



Listas de contenidos disponibles en SciVerse Ciencia Directa

Revista de Análisis Matemático y Aplicaciones

Página de inicio de la revista: www.elsevier.com/locate/jmaa

Análisis de bifurcación del modelo depredador-presa de Leslie-Gower modificado con recolección de presas de tipo Michaelis-Menten

RP Gupta*, Peeyush Chandra

Departamento de Matemáticas y Estadística, Instituto Indio de Tecnología de Kanpur, Kanpur-208016, India

Información del artículo

Historial del artículo:

Recibido el 1 de junio de 2012 Disponible en línea el 4 de septiembre de 2012 Enviado por Junping Shi

Palabras clave:

Modelo presa-depredador
Permanencia
Estabilidad
Bifurcación

abstracto

En el presente artículo discutimos el análisis de bifurcación de un modelo Leslie-Gower presa-depredador modificado en presencia de cosecha no lineal en presas. Damos un análisis matemático detallado del modelo para describir algunos resultados significativos que pueden surgir de la interacción de recursos biológicos. El modelo muestra una dinámica compleja en el plano presa-depredador. Se discuten la permanencia, estabilidad y bifurcación (bifurcación silla-nodo, transcrítica, Hopf-Andronov y Bogdanov-Takens) de este modelo. Hemos analizado el efecto de la cosecha de presas y la tasa de crecimiento del depredador en el modelo propuesto al considerarlos como parámetros de bifurcación ya que son importantes desde el punto de vista ecológico. Se da la existencia local y la estabilidad del ciclo límite que surge a través de la bifurcación de Hopf. La aparición de bucles homoclinicos se ha demostrado a través de simulación cuando el ciclo límite que surge a través de la bifurcación de Hopf colisiona con un punto silla. Este trabajo refleja que se puede garantizar el límite superior factible de la tasa de cosecha para la coexistencia de las especies. Se realizan simulaciones numéricas utilizando MATLAB para demostrar los resultados obtenidos.

©2012 Elsevier Inc. Todos los derechos reservados.

1. Introducción

Los modelos matemáticos no lineales deterministas (modelos EDO) se utilizan ampliamente para comprender la dinámica de las poblaciones en interacción. Por lo general, muestran comportamientos dinámicos similares, como la coexistencia de un equilibrio, un ciclo límite o un atractor caótico. La creciente necesidad de más alimentos y recursos ha llevado a una mayor explotación de varios recursos biológicos. Por otro lado, existe una preocupación global por proteger el ecosistema en general. Ante estos dos escenarios contrastantes, buscamos una política de desarrollo sostenible en casi todas las esferas de la actividad humana. Esto ha hecho necesaria una gestión científica de la explotación comercial de los recursos biológicos, como la pesca y la silvicultura [1,2]. Cabe señalar que las especies compiten, evolucionan y se dispersan simplemente con el fin de buscar recursos para mantener su existencia. Según los entornos específicos de las aplicaciones, las poblaciones que interactúan pueden adoptar las formas de recurso-consumidor, planta-herbívoro, parásito-huésped, etc.

Los modelos depredador-presa son los pilares sobre los que se construyen los ecosistemas, ya que la biomasa se genera a partir de sus masas de recursos. El modelo dinámico depredador-presa más simple es el modelo Lotka-Volterra [3], que ha sido modificado de muchas maneras desde su formulación original en la década de 1920. En particular, Rosenzweig y MacArthur [4] mejoraron el realismo del modelo de Lotka-Volterra al introducir el crecimiento dependiente de la densidad de la población de presas y una absorción saturante no lineal de presas por parte del depredador (respuesta funcional). Hoy en día, los modelos se basan en gran medida en el marco de Rosenzweig-MacArthur, pero suelen modificarse enfatizando factores específicos, como las defensas inducibles en la presa [5] o la búsqueda de alimento adaptativa por parte del depredador [6]. En dinámica de poblaciones, la respuesta funcional del depredador a la densidad de presas se refiere al cambio en la densidad de presas atacadas por unidad de tiempo por depredador a medida que cambia la densidad de presas. Dependiendo del tipo de especie y del entorno

*Autor correspondiente.

Direcciones de correo electrónico:[\(R.P. Gupta\)](mailto:corravi@iitk.ac.in),[\(P. Chandra\)](mailto:peeyush@iitk.ac.in).

donde viven, los términos de depredación son de diferentes formas donde la cantidad de alimento consumido por el depredador es una función solo de la densidad de presas (por ejemplo, Holling tipos I, II y III) [7]. En la mayoría de los modelos presa-depredador considerados en la literatura, se supone que la respuesta funcional del depredador a la densidad de presas es monótonamente creciente, siendo la suposición inherente que cuanto más presas hay en el entorno, es mejor para el depredador [8,9].

Dai y Tang [10] consideraron un modelo depredador-presa en el que dos especies que interactúan ecológicamente se cosechan de forma independiente con tasas constantes. Demostraron que el sistema depredador-presa cosechado exhibe dinámicas muy complicadas, como la aparición espontánea de una órbita homoclínica y múltiples ciclos límite. McGehee et al. llevaron a cabo un estudio exhaustivo de la bifurcación y el patrón para un modelo Lotka-Volterra modificado. [11]. Das y otros. [12] estudiaron un modelo depredador-presa donde ambas especies crecen logísticamente y son cosechadas con una cosecha no lineal. Xiao y Ruan [13] analizaron en detalle la bifurcación de Bogdanov-Takens para un modelo depredador-presa con respuesta funcional de tipo Holling II y tasa constante de captura en el depredador. El modelo depredador-presa de tipo Bedington-DeAngelis ha sido estudiado por Haque [14] para la permanencia y la bifurcación. Leard et al. [15] y Lenzini y Rebaza [16] estudiaron un modelo depredador-presa dependiente de la proporción considerando una cosecha no constante en presa y depredador respectivamente en el que informaron varias bifurcaciones y órbitas de conexión. Peng et al. estudiaron en detalle un sistema presa-depredador con respuesta funcional de tipo Holling II y tasa de cosecha constante. [17]. Sen et al. han analizado un análisis detallado de la bifurcación de un modelo presa-depredador dependiente de la proporción con el efecto Allee. [18] en diferentes regiones paramétricas.

Li y Xiao [19] propusieron un modelo de presa-depredador de Leslie-Gower con respuesta funcional de tipo Holling III para su análisis de bifurcación. Lin y Ho [20] estudiaron la estabilidad local y global de un modelo depredador-presa de tipo II modificado de Leslie-Gower y Holling con retardo temporal. Zhang et al. [21] propusieron un modelo de presa-depredador de Leslie-Gower con recolección proporcional tanto en la presa como en el depredador para estudiar la persistencia y la estabilidad global. La estabilidad global del equilibrio interior único del sistema se demostró definiendo una función de Lyapunov adecuada, lo que significa que la recolección adecuada no tiene influencia en la propiedad persistente del sistema de recolección. Zhu y Lan [22] consideraron un modelo de Leslie-Gower con cosecha constante en presas donde estudiaron retratos de fase cerca de los equilibrios interiores. También demostraron que los equilibrios libres de depredadores pueden ser nodos-silla, nodos-silla o nodos inestables dependiendo de las elecciones de los parámetros involucrados mientras que los equilibrios positivos interiores en el primer cuadrante son nodos-silla, nodos estables o inestables, focos, centros, nodos-silla o císpides. La dinámica del modelo de Leslie-Gower sometido al efecto Allee con cosecha proporcional ha sido estudiada por Mena-Lorca et al. [23] Canción y Li [24] propuso y analizó el modelo periódico presa-depredador con un esquema Leslie-Gower Holling-tipo II modificado y efecto impulsivo para su comportamiento dinámico.

El objetivo de este artículo es realizar un análisis detallado de un modelo de ecuaciones diferenciales autónomas bidimensionales para un sistema depredador-presa con recolección no lineal de presas. Este modelo incorpora una versión modificada del modelo depredador-presa de Leslie-Gower con respuesta funcional tipo Holling II en presencia de recolección no lineal de presas.

2. Modelo matemático

2.1. Modelo básico

Aziz-Alaoui y Daher Okiye [25] había propuesto el siguiente sistema bidimensional de modelo de ecuación diferencial autónoma para un sistema presa-depredador que incorpora una versión modificada de la respuesta funcional de tipo II de Leslie-Gower y Holling:

$$\begin{aligned} \frac{-Dx_1}{dt} &= \text{receta}_1 - \frac{\text{incógnita}_1}{K} \quad \text{hacha}_1 \text{incógnita}_1, \\ \frac{-Dx_2}{dt} &= s x_2 - \frac{\text{hacha}_2}{norte_1 + \text{incógnita}_1}, \end{aligned} \tag{1}$$

Sujeto a condiciones iniciales positivas $\text{incógnita}_1(0) > 0$, $\text{incógnita}_2(0) > 0$. Aquí, $\text{incógnita}_1(a)$ y $\text{incógnita}_2(a)$ son las densidades poblacionales de presas y depredadores respectivamente. a y K son la tasa de crecimiento intrínseco y la capacidad de carga ambiental de las especies presas respectivamente. $norte_1$ es el valor máximo de la tasa de reducción de presas per cápita, $norte_1/f = 1,2$ mide el grado en que el entorno proporciona protección a la presa y al depredador respectivamente, s mide la tasa de crecimiento de las especies depredadoras y S es el valor máximo de la tasa de reducción per cápita de depredadores.

Este modelo ya ha sido estudiado por varios investigadores. En particular, Aziz-Alaoui y Daher Okiye han investigado la acotación de las soluciones y la estabilidad global del equilibrio positivo de este modelo [25]. Du et al. analizaron criterios suficientes para la permanencia de los sistemas y la estabilidad asintótica global de las soluciones. [26]. Zhu y Wang han dado algunas condiciones suficientes para la existencia y el atractivo global de soluciones periódicas positivas de este modelo [27]. El comportamiento a largo plazo y la condición persistente han sido establecidos para este modelo con perturbación estocástica por Ji et al. [28,29] bajo el supuesto de que el grado en que el medio ambiente proporciona protección tanto al depredador como a la presa es el mismo (es decir, $norte_1 = norte_2$).

2.2. Modelo con recolección de presas

Es más probable que los recursos biológicos en el sistema presa-depredador se recolecten y vendan con el propósito de lograr el interés económico que motiva la introducción de la recolección en el modelo presa-depredador.

Tipos de cosecha La cosecha de tipo Michaelis-Menten es más realista desde el punto de vista biológico y económico. Para conocer los detalles de este tipo de cosecha, consulte las referencias. [30,12,31] El modelo(1)con recolección no lineal (tipo Michaelis-Menten) bajo el supuesto de que el grado en que el entorno proporciona protección tanto al depredador como a la presa es el mismo [28,29] (es decir $norte_1=norte_2=norte$) viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= \frac{a}{K'} - \frac{qEx_1}{metro_1 + metro_1 \cdot incógnita_1}, \\ \frac{dX_2}{dt} &= sx_2 \left(1 - \frac{ay}{norte_2 + incógnita_2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

dónde q es el coeficiente de capturabilidad, s es el esfuerzo aplicado para cosechar las especies presas, y metro₁, y metro₂ son constantes adecuadas. El resto de los parámetros tienen significados similares a los del modelo.(1)Se supone que todos los parámetros son positivos debido a consideraciones biológicas.

Para investigar la dinámica del sistema(2), consideraremos el siguiente esquema adimensional:

$$\begin{aligned} incógnita_1 &= Kx, \quad a/incógnita_1 = Kentucky, \quad R_1 = yo, \\ \alpha/\alpha &= \frac{1}{a}, \quad \beta = 2, \quad \frac{a}{a_1} = \frac{norte}{K'}, \quad yo = \frac{qE}{Escorpión/K}, \quad do = \frac{metro/mi}{metro/K}, \quad \rho = \frac{s}{a} \end{aligned} \quad (3)$$

Utilizando el esquema adimensional anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{es} &= \frac{ay}{metro + incógnita} - \frac{yo}{do + incógnita} \equiv xf_1(x, y), \\ \frac{dy}{es} &= py \left(1 - \frac{\beta y}{metro + incógnita} \right) \equiv yf_2(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

con las condiciones iniciales

$$incógnita_0 = incógnita_0 > 0, \quad y(0) = yo > 0. \quad (5)$$

Aquí

$$F_1(x, y) = 1 - incógnita - \frac{ay}{metro + incógnita} - \frac{yo}{do + incógnita} \quad y F_2(x, y) = p1 - \frac{\beta y}{metro + incógnita} \quad (6)$$

ya, β , hombre, mujer, niño y p son todos positivos. Sistema(4)se define en el conjunto:

$$R_+^2 = \{(x, y) \in R^2 \mid incógnita \geq 0, y \geq 0\}. \quad (7)$$

A continuación demostramos la positividad y acotación de las soluciones así como la permanencia del sistema.(4). Nótese que para demostrar la acotación y permanencia del sistema(4), utilizamos los siguientes resultados [32]:

Lema 1(Chen). Si $a, b > 0$ y $a \leq (\geq) X(t)(a - bX(t))$ con $X(0) > 0$, entonces

$$\text{apoyo de } \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) \leq \frac{a}{b} \quad \text{información de límite } X(t) \geq \frac{a}{b}.$$

De hecho, el lema anterior es cuantitativamente equivalente al lema siguiente.

