Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Preliminares

Para el análisis del módelo presa-depredador tipo Leslie-Gower con respuesta funcional sigmoidea que se lleva acabo en el presente trabajo, requerimos de ciertos conceptos fundamentales, los cuales se abarcan en la presente sección, esto, con el objetivo de lograr una mejor compresión de todo lo que se presenta posteriormente.

Posible lista de conceptos

1. **Cálculo diferencial e integral**
   - Límites y continuidad
   - Derivadas parciales
   - Gradiente y campos vectoriales
   - Matriz Jacobiana
   - Series de Taylor (expansión local)
2. **Álgebra lineal**
   - Espacios vectoriales
   - Autovalores y autovectores
   - Diagonalización de matrices
   - Sistemas lineales y no lineales de ecuaciones
   - Cambios de base y transformaciones lineales

3. **Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)**
   - Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) ✓
   - Teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf
   - Métodos numéricos básicos (Euler, Runge-Kutta)
4. **Topología y análisis**
   - Espacios métricos
   - Continuidad y compacidad
   - Región compacta
   - Conjuntos abiertos y cerrados
   - Conjuntos invariantes
   - Conjuntos límite
   - Variedades
   - Condición de transversabilidad
   - Reparametrización de sistemas
5. **Geometría diferencial**
   - Difeomorfismos
   - Variedades diferenciables
   - Campos vectoriales sobre variedades
6. **Teoría cualitativa de EDOs**
   - Campos vectoriales en el plano
   - Líneas de flujo y trayectorias
   - Diagramas de fase
   - Isoclinas
   - Puntos críticos y clasificación
   - Campo vectorial asociado a un sistema
   - Trayectorias, órbitas y curvas solución
   - Regiones invariantes

- Separatrices
- Compactificación de Poincaré
- Variedades estables e inestables
- Reescalamiento y reparametrización temporal
- Desingularización (incluyendo blowing-up)

7. **Sistemas dinámicos**
    - Sistemas autónomos y no autónomos
    - Sistema autónomo bidimensional
    - Sistemas equivalentes topológicamente
    - Ciclos límite
    - Bifurcaciones (saddle-node, Hopf, pitchfork, etc.)
    - Diagramas de bifurcación
    - Estabilidad de sistemas no lineales
    - Funciones de Lyapunov
    - Método del número de Lyapunov
    - Órbitas heteroclínicas y homoclínicas
    - Teorema de Poincaré-Bendixson
8. **Biología matemática / Modelos ecológicos**
    - Ecuaciones logísticas y crecimiento poblacional
    - Modelos presa-depredador clásicos (Lotka-Volterra)
    - Respuestas funcionales de Holling (tipos I, II, III)
    - Modelo Leslie-Gower
    - Modelo May–Holling–Turner
    - Crecimiento logístico
    - Efecto Allee
    - Ecuaciones de tipo Kolmogorov
9. **Métodos algebraicos y analíticos**

- Regla de los signos de Descartes
- Análisis de estabilidad lineal y no lineal
- Polar blowing-up method
- Sistemas tangentes

1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs)

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Entonces $C^k(U, V)$ denota el conjunto de funciones de $U \longrightarrow V$ continuamente diferenciables hasta el orden k. Adicionalmente, para simplificar denotaremos $C^k(U, \mathbb{R})$ como $C^k(U)$. Una *ecuación difrencial ordinaria* o EDO es una ecuación para una función desconocida de una sola variable real, que no solo contiene a la función sino también a sus derivadas. De manera general una EDO es de la forma

$$F(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}) = 0, \tag{1.1}$$

donde $F \in C(U)$ con U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{k+2}$, $x = x(t) \subseteq C(J)$ con $J \subseteq \mathbb{R}$ y

$$x^{(k)}(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Al máximo orden k de la derivada $x^{(k)}$ en (1.1) se le llama el *orden* de la ecuación diferencial. Frecuentemente a t se le conoce como la *variable independiente* y a x como la *variable dependiente*.

Una *solución* de la EDO (1.1), es una función $\phi \in C^k(I)$ con $I \subseteq J$ un intervalo real, tal que

$$F(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \cdots, \phi^{(k)}(t)) = 0, \text{ para todo } t \in I. \tag{1.2}$$

Un *sistema no lineal* de EDOs *no autónomo* de primer orden es un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{1.3}$$

donde $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ y

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}.$$

Si la función f en (1.3) no depende de t entonces $f : \tilde{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\tilde{E}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y al sistema $\dot{x} = f(x)$ se le conoce como un *sistema autónomo*.

Un *sistema lineal* es un sistema de la forma

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{1.4}$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ y $b(t)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$. Si $b(t) = 0$ el sistema es *homogeneo*, en caso contrario el sistema es *no homogeneo*

Teorema 1. Teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf

Bibliografía

[1] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer, 2012.