

Завдання 1. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ функцій:

1. а) $y = 2x^5 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} + 8$; б) $y = \cos^5 3x \cdot \sin x^2$; в) $y = \frac{\operatorname{ctg} 3x}{(x+1)^2}$; г) $xy^2 = x^3 + 5y$; д) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \sqrt{(t^2 + 1)^3}. \end{cases}$
2. а) $y = 2^x + \sqrt[5]{x^4} - \frac{2}{x^6} + 9$; б) $y = 5^{-x} \cdot \operatorname{arctg}^2 x$; в) $y = \frac{(3x-2)^4}{x + e^{5x}}$; г) $x^2 y = 3x + y^2$; д) $\begin{cases} x = \ln(t-1), \\ y = \sqrt[3]{(t-1)^4}. \end{cases}$
3. а) $y = \log_5 x - 2\sqrt[4]{x^9} + \frac{1}{x^2} + 4$; б) $y = 2^{\cos x} \cdot \arcsin^3 x$; в) $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{x^2 + 5x}}$; г) $x^2 + y^3 = 2xy$; д) $x = \begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$
4. а) $y = 7x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{4}{x} + \lg 3$; б) $y = (x^2 + 1)^4 \cdot \arcsin 2x$; в) $y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{2^x + x^3}$; г) $\cos y = x^3 y + 2$; д) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t+1}, \\ y = \sqrt{(t+1)^3}. \end{cases}$
5. а) $y = 3^x + \sqrt[4]{x} - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{7}$; б) $y = 3^{\sin 5x} \log_4(7-2x)$; в) $y = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{(x^2 + x + 1)^2}$; г) $xy^3 = e^x + 2y$; д) $\begin{cases} x = 1/\sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln(t^2 + 1). \end{cases}$
6. а) $y = \lg x + \sqrt[5]{x^7} - \frac{2}{x^5} + 3$; б) $y = \sin^3 4x \cdot (4 + e^{2x})^5$; в) $y = \frac{\log_3 \sin 4x}{2x - 1}$; г) $x^2 + 5y^2 = xe^y$; д) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$
7. а) $y = 2x^6 - \sqrt[3]{x^8} + \frac{9}{x^2} + e^3$; б) $y = (x^2 + 1)^8 \cdot \cos(\ln x)$; в) $y = \frac{\lg^2 x}{\sqrt[3]{x^5 + 2}}$; г) $2x + y^2 = x^3 y$; д) $\begin{cases} x = 1/(1-t^2)^3, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$
8. а) $y = 2x^8 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{6}{x^7} + \cos 1$; б) $y = 4^{\arcsin 3x} \cdot \lg(2-5x^2)$; в) $y = \frac{x^2 + x}{3 + \operatorname{tg} x}$; г) $x^2 y^2 = 5x + \cos y$; д) $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + 1}, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$
9. а) $y = \log_2 x - \sqrt[3]{x^7} + \frac{8}{x^3} + 2$; б) $y = e^{\operatorname{ctg} 2x} \cdot (3 + \sqrt{x})^5$; в) $y = \frac{\lg \cos 5x}{3x - 2}$; г) $xy^4 = x^3 + 2y$; д) $\begin{cases} x = \sqrt{(t^2 + 1)^5}, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$
10. а) $y = 2x^7 + \sqrt[6]{x} - \frac{4}{x} + e^{-3}$; б) $y = 5^{\operatorname{tg} x} \cdot \log_3(2-9x)$; в) $y = \frac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}$; г) $x^2 e^y = 5x + 9y$; д) $\begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t. \end{cases}$
11. а) $y = \log_4 x - \sqrt[5]{x^9} + \frac{4}{x^7} - 3e$; б) $y = 3^{x-1} \cdot \operatorname{arctg}^4 x$; в) $y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{(5x+1)^3}$; г) $x^2 y^3 = 2x - 3y$; д) $\begin{cases} x = 1/(t^2 + 1)^3, \\ y = 1/\sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$
12. а) $y = 2\operatorname{tg} x + \sqrt[3]{x^8} - \frac{5}{x^4} + 7$; б) $y = \cos^3 2x \cdot \lg(\sin x)$; в) $y = \frac{x^2 + e^{5x}}{3x - 2}$; г) $\sin y = x^2 y + 3$; д) $\begin{cases} x = \sqrt[4]{t+1}, \\ y = \sqrt{(t+1)^5}. \end{cases}$
13. а) $y = \lg x - \sqrt[4]{x^7} + \frac{3}{x^8} - \sqrt{2}$; б) $y = 5^{-x^2} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; в) $y = \frac{(2x+5)^3}{x + \sin 2x}$; г) $x^5 y + x = 2y^3$; д) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t^2 - 1}, \\ y = \ln(t^2 - 1). \end{cases}$
14. а) $y = \operatorname{ctg} x + 4\sqrt[8]{x} - \frac{1}{x} + \frac{2}{7}$; б) $y = 4^{\sin x} \cdot \arcsin^2 x$; в) $y = \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sqrt{x^3 + 2x}}$; г) $e^{xy} = x^2 + 5y$; д) $\begin{cases} x = \ln^2(t+1), \\ y = \sqrt{t+1}. \end{cases}$
15. а) $y = \log_{1/3} x - \sqrt[5]{x^{11}} + \frac{9}{x^2} - 8$; б) $y = (x^2 + 3)^5 \cdot \sin 4x$; в) $y = \frac{\operatorname{sh} 3x}{5^x + \sqrt{x}}$; г) $x \cos y = x^3 + 2y$; д) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$
16. а) $y = x + \sqrt[3]{x^{10}} - \frac{2}{x^7} - \lg 5$; б) $y = 9^{\sin 2x} \cdot \log_2(5-3x)$; в) $y = \frac{\arccos \sqrt{x}}{(x^2 + x)^3}$; г) $y^3 = 2xy + 5$; д) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^3 2t. \end{cases}$

