ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

по дисциплине “Моделирование”

Выполнил студент Рудцких Владислав Евгеньевич

Ф.И.О.

Группы ИВ-222

Работу принял Ассистент кафедры ВС Уженцева А. В.

подпись

Защищена _____________ Оценка

Новосибирск – 2026

Задание

Задание 10:

10.

$$f(x) = \begin{cases} a\,(x-0.3), & \text{при } x \in (0.3, 1); \\ b\,(x-1.5)^2, & \text{при } x \in (1, 1.5). \\ & 0.7\,a = b/4. \end{cases}$$

Реализовать генератор случайных чисел на распределении.

Ход работы

Выполнение вычислений:

1) Нахождение функции распределения

2) По функции распределения найти обратную функцию

3) Реализовать датчик случайных чисел

Задание №10 (лаб. 1)

Рузукин В. Е.
ИВ222

$$f(x)=\begin{cases} a(x-0,3), & \text{при } x\in(0,3;1); \\ b(x-1,5)^2, & \text{при } x\in(1;1,5), \end{cases}$$

$0,7a = b/4$

$0,7a = \frac{b}{4} \qquad b=2,8a$

$$\int_{0,3}^{1} a(x-0,3)dx + \int_{1}^{1,5} b(x-1,5)^2dx = 1$$

$$1)\ a\int_{0,3}^{1}(x-0,3)dx = a\left(\int_{0,3}^{1}x\,dx-\int_{0,3}^{1}0,3\,dx\right)=a\left(\frac{x^2}{2}-0,3x\right)\Big|_{0,3}^{1}=\frac{ax^2}{2}-0,3ax\Big|_{0,3}^{1}=$$

$$=\frac{a\cdot1^2}{2}-\frac{3}{10}a\cdot1-\left(\frac{a\cdot0,3^2}{2}-\frac{3}{10}a+\frac{9}{100}a\right)=\frac{a}{2}-\frac{3}{10}a-\left(\frac{\frac{9}{100}a}{2}-\frac{9}{100}a\right)=\frac{49}{200}a=\underline{0,245a}$$

$$2)\ b\int_{1}^{1,5}(x-1,5)^2dx=b\int_{1}^{1,5}(x^2-3x+\tfrac{9}{4})dx=b\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{9}{4}x\right)\Big|_{1}^{1,5}=\frac{b\cdot1,5^2}{3}-\frac{3b\cdot1,5^2}{2}+\frac{9}{4}b\cdot1,5-$$

$$-\left(\frac{b}{3}-\frac{3b}{2}+\frac{9}{4}b\right)=\frac{9b}{8}-\frac{27b}{8}+\frac{27}{8}b-\frac{13}{12}b=\frac{27b-81b+81b-26b}{24}=\underline{\frac{b}{24}}$$

$b=2,8a$

2) Подставим b: $\frac{2,8a}{24}$

$\boxed{1)+2)=1}$

$$0,245a+\frac{2,8a}{24}=1$$

$$\frac{49a}{200}+\frac{7a}{60}=1$$

$$\frac{147a+70a}{600}=1$$

$$\underline{a=\frac{600}{217}},\ \text{тогда } b=2,8a=\frac{28}{10}\cdot\frac{600}{217}=\underline{\frac{1680}{217}}=\frac{240}{31}$$

Найдем функцию распределения:

т.к. $F(t)=0$, при $t\le0,3$, то для $x\le0,3$ $F(x)=0$, для $0,3\le x\le1$: $F(x)=\int_{0,3}^{x}a(t-0,3)dt=$

$$=a\int_{0,3}^{x}t\,dt-\int_{0,3}^{x}0,3\,dt=a\left(\frac{t^2}{2}-0,3t\right)\Big|_{0,3}^{x}=\frac{ax^2}{2}-\frac{3}{10}ax-\left(\frac{a\cdot0,3^2}{2}-\frac{3}{10}a\cdot0,3\right)=\underline{\frac{ax^2}{2}-\frac{3}{10}ax+\frac{9}{200}a}=$$

