Розділ 1

ТЕОРІЯ МНОЖИН

У розділі 1 розглядаються основні поняття і означення сучасної дискретної математики: множина, відношення, функції тощо, які становлять базовий словник для дискретної математики й є потрібні для розуміння всього подальшого матеріалу посібника.

1.1 Множини, підмножини. Операції над множинами

1.1.1 Основні поняття теорії множин

Поняття множини є одне з фундаментальних невизначених понять сучасної математики і береться за основне, тобто за таке, що не зводиться до інших понять. Під ***множиною*** розуміють деяку сукупність різних поміж собою об'єктів, які добре розпізнаються нашою думкою або інтуїцією і розглядаються як єдине ціле. При цьому ніяких припущень що до природи об'єктів не робиться.

Об'єкти, з яких складено множину, називають її елементами.

Множини позначаються великими літерами латинської абетки: A, B, C,…, а об'єкти або елементи, які становлять множину, позначаються малими латинськими літерами: a, b, c, ..., або малими латинськими літерами з індексами.

П р и к л а д. 1) Множина N чисел натурального ряду 1, 2, 3, ...; 2) множина R дійсних чисел; 3) множина літер української абетки; 4) сукупність аксіом евклідової геометрії.

Твердження, що множина A складається з елементів a_1, a_2, ..., a_n, умовно записується як

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Порядок елементів множини не має значення.

Належність елемента до множини позначають символом $\in$, тобто $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, …, $a_n \in A$, або скорочено: $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Якщо b не є елементом A, то пишуть: $b \notin A$.

Множина може мати скінчену кількість елементів або бути нескінченною.

П р и к л а д. 1) Множина непарних чисел $P = \{1, 3, 5, \dots\}$ (нескінчена); 2) множина всіх розв'язків рівняння $\sin x = 1$ (нескінчена); 3) множина студентів певного вищого навчального закладу (скінчена); 4) множина точок кола (нескінчена).

Існує множина, яка не містить жодного елемента. Така множина називається порожньою і позначається символом $\varnothing$.

П р и к л а д. Множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 16 = 0$ є порожньою.

Не завжди відомо, чи існують елементи, які визначають деяку множину.

П р и к л а д. Множина виграшних квитків лотереї може стати визначеною тільки після тиражу.

Множина як об’єкт може бути елементом іншої множини.

П р и к л а д. У множині книг на полиці самі книги можуть розглядатися як множини сторінок.

Передбачається, що границі множини повинні бути чітко визначені. Саме задання множини явно або неявно обмежує сукупність об’єктів, які належать цієї множені. У будь-якій конкретній задачі доводиться мати справу тільки з фіксованою для цієї задачі, множиною.

В и з н а ч е н н я. ***Універсальною множиною*** (***універсумом***) називається множина, що містить всі елементи з деякою заданою властивістю. Позначається така множина через U.

Поняття "універсальної множини" залежить від задачі, яку розглядають. Прикладом універсальної множини може бути множина дійсних чисел, множина людей на планеті Земля тощо.

1.1.2 Способи задання множин

При заданні множин слід визначити, які елементи до неї належать.

1 ***Множину можна задавати явним переліченням всіх її елементів***: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Це є спосіб задання множини списком, який підходить тільки для задання множин з невеликою кількістю елементів.

П р и к л а д. Множина всіх студентів, присутніх в аудиторії (Петров, Сидоров, ...).

Узагальненням першого способу є задання елементів множини за допомогою певних елементів уже відомої множини.

П р и к л а д. За відомою множиною цілих чисел $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ визначимо множину степенів числа 3: $\{\dots, 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots\}$.

2 ***Множину можна задавати за допомогою вказівки деякої характеристичної властивості якою володіє кожен з елементів множини, що розглядається, і не володіє кожен інший елемент, що не входить до цієї множини.***

Характеристичну властивість запишемо у вигляді одномісного предиката $P(x)$, який визначається на універсальній множині елементів з яких формується множина A. Предикат − це те, що стверджується або заперечується про об'єкт судження. Припускається, що властивість має змістовний сенс на сукупності об'єктів, що розглядається, при цьому предикат може приймати одне з двох значень істинності − «істина» або «хибність». Якщо за $x = a$ висловлення $P(x)$ є істинним, то a − елемент даної множини. Множину A, задану за допомогою предиката $P(x)$, записують у вигляді $A = \{x |\ P(x),\ x \in U\}$ або $A = \{x\text{: } P(x),\ x \in U\}$, причому $a \in \{x\text{: } P(x),\ x \in U\}$, якщо $P(a)$ є істинним.

П р и к л а д. Нехай задано множину натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Розглянемо сукупність елементів з множини N, які діляться на 3 (характеристична властивість). Дістанемо множину чисел, кратних до 3: $P = \{3, 6, 9, ... \}$. Задамо цю множену за допомогою характеристичної властивості

$$P = \left\{x : \frac{x}{3} \in N\right\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Переліченням елементів можна задати лише скінчені множини, а за допомогою характеристичної властивості можна задавати як скінчені так і нескінчені множини.

1.1.3 Алгебра підмножин

Підмножина, порівняння множин, булеан

Тільки одного поняття множини ще недостатньо для вивчання існуючих дискретних структур. Необхідно ще ввести поняття частини множини і правил створювання нових множин із уже існуючих.

В и з н а ч е н н я. Множина A, всі елементи якої належать і до множини B, називається ***підмножиною*** (частиною) множини B.

Таке співвідношення поміж множинами називається ***включення*** і позначається символом "$\subset$", тобто $A \subset B$ (A включене до B), або $B \supset A$ (B містить A). Вочевидь, що $A \subset B$, якщо з належності елемента x до множини A випливає належність цього елемента і до множини B, тобто з $x \in A \ \Rightarrow \ x \in B$.

Якщо множина A не міститься в множині B, використовують позначання $A \not\subset B$.

П р и к л а д: множина невід'ємних дійсних чисел $\left[0, +\infty\right)$, яка має спеціальне позначення R^{+}, міститься у множині дійсних чисел $R = \left(-\infty, +\infty\right)$, тобто $R_{+} \subset R$.

В и з н а ч е н н я. Дві множини A та B називаються ***рівними*** (позначається $A = B$), якщо $A \subset B$ та $B \subset A$. Це є визначення рівності двох множин за допомогою операції включення.

У літературі також зустрічається позначення $A \subseteq B$. У цьому випадку під $A \subset B$ слід розуміти строге включення, яке не припускає рівності. Якщо $A \subset B$ й $A \neq B$ та $A \neq \varnothing$, то A називають ***власною підмножиною*** множини B. Нестроге включення $A \subseteq B$ допускає рівність (тоді A називається ***невласною*** підмножиною множини B).

Ми будемо використовувати позначання $A \subset B$ для нестрогого включення, яке допускає рівність $A = B$.

Вважають, що порожня множина є невласною підмножиною кожної не порожньої множини A, тобто $\varnothing \subset A$. Враховуючі, що A теж входить до A, то кожна непорожня множина A має принаймні дві різні підмножини $\varnothing$ та A.

ЗАУВАЖЕННЯ: 1. Нехай U − деяка фіксована множина. Розглянемо тільки такі множини $A, B, C, ...$, які є підмножинами множини U. У цьому випадку множина U буде універсальною множиною для всіх множин $A, B, C, ...$.

2. Зі співвідношень $A \subset B$ й $B \subset C$ випливає, що $A \subset C$, тобто відношення включення транзитивне (рис. 1.1).

Для графічного зображення множини використовують спеціальні конструкції − діаграми Ейлера-Венна, які зображують сукупність елементів, що утворюють множину, овалами, а універсум − прямокутником.

Відношення включення графічно зображено на рис. 1.1.

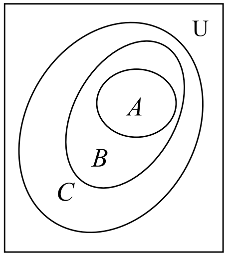


Рисунок 1.1. Відношення включення $A \subset B \subset C$

Скінчені власні підмножини певної множини можуть утворювати різноманітні сполучення з одного, двох, трьох тощо елементів цієї множини.

В и з н а ч е н н я. ***Множиною всіх підмножин*** (***булеаном***) певної основної множини E називають множину, елементами якої є всі підмножини множини E. Позначається булеан через $P(E)$ або 2^E. Він включає до свого складу також елементи $\varnothing$ та множину E.

П р и к л а д. Якщо $E = \{a, b, c\}$, то

$$P(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ: 1. Порядок елементів у множині $P(E)$ є несуттєвий.

2. Якщо множина E містить n елементів, то множина $P(E)$ містить 2^n елементів, звідси й позначання множини $P(E)$ як 2^E.

3. Відношення належності $\in$ та включання $\subset$ − різні поняття. Наприклад, множина A може бути власною підмножиною множини A $(A \subset A)$, але вона не може бути власним елементом цієї множини $(A \notin A)$.

П р и к л а д. Якщо $A = \{1, \{2, 3\}, 4\}$, то $\{2, 3\} \in A$, а 2 та 3 $\notin A$.

