Частина I. МЕХАНІКА

Лекція 1. КІНЕМАТИКА ПОСТУПАЛЬНОГО ТА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХІВ

- ***Кінематика поступального руху***
- ***Кінематика обертального руху***
- ***Рівномірний рух матеріальної точки по колу***

1.1. Кінематика поступального руху

Механіка займається вивченням руху тіл, встановленням законів руху. Найпростішою формою руху є механічний рух. ***Механічним рухом*** називають зміну з часом положення одного тіла відносно іншого та зміну відносного положення частин тіла.

Механіку, як правило, поділяють на кінематику, динаміку і статику. ***Кінематика*** вивчає рух тіла відносно інших тіл незалежно від причин (сил), які впливають на цей рух. ***Динаміка*** встановлює зв'язки між рухом тіла і силами, які на нього діють. ***Статика*** вивчає умови рівноваги тіл. Закони статики є окремим випадком законів динаміки.

Основною задачею кінематики є встановлення рівняння руху, за допомогою якого можна знайти положення тіла і його швидкість (імпульс) у будь-який момент часу, коли відомо його положення і швидкість у початковий момент часу.

Якщо всі точки тіла рухаються за однаковим законом, то тіло можна замінити матеріальною точкою.

У декартовій системі координат відносне положення матеріальної точки у просторі можна задати ортогональними її проекціями (x, y, z) на осі координат або радіусом-вектором $\vec{r}$, проведеним від початку координат (O) до місця знаходження точки A (рис. 1.1).

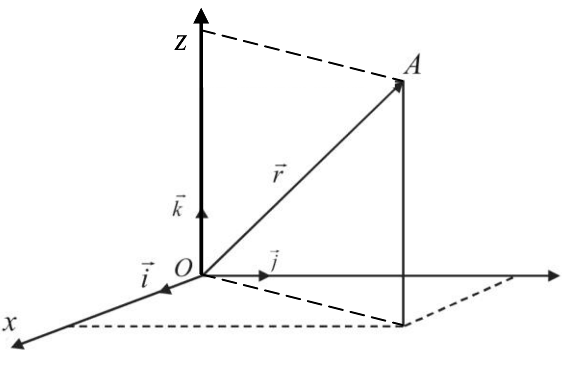


Рис. 1.1

Оскільки декартові координати (x, y, z) точки чисельно збігаються з проекціями вектора $\vec{r}$ на осі координат, то має місце розклад:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}\,, \tag{1.1}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори (орти) вздовж додатних напрямів осей *Ox*, *Oy*, *Oz* відповідно.

При русі матеріальної точки її координати з часом змінюються. У загальному випадку рух точки визначається скалярними рівняннями:

$$x = x\,(t), \quad y = y\,(t), \quad z = z(t),$$

$$\vartheta_x = \vartheta_x(t), \qquad \vartheta_y = \vartheta_y(t), \qquad \vartheta_z = \vartheta_z(t), \tag{1.2}$$

які є еквівалентними векторним рівнянням:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t), \qquad \vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}(t). \tag{1.3}$$

Рівняння (1.2), а також (1.3), називають ***кінематичними рівняннями руху матеріальної точки***.

Виключаючи час у рівняннях (1.2) і (1.3) можна одержати рівняння траєкторії матеріальної точки. ***Траєкторія*** – це лінія, яку описує точка під час руху відносно обраної системи відліку. У залежності від форми траєкторії розрізняють прямолінійний і криволінійний рухи точки.

Розглянемо рух матеріальної точки вздовж довільної траєкторії (рис. 1.2).

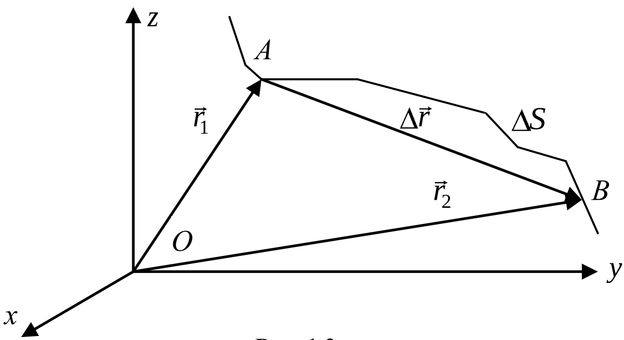


Рис. 1.2

Відлік часу розпочнемо з моменту, коли точка знаходилась у положенні *A*. Довжина ділянки траєкторії *AB* називається ***довжиною шляху***, яка є скалярною функцією часу $\Delta S = \Delta S\,(t)$.

Вектор, спрямований від початкового положення точки A до певного її кінцевого положення B на траєкторії, називають ***переміщенням***. Переміщення $\Delta\vec{r} = \vec{AB}$ можна розглядати як векторну різницю радіусів-векторів $\vec{r}_2$ і $\vec{r}_1$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2\ (t) - \vec{r}_1\ (t). \qquad (1.4)$$

Для характеристики руху матеріальної точки вводиться векторна величина – ***швидкість***.

Вектором середньої швидкості точки в інтервалі часу від t до $t + \Delta t$ називають відношення вектора переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt, за який здійснено це переміщення:

$$\vec{\vartheta}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.5)$$

Вектор середньої швидкості $\vec{\vartheta}_c$ спрямований так само, як і вектор переміщення $\Delta\vec{r}$. При зменшенні часу Δt середня швидкість прямує до граничного значення, яке називають ***миттєвою швидкістю*** $\vec{\vartheta}$:

$$\vec{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.6)$$

Отже, миттєва швидкість з позицій математики – це похідна переміщення за часом.

При зменшенні часу Δt шлях ΔS все більше наближається до модуля вектора переміщення $|\Delta\vec{r}|$, тому модуль миттєвої швидкості дорівнює:

$$\vartheta = |\vec{\vartheta}| = |\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}| = \lim_{\Delta t \to 0} |\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Таким чином, модуль миттєвої швидкості дорівнює першій похідній шляху за часом:

$$\vartheta = \frac{dS}{dt}. \qquad (1.7)$$

Якщо вираз $d\vec{r} = \vec{\vartheta} \cdot dt$ проінтегрувати за часом, то знайдемо вектор переміщення:

$$\vec{r} = \int \vec{\vartheta} \cdot dt. \qquad (1.8)$$

Вираз (1.8) є ***першим рівнянням кінематики***.

У випадку рівномірного руху напрям і числове значення миттєвої швидкості під час руху не змінюється. Це означає, що матеріальна точка рухається по прямій траєкторії, яку можна сумістити з віссю *Ox*. Тоді згідно з (1.7) маємо: $\vartheta = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{dx}{dt}$.

Крім того, при $\vec{\vartheta} = \text{const}$ модуль вектора переміщення дорівнює довжині шляху $|\vec{r}| = S$. Тоді, інтегруючи рівняння (1.8), враховуючи, що $|\vec{r}| = S$, одержуємо:

$$S = \vartheta \cdot t + C,$$

де C – постійна інтегрування, яку можна визначити з початкових умов. У момент часу $t_0 = 0$, маємо: $\underset{t=0}{S} = C = S_0$.

Тоді:

$$S = S_0 + \vartheta \cdot t, \text{ або } x = x_0 + \vartheta \cdot t. \qquad (1.9)$$

Вираз (1.9) називають ***рівнянням рівномірного руху***.

У випадку нерівномірного руху швидкість може змінюватись як за величиною, так і за напрямом. Для характеристики цієї зміни вводять поняття прискорення. Розрізняють середнє і миттєве прискорення.

Середнім прискоренням точки в інтервалі часу від t до $t + \Delta t$ називають векторну величину, що дорівнює відношенню зміни вектора швидкості $\Delta\vec{\vartheta}$ до інтервалу часу Δt, за який відбулася ця зміна:

$$\vec{a}_c = \frac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t}. \qquad (1.10)$$

Напрям вектора середнього прискорення $\vec{a}_c$ збігається з напрямом вектора зміни швидкості $\Delta\vec{\vartheta}$.

