

Notas de Clase: “*Sistemas dinámicos y ecuaciones  
diferenciales*”

Jhon Jairo Pérez; Wilmer Molina Yepez.

24 de julio de 2024

# Prólogo

El presente libro se originó como apuntes del curso *Sistemas Dinámicos y Ecuaciones Diferenciales*. Ofrece una introducción autónoma al campo de la medición diferencial ordinaria. ecuaciones con énfasis en el punto de vista de sistemas dinámicos. Sin embargo, También cubre algunos temas clásicos como las ecuaciones diferenciales en el Problemas complejos de plano y valores de frontera (Sturm-Liouville). Sólo requiere algunos conocimientos básicos de cálculo, funciones complejas, y álgebra lineal que debe cubrirse en los cursos habituales.

# Índice general

<b>1. Introducción a los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.</b>	<b>2</b>
1.1. clasificación de las ecuaciones diferenciales. . . . .	2
1.2. Sistemas Lineales. . . . .	5
1.3. Primeros ejemplos de sistemas lineales desacoplados . . . . .	6
1.4. Diagonalización. . . . .	12
1.5. Operador Exponencial . . . . .	17
1.6. Teorema Fundamental para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales . .	24
1.7. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	27
1.8. Valores propios complejos . . . . .	33
1.9. Valores Propios Múltiples . . . . .	36
1.10. Forma canónica de Jordan . . . . .	43
1.11. Teoría de estabilidad . . . . .	52
1.12. Sistemas lineales no homogéneos . . . . .	57
 <b>2. Sistemas no lineales: Teoría local</b>	 <b>61</b>
2.1. Conceptos preliminares y definiciones. . . . .	62
2.2. Teorema fundamental de existencia y unicidad . . . . .	65
2.3. Dependencia de condiciones iniciales y parámetros . . . . .	71
2.4. Intervalo máximo de existencia. . . . .	75
2.5. El Flujo de una ecuación diferencial . . . . .	83
2.6. Linealización . . . . .	88
2.7. Teorema de la variedad estable . . . . .	91

# Introducción

Los sistemas de ecuaciones diferenciales son fundamentales en las diferentes ramas de la ciencia por su capacidad para modelar y describir fenómenos dinámicos que cambian con respecto al tiempo o a otras variables independientes. En la física, estos sistemas describen y resuelven problemas que involucran fuerzas, velocidades, aceleraciones y otras magnitudes. En biología, medicina y la química son ampliamente utilizadas para modelar fenómenos de crecimiento de poblaciones; dinámicas de enfermedades que ayudan a comprender la propagación de enfermedades y la efectividad de intervenciones como vacunación y cuarentenas; respuesta a diferentes estímulos; reacciones y concentraciones de sustancias químicas.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales proporcionan un escenario matemático importante para entender y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos en una amplia gama de disciplinas científicas y por tanto se convierte en una herramienta esencial para los científicos e ingenieros que buscan comprender y controlar fenómenos que cambian con el tiempo.

# Capítulo 1

## Introducción a los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) son quizá, la herramienta matemática más importante para describir y analizar sistemas dinámicos en los que las variables cambian en función de sus tasas de cambio. Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es un conjunto de ecuaciones acopladas o desacopladas, y describen la evolución de múltiples funciones en función de ellas mismas y el particular del tiempo. Los sistemas de ecuaciones diferenciales son de vital importancia en la modelización y comprensión de una amplia gama de fenómenos en todas las disciplinas como la física, ingenierías, biología y economía.

### 1.1. clasificación de las ecuaciones diferenciales.

Sean  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $k \in \mathbb{N}_0$ . Entonces  $C^k(U, V)$  denota el conjunto de todas las funciones de  $U \rightarrow V$  continuamente diferenciables hasta el orden  $k$ .

$$C(U, V) = C^0(U, V), \quad \text{y} \quad C^\infty(U, V) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(U, V),$$

Adicionalmente para simplificar  $C^k(U, \mathbb{R}^n)$  lo denotaremos por  $C^k(U)$ .

Una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) es una relación funcional de la forma

$$F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = 0 \tag{1.1}$$

que involucra una función real desconocida  $x \in C^k(J)$ ,  $J \subseteq \mathbb{R}$  y sus derivadas  $x^{(j)}(t) = \frac{d^j x(t)}{dt^j}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Donde  $F$  es función real,  $F \in C(U)$ , con  $U$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^{k+2}$ . Frecuentemente  $t$  es la variable independiente y  $x$  la variable dependiente. La derivada más alta que aparece en  $F$ , se llama el orden de la ecuación diferencial, la

ecuación (1.1) es de orden  $k$ . Una *solución* de (1.1) es una función  $\phi \in C^k(I)$ , donde  $I$  es un intervalo contenido en  $J$  tal que

$$F(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I. \quad (1.2)$$

Esto implica implícitamente  $(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) \in U$  para todo  $t \in I$ .

Desafortunadamente, no existe un método general para resolver la ecuación diferencial (1.1). Por lo tanto, se asume que en la expresión (1.1) es posible despejar la derivada más alta  $x^{(k)}$  en función de las variables  $t, x, \dots, x^{(k-1)}$  para obtener una ecuación diferencial de la forma:

$$x^{(k)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}), \quad (1.3)$$

lo cual se puede hacer localmente cerca de alguna punto  $(t, \mathbf{y}) \in U$  siempre que  $\frac{dF}{dy_k}(t, \mathbf{y}) \neq 0$ , donde  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_k)$  (Teorema de la función implícita ver [?]). Este tipo de ecuaciones diferenciales serán las que consideraremos en adelante.

Es claro que la ecuación general (1.3) de orden  $k$ , siempre se puede reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno si se considera la sustitución  $y_j = x^{(j-1)}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , así pues, el vector de variables dependientes,

$$\mathbf{y} = (x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$$

es tal que,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ &\vdots \\ \dot{y}_{k-1} &= y_k, \\ \dot{y}_k &= f(t, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

que es un *sistema de primer orden  $k$ -dimensional* que se denota

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{y}), \quad (1.4)$$

donde

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k), \quad \mathbf{g}(t, \mathbf{y}) = (y_2, y_3, \dots, y_k, f(t, \mathbf{y})).$$

Incluso si se considera  $t$  como una de las variables dependientes y  $\mathbf{z} = (t, \mathbf{y})$  con  $z_1 = t, \dots, z_{j+1} = y_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , el lado derecho de igualdad sería independiente de  $t$ .

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 1, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_k &= z_{k+1}, \\ \dot{z}_{k+1} &= f(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

es un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}), \quad (1.5)$$

donde

$$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{k+1}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{z}) = (1, z_3, \dots, z_{k+1}, f(\mathbf{z})),$$

llamado sistema *autónomo* de primer orden, ya que la función  $\mathbf{g}$  no depende de  $t$ .

Para el caso  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , un *sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias n-dimensional de orden k* viene dado por:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}), \\ x_2^{(k)} &= f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}), \\ &\vdots \\ x_n^{(k)} &= f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}), \end{aligned}$$

y denotar por:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-1)}), \quad (1.6)$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  y  $\mathbf{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

Si se consideran las sustituciones que permitieron encontrar los sistemas (1.4) y (1.5), el sistema (1.6) puede ser transformado en un sistema autónomo de primer orden de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.7)$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$  y  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial con  $U$  subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Por ejemplo, si se considera el sistema no autónomo bidimensional de segundo orden,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \\ \ddot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

y se usa la sustitución  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $y_3 = \dot{x}_1$ ,  $y_4 = \dot{x}_2$ , se obtiene un sistema no autónomo 4-dimensional de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_3 \\ \dot{y}_2 &= y_4 \\ \dot{y}_3 &= f_1(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dot{y}_4 &= f_2(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned}$$

el cual se puede escribir de la forma:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

donde  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ ,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = (y_3, y_4, f_1(t, \mathbf{y}), f_2(t, \mathbf{y}))$ .

Ahora si hacemos la sustitución  $z_1 = t$ ,  $z_2 = y_1$ ,  $z_3 = y_2$ ,  $z_4 = y_3$ ,  $z_5 = y_4$ , obtenemos el sistema autónomo 5-dimensional de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= 1 \\ \dot{z}_2 &= z_4 \\ \dot{z}_3 &= z_5 \\ \dot{z}_4 &= f_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \\ \dot{z}_5 &= f_2(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)\end{aligned}$$

sistema que obtiene la forma,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z})$$

donde  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1, z_4, z_5, f_1(\mathbf{z}), f_2(\mathbf{z}))$ .

Si se considera  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ , entonces implicaría trabajar en las derivadas parciales e introducirlos en el reino de las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). Sin embargo, este no tema de este curso.

### Ejercicios.

- I. Transformar las siguientes ecuaciones diferenciales en un sistema de primer orden (1.5).

$$(1) \quad \ddot{x} + t \sin(\dot{x}) = x.$$

$$(2) \quad \ddot{x} = -y, \quad \ddot{y} = x.$$

- II. Transformar las siguientes ecuaciones diferenciales en un sistema autónomo de primer orden (1.7).

$$(1) \quad \ddot{x} + t \sin(\dot{x}) = x.$$

$$(3) \quad \ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0.$$

$$(2) \quad \ddot{x} = -\cos(t)x.$$

$$(4) \quad \ddot{x} + x = 0.$$

$$(5) \quad \ddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0.$$

- III. Sea la ecuación autónomo de orden  $k$

$$x^{(k)} = f(x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}).$$

Probar que si  $\phi(t)$  es una solución, entonces  $\varphi(t) = \phi(t - t_0)$  también es solución.

## 1.2. Sistemas Lineales.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales desacoplados son aquellos en los que las ecuaciones diferenciales que lo componen no tienen términos que vinculen las variables desconocidas entre sí. Es decir, cada ecuación depende solo de una variable y su derivada



respecto al tiempo. Estos sistemas pueden resolverse de manera sencilla y, en algunos casos, de forma analítica, facilitando la obtención de soluciones exactas, lo cual es valioso para comprender en detalle el comportamiento de ciertos fenómenos modelados por un sistema de estos. Los sistemas desacoplados pueden requerir menos recursos computacionales y ser más eficientes en términos de tiempo de cálculo. Un sistema de EDO autónomo de primer orden, es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.9)$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)$ ,  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $U$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\mathbf{f}$  es una transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ , el sistema (1.9) es llamado un sistema *lineal* y es representado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (1.10)$$

donde  $A$  es la matriz de representación de  $\mathbf{f}$  con respecto a la base canónica ordenada  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Probaremos en este capítulo que un sistema lineal (1.10) tiene una solución única en cada punto  $\mathbf{x}_0$  en  $\mathbb{R}^n$ , y viene dada por  $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0$  y definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $e^{At}$  es una función matricial  $n \times n$  definida por una serie de Taylor y  $\mathbf{x}_0$  es un vector columna en  $\mathbb{R}^n$ . Una gran parte de este capítulo, nos ocuparemos del cálculo de la matriz  $e^{At}$  en términos de los valores propios y vectores propios de la matriz  $A$ .

Pero primero empezaremos con algunos ejemplos de sistemas lineales (1.10), que con métodos vistos en cursos anteriores, “curso de ecuaciones diferenciales, álgebra lineal,” podemos encontrar la solución o soluciones.

### 1.3. Primeros ejemplos de sistemas lineales desacoplados

Comencemos por describir la ecuación diferencial autónoma dada por:

$$\dot{x} = ax \quad (1.11)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$  es una constante, y donde, el comportamiento futuro de la variable dependiente solo está determinado por su estado actual. Este tipo de ecuaciones diferenciales modela fenómenos de crecimiento o decrecimiento de poblaciones biológicas, el comportamiento de sistemas físicos en los que la tasa de cambio de una variable está determinada por el valor actual de esa variable y fenómenos económicos donde las tasas de cambio dependen únicamente de las variables económicas actuales. la ecuación logística, la ley de enfriamiento de Newton, modelos oferta demanda, son algunas de las ecuaciones que se pueden modelar con este tipo de ecuaciones.

Es quizá, la ecuación (1.11) una de las ecuaciones diferenciales autónomas más simples y que se puede considerar como una de las más importantes. Usando separación

de variables se puede encontrar una solución implícita de la solución de (1.11) que viene dada por la función  $x(t) = Ke^{at}$  donde  $K$  es una constante. Es claro que (1.11) que tiene otras soluciones. Si se supone que  $u(t)$  es otra solución de (1.11), haciendo  $g(t) = u(t)e^{-at}$  y derivando con respecto a  $t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt} (u(t)e^{-at}) = u'(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} \\ &= au(t)e^{-at} - au(t)e^{-at} \quad \text{¿ por qué?} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto  $g(t)$  es una constante  $K$ , esto es,  $u(t)e^{-at} = K$ , así se tiene que  $u(t) = Ke^{at}$ . La constante  $K$  de la solución de la ecuación (1.11) está completamente determinada por un valor  $x_0$  de la solución en un punto  $t_0$  específico. Supongamos que  $x(t)$  satisface (1.11) tal que  $x(t_0) = x_0$ , entonces  $K$  debe satisfacer  $Ke^{at_0} = x_0$ , así la ecuación (1.11) tiene solución única si satisface la *condición inicial*  $x(t_0) = x_0$ . Para simplificar, si hacemos  $t_0 = 0$ , entonces  $K = x_0$ .

**Ejercicio. verificar** que  $u(t) = x(t - t_0)$  es solución con  $u(t_0) = x_0$ .

En conclusión, si se considera *el problema de valor inicial*

$$\dot{x} = ax; \quad x(0) = x_0, \quad (1.12)$$

una solución  $x(t)$  de (1.12) debe satisfacer (1.11), pero además debe tomar el valor  $x_0$  cuando  $t = 0$ . Ya hemos probado que el problema de valor inicial (1.12) tiene solución única  $x(t) = x_0e^{at}$ . La constante  $a$  de la ecuación (1.11) puede ser considerada como un parámetro. Si  $a$  cambia, la ecuación cambia y también cambia las soluciones. Podemos describir *cualitativamente* la manera como cambia las soluciones, el signo de  $a$  es primordial:

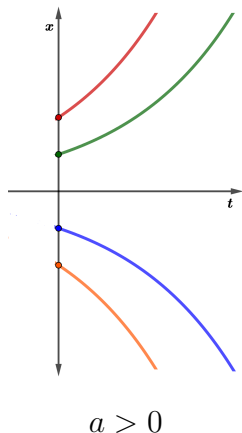
- Si  $a > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_0e^{at} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x_0 > 0, \\ -\infty & \text{si } x_0 < 0. \end{cases}$$

- Si  $a = 0$ , la solución es  $x_0e^{at} = x_0$  - constante.

- Si  $a < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_0e^{at} = 0$ .

En la figura 1 se muestra el comportamiento cualitativo de las soluciones de (1.11).



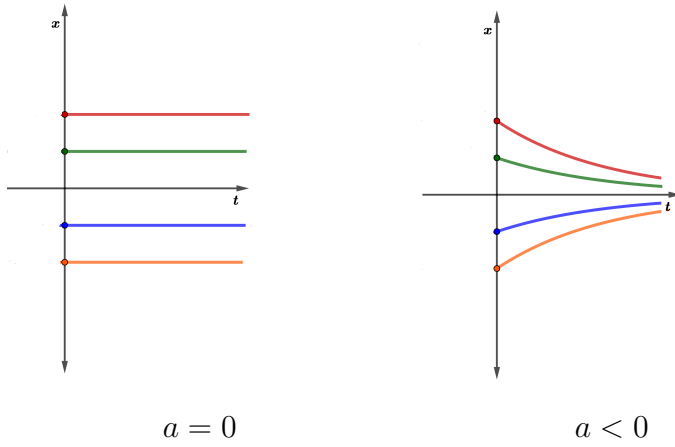


Figura 1.  $\dot{x} = ax$ ;  $a \in \mathbb{R}$ .

La ecuación  $\dot{x} = ax$  es *estable* en cierto sentido si  $a \neq 0$ . Más precisamente, si  $a$  es remplazada por otra constante  $b$  suficientemente cerca de  $a$ , el comportamiento cualitativo de las soluciones no cambia, por ejemplo,  $|b - a| < |a|$ , entonces  $b$  tiene el mismo signo de  $a$ . Pero si  $a = 0$ , un cambio mínimo en  $a$  conduce un cambio radical en el comportamiento de las soluciones. En este caso decimos que  $a = 0$  es un *punto de bifurcación* en la familia de ecuaciones uniparamétricas  $\dot{x} = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Se considera el sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales con dos funciones incógnitas, dado por,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_2,\end{aligned}\tag{1.13}$$

donde  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  son constantes, el cual es un sistema muy simple y se resuelve por método de separación de variables. Mas adelante se observará que algunos sistemas más complicados de dos ecuaciones diferenciales se puede reducir a esta forma.

Es claro que en el sistema (1.13) no hay relación entre las dos funciones desconocidas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , por ello, se dice que un sistema que está “desacoplado”, y sus solución viene dada por:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= K_1 e^{a_1 t}, & K_1 &= \text{constante}, \\ x_2(t) &= K_2 e^{a_2 t}, & K_2 &= \text{constante},\end{aligned}$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  se determinan dependiendo de las condiciones iniciales  $x_1(t_0) = u_1$  y  $x_2(t_0) = u_2$ .

Si se estudia el sistema (1.13) desde un punto de vista geométrico y se consideran las dos funciones  $x_1(t), x_2(t)$  como componentes de una curva desconocida  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  en el  $x_1, x_2$ . En este caso,  $\mathbf{x}$  es un mapeo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^2$ ;  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  función vectorial y

el lado derecho del sistema (1.13) expresa el *vector tangente*  $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$  de la curva. Usando la notación

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

donde  $A\mathbf{x} = (a_1x_1, a_2x_2)$  es un vector que inicia en el punto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ .

Se puede decir que la ecuación (1.14) es la representación matricial de (1.13) y si la condición inicial es de la forma  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  donde  $\mathbf{x}_0 = (u_1, u_2)$  es un punto dado en  $\mathbb{R}^2$ , significa geoméricamente que la curva pasa por el punto  $\mathbf{x}_0$  cuando  $t = t_0$ .

El mapeo o función  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  se pueden considerar como un *campo vectorial* sobre  $\mathbb{R}^2$ . Esto significa que a cada punto  $\mathbf{x}$  en el plano se asigna un vector  $A\mathbf{x}$  que inicia en  $\mathbf{x}$  y termina en el punto  $\mathbf{x} + A\mathbf{x}$ . Por ejemplo en la figura 2, se ilustra el campo vectorial  $A\mathbf{x} = (2x_1, -x_2)$ .

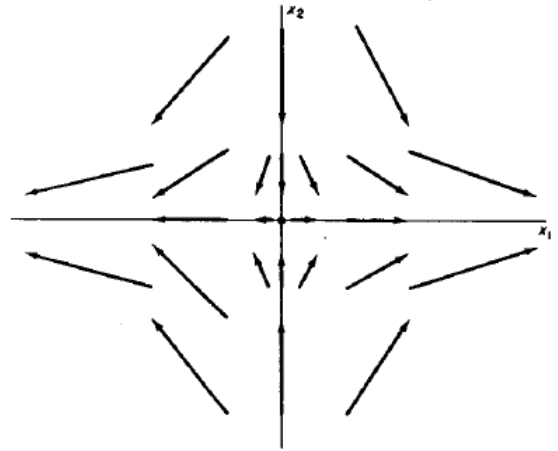


Figura 2.  $A\mathbf{x} = (2x_1, -x_2)$ .

Resolver una ecuación diferencial como la ecuación (1.13) con condición inicial  $(u_1, u_2)$  en  $t = 0$ , es encontrar la curva plana  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  que la satisface y que pasa por el punto  $\mathbf{x}_0 = (u_1, u_2)$  cuando  $t = 0$ . En particular, la solución de (1.13) es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u_1 e^{a_1 t} \\ x_2(t) &= u_2 e^{a_2 t}, \end{aligned}$$

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{not}}{=} e^{At} \mathbf{x}_0 \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

La solución trivial  $(x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$  de (1.13) o (1.14) también es considerada una “curva”.

La familia de las todas las curvas solución como subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  es llamado el “*retrato fase*” del sistema (1.13) o (1.14). En la figura 3, se muestra el retrato fase del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases} \quad (1.15)$$

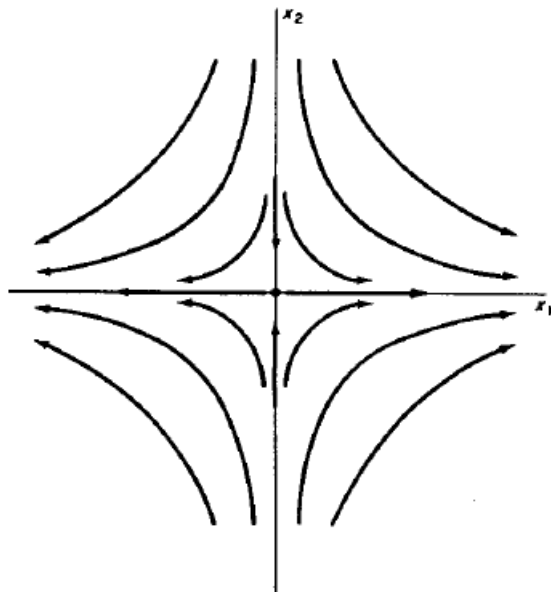


Figura 3.  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}; \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

En la figura 4, se representa el retrato fase de la ecuación uni-dimensional  $\dot{x} = ax$  la cuál se puede comparar con la figura 1, que es la gráfica de la soluciones de (1.11). Mientras la ecuación dos-dimensional (1.13) cuyo retrato fase es la figura 3 en el plano, la gráfica de soluciones de (1.13) es una figura tres-dimensional, su gráfica queda como **ejercicio**.



Figura 4.  $\dot{x} = ax; \quad a \in \mathbb{R}.$

La ecuación (1.9) es llamado un *sistema dinamico*, donde la variable independiente  $t$  se considera como variable *tiempo* y la curva solución  $\mathbf{x}(t)$ , es el camino de una partícula en movimiento en el plano  $\mathbb{R}^2$ . Nos podemos imaginar para el caso particular de (1.13), a una partícula ubicada en el punto  $\mathbf{x}_0 = (u_1, u_2)$  en  $\mathbb{R}^2$  en el instante  $t = 0$  y que a medida que pasa el tiempo la partícula comienza a moverse a lo largo de la curva solución  $\mathbf{x}(t)$  la cual satisface la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . En cualquier instante  $t > 0$  la partícula estará en

la posición  $\mathbf{x}(t)$  y en cualquier instante anterior  $t < 0$  la partícula estaba en una posición  $\mathbf{x}(t)$ . La posición de la partícula depende tanto del tiempo como del punto inicial  $\mathbf{x}_0$ , y la notaremos por  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$ . Entonces

$$\begin{aligned}\phi_t(\mathbf{x}_0) &= (u_1 e^{a_1 t}, u_2 e^{a_2 t}) = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{not}}{=} e^{At} \mathbf{x}_0, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Para cada  $t$  en  $\mathbb{R}$  fijo, se define el operador  $\phi_t$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  ( $\phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) tal que a cada punto  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  se le asigna otro punto  $\phi_t(\mathbf{u})$ . El lector puede verificar que  $\phi_t$  en (1.16) es un *operador lineal*, esto es,

$$\phi_t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \phi_t(\mathbf{u}) + \phi_t(\mathbf{v}) \quad \text{y} \quad \phi_t(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \phi_t(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lo que significa que a medida que pasa el tiempo, cada punto en el plano se mueve simultáneamente a lo largo de las trayectorias que pasan por él. Por tal motivo la familia de funciones  $\phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$  es una familia uni-paramétrica de transformaciones lineales. Esta familia es llamada el *flujo* del sistema dinámico sobre  $\mathbb{R}^2$  determinado por el campo vectorial  $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$ . Imaginemos partículas ubicadas en algunos puntos del plano  $\mathbb{R}^2$ , todas moviéndose simultáneamente (por ejemplo, partículas de polvo bajo un viento constante). En este contexto las curvas solución son llamadas trayectorias u órbitas.

En el caso de la ecuación (1.11), el flujo sobre la línea real  $\mathbb{R}$  es fácil de describir, pues si  $a < 0$  todos los puntos se acercan a 0 cuando el tiempo tiende a  $\infty$ ; si  $a > 0$  todos los puntos excepto el 0 se alejan de 0 hacia  $\pm\infty$  cuando el tiempo tiende a  $\infty$ ; y si  $a = 0$  todos los puntos se quedan quietos.

---

### ESTO DEBERIA IR ANTES DEL TEOREMA DE EXISTENCIA

---

Partiendo de una ecuación diferencial hemos obtenido el flujo  $\phi_t$ . Este proceso será validado por el teorema fundamental de ecuaciones diferenciales ordinarias que veremos más adelante. También se dará el proceso inverso, esto es, a partir de un flujo  $\phi_t$  obtener la ecuación diferencial (simplemente derivando  $\phi_t(\mathbf{u})$  con respecto a  $t$ .)

---

**Ejemplo.** Consideremos el siguiente sistema lineal desacoplado en  $\mathbb{R}^3$ , con tres ecuaciones diferenciales con tres funciones incógnitas.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ \dot{x}_3 &= -x_3\end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{1.17}$$

La solución general es:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= u_1 e^t \\ x_2(t) &= u_2 e^t \\ x_3(t) &= u_3 e^{-t}\end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\mathbf{x}(t) \stackrel{\text{not}}{=} e^{At} \mathbf{u}, \quad \text{donde} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

En la figura 5. se presenta el retrato fase de este sistema, El plano  $x_1x_2$  es llamado el *subespacio inestable* del sistema (1.17) y el eje  $x_3$  es llamado el *subespacio estable* del sistema (1.17). Las definiciones de subespacios estables e inestables de un sistema lineal se darán más adelante.

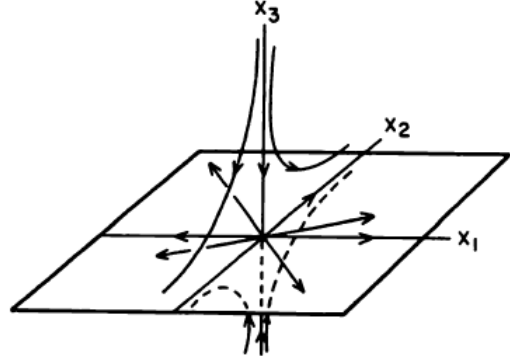


Figura 5.

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 1.4. Diagonalización.

La diagonalización de matrices es un concepto del álgebra lineal y tiene muchas aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y la física, en particular en el estudio de los sistemas dinámicos y consiste en transformar una matriz cuadrada en una forma diagonal mediante una matriz de cambio de base simplificando el cálculo de potencias de la matriz y la solución de sistemas de ecuaciones lineales asociados al problema y por tanto también, la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Es importante tener en cuenta que no todas las matrices son diagonalizables. Sin embargo, la diagonalización es una herramienta poderosa cuando es posible aplicarla. Se comienza entonces por presentar algunas definiciones y teoremas las cuales las podrán consultarse en [?].

Denotaremos por  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  al conjunto de todas matrices cuadradas de orden  $n$  con entradas reales y  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  al conjunto de todos operadores lineales de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.4.1.** Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Entonces:

(1) Se dice que  $A$  es una matriz diagonal si es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{not}}{=} \text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n].$$

(2) Se dice que la matriz  $A$  es semejante a la matriz  $B$ , si existe una matrix  $X \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , invertible y tal que  $X^{-1}AX = B$ .

(3) Se dice que  $A$  es una matriz diagonalizable, si existe una matriz diagonal  $D \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que  $A$  es semejante a  $D$ .

**Observación 1.4.1.** Si se considera la base canónica ordenada  $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$ , entonces, para cada transformación lineal  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  existe una única matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ .  $A$  es llamada la matriz de representación de  $T$  con respecto a la base canónica ordenada  $B$ . En general si  $A_1$  y  $A_2$  representan a  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  con respecto a las bases ordenadas  $B_1$  y  $B_2$  respectivamente, entonces  $A_1$  y  $A_2$  son matrices semejantes. Cabe resaltar que todas las definiciones, teoremas y propiedades sobre matrices  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  también son válidos para operadores lineales  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definición 1.4.2.** Sean  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

(1) Se dice que  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un valor propio o autovalor de la matriz  $A$ , si existen un  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  tal que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ .

(2) Si  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ , cualquier vector  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  es llamado un vector propio o autovector de  $A$  asociado a  $\lambda$  y el conjunto denotado por  $E_\lambda$ , y definido por  $E_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$  es llamado espacio propio de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda$ . La ecuación  $\det(A - \lambda I) = 0$  es llamada la ecuación característica de  $A$  con respecto a  $\lambda$ .

**Observación 1.4.2.** Los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independiente.

**Teorema 1.4.1.** Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es una matriz que tiene  $n$  valores propios distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Entonces

- (1) Cualquier conjunto de vectores propios  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  correspondientes a cada valor propio forma una base en  $\mathbb{R}^n$ .
- (2) Si  $A$  es diagonalizable, entonces la matriz diagonal  $D$  semejante a  $A$  es dada por  $D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  y  $P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n]$  es tal que  $P^{-1}AP = D$ .



(3) Si  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  es tal que la matriz  $A$  representa a  $T$  con respecto a la base canónica ordenada  $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , entonces la matriz diagonal  $D$  es la representación matricial de  $T$  con respecto a la base ordenada de vectores propios  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ .

Es claro que un sistema desacoplado de ecuaciones diferenciales cada ecuación se puede resolver independientemente entre sí, ya que ellas no están interconectadas, pues cada ecuación depende solo de su variable correspondiente y no está influenciada por las otras ecuaciones del sistema. En algunos casos, es posible transformar un sistema acoplado en uno desacoplado mediante ciertas manipulaciones matemáticas. Desafortunadamente, muy pocas veces un sistema lineal de ecuaciones diferenciales está en forma desacoplado. El siguiente ejemplo se muestra que la técnica algebraica de diagonalizar una matriz cuadrada es muy útil y permite reducir un sistema lineal a un sistema lineal desacoplado.

