Metody numeryczne

Wykład 3

Równania nieliniowe

Wojciech Kordecki, Karol Selwat

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Witelona w Legnicy
Wydział Nauk Technicznych i Ekonomicznych

Semestr letni 2019/20

Twierdzenie Darboux o miejscu zerowym

Metody numeryczne znajdowania pierwiastków równań nieliniowych wykorzystują twierdzenie Darboux.

Twierdzenie Darboux o miejscu zerowym

Metody numeryczne znajdowania pierwiastków równań nieliniowych wykorzystują twierdzenie Darboux.

Twierdzenie. Jeżeli funkcja jest ciągła w przedziale $[a, b]$ oraz $f(a) f(b) < 0$, to istnieje $r \in (a, b)$ takie, że $f(r) = 0$.

Metoda bisekcji

Algorytm bisekcji jest następujący:

Metoda bisekcji

Algorytm bisekcji jest następujący:

1. Dzielimy przedział $[a, b]$ na pół punktem $c = (a + b)/2$.

Metoda bisekcji

Algorytm bisekcji jest następujący:

1. Dzielimy przedział $[a, b]$ na pół punktem $c = (a + b)/2$.
2. Sprawdzamy, czy $f(a) f(c) < 0$ czy $f(c) f(b) < 0$.

Metoda bisekcji

Algorytm bisekcji jest następujący:

1. Dzielimy przedział $[a, b]$ na pół punktem $c = (a + b)/2$.
2. Sprawdzamy, czy $f(a) f(c) < 0$ czy $f(c) f(b) < 0$.
3. Podstawiamy odpowiednio $b = c$ lub $a = c$.

Metoda bisekcji

Algorytm bisekcji jest następujący:

1. Dzielimy przedział $[a, b]$ na pół punktem $c = (a + b)/2$.
2. Sprawdzamy, czy $f(a) f(c) < 0$ czy $f(c) f(b) < 0$.
3. Podstawiamy odpowiednio $b = c$ lub $a = c$.
4. Powtarzamy postępowanie tak długo, aż przedział, w którym znajduje się zero, ma długość mniejszą niż zadana dokładność, lub gdy osiągniemy zakładaną liczbę numeracji.

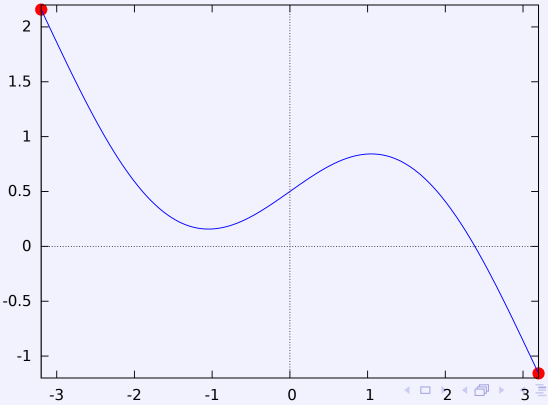
Przykład. Szukamy pierwiastka równania

$$f(x) = \sin x - \frac{x-1}{2} = 0. \tag{1}$$

Przykład. Szukamy pierwiastka równania

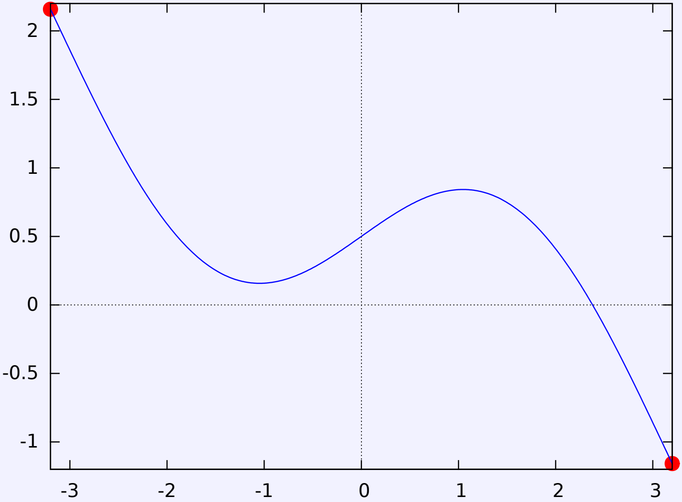
$$f(x) = \sin x - \frac{x-1}{2} = 0. \tag{1}$$

Łatwo zauważyć, że pierwiastka wystarczy poszukiwać w przedziale $[-3.2, 3.2]$.



