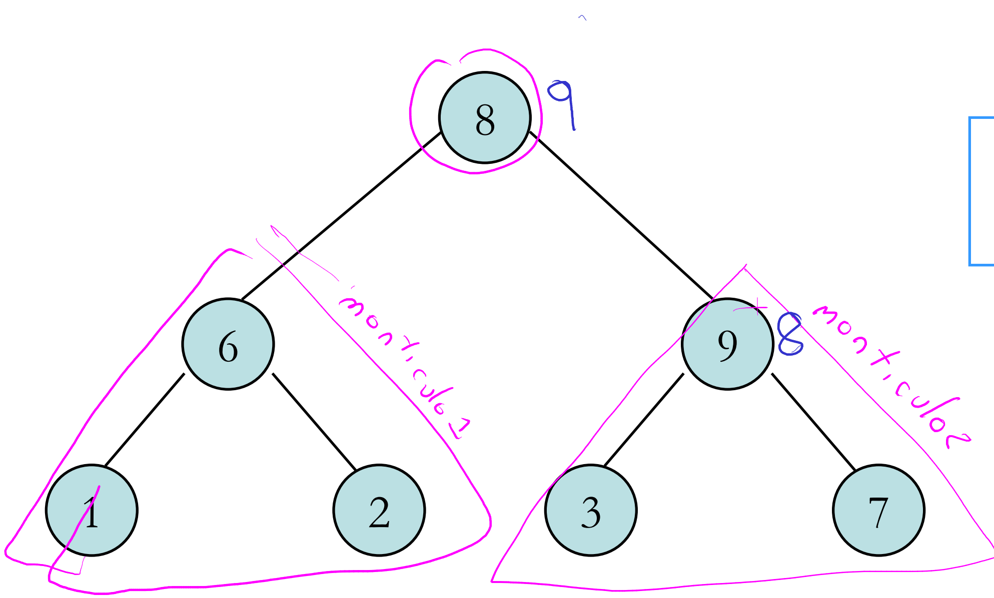
No es necesariamente un montón, se puede violar la propiedad de orden

Heapsort

Heapify

Precondición: subarbol con raíz Izq(i) y subarbol con raíz Der(i) son montículos

Poscondición: subárbol con raíz es un montículo



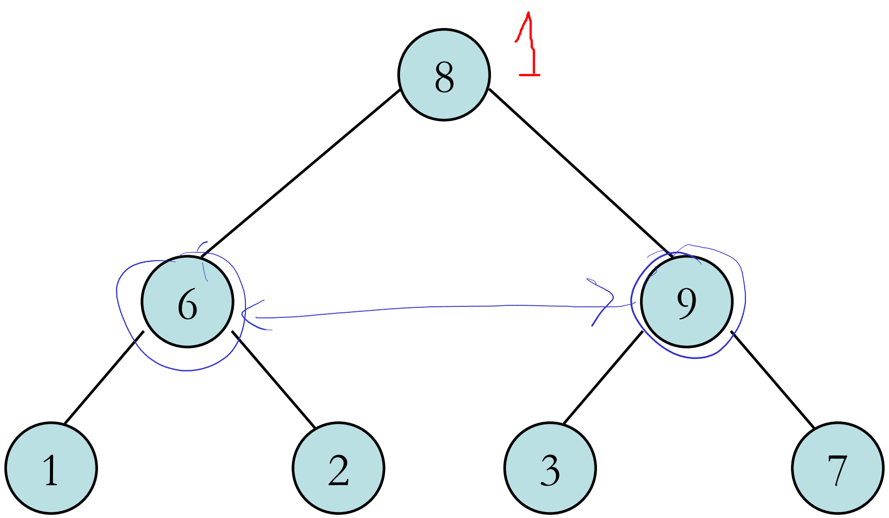
¿Cómo sería el montón resultante?

Heapsort

Heapify

Precondición: subarbol con raíz Izq(i) y subarbol con raíz Der(i) son montículos

Poscondición: subárbol con raíz es un montículo



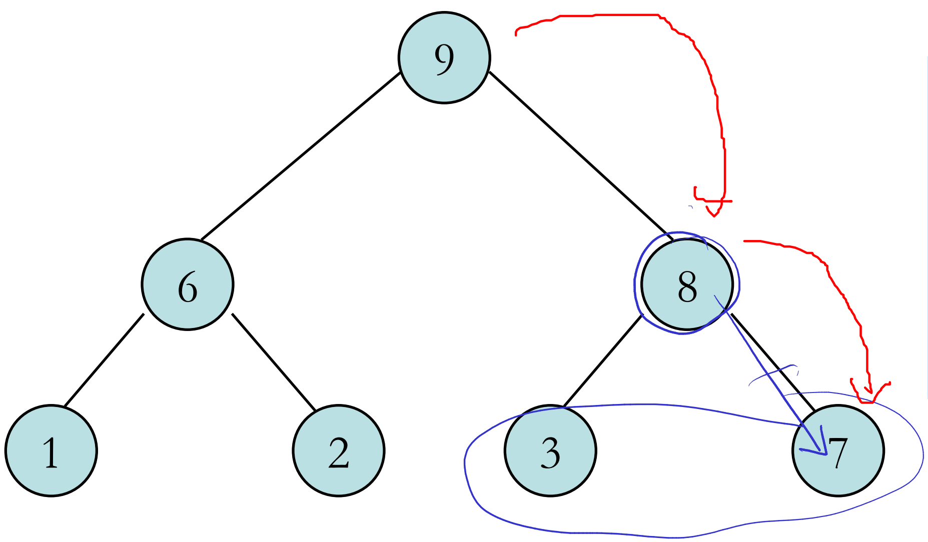
Se debe conocer cuál es el mayor entre la raíz Izq(i), la raiz Der(i) e A[i]

Heapsort

Heapify

Precondición: subarbol con raíz Izq(i) y subarbol con raíz Der(i) son montículos

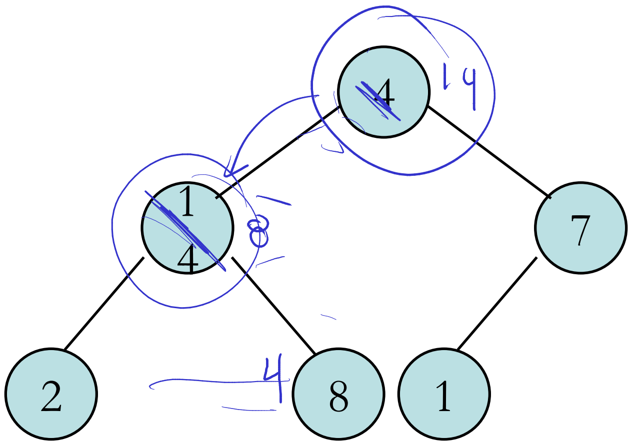
Poscondición: subárbol con raíz es un montículo



Al hacer el cambio de valores se debe verificar que el montón 3-8-7 cumpla la propiedad de orden

[14,8,7,2,4,1]

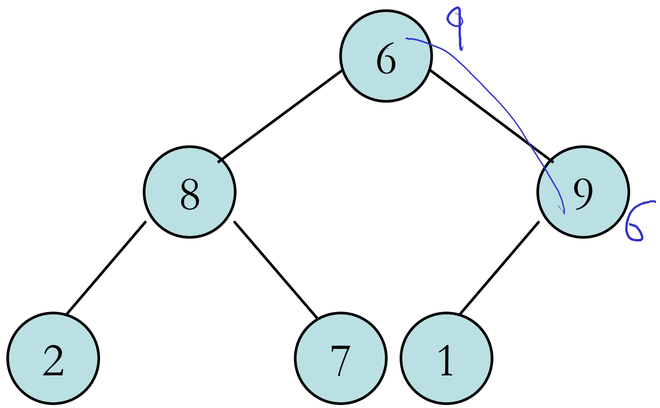
```
HEAPIFY(A, i)
 l ← LEFT(i)
 r ← RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest ← l
     else largest ← i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest ← r
 if largest≠i
   then exchange A[i] ↔ A[largest]
         HEAPIFY(A,largest)
```



Aplique el algoritmo HEAPIFY(A, 1)

[9,8,6,2,7,1]

```
HEAPIFY(A, i)
 l←LEFT(i)
 r←RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest←l
     else largest←i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest←r
 if largest≠i
   then exchange A[i]↔A[largest]
          HEAPIFY(A,largest)
```