Операції над множинами

Зазвичай розглядають п'ять основних операцій над множинами: доповнення, об'єднання, переріз, різницю та симетричну різницю. Подамо їхні означення, припускаючи, що задано певний універсум U. Позначимо через P_A та P_B властивості, які характеризують відповідно множини A та B в множині U за певною ознакою P.

В и з н а ч е н н я 1. Елементи множини U, які не входять до A, утворюють ***доповнену*** множину до A (позначаються $\overline{A}$).

За допомогою діаграми Венна доповнену множину можна зобразити геометрично (рис. 1.2), де $\overline{A}$ − затемнена частина.

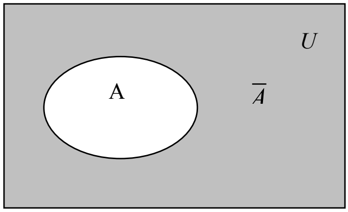


Рисунок 1.2. Операція доповнення $\overline{A}$

ЗАУВАЖЕННЯ. 1) Доповнення множини A до множини U, це множина $\overline{A}=\{x | \ x \notin A, \ x \in U\}$. 2) Справедлива є властивість $\overline{\overline{A}} = A$, яка називається властивістю ***інволюції***.

В и з н а ч е н н я 2. ***Об'єднанням*** двох множин − A та B (позначається $A \bigcup B$ або $A + B$) − називається множина C, яка складається з усіх тих елементів, які належать хоча б до однієї з цих множин.

$$C = A \bigcup B = \{x | \ x \in A \text{ або } x \in B, \ x \in U\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Однакові елементи враховуються один раз.

Геометричну інтерпретацію об'єднання двох множин A та B подано на рис. 1.3, де $A \bigcup B$ − затемнена частина.

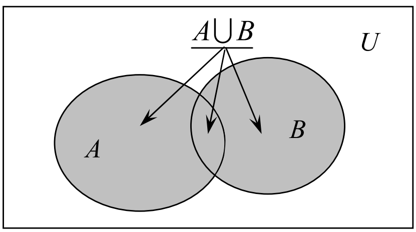


Рисунок 1.3. Операція об'єднання $A \bigcup B$

Підкреслимо, що до множині $A \bigcup B$ належать також і ті елементи, які водночас належать множинам A та B.

В и з н а ч е н н я 3. ***Перерізом*** двох множин − A та B (позначається $A \bigcap B$ або $A \cdot B$) − називається множина C, яка складається з усіх тих елементів, які належать множені A і множені B (водночас!).

$$C = A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B,\ x \in U\}.$$

Геометричну інтерпретацію перерізу подано на рис. 1.4, де $A \bigcap B$ − затемнена частина.

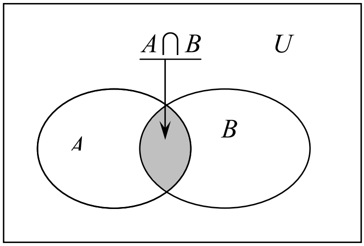


Рисунок 1.4. Операція перерізу $A \bigcap B$

В и з н а ч е н н я 4. ***Різницею*** двох множин − A та B (позначається $A \setminus B$) − називається множина

$$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \notin B,\ x \in U\}.$$

Геометричну інтерпретацію різниці подано на рис. 1.5, де $A \setminus B$ − затемнена частина.

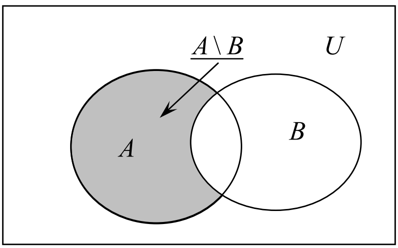


Рисунок 1.5. Операція різниці $A \setminus B$

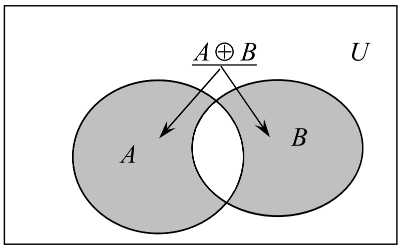


Рисунок 1.6. Операція симетричної різниці $A \oplus B$

В и з н а ч е н н я 5. ***Симетричною різницею*** двох множин − A та B (позначається $A \oplus B$, $A \Delta B$ або $A - B$) − називається множина

$$C = A \oplus B = \left(A \setminus B\right) \bigcup \left(B \setminus A\right).$$

Геометричну інтерпретацію симетричної різниці подано на рис. 1.6, де $A \oplus B$ − затемнена частина.

П р и к л а д. Нехай $A = \{1, 3, 4, 5, 8\}$; $B = \{2, 4, 5, 6, 9\}$, тоді:

$A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$; $A \bigcap B = \{4, 5\}$; $A \setminus B = \{1, 3, 8\}$; $A \oplus B = \{1, 2, 3, 6, 8, 9\}$.

Якщо визначити універсум $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то

$$\overline{A} = \{0, 2, 6, 7, 9\}; \quad \overline{B} = \{0, 1, 3, 7, 8\}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Для скінченного числа множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в аналогічний спосіб визначаються операції об'єднання та перерізу

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{та} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n .$$

Властивості операцій над множинами

Нехай задано множини A, B, C та U (U − універсум). Тоді для операцій $\bigcup$, $\bigcap$, $\setminus$, $\neg$ (де $\neg A = \overline{A}$) виконуються такі властивості:

1 $A \bigcup B = B \bigcup A$, $\quad A \bigcap B = B \bigcap A$ − комутативність;

2 $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$, $\quad A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$ − асоціативність;

3 $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$, $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ − дистрибутивність;

4 $A \bigcup \varnothing = A$, $\quad A \bigcap \varnothing = \varnothing$

5 $A \bigcup A = A$, $\quad A \bigcap A = A$ − ідемпотентність;

6 $A \bigcup \overline{A} = U$, $\quad A \bigcap \overline{A} = \varnothing$ − доповнення;

7 $A \bigcup U = U$, $\quad A \bigcap U = A$

8 $\overline{\varnothing} = U$, $\quad \overline{U} = \varnothing$

9 $A \bigcup (A \bigcap B) = A$, $\quad A \bigcap (A \bigcup B) = A$ − поглинання;

10 $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$, $\quad \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$ − правило де Моргана;

11 $\overline{\overline{A}} = A$ − подвійного доповнення;

12 $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$ − вираз для різниці.

Пари символів $\bigcup$ та $\bigcap$ у формулах 1…10 називають двоїстими між собою. Їх можна змінювати місцями, замінюючи при цьому U на $\varnothing$ й навпаки.

У справедливості властивостей 1…12 можна переконатися чи то геометрично, чи формальними міркуваннями щодо кожної рівності.

Завдання для самостійної роботи. Перевірити всі формули 1…12 для множин: $A = \{1, 2, 3, 6\}$; $B = \{2, 3, 4, 8, 9\}$; $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

П р и к л а д. Спростити вираз $\overline{\overline{A \bigcap B} \setminus C} \bigcup A \bigcap B \bigcup A \bigcap (\overline{C} \bigcup \overline{B})$

Р о з в ' я з а н н я

$$\overline{\overline{A \bigcap B} \setminus C} \bigcup A \bigcap B \bigcup A \bigcap (\overline{C} \bigcup \overline{B}) = \overline{\overline{A \bigcap B} \bigcap \overline{C}} \bigcup A \bigcap B \bigcup A \bigcap \overline{C} \bigcup A \bigcap \overline{B} =$$

$$= A \bigcap B \bigcup C \bigcup A \bigcap B \bigcup A \bigcap \overline{C} \bigcup A \bigcap \overline{B} = A \bigcap B \bigcup C \bigcup A \bigcap \overline{C} \bigcup A \bigcap \overline{B} = A \bigcup C.$$

1.2 Відношення

Поняття відношення є фундаментальним поняттям не тільки дискретної математики, але й в інших теоретичних та прикладних дисциплінах. Відношення визначається як будь-яка підмножина впорядкованих кортежів, побудованих з елементів абстрактних множин, і реалізують зв'язки між реальними об'єктами. При цьому під кортежем розуміють просто набір впорядкованих елементів.

1.2.1 Поняття відношення

П р и к л а д и: 1) $a \in A$ − зв'язок поміж елементом та множиною; 2) $A \subset B$ − зв'язок поміж множинами; 3) $<$, $\leq$, $\neq$ − нерівності; 4) $=$ − рівність; 5) "бути братом"; 6) ділення без остачі.

Приклади 1...6 – приклади відношень.

Введемо поняття впорядкованої множини.

В и з н а ч е н н я. Множина називається ***впорядкованою***, якщо кожному його елементові поставлено у відповідність число n $\left(n \in N,\ n\right.$ − номер цього елемента) та елементи множини розміщено в порядку зростання їхніх номерів.

За кількості елементів $n > 1$ множину можна впорядкувати не в єдиний спосіб.

