

ІДЗ-9

Завдання 1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

1. а) $\cos 3x \, dx + 5^y dy = 0$; б) $\sqrt{5-y^2} \, dx + x^3 dy = 0$; в) $y' = \sqrt{4-y^2} \sin x$; г) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 2$;
 д) $y' - \frac{2y}{x+3} = 3x+9$; е) $(2y-x+5)dx + (2x+3y^2)dy = 0$.
2. а) $\sqrt[5]{x^3} \, dx + \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$; б) $y^3 dx + \sqrt{x^2+5} dy = 0$; в) $y' = (3^x + 2x)y$; г) $y' = \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' - \frac{y}{x-2} = x^2 + 4$; е) $(x^2 + 3y)dx + (3x + 4y - 1)dy = 0$.
3. а) $\frac{dx}{\sqrt[4]{x}} + y^3 dy = 0$; б) $\sin^2 y dx + 3^{-x} dy = 0$; в) $y' = 9x^2(y^2 + 2)$; г) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 5$;
 д) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$; е) $(3x^2 - 4y + 1)dx + (3 - 4x + y)dy = 0$.
4. а) $\sqrt[5]{x^2} \, dx + \frac{dy}{y^3} = 0$; б) $e^{-y} dx + \sqrt{4-x^2} dy = 0$; в) $y' = (2x^3 + e^x) \cos^2 y$; г) $y' = \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 2} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' - \frac{y}{x+3} = x^2 + 9$; е) $(x^2 + 2y - 1)dx + (2x - 3y^2 + 4)dy = 0$.
5. а) $x^2 dx + \frac{dy}{\sqrt{y^5}} = 0$; б) $(y^2 - 4)dx + \sqrt{x^2 + 1} dy = 0$; в) $y' = (2^x - 3)\sqrt{1-y^2}$; г) $y' = \frac{y^3}{x^3} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' + \frac{y}{x-1} = 3x$; е) $(2xy + 4x)dx + (x^2 - 2y + 1)dy = 0$.
6. а) $\sqrt[4]{x^3} \, dx + \frac{dy}{y^5} = 0$; б) $y^5 dx + (x^2 - 1)dy = 0$; в) $y' = 4\cos 2x(y^2 + 3)$; г) $y' = \sqrt{4 - \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' + \frac{2y}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$; е) $(5y - 2x)dx + (5x + 3y^2 + 2)dy = 0$.
7. а) $\sqrt[3]{x} \, dx + \frac{dy}{y^4} = 0$; б) $\sqrt{y^2 - 2} \, dx + x^8 dy = 0$; в) $y' = (5^x + x)\sqrt{9 - y^2}$; г) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 4$;
 д) $y' + \frac{3y}{x} = 8x$; е) $(x^2 - 2y + 4)dx + (6y - 2x + 1)dy = 0$.
8. а) $\frac{dx}{\sqrt{x^3}} + y dy = 0$; б) $y^2 dx + (x^2 + 4)dy = 0$; в) $y' = (3x^5 + 4^x)\sqrt{y^2 + 1}$; г) $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$;
 д) $y' + \frac{y}{x-3} = x^2$; е) $(3x^2 + 2y - 5)dx + (2x - y^2 + 1)dy = 0$.
9. а) $\frac{dx}{x^4} + \sqrt[3]{y^2} \, dy = 0$; б) $(1 + y^2)dx + \cos^2 x dy = 0$; в) $y' = (5^x + x^3)y$; г) $y' = \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 3} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' + \frac{y}{x-2} = 2x + 4$; е) $(4xy + x^2 + 3)dx + (2x^2 - y + 2)dy = 0$.
10. а) $\sqrt[4]{x^5} \, dx + y^4 dy = 0$; б) $(y^2 - 3)dx + \sqrt{x^2 + 4} dy = 0$; в) $y' = \frac{y^2 + 3}{\sin^2 x}$; г) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' - \frac{2y}{x-3} = 2x - 6$; е) $(6x^2 - y + 2)dx + (4y - x + 1)dy = 0$.
11. а) $\sin 5x \, dx + 8^y dy = 0$; б) $\cos^2 y dx + 2^{-x} dy = 0$; в) $y' = (2x^3 - x) \cdot \sqrt[3]{y}$; г) $y' = \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 2} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' - \frac{y}{x+2} = 4x + 8$; е) $(3x^2 y + 2)dx + (x^3 - 2y)dy = 0$.