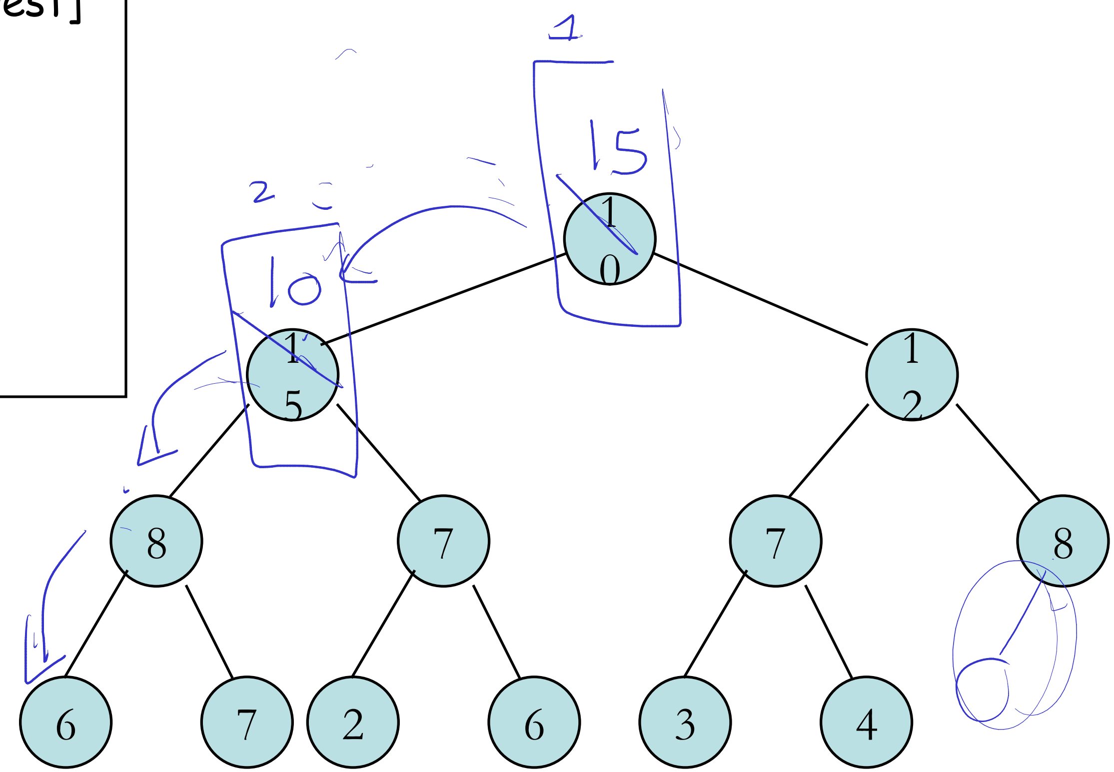


Aplique el algoritmo HEAPIFY(A, 1)

```
HEAPIFY(A, i)
 l←LEFT(i)
 r←RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest←l
     else largest←i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest←r
 if largest≠i
   then exchange A[i]↔A[largest]
          HEAPIFY(A,largest)
```

[15 10 12 8 7 7 8 6 7 2 6 3 4]

Aplique el algoritmo HEAPIFY(A, 1)



[10,15,12,8,7,7,8,6,7,2,6,3,4]

```
HEAPIFY(A, i)
 l←LEFT(i)
 r←RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest←l
     else largest←i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest←r
 if largest≠i
   then exchange A[i]↔A[largest]
          HEAPIFY(A,largest)
```

¿Cuál es la complejidad del algoritmo?

$O(\log(n))$

```
HEAPIFY(A, i)
 l←LEFT(i)
 r←RIGHT(i)
 if l≤heap-size[A] and A[l]>A[i]
     then largest←l
     else largest←i
 if r≤heap-size[A] and A[r]>A[largest]
    then largest←r
 if largest≠i
   then exchange A[i]↔A[largest]
        HEAPIFY(A,largest)
```

Complejidad

$$T(n) \leq T(2n/3) + \Theta(1)$$

$\Theta(1)$ para calcular el mayor + Heapify con 2/3 de los elementos en el peor de los casos

Por teorema maestra, caso 2, $T(n)=O(lgn)$

h = 6

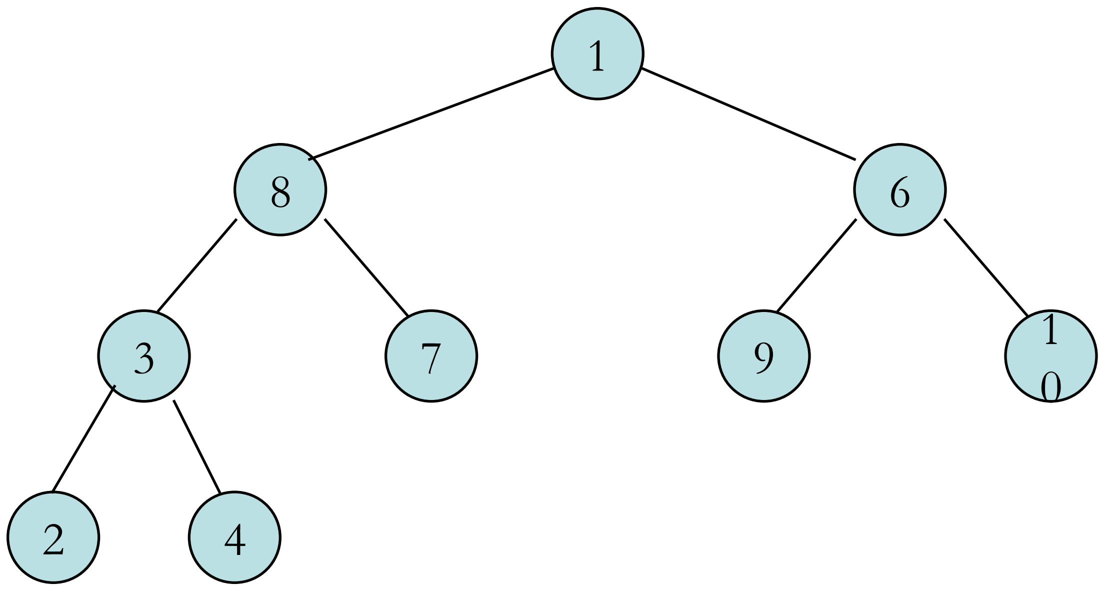
Estadisticamente 2/3

Heapsort

BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	3	7	9	10	2	4	

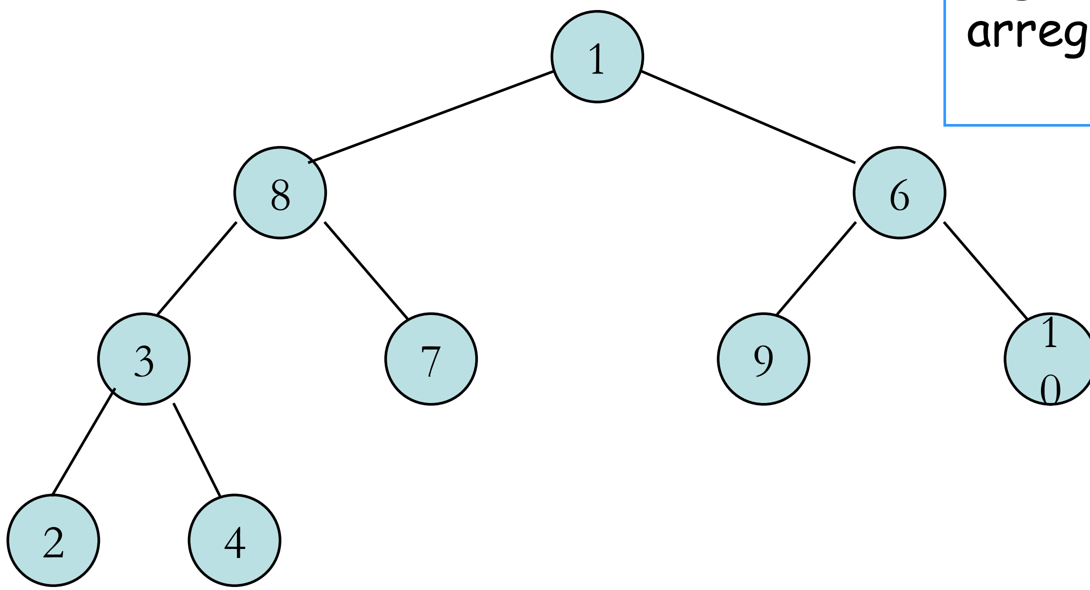
Heapsort

BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

La organización es lógica, aun cuando en el arreglo no se especifica



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	3	7	9	10	2	4	

Heapsort

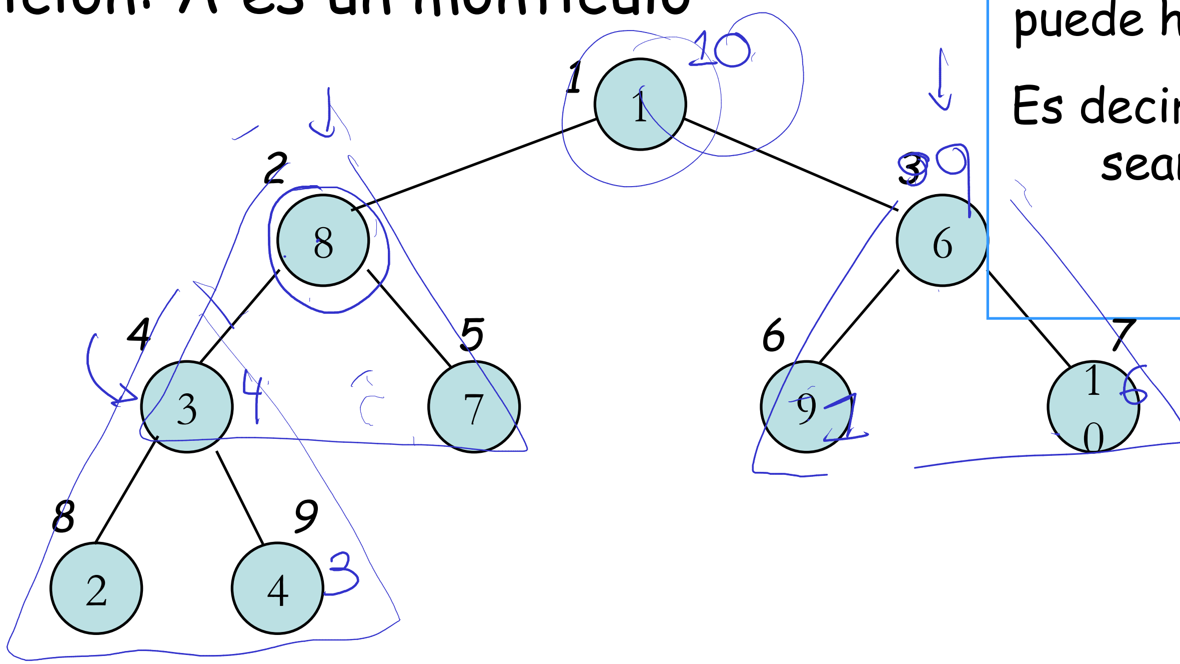
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	3	7	9	10	2	4	