Lema 2. Si $a, b > 0$ y $a \leq X(t)(a - bX(t))$ con $X(0) > 0$, entonces para todos los $t \geq 0$

$$X(t) \leq \frac{a}{b - Este_en}, \quad \text{con } C = b - \frac{a}{INCÓGNITA_0}.$$

En particular $X(t) \leq \max_{t \geq 0} INCÓGNITA_0$ para todos $t \geq 0$.

2.2.1 Positividad y acotación de las soluciones

Proposición 1.(a) Todas las soluciones $(x(t), y(t))$ del sistema(4)con las condiciones iniciales(5)son positivos, es decir, $x(t) > 0, y(t) > 0$, para todos $t \geq 0$.

(b) Todas las soluciones $(x(t), y(t))$ del sistema(4)con las condiciones iniciales(5)están acotadas, para todo $t \geq 0$.

Prueba. (a) De la ecuación de presa del sistema(4)resulta que $incógnita = 0$ es un conjunto invariante. Esto implica que $x(t) > 0$, para todos t si $incógnita(0) > 0$. Un argumento similar, utilizando la ecuación del depredador del sistema(4), demuestra que $y(t) > 0$ también es un conjunto invariante, entonces $y(t) > 0$, para todos t si $y(0) > 0$. Por lo tanto, cualquier trayectoria que comience en R_+^2 no puede cruzar los ejes de coordenadas. De ahí el teorema Sigue.

(b) Utilizando la positividad de las variables x, y , de (4), podemos escribir

$$\frac{Dx}{es} = \text{Incógnita1 - Incógnita} - \frac{ay}{\text{metro+incógnita}} - \frac{yo}{do+incógnita} \quad \text{si incógnita1 - incógnita.} \quad (8)$$

De Lema 2, tenemos

$$x(t) \leq \max \{ \text{incógnita}(0), 1 \} \equiv METRO_1 \quad \text{a pesar de } a \geq 0.$$

Además, desde (4) tenemos

$$\frac{\text{morir}}{es} = \rho y_1 - \frac{\beta y}{\text{metro+incógnita}} \leq \rho y_1 - 1 - \frac{\beta y}{\text{metro+METRO}_1}. \quad (9)$$

Otra vez de lo mismo Lema 2 tenemos

$$y(t) \leq \max \{ y(0), \frac{\text{metro+METRO}_1}{\beta} \} \equiv METRO_2 \quad \text{a pesar de } a \geq 0.$$

Esto completa la prueba de la acotación de las soluciones y , por lo tanto, el sistema en consideración es disipativo.

2.2.2. Permanencia

Recordamos aquí la definición de permanencia [33]:

Definición 1. Sistema (4) Se dice que es permanente si existen constantes positivas α_1 y α_2 ($0 < \zeta_1 < \zeta_2$) de manera que cada solución positiva $(x(t), x_0, y_0)$ del sistema (4) con condición inicial $(\text{incógnita}_0, y_0) \in \text{entero}(R_+^2)$ satisface,

$$\min_{a \rightarrow +\infty} \text{información de límite } x(t, x_0, y_0, a, \text{información de límite } y(t, x_0, y_0, a)) \geq \alpha_1$$

$$\max_{a \rightarrow +\infty} \text{apoyo de límite } x(t, x_0, y_0, a, \text{apoyo de límite } y(t, x_0, y_0, a)) \leq \alpha_2.$$

Proposición 2. El sistema (4) con las condiciones iniciales (5) es permanente si $\frac{\alpha(\text{metro}+1)}{\beta m} + y_0 < 1$.

Prueba. De la ecuación (8) y Lema 1. Está claro que $0 < x(t) < 1$ para suficientemente grande a . También de la ecuación (9) y Lema 1. Nosotros conseguimos $y(t) \leq \frac{\text{metro}+1}{\beta}$ para suficientemente grande a .

Por lo tanto, de la ecuación de presa del sistema (4), podemos escribir

$$\frac{Dx}{es} = \text{Incógnita1 - Incógnita} - \frac{ay}{\text{metro+incógnita}} - \frac{yo}{do+incógnita} \geq \text{Incógnita1 - Incógnita} - \frac{\alpha(\text{metro}+1)}{\beta m} - \frac{yo}{do} = x(\omega_1 - \text{incógnita}). \quad \text{Para suficientemente grande } y_0,$$

$$\text{dónde } \omega_1 = 1 - \frac{\alpha(\text{metro}+1)}{\beta m} - \frac{yo}{do}.$$

Si $\omega_1 > 0$ es decir, $\frac{\alpha(\text{metro}+1)}{\beta m} + y_0 < 1$ entonces desde Lema 1, tenemos

$$\text{información de límite } x(t) \geq \omega_1.$$

Ahora usando la positividad de incógnita , de la ecuación del depredador del sistema (4), podemos escribir

$$\frac{\text{morir}}{es} \geq \rho y_1 - \frac{\beta y}{\text{metro}},$$

cual en uso Lema 1 da el siguiente resultado

$$\max_{a \rightarrow +\infty} \frac{\text{metr}o}{\beta} \equiv \omega_2$$

También de las desigualdades (8) y (9), junto con Lema 1, tenemos

$$\text{apoyo de límite } x(t) \leq 1 \text{ y } \limsup_{a \rightarrow \infty} y(t) \leq \frac{\text{metr}o + METRO_1}{\beta}.$$

Ahora eligiendo $\alpha_1 = \min(\omega_1, \omega_2)$ y $\alpha_2 = \max(\frac{1}{\beta}, \frac{\text{metr}o + METRO_1}{\beta})$, obtenemos la permanencia del sistema (4).

3. Existencia y estabilidad de equilibrios triviales

Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema(4), consideramos las isoclinas de crecimiento cero del sistema, que están dadas por:

$$xf_1(x, y)=0 \text{ y } xf_2(x, y)=0. \quad (10)$$

Los puntos de equilibrio son ahora los puntos de intersección de estas isoclinas de crecimiento cero. Los puntos de equilibrio triviales del sistema(4)son los siguientes:

(i) El origen $m_0=(0,0)$.

(ii) Los puntos de equilibrio libres de depredadores son $m_{y_0}=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ y $m_{y_0}=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ dónde incógnita_{y_0} y incógnita_{y_0} son las raíces de la cuadrática ecuación

$$\text{incógnita}_z - (1 - c)x + y_0 - do = 0 \quad (11)$$

$$\text{es decir } x_{y_0} = \frac{1 - c}{2}x - \frac{(1 - do) - 4(a) - do}{2} \quad \text{y} \quad y_{y_0} = \frac{1 - c}{2}x + \frac{(1 - do) - 4(a) - do}{2}.$$

Si $h > c$ entonces $m_{y_0}=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ y $m_{y_0}=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ Ambos puntos de equilibrio existen siempre que $c < 1$ y $(1 - do) > 4(a) - do$ mientras que si $h < c$ entonces $m_{y_0}=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ Sólo existe.

(iii) El punto de equilibrio de extinción de la presa es $m_h=(0, \text{metro})$

Teorema 1.(i) El origen $E_0=(0,0)$ es un punto de silla si $h > c$ e inestable si $h < c$.

(ii) El punto de equilibrio axial $E_y=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ Siempre es inestable.

(iii) El punto de equilibrio $E_x=(\text{incógnita}_{x_0}, 0)$ es siempre un punto de silla.

(iv) El punto de equilibrio axial $E_1=(0, \text{metro})$ es estable si $\alpha > 1$ y un punto de silla de montar si $\alpha < 1$.

(v) Sistema(4)sufre una bifurcación transcritica alrededor de $E_1=(0, \text{metro})$ si $\alpha > 1$.

Prueba.(i) La matriz jacobiana del sistema(4)evaluado en el punto de equilibrio $m_0=(0,0)$ viene dado por

$$PAG = - \begin{pmatrix} \frac{yo - do}{do} & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de PAG son $\lambda_1 = -yo - \frac{do}{\rho}$ y $\lambda_2 = \rho > 0$. Por lo tanto el resultado es el siguiente.

(ii) La matriz jacobiana del sistema(4)evaluado en el punto $(\text{incógnita}, 0)$ viene dado por

$$Q = \begin{pmatrix} -1 + \frac{yo}{(do + \text{incógnita})} & -\frac{ax}{\text{metro} + \text{incógnita}} \\ 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de Q en $m_{y_0}=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ son $\lambda_1 = \text{incógnita}_{y_0}$ y $\lambda_2 = (1 - do) - 4(a) - c > 0$ y $\lambda_2 = \rho > 0$. Por lo tanto $m_{y_0}=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ es siempre inestable.

(iii) Los valores propios de Q en $m_{y_0}=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ son $\lambda_1 = -\text{incógnita}_{y_0}$ y $\lambda_2 = (1 - do) - 4(a) - c < 0$ y $\lambda_2 = \rho > 0$. Por lo tanto $m_{y_0}=(\text{incógnita}_{y_0}, 0)$ es siempre un punto de silla.

(iv) La matriz jacobiana del sistema(4)evaluado en el punto de equilibrio $m_h=(0, \text{metro})$ viene dado por

$$R = \begin{pmatrix} -1 - \frac{\alpha}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta} \frac{yo}{do} & 0 \\ \frac{\rho}{\beta} & -\rho & \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de R son $\lambda_1 = 1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{yo}{do}$ y $\lambda_2 = -\rho < 0$. Por lo tanto el resultado es el siguiente.

(v) La prueba de este resultado se da en la Sección4.2.1(Teorema 6).

4. Existencia, estabilidad y bifurcación de los equilibrios interiores

Los equilibrios interiores son $m_{1*}=(\text{incógnita}_{1*}, y_1)$ y $m_{2*}=(\text{incógnita}_{2*}, y_2)$ dónde incógnita_{1*} y incógnita_{2*} son las raíces de la ecuación cuadrática

$$\text{incógnita}_z^2 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{yo}{do} z - 1 = 0. \quad (12)$$

$$\text{es decir } x_{1*} = \frac{1}{2}(-1 - do - \frac{\alpha}{\beta}) \quad \text{y} \quad x_{2*} = \frac{-\alpha}{\beta} \frac{yo}{do} - 1. \quad (13)$$

y

$$\frac{1}{2} - 1 - do - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}^2 do - 1 - 4do \frac{\alpha}{\beta} + \frac{yo}{do} 1 \quad (14)$$

junto con

$$y_1 = \frac{\text{metro+incógnita}_1}{\beta} \quad y \quad y_2 = \frac{\text{metro+incógnita}_2}{\beta}.$$

Dado que el número de puntos de equilibrio depende de la cantidad $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{yo}{do}$, por tanto, consideramos el siguiente caso:**4.1. Caso I: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{yo}{do} > 1$.**

- (1) Los dos puntos de equilibrio interior distintos $m_1 = (\text{incógnita}_1, y_1)$ y $m_2 = (\text{incógnita}_2, y_2)$ existir siempre que $\frac{\alpha}{\beta} + c < 1$ y $\frac{\alpha}{\beta} + do - 1 > 4do \frac{\alpha}{\beta} + \frac{yo}{do} - 1$ (ver Figura 1(a)). Nótese que ninguno de los dos puntos de equilibrio interior $m_i = (\text{incógnita}_i, y_i)$ existe para $\frac{\alpha}{\beta} + c > 1$.
- (2) Si $\frac{\alpha}{\beta} + c < 1$ y $\frac{\alpha}{\beta} + do - 1 < 4do \frac{\alpha}{\beta} + \frac{yo}{do} - 1$ entonces los dos puntos de equilibrio interiores $m_1 = (\text{incógnita}_1, y_1)$ y $m_2 = (\text{incógnita}_2, y_2)$ chocan entre sí y se denotan por el equilibrio instantáneo (equilibrio silla-nodo) $M_I = (x, t)$ donde $\text{incógnita}_1 = 1 - do - \frac{\alpha}{\beta}$ (ver Figura 1(b)).
- (3) Si $\frac{\alpha}{\beta} + do - 1 < 4do \frac{\alpha}{\beta} + \frac{yo}{do} - 1$, entonces no existe ningún punto de equilibrio interior (ver Figura 1(d)).