**Ejemplo.** Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 5x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - 4x_2\end{aligned}\tag{1.18}$$

dado en forma matricial por,

$$\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

Para transformar el sistema (1.18) a un sistema desacoplado, llamado también sistema en forma diagonal se hace un *cambio de coordenadas* lineal, para ello, se calcula los valores propios y sus respectivos vectores propios de la matriz  $B$ . La ecuación característica de  $B$  viene dada por:

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ -6 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (5 - \lambda)(-4 - \lambda) + 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0,\end{aligned}$$

por consiguiente,  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = -1$ , son los valores propios de  $B$  y  $E_{\lambda=2} = \text{gen}\{(1, -1)\}$ ;  $E_{\lambda=-1} = \text{gen}\{(-1, 2)\}$  son los respectivos espacios propios. Dado que los valores propios de la matriz  $B$  son reales y distintos, entonces la matriz  $B$  es diagonalizable, es decir,

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

con  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  invertible y  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Si se considera  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ , entonces

$$\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = P^{-1}B\mathbf{x} = P^{-1}BP\mathbf{y} = A\mathbf{y}.$$

El cambio de variable  $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ , permite obtener,

$$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

y

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2 \\ x_2 &= -y_1 + 2y_2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Reemplazando los valores de (1.18) en las derivadas de (1.19), y sustituyendo con los valores de (1.20), se obtiene el sistema de forma diagonal o desacoplado

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

que es equivalente al sistema (1.18). Es claro que si  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$  es la solución de la ecuación (1.21) con condición inicial  $\mathbf{y}(0) = (y_1(0), y_2(0)) = (v_1, v_2) = \mathbf{y}_0$ , entonces esta solución viene dada por:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= v_1 e^{2t} \\ y_2(t) &= v_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si se considera la ecuación (1.18) con condición inicial  $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (u_1, u_2)$ , entonces  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  dada en (1.22) es solución del problema de valor inicial considerado (1.18) y la relación entre las condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0 = (u_1, u_2)$  y  $\mathbf{y}_0 = (v_1, v_2)$  viene dada por:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 2x_1(0) + x_2(0) \\ y_2(0) &= x_1(0) + x_2(0) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= 2u_1 + u_2 \\ v_2 &= u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (2u_1 + u_2)e^{2t} \\ y_2(t) &= (u_1 + u_2)e^{-t} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (2u_1 + u_2)e^{2t} - (u_1 + u_2)e^{-t} \\ x_2(t) &= -(2u_1 + u_2)e^{2t} + 2(u_1 + u_2)e^{-t} \end{aligned} \quad (1.22)$$

**Observación 1.4.3.** Se puede ver claramente que:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \mathbf{y}_0, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

es la solución del sistema (1.21) con condición inicial  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ , y como  $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$  con  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ , entonces  $\mathbf{x}(0) = P\mathbf{y}(0)$ . Teniendo en cuenta que  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  entonces  $\mathbf{x}_0 = P\mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{y}_0 = P^{-1}\mathbf{x}_0$ , y por tanto la solución de (1.18) con la condición inicial  $\mathbf{x}_0$  es

$$\mathbf{x}(t) = P e^{At} P^{-1} \mathbf{x}_0, \quad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

En la figura 3. también muestra el retrato fase del sistema (1.21) en el plano  $y_1y_2$  del cual se puede generar el retrato fase del sistema original (1.18), simplemente trazando los nuevos ejes coordenados  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$  sobre el plano  $x_1x_2$  y dibujando las trayectorias  $y(t)$  en estas coordenadas. Así si se considera  $y_1 = 0$  como la recta  $L_1 : x_2 = 2x_1$  y  $y_2 = 0$  como la recta  $L_2 : x_2 = -x_1$ , se obtiene el retrato de fase del sistema (1.18) como se indica en la figura 6. ¿ Comparar con la figura 3?

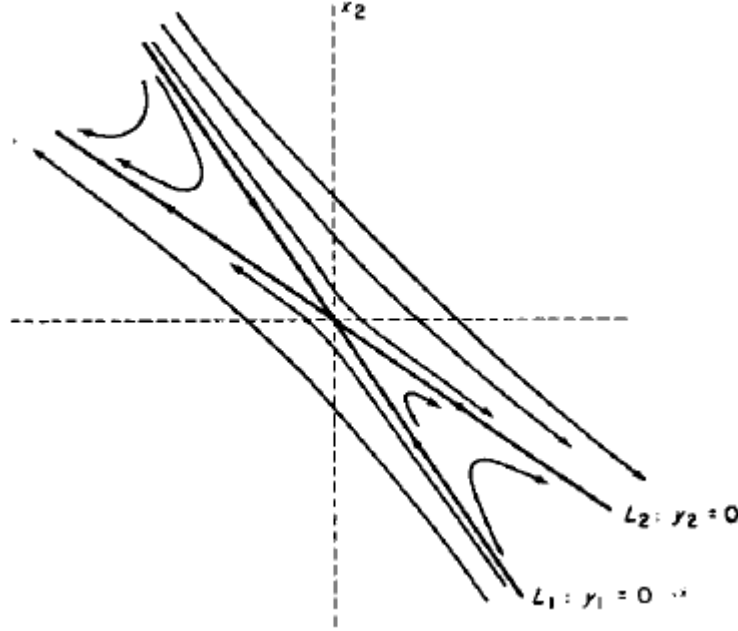


Figura 6.  $\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}.$

Si comparamos la solución (1.22) del problema de valor inicial (1.18) con su retrato fase, figura 6, vemos que el diagrama da instantáneamente una imagen cualitativa de las soluciones, mientras que las fórmulas transmiten muy poca información geométrica. De hecho, para muchos propósitos, es mejor olvidar el sistema original (1.18) y las soluciones correspondientes y trabajar completamente con el sistema “diagonalizado” (1.21), sus soluciones y su retrato fase.

**Teorema 1.4.2.** *Sea el problema de valor inicial*

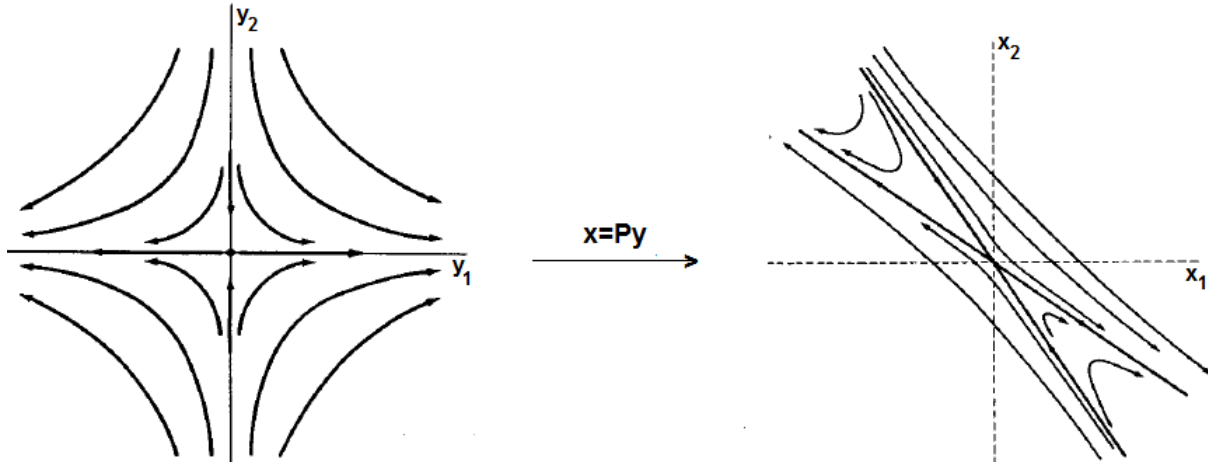
$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (1.23)$$

*Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es una matriz que tiene  $n$  valores propios distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Entonces la solución de (1.23) es*

$$\mathbf{x}(t) = P \operatorname{diag} [e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] P^{-1} \mathbf{x}_0$$

*con  $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$  donde cada  $\mathbf{v}_i$  es un vector propio correspondiente a  $\lambda_i$*

**Observación 1.4.4.** El retrato fase del sistema (1.18) (Figura 6), También se puede obtener del retrato de fase del sistema (1.21), Figura 3, aplicando la transformación lineal de coordenadas  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ .



**Observación 1.4.5.** Los subespacios propios  $E_{\lambda=2}$  y  $E_{\lambda=-1}$  generados por los vectores propios  $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$  y  $\mathbf{v}_2 = (-1, 2)$  de la matriz  $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$  respectivamente determinan los subespacios inestables y estables del sistema lineal (1.18).

Si se considera el sistema de ecuaciones diferenciales lineales (1.10) donde la matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tiene  $k$  valores propios negativos distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  y  $n - k$  valores propios positivos distintos  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ , y que además, el conjunto correspondiente de vectores propios viene dado por  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Entonces los subespacios estables e inestables del sistema lineal (1.10), se denotan por  $E^s$  y  $E^u$ , y son respectivamente  $E^s = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  y  $E^u = \text{gen}\{\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Si la matriz  $A$  tiene valores propios imaginarios puros, entonces también hay un subespacio denotado por  $E^c$  y llamado espacio central o centro. Los subespacios estable, inestable y central se definen para el caso general más adelante.

## 1.5. Operador Exponencial

El operador exponencial es una herramienta fundamental en el análisis de sistemas dinámicos, especialmente en este contexto de ecuaciones diferenciales lineales, y su utilidad se da en su capacidad para simplificar la resolución de este tipo de ecuaciones, proporcionando una forma elegante y compacta de expresar soluciones. El operador exponencial se vincula con el análisis de la estabilidad de sistemas dinámicos lineales que se determinan a partir del signo y forma de los valores propios de la matriz. En este capítulo se comienza con algunos conceptos básicos para la comprensión del operador exponencial.

**Definición 1.5.1.** Sea  $V$  un espacio lineal sobre  $\mathbb{R}$ , la función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada norma si

1.  $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ , para todo  $\mathbf{v} \in V$ ,
2.  $\|\mathbf{v}\| = 0$  si y sólo si  $\mathbf{v} = \mathbf{0}_{\mathbf{v}}$ ,
3.  $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$  para todo  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
4.  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ , para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .

La pareja  $(V, \|\cdot\|)$  es llamada espacio normado.

**Ejemplo.** Si se considera  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces:

1. Las siguientes funciones son normas en  $\mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

2. En espacio de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , que denotaremos por  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  la función definida por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \quad (\|f\| \leq \infty)$$

es una norma en  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

En adelante, y si no se dice lo contrario la norma que usará en  $\mathbb{R}^n$  es la norma  $\|\mathbf{x}\|_2$ , que por facilidad se denota por  $|\mathbf{x}|$ . Es importante resaltar que todas las normas que se puedan definir en  $\mathbb{R}^n$  son normas equivalentes.

**Ejercicio.** Probar que las funciones definidas como

1.  $\|T\| := \max_{|\mathbf{x}| \leq 1} |T(\mathbf{x})|, \quad T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .
2.  $\|A\| = \max_{|\mathbf{x}| \leq 1} |A\mathbf{x}|, \quad A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

Son normas en  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  y en  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  respectivamente, con  $|\mathbf{x}| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Teorema 1.5.1.** Sea  $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces

- (1)  $|T(\mathbf{x})| \leq \|T\| |\mathbf{x}|$ , para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- (2)  $\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$ ,

$$(3) \|T^k\| \leq \|T\|^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

En esta sección solo se prueba (1) los demás items quedan como **ejercicio**.

*Demostración.* Observemos que si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , entonces el resultado es trivial y la desigualdad  $|T(\mathbf{x})| \leq \|T\| |\mathbf{x}|$  es válida. Si se supone que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , entonces haciendo  $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$  se tiene,

$$|T(\mathbf{y})| = \left| T \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) \right| = \left| \frac{1}{|\mathbf{x}|} T(\mathbf{x}) \right| = \frac{1}{|\mathbf{x}|} |T(\mathbf{x})|$$

y como  $|T(\mathbf{y})| \leq \|T\|$ , se tiene la desigualdad deseada.  $\square$

**Ejercicio.** Probar

$$\|T\| = \max_{|\mathbf{x}|=1} |T(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{|T(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x}|}, \quad \text{para todo } T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

**Definición 1.5.2.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado y sea  $\{\mathbf{x}_n\}$  una sucesión en  $V$ , se dice que la sucesión converge en norma a  $\mathbf{x} \in V$ , si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $k \geq N$  se tiene que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| < \epsilon$ , y escribiremos  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ .

Ahora daremos los conceptos de convergencia absoluta y convergencia uniforme de sucesiones y series funcionales en el espacio de funciones  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , estos temas los pueden ver en [4].

**Definición 1.5.3.** Sea  $\{f_k\}$  una sucesión de funciones en  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Entonces,

- (1) La sucesión  $\{f_k\}$  converge “puntualmente” en  $\mathbb{R}$  si para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la sucesión numérica  $\{f_k(t)\}$  converge.
- (2) La sucesión converge absolutamente en  $\mathbb{R}$ , si para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la sucesión numérica  $\{f_k(t)\}$  converge absolutamente, es decir, para cada  $t \in \mathbb{R}$  la sucesión numérica  $\{|f_k(t)|\}$  converge.
- (3) La sucesión  $\{f_k\}$  converge uniformemente a la función  $f$  en  $\mathbb{R}$ , si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que todo  $k \geq N$  y todo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene  $|f_k(t) - f(t)| < \epsilon$ , y escribiremos  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ .

**Definición 1.5.4.** Sea  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  una serie de funciones en  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Entonces,

- (1) La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  converge “puntualmente” en  $\mathbb{R}$  si para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la serie numérica  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$  converge.

(2) La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  converge absolutamente en  $\mathbb{R}$ , si para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la serie numérica  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$  converge absolutamente, es decir, para cada  $t \in \mathbb{R}$  la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(t)|$  converge.

(3) La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  converge uniformemente a la función  $F$  en  $\mathbb{R}$ , si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que todo  $k \geq N$  y todo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene  $\left| \sum_{j=1}^k f_j(t) - F(t) \right| < \epsilon$ , y escribiremos  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = F$ .

**Observación 1.5.1.** Convergencia absoluta implica convergencia puntual. Si una sucesión o serie converge pero no converge absolutamente, se dice que converge condicionalmente.

**Ejercicio.** consulte y presente la definición de sucesiones y series de Cauchy y pruebe que toda sucesión o serie convergente es de Cauchy. En particular si se considera el espacio de las funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ , se puede probar que toda sucesión de Cauchy es convergente. Los espacios donde toda sucesión de Cauchy es convergente, son llamados espacios completos.

**Observación 1.5.2.** En el espacio de funciones con la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ , en particular en el espacio de las funciones lineales con la norma definida anteriormente, se tiene que la convergencia uniforme coincide con la convergencia en norma.

Ahora se enuncian dos teoremas que establecen las condiciones para la convergencia uniforme de una serie de funciones, uno de ellos plantea las condiciones necesarias para la convergencia uniforme y el otro las condiciones suficientes para la convergencia uniforme y absoluta de una serie de funciones, llamado también el criterio de Weierstrass. Las respectivas pruebas se pueden ver en [4].

**Teorema 1.5.2.** Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$  una serie de funciones en  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Si la serie converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ , entonces la sucesión de sus términos  $\{f_k\}$  converge uniformemente a la función 0 en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.5.3. (Criterio de Weierstrass).** Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  una serie de funciones en  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , si existe una serie numérica  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  convergente tal que  $|f_k(t)| \leq a_k$ , para todo  $k \geq N$  y todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces la serie funcional  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  converge uniformemente y absolutamente en  $\mathbb{R}$ .

Para cada  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  definimos la serie funcional  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  en  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  donde  $f_k(t) = \frac{T^k}{k!} t^k$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Probaremos que dicha serie converge uniformemente y absolutamente en todo intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.5.4.** *Para cada  $T \in L(\mathbb{R}^n)$  la serie funcional  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$  converge uniformemente y absoluta en cada intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ .*

**Demostración.** Sea  $I$  un intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ . Supongamos que  $\|T\| = a$  y  $t_0 > 0$  tal que  $\forall t \in I$ ,  $|t| \leq t_0$ , tenemos entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T^k t^k}{k!} \right\| &\leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \quad (\text{¿por qué?}) \\ &\leq \frac{a^k t_0^k}{k!}. \end{aligned}$$

Como la serie numérica  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!}$  converge y además  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{at_0}$ . Entonces por criterio de Weierstrass, la serie funcional  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$  converge uniformemente en  $I$ . Es decir se probó que la serie funcional  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$  converge uniformemente y absolutamente en cada intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ .

Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función suma de la serie funcional  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$ , esto es,

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En particular esta serie converge absolutamente para  $t = 1$ , es decir  $\phi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$  converge absolutamente y permite definir la exponencial de  $T$  como la suma de dicha serie absolutamente convergente.

**Definición 1.5.5.** *Para cada  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , se denota por  $e^T$  a la exponencial de  $T$ , la cuál se define:*

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

**Ejercicio.** Sea  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Entonces



$$1. e^T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

$$2. \|e^T\| \leq e^{\|T\|}$$

La definición y comprensión de la matriz exponencial son esencialmente importantes para abordar de manera efectiva sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Su aplicación proporciona un marco matemático coherente y poderoso que simplifica la solución de sistemas complejos, ofreciendo un método para presentar de forma explícita la solución de sistema lineal con condiciones iniciales. Si se considera el sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  y que  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  representa la matriz  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  con respecto a la base canónica ordenada de  $\mathbb{R}^n$ , entonces se puede definir el exponencial de la matriz  $A$  denotado por  $e^{At}$ .

**Definición 1.5.6.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , definimos la matriz exponencial

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \text{ para cada } t \in \mathbb{R}, \quad e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

**Observación 1.5.3.** Para cada  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  se tiene que  $e^A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  y  $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ . La matriz exponencial  $e^{At}$  se puede calcular en términos de los valores propios y vectores propios de  $A$ .

A continuación se presentan algunas propiedades básicas de la función lineal  $e^T$  para facilitar su cálculo o el cálculo de la matriz  $e^A$ .

**Teorema 1.5.5.** Sean  $P, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  y  $S = PTP^{-1}$ , entonces  $e^S = Pe^TP^{-1}$ .

**Demostración.** Por definición de  $e^S$ , tenemos

$$\begin{aligned} e^S &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{S^k}{k!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1} \quad (\text{¿por qué?}) \\ &= Pe^TP^{-1}. \end{aligned}$$

**Corolario 1.5.6.** Si  $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ , entonces  $e^{At} = P \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] P^{-1}$ .

**Teorema 1.5.7.** Sean  $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $ST = TS$ , entonces  $e^{S+T} = e^S e^T$ .

**Demostración.** Si  $ST = TS$ , el lector puede **verificar** que aplicando la fórmula binomial se tiene:

$$(S + T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j! k!}.$$

Por tanto

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S+T)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j! k!}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^S e^T. \quad \blacksquare$$

En  $(*)$  se utilizó el hecho de que el producto de dos series absolutamente convergentes es una serie absolutamente convergente que viene dada por su producto de Cauchy, el cual afirma lo siguiente:

**Producto de Cauchy.** Sean  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  dos series, se define el producto cauchy como

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \text{donde} \quad c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k.$$

La sucesión  $\{c_n\}$  se conoce como la *convolución discreta* de las sucesiones  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ .

**Teorema 1.5.8. Teorema de Mertens.** Si la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge hacia  $a$  y la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge absolutamente hacia  $b$ , entonces el producto de Cauchy de ellas converge hacia  $ab$ . Si las dos series convergen absolutamente, su producto de Cauchy converge uniformemente.

Del Teorema (1.5.7) se siguen los siguientes o corolarios:

**Corolario 1.5.9.** Sea  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , la inversa de la función lineal  $e^T$  es dada por  $(e^T)^{-1} = e^{-T}$ .

**Corolario 1.5.10.** Si  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  entonces  $e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$

**Observación 1.5.4.** Si  $a = 0$  del corolario anterior se tiene que  $e^A$  es simplemente una matriz de rotación que produce el efecto de rotar un vector un ángulo de  $b$  radianes.

**Corolario 1.5.11.** Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$  entonces  $e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Viejo Wilmer las demostaciones de las tres corolarios anteriores, están en tus notas.**

Se puede ahora calcular la matriz  $e^{At}$  para cualquier matriz  $A$  de  $2 \times 2$ , mas adelante se muestra que existe una matriz invertible  $P$  de  $2 \times 2$  (cuya las columnas constan de vectores propios “generalizados” de  $A$ ) tal que:

$$B = P^{-1}AP,$$

donde la matriz  $B$  tiene las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
(1) \quad B &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, & \text{entonces} \quad e^{Bt} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}. \\
(2) \quad B &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, & \text{entonces} \quad e^{Bt} &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
(3) \quad B &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, & \text{entonces} \quad e^{Bt} &= e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Por el Teorema (1.5.7), la matriz  $e^{At}$  es:

$$e^{At} = P e^{Bt} P^{-1}$$

Más adelante se podrá verificar que encontrar la matriz  $e^{At}$  es equivalente a resolver el sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ .

## 1.6. Teorema Fundamental para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

El Teorema Fundamental de los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales es fundamental en el escenario de los sistemas dinámicos, control y modelado matemático, el teorema establece propiedades importantes relacionadas con la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales como: la existencia y unicidad de Soluciones, un aspecto de suma importancia en el análisis de sistemas dinámicos permitiendo la predicción del comportamiento futuro del sistema; la estabilidad y comportamiento Asintótico, pues la existencia de soluciones únicas es esencial para comprender cómo evolucionan los estados del sistema a medida que el tiempo avanza; la linealidad y superposición, lo que significa que si tienes una combinación lineal de soluciones, también es una solución.

En esta sección se demuestra el teorema fundamental de los sistemas de ecuaciones diferenciales, el cual garantiza las condiciones suficientes para que el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \text{ con } A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

tenga solución única para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En este caso  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  y la solución viene dada por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0. \tag{1.25}$$

**Observación 1.6.1.** La solución  $x(t) = e^{at}x_0$  de la ecuación elemental de primer orden  $\dot{x} = ax$  con condición inicial  $x_0$  es similar a la solución (1.25).

La matriz exponencial y su derivada desempeñan un papel crucial en la demostración del teorema de existencia y unicidad de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Se

comienza entonces, presentando el cálculo de la derivada de la función exponencial  $e^{At}$ , usando el hecho básico del análisis matemático que se refiere al intercambio del orden de los límites cuando hay convergencia es uniforme.

**Lema 1.6.1.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , entonces

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

**Demostración.** Como  $A$  conmuta con si misma y por definición de derivada, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \left( \frac{e^{Ah} - 1}{h} \right) = e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - 1}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( A + \frac{A^2 h}{2!} + \frac{A^3 h^2}{3!} + \cdots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} e^{At} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \left( A + \frac{A^2 h}{2!} + \frac{A^3 h^2}{3!} + \cdots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) \\ &= Ae^{At}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(\*) debido a que la serie que define  $e^{Ah}$  converge uniformemente para  $|h| \leq 1$ , se puede intercambiar los dos límites.

**Teorema 1.6.2** (Teorema Fundamental para sistemas lineales). Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Entonces para cada  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.26}$$

tiene solución única dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0.$$

*Demostración.* Del lema (1.6.1), se sigue que si  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$  entonces,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = Ae^{At}\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

es decir,  $\mathbf{x}(t)$  satisface la ecuación diferencial en (1.26). Además,  $\mathbf{x}(0) = I\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ , por lo tanto,  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$  es una solución del problema de valor inicial (1.26).

Para la unicidad, se supone que  $\mathbf{x}(t)$  es cualquier solución de problema de valor inicial (1.26) y se considera  $\mathbf{y}(t) = e^{-At}\mathbf{x}(t)$ . Derivando y teniendo en cuenta que  $\mathbf{x}(t)$  satisface (1.26), se sigue:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= -Ae^{-At}\mathbf{x}(t) + e^{-At}\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= -Ae^{-At}\mathbf{x}(t) + Ae^{-At}\mathbf{x}(t) \\ &= 0 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

lo que implica que  $\mathbf{y}(t)$  es una función constante y si se evalúa en  $t = 0$ , se tiene claramente que  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Por lo tanto, cualquier solución del valor inicial (1.26) viene dado por  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ . Esto completa la demostración.  $\square$

**Observación 1.6.2.** El flujo del sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  viene dado por

$$\phi_t(\mathbf{x}) = e^{At}\mathbf{x}_0.$$

**Ejemplo.** Resolver el problema del valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

con  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y graficar la curva solución en  $\mathbb{R}^2$  (retrato fase).

**Solución.** Dado que la matriz  $A$  tiene la forma  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  entonces el corolario (1.5.10), permite concluir que:

$$e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución del P.V.I viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}_0 = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Ejercicio.** Verificar que  $|\mathbf{x}(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} = e^{-t}$  y  $\theta(t) = \arctan\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right) = t$ .

Por lo tanto, la curva de solución gira en espiral hacia el origen como se muestra en la siguiente figura.

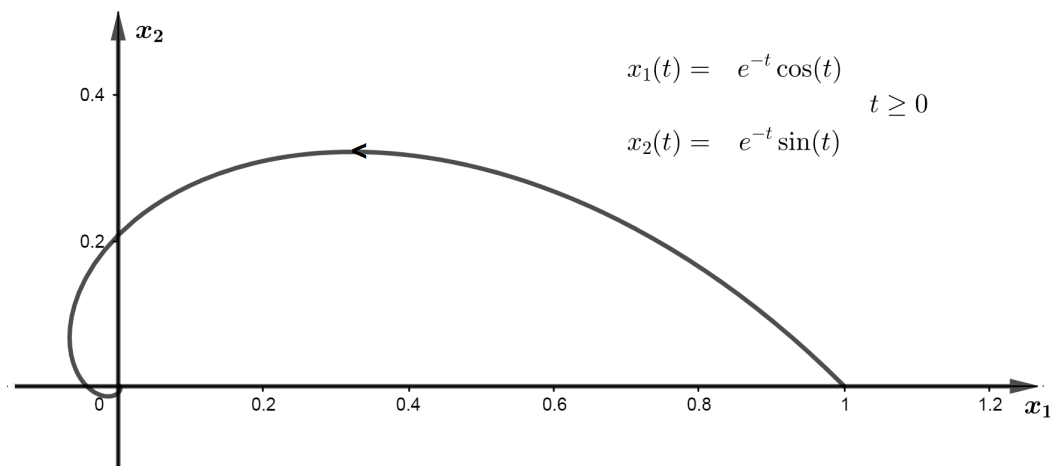


Figura. Solución al P.V.I  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## 1.7. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales en $\mathbb{R}^2$

Los retratos de fase son herramientas visuales que se utilizan para entender el comportamiento cualitativo de soluciones de sistemas dinámicos, incluyendo ecuaciones diferenciales. En este contexto se estudia y analiza los diversos y posibles retratos de fase para el sistema lineal de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (1.27)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  y  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . En primer lugar, se describe los retrato fase para el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x} \quad (1.28)$$

donde la matriz  $B = P^{-1}AP$  tiene una de las formas dadas en (1.24). El retrato de fase para el sistema lineal (1.27) se obtiene del retrato de fase del sistema lineal (1.28) bajo la transformación lineal de coordenadas  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  como en la figura de la observación (1.4.4).

Si se consideran las matrices,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

se deduce del teorema fundamental (1.6.2) y de la forma del matriz  $e^{Bt}$  dada en (1.24) que la solución del problema de valor inicial (1.28) con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  viene dado respectivamente por:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_0, \quad \text{ó} \quad \mathbf{x}(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \mathbf{x}_0.$$

Se enumeran los diversos retratos de fase que resultan de estas soluciones agrupadas según su tipo topológico con una clasificación más fina de fuentes y sumideros en varios tipos de nodos estables e inestables y focos.

**Caso I.**  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , con  $\lambda < 0 < \mu$ .

El retrato de fase del sistema lineal (1.28) se ve en la Figura 1, como en ejemplo (1.15). Se dice que el sistema (1.28) tiene un punto *silla* en el origen. Si  $\mu < 0 < \lambda$ , las flechas en la Figura 1 tienen direcciones opuestas.

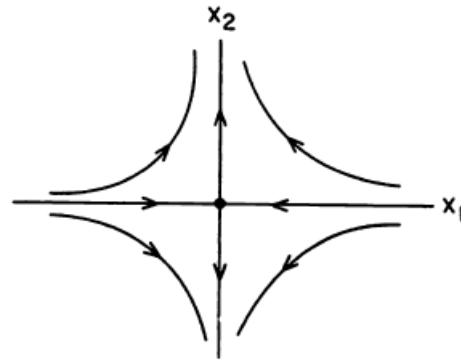


Figura 1. Silla en el origen

Es claro que siempre que  $A$  tenga dos valores propios reales de signos opuestos  $\lambda < 0 < \mu$ , el retrato de fase para el sistema lineal (1.27) es linealmente equivalente al retrato de fase mostrado en la Figura 1; es decir, se obtiene de la Figura 1 mediante una transformación lineal de coordenadas, y los subespacios estables y inestables de (1.27) están determinados por los vectores propios de  $A$  como en el ejemplo (1.15). Las cuatro trayectorias no nulas que se acercan o se alejan del punto de equilibrio sobre el origen cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  se llaman *separatrices* del sistema.

**Caso II.**  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ , con  $\lambda \leq \mu < 0$  ó  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , con  $\lambda < 0$ .

Los retratos de fase para el sistema lineal (1.28) en estos casos se ven en Figura 2. El origen en cada uno de estos casos se denomina *nodo estable*

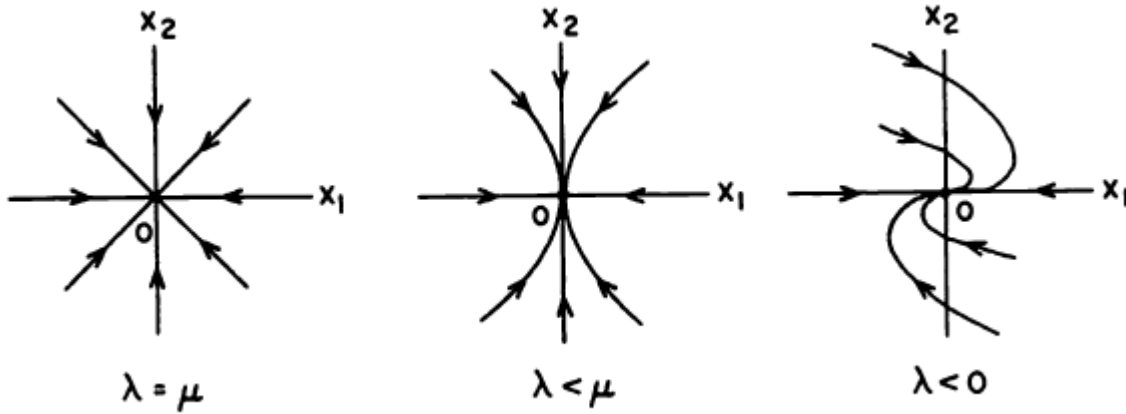


Figura 2. Nodo estable sobre el origen.

En el primer caso cuando  $\lambda = \mu$  el origen se llama *nodo propio* y un *nodo impropio* en los otros dos casos. Si en este caso II, se considera  $\lambda \geq \mu > 0$  ó  $\lambda > 0$ , entonces las flechas en la Figura 2 se invierten y el origen se denomina *nodo inestable*. Siempre que los dos valores propios de una matriz  $A$  sean negativos, el retrato de fase del sistema lineal (1.27) es linealmente equivalente a uno de los retratos de fase se muestra en la Figura 2, y el signo de los valores propios de una matriz  $A$  determinan la estabilidad del nodo, el cual es *estable* si  $\lambda \leq \mu < 0$  e *inestable* si  $\lambda \geq \mu > 0$ .

**Caso III.**  $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , con  $a < 0$ .

El retrato de fase para el sistema lineal (1.28) se ve en la Figura 3. En este caso, el origen se denomina *foco estable* en cada uno de los casos cuando  $b > 0$  o  $b < 0$ .

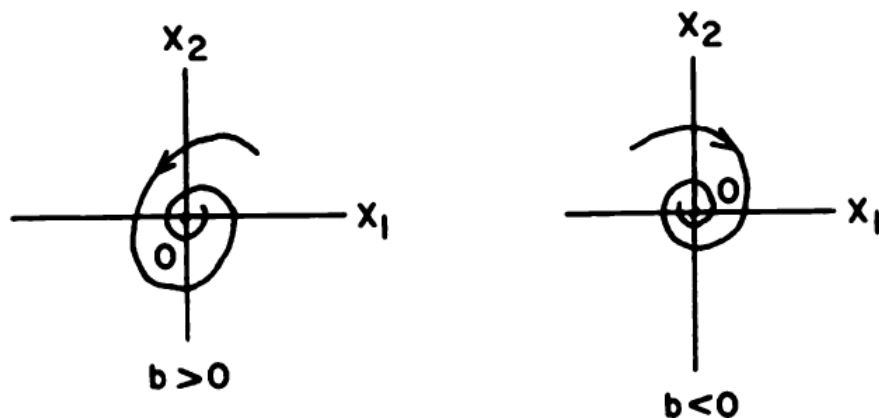


Figura 3. Foco estable en el origen.

