Розділ 2

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

2.1 Алгебра висловлень

2.1.1 Загальні поняття

Логіка – це наука про закони мислення та його форми. Вона як мистецтво суджень бере свій початок з далекої давнини. В логіку було впроваджено математичну символіку, і сьогодні вона використовує мову й методи математики. Звідси й назва – математична логіка. Основи математичної логіки було закладено в середині XIX сторіччя ірландським математиком Дж. Булем.

Останніми десятиліттями логіка набула широкого застосовування в техніці під час дослідження та розроблення електронних схем, обчислювальних машин, дискретних автоматів. Вона використовується також і в інших науках: економіці, біології, психології тощо.

Основним поняттям у логіці є висловлення, під яким розуміють думку, яка подається за допомогою твердження. Тобто висловлення – це певне твердження, яке може бути або істинним або хибним. Наприклад, висловлення «4 є парне число», «$2 \cdot 2 = 4$» є істинними, а висловлення «Одеса − столиця України», «$2 + 3 = 6$» – хибними. Рівняння «$x - 4 = 0$» не є висловленням, але за кожного конкретного значення змінної x одержуватимемо висловлення.

Поміж висловленнями використовуються різні логічні зв’язки: «якщо ..., то ...», «... або ...», «... і ...» тощо. За їхньої допомоги будуються інші нові висловлення.

Логічною операцією називається операція, в якій операндами є висловлення, а операторами – логічні зв’язки.

Алгебра логіки (алгебра висловлень) являє собою науку про сукупність висловлень, над якими визначені логічні операції.

Для позначення істинного висловлення використовують літеру *і* (істина, чи цифру 1, чи T – true), а для хибного – літеру *х* (хибність, чи цифру 0, чи F –, false).

Висловлення, які характеризуються значеннями 0 чи 1, позначатимемо літерами x, y, z тощо (такі змінні називатимемо бульовими, див. п. 2.2).

За допомогою алгебри логіки можна, наприклад, описувати роботу релейно-контактних схем. Для конкретики обмежимося розгляданням двополюсних схем, у яких поміж полюсами можуть існувати релейні контакти, з’єднані послідовно чи паралельно. При цьому стан контакту – 1 (0) означає, що він замкнений (розімкнений), тобто сигнал 1 (0) переводить електронний елемент у відкритий (закритий) стан.

Розглянемо спочатку схеми з одним контактом (рис. 2.1), на яких сам контакт та його стан позначено через x, а стан двополюсника позначатимемо літерою y.

Рисунок 2.1. Схеми з одним контактом

Вочевидь, змінна x є незалежною, а змінна y – залежною бульовою змінною.

У разі першої схеми коло буде замкнене, якщо буде змінено стан контакту (замкнено), тобто змінна y набуде істинного значення ($y = 1$) тоді й лише тоді, коли змінна x також набуде істинного значення ($x = 1$). У разі другої схеми, навпаки, змінна y набуде істинного значення ($y = 1$), коли змінна x збереже хибне значення, тобто стан контакту не зміниться ($x = 0$).

Перейдемо тепер до розглядання схеми „або” і схеми „і” (рис. 2.2).

Рисунок 2.2. Схеми з двома контактами

Якщо контакти x_1 та x_2 з’єднані паралельно, то коло буде замкнене, тобто змінна y набуде істинного значення ($y = 1$), коли хоча б один з контактів x_1 та x_2 є замкненим, і розімкненим, тобто y набуватиме хибного значення, коли обидва контакти x_1 та x_2 є розімкненими. При послідовному з’єднанні контактів x_1 та x_2 коло буде замкнене ($y = 1$), коли обидві змінні x_1 та x_2 набуватимуть істинного значення (тобто $x_1 = 1$, $x_2 = 1$), і розімкнене ($y = 0$), коли хоча б одна зі змінних x_1 та x_2 набуде хибного значення.

Опис більш складних релейно-контактних схем здійснюється за допомогою бульових функцій (див. п. 2.2).

Для логічних зв’язок застосовуються символи: $\neg$ − для „не” (заперечення», $\wedge$ − для „і” (кон’юнкції), $\vee$ − для „або” (диз’юнкції), $\rightarrow$ − для «якщо …, то …» (імплікації), ~ − для «тоді й лише тоді, коли» (еквіваленції). Наприклад, якщо A та B – твердження, то $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \sim B$ будуть, відповідно, запереченням твердження A, кон’юнкцією тверджень A та B тощо.

Задамо значення істинності висловлень A та B таблицею істинності, тоді для розглянутих зв’язок таблиця істинності має наступний вигляд:

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \sim B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Таким чином, якщо значення істинності простих висловлень є відомі, то значення істинності складних висловлень може бути визначено за допомогою цих таблиць.

2.1.2 Формули алгебри висловлень. Семантика. Класифікація та рівносильність формул

Під алфавітом будемо розуміти кожну не порожню множину символів: пропозиційних змінних – x, y, z, x_1, x_2, …; логічних зв'язок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ~, …; технічних символів – (,) тощо.

Словом у певному алфавіті називається довільна скінчена послідовність символів (можливо, порожня). Слово a називається підсловом b, якщо $b = b_1ab_2$ для певних слів b_1 та b_2. Слово ab називається сполученням (конкатенацією) слів a та b.

Формулою алгебри висловлень (ФАВ) називається слово, яке задовольняє такому визначенню:

1) кожна пропозиційна змінна – формула;
2) якщо A та B – формули, то $(\overline{A})$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$ – формули;
3) слово є формулою, якщо воно побудоване лише з використанням п. 1 та п. 2.

Наприклад, вирази (слова)

$$\left((\overline{A} \rightarrow B) \vee A\right), \quad \left((A \sim B) \rightarrow (\overline{C})\right)$$

є формулами, а слова $(A \sim B)$, $(\overline{C})$, A, B, C – підформули останньої формули.

З метою економії дужок операції виконуються в такому порядку (пріоритет операцій): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, ~.

Раніше зазначалося, що висловлення може бути чи то істинне, чи хибне. Інтерпретувати формулу – означає приписати їй одне з двох значень істинності. Набір правил інтерпретації формул (семантика числення висловлень) має бути композиційним, тобто значення формули має бути функцією значень її складових. Для інтерпретації можна використовувати таблиці істинності.

Наприклад, покажемо істинність формули

$$A \rightarrow B \sim \overline{A} \vee B$$

за будь-яких інтерпретацій:

A	B	$A \rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$A \rightarrow B \sim \overline{A} \vee B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Якщо існує хоча б одна інтерпретація, за якої формула набуває істинного значення, вона називається ***здійсненною***, а якщо існує хоча б одна інтерпретація, за якої формула набуває хибного значення, вона називається ***спростовною.***

Формула називається ***тавтологією*** (чи тотожно-істинною, чи загальнозначущою), якщо за будь-яких інтерпретацій її складових (змінних) вона набуває істинного значення. Позначення тавтології є $\models A$.

Формула називається ***протиріччям*** (тотожно-хибною), якщо за будь-яких інтерпретацій вона набуває хибного значення.

Областю істинності (областю хибності) формули називається множина наборів значень змінних, за яких формула набуває істинного (хибного) значення.