4.1.1 Estabilidad y bifurcación de Hopf de los equilibrios interiores**Teorema 2.** (i) El punto de equilibrio $E_1 = (\text{incógnita}_1, y_1)$ es siempre dice un punto de silla.(ii) El punto de equilibrio $E_2 = (\text{incógnita}_2, y_2)$ es estable si $x_2 * \beta(\text{metro+incógnita}_2) \frac{\alpha}{(do+incógnita)_2} + \frac{yo}{(do+incógnita)_2} - 1 < \rho$.(iii) El sistema en se somete a un Hopf-bifurcation con respecto al parámetro de bifurcación ρ alrededor del punto de equilibrio $E_2 = (\text{incógnita}_2, y_2)$ si $x_2 * \beta(\text{metro+incógnita}_2) \frac{\alpha}{(do+incógnita)_2} + \frac{yo}{(do+incógnita)_2} - 1 = \rho$.**Prueba.** La matriz jacobiana del sistema (4) evaluado en el punto (x, y) viene dado por

$$S = \begin{bmatrix} -1 + \frac{ay}{(\text{metro+incógnita})_1} + \frac{yo}{(do+incógnita)_1} & -\frac{ax}{(\text{metro+incógnita})_1} \\ \rho\beta y_1 & -\frac{\rho\beta y_1}{(\text{metro+incógnita})_1} \end{bmatrix}$$

(i) El $\det S$ de matriz S evaluado en $m_1 = (\text{incógnita}_1, y_1)$ es

$$\det S|_{m_1} = -\frac{\rho\beta y_1}{(\text{metro+incógnita})_1} - 1 + \frac{yo}{(do+incógnita)_1}.$$

Ahora usando el valor de incógnita_1 de la ecuación (13) Nosotros conseguimos

$$\det S|_{m_1} = -\frac{\rho x_1 y_1}{(\text{metro+incógnita}_1)(do+incógnita)_1} - \frac{\alpha}{\beta}^2 do - 1 - 4do \frac{\alpha}{\beta} + \frac{yo}{do} 1 < 0.$$

Por lo tanto, los valores propios de la matriz S evaluado en $m_1 = (\text{incógnita}_1, y_1)$ tienen las partes reales con signos opuestos. De ahí el punto de equilibrio $m_1 = (\text{incógnita}_1, y_1)$ es siempre un punto de silla.(ii) De manera similar, $\det S$ evaluado en $m_2 = (\text{incógnita}_2, y_2)$ es

$$\det S|_{m_2} = \frac{\rho x_2 y_2}{(\text{metro+incógnita}_2)(do+incógnita)_2} - \frac{\alpha}{\beta}^2 do - 1 - 4do \frac{\alpha}{\beta} + \frac{yo}{do} 1 > 0.$$

También $\det S$ evaluado en $m_2 = (\text{incógnita}_2, y_2)$ viene dado por

$$\det S|_{m_2} = -1 + \frac{\alpha}{\beta(\text{metro+incógnita}_2)} + \frac{yo}{(do+incógnita)_2} - \rho.$$

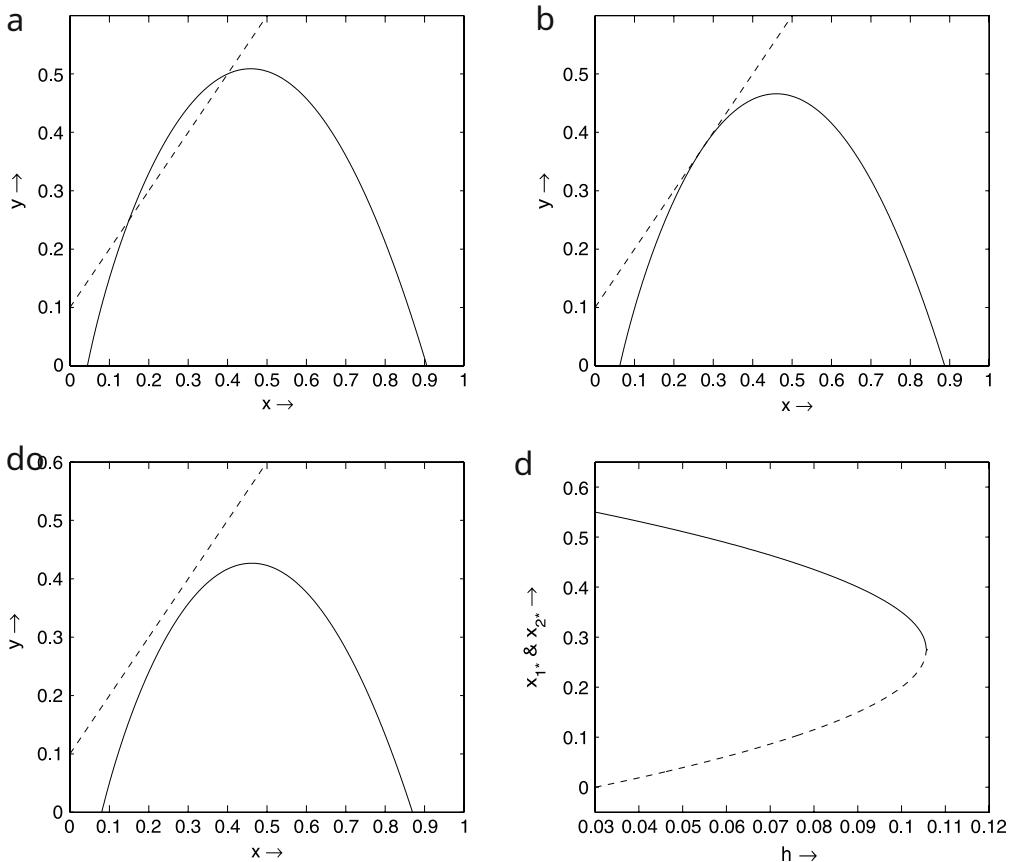


Figura 1. En (a) a (c) la parábola sólida es la nulclina de la presa y la línea discontinua es la nulclina del depredador. Este diagrama muestra cómo cambia el número de puntos de equilibrio interior conyugantes mientras se mantienen fijos los demás parámetros. $\alpha/\beta=0.1$, $\beta=1$, $d=0.05$ y $(\alpha y_0)/(\beta)=0.09$, hay dos equilibrios interiores, (b) $y=y_{0,\text{es}}=0.105625$, los dos equilibrios interiores chocan entre sí, (c) $y=0.12$, no existe equilibrio interior. (d) La curva sólida representa el equilibrio estable y la curva punteada representa el equilibrio inestable.

Del criterio de Routh-Hurwitz

(iii) Sabemos que si eles|
Por lo tanto, desde la implícita
estabilidad del punto de equilibrio

$$\frac{\alpha}{\text{incognitaz} + \beta(\text{merito} + \text{incognitaz})} + \frac{y_0}{(d_0 + \text{incognitaz})^2} = 1. \text{ Pelo } \alpha \text{ é a parte}$$

$$(i) \text{ es } |_{m \geq 0}, (ii) \det S|_{m \geq 0} > 0 \text{ y (iii) da } \frac{\partial}{\partial p} \operatorname{El} S|_{m \geq 0} = -1 \neq 0 \text{ en } p = p_{[\text{alta frecuencia}]}.$$

Esto garantiza la existencia de la bifurcación Hopf alrededor de $m_2^*(t_2^*, t_2^*)$. El establecimiento de la estabilidad se detallará en la Sección 4.1.2.

4.1.2 Estabilidad del ciclo límite

Para discutir la estabilidad (dirección) del ciclo límite calculamos ahora el coeficiente de Lyapunov [34,35] en el punto m_* ($\text{incógnita } z_*, y_*$) del sistema (4).

Primero traducimos el equilibrio $m_2 = (incógnita_2, y_2)$ del sistema (4) al origen mediante la transformación $incógnita = incógnita - incógnita_2$, $y = \hat{y} - y_2$. Luego, utilizando la ecuación de equilibrio (10) el sistema (4) en un vecindario del origen se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{-dx}{es} &= a_{10} \hat{x} + a_{20} \hat{y} + a_{11} x \hat{y} + a_{02} \hat{y}^2 + a_{30} \hat{x}^3 + a_{21} x \hat{y}^2 + a_{12} x \hat{y}^2 + a_{03} \hat{y}^3 + F_1(x, \hat{y}), \\ \frac{-dia}{es} &= b_{10} \hat{x} + b_{20} \hat{y} + b_{11} x \hat{y} + b_{02} \hat{y}^2 + b_{30} \hat{x}^3 + b_{21} x \hat{y}^2 + b_{12} x \hat{y}^2 + b_{03} \hat{y}^3 + F_2(x, \hat{y}), \end{aligned} \quad (15)$$

dónde,

$$a_{10} = -incógnita_{2*} + \frac{hx2*}{(do+incógnita_{2*})_2} + \frac{alfaqx2*}{(metro+incógnita_{2*})_2}, \quad a_{\overline{01}} = \frac{alfaincognita_{2*}}{metro+incógnita_{2*}}$$

$$\begin{aligned}
a_{20} &= -\frac{hx_2}{(do+incógnita_2)^2} + \frac{yo}{(do+incógnita_2)^2} - \frac{\alpha f a i n c ó g n i t a _ { 2 } * y _ { 2 } ^ { 2 }}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 3 }} + \frac{\alpha f a y _ { 2 } *}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 2 }} - 1, \\
a_{11} &= \frac{\alpha f a i n c ó g n i t a _ { 2 } *}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 2 }} - \frac{\alpha f a}{m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *}, \quad a_{02} = 0, \quad a_{30} = \frac{h x _ { 2 } *}{(d o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 4 }} - \frac{y o}{(d o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 3 }} + \frac{\alpha f a i n c ó g n i t a _ { 2 } * y _ { 2 } ^ { 2 }}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 4 }} - \frac{\alpha f a y _ { 2 } *}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 3 }}, \\
a_{21} &= -\frac{\alpha f a i n c ó g n i t a _ { 2 } *}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 3 }} + \frac{\alpha f a}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 2 }}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{03} = 0, \\
b_{10} &= \frac{\rho \beta y _ { 2 } ^ { 2 }}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 2 }}, \quad b_{01} = -\frac{\rho \beta y _ { 2 }}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 2 }}, \quad b_{20} = -\frac{\rho \beta y _ { 2 } *}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 3 }}, \quad b_{11} = 2 \frac{\rho \beta y _ { 2 }}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 2 }}, \\
b_{02} &= -\frac{\rho \beta}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 3 }}, \quad b_{30} = \frac{\rho \beta y _ { 2 } ^ { 2 }}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 4 }}, \\
b_{21} &= -2 \frac{\rho \beta y _ { 2 } *}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 3 }}, \quad b_{12} = \frac{\rho \beta}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 2 }}, \quad b_{03} = 0
\end{aligned}$$

Y $F_d(\hat{U}, v)$ para $a=1,2$ son series de potencias en potencias de $Univ$ satisfactorio $+yo \geq 4$, es decir

$$F_1(x, \hat{y}) = \sum_{i+y=4} a_{i,y} incógnita_i \hat{y}^i, \quad F_2(x, \hat{y}) = \sum_{i+y=4} b_{i,y} incógnita_i \hat{y}^i$$

De ahí el primer coeficiente de Lyapunov. Para un sistema planar (como se define en [34]) viene dado por

$$\begin{aligned}
\sigma = & -\frac{3\pi}{2a_{02}\Delta^{3/2}} \{ [a_{10}b_{10}(a_{21}+a_{11}b_{02}) + a_{02}b_{11}+a_{10}a_{01}(a_{11}b_{20}+a_{20}b_{11}+a_{11}b_{02}) \\
& + b_{10}^2(a_{11}a_{02}+2a_{02}b_{02})-2a_{10}b_{10}(b_{02}^2-a_{20}a_{02})-2a_{10}a_{01}(a_{20}-b_{20}b_{02}) \\
& - a_{01}^2(a_{20}b_{20}+b_{11}b_{20})+(a_{01}b_{10}-2a_{10})(b_{11}b_{02}-a_{11}a_{20})] \\
& - (a_{10}^2+a_{01}b_{11})^{-1}[3(b_{10}b_{03}-a_{01}a_{30})+2a_{10}(a_{21}+b_{12})+(b_{10}a_{12}-a_{01}b_{21})] \},
\end{aligned}$$

$$\text{dónde } \Delta = \frac{\rho x_2 * y_2 *}{(m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *) ^ { 2 }}, \quad \beta = \frac{\alpha f a + d o - 1}{\beta}, \quad -4 do \alpha f a + yo \frac{1}{do}.$$

Dado que la expresión para el número de Lyapunov σ es bastante complejo, no podemos decir nada sobre el signo de σ por lo tanto hemos dado el siguiente ejemplo numérico.