$$=\frac{a}{2}(x-0,3)^2$$

$$F(1)=\frac{a}{2}(1-0,3)^2=\frac{0,49a}{2}=0,245a$$

Подставим a: $\underline{F(1)=0,245\cdot\frac{600}{217}=\frac{147}{217}}$

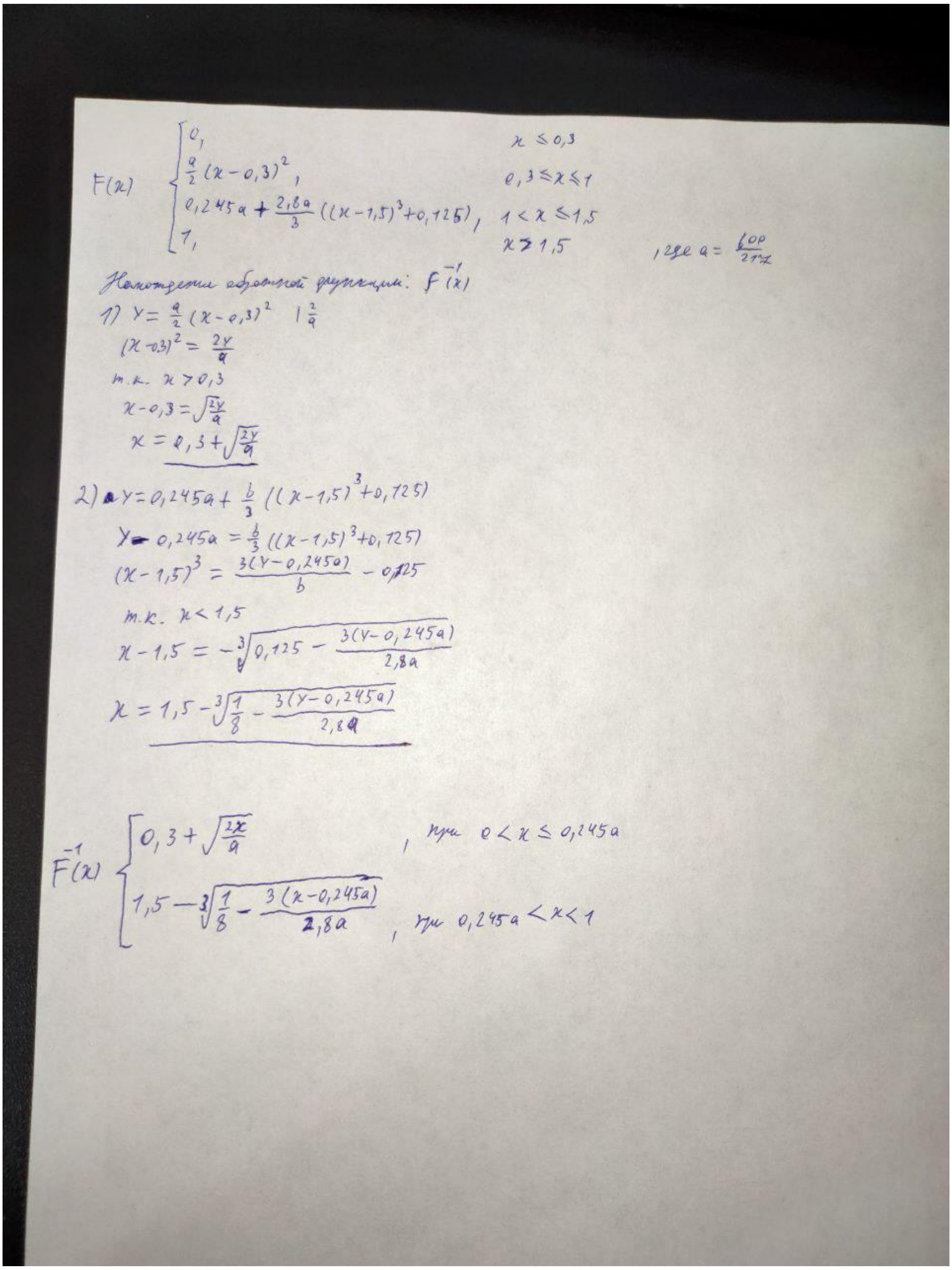
Для $1<x\le1,5$:

$$F(t)=F(1)+\int_{1}^{x}b(t-1,5)^2dt$$

Подставим b:

