

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И  
ИНФОРМАТИКИ»

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1**

по дисциплине “Моделирование”

Выполнил студент Рудцких Владислав Евгеньевич

Ф.И.О.

Группы ИВ-222

Работу принял Ассистент кафедры ВС Уженцева А. В.

подпись

Защищена \_\_\_\_\_

Оценка

## Задание

Задание 10:

10.

$$f(x) = \begin{cases} a(x - 0.3), & \text{при } x \in (0.3, 1); \\ b(x - 1.5)^2, & \text{при } x \in (1, 1.5). \end{cases}$$

$0.7a = b/4.$

Реализовать генератор случайных чисел на распределении.

# Ход работы

Выполнение вычислений:

- 1) Нахождение функции распределения
- 2) По функции распределения найти обратную функцию
- 3) Реализовать датчик случайных чисел

Задание №10 (лаб. 1)

Дудкин В. В.  
ИВ222

$$f(x) = \begin{cases} a(x-0,3), & \text{при } x \in (0,3;1); \\ b(x-1,5)^2, & \text{при } x \in (1,5;2); \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$0,7a = \frac{b}{4} \quad b = 2,8a$

$$\int_{0,3}^1 a(x-0,3)dx + \int_1^2 b(x-1,5)^2 dx = 1$$

1)  $a \int_{0,3}^1 (x-0,3)dx = a \left( \int_{0,3}^1 x dx - \int_{0,3}^1 0,3 dx \right) = a \left( \frac{x^2}{2} - 0,3x \right) \Big|_{0,3}^1 = \frac{a x^2}{2} - 0,3ax \Big|_{0,3}^1 =$

$$= \frac{a \cdot 1^2}{2} - \frac{3}{10} a \cdot 1 - \left( \frac{a \cdot 0,3^2}{2} - \frac{3}{10} a + \frac{9}{100} a \right) = \frac{a}{2} - \frac{3}{10} a - \left( \frac{9}{200} a - \frac{9}{100} a \right) = \frac{49}{200} a = 0,245a$$

2)  $b \int_1^2 (x-1,5)^2 dx = b \int_1^2 (x^2 - 3x + \frac{9}{4}) dx = b \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_1^2 = \frac{b \cdot 1,5^2}{3} - \frac{3b \cdot 1,5^2}{2} + \frac{9}{4} b \cdot 1,5 -$

$$- \left( \frac{b}{3} - \frac{3b}{2} + \frac{9}{4} b \right) = \frac{9b}{8} - \frac{27b}{8} + \frac{27}{8} b - \frac{13}{12} b = \frac{27b - 81b + 81b - 26b}{24} = \frac{b}{24}$$

$b = 2,8a$

2) Подставим  $b$ :  $\frac{2,8a}{24}$

$(1) + (2) = 1$

$$0,245a + \frac{2,8a}{24} = 1$$

$$\frac{49a}{200} + \frac{7a}{60} = 1$$

$$\frac{147a + 70a}{600} = 1$$

$$a = \frac{600}{217}, \text{ тогда } b = 2,8a = \frac{28}{10} \cdot \frac{600}{217} = \frac{1680}{217} = \frac{240}{31}$$

Найдем функцию распределения;

н.к.  $F(t) = 0$ , при  $t \leq 0,3$ , не при  $x \leq 0,3$   $f(x) = 0$ , при  $0,3 \leq x \leq 1$ :  $F(x) = \int_{0,3}^x a(t-0,3)dt =$

$$= a \int_{0,3}^x t dt - \int_{0,3}^x 0,3 dt = a \left( \frac{t^2}{2} - 0,3t \right) \Big|_{0,3}^x = \frac{ax^2}{2} - \frac{3}{10} ax - \left( \frac{a \cdot 0,3^2}{2} - \frac{3}{10} a \cdot 0,3 \right) = \frac{ax^2}{2} - \frac{3}{10} ax + \frac{9}{200} a =$$

$$= \frac{a}{2} (x-0,3)^2$$

$F(1) = \frac{a}{2} (1-0,3)^2 = \frac{0,49a}{2} = 0,245a$

Подставим  $a$ :  $F(1) = 0,245 \cdot \frac{600}{217} = \frac{147}{217}$

Для  $1 < x \leq 1,5$ :

$$F(t) = F(1) + \int_1^x b(t-1,5)^2 dt$$

Подставим  $b$ :