17. а) $y = 8^x + 2\sqrt[8]{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{3}$; б) $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot (2 + e^{-5x})^9$; в) $y = \frac{\log_5 \operatorname{sh} x}{3x + 2}$; г) $xy^2 + x^3 = 4y$; д) $\begin{cases} x = \lg(1 - 9t), \\ y = \arcsin 3\sqrt{t}. \end{cases}$
18. а) $y = \log_{1/2} x - \sqrt[5]{x^8} + \frac{2}{x^9} - 1$; б) $y = (x^3 + 1)^4 \cdot \sin(\lg x)$; в) $y = \frac{\lg^5 x}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}$; г) $xy + x^2 = \cos y$; д) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \operatorname{ctg}^2 t. \end{cases}$
19. а) $y = x^5 + \sqrt[6]{x^7} - \frac{5}{x^4} + \lg 8$; б) $y = 7^{\sin 5x} \cdot \lg(3 - 2x^4)$; в) $y = \frac{x^2 + 5x}{2 + \operatorname{ctg} x}$; г) $3y^2 = 2 + ye^x$; д) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t, \\ y = \ln(1 + 4t^2). \end{cases}$
20. а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 4\sqrt[8]{x^5} - \frac{2}{x^5} + \sin 1$; б) $y = e^{\operatorname{tg} 5x} \cdot (x^5 + 2x)^3$; в) $y = \frac{\lg \sin 2x}{8x - 5}$; г) $\operatorname{tg} y = x^2 + 3y$; д) $\begin{cases} x = \log_2(1 - t), \\ y = \arccos \sqrt{t}. \end{cases}$
21. а) $y = 3x^9 - \sqrt[7]{x^2} + \frac{8}{x^3} + e$; б) $y = 3^{\operatorname{tg} 2x} \cdot \log_{1/2}(5 - 2x)$; в) $y = \frac{e^{\operatorname{tg} 2x}}{\sqrt{3 + \lg x}}$; г) $x + y^2 = x^3 \cos y$; д) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$
22. а) $y = \frac{1}{6}x^8 - \sqrt[9]{x^2} - \frac{4}{x^{11}} + \sqrt{3}$; б) $y = e^{x^2 - x} \cdot \operatorname{ctg}^3 x$; в) $y = \frac{x + \operatorname{tg} x}{(5x + 2)^4}$; г) $x^2 \sin y = x + 2y$; д) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \\ y = 2 \ln \operatorname{ctg} t. \end{cases}$
23. а) $y = 3x^5 + \sqrt[7]{x^9} - \frac{1}{x^4} + 8,3$; б) $y = (x^2 + 3)^4 \cdot \cos x^3$; в) $y = \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{\operatorname{arctg} 5x}$; г) $xy^2 = 5^x + y$; д) $\begin{cases} x = 1 - \cos^2 2t, \\ y = 2 + \operatorname{tg}^2 2t. \end{cases}$
24. а) $y = 2e^x + \sqrt[8]{x^9} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{7}$; б) $y = 9^{\sin 2x} \cdot (x^3 - x)^5$; в) $y = \frac{x^3 + 2x}{5 + \operatorname{th} x}$; г) $x^2 e^{3y} = x + 5y^2$; д) $\begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = 1/\sin^2 t. \end{cases}$