Heapsort

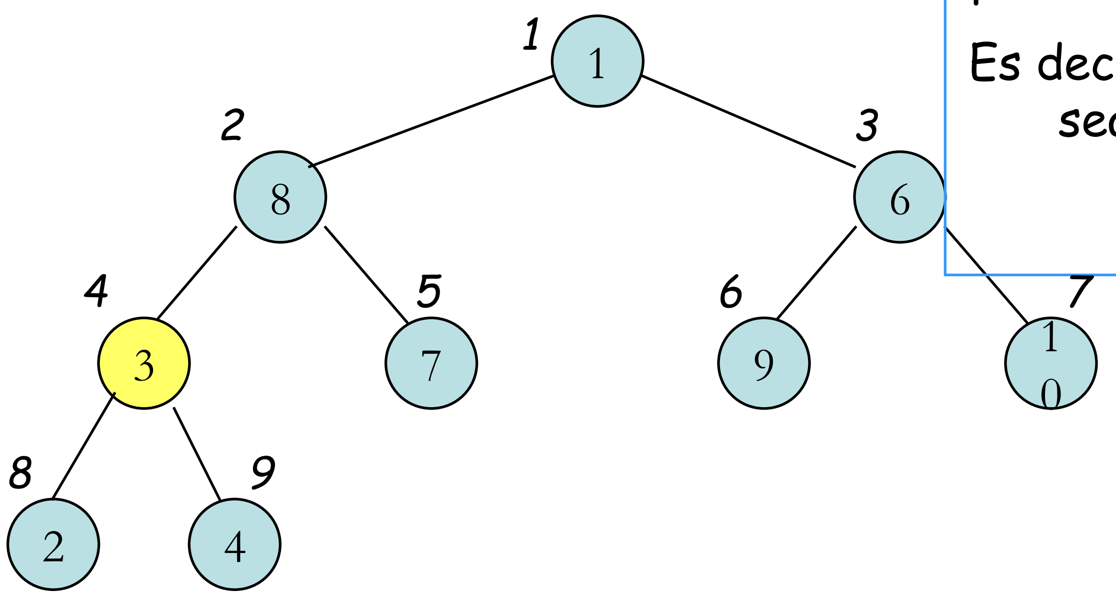
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	3	7	9	10	2	4	

Heapsort

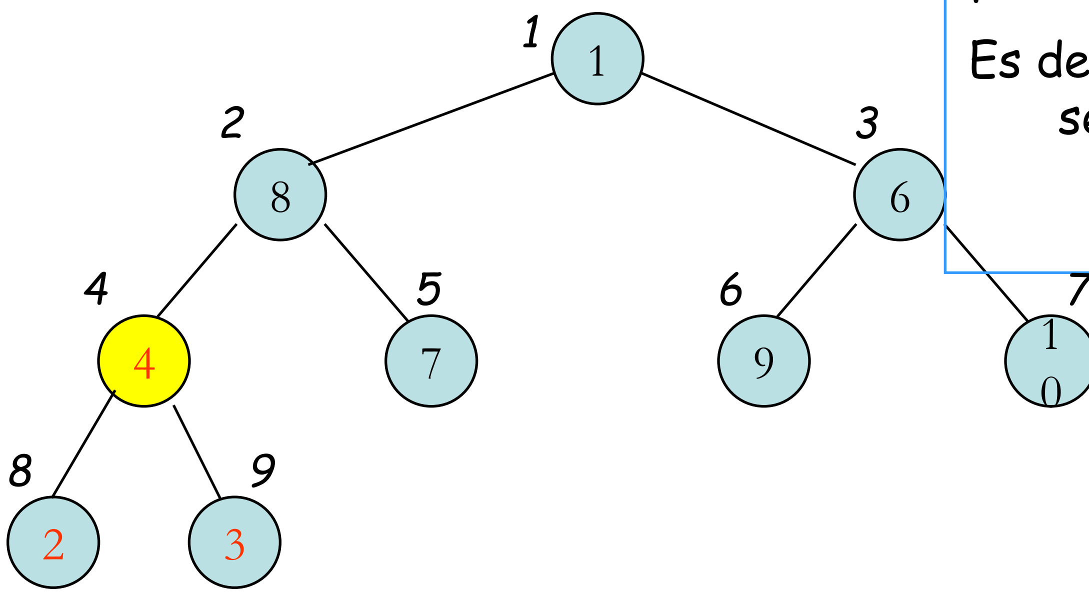
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	4	7	9	10	2	3	

Heapsort

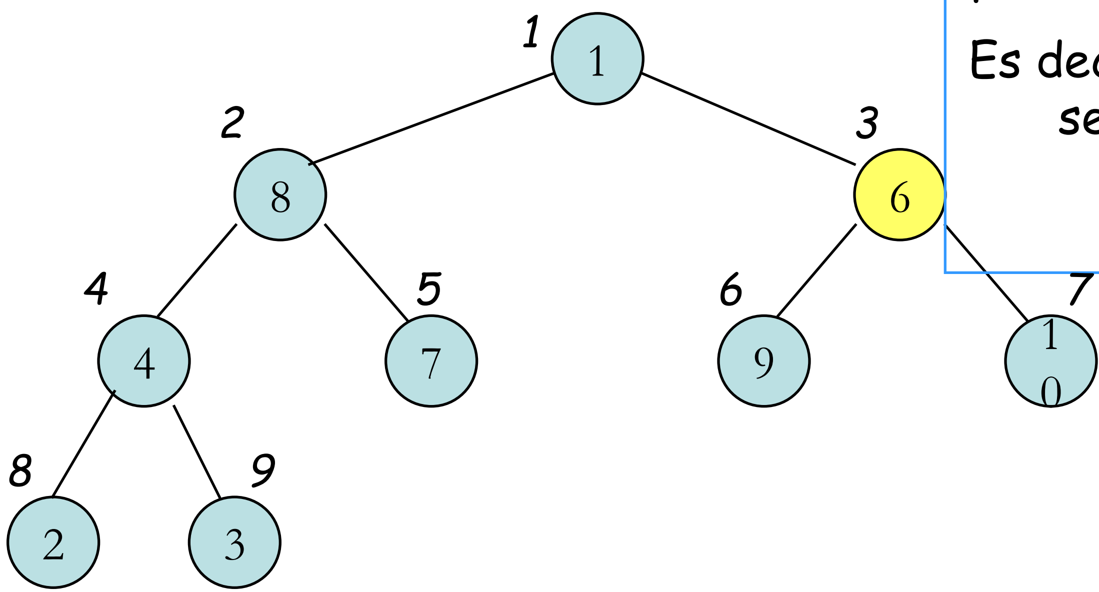
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	4	7	9	10	2	3	

Heapsort

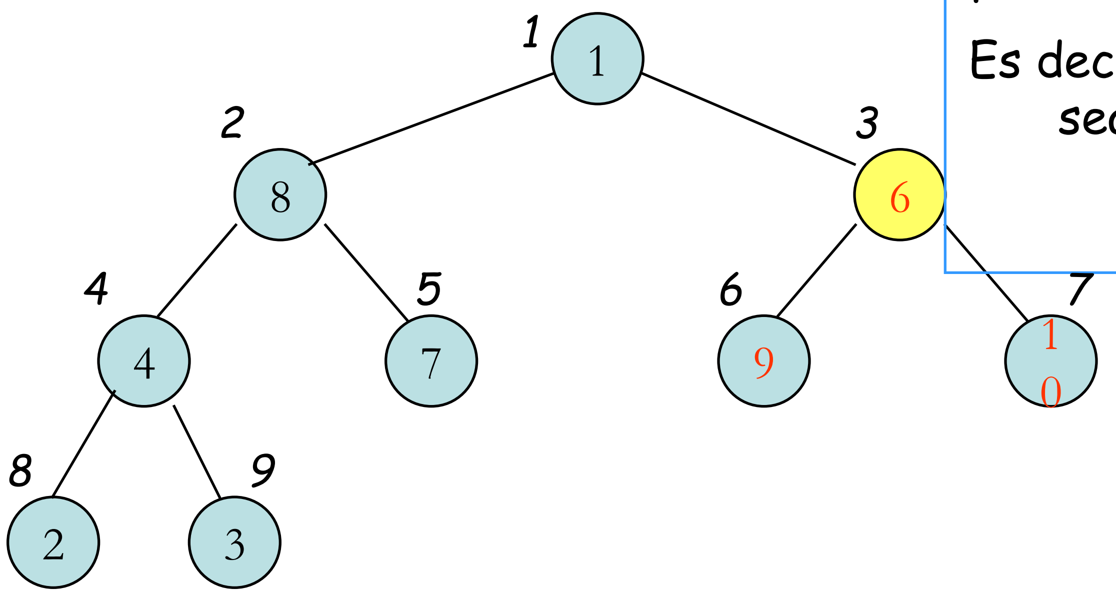
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	6	4	7	9	10	2	3	

