

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И
ИНФОРМАТИКИ»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

по дисциплине “Моделирование”

Выполнил студент Рудских Владислав Евгеньевич
Ф.И.О.

Группы ИВ-222

Работу принял Ассистент кафедры ВС Уженцева А. В.
подпись

Защищена _____

Оценка

Новосибирск – 2026

Задание

Задание 10:

10.

$$f(x) = \begin{cases} a(x - 0.3), & \text{при } x \in (0.3, 1); \\ b(x - 1.5)^2, & \text{при } x \in (1, 1.5). \\ 0.7a = b/4. \end{cases}$$

Реализовать генератор случайных чисел на распределении.

Ход работы

Выполнение вычислений:

- 1) Нахождение функции распределения
- 2) По функции распределения найти обратную функцию
- 3) Реализовать датчик случайных чисел

Задание № 10 (зад. 1)
Выполнено В. Е.
ИВ222

$$f(x) = \begin{cases} a(x-0,3), & \text{если } x \in (0,3; 1); \\ b(x-1,5), & \text{если } x \in (1; 1,5); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$0,7a = \frac{b}{4} \quad b = 2,8a$$

$$\int_0^x a(x-0,3)dx + \int_0^1 b(x-1,5)^2 dx = 1$$

$$1) a \int_{0,3}^x (x-0,3)dx = a \left(\int_{0,3}^x x dx - \int_{0,3}^x 0,3 dx \right) \Big|_0^x = a \left(\frac{x^2}{2} - 0,3x \right) \Big|_0^x =$$

$$= \frac{a \cdot x^2}{2} - \frac{3}{10}ax - \left(\frac{a \cdot 0,3^2}{2} - \frac{3}{10}a \cdot 0,3 \right) = \frac{a}{2}x^2 - \frac{3}{10}ax - \left(\frac{9}{200}a^2 - \frac{9}{100}a \right) = \frac{49}{200}a^2 = 0,245a$$

$$2) b \int_1^x (x-1,5)^2 dx = b \int_1^x (x^2 - 3x + \frac{9}{4}) dx = b \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_1^x =$$

$$= \frac{b \cdot x^3}{3} - \frac{3bx^2}{2} + \frac{9}{4}bx - \left(\frac{b}{3} - \frac{3b}{2} + \frac{9}{4}b \right) = \frac{9b}{8}x^3 - \frac{27b}{8}x^2 + \frac{13}{12}bx - \frac{27b - 81b + 81b - 26b}{24} = \frac{b}{24}$$

$$b = 2,8a$$

$$2) Проверка б: \frac{2,8a}{24}$$

$$[1) + 2) = 1$$

$$0,245a + \frac{2,8a}{24} = 1$$

$$\frac{49a^3}{200} + \frac{7a}{60} = 1$$

$$\frac{147a + 70a}{600} = 1$$

$$a = \frac{600}{217}, \text{ тогда } b = 2,8a = \frac{28}{10} \cdot \frac{600}{217} = \frac{1680}{217} = \frac{240}{37}$$

Найдем функцию распределения:

м.к. $F(t) = 0$, для $t \leq 0,3$, для $x \leq 0,3$ $f(x) = 0$, для $0,3 \leq x \leq 1$; $F(x) = \int_a^x a(t-0,3)dt =$

$$= a \int_{0,3}^x dt - \int_{0,3}^x 0,3dt = a \left(\frac{t^2}{2} - 0,3t \right) \Big|_{0,3}^x = \frac{ax^2}{2} - \frac{3}{10}ax - \left(\frac{a \cdot 0,3^2}{2} - \frac{3}{10}a \cdot 0,3 \right) = \frac{9x^2}{2} - \frac{3}{10}ax + \frac{9}{200}a =$$

$$= \frac{a}{2}(x-0,3)^2$$

$$F(t) = \frac{a}{2}(1-0,3)^2 = \frac{0,49a}{2} = 0,245a$$

$$\text{Проверка а: } F(1) = 0,245 \cdot \frac{600}{217} = \frac{147}{217}$$

Для $1 < x \leq 1,5$:

$$F(t) = F(1) + \int_1^x b(t-1,5)^2 dt$$

$$F(t) = 0,245a + b \left(\int_1^x t^2 dt - \int_1^x 3t dt + \int_1^x \frac{9}{4} dt \right) = 0,245a + b \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + \frac{9}{4}t \right) \Big|_1^x = 0,245a + \frac{147a x^3}{75} - \frac{27}{5}ax^2 +$$