25. а) $y = \log_{2/3} x + \sqrt[9]{x^5} + \frac{3}{x^4} - 1$; б) $y = e^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot (3x + 7)^4$; в) $y = \frac{\lg \sin 2x}{4x + 7}$; г) $x^2 + 2^y = xy^3$; д) $\begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$
26. а) $y = 3\operatorname{tg} x + \sqrt[8]{x^7} - \frac{5}{x^{11}} + \frac{1}{3}$; б) $y = \operatorname{ch}^8 x \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x}$; в) $y = \frac{3x + e^{2x}}{x^2 - 1}$; г) $x \sin y = x^2 + y$; д) $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$
27. а) $y = 2 \lg x - \sqrt[9]{x} + \frac{3}{x^7} - 1,5$; б) $y = e^{-2x^3} \cdot \operatorname{arcctg}(\ln x)$; в) $y = \frac{\operatorname{cth}^4 x}{\sqrt{\sin 5x}}$; г) $x^4 e^{2y} + y = 3x$; д) $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\cos^2 t. \end{cases}$
28. а) $y = 4x + \sqrt[7]{x^4} - \frac{2}{x^5} + e^3$; б) $y = 8^{\operatorname{th} 2x} \cdot \arcsin^5 x$; в) $y = \frac{\sqrt{\log_3 4x}}{5x + 2}$; г) $e^{x^2 y} = 5x + y$; д) $\begin{cases} x = 3 + \sin^2 t, \\ y = 1 - \cos^2 t. \end{cases}$
29. а) $y = \log_{5/3} x - \sqrt[4]{x^5} + \frac{3}{x^8} - 5$; б) $y = (x^4 + 2x)^3 \cdot \sin \sqrt{x}$; в) $y = \frac{\operatorname{ctg} 2x}{x^2 - e^{3x}}$; г) $x^3 y = 3x + y^2$; д) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 2t, \\ y = \sqrt{4t^2 + 1}. \end{cases}$
30. а) $y = 3x^8 + \sqrt[7]{x^5} - \frac{6}{x^{10}} + \operatorname{tg} 1$; б) $y = e^{\operatorname{ch} 3x} \cdot \log_2 \sin x$; в) $y = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt{x^2 + 1}}$; г) $y^2 = e^{2x - y} + 5$; д) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 1 - \cos 2t. \end{cases}$
31. а) $y = 5^x + 3\sqrt[9]{x^8} - \frac{4}{x} + \frac{7}{3}$; б) $y = \operatorname{cth}^2 x \cdot (5 + e^{-2x})^4$; в) $y = \frac{\log_5 \operatorname{tg} x}{(x + 2)^3}$; г) $x^2 \sin y = xy + 1$; д) $\begin{cases} x = \arcsin 3\sqrt{t}, \\ y = \lg(1 - 9t). \end{cases}$
32. а) $y = 3x^6 - \sqrt[7]{x^8} + \frac{2}{x^9} + \sqrt[5]{2}$; б) $y = 3^{\operatorname{arctg} 2x} \cdot \log_{5/7}^2 x$; в) $y = \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sqrt[4]{1 - x^2}}$; г) $xe^y = x^2 y + 3$; д) $\begin{cases} x = \frac{1}{1 - 4t}, \\ y = \arcsin 2\sqrt{t}. \end{cases}$