Результати цих означень:

формула A є тавтологією тоді й лише тоді, коли A не є спростовною;

формула A є тотожно-хибна тоді й лише тоді, коли A не є здійсненною;

формула A є тавтологією тоді й лише тоді, коли $\overline{A}$ є тотожно-хибною;

формула A є тотожно-хибна тоді й лише тоді, коли $\overline{A}$ тавтологія;

формула $A \sim B$ – тавтологія тоді й лише тоді, коли A та B набувають однакових значень (є рівносильні) за всіма наборами значень змінних.

Вочевидь, що дві формули є рівносильні тоді й лише тоді, коли за будь-яких інтерпретацій їхніх змінних вони набувають однакових значень. Позначення: $A = B$.

Теорема 1 Дві формули A та B є рівносильні тоді й лише тоді, коли $\models A \sim B$.

Д о в е д е н н я. Нехай $P_1, P_2, \ldots, P_m$ є сукупність усіх простих компонентів в A та B. Якщо цим компонентам надано певні істинні значення, то перша частина обчислення значень формули $A \sim B$ полягає в обчисленні значень A та B, після чого обчислення завершується застосуванням таблиці істинності для еквіваленції, за якою значення $A \sim B$ буде істинним тоді й лише тоді, коли значення для A та B будуть однакові, тобто A та B є рівносильні.

Н а с л і д о к. Нехай F_1 − формула, в якій є певні входження формули A, і нехай F_2 − результат заміни цього входження формули A на формулу B.

Тоді:

якщо $\models A \sim B$, то $\models F_1 \sim F_2$;

якщо $\models A \sim B$ і $\models F_1$, то $\models F_2$.

Теорема 2 Якщо $\models A$ і $\models A \to B$, то $\models B$.

Д о в е д е н н я. Нехай $P_1, P_2, \ldots, P_m$ є сукупність усіх простих компонентів в A та B. Якщо цим компонентам надано певних значень істинності, то перша частина обчислення значень формули $A \to B$ полягає в обчисленні значень A та B, після чого обчислення завершуються застосуванням таблиці істинності для імплікації.

З припущення $\models A$ та $\models A \to B$ випливає, що значення A та $A \to B$ будуть істинними.

З таблиці для $A \to B$ випливає, що B теж матиме значення „істина”. Через то що це має місце для кожних значень компонентів P_1, P_2, …, P_m, формула B є загальнозначуща.

Подані теореми дозволяють здійснювати еквівалентні перетворювання формул і здобувати нові загальнозначущі формули.

Наприклад, тавтології можна здобути з рівносильності заміною знака = на знак ~. Скажімо, з рівносильності $A \vee AB = A$ здобуваємо тавтологію $\models A \vee AB \sim A$. Доведення тавтології, наприклад, $\models (A \to B)(A \to C) \sim (A \to BC)$, можна виконати за допомогою перетворень:

$$(A \to B)(A \to C) = (\overline{A} \vee B)(\overline{A} \vee C) = \overline{A} \vee \overline{A}B \vee \overline{A}C \vee BC = \overline{A} \vee BC = A \to BC .$$

2.1.3 Основні закони алгебри висловлень

Тотожно-істинні формули та формули рівносильності називаються законами алгебри висловлень (властивостями, правилами, теоремами). Існує нескінчена множина тавтологій та рівносильностей, а отже, і законів алгебри висловлень. Нижче наведено закони (з використанням пропозиційних змінних), які найчастіш зустрічаються на практиці:

$x \wedge 0 = 0,\ x \wedge 1 = x,\ x \vee 0 = x,\ x \vee 1 = 1$	– закони сталих (констант);
$x = x$	– закон тотожності;
$\overline{\overline{x}} = x$	– закон подвійного заперечення;
$x \wedge \overline{x} = 0$	– закон протиріччя;
$x \vee \overline{x} = 1$	– закон вилученого третього;
$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$	– комутативність $\vee$ та $\wedge$;
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	– асоціативність $\vee$ та $\wedge$;
$x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$	– перший дистрибутивний закон;
$x \vee y \wedge z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	– другий дистрибутивний закон;
$x \wedge (x \vee y) = x$	– перший закон поглинання;
$x \vee x \wedge y = x$	– другий закон поглинання;
$x \vee x = x, \quad x \wedge x = x$	– ідемпотентність;
$x \wedge y \vee x \wedge \overline{y} = x$	– перший закон склеювання;
$(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = x$	– другий закон склеювання;
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \quad \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$	– правила де Моргана;
$\models (x \to y) \wedge x \to y$	– правило твердження, modus ponens;
$\models (x \to y) \wedge \overline{y} \to \overline{x}$	– правило спростування, modus tollens.

2.1.4 Логічний наслідок

Формула алгебри висловлень B є логічним наслідком з формули A (позначається $A \models B$), якщо B є істинне на всіх наборах значень змінних, для яких A є істинна. Наприклад, формула $B = x \vee x$ є логічним наслідком формули $A = x \wedge (y \vee \bar{y})$, тобто $x \wedge (y \vee \bar{y}) \models x \vee x$.

Теорема 1 Формула алгебри висловлень B є логічним наслідком з формули A тоді й лише тоді, коли формула $A \to B$ є загальнозначущою, тобто

$$A \models B \sim \models A \to B.$$

Д о в е д е н н я. Відповідно до визначення імплікації, вираз $A \to B$ є хибний лише за істинного A та хибного B а отже, якщо $A \to B$ – тавтологія, то з істинності A завжди випливає істинність B, тобто $A \models B$.

І, навпаки, якщо $A \models B$, то виключається випадок, коли A є істинне та B − хибне, а отже, $A \to B$ є істинне на всіх наборах значень змінних, тобто $\models A \to B$.

Логічний наслідок можна узагальнити на сукупності формул: формула алгебри висловлень B є логічним наслідком формул A_1, A_2, …, A_n та позначається як

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B,$$

якщо для довільного набору значень з істинності всіх A_i, $i = \overline{1, n}$, на цьому наборі випливає істинність B. Наприклад, розглядаючи таблицю істинності, здобудемо три ілюстрації до наведеного визначення:

$x, z,\ x \wedge y \to \bar{z} \models \bar{y}$ − 6-й рядок;

$x, x \to z,\ z \models x \vee y \to z$ − 6 та 8-й рядки;

$x \wedge y \to \bar{z},\quad x \to z \models \overline{x \wedge y}$ − 1, 2, 6-й рядки.

№ пп	x	y	z	$x \wedge y \to \bar{z}$	$\bar{y}$	$x \to z$	$x \vee y \to z$	$\overline{x \wedge y}$
1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	0	1	1	0	0	1
6	1	0	1	1	1	1	1	1
7	1	1	0	1	0	0	0	0
8	1	1	1	0	0	1	1	0

Теорема 2 Формула алгебри висловлень B є логічним наслідком формул A_1, A_2, …, A_n тоді й лише тоді, коли формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots, \wedge A_n \to B$ є загальнозначущою, тобто

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B \sim \models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B.$$

Д о в е д е н н я

Доведення виконується аналогічно до доведення теореми 1.

Формули алгебри висловлень можна застосовувати для перевірки правильності логічних суджень, незважаючи на конкретний зміст висловлень.

Що ж стосується „здорового глузду”, то він має виявлятися при використовуванні законів логіки висловлень у її конкретних додатках. Наприклад, висловлення «A = 100 < 10» − хибне. Однак воно стає істинним, якщо вважати, що число 100 записане у двійковій системі числення, а 10 – у десятковій.

П р и к л а д. Перевірити правильність наступного судження. Якщо замінити мікросхему (A), телевізор працюватиме (B) за умови, що напругу увімкнено (C). Мікросхему замінили, а напругу не увімкнули. Отже, телевізор не працюватиме.