12. а) $\frac{dx}{x^2} + \cos 2y dy = 0$; б) $(y^2 - 2)dx + \sin^2 x dy = 0$; в) $y' = (4^x + x) e^{-y}$; г) $y' = 5 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$;
 д) $y' + \frac{y}{x-3} = x+3$; е) $(6x^2 + 2y - 1)dx + (2x - 3y^2 + 2)dy = 0$.
13. а) $3x^8 dx + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$; б) $(y^2 + 7)dx + x^2 dy = 0$; в) $y' = \cos 2x \cos^2 y$; г) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^3}{4y^3}$;
 д) $y' - \frac{y}{x} = x \sin 2x$; е) $(2xy^2 + x - 5)dx + (2x^2 y + 3)dy = 0$.
14. а) $\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} + 10y^4 dy = 0$; б) $y^2 dx + 3x dy = 0$; в) $y' = (e^{2x} + 5) \sqrt{y}$; г) $y' = \frac{y}{x} - 2 \cos^2 \frac{y}{x}$;
 д) $y' + \frac{y}{x^2} = x^2 e^{\frac{1}{x}}$; е) $(x^2 + y^2 + x)dx + (2xy + 1)dy = 0$.
15. а) $4x^7 dx + \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 3}} = 0$; б) $(y^2 + 9)dx + 3x^3 dy = 0$; в) $y' = \sin 2x \sin^2 y$; г) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{3y^2}$;
 д) $y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^{4x}$; е) $(2x + y^3 - 1)dx + (3xy^2 + 2)dy = 0$.
16. а) $\frac{dx}{\sin^2 x} + 4\sqrt{y} dy = 0$; б) $(y - 2)dx + 5^{-x} dy = 0$; в) $y' = (x^2 - x)y^3$; г) $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{9 - \frac{y^2}{x^2}}$;
 д) $y' + \frac{3y}{x} = 5x + 4$; е) $(x - y^2 + 3)dx + (5 - 2xy)dy = 0$.
17. а) $9^x dx + \frac{dy}{\sqrt{3-y^2}} = 0$; б) $\sqrt{y^5} dx + (x^2 + 1)dy = 0$; в) $y' = (4 - x^2)y$; г) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^5}{3y^5}$;
 д) $y' - \frac{y}{x^2} = 4x e^{-\frac{1}{x}}$; е) $(3 - 2xy^2)dx + (x - 2x^2 y)dy = 0$.
18. а) $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}} + 4y dy = 0$; б) $(y^2 - 5)dx + 3x dy = 0$; в) $y' = (2y^2 + 6)\cos 3x$; г) $y' = \frac{y}{x} + 8\sin^2 \frac{y}{x}$;
 д) $y' + \frac{y}{x+1} = 6x$; е) $(xy^2 + 2x)dx + (x^2 y - y + 4)dy = 0$.
19. а) $8x^3 dx + \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 4}} = 0$; б) $\cos^2 y dx + 5x^2 dy = 0$; в) $y' = 4^{-y} \sin 2x$; г) $y' = \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 3} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' - \frac{4y}{x} = 2x^5$; е) $(2xy^3 - 2x + 1)dx + (3x^2 y^2 + 5y)dy = 0$.
20. а) $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} + 2\sqrt{y^3} dy = 0$; б) $(y^2 + 3)dx + e^x dy = 0$; в) $y' = 4x\sqrt{5 - y^2}$; г) $y' = \frac{y}{x} - \frac{2y^2}{x^2}$;
 д) $y' - \frac{2y}{x-1} = (x-1)^3$; е) $(2x + 3y^2 - 5)dx + (6xy + 2)dy = 0$.
21. а) $\sin 9x dx + 5^y dy = 0$; б) $(y^2 - 5)dx + \sqrt{x} dy = 0$; в) $y' = 3x^2 \sqrt{y^2 + 2}$; г) $y' = \frac{y}{x} + 2^{-\frac{y}{x}}$;
 д) $y' - \frac{y}{x+2} = 5x + 10$; е) $(2xy + x)dx + (x^2 - 2y + 3)dy = 0$.