Heapsort

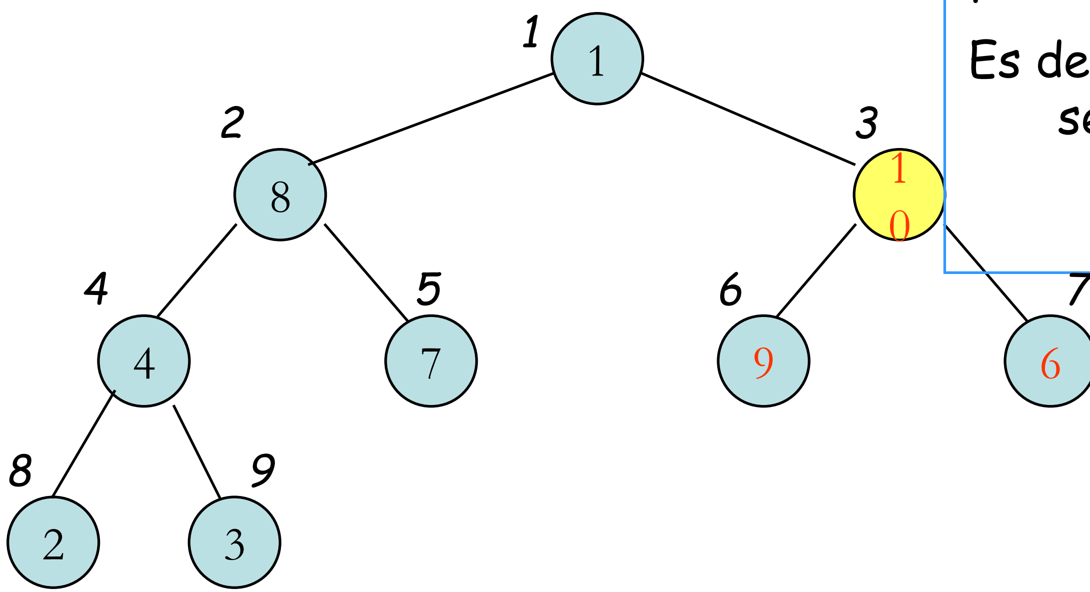
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



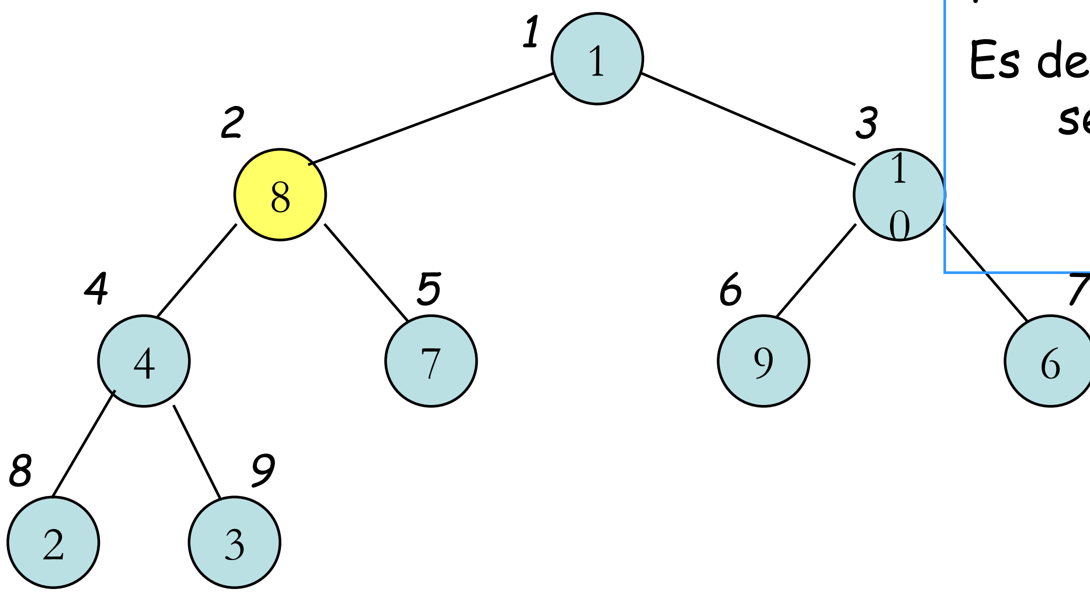
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	10	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo



¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	10	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

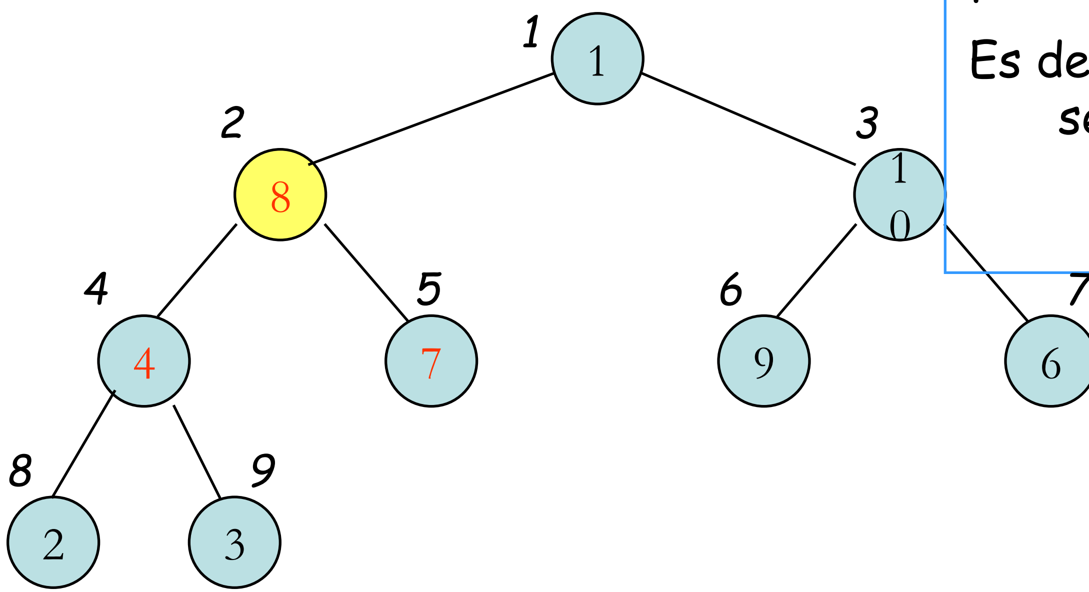
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	10	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

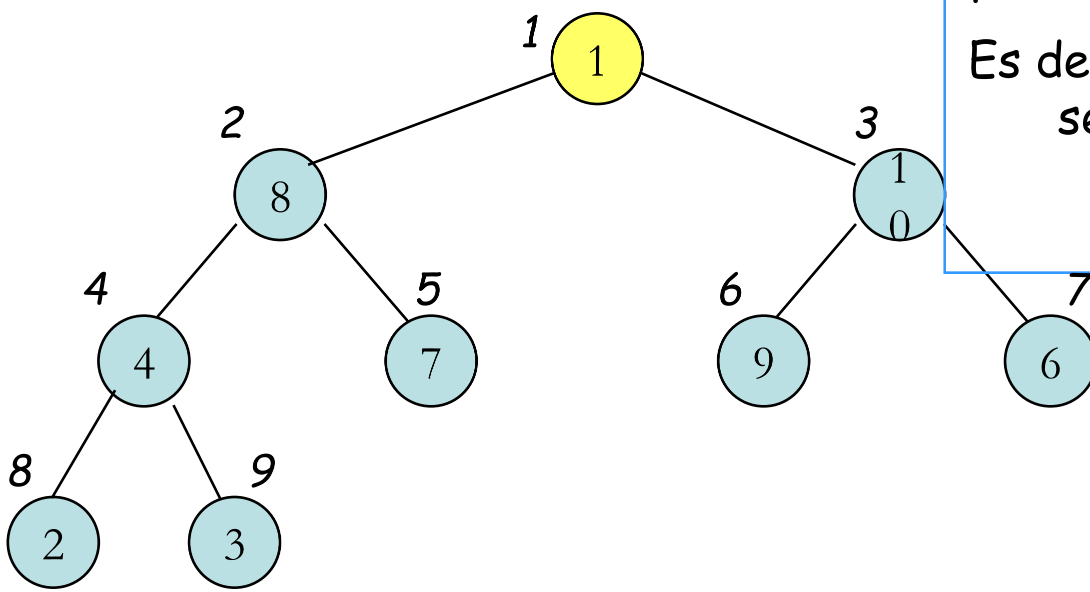
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	10	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

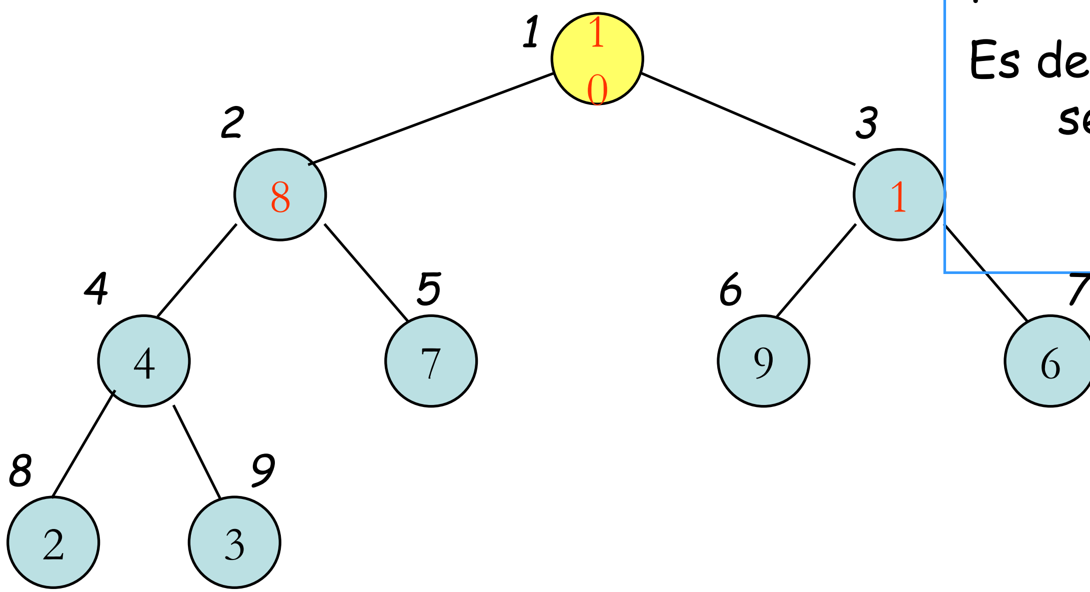
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	1	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

