Лекція 4. МЕХАНІЧНА РОБОТА І ЕНЕРГІЯ. ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

- ***Механічна робота***
- ***Потужність***
- ***Кінетична енергія***
- ***Потенціальна енергія***
- ***Закон збереження механічної енергії***
- ***Абсолютно пружний та абсолютно непружний удар***

4.1. Механічна робота

Зміна механічного руху тіла викликається силами, які діють на нього з боку інших тіл. Щоб кількісно характеризувати процес обміну енергією між взаємодіючими тілами, у механіці вводиться поняття механічної роботи.

Механічною роботою називають скалярний добуток сили на переміщення, тобто:

$$dA = (\vec{F} \cdot \vec{dr})\,. \tag{4.1}$$

Згідно векторної алгебри, скалярний добуток двох векторів дорівнює:

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A \cdot B \cdot \cos\alpha\,, \tag{4.2}$$

де A і B – величини векторів, α – найменший кут між ними (у випадку, коли ці вектори виходять із спільного початку; рис. 4.1). Оскільки A, B і $\cos\alpha$ – скалярні величини, ми маємо скалярний добуток $(\vec{A} \cdot \vec{B})$. Тому роботу, виконану постійною силою, можна записати:

$$dA = F \cdot dr \cdot \cos\alpha\,. \tag{4.3}$$

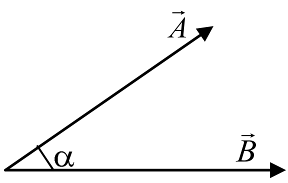

Рис. 4.1

З визначення роботи слідує: коли $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ робота сили додатна, тобто $dA > 0$; коли $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$, то робота сили від'ємна $dA < 0$. При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (сила спрямована перпендикулярно до переміщення) робота дорівнює нулю.

Роботу змінної сили на певній ділянці траєкторії можна представити як алгебраїчну суму елементарних робіт на окремих нескінченно малих її відрізках, тобто: $A = A_1 + A_2 + A_3 + \ \dots\ + A_n$. У межах кожного відрізка Δr_i сила змінюється мало і її можна вважати постійною. Тобто, робота сили на кожному відрізку приблизно дорівнює: $\Delta A_i = F_i \cdot \cos\alpha_i \cdot \Delta r_i$. Тоді повна робота на певній ділянці траєкторії буде дорівнювати сумі складових робіт на кожному відрізку, тобто:

$$A = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \cos\alpha_i \cdot \Delta r_i . \tag{4.4}$$

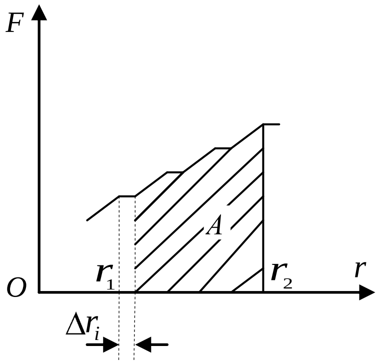

Рис. 4.2

Зобразимо цю суму графічно (рис. 4.2). Для цього покажемо залежність проекції сили на переміщення від переміщення. Якщо траєкторію розбити на велике число відрізків, то за формулою (4.4) визначимо роботу більш точно (при цьому припущення про постійність сили F на кожному відрізку Δr_i є ще більш справедливим). Якщо довжину кожного відрізка спрямувати до нуля $\Delta r_i \to 0$ (тобто, одержати нескінчене число відрізків), то таким чином можна одержати точне значення виконаної роботи:

$$A = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \cos\alpha_i \cdot \Delta r_i . \tag{4.5}$$

Цю границю при $\Delta r_i \to 0$ називають ***інтегралом*** від $F \cdot \cos\alpha \cdot dr$ у межах від r_1 до r_2 (при цьому Δr_i замінюється на dr, що означає нескінченно мале переміщення). Отже, робота, виконана змінною силою при переміщенні тіла на певній ділянці траєкторії, чисельно дорівнює площі під кривою залежності проекції $F \cdot \cos\alpha$ від r. Таким чином, роботу змінної сили можна представити так:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot \cos\alpha \cdot dr . \tag{4.6}$$

Використовуючи поняття скалярного добутку, вираз (4.6) можна представити у такій формі:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F} \cdot \vec{r}) . \tag{4.7}$$

Це найбільш загальне визначення роботи. Інтеграл, що входить у формулу (4.7), називають ***криволінійним інтегралом***, оскільки він є інтегралом від функції $F \cdot \cos\alpha$ вздовж лінії, яка є траєкторією руху тіла (формула (4.3) для роботи постійної сили є частковим випадком формули (4.7)).

Для обчислення роботи за допомогою формул (4.6) або (4.7) існує декілька способів. Якщо добуток $F \cdot \cos\alpha$ є функцією положення тіла, то можна побудувати графік (як на рис. 4.2) і графічно визначити шукану площу. Крім того, можна виконати числове інтегрування або числове додавання (із застосуванням комп'ютера). Можна також застосувати для обчислення інтегралів аналітичні методи. Для цього F необхідно записати як функцію положення, тобто як $F(x, y, z)$. Як приклад використання інтегрального числення розглянемо одномірний випадок і визначимо аналітично роботу, виконану при розтягуванні пружини.

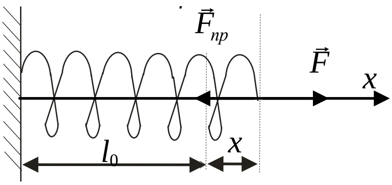

Рис. 4.3

Припустимо, що один кінець пружини прикріплено до стіни (рис. 4.3). Для розтягу або стиску такої пружини на величину x відносно її недеформованої довжини l_0 потрібна сила, величина якої прямо пропорційна x, тобто:

$$F = -k \cdot x, \tag{4.8}$$

де k – коефіцієнт пружності, що характеризує жорсткість пружини.

Співвідношення (4.8) є ***законом Гука*** і воно справедливе, якщо деформація x достатньо мала. Визначимо роботу, виконану при розтягуванні пружини на величину $x = x_2 - x_1$:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx \cdot \tag{4.8}$$

Оскільки сила $\vec{F}$ у кожній точці рівна силі пружності і спрямована у протилежну сторону, то:

$$F = -F_{пр.} = -(-kx), \tag{4.9}$$

тоді робота щодо розтягування пружини від положення x_1 до x_2 буде визначатися так:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} k \cdot x \cdot dx = \frac{k \cdot x_2^2}{2} - \frac{k \cdot x_1^2}{2}\,. \tag{4.10}$$

Роботу пружної сили $\vec{F}_{пр.}$, яка рівна за величиною, але протилежно спрямована до сили $\vec{F}$, при зникненні дії сили $\vec{F}$ можна представити так:

$$A_{пр} = -\frac{k \cdot x^2}{2}\,. \tag{4.11}$$

Варто відзначити, що робота зовнішніх сил над пружиною є додатною, а внутрішніх сил – від’ємною.