22. а) $\frac{dx}{\sqrt{x}} + \cos 5y dy = 0$; б) $(y^2 + 8)dx + \sin^2 x dy = 0$; в) $y' = (x^3 + 4x)e^{-2y}$; г) $y' = 5 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$;
 д) $y' + \frac{y}{x+1} = x^2$; е) $(x + 3y - 4)dx + (3x - y^2 + 2)dy = 0$.
23. а) $10x^4 dx + \frac{dy}{\sqrt{3-y^2}} = 0$; б) $(y^2 + 9)dx + x^3 dy = 0$; в) $y' = \sin 5x \cos^2 y$; г) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{3y^2}$;
 д) $y' - \frac{y}{x} = x \cos x$; е) $(3xy^2 + 2)dx + (3x^2y + y)dy = 0$.
24. а) $\frac{dx}{\sqrt{x^5}} + 8y^3 dy = 0$; б) $2y dx + x^3 dy = 0$; в) $y' = (e^x + \sin 2x)\sqrt{1-y^2}$; г) $y' = \frac{y}{x} + 3\cos^2 \frac{y}{x}$;
 д) $y' - \frac{y}{x+4} = 3x$; е) $(x + 2y^2)dx + (4xy - 1)dy = 0$.
25. а) $2x^5 dx + \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}} = 0$; б) $(y^2 + 1)dx + x dy = 0$; в) $y' = 8\cos 4x \sin^2 y$; г) $y' = \frac{y}{x} - 2 \cdot 3^{\frac{y}{x}}$;
 д) $y' + \frac{2y}{x} = 4x$; е) $(4x + y^3 - 2)dx + (3xy^2 + 5)dy = 0$.
26. а) $\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3}} + 2y dy = 0$; б) $(y + 3)dx + 2^{-x} dy = 0$; в) $y' = \frac{2x+1}{y^2+2y}$; г) $y' = \frac{y}{x} - 3\sqrt{5 - \frac{y^2}{x^2}}$;
 д) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{4}{x^2}$; е) $(x^2 - y^2 + 1)dx + (3y - 2xy)dy = 0$.
27. а) $5^{x+1} dx + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$; б) $\sqrt{y} dx + (x^2 + 3)dy = 0$; в) $y' = (4 - x^2)y$; г) $y' = \frac{y}{x} - \frac{y^5}{4x^5}$;
 д) $y' - \frac{2y}{x} = 12x^4$; е) $(3x - 2xy^2)dx + (1 + y - 2x^2y)dy = 0$.
28. а) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 9y^2 dy = 0$; б) $(y^2 - 4)dx + 2x dy = 0$; в) $y' = y^2 \cos 5x$; г) $y' = \frac{y}{x} + 3 \cdot e^{\frac{2y}{x}}$;
 д) $y' + \frac{y}{x-5} = 2x$; е) $(2xy + 3x^2)dx + (x^2 - 4y + 2)dy = 0$.
29. а) $3x^2 dx + \frac{dy}{\sqrt[4]{y^3}} = 0$; б) $\sin^2 y dx + x dy = 0$; в) $y' = (x^3 + x)e^{-5y}$; г) $y' = 2\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 3} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' - \frac{3y}{x} = 2x^4 + x^2$; е) $(2xy^3 + x - 1)dx + (3x^2y^2 + 2y)dy = 0$.
30. а) $\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} + 2\sqrt[3]{y} dy = 0$; б) $(y + 1)dx + 3^{-x} dy = 0$; в) $y' = (x + 1)\sin^2 y$; г) $y' = \frac{y}{x} - \frac{5y^2}{x^2}$;
 д) $y' - \frac{2y}{x+4} = 2(x+4)^3$; е) $(x + 3y^2)dx + (6xy + y^2 - 2)dy = 0$.
31. а) $x dx + \frac{dy}{y+2} = 0$; б) $(y^2 - 8)dx + x dy = 0$; в) $y' = \frac{1-2x}{3y^2+2}$; г) $y' = \frac{y}{x} + 4 \cdot e^{\frac{3y}{x}}$;
 д) $y' + \frac{2y}{x} = 4x + 3$; е) $(5y - x^2 + 1)dx + (5x + 3y^2)dy = 0$.
32. а) $(x-1)dx + \frac{8dy}{y^5} = 0$; б) $(y^2 - 8)dx + x dy = 0$; в) $y' = 2\sqrt[3]{x}(y^2 + 5)$; г) $y' = \frac{x^4}{3y^4} + \frac{y}{x}$;
 д) $y' + \frac{3y}{x} = 5x + 8$; е) $(3x^2 - y + 2)dx + (1 - x + 2y)dy = 0$.