Por otro lado, si  $a > 0$ , las trayectorias se alejan del origen en forma de espiral cuando  $t$  crece, y en este caso el origen se llama *foco inestable*. Siempre que  $A$  tenga un par de valores propios conjugados complejos con parte real distinta de cero, dados por  $a \pm i$  con  $a < 0$ , los retratos de fase para el sistema (1.27) son linealmente equivalente a uno de los retratos de fase dados en la Figura 3. Observe que las trayectorias en este caso no se acercan origen por rectas, es decir siempre hay un ángulo  $\theta(t)$  entre el vector  $\mathbf{x}(t)$  para cada  $t$  y el eje  $x_1$  no se aproxima a un valor constante  $\theta_0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ , si no que  $|\theta(t)| \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Caso IV.**  $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ .

El retrato de fase para el sistema lineal (1.28) se ve en la Figura 4. En este caso se dice que el sistema (1.28) tiene un *centro* en el origen.

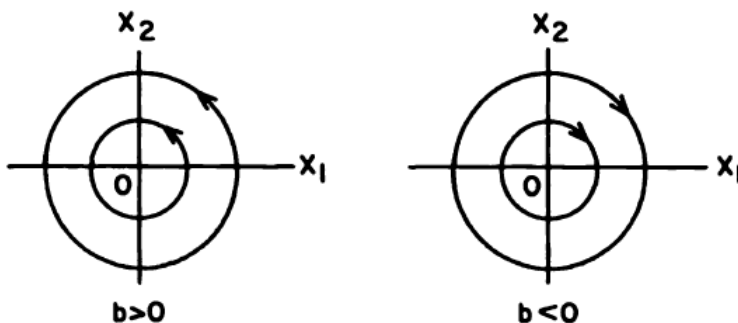


Figura 4. Centro en el origen.

Siempre que una matriz  $A$  tenga un par de valores propios complejos conjugados o imaginarios puros,  $\pm bi$ , el retrato de fase del sistema lineal (1.27) es linealmente equivalente a uno de los retratos de fase que se muestran en la Figura 4. Las trayectorias o



curvas de solución en este caso son círculos tales que  $|\mathbf{x}(t)|$  es constante. En general, las trayectorias del sistema (1.27) serán líneas que se encuentran en elipses y la solución  $\mathbf{x}(t)$  de (1.27) satisficará  $m < |\mathbf{x}(t)| < M$  para todos  $t \in \mathbb{R}$ . El ángulo  $\theta(t)$  también satisface  $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Observación 1.7.1.** Si uno (o ambos) de los valores propios de  $A$  son cero, es decir, si  $\det A = 0$ , el origen se llama punto de equilibrio degenerado de (1.27).

**Problema 4. (página 27).** Si  $\det A = 0$ , entonces el origen es un punto crítico degenerado de  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ . Determine la solución y los retratos de fase correspondientes para cada sistema lineal con

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo** (Sistema lineal con centro en el origen). Sea el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** El lector puede verificar fácilmente que los valores propios de  $A$  son  $\lambda = \pm 2i$ , por tanto el sistema tiene un centro en el origen, y puede determinar también que el vector propio correspondiente al valor propio  $\lambda = 2i$ , es el vector  $\mathbf{v} = (0, 1) + (2, 0)i$ , y que la matriz  $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  con  $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , reduce la matriz  $A$  a la matriz

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , según lo determinado en esta sección, viene dado por

$$\mathbf{x}(t) = P \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \cos 2t & -2 \sin 2t \\ \frac{1}{2} \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0,$$

ó equivalentemente

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos 2t - 2c_2 \sin 2t \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t \end{aligned}$$

si  $\mathbf{x}_0 = (c_1, c_2)$ .

Se puede verificar también que las soluciones satisfacen,

$$(x_1(t))^2 + 4(x_2(t))^2 = c_1^2 + 4c_2^2,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; es decir, las trayectorias de este sistema se encuentran en elipses como se muestra en la Figura 5.

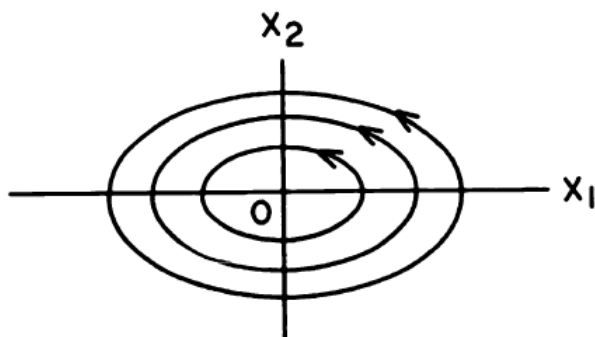


Figura 5. Centro en el origen.

**Definición 1.7.1.** Se dice que el sistema lineal (1.27) tiene una silla, un nodo, un foco o un centro en el origen si la matriz  $A$  es similar a una de las matrices  $B$  en los casos I, II, III ó IV respectivamente, es decir, si su retrato de fase es linealmente equivalente a uno de los retratos de fase en las Figuras 1, 2, 3 ó 4 respectivamente.

**Observación 1.7.2.** Si se considera las matrices semejantes  $A$  y  $B$ , entonces:

1. Si la matriz  $A$  es similar a la matriz  $B$ , es decir, si existe una matriz no singular  $P$  tal que  $P^{-1}AP = B$ , entonces el sistema (1.27) se transforma en el sistema (1.28) mediante la transformación lineal de coordenadas  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ .
2. Si  $B$  tiene la forma III, entonces el retrato de fase para el sistema (1.28) consiste en un movimiento en sentido antihorario cuando  $b > 0$  o un movimiento horario cuando  $b < 0$ , en círculos si  $a = 0$  y espirales cuando  $a \neq 0$ .
3. La dirección de rotación de trayectorias en los retratos de fase para los sistemas (1.27) y (1.28) es el mismo si  $\det P > 0$ , en este caso se dice que  $P$  preserva la orientación) y será opuesto si  $\det P < 0$ , es decir,  $P$  es una inversión de la orientación.
4. En cualquiera caso, los dos sistemas (1.27) y (1.28) son topológicamente equivalentes, definición que se dará más adelante.

El siguiente teorema presenta un metodo muy sencillo para determinar si el sistema lineal (1.27), tiene una silla, nodo, foco o centro en el origen cuando el  $\det A \neq 0$ . Es claro que si  $\det A \neq 0$  entonces el sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene una única solución  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , es decir, el origen es el único punto de equilibrio del sistema lineal (1.27). Si el origen es un foco o un centro, el signo de  $\dot{x}_2$  que denotaremos por  $\sigma$  cuando  $x_2 = 0$  y para pequeños valores de  $x_1 > 0$ , se puede utilizar para determinar si el movimiento de las trayectorias, en sentido antihorario cuando  $\sigma > 0$  o en el sentido horario si  $\sigma < 0$ .

**Teorema 1.7.1.** *Si se considera el sistema lineal*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (1.29)$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $\delta = \det A$  y  $\tau = \text{tr } A$ . Entonces,

- (a) Si  $\delta < 0$ , entonces el sistema (1.29) tiene un punto de silla en el origen.
- (b) Si  $\delta > 0$  y  $\tau^2 - 4\delta \geq 0$  entonces el sistema (1.29) tiene un nodo en el origen, el cual es estable si  $\tau < 0$  e inestable si  $\tau > 0$ .
- (c) Si  $\delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\delta < 0$ , y  $\tau \neq 0$ , entonces (1.29) tiene un foco en el origen, el cual es estable si  $\tau < 0$  e inestable si  $\tau > 0$ .
- (d) Si  $\delta > 0$  y  $\tau = 0$ , entonces (1.29) tiene un centro en el origen.

Note que en el caso (b), se tiene que  $\tau^2 \geq 4|\delta| > 0$ ; es decir  $\tau \neq 0$ .

*Demostración.* Fácilmente se puede verificar que la ecuación característica de una matriz  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  es:

$$\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0.$$

Dado que  $\delta = \det A$  y  $\tau = \text{tr } A$ , entonces los valores propios de la matriz  $A$  vienen dados por:

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}.$$

- (a) Si  $\delta < 0$ , entonces hay dos valores propios de signos opuestos.
- (b) Si  $\delta > 0$  y  $\tau^2 - 4\delta \geq 0$  entonces existen dos valores propios del mismo signo que  $\tau$ .
- (c) Si  $\delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\delta < 0$ , y  $\tau \neq 0$ , entonces existen dos valores propios complejos conjugados, esto es,  $\lambda = a \pm bi$ . Demostraremos en la siguiente sección que la matriz  $A$  es semejante a la matriz  $B$  caso III, con  $a = \tau/2$ .
- (d) Si  $\delta > 0$  y  $\tau = 0$ , entonces hay dos valores propios complejos imaginarios puros conjugados. Así, los casos (a), (b), (c) y (d) corresponden a los Casos I, II, III y IV tenemos una silla, nodo, foco o centro respectivamente.  $\square$

**Definición 1.7.2.** *El nodo estable o foco de (1.27) se llama sumidero del sistema lineal y un nodo o foco inestable de (1.27) se llama fuente del sistema lineal.*

Los resultados anteriores se pueden resumir en un “diagrama de bifurcación” que se muestra en la Figura 6, que separa el plano  $(\text{tr } A - \det A)$  en tres partes en las que las soluciones del sistema lineal (1.27) tienen la misma “estructura cualitativa” un concepto se definirá más adelante. Al describir el comportamiento topológico o estructura cualitativa del conjunto de soluciones de un sistema lineal, no se distingue entre nodos y focos, pero sí la estabilidad de ellos. Hay ocho tipos topológicos diferentes de comportamiento del sistema lineal (1.27); si  $\det A \neq 0$ , el origen es una fuente, sumidero, centro, o silla y si  $\det A = 0$ , todo dependerá del signo de la traza  $\text{tr } A$ .

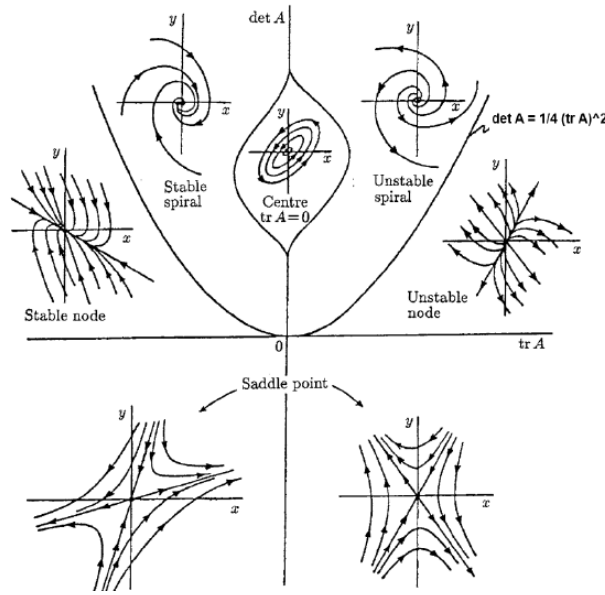


Figura 6. Diagrama de bifurcación  $\text{tr } A$  vs  $\det A$

## 1.8. Valores propios complejos

Si se considera el sistema (1.27) con  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  la cual tiene valores propios complejos, entonces es claro que los esos valores propios viene por pares de complejos conjugados.

**Ejercicio.** Si  $\lambda$  es un valor propio complejo de  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , probar que  $\bar{\lambda}$  también es un valor propio de  $A$ , además si  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  es un vector propio correspondiente a  $\lambda$ , entonces  $\bar{\mathbf{v}}$  también es un vector correspondiente a  $\bar{\lambda}$ .

El siguiente teorema del álgebra lineal permite resolver el sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  cuando  $A \in \mathcal{M}_{2n \times 2n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  tiene  $2n$  valores propios complejos distintos. La demsotración se puede verse en Small.

**Teorema.** Si  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  tiene  $2n$  valores propios complejos distintos  $\lambda_j = a_j + ib_j$  y  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$  y los correspondientes vectores propios complejos  $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$  y  $\bar{\mathbf{w}}_j = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Entonces  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n\}$  es una base para  $\mathbb{R}^{2n}$ , la matriz  $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n \ \mathbf{u}_n]$  es invertible y

$$P^{-1}AP = \text{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

donde  $\text{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$  son bloques de  $2 \times 2$  a lo largo de la diagonal.

**Observación.** Si en lugar de la matriz  $P$  usamos la matriz invertible  $Q = [ \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n \quad \mathbf{v}_n ]$  entonces

$$Q^{-1}AQ = \text{diag} \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix}$$

Del teorema anterior y del teorema fundamental de existencia y unicidad para sistemas lineales obtenemos la siguiente corolario.

**Corolario 1.8.1.** Si  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  tiene  $2n$  valores propios complejos distintos  $\lambda_j = a_j + ib_j$  y  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$  y los correspondientes vectores propios complejos  $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$  y  $\bar{\mathbf{w}}_j = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Entonces la solución del problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.30)$$

es dado por

$$\mathbf{x}(t) = P \text{diag} e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0$$

Note que

$$R = \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

representa una rotación de  $b$  radianes.

**Ejemplo.** Resuelva el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solución.** Es claro que  $A$  una matriz por bloques; además, por propiedades de determinantes se sigue que los valores propios de  $A$  son los números complejos  $\lambda_1 = 1 + i$  y  $\lambda_2 = 2 + i$  con sus conjugados y los vectores propios correspondientes son  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1 = (i, 1, 0, 0)$  y  $\mathbf{z}_2 = \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1 + i, 1)$ . Entonces

$$P = [ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{u}_2 ] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solución del problema de valor inicial es dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= P \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t & 0 & 0 \\ e^t \sin t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ 0 & 0 & -e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t \end{pmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t & 0 & 0 \\ e^t \sin t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} (\cos t + \sin t) & -2e^{2t} \sin t \\ 0 & 0 & 2e^{2t} \sin t & e^{2t} (\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \mathbf{x}_0\end{aligned}$$

En el caso en que  $A$  tenga valores propios tanto reales como complejos y sean distintos, se tiene el siguiente resultado: Si  $A$  tiene valores propios reales distintos  $\lambda_j$  con sus correspondientes vectores propios  $\mathbf{v}_j, j = 1, \dots, k$  y valores propios complejos distintos  $\lambda_j = a_j + ib_j$  y  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$  y sus correspondientes vectores propios  $\mathbf{z}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$  y  $\bar{\mathbf{z}}_j = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j, j = k+1, \dots, n$  entonces la matriz

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_k \quad \mathbf{v}_{k+1} \quad \mathbf{u}_{k+1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_n \quad \mathbf{u}_n]$$

es invertible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_k, B_{k+1}, \dots, B_n]$$

donde cada  $B_j$  son bloques de  $2 \times 2$ :  $B_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}; j = k+1, \dots, n$ .

**Ejemplo.** Resuelva el problema de valor inicial con

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

**Solución.** Se puede verificar con calculos sencillos que los valores propios de la matriz  $A$  son  $\lambda_1 = -3$  y  $\lambda_2 = 2+i$  y su conjugado  $\bar{\lambda}_2 = 2-i$ , y sus vectores propios correspondientes son  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{z}_2 = \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2 = (0, 1+i, 1)$  y  $\bar{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{u}_2 - i\mathbf{v}_2 = (0, 1-i, 1)$ . Entonces

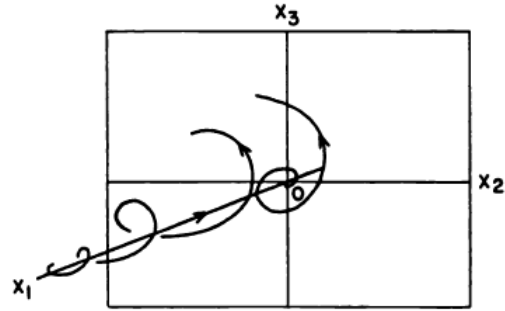
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Dado que  $A = PBP^{-1}$ , entonces la solución del problema de valor inicial viene dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{At}\mathbf{x}_0 = Pe^{Bt}P^{-1}\mathbf{x}_0 = P \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ 0 & e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & (\cos t)e^{2t} + (\sin t)e^{2t} & -2(\sin t)e^{2t} \\ 0 & (\sin t)e^{2t} & (\cos t)e^{2t} - (\sin t)e^{2t} \end{pmatrix} \mathbf{x}_0\end{aligned}$$

El subespacio estable  $E^s$  es el eje  $x_1$  y el subespacio inestable  $E^u$  es el plano  $x_2, x_3$ . En la figura se muestra el retrato de fase. Recordemos que si  $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ , entonces con el cambio de variables  $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  se obtiene  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , y como el  $\det(P) = 1 > 0$ , entonces los retratos de fase en los espacios  $y_1y_2y_3$  y  $x_1x_2x_3$  tienen la misma orientación.



## 1.9. Valores Propios Múltiples

Hasta el momento se ha mostrado que el teorema fundamental para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales garantiza que la solución del problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1.31)$$

viene dada por  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ . Se ha estudiado también las estrategias de como encontrar  $e^{At}$  cuando  $A$  tiene valores propios diferentes, ahora se estudiará algunas técnicas para hallar  $e^{At}$  y por tanto la solución del sistema lineal (1.31), cuando  $A$  tiene valores propios repetidos.

**Definición 1.9.1.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $\lambda$  un valor propio de la matriz  $A$  de multiplicidad algebraica  $m \leq n$ . Entonces para  $k = 1, \dots, m$ , cualquier solución  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  distinta de cero de la ecuación,

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = 0,$$

se llama vector propio generalizado de  $A$ .

**Definición 1.9.2.** Se dice que una matriz  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es nilpotente de orden  $k$  si  $N^{k-1} \neq 0$  y  $N^k = 0$ .

**Teorema 1.9.1.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  con valores propios reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  repetidos según su multiplicidad algebraica. Entonces, existe una base de vectores propios generalizados de  $\mathbb{R}^n$ , y si  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  es cualquier base de vectores propios generalizados de  $\mathbb{R}^n$ , la matriz  $P = [\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$  es invertible,

$$A = S + N,$$

donde

$$P^{-1}SP = \text{diag}[\lambda_j],$$

la matriz  $N = A - S$  es nilpotente de orden  $k \leq n$ ,  $S$  y  $N$  conmutan, es decir,  $SN = NS$ .

La demostración de este teorema se encuentra en el Apéndice Smale.

Este teorema, las proposiciones vistas sobre operador exponencial y el Teorema fundamental para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales permiten enunciar el siguiente corolario.

**Corolario 1.9.2.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  con valores propios reales  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  repetidos según su multiplicidad algebraica. Entonces la solución del problema de valor inicial (1.31) viene dada por:

$$\mathbf{x}(t) = P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1} \left[ I + Nt + \dots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right] \mathbf{x}_0$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}_0 = e^{(S+N)t} \mathbf{x}_0 = e^{St} e^{Nt} \mathbf{x}_0 \quad \text{con} \quad S = P \text{diag}[\lambda_j] P^{-1} \\ &= P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1} \left[ I + Nt + \dots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right] \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Si  $\lambda$  es un valor propio de multiplicidad  $n$  de la matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ , entonces los resultados anteriores son fáciles de aplicar ya que en este caso

$$P^{-1}SP = \text{diag}[\lambda] \Rightarrow S = P \text{diag}[\lambda] P^{-1} = P\lambda I P^{-1} = \text{diag}[\lambda].$$

Es decir,  $S = \text{diag}[\lambda]$  con respecto a la base usual para  $\mathbb{R}^n$  y  $N = A - S$  es nilpotente de orden  $k$  y La solución al problema del valor inicial de (1.31) con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \left[ I + Nt + \dots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right] \mathbf{x}_0$$

**Ejemplo.** Sea el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fácilmente se puede verificar que  $\lambda = 2$  es un valor propio de multiplicidad algebraica 2, y geométrica 1. Usando el resultado inmediatamente anterior,

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad N = A - S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$



Dado que  $N^2 = 0$ ,  $N$  nilpotente de orden 2, entonces la solución del problema de valor inicial con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  es dado por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 = e^{2t} [I + Nt] \mathbf{x}_0 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0.$$

**Ejemplo.** Sea el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar fácilmente que  $\lambda = 1$  es un valor propio de multiplicidad algebraica 4, por tanto  $S = \text{diag}[1]$ , luego

$$N = A - S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y  $N^3 = 0$ ,  $N$  nilpotente de orden 3. Por tanto la solución del problema de valor inicial con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}_0 = e^t \left[ I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} \right] \mathbf{x}_0 \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1-t-\frac{t^2}{2} & -2t-\frac{t^2}{2} & -t-\frac{t^2}{2} & -t-\frac{t^2}{2} \\ t & 1+t & t & t \\ \frac{t^2}{2} & t+\frac{t^2}{2} & 1+\frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_0. \end{aligned}$$

los ejemplos anteriores son dos ejemplos en los que la matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tiene un valor propio de multiplicidad algebraica  $n$ , y por tanto, no se necesita calcular una base de vectores propios generalizados para resolver el problema del valor inicial. Sin embargo, en el caso general, primero se debe determinar una base de vectores propios generalizados para  $\mathbb{R}^n$ , y luego calcular  $S = P \text{diag}[\lambda_j] P^{-1}$  y  $N = A - S$  de acuerdo a las fórmulas en el teorema anterior, para finalmente encontrar la solución del problema del valor inicial para (1.31).

**Ejemplo.** Resolver el problema de valor inicial con

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se puede verificar fácilmente,

(1) Los valores propios de  $A$  son;  $\lambda_1 = 1$  con multiplicidad algebraica 1 y  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$  multiplicidad algebraica 2, pero geométrica 1.

(2) El vector  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -2)$  es un vector propio correspondiente al valor propio  $\lambda_1 = 1$  y el vector  $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$  es un vector propio correspondiente al valor propio  $\lambda_2 = 2$ .

Procedemos ahora a encontrar un vector propio generalizado correspondiente a  $\lambda = 2$  y linealmente independiente a  $\mathbf{v}_2$ , resolviendo la ecuación  $(A - 2I)^2 \mathbf{v} = 0$ .

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A - \lambda I)^2 \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Se puede considerar  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 0)$ , y por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que  $P^{-1}SP = \text{diag}[1, 2, 2]$ , se sigue  $S = P \text{diag}[1, 2, 2]P^{-1}$ , luego,

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ N &= A - S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $N^2 = 0$ ,  $N$  nilpotente de orden 2. Entonces la solución problema de valor inicial

con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  viene dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}(t) &= P \operatorname{diag}[e^t, e^{2t}, e^{2t}] P^{-1} [I + Nt] \mathbf{x}_0 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & t & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ -2e^t + (2-t)e^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \mathbf{x}_0
\end{aligned}$$

Se presenta ahora el siguiente teorema que presenta las condiciones sobre la solución del problema de valor inicial (1.31) para el caso de múltiples valores propios complejos y su demostración se puede ver en Smale [2].

**Teorema 1.9.3.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  con valores propios complejos  $\lambda_j = a_j + ib_j$  y  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ ;  $j = 1, \dots, n$ . Entonces:

- (1) Existen vectores propios generalizados  $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$  y  $\bar{\mathbf{w}}_j = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j$ ;  $j = 1, \dots, n$ .
- (2) El conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n\}$  es una base para  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n \ \mathbf{u}_n]$  invertible.
- (3) A se puede escribir como  $A = S + N$  donde  $P^{-1}SP = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$  la matriz  $N = A - S$  es nilpotente de orden  $k \leq 2n$  y además conmuta con  $S$ , esto es,  $NS = SN$ .

Este teorema permite enunciar el siguiente corolario,

**Corolario 1.9.4.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  con valores propios complejos  $\lambda_j = a_j + ib_j$  y  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ ;  $j = 1, \dots, n$ . Entonces la solución del problema del valor inicial (1.31) viene dado por

$$\mathbf{x}(t) = P \operatorname{diag} \left[ e^{a_j t} \begin{pmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{pmatrix} \right] P^{-1} \left[ I + \dots + \frac{N^k t^k}{k!} \right] \mathbf{x}_0$$

**Ejemplo.** Resolver el problema de valor inicial con

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solución.** No es difícil verificar que  $\lambda = i, \bar{\lambda} = -i$  son los valores propios de  $A$  con multiplicidad algebraica 2. Se puede encontrar también los vectores propios asociados al valor propio complejo  $\lambda = i$  resolviendo,

$$(A - iI) \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Aplicando operaciones elementales a la matriz se tiene,

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - i R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 + i R_4 \rightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}.$$

De la tercera ecuación determinada por la tercera fila de la matriz resultante se tiene que  $z_1 = 0$ , reemplazando en la primera ecuación determinada por la primera fila de la matriz resultante, se tiene que  $z_2 = 0$  y de la fila cuatro que determina la cuarta ecuación del sistema se tiene que  $z_3 = i z_4$ , por tanto un vector propio es

$$\mathbf{w}_1 = (0, 0, i, 1) = (0, 0, 0, 1) + i(0, 0, 1, 0) = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_2.$$

Para encontrar un vector generalizado correspondiente al valor propio  $\lambda = i$ , resolvemos el sistema

$$(A - iI)^2 \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i \\ -4i & -2 & -2i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i \\ -4i & -2 & -2i & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 - i R_1 \rightarrow R_2 \\ R_4 - i R_3 \rightarrow R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i \\ -2i & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_4 - i R_1 \rightarrow R_4 \\ 1/2 R_1 \rightarrow R_1 \\ 1/2 R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la primera fila de la matriz resultante se tiene que  $i z_2 = z_1$  y de la tercera fila,  $z_1 + z_3 = i z_4$ , tomando  $z_2 = 1$ , y  $z_4 = 1$ , entonces un vector propio generalizado correspondiente al valor propio  $\lambda = i$  es  $\mathbf{w}_2 = (i, 1, 0, 1) = (0, 1, 0, 1) + i(1, 0, 0, 0) = \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2$ . Aplicando el Teorema se sigue,

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ invertible } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

como el valor propio es  $\lambda = i$ , entonces  $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Luego

$$\begin{aligned} S &= P \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ N &= A - S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$N^2 = 0$ ,  $N$  nilpotenten de orden 2. Entonces la solución del problemas de valor inicial viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= P \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} P^{-1} [I + Nt] \mathbf{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ -t \sin t & \sin t - t \cos t & \cos t & -\sin t \\ \sin t + t \cos t & -t \sin t & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

**Observación 1.9.1.** Si  $A$  tiene valores propios repetidos reales y complejos, se puede usar una combinación de los dos teoremas anteriores.

## 1.10. Forma canónica de Jordan

Las formas canónicas de Jordan son una herramienta muy poderosa en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, pues proporcionan una representación especial de las matrices, facilitando el análisis y la solución de tales sistemas. Es claro que las formas canónicas de Jordan permiten diagonalizar matrices no diagonales dando la posibilidad de simplificar la estructura de la matriz y expresarla de manera mas sencilla. La forma canónica de Jordan de una matriz da una idea general de la forma de la solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales y será útil para probar algunos teoremas que se verán más adelante . Encontrar la forma canónica de Jordan de una matriz  $A$  no es necesariamente el mejor método para resolver los problemas relacionados con un sistema lineal, debido a que encontrar una base de vectores propios generalizados que reduce  $A$  su forma canónica Jordan puede resultar difícil. Por otra parte, cualquier base de vectores propios generalizados se puede utilizar en el método descrito en el sección anterior. La forma canónica de Jordan, descrita en el siguiente teorema, resulta en una forma particularmente simple para la parte nilpotente  $N$  de la matriz  $A$  y por lo tanto es útil en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarios.

**Teorema 1.10.1.** (Forma canónica de Jordan). Sea  $A$  una matriz real con valores propios reales  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  y valores propios complejos  $\lambda_j = a_j + ib_j$  y  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ ,  $j = k + 1, \dots, n$ . Entonces existe una base  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_n\}$  para  $\mathbb{R}^{2n-k}$ , donde  $\mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  y  $\mathbf{w}_j$ ,  $j = k + 1, \dots, n$ , son vectores propios generalizados de  $A$ ,  $\mathbf{u}_j = \text{Re}(\mathbf{w}_j)$  y  $\mathbf{v}_j = \text{Im}(\mathbf{w}_j)$  para  $j = k + 1, \dots, n$ , de modo que la matriz

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k & \mathbf{v}_{k+1} & \mathbf{u}_{k+1} & \cdots & \mathbf{v}_n & \mathbf{u}_n \end{bmatrix},$$

es invertible y

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_r \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

donde  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  son llamados bloques de Jordan elementales. Los  $B_j$  Son de la forma

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

donde  $\lambda$  es uno de los valores propios reales de  $A$ , o de la forma

$$B = \begin{pmatrix} D & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D & I_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

con

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para  $\lambda = a + bi$  uno de los valores propios complejos de  $A$ .

Este teorema está demostrado en Coddington y Levinson o en Hirsch y Smale [2]. La forma canónica de Jordan de una matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es única excepto por el orden de los bloques elementales de Jordan en (1.32) y por el hecho de que los 1 en los bloques elementales en (1.33) o los  $I_2$  en los bloques elementales en (1.34) pueden aparecer por encima o por debajo de la diagonal. Nosotros nos referimos a (1.32) con el  $B_j$  dado por (1.33) o (1.34) como *forma canónica Jordan superior* de  $A$ . La forma canónica de Jordan de  $A$  produce información explícita sobre la forma de la solución del problema del valor inicial (1.31) que, de acuerdo con el Teorema fundamental para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, viene dado por

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 = P \operatorname{diag} [e^{B_j t}] P^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (1.35)$$

Si  $B_j = B$  es una matriz  $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  de la forma (1.33) y  $\lambda$  es un valor propio real de  $A$  entonces  $N = B - \lambda I$  es nilpotente de orden  $m$ , ya que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \dots; \quad N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego  $N^m = 0$ , y como  $B = \lambda I + N$  entonces  $e^{Bt} = e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda t} e^{Nt}$ . Entonces

$$\begin{aligned} e^{Bt} &= e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t} \left[ I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!} \right] \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $B_j = B$  es una matriz  $B \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$  que tiene la forma dada en (1.34) y  $\lambda = a + bi$  es un valor propio complejo de  $A$ , entonces  $B = \text{diag}[D] + N$  donde  $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  y

$$N = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Observe que  $N \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$  es nilpotente de orden  $m$ . Por tanto

$$e^{Bt} = e^{(\text{diag}[D]+N)(t)} = e^{\text{diag}[D]t} e^{Nt} = e^{at} R e^{Nt}$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{Bt} &= e^{at} R e^{Nt} = e^{\lambda t} R \left[ I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!} \right] \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} R & Rt & \frac{Rt^2}{2!} & \cdots & \frac{Rt^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & R & Rt & \cdots & \frac{Rt^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & R & \cdots & \frac{Rt^{m-3}}{(m-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & & R & Rt \\ 0 & 0 & & 0 & R \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la solución (1.35) del problema del valor inicial (1.31) se puede enunciar el siguiente corolario.

**Corolario 1.10.2.** *Cada coordenada en la solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema del valor inicial (1.35) es una combinación lineal de funciones de la forma*

$$t^k e^{at} \cos bt \quad \text{o} \quad t^k e^{at} \sin bt$$

donde  $\lambda = a + ib$  es un valor propio de la matriz  $A$  y  $0 \leq k \leq m-1$ .

A continuación se describe un método que permite encontrar una base que reduce la matriz  $A$  a su Forma canónica de Jordan. Sin embargo es necesario definir y recordar algunos conceptos útiles para tal efecto.