Миттєве прискорення точки визначається граничним переходом, коли $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a}(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}. \qquad (1.11)$$

Якщо вираз $d\vec{\vartheta} = \vec{a} \cdot dt$ проінтегрувати за часом, то одержимо ***друге рівняння кінематики***:

$$\vec{\vartheta} = \int \vec{\alpha} \cdot dt. \qquad (1.12)$$

Якщо напрям та величина прискорення рухомої точки залишаються постійними, тобто $\vec{a} = \mathrm{const}$, то її рух є прямолінійним і рівнозмінним. Для даного виду руху рівняння (1.12) можна записати у такій формі: $\vartheta = \int a \cdot dt$. Із цього рівняння одержуємо:

$$\vartheta = \int a \cdot dt = a \int dt = a \cdot t + C,$$

де C – постійна інтегрування, яку визначаємо з початкових умов. У момент часу $t_0 = 0$, $C = \vartheta_0$, тобто постійна інтегрування є швидкість точки у початковий момент часу.

Тоді швидкість рівнозмінного руху описується таким рівнянням:

$$\vartheta = \vartheta_0 + a \cdot t. \tag{1.13}$$

Оскільки $\vartheta = \frac{dS}{dt} = \frac{dx}{dt}$, то $\frac{dS}{dt} = \vartheta_0 + a \cdot t$,

або

$$dS = \vartheta_0 dt + a \cdot t \cdot dt. \tag{1.14}$$

Інтегруючи вираз (1.14), одержуємо:

$$S = \int \vartheta_0 \cdot dt + \int a \cdot t \cdot dt = \vartheta_0 \int dt + a \int t \cdot dt = \vartheta_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} + C,$$

де C – постійна інтегрування, яку знаходимо з початкових умов. У момент часу $t_0 = 0$, маємо $C = S_0$, тобто, постійна інтегрування є шляхом, який пройшла точка до початку відліку часу.

Тоді рівняння рівнозмінного руху матиме вигляд:

$$S = S_0 + \vartheta_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}. \tag{1.15}$$

Якщо вздовж напряму руху спрямувати вісь Ox, то рівняння швидкості і шляху для рівнозмінного руху точки можна записати так:

$$\vartheta_x = \vartheta_0 + a \cdot t;$$

$$x = x_0 + \vartheta_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Таким чином, рівняннями прямолінійного рівномірного і рівнозмінного рухів є вирази (1.9), (1.13), (1.15).

1.2. Кінематика обертального руху

Розглянемо тіло, яке обертається навколо нерухомої осі. Кожна точка цього тіла рухається по колу певного радіуса з відповідними лінійною швидкістю і лінійним прискоренням. Щоб описати рух тіла, яке обертається, необхідно описати рух кожної точки цього тіла. Такий підхід, звичайно, є незручним. Тому для вивчення обертального руху вводять нові величини.

Розглянемо матеріальну точку, що рухається по колу радіусом R (рис. 1.3).

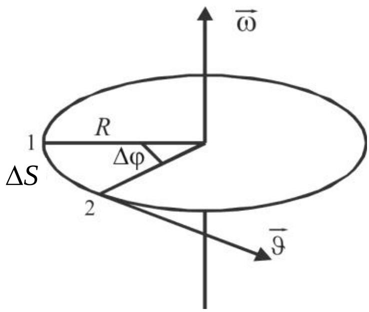


Рис. 1.3

Нехай в інтервалі часу від t до $t + \Delta t$, точка перемістилася з положення 1 в положення 2. При цьому радіус-вектор описав кут $\Delta\varphi$. ***Кутовою середньою швидкістю за проміжок часу*** від t до $t + \Delta t$ називають відношення кута повороту $\Delta\varphi$ радіуса-вектора до величини проміжку Δt:

$$\omega_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{1.16}$$

Миттєвою кутовою швидкістю називають величину

$$\omega = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.17}$$

Оскільки $\Delta\varphi$ не є вектором, то середня кутова швидкість також не є векторною величина. Для спрощення подальших математичних викладок і повної аналогії з кінематичними рівняннями поступального руху будемо вважати, що кутова швидкість є вектором, який спрямований вздовж осі обертання, і його напрям визначається за правилом правого гвинта (див. рис. 1.3). Вектори, напрями яких пов'язуються з напрямом обертання, називають ***аксіальними***.

Як видно з рис. 1.3, $\Delta S = R \cdot \Delta\varphi$. Тоді лінійна швидкість точки буде дорівнювати:

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \omega,$$

або

$$\vartheta = \omega \cdot R.$$

У векторній формі вираз для лінійної швидкості можна записати як векторний добуток:

$$\vec{\vartheta} = [\vec{\omega} \cdot \vec{R}].$$

Якщо $\vec{\omega} = \mathrm{const}$, то рух називають ***рівномірним обертальним*** і його можна характеризувати періодом обертання T – часом одного повного оберту. Якщо $\Delta t = T$, то кут повороту $\Delta\varphi = 2\pi$ і $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, звідки $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Число повних обертів, які здійснює точка при рівномірному обертанні за одиницю часу, називають ***частотою обертання***:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \text{ звідки } \omega = 2 \cdot \pi \cdot n.$$

З рівняння (1.17) маємо $d\varphi = \omega \cdot dt$, звідки

$$\varphi = \int \omega \cdot dt \tag{1.18}$$

Інтегруючи вираз (1.18) одержуємо:

$$\varphi = \omega \int dt = \omega \cdot t + C,$$

де C – постійна інтегрування, яку знаходимо з початкових умов. При $t_0 = 0$ $C = \varphi_0$. Тобто, постійна інтегрування є кут φ_0, який описав радіус-вектор до початку відліку часу. Тоді рівняння рівномірного обертального руху буде наступним:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t \,. \tag{1.19}$$

Якщо кутова швидкість з часом змінюється, то обертальний рух тіла є нерівномірним. Для описання такого руху вводять поняття кутового прискорення. ***Середнім кутовим прискоренням*** називають векторну величину, що дорівнює зміні вектора кутової швидкості за одиницю часу:

$$\vec{\beta}_c = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \,. \tag{1.20}$$

Миттєве прискорення визначається граничним переходом ($\Delta t \to 0$) і дорівнює першій похідній кутової швидкості за часом:

$$\vec{\beta} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \,. \tag{1.21}$$

При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектор кутового прискорення спрямований вздовж осі обертання в сторону вектора елементарного приросту кутової швидкості (рис. 1.4).

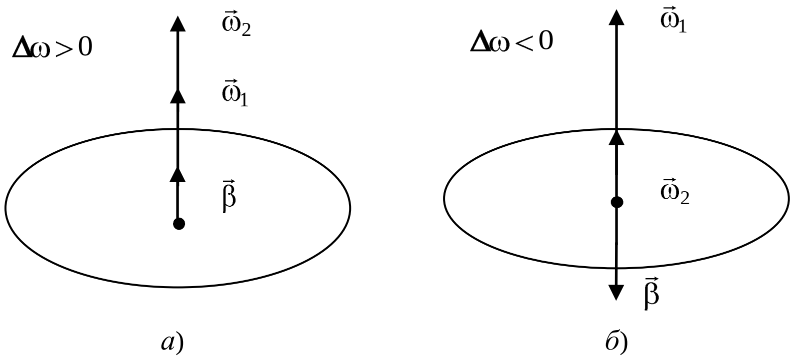


Рис. 1.4

При прискореному русі, коли $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 > 0$, вектор кутового прискорення збігається з вектором кутової швидкості (рис. 1.4, *а*), а при сповільненому русі, коли $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1 < 0$ – він має напрям, протилежний до напряму вектора кутової швидкості (рис. 1.4, *б*).

