Metody numeryczne

Wykład 4

Interpolacja

Wojciech Kordecki, Karol Selwat

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych

Semestr letni 2019/20

Zadanie interpolacji

Najpierw zdefiniujemy zadanie interpolacji. Dane są punkty na płaszczyźnie

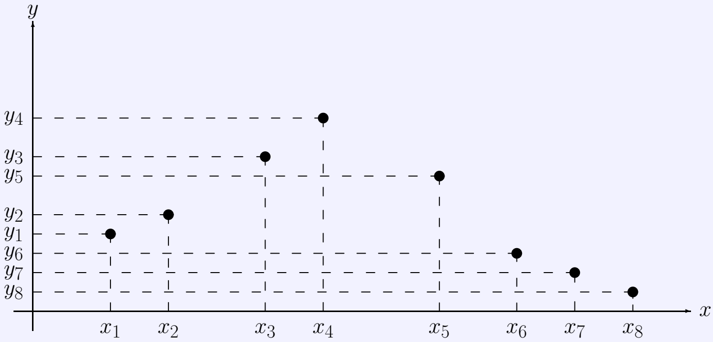
$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2,$$

które będziemy nazywali węzłami interpolacji. Zakładamy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Trzeba wyznaczyć krzywą przechodzącą przez punkty (x_i, y_i) i spełniającą dane warunki. Jeżeli założy się, że z warunku $y_i \neq y_j$ wynika $x_i \neq x_j$, to trzeba wyznaczyć funkcję interpolującą $f(x)$ spełniającą dane warunki taką, że $f(x_i) = y_i$.

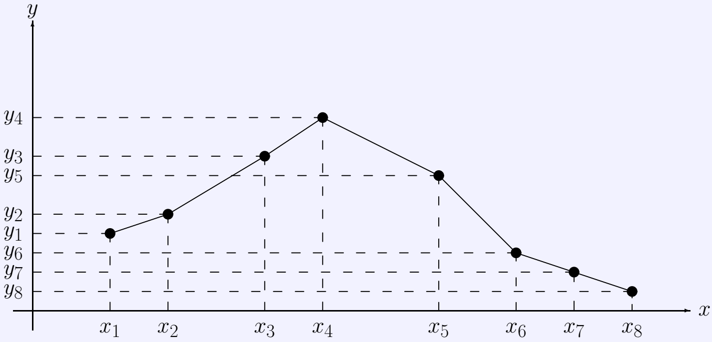
Przykłady warunków dla funkcji interpolującej:

- ciągłość,
- różniczkowalność,
- istnienie drugiej pochodnej,
- szczególna postać funkcji, np. wielomian.

Przykład. Przykładowe punkty (x_i, y_i) są położone jak na rysunku.



Punkty (x_i, y_i) połączone odcinkami są pokazane na rysunku.



Otrzymany w ten sposób wykres funkcji interpolującej jest łamaną. Funkcja interpolująca jest więc ciągła, ale nie ma ani pierwszej, ani tym bardziej drugiej pochodnej.

Interpolacja wielomianowa

W dalszym ciągu będziemy zainteresowani interpolacją przez funkcje wielomianowe.
Dla dowolnych trzech punktów na płaszczyźnie istnieje wielomian stopnia nie większego niż 2, którego wykres przechodzi przez te punkty. Jeśli tymi punktami są $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, gdzie $x_1 < x_2 < x_3$, to współczynniki wielomianu $ax^2 + bx + c$ wyznaczamy z układu równań

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}.$$

Jest to układ trzech równań o trzech niewiadomych a, b, c.

Macierz współczynników tego układu, czyli

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix},$$

ma wyznacznik

$$\det A = -(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Ponieważ $\det A \neq 0$, to rozwiązanie a, b, c zawsze istnieje i jest jedyne.

Ogólnie zadanie interpolacji wielomianem polega na wyznaczeniu dla węzłów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ wielomianu $p(x)$ stopnia nie większego niż n, którego wykres przechodzi przez wszystkie węzły (x_i, y_i). Wielomian $p(x)$ jest wyznaczony jednoznacznie.

Załóżmy, że dane są węzły $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, gdzie x_i są parami różne, tzn. $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Wyrażenia

$$f[x_0; x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$
$$f[x_1; x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$
$$\ldots$$
$$f[x_{n-1}; x_n] = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

nazywamy ilorazami różnicowymi pierwszego rzędu.

