1. Продавець складає піраміду з банок. На найвищий рівень він ставить одну банка, а на кожний рівень нижче – на дві банки більше ніж на попередній. Скільки у піраміді рівнів якщо банок у ній 100?

2. Другий і четвертий елементи геометричної прогресії дорівнюють 2 та 6. Знайдіть усі можливі значення першого елементу.

3. Нехай $1, 4, \ldots$ та $9, 16, \ldots$ – дві арифметичні прогресії, S – множина перших 2004 елементів обох послідовностей. Скільки елементів в S?

4. Розглянемо послідовність $4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, \ldots$ у якій кожний елемент дорівнює цифрі одиниць у сумі двох попередніх. Нехай S_n – сума перших n елементів цієї послідовності. Знайдіть найменше n таке, що $S_n > 10000$.

5. Про послідовність цілих чисел (a_n) відомо, що вона зростає, і кожен елемент є сумою попередніх двох. Знайдіть a_8 якщо $a_7 = 120$.

6. Запишіть $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{99 \cdot 100}$ як нескоротний дріб.

7. Послідовність (a_n) така, що $a_1 = 1$ і $a_{n+1}^3 = 99a_n^3$. Знайдіть a_{100}.

8. Послідовність $1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, \ldots$ складається з одиниць, розділених блоками двійок, причому у n-ому блоці n двійок. Знайдіть суму перших 1234 елементів цієї послідовності.

9. Розглянемо послідовність (a_n), де $a_n = (-1)^{n+1}n$. Чому дорівнює середнє арифметичне перших 200 її елементів?

10. Знайдіть значення суми $a_2 + a_4 + \cdots + a_{98}$, якщо (a_n) – арифметична прогресія з різницею 1 і $a_1 + a_2 + \cdots + a_{98} = 137$.

11. Нехай $a_1 = 97$ і $a_n = n/a_{n-1}$. Знайдіть $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_8$.

12. Сторінки книжки пронумеровані від 1 до n. Василь додав номери усіх сторінок, але випадково порахував одну сторінку двічі. У результаті у нього вийшло 1986. Яку сторінку він порахував двічі?

13. Послідовності (a_n), (b_n) цілих чисел такі, що $b_{n+1}/a_{n+1} > b_n/a_n$. Доведіть, що існує нескінченно багато n таких, що $b_n \geq \sqrt{n}$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

14. Кілька прямих ділять площину на області. Доведіть, що області можна розфарбувати двома кольорами так, що сусідні по стороні області були пофарбовані у різні кольори.

15. Доведіть, що для довільного $n \geq 1$ шахова дошка $2^n \times 2^n$ без однієї клітинки може бути розбита на куточки.

16. (x_n) – послідоність цілих чисел з сумою 1. Доведіть, що рівно один з циклічних зсувів $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x_2, \ldots, x_n, x_1$; … ; $x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}$ має всі додатні часткові суми (часткова сума – сума перших k членів).

17. Доведіть, що кожне натуральне число може бути представлене як сума різних елементів послідовності Фібоначчі.

18. Доведіть, що рівнобедрений трикутник з кутом $120°$ можна розрізати на n трикутників подібних йому (для кожного $n \geq 4$).

19. Доведіть, що для $n > 3$ існує $n-$кутник, не всі сторони якого рівні, у якому сума відстаней від кожної внутрішньої точки до сторін однакова.

20. Вершини опуклого многокутника пофарбовано у хоча б три кольори так, що сусідні вершини мають різний колір. Доведіть, що існує тріангуляція всі відрізки якої мають кінці різних кольорів.

21. Доведіть, що довільний многокутник (не лише опуклий) можна тріангулювати внутрішніми діагоналями.

22. Доведіть, що кожне натуральне число може бути представлене у вигляді $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm n^2$ для якогось n та вибору знаків.

23. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{N}$, $n, m > 1$. Припустимо що $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m < mn$. Доведіть, що у рівності

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

можна закреслити деякі (не всі) числа так що вона залишиться істинною.

24. Доведіть теорему Рамсея: для $\forall m, n \in \mathbb{N}$ існує $\exists R_{n,m} \in \mathbb{N}$ таке, що в повному графі з $R_{n,m}$ вершин, ребра якого розфарбовані в два кольори, знайдеться або n-кліка першого кольору, або m-кліка другого кольору.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

25. Доведіть, що у гострокутному ABC: $H_aC \cdot BC = H_bC \cdot AC$.

26. $\angle C = 90^\circ$. $AC^2 = AB \cdot AH_c$ та $CH_c^2 = AH_c \cdot BH_c$.