Якщо вектор кутового прискорення не змінюється з часом, тобто $\vec{\beta} = \mathrm{const},$ то рух називається ***рівнозмінним обертальним***. Тоді з рівняння (1.21) маємо: $d\vec{\omega} = \vec{\beta} \cdot dt$. Інтегруючи останній вираз за часом, одержуємо:

$$\vec{\omega} = \int \vec{\beta} \cdot dt, \tag{1.22}$$

оскільки $\vec{\beta} = \mathrm{const}$, то

$$\omega = \beta \int dt = \beta \cdot t + C,$$

де C – постійна інтегрування, яку знаходимо з початкових умов. У початковий момент часу $t_0 = 0$, $C = \omega_0$, тобто, постійна інтегрування є початковою кутовою швидкістю в момент часу t_0. Тоді:

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t. \tag{1.23}$$

Оскільки $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, то $d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \beta \cdot t \cdot dt$, звідки

$$\varphi = \int \omega_0 \cdot dt + \int \beta \cdot t \cdot dt = \omega_0 \cdot t + \frac{\beta \cdot t^2}{2} + C,$$

де C – постійна інтегрування, яку знаходимо з початкових умов. При $t_0 = 0$, $C = \varphi_0$, тобто, постійна інтегрування є кутом, який описав радіус-вектор до початку відліку часу. Тому рівняння рівнозмінного обертального руху буде таким:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\beta \cdot t^2}{2}. \tag{1.24}$$

Таким чином, рівняннями кінематики рівномірного обертального і рівнозмінного обертального рухів є вирази: (1.19), (1.23), (1.24). У загальному випадку необхідно розв’язувати рівняння (1.18), (1.22), розв’язок яких залежить від аналітичного вигляду функцій $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ і $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t)$.

1.3. Рівномірний рух матеріальної точки по колу

При русі тіла по колу величина швидкості є постійною за величиною ($\left|\vec{\vartheta}_1\right| = \left|\vec{\vartheta}_2\right| = \vartheta$), а напрям її неперервно змінюється (рис. 1.5). Оскільки прискорення визначається як швидкість зміни швидкості, то зміна напряму швидкості впливає на прискорення так, як і зміна величини швидкості. Таким чином, тіло, яке здійснює рівномірний обертальний рух, прискорюється. Визначимо кількісно це прискорення.

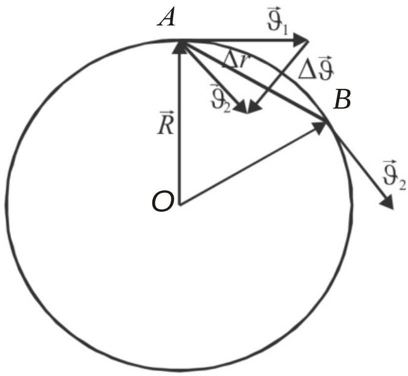


Рис. 1.5

На рис. 1.5 вектори $\vec{\vartheta}_1$, $\vec{\vartheta}_2$ і $\Delta\vec{\vartheta}$ утворюють трикутник, подібний трикутнику *OAB*. З подібності рівносторонніх трикутників випливає:

$$\frac{\Delta r}{R} = \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta}. \tag{1.25}$$

Поділимо праву і ліву частини рівності (1.25) на час Δt, за який точка переміститься з положення *A* в положення *B*. Тоді одержуємо:

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{\vartheta}\cdot\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}. \tag{1.26}$$

При переході до границі (1.26), коли $\Delta t \to 0$, маємо:

$$\frac{1}{R}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{\vartheta}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \quad \text{або} \quad \frac{1}{R}\cdot\vartheta = \frac{1}{\vartheta}\cdot a.$$

Оскільки вектор прискорення $\vec{a}$ збігається з напрямом зміни вектора швидкості $\Delta\vec{\vartheta}$, який спрямований до центра кола і є перпендикулярним до вектора швидкості $\vec{\vartheta}$, то це прискорення називають ***нормальним*** або ***доцентровим***. Отже, при рівномірному русі точки по колу виникає прискорення за рахунок зміни швидкості за напрямом, яке перпендикулярне до напряму швидкості і чисельно визначається за формулою:

$$\vec{a}_n = \frac{\vartheta^2}{R} = \omega^2 \cdot R. \qquad (1.27)$$

Якщо рух точки по колу нерівномірний, то для характеристики зміни швидкості за величиною використовують тангенціальне прискорення, спрямоване по дотичній, яке дорівнює першій похідній за часом від величини швидкості, тобто:

$$a_\tau = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d(\omega\cdot R)}{\Delta t} = R\cdot\frac{d\omega}{dt} = R\cdot\beta. \qquad (1.28)$$

При нерівномірному русі по колу повне прискорення є геометричною сумою тангенціальної і нормальної його складових (рис. 1.6): $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Оскільки вектори $\vec{a}_n$ і $\vec{a}_\tau$ взаємно перпендикулярні, то модуль повного прискорення визначається так:

$$a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_\tau^2}. \qquad (1.29)$$

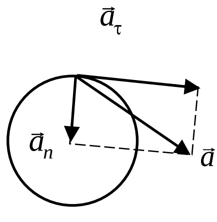


Рис. 1.6

Враховуючи, що $a_n = \omega^2 \cdot R$ і $a_\tau = \beta \cdot R$, рівність (1.29) можна представити і у такій формі:

$$a = \sqrt{(\omega^2\cdot R)^2 + (\beta\cdot R)^2} = R\cdot\sqrt{\omega^4 + \beta^2}. \qquad (1.30)$$

На основі викладеного можна скласти порівняльну таблицю основних величин і рівнянь, які визначають поступальний і обертальний рухи (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Основні величини і рівняння			
поступального руху		обертального руху	
Переміщення	$\vec{r}$	Кут повороту радіус-вектора	$\Delta\varphi$
Пройдений шлях	ΔS		
Лінійна швидкість	$\vec{\vartheta}_c = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$	Кутова швидкість	$\omega_c = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$
Лінійне прискорення	$\vec{\alpha}_c = \dfrac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t}$	Кутове прискорення	$\vec{\beta}_c = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$
Рівномірний прямолінійний рух	$\vec{\vartheta} = \text{const}$, $\vec{a} = 0$, $S = S_0 + \vartheta \cdot t$	Рівномірний обертальний рух	$\vec{\omega} = \text{const}$, $\vec{\beta} = 0$, $\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$
Рівнозмінний прямолінійний рух	$\vec{a} = \text{const}$, $S = \int \vartheta \cdot dt$, $\vartheta = \int a \cdot dt$, $\vartheta = \vartheta_0 + a \cdot t$, $S = S_0 + \vartheta \cdot t + \dfrac{a \cdot t^2}{2}$	Рівнозмінний обертальний рух	$\vec{\beta} = \text{const}$, $\varphi = \int \omega \cdot dt$, $\omega = \int \beta \cdot dt$, $\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$, $\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t + \dfrac{\beta \cdot t^2}{2}$

Зв’язок між лінійними і кутовими величинами:

$$S = \varphi \cdot R; \qquad \vartheta = \omega \cdot R;$$

$$a_\tau = \beta \cdot R; \qquad a_n = \frac{\vartheta^2}{R} = \omega^2 \cdot R; \qquad a = R \cdot \sqrt{\omega^4 + \beta^2}$$

Лекція 2. ДИНАМІКА ПОСТУПАЛЬНОГО ТА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХІВ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

- ***Динаміка поступального руху***
- ***Закон збереження імпульсу***
- ***Динаміка обертального руху. Другий закон Ньютона для обертального руху***
- ***Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу***

2.1. Динаміка поступального руху

Динаміка – розділ механіки, що вивчає закони руху разом з причинами, які його зумовлюють. В основі динаміки лежать три закони Ньютона, які сформульовані на основі практичних дослідів і експериментів.