Завдання 2. Розв'язати задачу:

1. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; 1/2)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, дорівнює добутку ординати та квадрату абсциси точки дотику.
2. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; -1)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, втричі більший від ординати точки дотику.
3. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(-1; 3)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, вдвічі більший від кутового коефіцієнта радіуса-вектора точки дотику.
4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; 5)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої в довільній її точці $M(x; y)$, вдвічі більший від добутку координат точки дотику.
5. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(-2; 1/2)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, дорівнює кубу ординати точки дотику.
6. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; -1/3)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, дорівнює квадрату ординати точки дотику.
7. Знайти рівняння кривої, яка проходить через початок координат і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, на три одиниці більший від квадрату ординати точки дотику.
8. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; 7)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, на п'ять одиниць менший від ординати точки дотику.
9. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; -1/5)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, вдвічі більший від квадрату ординати точки дотику.
10. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; -1)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої в довільній її точці $M(x; y)$, на дві одиниці більший від ординати точки дотику.
11. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; 2)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, втричі менший від ординати точки дотику.
12. Знайти рівняння кривої, яка проходить через початок координат і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, на дев'ять одиниць більший від квадрату ординати точки дотику.
13. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; -1)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, у шість разів більший від ординати точки дотику.
14. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; 1)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, дорівнює добутку квадратів координат точки дотику.
15. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; 4)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, на дві одиниці менший від ординати точки дотику.
16. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(0; 5)$ і характеризується тим, що кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в довільній її точці $M(x; y)$, втричі більший від добутку координат точки дотику.

Завдання 3. Розв'язати диференціальні рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку.

