Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Preliminares

Para el análisis del módelo presa-depredador tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea que se lleva acabo en el presente trabajo, requerimos de ciertos conceptos fundamentales, los cuales se abarcan en la presente sección, esto, con el objetivo de lograr una mejor compresión de todo lo que se presenta posteriormente.

Posible lista de conceptos a definir

1. **Cálculo diferencial e integral**
   - Límites y continuidad
   - Derivadas parciales
   - Gradiente y campos vectoriales
   - Matriz Jacobiana
   - Series de Taylor (expansión local)
2. **Álgebra lineal**
   - Espacios vectoriales
   - Autovalores y autovectores ✓
   - Diagonalización de matrices ✓
   - Sistemas lineales y no lineales de ecuaciones ✓
   - Cambios de base y transformaciones lineales

3. **Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)**
    - Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) ✓
    - Teorema de existencia y unicidad ✓
    - Métodos numéricos básicos (Euler, Runge-Kutta)
4. **Topología y análisis**
    - Espacios métricos
    - Continuidad y compacidad
    - Región compacta
    - Conjuntos abiertos y cerrados
    - Conjuntos invariantes
    - Conjuntos límite
    - Variedades
    - Condición de transversabilidad
    - Reparametrización de sistemas
5. **Geometría diferencial**
    - Difeomorfismos
    - Variedades diferenciables
    - Campos vectoriales sobre variedades
6. **Teoría cualitativa de EDOs**
    - Campo vectorial asociado a un sistema ✓
    - Trayectorias ✓
    - Diagramas de fase ✓
    - Isoclinas ✓
    - Puntos críticos y clasificación
    - Trayectorias, órbitas y curvas solución
    - Regiones invariantes
    - Separatrices

- Compactificación de Poincaré
- Variedades estables e inestables
- Reescalamiento y reparametrización temporal
- Desingularización (incluyendo blowing-up)

7. **Sistemas dinámicos**
   - Sistemas autónomos y no autónomos ✓
   - Sistemas equivalentes topológicamente
   - Ciclos límite
   - Bifurcaciones (saddle-node, Hopf, pitchfork, etc.)
   - Diagramas de bifurcación
   - Estabilidad de sistemas no lineales
   - Funciones de Lyapunov
   - Método del número de Lyapunov
   - Órbitas heteroclínicas y homoclínicas
   - Teorema de Poincaré-Bendixson

8. **Biología matemática / Modelos ecológicos**
   - Ecuaciones logísticas y crecimiento poblacional
   - Modelos presa-depredador clásicos (Lotka-Volterra)
   - Respuestas funcionales de Holling (tipos I, II, III)
   - Modelo Leslie-Gower
   - Modelo May–Holling–Turner
   - Crecimiento logístico
   - Efecto Allee
   - Ecuaciones de tipo Kolmogorov

9. **Métodos algebraicos y analíticos**
   - Regla de los signos de Descartes
   - Análisis de estabilidad lineal y no lineal
   - Polar blowing-up method
   - Sistemas tangentes

1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Entonces $C^k(U,V)$ denota el conjunto de funciones de $U \longrightarrow V$ continuamente diferenciables hasta el orden k. Adicionalmente, para simplificar denotaremos $C^k(U,\mathbb{R})$ como $C^k(U)$. Una *ecuación difrencial ordinaria* o EDO es una ecuación para una función desconocida de una sola variable real, que no solo contiene a la función sino también a sus derivadas. De manera general una EDO es de la forma

$$F(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}) = 0, \tag{1.1}$$

donde $F \in C(U)$ con U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{k+2}$, $x = x(t) \subseteq C(J)$ con $J \subseteq \mathbb{R}$ y

$$x^{(k)}(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Al máximo orden k de la derivada $x^{(k)}$ en (1.1) se le llama el *orden* de la ecuación diferencial. Frecuentemente a t se le conoce como la *variable independiente* y a x como la *variable dependiente.*

Una *solución* de la EDO (1.1), es una función $\phi \in C^k(I)$ con $I \subseteq J$ un intervalo real, tal que

$$F(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \cdots, \phi^{(k)}(t)) = 0, \text{ para todo } t \in I. \tag{1.2}$$

Un *sistema no lineal* de EDOs *no autónomo* de primer orden es un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{1.3}$$

donde $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ y

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}.$$

Si la función f en (1.3) no depende de t entonces $f : \tilde{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\tilde{E}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y al sistema $\dot{x} = f(x)$ se le conoce como un *sistema autónomo.*

Un *sistema lineal* es un sistema de la forma

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{1.4}$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ y $b(t)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$. Si $b(t) = 0$ el sistema es *homogeneo*, además si A es una matriz diagonal decimos que el sistema es *desacoplado* y sino *acoplado*, si $b(t) \neq 0$ el sistema es *no homogeneo*. (En algunas ocasiones todos los anteriores tipos de sistemas pueden ser analizados a través de un sistema de la forma:)

$$\dot{x} = Ax \tag{1.5}$$

Teorema 1. (Teorema de existencia y unicidad). Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a x_0 y asuma que $f \in C^1(E)$. Entonces existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

tiene una única solución en el intervalo $[-a, a]$.