Таким чином, робота з розтягування пружини пропорційна квадрату величини видовження (або стиснення) пружини x, що йде на зміну потенціальної енергії пружини. Тому потенціальну енергію пружно деформованого тіла можна представити у такій формі:

$$W_n = \frac{k \cdot x^2}{2}\,. \tag{4.12}$$

Робота проти гравітаційних сил Землі. Розрахуємо роботу, яку виконують сили гравітаційного поля при переміщенні в ньому матеріальної точки (тіла) масою m з положення 1, яке характеризується радіус-вектором $\vec{R}_1$ (проведеним із центра Землі до положення 1) у положення 2, яке характеризується радіус-вектором $\vec{R}_2$. Нехай початкове положення 1 і наступне положення 2, між якими переміщується тіло, знаходяться на радіальній лінії. У кожній точці переміщення на тіло діє сила всесвітнього тяжіння, спрямована до центра Землі, яка дорівнює:

$$F_г = G\frac{M_З \cdot m}{R^2}\,. \tag{4.13}$$

При цьому зовнішня сила $\vec{F}$ у кожній точці траєкторії повинна бути рівною гравітаційній силі $\vec{F}_г$, але протилежно їй спрямована, тобто:

$$F = -F_г = -G \cdot \frac{M_З \cdot m}{R^2}\,. \tag{4.14}$$

Тоді затрачену роботу щодо переміщення тіла з відстані R_1 до R_2 можна визначити так:

$$A=\int_{R_1}^{R_2} dA=-\int_{R_1}^{R_2} G\cdot\frac{M_3\cdot m}{R^2}\cdot dR=\int_{R_2}^{R_1} G\cdot\frac{M_3\cdot m}{R^2}\cdot dR=$$

$$=G\cdot M_3\cdot m\int_{R_2}^{R_1}\frac{dR}{R^2}=G\cdot M_3\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right). \qquad (4.15)$$

Якщо початкове положення тіла (т. 1) і наступне (т. 2) розміщені близько одне від одного, то співвідношення (4.13) можна подати у формі:

$$F=G\cdot\frac{M_3\cdot m}{R^2}=m\cdot g, \qquad (4.16)$$

де $g=G\cdot\dfrac{M_3}{R^2}$ – прискорення вільного падіння на відстані *R*.

Тоді затрачену роботу можна подати:

$$A=\int_{R_1}^{R_2} m\cdot g\cdot dR=m\cdot g\cdot(R_2-R_1)=m\cdot g\cdot\Delta R. \qquad (4.17)$$

Якщо тіло переміщати з поверхні Землі ($R_1=R_3$) на висоту h над її поверхнею ($R_2=R_3+h$), то виконану роботу в полі гравітаційної сили Землі можна визначити як:

$$A=m\cdot g_0\cdot h, \qquad (4.18)$$

де $g_0=G\cdot\dfrac{M_3}{R_3^2}$ – прискорення вільного падіння біля поверхні Землі.

Розглянемо роботу сил гравітаційного поля Землі щодо переміщення тіла вздовж довільної траєкторії у площині xy (рис. 4.4). Тіло розпочинає рух у т. 1 з координатою (за висотою) y_1 і досягає висоти y_2 (т. 2), причому $y_2-y_1=h$. Гравітаційна сила, що діє на тіло з боку Землі, спрямована вертикально вниз і точки (1) та (2) мало відрізняються за висотою, отже прискорення $\vec{g}$ можна вважати постійним. Розіб'ємо шлях на нескінченно малі елементи переміщення $d\vec{r}$. Тоді елементарну роботу можна визначити:

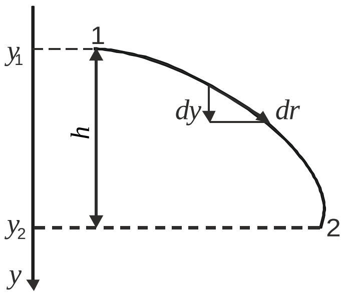

Рис. 4.4

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F \cdot dr \cdot \cos\alpha,$$

де α – кут між вектором переміщення $d\vec{r}$ і його вертикальною складовою dy (рис. 4.4). Враховуючи, що $dy = dr \cdot \cos\alpha$, обчислимо повну роботу, виконану силою тяжіння:

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int F \cdot dr \cdot \cos\alpha = \int_{y_1}^{y_2} F \cdot dy =$$

$$= F \int_{y_1}^{y_2} dy = m \cdot g \cdot (y_2 - y_1) = m \cdot g \cdot h. \qquad (4.19)$$

Таким чином, робота гравітаційних сил не залежить від форми траєкторії переміщення, а залежить лише від початкового і кінцевого положення тіла. Робота гравітаційних сил уздовж замкнутої траєкторії дорівнює нулю, тобто

$$A = \oint (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = 0. \qquad (4.20)$$

Сили, робота яких вздовж замкненої траєкторії дорівнює нулю називають ***консервативними***, а гравітаційне поле є ***потенціальним***. Сили пружності також є консервативними.

Якщо тіла взаємодіють за допомогою полів, як, наприклад, гравітаційне поле, електростатичне поле та ін., то для характеристики цих полів вводять силову характеристику – напруженість поля. Для гравітаційного поля, це сила, яка діє на одиничну масу в даній точці поля, для електростатичного – це сила, яка діє на одиничний заряд тощо. У механіці, для гравітаційного поля напруженістю є:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (4.21)$$

Враховуючи (4.21), співвідношення (4.20) можна записати у такій формі:

$$A = m \oint (\vec{E} \cdot d\vec{r}) = 0. \qquad (4.22)$$

Оскільки маса не дорівнює нулю, то:

$$\oint (\vec{E} \cdot d\vec{r}) = 0. \qquad (4.23)$$

Вираз (4.23) є загальним визначенням дії у полі консервативних сил. Якщо робота сил вздовж замкненої траєкторії відмінна від нуля, то сили називають дисипативними. Якщо ці сили передаються за допомогою полів, то такі поля називають ***непотенціальними***.

4.2. Потужність

На практиці важливо знати не тільки величину роботи, яку виконують сили, а також і час, за який ця робота виконується.

Роботу виконану за одиницю часу називають ***потужністю***, тобто:

$$N = \frac{dA}{dt}. \tag{4.24}$$

Якщо за час dt сила $\vec{F}$ виконує роботу $(\vec{F} \cdot d\vec{r})$, то потужність, що розвивається цією силою в даний момент часу, можна визначити як:

$$N = \frac{d(\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}) \cdot \tag{4.25}$$

Силу $\vec{F}$ можна винести за знак диференціалу, оскільки на елементарному переміщені $d\vec{r}$, силу вважають постійною величиною. Враховуючи, що $\vec{\vartheta} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ вираз (4.25) можна представити в такій формі:

$$N = (\vec{F} \cdot \vec{\vartheta}), \tag{4.26}$$

тобто потужність дорівнює скалярному добутку сили на вектор швидкості, з якою рухається тіло під дією цієї сили; N – скалярна величина.

За одиницю потужності приймається ват (Вт); один ват – потужність, при якій за одну секунду виконується робота в один джоуль (1 Вт = 1 Дж/с).

4.3. Кінетична енергія

У механіці є два види енергії: кінетична і потенціальна. Тіло має енергію тоді, коли спроможне виконати роботу.

Кінетична енергія тіла є мірою його механічного руху і дорівнює роботі, яка може бути виконана за рахунок цього руху. Іншими словами, рух тіла відносно даної системи змінюється, тобто тіло рухається повільніше або скоріше тоді, коли воно виконує або над ним виконують роботу. Причому зміна кінетичної енергії дорівнює виконаній роботі.

Знайдемо вираз для кінетичної енергії матеріальної точки (тіла) масою m, яка рухається поступально з швидкістю $\vec{\vartheta}$.