Р о з в ’ я з а н н я

Це судження можна записати у вигляді

$$A \to B \wedge C, \quad A, \overline{C} \models \overline{B}\,.$$

Оскільки формули A, B, C не містять підформул, то можна перейти до відповідних пропозиційних змінних x, y, z.

Тоді даний логічний висновок набуде більш зручного вигляду:

$$x \to y \wedge z, \quad x, \bar{z} \models \bar{y}\,.$$

Судження буде слушним, якщо формула

$$(x \to y \wedge z) \wedge x \wedge \bar{z} \to \bar{y}$$

є загальнозначуща. При викладках скористаємося основними законами алгебри висловлень:

$$(x \to y \wedge z) \wedge x \wedge \bar{z} \to \bar{y} = \overline{(\bar{x} \vee y \wedge z) \wedge x \wedge \bar{z}} \vee \bar{y} = \bar{0} \vee \bar{y} = 1 \vee \bar{y} = 1.$$

Формула є загальнозначущою, отже, судження є правильне.

В і д п о в і д ь: судження є правильне.

П р и к л а д. Я піду на лекцію (x) або залишуся в барі й вип’ю кави (y). Я не піду на лекцію. Отже, я залишуся й вип’ю кави.

Запишемо логічне слідування:

$$x \vee y, \bar{x} \models y\,.$$

Перевіримо загальнозначимість:

$$(x \vee y) \wedge \bar{x} \to y = \overline{(x \vee y) \wedge \bar{x}} \vee y = \bar{x}\,\bar{y} \vee x \vee y = 1 \vee x = 1.$$

Судження є правильне.

2.2 Функції алгебри логіки. Бульова алгебра

2.2.1 Способи задання бульових функцій

Відношення поміж бульовими змінними подаються бульовими функціями, які, подібно до числових функцій, можуть залежати від однієї, двох чи більш змінних (аргументів).

В и з н а ч е н н я. ***Бульовою функцією*** *n* незалежних змінних називається функція

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad n \geq 1,$$

в якій кожна змінна і сама функція набувають власних значень з множини {0; 1}, тобто

$$x_k \in \{0; 1\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad y = \{0, 1\}.$$

В и з н а ч е н н я. Кортеж $(x_1, x_2, ..., x_n)$ конкретних значень бульових змінних називається ***набором***, або ***бульовим вектором.***

Якщо незалежні змінні розміщено у прямому порядку, тобто у вигляді $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то набір називається ***прямим***, а якщо їх розміщено у зворотному порядку, тобто у вигляді $x = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$, то набір називається ***зворотним***.

Областю визначення бульової функції *n* ***аргументів*** є сукупність 2^n бульових кортежів. Число різних бульових функцій є скінченне і дорівнює 2^{2^n}. За $n = 1$ число бульових функцій дорівнює 4, а за $n = 2$ − 16.

Існують такі способи задання бульових функцій.

1. ***Табличний.*** Функція задається у вигляді таблиці істинності. Наприклад така таблиця

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

визначає функцію *y*.

2. ***Графічний.*** Функція задається у вигляді *n*-вимірного одиничного куба, у вершинах якого записано значення функції (у кружечках) та набори значень аргументів. Наприклад, функції, задані на рис. 2.3 та 2.4.

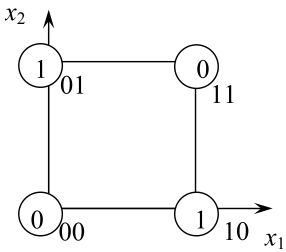


Рисунок 2.3.
Двовимірний одиничний квадрат

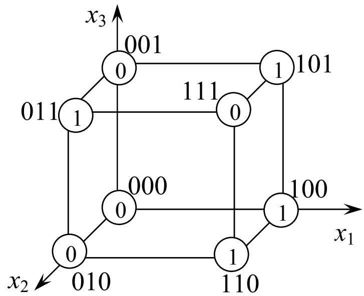
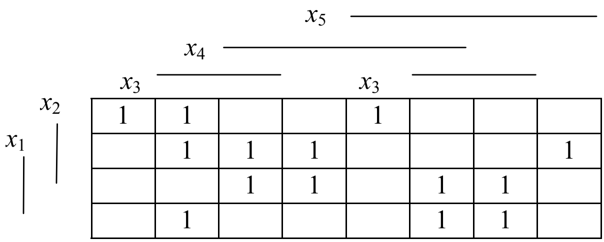


Рисунок 2.4.
Тривимірний одиничний куб

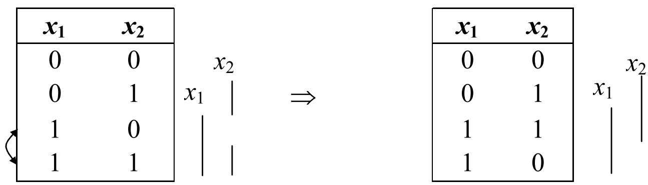
3. ***Координатний*** **(*картою Карно*).** У клітинках карти записуються значення функції (нулі зазвичай не вписують, їм відповідають порожні клітини). Значення змінної визначається відрізками (дужками) з позначенням цієї змінної. Наявність відрізка відповідає 1, а відсутність − 0. Наприклад, функція, задана на рис. 2.5.



1	1			1			
	1	1	1				1
		1	1		1	1	
	1				1	1	

Рисунок 2.5. Приклад задання функції картою Карно

Відрізки карти Карно мають відбивати всі можливі набори значень. Для цього можна скористатися лівою частиною таблиці істинності, в якій рекомендується попередньо виконати перестановки наборів в такий спосіб, щоби зменшити загальне число розривів у відрізках. Наприклад, на рис. 2.6 подано перестановки наборів функцій двох та трьох незалежних змінних.

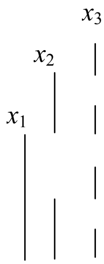


x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1

$\Rightarrow$

x_1	x_2
0	0
0	1
1	1
1	0

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1



$\Rightarrow$

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

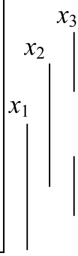


Рисунок 2.6. Приклади перестановок наборов

4. ***Числовий.*** Функція задається у вигляді цілих десяткових (вісімкових, шістнадцяткових) чисел, які є еквівалентами тих наборів значень аргументів, на яких функція набуває значення 1.

Наприклад,

$$y = \{3;\, 4;\, 5;\, 6\}_{x_1 x_2 x_3}\,,$$

де $3 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ і набір значень аргументів 011 відповідає значенню функції 1 (див. рис. 2.4), і т. д.

5. ***Аналітичний.*** Функція задається у вигляді формули. Наприклад:

$$y = x_1 + x_2 \cdot x_3.$$

2.2.2 Елементарні функції алгебри логіки

Бульові функції однієї та двох незалежних змінних прийнято називати ***елементарними*** бульовими функціями. Вони використовуються як логічні операції над бульовими змінними при побудові бульових функцій багатьох незалежних змінних. Алгебра з такими логічними операціями називається ***алгеброю логіки***, а бульові функції називаються ще ***функціями алгебри логіки***.

Загальне число різних елементарних функцій (логічних операцій) дорівнює загальному числу функцій двох змінних, тобто $2^{2^2} = 16$ (функції однієї змінної є окремим випадком функцій двох змінних).

Основними в алгебрі логіки є три логічні операції.