Відношення позначатимемо літерою R, тоді запис xRy вказує на те, що поміж x та y $\left(x \in X,\ y \in Y\right)$ існує зв'язок. В прикладі 5) поданому вище можна записати «x є брат y». Тут відношення R − "бути братом".

Відношення повністю визначається парами $\left(x, y\right)$, для яких воно виконується, тому кожне бінарне відношення можна розглядати як множину впорядкованих пар $\left(x, y\right)$. При цьому порядок вибору елементів істотний. Перший елемент завжди вибирається з першої множини, другий − з другої.

Рівність впорядкованих пар визначається в такий спосіб: $\left(a, b\right) = \left(c, d\right)$, якщо $a = c$ та $b = d$.

П р и к л а д. Нехай $A = \left\{1, 2, 3\right\}$, $B = \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\right\}$, а відношення R − "елемент x дільник елементу y", де $x \in A$, $y \in B$. Тоді відношення R визначається парами елементів множин *A* та *B*

$$R = \left\{\left(1,1\right), \left(1, 2\right), \left(1, 3\right), \left(1, 4\right), \left(1, 5\right), \left(1, 6\right), \left(1, 7\right), \left(2, 2\right), \left(2, 4\right), \left(2, 6\right), \left(3, 3\right), \left(3, 6\right)\right\},$$

тому *R* є підмножиною множини, що складається з усіх упорядкованих пар елементів по одному з кожної множини *A* та *B*.

ЗАУВАЖЕННЯ. Функція $y = f(x)$ (іноді записують $x \xrightarrow{f} y$) також є відношенням.

Відношення, яке визначене на одному об'єктові називається ***унарним***, якщо ж його визначено поміж парами об'єктів, − називаються ***бінарним***, поміж трьома об'єктами − ***тернарним*** і т. д.

1.2.2 Бінарні відношення

Найпоширенішими з відношень є бінарні відношення. Перш ніж подати їхнє визначення дамо визначення декартова добутку множин.

В и з н а ч е н н я. Впорядкована множина з *n* елементів називається **кортежем** (вектором, набором), де $n < \infty$. Кортеж з *n* елементів будемо позначати як $(a_1, a_2, ..., a_n)$ і будемо говорити, що він має довжину *n*.

Нехай задано дві множини − A та B − певних елементів.

В и з н а ч е н н я. Множина впорядкованих пар елементів, з яких перший належить до *A*, а другий − до *B*, називається ***декартовим*** (***прямим***) ***добутком*** множин *A* та *B* і позначається як

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Всі елементи множини $A \times B$ − кортежі довжини 2.

Впроваджене поняття декартова добутку припускає узагальнення. Декартовим добутком множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називається множина наборів кортежів довжини n:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$

Ступенем множини A називають декартів добуток

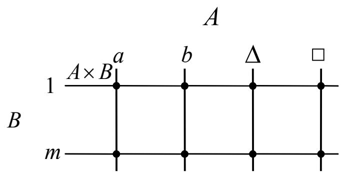
$$A^n = A \times A \times ... \times A.$$

П р и к л а д. Точка *M* у прямокутній декартовій системі координат на площині задається впорядкованою парою дійсних чисел у такий спосіб: $M(x, y)$ $(x \in R, y \in R)$. Тоді $(x,\ y) \in R^2 = R \times R$. Звідси й назва добутку − декартів.

П р и к л а д. Якщо $A = \{a, b, \Delta, \square\}$; $B = \{1, m\}$, то декартів добуток має вигляд

$$A \times B = \{(a,1), (a,m), (b,1), (b,m), (\Delta,1), (\Delta,m), (\square,\ 1), (\square,\ m)\}.$$

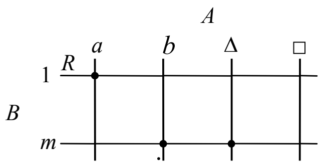
Визначимо $A \times B$, як пари елементів по одному з кожної множини *A* та *B* (пари елементів, що належать до декартова добутку, позначимо в таблиці точками):



.

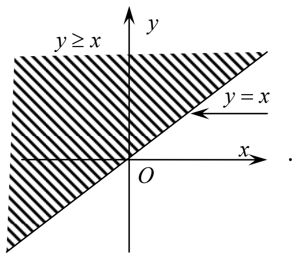
ЗАУВАЖЕННЯ. Кожна підмножина R множини $A \times B$ є бінарним відношенням.

П р и к л а д. 1) Позначимо в таблиці точками елементи, які належать до підмножини $R = \{(a,1),(b,m),(\Delta, \square)\}$ декартова добутку множин A та B $\left(R \subset (A \times B)\right)$:



Тоді R − бінарне відношення поміж множинами A та B.

2) Відношення нестрогого порядку $x \le y$ $\left(x, y \in R\right)$ є підмножиною декартова добутку $R \times R$, тобто всієї площини:



У такий спосіб доходимо до визначення відношення.

В и з н а ч е н н я. ***Відношенням*** R на множинах A та B називається довільна підмножина множини декартова добутку $A \times B$. Якщо $(a, b) \in R$, то це записується як: aRb.

Якщо $A = B$, то $R \subset A \times A$ і в цьому випадку стверджують, що бінарне відношення R задано на множині A.

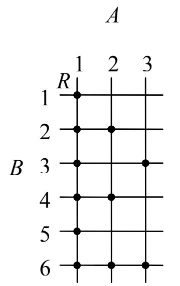
Зображення відношення R $\left(R \subset A \times B\right)$ точками в таблиці називають ***графіком*** відношення; множину x $\left(x \in A\right)$, для яких існує таке y $\left(y \in B\right)$, що $(x, y) \in R$, називають ***областю визначення*** відношення R, а множину y $\left(y \in B\right)$, для яких існує таке x, що $(x, y) \in R$, − ***множиною значень***.

1.2.3 Способи задання відношень

Є багато різних способів задання відношень. Найбільш розповсюджені з них задання відношень у табличній формі, стрілками, перерізом, переліком пар. Розглянемо кожний з цих способів.

1. ***Табличний спосіб задання відношень***

П р и к л а д. Нехай відношення R належить до декартова добутку $A \times B$, де множини $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, і задане таблицею



.

Табличний спосіб завжди можна розглядати як різновид матричного, так як таблицю можна представити у вигляді матриці. Тому відношення R можна задати також бульовою ***матрицею суміжності***, або ***відношення***, рядки якої позначають елементами множини A, а стовпчики − елементами множини B і на перетинанні рядка a_i зі стовпчиком b_j стоїть 1 в разі $a_i R b_j$, та 0 − у противному випадку:

$$R = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} .$$

Матриці відношення називають бульовими, тому що їхніми елементами є лише числа 0 або 1.

Для розглянутого вище прикладу матриця відношення буде мати форму:

		B					
	R	1	2	3	4	5	6
	1	1	1	1	1	1	1
A	2	0	1	0	1	0	1
	3	0	0	1	0	0	1

, де компоненти матриці R

$$R[a, b] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } aRb; \\ 0, & \text{якщо } \overline{aRb}, \end{cases}$$

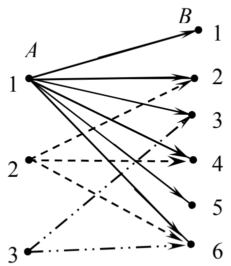
а a, b – елементи множин A та B.

Відношення R можна також задавати у вигляді списку пар елементів декартова добутку $A \times B$, для яких дане відношення виконується:

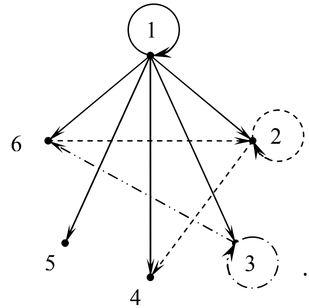
$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\}.$$

2. ***Спосіб задання відношень стрілками***

Цей спосіб проілюструємо за допомогою відношення R з попереднього прикладу. При цьому використаємо два варіанти зображення бінарного відношення:

1) 

;

2) 

.

3. ***Завдання відношень перерізом***

В и з н а ч е н н я. Нехай $c=(a, b)$ − кортеж довжини 2 (де $c \in A \times B$). Елемент a називається ***проекцією*** елемента c на множину A (або на першу вісь). Позначається як пр$_A c$ = пр$_1 c = a$.

В и з н а ч е н н я. Нехай E − підмножина декартова добутку множин A та B $(E \subset A \times B)$. Множина елементів з A, які є проекцією елементів множини E на A, називається ***проекцією множини*** E на множину A. Позначається як пр$_A E$.

П р и к л а д. Нехай $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$; $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, а відношення $R \subset A \times B$ визначається переліком пар елементів:

$$R=\{(a_1, b_2),(a_1, b_4),(a_2, b_1),(a_2, b_3),(a_3, b_2),(a_3, b_3),(a_3, b_4),(a_5, b_1),(a_5, b_3)\}.$$

Треба знайти: 1) пр$_A(a_2, b_3)$; 2) пр$_A R$.

Р о з в я з а н н я

Накреслимо графік відношення R.