$$+ \frac{63}{10}ax - \left(\frac{147}{75} - \frac{27}{5}a + \frac{63}{10}a \right) = \frac{147a^3}{75} - \frac{27}{15}ax^2 + \frac{63}{10}ax - \frac{97}{30}a + 0,245a$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0,3 \\ \frac{a}{2}(x-0,3)^2, & 0,3 \leq x \leq 1 \\ 0,245a + \frac{2,8a}{3}((x-1,5)^3 + 0,725), & 1 < x \leq 1,5 \\ 1, & x \geq 1,5 \end{cases}$$

$a = \frac{600}{272}$

Найдем обратной функции: $F^{-1}(x)$

$$1) y = \frac{a}{2}(x-0,3)^2 + \frac{2}{9}$$

$$(x-0,3)^2 = \frac{2y}{a}$$

м.к. $x > 0,3$

$$x-0,3 = \sqrt{\frac{2y}{a}}$$

$$x = 0,3 + \sqrt{\frac{2y}{a}}$$

$$2) y = 0,245a + \frac{b}{3}((x-1,5)^3 + 0,725)$$

$$y - 0,245a = \frac{b}{3}((x-1,5)^3 + 0,725)$$

$$(x-1,5)^3 = \frac{3(y-0,245a)}{b} - 0,725$$

м.к. $x < 1,5$

$$x-1,5 = -\sqrt[3]{0,725} - \frac{3(y-0,245a)}{2,8a}$$

$$x = 1,5 - \sqrt[3]{\frac{1}{8} - \frac{3(y-0,245a)}{2,8a}}$$

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} 0,3 + \sqrt{\frac{2x}{a}}, & \text{при } 0 < x \leq 0,245a \\ 1,5 - \sqrt[3]{\frac{1}{8} - \frac{3(x-0,245a)}{2,8a}}, & \text{при } 0,245a < x < 1 \end{cases}$$

Рисунок 1. Нахождение функций распределения и обратной

Алгоритм:

Функция распределения $F(x)$ находится интегрированием плотности вероятности $f(x)$ на каждом участке с учетом условий нормировки и непрерывности. Для первого участка $(0.3; 1]$ с плотностью $f(x)=a(x-0.3)$ интегрирование дает $F(x)=a/2 (x-0.3)^2$, для второго участка $[1; 1.5]$ с плотностью $f(x)=b(x-1.5)^2$ получаем $F(x)=F(1) + b/3 ((x-1.5)^3 + 0.125)$, где $F(1)=0.245a$. Параметры a и b определяются из условия нормировки интеграла от 0.3 до 1.5 $f(x)dx = 1$ и заданного соотношения $0.7a = b/4$, откуда $a = 600/217$, $b = 1680/217$, $F(1) = 147/217$. Обратная функция $F^{-1}(y)$ для метода обратного преобразования находится решением уравнений $y = F(x)$ на каждом участке: при $0 < y \leq 147/217$ из первого участка получаем $x = 0.3 + \sqrt{2y/a}$, при $147/217 < y < 1$ из второго участка получаем $x = 1.5 - \sqrt[3]{(1/8 - 3(y - 147/217)/b)}$, что позволяет генерировать случайные числа с заданным распределением.

Программная реализация

Алгоритм программы:

1. Задание параметров распределения

- a. Определяются константы a и b , полученные из условия нормировки
- b. Вычисляется значение функции распределения в граничной точке $f_1 = F(1)$, разделяющее первый и второй участки

2. Инициализация генератора случайных чисел

- a. Создается генератор псевдослучайных чисел

3. Цикл генерации заданного количества чисел

- a. Для каждого элемента выборки выполняется:

а) Генерация равномерного числа

- b. Получается случайное число y , равномерно распределенное на интервале $[0, 1)$

б) Выбор участка по значению y

- c. Если $y \leq f_1$, то используется формула для первого участка
- d. Если $y > f_1$, то используется формула для второго участка

в) Вычисление значения x по обратной функции

- e. Для первого участка: $x = 0.3 + \sqrt{(2y/a)}$
- f. Для второго участка: $x = 1.5 - \sqrt[3]{(1/8 - 3(y - f_1)/b)}$