Перший закон Ньютона: *будь-яке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки дія з боку інших тіл не виведе його з цього стану.*

Властивість тіл (матеріальних точок) зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху називають ***інертністю***. Тому перший закон Ньютона ще називають ***законом інерції***.

Механічний рух є відносним, його характер залежить від системи відліку. Перший закон Ньютона виконується тільки в інерційних системах відліку. ***Інерційною системою відліку*** є така система, яка перебуває в стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно відносно іншої інерційної системи відліку. Перший закон Ньютона стверджує існування інерційних систем відліку.

Із дослідів відомо, що при однакових впливах різні тіла неоднаково змінюють свою швидкість, тобто, набувають різні прискорення. Прискорення залежить не тільки від величини впливу, але й від властивостей самого тіла (від його маси).

Щоб описати дію на тіло (матеріальну точку) інших тіл вводять поняття сили. У будь-який момент часу сила характеризується числовим значенням, напрямом у просторі і точкою прикладання. ***Сила*** – векторна величина, яка є мірою механічного впливу на тіло (матеріальну точку) з боку інших тіл або полів, у результаті чого тіло набуває прискорення або змінює свою форму і розміри. Якщо на тіло (матеріальну точку) діє багато зовнішніх тіл, то результуюча сила знаходиться за правилом векторного додавання:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n. \qquad (2.1)$$

Другий закон Ньютона – основний закон динаміки поступального руху – дає відповідь на запитання, як змінюється механічний рух матеріальної точки (тіла) під дією прикладених до неї сил.

Прискорення, якого набуває тіло, прямо пропорційне результуючій силі, збігається з нею за напрямом і обернено пропорційне масі тіла:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}; \quad \text{або} \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{\vartheta}}{dt}. \tag{2.2}$$

Враховуючи, що маса тіла в класичній механіці є величина постійна, у виразі (2.2) її можна внести під знак похідної:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{\vartheta}). \tag{2.3}$$

Векторну величину $\vec{K} = m \cdot \vec{\vartheta}$, що чисельно дорівнює добутку маси тіла на її швидкість і має напрям останньої, називають ***імпульсом*** (кількістю руху) цього тіла. Тоді на підставі виразу (2.3) рівняння руху тіла (матеріальної точки) можна записати так:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{K}}{dt}. \tag{2.4}$$

Вираз (2.4) – ***загальна формула другого закону Ньютона***: *швидкість зміни імпульсу тіла* (*матеріальної точки*) *дорівнює діючій на нього силі.*

Рівняння (2.4) можна записати ще й так:

$$d\vec{K} = \vec{F} \cdot dt, \tag{2.5}$$

де $\vec{F} \cdot dt$ – імпульс діючої сили.

Тоді другий закон Ньютона можна сформулювати ще й так: *зміна імпульсу матеріальної точки* (*тіла*) *за час* dt *дорівнює імпульсу сили, діючої протягом цього часу.*

У механіці велике значення має ***принцип незалежності дії сил***: якщо на матеріальну точку (тіло) діють одночасно декілька сил, то кожна із цих сил зумовлює таке прискорення матеріальної точки (тіла) на підставі другого закону Ньютона, ніби інші сили на неї не діють. Коли на матеріальну точку (тіло) діють одночасно декілька сил, то, згідно принципу незалежності дії сил, під $\vec{F}$ у другому законі Ньютона розуміють результуючу силу.

Взаємодія між матеріальними точками (тілами) визначається ***третім законом Ньютона***: *будь-яка дія матеріальних точок* (*тіл*) *одна на одну носить характер взаємодії; сили, з якими діють одна на одну матеріальні точки* (*тіла*), *завжди рівні за модулем, спрямовані вздовж однієї прямої у протилежних напрямах*:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (2.6)$$

2.2. Закон збереження імпульсу

Із другого закону Ньютона випливає закон збереження імпульсу. Для його виведення розглянемо окремі поняття. Сукупність матеріальних точок (тіл), які розглядаються як єдине ціле, називають ***механічною системою***. Сили взаємодії між матеріальними точками (тілами) механічної системи називають ***внутрішніми***. Сили, з якими на матеріальні точки (тіла) системи діють зовнішні тіла, називають ***зовнішніми***. Механічна система, на яку не діють зовнішні сили або їх сума дорівнює нулю, називають ***замкненою***. Для такої системи:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iзовн} = 0.$$

Якщо ми маємо механічну систему, яка складається із n тіл (рис. 2.1), то на підставі третього закону Ньютона, сили, які діють між цими тілами, будуть рівні і протилежно спрямовані, тобто геометрична сума внутрішніх сил також дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iвнутр.} = 0.$$

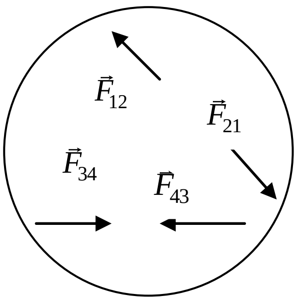


Рис. 2.1

Якщо результуюча внутрішніх і зовнішніх сил механічної системи дорівнює нулю, то на підставі другого закону Ньютона можна записати:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F} = \vec{F}_{зовн.} + \vec{F}_{внутр.} = 0\,, \tag{2.7}$$

звідки

$$d\vec{K} = 0\,,\ \Rightarrow\ \vec{K} = \text{const}\,. \tag{2.8}$$

Вираз (2.8) є ***законом збереження імпульсу***: імпульс замкненої системи тіл залишається незмінним у часі. Тобто,

$$m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + m_2 \cdot \vec{\vartheta}_2 + m_3 \cdot \vec{\vartheta}_3 + ... + m_n \cdot \vec{\vartheta}_n = \text{const.} \tag{2.9}$$

Прикладами збереження імпульсу є реактивний рух, відкочування гармати тощо. Варто відзначити, що ці явища відбуваються у незамкненій системі – у гравітаційному полі Землі і $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\,зовн.} \neq 0$. Однак закон збереження імпульсу може наближено виконуватися у незамкненій системі. Так, використовуючи другий закон Ньютона (2.5), можна записати: $d\vec{K} = \vec{F} \cdot dt = 0$. Ця рівність виконується у випадках коли $F \approx 0$, тобто у слабких силових полях і при швидкоплинних процесах, коли $dt \approx 0$.

Закон збереження імпульсу виконується і для замкнених систем мікрочастинок (вони підпорядковані законам квантової механіки). Цей закон носить універсальний характер, тобто закон збереження імпульсу є ***фундаментальним законом природи***.

2.3. Динаміка обертального руху. Другий закон Ньютона для обертального руху

Запровадимо деякі поняття, необхідні в теорії обертального руху. ***Моментом сили*** відносно нерухомої точки O називають фізичну величину, що визначається векторним добутком радіуса-вектора $\vec{R}$, проведеного із точки O у точку A прикладання сили, на силу $\vec{F}$ (рис. 2.2):

$$\vec{M} = [\vec{R} \cdot \vec{F}], \tag{2.10}$$

де $\vec{M}$ – аксіальний вектор (псевдовектор), його напрям збігається з напрямом поступального руху правого гвинта при його обертанні від $\vec{R}$ до $\vec{F}$.

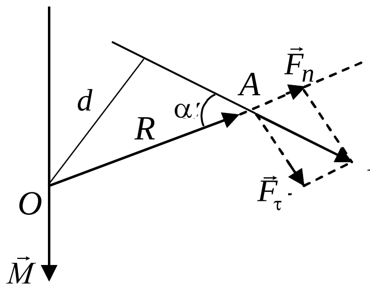


Рис. 2.2

Модуль моменту сили дорівнює:

$$\left|\vec{M}\right| = R \cdot F \cdot \sin\alpha .$$

З рисунка 2.2 випливає, що $R \cdot \sin\alpha = d$ – найкоротша відстань між лінією дії сили і точкою O. Цю відстань називають ***плечем сили***. З іншого боку, тангенціальна складова сили дорівнює $F_\tau = F \cdot \sin\alpha$, тоді модуль моменту сили можна представити так:

$$M = R \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot d = R \cdot F_\tau . \qquad (2.11)$$

Таким чином, момент сили чисельно дорівнює добутку сили на плече або добутку радіуса-вектора на тангенціальну складову сили.