1) Розглянемо кортеж $c_{23}=(a_2, b_3)$. Маємо

$$\text{пр}_A(a_2, b_3)=\text{пр}_1(a_2, b_3)=a_2.$$

2) Відношення R задано на множинах A та B і визначається наступними кортежами:

$R=\{c_{12}, c_{14}, c_{21}, c_{23}, c_{32}, c_{33}, c_{34}, c_{51}, c_{53}\}$ $(R \subset A \times B)$, тоді

$$\text{пр}_A R=\{a_1, a_2, a_3, a_5\}.$$

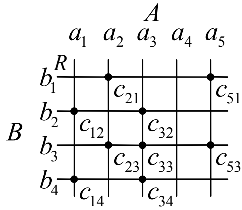


Рисунок 1.2

Впроваджене поняття проекції кортежу $v=(a_1, a_2)$ довжини 2 можна узагальнити на кортежі $v=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ довжини n.

В и з н а ч е н н я. Проекцією кортежу $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на i-ту вісь називають його i-ту компоненту:

$$\text{пр}_i v = a_i .$$

В и з н а ч е н н я. Проекцією кортежу $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на осі з номерами i_1, i_2, …, i_k називають вектор довжини k з компонентами:

$$\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} v = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}).$$

В и з н а ч е н н я. Проекцією множини векторів $V = \{v_r\}$ на i-ту вісь називають множину проекцій усіх векторів з V на i-ту вісь:

$$\text{пр}_i V = \{\text{пр}_i v_r : \ v_r \in V\}.$$

В и з н а ч е н н я. Проекцією множини векторів $V = \{v_r\}$ на осі з номерами i_1, i_2, , i_k називають множину проекцій усіх векторів з V на осі з номерами i_1, i_2, …, i_k:

$$\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} V = \{\, \text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} v_r : v_r \in V \,\}.$$

В и з н а ч е н н я. ***Перерізом*** $x = a$ множини (відношення) R називається множина елементів $y \in B$, для яких $(a, y) \in R$.

П р и к л а д: перерізом $x = a_1$ множини R з попереднього прикладу буде множина $\{b_2, b_4\}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Проекція відокремлює елементи у множині A, а переріз − елементи у множині B.

Нехай задано відношення $R \subset A \times B$. Позначимо через $R(a)$ $(a \in A)$ переріз $x = a$ відношення R, тобто множину таких $y \in B$, що $(a, y) \in R$. Отже,

$$R(a) = \{y : a \in A, y \in B, (a, y) \in R\}.$$

В и з н а ч е н н я. Множина перерізів $R(a)$ відношення R ($R \subset A \times B$) по всім $a \in A$ називається ***фактор-множиною*** множини B за відношенням R (позначається через B / R)

$$B / R = \{R(a),\ a \in A\}.$$

Фактор-множина B / R повністю визначає відношення R.

П р и к л а д. Розглянемо відношення R з попереднього прикладу. Перерізом $x = a_i$ $(i = \overline{1,5})$ відношення R будуть відповідно множини $R(a_1) = \{b_2, b_4\}$; $R(a_2) = \{b_1, b_3\}$; $R(a_3) = \{b_2, b_3, b_4\}$; $R(a_4) = \varnothing$; $R(a_5) = \{b_1, b_3\}$. Під кожним елементом a_i запишемо його переріз:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \{b_2, b_4\} & \{b_1, b_3\} & \{b_2, b_3, b_4\} & \varnothing & \{b_1, b_3\} \end{bmatrix}.$$

Другий рядок буде фактор-множиною множини B за відношенням R.

Нехай тепер $R \subset A \times B$, а X деяка підмножина множини A ($X \subset A$). Позначимо об'єднання всіх перерізів $R(x)$ за всіма $x \in X$ через $R(X)$, тобто перерізом множини R по множині X є множина

$$R(X) = \{y : x \in X, y \in B, (x, y) \in R\} = \bigcup_{x \in X} R(x).$$

Вочевидь, що $R(X) \subset B$.

П р и к л а д. Нехай задано три множини − $A = \{a_1, a_2, a_3\}$; $B = \{b_1, b_2, b_3\}$; $X = \{a_2, a_3\} \subset A$ − й відомо, що $R(a_2) = \{b_1, b_3, b_4\}$; $R(a_3) = \{b_1, b_2, b_4\}$. Тоді $R(\{a_2, a_3\}) = R(a_2) \cup R(a_3) = \{b_1, b_3, b_4\} \cup \{b_1, b_2, b_4\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} = B$.

1.2.4 Композиція відношень

Нехай задано три множини A, B, C й два відношення R та S поміж ними: $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$.

В и з н а ч е н н я. ***Композицією*** двох відношень R та S називається відношення SR (іноді позначають як $S \circ R$) яке задано на декартовому добутку $A \times C$ та визначене як таке, що переріз SR по всіх $a \in A$ збігається з перерізом S по підмножині $R(a)$ $\left(R(a) \subset B\right)$, тобто

$$(SR)(a) = S\left(R(a)\right), \qquad (1.1)$$

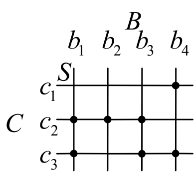
або

$$SR = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ якщо } \exists b \in B, \text{ що } aRb \text{ та } bSc\}.$$

Операцію композиції бінарних відношень іноді ще називають ***добутком*** відношень.

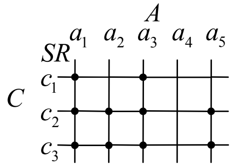
ЗАУВАЖЕННЯ. При визначенні композиції відношень використано символ $\exists$, який називається ***квантором існування*** і читається «*існує, знайдеться хоча б один*». Окрім квантора існування ще є двоїстий до нього квантор $\forall$, який називається ***квантором загальності***, який читається «*для будь-якого, для кожного, для всіх*». Застосування кванторів спрощує формальні записи.

П р и к л а д. Розглянемо відношення R, яке визначене в прикладі на стор. 19, і відношення S, яке задане наступною таблицею



.

Тоді відношення SR визначається таблицею



.

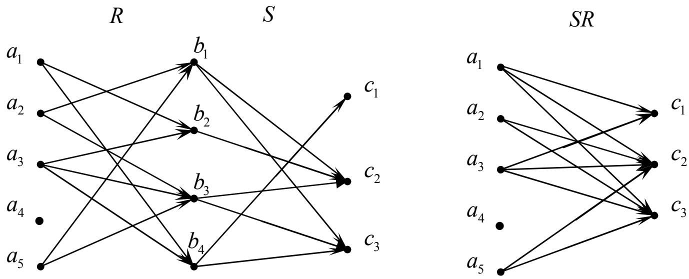
Відношення SR можна ще знайти інакше, якщо записати відношення R та S у вигляді підмножин відповідно декартових добутків $A\times B$ та $B\times C$:

$$R=\{(a_1,b_2),(a_1,b_4),(a_2,b_1),(a_2,b_3),(a_3,b_2),(a_3,b_3),(a_3,b_4),(a_5,b_1),(a_5,b_3)\};$$
$$S=\{(b_1,c_2),(b_1,c_3),(b_2,c_2),(b_3,c_2),(b_3,c_4),(b_4,c_1),(b_4,c_3)\}. \tag{1.2}$$

Тоді

$$SR=\{(a_1,c_1),(a_1,c_2),(a_1,c_3),(a_2,c_2),(a_2,c_3),(a_3,c_1),(a_3,c_2),(a_3,c_3),(a_5,c_2),(a_5,c_3)\}.$$

У правильності відповіді переконаємося за допомогою задання відношення стрілками:



Композицію двох відношень S та R можна знайти ще й у такий спосіб:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \{c_2\} & \{c_1,c_2\} & \{c_3\} & \{c_4\} \end{bmatrix}}_{S(R(x))}\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \{b_1,b_3\} & \{b_1,b_3,b_4\} & \{b_1,b_2,b_4\} & \varnothing & \{b_2,b_4\} \end{bmatrix}}_{R(x)}=$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \{c_2,c_3\} & \{c_2,c_3\} & \{c_1,c_2,c_3\} & \varnothing & \{c_1,c_2,c_3\} \end{bmatrix}}_{(SR)(x)}.$$

Отже

$$SR=\{(x,\,z)\in A\times C \mid \text{якщо } \exists y\in B, \text{ такий, що } (x,\,y)\in R \text{ та } (\text{y},\,z)\in S\}.$$

Перевіримо, чи виконується визначення (1.1), наприклад, для перерізу $a=a_1$. У лівій частині формули дістанемо

$$(SR)(a_1)=\{c_1,c_2,c_3\}.$$

Оскільки $R(a_1)=\{b_2,b_4\}$, то у правій частині формули (1.1) при $a = a_1$, матимемо:

$$S(b_2,b_4)=S(b_2)\cup S(b_4)=\{c_2\}\cup\{c_1,c_3\} = \{c_1,\ c_2,\ c_3\}.$$

Ліва й права частини збігаються.