Заперечення (інверсія) − функція $y = f(x)$, яка набуває значення 1, коли $x = 0$, і значення 0 − за $x = 1$. Позначення: $y = \bar{x}$. Читається: «не x».

Диз'юнкція (логічне додавання) – функція $y = f(x_1, x_2)$ яка набуває значення 0 тоді й лише тоді, коли обидва аргументи дорівнюють нулеві. Позначення: $y = x_1 + x_2$ або $y = x_1 \vee x_2$. Читається: «x_1 плюс x_2» або «x_1 або x_2».

Кон'юнкція (логічне множення) – функція $y = f(x_1, x_2)$, яка набуває значення 1 тоді й лише тоді, коли обидва аргументи дорівнюють одиниці.

Позначається: $y = x_1 \cdot x_2$ або $y = x_1 \wedge x_2$, Читається: «x_1 помножити на x_2» або «x_1 та x_2».

Таблиці істинності наведених логічних операцій мають відповідно вигляд:

x	$y = \overline{x}$
0	1
1	0

x_1	x_2	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	$y = x_1 \cdot x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Якщо операція містить один операнд, вона називається ***одномісною***, або ***унарною***, а якщо два, то – ***двомісною***, або ***бінарною***. Заперечення − це одномісна операція, а диз'юнкція та кон'юнкція − двомісні. При цьому вирази $\overline{x}$, $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ є прикладами логічних формул. Більш складні формули дістаємо за рахунок суперпозиції логічних формул, які, звичайно беруться у круглі дужки. Наприклад: $y = x_1 + x_2(\overline{x}_1 + x_2)(x_1 + x_1\overline{x}_2)$.

Елементарні функції однієї змінної. Таблиця істинності цих функцій має вигляд:

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функції φ_0 та φ_3 − константи 0 та 1 відповідно. Позначення: $\varphi_0(x) = 0$; $\varphi_3(x) = 1$. Функція φ_1 набуває тих самих значень, що й x, тобто $\varphi_1(x) = x$. Функція $\varphi_2(x) = \overline{x}$, тобто це є логічна операція заперечення.

Елементарні функції двох змінних. Таблиця істинності цих функцій має вигляд

x_1	x_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Операція		0	$\bullet$	$\leftarrow$	x_1	$\overline{x}_1 \bullet x_2$	x_2	$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\sim$	$\overline{x}_2$	$x_1 + \overline{x}_2$	$\overline{x}_1$	$\rightarrow$	/	1

Функції ψ_0 та ψ_{15} – константи 0 та 1. Ці функції відрізняються від φ_0 та φ_3 формально. Функції $\varphi_0 \ldots \varphi_3$ є унарні операції, а функції $\psi_0 \ldots \psi_{15}$ – бінарні.

Функції ψ_7 та ψ_1 – це розглянуті вище операції диз'юнкції та кон'юнкції.

Функція ψ_6 – це додавання за модулем 2. Позначення:

$$\psi_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2.$$

Функція ψ_9 називається еквівалентністю. Позначення:

$$\psi_9(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2.$$

Функція ψ_{13} – імплікація: $\psi_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$.

ψ_2 – заборона (заперечення імплікації): $\psi_2 = x_1 \leftarrow x_2$.

ψ_8 – стрілка Пірса (функція Вебба), $\psi_8 = x_1 \downarrow x_2$.

ψ_{14} – штрих Шеффера, $\psi_{14} = x_1 / x_2$.

Решта функцій спеціальних назв не мають і, як буде показано далі, легко виражаються через вищенаведені функції.

Зауважимо, що ці функції є інверсними, тобто

$$\psi_0 = \overline{\psi}_{15}, \quad \psi_1 = \overline{\psi}_{14}, \quad \ldots, \quad \psi_7 = \overline{\psi}_8 .$$

Технічну реалізацію функцій однієї змінної наведено на рис. 2.7.

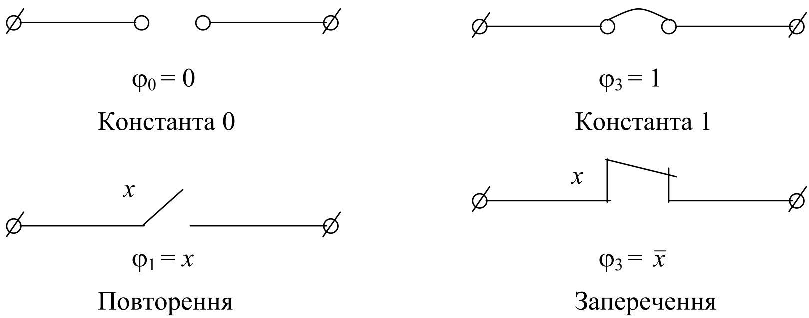
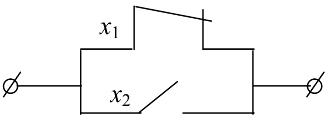


Рисунок 2.7. Технічна реалізація функцій однієї змінної

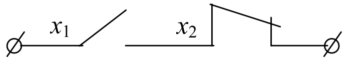
Технічну реалізацію деяких функцій двох змінних показано на рис. 2.8.

$\psi_7 = x_1 + x_2$
Диз'юнкція

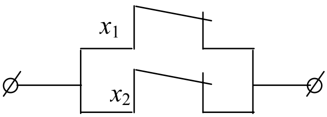
$\psi_1 = x_1 \cdot x_2$
Кон'юнкція



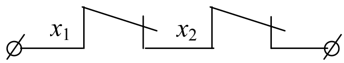
$\psi_{13} = x_1 \rightarrow x_2$
Імплікація



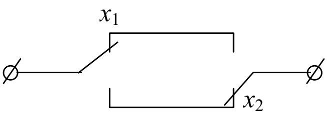
$\psi_2 = x_1 \leftarrow x_2$
Заборона



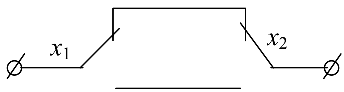
$\psi_{14} = x_1 / x_2$
Штрих Шеффера



$\psi_8 = x_1 \downarrow x_2$
Стрілка Пірса



$\psi_6 = x_1 \oplus x_2$
Додавання за модулем 2



$\psi_9 = x_1 \sim x_2$
Еквівалентність

Рисунок 2.8. Технічна реалізація функцій двох змінних

2.2.3 Основні властивості функцій алгебри логіки

Формулою алгебри логіки або ***логічним виразом*** називається скінчена послідовність бульових змінних та функцій, пов'язаних знаками логічних операцій та круглими дужками.

Функція алгебри логіки – це рівність, у лівій частині якої стоїть бульова змінна, а у правій − логічний вираз. Отже, функція алгебри логіки визначається формулою.

Наприклад, $x_1(x_2 \rightarrow x_3)$ − логічний вираз, $y = x_1 + x_2 x_3$ – бульова функція.

При обчислюванні логічних виразів дотримуються такого приорітету операцій: насамперед обчислюються функції, потім заперечення, після чого логічне множення і, врешті, логічне додавання. Вирази, які стоять у дужках, обчислюються в першу чергу. Інші операції мають найменший пріоритет. Порядок їхнього виконання визначається круглими дужками.

Функції, які зводяться до залежності від меншого числа змінних, називаються ***виродженими***, а функції, які суттєво залежать від усіх змінних, є ***невиродженими***. Наприклад, серед функцій однієї змінної є дві вироджені функції. Це $\varphi_0 = 0$, $\varphi_3 = 1$, які можна розглядати як функції від нуля змінних.

