

**Завдання 1.** Обчислити кратні інтеграли:

1. а)  $\iint_D x^2 y \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x^2 + 1$ ,  $y = -x$ .

б)  $\iiint_G (x^2 z^3 + y) \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $-1 \leq x \leq 0$ ,  $1 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

2. а)  $\iint_D (x + 2y) \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -1$ .

б)  $\iiint_G x y^2 z \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 3$ ,  $-1 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

3. а)  $\iint_D x \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 1 - x^2$ ,  $y = x^2 - 3$ .

б)  $\iiint_G (x^2 + y + z) \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $-2 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .

4. а)  $\iint_D (2x - 1) \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x + 1$ ,  $y = -x$ .

б)  $\iiint_G (x + y + 4z) \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $1 \leq y \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .

5. а)  $\iint_D x^4 y \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2x$ ,  $y = -x$ .

б)  $\iiint_G (x^2 z + 2y) \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $-1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 4$ .

6. а)  $\iint_D (x + 4y) \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -2$ .

б)  $\iiint_G (x^2 + 2yz) \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

7. а)  $\iint_D (x^2 + 2y) \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2x^2$ ,  $y = -1$ .

б)  $\iiint_G x y z^2 \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $-2 \leq z \leq 1$ .

8. а)  $\iint_D (2x^2 - 1) \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2 + 1$ ,  $y = -x^2$ .

б)  $\iiint_G (x + 2y + 2z) \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 3$ ,  $1 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .

9. а)  $\iint_D (3 + 2x^2) \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3 - x^2$ ,  $y = x^2$ .

б)  $\iiint_G x^3 (y + 2z) \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

10. а)  $\iint_D x^2 \, dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2 + 1$ ,  $y = -x$ .

б)  $\iiint_G (x^2 z + 4y) \, dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $-1 \leq x \leq 0$ ,  $1 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

11. а)  $\iint_D (x^3 + 2y) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -2$ .
- б)  $\iiint_G (3x^2 + 2yz) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $-1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
12. а)  $\iint_D x^2 (2y + 1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = x$ ,  $y = -x$ .
- б)  $\iiint_G (2xy + z) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $1 \leq y \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
13. а)  $\iint_D x(3y^2 + 1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -x^2$ .
- б)  $\iiint_G (xy + 2z) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
14. а)  $\iint_D (x^2 + 1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2$ .
- б)  $\iiint_G (2y + 3xz^2) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
15. а)  $\iint_D xy dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = -x^2$ .
- б)  $\iiint_G (x + 2y) z dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $1 \leq z \leq 3$ .
16. а)  $\iint_D x^3 dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2 + 2$ ,  $y = -x$ .
- б)  $\iiint_G (2xz + y) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
17. а)  $\iint_D x dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x^2 + 1$ ,  $y = -x^2$ .
- б)  $\iiint_G (4xy + z^2) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
18. а)  $\iint_D x^2 y dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $y = -x^2$ .
- б)  $\iiint_G (3x + y^2 z) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
19. а)  $\iint_D (x^2 - 1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -1$ .
- б)  $\iiint_G (3xy^2 + z) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
20. а)  $\iint_D x^3 y dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3 - x$ ,  $y = x^2$ .
- б)  $\iiint_G (x + 2yz) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 2$ ,  $1 \leq y \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
21. а)  $\iint_D x^3 y^2 dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2x$ ,  $y = -x^2$ .
- б)  $\iiint_G (x^2 y + 2z) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .

22. а)  $\iint_D (x^2 + 8y) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -1$ .
- б)  $\iiint_G (x + 3y + 2z) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
23. а)  $\iint_D (3x + 4y) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x^3$ ,  $y = -2$ .
- б)  $\iiint_G (x^2 + 2xyz) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
24. а)  $\iint_D x^5 dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2 + 1$ ,  $y = -x$ .
- б)  $\iiint_G (8xz + y^3) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
25. а)  $\iint_D (5x + 2y) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 4$ .
- б)  $\iiint_G (2xyz + 7) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 4$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
26. а)  $\iint_D x^2 (2y + 9) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 2x$ ,  $y = -x$ .
- б)  $\iiint_G (3x^2 + 2yz) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 3$ .
27. а)  $\iint_D x(2y + 1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -x^2$ .
- б)  $\iiint_G (xy + 2z^5) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
28. а)  $\iint_D (x^3 + 3y^2) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = -x^2$ .
- б)  $\iiint_G (2xz + y) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
29. а)  $\iint_D (7x + 2y) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = x^3$ ,  $y = 3$ .
- б)  $\iiint_G (9xy^2 + 2z) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
30. а)  $\iint_D (x + 6y^2) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -2$ .
- б)  $\iiint_G (x + 2yz^3) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .
31. а)  $\iint_D (x^2 + 2xy) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = 3x$ .
- б)  $\iiint_G (3x^2z^2 + y) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 4$ .
32. а)  $\iint_D (9x^2 + 2y) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2x^2$ ,  $y = 3$ .
- б)  $\iiint_G (2x^3z + xy) dx dy dz$ , якщо область  $G$ , задана нерівностями:  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .

**Завдання 2.** Обчислити подвійний інтеграл, переходячи до полярних координат:

1.  $\iint_D (3x + 2) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ,  $y = 0$ .
2.  $\iint_D (2y + 5) dx dy$ , область  $D$  розташована у третій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ .
3.  $\iint_D (2x + y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $x = 0$ ,  $y = \sqrt{3}x$ .
4.  $\iint_D (4x + y) dx dy$ , область  $D$  розташована у другій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = -x$ .
5.  $\iint_D (x + 3) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
6.  $\iint_D (2 - y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
7.  $\iint_D (2 - 5x) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
8.  $\iint_D (4 - 3y) dx dy$ , область  $D$  розташована у другій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = -x$ ,  $x = 0$ .
9.  $\iint_D (5x + y) dx dy$ , область  $D$  розташована у третій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = x/\sqrt{3}$ ,  $y = 0$ .
10.  $\iint_D (8x + 3) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
11.  $\iint_D (4x + 5y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ .
12.  $\iint_D (x - 3y) dx dy$ , область  $D$  розташована у другій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $y = 0$ ,  $y = -x$ .
13.  $\iint_D (3x + y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
14.  $\iint_D (5 - 2y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ .
15.  $\iint_D (2 - 5x) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = x$ ,  $y = x/\sqrt{3}$ .
16.  $\iint_D (x + 8y) dx dy$ , область  $D$  розташована у другій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

17.  $\iint_D (5x + 2y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
18.  $\iint_D (x + 7) dx dy$ , область  $D$  розташована у другій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $y = -x/\sqrt{3}$ ,  $x = 0$ .
19.  $\iint_D (2x + 4y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ,  $y = 0$ .
20.  $\iint_D (x + 9) dx dy$ , область  $D$  розташована у другій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = 0$ ,  $y = -\sqrt{3}x$ .
21.  $\iint_D (2y + 10) dx dy$ , область  $D$  розташована у третій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ .
22.  $\iint_D (4x + 7y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 9$ ,  $x = 0$ ,  $y = \sqrt{3}x$ .
23.  $\iint_D (3x + 8) dx dy$ , область  $D$  розташована у другій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = -\sqrt{3}x$ ,  $y = 0$ .
24.  $\iint_D (x + 12y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
25.  $\iint_D (2 - 9x) dx dy$ , область  $D$  розташована у другій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = -x$ ,  $x = 0$ .
26.  $\iint_D (4 + 8y) dx dy$ , область  $D$  розташована у четвертій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .
27.  $\iint_D (5x + 1) dx dy$ , область  $D$  розташована у третій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 49$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ .
28.  $\iint_D (x - 2y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ,  $y = 0$ .
29.  $\iint_D (3x + 7y) dx dy$ , область  $D$  розташована у другій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 36$ ,  $y = -x$ ,  $y = 0$ .
30.  $\iint_D (7x + 2y) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ,  $x = 0$ .
31.  $\iint_D (9y + 1) dx dy$ , область  $D$  розташована у першій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = x/\sqrt{3}$ ,  $y = 0$ .
32.  $\iint_D (2x + 12) dx dy$ , область  $D$  розташована у третій чверті і обмежена лініями  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ .

**Завдання 3.** Обчислити потрійний інтеграл, переходячи до циліндричних або сферичних координат:

1.  $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z = 0$ .
2.  $\iiint_G (2z + 1) dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 3$ .
3.  $\iiint_G z dx dy dz$ , область  $G$  задана нерівностями  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
4.  $\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , область  $G$  задана нерівностями  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $z \geq 0$ .
5.  $\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 4$ .
6.  $\iiint_G y dx dy dz$ , область  $G$  задана нерівностями  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $z \leq 5$ .
7.  $\iiint_G z^2 dx dy dz$ , область  $G$  задана нерівностями  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
8.  $\iiint_G \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $2z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2$ .
9.  $\iiint_G x dx dy dz$ , область  $G$  задана нерівностями  $z \leq 1 - x^2 - y^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
10.  $\iiint_G (5z + 2) dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ .
11.  $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , область  $G$  задана нерівностями  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
12.  $\iiint_G y dx dy dz$ , область  $G$  задана нерівностями  $z \geq x^2 + y^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \leq 4$ .
13.  $\iiint_G (x^2 + y^2)^3 dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $z = 4 - x^2 - y^2$ ,  $z = 0$ .
14.  $\iiint_G x dx dy dz$ , область  $G$  задана нерівностями  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $z \leq 2$ .
15.  $\iiint_G \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz$ , область  $G$  задана нерівностями  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
16.  $\iiint_G \sqrt{(x^2 + y^2)^5} dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $3z = x^2 + y^2$ ,  $z = 3$ .