г) Сохранение результата

- g. Пара (x, y) записывается в файл

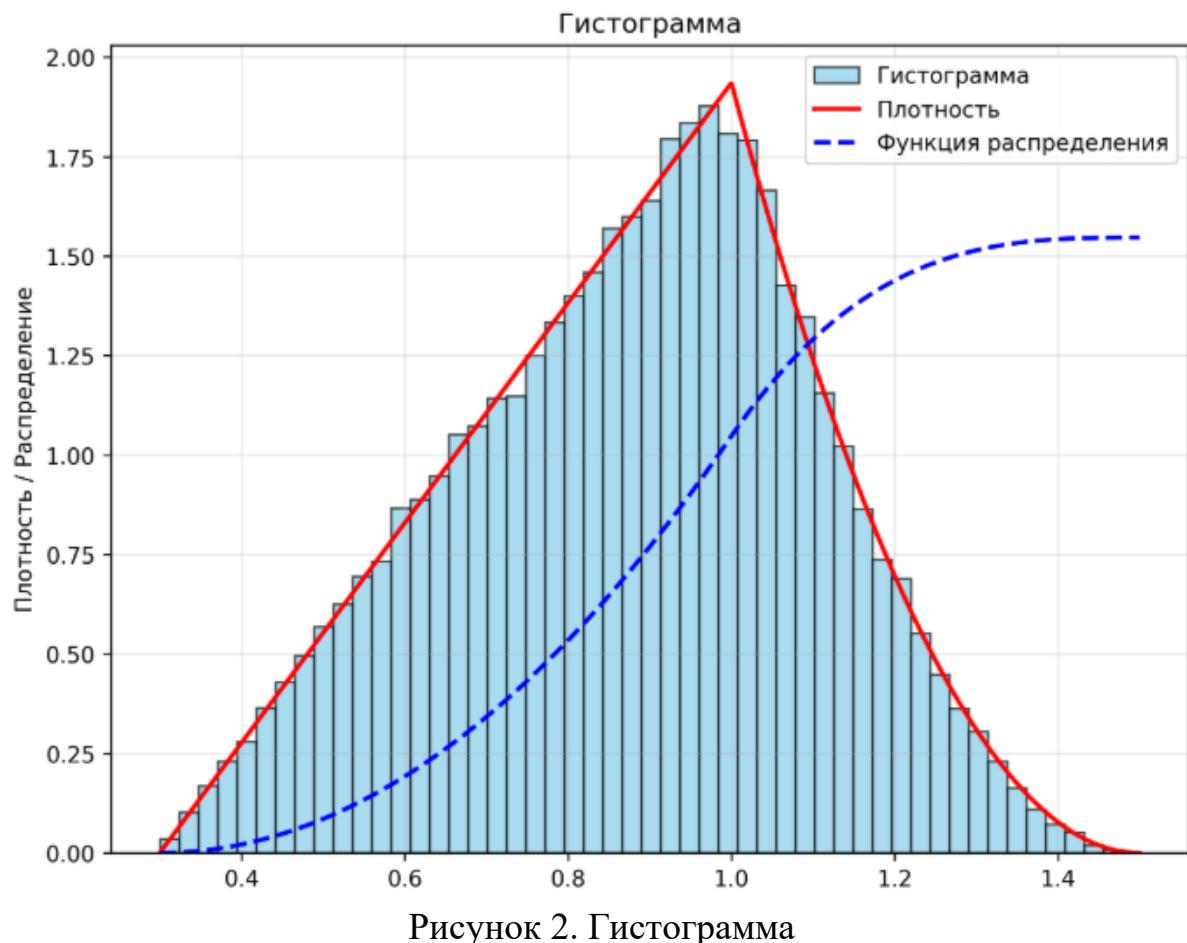
4. Завершение работы

- a. Закрывается файл с результатами
- b. Программа завершает выполнение

Полученный файл содержит 50000 сгенерированных значений, которые можно использовать для построения гистограммы, эмпирической функции распределения и проверки соответствия теоретическому закону.