**Definición 1.10.1.** *Sea  $\lambda$  un valor propio de la matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  de multiplicidad  $n$ . Los índices de deficiencia de  $\lambda$  son*

$$\delta_k = \dim \left( \ker \left[ (A - \lambda I)^k \right] \right)$$



**Observación 1.10.1.** Recordemos que el kernel de un operador lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es por definición

$$\ker(T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : T(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Es claro que los índices de deficiencia  $\delta_k$  se pueden encontrar mediante eliminación gaussiana; de hecho,  $\delta_k$  es el número de filas de ceros en la forma escalonada reducida de  $(A - \lambda I)^k$ , entonces,

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_n = n \quad \textcolor{red}{¡por qué?}$$

Sea  $v_k$  el número de bloques de Jordan elementales de tamaño  $k \times k$  en la forma canónica de Jordan (1.32) de la matriz  $A$ . Se tiene del anterior teorema y de la definición de  $\delta_k$  que:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n \\ \delta_2 &= v_1 + 2v_2 + \cdots + 2v_n \\ \delta_3 &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + 3v_n \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \delta_{n-1} &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + (n-1)v_{n-1} + (n-1)v_n \\ \delta_n &= v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + (n-1)v_{n-1} + nv_n. \end{aligned}$$

Conociendo los índices de deficiencia de un valor propio  $\lambda$ , se puede saber el número de bloques de Jordan elementales del igual tamaño. Así de las ecuaciones anteriores se sigue que:

$$\begin{aligned} v_1 &= 2\delta_1 - \delta_2 \\ v_2 &= 2\delta_2 - \delta_3 - \delta_1 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_k &= 2\delta_k - \delta_{k+1} - \delta_{k-1} \quad \text{para } 1 < k < n \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ v_n &= \delta_n - \delta_{n-1} \end{aligned}$$

Las únicas formas canónicas superiores de Jordan para una matriz de  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  o  $4 \times 4$  con un valor propio real  $\lambda$  de multiplicidad algebraica 2 o 3 o 4 respectivamente con sus correspondiente índices de deficiencia están dados por

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\delta_1 = \delta_2 = 2 & \delta_1 = 1; \delta_2 = 2 \\ \\ &\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 3 & \delta_1 = 2; \delta_2 = \delta_3 = 3 & \delta_1 = 1; \delta_2 = 2; \delta_3 = 3 \\ \\ &\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ &\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 4 & \delta_1 = 2; \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = 2; \delta_2 = 3; \delta_3 = \delta_4 = 4 \quad \delta_1 = 1; \delta_2 = 2; \delta_3 = 3; \delta_4 = 4$$

**Ejemplo.** Considere la matriz  $A$  definida de la siguiente forma,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es claro que  $\lambda = 2$  es valor propio de  $A$  con multiplicidad algebraica 3.

Luego,

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces  $\delta_1 = 2$ , multiplicidad geométrica de  $\lambda = 2$  es 2. Por otro lado,

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces  $\delta_2 = 3$ . Además,

$$(A - 2I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces  $\delta_3 = 3$ .

Por tanto la forma de Jordan de  $A$  es  $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

El ejemplo anterior permite proponer un procedimiento o un algoritmo para encontrar una base  $B$  ordenada en  $\mathbb{R}^3$  de vectores propios generalizados del valor propio  $\lambda = 2$  de la matriz  $A$ . Es claro que la representación de  $A$  con respecto a la base  $B$  es la forma canónica de Jordan  $J$ . Es decir, se debe encontrar vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  linealmente independientes tales que la representación de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base ordenada  $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  sea  $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Por tanto,

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{v}_1 \\ A\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \\ A\mathbf{v}_3 &= 2\mathbf{v}_3 \quad \text{¿por qué?} \end{aligned}$$

De las primera y tercera ecuación, es claro que  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_3$  son dos vectores propios correspondientes al valor propio  $\lambda = 2$ . De la segunda ecuación tenemos que  $(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ , es decir debemos encontrar un vector propio  $\mathbf{v}_1$  correspondiente a  $\lambda = 2$  para que el sistema  $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$  sea consistente, esto es, que tenga solución y luego encontrar una solución  $\mathbf{v}_2$  de dicho sistema, observe que  $\mathbf{v}_2 \in \ker[(A - 2I)^2]$ , pero  $\mathbf{v}_2 \notin \ker[(A - 2I)]$ .

Encontremos los vectores propios linealmente independientes correspondiente a  $\lambda = 2$ ,

$$(A - 2I)\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

De  $R_1$  o de  $R_3$  tenemos que  $x_2 = 0$ , entonces los vectores  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$  y  $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1)$  generan al subespacio  $\ker(A - 2I)$ . Ahora se quiere encontrar un  $\mathbf{v}^* \in \ker[A - 2I]$  tal que el sistema  $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$  sea consistente o tenga solución.

Resolvamos el sistema lineal

$$(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{v}^* = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

para que el sistema sea consistente se debe cumplir que  $x_2 = c_1$  y  $x_2 = -c_2$ , luego  $c_1 = -c_2$ , tomando  $c_1 = 1$  tenemos entonces que  $c_2 = -1$  y por tanto con  $\mathbf{v}^* = (1, 0, -1) \in \ker(A - 2I)$  el sistema es consistente. Ahora encontremos la solución del sistema

$$(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Con  $x_2 = 1$ , una solución es  $\mathbf{v}_1^* = (0, 1, 0) \in \ker[(A - 2I)^2]$ , tomando un vector en  $\ker(A - 2I)$  linealmente independiente de  $\mathbf{v}^*$  y  $\mathbf{v}_1^*$  obtenemos una base de  $\ker[(A - 2I)^2] = \mathbb{R}^3$ , observemos que podemos elegir  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$  o a  $\mathbf{u}_2 = (0, 0, 1)$  **Verificar** que el resultado no cambia.

Por tanto haciendo  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}^* = (1, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^* = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1)$ , tenemos que

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tal que  $P^{-1}AP = J$ . En efecto,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

**Observación 1.10.2.** Se presenta ahora el algoritmo para encontrar una base  $B$  ordenada para  $\mathbb{R}^n$  de vectores propios generalizados de una matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  correspondiente a un valor propio real  $\lambda$  de multiplicidad  $n$ , asumiendo que  $J$  es la forma canónica de Jordan de  $A$  con respecto a la base  $B$ .

**1.** Encuentre una base  $\{\mathbf{v}_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1}$  para  $\ker(A - \lambda I)$ ; es decir, encontrar  $\delta_1$  vectores propios de  $A$  correspondientes al valor propio  $\lambda$  linealmente independientes.

**2.** Si  $\delta_2 > \delta_1$ , escoja una base  $\{\mathbf{V}_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1}$  para  $\ker(A - \lambda I)$  tal que

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_j^{(2)} = \mathbf{V}_j^{(1)}$$

tenga  $\delta_2 - \delta_1$  soluciones linealmente independientes,  $\mathbf{v}_j^{(2)}, j = 1, \dots, \delta_2 - \delta_1$ . Entonces  $\{\mathbf{v}_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2} = \{\mathbf{V}_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \{\mathbf{v}_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1}$  es una base para  $\ker(A - \lambda I)^2$ .

**3.** Si  $\delta_3 > \delta_2$ , elija una base  $\{\mathbf{V}_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2}$  para  $\ker[(A - \lambda I)^2]$  con  $\mathbf{V}_j^{(2)} \in \text{gen}\{\mathbf{v}_i^{(2)}\}_{i=1}^{\delta_2 - \delta_1}$  para  $j = 1, 2, \dots, \delta_2 - \delta_1$  tal que

$$(A - \lambda I)\mathbf{v}_j^{(3)} = \mathbf{V}_j^{(2)}$$

tenga  $\delta_3 - \delta_2$  soluciones linealmente independientes  $\mathbf{v}_j^{(3)}, j = 1, \dots, \delta_3 - \delta_2$ . Si para  $j = 1, \dots, \delta_2 - \delta_1$ ,  $\mathbf{V}_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{\delta_2 - \delta_1} c_i \mathbf{v}_i^{(2)}$ , sea  $\tilde{\mathbf{V}}_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{\delta_2 - \delta_1} c_i \mathbf{V}_i^{(1)}$  y  $\tilde{\mathbf{V}}_j^{(1)} = \mathbf{V}_j^{(1)}$  para  $j = \delta_2 - \delta_1 + 1, \dots, \delta_1$ .

Entonces

$$\{\mathbf{v}_j^{(3)}\}_{j=1}^{\delta_3} = \{\tilde{\mathbf{V}}_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \{\mathbf{V}_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1} \cup \{\mathbf{v}_j^{(3)}\}_{j=1}^{\delta_3 - \delta_2}$$

es una base para  $\ker[(A - \lambda I)^3]$ . **4.** Continúe este proceso hasta el paso  $k$  cuando  $\delta_k = n$  y así obtener una base  $B = \{\mathbf{v}_j^{(n)}\}_{j=1}^n$  para  $\mathbb{R}^n$ . La matriz  $A$  se asumirá entonces en su forma canónica de Jordan con respecto a esta base.

La matriz de diagonalización  $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$  en el teorema inmediatamente anterior satisface  $P^{-1}AP = J$ .  $P$  se obtiene mediante un ordenamiento apropiado de la base  $B$ , como lo vimos en el ejemplo anterior. En términos generales, cada vector propio generalizado  $\mathbf{v}_j^{(i)}$  satisface  $(A - \lambda I)\mathbf{v}_j^{(i)} = \mathbf{V}_j^{(i-1)}$  aparece inmediatamente en la lista siguiendo el vector propio generalizado  $\mathbf{V}_j^{(i-1)}$ .

Ahora se propone otro ejemplo en el que se obtiene la matriz  $P$  a partir de una base apropiada  $B$ .

**Ejemplo.** Encuentre una base para  $\mathbb{R}^4$  que reduce

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a su forma canónica Jordan.

No es difícil verificar que  $\lambda = 1$  es un valor propio de  $A$  de multiplicidad algebraica 4. Usando reducción Gaussiana, tenemos

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} R_4 + R_2 & \rightarrow & R_4 \\ -R_1 & \rightarrow & R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ entonces } \delta_1 = 2, \text{ la multiplicidad geométrica}$$

de  $\lambda = 1$  es 2.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por tanto  $\delta_2 = 4$ , luego  $\delta_3 = \delta_4 = 4$ .

Ahora resolvamos el sistema  $(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$  para encontrar los vectores propios de  $\lambda = 1$ , volvamos

a la reducción Gaussiana del sistema, esto es  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

De  $R_2$  tenemos  $x_3 = 0$  y de  $R_1$  tenemos entonces  $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ , luego  $x_4 = -x_1 - x_2$ . Entonces la solución del sistema es de la forma

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1, 0, 0, -1) + x_2(0, 1, 0, -1).$$

Por tanto  $\mathbf{v}_1^{(1)} = (1, 0, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2^{(1)} = (0, 1, 0, -1)$  generan al subespacio  $\ker(A - I)$ .

Como  $\delta_2 = 4$  y  $\delta_1 = 2$ , entonces debemos encontrar 4 vectores propios generalizados linealmente independientes  $\mathbf{V}_1^{(1)}, \mathbf{v}_1^{(2)}, \mathbf{V}_2^{(1)}, \mathbf{v}_2^{(2)}$  que satisfagan  $(A - I)\mathbf{v}_i^{(2)} = \mathbf{V}_i^{(1)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Para ello encontremos constantes  $c_1$  y  $c_2$  para que el sistema  $(A - I)\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1^{(1)} + c_2\mathbf{v}_2^{(1)}$  sea consistente. Aplicando nuevamente eliminación Gaussiana al sistema ampliado  $(A - I|c_1\mathbf{v}_1^{(1)} + c_2\mathbf{v}_2^{(1)})$  tenemos

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -2 & -1 & c_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -c_1 - c_2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + R_1} \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -2 & -1 & c_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -c_1 - c_2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} R_4 + R_2 & \rightarrow & R_4 \\ -R_1 & \rightarrow & R_1 \end{array} \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -c_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (*)$$

por tanto el sistema siempre es consistente.

Sea  $c_1 = 1$  y  $c_2 = 0$ , entonces  $\mathbf{V}_1^{(1)} = \mathbf{v}_1^{(1)} = (1, 0, 0, -1)$ .

Ahora encontremos un  $\mathbf{v}_1^{(2)}$  que satisface  $(A - I)\mathbf{v}_1^{(2)} = \mathbf{V}_1^{(1)}$ , es equivalente a (\*)

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{ De } R_2 \text{ tenemos que } x_3 = -1, \text{ de } R_1 \text{ tenemos que } x_1 + x_2 + 2x_3 +$$

$x_4 = -1$ , entonces  $x_1 + x_2 + x_4 = 1$ , haciendo  $x_2 = x_4 = 0$ , tenemos  $x_1 = 1$ , por tanto  $\mathbf{v}_1^{(2)} = (1, 0, -1, 0)$ .

Sea  $c_1 = 0$  y  $c_2 = 1$ , entonces  $\mathbf{V}_2^{(1)} = \mathbf{v}_2^{(1)} = (0, 1, 0, -1)$ .

Ahora encontremos un  $\mathbf{v}_2^{(2)}$  que satisface  $(A - I)\mathbf{v}_2^{(2)} = \mathbf{V}_2^{(1)}$ , es equivalente a (\*)

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{ De } R_2 \text{ tenemos que } x_3 = -1, \text{ de } R_1 \text{ tenemos que } x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,$$

entonces  $x_1 + x_2 + x_4 = 2$ , haciendo  $x_1 = 0, x_2 = 1$ , tenemos  $x_4 = 1$ , por tanto  $\mathbf{v}_2^{(2)} = (0, 1, -1, 1)$ .

Hemos así obtenido una base para  $\ker(A - I) = \mathbb{R}^4$ , la cual es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{V}_1^{(1)} = (1, 0, 0, -1), & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1^{(2)} = (1, 0, -1, 0), \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{V}_2^{(1)} = (0, 1, 0, -1), & \mathbf{v}_4 &= \mathbf{v}_2^{(2)} = (0, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

Así,

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Ejercicio.** Encontrar la solución al problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota: Las dos primeras matrices son las matrices de los ejemplos anteriores.

## 1.11. Teoría de estabilidad

La teoría de la estabilidad es un concepto muy importante en diversas áreas del conocimiento, como la física, la matemática, la ingeniería, la economía y la biología, entre otras, y se refiere a la capacidad de un sistema para mantenerse dentro de ciertos límites o condiciones específicas frente a perturbaciones internas o externas. Es decir, cómo un sistema responde a pequeñas perturbaciones. Un sistema es estable si, después de ser perturbado, regresa a su posición de equilibrio original.

En esta sección definimos el subespacio estable, inestable y central,  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  respectivamente, de un sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{1.36}$$

Recuerde que  $E^s$  y  $E^u$  se definieron en la Sección 1.2 en el caso en que  $A$  tenía valores propios distintos. También en esta sección establecemos algunas propiedades importantes de estos subespacios.

Por lo estudiado en los Teoremas 1 y 2 y la observación en la sección 1.7 sobre valores propios múltiple. Sea  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m\}$  una base para  $\mathbb{R}^n$ , donde  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  son vectores propios generalizados asociados a los valores propios  $\lambda_j = a_j + ib_j$  con  $b_j = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, k$  y  $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m$ , son vectores propios generalizados  $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$  asociados a los valores propios  $\lambda_j = a_j + ib_j$  con  $b_j \neq 0$  para  $j = k+1, \dots, m$ , donde  $n = 2m - k$ .

**Definición 1.11.1.** Sean  $\lambda_j = a_j + ib_j$ ,  $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$  y  $B$  como se describen arriba. Entonces

$$E^s = \text{gen}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j : a_j < 0\}, \quad E^c = \text{gen}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j : a_j = 0\}, \quad E^u = \text{gen}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j : a_j > 0\}.$$

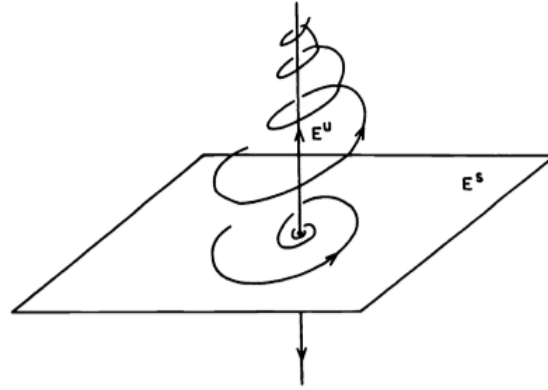
Es decir,  $E^s$ ,  $E^c$  y  $E^u$  son subespacios de  $\mathbb{R}^{2m-k}$  generados por las partes real e imaginaria de los vectores propios generalizados  $\mathbf{w}_j$  correspondientes a valores propios  $\lambda_j$  con partes reales negativas, cero y positivas respectivamente.

**Ejemplo.** Considere el sistema lineal (1.36) con

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verificar que  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0) + i(1, 0, 0)$  es un vector propio de  $A$  correspondientes al valor propio  $\lambda_1 = -2 + i$  y  $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$  un vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio  $\lambda_2 = 3$ .

El subespacio estable  $E^s$  de (1.36) es el plano  $x_1, x_2$  y el subespacio inestable  $E^u$  de (1.36) es el eje  $x_3$ . El retrato de fase del sistema (1.36) para este ejemplo se muestra en la siguiente Figura. Los subespacios estable e inestable  $E^u$  y  $E^s$  del lineal sistema (refslt).

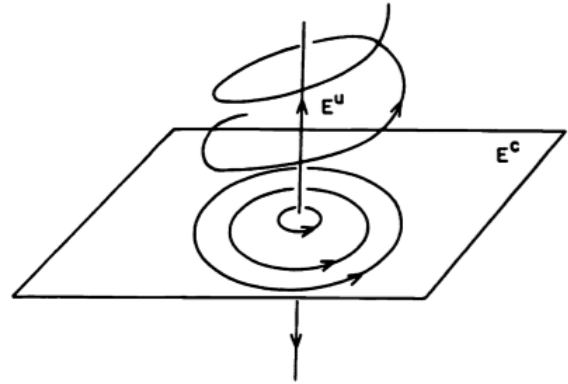


**Ejemplo.** Considere el sistema lineal (1.36) con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar fácilmente que  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0) + i(1, 0, 0)$  son vectores propios de  $A$  correspondientes al valor propio  $\lambda_1 = i$  y  $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$  un vector propio de  $A$  correspondiente al valor propio  $\lambda_2 = 2$ .

El subespacio central  $E^c$  de (1.36) es el plano  $x_1, x_2$  y el subespacio inestable  $E^u$  de (1.36) es el eje  $x_3$ . El retrato de fase del sistema (1.36) para este ejemplo se muestra en la siguiente figura. El centro y los subespacios inestables  $E^c$  y  $E^u$  del lineal sistema (1.36).



El lector puede verificar que todas las soluciones se encuentran sobre los cilindros  $x_1^2 + x_2^2 = c^2$ .

En los ejemplos anteriores se ve que todas las soluciones en  $E^s$  se acercan al equilibrio punto  $x = 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y todas las soluciones en  $E^u$  se aproximan al equilibrio punto  $x = 0$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Además en el ejemplo anterior las soluciones en  $E^c$  están acotadas y si  $\mathbf{x}(0) \neq 0$ , entonces están acotadas lejos de  $x = 0$  para todos  $t \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, veremos que estas afirmaciones sobre  $E^s$  y  $E^u$  en general son verdaderas; sin embargo, las soluciones en  $E^c$  no necesariamente están acotadas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

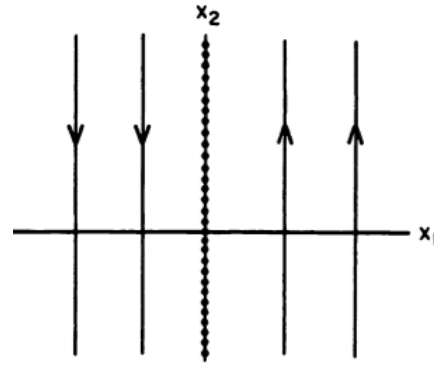


**Ejemplo.** Considere el sistema lineal (1.36) con  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  es decir  $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$ .  
Se puede verificar fácilmente que:

- (1)  $\lambda = 0$  es el valor propio de  $A$ , multiplicidad algebraica 1.
- (2)  $\mathbf{u} = (0, 1)$  es un vector propio y  $\mathbf{v} = (0, 1)$  es un vector generalizado correspondiente al valor propio  $\lambda = 0$ . Entonces  $E^c = \mathbb{R}^2$ .
- (3) La solución de (1.36) con  $\mathbf{x}(0) = (c_1, c_2)$  es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \\ x_2(t) &= c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

El retrato de fase para (1.36) en este caso se muestra en la siguiente figura. Algunas soluciones (aquellas con  $c_1 = 0$ ) permanecen acotados mientras que otras no. El subespacio centro  $E^c$  para (1.36).



El interés ahora es estudiar y profundizar en la noción del flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales y estudiar la invarianza de los subespacios estables, inestables y centrales bajo el flujo de (1.36). Del Teorema fundamental se sigue que la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

viene dado por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$$

El flujo del sistema lineal (1.36) denotado por  $\phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At}\mathbf{x}_0$  es el conjunto de todas las aplicaciones  $\phi_t = e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y puede considerarse como una descripción del movimiento de puntos  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  a lo largo de las trayectorias de (1).

**Definición 1.11.2.** Si todos los valores propios de la matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  tienen parte real distinta de cero entonces el flujo  $\phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At}\mathbf{x}_0$  se llama flujo hiperbólico y (1.36) es llamado un sistema hiperbólico lineal.

$$\begin{aligned} \phi_t = e^{At} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n & \phi : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}_0 &\longrightarrow e^{At}\mathbf{x}_0, & (t, \mathbf{x}_0) &\longrightarrow \phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At}\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

**Definición 1.11.3.** Se dice que un subespacio  $E \subset \mathbb{R}^n$  es invariante con respecto al flujo  $\phi_t$  si  $\phi_t(E) \subset E$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , en particular  $E$  es invariante con respecto al flujo  $e^{At}$  si  $e^{At}E \subset E$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  o equivalentemente  $e^{At}\mathbf{x}_0 \in E$  para todo  $\mathbf{x}_0 \in E$  y para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Para mostrar que los subespacios  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  de (1.36) son invariantes respecto al flujo  $\phi_t = e^{At}$  del sistema lineal (1.36) es necesario mostrar que cualquier solución que comienza en  $E^s$ ,  $E^u$  o  $E^c$  en el tiempo  $t = 0$  permanece en  $E^s$ ,  $E^u$  o  $E^c$  respectivamente para todo  $t \in \mathbb{R}$ , es decir, para todo  $\mathbf{x}_0 \in (E^s \text{ ó } E^u \text{ ó } E^c)$  se tiene que  $\phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{At}\mathbf{x}_0 \in (E^s \text{ ó } E^u \text{ ó } E^c)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.11.1.** Sea  $E$  el espacio propio generalizado de  $A$  correspondiente a un valor propio  $\lambda$ . Entonces  $AE \subset E$ .

*Demostración.* Sea  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  una base de vectores propios generalizados para  $E$ . Sea  $\mathbf{v} \in E$ , entonces  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^k c_j \mathbf{v}_j$  y por la linealidad,  $A\mathbf{v} = \sum_{j=1}^k c_j A\mathbf{v}_j$ .

Si  $\mathbf{v}_j$  es un valor propio correspondiente a  $\lambda$ , entonces  $A\mathbf{v}_j = \lambda\mathbf{v}_j$ , por tanto  $A\mathbf{v}_j \in E$ , ahora si  $\mathbf{v}_j$  es un vector generalizado del valor propio  $\lambda$ , por definición existe  $k_j > 1$  tal que

$$(A - \lambda I)^{k_j} \mathbf{v}_j = \mathbf{0}, \quad (**),$$

podemos escoger el mínimo de  $k_j$  que satisface (\*\*). Sea  $\mathbf{V}_j$  tal que  $(A - \lambda I)\mathbf{v}_j = \mathbf{V}_j$ , entonces  $\mathbf{V}_j \in \ker[(A - \lambda I)^{k_j-1}]$  ¿por qué?, luego  $\mathbf{V}_j \in E$ . Como  $(A - \lambda I)\mathbf{v}_j = \mathbf{V}_j \Leftrightarrow A\mathbf{v}_j = \lambda\mathbf{v}_j + \mathbf{V}_j \in E$ , como  $E$  es un subespacio, entonces  $A\mathbf{v} = \sum_{j=1}^k c_j A\mathbf{v}_j \in E$ . Hemos así demostrado que  $A\mathbf{v} \in E$  para cada  $\mathbf{v} \in E$ , esto es,  $AE \subset E$ .  $\square$

**Teorema 1.11.2.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n$ . Entonces  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$  donde  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son los subespacios estables, inestables y central de (1.36) respectivamente; además,  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son invariantes con respecto al flujo  $\phi_t = e^{At}$  de (1.36) respectivamente.

**Observación 1.11.1.**  $V$  es espacio vectorial y  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$  subespacio de  $V$ , entonces  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$  si, y sólo si para cada  $\mathbf{v} \in V$ , existen únicos  $\mathbf{u}_i \in U_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  tales que  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ .

*Demostración.* Sea  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m\}$  una base para  $\mathbb{R}^n$ , donde  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  son vectores propios generalizados asociados a los valores propios  $\lambda_j = a_j + ib_j$  con  $b_j = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, k$  y  $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m$ , son vectores propios generalizados  $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$  asociados a los valores propios  $\lambda_j = a_j + ib_j$  con  $b_j \neq 0$  para  $j = k+1, \dots, m$ , donde  $n = 2m - k$ .

Por definición de  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  se tiene que  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ . Ahora probemos que  $E^s$  es invariante con respecto al flujo  $\phi_t = e^{At}$ . Sea  $\mathbf{v} \in E^s$ , entonces  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n_s} c_j \mathbf{V}_j$ , donde  $\{\mathbf{V}_j\}_{j=1}^{n_s} \subset B$  es una base de  $E^s$ . Por la linealidad de  $e^{At}$  tenemos que

$$e^{At}\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n_s} c_j e^{At}\mathbf{V}_j.$$

Como

$$e^{At}\mathbf{V}_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ I + At + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} \right] \mathbf{V}_j \in E^s$$

ya que  $A^k\mathbf{V}_j \in E^s$  para  $j = 1, \dots, n_s$ . Por tanto  $e^{At}\mathbf{v} = \phi_t(\mathbf{v}) \in E^s$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Hemos así demostrado que  $e^{At}E^s \subset E^s$ , esto es,  $E^s$  es invariante con respecto al flujo  $e^{At}$ . De igual manera se demuestra que los espacios  $E^u$  y  $E^c$  son invariantes con respecto al flujo  $e^{At}$ .  $\square$

**Definición 1.11.4.** Si se considera la matriz  $A$ ,

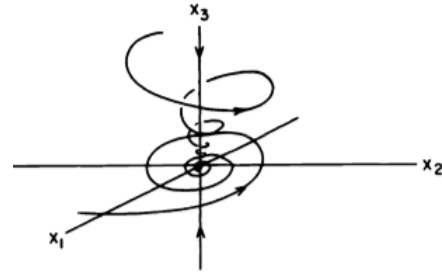
- (1) Si la parte real de todos los valores propios de  $A$  son negativos, decimos que el origen es un sumidero.
- (2) Si la parte real de todos los valores propios de  $A$  son positivos, decimos que el origen es una fuente.
- (3) Si todos los valores propios de  $A$  son diferentes de cero, pero si existen al menos dos con parte real de signos contrarios, decimos que el origen es un punta silla.
- (4) Si la parte real de los valores propios de  $A$  es diferentes de cero, decimos que el sistema es un sistema dinámico hiperbólico.

**Ejemplo.** Considere el sistema lineal (1.36) con  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

Se puede verificar que:

- (1) Los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = -2 + i$  y  $\lambda_2 = -3$  vectores propios.
- (2)  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0) + i(1, 0, 0)$  es un vector propio correspondiente a  $\lambda_1 = -2 + i$  y  $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$  es un vector propio correspondiente a  $\lambda_2 = -3$

Por tanto  $E^s = \mathbb{R}^3$  y el origen es un sumidero. El retrato fase se muestra en la siguiente figura.



Ahora enunciaremos dos teoremas y una consecuencia, la demostración del primer teorema, leer de Perko, página 19, la demostración del segundo teorema y la consecuencia quedan como **Ejercicio**.

**Teorema 1.11.3.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Para todo  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  y para todo  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |e^{At} \mathbf{x}_0| = \infty$ .

(2) Todos los valores propios de  $A$  tienen parte real negativa, es decir el origen es un sumidero.

(3) Existen constantes  $a, c, m, M > 0$  tales que para todo  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  se tiene que:

$$|e^{At} \mathbf{x}_0| \leq M e^{-ct} |\mathbf{x}_0| \quad \text{para todo } t \geq 0$$

y

$$|e^{At} \mathbf{x}_0| \geq m e^{-at} |\mathbf{x}_0| \quad \text{para todo } t \leq 0.$$

**Teorema 1.11.4.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) Para todo  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  y para todo  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{At} \mathbf{x}_0| = \infty$

(2) Todos los valores propios de  $A$  tienen una parte real positiva, es decir el origen es una fuente.

(3) Existen constantes  $a, c, m, M > 0$  tales que para todo  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$|e^{At} \mathbf{x}_0| \leq M e^{ct} |\mathbf{x}_0| \quad \text{para todo } t \leq 0$$

y

$$|e^{At} \mathbf{x}_0| \geq m e^{at} |\mathbf{x}_0| \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

**Observación 1.11.2.** Si  $\mathbf{x}_0 \in E^s$ , entonces  $e^{At} \mathbf{x}_0 \in E^s$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

y si  $\mathbf{x}_0 \in E^u$ , entonces  $e^{At} \mathbf{x}_0 \in E^u$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At} \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

Por lo tanto, vemos que todas las soluciones de (1.36) que comienzan en un subespacio estable  $E^s$  de (1.36) permanece en  $E^s$  para todo  $t$  y se aproxima al origen exponencialmente rápido cuando  $t \rightarrow \infty$ ; y todas las soluciones de (1.36) que comienzan en un subespacio inestable  $E^u$  de (1.36) permanece en  $E^u$  para todo  $t$  y se aproxima al origen exponencialmente rápido cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Estos resultados son análogo para sistemas no lineales (Teorema de la variedad estable).

## 1.12. Sistemas lineales no homogéneos

Los sistemas lineales no homogéneos son de gran importancia en el modelado de fenómenos físicos, biológicos, económicos y sociales, pues proporcionan poderosas herramientas matemáticas para modelar y resolver una variedad de problemas en estas áreas, permitiendo la comprensión y la aplicación del conocimiento en estos campos. Este tipo de sistema tiene en cuenta situaciones en las que hay fuerzas externas, perturbaciones y condiciones iniciales que afectan el comportamiento del sistema. Consideremos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales no homogéneo de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (1)$$

donde  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $\mathbf{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial continua.

**Definición 1.12.1.** Una solución matriz fundamental del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (2)$$

es cualquier función matriz  $\Phi(t)$ , no singular de tamaño  $n \times n$  tal que

$$\Phi'(t) = A\Phi(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

**Observación 1.12.1.** Tenga en cuenta que:

- (a)  $\Phi(t) = e^{At}$  es una solución matriz fundamental de (2) que satisface  $\Phi(0) = I_n$
- (b) Cualquier solución matriz fundamental  $\Phi(t)$  de (2) viene dada por  $\Phi(t) = e^{At}C$  para alguna matriz invertible  $C$ .