Завдання 2. Користуючись правилом логарифмічного диференціювання, знайти похідну $y' = \frac{dy}{dx}$

функції:

1. а) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\arcsin x}$; б) $y = \frac{\sqrt{5x+1}(x-3)^4}{(x+2)^3}$.

2. а) $y = (\cos 2x)^{x^3}$; б) $y = \frac{(2x+3)^5(x-2)^3}{\sqrt[5]{(x+1)^2}}$.

3. а) $y = (\operatorname{sh} x)^{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{(x-1)^3 \cdot \sqrt[5]{(x+2)^9}}{(3x+1)^7}$.

4. а) $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^4}$; б) $y = \frac{\sqrt[3]{2x+1}(x-5)^2}{(x+3)^8}$.

5. а) $y = (\log_2 x)^{\operatorname{ctg} x}$; б) $y = \frac{(9x-1)^3(x-7)^5}{\sqrt[3]{(4x-1)^2}}$.

6. а) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sin x}$; б) $y = \frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(x+1)^3(x-4)^5}$.

7. а) $y = (\sin 3x)^{x^2}$; б) $y = \frac{\sqrt[8]{2x+5}}{(5x-2)^3(x-4)^2}$.

8. а) $y = (\ln x)^{\operatorname{sh} 3x}$; б) $y = \frac{(3x-4)^9(x-1)^5}{\sqrt[8]{(3x+1)^3}}$.

9. а) $y = x^{\operatorname{tg} x}$; б) $y = \frac{\sqrt[6]{(3x+4)^5}}{(x-1)^3(x+3)^2}$.

10. а) $y = (x^2 + x)^{\cos 3x}$; б) $y = \frac{(4x-1)^5(x+1)^9}{\sqrt[5]{(x+2)^4}}$.

11. а) $y = (x^3 + 1)^{\sin 2x}$; б) $y = \frac{\sqrt[4]{(x+1)^7}}{(3x-2)^5(x+2)^3}$.

12. а) $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\lg x}$; б) $y = \frac{(2x+1)^9(x-2)^4}{\sqrt[5]{(x-1)^3}}$.

13. а) $y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$; б) $y = \frac{(x+1)^5(8x-3)^4}{\sqrt[7]{(x-2)^6}}$.

14. а) $y = (\operatorname{ctg} x)^{5x+2}$; б) $y = \frac{\sqrt[8]{(2x+1)^3}}{5^{x-1}(x-7)^4}$.

15. а) $y = (x^2 + 3)^{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{(x-3)^3(x+1)^7}{\sqrt[9]{(x-4)^5}}$.

16. а) $y = (\operatorname{sh} 2x)^{\log_2 x}$; б) $y = \frac{\sqrt[10]{(x+2)^3}}{(5x-2)^4(1-x)^7}$.

17. а) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\operatorname{sh} x}$; б) $y = \frac{3^{x^2-1}(x+9)^5}{\sqrt[4]{(5x-3)^7}}$.

18. а) $y = (\operatorname{ch} x)^{\arccos 5x}$; б) $y = \frac{\sqrt[8]{(x+4)^5}}{(2x-3)^9(x+1)^2}$.

19. а) $y = (1-x)^{\arcsin 2x}$; б) $y = \frac{(7x-5)^2(x+2)^8}{\sqrt[5]{(x+1)^4}}$.

20. а) $y = (x^2 + 5)^{\operatorname{ctg} x}$; б) $y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^5}}{(8x+3)^2(x-5)^4}$.

21. а) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sin 3x}$; б) $y = \frac{\sqrt{(x+1)^5(3x-1)^8}}{(x+2)^4}$.