$$F(t)=0,245a+b\left(\int_{1}^{x}t^2dt-\int_{1}^{x}3t\,dt+\int_{1}^{x}\frac{9}{4}dt\right)=0,245a+b\left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+\frac{9}{4}t\right)\Big|_{1}^{x}=0,245a+\frac{14ax^3}{15}-\frac{21}{5}ax^2+$$

$$+\frac{63}{10}ax-\left(\frac{14a}{15}-\frac{21}{5}a+\frac{63}{10}a\right)=\underline{\frac{14ax^3}{15}-\frac{21}{15}ax^2+\frac{63}{10}ax-\frac{91}{30}a+0,245a}$$



$$F(x)\begin{cases} 0, & x \le 0,3 \\ \frac{a}{2}(x-0,3)^2, & 0,3 \le x \le 1 \\ 0,245a + \frac{2,8a}{3}\left((x-1,5)^3+0,125\right), & 1 < x \le 1,5 \\ 1, & x \ge 1,5 \end{cases}, \text{ где } a = \frac{600}{217}$$

Нахождение обратной функции: $\overset{-1}{F}(x)$

1) $y = \frac{a}{2}(x-0,3)^2 \quad | \frac{2}{a}$

$(x-0,3)^2 = \frac{2y}{a}$

т.к. $x > 0,3$

$x - 0,3 = \sqrt{\frac{2y}{a}}$

$\underline{x = 0,3 + \sqrt{\frac{2y}{a}}}$

2) $y = 0,245a + \frac{b}{3}\left((x-1,5)^3+0,125\right)$

$y - 0,245a = \frac{b}{3}\left((x-1,5)^3+0,125\right)$

$(x-1,5)^3 = \frac{3(y-0,245a)}{b} - 0,125$

т.к. $x < 1,5$

$x - 1,5 = -\sqrt[3]{0,125 - \frac{3(y-0,245a)}{2,8a}}$

$\underline{x = 1,5 - \sqrt[3]{\frac{1}{8} - \frac{3(y-0,245a)}{2,8a}}}$

$$\overset{-1}{F}(x)\begin{cases} 0,3 + \sqrt{\frac{2x}{a}}, & \text{при } 0 < x \le 0,245a \\ 1,5 - \sqrt[3]{\frac{1}{8} - \frac{3(x-0,245a)}{2,8a}}, & \text{при } 0,245a < x < 1 \end{cases}$$

Рисунок 1. Нахождение функций распределения и обратной

Алгоритм:

Функция распределения $F(x)$ находится интегрированием плотности вероятности $f(x)$ на каждом участке с учетом условий нормировки и непрерывности. Для первого участка (0.3; 1] с плотностью $f(x)=a(x-0.3)$ интегрирование дает $F(x)=a/2\ (x-0.3)^2$, для второго участка [1; 1.5) с плотностью $f(x)=b(x-1.5)^2$ получаем $F(x)=F(1) + b/3\ ((x-1.5)^3 + 0.125)$, где $F(1)=0.245a$. Параметры a и b определяются из условия нормировки интеграла от 0.3 до 1.5 $f(x)dx = 1$ и заданного соотношения $0.7a = b/4$, откуда $a = 600/217$, $b = 1680/217$, $F(1) = 147/217$. Обратная функция $F^{-1}(y)$ для метода обратного преобразования находится решением уравнений $y = F(x)$ на каждом участке: при $0 < y \leq 147/217$ из первого участка получаем $x = 0.3 + \sqrt{2y/a}$, при $147/217 < y < 1$ из второго участка получаем $x = 1.5 - \sqrt[3]{1/8 - 3(y - 147/217)/b}$, что позволяет генерировать случайные числа с заданным распределением.

Программная реализация

Алгоритм программы:

1. **Задание параметров распределения**
   a. Определяются константы a и b, полученные из условия нормировки
   b. Вычисляется значение функции распределения в граничной точке f_1 = F(1), разделяющее первый и второй участки
2. **Инициализация генератора случайных чисел**
   a. Создается генератор псевдослучайных чисел
3. **Цикл генерации заданного количества чисел**
   a. Для каждого элемента выборки выполняется:

а) **Генерация равномерного числа**

   b. Получается случайное число y, равномерно распределенное на интервале [0, 1)

б) **Выбор участка по значению y**

   c. Если y ≤ f_1, то используется формула для первого участка
   d. Если y > f_1, то используется формула для второго участка