4.1.3. Ejemplo numérico

Para $\alpha f a = 0.40, \beta = 1.00, metro = 0.10, yo = 0.10, do = 0.05$ obtenemos $\rho_{[alta frecuencia]} = 0.1798611111$ y número de Lyapunov $\sigma = 949.3370580\pi > 0$. Esto implica que se crea un ciclo límite inestable alrededor de $m_2 = (incógnita_2, y_2) = (0.35, 0.45)$ mientras $m_1 = (incógnita_1, y_1) = (0.20, 0.30)$ es un punto de silla $y m_3 = (0, metro)$ un atractor. También para $0.2 = \rho > \rho_{[alta frecuencia]}$, punto de equilibrio $m_2 = (incógnita_2, y_2)$ es estable y para $0.15 = \rho < \rho_{[alta frecuencia]}$ es inestable. $\rho = 0.204985$ el ciclo límite choca con el punto de silla m_1 y da una órbita homoclínica. Nótese que para $\rho = 0.204985$ el número de Lyapunov $\sigma = 684.5999226\pi > 0$. Esto implica que el ciclo límite permanece inestable. Estos resultados se muestran en Figura 2.

4.1.4. Bifurcación en silla de montar

Como se mencionó anteriormente, los dos puntos de equilibrio interiores $m_1 = (incógnita_1, y_1)$ y $m_2 = (incógnita_2, y_2)$ chocan entre sí y con el sistema (4) tiene el único equilibrio interior instantáneo (equilibrio interior silla-nodo) $MI = (x, t)$ para $\alpha f a + c < 1$

$$y \alpha f a + \frac{do - 1}{\beta} = 4 do \frac{\alpha f a + yo}{\beta do} - 1. \quad \text{También uno de los valores propios del jacobiano evaluado en el punto } MI = (x, t) \text{ es cero entonces}$$

El punto $MI = (x, t)$ se vuelve no hiperbólica y su estabilidad no puede estudiarse mediante la técnica de linealización. Por lo tanto, existe la posibilidad de bifurcación alrededor del equilibrio interior instantáneo $MI = (x, t)$. Manteniendo todos los parámetros fijos y variando el parámetro de cosecha yo . Podemos ver los puntos de equilibrio coexistentes $m_1 = (incógnita_1, y_1)$ y $m_2 = (incógnita_2, y_2)$. Chocar entre sí a través de la bifurcación del nodo de silla de montar como yo cruza la magnitud crítica $\alpha_{res} = 1 - \frac{4}{\beta} \alpha f a + do - 1 - do \alpha f a - 1 - \frac{1}{\beta}$

Luego se aniquilan mutuamente. La superficie paramétrica

$$S_1 = (a, \beta, c) \in R^+ \quad \text{s.t. } \frac{\alpha f a}{\beta} + c < 1, \quad \frac{\alpha f a}{\beta} + do - 1 = 4 do \frac{\alpha f a + yo}{\beta do} - 1$$

Se conoce como superficie de bifurcación del nodo-silla.

Teorema 3. Sistema (4) sufre una bifurcación de nodo de silla alrededor de $E(x, \hat{y})$ con respecto al parámetro de bifurcación h si $\alpha f a + c < \frac{1}{\beta}$

$$1, \alpha f a + do - 1 = 4 do \alpha f a + yo - 1 \quad \text{y } x = \frac{\alpha f a}{\beta (m e t r o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *)} + \frac{yo}{(d o + i n c ó g n i t a _ { 2 } *)} - 1 < \rho.$$

Prueba. Para demostrar que el modelo (4) sufre una bifurcación en forma de silla de montar, utilizamos el teorema de Sotomayor [36,34] considerando yo como parámetro de bifurcación. Según el teorema de Sotomayor, uno de los valores propios del jacobiano en

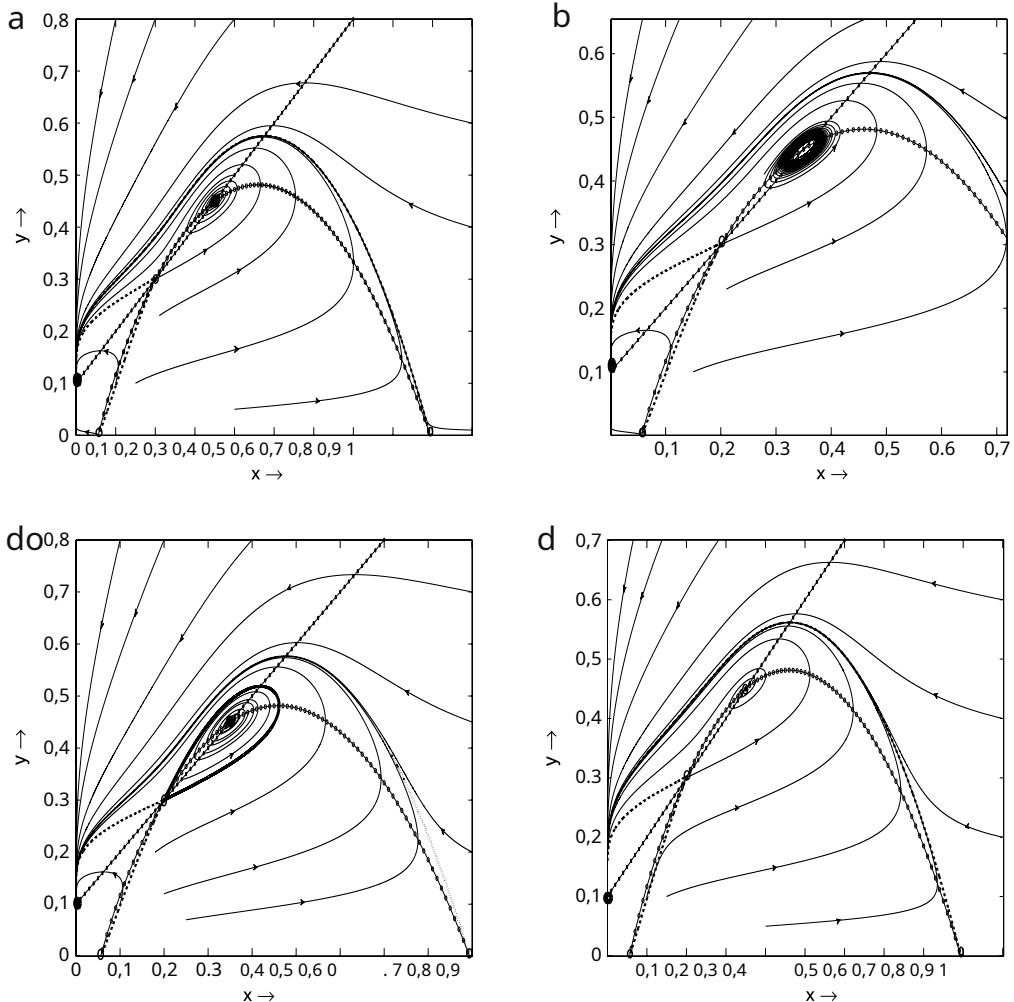


Figura 2. En (a) a (d) los puntos de equilibrio de presa y Se administran nullclinas depredador se dan mediante líneas discontinuas y por círculo marcado parábola y estrella marcada lin punto dee; variedades estables e inestables de diversos $m_1 = 0$, $\beta_{\text{metro}} = \text{incógnita}$ siempre es estable. (a) $m_2 = (\text{incógnita}^*, y_2^*)$ es localmente sintéticamente estable. (b) Un ciclo límite inestable se bifurca a través de la bifurcación de Hopf alrededor del $m_2 = (\text{incógnita}^*, y_2^*)$. (c) Este diagrama muestra que es un ciclo límite co fluye con el punto de silla $m_2 = (\text{incógnita}^*, y_2^*)$ dar un bucle homoclínico y (d) $m_2 = (\text{incógnita}^*, y_2^*)$ inestable.

el punto de equilibrio entre la silla y el nodo la

debe ser cero y el otro valor propio debe tener ne condición $\text{incógnita} = \frac{\alpha}{\beta(\text{metro} + \text{incógnita})} + \frac{y_0}{(\text{do} + \text{incógnita})} - 1 < p$. Dejar gramo

ya definido en la Sección 2. El jacobiano \bar{Y}_0 en el punto de equilibrio $E(\bar{u}, \bar{u})$ viene dado por

$$\bar{Y}_0 = Dg(x, t) = -\frac{-1 + \frac{a}{(\text{metro} + \text{incógnita})^2} + \frac{y_0}{(\text{do} + \text{incógnita})}}{\rho \beta y_2} - \frac{ax}{\text{metro} + \text{incógnita}} - \frac{\rho \beta y}{\text{metro} + \text{incógnita}}$$

Dejaryo sea el valor deyode tal manera que $\frac{y_0}{(\text{do} + \text{incógnita})} = 1$.

Ahora, dejemos que $V = (em_1, em_2)$ y $Y_0 = (em_1, o_2)$ ser. Un cálculo simple arroja $V = (\beta, 1)$ y $Y_0 =$ desde

$$gramo_{yo}(E, h^{[es]}) \equiv \frac{\partial_{gramo}}{\partial yo}(E, h^{[es]}) = -\frac{\frac{incógnita}{do}}{0} \quad \text{en} yo = yo^{[es]}$$

parte real positiva, por lo que necesitamos

tomar $gramo_2 = y_2$ donde F_1 y F_2 son

La matriz \bar{Y}_0 ja su simple valor propio cero en $yo = yo^{[es]}$. Esto exige $\det \bar{Y}_0 = 0$ en $yo = yo^{[es]}$ los vectores propios de \bar{Y}_0 y $\bar{Y}_0^{[es]}$ responder a un valor propio cero respectivamente,

ing a valor propio cero respectivamente, $yo(E, h^{[es]}) = -\frac{incógnita}{do} < 0$ en $yo = yo^{[es]}$,

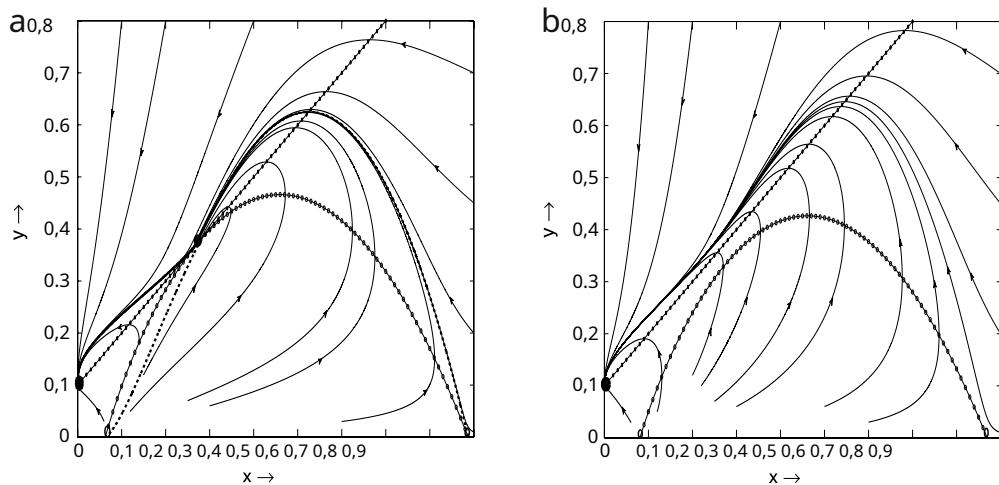


Figura 3. Aquí, la parábola marcada con un círculo es la nulclina de la presa y la línea marcada con una estrella es la nulclina del depredador. (a) Los dos equilibrios interiores chocan entre sí y aparece un único equilibrio instantáneo que es estable desde un lado e inestable desde el otro lado y el punto de equilibrio axial $m_1 = 0$, metro β es localmente asintóticamente estable. La curva discontinua es una separatrix que surge de variedades estables e inestables de $E(x, y)$ y la curva sólida oscura es una variedad estable de $m_1 = 0$, metro β . (b) No existe equilibrio interior y todas las trayectorias de la solución se aproximan al punto de equilibrio axial $m_1 = 0$, metro β cual es localmente asintóticamente estable.