Analogicznie definiujemy ilorazy różnicowe rzędu drugiego:

$$f[x_0; x_1; x_2] = \frac{f[x_1; x_2] - f[x_0; x_1]}{x_2 - x_0},$$

$$\ldots$$

$$f[x_{n-2}; x_{n-1}; x_n] = \frac{f[x_{n-1}; x_n] - f[x_{n-2}; x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}.$$

Rekurencyjnie definiujemy iloraz różnicowy rzędu k:

$$f[x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}] - f[x_i; \ldots; x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

dla $k = 1, 2, \ldots$ oraz $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Wielomian interpolacyjny Newtona

Wzór interpolacyjny Newtona powstaje w następujący sposób. Wielomiany $p_k(x)$ budujemy dla kolejnych k: $p_0(x) = y_0$,

$$\begin{aligned} p_k(x) &= y_0 + f[x_0; x_1](x - x_0) \\ &\quad + f[x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \ldots + f[x_0; x_1; x_2; \ldots; x_k](x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) \\ &= y_0 + \sum_{i=1}^{k} f[x_0; \ldots; x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)\,. \end{aligned}$$

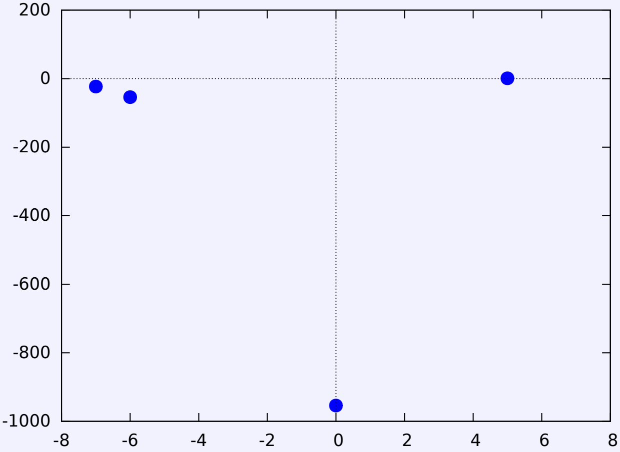
Przykład. Dla $k = 3$ i punktów podanych w poniższej tabeli

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

otrzymuje się następujący wielomian interpolacyjny Newtona stopnia trzeciego (sprawdzić !):

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 1 + 2(x-5) + 3(x-5)(x+7) + 4(x-5)(x+7)(x+6) \\ &= 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954. \end{aligned}$$

Wielomiany $p_k(x)$ dla $k = 0, 1, 2, 3$ są przedstawione na animacji.



Rysunek: Kolejne kroki w interpolacji Newtona – animacja

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

Wzór interpolacyjny Lagrange'a jest określony za pomocą tzw. wielomianów Lagrange'a. Wielomian interpolacyjny $p(x)$ wyraża się jako suma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x), \tag{1}$$

gdzie wielomiany Lagrange'a definiujemy dla $k = 0, 1, \ldots, n$ jako

$$l_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{2}$$

Przykład. Dla węzłów z tabeli

x	5	-7	-6	0
y	1	-23	-54	-954

otrzymuje się następujące wielomiany Lagrange'a:

$$l_0(x) = \frac{(x+7)(x+6)x}{(5+7)(5+6)5} = \frac{1}{660}(x+7)(x+6)x,$$

$$l_1(x) = \frac{(x-5)(x+6)x}{(-7-5)(-7+6)(-7)} = -\frac{1}{84}(x-5)(x+6)x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-5)(x+7)x}{(-6-5)(-6+7)(-6)} = \frac{1}{66}(x-5)(x+7)x,$$

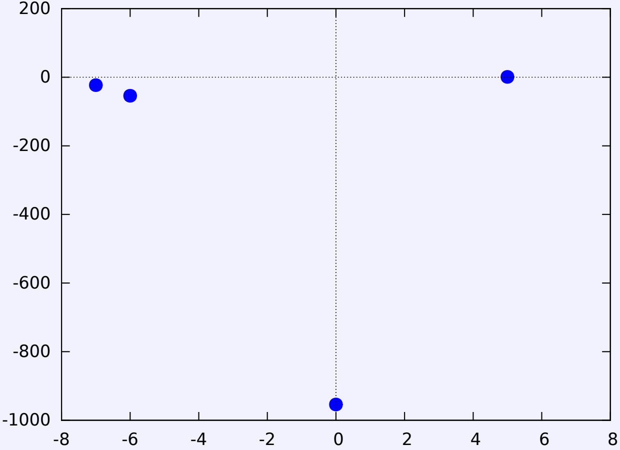
$$l_3(x) = \frac{(x-5)(x+7)(x+6)}{(0-5)(0+7)(0+6)} = -\frac{1}{210}(x-5)(x+7)(x+6)$$

Ponieważ wielomian interpolacyjny wyraża się wzorem (1), to ostatecznie otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
p(x) &= l_0(x) - 23 l_1(x) - 54 l_2(x) - 954 l_3(x) \\
&= 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954.
\end{aligned}
$$

Warto zwrócić uwagę, że ponieważ wielomian interpolacyjny danego stopnia jest wyznaczony jednoznacznie, to otrzymaliśmy rezultat identyczny jak drogą interpolacji Newtona.