Функції двох змінних містять ті самі константи і чотири функції однієї змінної – ψ_3, ψ_5, ψ_{10}, ψ_{12}.

Функція багатьох змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається функцією, яка ***зберігає константу 0***, якщо $f(0, 0, ..., 0) = 0$. Наприклад, функції $\psi_0 \ldots \psi_7$ мають цю властивість, а функції $\psi_8 \ldots \psi_{15}$ цієї властивості не мають (див. табл. функцій ψ на стор. 49).

Функція n змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається функцією, яка ***зберігає константу 1***, якщо $f(1, 1, ..., 1) = 1$. Наприклад, функції ψ_{2i+1}, де $i = \overline{0,7}$, мають цю властивість, а функції ψ_{2i} – не мають.

Логічна функція $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається ***двоїстою*** до функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо має місце рівність

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\right).$$

Наприклад, функція $\psi_1 = x_1 \cdot x_2$ має властивість двоїстості до функції $\psi_7 = x_1 + x_2$, тому що $x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}$.

Логічна функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається ***самодвоїстою***, якщо

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\right).$$

Наприклад, функція $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3$ є самодвоїстою, тому що $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_3}$ (перевіряється за допомогою таблиці істинності).

Функція багатьох змінних називається ***монотонною***, якщо для будь-якої пари наборів значень її аргументів $\left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)$ та $\left(x_1'', x_2'', \ldots, x_n''\right)$, які задовольняють нерівності $x_i'' \geq x_i'$, $i = \overline{1, n}$, виконується нерівність

$$f\left(x_1'', x_2'', \ldots, x_n''\right) \geq f\left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right).$$

Наприклад, функція ψ_1 є монотонною (див. табл. функції ψ на стор. 49).

Функція багатьох змінних називається ***лінійною***, якщо її можна подати у вигляді многочлена

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus \ldots \oplus c_nx_n,$$

де $c_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0, n}$. Наприклад, функція ψ_6 є лінійною, тому що $\psi_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$.

2.2.4 Повні системи функцій. Базис

В и з н а ч е н н я. Система функцій алгебри логіки $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ називається ***повною***, якщо кожна інша функція алгебри логіки може бути виражена за допомогою суперпозицій цих функцій. При цьому стверджують, що повна система функцій утворює базис у логічному просторі.

В и з н а ч е н н я**.** ***Мінімальним базисом*** є такий базис, вилучення з якого будь-якої функції порушує його повноту.

Теорема Поста-Яблонського Для того щоб система функцій була повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила в собі хоча б одну функцію:

незберігаючу константу 0, незберігаючу константу 1, несамодвоїсту, немонотонну й нелінійну.

З теореми випливає, що таких функцій має бути п’ять. Але, через те що деякі функції мають одразу кілька потрібних властивостей, базис може складатися з меншого числа функцій.

Властивості функції	**Функції**									
	0	**1**	–	+	•	/	↓	→	⊕	←
Незберігаюча 0		*	*			*	*	*		
Незберігаюча 1	*		*			*	*		*	*
Несамодвоїста	*	*		*	*	*	*	*	*	*
Немонотонна			*			*	*	*	*	*
Нелінійна				*	*	*	*	*		*

З таблиці видно, що повними системами функцій будуть: $\{\neg, +, \bullet\}$, $\{\neg, +\}$, $\{\neg, \bullet\}$, $\{/\}$, $\{\downarrow\}$, $\{0, \rightarrow\}$ тощо. Так, наприклад, алгебра Буля побудована на системі функцій $\{\neg, +, \bullet\}$, а алгебра Жегалкіна використовує базис $\{1, \bullet, \oplus\}$.

2.2.5 Бульова алгебра та її основні закони

В и з н а ч е н н я. ***Бульовою алгеброю*** називається множина логічних функцій з операціями диз’юнкція, кон’юнкція та заперечення, − тобто алгебра, базисом якої є система функцій $\{\neg, +, \bullet\}$.

Операції бульової алгебри звичайно називають бульовими операціями, а функції − бульовими функціями.

Розглянемо тепер основні закони бульових операцій:

1) комутативний (для диз’юнкції та кон’юнкції):

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1; \qquad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1;$$

2) асоціативний:

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3; \qquad x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3;$$

3) дистрибутивний:

$x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ – перший дистрибутивний закон;

$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$ – другий дистрибутивний закон;

4) ідемпотентний:

$$x + x = x; \qquad x \cdot x = x;$$

5) інверсний (формули де Моргана):

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2; \qquad \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2;$$

6) закон вилученого третього (для диз’юнкції) і закон суперечності (для кон’юнкції):

$$x + \overline{x} = 1; \qquad x \cdot \overline{x} = 0.$$

У бульовій алгебрі мають місце такі властивості:

$$\overline{0} = 1; \quad \overline{1} = 0; \quad x + 0 = x; \quad x + 1 = 1; \quad x \cdot 0 = 0; \quad x \cdot 1 = x; \quad \overline{\overline{x}} = x.$$

Решта функцій двох змінних логіки виражаються через базис бульової алгебри в такий спосіб:

$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 + x_2$; $\qquad$ $x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2$;

$x_1 / x_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$; $\qquad$ $x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$;

$x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2$; $\qquad$ $x_1 \sim x_2 = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$.

У справедливості цих формул легко переконатися за допомогою таблиці істинності.

Закони бульової алгебри та її властивості надають можливість виконувати перетворювання логічних виразів з метою побудови найбільш простих (компактних) формул.

В п р а в а. Довести справедливість формул поглинання:

$$x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1; \qquad x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1.$$

Д о в е д е н н я

$$x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot 1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (1 + x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1;$$
$$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1.$$

П р и к л а д. Спростити:

$$((x_1 \downarrow x_2) / x_3) \to (x_1 \to x_3).$$

Р о з в я з а н н я

$$((\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) / x_3) \to (\bar{x}_1 + x_3) = (\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + \bar{x}_3) \to (\bar{x}_1 + x_3) =$$
$$= \overline{\overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} + \bar{x}_3} + \bar{x}_1 + x_3 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 + x_3 =$$
$$= \bar{x}_1 + x_3(1 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) = \bar{x}_1 + x_3.$$

В і д п о в і д ь: $\bar{x}_1 + x_3$.

2.2.6 Нормальні форми бульових функцій

В и з н а ч е н н я. ***Елементарною диз'юнкцією*** (***кон'юнкцією***) називається диз'юнкція (кон'юнкція) скінченного числа бульових змінних, у якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу в прямому чи інверсному вигляді. Наприклад:

$x_1 + \bar{x}_2$, $\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_4$ – елементарні диз'юнкції;

$x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$, $\bar{x}_5 \cdot x_7 \cdot \bar{x}_9 \cdot x_{10}$ – елементарні кон'юнкції.

В и з н а ч е н н я***. Диз'юнктивною нормальною формою*** (***кон'юнктивною нормальною формою***) називається формула, яка містить диз'юнкцію (кон'юнкцію) скінченного числа різних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій).

Позначення: д. н. ф., к. н. ф.

Наприклад: $x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 x_3$, $x_1 \cdot x_5 + \bar{x}_6$ – д. н. ф.;

$(x_1 + x_2) \cdot \bar{x}_3$, $(\bar{x}_1 + x_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_4) \cdot (x_2 + x_5)$ – к. н. ф.