$$F(t) = 0,245a + b \left( \int_1^x t^2 dt - \int_1^x 3t dt + \int_1^x \frac{9}{4} dt \right) = 0,245a + b \left( \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + \frac{9}{4}t \right) \Big|_1^x = 0,245a + \frac{14ax^3}{15} - \frac{27}{5} ax^2 +$$

$$+ \frac{63}{10} ax - \left( \frac{14a}{15} - \frac{27}{5} a + \frac{63}{10} a \right) = \frac{14ax^3}{15} - \frac{27}{15} ax^2 + \frac{63}{10} ax - \frac{9a}{30} + 0,245a$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0,3 \\ \frac{a}{2}(x-0,3)^2, & 0,3 \leq x \leq 1 \\ 0,245a + \frac{2,8a}{3}((x-1,5)^3 + 0,125), & 1 < x \leq 1,5 \\ 1, & x > 1,5 \end{cases} \quad \text{где } a = \frac{100}{2+x}$$

Найдем обратную функцию:  $F^{-1}(x)$

$$1) y = \frac{a}{2}(x-0,3)^2 \quad | \cdot \frac{2}{a}$$

$$(x-0,3)^2 = \frac{2y}{a}$$

т.к.  $x > 0,3$

$$x-0,3 = \sqrt{\frac{2y}{a}}$$

$$x = 0,3 + \sqrt{\frac{2y}{a}}$$

$$2) y = 0,245a + \frac{b}{3}((x-1,5)^3 + 0,125)$$

$$y - 0,245a = \frac{b}{3}((x-1,5)^3 + 0,125)$$

$$(x-1,5)^3 = \frac{3(y-0,245a)}{b} - 0,125$$

т.к.  $x < 1,5$

$$x-1,5 = -\sqrt[3]{0,125 - \frac{3(y-0,245a)}{2,8a}}$$

$$x = 1,5 - \sqrt[3]{\frac{1}{8} - \frac{3(y-0,245a)}{2,8a}}$$

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} 0,3 + \sqrt{\frac{2x}{a}} & , \text{ при } 0 < x \leq 0,245a \\ 1,5 - \sqrt[3]{\frac{1}{8} - \frac{3(x-0,245a)}{2,8a}} & , \text{ при } 0,245a < x < 1 \end{cases}$$

Рисунок 1. Нахождение функций распределения и обратной

Алгоритм:

Функция распределения  $F(x)$  находится интегрированием плотности вероятности  $f(x)$  на каждом участке с учетом условий нормировки и непрерывности. Для первого участка  $(0.3; 1]$  с плотностью  $f(x)=a(x-0.3)$  интегрирование дает  $F(x)=a/2 (x-0.3)^2$ , для второго участка  $[1; 1.5)$  с плотностью  $f(x)=b(x-1.5)^2$  получаем  $F(x)=F(1) + b/3 ((x-1.5)^3 + 0.125)$ , где  $F(1)=0.245a$ . Параметры  $a$  и  $b$  определяются из условия нормировки интеграла от  $0.3$  до  $1.5$   $\int f(x)dx = 1$  и заданного соотношения  $0.7a = b/4$ , откуда  $a = 600/217$ ,  $b = 1680/217$ ,  $F(1) = 147/217$ . Обратная функция  $F^{-1}(y)$  для метода обратного преобразования находится решением уравнений  $y = F(x)$  на каждом участке: при  $0 < y \leq 147/217$  из первого участка получаем  $x = 0.3 + \sqrt{2y/a}$ , при  $147/217 < y < 1$  из второго участка получаем  $x = 1.5 - \sqrt[3]{(1/8 - 3(y - 147/217)/b)}$ , что позволяет генерировать случайные числа с заданным распределением.

# Программная реализация

## Алгоритм программы:

### 1. Задание параметров распределения

- a. Определяются константы  $a$  и  $b$ , полученные из условия нормировки
- b. Вычисляется значение функции распределения в граничной точке  $f_1 = F(1)$ , разделяющее первый и второй участки

### 2. Инициализация генератора случайных чисел

- a. Создается генератор псевдослучайных чисел

### 3. Цикл генерации заданного количества чисел

- a. Для каждого элемента выборки выполняется:

#### а) Генерация равномерного числа

- b. Получается случайное число  $y$ , равномерно распределенное на интервале  $[0, 1)$

#### б) Выбор участка по значению $y$

- c. Если  $y \leq f_1$ , то используется формула для первого участка
- d. Если  $y > f_1$ , то используется формула для второго участка