Kolejne kroki w interpolacji Lagrange'a dla $k = 0, 1, 2, 3$ ilustruje animacja.



Rysunek: Kolejne kroki w interpolacji Lagrange'a – animacja

Funkcje sklejane

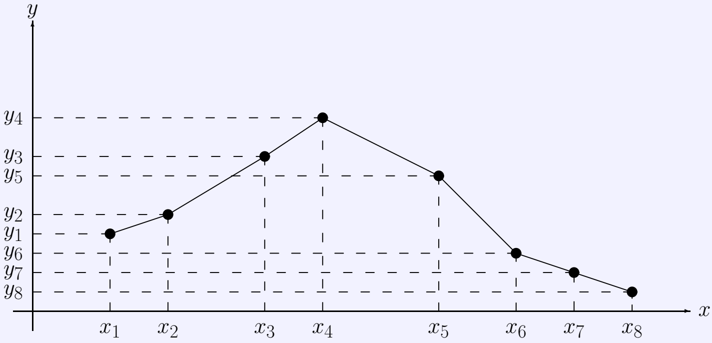
Poza wielomianami do interpolacji można użyć tzw. funkcji sklejanych. Funkcje sklejane definiujemy w następujący sposób. Dane są węzły $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Zakładamy, że $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

Funkcją sklejaną stopnia k jest funkcja $S(x)$ taka, że:

(1) w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, jest wielomianem stopnia nie wyższego niż k,

(2) ma ciągłą $(k-1)$-szą pochodną w $[x_0, x_n]$.

Przykład. Funkcją sklejaną stopnia pierwszego jest łamana łącząca węzły, przedstawiona na rysunku



Jest ona ciągła, ale nawet jej pierwsza pochodna nie jest ciągła w całym przedziale $[x_1, x_8]$.

W zastosowaniach praktycznych najczęściej stosuje się funkcje sklejane stopnia trzeciego, ponieważ wyznacza się je w miarę łatwo, a dla wielu zagadnień wystarcza ciągłość drugiej pochodnej.

Krzywe Béziera

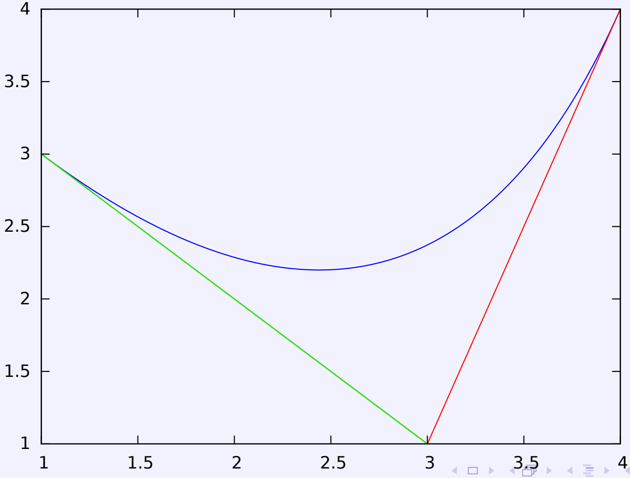
Do celów interpolacji jest także możliwe zastosowanie tzw. krzywych Béziera.
Krzywe Béziera zostały opracowane niezależnie przez Pierre'a Béziera, francuskiego inżyniera firmy Renault, oraz Paula de Casteljau, pracującego dla konkurencyjnej firmy Citroën.
Krzywe Béziera są krzywymi parametrycznymi, tzn. każda współrzędna punktu krzywej jest pewną funkcją rzeczywistą jednego parametru t. Aby określić krzywą na płaszczyźnie, potrzebne są dwie funkcje: $x(t)$ i $y(t)$. Przyjmuje się, że $t \in [0, 1]$.
Ze względu na rodzaj tych funkcji mówi się o krzywych wielomianowych oraz krzywych wymiernych. W dalszym ciągu będziemy zainteresowani jedynie krzywymi wielomianowymi.