27. Доведіть, що $AM_a \cap BM_b \cap CM_c = M$ і що $AM : MM_a = 2 : 1$.

28. $A_1 \in BC$: $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. У якому відношенні CM_c ділить AA_1?

29. В ABC вписано квадрат $PQRS$ так, що $P \in AB$, $Q \in AC$, $R, S \in BC$. Виразіть довжину сторони квадрата через a і h_a.

30. Основи AD і BC трапеції рівні a і b $(a > b)$. Знайдіть довжину відрізка, який відтинають діагоналі на середній лінії. Знайдіть довжину MN, кінці якого ділять AB і CD у відношенні $AM : MB = DN : NC = p : q$.

31. Доведіть, що середини сторін сторін довільного чотирикутника – вершини паралелограма. Для яких чотирикутників цей паралелограм є прямокутником, для яких ромбом, а для яких квадратом?

32. $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$: $BA_1 : A_1C = 1 : p$, $AB_1 : B_1C = 1 : q$. В якому відношенні AA_1 ділиться BB_1?

33. $P \in CM_c$, $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap AC$. Доведіть, що $A_1B_1 || AB$.

34. У чотирикутнику ABC: $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$. PQ ділить AD навпіл. Доведіть, PQ ділить навпіл і BC.

35. На стороні AD паралелограма $ABCD$ взяли точку P так, що $AD = nAP$, Q – точка перетину прямих AC і BP. Доведіть, що $AC = (n + 1)AQ$.

36. Вершини паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ лежать на сторонах паралелограма $ABCD$ ($A_1 \in AB$ і т.д.) Доведіть, що їх центри збігаються.

37. На діагоналі BD паралелограма $ABCD$ взяли точку K. Пряма AK перетинає прямі BC і CD в точках L і M. Доведіть, що $AK^2 = LK \cdot KM$.

38. Одна з діагоналей вписаного в коло чотирикутника є діаметром. Доведіть, що довжини проекцій протилежних сторін на іншу діагональ рівні.

39. AD – основа трапеції $ABCD$. $E \in AD$: $AE = BC$. $O = CA \cap BD$, $P = CE \cap BD$. Доведіть, що якщо $BO = PD$, то $AD^2 = BC^2 = AD \cdot BC$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

Домашні задачі

40. Точки A і B відтинають на колі з центром O дугу в $60°$. На цій дузі взяли точку M. Доведіть, що пряма, через середини відрізків MA і OB, перпендикулярна прямій, через середини відрізків MB і OA.

41. Точки A, B і C лежать на одній прямій, а точки A_1, B_1 і C_1 – на іншій. Доведіть, що якщо $AB_1||BA_1$ і $AC_1||CA_1$ то $BC_1||CB_1$.

42. Точки A, B, C колінеарні, а точки A_1, B_1, C_1 такі, що $AB_1||BA_1$, $AC_1||CA_1$, $BC_1||CB_1$. Доведіть, що точки A_1, B_1, C_1 колінеарні.

43. В трикутнику ABC проведені бісектриси AA_1 і BB_1. Доведіть, що відстань від довільної точки M відрізка A_1B_1 до прямої AB дорівнює сумі відстаней від M до прямих AC і BC.

44. Нехай M і N – середини сторін AD і BC прямокутника $ABCD$. На продовженні відрізка CD за точку D взяли точку P. Q – точка перетину прямих PM і AC. Доведіть, що $\angle QNM = \angle MNP$.

45. На продовженнях основ DA, BC трапеції $ABCD$ за точки A, C взяли точки K, L. Відрізок KL перетинає AB, CD в точках M, N, а AC, BD в точках Q, P. Доведіть, що якщо $KM = NL$, то $KQ = PL$.

46. На сторонах AB, BC, CD і DA опуклого чотирикутника $ABCD$ взяли точки P, Q, R і S такі, що $BP : AB = CR : CD = a$ і $AS : AD = BQ : BC = b$. Доведіть, що відрізки PR і QS діляться точкою їх перетину у відношеннях $b : (1 - b)$ і $a : (1 - a)$ відповідно.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

47. Ціле додатне число має непарну кількість додатних дільників тоді і тільки тоді, коли воно є точним квадратом.

48. $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Доведіть, що 2^n можна подати як суму двох послідовних непарних, а 3^n – як суму трьох послідовних чисел.

49. $k \in \mathbb{N}, 2|k$. Чи існують непарні $n_1, \ldots, n_k$ такі, що $1 = \dfrac{1}{n_1} + \cdots + \dfrac{1}{n_k}$?