ЗАУВАЖЕННЯ. n − ***ступенем відношення*** R на множині A називається його n-разова композиція з самим собою, тобто

$$R^n = \underbrace{R\circ R\circ\ldots\circ R}_{n}.$$

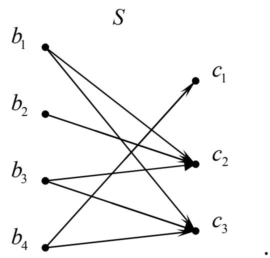
1.2.5 Обернене відношення

Визначимо ще одну додаткову унарну операцію над відношеннями, яка не має аналогів у загальному випадку серед теоретико-множинних операцій, що розглядалися раніше. Це операція обернене відношення.

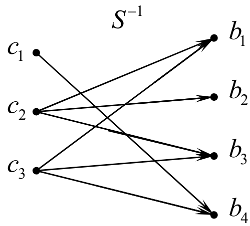
В и з н а ч е н н я. ***Оберненим відношенням*** щодо певного відношення R ($R\subset A\times B$) називається таке відношення R^{-1}, яке задається на декартовому добутку $B\times A$ і утворюється парами $(b,a)\in B\times A$ для яких $(a,b)\in R$.

З визначення оберненого відношення випливає, що $bR^{-1}a$ має місце тоді й лише тоді, коли існує відношення aRb.

П р и к л а д. Розглянемо відношення S, яке визначене на стор. 22 та має стрілочне зображення:



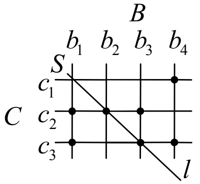
Оберненим щодо відношення S буде відношення S^{-1}, стрілочне зображення якого має вигляд:

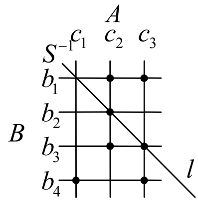


Відношення S^{-1} у вигляді підмножини запишеться як

$$S^{-1}=\{(c_1,b_4),(c_2,b_1),(c_2,b_2),(c_2,b_3),(c_3,b_1),(c_3,b_3),(c_3,b_4)\}.$$

З табличного подання відношення S^{-1} бачимо, що елементи таблиці S^{-1} є симетричні до елементів таблиці S щодо прямої l:





Композиція відношень і обернене відношення мають властивості:

1. $\left(SR\right)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$;
2. Якщо $R \subset S$, $T \subset U$, то $TR \subset US$.

У теорії бінарних відношень важливу роль відіграють також відношення:
доповнення − $\overline{R} = \left\{\left(a,b\right) | \left(a,b\right) \notin R\right\}$, $\overline{R} \subset A \times B$;
тотожне (***діагональ)*** − $I = \left\{\left(a,a\right) | a \in A\right\}$, $I \subset A^2$;
універсальне (***повне***)− $U = \left\{\left(a,b\right) | a \in A, b \in B\right\}$, $U = A \times B$.

Якщо позначити через $\boxed{R}$, $\boxed{\overline{R}}$ та $\boxed{R^{-1}}$ матриці відповідно відношень R, $\overline{R}$ та R^{-1}, то

$\boxed{R^{-1}} = \boxed{R}^T$.

$\boxed{\overline{R}} = \boxed{U} - \boxed{R}$, де $\boxed{U}$ − матриця універсальної множини, всі елементи якої дорівнюють 1, чи то, інакше $\boxed{\overline{R}} = \overline{\boxed{R}}$, де $\overline{r_{ij}} = 1 - r_{ij}$.

1.2.6 Типи відношень

Нехай на множині A задано відношення R.

1. Бінарне відношення R на множині A називається ***рефлексивним,*** якщо всякий елемент цієї множини знаходиться у відношенні R з самим собою, тобто $(a, a) \in R$ для всіх $a \in A$ (інакше aRa для всіх $a \in A$).

2. Відношення R на множині A називається ***антирефлексивним***, якщо з $(a, b) \in R$ випливає $a \neq b$ (тобто $\neg aRa$, що є одне й те саме, що $aRb \neq bRa$).

З визначення антирефлексивності випливає, що якщо умова рефлексивності не виконується ні для жодного елементу множини A, то відношення R буде антирефлексивним.

Якщо умова рефлексивності виконується не для всіх елементів множини A, то говорять, що відношення R є нерефлексивне.

3. Відношення R на множині A називається ***симетричним***, якщо для кожної пари елементів a та b, які належать до A, з того, що $(a, b) \in R$, випливає $(b, a) \in R$ (тобто для $\forall a, b \in A$ з $aRb \Rightarrow bRa$).

4. Бінарне відношення R на множині A називається ***антисиметричним***, якщо для всіх a та b, які належать до A, з належності (a, b) та (b, a) до відношення R випливає $a = b$ (тобто якщо aRb та $bRa \Rightarrow a = b$).

5. Бінарне відношення R на множині A називається ***транзитивним,*** якщо для будь-яких трьох елементів a, b та c, які належать до множини A, з того, що $(a, b) \in R$ та $(b, c) \in R$, випливає, що $(a, c) \in R$ (тобто з того, що aRb та $bRc \Rightarrow aRc$).

6. Бінарне відношення R на множині A називається ***повним***, якщо для всіх елементів a та b, які належать до A, або $a = b$, або $(a, b) \in R$, або $(b, a) \in R$ (тобто, або $a = b$, або aRb, або bRa).

П р и к л а д и:

1) відношення, яке позначене знаком "«=»" − рефлексивне;
2) відношення "бути сином" − антирефлексивне;
3) відношення "жити в одному місті" − симетричне;
4) відношення "бути начальником" − антисиметричне;
5) відношення "бути братом" − транзитивне.

ЗАУВАЖЕННЯ: 1. При задаванні відношення R $\left(R \in A \times A\right)$ матрицею:

відношення є рефлексивне, якщо всі елементи головної діагоналі матриці дорівнюють 1 $\left(\text{тобто } I \subset R\right)$;

відношення є антирефлексивне, якщо немає жодної одиниці на головній діагоналі $\left(\text{тобто } R \bigcap I = \varnothing\right)$;

відношення є симетричне, якщо матриця є симетрична щодо головної діагоналі $\left(\text{тобто } R = R^{-1}\right)$;

відношення є антисиметричне, якщо немає жодної пари одиниць симетричної головної діагоналі (окрім одиниць на самій діагоналі) $\left(\text{тобто } R \bigcap R^{-1} = I\right)$;

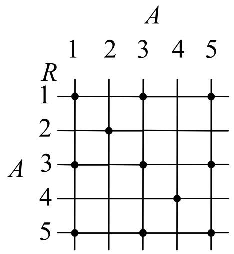
2. Транзитивність бінарного відношення R на множині A перевіряється простим перебиранням всіх елементів множини A $\left(\text{на } A \text{ повинно виконуватися включення } R \circ R \subset R\right)$;

3. Відношення є повне, якщо $R \bigcup R^{-1} \bigcup I = U$.

П р и к л а д. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. До якого типу належить відношення $R = \{(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (1, 5), (3,1), (3, 5), (5,1), (5, 3)\}$?

Р о з в я з а н н я

Зобразимо відношення R за допомогою таблиці



1) Відношення R − рефлексивне, оскільки для кожного $a \in A$, маємо $(a, a) \in R$ $(I \in R)$;

2) відношення R − симетричне, оскільки для всіх пар $(a, b) \in R$ $(a \neq b)$, маємо

Випадок	$(a, b) \in R$	(b, a)	$(b, a) \in R?$
1	$(1, 3)$	$(3, 1)$	Так
2	$(1, 5)$	$(5, 1)$	Так
3	$(3, 5)$	$(5, 3)$	Так

3) відношення R − транзитивне, оскільки

Випадок	$(a, b) \in R$	$(b, c) \in R$	(a, c)	$(a, c) \in R?$
1	$(1, 3)$	$(3, 1)$	$(1, 1)$	Так
2	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(1, 5)$	Так
3	$(3, 1)$	$(1, 3)$	$(3, 3)$	Так
4	$(3, 1)$	$(1, 5)$	$(3, 5)$	Так
5	$(5, 1)$	$(1, 3)$	$(5, 3)$	Так
6	$(5, 1)$	$(1, 5)$	$(5, 5)$	Так
7	$(5, 3)$	$(3, 1)$	$(5, 1)$	Так
8	$(5, 3)$	$(3, 5)$	$(5, 5)$	Так

4) відношення R − не є антисиметричним, тому що, наприклад, з того, що $(1, 3) \in R$ й $(3, 1) \in R$, не випливає 1 = 2.

1.2.7 Функціональні відношення

Основні визначення

Подамо означення понять функції та відображення.

В и з н а ч е н н я. Відношення R ($R \subset A \times B$) називають ***функціональним***, якщо для кожного $x \in A$ переріз R по x містить не більше одного елемента $y \in B$ (або один або жодного!).

У цьому випадку говорять, що відношення R діє з множини A ***у множину*** В і часто використовують позначення $R: A \to B$.

З точки зору теорії множин поняття числової функції є окремим випадком відношення, коли множини A та B є числові. Тому позначення функціональної залежності малими латинським буквами також застосовують в теорії множин і пишуть $f: A \to B$ або $y = f\left(x\right)$, а відношення f називають функцією.