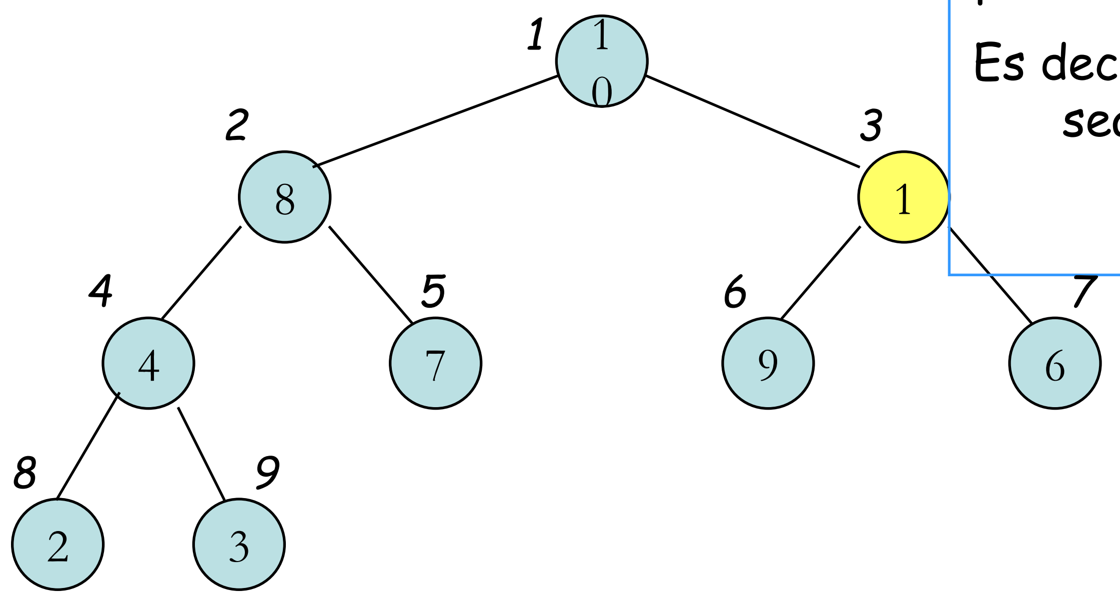
BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo

¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos



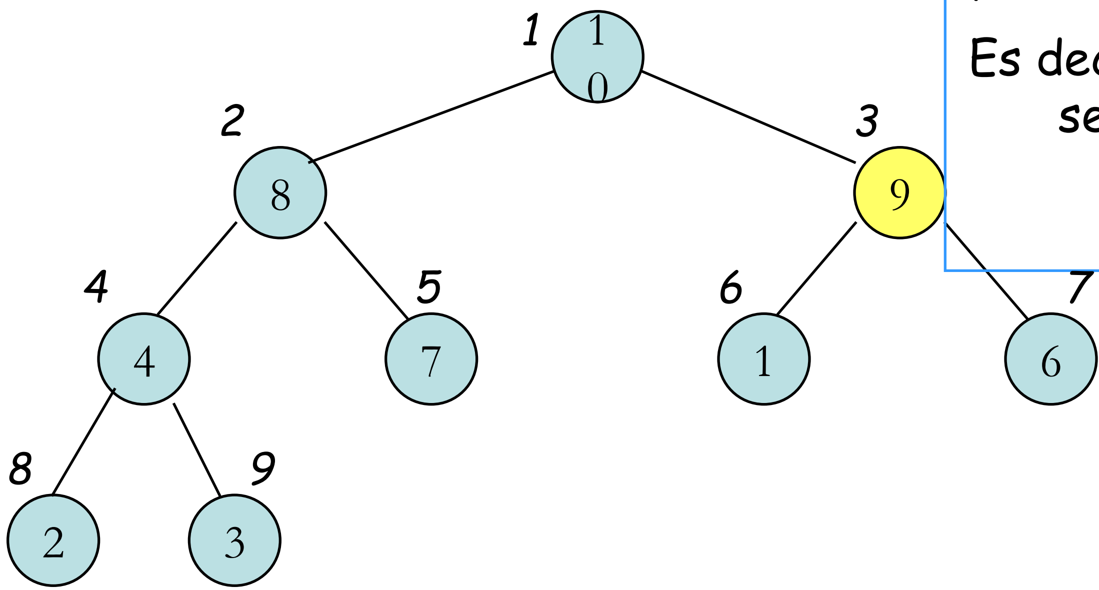
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	1	4	7	9	6	2	3	

Heapsort

BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo



¿Sobre qué nodo se puede hacer HEAPIFY?

Es decir, los subarboles sean montículos

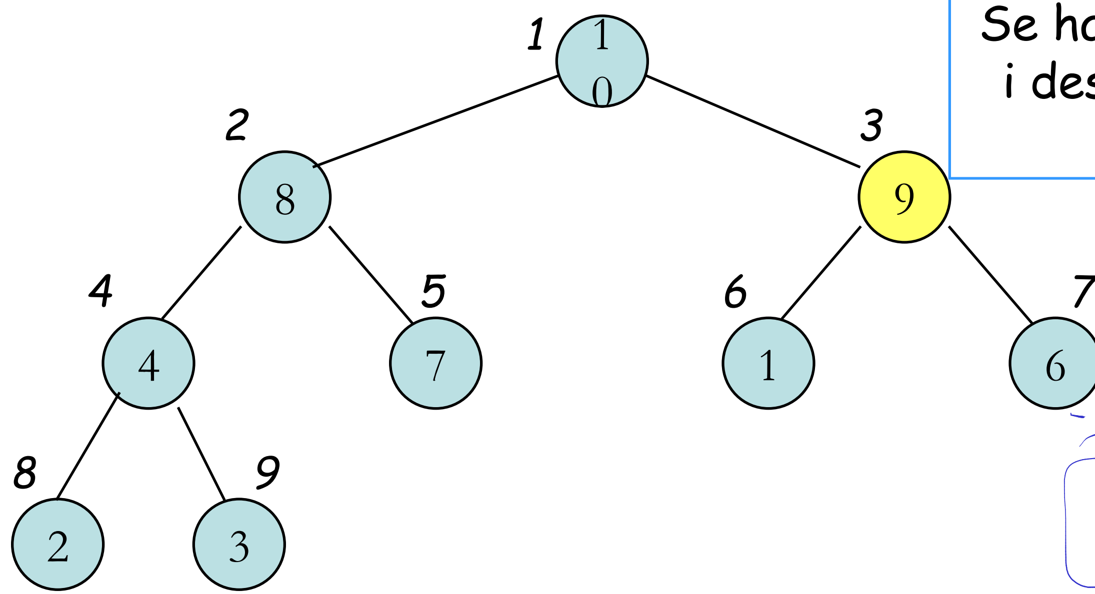
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	9	4	7	1	6	2	3	

Heapsort

BUILD-HEAP(A)

Precondición: A es un arreglo de elementos

Poscondición: A es un montículo



Se hace HEAPIFY para i desde $\lfloor length[A]/2 \rfloor$ hasta 1

$\frac{n}{2} \times \log(n)$

$O(n \log(n))$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	9	4	7	1	6	2	3	

[10 8 9 4 7 1 6 2 3]

BUILD-HEAP(A)

heap-size[A] ← length[A]

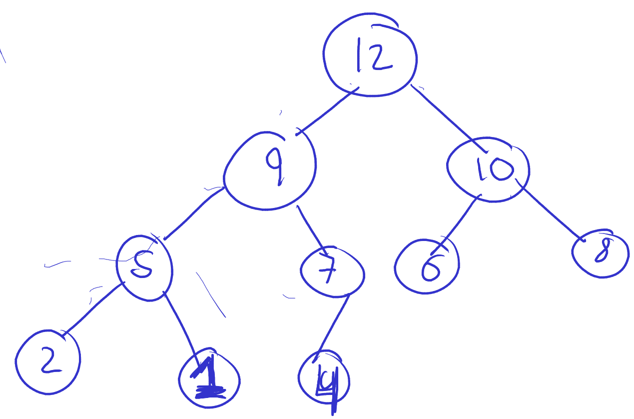
for i ← ⌊length[A]/2⌋ downto 1

do HEAPIFY(A,i)

Aplique el algoritmo BUILD-HEAP(A), para

A={5, 7, 10, 1, 4, 6, 8, 2, 9, 12} y heap-size(A)=10

[12 9 10 5 7 6 8 2 1 4]



```
BUILD-HEAP(A)
 heap-size[A] ← length[A]
 for i ← ⌊length[A]/2⌋ downto 1
    do HEAPIFY(A,i)
```