В и з н а ч е н н я**.** Д. н. ф. (к. н. ф.) називається ***досконалою*** і позначається д. д. н. ф. (д. к. н. ф.), якщо в кожній її елементарній кон'юнкції (диз'юнкції) подано всі змінні.

Наприклад: $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$ – д. д. н. ф.;

$$(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + x_3 + x_4) \text{ – д. к. н. ф.}$$

Для того щоб привести формулу до д. д. н. ф., потрібно:

– за допомогою законів та властивостей бульової алгебри привести її до д. н. ф.;

– якщо в елементарній кон'юнкції не міститься змінної x_i із загальної кількості змінних, які входять до даної формули, додати до цієї кон'юнкції співмножник $x_i + \bar{x}_i$ і розкрити дужки;

– з однакових елементарних кон'юнкцій вилучити всі, окрім однієї.

Наприклад:

$$x_1x_2 + \bar{x}_3 = x_1x_2(x_3 + \bar{x}_3) + (x_1 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_2)\bar{x}_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$$
$$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3. \qquad \text{– д. д. н. ф.}$$

Для того щоб привести формулу до д. к. н. ф., доцільно спочатку привести її до д. н. ф., а потім від д. н. ф. перейти до к. н. ф. в такий спосіб.

Нехай д. н. ф. має вигляд

$f = c_1 + c_2 + \ldots + c_m$, де c_i – елементарні кон'юнкції, $i = \overline{1,m}$.

Формулу $\overline{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}$ приведемо до д. н. ф. $k_1 + k_2 + \ldots + k_l$, де k_i – елементарні кон'юнкції. Тоді

$$f = \overline{\overline{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}} = \overline{k_1 + k_2 + \ldots + k_l} = \overline{k_1} \cdot \overline{k_2} \cdot \ldots \cdot \overline{k_l} \; .$$

Застосовуючи правило де Моргана, перетворимо елементарні кон'юнкції $\overline{k_i}$ на елементарні диз'юнкції D_i, де $i = \overline{1,k}$. Отже, дістанемо к. н. ф.

$$f = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_l.$$

І, врешті, використовуючи закон суперечності та другий дистрибутивний закон, зробимо перехід від к. н. ф. до д. к. н. ф.

Наприклад:

1) $\overline{x_1x_2x_3} \cdot (x_1x_2 \to x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\overline{x_1 \cdot x_2} + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) =$

$$=(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3)\cdot(\bar x_1+\bar x_2+x_1\bar x_2\bar x_3)=(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3)\cdot$$
$$\cdot(\bar x_1+\bar x_2+x_1)\cdot(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_2)\cdot(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3)=$$
$$=(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3)\cdot(\bar x_1+\bar x_2)=(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3)\cdot(\bar x_1+\bar x_2+x_3\cdot\bar x_3)=$$
$$=(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3)\cdot(\bar x_1+\bar x_2+x_3)\cdot(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3)=$$
$$=(\bar x_1+\bar x_2+\bar x_3)\cdot(\bar x_1+\bar x_2+x_3)\,; \qquad \text{− д. к. н. ф.}$$

2) $x_1\bar x_2+\bar x_1 x_2=\overline{\overline{x_1\bar x_2+\bar x_1 x_2}}=\overline{\overline{x_1\bar x_2}\cdot\overline{\bar x_1 x_2}}=\overline{(\bar x_1+x_2)\cdot(x_1+\bar x_2)}=$
$=\overline{\bar x_1\bar x_2+x_1x_2}=\overline{\bar x_1\bar x_2}\cdot\overline{x_1x_2}=(x_1+x_2)\cdot(\bar x_1+\bar x_2).$ − д. к. н. ф.

В и з н а ч е н н я. Елементарна диз'юнкція (кон'юнкція), яка містить усі змінні, називається ***конституентою нуля*** (***одиниці***). Наприклад, якщо загальна кількість змінних $n = 3$, то $\bar x_1+x_2+x_3$ – конституента нуля, а $x_1\cdot\bar x_2\cdot x_3$ – конституента одиниці.

Вочевидь, що конституента нуля перетворюється на нуль лише за одного набору значень змінних. У нашому прикладі конституенті нуля відповідає набір (1, 0, 0). Аналогічно, конституента одиниці перетворюється на одиницю також лише за одного набору. Наприклад, конституенті одиниці $x_1\cdot\bar x_2\cdot x_3$ відповідає набір (1, 0, 1).

Оскільки для заданої бульової функції її д. д. н. ф. являє собою диз'юнкцію конституент одиниці, а її д. к. н. ф. − це кон'юнкція конституент нуля, то дана функція перетворюється на одиницю чи нуль лише за відповідних цим конституентам наборів значень змінних. Справедливе є і зворотне твердження.

Це дозволяє за заданою таблицею істинності бульової функції одразу записати її досконалі нормальні форми і, навпаки, за заданою д. н. ф. − скласти таблицю істинності.

Досконалі форми для функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ позначають:

для д. д. н. ф. $- f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{1}{\vee}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$;

для д. к. н. ф. $- f(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{0}{\wedge}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$,

де символ $\underset{1}{\vee}$ або $\underset{0}{\wedge}$ позначає, що диз'юнкція або кон'юнкція виконуються за відповідними конституентами.

П р и к л а д. Знайти досконалі нормальні форми для функції Вебба.

Р о з в ' я з а н н я

x_1	x_2	$y = \psi_8$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$\psi_8 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ – д. д. н. ф.

$\psi_8 = (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$ – д. к. н. ф.

П р и к л а д. Перетворити функцію $y = \{0, 3, 5\}_{x_1 x_2 x_3}$ на д. д. н. ф.

Р о з в ‘ я з а н н я

$y = \{(0,0,0),(011),(101)\}_{x_1 x_2 x_3} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3$ – д. д. н. ф.

П р и к л а д. Для функції, заданої власною д. к. н. ф.

$$y = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3),$$

скласти таблицю істинності.

Р о з в ‘ я з а н н я

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

2.3 Алгебра Жегалкіна та її основні закони

В и з н а ч е н н я. ***Алгеброю Жегалкіна*** називається множина логічних функцій з операціями кон’юнкція, додавання за модулем 2 і константа 1, тобто алгебра, базисом якої є система функцій $\{1, \bullet, \oplus\}$.

Подамо основні закони цієї алгебри:

1) комутативний:

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1; \qquad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1;$$

2) асоціативний:

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3; \qquad x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3;$$

3) дистрибутивний:

$$x_1 (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3;$$

4) ідемпотентний:

$$x \cdot x = x;$$

5) закон приведення подібних членів:

$$x \oplus x = 0.$$

В алгебрі Жегалкіна мають місце такі властивості:

$$x \oplus 0 = x; \qquad x \cdot 0 = 0; \qquad x \cdot 1 = x.$$

Решта операцій алгебри логіки виражаються через базис цієї алгебри в такий спосіб:

$$\bar{x} = x \oplus 1; \quad x_1 + x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2; \quad x_1 \sim x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2;$$
$$x_1 \to x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2; \quad x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \oplus x_1 \cdot x_2;$$
$$x_1 \downarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2; \quad x_1 / x_2 = 1 \oplus x_1 \cdot x_2.$$

В и з н а ч е н н я. Функція алгебри Жегалкіна, подана у вигляді суми за модулем 2 добутків незалежних змінних, називається канонічним многочленом, або ***поліномом Жегалкіна***.