Для вивчення обертального руху матеріальної точки використаємо другий закон Ньютона для лінійних величин $\vec{F}_\tau = m \cdot \vec{a}_\tau$ і формулу, що пов'язує кутове прискорення з тангенціальним (лінійним) прискоренням $\vec{a}_\tau = R \cdot \vec{\beta}$. Нехай на тіло масою m діє сила $\vec{F}$ (рис. 2.3), яка зумовлює рух по колу постійного радіуса $R = \text{const}$.

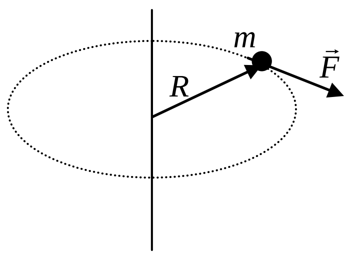


Рис. 2.3

У результаті множення правої і лівої частини рівняння другого закону Ньютона на R, одержуємо:

$$F_\tau \cdot R = m \cdot a_\tau \cdot R = m \cdot R^2 \cdot \beta. \tag{2.12}$$

Для матеріальної точки добуток $m \cdot R^2$ є її мірою інертності при обертальному русі. Цей добуток називають ***моментом інерції матеріальної точки*** і позначають цю фізичну величину літерою J. Тоді, враховуючи рівняння (2.11), рівняння (2.12) у векторній формі можна записати так:

$$\vec{M} = m \cdot R^2 \cdot \vec{\beta} = J \cdot \vec{\beta}. \tag{2.13}$$

Рівняння (2.13) є модифікованим рівнянням другого закону Ньютона для обертального руху. Його ще називають ***основним законом динаміки обертального руху***. У цьому рівнянні роль сили відіграє момент сили, прискорення – кутове прискорення, маси – момент інерції. Рівняння (2.13) має місце для випадку обертання абсолютно Твердого тіла відносно нерухомої осі.

Абсолютно твердим називають тіло, відстань між будь-якими точками в якому залишається завжди незмінною. Обертальний рух такого тіла можна вивчати як суму обертальних рухів його складових матеріальних точок, розміщених на різних відстанях від осі обертання. Для кожної матеріальної точки справедливим є рівняння (2.13), тобто:

$$\vec{M}_i = m_i \cdot R_i^2 \cdot \vec{\beta}. \tag{2.14}$$

Сума моментів всіх сил $\sum\limits_{n=1}^{n} \vec{M}_i$ складає головний момент сил, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{M}. \tag{2.15}$$

Оскільки кутове прискорення всіх матеріальних точок абсолютно твердого тіла (тіла, яке не деформується при русі) є однаковим, то рівняння (2.14) для всіх матеріальних точок можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{\beta} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot R_i^2 \text{ або } \vec{M} = \vec{\beta} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot R_i^2. \tag{2.16}$$

Рівняння (2.16) буде виконуватися точно при переході до границі, коли $n \to \infty$, тобто:

$$\vec{M} = \vec{\beta} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot R_i^2 . \qquad (2.17)$$

Величина $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot R_i^2 = m_1 \cdot R_1^2 + m_2 \cdot R_2^2 + \ \dots\ + m_n \cdot R_n^2$ у виразі (2.17) дорівнює сумі добутків маси кожної матеріальної точки тіла на квадрат відстані від точки до осі обертання. Цю величину називають ***моментом інерції тіла***, тобто:

$$J = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 . \qquad (2.18)$$

Тоді рівняння (2.17) з урахуванням виразу (2.18) можна записати так:

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta} . \qquad (2.19)$$

Рівняння (2.19) називають ***другим законом Ньютона для обертального руху абсолютно твердого тіла***, або ***основним законом динаміки обертального руху***. У цьому рівнянні момент інерції тіла при обертальному русі виконує таку саму роль, що й маса тіла при поступальному русі.

Варто відзначити, що момент інерції залежить не тільки від маси тіла, але й від того, як ця маса розподілена. Більшість тіл можна розглядати як неперервний розподіл маси. При цьому вираз для моменту інерції тіла (2.18) можна записати так:

$$J = \int R^2 \cdot dm , \qquad (2.20)$$

де dm – маса будь-якої матеріальної точки тіла, а R – її відстань вздовж перпендикуляра від осі обертання. Інтегрування проводиться по всьому об’єму тіла.

Знайти момент інерції за (2.20) можливо лише тоді, коли інтеграл можна обчислити. У всіх інших випадках момент інерції визначається експериментально. Інтеграл у (2.20) можна обчислити тільки тоді, коли тіло є симетричним відносно осі обертання. Для прикладу розглянемо таку задачу. Нехай тіло є лінійним стрижнем (рис. 2.4). Вісь обертання OO стрижня проходить через його середину.

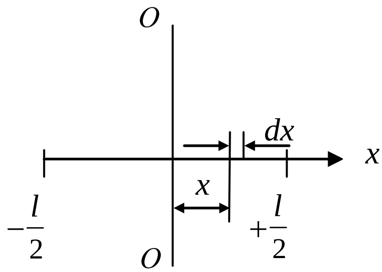


Рис. 2.4

Знайдемо момент інерції стрижня, використовуючи формулу (2.20). Величину dm виразимо через елемент довжини стрижня dx, який знаходиться на відстані x від його середини, і через густину речовини ρ стрижня:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dx.$$

Тепер обчислюємо момент інерції стрижня, який обертається навколо осі, що проходить через його середину:

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \cdot \rho \cdot dx = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \cdot dx = \frac{m \cdot l^2}{12}.$$

Момент інерції стрижня, вісь обертання якого проходить через один із кінців стрижня, можна обчислити аналогічно і одержати такий результат: $J = \dfrac{m \cdot l^2}{3}$.

Тепер покажемо, що момент інерції однорідної кулі радіусом R і масою m дорівнює:

$$J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2.$$

Представляємо елементарну масу dm кулі через густину речовини ρ і елементарний об'єм dV. Для цього розбиваємо кулю на нескінченно малі диски висотою dy. Кожен тонкий диск має радіус $r = \sqrt{R^2 - y^2}$ (рис. 2.5) і його об'єм дорівнює: $dV = \pi \cdot r^2 dy$. Тоді:

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot \pi (R^2 - y^2) \cdot dy$$

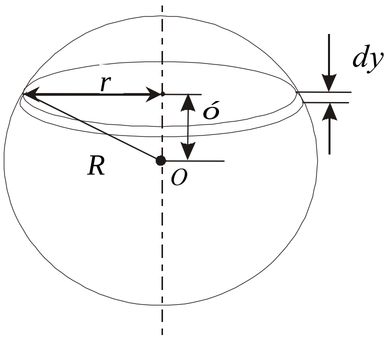


Рис. 2.5

Відтак момент інерції будь-якого нескінченно малого диска можна представити у вигляді:

$$dJ = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot r^2 = \frac{\rho \cdot \pi}{2}\left(R^2 - y^2\right)^2 \cdot dy.$$

Момент інерції кулі одержуємо через інтегрування (підсумовування) по всіх нескінченно малих дисках, тобто:

$$J = \int dJ = \frac{\rho \cdot \pi}{2} \int_{-R}^{R} \left(R^4 - 2R^2 \cdot y^2 + y^4\right) \cdot dy = \frac{\rho \cdot \pi}{2} \left(R^4 \cdot y - \frac{2}{3} R^2 \cdot y^3 + \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{\rho \cdot \pi}{2} \left(R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{R^5}{5} + R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{R^5}{5} \right) = \frac{\rho \cdot \pi}{2} \cdot \frac{16}{15} R^5 = \frac{8 \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^5}{15}.$$

Оскільки об'єм кулі дорівнює $V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$; то її масу можна представити як $m = \rho \cdot V = \frac{4}{3} \rho \cdot \pi \cdot R^3$; відповідно момент інерції кулі дорівнює $I = \frac{2}{5} m \cdot R^2$.