Ahora, $Ohmio_2 = Y_{\alpha_2} [D_2 g(E, h_{[es]})(V, V)]$, donde

$$\begin{aligned} \text{incógnita} = (x, y), \quad y_0 &= -\frac{\nabla}{\partial y} \frac{\partial g_{\text{gramo}_1}}{\partial \text{incógnita}}, \quad \nabla \frac{\partial g_{\text{gramo}_1}}{\partial \text{incógnita}}, \\ \nabla \frac{\partial g_{\text{gramo}_1}}{\partial \text{incógnita}} &= \frac{\partial g_{\text{gramo}_1}}{\partial \text{incógnita}}, \quad y_0 = \frac{\nabla \frac{\partial g_{\text{gramo}_1}}{\partial y}}{\partial y}, \quad \text{para } i=1,2. \end{aligned}$$

Después de la simplificación, obtenemos

$$Ohmio_2 = -\frac{2\beta \cdot \text{incógnita}}{\partial y + \text{incógnita}} < 0.$$

Así, a partir del teorema de Sotomayor, el sistema sufre una bifurcación de nodo-silla alrededor $E(\bar{x}, \bar{y})$ en $y_0 = y_{[es]}$. Por lo tanto, podemos concluir que cuando el parámetro y_0 pasa de un lado a otro $y_0 = y_{[es]}$. Por otro lado, el número de equilibrios interiores del sistema (4) cambia de cero a dos.

Desde el punto de vista biológico de la gestión óptima de los recursos renovables, nos gustaría determinar la tasa de cosecha y_{ORMS} para el rendimiento máximo sostenible (RMS) para asegurar que ambas poblaciones puedan mantenerse por sí mismas. Por lo tanto, la interpretación biológica de la bifurcación de la silla de montar y el nodo es que $y_{ORMS} = y_{[es]}$. Las especies presas se ven llevadas a la extinción por $h > h_{[es]}$ pero no se extinguieren para una amplia gama de datos iniciales cuando $0 < h < h_{[es]}$, es decir, coexistencia para el modelo (4) es posible en la forma de un equilibrio positivo para ciertas elecciones de valores iniciales.

4.1.5. Ejemplo numérico

Para $\alpha = 0.40, \beta = 1.00$, metro = 0.10, $d_0 = 0.05$, conseguimos $y_{[es]} = 0.105625$. Para $0 < h < h_{[es]}$, el sistema (4) tiene dos puntos de equilibrio interior distintos $m_1 = (\text{incógnita}_1, y_1)$ y $m_2 = (\text{incógnita}_2, y_2)$ que chocan entre sí si $y_0 = y_{[es]}$ y resulta una matriz de equilibrio instantáneo (ver Figuras 1 y 2(a) y 3).

4.1.6. Bogdanov-Toma la bifurcación

La matriz jacobiana evaluada en $M = (x, t)$ es dado por

$$Y_0 = \frac{\alpha \bar{x}}{\beta(metro + \text{incógnita})}, \quad \frac{\alpha \bar{x}}{\rho}, \quad \frac{-\rho}{\beta}, \quad \begin{matrix} A & B \\ do & D \end{matrix}.$$

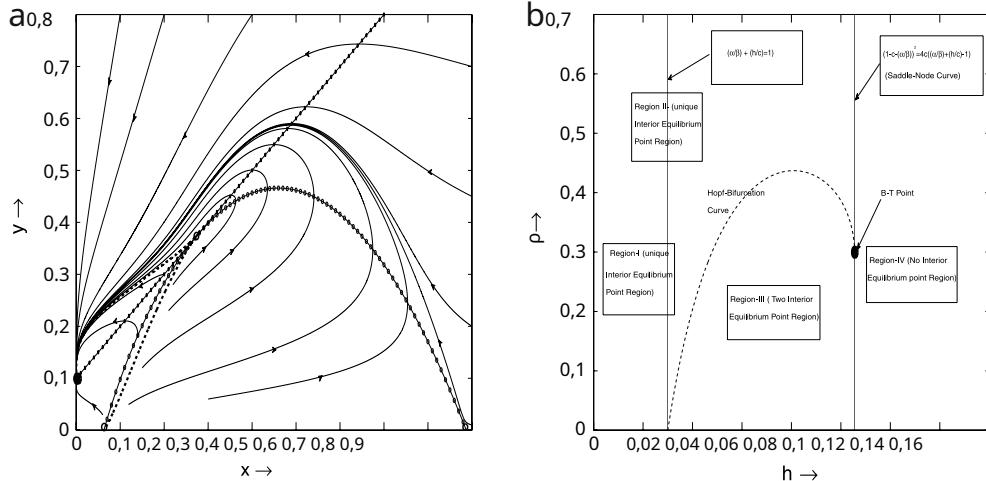


Figura 4.(a) La nuclina de la presa y del depredador se expresa mediante una parábola marcada con un círculo y una línea marcada con una estrella. Las curvas discontinuas son variedades estables e inestables de los puntos de equilibrio. $m_1, m_2, y M_1$. El único punto de equilibrio instantáneo $M(x, y)$ es una cúspide (punto B-T) de codimensión dos. (b) La región paramétrica se grafica con respecto a varios valores de h y ρ tomando los valores de los parámetros $\alpha=0.4, \beta=1, d=0.05$ y $\mu=0.1$. La curva punteada es la curva de bifurcación de Hopf $\mu=\frac{\alpha}{\beta}(\text{incógnita})$, siempre es inestable por debajo de esta curva y siempre es estable por encima de esta curva. El punto de colisión de la curva de silla-nodo y la curva de bifurcación de Hopf es un punto B-T.

Como $\det F=0$, ahora consideramos el caso para el cual $\text{tr } F=0$ que da valores propios doble cero de F . Claramente, $\text{tr } F=0$ si $\frac{\alpha}{\beta(\text{metro+incógnita})} = \rho$. En tal situación la matriz Y es similar al bloque Jordan de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Según la bifurcación teoría [37], sabemos que bajo ciertas condiciones de no degeneración, el punto de equilibrio $M(x, y)$ se convierte en una cúspide de codimensión 2. Si elegimos parámetros de bifurcación adecuados, entonces el sistema (4) sufre la bifurcación de Bogdanov-Takens. Para ello nos centraremos en la siguiente región paramétrica

$$S_2 = \{(a, \beta, h, c, \rho) \in \mathbb{R}^5 \mid \frac{\alpha}{\beta} + c < 1, \quad \frac{\alpha}{\beta(\text{metro+incógnita})} = \rho\}.$$

Matemáticamente la superficie representada por S_2 se llama superficie B-T.

4.1.7. Ejemplo numérico de la bifurcación de Bogdanov-Takens

Para $\alpha=0.4, \beta=1.00, \text{metro}=0.10, d=0.05$ obtenemos $y_{[BT]}=0.105625$ y $\rho_{[BT]}=0.2933333334$ junto con $M(x, t)=(x, t)=(0.275, 0.375)$. Para este conjunto de valores de parámetros, tanto el nodo de silla como la bifurcación de Hopf chocan entre sí y el punto de equilibrio instantáneo se convierte en una cúspide de codimensión dos (ver Figura 4).

Teorema 4. Si elegimos h y ρ como dos parámetros de bifurcación entonces el sistema (4) sufre una bifurcación de Bogdanov-Takens alrededor del punto de equilibrio instantáneo $E(x, y)$ siempre que $\frac{\alpha}{\beta(\text{metro+incógnita})} = \rho$.

Prueba. Dejar $(h, \rho) = (a)_{[BT]} + la_1, \rho_{[BT]} + la_2$ ser un punto vecino del punto B-T $(y_{[BT]}, \rho_{[BT]})$ con $|a_i|, i=1, 2$ suficientemente pequeño. Entonces el sistema (4) en $(h, \rho) = (a)_{[BT]} + la_1, \rho_{[BT]} + la_2$ viene dado por

$$\begin{aligned} \frac{-Dx}{dt} &= \frac{axy}{\text{metro+incógnita}} - \frac{y\alpha}{\text{metro+incógnita}} - \frac{l_1 \text{incógnita}}{\text{metro+incógnita}} \equiv F(x, y, \lambda_1) \\ \text{es} & \quad \frac{ay}{\text{metro+incógnita}} - \frac{\lambda_1 \text{incógnita}}{\text{metro+incógnita}} \equiv G(x, y, \lambda_2). \end{aligned} \quad (16)$$

A continuación, primero reducimos el sistema (16) en la forma canónica de un pequeño barrio. Se toma la bifurcación empleando una serie de cambio de coordenadas [38,13] en $u=tu, v=y-y_{[BT]}$. Entonces nosotros probamos la condición de no degeneración de la bifurcación Bogdanov-Takens con el h ayudamos a la resultado de [37].

Creando el origen $(0, 0)$ como el bifurcación p unir mediante la transformación $t=u-\text{incógnita}, y=v-\text{incógnita}$, lo conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{-tu}{dt} &= \alpha_{00} + \alpha_{10}tu + \alpha_{01}en + \alpha_{02}t^2 + \alpha_{11}tuen + \alpha_{02}en^2 + PAG_1(tu, v), \\ \text{es} & \quad \frac{-den}{dt} = \beta_{00} + \beta_{10}tu + \beta_{01}en + \beta_{20}t^2 + \beta_{11}tuen + \beta_{02}en^2 + PAG_2(tu, v), \end{aligned} \quad (17)$$

dónde,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{00} &= -\frac{\lambda}{d+incognita}, \quad \alpha_{10} = -\frac{ax^-}{\beta(metro+incognita)} - \frac{\lambda\bar{a}\bar{o}}{(d+incognita)}, \quad \alpha_{01} = -\frac{ax^-}{metro+incognita}, \\
 \alpha_{20} &= \frac{a\bar{y}}{(metro+incognita)} - 1 + \frac{y\alpha(B)}{(d+incognita)} - \frac{hx^-}{(d+incognita)} - \frac{ax\bar{y}}{(metro+incognita)} + \frac{c\lambda\bar{x}}{(d+incognita)^3}, \quad \alpha_{11} = -\frac{\alpha}{metro+incognita} + \frac{ax^-}{(metro+incognita)}, \\
 \alpha_{02} &= 0, \\
 \beta_{00} &= \rho_{[B]} \bar{y} + \lambda\bar{a}\bar{y} - \frac{\lambda\beta\bar{y}^2}{metro+incognita} - \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}_2}{metro+incognita}, \quad \beta_{10} = \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}_2}{(metro+incognita)} + \frac{\lambda\beta\bar{y}_2}{(metro+incognita)}, \\
 \beta_{01} &= \rho_{[B]} + \lambda\bar{a} - 2 \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}}{metro+incognita} - 2 \frac{\lambda\bar{a}\beta\bar{y}}{metro+incognita}, \\
 \beta_{20} &= -\frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}_2}{(metro+incognita)} - \frac{\lambda\beta\bar{y}^2}{(metro+incognita)}, \quad \beta_{11} = 2 \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}}{(metro+incognita)} + 2 \frac{\lambda\bar{a}\beta\bar{y}}{(metro+incognita)}, \quad \beta_{02} = -\frac{\rho_{[B]}\beta}{metro+incognita} - \frac{\lambda\beta}{metro+incognita}
 \end{aligned}$$

y $PAG_a(tu, v), a=1,2$ son series de potencias en (tu, v) con poderes $t_u \leq y_0$ satisfactorio $t_u + y_0 \geq 3$.