Нехай матеріальна точка рухається під дією гальмівної сили, яка спрямована протилежно до напряму руху. Якщо ця сила буде незмінною (наприклад, сила тертя), то вона надає точці від'ємного прискорення згідно другого закону Ньютона, тобто:

$$\vec{F} = -m\vec{a}, \tag{4.27}$$

де знак "мінус" означає, що прискорення спрямоване проти напряму руху точки. Оскільки сила, яка діє на матеріальну точку, спрямована протилежна до напряму її руху, то $\cos\alpha = -1$. Тоді роботу діючої сили можна представити так:

$$A = \int(\vec{F}\cdot\overrightarrow{dr}) = \int F\cdot dr\cdot\cos\alpha = -\int_{\vartheta_0}^{0}(m\cdot a\cdot dr) = \int_{0}^{\vartheta_0} m\cdot a\cdot dr =$$

$$= \int_{0}^{\vartheta_0} m\cdot\frac{d\vartheta}{dt}\cdot dr = \int_{0}^{\vartheta_0} m\cdot\frac{dr}{dt}\cdot d\vartheta = \int_{0}^{\vartheta_0} m\cdot\vartheta\cdot d\vartheta = \frac{m\cdot\vartheta_0^2}{2}. \tag{4.28}$$

Таким чином, якщо рухома матеріальна точка зупиниться, то вона виконає роботу:

$$A = \frac{m\cdot\vartheta^2}{2}.$$

Тобто, кінетична енергія матеріальної точки визначається за формулою: $\frac{m\cdot\vartheta^2}{2}$. Якщо під час руху матеріальна точка змінює свою швидкість з ϑ_1 на ϑ_2, то змінюється також її кінетична енергія, тобто:

$$\Delta W_k = \frac{m\cdot\vartheta_1^2}{2} - \frac{m\cdot\vartheta_2^2}{2}. \tag{4.29}$$

Така зміна сама по собі здійснитися не може, її зумовлюють певні сили. Тобто, сили виконують роботу і цим самим змінюють кінетичну енергію тіла:

$$A = \Delta W_k = \frac{m\cdot\vartheta_1^2}{2} - \frac{m\cdot\vartheta_2^2}{2}. \tag{4.30}$$

Зокрема, коли внаслідок дії сил гальмування тіло зупиняється, тобто $\vartheta_2 = 0$, тоді роботу цієї сили можна визначити так:

$$A = \Delta W_k = \frac{m \cdot \vartheta_1^2}{2}. \qquad (4.31)$$

Кінетична енергія тіла чисельно дорівнює роботі, яку може виконати це тіло за рахунок свого руху.

Приведені вище міркування справедливі для будь-якої механічної системи, яку можна розглядати, як систему матеріальних точок. Тому кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх матеріальних точок, тобто:

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot \vartheta_i^2}{2}, \qquad (4.32)$$

де m_i і ϑ_i – маса та швидкість окремої матеріальної точки.

Кінетична енергія тіла завжди позитивна, а зміна кінетичної енергії завжди проходить за рахунок виконання роботи зовнішніми тілами, тобто:

$$\Delta W_k = -A. \qquad (4.33)$$

Енергія при обертальному русі визначається через характеристики обертального руху. Якщо матеріальна точка обертається по колу радіуса R з швидкістю ϑ, то її кінетичну енергію можна подати у такій формі:

$$E_k = \frac{m \cdot \vartheta^2}{2} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot R^2}{2} = m \cdot R^2 \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \qquad (4.34)$$

Коли обертається абсолютно тверде тіло, то його кінетичну енергію можна визначити так:

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \lim_{n \to \infty} \sum \Delta m_i \cdot R_i^2 = \frac{I \cdot \omega^2}{2}, \qquad (4.35)$$

де I – момент інерції твердого тіла, що обертається,

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum \Delta m_i \cdot R_i^2 = \int_m R^2 \cdot dm.$$

Якщо тіло одночасно приймає участь у поступальному і обертальному рухах, то його кінетична енергія складається із кінетичної енергії поступального та обертального рухів, тобто:

$$E = E_k^{пост.} + E_k^{об} = \frac{m \cdot \vartheta^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2}. \qquad (4.37)$$

4.4. Потенціальна енергія

Якщо у системі точок діють консервативні сили, і якщо взаємодія здійснюється через поля, а вони є потенціальними, то робота не залежить від форми шляху. Тобто, незалежно від форми траєкторії руху матеріальної точки, виконана нею робота буде однаковою. Таким чином, у просторі дії консервативних сил, можна ввести функцію, зміна якої чисельно дорівнює роботі, яка виконується при переході з одного положення в інше. Нульове значення цієї функції можна вибрати на будь-якому рівні, тому що саме зміна цієї функції дорівнює виконаній роботі. Цю функцію називають ***потенціальною енергією***, тобто:

$$\Delta W_n = A. \tag{4.38}$$

Якщо робота сил залежить від форми шляху, то таку функцію ввести неможливо, оскільки перехід з одного положення в інше супроводжується різною роботою і рівняння (4.38) втрачає зміст. Оскільки сили гравітації і сили пружності є консервативними, то для цих сил можна ввести поняття потенціальної енергії. Розтягнута (або стиснута) на величину x пружина може виконати одну і тільки одну роботу (при відсутності сил тертя). Аналогічно, тіло підняте на висоту h (при відсутності сил тертя) може виконати одну і лише одну роботу. Тому положення цих тіл з позицій виконання роботи є однозначним і саме положення визначає запас потенціальної енергії, тобто:

$$\Delta W_n = A. \tag{4.39}$$

За нульову позначку у різних випадках приймають різні рівні, оскільки у (4.39) є зміна потенціальної енергії, а не її абсолютне значення.

Таким чином, при зміні висоти тіла над поверхнею Землі, тіло міняє запас потенціальної енергії, тобто:

$$\Delta W_n = A = m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = m \cdot g \cdot \Delta h. \tag{4.40}$$

При великих змінах висоти Δh формула (4.40) не справедлива, оскільки $g \neq \text{const}$. Але згідно формули (4.15) при Δh>>0, робота гравітаційних сил також не залежить від форми шляху, і всі викладки для невеликих значень Δh є справедливими і для великих значень Δh з урахуванням того, що $g = g(h)$.

Якщо за нульовий рівень потенціальної енергії прийняти рівень поверхні Землі (тобто W_n = 0 при h = 0), то:

$$\Delta W_n = m \cdot g \cdot h,$$

де h – висота тіла над поверхнею Землі.

При будь-якій взаємодії можна ввести поняття потенціальної енергії. Тобто, тіла при взаємодії можуть виконати роботу тоді, коли змінюються їх положення, але про потенціальну енергію говорять лише тоді, коли ця робота не залежить від того, яким чином здійснилася зміна положень цих тіл.

У випадку зміни положення тіла на пружині можна записати зміну потенціальної енергії у такій формі:

$$\Delta W_n = A = \frac{k \cdot x_1^2}{2} - \frac{k \cdot x_2^2}{2}. \qquad (4.41)$$

Якщо пружина повернулась у недеформоване положення, то при цьому зміна потенціальної енергії дорівнює:

$$\Delta W_n = A = \frac{m \cdot x^2}{2}, \qquad (4.42)$$

де x – абсолютна деформація.

У прикладах ми розглянули два типи консервативних сил: силу гравітації і пружності. Варто відзначити, що цими силами не вичерпуються знання про консервативні сили у механіці, а тим більше у природі. Ми ще не раз повернемось до консервативних сил у різних розділах фізики, особливо у електростатиці, де рівняння (4.20) має особливе значення.