Аналогічно можна одержати моменти інерції тіл правильної геометричної форми, вісь обертання яких збігається з віссю симетрії:

– суцільний однорідний циліндр:

$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2; \qquad (2.21)$$

– тонке кільце радіусом R:

$$J = m \cdot R^2\,; \tag{2.22}$$

– пустотілий циліндр з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім – R_2:

$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (R_1^2 + R_2^2)\,. \tag{2.23}$$

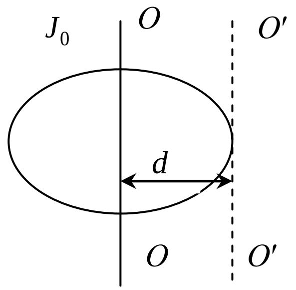


Рис. 2.6

Якщо відомий момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас, то можна визначити за теоремою Штейнера (теорема про паралельне перенесення осі обертання) момент інерції відносно будь-якої паралельної осі. Теорема стверджує, коли відомо момент інерції J_0 тіла масою m відносно осі OO, яка проходить через центр мас тіла, то момент інерції J відносно будь-якої паралельної осі $O'O'$, віддаленої від першої на відстань d (рис. 2.6) визначається так:

$$J = J_0 + m \cdot d^2\,. \tag{2.24}$$

2.4. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

Якщо матеріальна точка рухається по колу радіусом R з швидкістю $\vec{\vartheta}$, то ***моментом імпульсу цієї точки відносно нерухомої точки*** O називають фізичну величину, що визначається векторним добутком:

$$\vec{L} = [\vec{R} \cdot \vec{K}] = [\vec{R} \cdot m \cdot \vec{\vartheta}]\,, \tag{2.25}$$

де $\vec{R}$ – радіус-вектор, проведений із точки O до матеріальної точки (рис. 2.7), $\vec{K} = m \cdot \vec{\vartheta}$ – імпульс матеріальної точки; $\vec{L}$ – псевдовектор, напрям якого збігається з напрямом поступального руху правого гвинта при його обертанні від $\vec{R}$ до $\vec{K}$.

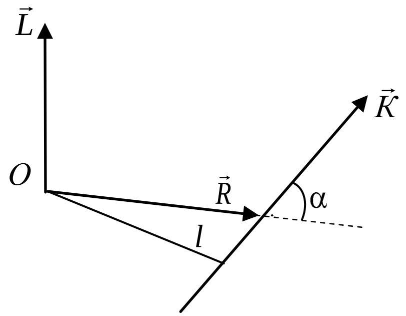


Рис. 2.7

Модуль вектора моменту імпульсу дорівнює:

$$L = m \cdot \vartheta \cdot R \cdot \sin\alpha = m \cdot \vartheta \cdot R = m \cdot R^2 \omega = J \cdot \omega, \quad (2.26)$$

оскільки для матеріальної точки $J = m \cdot R^2$, $\vartheta = \omega \cdot R$ і при русі по колу $\alpha = 90^\circ$.

Оскільки напрям вектора $\vec{L}$ збігається з напрямом вектора $\vec{\omega}$, то:

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}. \quad (2.27)$$

Момент імпульсу абсолютно твердого тіла відносно осі є сумою моментів імпульсу матеріальних точок, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} J_i \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{n} J_i, \quad (2.28)$$

де $\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \vec{L}$ – момент імпульсу тіла; $\sum_{i=1}^{n} J_i = J$ – момент інерції тіла. Тоді рівняння (2.28) можна записати у такій формі:

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}. \quad (2.29)$$

Із основного закону динаміки обертального руху випливає закон збереження моменту імпульсу. Так, враховуючи, що $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, другий закон Ньютона для обертального руху запишемо так:

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(J \cdot \vec{\omega}) = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (2.30)$$

Тобто, другий закон Ньютона можна сформулювати ще й так: *швидкість зміни моменту імпульсу тіла дорівнює моменту сили, що діє на це тіло.*

У замкненій системі момент зовнішніх сил дорівнює нулю

$$\vec{M} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

звідки

$$\vec{L} = \text{const}. \qquad (2.31)$$

Вираз (2.31) є законом збереження моменту імпульсу: момент імпульсу замкненої системи зберігається, тобто є незмінним у часі. Якщо у системі є n тіл, вираз (2.31) можна записати так:

$$\vec{L} = J_1 \cdot \vec{\omega}_1 + J_2 \cdot \vec{\omega}_2 + \ \dots \ + J_n \cdot \vec{\omega}_n = \text{const}. \qquad (2.32)$$

Тепер зіставимо основні величини і рівняння, які визначають обертання тіла навколо нерухомої осі та його поступальним рухом (табл. 2.1):

Таблиця 2.1

Основні величини і рівняння			
поступального руху		обертального руху	
Маса тіла	m	Момент інерції тіла	J
Сила	$\vec{F}$	Момент сили	$\vec{M}$
Другий закон Ньютона для поступального руху	$\vec{F} = m \cdot \vec{\alpha}$	Другий закон Ньютона для обертального руху	$\vec{M} = J \cdot \vec{\beta}$
Імпульс тіла	$\vec{K}$	Момент імпульсу тіла	$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$
Закон збереження імпульсу тіла	$\vec{K} = \text{const}$	Закон збереження моменту імпульсу	$\vec{L} = \text{const}$
Другий закон Ньютона для поступального руху	$\vec{F} = \frac{d\vec{K}}{dt}$	Другий закон Ньютона для обертального руху	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

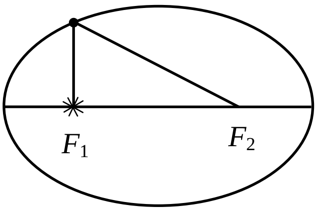
Лекція 3. СИЛИ У МЕХАНІЦІ

- ***Сили гравітаційної взаємодії***
- ***Сили електромагнітної взаємодії***

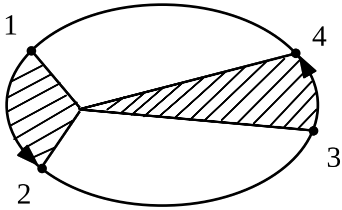
3.1. Сили гравітаційної взаємодії

Взаємодії у природі поділено на чотири типи: гравітаційні, електромагнітні, ядерні слабкі і ядерні сильні. У механіці проявляються лише гравітаційні взаємодії (сили гравітації, тяжіння, ваги) та електромагнітні (сили тертя, пружності).

За півстоліття до того, як Ньютон запропонував свої закони динаміки, а також четвертий закон – закон всесвітнього тяжіння, німецький астроном Іоганн Кеплер (1571–1630 рр.) написав роботи з астрономії, в яких можна знайти детальний опис руху планет навколо Сонця. Кеплер опрацював і уточнив результати багаторічних спостережень датського астронома Т. Браге стосовно положення планет у процесі їх “небесного руху” і виклав закони руху планет.



а)



б)

Рис. 3.1

Перший закон Кеплера. *Траєкторією руху* (*орбітою*) *кожної планети навколо Сонця є еліпс, в одному із фокусів якого знаходиться Сонце* (*рис. 3.1*, *а*).

Другий закон Кеплера. *Кожна планета рухається так, що її радіус-вектор за рівні проміжки часу описує однакові площі* (*рис. 3.1, б*).