1. а) $y'' = 8x^3 + 5^x$; б) $y''(x-2) = y'$; в) $y''(y+3) = 2(y')^2$.
2. а) $y'' = 9\sin 3x - 4x$, б) $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 3$; в) $y''(y^2 - 2) = 2y(y')^2$.
3. а) $y'' = 3e^{-x} + \cos \frac{x}{2}$; б) $y'' \operatorname{tg} x = y' - 2$; в) $y''y = 3y' + (y')^2$.
4. а) $y'' = 2x^4 + \cos 5x$; б) $y''x = y' + 9$; в) $y''(y-2) = 3(y')^2$.
5. а) $y'' = 3x^5 + 12e^{-3x}$; б) $y''(x-1) = 3y'$; в) $y''(y^2 + 4) = 2y(y')^2$.
6. а) $y'' = \frac{2}{x^3} + 4^x$; б) $(x^4 + 1)y'' = 8x^3 y'$; в) $y''(y-3) = 5(y')^2$.
7. а) $y'' = \sin \frac{x}{3} - 4x^2$; б) $y''x = y' - 5$; в) $y''y = 2y' + (y')^2$.
8. а) $y'' = 10e^{5x} - 2\sin 4x$; б) $y''(x-3) = 5y'$; в) $y''(y+4) = 2(y')^2$.
9. а) $y'' = \cos \frac{x}{4} + 6e^{3x}$, б) $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 1$; в) $y''(y^2 + 5) = 2y(y')^2$.
10. а) $y'' = 2x^6 + 8^x$; б) $(x^2 + 3)y'' = 4xy'$; в) $y''y = (y')^2 - 3y'$.
11. а) $y'' = 6\cos 2x - e^{\frac{x}{3}}$, б) $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 4$; в) $y''(y^2 - 3) = 2y(y')^2$.
12. а) $y'' = 2^{-x} + 8x^3$; б) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 5$; в) $y''y = 4y' + (y')^2$.
13. а) $y'' = 2\sqrt{x} + 3x$; б) $y''x = y' + 2$; в) $y''(y+5) = 4(y')^2$.
14. а) $y'' = 10\sin 5x + 2^x$; б) $(x^3 - 1)y'' = 6x^2 y'$; в) $y''(y^2 + 9) = 2y(y')^2$.
15. а) $y'' = 3^x - \frac{3}{x^4}$; б) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 3$; в) $y''(y-5) = 2(y')^2$.
16. а) $y'' = \sin \frac{x}{2} + 9e^{2x}$; б) $y''x = y' + 4$; в) $y''y = 5y' + (y')^2$.
17. а) $y'' = 6x - 2\cos 4x$; б) $y''(x+3) = 4y'$; в) $y''(y+1) = 3(y')^2$.
18. а) $y'' = 8\sqrt[3]{x} + 3e^{4x}$, б) $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 5$; в) $y''(y^2 - 9) = 2y(y')^2$.
19. а) $y'' = 10e^{-5x} + \cos \frac{x}{3}$; б) $y''x = y' - 2$; в) $y''y = (y')^2 - 4y'$.
20. а) $y'' = 9^x - \frac{8}{x^5}$; б) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 4$; в) $y''(y-1) = 5(y')^2$.
21. а) $y'' = 2x^3 + \cos 2x$; б) $y''x = y' + 1$; в) $y'' = 3(y-1)(y')^3$.
22. а) $y'' = x^5 + 6\sin 3x$; б) $(x^3 + 1)y'' = 6x^2 y'$; в) $y''(y^2 + 3) = 2y(y')^2$.
23. а) $y'' = 3x + e^{2x}$; б) $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 8$; в) $2\sqrt{y+1} y'' = y'$.
24. а) $y'' = 5^x - 4x^2$; б) $y''x = y' - 9$; в) $y''y = y' + (y')^2$.
25. а) $y'' = 10x^4 + 3^x$; б) $y''(x-5) = 2y'$; в) $y''(y-4) = 2(y')^2$.
26. а) $y'' = x + 4e^{-2x}$, б) $(x^2 - 3)y'' = 4xy'$; в) $2\sqrt{y-3} y'' = y'$.
27. а) $y'' = x + 9\cos 3x$; б) $(x^4 + 2)y'' = 4x^3 y'$; в) $y''y = 5y' + (y')^2$.
28. а) $y'' = 12x^7 - \sin 2x$; б) $y''(x+1) = 4y'$; в) $y'' = (y-2)(y')^3$.
29. а) $y'' = x^2 + 6e^{3x}$, б) $(x^2 + 1)y'' = 4xy'$; в) $y''(y+2) = (y')^2$.
30. а) $y'' = 8e^{-4x} - x$; б) $y''x = y' - 3$; в) $y''(y^2 - 1) = 2y(y')^2$.
31. а) $y'' = 2x^5 + 9^x$; б) $y''(x-5) = 2y'$; в) $2\sqrt{y-5} y'' = y'$.
32. а) $y'' = 7\sqrt[5]{x^2} - \cos 2x$; б) $y''x = y' + 8$; в) $y'' = (y-4)(y')^3$.