У загальному випадку зміну потенціальної енергії можна подати так:

$$\Delta W_n = \int_{x_1}^{x_2} (\vec{F}_{конс} \cdot d\vec{r}). \qquad (4.43)$$

4.5. Закон збереження механічної енергії

Якщо на систему тіл, а у найпростішому випадку на матеріальну точку, діють зовнішні та внутрішні консервативні сили $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ \dots\ + \vec{F}_n$ і зовнішні неконсервативні сили $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ \dots\ + \vec{f}_n$, то на підставі другого закону Ньютона можна записати:

$$\vec{F}_{заг} = \vec{F} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}. \qquad (4.44)$$

Якщо прискорення не дорівнює нулю $|\vec{\alpha}| \neq 0$, то змінюється швидкість, а відповідно і кінетична енергія, тобто:

$$dW_k = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) + (\vec{f} \cdot d\vec{r}). \qquad (4.45)$$

За означенням скалярний добуток $(\vec{F}\cdot d\vec{r})$ є роботою консервативних сил, що дорівнює елементарному приросту потенціальної енергії (4.43) і рівняння (4.45) можна записати так:

$$dW_k = dW_n + (\vec{f}\cdot d\vec{r})\,. \qquad (4.46)$$

Тоді загальна зміна енергії (механічної) дорівнює:

$$dW = dW_k + W_n = (\vec{f}\cdot d\vec{r})\,. \qquad (4.47)$$

Знак “–” або “+” заховані під знаком “d” (зміни). Ліва частина рівності (4.47) є зміна механічної енергії (сума кінетичної та потенціальної енергій). Ця зміна дорівнює виконаній роботі неконсервативних сил:

$$dW = (\vec{f}\cdot d\vec{r})\,. \qquad (4.48)$$

І якщо $f = 0$, то $dW = 0$. Тоді $W = W_k + W_n = \text{const}$.

Тобто, коли у системі діють лише консервативні сили, то повна механічна енергія залишається незмінною.

Таким чином, закон збереження механічної енергії читається так: *у системі тіл, де діють лише консервативні сили, механічна енергія залишається незмінною.*

Відмічаємо, що для цього зовсім не є необхідним мати замкнену систему, як для виконання закону збереження імпульсу. І у замкненій системі можуть діяти неконсервативні сили і закон збереження механічної енергії не виконується. Там, де діють лише консервативні сили сума кінетичної та потенціальної енергій завжди постійна.

4.6. Абсолютно пружний та абсолютно непружний удари

Розглянемо приклади застосування законів збереження імпульсу та енергії при розв’язуванні реальних фізичних задач (удари абсолютно пружних і непружних тіл).

4.6.1. Абсолютно пружне зіткнення

Абсолютно пружним зіткненням називають таке зіткнення, при якому деформація тіл повністю зникає. Зіткнення можна розглядати у два етапи. На першому етапі кінетична енергія тіл переходить у потенціальну енергію деформацій. Коли кінетична енергія повністю перетворилася у потенціальну енергію деформації, тіла зупиняються. Якщо удар був абсолютно пружним, то деформація зникає (форма тіла відновлюється), а потенціальна енергія деформації перетворюється у кінетичну енергію руху тіл. При цьому розподіл енергії залежить від мас і початкової швидкості тіл.

Знайдемо швидкості тіл після абсолютно пружного удару. Для цього удару виконується закон збереження механічної енергії і закон збереження імпульсу (якщо ці тіла утворюють замкнену систему або виконуються наближення $dF \approx 0$ або $ds \approx 0$).

Розглянемо абсолютно пружне зіткнення двох тіл (на прикладі двох куль), швидкості яких до удару $\vec{\vartheta}_1$ і $\vec{\vartheta}_2$, а після удару відповідно $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ і спрямовані вздовж лінії, яка з'єднує центри цих тіл. Будемо вважати систему замкненою і для цієї системи тіл застосуємо закон збереження імпульсу та закон збереження механічної енергії:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1 \cdot \vartheta_1^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot \vartheta_2^2}{2} = \dfrac{m_1 \cdot u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot u_2^2}{2} \\ m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + m_2 \cdot \vec{\vartheta}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2, \end{cases} \tag{4.50}$$

Перше рівняння системи (4.50) є скалярним, а друге рівняння – векторним. Перетворимо рівняння так, щоб вони обидва були векторними, а саме:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot \vartheta_1^2 + m_2 \cdot \vartheta_2^2 = m_1 \cdot u_1^2 + m_2 \cdot u_2^2 \\ m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + m_2 \cdot \vec{\vartheta}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 \end{array} \right\}, \tag{4.51}$$

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot (\vartheta_1^2 - u_1^2) = m_2 \cdot (u_2^2 - \vartheta_2^2) \\ m_1 \cdot (\vec{\vartheta}_1 - \vec{u}_1) = m_2 \cdot (\vec{u}_2 - \vec{\vartheta}_2) \end{array} \right\}, \tag{4.52}$$

звідки

$$\begin{cases} m_1 \cdot (\vec{\vartheta}_1 - \vec{u}_1)(\vec{\vartheta}_1 + \vec{u}_1) = m_2 \cdot (\vec{\vartheta}_2 - \vec{u}_2)(\vec{\vartheta}_2 + \vec{u}_2) \\ m_1 \cdot (\vec{\vartheta}_1 - \vec{u}_1) = m_2 \cdot (\vec{u}_2 - \vec{\vartheta}_2) \cdot \end{cases} \tag{4.53}$$

Поділивши перше рівняння на друге, одержуємо:

$$\vec{\vartheta}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{\vartheta}_2 . \tag{4.54}$$

Використовуємо рівняння (4.54) та друге рівняння системи (4.51) і одержуємо сумісну систему рівнянь:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + m_2 \cdot \vec{\vartheta}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 \\ \vec{\vartheta}_1 + \vec{u}_1 = \vec{\vartheta}_2 + \vec{u}_2 \end{array} \right\}. \tag{4.55}$$

Із другого рівняння системи (4.55) знаходимо $\vec{u}_1$:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_1 . \tag{4.56}$$

Підставляючи (4.56) у перше рівняння системи (4.55), одержуємо:

$$m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + m_2 \cdot \vec{\vartheta}_2 = m_1 \cdot (\vec{u}_2 + \vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_1) + m_2 \cdot \vec{u}_2 ,$$

$$m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + m_2 \cdot \vec{\vartheta}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_2 + m_1 \cdot \vec{\vartheta}_2 - m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 ,$$

$$2m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + (m_2 - m_1) \cdot \vec{\vartheta}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}_2 ,$$

звідки

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + (m_2 - m_1) \cdot \vec{\vartheta}_2}{m_1 + m_2} . \tag{4.57}$$

Оскільки задача є симетричною, то помінявши індекси з 1 на 2, одержуємо:

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2 \cdot \vec{\vartheta}_2 + (m_1 - m_2) \cdot \vec{\vartheta}_1}{m_1 + m_2} . \tag{4.58}$$

Таким чином, використовуючи рівняння (4.57) і (4.58) можна знайти швидкості тіл після абсолютно пружного удару. Проаналізуємо ці рівняння для двох кульок.

Зокрема, якщо $m_1 \neq m_2$ і друга кулька до удару була нерухомою ($\vec{\vartheta}_2 = 0$), то після удару кульки будуть рухатись з різними швидкостями, а саме:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \frac{2 \cdot m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1}{m_1 + m_2} \\ \vec{u}_1 &= \frac{(m_1 - m_2) \cdot \vec{\vartheta}_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} . \tag{4.59}$$

Якщо маси кульок однакові ($m_1 = m_2$) то рівняння (4.57) і (4.58) будуть мати такий вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \vec{\vartheta}_1 \\ \vec{u}_1 &= \vec{\vartheta}_2 \end{aligned}\right\} , \tag{4.60}$$

тобто кульки рівної маси “обмінюються” швидкостями.

4.6.2. Абсолютно непружне зіткнення

Для непружних зіткнень не виконується закон збереження механічної енергії, оскільки частина механічної енергії переходить у внутрішню, як правило, у теплову. Закон збереження імпульсу виконується, якщо тіла складають замкнену систему. Для такої системи тіл закон збереження імпульсу при непружному ударі можна записати у такій формі:

$$m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + m_2 \cdot \vec{\vartheta}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u}\,, \qquad (4.61)$$

де $\vec{u}$ – швидкість тіл після непружного зіткнення.