Наприклад, $y = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2$ – поліном Жегалкіна.

Лінійна функція

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus \ldots \oplus c_nx_n,$$

де $c_i \in \{0; 1\}$, $i = \overline{0, n}$, є окремим випадком полінома Жегалкіна.

Можна довести, що для кожної функції алгебри логіки існує єдиний поліном Жегалкіна.

Якщо бульову функцію задано у вигляді д. д. н. ф., то для здобуття многочлена Жегалкіна треба: знак „+” замінити знаком „$\oplus$”, заперечення $\bar{x}$ замінити на вираз $x \oplus 1$, розкрити дужки і зробити всі можливі спрощення.

П р и к л а д.

$$x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) =$$
$$= x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2.$$

2.4 Функція Вебба та штрих Шеффера

При розробці багатьох схем електронних пристроїв та вузлів дискретної автоматики використовуються логічні елементи, які реалізують функцію Вебба та функцію Шеффера.

Як було зазначено раніш, кожну з цих функцій можна використовувати як базис алгебри логічних функцій.

Функція Вебба:

$$\bar{x} = x \downarrow x; \quad x_1 + x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow 0; \quad 1 = (x \downarrow \bar{x}) \downarrow 0;$$
$$0 = x \downarrow \bar{x}; \quad x_1 \cdot x_2 = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2); \quad \bar{x} = x \downarrow 0.$$

Функція Шеффера:

$$\bar{x} = x / x; \quad x_1 + x_2 = (x_1 / 1)/(x_2 / 1); \quad 1 = x / \bar{x};$$
$$0 = (x / \bar{x})/1; \quad x_1 \cdot x_2 = (x_1 / x_2)/1; \quad \bar{x} = x/1.$$

Отже, як і в бульовій алгебрі, кожну функцію чи операцію можна розкласти і в алгебрі Вебба, і в алгебрі Шеффера.

2.5 Мінімізація бульових функцій

Одна й та сама функція алгебри логіки може бути подана в певному базисі по-різному. Тому, наприклад, при побудові економних схем цифрових автоматів виникає проблема подання логічних функцій у мінімальній формі.

В и з н а ч е н н я. ***Мінімальною д. н. ф.*** (***к. н. ф.)*** бульової функції називається така д. н. ф. (к. н. ф.), котра містить найменше число елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) та змінних у них стосовно решти д. н. ф. (к. н. ф.), які представляють дану функцію.

В інженерній практиці найчастіше мінімізується число змінних (число літер) у д. н. ф. (к. н. ф.).

Нині розроблено чималу кількість методів (способів, прийомів) мінімізації в класі нормальних форм. Нижче розглянемо лише один з них − метод Квайна−Мак-Класкі мінімізації д. д. н. ф., який ґрунтується на систематичному застосовуванні операцій склеювання та поглинання:

$$k \cdot x + k \cdot \overline{x} = k, \quad k + k \cdot x = k, \quad k + k \cdot \overline{x} = k,$$

де k – елементарна кон'юнкція.

В и з н а ч е н н я. Бульова функція $g\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ називається ***імплікантою*** функції $f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, якщо вона перетворюється на одиницю при наборі змінних, на якому сама функція також дорівнює одиниці. Коротше кажучи, якщо $g = 1$, то й $f = 1$.

З означення випливає, що кожна конституента одиниці, яка входить до складу д. д. н. ф., або їхня диз'юнкція є імплікантою певної бульової функції.

В и з н а ч е н н я. Імпліканта g називається ***простою***, якщо жодна її частина не може бути імплікантою функції f.

П р и к л а д**.** Для функції

$$f\,(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3$$

знайти всі імпліканти.

Р о з в ' я з а н н я

x_1	x_2	x_3	f	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

$g_1 = x_1x_2x_3\,;$

$g_2 = x_1x_2\overline{x}_3\,;$

$g_3 = \overline{x}_1x_2x_3\,;$

$g_4 = x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3 = x_1x_2;$

$g_5 = \overline{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 = x_2x_3;$

$g_6 = \overline{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3;$

$g_7 = x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 = f.$

Імпліканти $g_4 = x_1x_2$ та $g_5 = x_2x_3$ є простими, решта – ні.

Можна довести, що кожна бульова функція є еквівалентна до диз'юнкції власних простих імплікант.

Бульову функцію, зображену за допомогою простих імплікант, називатимемо ***скороченою*** д. н. ф. Пошук мінімальної д. н. ф. здійснюється серед скорочених д. н. ф. шляхом їхнього простого перебирання.

У розглянутому прикладі скорочена д. н. ф. має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3) = g_4 + g_5 = x_1x_2 + x_2x_3.$$

Оскільки інших скорочених д. н. ф. немає, то ця форма й буде мінімальною.

Метод Квайна−Мак-Класкі виконується в три етапи:

1) знаходження простих імплікант;
2) пошук скорочених д. н. ф.;
3) вибір з цих форм мінімальної.

Без обмеження спільності розглянемо його на конкретному прикладі. Нехай треба мінімізувати логічну функцію, задану таблицею істинності

x_1	x_2	x_3	x_4	f	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Перший етап: знаходження простих імплікант. На першому кроці цього етапу слід виписати з таблиці істинності конституенти одиниці, розміщуючи їх за групами (див. 1-й крок в таблиці). Номер групи N відповідає кількості одиниць у конституенті; N може набувати значення від 0 до n, де n − загальна кількість змінних.

На другому кроці цього етапу виконаємо поелементне порівняння конституент (початкових імплікант) сусідніх груп, тобто здійснимо склеювання. Конституента 1-ї групи (0100) склеюється за змінною x_4 з конституентою 2-ї групи (0101) і за змінною x_1 − з конституентою 2-ї групи (1100). Конституента 2-ї групи (0011) склеюється за змінною x_2 з конституентою 3-ї групи (0111) і за змінною x_1 − з конституентою (1011) цієї ж групи тощо.

Результат склеювання, тобто загальну частину конституент, запишемо в наступний стовпець, роблячи прочерк «–» на місці вилученої змінної (2-й крок в таблиці). Конституенти, які брали участь в операції склеювання, позначимо символом «*»

1-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	0
2	*	0	0	1	1
	*	0	1	0	1
	*	1	0	0	1
	*	1	1	0	0
3	*	0	1	1	1
	*	1	0	1	1
	*	1	1	0	1

2-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	–
	*	–	1	0	0
2		0	–	1	1
		–	0	1	1
		0	1	–	1
	*	–	1	0	1
		1	0	–	1
		1	–	0	1
	*	1	1	0	–

3-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1		–	1	0	–
Прості імпліканти					
		–	1	0	–
		0	–	1	1
		–	0	1	1
		0	1	–	1
		1	0	–	1
		1	–	0	1

Якщо початкова імпліканта (1-й крок) мала *n* змінних (розрядів), то кожна імпліканта 2-го кроку має $n – 1$ змінну. Імпліканти 2-го кроку знову піддаються операції склеювання. При цьому склеюванню підлягають імпліканти сусідніх груп, в яких в одній і тій самій позиції стоїть символ «–». Після цього кроку дістаємо імпліканти, які містять $n – 2$ змінних і т. і., допоки подальше склеювання стає неможливим.

Виписавши тепер з усіх кроків непозначені символом «*» імпліканти, дістанемо сукупність простих імплікант.