Третій закон Кеплера. *Відношення квадратів періодів будь-яких двох планет, що обертаються навколо Сонця, дорівнює відношенню кубів їх середніх відстаней до Сонця.* Це означає, що коли T_1 і T_2 – періоди обертання (проміжки часу, необхідні для здійснення планетою повного оберту навколо Сонця), а R_1, R_2 – середні відстані від планет до Сонця, то:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 . \tag{3.1}$$

Опираючись на експериментальні праці Г. Галілея і Х. Гюйгенса, які досліджували рух тіл біля поверхні Землі, спостереження і узагальнення М. Коперника та І. Кеплера для руху планет, І. Ньютон не тільки записав формули основних законів динаміки, а й сформулював закон гравітації і поширив межі його застосування на весь Всесвіт.

Закон всесвітнього тяжіння: *між будь-якими матеріальними точками діє сила взаємного притягання* (*гравітаційна сила*)*, прямо пропорційна добутку мас цих точок і обернено пропорційна квадрату відстані між ними*:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{R^2} , \tag{3.2}$$

де m_1 і m_2 – маси точкових або сферичних тіл; R – відстань між матеріальними точками або між центрами сферичних тіл; G – універсальна гравітаційна стала, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $м^3 / кг \cdot с^2$, тобто два точкових тіла масою 1 кг кожне, які знаходяться на відстані 1 м одне від одного, притягуються з силою $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $м^3 / кг \cdot с^2$. Дуже мала величина G показує, що сила гравітаційної взаємодії може бути значною тільки у випадку великих мас. Формула (3.1) виконується лише для матеріальних точок або тіл зі сферичною симетрією. Силу взаємодії довільних тіл обчислюють методами вищої математики, підсумовуючи сили взаємодії всіх матеріальних точок.

На підставі закону всесвітнього тяжіння на будь-яке тіло біля поверхні Землі діє сила $\vec{F}$, яка спрямована до центру Землі. Під дією цієї сили, на підставі другого закону Ньютона, тіла рухаються з прискоренням, яке називають прискоренням вільного падіння $\vec{g}$. Цю силу називають ***силою тяжіння***, тобто:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} . \tag{3.3}$$

Якщо знехтувати добовим обертанням Землі навколо своєї осі, то сила тяжіння і сила гравітації рівні між собою. Тому, порівнюючи праві частини рівностей (3.2) і (3.3), маємо:

$$m \cdot g = G\frac{m \cdot M}{R^2} , \tag{3.4}$$

де M – маса Землі; R – відстань між тілом і центром Землі. Для випадку, коли тіло знаходиться на поверхні Землі, з виразу (3.4) випливає, що прискорення вільного падіння біля поверхні Землі дорівнює:

$$g_0 = G\frac{M}{R_0^2}, \tag{3.5}$$

де R_0 – радіус Землі.

Прискорення вільного падіння в певному місці Землі є однаковим для всіх тіл. Воно змінюється біля поверхні Землі з широтою, що зумовлено добовим обертанням Землі і сплюснутістю поверхні Землі (екваторіальний і полярний радіуси Землі різні).

Якщо матеріальна точка знаходиться над поверхнею Землі на висоті h, то вираз (3.5) можна представити у такому вигляді:

$$g = G\cdot\frac{M}{(R_0+h)^2}, \tag{3.6}$$

тобто прискорення вільного падіння, а відповідно і сила тяжіння зменшуються з віддаленням від поверхні Землі.

Під дією сили тяжіння тіло завжди діє на опору (або підвіс), що утримує його від вільного падіння. Сила, з якою тіло діє на опору (або підвіс), називається ***силою ваги***. Сила ваги тіла змінюється тільки у тому випадку, коли на тіло крім сили тяжіння діють інші сили. Якщо опора і тіло знаходяться в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, то сила ваги чисельно дорівнює силі тяжіння, тобто:

$$F = P = m\cdot g\,. \tag{3.7}$$

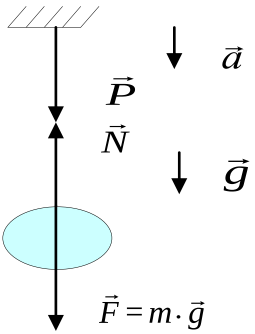


Рис. 3.2

Якщо ж опора (підвіс) разом з тілом рухаються з прискоренням, то до цього тіла прикладена додаткова сила, що на підставі другого закону Ньютона задовольняє умову (рис. 3.2):

$$\vec{N} + \vec{F} = m\cdot\vec{\alpha}, \tag{3.8}$$

де $\vec{N}$ – сила, що діє на тіло з боку підвісу (наприклад, сила реакції нитки). Справді, якщо під дією сили тяжіння тіло діє на підвіс з силою $\vec{P}$, яка є силою ваги, то на підставі третього закону Ньютона підвіс діє на тіло з силою $\vec{N}$, тобто $\vec{N} = -\vec{P}$.

Тоді рівняння (3.8) можна записати:

$$P = F - m \cdot a = m \cdot g - m \cdot a = m \cdot (g - a). \qquad (3.9)$$

Отже, якщо напрям прискорення $\vec{a}$ і напрям прискорення вільного падіння $\vec{g}$ збігаються (рис. 3.2), то:

$$P = m \cdot (g - a). \qquad (3.10)$$

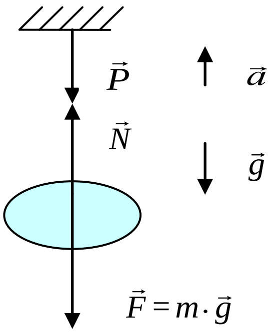


Рис. 3.3

У випадку, коли напрям прискорення $\vec{a}$ і напрям прискорення вільного падіння $\vec{g}$ протилежні (рис. 3.3):

$$P = m \cdot (g + a). \qquad (3.11)$$

Коли тіло вільно рухається у полі тяжіння в будь-якому напрямі вздовж довільної траєкторії, то $\vec{a} = \vec{g}$, а відповідно P = 0, тобто тіло буде невагомим.

Наприклад, невагомими є тіла, які знаходяться у космічних кораблях, що вільно рухаються у космосі під дією тільки однієї сили, а саме – сили тяжіння.

3.2. Сили електромагнітної взаємодії

Сили тертя. Сила тертя проявляється при безпосередньому контакті двох тіл, які рухаються з різними швидкостями. Сили тертя можуть бути різної природи, але в результаті їх дії механічна енергія завжди перетворюється у внутрішню енергію тіл. Ця сила є складною і залежить від стану поверхонь, якими дотикаються тіла, і від їх відносних швидкостей. Якщо поверхні чисті і гладкі, то сила тертя залежить від сил міжмолекулярної взаємодії. Створити абсолютно чисті і гладкі поверхні неможливо, тому сили тертя залежать від нерівностей (шорсткості) поверхні, її вологості, змочування іншими речовинами тощо. Коли тіло котиться поверхнею, то виникає тертя, яке називають ***тертям кочення***; це тертя, як правило, значно менше того, що виникає при ковзанні одного тіла по поверхні іншого.

Коли одне тіло рухається по поверхні іншого тіла, то сила тертя ковзання діє завжди у напрямі, протилежному до напряму руху. Величина цієї сили залежить від властивостей обох поверхонь. Для даної поверхні вона пропорційна діючій між двома поверхнями ***нормальній силі***, яка є силою дії одного тіла на інше, перпендикулярною до їх спільної контактної поверхні.

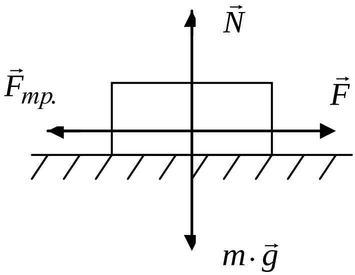


Рис. 3.4

Розглянемо тіло, що знаходиться на площині, до якого прикладена горизонтальна сила $\vec{F}$ (рис. 3.4). Тіло розпочне рух тоді, коли прикладена сила $\vec{F}$ буде більша за силу тертя.