в) **Вычисление значения x по обратной функции**

   e. Для первого участка: x = 0.3 + $\sqrt{(2y/a)}$
   f. Для второго участка: x = 1.5 - $\sqrt[3]{\left(1/8 - 3\left(y - f(1)\right)/b\right)}$

г) **Сохранение результата**

   g. Пара (x, y) записывается в файл
4. **Завершение работы**
   a. Закрывается файл с результатами
   b. Программа завершает выполнение

Полученный файл содержит 50000 сгенерированных значений, которые можно использовать для построения гистограммы, эмпирической функции распределения и проверки соответствия.

Результат

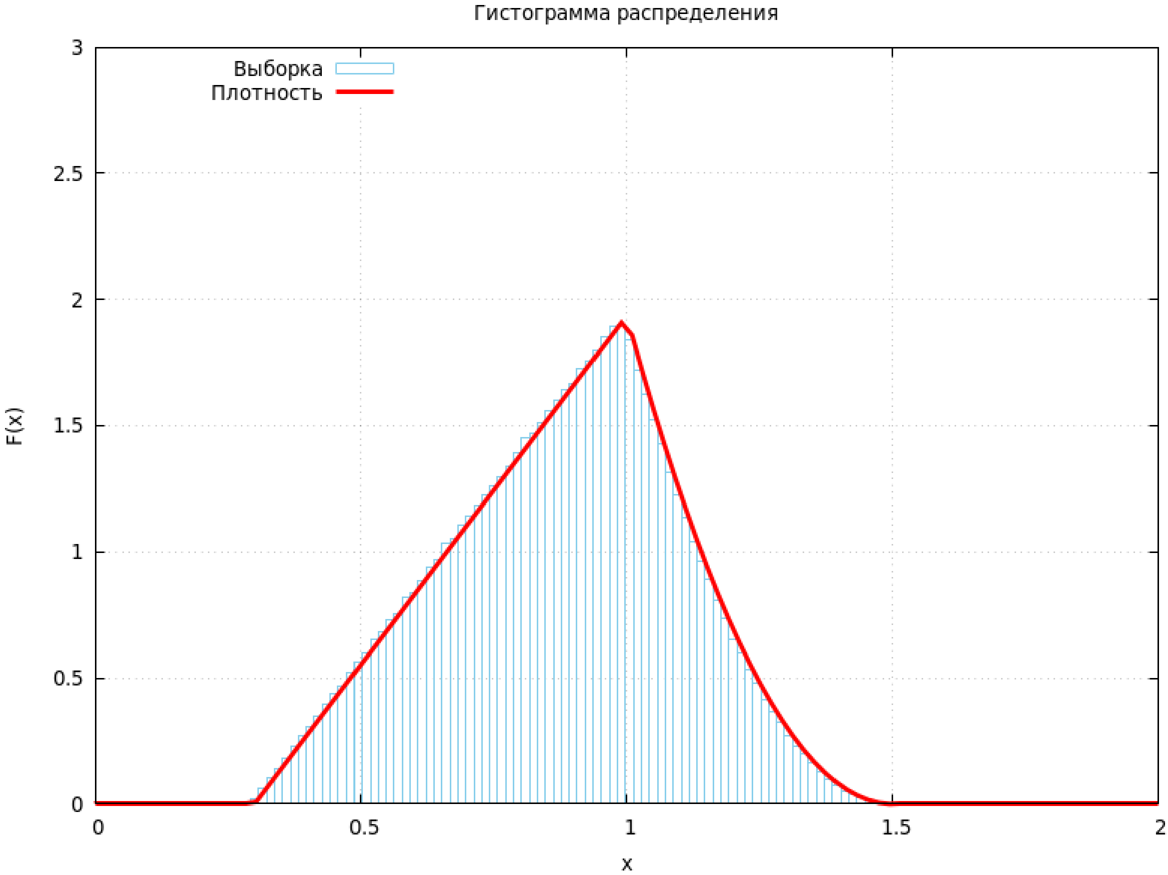


Рисунок 2. Гистограмма

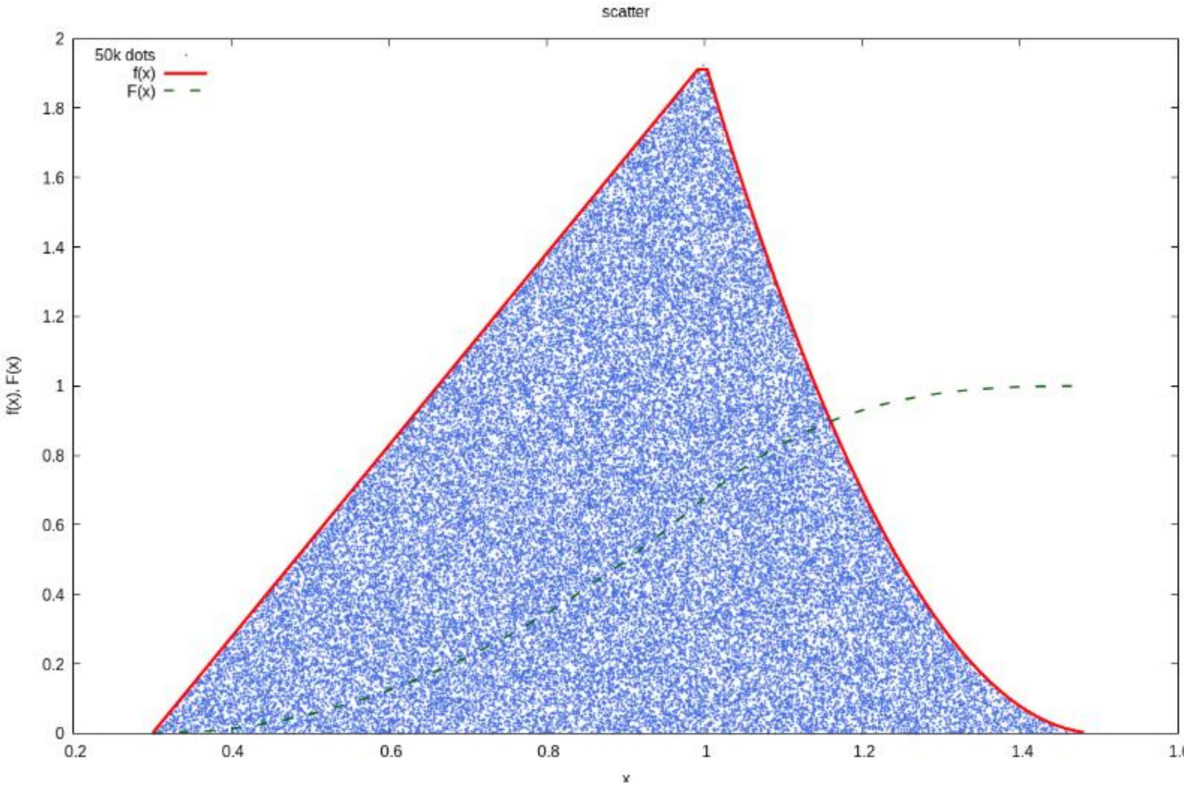


Рисунок 3. Распределение точек (Выборка 50к точек)

Вывод

В ходе выполнения работы был успешно реализован генератор случайных чисел методом обратного преобразования для распределения с заданной кусочно-заданной плотностью вероятности.

Приложение

```cpp
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <random>
#include <algorithm>
#include <iomanip>

using namespace std;
const double a = 600.0 / 217.0;
const double b = 1680.0 / 217.0;
const double f_1= 147.0 / 217.0;
void generate_samples(int n) {
    random_device rd;
    mt19937 gen(rd());
    uniform_real_distribution<> dis(0.0, 1.0);

    double x = 0;
    ofstream file("gen_data.txt");

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double y = dis(gen);

        if (y <= f_1) {
            // x = 0.3 + sqrt(2u/a)
            x = 0.3 + sqrt(2.0 * y / a);
            file << x << ' ' << y << '\n';
        } else {
            // x = 1.5 - (1/8 - 3(y-f_1)/b)^(1/3)
            double x_temp = 1.0/8.0 - 3.0 * (y - f_1) / b;
            x = 1.5 - cbrt(x_temp);
            file << x << ' ' << y << '\n';
        }
    }
    file.close();
}


int main() {
    const int N = 50000;

    generate_samples(N);

    return 0;
}
```