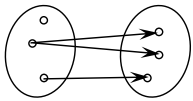


Рисунок 1.7.
Відношення, не функція

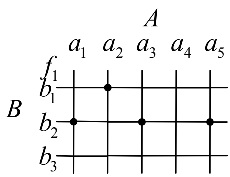
Функція f може бути задана не на всій множені A, а тільки на деякій її частині $D \subset A$. В цьому випадку множину D називають ***областю визначення*** функції f, а підмножину $Im \subset B$, де $Im = \left\{ f(x) \middle| \, x \in D \right\}$ називають ***областю значень*** функції f.

ЗАУВАЖЕННЯ. *Image* переводиться як зображення чи образ.

Елемент $b = f(a)$, де $a \in D$, називають ***образом*** елемента a, а сам елемент a − ***прообразом*** елемента b.

Якщо $D = A$, то функція f називається ***всюди визначеною*** на A. У цьому разі пр$_A$ f $= A$.

П р и к л а д. Відношення f_1, яке задано таблицею

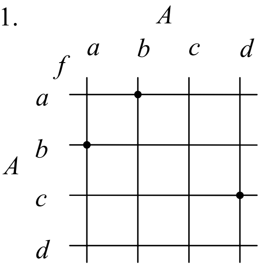


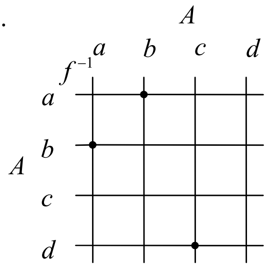
,

є функціональним, але не всюди визначеним. Образом елемента a_3 є елемент b_2, а прообразами елемента b_2 є елементи a_3 та a_5.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо відношення f^{-1}, обернене до функціонального відношення $f \subset A \times B$, є також функціональним, то відношення f буде взаємнооднозначним.

П р и к л а д (функціонального й оберненого до нього відношення). Нехай $f \subset A \times A$ та визначається таблицею 1 (стор. 28). Тоді відношення $f^{-1} \subset A \times A$ визначається таблицею 2 і є функціональним, тому відношення f є взаємнооднозначним.

1. 

2. 

Структура елементів для нас не є важливою, тому функції f і f^{-1} в розглядуємом прикладі зручно записувати як

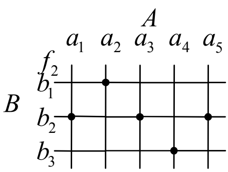
$$f = \begin{bmatrix} a\ b\ d \\ b\ a\ c \end{bmatrix}, \qquad f^{-1} = \begin{bmatrix} a\ b\ c \\ b\ a\ d \end{bmatrix}.$$

В и з н а ч е н н я. Якщо відношення водночас є функціональним та всюди визначеним на множені A, то воно називається ***відображенням*** множини A у множину B.

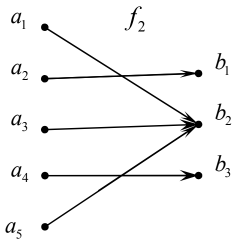
Наприклад, відношення f_1, яке задано таблицею на стор. 27, не є всюди визначеним, тому не є відображенням.

При стрілочному зображенні відображення f з кожної точки повинна виходити лише одна стрілка.

П р и к л а д. Довизначемо відношення f_1 прикладу зі сторінки 27, поклавши $a_4\ f_1\ b_3$, тоді здобудемо функціональне відношення f_2:



; або



,

яке вже є відображенням.

ЗАУВАЖЕННЯ. Нехай f є відображенням множини A на множину B. Переріз $f(x)$ множини f по $x \in A$ є образом елемента x для функції f і позначається як $y = f(x)$. Елемент x називають ***аргументом***, $f(x)$ − ***значенням*** функції. Переріз $f^{-1}(y)$ множини B по $y \in B$ є прообразом елемента y для функції f.

На рис. 1.8 та 1.9 графічно зображені образ елемента x та відображення f, яке діє з множини A у множину B.

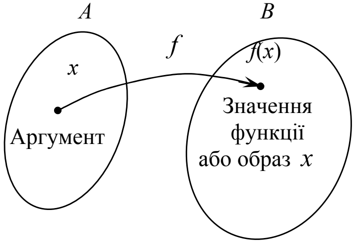


Рисунок 1.8. Значення або образ функції f

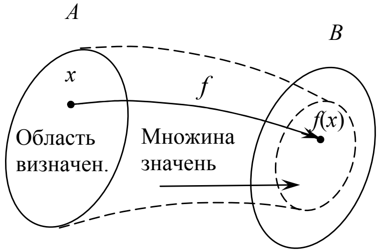


Рисунок 1.9. Відображення f множини A у множину B

Множина упорядкованих пар $\{(x, y)|\ x \in A,\ y = f(x)\}$ називається ***графіком*** відображення f.

Типи відображень

В и з н а ч е н н я. Відображення f називається ***сюр'єктивним***, або просто ***сюр'єкцією,*** якщо область значень f збігається з усією множиною B або
$f(A) = B$, тобто якщо кожний елемент з множини B є образом хоча б одного елемента з множини A. У цьому разі f відображає A ***на*** B (рис. 1.10).

В и з н а ч е н н я. Відображення f називається ***ін'єктивним***, або просто ***ін'єкцією***, якщо відношення f^{-1} є функціональне (рис. 1.11), тобто різні елементи множини A переводяться в різні елементи множини B. У цьому разі кожний елемент з області значень f має єдиний прообраз, тобто з рівності $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$ випливає $x_1 = x_2$.

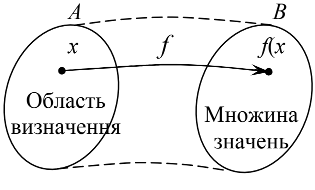


Рисунок 1.10. Відображення A на B

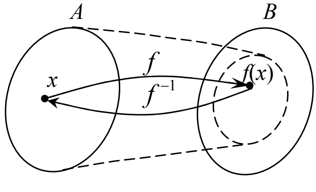


Рисунок 1.11. Ін'єктивне відображення

В и з н а ч е н н я. Відображення називається ***взаємнооднозначним***, або ***бієктивним***, або просто ***бієкцією***, якщо воно є сюр'єктивне й ін'єктивне, інакше кажучи, якщо обернене відношення є відображенням (рис. 1.12).

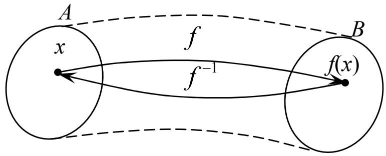


Рисунок 1.12. Бієктивне відображення

В и з н а ч е н н я. Відображення f^{-1} називається ***оберненим відображенням*** до відображення f.

Наступний рис. 1.13 ілюструє поняття сюр'єкції, ін'єкції та бієкції.

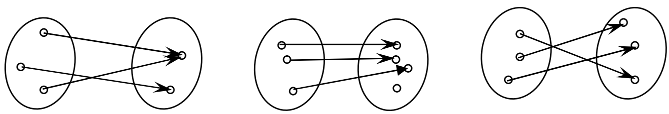


Рисунок 1.13. Різні типи відображень

П р и к л а д. Нехай R − множина дійсних чисел, R_+ − множина дійсних додатних чисел, а функція $f : A \to B$.

1) Якщо $A = B = R$, то функція f: $x \to x^2$ задає відображення A у B (не сюр'єктивне, тому що від'ємні числа не є образами).

2) Якщо $A = B = R$, то функція f: $x \to 4x - 3$ задає відображення A на B (сюр'єктивне).

3) Якщо $A = R$, $B = R^+$, то функція f: $x \to 3^x$ − ін'єктивне відображення, тому що воно є взаємнооднозначне: $f^{-1} : x \to \log_3 x$.

ЗАУВАЖЕННЯ: 1. Якщо функція f: $A \to B$ є бієкцією, то функція f^{-1}: $B \to A$ також буде бієкцією і $(f^{-1})^{-1} = f$.

2. Бієкція скінченної множини A на себе називається ***підстановкою***. Якщо множина має n елементів, то можна розглядати множину $n!$ всіх підстановок, пов'язаних з даною множиною A.

В и з н а ч е н н я. Елемент x називається ***нерухомою точкою*** відображення f, якщо $f(x) = x$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Оскільки функція є окремим випадком відношення, це означає, що для функцій є також визначена композиція, яка в цьому разі називається ***суперпозицією*** функцій. Нехай f − функція, визначене на множині A зі значеннями в множині B, g − функція, визначене на множині B зі значеннями в множині C, тоді композиція $g \circ f$ є функція, яка діє з множини A в множину С. Таким чином суперпозиція функцій знову є функцією.