Завдання 4. Розв'язати лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами:

1. а) $y'' + 14y' + 49y = 0$; б) $y'' - 2y' + 3y = 0$; в) $y'' + 7y' + 12y = 0$.
2. а) $y'' - 3y' + y = 0$; б) $4y'' + 4y' + y = 0$; в) $y'' + y' + 7y = 0$.
3. а) $9y'' - 24y' + 16y = 0$; б) $y'' - y' - 6y = 0$; в) $y'' + 2y' + 4y = 0$.
4. а) $y'' - 5y' + 7y = 0$; б) $y'' + 12y' + 36y = 0$; в) $y'' + 8y' + 10y = 0$.
5. а) $y'' + 16y' + 64y = 0$; б) $y'' - 8y' - 9y = 0$; в) $y'' + 3y' + 3y = 0$.
6. а) $y'' - y' - 12y = 0$; б) $9y'' + 6y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 7y = 0$.
7. а) $49y'' + 14y' + y = 0$; б) $y'' - 6y' - 8y = 0$; в) $y'' + 5y' + 8y = 0$.
8. а) $y'' - 2y' + 6y = 0$; б) $4y'' - 12y' + 9y = 0$; в) $y'' - 3y' - 10y = 0$.
9. а) $25y'' + 10y' + y = 0$; б) $y'' + y' - 6y = 0$; в) $y'' - 2y' + 3y = 0$.
10. а) $y'' - 8y' + 10y = 0$; б) $36y'' + 12y' + y = 0$; в) $y'' + 3y' + 5y = 0$.
11. а) $y'' - 2y' + 4y = 0$; б) $4y'' - 4y' + y = 0$; в) $y'' + 7y' + 10y = 0$.
12. а) $4y'' - 20y' + 25y = 0$; б) $y'' - y' - 2y = 0$; в) $y'' + 4y' + 6y = 0$.
13. а) $y'' + y' - 12y = 0$; б) $y'' - 6y' + 10y = 0$; в) $y'' - 12y' + 36y = 0$.
14. а) $y'' + 8y' + 7y = 0$; б) $9y'' - 30y' + 25y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0$.
15. а) $y'' + 2y' - 15y = 0$; б) $25y'' - 10y' + y = 0$; в) $y'' - y' + 7y = 0$.
16. а) $y'' + 4y' + 3y = 0$; б) $4y'' + 20y' + 25y = 0$; в) $y'' + 6y' + 10y = 0$.
17. а) $9y'' + 30y' + 25y = 0$; б) $y'' - 9y' + 8y = 0$; в) $y'' + 4y' + 8y = 0$.
18. а) $y'' - 6y' + 25y = 0$; б) $y'' + 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 8y' + 15y = 0$.
19. а) $y'' + 2y' - 8y = 0$; б) $y'' - 16y' + 64y = 0$; в) $y'' - 4y' + 7y = 0$.
20. а) $y'' - y' + 2y = 0$; б) $y'' + 3y' - 4y = 0$; в) $9y'' + 24y' + 16y = 0$.
21. а) $y'' - 4y' + 10y = 0$; б) $25y'' + 30y' + 9y = 0$; в) $y'' + 5y' + 4y = 0$.
22. а) $49y'' - 28y' + 4y = 0$; б) $y'' + 8y' + 7y = 0$; в) $y'' - 2y' + 7y = 0$.
23. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $9y'' - 6y' + y = 0$; в) $y'' + 5y' + 9y = 0$.
24. а) $4y'' - 12y' + 9y = 0$; б) $y'' - 4y' + 7y = 0$; в) $y'' - 10y' + 25y = 0$.
25. а) $y'' + 2y' + 10y = 0$; б) $y'' - 14y' + 49y = 0$; в) $y'' - 6y' + 8y = 0$.
26. а) $y'' + 4y' + 11y = 0$; б) $64y'' - 16y' + y = 0$; в) $y'' + 4y' - 5y = 0$.
27. а) $y'' - 7y' + 10y = 0$; б) $9y'' + 6y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 11y = 0$.
28. а) $49y'' - 14y' + y = 0$; б) $y'' - 3y' + 5y = 0$; в) $y'' + 4y' - 12y = 0$.
29. а) $y'' + y' + y = 0$; б) $49y'' - 14y' + y = 0$; в) $y'' + 10y' + 21y = 0$.
30. а) $36y'' - 12y' + y = 0$; б) $y'' + 3y' + 6y = 0$; в) $y'' + y' - y = 0$.
31. а) $25y'' - 30y' + 9y = 0$; б) $y'' - 5y' + 8y = 0$; в) $y'' + 3y' + y = 0$.
32. а) $y'' + 4y' + 10y = 0$; б) $y'' - 4y' - 12y = 0$; в) $4y'' - 28y' + 49y = 0$.