Якщо розглянути удар, який складається з двох етапів, то на першому його етапі виконується закон збереження механічної енергії, тобто кінетична енергія руху тіл переходить у деформацію, але деформація не є пружною, вона не зникає, форма тіл абсолютно не відновлюється і тіла рухаються як одне ціле. З рівняння (4.61) можна визначити швидкість тіл після удару:

$$\vec{u} = \frac{m_1 \cdot \vec{\vartheta}_1 + m_2 \cdot \vec{\vartheta}_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (4.62)$$

Кінетичну енергію рухомих тіл після непружного удару можна визначити так:

$$W_1 = \frac{m \cdot u^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \left(\frac{m_1 \cdot \vartheta_1 + m_2 \cdot \vartheta_2}{m_1 + m_2} \right)^2 =$$

$$= \frac{m_1^2 \cdot \vartheta_1^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \vartheta_1 \cdot \vartheta_2 + m_2^2 \cdot \vartheta_2^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)}\,. \qquad (4.63)$$

Втрати механічної енергії при непружному ударі можна знайти як різницю кінетичної енергії тіл до і після удару, а саме:

$$\Delta W = W - W_1 = \frac{m_1 \cdot \vartheta_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \vartheta_2^2}{2} - \frac{m \cdot u^2}{2}\text{, або}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot \vartheta_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \vartheta_2^2}{2} - \frac{m_1^2 \cdot \vartheta_1^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \vartheta_1 \cdot \vartheta_2 + m_2^2 \cdot \vartheta_2^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2)^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)}\,. \qquad (4.64)$$

Якщо друге тіло перед ударом було нерухомим $(\vartheta_2 = 0)$, то втрати механічної енергії першим тілом при непружному ударі становлять:

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot \vartheta_1^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 \cdot \vartheta_1^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot W_{k_1} .$$

Введемо поняття коефіцієнта корисної дії удару. Коли вважати, що у внутрішню перетворилася енергія ΔW, а повна енергія взаємодіючих тіл до удару при $\vartheta_2 = 0$ складала W_{k_1}, то коефіцієнт корисної дії такого удару можна визначити так:

$$\eta = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot W_{k1}}{W_{k1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} . \qquad (4.65)$$

Коли $m_2 \approx 0$, то $\eta \approx 0$, тобто вся кінетична енергія рухомого тіла переходить у кінетичну енергію системи двох тіл (наприклад, забивання паль тощо). І навпаки, коли $m_1 \approx 0,\ \ \eta \approx 1$. Тобто, коли тіло малої маси m_1 налітає на нерухоме тіло великої маси m_2, то вся його енергія переходить в деформацію (клепання, та ін. деформаційні роботи).

Лекція 5. ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

- ***Перетворення координат Галілея. Механічний принцип відносності (принцип відносності Галілея)***
- ***Досліди Фізо і Майкельсона. Постулати Ейнштейна***
- ***Перетворення Лоренца. Теорема складання швидкостей***
- ***Наслідки, які витікають з перетворень Лоренцо***
- ***Елементи динаміки у теорії відносності***

5.1. Перетворення координат Галілея. Механічний принцип відносності (принцип відносності Галілея)

Якщо системи відліку рухаються одна відносно іншої рівномірно та прямолінійно і в одній із них справедливі закони Ньютона, то ці системи є інерційними. Установлено, що в усіх інерційних системах відліку закони класичної динаміки мають однакову форму; в цьому суть ***механічного принципу відносності*** (***принципу відносності Галілея***).

Для його доведення розглянемо дві системи відліку: інерційну систему C (з координатами x, y, z), яку умовно будемо вважати нерухомою і систему C' (з координатами x', y', z'), яка рухається відносно C рівномірно і прямолінійно з швидкістю $\vec{u}$ ($\vec{u}$ = const). Відлік часу розпочнемо з моменту, коли початки координат обох систем збігаються, а швидкість $\vec{u}$ рухомої системи відліку C' спрямована вздовж осі Ox. Такі спрощення не впливають на основний результат, а лише зменшують математичні викладки. Нехай за нескінченно малий проміжок часу рухома система відліку C' перемістилася з положення O' в O'' (рис. 5.1). Віддаль $O'O'' = u \cdot dt$.

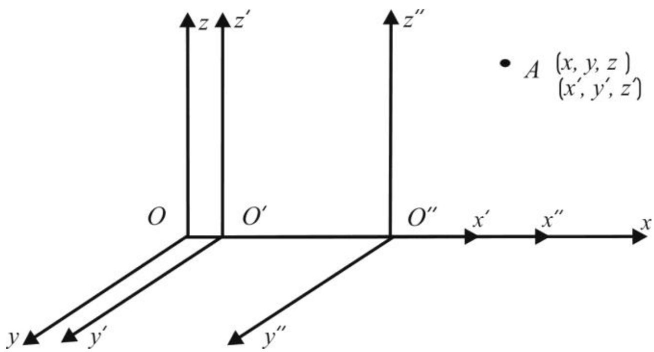

Рис. 5.1

Якщо в таких системах відліку є матеріальна точка A, рух якої ми вивчаємо, то зв'язок між її координатами в обох системах буде мати вигляд:

$$x = x' + udt, \quad \text{або} \quad x' = x - udt,$$
$$y = y', \qquad\qquad y' = y, \tag{5.1}$$
$$z = z', \qquad\qquad z' = z.$$

У класичній механіці передбачається, що час не залежить від відносного руху систем відліку, тобто рівняння (5.1) можна доповнити ще одним рівнянням:

$$t = t'. \tag{5.2}$$

Рівняння (5.1) і (5.2) називають ***перетвореннями координат Галілея***. Ці співвідношення справедливі лише для випадку класичної механіки ($u << c$).

Для того, щоб знайти швидкість матеріальної точки A необхідно взяти першу похідну від координат за часом:

$$\begin{cases} \vartheta_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx'}{dt} + \dfrac{d}{dt}(u \cdot dt) = \vartheta'_x + \dfrac{d}{dt}(u \cdot dt) \\ \vartheta_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{dt} = \vartheta'_y \\ \vartheta_z = \vartheta'_z \end{cases}. \tag{5.3}$$

Якщо прийняти швидкість постійною ($\vec{u} = \mathrm{const}$), то систему рівнянь (5.3) можна записати у такій формі:

$$\begin{cases} \vartheta_x = \vartheta'_x + u \\ \vartheta_y = \vartheta'_y \\ \vartheta_z = \vartheta'_z \end{cases}.$$

У векторній формі ця система рівнянь матиме вигляд:

$$\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}' + \vec{u}. \tag{5.4}$$

Рівняння (5.4) називають ***теоремою складання швидкостей*** у класичній механіці; де $\vec{\vartheta}$ – швидкість точки відносно нерухомої системи відліку C (абсолютна швидкість); $\vec{\vartheta}'$ – швидкість точки відносно рухомої системи відліку C' (відносна швидкість), $\vec{u}$ – швидкість рухомої системи відліку C' відносно нерухомої системи відліку C (переносна швидкість). На підставі теореми складання швидкостей (5.4): абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної та переносної швидкостей:

$$\vec{\vartheta}_{абс.} = \vec{\vartheta}'_{відн.} + \vec{u}_{перен.}.$$

Продиференціювавши вираз (5.4) за часом, одержимо:

$$\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d\vec{\vartheta}'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}, \quad \text{оскільки} \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = 0, \text{ то маємо:}$$

$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{5.5}$$

Отже, прискорення точки A у системах відліку C і C', які рухаються одна відносно одної рівномірно і прямолінійно, однакові. Тобто, одна й та сама сила викликає однакові прискорення точки відносно до всіх систем, які знаходяться в стані спокою або в стані рівномірного прямолінійного руху.