Французькі фізики Г. Амонтон і Ш. Кулон дослідним шляхом установили: сила тертя ковзання пропорційна силі нормальної реакції, з якою одне тіло діє на інше:

$$F_{тр.} = \mu \cdot N, \tag{3.12}$$

де μ – коефіцієнт пропорційності, який називають ***коефіцієнтом тертя ковзання***.

Знайдемо значення коефіцієнта тертя, якщо тіло знаходиться на похилій поверхні з кутом нахилу α (рис. 3.5).

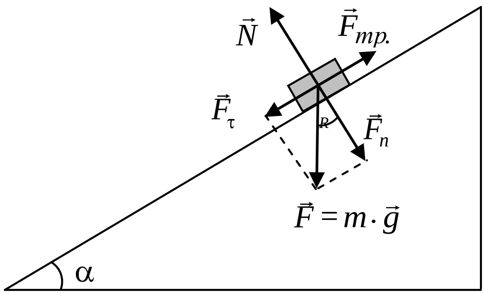


Рис. 3.5

Тіло розпочне рух тільки тоді, коли тангенціальна складова сили тяжіння $\vec{F}_{\tau}$ буде більша за силу тертя $\vec{F}_{тр.}$. Воно розпочне ковзати (у граничному випадку) тоді, коли:

$$\left|\vec{F}_{тр.}\right| = \left|\vec{F}_{\tau}\right|.$$

З рисунка 3.5 випливає, що $F_{\tau} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$, тоді:

$$F_{тр.} = m \cdot g \cdot \sin\alpha\ . \tag{3.13}$$

З іншого боку сила тертя ковзання пропорційна силі нормальної реакції $F_{тр.} = \mu \cdot N$, а сила нормальної реакції за модулем дорівнює нормальній складовій сили тяжіння (див. рис. 3.5), тобто $N = F_n = = F \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha,$ тоді:

$$F_{тр.} = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha . \tag{3.14}$$

Прирівнюючи праві частини рівностей 3.13 і 3.14, одержуємо:

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha . \tag{3.15}$$

Таким чином, коефіцієнт тертя дорівнює тангенсу кута $\alpha,$ при якому розпочинається ковзання тіла вздовж похилої поверхні.

Тертя має важливе значення у природі і техніці. За наявності тертя рухається транспорт, утримується цвях, забитий у стіну тощо.

В окремих випадках сили тертя мають шкідливий вплив, і тому їх необхідно зменшувати. Для цього на контактні поверхні наносять мастило, яке заповнює нерівності між поверхнями, що забезпечує ковзання не самих поверхонь, а окремих шарів рідини. Таким чином, зовнішнє тертя твердих тіл замінюється значно меншим внутрішнім тертям рідини.

Радикальним способом зменшення сили тертя є заміна тертя ковзання тертям кочення (шарикові та роликові підшипники тощо). ***Сила тертя кочення*** визначається за законом Кулона:

$$F = f\frac{N}{r}, \tag{3.16}$$

де r – радіус тіла, що котиться; f – коефіцієнт тертя кочення. Із виразу (3.16) випливає, що сила тертя кочення обернено пропорційна радіусу тіла, яке котиться.

Сила пружності відноситься до типу сил електромагнітної взаємодії. Зміна відстані між атомами твердого тіла викликає зміну їх електромагнітної взаємодії, яка на макроскопічному рівні описується при малих деформаціях законом Гука:

$$F = -k \cdot x, \tag{3.17}$$

де k – коефіцієнт пружності, x – абсолютна деформація.

Із рівняння (3.17) слідує, що сила є лінійною функцією деформації. Варто відзначити, що лінійна залежність, установлена англійським фізиком Р. Гуком, виконується лише при малих деформаціях.

У теорії пружності доводиться, що всі види деформації (розтягу або стиску, зсуву, кручення, згину) можуть бути зведені до одночасно здійснюваних деформацій розтягу або стиску і зсуву.

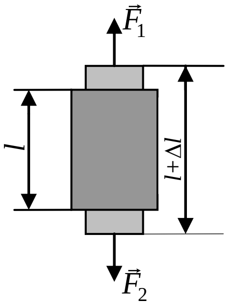


Рис. 3.6

Розглянемо однорідний стрижень довжиною l і площею поперечного перерізу S, (рис. 3.6), до кінців якого прикладені сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = F$, спрямовані вздовж його осі, у результаті чого довжина стрижня змінилася на величину Δl . Силу, що діє на одиницю площі поперечного перерізу, називають ***напруженням***:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{3.18}$$

Якщо сила спрямована вздовж нормалі до поверхні, напруження називають ***нормальним***, а якщо дотично до поверхні – ***тангенціальним***.

Кількісною мірою, що характеризує ступінь деформації тіла, є його відносна деформація. Так, відносна зміна довжини стрижня (поздовжня деформація):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{3.19}$$

Р. Гук експериментально встановив, що для малих деформацій напруження прямо пропорційне відносному видовженню:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \tag{3.20}$$

де коефіцієнт пропорційності E називають ***модулем Юнга***.

Рівність (3.20), з урахуванням рівностей (3.18) і (3.19), можна записати так:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{E \cdot S}, \quad \text{або} \quad F = \frac{E \cdot S}{l} \cdot \Delta l = k \cdot \Delta l. \tag{3.21}$$

Тоді модуль Юнга дорівнює: $E = \frac{k \cdot l}{S}$. Із рівності (3.20) випливає, що $E = \sigma$, коли $\varepsilon = \Delta l / l = 1$. Тобто модуль Юнга дорівнював би нормальному напруженню, при якому видовження дорівнює довжині ($\Delta l = l$), якби при цих деформаціях справжувався закон Гука.

Зсувом називають таку деформацію твердого тіла, при якій всі його плоскі шари зміщуються паралельно один одному. Найпростіше деформацію зсуву здійснити, якщо використати брусок, що має форму паралелепіпеда (рис. 3.7), і прикласти до нього силу $\vec{F}$, дотичну до його поверхні (нижня частина бруска закріплена нерухомо). Відносна деформація зсуву визначається за формулою:

$$\gamma = \mathrm{tg}\gamma = \frac{AB}{AC} = \frac{\Delta S}{h}, \qquad (3.22)$$

де ΔS – абсолютний зсув паралельних шарів тіла один відносно одного; h – відстань між шарами (для малих кутів $\mathrm{tg}\gamma \approx \gamma$).

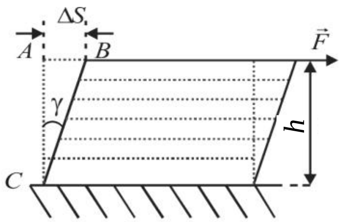


Рис. 3.7

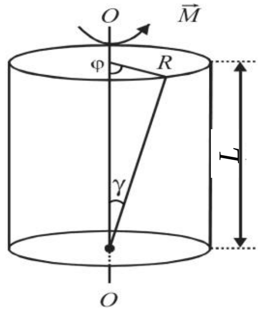


Рис. 3.8

Використовуючи поняття дотичної напруги $\sigma = \frac{F}{S}$, формулу (3.22) можна видозмінити, а саме:

$$\sigma = G \cdot \gamma. \qquad (3.23)$$

Коефіцієнт G називають ***модулем зсуву***. Для рідин і газів модуль зсуву G = 0, оскільки вони не мають пружності форми.

Окремим випадком деформації зсуву є деформація кручення. Під дією моменту кручення $\vec{M}$ всі поперечні перерізи тіла повертаються навколо осі OO на певні кути (рис. 3.8). У результаті деформації кручення виникає перекошення твірних циліндричної поверхні на кут γ, при цьому:

$$R \cdot \varphi = \gamma \cdot L. \qquad (3.24)$$

Розрахунки деформації кручення, враховуючи рівність (3.24), можуть бути зведені до деформації зсуву. Не вдаючись у детальні викладки, момент кручення можна визначити за такою формулою:

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{R^4}{L} \varphi. \qquad (3.25)$$

де G – є модулем зсуву для даної речовини.