Wielomianowe krzywe Béziera drugiego stopnia wyznaczamy następująco. Dane są punkty $P_i = (x_i, y_i)$ dla $i = 0, 1, 2$. Punkty P_0 i P_2 leżą na końcach krzywej. Punkt P_1 jest punktem kontrolnym. Krzywa jest w punktach P_0 i P_2 styczna do odcinków $\overline{P_0 P_1}$ i $\overline{P_1 P_2}$ odpowiednio. W każdym punkcie krzywa jest styczna do odcinka $\overline{P_A P_B}$ w punkcie P_S, gdzie punkty P_A i P_B przesuwają się po odcinkach $\overline{P_0 P_1}$ i $\overline{P_1 P_2}$ odpowiednio, a punkt P_S przesuwa się po odcinku $\overline{P_A P_B}$ proporcjonalnie do parametru t, $t \in [0, 1]$. W ten sposób krzywa jest przedstawiona parametrycznie przez równania:

$$x(t) = (1-t)\left((1-t)\,x_0 + tx_1\right) + t\left((1-t)\,x_1 + tx_2\right),$$
$$y(t) = (1-t)\left((1-t)\,y_0 + ty_1\right) + t\left((1-t)\,y_1 + ty_2\right),$$

gdzie $t \in [0, 1]$.

Przykład. Na animacji pokazana jest krzywa Béziera drugiego stopnia dla punktów $P_0 = (1, 3)$, $P_1 = (3, 1)$, $P_2 = (4, 4)$ oraz jej rysowanie.

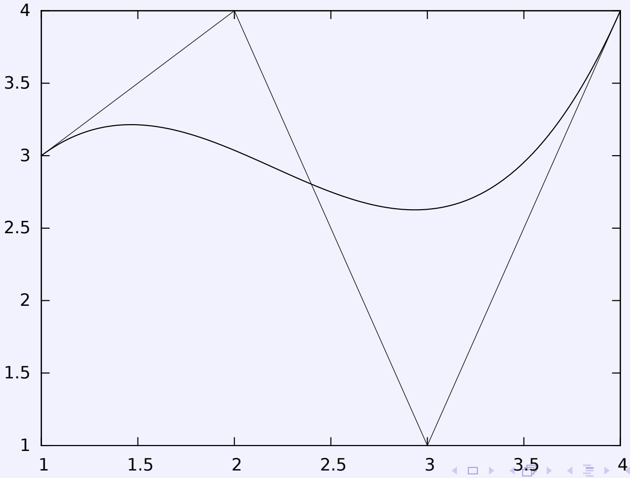


Wielomianowe krzywe Béziera trzeciego stopnia wyznaczamy następująco. Dane są punkty $P_i = (x_i, y_i)$ dla $i = 0, 1, 2, 3$. Punkty P_0 i P_3 leżą na końcach krzywej. Punkty P_1 i P_2 są punktami kontrolnymi. Krzywa jest przedstawiona parametrycznie przez równania:

$$x(t) = x_0 (1-t)^3 + 3x_1 t (1-t)^2 + 3x_2 t^2 (1-t) + x_3 t^3,$$
$$y(t) = y_0 (1-t)^3 + 3y_1 t (1-t)^2 + 3y_2 t^2 (1-t) + y_3 t^3,$$

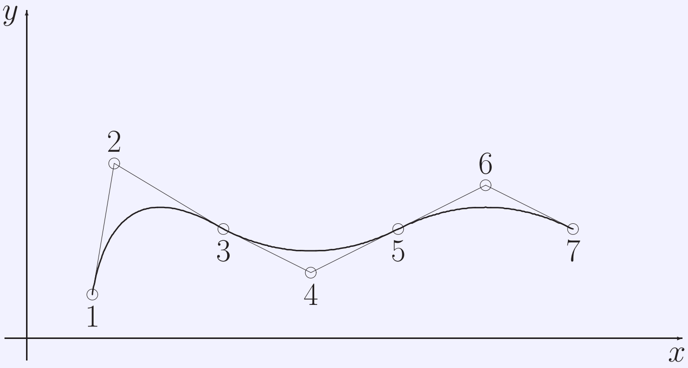
gdzie $t \in [0, 1]$. Krzywa jest w punktach P_0 i P_3 styczna do odcinków $\overline{P_0 P_1}$ i $\overline{P_2 P_3}$ odpowiednio.

Przykład. Na rysunku pokazana jest krzywa Béziera trzeciego stopnia dla punktów $P_0 = (1, 3)$, $P_2 = (2, 4)$, $P_1 = (3, 1)$, $P_2 = (4, 4)$.



Sklejane krzywe Béziera powstają przez łączenie krzywych Béziera tak, aby otrzymać krzywą gładką.

Przykład. Na rysunku przez punkty od lewej 1, 3, 5, 7 przechodzi sklejana krzywa Béziera, która jest krzywą gładką. Punkty 2, 4, 6 są punktami kontrolnymi.



Krzywe Béziera można zastosować również do wygładzania krzywych łamanych.