Другий етап: пошук скорочених д. н. ф. З цією метою складемо імплікантну таблицю

Конституенти / Прості імпліканти	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
$g_1 = x_2 \bar{x}_3$	*		*		*			*
$g_2 = \bar{x}_1 x_3 x_4$		*				*		
$g_3 = \bar{x}_2 x_3 x_4$		*					*	
$g_4 = \bar{x}_1 x_2 x_4$			*			*		
$g_5 = x_1 \bar{x}_2 x_4$				*			*	
$g_6 = x_1 \bar{x}_3 x_4$				*				*

Кожен рядок цієї таблиці відповідає простій імпліканті, а кожен стовпець – початковій імпліканті (конституенті). Якщо проста імпліканта поглинає (накриває) конституенту одиниці, тобто є її частиною, то відповідна клітина матриці позначається символом «*». Потім відшукаємо стовпці імплікантної таблиці, які мають лише по одній позначці. Такі позначки обводимо кружечком. Відповідні цим позначкам прості імпліканти називаються базисними і становлять так зване ядро бульової функції, яке неодмінно входить до скороченої д. н. ф.

Після цього розглянемо різні варіанти вибору сукупності простих імплікант, які спільно накриють позначками інші клітини рядка імплікантної таблиці. Ці імпліканти разом з ядром утворять скорочену д. н. ф.

З таблиці видно, що скороченими д. н. ф. для заданої функції f будуть:

1) $f = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$;
2) $f = g_1 + g_2 + g_3 + g_6$;
3) $f = g_1 + g_2 + g_5$;
4) $f = g_1 + g_3 + g_4 + g_5$;
5) $f = g_1 + g_3 + g_4 + g_6$.

Третій етап: вибір мінімальної форми. Серед цих скорочених д. н. ф. обирається та, яка задовольняє критерію мінімальності. При цьому враховуються економічні та технічні чинники її реалізації в конкретному цифровому пристрої. У нашому прикладі мінімальна д. н. ф. має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1 + g_2 + g_5 = x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_3 x_4 + x_1\overline{x}_2 x_4 .$$

Якщо винести за дужки x_4, здобудемо більш простий вираз:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\overline{x}_3 + x_4\left(\overline{x}_1 x_3 + x_1\overline{x}_2\right),$$

який містить менше число змінних (літер). Така форма подання функції називається дужковою.

Технічну реалізацію цих форм даної функції подано на рис. 2.9.

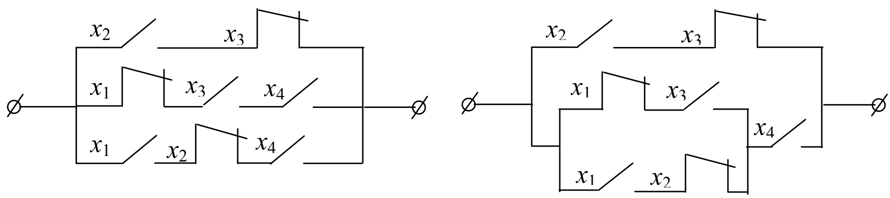


Рисунок 2.9. Різні реалізації мінімальної д. н. ф.

ЗАУВАЖЕННЯ. Метод Квайна−Мак-Класкі можна використовувати і для здобуття мінімальної к. н. ф. Для цього слід розглянути значення функції $f = 0$ і конституенти одиниці, які відповідають цим значенням.

В наслідок дістанемо

$$\bar{f} = \underset{1}{\vee}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Потім треба виконати мінімізацію відповідно до вищевикладеного методу. Застосувавши формули де Моргана до дістаної мінімальної д. н. ф. для функції $\bar{f}$, знайдемо мінімальну к. н. ф. для функції f.

2.6 Багатозначна бульова алгебра

Розглянута вище бульова алгебра, яка схарактеризовує об'єкти з двома можливими станами, є лише окремим випадком широкого класу багатозначних бульових алгебр. Наприклад, алгебра множин є бульовою алгеброю стосовно операцій диз'юнкції та кон'юнкції.

У багатозначній бульовій алгебрі змінні позначаються великими літерами: A, B, C тощо. Роль одиниці та нуля відіграють відповідно початкова множина U (універсум) і порожня множина $\varnothing$. Бульові змінні A, B, C, ... є певними підмножинами універсальної множини U. Елементи, які складають множину, позначаються малими літерами латинської абетки: a, b, c, x, y тощо.

Основними логічними операціями багатозначної бульової алгебри є: заперечення (доповнення, протилежна множина); диз'юнкція (об'єднання, додавання); кон'юнкція (переріз, добуток).

Диз'юнкція множин A та B являє собою множину таких елементів, кожний з яких належить хоча б до однієї з множин − A або B. Наприклад, якщо

$$A = \{a, b, c\},\ B = \{b, c, d\},\ \text{то}\ A + B = \{a, b, c, d\}.$$

Кон'юнкція множин A та B являє собою множину таких елементів, які водночас належать як до множини A, так і до множини B. Наприклад, якщо $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, то $AB = \{2, 3\}$.

Заперечення множини A являє собою таку множину $\overline{A}$, яка при додаванні з A утворить універсум U, тобто

$$A + \overline{A} = U.$$

Для графічної ілюстрації бульових операцій часто використовують діаграми Ейлера−Венна (рис. 2.10), на яких прямокутник означає універсум U, а затемнені області − результат застосовування операції до множин A та B.

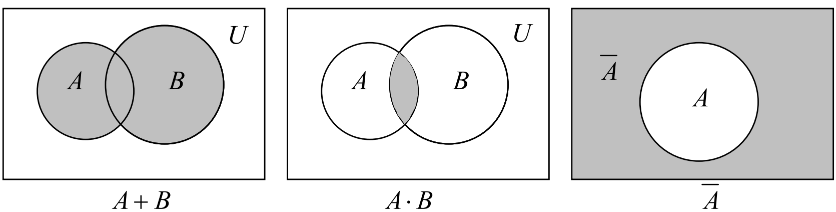


Рисунок 2.10. Графічна ілюстрація операцій диз'юнкція, кон'юнкція та заперечення

У кожній багатозначній бульовій алгебрі мають місце такі основні закони:

1) комутативний:

$$A + B = B + A;\quad A \cdot B = B \cdot A;$$

2) асоціативний:

$$A + (B + C) = (A + B) + C;\quad A\cdot(B \cdot C) = (A \cdot B)\cdot C;$$

3) дистрибутивний:

$A\cdot(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ − перший дистрибутивний закон;

$A + (B \cdot C) = (A + B)\cdot(A + C)$ − другий дистрибутивний закон;

4) ідемпотентний:

$$A + A = A;\quad A \cdot A = A;$$

5) інверсний (формули де Моргана):

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B};\qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B};$$

6) закон вилучення третього (для диз'юнкції) і закон суперечності (для кон'юнкції):

$$A + \overline{A} = U;\quad A\cdot\overline{A} = \varnothing.$$

У бульовій алгебрі мають місце такі властивості:

$$\overline{\varnothing} = U;\quad \overline{U} = \varnothing;\quad A + \varnothing = A;\quad A + U = U;$$

$$A\cdot\varnothing = \varnothing;\qquad A\cdot U = A;\qquad \overline{\overline{A}} = A.$$

Багатозначна бульова алгебра використовується в багатьох галузях науки і техніки. Наприклад, у техніці зв'язку – при дослідженні дискретних сигналів зі скінченним числом станів. Вона використовується також у термінах алгебри випадкових подій при вивченні курсу теорії ймовірностей.