#### в) Вычисление значения $x$ по обратной функции

- e. Для первого участка:  $x = 0.3 + \sqrt{(2y/a)}$
- f. Для второго участка:  $x = 1.5 - \sqrt[3]{(1/8 - 3(y - f_1))/b)}$

#### г) Сохранение результата

- g. Пара  $(x, y)$  записывается в файл

### 4. Завершение работы

- a. Закрывается файл с результатами
- b. Программа завершает выполнение

Полученный файл содержит 50000 сгенерированных значений, которые можно использовать для построения гистограммы, эмпирической функции распределения и проверки соответствия теоретическому закону.



# Результат

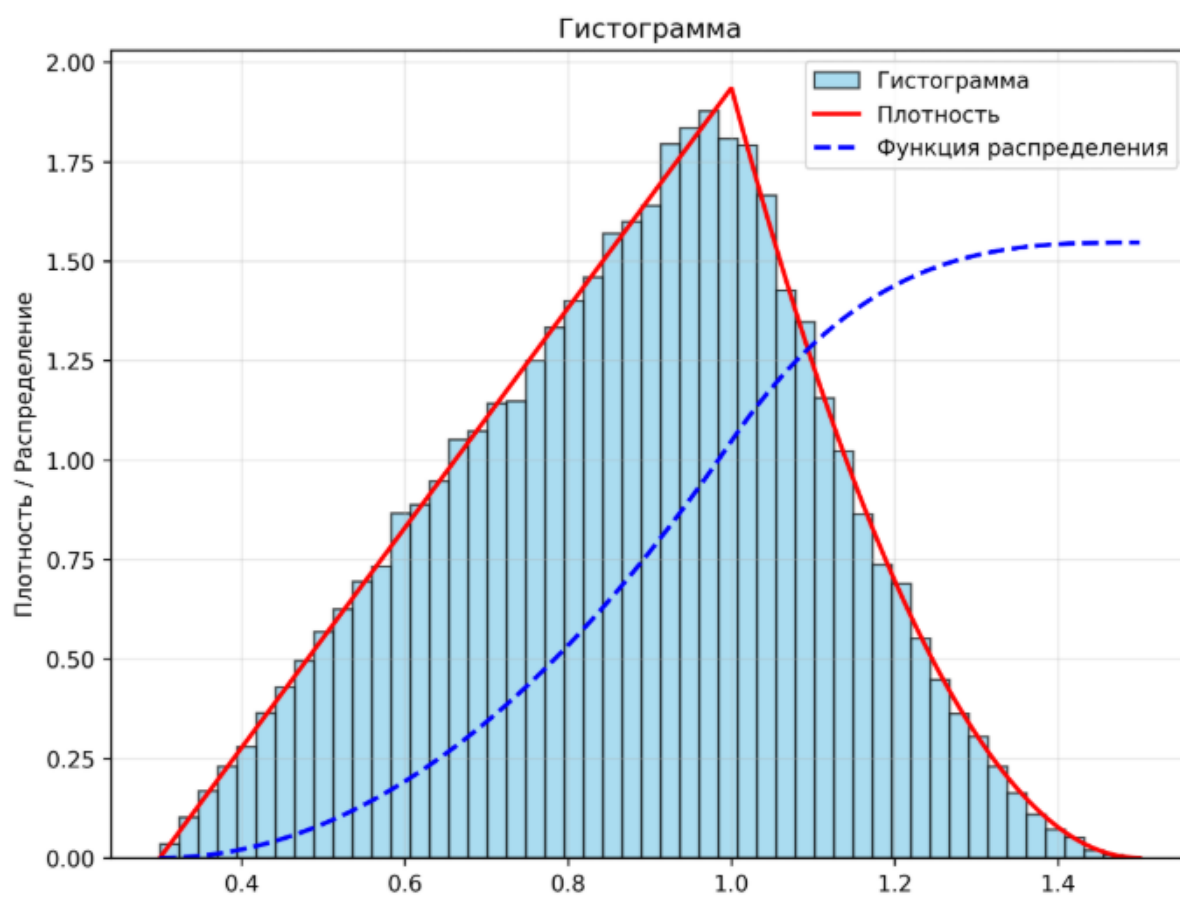


Рисунок 2. Гистограмма



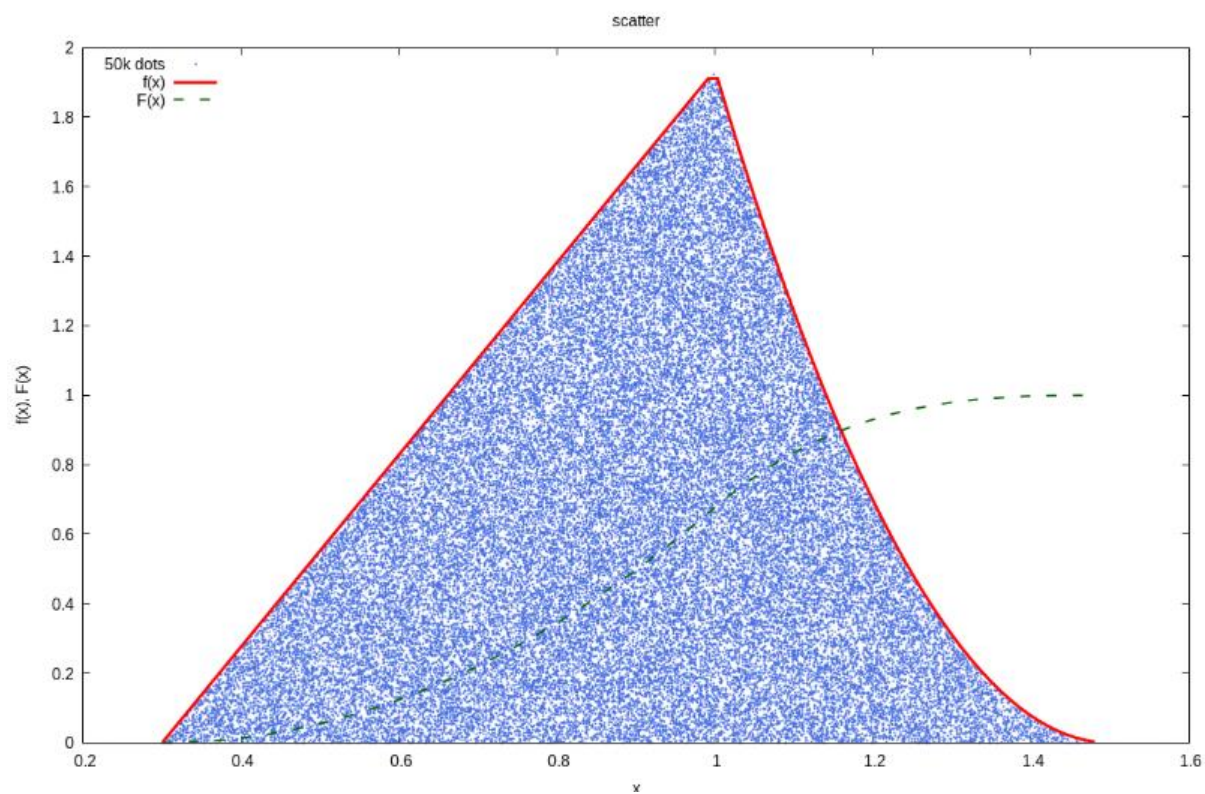


Рисунок 3. Распределение точек (Выборка 50к точек)

## Вывод

В ходе выполнения работы был успешно реализован генератор случайных чисел методом обратного преобразования для распределения с заданной кусочно-заданной плотностью вероятности.

# Приложение

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <random>
#include <algorithm>
#include <iomanip>

using namespace std;
const double a = 600.0 / 217.0;
const double b = 1680.0 / 217.0;
const double f_1= 147.0 / 217.0;
void generate_samples(int n) {
    random_device rd;
    mt19937 gen(rd());
    uniform_real_distribution<> dis(0.0, 1.0);

    double x = 0;
    ofstream file("gen_data.txt");

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double y = dis(gen);

        if (y <= f_1) {
            // x = 0.3 + sqrt(2u/a)
            x = 0.3 + sqrt(2.0 * y / a);
            file << x << ' ' << y << '\n';
        } else {
            // x = 1.5 - (1/8 - 3(y-f_1)/b)^(1/3)
            double x_temp = 1.0/8.0 - 3.0 * (y - f_1) / b;
            x = 1.5 - cbrt(x_temp);
            file << x << ' ' << y << '\n';
        }
    }
    file.close();
}

int main() {
    const int N = 50000;

    generate_samples(N);

    return 0;
}
```