Una vez encontrada una solución matriz fundamental de (2), es fácil resolver el sistema no homogéneo (1). Este resultado se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema 1.12.1.** Si  $\Phi(t)$  es una solución matriz fundamental de (2), entonces la solución del sistema lineal no homogéneo (1) con la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , es única y viene dado por

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau \quad (3).$$

*Demostración.* Para  $\mathbf{x}(t)$  definida en (3), se tiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \Phi'(t) \Phi^{-1}(0) \mathbf{x}_0 + \frac{d}{dt} \left( \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \Phi'(t) \Phi^{-1}(0) \mathbf{x}_0 + \Phi(t) \Phi^{-1}(t) \mathbf{b}(t) + \int_0^t \Phi'(t) \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

y dado que  $\Phi(t)$  es una solución matriz fundamental de (2), se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= A\Phi(t) \Phi^{-1}(0) \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}(t) + \int_0^t A\Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau \\ &= A \left( \Phi(t) \Phi^{-1}(0) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau \right) + \mathbf{b}(t) \\ &= A \left( \Phi(t) \Phi^{-1}(0) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau \right) + \mathbf{b}(t) \\ &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esto completa la prueba del teorema. □

El estudiante puede verificar que

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau \right) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t) \mathbf{b}(t) + \int_0^t \Phi'(t) \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau,$$

usando la siguiente sugerencia. Sea  $F(t, x) = \int_{t_0}^t g(x) h(\tau) d\tau$ , y sea  $f(t) = F(t, t)$ , encuentre  $f'(t)$ , donde todas las funciones involucradas sean continuamente diferenciables.

**Observación 1.12.2.** Si se considera la matriz  $A$ . Entonces:

(1) Si  $A$  matriz en (1) depende de  $t$ , esto es  $A = A(t)$ , entonces la solución del sistema lineal no homogéneo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

viene dada por (3), siempre que  $\Phi(t)$  sea una solución matriz fundamental de

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}.$$

El estudiante puede probar este resultado.

(2) En la mayor parte de este curso no se considera soluciones de (2) con  $A = A(t)$ , para una discusión sobre este temática se requiere métodos de series y la teoría de funciones especiales.

**Observación 1.12.3.** Dada la solución matriz fundamental  $\Phi(t) = e^{At}$ , la solución del sistema lineal no homogéneo (1), tiene la forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}(\tau) d\tau$$

**Ejemplo.** Resolver el problema del oscilador armónico forzado

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

Si hacemos  $x_1 = x$  y  $x_2 = \dot{x}$ , la ecuación se puede escribir como el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + f(t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (1.37)$$

$$\text{donde } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

En este caso,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = R(t), \quad e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = R(-t)$$

La solución del sistema (1.37) con la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = (c_1, c_2)$  está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{b}(\tau) d\tau \\
&= R(t) \mathbf{x}_0 + R(t) \int_0^t \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x}_0 + \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -f(\tau) \sin \tau \\ f(\tau) \cos \tau \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f(\tau) \sin \tau \\ f(\tau) \cos \tau \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} f(\tau) (-\sin \tau \cos t + \cos \tau \sin t) \\ f(\tau) (\sin \tau \sin t + \cos \tau \cos t) \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} f(\tau) \sin(t - \tau) \\ f(\tau) \cos(t - \tau) \end{pmatrix} d\tau
\end{aligned}$$

Como  $x_1(t) = x(t)$ , entonces la solución del problema original del oscilador armónico forzado viene dado por

$$x_1(t) = x_1(0) \cos t + \dot{x}_1(0) \sin t + \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

# Capítulo 2

## Sistemas no lineales: Teoría local

En este capítulo se estudiará las definiciones y los conceptos teóricos necesarios para abordar el Teorema fundamental de existencia y unicidad de sistemas de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales o de frontera; el conjunto de valores de las variables del sistema llamado espacio fase; la continuidad de las funciones que definen el sistema y sus derivadas que son conceptos importante en esta temática; el Teorema de Picard-Lindelöf que establece condiciones bajo las cuales existe una única solución para un problema de valor inicial e implica la continuidad y Lipschitz de las funciones que definen el sistema y los intervalo de existencia, pues el teorema de existencia y unicidad no garantiza la existencia de soluciones en todo el dominio. Es necesario, además, comprender estos conceptos para abordar y aplicar el teorema de existencia y unicidad en el contexto de sistemas de ecuaciones diferenciales. Cabe destacar que la aplicación de estos conceptos puede variar según la complejidad y las características específicas del sistema en cuestión.

Se mostrará también que bajo ciertas condiciones un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal  $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$  tiene una única solución a través de cada punto  $\mathbf{x}_0 \in U$  definido en un intervalo máximo de existencia  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ . En general, no es posible resolver el sistema no lineal. Sin embargo, se puede obtener una gran cantidad de información cualitativa sobre la estabilidad y el comportamiento local de la solución.

En el Capítulo 1 se mostró que cualquier sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (2.1)$$

tiene una solución única a través de cada punto  $x_0$  en el espacio de fase  $\mathbb{R}^n$ , ésta solución viene dada por  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$  y está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En este capítulo se hace un estudio de las soluciones de los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

donde  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación 2.0.1.** *Si considera el sistema (2.1),*

*(1) Se puede mostrar que bajo ciertas condiciones en la función  $f$ , el sistema no lineal (2.2)*



tiene una única solución a través de cada punto  $\mathbf{x}_0 \in U$  definido en un intervalo máximo de existencia  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ .

(2) En general, no es posible resolver el sistema no lineal (2.2). Sin embargo, se puede obtener una gran cantidad de información cualitativa sobre el comportamiento local de la solución. En particular, el teorema de Hartman-Grobman y el teorema de la variedad estable muestran topológicamente que el comportamiento local del sistema (2.2) cerca a un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$ , esto es,  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  está determinado por el comportamiento del sistema lineal (2.1) cerca del origen cuando  $A = Df(\mathbf{x}_0)$  “ el derivado de  $f$  en  $\mathbf{x}_0$  ”.

(3) Se discute algunas de las ramificaciones de estos teoremas para sistemas bidimensionales cuando  $\det(Df(\mathbf{x}_0)) \neq 0$  y se citarán algunos de los resultados locales para sistemas bidimensionales (2.2) cuando  $\det(Df(\mathbf{x}_0)) = 0$ .

## 2.1. Conceptos preliminares y definiciones.

Antes de comenzar nuestra discusión sobre la teoría fundamental de los sistemas de ecuaciones diferenciales, se presentan algunos conceptos preliminares y las respectivas definiciones para abordar esta temática con mayor precisión.

**Definición 2.1.1.** Un sistema de EDO no lineal, se dice que es autónomo si tiene la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal, se dice que es no autónomo, si tiene la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2.4)$$

donde la función  $f$  depende de la variable independiente  $t$ .

**Observación 2.1.1.** Cualquier sistema no autónomo (2.4) con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  puede ser visto como un sistema autónomo (2.3) con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , haciendo  $x_1 = t$  y  $x_{j+1} = x_j$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ . La teoría fundamental para (2.3) y (2.4) no difiere significativamente, aunque es posible obtener la existencia y la unicidad de soluciones de (2.4) bajo hipótesis sobre  $f$ , ligeramente más débiles como función de  $t$  lo cual se verá mas adelante.

En particular la condición suficiente para la existencia de la solución de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(t)$  es la integrabilidad de  $f$ , y su solución viene dado por

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s) ds.$$

En general, las ecuaciones diferenciales no lineales (2.3) o (2.4) tendrán solución si la función  $f$  es continua. Sin embargo la continuidad de la función  $f$  no es suficiente para garantizar la unicidad de la solución.

**Ejemplo.** El siguiente sistema,

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) &= 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

es un problema del valor inicial que tiene dos soluciones diferentes que pasan por el punto  $(0, 0)$ , a saber

$$u(t) = t^3 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

y

$$u(t) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Note que la función  $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$  es continua pero no es diferenciable en  $x = 0$ .

**Ejercicio.** Usando método de separación de variables verificar que  $u(t) = t^3$  es solución del problema de valor inicial (2.5).

Otra característica de los sistemas no lineales que se diferencian de los sistemas lineales es que incluso, cuando la función  $\mathbf{f}$  en (2.3) está definida y es continua para todos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , la solución  $\mathbf{x}(t)$  de (2.3) puede volverse no acotada en algún tiempo finito  $t = \beta$ ; es decir, la solución sólo puede existir en algún subintervalo adecuado  $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ .

**Ejemplo.** El problema del valor inicial.

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

Usando separación de variable se puede verificar que la solución al problema de valor inicial es

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-\infty, 1) \quad y \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = +\infty.$$

El intervalo  $(-\infty, 1)$  es llamado *intervalo máximo de existencia de la solución del problema de valor inicial*. Se puede ver también que la función  $x(t) = \frac{1}{1-t}$  tiene otra rama definida en el intervalo  $(1, \infty)$ . Sin embargo, esta rama no se considera parte de la solución del problema de valor inicial ya que el tiempo inicial  $t = 0 \notin (1, \infty)$ .

Antes de enunciar y demostrar el teorema fundamental de existencia y unicidad para los sistemas no lineales (2.3), es necesario definir alguna terminología y notación relativa a la derivada  $Df(\mathbf{x}_0)$  de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Conceptos que se pueden consultar y profundizar en ([?])

**Definición 2.1.2.** Sean  $V_1$  y  $V_2$  dos espacios lineales normados donde  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_2$  son sus normas respectivamente. Se dice que  $F : V_1 \rightarrow V_2$  es continua en  $x_0 \in V_1$  si y sólo si, para todo  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $\mathbf{x} \in V_1$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_1 < \delta$  implica que  $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)\| < \epsilon$ .  
 $F$  es continua en  $E \subseteq V_1$ ,  $F \in C(E)$ , si  $F$  es continua en cada punto  $\mathbf{x} \in E$ .

**Definición 2.1.3.** La función  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  si y sólo si existe una transformación lineal  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  que satisface

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0$$

La transformación lineal  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  se llama “la derivada de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$ ”.  $\mathbf{f}$  es diferenciable en  $E$ , si  $\mathbf{f}$  es diferenciable en cada punto  $\mathbf{x} \in E$  y además  $D\mathbf{f}$  es una aplicación de  $E$  en  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , esto es  $D\mathbf{f} : E \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 2.1.1.** Sean  $E$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{x}_0 \in E$ . Si  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0$ , entonces  $\mathbf{f}$  es continua en  $\mathbf{x}_0$ .

**Teorema 2.1.2.** Sean  $E$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ . Si  $\mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0 \in E$ , entonces existen las derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$  con  $i, j = 1, \dots, n$ . Además para todo  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} x_j.$$

donde cada  $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_n(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} \right)$  es un vector columna en  $\mathbb{R}^n$ .

**Observación 2.1.2.** Si  $\mathbf{f}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}_0$ , entonces  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , y la matriz de representación de esta transformación lineal con respecto a la base canónica es llamada la matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$  de tamaño  $n$ , que denotaremos también por  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , luego

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

**Observación 2.1.3.** La existencia de todas las derivadas parciales  $\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}$ ;  $i, j = 1, \dots, n$  de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$  o equivalentemente la existencia de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  no garantiza la diferenciabilidad de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$ .

**Definición 2.1.4.** Sea  $E$  subconjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable en  $E$ . Se dice que  $\mathbf{f}$  es continuamente diferenciable en  $E$ ,  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , si  $D\mathbf{f}$  es continua en  $E$ .

**Teorema 2.1.3.** Sean  $E$  subconjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función. Entonces  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , si y sólo si las derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ;  $i, j = 1, \dots, n$  existen y son continuas en  $E$ .

**Observación 2.1.4.** Sean  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Las derivadas de orden superior de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0 \in E$  se denotan por  $D^k \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  y se tiene que  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in C^k(E)$  si y solo si las derivadas parciales

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}.$$

con  $i, j_1, \dots, j_k = 1, \dots, n$ , existen y son continuas en  $E$ .

En particular  $D^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : U \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un operador bilineal tal que para  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times U$  se tiene

$$D^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j_1, j_2=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} x_{j_1} y_{j_2}$$

donde cada  $\frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} = \left( \frac{\partial^2 f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}, \dots, \frac{\partial^2 f_n(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \right)$  es un vector columna en  $\mathbb{R}^n$ . Fórmulas similares son válidas para  $D^k \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \underbrace{U \times \dots \times U}_{k \text{ factores}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  operador multilinear de orden  $k$ . Los

conceptos de operadores bilineales y multilineales se pueden consultar en [?].

**Definición 2.1.5.** Sean  $U$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ . Se dice que  $\mathbf{f}$  es analítica en  $U$  si cada componente  $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , es analítica en  $U$ , es decir, si para cada  $j = 1, \dots, n$  y para cada  $\mathbf{x}_0 \in U$ ,  $f_j$  tiene una serie de Taylor que converge uniformemente a  $f_j$  en una vecindad de  $\mathbf{x}_0$  en  $U$ .

## 2.2. Teorema fundamental de existencia y unicidad

En esta sección, establecemos el teorema fundamental de existencia y unicidad para un sistema autónomo no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

bajo la hipótesis de que  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Para demostrar esto se utiliza el método clásico de aproximaciones sucesivas de Picard. Hay un enfoque más moderno basado en el mapeo de contracciones, dicho enfoque aparece en la sección de ejercicios (ejercicio 5, página 78 Perko). El método de aproximaciones sucesivas no sólo nos permite establecer la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial asociado con (2.6), sino que también nos permite establecer la continuidad y diferenciabilidad de la solución con respecto a las condiciones y parámetros iniciales, esto se hace en la siguiente sección. El método también se utiliza en la prueba del Teorema de la variedad estable en la Sección 2.7 y en la demostración de Hartman-Grobman Teorema de la sección 2.8. El método de aproximaciones sucesivas es uno de las herramientas básicas utilizadas en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Definición 2.2.1.** Sea  $\mathbf{f} \in C(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathbf{x}(t)$  es una solución de la ecuación diferencial (2.6) sobre un intervalo  $I$  si:

- (a)  $\mathbf{x}(t)$  es diferenciable en  $I$ ,
- (b) Si para todo  $t \in I$ ,  $\mathbf{x}(t) \in E$ ,
- (c)  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ .

Además,  $\mathbf{x}(t)$  es una solución del problema del valor inicial con  $\mathbf{x}_0 \in E$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

sobre el intervalo  $I$ , si:

- (a)  $t_0 \in I$ ,
- (b)  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ,
- (c)  $\mathbf{x}(t)$  es una solución de la ecuación diferencial (2.6) en el intervalo  $I$ .

Para aplicar el método de aproximaciones sucesivas en la demostración de la existencia de una solución de (2.6), necesitamos definir el concepto condición de Lipschitz y mostrar que las funciones  $C^1$  son localmente Lipschitz.

**Definición 2.2.2.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Una función  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que satisface la condición de Lipschitz en  $E$ , si existe una constante positiva  $K$  tal que para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| < K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

La función  $\mathbf{f}$  se dice que es localmente Lipschitz en  $E$  si para cada punto  $\mathbf{x}_0 \in E$  existe una  $\varepsilon$ -vecindad de  $\mathbf{x}_0$ ,  $N_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset E$  y una constante  $K_0 > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| < K_0 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Por una  $\varepsilon$ -vecindad del punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , nos referimos a una bola abierta de radio  $\varepsilon > 0$

$$N_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon\}$$

**Corolario 2.2.1.** Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , entonces  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz en  $E$ .

*Demostración.* Dado que  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y que  $\mathbf{x}_0 \in E$ , existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $N_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset E$ . Sea

$$K = \max_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}} \|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\|,$$

el máximo de la función continua  $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$  en el conjunto compacto  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , y sea  $N_0 = N_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ . Dado que  $N_0$  es un conjunto convexo, entonces para cada  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N_0$ , se tiene que  $\mathbf{x} + s\mathbf{u} \in N_0$  con  $0 \leq s \leq 1$  donde  $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ . Ahora, si definimos la función  $\mathbf{F} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + s\mathbf{u})$ , por la regla de la cadena tenemos  $\mathbf{F}'(s) = D\mathbf{f}(\mathbf{x} + s\mathbf{u})\mathbf{u}$ , y aplicando teorema fundamental del cálculo a  $F$  en  $[0, 1]$ , tenemos entonces

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds,$$

así

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_0^1 Df(\mathbf{x} + s\mathbf{u})\mathbf{u} ds$$

luego,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq \int_0^1 |D\mathbf{f}(\mathbf{x} + s\mathbf{u})\mathbf{u}| ds \leq \int_0^1 \|D\mathbf{f}(\mathbf{x} + s\mathbf{u})\| |\mathbf{u}| ds \leq K |\mathbf{u}| = K |\mathbf{y} - \mathbf{x}|.$$

□

**Observación 2.2.1.** La base del método de aproximaciones sucesivas de Picard radica en el hecho de que la solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

es una función continua que satisface la ecuación integral

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds.$$

La sucesión de aproximaciones para encontrar la solución de esta ecuación integral se define por la siguiente sucesión recursiva de funciones

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0(t) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{u}_k(s)) ds, \end{cases} \quad (2.8)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$

Para ilustrar la mecánica involucrada en el método de aproximaciones sucesivas, se usa el método para resolver un simple problema de una ecuación diferencial lineal como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo.** Usar el método de aproximaciones sucesivas para resolver el problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Es claro en este caso que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = ax$ . Si se considera

$$\begin{cases} u_0(t) = x_0 \\ u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s))ds. \end{cases} \quad \text{donde } f(u_k(s)) = au_k(s)$$

con

$$u_0(t) = x_0.$$

Realizando los respectivos cálculos,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_0(s))ds = x_0 + \int_0^t ax_0ds = x_0 + ax_0t \\ &= x_0(1 + at). \\ u_2(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_1(s))ds = x_0 + \int_0^t ax_0(1 + as)ds = x_0 + ax_0 \left( s + \frac{1}{2}as^2 \right)_0^t \\ &= x_0 \left( 1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 \right). \\ u_3(t) &= x_0 + \int_0^t f(u_2(s))ds = x_0 + \int_0^t ax_0(1 + as + \frac{1}{2}a^2s^2)ds \\ &= x_0 \left( 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 \right). \end{aligned}$$

Es claro por inducción que

$$u_k(t) = x_0 \left( 1 + at + \cdots + \frac{1}{k!}a^kt^k \right)$$

y por tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = x_0 e^{at},$$

es decir, la sucesión de aproximaciones convergen a

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

que es la solución del problema del valor inicial propuesto.

**Observación 2.2.2.** Para mostrar que la sucesión de aproximaciones (2.8) converge a la solución del problema de valor inicial (2.7) en un intervalo  $I = [-a, a]$  es necesario recordar lo visto en la sección 1.3 donde vimos los conceptos de espacios normados, en particular el espacio de todas las funciones continuas en el intervalo  $I = [-a, a]$ ,  $C(I)$  con la norma  $\|\cdot\|_\infty$  es un espacio completo, esto es, toda sucesión de Cauchy converge en norma  $\|\cdot\|_\infty$  y además recordar que la convergencia en dicha norma es equivalente a la convergencia uniforme.

**Teorema 2.2.2.** (Teorema Fundamental de Existencia-Unicidad). Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$  y supongamos que  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , entonces existe un  $a > 0$  tal que el problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

tiene solución única  $\mathbf{x}(t)$  en el intervalo  $I = [-a, a]$ .

*Demostración.* Dividimos la demostración de este teorema en tres partes.

- (i) Demostrar que la sucesión de aproximaciones esté bien definida y sean continuas.
- (ii) Demostrar que la sucesión de aproximaciones es de Cauchy y por tanto converge uniformemente a  $\mathbf{x}(t)$ .
- (ii) Demostrar unicidad de la solución del problema de valor inicial.

En esta vía, es claro que  $f \in C^1(E)$ , implica que  $f$  es localmente Lipschitz en  $E$ , es decir, para  $\mathbf{x}_0 \in E$ , existe una vecindad  $N_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset E$  y una constante  $K > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ ,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Tomando  $b = \frac{\varepsilon}{2}$ , la función continua  $f(\mathbf{x})$  es acotada en el conjunto compacto  $N_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b\}$ , sea  $M = \max_{\mathbf{x} \in N_0} |f(\mathbf{x})|$ .

(i) **La sucesión de aproximaciones  $u_k(t)$  bien definidas y continuas.** Se prueba que  $u_0(t) = x_0$  es bien definida y es continua, ya que  $x_0 \in E$ . Supongamos ahora la hipótesis de inducción, es decir, que existe un  $a > 0$  tal que  $u_k(t)$  está bien definida, es continua en el intervalo  $[-a, a]$  y satisface

$$\max_{[-a, a]} |\mathbf{u}_k(t) - \mathbf{x}_0| \leq b. \quad (2.9)$$

Demostremos que  $\mathbf{u}_{k+1}(t)$  está bien definida, es continua en  $[-a, a]$  y satisface (2.9). Como  $\mathbf{f}$  es continua entonces  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_k(t))$  es continua y está bien definida en  $[-a, a]$  ¿por qué?. Por tanto

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{u}_k(s)) ds$$

también está definida y es continua en  $[-a, a]$ . Además satisface

$$|\mathbf{u}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_0| \leq \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{u}_k(s))| ds \leq Ma \quad \text{para todo } t \in [-a, a] \quad \text{¿por qué?}$$

De lo anterior se concluye que para  $0 < a < \frac{b}{M}$ , la sucesión de funciones  $\mathbf{u}_k(t)$  están bien definidas, son continuas y satisfacen (2.9) para todo  $t \in [-a, a]$  y para todo  $k = 0, 1, \dots$

(ii) **La sucesión de aproximaciones  $\mathbf{u}_k(t)$  es de Cauchy.** Dado que para todo  $t \in [-a, a]$ ,  $\mathbf{u}_k(t) \in N_0$  con  $k = 0, 1, \dots$  y  $\mathbf{f}$  satisface la condición de Lipschitz entonces para todo  $t \in [-a, a]$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)| &= \left| \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{u}_1(s)) ds - \mathbf{x}_0 - \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{u}_0(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{u}_1(s)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_0(s))| ds \\ &\leq K \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_0(s)| ds \\ &\leq Ka \max_{[-a, a]} |\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{x}_0| \\ &\leq Kab \end{aligned}$$

Asumiendo como hipótesis de inducción,

$$\max_{[-a, a]} |\mathbf{u}_j(t) - \mathbf{u}_{j-1}(t)| \leq (Ka)^{j-1} b \quad \text{con } j > 2 \quad (2.10)$$

se deduce, que para todo  $t \in [-a, a]$

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{j+1}(t) - \mathbf{u}_j(t)| &\leq \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{u}_j(s)) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{j-1}(s))| ds \\ &\leq K \int_0^t |\mathbf{u}_j(s) - \mathbf{u}_{j-1}(s)| ds \\ &\leq Ka \max_{[-a, a]} |\mathbf{u}_j(t) - \mathbf{u}_{j-1}(t)| \\ &\leq (Ka)^j b \end{aligned}$$

luego, es claro entonces que (2.10) se cumple para todo  $j = 2, \dots$ . Por otro lado, y considerando  $\alpha = Ka$  y eligiendo  $0 < a < \frac{1}{K}$ , tenemos que para  $m > k > N$  y  $t \in [-a, a]$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_m(t) - \mathbf{u}_k(t)| &\leq \sum_{j=k}^{m-1} |\mathbf{u}_{j+1}(t) - \mathbf{u}_j(t)| \leq \sum_{j=N}^{\infty} |\mathbf{u}_{j+1}(t) - \mathbf{u}_j(t)| \\ &\leq \sum_{j=N}^{\infty} \alpha^j b = b (\alpha^N + \alpha^{N+1} + \dots + \alpha^{N+r-1} + \dots) \\ &= b \alpha^N \lim_{r \rightarrow \infty} (1 + \alpha + \dots + \alpha^{r-1}) = b \alpha^N \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1 - \alpha^r}{1 - \alpha} \quad (\alpha < 1) \\ &\leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} b. \end{aligned}$$

Como  $\frac{\alpha^N}{1 - \alpha} b \rightarrow 0$  cuando  $N \rightarrow +\infty$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $N$  tal que si  $m, k > N$  implica

$$\|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_k\| = \max_{[-a, a]} |\mathbf{u}_m(t) - \mathbf{u}_k(t)| < \varepsilon.$$

Es decir,  $\{\mathbf{u}_k\}$  es una sucesión de Cauchy de funciones continuas en  $C([-a, a])$ . Por tanto  $u_k(t)$  converge uniformemente a una función continua  $u(t)$  para todo  $t \in [-a, a]$  **¿por qué?**, esto es,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) = u(t).$$



Ahora aplicando límite a ambos lados de la ecuación que define la sucesión de aproximaciones,

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t f(\mathbf{u}_k(s))ds,$$

se tiene,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t f(\mathbf{u}(s))ds, \quad (2.11)$$

para todo  $t \in [-a, a]$  ¿por qué?. De la continuidad tanto de  $\mathbf{u}(t)$  como de  $\mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$  y por teorema fundamental del cálculo, tenemos que (2.11) es diferenciable y  $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$ , además  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{x}_0$  y por (2.9)  $\mathbf{u}(t) \in N_0$ , para todo  $t \in [-a, a]$ . Hasta aquí hemos demostrado la existencia de una solución del problema de valor inicial (2.2.2), la cuál es  $\mathbf{u}(t)$  que satisface (2.11).

(iii) **Unicidad de la solución.** Supongamos que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dos soluciones del problema de valor inicial (2.2.2) en  $[-a, a]$ , y que estas soluciones satisfacen (2.11), entonces, la función  $|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)|$  es continua y por tanto alcanza su valor máximo en algún  $t_1 \in [-a, a]$ , entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &= \max_{[-a, a]} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)| = |\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{v}(t_1)| \\ &= \left| \int_0^{t_1} (\mathbf{f}(\mathbf{u}(s)) - \mathbf{f}(\mathbf{v}(s))) ds \right| \leq \int_0^{t_1} |\mathbf{f}(\mathbf{u}(s)) - \mathbf{f}(\mathbf{v}(s))| ds \\ &\leq K \int_0^{t_1} |\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)| ds \leq Ka \max_{[-a, a]} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)| \\ &\leq Ka \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \end{aligned}$$

Como  $Ka < 1$ , entonces  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$  pero esta desigualdad solo se puede satisfacer si  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0$ , por lo tanto,  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$  en  $[-a, a]$ . □

Hemos demostrado que la sucesión de aproximaciones (2.8) convergen uniformemente a la única solución al problema de valor inicial (2.2.2) en el intervalo  $[-a, a]$  donde  $a$  es cualquier número que satisfaga  $0 < a < \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right)$ .

**Observación 2.2.3.** Con el mismo método se puede probar que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

tiene una solución única en algún intervalo  $[t_0 - a, t_0 + a]$ .

**Observación 2.2.4.** El siguiente enunciado muestra condiciones suficientes de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  para garantizar existencia y unicidad de la solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema de valor inicial del sistema no autónomo no lineal

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

**Ejercicio.** Utilice el método de aproximaciones sucesivas para demostrar que si  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  es continua en  $t$  para todo  $t$  en algún intervalo que contiene  $t = 0$  y continuamente diferenciable en  $\mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x}$  en algún conjunto abierto  $E \subset \mathbb{R}^n$  que contiene  $\mathbf{x}_0$ , entonces existe un  $a > 0$  tal que

el problema de valor inicial (2.12) tiene solución única  $\mathbf{x}(t)$  en el intervalo  $[-a, a]$ .

**Sugerencia:** Defina  $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{x}_0$  y

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t f(s, \mathbf{u}_k(s)) ds$$

y demuestre que las aproximaciones sucesivas  $\mathbf{u}_k(t)$  convergen uniformemente a  $\mathbf{x}(t)$  en  $[-a, a]$  como en la demostración del Teorema fundamental de existencia unicidad.

## 2.3. Dependencia de condiciones iniciales y parámetros

En los sistemas de ecuaciones diferenciales, tanto las condiciones iniciales como los parámetros juegan un papel importante para determinar el comportamiento y la solución del sistema. Es claro que las condiciones iniciales son necesarias para determinar una solución particular. Si no se proporcionan las condiciones iniciales, la solución general del sistema puede tener múltiples soluciones posibles, es decir, las condiciones iniciales restringen estas posibilidades y conducen a una solución única y pueden afectar la estabilidad y el comportamiento de largo plazo del sistema dinámico. Los parámetros son constantes que aparecen en las ecuaciones diferenciales y pueden influir en el comportamiento del sistema, ellos pueden representar propiedades físicas, características de los componentes del sistema, tasas de cambio, tasas de interacción, etc. Cambiar los valores de los parámetros puede alterar significativamente la dinámica del sistema. Algunos parámetros pueden ser fijos y conocidos con precisión, mientras que otros pueden ser variables que se ajustan o se estiman a partir de datos experimentales.

La dependencia de las condiciones iniciales y los parámetros en un sistema de ecuaciones diferenciales puede ser muy compleja y requerir técnicas analíticas o computacionales para comprender completamente el sistema. En sistemas no lineales se tiene que a pequeños cambios en las condiciones iniciales o los parámetros pueden conducir a resultados cualitativamente diferentes, como bifurcaciones, caos o estabilidad asintótica en diferentes puntos de equilibrio.

En esta sección se considera el problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y} \end{cases} \quad (2.13)$$

y se hace un estudio y análisis de:

- (i) La dependencia de la solución del problema de valor inicial (2.14) sobre la condición inicial  $\mathbf{y}$ , es decir la solución  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  depende de  $\mathbf{y}$ .
- (ii) La dependencia de la solución del problema de valor inicial (2.14), cuando la ecuación diferencial depende de un parámetro  $\mu \in \mathbb{R}^m$ , es decir, cuando  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  en (2.14) se reemplaza por  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ , en este caso la solución  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y}, \mu)$  también dependerá del parámetro  $\mu$ .

Mas o menos, la dependencia de la solución  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y}, \mu)$  de la condición inicial  $\mathbf{y}$  y el parámetro  $\mu$  es tan continuo como la función  $\mathbf{f}$ . Para establecer este tipo de dependencia continua de la solución de las condiciones iniciales y parámetros, se establece un resultado propuesto por T.H. Gronwall.

**Lema 2.3.1.** (*Lema de Gronwall*). Sea  $g(t)$  es una función continua de valor real que satisface  $g(t) \geq 0$  y

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s) ds$$

para todo  $t \in [0, a]$  donde  $C$  y  $K$  son constantes positivas. Entonces para todo  $t \in [0, a]$ ,

$$g(t) \leq Ce^{Kt}.$$

*Demostración.* Haciendo  $H(t) = C + K \int_0^t g(s) ds$  para todo  $t \in [0, a]$ , se tiene que  $0 < g(t) \leq H(t)$  para todo  $t \in [0, a]$ . Por teorema fundamental de cálculo, tenemos entonces  $H'(t) = Kg(t)$  para todo  $t \in [0, a]$ , luego

$$\frac{H'(t)}{H(t)} = \frac{Kg(t)}{H(t)} \leq \frac{KH(t)}{H(t)} = K, \quad \text{para todo } t \in [0, a]$$

Así,

$$\frac{d}{dt} (\ln H(t)) \leq K \Rightarrow \ln H(t) \leq Kt + \ln H(0) \Rightarrow H(t) \leq H(0)e^{Kt} = Ce^{Kt} \quad \forall t \in [0, a].$$

Como  $g(t) \leq H(t)$  para todo  $t \in [0, a]$ , entonces  $g(t) \leq Ce^{Kt}$  para todo  $t \in [0, a]$  ■ □

**Teorema 2.3.2.** (*Dependencia de condiciones iniciales*). Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Entonces existe un  $a > 0$  y  $\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ , el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y} \end{cases} \quad (2.14)$$

tiene una solución única  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  con  $\mathbf{u} \in C^1(G)$  donde  $G = [-a, a] \times N_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ; además, para cada  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  es una función dos veces continuamente diferenciable con respecto a  $t$  para todo  $t \in [-a, a]$ .

*Demostración.* Como  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ ,  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz en  $E$ , es decir, para cada  $\mathbf{x}_0 \in E$ , existe una vecindad  $N_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset E$  y una constante  $K > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  se tiene que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Consideremos el compacto  $N_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ ,  $N_0 \subset N_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ . Dado que  $\mathbf{f}$  y  $D\mathbf{f}$  son continuas en  $N_0$ , se considera  $M_0 = \max_{\mathbf{x} \in N_0} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|$  y  $M_1 = \max_{\mathbf{x} \in N_0} \|D\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ .

(i) Se pruebe que la sucesión de aproximaciones son continuas y están bien definidas. Entonces, para  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  con  $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ , se define la sucesión de aproximaciones  $\mathbf{u}_k(t, \mathbf{y})$  dada por:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0(t, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \\ \mathbf{u}_{k+1}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{y} + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{u}_k(s, \mathbf{y})) ds. \end{cases} \quad (2.15)$$

y se prueba por inducción que  $\mathbf{u}_k(t, \mathbf{y})$  están bien definidas y son continuas para todo  $(t, \mathbf{y}) \in G = [-a, a] \times N_\delta(\mathbf{x}_0)$  y para todo  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ ,

$$\|\mathbf{u}_k(\cdot, \mathbf{y}) - \mathbf{x}_0\| = \max_{[-a, a]} |\mathbf{u}_k(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.16)$$

con  $a \leq \frac{\varepsilon}{4M_0}$ . El estudiante puede hacer estos cálculos

(ii) Probar que la sucesión de aproximaciones es una sucesión de Cauchy y por tanto converge uniformemente. El estudiante puede demostrar por inducción que:

$$\|\mathbf{u}_{k+1}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{u}_k(t, \mathbf{y})\| \leq (Ka)^k \varepsilon$$

para todo  $(t, \mathbf{y}) \in G = [-a, a] \times N_\delta(\mathbf{x}_0)$  y en consecuencia verificar que  $\{\mathbf{u}_k(t, \mathbf{y})\}$  es una sucesión de Cauchy para todo  $(t, \mathbf{y}) \in G = [-a, a] \times N_\delta(\mathbf{x}_0)$  con  $a < \frac{1}{K}$ . Por tanto la sucesión converge uniformemente a una función continua  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  en  $G$ . Aplicando límite cuando  $k \rightarrow \infty$  a la sucesión recursiva (2.15), se tiene

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{y} + \int_0^t f(\mathbf{u}(s, \mathbf{y})) ds, \quad (t, \mathbf{y}) \in G. \quad (2.17)$$

para todo  $(t, \mathbf{y}) \in G$ , además  $\mathbf{u}(0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ . Por la inecuación (2.16) se tiene que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y}) \in N_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0)$  para todo  $(t, \mathbf{y}) \in G$ . Aplicando el teorema fundamental del cálculo y regla de la cadena a la ecuación (2.17) se sigue que  $\dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{y}) = f(\mathbf{u}(t, \mathbf{y}))$  y  $\ddot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{y}) = Df(\mathbf{u}(t, \mathbf{y}))\dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{y})$ , para todo  $(t, \mathbf{y}) \in G$ , entonces  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  es dos veces continuamente diferenciable con respecto a  $t$  y es solución al problema de valor inicial (2.14) para todo  $(t, \mathbf{y}) \in G$ .

(iii) La demostración de que  $u(t, \mathbf{y})$  es la única solución al problema al valor inicial (2.14), es análogo a lo demostrado en el Teorema de existencia-unicidad.

(iii) Probar que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  es continuamente diferenciable con respecto  $\mathbf{y}$  para todo  $(x, \mathbf{y}) \in G$ . Para ello es necesario probar que dado  $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0 + \mathbf{h} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  por Lema de Gronwall se tiene la siguiente desigualdad

$$|\mathbf{u}(t, \mathbf{y}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{u}(t, \mathbf{y}_0)| \leq |\mathbf{h}|e^{K|t|} \quad (2.18)$$

para todo  $t \in [-a, a]$ . Leer [Perko](#), página 82 y 83.  $\square$

**Observación 2.3.1.** *Teniendo en cuenta los resultados del teorema anterior y dado que si  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y}_0)$  es solución al problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

para todo  $t \in [-a, a]$  con  $\mathbf{y}_0 \in N_{\delta/2}(\mathbf{x}_0)$ , entonces  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y}_0) = \Phi(t, \mathbf{y}_0)$ , donde  $\Phi(t, \mathbf{y}_0)$  es la matriz solución fundamental del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\Phi} &= A(t, \mathbf{y}_0)\Phi \\ \Phi(0) &= I \end{cases} \quad (2.20)$$

donde  $A(t, \mathbf{y}_0) = Df(u(t, \mathbf{y}_0))$ .

Del Teorema anterior se tiene la siguiente proposición, su demostración queda como **ejercicio**.

**Proposición 2.3.1.** *Bajo la hipótesis del teorema anterior.*

$$\Phi(t, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y})$$

para todo  $t \in [-a, a]$  y  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  si y sólo si  $\Phi(t, \mathbf{y})$  es la matriz solución fundamental de

$$\begin{cases} \dot{\Phi} &= Df[\mathbf{u}(t, \mathbf{y})] \Phi \\ \Phi(0, \mathbf{y}) &= I \end{cases}$$

para todo  $t \in [-a, a]$  y  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ .

**Observación 2.3.2.** *Una prueba similar muestra: Si  $\mathbf{f} \in C^r(E)$  entonces la solución  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  del problema de valor inicial (2.14) es de clase  $C^r(G)$  donde  $G$  se define como en el teorema anterior. Y si  $\mathbf{f}$  es una función analítica (real) para en  $E$  entonces  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  es analítica en el interior de  $G$*

**Observación 2.3.3.** *Si  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio de (2.14), es decir,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$  tal que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces*

$$\Phi(t, \mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{x}_0)$$

satisface,

$$\begin{cases} \dot{\Phi} &= Df(\mathbf{x}_0) \Phi \\ \Phi(0, \mathbf{x}_0) &= I. \end{cases}$$

De acuerdo con el teorema fundamental para sistemas lineales se tiene entonces,

$$\Phi(t, \mathbf{x}_0) = e^{Df(\mathbf{x}_0)t}$$

**Observación 2.3.4.** *De la continuidad de la solución  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y})$  del problema de valor inicial (2.14) se tiene que para cada  $t \in [-a, a]$ ,*

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{u}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}_0).$$

De la desigualdad (2.18) se deduce que este límite es uniforme para cada  $t \in [-a, a]$ .

**Teorema 2.3.3. (Dependencia de los parámetros).** *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^{n+m}$  que contiene el punto  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$  donde  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Entonces, existe un  $a > 0$  y  $\delta > 0$  tal que para todos  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  y  $\mu \in N_\delta(\mu_0)$  el problema de valor inicial.*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y} \end{cases}$$

ón única  $\mathbf{u}(t, \mathbf{y}, \mu)$  con  $\mathbf{u} \in C^1(G)$  donde  $G = [-a, a] \times N_\delta(\mathbf{x}_0) \times N_\delta(\mu_0)$ .

*Demostración.* La demostración se sigue inmediatamente del teorema anterior al reemplazar los vectores  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{y}$  por los vectores  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ ,  $(\mathbf{x}, \mu)$ ,  $(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$  y  $(\mathbf{y}, \mu)$  respectivamente o se puede demostrar directamente utilizando el lema de Gronwall y el método de aproximaciones sucesivas como en el siguiente ejercicio.  $\square$

**Ejercicio.** Sea  $E$  un subconjunto abierto en  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  que contiene un punto  $(0, \mathbf{x}_0, \mu_0)$  donde  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$  y sea  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  funciones continuas en  $E$ . Utilice el Lema de Gronwall y el método de aproximaciones sucesivas para demostrar que existe un  $a > 0$  y un  $\delta > 0$  tal que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

tiene solución única  $u(t, \mu)$  continua en  $[-a, a] \times N_\delta(\mu_0)$ .

## 2.4. Intervalo maximal de existencia.

El estudio del intervalo maximal en los sistemas de ecuaciones diferenciales es de suma importancia, pues determinarlo garantiza que la solución encontrada sea válida dentro de ese intervalo. Conocer el intervalo maximal permite predecir el comportamiento futuro de un sistema de ecuaciones diferenciales. Si el intervalo es finito, indica que la solución se mantiene dentro de ciertos límites temporales o condiciones iniciales, lo que puede ser crucial para comprender la dinámica del sistema a largo plazo. El intervalo maximal también puede proporcionar información sobre la estabilidad del sistema, es decir cuando el intervalo maximal es infinito, puede sugerir que el sistema es estable y que la solución permanece definida para todo tiempo futuro. Por otro lado, si el intervalo es finito, puede indicar la presencia de fenómenos transitorios o inestabilidades en el sistema.

En este capítulo se hará un estudio de las siguientes proposiciones:

(1) Si  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  entonces el problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.21)$$

donde  $E$  abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{x}_0 \in E$ , tiene una única solución  $\mathbf{x}(t)$  definida en algún intervalo maximal de existencia  $(\alpha, \beta)$ .

(2) Si  $\beta$  es finito y si el límite

$$\lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1$$

entonces  $\mathbf{x}_1 \in \partial E$ , la frontera de  $E$ . La frontera de un conjunto abierto de  $E$ ,  $\partial E = \overline{E} \setminus E$  donde  $\overline{E}$  denota la clausura o la adherencia de  $E$ .

(3) Si  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_1 \in E$ , entonces  $\beta = \infty$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_1$  se llamará punto de equilibrio de (1).

Con el fin de ilustrar esta idea, podemos considerar los siguientes ejemplos:

**Ejemplo.** Considere el problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

el cual tiene como solución  $x(t) = \frac{1}{1-t}$  y su intervalo máximo de existencia es  $(\alpha, \beta) = (-\infty, 1)$ , además,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbf{x}(t) = \infty$$

**Ejemplo.** El problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{2x} \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

tiene la solución  $x(t) = \sqrt{1-t}$  definida en su intervalo máximo de existencia  $(\alpha, \beta) = (-\infty, 1)$ . Observe que la función  $f(x) = \frac{1}{2x} \in C^1(E)$  donde  $E = (0, \infty)$ ,  $\partial E = \{0\}$  y además

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \mathbf{x}(t) = 0 \in \partial E$$

**Ejemplo.** Considere el problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{x_2}{x_3^2} \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{x_3^2} \\ \dot{x}_3 &= 1 \end{cases}$$

con  $\mathbf{x}(\frac{1}{\pi}) = (0, -1, \frac{1}{\pi})$ . Por un lado, si se resuelve la tercera ecuación,

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 = 1 &\Rightarrow dx_3 = dt \\ &\Rightarrow x_3 = t + c_3 \quad y \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + c_3 \\ &\Rightarrow c_3 = 0 \quad y \quad x_3 = t \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{x_2}{t^2} \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{t^2} \end{aligned}$$

Haciendo  $s = \frac{1}{t}$  con  $t \neq 0$ , aplicando regla de la cadena el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{ds} = x_2 \\ \frac{dx_2}{ds} = -x_1 \end{cases}; \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Entonces

$$\mathbf{x}(s) = \begin{pmatrix} \cos(-s) & -\sin(-s) \\ \sin(-s) & \cos(-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{t}\right) & \sin\left(\frac{1}{t}\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{t}\right) & \cos\left(\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & \sin(\pi) \\ -\sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

se tiene que  $c_1 = 0, c_2 = 1$ , así

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{t}\right) & \sin\left(\frac{1}{t}\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{t}\right) & \cos\left(\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \\ \cos\left(\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}$$

y la solución del problema de valor inicial es

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{t} \\ \cos \frac{1}{t} \\ t \end{pmatrix}$$

sobre el intervalo máximo  $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ . La siguiente figura, muestra su diagrama de fase

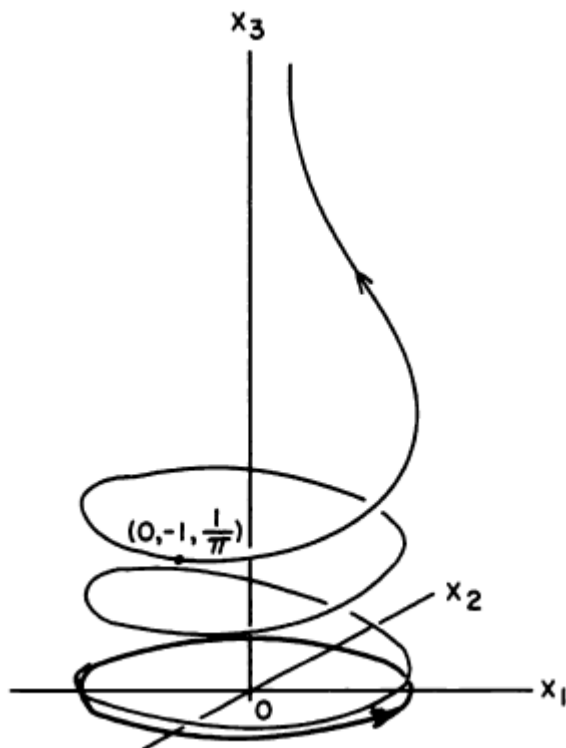


Figura solución del ejemplo 3.

**Observación 2.4.1.** Es importante tener en cuenta, lo siguiente:

(1) Para el extremo finito  $\alpha = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{x}(t)$  no existe.



(2) La longitud del arco

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\pi}}^t |\dot{\mathbf{x}}(\tau)| d\tau &= \int_{\frac{1}{\pi}}^t \sqrt{(\dot{x}_1(\tau))^2 + (\dot{x}_2(\tau))^2 + (\dot{x}_3(\tau))^2} d\tau = \int_{\frac{1}{\pi}}^t \frac{\sqrt{(x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau) + 1)}}{x_3^2(\tau)} d\tau \\ &\geq \int_{\frac{1}{\pi}}^t \frac{\sqrt{x_1^2(\tau) + x_2^2(\tau)}}{x_3^2(\tau)} d\tau = \int_{\frac{1}{\pi}}^t \frac{d\tau}{\tau^2} = \frac{1}{t} - \pi \rightarrow \infty \end{aligned}$$

cuando  $t \rightarrow 0^+$ .

A continuación establece algunas condiciones que garantizan la existencia y algunas propiedades básicas del intervalo máximo o intervalo de existencia  $(\alpha, \beta)$  de la solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema de valor inicial (2.21).

**Lema 2.4.1.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$  y suponga  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Sean  $\mathbf{u}_1(t)$  y  $\mathbf{u}_2(t)$  soluciones del problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

sobre los intervalos  $I_1$  e  $I_2$ . Entonces  $0 \in I_1 \cap I_2$  y si  $I$  es cualquier intervalo abierto que contiene a 0 y está contenido en  $I_1 \cap I_2$ , se deduce que  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$  para todo  $t \in I$ .

*Demostración.* Dado que  $\mathbf{u}_1(t)$  y  $\mathbf{u}_2(t)$  son soluciones del problema del valor inicial (2.21) definidas en  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente, entonces  $0 \in I_1 \cap I_2$ . Si  $I$  es un intervalo abierto tal que  $0 \in I$  y  $I \subset I_1 \cap I_2$ , entonces por la unicidad de las soluciones se tiene que  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$  en algún intervalo abierto  $(-a, a) \subset I$ . Sea  $I^*$  la unión de todos los abiertos contenidos en  $I$  para los cuales  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ , entonces  $I^*$  es el intervalo abierto más grande contenido en  $I$  en el que  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ .

Es claro que  $I^* \subseteq I$ , ahora si  $I^*$  es un subconjunto propio de  $I$ , entonces uno de extremos  $t_0$  de  $I^*$  es tal que  $t_0 \in I \subset I_1 \cap I_2$  y además por la continuidad de las soluciones  $\mathbf{u}_1(t)$  y  $\mathbf{u}_2(t)$  en  $I$  se tiene,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_0.$$

Luego, de la unicidad de soluciones se desprende que  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$  en algún intervalo  $I_0 = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$  y por lo tanto,  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$  en el intervalo  $I^* \cup I_0 \subset I$  y  $I^*$  es un subconjunto propio de  $I^* \cup I_0$ , lo cual es una contradicción, pues  $I^*$  es el intervalo abierto más grande contenido en  $I$  en el que  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ . Por lo tanto solo queda que  $I^* = I$  y tenemos entonces que  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$  para todo  $t \in I$ .  $\square$

**Teorema 2.4.2.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y suponga  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Entonces, para cada punto  $\mathbf{x}_0 \in E$ , existe un intervalo máximo  $J$  en el que el problema del valor inicial (2.21) tiene una solución  $\mathbf{x}(t)$  única. Es decir, si el problema de valor inicial tiene una solución  $\mathbf{y}(t)$  en un intervalo  $I$  entonces  $I \subset J$  e  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$  para todo  $t \in I$ . Además, el intervalo máximo  $J$  es abierto; es decir,  $J = (\alpha, \beta)$ .

*Demostración.* El teorema fundamental de existencia-unicidad garantiza que el problema del valor inicial (2.21) tiene solución única en algún intervalo abierto  $(-a, a)$ . Sea  $(\alpha, \beta)$  la unión de todos los intervalos abiertos  $I$  tales que (2.21) tiene una solución en  $I$ . Definamos una función  $\mathbf{x}(t)$  en  $(\alpha, \beta)$  de la siguiente manera: Dado  $t \in (\alpha, \beta)$ , entonces  $t$  está en algún intervalo abierto  $I$  donde (2.21) tiene solución  $\mathbf{u}(t)$  en  $I$ , para este  $t \in (\alpha, \beta)$  dado definimos  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t)$ . Entonces  $\mathbf{x}(t)$  es una función de  $t$  bien definida ya que si  $t \in I_1 \cap I_2$  donde  $I_1$  y  $I_2$  son dos intervalos abiertos cualesquiera tal que (2.21) tiene soluciones  $\mathbf{u}_1(t)$  y  $\mathbf{u}_2(t)$  en  $I_1$  y  $I_2$  respectivamente, entonces por el lema anterior  $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$  en el intervalo abierto  $I_1 \cap I_2$ . Además,  $\mathbf{x}(t)$  es una solución de (2.21) en  $(\alpha, \beta)$  debido a que cada punto  $t \in (\alpha, \beta)$  está contenido en un intervalo abierto  $I$  en el que el problema de valor inicial (2.21) tiene solución única  $\mathbf{u}(t)$  y dado que  $\mathbf{x}(t)$  coincide con  $\mathbf{u}(t)$  en  $I$ . El hecho de que  $J = (\alpha, \beta)$  sea abierto, se sigue del hecho de que cualquier solución de (2.21) sobre un intervalo  $(\alpha, \beta]$  puede ser única y continua hasta una solución sobre un intervalo  $(\alpha, \beta + \delta)$  con  $\delta > 0$ , como lo veremos en la demostración del siguiente teorema.  $\square$

**Definición 2.4.1.** El intervalo  $(\alpha, \beta)$  del Teorema 1 se llama *intervalo máximo de existencia de la solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema de valor inicial (2.21) o simplemente el intervalo máximo de existencia del problema del valor inicial (2.21)*.

**Teorema 2.4.3.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene  $\mathbf{x}_0$ , sea  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  y  $(\alpha, \beta)$  el intervalo máximo de existencia de la solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema del valor inicial (2.21). Si  $\beta < \infty$ , entonces, para todo compacto  $K \subset E$ , existe un  $t \in (\alpha, \beta)$  tal que  $\mathbf{x}(t) \notin K$ .

**Teorema 2.**

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que  $\mathbf{x}(t)$  es solución del problema del valor inicial (2.21) sobre el intervalo máximo de existencia  $(\alpha, \beta)$  con  $\beta < \infty$  y que existe un conjunto compacto  $K \subset E$  tal que  $\mathbf{x}(t) \in K$  para todo  $t \in (\alpha, \beta)$ . Dado que  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  y  $K \subset E$  compacto, existe  $M > 0$  tal que  $|\mathbf{f}(\mathbf{x})| < M$  para todo  $\mathbf{x} \in K$ .

Ahora garanticemos la existencia de  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t)$ . Si  $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$  entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2)| &\leq \left| \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds - \mathbf{x}_0 - \int_0^{t_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds \right| \\ &\leq \left| - \int_{t_1}^0 \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds - \int_0^{t_2} \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{f}(\mathbf{x}(s))| ds \leq M |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Es claro que a medida que  $t_1$  y  $t_2$  se aproximan a  $\beta$  desde la izquierda,  $|\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_2)| \rightarrow 0$ , y por el criterio de convergencia de Cauchy en  $\mathbb{R}^n$  (la completitud de  $\mathbb{R}^n$ ), se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t)$

existe,  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_1 \in K \subset E$  dado que  $K$  es compacto.

Si se define la función continua  $\mathbf{u}(t)$  en  $(\alpha, \beta]$  por

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) & \text{para } t \in (\alpha, \beta) \\ \mathbf{x}_1 & \text{para } t = \beta \end{cases},$$

y dado que  $\mathbf{u}(t)$  coincide con  $\mathbf{x}(t)$  solución del problema de valor inicial (2.21) en  $(\alpha, \beta)$  se sigue que:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\beta) &= \lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{u}(t) = \lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{x}(0) + \lim_{t \rightarrow \beta^-} \int_0^t f(\mathbf{x}(s)) ds \\ &= \mathbf{u}(0) + \lim_{t \rightarrow \beta^-} \int_0^t f(u(s)) ds \\ &= \mathbf{u}(0) + \int_0^\beta f(u(s)) ds.\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{u}(s)) ds$$

para todo  $t \in (\alpha, \beta]$ , Lo cual implica que  $\mathbf{u}$  es diferenciable en  $\beta$  y de hecho  $\mathbf{u}'(\beta) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(\beta))$ , es decir,  $\mathbf{u}(t)$  es una solución del problema del valor inicial (2.21) en  $(\alpha, \beta]$ . La función  $\mathbf{u}(t)$  se llama la continuación de la solución  $\mathbf{x}(t)$  sobre  $(\alpha, \beta]$ .

Dado que  $\mathbf{x}_1 \in E$ , por teorema fundamental de existencia-unicidad, el problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(\beta) &= \mathbf{x}_1 \end{cases}$$

tiene una solución única  $\mathbf{x}_1(t)$  en algún intervalo  $(\beta - a, \beta + a)$  y por el lema anterior,  $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{u}(t)$  en  $(\beta - a, \beta)$  y  $\mathbf{x}_1(\beta) = \mathbf{u}(\beta) = \mathbf{x}_1$ . Ahora, si se define

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t) & \text{para } t \in (\alpha, \beta) \\ \mathbf{x}_1(t) & \text{para } t \in [\beta, \beta + a), \end{cases}$$

entonces  $\mathbf{v}(t)$  es una solución del problema de valor inicial (2.21) en  $(\alpha, \beta + a)$ . Pero esto contradice el hecho de que  $(\alpha, \beta)$  es el intervalo máximo de existencia para el problema del valor inicial (1). Por lo tanto, si  $\beta < \infty$ , se deduce que para todo compacto  $K \subset E$  existe un  $t \in (\alpha, \beta)$  tal que  $\mathbf{x}(t) \notin K$ .  $\square$

**Observación 2.4.2.** Si  $(\alpha, \beta)$  es el intervalo máximo de existencia para el problema del valor inicial (1) entonces  $0 \in (\alpha, \beta)$ , los intervalos  $[0, \beta)$  y  $(\alpha, 0]$  se denominan intervalos maximal derecho e izquierdo respectivamente.

**Teorema 2.4.4.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$ , sea  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , y sea  $[0, \beta)$  el intervalo máximo de existencia de la solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema del valor inicial (2.21). Suponga que  $\beta < \infty$ . Entonces para cualquier conjunto compacto  $K \subset E$ , existe un  $t \in (0, \beta)$  tal que  $\mathbf{x}(t) \notin K$ .

*Demostración.* Es la misma que la del teorema 2.  $\square$

**Corolario 2.4.5.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene  $\mathbf{x}_0$ , sea  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  y sea  $(\alpha, \beta)$  el intervalo máximo de existencia de la solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema del valor inicial (2.21), si  $\beta < \infty$  y si el  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t)$  existe, entonces  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t) \in \partial E$ .

*Demostración.* Si  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1$ , entonces la función

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) & \text{para } t \in [0, \beta) \\ \mathbf{x}_1 & \text{para } t = \beta \end{cases}$$

es continua en  $[0, \beta]$ . Sea  $K$  la imagen del compacto  $[0, \beta]$  bajo la función continua  $\mathbf{u}(t)$

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{u}(t) \text{ para algún } t \in [0, \beta]\},$$

entonces,  $K$  es compacto y  $\mathbf{x}_1 \in K$ . Suponga que  $\mathbf{x}_1 \in E$ , entonces  $K \subset E$  y como  $\beta$  es finito, existirá un  $t_1 \in (0, \beta)$  tal que  $\mathbf{x}(t_1) \notin K$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\mathbf{x}_1 \notin E$ . Pero como  $\mathbf{x}(t) \in E$  para todo  $t \in [0, \beta)$ , entonces  $\mathbf{x}_1 = \lim_{t \rightarrow \beta^-} \mathbf{x}(t) \in \overline{E}$ . Por tanto  $\mathbf{x}_1 \in \partial E = \overline{E} \setminus E$ .  $\square$

**Corolario 2.4.6.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$ , sea  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , y  $[0, \beta)$  el intervalo máximo derecho de existencia de la solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema del valor inicial (2.21). Suponga que existe un conjunto compacto  $K \subset E$  tal que

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{x}(t) \text{ para algún } t \in [0, \beta)\} \subset K$$

Entonces se sigue que  $\beta = \infty$ ; es decir, el problema del valor inicial (2.21) tiene solución  $\mathbf{x}(t)$  en  $[0, \infty)$ .

*Demostración.* Este corolario es solo la contrarrecíproco del Teorema 3.  $\square$

**Lema 2.4.7.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $A$  un subconjunto compacto de  $E$ . Entonces, si  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz en  $E$ , entonces  $\mathbf{f}$  satisface la condición de Lipschitz en  $A$ .

*Demostración.* Contradicción. Supongamos que  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz en  $E$  y que  $\mathbf{f}$  no satisface la condición de Lipschitz en  $A \subset E$  con  $A$  compacto. Sea  $M = \max_{\mathbf{x} \in A} \{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}$  el máximo de la función continua  $\mathbf{f}$  sobre el compacto  $A$ . Dado que  $\mathbf{f}$  no cumple la condición de Lipschitz en  $A$ , entonces existen  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$  tales que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| > K |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \text{ para todo } K$$

En particular, existen sucesiones  $\mathbf{x}_n$  e  $\mathbf{y}_n$  en  $A$  tales que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)| > n |\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n| \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

Como  $A$  es compacto, existen subsecuencias convergentes que las renombramos  $\mathbf{x}_n$  e  $\mathbf{y}_n$  por simplicidad en la notación, tales que  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}^*$  con  $\mathbf{x}^*$  e  $\mathbf{y}^*$  en  $A$ . Se deduce que  $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*$  dado que para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$|\mathbf{y}^* - \mathbf{x}^*| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\mathbf{f}(\mathbf{y}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2M}{n}$$

Ahora dado que  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz en  $A$ , existe un vecindad  $N_0$  de  $\mathbf{x}^*$  y una constante  $k_0$  tal que  $\mathbf{f}$  satisface la condición de Lipschitz para todos los  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y} \in N_0$ . Pero como  $\mathbf{x}_n$  e  $\mathbf{y}_n$  se acercan a  $\mathbf{x}^*$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se sigue que  $\mathbf{x}_n$  e  $\mathbf{y}_n$  están en  $N_0$  para  $n$  suficientemente grande, es decir

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)| \leq k_0 |\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n|$$

Pero para  $n \geq k_0$ , esto contradice la desigualdad (2.23).  $\square$

**Teorema 2.4.8.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$ , sea  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Suponga que el problema del valor inicial (2.21) tiene solución  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . Entonces existe un  $\delta > 0$  y un constante  $K > 0$  tal que para todo  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  el problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y} \end{cases} \quad (2.24)$$

tiene solución única  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$  definida en  $[a, b]$  que satisface

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)| < |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| e^{Kt}$$

y

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{x}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$$

uniformemente para todo  $t \in [a, b]$ .

*Demostración.* Dado que  $[a, b]$  es compacto y  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$  es una función continua con respecto a  $t$ , entonces

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), a \leq t \leq b\}$$

es un subconjunto compacto de  $E$ . Dado que  $E$  es abierto, existe un  $\varepsilon > 0$  tal que el conjunto compacto

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)| \leq \varepsilon, a \leq t \leq b\}$$

es un subconjunto de  $E$ . Dado que  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , entonces  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz en  $E$  y por el lema 2,  $\mathbf{f}$  satisface la condición de Lipschitz en el compacto  $A$ , es decir

$$|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq K |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A.$$

Escogamos  $\delta > 0$  tan pequeño tal que  $\delta \leq \varepsilon$  y  $\delta \leq \varepsilon e^{-K(b-a)}$ . Sea  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  y sea  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$  la solución del problema de valor inicial (2.24) sobre su intervalo máximal existencia  $(\alpha, \beta)$ . La idea es probar que  $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ . Supongamos primero  $\beta \leq b$ , esto implicaría que  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) \in A$  para todo  $t \in (\alpha, \beta)$ , ya que si esto no sucediera, existiría un  $t^* \in (\alpha, \beta)$  tal que  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) \in A$  para todo  $t \in (\alpha, t^*]$  con  $\mathbf{x}(t^*, \mathbf{y}) \in \partial A$ . Por otro lado también se tiene que para todo  $t \in (\alpha, t^*]$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)| &= \left| \mathbf{y} + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s, \mathbf{y})) ds - \mathbf{x}_0 - \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)) ds \right| \\ &\leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| + \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{x}(s, \mathbf{y})) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0))| ds \\ &\leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| + K \int_0^t |\mathbf{x}(s, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)| ds \end{aligned}$$

en particular para  $t = t^*$

$$|\mathbf{x}(t^*, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t^*, \mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| + K \int_0^{t^*} |\mathbf{x}(s, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(s, \mathbf{x}_0)| ds$$

Aplicando el Lema de Gronwall, se sigue

$$|\mathbf{x}(t^*, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t^*, \mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| e^{K|t^*|} \leq \delta e^{K|t^*|} < \varepsilon e^{-K(b-a)} e^{K(b-a)} < \varepsilon$$

con  $t^* < \beta < b$ . Tenemos entonces que  $\mathbf{x}(t^*, \mathbf{y})$  es un punto interior de  $A$  lo cual es una contradicción con el hecho de que  $\mathbf{x}(t^*, \mathbf{x}_0) \in \partial A$ . Por tanto  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) \in A$  para todo  $t \in (\alpha, \beta)$ , pero por el Teorema 2  $(\alpha, \beta)$  no sería el intervalo maximal de existencia de  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ , lo cual es una contradicción. Por tanto  $b < \beta$ .

De manera similar se puede **probar** que  $\alpha < a$ . Por lo tanto, para todo  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$ , el problema de valor inicial (2.24) tiene solución única definida en  $[a, b]$ . Además, si asumimos que existe un  $t^* \in [a, b]$  tal que  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) \in A$  para todo  $t \in [a, t^*)$  y  $\mathbf{x}(t^*, \mathbf{y}) \in \partial A$ . Una repetición del argumento anterior basado en el Lema de Gronwall conduce a una contradicción y muestra que  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) \in A$  para todo  $t \in [a, b]$  lo cual lo puede **verificar** el lector, y así

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| e^{K|t|}$$

para todo  $t \in [a, b]$ . Entonces se sigue que

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{x}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0),$$

uniformemente para todo  $t \in [a, b]$ . □

**Observación 2.4.3.** Si en el Teorema 4 tenemos que la función  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$  también dependa de un parámetro  $\mu \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^{n+m}$  que contiene  $(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ . El estudiante puede **probar** que si para  $\mu = \mu_0$ , el problema de valor inicial (2.21) tiene solución  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mu_0)$  definida en un intervalo cerrado  $a \leq t \leq b$ , entonces existe un  $\delta > 0$  y un  $K > 0$  tal que para todo  $\mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$  y  $\mu \in N_\delta(\mu_0)$  tal que el problema del valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y} \end{cases} \quad (2.25)$$

tiene única solución  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y}, \mu)$  definida para todo  $t \in [a, b]$  que satisface

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{y}, \mu) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mu_0)| \leq [|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| + |\mu - \mu_0|] e^{K|t|}$$

y

$$\lim_{(\mathbf{y}, \mu) \rightarrow (\mathbf{x}_0, \mu_0)} \mathbf{x}(t, \mathbf{y}, \mu) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mu_0)$$

uniformemente para todo  $t \in [a, b]$ .