Таким чином, в інерційних системах відліку закони Ньютона виконуються однаково (одна й та сама сила викликає однакові прискорення). У цьому випадку кажуть, що закони Ньютона є ***інваріантними*** щодо перетворень координат Галілея.

Оскільки закони Ньютона виконуються однаково в усіх інерційних системах відліку, то за допомогою цих законів неможливо розрізнити серед всіх інерційних систем відліку ті, які знаходяться у стані спокою від тих, які рухаються рівномірно і прямолінійно. Галілей звернув увагу, що знаходячись у даній інерційній системі відліку ніякими механічними способами неможливо встановити чи знаходиться система в стані спокою, чи рухається рівномірно і прямолінійно. Це положення називають ***принципом відносності Галілея***.

5.2. Досліди Фізо і Майкельсона. Постулати Ейнштейна

З розвитком оптики, апогей якого випадає на середину XIX ст. все частіше фізики задавали запитання: якщо не можливо, знаходячись в інерційній системі відліку, ніякими механічними способами встановити чи рухається вона чи ні, то чи не можна це зробити оптичними методами? Для відповіді на це запитання було поставлено ряд дослідів. Ми зупинимось на якісному розгляді дослідів Фізо і Майкельсона, оскільки вони викликали суперечність і привели Ейнштейна до нових поглядів на механіку. З теорії механічних хвиль випливає, що швидкість їх поширення визначається пружними модулями і густиною речовини. Так, швидкість повздовжньої механічної хвилі визначаються формулою:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{5.6}$$

де E – модуль Юнга; ρ – густина речовини.

Оскільки швидкість світла є великою $(\vartheta = 3\cdot 10^8 \text{м/с})$, то якщо хвилі переносяться якоюсь матеріальною субстанцією, то модуль пружності такого середовища повинен бути дуже великим, а густина дуже малою. Таке середовище було названо ***ефіром*** і йому приписувались специфічні властивості. Такий ефір повинен пронизувати всі тіла і весь світовий простір, де тільки може поширюватись світло.

Спочатку ефір уявляли як деяке механічне середовище, в якому поширюються пружні хвилі які ми сприймаємо як світлові. Потім, у зв'язку з розвитком електромагнітної теорії, ефір мислився як електромагнітний, властивості якого визначаються рівняннями Максвелла.

Виникло питання, чи захоплюють ефір тіла при механічному русі, чи ефір залишається в стані спокою? Якщо ефір залишається нерухомим (тобто ефір не захоплюється), то швидкість світла у відношенні до ефіру є завжди однаковою, тобто є абсолютною $(\vartheta_{абс.})$. Швидкість світла відносно тіла буде відносною, тобто $\vartheta_{відн.}$, а швидкість руху тіла є переносною $\vartheta_{перен}$, тоді

$$\vec{\vartheta}_{абс.} = \vec{\vartheta}'_{відн.} + \vec{u}_{перен.}.$$

Знаючи швидкість світла, та визначаючи швидкість світла у рухомій системі відліку можна було б визначити і швидкість самої системи відліку (тобто переносну швидкість).

Для того, щоб з'ясувати чи захоплюється ефір при механічних рухах, Фізо у 1851 р. провів дослід, схема якого показана на рис. 5.2.

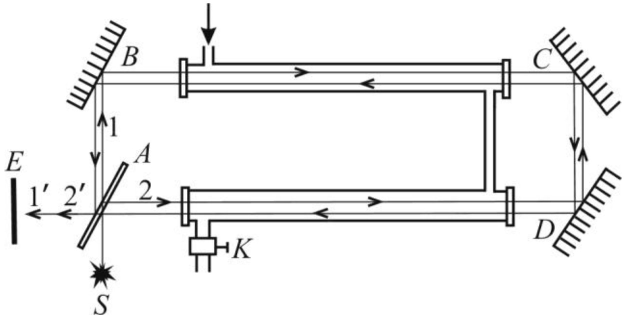

Рис. 5.2

Тут S – джерело світла, A – напівпрозоре дзеркало, B, C, і $Д$ – непрозорі дзеркала, K – кран.

Від джерела, світло, поділившись на дві половини, проходить через кювети з водою як за течією, так і назустріч їй (промені 1 і 2). У точках екрана ці промені інтерферують, тобто утворюють інтерференційну картину, яка являє собою ряд паралельних смуг. Відкривши кран, шляхи променів 1 та 2 стають нерівноцінними (промінь 2 поширюється проти течії води, а промінь 1 – за течією). При таких умовах повинна б бути додаткова різниця фаз, а інтерференційні смуги повинні б зміститися.

Позначимо коефіцієнт захоплення ефіру водою через α. Це означає, що коли вода почала рухатись зі швидкістю ϑ, то ефір почав рухатись зі швидкістю $\vartheta_1 = \alpha \cdot \vartheta$. Ефір залишиться нерухомим, якщо $\alpha = 0$ і повністю захоплюється, якщо $\alpha = 1$. Вимірювання Фізо показали, що ефір при механічному русі лише частково захоплюється, причому так, що:

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad (5.7)$$

де n – показник заломлення речовини (в дослідах Фізо показник заломлення води).

Для земної атмосфери ($n = 1$) і тоді $\alpha = 0$, тобто ефір земною атмосферою не захоплюється, тому з'явилась можливість знайти експериментально швидкість руху Землі відносно нерухомого ефіру. Це була б абсолютна швидкість Землі. Такий дослід у 1881 р. був проведений Майкельсоном. Для цього він сконструював спеціальний інтерферометр, схема роботи якого показана на рис. 5.3.

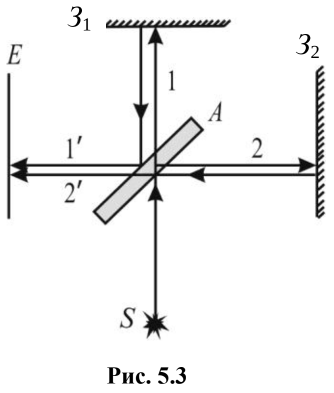

Рис. 5.3

Світло від джерела S проходить через напівпрозору пластинку A і ділиться на два промені 1 та 2. Ці промені, відбиваючись від дзеркал $З_1$ та $З_2$, дають інтерференційну картину на екрані E. Інтерферометр був розміщений у ванні з ртуттю так, що напрями 1 та 2 можна змінювати у просторі. Один раз промінь 1 був спрямований за напрямом руху Землі (промінь 2 був перпендикулярний руху), а потім промінь 2 спрямовувався за напрямом руху Землі (промінь 1 був перпендикулярний руху). Оскільки Земля не захоплює ефір, то ці напрями нерівноправні, тому інтерференційні смуги повинні зміщуватись. Довжина плечей 1 та 2 були такими, що цей зсув мав би складати 80 % від відстані між смугами. Досліди показали, що ніяких зсувів немає, тобто плечі 1 та 2 рівноправні. Таким чином, досліди Фізо і Майкельсона суперечать один одному. Варто відзначити, що сумнівів у результатах цих дослідів немає. Досліди багаторазово перевірялись.

Розв'язати суперечність між дослідами Фізо і Майкельсона зумів Ейнштейн лише у 1905 році, створивши при цьому теорію відносності.

Теорія відносності базується на двох постулатах, які називають ***постулатами Ейнштейна***:

1) ніякими фізичними дослідами, знаходячись всередині інерційної системи відліку неможливо встановити, чи знаходиться ця система у стані спокою, чи рухається рівномірно і прямолінійно;

2) швидкість світла у вакуумі є величиною постійною і однаковою в усіх інерційних системах відліку.

Перший постулат є узагальненням принципу відносності Галілея. Другий постулат є результатом дослідів Фізо і Майкельсона, на основі цього постулату можна обґрунтувати, що досліди Фізо та Майкельсона не суперечать один одному.