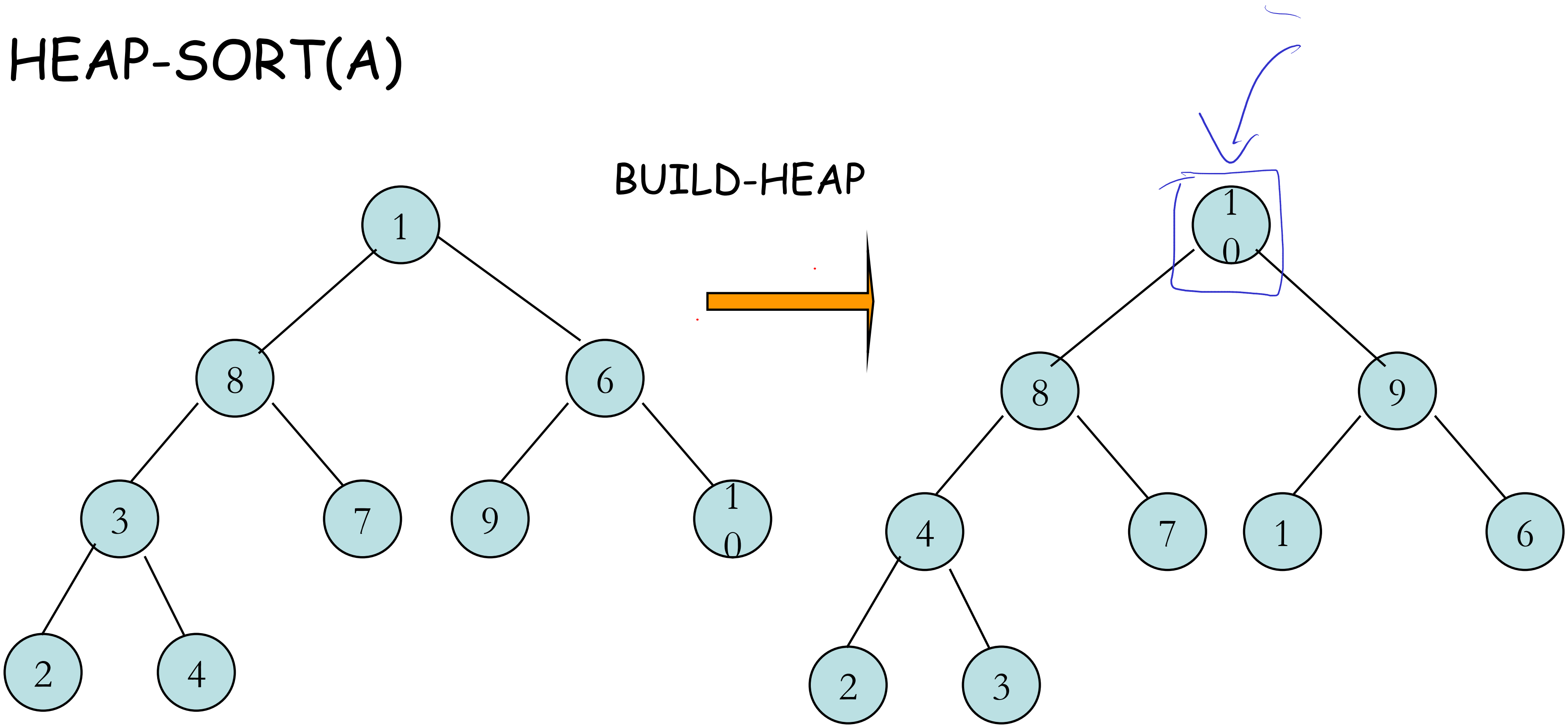
Complejidad

- Cada llamado a HEAPIFY cuesta O(lgn)
- Se hacen O(n) llamados
- Estimacion: O(nlgn)

  -O(n) es una estimación más precisa

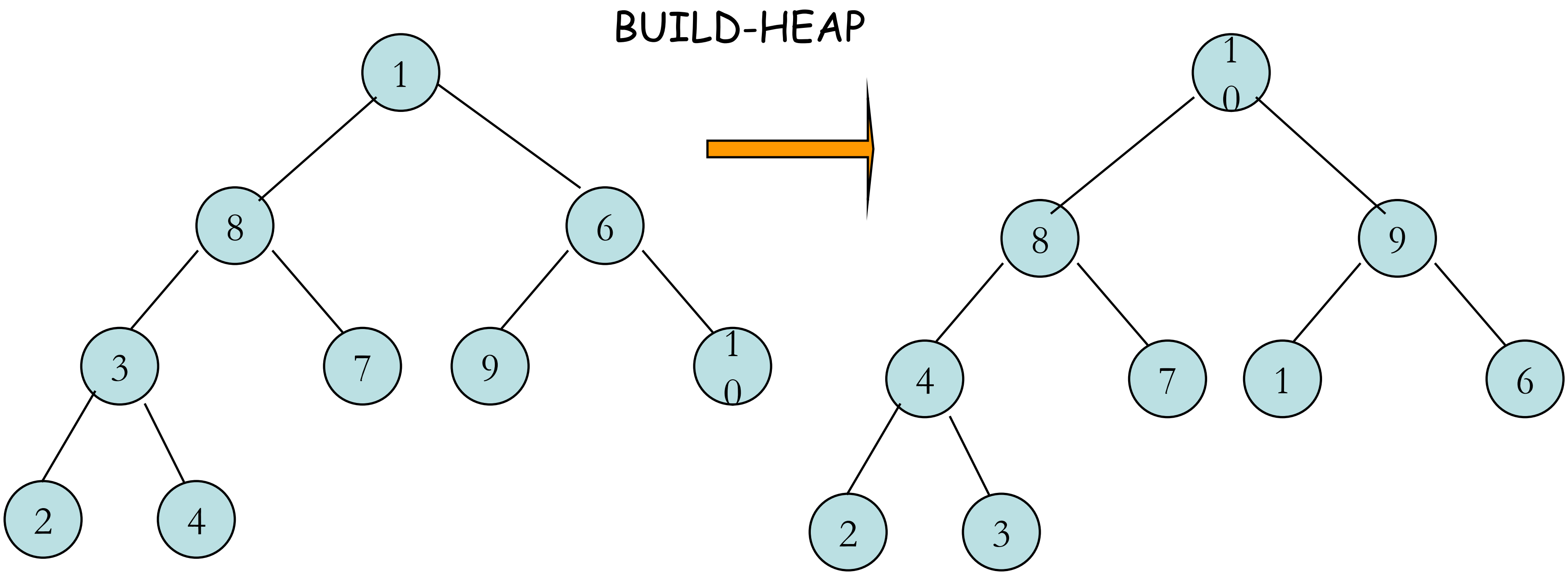
Heapsort

HEAP-SORT(A)



Heapsort

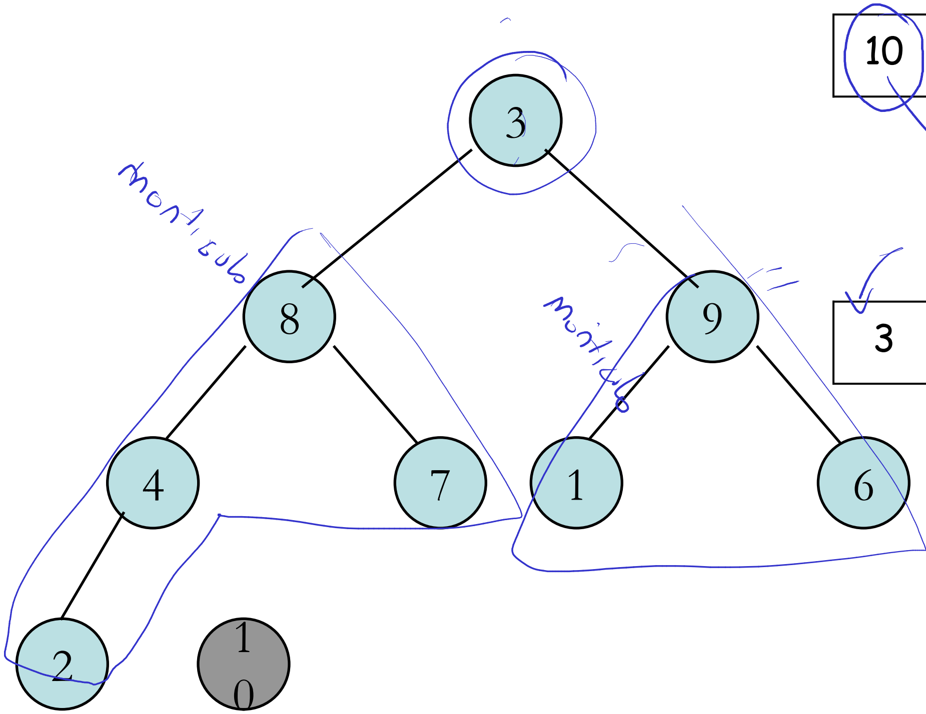
HEAP-SORT(A)



El valor más grande quedará en la raíz del árbol

Heapsort

HEAP-SORT(A)



10	8	9	4	7	1	6	2	3	

3	8	9	4	7	1	6	2	10	

heap-size[A]=8

Se intercambio el valor A[1], el mayor, con el valor A[heap-size[A]] y se disminuye en 1 valor heap-size[A]