Ahora introducimos la transformación afín $U=tu\bar{v} \hat{=} A+Be$ donde $A=$

$$\frac{ax^-}{\beta(metro+incognita)}, \quad B=-\frac{ax^-}{metro+incognita}, \quad \text{en lo anterior}$$

sistema para conseguir

$$\begin{aligned}
 -\frac{D\hat{U}}{es} &= \alpha_{00}(\lambda) + \alpha_{10}(\lambda)\hat{u} + \alpha_{01}(\lambda)v^- + \frac{1}{2}\alpha_0(\lambda)\hat{u}^2 + \alpha_1(\lambda)\hat{u}v^- + \frac{1}{2}\alpha_2(\lambda)v^- + Q_1(\hat{U}, v), \\
 -\frac{dV}{es} &= \eta_{10}(\lambda) + \eta_{11}(\lambda)\hat{u} + \eta_{01}(\lambda)v^- + \frac{1}{2}\eta_{20}(\lambda)Uv^- + \eta_{11}(\lambda)\hat{u}v^- + \frac{1}{2}\eta_{02}(\lambda)v^- + Q_2(\hat{U}, v),
 \end{aligned} \tag{18}$$

dónde,

$$\begin{aligned}
 \alpha_{00}(\lambda) &= -\frac{\lambda}{d+incognita}, \quad \xi_{10}(\lambda) = \frac{ax\bar{A}}{B(hombre+incognita)} + \frac{y\alpha_{[B]}(incognita)}{(d+incognita)} + \frac{ax\bar{y}}{(metro+incognita)} - \frac{\lambda}{d+incognita} - \frac{\lambda\bar{a}\bar{\beta}}{(d+incognita)}, \\
 \alpha_{01}(\lambda) &= -\frac{ax^-}{B(hombre+incognita)}, \\
 \alpha_{20}(\lambda) &= 2 \frac{\alpha}{B(hombre+incognita)} - \frac{ax\bar{A}}{B(hombre+incognita)} + \frac{a\bar{y}}{(d+incognita)} - 1 + \frac{\lambda\bar{a}_1}{(d+incognita)} + \frac{y\alpha_{[B]}(incognita)}{(d+incognita)} - \frac{y\alpha_{[B]}(incognita)}{(d+incognita)}, \\
 \alpha_{11}(\lambda) &= -\frac{\alpha}{B(hombre+incognita)} + \frac{ax^-}{B(hombre+incognita)}, \quad \xi_{02}(\lambda) = 0, \\
 \eta_{00}(\lambda) &= \rho_{[B]}\bar{y} + \lambda\bar{a}\bar{y} - \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}_2}{metro+incognita} - \frac{\lambda\bar{a}\bar{\beta}}{metro+incognita}, \\
 \eta_{10}(\lambda) &= -\frac{\rho_{[B]}\beta\bar{A}}{B} - \frac{\lambda\bar{a}\bar{A}}{B} + 2 \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{A}\bar{y}}{B(hombre+incognita)} + 2 \frac{\lambda\bar{a}\bar{B}\bar{A}\bar{y}}{B(hombre+incognita)} + \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}_2}{(metro+incognita)} + \frac{\lambda\bar{a}\beta\bar{y}^2}{(metro+incognita)}, \\
 \eta_{01}(\lambda) &= \frac{\rho_{[B]}}{B} + \frac{\lambda}{B} - 2 \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}}{B(hombre+incognita)} - 2 \frac{\lambda\bar{a}\beta\bar{y}}{B(hombre+incognita)}, \\
 \eta_{20}(\lambda) &= -\frac{\rho_{[B]}\beta\bar{A}_2}{B(metro+incognita)} - \frac{\lambda\bar{a}\bar{B}\bar{A}_2}{B(metro+incognita)} - 2 \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{A}\bar{y}}{B(hombre+incognita)} - 2 \frac{\lambda\bar{a}\bar{B}\bar{A}\bar{y}}{B(hombre+incognita)} - 2 \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}_2}{(metro+incognita)} - 2 \frac{\lambda\bar{a}\beta\bar{y}_2}{(metro+incognita)}, \\
 \eta_{11}(\lambda) &= 2 \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{A}}{B(metro+incognita)} + 2 \frac{\lambda\bar{a}\bar{\beta}}{B(metro+incognita)} + 2 \frac{\rho_{[B]}\beta\bar{y}}{B(hombre+incognita)} + 2 \frac{\lambda\bar{a}\beta\bar{y}}{B(hombre+incognita)}, \\
 \eta_{02}(\lambda) &= -\frac{\rho_{[B]}\beta}{B(metro+incognita)} - \frac{\lambda\bar{a}\beta}{B(metro+incognita)}
 \end{aligned}$$

y $Q_k(\hat{U}, v), k=1,2$ son series de potencias en (\hat{U}, v) con poderes $t_{\hat{U}} + y_0$ satisfactorio $t_{\hat{U}} + y_0 \geq 3$.

Utilizando las ecuaciones y expresiones de equilibrio para \hat{A} y \hat{B} el sistema (18) viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{-D\hat{U}}{es} &= \xi_{00} + \xi_{10} Un + \hat{V}^4 \xi_{20} Un^2 + \xi_{11} \hat{U} \hat{V}^4 Q_1(\hat{U}, \hat{V}), \\ \frac{-D\hat{V}}{es} &= \eta_{01} \hat{V}^4 - \eta_{20} Un^2 + \eta_{02} V^2 + Q_2(\hat{U}, e n^4), \end{aligned} \quad (19)$$

dónde,

$$\begin{aligned} \xi_{00} &= -\frac{\text{la}_n^{\text{incognita}}}{(do+\text{incognita})}, \quad \xi_{10} = -\frac{\text{la}_d}{(do+\text{incognita})}, \quad \xi_{20} = -\frac{\text{incognita}}{(do+\text{incognita})} + \frac{\text{la}_o}{(do+\text{incognita})}, \quad \xi_{11} = -\frac{\text{metro}}{\text{incognita}(\text{metro}+\text{incognita})} \\ \eta_{01} &= (\rho_1 - B\eta_1 + la_2) \frac{\text{metro}+\text{incognita}}{ax^4}, \quad \eta_{20} = -\frac{\rho_2 \eta_1 + la_2}{(\rho_2 \eta_1 + la_2) \text{metro}}, \quad \eta_{02} = -(\rho_1 - B\eta_1 + la_2) \frac{\beta(\text{metro}+\text{incognita})}{\alpha(\text{metro}+\text{incognita})}. \end{aligned}$$

Ahora usando lo siguiente $do \Rightarrow$ cambio de coordenadas en un pequeño barrio de $(0,0)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= Un - \frac{1}{2} \xi_{11} + \eta_{02} Un^2 \quad y \quad y_2 = e n^4 + \xi_{20} Un^2 - \eta_{02} \hat{U} \hat{V}, \\ es \text{ decir } \hat{U} &= y_1 + \frac{1}{2} \xi_{11} + \eta_{02} - y_1^2 \quad y \hat{V} = y_2 - \xi_{20} y_1 \\ &\quad + \eta_{02} y_1 y_2 \end{aligned}$$

El sistema (19) se puede transformar en

$$\begin{aligned} \frac{-m\theta r_1}{es} &= a_{00} + a_{10} y_1 + y_2 + a_{20} y_1^2 + R_1(y_1, y_2), \\ \frac{-m\theta r_2}{es} &= s_{10} y_1 + s_{01} y_2 + s_{20} y_1^2 + s_{11} y_1 y_2 + R_2(y_1, y_2), \end{aligned} \quad (20)$$

dónde,

$$\begin{aligned} a_{00} &= \xi_{00}, \quad a_{10} = \xi_{10} - \xi_{00}(\xi_{11} + \eta_{02}), \quad a_{20} = -\frac{1}{2}(\xi_{11} + \eta_{02}) \xi_{10} - (\xi_{11} + \eta_{02}), \\ s_{10} &= 2\xi_{00}\xi_{20}, \quad s_{01} = \eta_{01} - \xi_{00}\eta_{02}, \quad s_{20} = \eta_{02} + 2\xi_{10}\xi_{20} + \xi_{00}\xi_{20}(\xi_{11} + \eta_{02}) - \xi_{20}(\eta_{01} - \xi_{00}\eta_{02}), \\ s_{11} &= 2\xi_{20} - \xi_{00}\eta_{02} - \xi_{10}\eta_{02} \end{aligned}$$

y $R_a(y_1, y_2), a=1,2$ son series de potencias en (y_1, y_2) con poderes $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ satisfactorio $\# y_1 + y_2 \geq 3$.

A continuación, bajo lo siguiente $do \Rightarrow$ cambio de coordenadas en un pequeño barrio de $(0,0)$

$$eh = y_1 y_2 eh = a_{00} + a_{10} y_1 + y_2 + a_{20} y_1^2,$$

El sistema (20) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{-e_1}{es} &= e_2 + R_1(de_1, eh), \\ \frac{-e_2}{es} &= \theta_{00} + \theta_{10} e_1 + \theta_{01} e_2 + \theta_{20} e_1^2 + R_2(de_1, eh), \end{aligned} \quad (21)$$

dónde,

$$\begin{aligned} \theta_{00} &= -a_{00}s_{01}, \quad \theta_{10} = s_{10} - a_{00}s_{11} - a_{10}s_{01}, \quad \theta_{01} = a_{10} + s_{01} \\ \theta_{20} &= s_{20} - a_{20}s_{01} - a_{10}s_{11}, \quad \theta_{11} = s_{11} + 2a_{20} \end{aligned}$$

y $R_a(de_1, eh), a=1,2$ son series de potencias en (eh, eh) con poderes $zzz y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ satisfactorio $\# y_1 + y_2 \geq 3$.

Además, consideramos el siguiente cambio no singular de coordenadas en un pequeño vecindario de $(0,0)$:

$$eh = e_1 eh, \quad eh = e_2 + R_1(de_1, eh)$$

Para reducir el sistema (21) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{-de_1}{es} &= e_2, \\ \frac{-de_2}{es} &= \theta_{00} + \theta_{10} e_1 + \theta_{01} e_2 + \theta_{20} e_1^2 + \theta_{11} e_1 e_2 + GRAMO_1(em_1) + e_2 GRAMO_2(em_1) + e_1^2 GRAMO_3(em_1, o_2). \end{aligned} \quad (22)$$

Aquí $GRAMO_1, GRAMO_2$ son series de potencias en eh con poderes $e_1 \geq 1, e_2 \geq 0$ satisfactorio $\# e_1 \geq 3, e_2 \geq 2$ respectivamente y $GRAMO_3$ es una serie de potencias en (eh, o_2) con poderes $e_1 \geq 1, e_2 \geq 0$ satisfactorio $\# e_1 + e_2 \geq 1$.

Aplicación del teorema de preparación de Malgrange [39], tenemos

$$\theta_{00} + \theta_{10}eh + \theta_{01}eh + \theta_{20}eh + GR^2MO_1(w) = eh + \frac{\theta_{00}}{\theta_{20}}eh + \frac{\theta_{01}}{\theta_{20}}B_1(w\lambda),$$

dónde $B_1(0, \lambda) = \theta_{20}yB_1$ es una serie de poderes λ norte eh cuyos coeficientes dependen de parámetros $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

Ahora vamos $t_1 = eh, t_2 = v_2 - \frac{eh}{\theta_{20}}$ y $y = \theta_{20}d$, entonces el sistema (22) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{dt_1}{dT} &= t_2, \\ \frac{dt_2}{dT} &= \frac{\theta_{00}}{\theta_{20}} + \frac{\theta_{01}}{\theta_{20}}t_1 + \frac{\theta_{01}t_1 + t_2}{\theta_{20}}, + \sqrt{1+t_1^2+t_2^2} + S(t_1, t_2, \lambda), \end{aligned} \quad (23)$$

dónde $S_1(t_1, t_2, 0)$ es una serie de potencias en (t_1, t_2) con poderes $t_1 \geq 1, t_2 \geq 2$ y $y \geq 2$.

Nuevamente consideramos $en_1 = t_1 + \frac{\theta_{00}eh}{2\theta_{20}} = t_2$ y utilizar una expansión en serie de Taylor para transformar el sistema (23) dentro del siguiente

$$\begin{aligned} \frac{den}{dT} &= en_2, \\ \frac{den_2}{dT} &= \mu_1(\lambda_1, \lambda_2) + \mu_1(\lambda_1, \lambda_2)v_2 + en_1^2 + (\varepsilon + a(\lambda))en_1en_2 + S_2(v_1, en_2, \mu), \end{aligned} \quad (24)$$

dónde,

$$\mu_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\theta_{00}}{\theta_{20}} - \frac{\theta_{00}}{2\theta_{20}}^2, \quad \mu_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\theta_{01}}{\theta_{20}} - \frac{\theta_{00}}{2(\theta_{20})^2}, \quad \varepsilon + a(\lambda) = \sqrt{1 - \frac{\theta}{\theta_{20}}}$$

con $a(\lambda) = 0$ y $S_2(v_1, en_2, 0)$ es una serie de potencias en (en_1, en_2) con poderes $v_1 \geq 1, en_2 \geq 2$ satisfactorio $\varepsilon + a(\lambda) \geq 3$ y $y \geq 2$.