З означення суперпозиції маємо

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Приклад 1.37 Нехай задано функції

$$f = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ l & m & n & l \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad g = \begin{bmatrix} l & m & n \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Тоді
$$gf = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 \end{bmatrix}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Для відображень g і f справедлива формула $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

Нехай задано множину $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

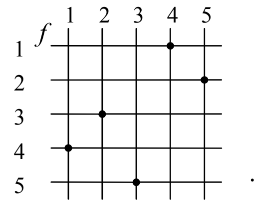
В и з н а ч е н н я. ***Тотожним*** відображенням називається відображення, яке кожному елементові $a_i \in A$ ставить у відповідність цей же самий елемент (позначається символом 1_A). Таким чином:

$$1_A = \begin{bmatrix} a_1\ a_2\ ...\ a_n \\ a_1\ a_2\ ...\ a_n \end{bmatrix}.$$

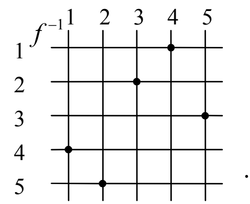
В и з н а ч е н н я. Якщо f та f^{-1} − відображення, визначені на множині A зі значеннями в цій же самій множині A, то відображення f називається ***відображенням на себе*** (бієкцією на себе) і мають місце рівності:

$$1_A \cdot f = f \cdot 1_A = f; \quad f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = 1_A. \tag{1.3}$$

П р и к л а д. Нехай відображення f задано таблицею

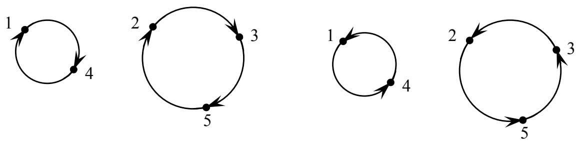


Тоді відображення $f^{-1} \subset A \times A$ визначається таблицею



Функції f і f^{-1} запишемо у вигляді: $f=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $f^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

Зображення відображень f й f^{-1} стрілками складається з циклів:



Перевіримо виконання умови (1.3):

$$1_A\cdot f=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{bmatrix}=f;\quad f\cdot 1_A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{bmatrix}=f.$$

Звідси випливає, що відображення 1_A є тотожним.

Знайдемо композицію відображень f та f^{-1}:

$$f\cdot f^{-1}=f^{-1}\cdot f=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}=1_A.$$

В и з н а ч е н н я. Функція $f: A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\to B$ $\left(f:\ A^n\to B\right)$ називається ***функцією n аргументів.***

Така функція відображає кортеж $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)\in A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ у елемент $b\in B$.

1.2.8 Відношення порядку

Основні визначення

Відношення, котрі зустрічаються на практиці, можуть мати водночас кілька однакових комбінацій властивостей, яким можна надати спеціальну назву й для яких можна вивчати окремо наслідки з цих комбінацій, притаманні всім відношенням з такою комбінацією властивостей. Розгляд розпочнемо з відношення порядку, яке дозволяє порівнювати поміж собою елементи однієї множини.

В и з н а ч е н н я. Бінарне відношення R, яке визначено на множині A, називається відношенням ***порядку,*** якщо воно є антисиметричне й транзитивне.

В и з н а ч е н н я. Бінарне відношення R на A називається відношенням ***нестрогого порядку***, якщо воно є рефлексивне, антисиметричне й транзитивне.

В и з н а ч е н н я. Бінарне відношення R на A називається відношенням ***строгого порядку***, якщо воно є антирефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Якщо відношення порядку є повне, то воно називається відношенням ***повного***, або ***лінійного*** порядку, а якщо воно не має властивості повноти, то називається відношенням ***часткового*** порядку. У цьому разі множина A із заданим на ньому відношенням R називається ***частково впорядкованою множиною*** (позначається (A, R), або просто A).

Множина, на якій визначено відношення повного порядку, називається ***лінійно впорядкованою***.

Зазвичай нестрогий порядок позначають через "$\leq$". У цьому разі маємо нестрого впорядковану множину $(A, \leq)$. Відношення строгого порядку зазвичай, позначають знаком "$<$". Відношення порядку у загальному випадку позначають знаком "$\prec$".

П р и к л а д. Нехай A − множина дійсних чисел, а відношення R на A є $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$. Тут R − відношення нестрогого повного порядку, тому (A, R) − нестрого впорядкована множина (лінійно впорядкована).

П р и к л а д. Нехай $C = \{1, 2, 3\}$, а $P(C)$ − булеан множини C, тобто множина всіх підмножин множини C. Тоді

$$P(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Ця множина містить $2^3 = 8$ елементів.

Відношення R на множині $P(C)$ визначимо як URV, якщо $U \subseteq V$, де $U, V \subseteq C$ (R − відношення включення множин, тобто елемент $(U, V) \in R$, якщо $U \subseteq V$). Наприклад, $(\{3\}, \{1, 3\}) \in R$, тому що $\{3\} \subseteq \{1, 3\}$, а $(\{1, 3\}, \{3\}) \notin R$, оскільки $\{1, 3\} \not\subset \{3\}$.

Можна перевірити, що відношення R визначене у такий спосіб, є рефлексивне, антисиметричне та транзитивне, тому на множині $P(C)$ воно визначає нестрогий порядок, тобто відношення R на булеані $P(C)$ є відношенням нестрогого часткового порядку.

Верхня й нижня межі множини

Нехай A − підмножина впорядкованої множини E, на якій визначено відношення порядку "$\prec$". Якщо існує такий елемент $m \in E$, що $m \prec a$ для кожного $a \in A$, то m називається ***нижньою межею*** множини A. Аналогічно, якщо існує елемент $M \in E$, що $M \succ a$ для кожного $a \in A$, то M називається ***верхньою межею*** множини A.

Якщо m та M належать до множини A, то m та M відповідно називаються ***мінімумом*** та ***максимумом*** множини A й позначаються символами

$$\min A \text{ або } \min_{a\in A}; \qquad \max A \text{ або } \max_{a\in A}.$$

Верхня та нижня межі для кожної множини існують не завжди й не завжди є єдині.

Якщо існує найбільша нижня межа множини A, то вона називається ***інфімумом*** і позначається $\inf A$, а якщо існує найменша верхня границя множини A, то вона називається ***супремумом*** і позначається $\sup A$.

1.2.9 Відношення еквівалентності

В и з н а ч е н н я. Бінарне відношення R на множині A називається ***відношенням еквівалентності***, якщо воно є одночасно рефлексивне, симетричне й транзитивне (позначається символами $\sim$, $\equiv$ або $a = b(\bmod R)$.

П р и к л а д: 1) рівність чисел та множин є відношенням еквівалентності; 2) у прикладі на стор. 25 − 26 відношення R задовольняє всім трьом наведеним властивостям, тому воно є відношенням еквівалентності.

Наприклад, класифікація об'єктів деякої множини A на непересічні підмножини елементів A_i, де $A = \bigcup_i A_i$, $A_i \cap A_k = \varnothing\ (i = k)$, якщо вони мають однакові властивості, визначає відношення еквівалентності. В цьому випадку елементи однієї підмножини A_i володіють однаковою властивістю та є еквівалентні до елементів тієї ж самої підмножини й не є еквівалентні до елементів решти підмножин A_k $(i \neq k)$, до того ж серед підмножин A_i немає порожніх. Здобуті підмножини A_i називаються ***класами еквівалентності*** множини A.

П р и к л а д. Нехай A − множина студентів одного міста. Визначимо на множині A відношення R − «x та y навчаються в одному ВНЗ», де $x, y \in A$. Відношення R буде відношенням еквівалентності, якщо жоден студент міста не навчається в кількох ВНЗ. У цьому разі класи еквівалентності становитимуть студенти одного ВНЗ.

П р и к л а д. Відношення R у прикладі на стор. 25 − 26 розбиває множину A на класи $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$, $[5]$, $[6]$, де

$[1] = \{x : (x, 1) \in R\} = \{x : xR1\} = \{1, 3, 5\}$.

Перевіримо: $1 \in [1]$, оскільки $(1,1) \in R$;

$3 \in [1]$, оскільки $(3,1) \in R$;

$5 \in [1]$, оскільки $(5,1) \in R$.

$[2] = \{x : (x, 2) \in R\} = \{x : xR2\} = \{2\}$;

$[3] = \{x : (x, 3) \in R\} = \{x : xR3\} = \{1, 3, 5\}$;

$[4] = \{x : (x, 4) \in R\} = \{x : xR4\} = \{4\}$;

$[5] = \{x : (x, 5) \in R\} = \{x : xR5\} = \{1, 3, 5\}$.

Аналіз здобутих результатів засвідчує, що різними є лише три класи:

$$[1] = [3] = [5] = \{1, 3, 5\}; \quad [2] = \{2\}; \quad [4] = \{4\}.$$

Символом $[A]_R$ позначають множину всіх класів еквівалентності множини A за відношенням еквівалентності R та називають ***фактор-множиною множини A за відношенням еквівалентності R.*** У розглянутому прикладі фактор-множиною буде множина класів

$$[A]_R = \{[1], [2], [4]\}.$$

Кожний елемент класу еквівалентності породжує цей же самий клас еквівалентності, отже представляє цей клас.

Системою представників певного відношення еквівалентності називається підмножина, яка містить по одному елементові з кожного класу еквівалентності.