5.3. Перетворення Лоренца. Теорема складання швидкостей у теорії відносності

Перетворенням координат Галілея суперечать постулати Ейнштейна. Швидкість світла, як будь-якого механічного руху, повинна складатися з відносного і переносного руху, що суперечить другому постулату. Перш за все із постулатів Ейнштейна випливає, що час у різних системах відліку різний. Справді, нехай джерело світла знаходиться у початку координат рухомої C' і нерухомої C систем відліку, які у початковий момент часу збігаються. У момент часу $t = 0$ ввімкнено джерело світла. За час dt рухома система координат C' переміститься з положення O' у O'', а світло досягне точки A (рис. 5.4).

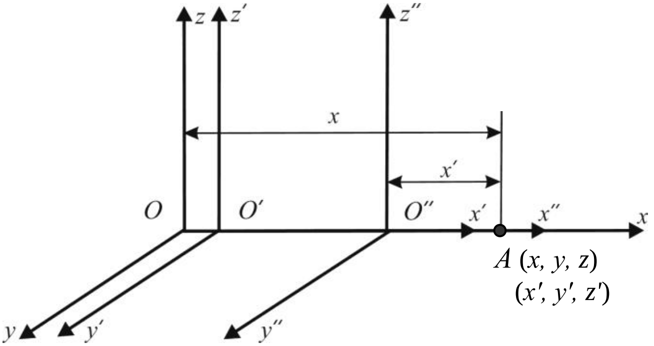

Рис. 5.4

У нерухомій системі відліку відстань до точки A дорівнює:

$$x = \vartheta_x \cdot t, \tag{5.8}$$

а у рухомій системі відліку:

$$x' = \vartheta'_x \cdot t'. \tag{5.9}$$

На підставі другого постулату Ейнштейна:

$$\vartheta_x = \vartheta'_x, \tag{5.10}$$

тоді

$$x - x' = \vartheta_x (t - t'). \tag{5.11}$$

Оскільки $x \neq x'$, то й $t \neq t'$. Досліджуючи питання переходу від однієї системи відліку до другої, Ейнштейн встановив, що його постулати є інваріантними до перетворень координат Лоренца, які були запропоновані для розв'язання однієї з задач електродинаміки. Перетворенням Лоренца задовольняють постулати Ейнштейна (формули представлені для випадку, коли C' рухається відносно C з швидкістю u вздовж осі Ox.

Перетворення Лоренца мають вигляд:

$$C' \to C \qquad\qquad C \to C'$$

$$x = \frac{x' + u \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$y = y', \quad \text{або} \quad y' = y, \tag{5.12}$$

$$z = z', \qquad z' = z,$$

$$t = \frac{t' + \frac{x' \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{x \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

де c – швидкість світла.

Покажемо, що перетворення Лоренца дійсно задовольняють другий постулат Ейнштейна. Підставимо у рівняння (5.9) $x' = \vartheta'_x \cdot t' = c \cdot t'$ значення x' та t' з системи (5.12). Тепер одержуємо:

$$\frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = c \frac{t - \frac{x \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{5.13}$$

звідки

$$x - u \cdot t = c \cdot t - \frac{x \cdot u}{c}. \qquad (5.14)$$

Оскільки $x = c \cdot t$, то рівняння (5.10) є тотожністю, тобто:

$$x - u \cdot t = x - u \cdot t,$$

і виконується при будь-яких значеннях x та t. Таким чином, перетворення Лоренца задовольняють умову (5.10), тобто другий постулат Ейнштейна.

У випадку, коли $\beta = \frac{u}{c} << 1$, перетворення Лоренца переходять у класичні перетворення Галілея (у цьому полягає суть ***принципу відповідності***), які є граничним випадком перетворень Лоренца.

Розглянемо складання швидкостей у теорії відносності. Нехай швидкість матеріальної точки A (див. рис. 5.1) відносно нерухомої системи відліку буде $\vartheta = \frac{dx}{dt}$ (абсолютна швидкість), а швидкість точки відносно рухомої системи відліку (відносна швидкість) є $\vartheta' = \frac{dx'}{dt'}$. Тоді, користуючись перетвореннями Лоренца, маємо:

$$\vartheta' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\dfrac{dx - u \cdot dt}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\dfrac{dt - \dfrac{u \cdot dx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{dx - u \cdot dt}{dt - \dfrac{u \cdot dx}{c^2}} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - u}{1 - \dfrac{u}{c^2} \cdot \dfrac{dx}{dt}} = \frac{\vartheta - u}{1 - \dfrac{u \cdot \vartheta}{c^2}}. \qquad (5.15)$$

Аналогічно можна одержати:

$$\vartheta = \frac{\vartheta' + u}{1 + \dfrac{u \cdot \vartheta'}{c^2}}. \qquad (5.16)$$

При малих швидкостях, коли $u << c$ і $\vartheta << c$ рівняння (5.15) і (5.16) переходять у теорему складання швидкостей у класичній механіці. Рівняння (5.15) і (5.16) також знаходяться в узгоджені з другим постулатом Ейнштейна. Справді, коли $\vartheta = c$, то:

$$\vartheta' = \frac{\vartheta - u}{1 - \dfrac{u \cdot \vartheta}{c^2}} = \frac{c - u}{1 - \dfrac{u}{c}} = c \cdot \frac{c - u}{c - u} = c. \qquad (5.17)$$

5.4. Наслідки, які витікають з перетворень Лоренца

Одним з важливих наслідків теорії відносності Ейнштейна є те, що відлік часу у різних системах відліку різний. Співвідношення для часу в перетвореннях Лоренца показують, що подія, яка відбувається у різних точках однієї системи (наприклад, у нерухомій) одночасно, є неодночасною для другої системи (рухомої). Справді, при даному значенні t (одночасна подія у системі C) і значення t' будуть різними при різних x. Це означає, що подія, яка відбувається одночасно у різних точках системи C є неодночасною для точок системи C'. Інтервали часу між різними подіями у різних системах відліку також будуть неоднаковими.

Якщо у точці x нерухомої системи відліку проходить подія в інтервалі часу

$$\tau = t_2 - t_1, \tag{5.18}$$

де t_1 – час початку події, t_2 – час кінця події. Відповідний інтервал часу в рухомій системі відліку:

$$\tau' = t_2' - t_1'. \tag{5.19}$$

Використовуючи рівняння $t' = \dfrac{t - \dfrac{x \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, яке описує зв'язок часу t і t' для точки x, маємо:

$$\tau' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \dfrac{x \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - \dfrac{x \cdot u}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.20}$$

Співвідношення (5.20) показує, що інтервал часу τ' (час перебігу події у точці x), відрахований у рухомій системі відліку не дорівнює, а більший від інтервалу часу τ, відрахований у нерухомій системі відліку. Інтервал часу є найменшим у системі відліку, відносно якої точка A нерухома.

Оцінимо довжину тіла у різних системах відліку C і C'.

Для цього розглянемо нерухомий стрижень, що розміщений вздовж осі Ox' у рухомій системі відліку C'. Довжина стрижня у системі C':

$$l_0' = x_2' - x_1', \tag{5.21}$$

де x_1' та x_2' – координати початку і кінця стрижня, які не змінюються з часом t', а індекс 0 вказує, що у системі відліку C', стрижень перебуває у спокої.