17.  $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $z \geq x^2 + y^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \leq 9$ .
18.  $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)^3 dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ ,  $y \geq 0$ .
19.  $\iiint_G z(x^2 + y^2) dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $z = 3 - x^2 - y^2$ ,  $z = 0$ .
20.  $\iiint_G x dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $z \leq 2$ .
21.  $\iiint_G (2z + 5) dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 3$ .
22.  $\iiint_G x dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
23.  $\iiint_G y dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $z \leq 3$ .
24.  $\iiint_G (3z - 2) dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 4$ .
25.  $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2 + 2) dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ ,  $x \geq 0$ .
26.  $\iiint_G xz dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \leq 3$ .
27.  $\iiint_G xy dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $z \geq x^2 + y^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \leq 4$ .
28.  $\iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
29.  $\iiint_G z^3 dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 4$ .
30.  $\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
31.  $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2 + 3) dx dy dz$ , область  $G$  задана неравенствами  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ,  $y \geq 0$ .
32.  $\iiint_G (1 + 2z) dx dy dz$ , область  $G$  обмежена поверхнями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$ .

**Завдання 4.** Розв'язати задачу на застосування подвійного інтеграла:

1. Обчислити масу матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 2, y = 0, y = x^2$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x + 2y$ .
2. Обчислити статичний момент відносно осі ординат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 3, y = 0, y = x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 5y + 2$ .
3. Обчислити статичний момент відносно осі абсцис матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1, y = 0, y = x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 2x + 3y$ .
4. Обчислити момент інерції відносно початку координат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1, x = 2, y = 0, y = 3$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 2x$ .
5. Обчислити масу матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1, y = 0, y = 2x^2$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x + y$ .
6. Обчислити момент інерції відносно осі абсцис матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1, y = 0, y = 4x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 2y + 1$ .
7. Обчислити статичний момент відносно осі ординат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 2, y = 0, y = 3x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 5x + y$ .
8. Обчислити момент інерції відносно початку координат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1, x = 3, y = 0, y = 4$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 2x$ .
9. Обчислити масу матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 2, y = 0, y = \frac{1}{2}x^3$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x + 3y^2$ .
10. Обчислити момент інерції відносно осі ординат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1, y = 0, y = 4x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x + y$ .
11. Обчислити статичний момент відносно осі абсцис матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 2, y = 0, y = x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 3xy$ .
12. Обчислити масу матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1, y = 0, y = x^3$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x + 4y$ .
13. Обчислити статичний момент відносно осі ординат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 2, y = 0, y = 2x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 5x^2$ .
14. Обчислити момент інерції відносно осі абсцис матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 3, y = 0, y = x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 2xy$ .
15. Обчислити момент інерції відносно початку координат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1, x = 3, y = 0, y = 2$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 3x$ .
16. Обчислити статичний момент відносно осі абсцис матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 0, y = 0, y = 1 - x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 3x + 2y$ .



17. Обчислити масу матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = \frac{1}{4}x^3$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x + 3y^2$ .
18. Обчислити статичний момент відносно осі ординат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $y = 2x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 3y^2$ .
19. Обчислити момент інерції відносно осі абсцис матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 4$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x^2y + 2$ .
20. Обчислити масу матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = x^2$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x^2 + 4y$ .
21. Обчислити статичний момент відносно осі ординат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 5x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 1 + 2y$ .
22. Обчислити момент інерції відносно початку координат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x$ .
23. Обчислити момент інерції відносно осі абсцис матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 5$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = x + 4y$ .
24. Обчислити статичний момент відносно осі абсцис матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 1 + 2x$ .
25. Обчислити масу матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = x^3$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 3 + 8y$ .
26. Обчислити статичний момент відносно осі ординат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 4xy$ .
27. Обчислити момент інерції відносно початку координат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $y = 5$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 12y$ .
28. Обчислити момент інерції відносно осі абсцис матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $y = x$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 2x^2$ .
29. Обчислити масу матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 5$ ,  $y = x^2$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 3y^2$ .
30. Обчислити статичний момент відносно осі ординат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = -1$ ,  $y = x^3$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 9x$ .
31. Обчислити масу матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $y = x^2$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 4x + 7$ .
32. Обчислити момент інерції відносно початку координат матеріальної пластинки, обмеженої лініями  $x = -2$ ,  $x = 3$ ,  $y = -1$ ,  $y = 2$ , якщо її густина  $\delta(x, y) = 9$ .