22. а) $y = (\cos x^2)^{3x+1}$; б) $y = \frac{2^{\operatorname{tg} x}(x+5)^4}{\sqrt[9]{(2-x)^7}}$.

23. а) $y = (\operatorname{sh} 2x)^{x^3+1}$; б) $y = \frac{(x-1)^3 \sqrt{(x+8)^5}}{(3x-1)^4}$.

24. а) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$; б) $y = \frac{\sqrt[3]{(2x+1)^5}(x-1)^3}{x(x+2)}$.

25. а) $y = (\log_3 x)^{\cos 2x}$; б) $y = \frac{(2-x)^5(x^2-1)^3}{\sqrt[3]{x+5}}$.

26. а) $y = (\operatorname{ctg} x)^{x^2}$; б) $y = \frac{x^2 \sqrt{3-x}}{(x+1)^5(x-1)^8}$.

27. а) $y = (\arcsin 4x)^{3-x}$; б) $y = \frac{\sqrt[7]{(3x+1)^2}}{(x-2)^3 \sqrt{x}}$.

28. а) $y = (\lg x)^{\sin 5x}$; б) $y = \frac{(7x-2)^3(x^3+1)^2}{\sqrt[5]{x+4}}$.

29. а) $y = (2x+5)^{\operatorname{tg} 3x}$; б) $y = \frac{\sqrt[9]{(3x+7)^2}}{(x-1)^8(x+5)^3}$.

30. а) $y = (1+\sqrt{x})^{\cos x}$; б) $y = \frac{4^x(x^2+x)^3}{\sqrt{(x-1)^5}}$.

31. а) $y = (x^4 + 1)^{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{\sqrt[5]{x^9}(3-x)^2}{(2x+7)^5(x+5)^8}$.

32. а) $y = (2 + \sqrt[3]{x})^{\ln x}$; б) $y = \frac{(7x+1)^3(x-5)^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Завдання 3. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границі:

1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-4^x}{\sin 2x + \sin 6x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{\ln(3x-1)}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{1}{1-x}}$.

2. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x^2+3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+4x-2}{5x+3}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3)^{\frac{1}{2x-1}}$.

3. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2+x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x^3-5x^2+4}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

4. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{x^2-x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+3^x}{\ln(4x-1)}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} (x-2)^{\frac{1}{3-x}}$.

5. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{18-9x}{\sqrt{5x+6}-4}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x-1)}{x^3+1}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x-2)^{\frac{1}{x+1}}$.

6. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-1}{3\arcsin x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+9}{x^2-3x+2}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

7. а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+7x+12}{x^2-9}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x+1}}{x^2-4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

8. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{2x-x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{e^{5x}+x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x+5}}$.

9. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2x-1}}{x^3-8}$; б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4+2x^3-5}{x^2+4}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+1)^{\frac{1}{x+2}}$.

10. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+5x}{\operatorname{tg} 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}+x}{5+2\ln x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}}$.

11. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x-1}{5^x-1}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{\sqrt{4x+1}}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x+1)^{\frac{1}{x+2}}$.

12. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2\sin 3x}{4x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x^2+4x-2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} (4-x)^{\frac{1}{3-x}}$.

13. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x^2-5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+x}{\sqrt[5]{x+1}}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)^{\frac{1}{x+3}}$.

14. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-x}{\arcsin 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2-3x+1}{2x+7}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 2x}$.

15. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + 4\sin 2x}{x^2+8x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{2x+5}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^x$.

16. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-6x}{\sqrt{x+7}-3}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5+2\ln x}{x^2-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1)^{\frac{1}{e^x+1}}$.

$$17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\ln(x+1)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x + 2}{5x - 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2)^{\frac{1}{x+5}}.$$

$$18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 5 \sin 4x}{3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt[4]{2x - 1}}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 5} (x - 4)^{\frac{2}{5-x}}.$$

$$19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(x+2)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 2}{e^x + x^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{2x-1}}.$$

$$20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x^3 + 4x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + 2x - 4x^2}{9x + 2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x + x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x + \sin x}{5x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 + 4x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 8} (x - 7)^{\frac{1}{8-x}}.$$

$$22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{3^x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3 \ln x}{\ln(x+1)}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x+5}}.$$

$$23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + 2 \sin 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + 2}{x^2 - 3x + 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin 5x}.$$

$$24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x^3 + x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{2 + \sqrt[5]{x^2}}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2 + \ln x}}.$$

$$25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arcsin 5x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + 4x - x^2}{7x + 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 3)^{\frac{1}{x^3}}.$$

$$26. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{x^2 + 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{(x+1)^3}}{e^x + 5}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^x.$$

$$27. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x-1} - 2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln x}{x^3 + x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)^{\frac{1}{e^x + 3}}.$$

$$28. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\ln(2x+1)}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 2x + 7}{9x + 2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x + 1)^{\frac{3}{x}}.$$

$$29. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + 3 \sin x}{2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{\sqrt[5]{3x - 2}}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} (x - 3)^{\frac{8}{4-x}}.$$

$$30. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+1)}{\sin 3x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{5^x + x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2)^{\frac{1}{x}}.$$

$$31. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{\arcsin 2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + x - 4x^2}{2x + 5}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

$$32. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x^2 - 16}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - 2 \lg x}{x^3 + 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x + 1)^{\frac{1}{8^x - 1}}.$$

Завдання 4. Провести повне дослідження та побудувати графік функції:

1. $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$. 2. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. 3. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. 4. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. 5. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.
6. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. 7. $y = \frac{(x + 3)^2}{x - 1}$. 8. $y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}$. 9. $y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}$. 10. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$.
11. $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$. 12. $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$. 13. $y = \frac{x^2 + x + 4}{x}$. 14. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. 15. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.
16. $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$. 17. $y = \frac{(x - 2)^2}{x + 1}$. 18. $y = \frac{x + 2}{(x + 1)^2}$. 19. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$. 20. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
21. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. 22. $y = \frac{8(x - 1)}{(x + 1)^2}$. 23. $y = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$. 24. $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$. 25. $y = \frac{(x + 4)^2}{x - 1}$.
26. $y = \frac{4x - x^2 - 1}{x - 4}$. 27. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x}$. 28. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. 29. $y = \frac{x^2}{(x + 1)^2}$. 30. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$.
31. $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$. 32. $y = \frac{(x - 2)^2}{x}$.

Завдання 5. Розв'язати задачу за номером $m + 1$ (m – остання цифра номера індивідуального навчального плану (шифру) студента).

1. Посудина, що складається із циліндра і закінчується знизу півсферою, повинна вміщувати 12 л води. Знайти розміри посудини, при яких на її виготовлення буде затрачено найменшу кількість матеріалу.

2. Якими повинні бути розміри консервної банки, що має найбільший об'єм при заданій площі поверхні S ?

3. Кусок дроту довжиною ℓ зігнути у вигляді прямокутника так, щоб його площа була найбільшою.

4. Переріз тунелю має форму прямокутника, завершеного півколом. Периметр перерізу 18 м. При якому радіусі півколу площа перерізу буде найбільшою?

5. Потрібно виготовити жолоб, відкритий зверху, поперечний переріз якого має форму рівнобічної трапеції, а дно і боки мають ширину по 10 см. Якою має бути ширина жолобу зверху, щоб він вміщував найбільшу кількість води?

6. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює $9\sqrt{2}$. Якими повинні бути катети, щоб периметр трикутника був найбільшим?

7. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V . Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

8. Число 54 записано у вигляді суми трьох додатних доданків. Відомо, що перший доданок у два рази більший від другого. Знайти ці доданки, знаючи, що їх добуток є найбільшим.

9. Периметр осевого перерізу циліндра дорівнює $6a$. Знайти найбільший об'єм такого циліндра.

10. Бак циліндричної форми повинен вмістити 32 літри води. Якими мають бути розміри бака, щоб його поверхня (без покриття) була найменшою?