Завдання 5. Розв'язати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами:

1. а) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^3}$; б) $y'' + 4y' + 20y = 2x^2 + 7$.

2. а) $y'' + 9y = \operatorname{ctg} 3x$; б) $y'' - 9y' + 18y = 4e^{3x}$.

3. а) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$; б) $y'' - 4y' + 4y = 3e^x \sin x$.

4. а) $y'' - 10y' + 25y = \frac{e^{5x}}{x^3}$; б) $y'' - 2y' + 2y = -5 \cos 2x$.

5. а) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2}$; б) $y'' - 5y' + 4y = -8e^x$.

6. а) $y'' + 25y = \frac{1}{\cos 5x}$; б) $y'' + 2y' - 3y = \cos x + 2 \sin x$.

7. а) $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$; б) $y'' - y' + 2y = 5x^2 + x$.

8. а) $y'' - 9y = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}$; б) $y'' + 6y' + 10y = -\sin 3x$.

9. а) $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$; б) $y'' + 2y' + 2y = 8 - 5x$

10. а) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2 + 3}$; б) $y'' + y' - 6y = \cos 3x$.

11. а) $y'' + 16y = \frac{1}{\cos 4x}$; б) $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$.

12. а) $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^4}$; б) $y'' + y' + y = 4e^x \cos x$.

13. а) $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 3}$; б) $y'' - 2y' + y = 7e^x$.

14. а) $y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{x^5}$; б) $y'' - 3y' - 4y = \sin 2x + 5 \cos 2x$.

15. а) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x-1}$; б) $y'' + 2y' + 6y = x + 2$.

16. а) $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$; б) $y'' + y' - 2y = xe^{-x}$.

17. а) $y'' - 12y' + 36y = \frac{e^{6x}}{x^2 + 1}$; б) $y'' + 3y' + 2y = 2 \cos 4x$.

18. а) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$; б) $y'' - 6y' + 8y = 9e^{2x}$.

19. а) $y'' + 10y' + 25y = \frac{e^{-5x}}{x^2 + 2}$; б) $y'' - 4y' - 5y = \sin x - 2 \cos x$.

20. а) $y'' + y = \operatorname{ctg} x$; б) $y'' - 7y' + 10y = x^2 + 3x - 1$.