Así pues, el sistema (24) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{den}{dT} &= en_2, \\ \frac{den_2}{dT} &= \mu_1(\lambda_1, \lambda_2) + \mu_1(\lambda_1, \lambda_2)v_2 + en_1^2 + miem en_2 + S_3(v_1, en_2, \mu), \end{aligned} \quad (25)$$

dónde $S_3(v_1, en_2, \mu)$ es una serie de potencias en $(en_1, en_2, \mu_1, \mu_2)$ con poderes $v_1 \geq 1, en_2 \geq 2, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$ satisfactorio $\varepsilon + a(\lambda) + \mu_1 + \mu_2 \geq 4$ y $y \geq 3$.

El sistema (25) es topológicamente equivalente a la forma normal de la bifurcación de Bogdanov-Takens dada por

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2, \\ -dy_2 &= \mu_1 + \mu_2 y_2 + y_1^2 + y_1 - y_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Ahora, demostramos la condición de no degeneración para la bifurcación de Bogdanov-Takens [37]. Usando $\beta = -1$, junto con ecuaciones de equilibrio de la ecuación (13), tenemos

$$\alpha_{00}(0) = 0, \quad \alpha_{10}(0) = 0, \quad \alpha_{01}(0) = 1, \quad \alpha_{20}(0) = -\frac{2\text{incógnita}}{d+1\text{incógnita}}, \quad \xi_{11}(0) = -\frac{\text{metro}}{\text{incógnita}(\text{metro}+1\text{incógnita})}, \quad \xi_{02}(0) = 0,$$

y

$$\begin{aligned} \eta_{00}(0) &= 0, \quad \eta_{10}(0) = 0, \quad \eta_{01}(0) = -\frac{\rho_{[BT]}}{B}, \quad \eta_{20}(0) = -\frac{2\rho_{[BT]}}{\beta(\text{metro}+1\text{incógnita})}, \quad \eta_{11}(0) = 0, \\ \eta_{02}(0) &= -\frac{2\beta\rho_{[BT]}}{\beta(\text{metro}+1\text{incógnita})}. \end{aligned}$$

Vemos que la condición de no degeneración de la bifurcación de Bogdanov-Takens es $\alpha_{20}(0) + \eta_{11}(0) \neq 0$ y $\eta_{20}(0) \neq 0$ están satisfechos. También vemos que

$$\text{signo}(\eta_{20}(0)(\xi_{20}(0) + \eta_{11}(0))) = +1.$$

4.2. Caso II: $\alpha_{20} + \eta_{20} \leq 1$

En este caso sólo existe un punto de equilibrio interior y se denota por $m^* = (\text{incógnita}_*, y_*) \equiv (\text{incógnita}_{z*}, y_{z*})$.

Teorema 5.(i) El punto de equilibrio $E=(\text{incógnita}_*, y_*)$ es estable si $x_{\beta(\text{metro}+\text{incógnita}_*)} + \frac{\alpha}{(\text{do}+\text{incógnita}_*)} < 1 < \rho$.

(ii) El sistema se somete a un Hopf bifurcación con respecto al parámetro de bifurcación ρ alrededor del punto de equilibrio $E=(\text{incógnita}_*, y_*)$ si $x_{\beta(\text{metro}+\text{incógnita}_*)} + \frac{\alpha}{(\text{do}+\text{incógnita}_*)} - 1 = \rho$.

Este resultado se puede demostrar de manera similar a la dada en la Sección 4.1.1.

4.2.1. Bifurcación transcritica

Hemos visto que el equilibrio axial $m_i=(0, \text{metro})$ es estable y $m_{i*}=(\text{incógnita}_*, y_*)$ es inestable en la región paramétrica S_3 dado por

$$S_3 = \{(a, \beta, h, c, \rho) \in \mathbb{R}^5 \mid \frac{\alpha}{\beta} + \frac{y_0}{d_0} > \frac{\alpha}{\beta(\text{metro} + \text{incógnita}_*)} + \frac{y_0}{(d_0 + \text{incógnita}_*)} - 1 > \rho\}$$

Por otra parte el equilibrio axial $m_i=(0, \text{metro})$ es inestable y $m_{i*}=(\text{incógnita}_*, y_*)$ es estable en la región

$$S_4 = \{(a, \beta, h, c, \rho) \in \mathbb{R}^5 \mid \frac{\alpha}{\beta} + \frac{y_0}{d_0} < \frac{\alpha}{\beta(\text{metro} + \text{incógnita}_*)} + \frac{y_0}{(d_0 + \text{incógnita}_*)} - 1 < \rho\}$$

Por lo tanto, hay un intercambio de estabilidad entre los dos puntos de equilibrio. $m_i=(0, \text{metro})$ y $m_{i*}=(\text{incógnita}_*, y_*)$ En las dos regiones S_3 y S_4 como y_0 cruza la magnitud crítica $y_0|_{tc} = d_0(1 - \alpha/\beta)$.

El equilibrio axial $m_i=(0, \text{metro})$ pierde su estabilidad en $\alpha/\beta + y_0 = 1$ uno de los valores propios del jacobiano evaluado en el punto $m_i=(0, \text{metro})$ es cero por lo que el punto $m_i=(0, \text{metro})$ se vuelve no hiperbólica, por lo que existe la posibilidad de bifurcación. alrededor del equilibrio axial $m_i=(0, \text{metro})$. Similar al caso de la bifurcación de la silla de montar y el nodo, manteniendo todos los parámetros fijos y variando y_0 Podemos estudiar la existencia de bifurcación transcritica con la ayuda del teorema de Sotomayor. Esto se muestra en Figura 5(d).

4.2.2. Ejemplo numérico

Tomamos el ejemplo numérico que es $\alpha=0.80, \beta=2.00, \text{metro}=0.10, d_0=0.30, y_0=0.17$ satisfactorio $\alpha/\beta + y_0 < 1$ que da $\rho_{[\text{alta frecuencia}]}=0.1180989313$ y el número de Lyapunov $\sigma=-142.7814668\pi$ Para este conjunto de parámetros, el equilibrio interior único se obtiene como $(0.330, 0.215)$. Este punto de equilibrio es estable para $\rho=0.2 > \rho_{[\text{alta frecuencia}]}$ y el ciclo límite choca con el punto de silla m_i para $\rho=0.09 < \rho_{[\text{alta frecuencia}]}$ para dar una órbita homoclínica (ver Figura 5(a), (b) y (c)).

Teorema 6.El sistema(4)sufre una bifurcación transcritica entre $E_1=(0, \text{metro})$ y $E_2*=(\text{incógnita}_*, y_*)$ con respecto al parámetro de bifurcación h si $\alpha/\beta + y_0 = 1$

Prueba. La matriz jacobiana R del sistema(4)alrededor del punto de equilibrio axial $m_i=(0, \text{metro})$ viene dado por

$$R = \begin{bmatrix} -1 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{y_0}{d_0} & 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} & -\rho \end{bmatrix}$$

Claramente, uno de los valores propios de R es negativo y el otro valor propio será cero si y solo si $\alpha/\beta + y_0 = 1$ que da $y_0 = y_0|_{tc} = d_0(1 - \alpha/\beta)$. Si $\Phi=(\varphi_1, \varphi_2)$ y $O=(\psi_1, \psi_2)$, y_0 denotan los vectores propios correspondientes al valor propio cero de las matrices R y $R|_{y_0}$, respectivamente, entonces obtenemos $\Phi=(1, 1)y_0 O=(1, 0)y_0$. Ahora $A_1=Oy_0[M_1, y_0|_{tc}] = 0$, donde $m_i=(0, \text{metro})$. De ahí el sistema(4)no alcanza ninguna bifurcación del nodo de silla de montar [34] alrededor m_i . De nuevo, $\Delta\psi_0[M_1, y_0|_{tc}] = 1$ y $\Delta\psi_0[M_1, y_0|_{tc}]\Phi = -1$, donde

$$\Delta\psi_0[M_1, y_0|_{tc}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{d_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Similar al cálculo para la bifurcación del nodo de silla de montar

$$\Delta_3=Oy_0[D_2F(M_1, y_0|_{tc})(\Phi, \Phi)] = -\frac{2}{d_0}\frac{\alpha}{\beta} + d_0 - 1 \neq 0,$$

bajo la existencia del punto de equilibrio interior $m_{i*}=(\text{incógnita}_*, y_*)$.

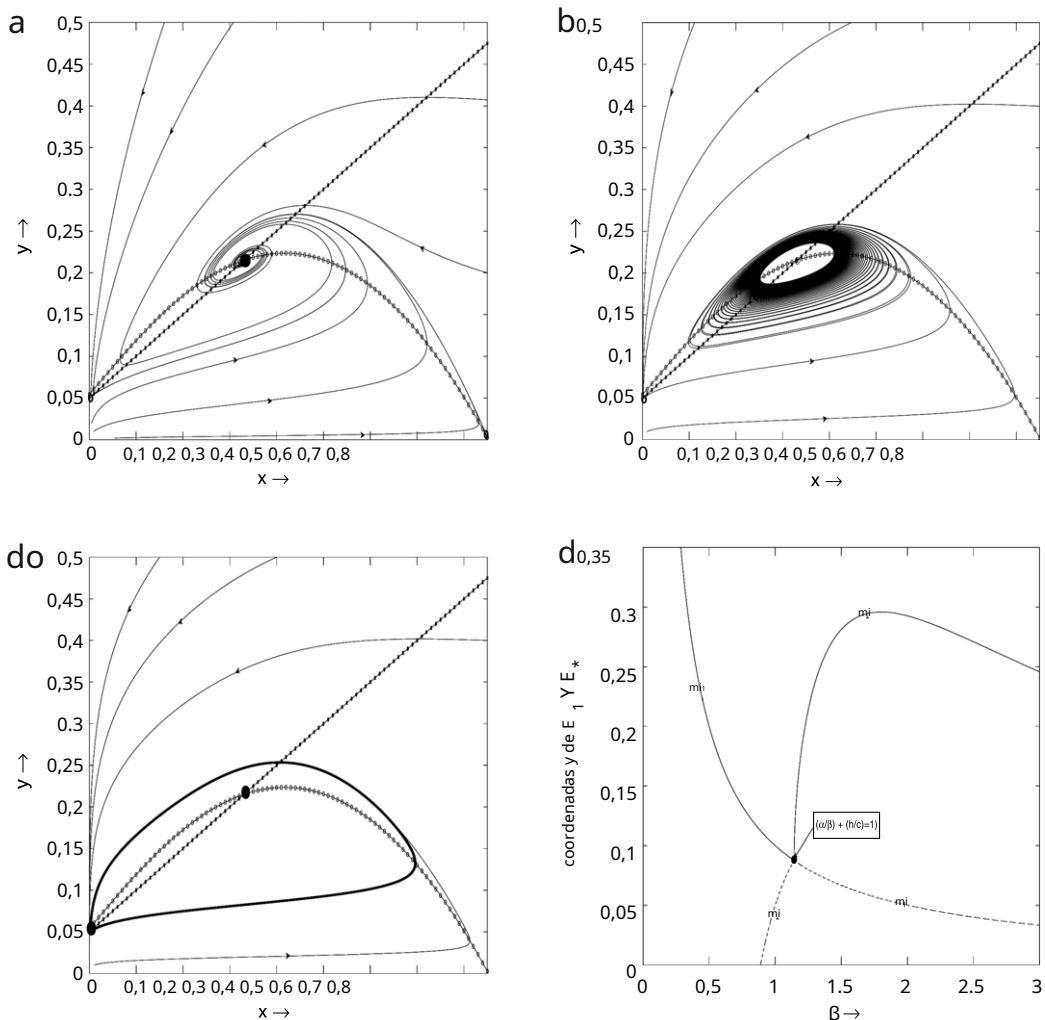


Figura 5. En (a) a (c) las nulclinas de presa y depredador se dan mediante una parábola marcada con un círculo y una línea marcada con una estrella. (a) El único punto de equilibrio interior $m_1=(\text{incógnita}, y_1)$ es estable y el punto de equilibrio axial $m_2=(0, m_{20})$ es un punto de silla. (b) Un ciclo límite estable se bifurca del equilibrio interior a través de Bifurcación de Hopf. (c) El ciclo límite choca con el punto de silla. $m_3=(0, m_{30})$ y aparece una curva homoclínica. (d) Este diagrama muestra el intercambio de estabilidad entre $m_1=(0, m_{10})$ y $m_2=(\text{incógnita}_2, y_2)$. El y-coordenadas de m_1 y m_2 se trazan en el y-eje, donde la curva sólida muestra la rama estable y la curva discontinua representa la rama inestable.