Визначимо довжину стрижня у системі C, відносно якої він рухається зі швидкістю u. Для цього необхідно виміряти координати його кінців x_1 та x_2 у системі C в один і той самий момент часу t. Їх різниця буде довжиною стрижня у нерухомій системі відліку C:

$$l = x_2 - x_1 . \tag{5.22}$$

Використовуючи перетворення Лоренца (5.12), одержуємо:

$$l_0' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - u \cdot t}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - u \cdot t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

тобто:

$$l_0' = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{5.23}$$

Із співвідношення (5.23) витікає, що $l < l_0'$, тобто довжина стрижня у напрямі руху найбільша в системі відліку, відносно якої стрижень нерухомий. Тобто, стрижень у напрямі руху скорочується.

Таким чином, у теорії відносності довжина та інтервал часу є величинами відносними, значення яких у різних системах відліку неоднакове. У теорії відносності є величина (просторово-часова), яка не залежить від вибору системи відліку, тобто є інваріантом у відношенні до перетворень Лоренца. Вона називається ***інтервалом*** і дорівнює:

$$\Delta = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2} . \tag{5.24}$$

Інтервал є фізичною величиною у чотиривимірному просторі, координатами якої є просторові координати (x, y, z) і часова координата (t).

5.5. Елементи динаміки у теорії відносності

У механіці Ньютона вважалось, що маса тіла не залежить від швидкості. Однак, при швидкостях, порівнянних зі швидкістю світла, як показав Ейнштейн, маса тіла значно залежить від швидкості. Ця залежність має вигляд:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{5.25}$$

де m – маса тіла, яке рухається зі швидкістю u; m_0 – маса тіла, яке є нерухомим.

Якщо записати рівняння Ньютона у такому вигляді:

$$F_x = \frac{d}{dt}(m \cdot \vartheta_x), \quad F_y = \frac{d}{dt}(m \cdot \vartheta_y), \quad F_z = \frac{d}{dt}(m \cdot \vartheta_z) \tag{5.26}$$

і використати рівняння (5.25), тобто залежність маси від швидкості, то рівняння (5.26) стають інваріантними відносно перетворень Лоренца. Залежність маси від швидкості призводить до такого наслідку: зміна швидкості зумовлює зміну маси, а, отже, призводить до зміни величини енергії. Таким чином, між масою та енергією повинен існувати зв'язок.

Ейнштейн показав, що цей зв'язок виражається рівнянням:

$$E = m \cdot c^2, \tag{5.27}$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

Співвідношення (5.27) має універсальний характер, тобто стосується всіх можливих форм енергії. На підставі рівняння (5.27) можна стверджувати, що з енергією, якої б форми вона не була, пов'язана маса, і навпаки, з будь-якою масою пов'язана відповідна кількість енергії.

У теорії відносності тіло, яке рухається зі швидкістю ϑ, має кінетичну енергію, відмінну від $\frac{m_0 \cdot \vartheta^2}{2}$ (це у механіці Ньютона), де m_0 – маса спокою. З масою спокою пов'язана внутрішня енергія: $E_0 = m_0 c^2$ (енергія спокою тіла). Тоді кінетична енергія тіла дорівнює різниці між його повною енергією, та енергією спокою, тобто:

$$E_к = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2. \tag{5.28}$$

Оскільки $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то:

$$E_k = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \tag{5.29}$$

Повна енергія тіла дорівнює:

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (5.30)$$

У механіці Ньютона імпульс тіла дорівнює $\vec{K} = m_0 \cdot \vec{\vartheta}$, а його зв'язок з кінетичною енергією визначається так:

$$E_k = \frac{m_0 \cdot \vartheta^2}{2} = \frac{m_0^2 \cdot \vartheta^2}{2 \cdot m_0} = \frac{K^2}{2 \cdot m_0},$$

звідки:

$$K = \sqrt{2 \cdot m_0 \cdot E_k}. \qquad (5.31)$$

У теорії відносності цей зв'язок має інший вигляд. Для його знаходження використаємо рівняння (5.30) $E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, звідки:

$$E^2(1-\beta^2) = E_0{}^2 \qquad \text{або} \qquad E^2 - (E\beta)^2 = E_0^2.$$

Оцінимо величину добутку $E \cdot \beta$:

$$E \cdot \beta = m \cdot c^2 \cdot \frac{u}{c} = m \cdot c \cdot u = K \cdot c.$$

Тоді $E^2 - K^2 \cdot c^2 = E_0^2$, звідки:

$$K = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c}\sqrt{(E+E_0)\cdot(E-E_0)}.$$

Оскільки $E_k = E - E_0$, а $E = E_k + E_0$ одержуємо:

$$K = \frac{1}{c}\sqrt{E_k \quad E_k + 2E_0}. \qquad (5.32)$$

Отже, вираз релятивістського співвідношення між повною енергією та імпульсом точки $\left(K = \frac{1}{c}\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)} \right)$ відрізняється від співвідношення між енергією та імпульсом у класичній механіці $K = \sqrt{2 \cdot m_0 \cdot E_k}$.

Вираз для релятивістського імпульсу можна також записати у формі, характерній для класичної фізики: $\vec{K} = m \cdot \vec{\vartheta}$, де m описується рівнянням (5.25).

Природно, що прийняття таких радикальних змін у механіці лише для того, щоб вирішити суперечність у дослідах Фізо та Майкельсона нерезонно. Необхідно привести багато експериментальних фактів, які підтверджують наслідки, що витікають із постулатів Ейнштейна. Такі факти були знайдені. Найбільш важливим наслідком теорії відносності є встановлення залежності маси тіла від швидкості. У період створення теорії відносності Ейнштейном, великих швидкостей $(u \sim c)$ у лабораторних умовах не могли досягти. З часом розвинулась техніка прискорення елементарних часток, і залежність маси від швидкості легко була виявлена і, мало того, в циклотронах ця залежність призвела до зміни періоду обертання частинки у магнітному полі. Таку зміну періоду (тобто залежність маси від швидкості) прийшлось “ліквідовувати” спеціальною синхронізацією (Векслер). А сам циклотрон перейшов у ранг нових прискорювачів заряджених частинок – синхротрон та синхрофазотрон.

Зв’язок між масою та енергією у теперішній час можна вважати надійно підтвердженим експериментально. В області ядерних реакцій у 1930 р. Кокрофт показав, що, коли ядро водню проникає у ядро літію, який має масу 7, 01815 ат. од. м., відбувається утворення двох ядер гелію. Ядра водню мали кінетичну енергію $8 \cdot 10^5$ еВ. Підраховуючи енергетичний баланс Кокрофт виявив, що у спокої ядра літію і водню мають масу m_1 = 8,02629 ат. од. м., а маса двох ядер гелію m_2 = 8,00772 ат. од. м. Таким чином, зміна маси складає $m_1 - m_2 = 0,01857$ ат. од. м. Така зміна маси пов’язана з енергією $\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 16,8$ МеВ. Саме таку кінетичну енергію мали ядра гелію в результаті такої ядерної реакції.

Експериментальне підтвердження знайшов той факт, що у різних системах відліку час протікає по різному.

Відносно до нерухомої системи проміжок часу має найменше значення. При дослідженні космічного випромінювання були виявлені частинки, які назвали мюонами або μ-мезонами. Ці частинки нестійкі і розпадаються. Час їх життя виміряний і складає $\tau \sim 2,3 \cdot 10^{-6}$ с. За такий малий час мюони не можуть пройти велику відстань. Навіть якби вони рухались зі швидкістю світла, то змогли б пройти шлях приблизно 700 метрів. У дійсності мюони приходять на землю з висоти 20...30 км. Пояснення цього факту може бути лише у межах теорії відносності, де період напіврозпаду мюонів з позицій спостерігача на Землі (нерухомого) має інше значення, ніж для спостерігача, який би рухався разом з мюоном.

У цих прикладах приведені лише перші експериментальні підтвердження основних висновків теорії відносності. Тепер таких підтверджень є дуже багато і положення теорії відносності Ейнштейна можна вважати істиною.