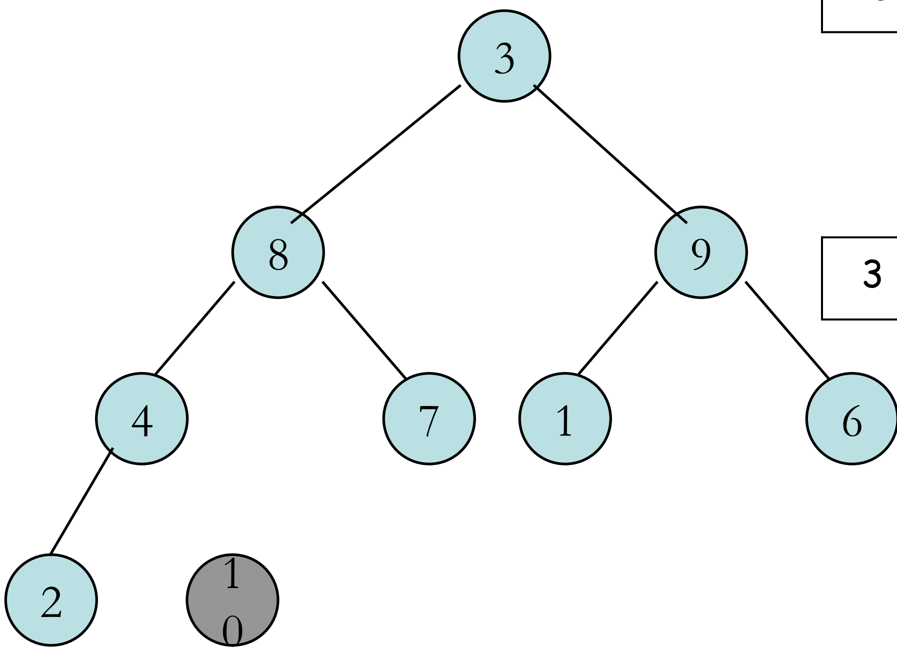
Heapsort

HEAP-SORT(A)

10	8	9	4	7	1	6	2	3	

3	8	9	4	7	1	6	2	10	

heap-size[A]=8

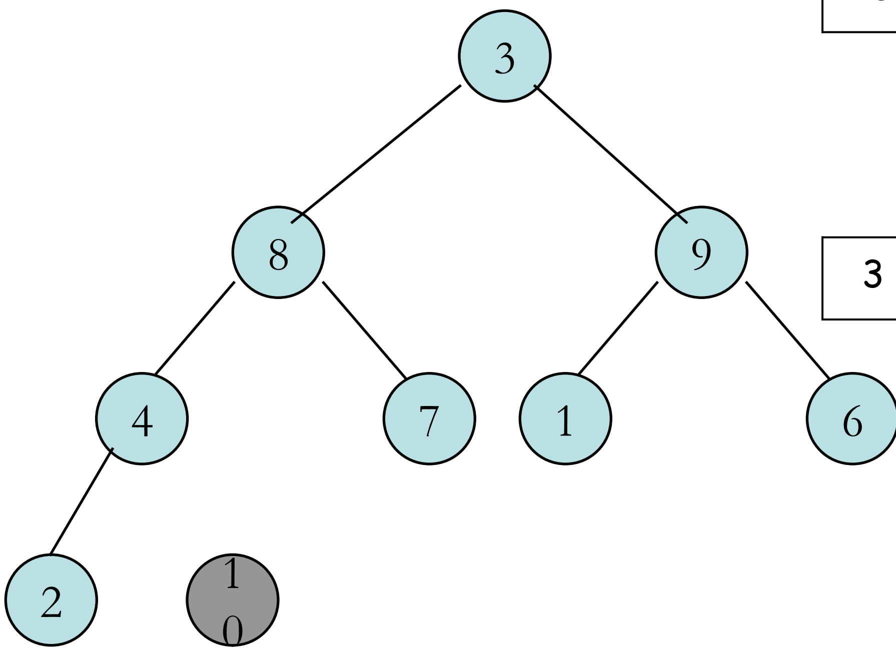


Se intercambio el valor A[1], el mayor, con el valor A[heap-size[A]] y se disminuye en 1 valor heap-size[A]

Se repite el proceso de hacer heapify para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