5. Conclusión

En este artículo, hemos considerado un modelo depredador-presa Leslie-Gower modificado con una cosecha no lineal de presas donde la protección proporcionada por el entorno tanto para la presa como para el depredador es la misma. El modelo muestra una dinámica rica y variada. Hemos discutido la condición de permanencia para el modelo que da la condición de coexistencia de las especies para todo el tiempo futuro con una cosecha continua de presas. Se ha discutido la estabilidad local de diferentes estados estacionarios. Bajo ciertas condiciones paramétricas hemos obtenido una situación donde las soluciones dependen en gran medida de los valores iniciales, es decir, las soluciones del sistema convergen al punto de equilibrio de extinción de la presa para una gran cantidad de valores iniciales, mientras que convergen al punto de equilibrio coexistente si las condiciones iniciales se encuentran en la otra región. Esto se conoce como una situación biestable en la que todo el dominio de presa-depredador se divide en dos regiones a través de una separatrix. Observamos que el sistema no puede colapsar para ningún valor de parámetros, ya que el origen nunca es estable.

El modelo exhibe varias bifurcaciones locales, como la bifurcación de silla-nodo, la de Hopf-Andronov, la transcíptica, la homoclínica y la de Bogdanov-Takens. Estas bifurcaciones son ecológicamente importantes y, en particular, las bifurcaciones de silla-nodo y la homoclínica pueden conducir a cambios potencialmente dramáticos en la dinámica del sistema [40]. Una bifurcación transcíptica transforma un punto de equilibrio de extinción de presa en un punto de equilibrio inestable y en el y NO equilibrio coexistente capaz de convertirse en uno estable. El sistema puede tener cero, uno o dos equilibrios interiores a través de la bifurcación silla-nodo cuando el parámetro de bifurcación cruza su valor crítico. Hemos encontrado un dominio paramétrico donde uno de los equilibrios coexistentes es silla y el otro es estable, lo que

da la existencia de una bifurcación silla-nodo. La importancia ecológica de las bifurcaciones silla-nodo y transcríticas da el umbral máximo para la cosecha continua sin el riesgo de extinción de las especies presa. También se ha visto que un pequeño ciclo límite inestable se bifurca del equilibrio coexistente siempre que haya dos equilibrios interiores. Hemos encontrado una situación en la que las curvas de bifurcación silla-nodo y bifurcación de Hopf colisionan y el punto de equilibrio instantáneo se convierte en una cúspide de co-dimensión 2 (bifurcación de Bogdanov-Takens). Las variedades estables e inestables también se grafican para separar las diferentes regiones.

Existe un único punto de equilibrio interior que es localmente estable para ciertas restricciones paramétricas y en este caso todos los equilibrios axiales se vuelven inestables. También hemos visto que hay un intercambio de estabilidad entre el equilibrio sin presas y el equilibrio coexistente a medida que el parámetro de bifurcación pasa por el valor crítico. Eso significa que existe una región paramétrica para la coexistencia de las especies. Un ciclo límite estable se bifurca alrededor del único punto de equilibrio interior. La existencia local de ciclos límite en diferentes casos se ha observado a través de la bifurcación de Hopf y la estabilidad de los ciclos límite se ha examinado y validado a través de simulaciones numéricas calculando el primer número de Lyapunov. También hemos visto que el tamaño del ciclo límite aumenta con el cambio en el parámetro de bifurcación y surge una situación en la que el ciclo límite colisiona con el punto de equilibrio axial que es un punto de silla. En este caso, aparece un bucle homoclínico estable que encierra el punto de equilibrio interior a través de la bifurcación homoclínica. Se llevan a cabo simulaciones numéricas exhaustivas para asegurar el número de puntos de equilibrio y sus propiedades de estabilidad.

Expresiones de gratitud

El trabajo del primer autor (RPG) cuenta con el apoyo del Consejo de Investigación Científica e Industrial de la India. Los autores agradecen a los revisores anónimos sus valiosas sugerencias.

Referencias

- [1] CW Clark, Bioeconomía matemática: la gestión óptima de los recursos renovables, Wiley, Nueva York, 1976.
- [2] PDN Srinivasu, Bioeconomía de un recurso renovable en presencia de un depredador, *Nonlinear Anal. RWA* 2 (2001) 497–506.
- [3] W. Murdoch, C. Briggs, R. Nisbet, Dinámica consumidor-recurs, Princeton University Press, Nueva York, 2003.
- [4] ML Rosenzweig, RH MacArthur, Representación gráfica y condiciones de estabilidad de las interacciones depredador-presa, *Am. Naturalist* 97 (1963) 209.
- [5] M. Vos, BW Kooi, DL DeAngelis, WM Mooij, Defensas indudables y la paradoja del enriquecimiento, *Oikos* 105 (2004) 471–480.
- [6] M. Kondoh, Adaptación a la búsqueda de alimento y la relación entre la complejidad y la estabilidad de la red alimentaria, *Science* 299 (2003) 1388–1391.
- [7] P. Turchin, Dinámica de poblaciones complejas. Una síntesis teórica/empírica, en: *Monogr. Population Biol.*, vol. 35, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [8] HI Freedman, Modelos matemáticos deterministas en ecología de poblaciones, Marcel Dekker, 1980.
- [9] HI Freedman, GSK Wolkowicz, Sistemas depredador-presa con defensa grupal: La paradoja del enriquecimiento revisada, *Bull. Math. Biol.* 8 (1986) 493–508.
- [10] G. Dai, M. Tang, Región de coexistencia y dinámica global de un sistema depredador-presa cosechado, *SIAM J. Appl. Math.* 58 (1) (1998) 193–210.
- [11] EA McGehee, N. Schutt, DA Vasquez, E. Peacock-Lopez, Bifurcaciones y patrones temporales y espaciales de un modelo Lotka-Volterra modificado, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* 18 (2008) 2223–2248.
- [12] T. Das, RN Mukherjee, KS Chaudhari, Cosecha bioeconómica de una pesquería presa-depredador, *J. Biol. Dyn.* 3 (2009) 447–462.
- [13] D. Xiao, S. Ruan, Bifurcaciones de Bogdanov-Takens en sistemas depredador-presa con tasa de cosecha constante, *Fields Inst. Commun.* 21 (1999) 493–506.
- [14] M. Haque, Un estudio detallado del modelo depredador-presa de Beddington-DeAngelis, *Math. Biosci.* 234 (2011) 116.
- [15] B. Leard, C. Lewis, J. Rebaza, Dinámica de modelos depredador-presa dependientes de la proporción con cosecha no constante, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* 1 (2) (2008) 303–315.
- [16] P. Lenzini, J. Rebaza, Cosecha no constante de depredadores en modelos depredador-presa dependientes de la proporción, *Appl. Math. Sci.* 4 (16) (2010) 791–803.
- [17] GJ Peng, YL Jiang, CP Li, Bifurcaciones de un sistema depredador-presa tipo Holling II con recolección a tasa constante, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* 19 (2009) 2499–2514.
- [18] M. Sen, M. Banerjee, A. Morozov, Análisis de bifurcación de un modelo depredador-presa dependiente de la proporción con el efecto Allee, *Ecol. Complex.* (2012) <http://dx.doi.org/10.1016/j.ecocom.2012.01.002>.
- [19] Y. Li, D. Xiao, Bifurcaciones de un sistema depredador-presa de tipos Holling y Leslie, *Chaos Solitons Fractals* 34 (2007) 606–620.
- [20] CM Lin, CP Ho, Estabilidad local y global para un modelo depredador-presa de Leslie-Gower modificado y Holling-tipo II con retraso de tiempo, *Tunghai, Science* 8 (2006) 33–61.
- [21] N. Zhang, F. Chen, Q. Su, T. Wu, Comportamientos dinámicos de un modelo depredador-presa Leslie-Gower de recolección, *Discrete Dyn. Nat. Soc.* 2011 (2011) <http://dx.doi.org/10.1155/2011/473-949>.
- [22] CR Zhu, KQ Lan, Retratos de fase, bifurcaciones de Hopf y ciclos límite de los sistemas depredador-presa de Leslie-Gower con tasas de cosecha, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 14 (2010) 289–306.
- [23] J. Mena-Lorca, E. González-Olivares, B. González-Yáñez, El modelo depredador-presa de Leslie-Gower con efecto Allee sobre la presa: un modelo simple con una dinámica rica e interesante, en: R. Mondaini (Ed.), *Actas del Simposio Internacional sobre Biología Matemática y Computacional BIOMAT 2006* (2007), E-papers Servicios Editoriales Ltda., Río de Janeiro, 105–132.
- [24] XY Song, YF Li, Comportamientos dinámicos del modelo periódico depredador-presa con esquemas Leslie-Gower Holling-tipo II modificados y efecto impulsivo, *Nonlinear Anal. RWA* 9 (2008) 64–79.
- [25] MA Aziz-Alaoui, M. Daher Okiye, Limitación y estabilidad global para un modelo depredador-presa con esquemas Leslie-Gower y Holling-tipo II modificados, *Appl. Math. Lett.* 16 (7) (2003) 1069–1075.
- [26] Y. Du, R. Peng, M. Wang, Efecto de una zona de protección en el modelo depredador-presa difusivo de Leslie, *J. Differential Equations* 246 (10) (2009) 3932–3956.
- [27] Y. Zhu, K. Wang, Existencia y atractividad global de soluciones periódicas positivas para un modelo depredador-presa con esquemas Leslie-Gower Holling-tipo II modificados, *J. Math. Anal. Appl.* 384 (2011) 400–408.
- [28] C. Ji, D. Jiang, N. Shi, Análisis de un modelo depredador-presa con esquemas Leslie-Gower y Holling-tipo II modificados con perturbación estocástica, *J. Math. Anal. Appl.* 359 (2009) 482–498.
- [29] C. Ji, D. Jiang, N. Shi, Una nota sobre un modelo depredador-presa con esquemas Leslie-Gower y Holling-tipo II modificados con perturbación estocástica, *J. Math. Anal. Appl.* 377 (1) (2011) 435–440.
- [30] CW Clark, Modelos matemáticos en la economía de los recursos renovables, *SIAM Rev.* 21 (1979) 81–99.
- [31] SV Krishna, PDN Srinivasu, B. Kaymackcalan, Conservación de un ecosistema a través de una tributación óptima, *Bull. Math. Biol.* 60 (1998) 569–584.
- [32] FD Chen, Sobre un modelo depredador-presa no lineal y no autónomo con difusión y retraso distribuido, *J. Comput. Appl. Math.* 180 (1) (2005) 33–49.

- [33] PJ Pal, S. Sarwardi, T. Saha, PK Mandal, Estabilidad cuadrática media en un modelo depredador-presa modificado de Leslie-Gower y Holling-type II, *J. Appl. Math. Inform.* 29 (3–4) (2011) 781–802.
- [34] L. Perko, *Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos*, Springer, Nueva York, 1996.
- [35] D. Xiao, L. Jennings, Bifurcaciones de un sistema depredador-presa dependiente de la proporción con una tasa de cosecha constante, *SIAM J. Appl. Math.* 65 (2005) 737–753.
- [36] M. Haque, Modelos depredador-presa dependientes de la proporción de poblaciones interactantes, *Bull. Math. Biol.* 71 (2009) 430–452.
- [37] AY Kuznetsov, *Elementos de la teoría de bifurcación aplicada*, Appl. Math. Sci., Springer-Verlag, Nueva York, 2004, pág. 112.
- [38] X. Lai, S. Liu, R. Lin, Comportamientos dinámicos ricos para el modelo depredador-presa con efecto Allee débil, *Appl. Anal.* 8 (89) (2010) 1271–1292.
- [39] SN Chow, JK Hale, *Métodos de teoría de la bifurcación*, Tim Clutton-Brock Grundlehren Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Nueva York, Berlín, 1983, p. 251.
- [40] B. Barnes, H. Sidhu, Modelos planta-herbívoro donde más pasto significa menos herbívoros, *Bull. Math. Biol.* 67 (2005) 33–55.