## 2.5. El Flujo de una ecuación diferencial

En un sistema de ecuaciones diferenciales, el término "flujo" se refiere al conjunto de todas las posibles soluciones que describen la evolución de las variables del sistema a lo largo del tiempo. Es decir, el flujo representa el movimiento o la trayectoria que sigue el sistema en su espacio de fase. Con el concepto de flujo se podrá comprender el comportamiento dinámico del sistema, el cual proporciona información sobre la estabilidad del sistema, el análisis cualitativo sobre el comportamiento del sistema sin necesidad de resolverlo explícitamente, los puntos críticos o de equilibrio, las trayectorias de las soluciones y cómo estas cambian en respuesta a diferentes condiciones iniciales o perturbaciones en el sistema; permitiendo la predicción de comportamiento a largo plazo y diseñar estrategias de control cuando se evalúa la efectividad de las intervenciones.

Recordemos que para el sistema de ecuaciones diferencial lineal dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

el flujo se definió como  $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es una aplicación determinada por  $\phi_t = e^{At}$ , la cual satisface las siguientes propiedades básicas para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ :

- (i)  $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
- (ii)  $\phi_s(\phi_t(\mathbf{x})) = \phi_{s+t}(\mathbf{x})$  para todo  $s, t \in \mathbb{R}$
- (iii)  $\phi_{-t}(\phi_t(\mathbf{x})) = \phi_t(\phi_{-t}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

La propiedad (i) se deriva de la definición de  $e^{At}$ , la propiedad (ii) se deriva de Proposición 2 en la Sección 1.3, y la propiedad (iii) se deriva de Corolario 2 de la sección 1.3

En esta sección, se define el flujo,  $\phi_t$ , del sistema no lineal, para entenderlo mejor se considera el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

El flujo en este sistema se refiere al conjunto de todas las soluciones posibles  $\mathbf{x}(t)$  que satisfacen estas ecuaciones diferenciales para diferentes condiciones iniciales. En otras palabras, el flujo describe cómo evolucionan las variables del sistema desde cualquier punto inicial en el espacio de fase, y se prueba que (2.26) satisface las mismas propiedades básicas del flujo de un sistema lineal.

En la siguiente definición se denotará al intervalo maximal  $(\alpha, \beta)$  de existencia de la solución  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (2.27)$$

por  $I(\mathbf{x}_0)$ , ya que sus extremos  $\alpha, \beta$  generalmente dependen de  $\mathbf{x}_0$ . Ver problemas 1(a) y 1(d) de la sección 2.4.

**Definición 2.5.1.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f \in C^1(E)$ , para cada  $\mathbf{x}_0 \in E$ , sea  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  la solución del problema de valor inicial (2.27) definido en intervalo maximal de existencia  $I(\mathbf{x}_0)$ . Entonces para  $t \in I(\mathbf{x}_0)$ , el conjunto de aplicaciones  $\phi_t$  definidas por

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$$

se llama el flujo de la ecuación diferencial (2.26) o el flujo definido por el ecuación diferencial (2.26);  $\phi_t$  también se conoce como el flujo del campo vectorial  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

**Observación 2.5.1.** Si pensamos en  $\mathbf{x}_0$  como un punto inicial fijo y denotamos  $I = I(\mathbf{x}_0)$ , entonces la aplicación  $\phi(\cdot, \mathbf{x}_0) : I \rightarrow E$  define una curva de la solución o trayectoria del sistema (2.27) que pasa por el punto  $\mathbf{x}_0 \in E$ . Como es usual la aplicación  $\phi(\cdot, \mathbf{x}_0)$  se identifica con su gráfica en  $I \times E$  y su trayectoria se visualiza como el movimiento a lo largo de una curva  $\Gamma$  que pasa por el punto  $\mathbf{x}_0$  en el subconjunto  $E$  del espacio fase  $\mathbb{R}^n$  (ver figura 1). Por otro lado, si pensamos en el punto  $\mathbf{x}_0$  como variable en  $K \subset E$ , entonces el flujo de la ecuación diferencial (2.26),  $\phi_t : K \rightarrow E$  puede verse como el movimiento de todos los puntos del conjunto  $K$  (ver figura 2.)

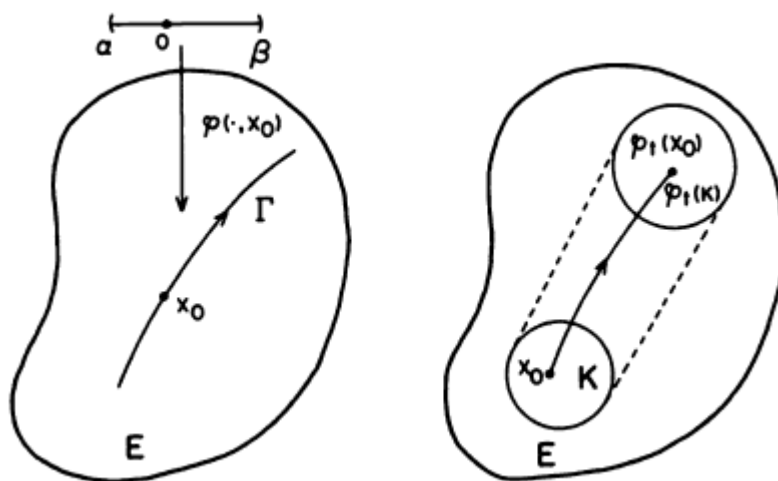


Figura 1. Una trayectoria  $\Gamma$  del sistema (2.26)    Figura 2. El flujo  $\phi_t$  del sistema (2.26)

Si pensamos en la ecuación diferencial (2.26) como una descripción del movimiento de un fluido, entonces una trayectoria de (2.26) describe el movimiento de una partícula individual en el fluido, mientras el flujo de la ecuación diferencial (2.26) describe el movimiento de todo el fluido. Podemos mostrar ahora que las propiedades básicas (i) – (iii) de los flujos lineales también son válidas para flujos de sistemas no lineales. Pero antes se hace una ampliación del teorema 1 de la sección 2.3, estableciendo que  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  es una función localmente suave para un resultado global.

**Observación 2.5.2.** Usando la misma notación que en la definición 1, se define el conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$  como  $\Omega = \{(t, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times E : t \in I(\mathbf{x}_0)\}$ .

**Ejemplo.** Considere el p.v.i

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{x} \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

donde  $f(x) = \frac{1}{x} \in C^1(E)$  en  $E = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ . La solución de este p.v.i viene dada por  $\phi(t, x_0) = \sqrt{2t + x_0^2}$  en su intervalo máximo de existencia  $I(x_0) = \left(-\frac{x_0^2}{2}, \infty\right)$ . La región  $\Omega$  para este problema se muestra en la Figura 3.

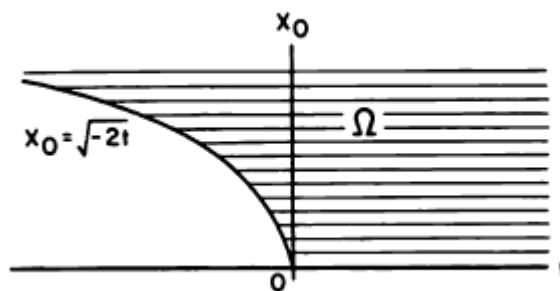




Figura 3. Región  $\Omega$ .

**Teorema 2.5.1.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$ , sea  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Entonces  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R} \times E$  y  $\phi \in C^1(\Omega)$ .

*Demostración.* Sea  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$  arbitrario y  $t_0 > 0$ , entonces de acuerdo con la definición de  $\Omega$ , la solución  $\mathbf{x}(t) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$  del problema de valor inicial (2.27)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

esta definida en  $[0, t_0] \subset I(\mathbf{x}_0)$ . Pero esta solución  $\mathbf{x}(t)$  puede extenderse a un intervalo  $[0, t_0 + \varepsilon]$  para algun  $\varepsilon > 0$ ; es decir,  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  está definido en el intervalo cerrado  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . De acuerdo con Teorema 4 de la sección anterior, existe una vecindad de  $N_\delta(\mathbf{x}_0)$ , de modo que  $\phi(t, \mathbf{y})$  se define en  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times N_\delta(\mathbf{x}_0)$ , es decir  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times N_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ . Por lo tanto,  $\Omega$  es abierto en  $\mathbb{R} \times E$ . Por Teorema 4 de la sección anterior  $\phi \in C^1(G)$  donde  $G = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times N_\delta(\mathbf{x}_0)$ . Una prueba similar es válida para  $t_0 < 0$ , y dado que  $(t_0, \mathbf{x}_0)$  es un punto arbitrario en  $\Omega$ , se deduce que  $\phi \in C^1(\Omega)$ .  $\square$

**Observación 2.5.3.** El Teorema 1 puede generalizarse para mostrar que si  $\mathbf{f} \in C^r(E)$  con  $r > 1$ , entonces  $\phi \in C^r(\Omega)$  y que si  $\mathbf{f}$  es analítica en  $E$ , entonces  $\phi$  es analítica en  $\Omega$ .

**Teorema 2.5.2.** Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$  sea  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ . Entonces para todo  $\mathbf{x}_0 \in E$ , si  $t \in I(\mathbf{x}_0)$  y  $s \in I(\phi_t(\mathbf{x}_0))$ , se deduce que  $s + t \in I(\mathbf{x}_0)$  y

$$\phi_{s+t}(\mathbf{x}_0) = \phi_s(\phi_t(\mathbf{x}_0))$$

*Demostración.* Sea  $t \in I(\mathbf{x}_0)$ ,  $s \in I(\phi_t(\mathbf{x}_0))$  y consideremos al intervalo máximo  $I(\mathbf{x}_0) = (\alpha, \beta)$ . Para el caso  $s = 0$  el resultado es inmediato **verificar**. Para el caso  $s > 0$ , definimos la función  $\mathbf{x} : (\alpha, s + t] \rightarrow E$  por

$$\mathbf{x}(r) = \begin{cases} \phi(r, \mathbf{x}_0) & \text{si } \alpha < r \leq t \\ \phi(r - t, \phi_t(\mathbf{x}_0)) & \text{si } t \leq r \leq s + t. \end{cases}$$

Entonces  $\mathbf{x}(r)$  es una solución del problema del valor inicial (2.27) en  $(\alpha, s + t]$ , por tanto  $s + t \in I(\mathbf{x}_0)$  y por unicidad de soluciones

$$\phi_{s+t}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(s + t) = \phi(s, \phi_t(\mathbf{x}_0)) = \phi_s(\phi_t(\mathbf{x}_0))$$

Para el caso  $s < 0$ , definimos la función  $\mathbf{x} : [s + t, \beta) \rightarrow E$  por

$$\mathbf{x}(r) = \begin{cases} \phi(r, \mathbf{x}_0) & \text{si } t \leq r < \beta \\ \phi(r - t, \phi_t(\mathbf{x}_0)) & \text{si } s + t \leq r \leq t \end{cases}$$

Entonces  $\mathbf{x}(r)$  es solución del problema del valor inicial (2.27) en  $[s + t, \beta)$ , por tanto  $s + t \in I(\mathbf{x}_0)$  y por unicidad de soluciones obtenemos lo deseado.  $\square$

**Teorema 2.5.3.** Bajo las hipótesis del Teorema 1, si  $(t, \mathbf{x}_0) \in \Omega$  entonces existe un abierto  $U$  que contiene a  $\mathbf{x}_0$ , tal que  $\{t\} \times U \subset \Omega$  y además  $V = \phi_t(U)$  es abierto en  $E$  donde

$$\phi_{-t}(\phi_t(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \text{ para todo } \mathbf{x} \in U$$

y

$$\phi_t(\phi_{-t}(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \text{ para todo } \mathbf{y} \in V$$

*Demostración.* Si  $(t, \mathbf{x}_0) \in \Omega$  entonces existe una vecindad  $U$  de  $\mathbf{x}_0$  tal que  $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \times U \subset \Omega$  y por tanto,  $\{t\} \times U \subset \Omega$ . Para  $\mathbf{x} \in U$ , consideremos  $\mathbf{y} = \phi_t(\mathbf{x})$  para todo  $t \in I(\mathbf{x})$ , entonces  $-t \in I(\mathbf{y})$  ya que la función  $h(s) = \phi(s + t, \mathbf{y})$  es una solución de (2.26) en  $[-t, 0]$  que satisface  $h(-t) = \mathbf{y}$ , es decir,  $\phi_{-t}$  se define en el conjunto  $V = \phi_t(U)$ , entonces del Teorema 2 se sigue que  $\phi_{-t}(\phi_t(\mathbf{x})) = \phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in U$  y  $\phi_t(\phi_{-t}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$  para todo  $\mathbf{y} \in V$ . Probemos ahora que  $V$  es abierto. Sea  $V \subset V^*$ , donde  $V^*$  el subconjunto maximal de  $E$  en el cual  $\phi_{-t}$  esta definida.  $V^*$  es abierto porque  $\Omega$  es abierto y  $\phi_{-t} : V^* \rightarrow E$  es continua ya que  $\phi$  es continua por Teorema 1. Por lo tanto, la imagen inversa del conjunto abierto  $U$  bajo la aplicación  $\phi_{-t}$ , es decir,  $\phi_t(U)$ , es abierta en  $E$  y por tanto  $V$  es abierto en  $E$ .  $\square$

**Observación 2.5.4.** *En el Capítulo 3 mostramos que el tiempo a lo largo de cada trayectoria de (2.26) puede ser reescalado, sin afectar el retrato de fase de (2.26), de modo que para todos lo  $\mathbf{x}_0 \in E$ , la solución  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  del problema de valore inicial (2.27) está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; es decir, para todo  $\mathbf{x}_0 \in E$ ,  $I(\mathbf{x}_0) = (-\infty, \infty)$ . Este cambio de escala evita algunos de las complicaciones encontradas al enunciar los teoremas anteriores. Una vez realizado este reescalado realizado, se deduce que  $\Omega = \mathbb{R} \times E$ ,  $\phi \in C^1(\Omega)$ ,  $\phi_t \in C^1(E)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , y las propiedades (i) – (iii) para el flujo del sistema no lineal (2.26) se mantienen para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{x} \in E$  igual que para el flujo lineal  $e^{At}$ . En el resto de este capítulo, y en particular en las Secciones 2.7 y 2.8 de este capítulo, se puede suponer que este cambio de escala se ha realizado de modo que para todo  $x_0 \in E$ ,  $\phi(t, \mathbf{x}_0)$  está definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; es decir, asumiremos durante el resto de En este capítulo, el flujo del sistema no lineal (2.26)  $\phi_t \in C^1(E)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Definición 2.5.2.** *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , y  $\phi_t : E \rightarrow E$  el flujo de la ecuación diferencial (2.26) definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces, un conjunto  $S \subset E$  se llama invariante con respecto al flujo  $\phi_t$  si  $\phi_t(S) \subset S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $S$  se llama invariante positiva (o negativa) con respecto al flujo  $\phi_t$  si  $\phi_t(S) \subset S$  para todo  $t > 0$  (o  $t < 0$ ).*

Recordemos que los espacios estable, inestable y central de un sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  son invariantes bajo el fluido lineal  $\phi_t = e^{At}$ . Un resultado similar se establece en la Sección 2.7 para el flujo de un sistema no lineal (2.26).

**Ejemplo.** *Considere el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{c} \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

*Mostrar que  $S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -\frac{x_1^2}{3}\}$  es invariante bajo el flujo  $\phi_t$ .*

*La solución del problema del valor inicial viene dada por*

$$\phi_t(\mathbf{c}) = \phi(t, \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + \frac{c_1^2}{3} (e^t - e^{-2t}) \end{pmatrix}$$

*Si  $\mathbf{c} \in S$  entonces  $c_2 = -\frac{c_1^2}{3}$  y*

$$\phi_t(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ -\frac{c_1^2}{3} e^t + \frac{c_1^2}{3} (e^t - e^{-2t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ -\frac{c_1^2}{3} e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ -\frac{1}{3} (c_1 e^{-t})^2 \end{pmatrix}.$$

Así  $\phi_t(S) \subset S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . El retrato de fase para el sistema no lineal (2.28) con  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  se muestra en la Figura 4. El conjunto  $S$  se llama variedad estable para el sistema (2.28).

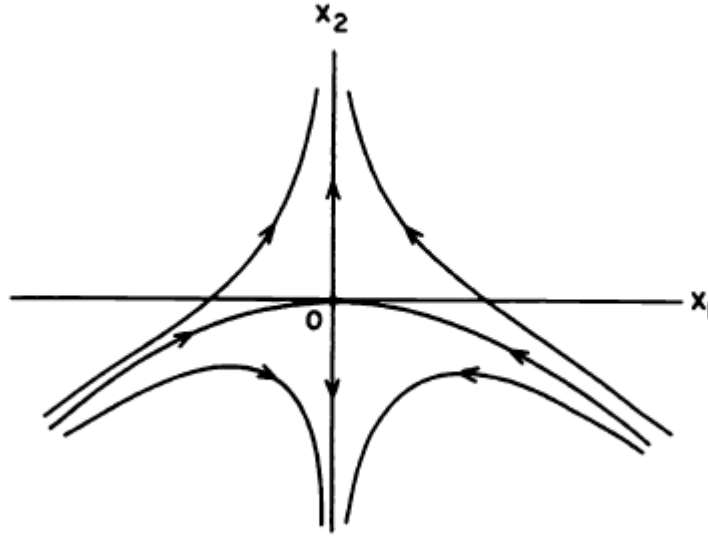


Figura 4. Conjunto invariante  $S = \{(x_1, x_2) : x_2 = -\frac{x_1^2}{3}\}$  para el sistema (2.28)

## 2.6. Linealización

La linealización de un sistema de ecuaciones diferenciales es un proceso que consiste en aproximar el comportamiento de un sistema no lineal en un entorno local alrededor de un punto de equilibrio mediante un sistema lineal. Esto se hace para facilitar el análisis matemático y la comprensión del comportamiento cualitativo del sistema cerca de ese punto de equilibrio. El sistema linealizado es más fácil de analizar matemáticamente y proporciona información valiosa sobre la estabilidad local del sistema alrededor del punto de equilibrio. Sin embargo, es importante recordar que la linealización solo es válida en un entorno pequeño alrededor del punto de equilibrio y puede no capturar completamente el comportamiento no lineal del sistema fuera de esa región. La linealización de un sistema de ecuaciones diferenciales permite es muy útil, pues permite analizar y resolver que los sistemas no lineales de una forma mas sencilla, aplicando métodos y técnicas bien establecidos para sistemas de ecuaciones lineales, permite el estudio de la estabilidad con el análisis de valores propios para entender cómo el sistema responde a pequeñas perturbaciones alrededor del punto de equilibrio. La predicción del comportamiento cercano al equilibrio y el comportamiento cualitativo del sistema en un entorno local alrededor del punto de equilibrio son tambien bondades de la linealización. La linealización permite estudiar la sensibilidad del sistema a cambios en los parámetros o condiciones iniciales alrededor del punto de equilibrio.

Se considera ahora un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.29)$$

Para hacer un estudio del sistema no lineal es importante determinar los puntos de equilibrio de (2.29) y describir el comportamiento de (2.29) cerca de esos puntos, en este sentido, podemos mostrar que el comportamiento local del sistema no lineal (2.29) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{x}_0$  es determinado cualitativamente por el comportamiento del sistema lineal,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (2.30)$$

con  $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , cerca del origen. La función lineal  $A\mathbf{x} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}$  se llama la parte lineal de  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{x}_0$ .

**Definición 2.6.1.** Un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  se llama punto de equilibrio o crítico (2.29) si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  se llama punto de equilibrio hiperbólico de (2.29) si ninguno de los valores propios de la matriz  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  tienen parte real cero.

**Definición 2.6.2.** El sistema lineal (2.30) con la matriz  $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  es llamado la linealización de (2.29) en  $\mathbf{x}_0$ . Si  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio de (2.29) entonces  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y según Teorema de Taylor,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x} + \frac{1}{2}D^2\mathbf{f}(\mathbf{0})(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \cdots$$

Por tanto la función lineal  $D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x}$  es una primera y buena aproximación a la función no lineal  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  cerca de  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  y es razonable esperar que el comportamiento del sistema no lineal (2.29) cerca del punto  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es aproximado al comportamiento de su linealización en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Se mostrará mas adelante que este es el caso si la matriz  $D\mathbf{f}(\mathbf{0})$  no tiene o valores propios cero o son imaginarios puros. Tenga en cuenta que si  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio de (2.29) y  $\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el flujo de la ecuación diferencial (2.29), entonces  $\phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces,  $\mathbf{x}_0$  es llamado un punto fijo del flujo  $\phi_t$ , también se llama punto crítico o un punto singular del campo vectorial  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.6.3.** Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  de (2.29) se llama sumidero si todos los valores propios de la matriz  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  tienen una parte real negativa; se llama una fuente si todos los valores propios de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  tienen parte real positiva; y se llama silla, si  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio hiperbólico y  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  tiene al menos un valor propio con una parte real positiva y al menos uno con una parte real negativa.

**Ejemplo.** Clasifique los puntos de equilibrio del sistema no lineal (2.29) con

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Claramente,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  si y sólo si  $\mathbf{x} = (1, 0)^T$  y  $\mathbf{x} = (-1, 0)^T$ , y estos son los únicos puntos de equilibrio de (2.29). La derivada

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D\mathbf{f}(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D\mathbf{f}(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,  $(1, 0)$  es una fuente y  $(-1, 0)$  es una silla.

**Observación 2.6.1.** Si  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio hiperbólico de (2.29), el comportamiento local del sistema no lineal (2.29) es topológicamente equivalente al comportamiento local del sistema lineal (2.30) en el origen, es decir, hay una función continua  $H$  uno a uno de un vecindad de  $\mathbf{x}_0$  en un conjunto abierto  $U$  que contiene el origen,  $H : N_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \rightarrow U$ , la cual transforma el sistema (2.29) en (2.30), aplica trayectorias de (2.29) en  $N_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  en trayectorias de (2.30) en el conjunto abierto  $U$ , y conserva la orientación de las trayectorias en el tiempo, es decir,  $H$  conserva la dirección del flujo a lo largo de las trayectorias.

**Ejemplo.** Considere la aplicación continua  $H$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , dada por

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{x_1^2}{3} \end{pmatrix}$$

Si consideramos  $\mathbf{y} = H(\mathbf{x})$  o  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{x_1^2}{3} \end{pmatrix}$ , no es difícil determinar que el inverso de  $H$  viene dado por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = H^{-1}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{y_1^2}{3} \end{pmatrix}$$

y que  $H^{-1}$  es una aplicación continua de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . La aplicación  $H$ , transforma el sistema no lineal (2.29) con

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

en el sistema lineal (2.30) con

$$D\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

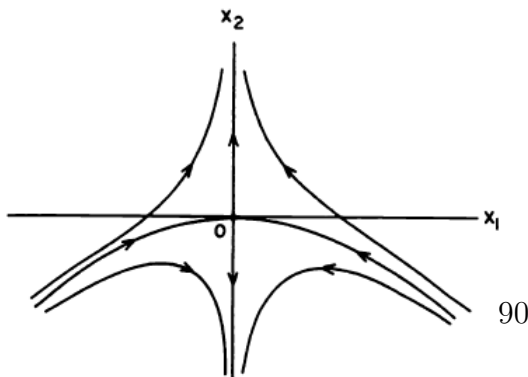
en el sentido  $\mathbf{x} = H^{-1}(\mathbf{y})$  implica

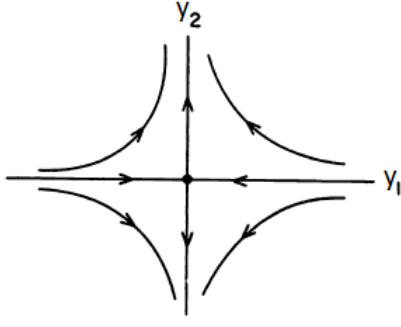
$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 + \frac{2}{3}x_1\dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 + \frac{2}{3}x_1(-x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Hemos usado el hecho de  $\mathbf{x} = H^{-1}(\mathbf{y})$  implica  $x_1 = y_1$  y  $x_2 = y_2 - \frac{y_1^2}{3}$  para obtener el último paso de la ecuación anterior para  $\dot{\mathbf{y}}$ . Los retrato de fase para el sistema no lineal y el lineal de este ejemplo son cualitativamente iguales y se dan en las siguientes Figuras.





## 2.7. Teorema de la variedad estable

El teorema de la variedad estable es un resultado importante en el estudio de sistemas dinámicos, particularmente en el contexto de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE). Este teorema establece las condiciones bajo las cuales un punto de equilibrio de un sistema dinámico no lineal es asintóticamente estable. Formalmente, consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector de variables del sistema,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  es una función continua y diferenciable que describe cómo cambian las variables del sistema en función de sí mismas, y se asume que  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  satisface ciertas condiciones de regularidad en un entorno del punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$ , donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . El teorema de la variedad estable establece que si todos los valores propios de la matriz jacobiana  $J(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$  evaluada en el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  tienen partes reales negativas, entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  es asintóticamente estable. En otras palabras, las soluciones del sistema convergen hacia el punto de equilibrio a medida que  $t$  tiende al infinito. La matriz jacobiana  $J(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$  es una matriz de tamaño  $n$  de derivadas parciales de las funciones  $f_i(\mathbf{x})$  con respecto a las variables  $x_j$ , evaluadas en el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$ . Los eigenvalores de esta matriz proporcionan información sobre la estabilidad del sistema alrededor del punto de equilibrio.

El *Teorema de Variedad Estable* es uno de los resultados más importantes en la teoría cualitativa local de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{x}_0$ , el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.32)$$

tiene variedades estable e inestable  $S$  y  $U$ , las cuales son tangentes en  $\mathbf{x}_0$  a los subespacios estable  $E^s$  e inestable  $E^u$  del sistema linealizado

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (2.33)$$

con  $A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Las variedades  $S$  y  $U$  tienen las mismas dimensiones que  $E^s$  y  $E^u$ , además, si  $\phi_t$  es el flujo del sistema no lineal (2.32), entonces  $S$  y  $U$  son respectivamente invariantes, positiva y negativamente, bajo el flujo  $\phi_t$  y satisfacen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{c}) = \mathbf{x}_0 \text{ para todo } \mathbf{c} \in S$$

y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{c}) = \mathbf{x}_0 \text{ para todo } \mathbf{c} \in U.$$

Se puede asumir que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  se encuentra en el origen, si no es el caso, entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  lo podemos trasladar al origen mediante una transformación de coordenadas  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ . En el siguiente se presentan algunas ideas de esta temática y luego se demuestra el teorema de la variedad estable.

**Ejemplo.** Considere el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y + x^2 \\ \dot{z} &= z + x^2 \end{cases}$$

Se puede **verificar** que el único punto de equilibrio de este sistema no lineal es el origen. Ahora dado que la matriz

$$\mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2x & -1 & 0 \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Df}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces, los subespacios  $E^s$  y  $E^u$  del sistema lineal (2.33) son respectivamente el plano  $xy$  y el eje  $z$ . Después de resolver la primera ecuación diferencial  $\dot{x} = -x$ , el sistema no lineal se reduce a dos ecuaciones diferenciales lineales desacopladas de primer orden, las cuales se resuelven fácilmente. Por tanto, se tiene,

$$\begin{cases} x(t) &= c_1 e^{-t} \\ y(t) &= c_2 e^{-t} + c_1^2 (e^{-t} - e^{-2t}) \\ z(t) &= c_3 e^t + \frac{c_1^2}{3} (e^t - e^{-2t}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) &= c_1 e^{-t} \\ y(t) &= (c_2 + c_1^2) e^{-t} - c_1^2 e^{-2t} \\ z(t) &= \left(c_3 + \frac{c_1^2}{3}\right) e^t - \frac{c_1^2}{3} e^{-2t} \end{cases}$$

donde  $\mathbf{c} = \mathbf{x}(\mathbf{0})$ . Claramente  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$  si y sólo si  $c_3 + \frac{c_1^2}{3} = 0$ , entonces  $S = \left\{ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 : c_3 + \frac{c_1^2}{3} = 0 \right\}$ .  
 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$  si y sólo si  $c_1 = c_2 = 0$ , entonces  $U = \left\{ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 : c_1 = c_2 = 0 \right\}$ .

Las variedades estable e inestable para este sistema se muestran en la **Figura 1**. Tenga en cuenta que la superficie  $S$  es tangente a  $E^s$ , es decir, al plano  $xy$  en el origen y que  $U = E^u$ .

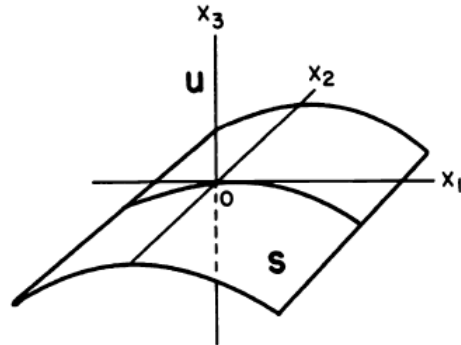


Figura 1.

Antes de abordar la demostración del teorema de la variedad estable, se definen los conceptos de superficie suave o variedad diferenciable, conceptos importantes para tal fin .

**Definición 2.7.1.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $A, B$  subconjuntos de  $X$ . Un homeomorfismo de  $A$  sobre  $B$ , es una función  $h : A \rightarrow B$  bicontinua y biyectiva. Si hay un homeomorfismo de  $A$  en  $B$ , los conjuntos  $A$  y  $B$  se dicen que son homeómorfos o topológicamente equivalentes.

**Definición 2.7.2.** Una variedad diferenciable  $n$  – dimensional  $M$  (o una variedad de clase  $C^k$ ), es un espacio métrico conexo <sup>1</sup> con un recubrimiento abierto  $\{U_\alpha\}$ , es decir,  $M = \cup_\alpha U_\alpha$  que satisface las siguientes propiedades:

- (1) Cada  $U_\alpha$  es homeomorfo a una bola abierta unitaria  $B$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\}$  , es decir, para cada  $U_\alpha$  existe un homeomorfismo  $h_\alpha$  de  $U_\alpha$  sobre  $B$ ,  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$ .
- (2) Si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  y  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow B$ ,  $h_\beta : U_\beta \rightarrow B$ , son homeomorfismos entonces  $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  y  $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  son subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y la función

$$h = h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es diferenciable (o de clase  $C^k$ ) y para todos los  $\mathbf{x} \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ , el determinante jacobiano  $\det Dh(\mathbf{x}) \neq 0$ . Se dice que la variedad  $M$  es analítica si la función  $h = h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$  es analítica.

La superficie cilíndrica  $S$  en el ejemplo anterior es una variedad diferenciable 2-dimensional. La proyección del plano  $x_1x_2$  sobre  $S$  aplica discos unitarios centrados en los puntos  $(m, n)$  en el plano  $x_1x_2$  sobre imágenes homeomorfas al disco unitario  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ . En este caso, estos conjuntos  $U_{mn} \subset S$  forman un recubrimiento numerable de  $S$ .