10	8	9	4	7	1	6	2	3	

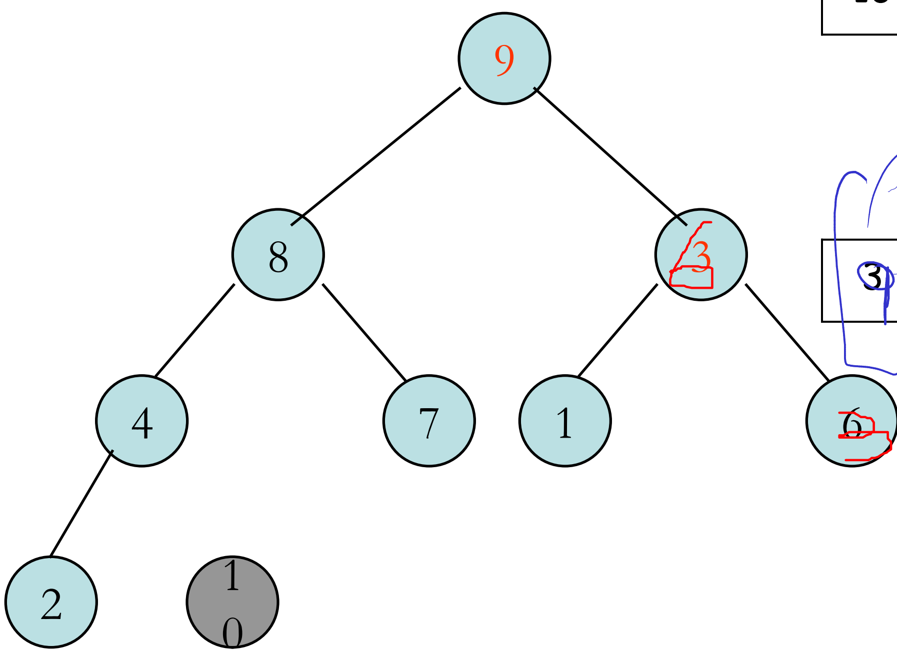
3	8	9	4	7	1	6	2	10	

heap-size[A]=8

Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



10	8	9	4	7	1	6	2	3	

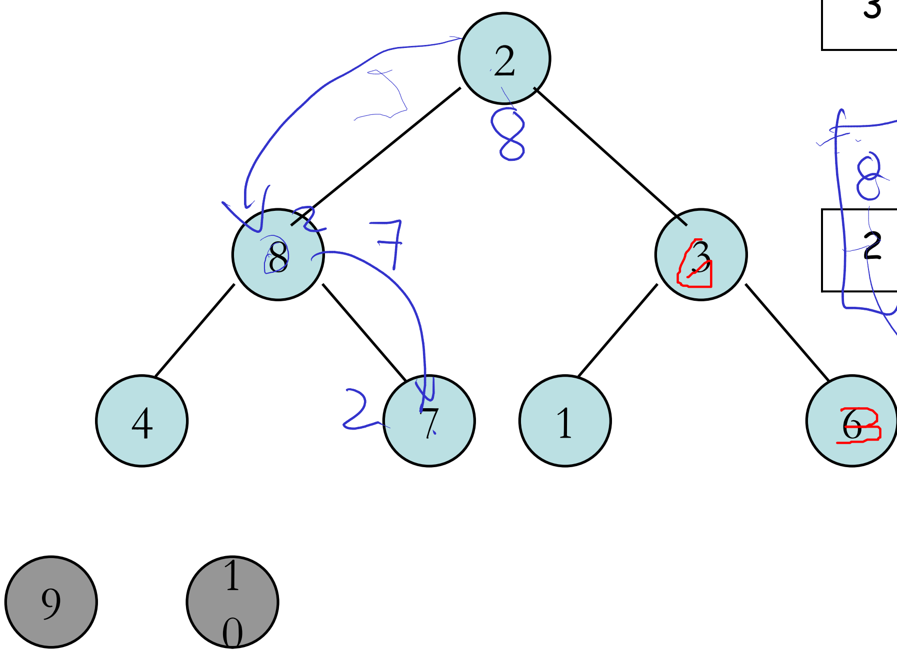
3	8	9	4	7	1	6	2	10	

heap-size[A]=8

Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



3	8	9	4	7	1	6	2	10	

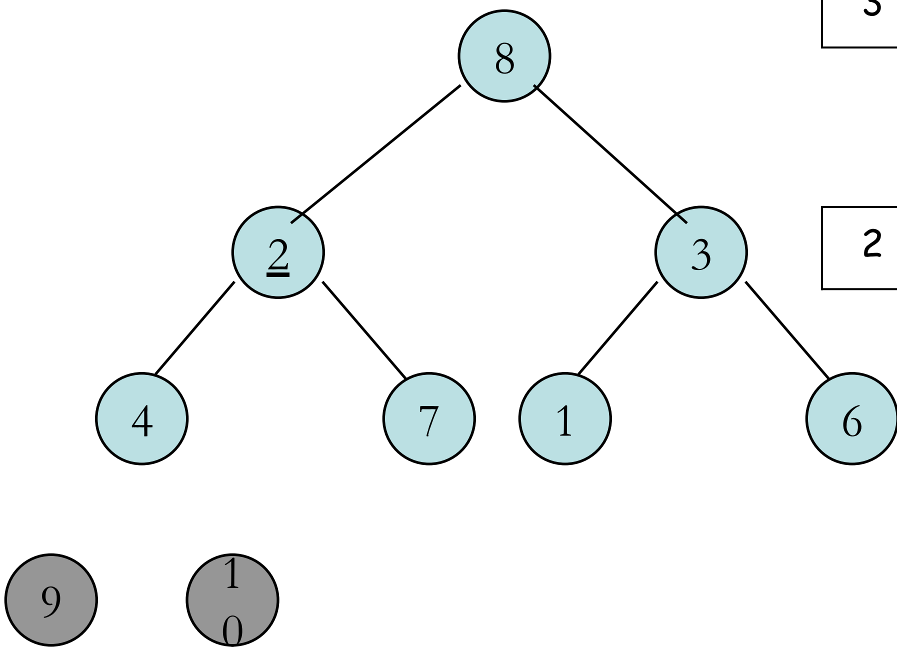
2	8	3	4	7	1	6	9	10	

heap-size[A]=7

Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



3	8	9	4	7	1	6	2	10	

2	8	3	4	7	1	6	9	10	

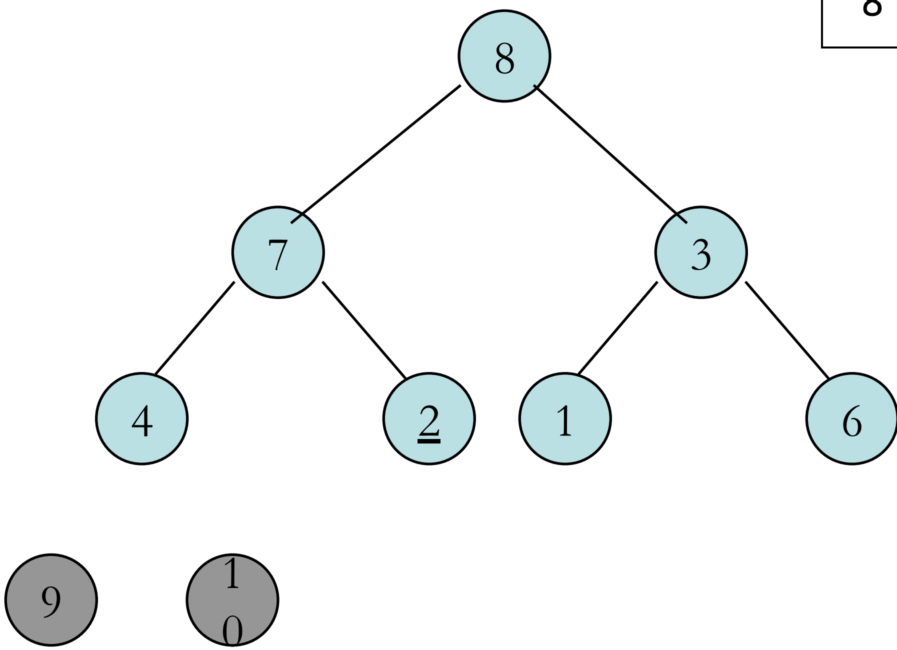
heap-size[A]=7

Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)

8	7	3	4	2	1	6	9	10	



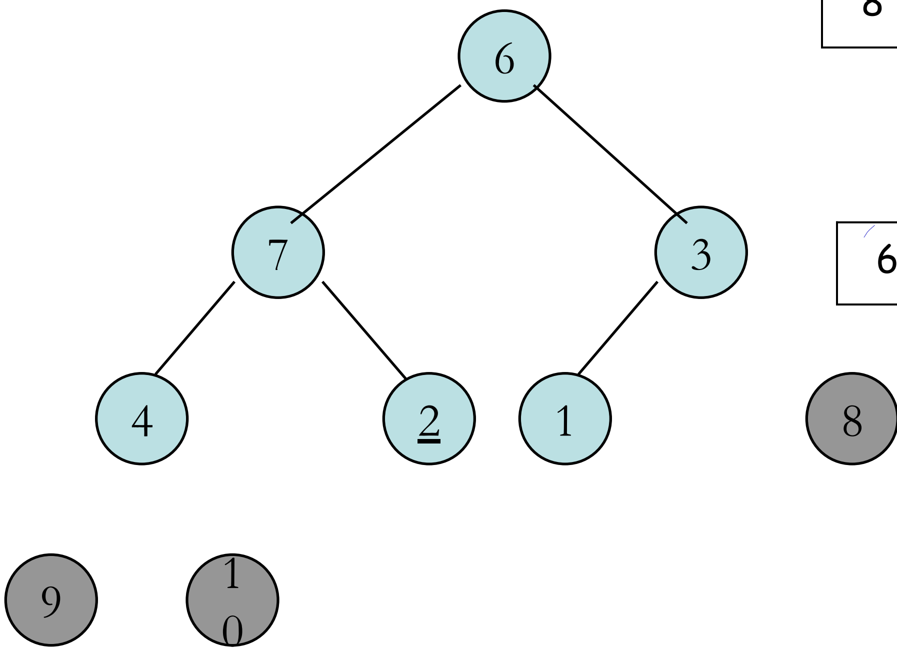
Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)

8	7	3	4	2	1	6	9	10	

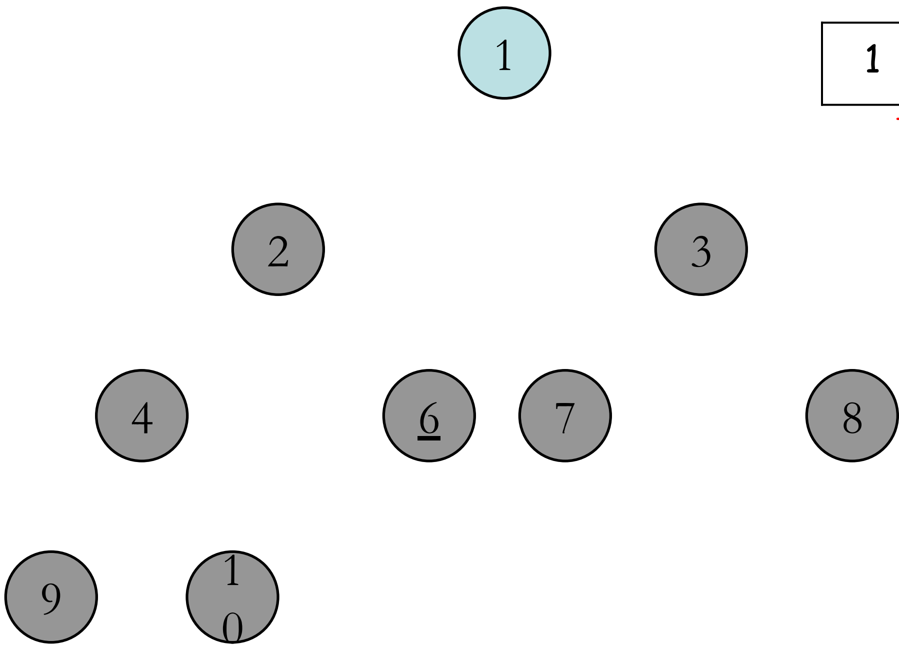
6	7	3	4	2	1	8	9	10	



Se repite el proceso de hacer heapify(A,1) para que el mayor valor quede en la raíz, intercambiar y disminuir el tamaño del montón

Heapsort

HEAP-SORT(A)



1	2	3	4	6	7	8	9	10	

```
HEAP-SORT(A)
 BUILD-HEAP(A)
 for i ← length[A] downto 2
    do exchange A[1] ↔ A[i]
       heap-size[A] ← heap-size[A] -1
       HEAPIFY(A,1)
```

Aplique el algoritmo HEAP-SORT(A), para

A={12, 9, 10, 7, 8, 1} y heap-size(A)=6

```
HEAP-SORT(A)
 BUILD-HEAP(A)
 for i ← length[A] downto 2
    do exchange A[1] ↔ A[i]
       heap-size[A] ← heap-size[A] -1
       HEAPIFY(A,1)
```

Aplique el algoritmo HEAP-SORT(A), para

A={5, 7, 10, 1, 4, 6, 8, 2, 9, 12} y heap-size(A)=10

```
HEAP-SORT(A)
 BUILD-HEAP(A)                         O(nlog(n))
 for i ← length[A] downto 2
                                         n veces O(log(n))
    do exchange A[1] ↔ A[i]             O(nlog(n))
         heap-size[A] ← heap-size[A] -1
         HEAPIFY(A,1)
```

¿Cuál es la complejidad?

```
HEAP-SORT(A)
 BUILD-HEAP(A)
 for i ← length[A] downto 2
    do exchange A[1] ↔ A[i]
          heap-size[A] ← heap-size[A] -1
          HEAPIFY(A,1)
```

buid Heap

$O(n\log(n))$ $+ O(n\log(n)) = O(n\log(n))$

¿Cuál es la complejidad?

- BUILD-HEAP toma O(n)
- Se llama (n-1) veces a HEAPIFY que toma O(lgn)
- La complejidad es de $\boxed{O(n\lg n)}$

Heapsort

Colas de prioridad

- Es una estructura de datos con servicios de inserción y retiro de elementos con base en una prioridad (valor numérico almacenado en el árbol)

- Se retira (atiende) al elemento con mayor prioridad

- Las operaciones básicas son:

  -INSERT(C,x): insertar el elemento con clave x

  -MAX(C): devuelve el elemento de máxima prioridad

  -EXTRACT-MAX(C): elimina y devuelve el elemento de máxima prioridad

Heapsort

HEAP-MAXIMUM(C)

    return $A[1]$

Tiempo de ejecución: $\Theta(1)$

Heapsort

HEAP-EXTRACT-MAX(C)

```
if heap-size[A]<1
  then error "heap underflow"
max ← A[1]
A[1] ← A[heap-size[A]]
heap-size[A] ← heap-size[A]-1
HEAPIFY(A,1)
return max
```

Tiempo de ejecución: O(lgn)

Heapsort

HEAP-INCREASE-KEY(A, i, key)

if key<A[i]

then error "key error "

A[i] $\leftarrow$ key

while i>1 and A[PARENT(i)]<A[i]

do exchange A[i] $\leftrightarrow$ A[PARENT(i)]

i $\leftarrow$ PARENT(i)

Tiempo de ejecución: O(lgn)

Heapsort

```
MAX-HEAP-INSERT(A, key)
 heap-size[A] ← heap-size[A]+1
 i ← heap-size[A]
 while i>1 and A[PARENT(i)]<key
    do exchange A[i] ↔ A[PARENT(i)]
       i ← PARENT(i)
 A[i] ← key
```

Tiempo de ejecución: O(lgn)

Referencias

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. Introduction to Algorithms, Third Edition (3rd ed.). The MIT Press. Chapter 6

Gracias

Próximo tema:

Ordenamiento: Quicksort