21. а) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y'' - 4y' - 12y = \sin x + 5 \cos x$.

$$22. \text{ а) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+1}; \quad \text{б) } y'' + 5y' + 4y = 3\sin 2x.$$

$$23. \text{ а) } y'' + 25y = \frac{1}{\sin 5x}; \quad \text{б) } y'' - 6y' + 9y = 5e^x \cos x.$$

$$24. \text{ а) } y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}; \quad \text{б) } y'' - 2y' - 3y = x^2 + 5.$$

$$25. \text{ а) } y'' + y = \frac{1}{\sin x}; \quad \text{б) } y'' + 7y' + 10y = x^2 + 4x.$$

$$26. \text{ а) } y'' + 25y = \operatorname{ctg} 5x; \quad \text{б) } y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6.$$

$$27. \text{ а) } y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 4}; \quad \text{б) } y'' - y' - 2y = 3\sin x - \cos x.$$

$$28. \text{ а) } y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}; \quad \text{б) } y'' + 2y' + 10y = (2x + 3)e^x.$$

$$29. \text{ а) } y'' + 25y = \operatorname{tg} 5x; \quad \text{б) } y'' - 4y' + 3y = 2e^x \sin x.$$

$$30. \text{ а) } y'' - 16y = \frac{e^{4x}}{e^{4x} + 3}; \quad \text{б) } y'' - 2y' + 3y = 5e^{3x}.$$

$$31. \text{ а) } y'' + 9y = \operatorname{tg} 3x; \quad \text{б) } y'' - 2y' - 15y = 2x + 7.$$

$$32. \text{ а) } y'' + 8y' + 16y = \frac{e^{-4x}}{x^3}; \quad \text{б) } y'' - y' - 12y = x^2 + 3x.$$

Завдання 6. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє задані початкові умови:

$$1. \quad y'' + 9y = 5\cos 3x + \sin 3x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

$$2. \quad y'' - 2y' = 4\cos 2x - \sin 2x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3.$$

$$3. \quad y'' + 3y' = x^2 - 5x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 4.$$

$$4. \quad y'' - 4y = 3e^{2x}, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 7.$$

$$5. \quad 3y'' + y' = \cos x - 2\sin x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2.$$

$$6. \quad 25y'' - y = 4x^2 - x + 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5.$$

$$7. \quad y'' - 3y' = 8e^x \cos x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3.$$

$$8. \quad y'' + 2y' = 3 + x - x^2, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 4.$$

$$9. \quad y'' - y' = 4e^{-x} \sin x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2.$$

$$10. \quad y'' + 25y = -2xe^x, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1.$$

$$11. \quad 2y'' + y' = 5\cos x + \sin x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3.$$

$$12. \quad 4y'' - y = x^2 - x + 5, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

13. $y'' - 5y' = 2e^{-x} \cos x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$.
14. $9y'' + y = x - 1$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.
15. $y'' - 8y' = \cos 2x - \sin 2x$, $y(0) = 8$, $y'(0) = -5$.
16. $4y'' - y' = 2\sin 3x$, $y(0) = -3$, $y'(0) = -2$.
17. $9y'' - y = -3x^2 + x + 2$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.
18. $y'' - 16y = -4\cos 2x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$.
19. $16y'' - y = 5e^{-3x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$.
20. $3y'' - y' = 2\cos x + 5\sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$.
21. $y'' + 4y' = 5e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
22. $y'' + 16y = -8e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
23. $y'' + 5y' = x^2 + 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.
4. $y'' - 4y = 5\cos x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
25. $y'' + 4y = 2xe^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.
26. $y'' + 6y' = 3\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
27. $y'' - 25y = xe^{-3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
28. $y'' - 9y = \cos 2x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
29. $y'' - 4y = 5e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.
30. $y'' + 8y' = -2\sin 2x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$.
31. $4y'' + y = 3e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
32. $y'' + 7y' = 2\cos x + 3\sin x$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 0$.

Завдання 7. Розв'язати систему диференціальних рівнянь зведенням до диференціального другого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - nx_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = (n+3)x_1 + (2n+4)x_2. \end{cases}$$

(n – остання цифра порядкового номера студента в журналі групи).