Новосибирск – 2026

Результат



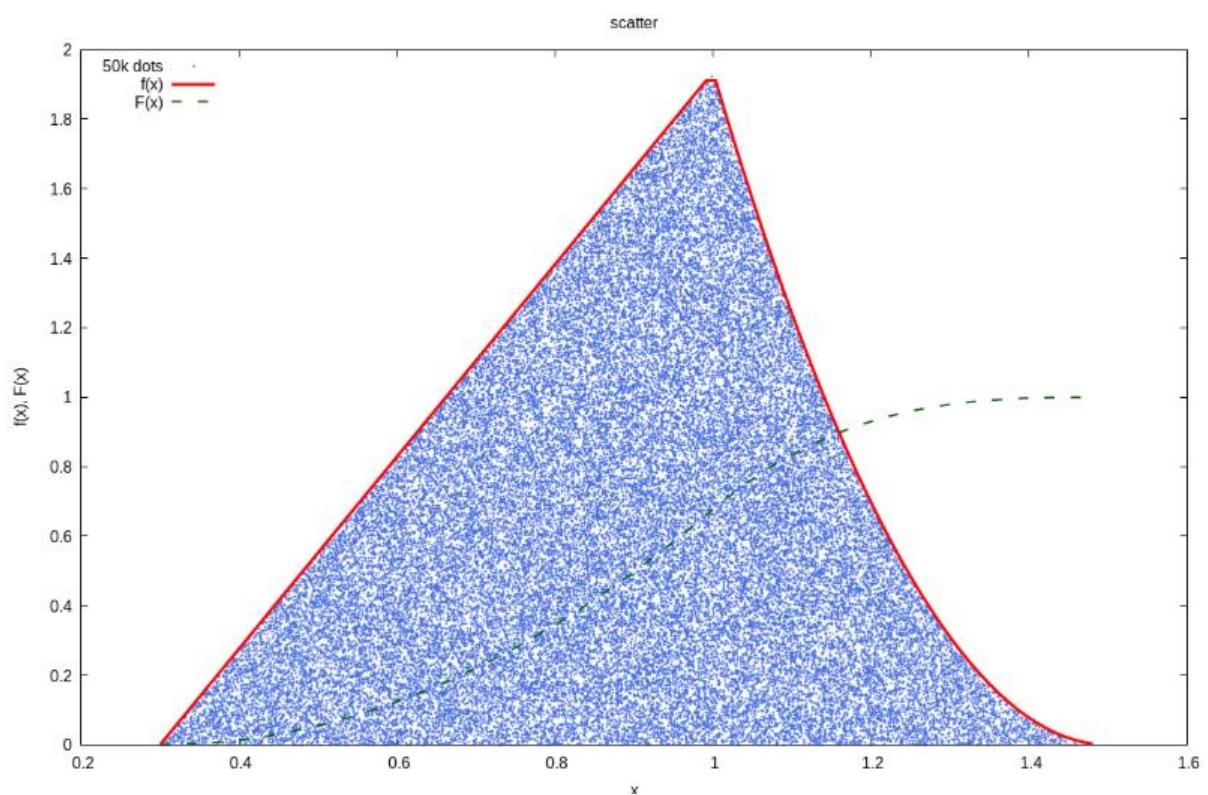


Рисунок 3. Распределение точек (Выборка 50к точек)

Вывод

В ходе выполнения работы был успешно реализован генератор случайных чисел методом обратного преобразования для распределения с заданной кусочно-заданной плотностью вероятности.

Приложение

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <random>
#include <algorithm>
#include <iomanip>

using namespace std;
const double a = 600.0 / 217.0;
const double b = 1680.0 / 217.0;
const double f_1= 147.0 / 217.0;
void generate_samples(int n) {
    random_device rd;
    mt19937 gen(rd());
    uniform_real_distribution<> dis(0.0, 1.0);

    double x = 0;
    ofstream file("gen_data.txt");

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double y = dis(gen);

        if (y <= f_1) {
            // x = 0.3 + sqrt(2u/a)
            x = 0.3 + sqrt(2.0 * y / a);
            file << x << ' ' << y << '\n';
        } else {
            // x = 1.5 - (1/8 - 3(y-f_1)/b)^(1/3)
            double x_temp = 1.0/8.0 - 3.0 * (y - f_1) / b;
            x = 1.5 - cbrt(x_temp);
            file << x << ' ' << y << '\n';
        }
    }
    file.close();
}

int main() {
    const int N = 50000;

    generate_samples(N);

    return 0;
}
```