La pareja  $(U_\alpha, h_\alpha)$  se llama una carta de la variedad  $M$  y el conjunto de todas las cartas se llaman el atlas para  $M$ . La variedad diferenciable  $M$  se llama orientable si hay un atlas con  $\det(Dh_\alpha \circ h_\beta^{-1}(\mathbf{x})) > 0$  para todo  $\alpha, \beta$  y  $\mathbf{x} \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

**Observación 2.7.1.** Dado que  $\mathbf{f} \in C^1(E)$ , podemos considerar el desarrollo de Taylor de  $\mathbf{f}$  alrededor de  $\mathbf{0}$  en (1) ,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + D\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

y si  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , entonces el sistema (2.32) puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

donde

$$A = D\mathbf{f}(\mathbf{0}); \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - A\mathbf{x}; \quad \mathbf{F} \in C^1(E), \quad \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad y \quad D\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

Se puede **Verificar** que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|\mathbf{x}| < \delta$  entonces

$$|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \leq \varepsilon |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{Para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in N_\delta(\mathbf{0}) \quad (4)$$

---

<sup>1</sup> $M$  es conexo si no puede verse como unión disjunta de dos abiertos.



**Observación 2.7.2.** Si se considera la matriz  $A$ , entonces,

(a) De la Forma Canónica de Jordan de la matriz  $A$ , se puede garantizar la existencia de una matriz  $C_{n \times n}$  invertible tal que

$$B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

donde  $P$  es una matriz de tamaño  $k \times k$  con  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  valores propios con parte real negativa y  $Q$  una matriz de tamaño  $(n - k) \times (n - k)$  con  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$  valores propios con parte real positiva.

(b) Podemos elegir un  $\alpha > 0$  lo suficientemente pequeño tal que para  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0$ .

**Observación 2.7.3.** Haciendo

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y} \quad \text{o} \quad \mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x},$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) &\iff C\dot{\mathbf{y}} = AC\mathbf{y} + \mathbf{F}(C\mathbf{y}) \\ &\iff \dot{\mathbf{y}} = C^{-1}AC\mathbf{y} + C^{-1}\mathbf{F}(C\mathbf{y}) \\ &\iff \dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y} + C^{-1}\mathbf{F}(C\mathbf{y}) \end{aligned}$$

es decir el sistema (3) tiene la forma

$$\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y} + \mathbf{G}(\mathbf{y}) \quad (6)$$

con

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}) = C^{-1}\mathbf{F}(C\mathbf{y}), \quad \mathbf{G} \in C^1(\tilde{E}) \quad \text{donde} \quad \tilde{E} = C^{-1}(E).$$

El estudiante puede **verificar** que  $\mathbf{G}$  satisface la condicion (4) tipo Lipschitz.

**Observación 2.7.4.** En la demostracion del teorema de la variedad estable se mostrará que existen  $n - k$  funciones  $\psi_j(y_1, \dots, y_k)$  diferenciables, tales que las ecuaciones:

$$y_j = \psi_j(y_1, \dots, y_k), \quad j = k + 1, \dots, n$$

definen una variedad  $k$  - dimensional  $\tilde{S}$  la cual es diferenciable en el  $\mathbf{y}$ -espacio y la variedad diferenciable  $S$  en el  $\mathbf{x}$ - espacio se obtiene de  $\tilde{S}$ , bajo la transformación lineal de coordenadas  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ .

**Teorema 2.7.1.** (Teorema de la variedad estable). Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen, sea  $f \in C^1(E)$ , y sea  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (2.32). Suponga que  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y que  $Df(\mathbf{0})$  tiene  $k$  valores propios con parte real negativa y  $n - k$  valores propios con parte real positiva. Entonces existe una variedad  $S$  diferenciable  $k$ -dimensional tangente al subespacio  $E^s$  del sistema lineal (2.33) en  $\mathbf{0}$  tal que para todo  $t > 0$ ,  $\phi_t(S) \subset S$  y para todo  $\mathbf{x}_0 \in S$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

y existe una variedad  $U$  diferenciable  $n - k$ -dimensional tangente al subespacio inestable  $E^u$  de (2.33) en  $\mathbf{0}$  tal que para todo  $t < 0$ ,  $\phi_t(U) \subset U$  y para todo  $\mathbf{x}_0 \in U$ ,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

*Demostración.* Consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y} + G(\mathbf{y}) \quad (6)$$

y sean

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{Pt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{Qt} \end{pmatrix}.$$

Es claro que,

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} Pe^{Pt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{Pt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = BU,$$

$$\dot{V}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Qe^{Qt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{Qt} \end{pmatrix} = VB,$$

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{Pt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{Qt} \end{pmatrix} = U(t) + V(t).$$

No es difícil ver que con  $\alpha > 0$  elegido como en (5), podemos escoger  $K > 0$  suficientemente grande y  $\sigma > 0$  suficientemente pequeño tales que:

$$\|U(t)\| \leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t} \quad \text{para todo } t \geq 0$$

y

$$\|V(t)\| \leq Ke^{\sigma t} \quad \text{para todo } t \leq 0.$$

Consideremos ahora la ecuación integral

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{a}) = U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G(\mathbf{u}(s, \mathbf{a})) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\mathbf{u}(s, \mathbf{a})) ds \quad (7)$$

y verifiquemos que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{a})$  es solución continua de esta ecuación integral, lo cual implicaría que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{a})$  es una solución de la ecuación diferencial (6). Resolvamos entonces esta ecuación integral por el método de sucesión de aproximaciones.

Sea la sucesión de aproximaciones dada por:  $\mathbf{u}^0(t, \mathbf{a}) = 0$ , y

$$\mathbf{u}^{(j+1)}(t, \mathbf{a}) = U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})) ds. \quad (8)$$

Usando inducción sobre  $j$  se tiene:

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{u}^{(1)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^0(t, \mathbf{a})| \\
&= \left| U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(0)}(s, \mathbf{a})\right) ds - \int_t^\infty V(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(0)}(s, \mathbf{a})\right) ds \right| \\
&= \left| U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G(\mathbf{0}) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\mathbf{0}) ds \right| \quad \text{con } G(\mathbf{0}) = C^{-1}\mathbf{F}(C\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\
&= |U(t)\mathbf{a}| \leq \|U(t)\| |\mathbf{a}| \leq K |\mathbf{a}| e^{-(\alpha+\sigma)t} \leq \frac{1}{2^0} K |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

Asumiendo la hipótesis de inducción

$$|\mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j-1)}(t, \mathbf{a})| \leq \frac{K |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}}{2^{j-1}}; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad t \geq 0, \quad (9)$$

que la función  $G$  satisface la condición de Lipschitz (4) y las estimaciones sobre  $\|U(t)\|$  y  $\|V(t)\|$ , se sigue que para  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
& |\mathbf{u}^{(j+1)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a})| \\
&= \left| \left( U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})\right) ds - \int_t^\infty V(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})\right) ds \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(j-1)}(s, \mathbf{a})\right) ds - \int_t^\infty V(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(j-1)}(s, \mathbf{a})\right) ds \right) \right| \\
&\leq \left| \int_0^t U(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j-1)}(s, \mathbf{a})\right) ds \right| \\
&\quad + \left| \int_t^\infty V(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j-1)}(s, \mathbf{a})\right) ds \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \|U(t-s)\| \left| \left( G\left(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})\right) - G\left(\mathbf{u}^{(j-1)}(s, \mathbf{a})\right) \right) \right| ds \\
&\quad + \int_t^\infty \|V(t-s)\| \left| \left( G\left(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})\right) - G\left(\mathbf{u}^{(j-1)}(s, \mathbf{a})\right) \right) \right| ds \\
&\leq \int_0^t \|U(t-s)\| \varepsilon \left| \left( \mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j-1)}(s, \mathbf{a}) \right) \right| ds \\
&\quad + \int_t^\infty \|V(t-s)\| \varepsilon \left| \mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j-1)}(s, \mathbf{a}) \right| ds \\
&\leq \left( \int_0^t \|U(t-s)\| \frac{\varepsilon K |\mathbf{a}| e^{-\alpha s}}{2^{j-1}} ds + \int_t^\infty \|V(t-s)\| \frac{\varepsilon K |\mathbf{a}| e^{-\alpha s}}{2^{j-1}} ds \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon K |\mathbf{a}|}{2^{m-1}} \left( \int_0^t \|U(t-s)\| e^{-\alpha s} ds + \int_t^\infty \|V(t-s)\| e^{-\alpha s} ds \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon K^2 |\mathbf{a}|}{2^{m-1}} \left( \int_0^t e^{-(\alpha+\sigma)(t-s)} e^{-\alpha s} ds + \int_t^\infty e^{\sigma(t-s)} e^{-\alpha s} ds \right) \\
&= \frac{\varepsilon K^2 |\mathbf{a}|}{2^{m-1}} \left( \int_0^t e^{-\alpha(t-s)-\sigma(t-s)-\alpha s} ds + \int_t^\infty e^{\sigma(t-s)} e^{-\alpha s} ds \right) \\
&= \frac{\varepsilon K^2 |\mathbf{a}|}{2^{j-1}} \left( e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} ds + \int_t^\infty e^{\sigma(t-s)} e^{-\alpha s} ds \right) \\
&= \frac{\varepsilon K^2 |\mathbf{a}|}{2^{j-1}} \left( -e^{-\alpha t} \int_t^0 e^{-\sigma z} dz - \int_0^{-\infty} e^{\sigma z} e^{-\alpha(t-z)} dz \right) \\
&= \frac{\varepsilon K^2 |\mathbf{a}|}{2^{j-1}} \left( -e^{-\alpha t} \int_t^0 e^{-\sigma z} dz - e^{-\alpha t} \int_0^{-\infty} e^{(\sigma+\alpha)z} dz \right) \\
&= \frac{\varepsilon K^2 |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \left( - \left( \frac{e^{-\sigma z}}{-\sigma} \right) \Big|_t^0 - \left( \frac{e^{(\sigma+\alpha)z}}{(\sigma+\alpha)} \right) \Big|_0^{-\infty} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon K^2 |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \left( \frac{1}{\sigma} (1 - e^{-\sigma t}) + \frac{1}{\sigma + \alpha} \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon K^2 |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \left( \frac{1 - e^{-\sigma t}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \right) \leq \frac{\varepsilon K^2 |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \right) \\
&= \frac{K |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \left( \frac{K\varepsilon}{\sigma} + \frac{K\varepsilon}{\sigma} \right) \\
&\leq \frac{K |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \quad \text{con} \quad \frac{\varepsilon K}{\sigma} < \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

es decir,

$$|\mathbf{u}^{(j+1)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a})| \leq \frac{K |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}}{2^j} \quad (10)$$

con

$$\frac{\varepsilon K}{\sigma} < \frac{1}{4} \quad \text{o} \quad \varepsilon < \frac{\sigma}{4K}.$$

Para que la condición (4) se mantenga para la función  $G$ , **verificar** que es suficiente escoger  $K |\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2}$  o  $|\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2K}$ . Del proceso de inducción podemos concluir que (9) se cumple para todo  $j = 1, 2, \dots$  y  $t \geq 0$ . Entonces, para  $n > m > N$  y  $t \geq 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}^{(n)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(m)}(t, \mathbf{a})| &= \sum_{j=m}^{n-1} |\mathbf{u}^{(j+1)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a})| \\
&\leq \sum_{j=N}^{\infty} |\mathbf{u}^{(j+1)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a})| \\
&\leq K |\mathbf{a}| \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^j} = K |\mathbf{a}| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+N}} \\
&= \frac{K |\mathbf{a}|}{2^N} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{K |\mathbf{a}|}{2^{N-1}}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$|\mathbf{u}^{(n)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(m)}(t, \mathbf{a})| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad N \rightarrow \infty$$

y  $\{\mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a})\}$  es una sucesión de Cauchy de funciones continuas, es decir,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{a})$$

uniformemente para todo  $t \geq 0$  y  $|\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2K}$ .

Ahora tomando el límite en ambos lados de (8)

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(j+1)}(t, \mathbf{a}) &= U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G\left(\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})\right) ds - \int_t^\infty V(t-s)G\left(\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})\right) ds \\ &\quad - \int_t^\infty V(t-s)G\left(\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})\right) ds \\ \mathbf{u}(t, \mathbf{a}) &= U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G(\mathbf{u}(s, \mathbf{a})) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\mathbf{u}(s, \mathbf{a})) ds \end{aligned}$$

De la convergencia uniforme de la sucesión de aproximaciones se deduce que la función continua  $\mathbf{u}(t, \mathbf{a})$  y satisface la ecuación integral (7) y por lo tanto, la ecuación diferencial (6).

Dado que  $\mathbf{G} \in C^1(\tilde{E})$  y que  $\mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a})$  es una función diferenciable en  $\mathbf{a}$ , para  $t \geq 0$  y  $|\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2K}$ , entonces se tiene que  $\mathbf{u}(t, \mathbf{a})$  es una función diferenciable en  $\mathbf{a}$  para  $t \geq 0$  y  $|\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2K}$ .

La desigualdad

$$\left| \mathbf{u}^{(j+1)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(j)}(t, \mathbf{a}) \right| \leq \frac{K |\mathbf{a}| e^{-\alpha t}}{2^j} \quad (10)$$

implica que

$$|\mathbf{u}(t, \mathbf{a})| \leq 2K |\mathbf{a}| e^{-\alpha t} \quad \text{para } t \geq 0 \text{ y } |\mathbf{a}| < \frac{\delta}{2K} \quad (11)$$

Es claro que la variedad estable se define por las primeras  $k$  componentes de  $\mathbf{a}$ . Por tanto, las última  $n - k$  componentes del vector  $\mathbf{a}$  en los calculos realizados para la convergencia de la sucesión de aproximaciones de la ecuación integral

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{a}) = U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G(\mathbf{u}(s, \mathbf{a})) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\mathbf{u}(s, \mathbf{a})) ds \quad (7)$$

no entran, y se las puede tomar como cero, entonces las componentes  $\mathbf{u}_j(t, \mathbf{a})$  de la solución  $\mathbf{u}(t, \mathbf{a})$  satisfacen las condiciones iniciales

$$u_j(0, \mathbf{a}) = a_j \quad \text{para } j = 1, \dots, k$$

y

$$\mathbf{u}_j(0, \mathbf{a}) = - \int_0^\infty V(-s)G(\mathbf{u}(s, a_1, \dots, a_k, \mathbf{0})) ds \quad \text{para } j = k+1, \dots, n$$

Para  $j = k+1, \dots, n$ , definimos las funciones

$$\psi_j(a_1, \dots, a_k) = u_j(0, a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0), \quad (12)$$

entonces los valores iniciales  $y_j = u_j(0, a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$  satisfacen

$$y_j = \psi_j(y_1, \dots, y_k) \quad \text{para } j = k+1, \dots, n.$$

De acuerdo a la definición (12), estas ecuaciones definen una variedad diferenciable  $\tilde{S}$  para  $\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_k^2} < \frac{\delta}{2K}$ , además, si  $\mathbf{y}(t)$  es una solución de la ecuación diferencial (6) con  $\mathbf{y}(0) \in \tilde{S}$ , es decir, con  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{u}(0, \mathbf{a})$ , entonces

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}(t, \mathbf{a}).$$

Resulta que si  $\mathbf{y}(t)$  es solución de (6) con  $\mathbf{y}(0) \in \tilde{S}$ , entonces  $\mathbf{y}(t) \in \tilde{S}$  para todo  $t \geq 0$  y se sigue de la desigualdad (11) que  $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El estudiante puede **Verificar** que si  $\mathbf{y}(t)$  es un solución de (6) con  $\mathbf{y}(0) \notin \tilde{S}$  entonces  $\mathbf{y}(t) \nrightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . También puede **verificar** que

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}(\mathbf{0}) = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad y \quad j = k+1, \dots, n;$$

es decir, la variedad diferenciable  $\tilde{S}$  es tangente al subespacio estable  $E^s$  del sistema lineal  $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$  en  $\mathbf{0}$ . La existencia de la variedad inestable  $U$  de (6) se establece exactamente de la misma manera considerando el sistema (6) cuando  $t \rightarrow -t$ , es decir,

$$\dot{\mathbf{y}} = -B\mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{y})$$

La variedad estable para este sistema será entonces, la variedad inestable  $\tilde{U}$  para (6). Tenga en cuenta que también es necesario reemplazar el vector  $\mathbf{y}$  por vector  $(y_{k+1}, \dots, y_n, y_1, \dots, y_k)$  para determinar la variedad  $n - k$ - dimensional  $U$  como en el proceso anterior. Esto completa la demostración del Teorema de la Variedad Estable.  $\square$

**Observación 1.** Los primeros resultados rigurosos con respecto a las variedades invariantes se deben a Hadamard en 1901, Liapunov en 1907 y Perron en 1928. Ellos probaron la existencia de las variedades estables e inestables de sistemas de ecuaciones diferenciales y de mapeos. La prueba presentada en esta sección se debe a Liapunov y Perron. Recientes estudios han generalizado los resultados del Teorema de la variedad estable y han sido dados por Hale, Hirsch, Pugh, Shub y Smale entre otros. Notemos que si la función  $f \in C^r(E)$  y  $r > 1$ , entonces las variedades diferenciables estables e inestables  $S$  y  $U$  de (1) son de clase  $C^r$ , y si  $f$  es analítica en  $E$ , entonces  $S$  y  $U$  son variedades analíticas.

**Ejemplo.** Considere el sistema no lineal

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

y encontraremos las tres primeras aproximaciones sucesivas  $\mathbf{u}^{(1)}(t, \mathbf{a})$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}(t, \mathbf{a})$  y  $\mathbf{u}^{(3)}(t, \mathbf{a})$  definido por (8) y use  $\mathbf{u}^{(3)}(t, \mathbf{a})$  para aproximar la función  $\psi_2$  que describe la variedad estable:

$$S : x_2 = \psi_2(x_1)$$

Para este ejemplo, tenemos

$$A = D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & -2x_2 \\ 2x_1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A = B = D\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad con \quad C = I$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

así,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x} + F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2^2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

y usando la transformación  $\mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ , se tiene

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} -y_1 - y_2^2 \\ y_2 + y_1^2 \end{pmatrix} = B\mathbf{y} + G(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_2^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix}$$

Ahora se se considera,

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y se aproxima la solución de la ecuación integral,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, \mathbf{a}) &= U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G(\mathbf{u}(s, \mathbf{a})) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\mathbf{u}(s, \mathbf{a})) ds \\ &= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_2^2 \\ u_1^2 \end{pmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_2^2 \\ u_1^2 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-(t-s)} u_2^2(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^2 e^{t-s} \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

Sea la sucesión de aproximaciones dada por:

$$\mathbf{u}^0(t, \mathbf{a}) = 0$$

$$\mathbf{u}^{(j+1)}(t, \mathbf{a}) = U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\mathbf{u}^{(j)}(s, \mathbf{a})) ds \quad (8)$$

Así,

$$\mathbf{u}^0(t, \mathbf{a}) = 0$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}^{(1)}(t, \mathbf{a}) \\ &= U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G(\mathbf{u}^0(t, \mathbf{a})) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\mathbf{u}^0(t, \mathbf{a})) ds \\ &= U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G(\mathbf{0}) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\mathbf{0}) ds \\ &= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}^{(2)}(t, \mathbf{a}) \\
&= U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(1)}(s, \mathbf{a})\right) ds - \int_t^\infty V(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(1)}(s, \mathbf{a})\right) ds \\
&= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} G\left(\begin{pmatrix} a_1 e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix}\right) ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} G\left(\begin{pmatrix} a_1 e^{-s} \\ 0 \end{pmatrix}\right) ds \\
&= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_1^2 e^{-2s} \end{pmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_1^2 e^{-2s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ a_1^2 e^{-2s} e^{t-s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a_1^2 e^{-2t}}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ -\frac{a_1^2 e^{-2t}}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}^{(3)}(t, \mathbf{a}) \\
&= U(t)\mathbf{a} + \int_0^t U(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(2)}(s, \mathbf{a})\right) ds - \int_t^\infty V(t-s)G\left(\mathbf{u}^{(2)}(s, \mathbf{a})\right) ds \\
&= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-(t-s)} e^{-4s} a_1^4 \\ 0 \end{pmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t-s} e^{-2s} a_1^2 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} + \frac{1}{27} (e^{-4t} - e^{-t}) a_1^4 \\ -\frac{1}{3} e^{-2t} a_1^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}^{(4)}(t, \mathbf{a}) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-(t-s)} \left(-\frac{1}{3} e^{-2s} a_1^2\right)^2 \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&\quad - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t-s} \left(a_1 e^{-s} + \frac{1}{27} (e^{-4s} - e^{-s}) a_1^4\right)^2 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} a_1 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{81} e^{-t} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-3s} a_1^4 \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&\quad - e^t \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3s} a_1^2 + \frac{1}{27^2} (e^{-9s} + e^{-3s} - 2e^{-6s}) a_1^8 + \frac{2}{27} (e^{-6s} - e^{-3s}) a_1^5 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{3} (-e^{-2t})\right] a_1^2 + \frac{1}{27^2} \left[\frac{1}{9} (-e^{-8t}) + \frac{1}{3} (-e^{-2t}) - \frac{1}{3} (-e^{-5t})\right] a_1^4 + \frac{2}{27} \left[\frac{1}{6} (-e^{-5t}) - \frac{1}{3} (-e^{-2t})\right] a_1^5 \\ a_1 e^{-t} + \frac{1}{243} (e^{-4t} - e^{-t}) a_1^4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Haciendo los respectivos cálculos,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}^{(4)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(3)}(t, \mathbf{a}) \\
&= \left( -\frac{1}{3}e^{-2t}a_1^2 + \frac{1}{27^2} \left[ \frac{1}{9}(-e^{-8t}) + \frac{1}{3}(-e^{-2t}) - \frac{1}{3}(-e^{-5t}) \right] a_1^8 + \frac{2}{27} \left[ \frac{1}{6}(-e^{-5t}) - \frac{1}{3}(-e^{-2t}) \right] a_1^5 + \frac{1}{3}e^{-2t}a_1^2 \right) \\
&= \left( \frac{(e^{-4t} - e^{-t})}{27^2} \left( \frac{1}{243} - \frac{1}{27} \right) a_1^4 + \frac{1}{27^2} \left[ \frac{e^{-5t}}{3} - \frac{e^{-8t}}{9} - \frac{e^{-2t}}{3} \right] a_1^8 + \frac{2}{27} \left[ \frac{-e^{-5t}}{6} + \frac{e^{-2t}}{3} \right] a_1^5 \right)
\end{aligned}$$

se tiene que  $\mathbf{u}^{(4)}(t, \mathbf{a}) - \mathbf{u}^{(3)}(t, \mathbf{a}) = O(a_1^5)$ , por lo tanto, la función  $\psi_2(a_1) = u_2(0, a_1, 0)$  se aproxima a

$$\psi_2(a_1) = -\frac{1}{3}a_1^2 + O(a_1^5) \quad \text{cuando } a_1 \rightarrow 0.$$

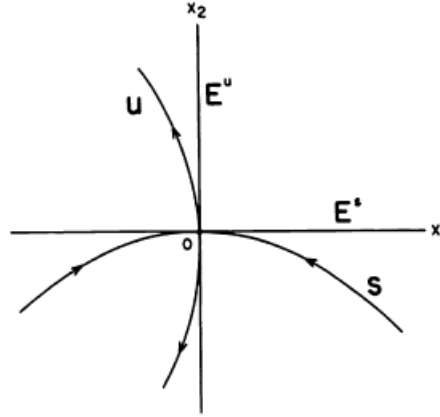
Así, la variedad estable  $S$  se aproxima por

$$S : x_2 = -\frac{1}{3}x_1^2 + O(x_1^5) \quad \text{cuando } x_1 \rightarrow 0.$$

Para este ejemplo, la matriz  $C = I$  es la identidad, por tanto los espacios de fase  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  son los mismos. La variedad inestable  $U$  puede ser aproximada aplicando exactamente el mismo procedimiento al sistema anterior cuando  $t \rightarrow -t$  e intercambiado  $x_1$  por  $x_2$ . La variedad estable para el sistema resultante será la variedad inestable para el sistema original. Encontramos que:

$$U : x_1 = -\frac{1}{3}x_2^2 + O(x_2^5) \quad \text{cuando } x_2 \rightarrow 0.$$

Las aproximaciones para las variedades estables e inestables  $S$  y  $U$  en una vecindad del origen y los subespacios estables e inestables  $E^s$  y  $E^u$  para  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  se muestra en la siguiente figura.



Las variedades estables e inestables  $S$  y  $U$  sólo se definen en una pequeña vecindad  $N$  del punto hiperbólico en el origen, como en la demostración del teorema de la variedad estable, se puede demostrar las variedades locales estables e inestables,  $S$  y  $U$ , de (2.32) en el origen son dadas por:

$$S = \{\mathbf{x} \in N : \phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}, t \rightarrow \infty \quad y \quad \phi_t(\mathbf{x}) \in N, t \geq 0\}$$

y

$$U = \{\mathbf{x} \in N : \phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}, t \rightarrow -\infty \text{ y } \phi_t(\mathbf{x}) \in N, t \leq 0\}$$

respectivamente.

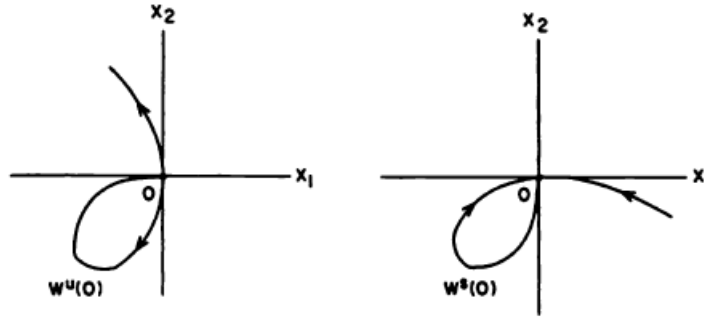
Definimos las variedades globales estables e inestables de (2.32) en  $\mathbf{0}$  dejando que los puntos en  $S$  fluyan hacia atrás en el tiempo y aquellos de  $U$  fluyan hacia adelante en el tiempo.

**Definición 3.** Sea  $\phi_t$  el flujo del sistema no lineal (1). Las variedades globales estables e inestables de (1) en  $\mathbf{0}$  se definen por:

$$W^s(\mathbf{0}) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S) \quad \text{y} \quad W^u(\mathbf{0}) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(U)$$

$W^s(\mathbf{0})$  y  $W^u(\mathbf{0})$  también se denominan variedades globales estable e inestables del origen respectivamente. Se puede demostrar que las variedades globales estables e inestables  $W^s(\mathbf{0})$  y  $W^u(\mathbf{0})$  son únicas e invariantes con respecto al flujo  $\phi_t$ ; además, para todo  $\mathbf{x} \in W^s(\mathbf{0})$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  y para todo  $\mathbf{x} \in W^u(\mathbf{0})$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

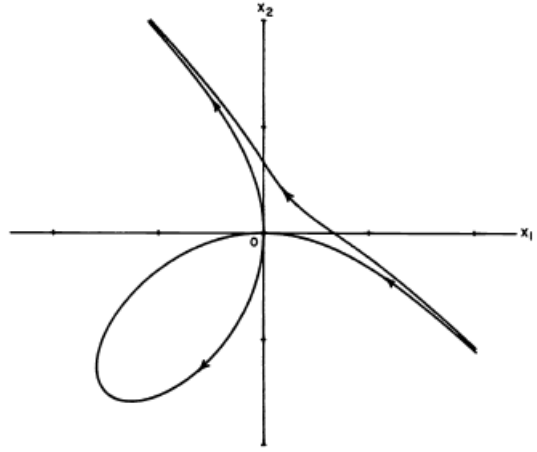
En la siguiente figura se muestran las variedades globales estable e inestable del ejemplo anterior.



Tenga en cuenta que  $W^s(\mathbf{0})$  y  $W^u(\mathbf{0})$  se cruzan en una “órbita homoclínica” en el origen.  $W^s(\mathbf{0})$  y  $W^u(\mathbf{0})$ .

**Definición.** Un punto es llamado punto homoclínico como un punto fijo en el que las variedades estables e inestables de los mismos se cortan. La órbita que pasa por un punto homoclínico se llama órbita homoclínica. Cualquier órbita homoclínica tiende hacia el punto fijo tanto para valores del tiempo hacia delante como hacia atrás.

La siguiente figura muestra algunas curvas solución calculadas numéricamente para el sistema en el ejemplo 2.



En la prueba del teorema la Variedad Estable se deduce que si  $\mathbf{x}(t)$  es una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y} + \mathbf{G}(\mathbf{y}) \quad (5)$$

con  $\mathbf{x}(\mathbf{0}) \in S$ , es decir, si  $\mathbf{x}(t) = C\mathbf{y}(t)$  con  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{u}(0, \mathbf{a}) \in \tilde{S}$ , entonces para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|\mathbf{x}(\mathbf{0})| < \delta$  entonces

$$|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon e^{-\alpha t} \quad \text{para todo } t > 0$$

y al igual que en la prueba del teorema de la variedad estable,  $\alpha$  es cualquier número positivo tal que  $\text{Re}(\lambda_j) < -\alpha$  para  $j = 1, \dots, k$  donde  $\lambda_j$  con  $j = 1, \dots, k$  son los valores propios de  $Df(\mathbf{0})$  con parte real negativa. Este resultado muestra que las soluciones que comienzan en  $S$  lo suficientemente cerca del origen, se acercan al origen exponencialmente rápido cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Consecuencia.** Bajo las hipótesis del teorema de la Variedad Estable, si  $S$  y  $U$  son las variedades estable e inestable de (1) en el origen y si  $\text{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0 < \beta < \text{Re}(\lambda_m)$ , para  $j = 1, \dots, k$  y  $m = k + 1, \dots, n$ , entonces dado  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\mathbf{x}_0 \in N_\delta(\mathbf{0}) \cap S, \quad \text{entonces } |\phi_t(\mathbf{x}_0)| \leq \varepsilon e^{-\alpha t} \quad \text{para todo } t \geq 0$$

y

$$\text{si } \mathbf{x}_0 \in N_\delta(\mathbf{0}) \cap U \quad \text{entonces } |\phi_t(\mathbf{x}_0)| \leq \varepsilon e^{\beta t} \quad \text{para todo } t \leq 0.$$

Un resultado final establece la existencia de una variedad central invariante  $W^c(\mathbf{0})$  tangente a  $E^c$  en  $\text{pmb}0$ . El siguiente teorema es consecuencia del Teorema variedad central local ( Teorema 2 de la sección 2.12) y el Teorema de la variedad en esta sección.

**Teorema (Teorema de la Variedad Central).** Sea  $\mathbf{f} \in C^r(E)$ ,  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen y  $r > 1$ . Suponga que  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y que  $Df(\mathbf{0})$  tiene  $k$  valores propios con parte real negativa,  $j$  valores propios con parte real positiva, y  $m = n - k - j$  valores propios con parte real cero. Entonces existe una Variedad Central  $m$  – dimensional  $W^c(\mathbf{0})$  de clase  $C^r$  tangente al subespacio central  $E^c$  de (2) en  $\mathbf{0}$ , existe una Variedad Estable  $k$  – dimensional  $W^s(\mathbf{0})$  de clase  $C^r$  tangente al subespacio estable  $E^s$  de (2) en  $\mathbf{0}$  y existe una Variedad Inestable

$j$  – dimensional  $W^u(\mathbf{0})$  de clase  $C^r$  tangente al subespacio inestable  $E^u$  de (2) en  $\mathbf{0}$ ; además,  $W^c(\mathbf{0}), W^s(\mathbf{0})$  y  $W^u(\mathbf{0})$  son invariantes bajo el flujo  $\phi_t$  de (1).

**Ejemplo 3.** Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{cases}$$

El subespacio estable  $E^s$  del sistema linealizado en el origen es el eje  $x_2$  y el subespacio central  $E^c$  es el eje  $x_1$ . Este sistema se resuelve fácilmente y el retrato de fase se muestra en la siguiente figura