Kolejne przybliżenia pierwiastka metodą bisekcji są podane w tabeli.

x_i	$f(x_i)$
0.00000	0.5000
1.60000	0.6995
2.40000	-0.0245
2.00000	0.4093
2.20000	0.2085
2.30000	0.0957
2.35000	0.0365
2.37500	0.0062
2.38125	-0.0015



Rysunek: Kolejne kroki w metodzie bisekcji – animacja

Stąd po dziewięciu krokach otrzymujemy przybliżenie $x \approx 2.38125 \in [2.375, 2.38125]$. Rozwiązaniem dokładnym, z dokładnością 15 miejsc dziesiętnych, jest $r \approx 2.380061273139339$.

Metoda Newtona

Inna nazwa metody Newtona to metoda stycznych.

Metoda Newtona

Inna nazwa metody Newtona to metoda stycznych.
Zakładamy, że istnieje druga pochodna funkcji $f(x)$.

Metoda Newtona

Inna nazwa metody Newtona to metoda stycznych.
Zakładamy, że istnieje druga pochodna funkcji $f(x)$. Niech x_0 będzie przybliżeniem zera r tej funkcji.

Metoda Newtona

Inna nazwa metody Newtona to metoda stycznych.
Zakładamy, że istnieje druga pochodna funkcji $f(x)$. Niech x_0 będzie przybliżeniem zera r tej funkcji. Następne przybliżenie otrzymujemy w ten sposób, że w punkcie $(x_0, f(x_0))$ wystawiamy prostą styczną do wykresu danej funkcji, a następnie bierzemy punkt przecięcia tej stycznej z osią Ox.

Metoda Newtona

Inna nazwa metody Newtona to metoda stycznych.
Zakładamy, że istnieje druga pochodna funkcji $f(x)$. Niech x_0 będzie przybliżeniem zera r tej funkcji. Następne przybliżenie otrzymujemy w ten sposób, że w punkcie $(x_0, f(x_0))$ wystawiamy prostą styczną do wykresu danej funkcji, a następnie bierzemy punkt przecięcia tej stycznej z osią Ox. Kolejne przybliżenia zera r w metodzie Newtona wyznaczamy ze wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

Przykład. Dla równania (1) mamy

$$f'(x) = \cos x - 1/2$$

oraz druga pochodna istnieje.

Przykład. Dla równania (1) mamy

$$f'(x) = \cos x - 1/2$$

oraz druga pochodna istnieje.
Dla różnych punktów startowych x_0 otrzymujemy przybliżenia podane w następnej tabeli. Obliczenia zostały wykonane przy wykorzystaniu typu double.

x_n	przybliżenia	
x_0	1.500000000000000	2.000000000000000
x_1	3.241345836415600	2.446759635571390
x_2	2.425133621883010	2.381213807429790
x_3	2.380602252702230	2.380061647086650
x_4	2.380061355591100	2.380061273139380
x_5	2.380061273139340	2.380061273139340

x_n	przybliżenia	
x_0	2.500000000000000	3.000000000000000
x_1	2.383542558956990	2.423567572387280
x_2	2.380064674904990	2.380566315343440
x_3	2.380061273142600	2.380061345003650
x_4	2.380061273139340	2.380061273139340
x_5	2.380061273139340	2.380061273139340

Dla uzyskania dokładnych 15 miejsc dziesiętnych ($r \approx 2.380061273139339$) wystarczą cztery iteracje dla $x_0 = 2.5$ i $x_0 = 3.0$, natomiast dla $x_0 = 1.5$ i $x_0 = 2.0$ potrzeba pięć iteracji.

Używając typu single otrzymujemy dokładnie tylko sześć miejsc dziesiętnych, do czego wystarczą tylko cztery iteracje.

x_n	przybliżenia			
x_0	1.500000	2.000000	2.500000	3.000000
x_1	3.241346	2.446760	2.383543	2.423568
x_2	2.425134	2.381214	2.380065	2.380566
x_3	2.380602	2.380062	2.380061	2.380061
x_4	2.380061	2.380061	2.380061	2.380061

Jednakże wybierając $x_0 = 1$ otrzymujemy według wzoru (2) ciąg

$$1.0000, -19.8790, -645.6279, 45.2308, -70.2842, 247.9232$$

ewidentnie rozbieżny.

Metoda siecznych

Inna nazwa metody siecznych to *regula falsi*– fałszywe założenie o liniowości funkcji.