П р и к л а д. На множині цілих чисел Z визначимо відношення $R \subset Z \times Z$ за допомогою формули $R = \{(x, y):\ x - y = 3k,\ k - \text{ціле число}\}$.

Відношення R є рефлексивне, тому що $(a, a) \in R$ внаслідок рівності $a - a = 0 = 3 \cdot 0$ для $k = 0$.

Відношення R є симетричне, оскільки з належності $(a, b) \in R$ випливає, що $a - b = 3k$, тобто $b - a = 3(-k)$ і, отже, $(b, a) \in R$.

Відношення R є транзитивне, оскільки з належності (a, b) та (b, c) до R, випливає, що $a - b = 3k_1$, $b - c = 3k_2$, тобто $(a, c) \in R$, оскільки

$$a - c = a - b + b - c = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2),$$

де $k_1 + k_2$ − ціле число.

Отже, відношення R є рефлексивне, симетричне й транзитивне, тому воно є відношенням еквівалентності.

Розглянемо класи чисел

$$[a] = \{x : (x, a) \in R\} = \{x : x - a = 3k\} = \{x : x = a + 3k,\ k - \text{певне ціле число}\}.$$

Здобудемо три різні класи еквівалентності стосовно відношення R розглядаємого прикладу:

$$[0] = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\};$$

$$[1] = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\};$$

$$[2] = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}.$$

Множина всіх класів еквівалентності

$$[Z]_R = \{[0], [1], [2]\}$$

є фактор-множиною множини Z за відношенням еквівалентності R.

Елемент x належить до класу $[a]$, якщо $x - a = 3k$, де k − ціле число. (Пишуть $x = a(\bmod 3)$).

У загальному випадку, якщо Z − множина цілих чисел, а p − деяке число $(p \in Z)$, то вважатимемо $a \sim b$, якщо $(a-b) \vdots p$, де $a, b \in Z$, або, що є одне й те саме, $a = b(\mathrm{mod}\ p)$.

П р и к л а д. Відношення паралельності прямих q на площині є відношенням еквівалентності, тому що:

1) $q \,||\, q$ − рефлексивне;
2) $q_1 \,||\, q_2 \Rightarrow q_2 \,||\, q_1$ − симетричне;
3) $q_1 \,||\, q_2,\ q_2 \,||\, q_3 \Rightarrow q_1 \,||\, q_3$ − транзитивне.

Кожний клас еквівалентності в множині прямих на площині − це множина паралельних прямих, яка повністю визначається напрямком однієї прямої.

П р и к л а д. Вважатимемо, що точка $M_1(x_1, y_1)$ площини є еквівалентна точці $M_2(x_2, y_2)$ цієї ж площини, якщо $x_1 = x_2$. У цьому разі класами еквівалентності будуть множини точок на площині з рівними абсцисами (тобто всі прямі, які є паралельні до осі *Oy*). У цьому випадку фактор-множиною буде множина всіх прямих на площині, які є паралельні до осі *Oy*.

Прикладами відношення еквівалентності є також рівність векторів, логічних тверджень тощо.

1.3 Потужність множин

В и з н а ч е н н я. ***Кардинальним числом*** (позначається Card A або $|A|$) називається деякий об'єкт для позначення потужності будь-якої множини із сукупності множин.

В и з н а ч е н н я. ***Потужністю*** скінченної множини A називається кількість її елементів.

Кардинальне число є узагальненням поняття числа елементів скінченної множини на випадок нескінченної множини.

В и з н а ч е н н я. Стверджують, що множини $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\}$ та $B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\}$ мають однакову потужність, якщо можна встановити взаємнооднозначну відповідність поміж їхніми елементами $b_i = f(a_j)$. У цьому разі множини A та B називають ***рівнопотужними*** та позначають $A \sim B$.

Кожні не порожні скінчені множини з n елементів є рівнопотужні множині певного відрізку натурального ряду N_n, де $N_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ У цьому разі їхня потужність дорівнює $n < \infty$.

Потужність порожньої множини $\varnothing$ вважають рівною 0, тобто $|\varnothing| = 0$.

П р и к л а д. 1) Якщо $A=\{-2,0,3,5\}$, то $|A|=4$. 2) $|N|=|N^2|$, де $N^2=N\times N$, N − множина натуральних чисел. 3) Якщо множини A та B мають скінчену кількість елементів, то $|A\times B|=|A|\cdot|B|$. 4) $|A^n|=|A|^n$, $n<\infty$.

В и з н а ч е н н я. Кожна множина, яка рівнопотужна множині натуральних чисел, називається ***зліченною.*** Її потужність позначається літерою $\aleph_0$ (алеф нуль, алеф − перша літера єврейської абетки).

П р и к л а д. Множина непарних чисел P є рівнопотужна множині всіх натуральних чисел N, тому множина P є зліченою множиною і її потужність $|P|=\aleph_0$.

В и з н а ч е н н я. Якщо існує взаємнооднозначна відповідність між множиною A і деякою власною підмножиною B^* множини B, тоді кажуть, що ***потужність множини A не менша від потужності множини B*** і записують |*A*| (|*B*|.

Теорема 1 Якщо множина A є рівнопотужна підмножині B^* множини B (тобто $A\sim B^*$) і множина B є рівнопотужна підмножині A^* множини A (тобто $B\sim A^*$), то множини A й B рівнопотужні ($A\sim B$) й їхні потужності дорівнюють одна одній: $|A|=|B|$.

Теорема 2 Потужність множини E завжди менше за потужність множини $P(E)$, де $P(E)$ − множина всіх підмножин множини E.

Теорема 3 Кожна нескінчена множина містить зліченну множину.

Теорема 4 Якщо E − нескінчена множина, а A − скінчена, то $|E\cup A|=|E|$.

Теорема 5 Всі нескінчені множини, які є підмножинами зліченної множини, є також зліченні.

Теорема 6 Об'єднання зліченого числа скінченних або зліченних множин є злічена множина.

Теорема 7 Декартов добуток двох зліченних множин є злічена множина.

Д о в е д е н н я

Нехай є дві злічені множини $A=\{a_n\}$ та $B=\{b_n\}$. Позначимо через $c_{n,m}=a_n\cdot b_m$ елемент добутку множин $A\cdot B$. Кожному елементові $c_{n,m}$ поставимо у відповідність пару чисел (n,m). Занумеруємо їх в такий спосіб: $(0,0)$ − номер 0; $(0,1)$ − номер 1; $(1,0)$ − номер 2; $(0,2)$ − номер 3; $(1,1)$ − номер 4; $(2,0)$ − номер 5; ...; $(0,k)$ − номер r; $(1,k-1)$ − номер $r+1$; ...; $(k,0)$ − номер $r+1+k$.

Правило нумерування елементів множини $A\cdot B$ зобразимо графічно:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{k-2}	a_{k-1}	a_k	$\dots$
b_0	$a_0b_0\ \boxed{0}$	$a_1b_0\ \boxed{2}$	$a_2b_0\ \boxed{5}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_kb_0\ \boxed{r+k+1}$	$\dots$
b_1	$a_0b_1\ \boxed{1}$	$a_1b_1\ \boxed{4}$	$a_1b_1\ \boxed{8}$	$\dots$	$\dots$	$a_{k-1}b_1\ \boxed{r+k}$	$\dots$	$\dots$
b_2	$a_0b_2\ \boxed{3}$	$a_1b_2\ \boxed{7}$	$a_1b_2\ \boxed{12}$	$\dots$	$a_{k-2}b_2\ \boxed{r+k-1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b_{k-2}	$\vdots$	$\dots$	$a_1b_{k-2}\ \boxed{r+2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
b_{k-1}	$\dots$	$a_1b_{k-1}\ \boxed{r+1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
b_k	$a_0b_k\ \boxed{r}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

У такий спосіб можна перенумерувати всі пари $a_n \cdot b_m$, тому множина, яка складається з елементів з подвійними індексами, є злічена.

П р и к л а д. 1) Множина цілих чисел − зліченна. 2) Множина раціональних чисел $\dfrac{p}{q}$ $\left(p, q \in N, q \neq 0\right)$ є зліченна. 3) Множина точок з раціональними координатами на евклідовій площині є зліченна.

В и з н а ч е н н я. Потужність множини дійсних чисел проміжку $\left[0,1\right)$ називається потужністю ***континууму***. Позначається через **С** або $\aleph$.

П р и к л а д. Множини дійсних чисел проміжків $\left[0,1\right)$ та $\left[0,\infty\right)$ є рівнопотужні, оскільки по між ними можна встановити взаємнооднозначну відповідність.

Завдання для самостійної роботи. Довести твердження попереднього прикладу.

Теорема 8 Множина $P\left(N\right)$ (булеан множини N) − незліченна множина. Її потужність дорівнює потужності континууму **С**, тобто множина потужності $2^{\aleph_0}$ має потужність континууму.

Теорема 9 Об'єднання множини потужності континууму та зліченної множини має потужність континууму.

Теорема 10 Добуток скінченного або зліченного числа множин потужності континууму має потужність континууму:

$$\left(\aleph_0\right)^{\left(\aleph_0\right)} = \mathbf{C}.$$