El sistema (1.6) puede considerarse como un campo vectorial de $\mathbb{R}^n$ y las soluciones del sistema son curvas en E que son tangentes a este campo vectorial en cada punto. Así para obtener una idea geométrica de las soluciones se puede graficar el *campo vectorial asociado al sistema* como se ejemplifica en la Figura 1.1. En particular, las soluciones del PVI (1.6) también se denominan *curvas solución* o *trayectorias*. El *retrato fase* de un sistema de EDOs es el conjunto de todas las curvas solución del sistema (1.6) en el plano $\mathbb{R}^n$ (ver Figura 1.2).

En un *sistema autónomo bidimensional*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \tag{1.7}$$

podemos encontrar una aproximación global de curvas solución, a través del metodo de las isoclinas. Del sistema (1.7) obtenemos el sistema de primer orden $dy/dx = g(x, y)/f(x, y)$. Ignorando el hecho de que esto podría no estar bien definido en $f(x, y) = 0$, el método consiste en encontrar curvas $y = h(x)$ o $x = h(y)$ en las que la pendiente del campo vectorial $dy/dx = c$ es constante. Dichas curvas se obtienen solucionando la ecuación

$$g(x, y) = cf(x, y), \tag{1.8}$$

y son llamadas *isoclinas*. Las isoclinas se pueden encontrar en sistemas de mayor dimensión pero solo es relevante en los de dos y tres dimensiones, pues su importancia radica en la interpretación gráfica de esta.

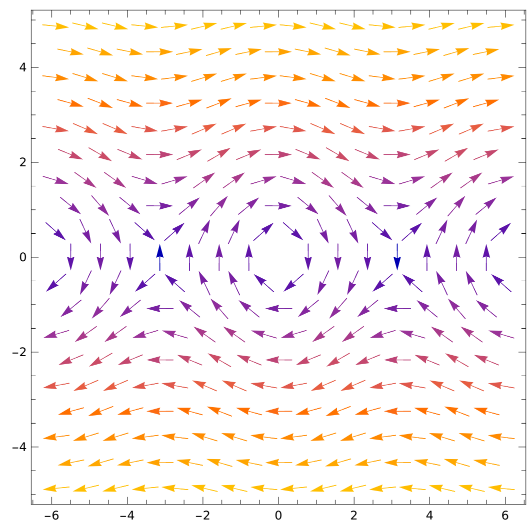

Figura 1.1: Ejemplo del campo vectorial asociado a $f(x, y) = (y, \sin x)$.

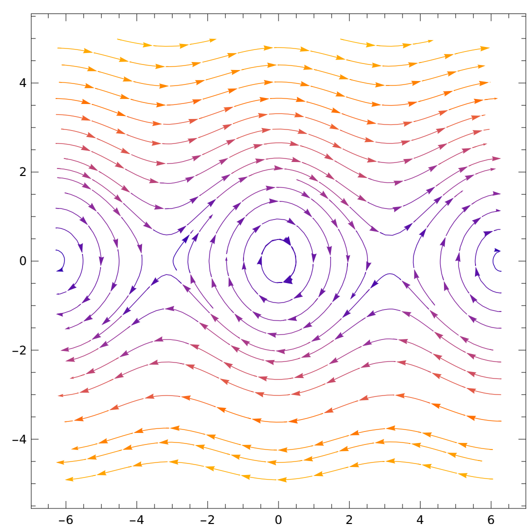

Figura 1.2: Ejemplo del retrato fase del sistema asociado a la función $f(x, y) = (y, \sin x)$.

Definición 1. Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de tamaño n con entradas en $\mathbb{R}$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *valor propio* de A si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que, $Av = \lambda v$. Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = \lambda v$ es llamado un *vector propio* de A asociado al valor propio λ.

Definición 2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ decimos que A es *diagonalizable* si existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

Bibliografía

[1] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer, 2012.