Metoda siecznych

Inna nazwa metody siecznych to *regula falsi*– fałszywe założenie o liniowości funkcji.
Jeżeli prosta $p(x) = ax + b$ przecina wykres funkcji $f(x)$ w punktach (x_1, y_1) i (x_2, y_2), przy czym $y_1 y_2 < 0$, to punkt $x_0 = -b/a$ przecięcia prostej $p(x)$ z osią OX jest przybliżeniem pierwiastka równania $f(x) = 0$.

Przykład. Równanie

$$f(x) = x(x-2) = 0 \tag{3}$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste: $x' = 0$ i $x'' = 2$.

Przykład. Równanie

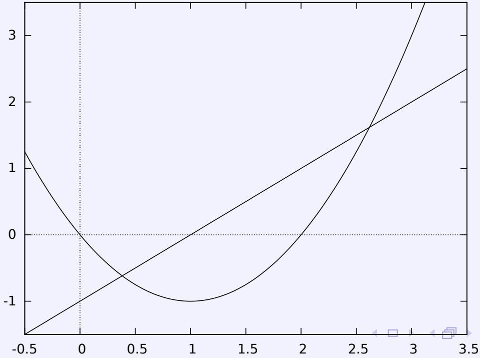
$$f(x) = x(x-2) = 0 \tag{3}$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste: $x' = 0$ i $x'' = 2$. Prosta $p(x) = x - 1$ przecina wykres $x(x-2)$ w punktach $\left(\left(3-\sqrt{5}\right)/2, \left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)$ i $\left(\left(3+\sqrt{5}\right)/2, \left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)$.

Przykład. Równanie

$$f(x) = x(x-2) = 0 \tag{3}$$

ma dwa pierwiastki rzeczywiste: $x' = 0$ i $x'' = 2$. Prosta $p(x) = x - 1$ przecina wykres $x(x-2)$ w punktach $\left(\left(3-\sqrt{5}\right)/2, \left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)$ i $\left(\left(3+\sqrt{5}\right)/2, \left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)$. Oczywiście $y_1 y_2 < 0$.



Przybliżonym rozwiązaniem równania (3) jest więc $x = 1$, co jest bardzo odległe od rzeczywistości. Potrzebne są więc dalsze kroki przybliżeń.

We wzorze (2) pochodną w punkcie przybliżamy ilorazem różnicowym:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

We wzorze (2) pochodną w punkcie przybliżamy ilorazem różnicowym:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Wtedy otrzymujemy metodę siecznych:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{4}$$

We wzorze (2) pochodną w punkcie przybliżamy ilorazem różnicowym:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Wtedy otrzymujemy metodę siecznych:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{4}$$

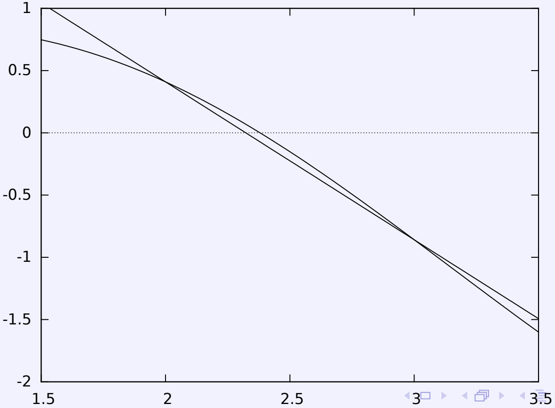
Potrzebne są dwa punkty początkowe x_0 i x_1 takie, że $f(x_0)\,f(x_1) < 0$.

Przykład. Wróćmy do poprzedniego przykładu i równania (3). Stosując wzór (4) dla $x_0 = \left(3 - \sqrt{5}\right)/2$ i $x_1 = \left(3 + \sqrt{5}\right)/2$ otrzymujemy dla sześciu kroków kolejne przybliżenia rozwiązania $x'' = 2$.
Jeżeli przyjmiemy $x_0 = \left(3 + \sqrt{5}\right)/2$ i $x_1 = \left(3 - \sqrt{5}\right)/2$, to otrzymamy przybliżenia rozwiązania $x' = 0$.

Przykład. Dla równania

$$f(x) = \sin x - \frac{x-1}{2} = 0 \qquad (1)$$

i punktów początkowych $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ mamy sieczną pokazaną na rysunku:



Kolejnymi przybliżeniami są:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2.000000000000000,\\
x_1 &= 3.000000000000000,\\
x_2 &= 2.322744610311709,\\
x_3 &= 2.373098715169033,\\
x_4 &= 2.380178440429179,\\
x_5 &= 2.380061042152282.
\end{aligned}
$$

Dla przypomnienia $r \approx 2.380061273139339$.