50. Андрійко вибрав п'ять (різних) чисел від 1 до 7. Він повідомив їх добуток Миколці й попросив його знайти парність суми вибраних чисел. Виявилося, що це неможливо зробити. Знайдіть добуток вибраних чисел.

51. Доведіть, що для всіх цілих n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120, а число $n^2 + 3n + 5$ не ділиться на 121.

52. Нехай n, m – натуральні числа. Доведіть, що число $n^4 + 4m^4$ – складене.

53. Доведіть, що число $3^{4^5} + 4^{5^6}$ можна подати у вигляді добутку двох цілих чисел, кожне з яких більше зі 10^{2010}.

54. Знайдіть усі $n \in \mathbb{N} : 2 \not| a, a^2 \leq n \Rightarrow a|n$.

55. Знайдіть усі $k \in \mathbb{Z}$, для яких число $\dfrac{k^3 - 3k + 2}{2k + 1}$ також буде цілим.

56. Доведіть, що будь-яке натуральне число, більше за $n^4/16$ $(n \in \mathbb{N})$, можна подати у вигляді добутку двох натуральних чисел, різниця яких не перевищує n, не більше ніж одним способом.

57. Знайдіть усі непарні натуральні $n > 1$ такі, що для будь-яких взаємно простих дільників a і b числа n число $a + b - 1$ також є дільником n.

58. Знайдіть усі $n \in \mathbb{N}$ такі, що множину $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ можна розбити на дві множини так, щоб добутки їх елементів були рівні.

59. Натуральні числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$ є різними дільниками 1995. Доведіть, що існують такі два з цих чисел d_i та d_j, що дріб d_i/d_j після можливого скорочення буде мати чисельник, не менший за n.

60. Знайдіть усі пари $a, b \in \mathbb{N} : (ab^2 + b + 7)|(a^2b + a + b)$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

61. Доведіть нерівність $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

62. Доведіть нерівність $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, якщо $a, b \geq 0$.

63. Доведіть нерівність $\sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, якщо $a, b \geq 0$.

64. Доведіть нерівність $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2}$.

65. Доведіть нерівність $\dfrac{a+b}{2} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, якщо $a, b \geq 0$.

66. Доведіть нерівність $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

67. Доведіть нерівність $a + b > 1 + ab$ якщо $a > 1 > b$.

68. Доведіть нерівність $a^2 + b^2 > c^2 + (a + b - c)^2$, якщо $a > c > b$.

69. Доведіть нерівність $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$, якщо $ab > 0$.

70. Доведіть нерівність $x_1 \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq x_n$, якщо $x_1 \leq \cdots \leq x_n$.

71. Доведіть нерівність $\dfrac{x_1}{y_1} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} \leq \dfrac{x_n}{y_n}$, якщо $\dfrac{x_1}{y_1} \leq \cdots \leq \dfrac{x_n}{y_n}$.

72. Доведіть нерівність $x_1 \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq x_n$, якщо $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n$.

73. Доведіть нерівність $|x_1| + \cdots + |x_n| \geq |x_1 + \cdots + x_n|$.

74. Доведіть нерівність між середнім арифметичним та середнім гармонічним для n чисел: $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$, якщо $x_1, \ldots, x_n > 0$.

75. Доведіть нерівність $(a+b)\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$, якщо $a, b > 0$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

76. Доведіть, що кожна множина з 10 двоцифрових чисел містить дві неперетинні підмножини з однаковою сумою елементів.

77. Дано 51 різне натуральне число не більше 100. Доведіть що сума якихось двох з них дорівнює 101.

78. Послідовність з m натуральних чисел містить рівно n різних членів. Доведіть що якщо $2n \leq m$ то існує підпослідовність з послідовних елементів, добуток яких є точним квадратом.

79. Покажіть що для довільного натурального числа n в послідовності Фібоначчі є член який ділиться на n.

80. Шахіст тренується граючи не менше однієї партії щодня, але не більше 13 партій щотижня (щоб не перевтомитися). Доведіть що існує група з кількох послідовних днів у які він зіграв рівно 20 партій.

81. m – натуральне число. Доведіть що серед довільних різних $2m+1$ цілих чисел за модулем не більших за $2m-1$ знайдуться три з сумою 0.

82. (x_n) – зростаюча послідовність цілих чисел така що $x_1 = 1$ та $x_{n+1} \leq 2n$. Доведіть що кожне натуральне k дорівнює $x_i - x_j$ для якихось i та j.

83. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ та $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$. Доведіть що для довільного натурального m існує індекс k такий що m ділить x_k.

84. n людей прийшло на вечірку. Доведіть що знайдуться двоє такі що серед решти $n-2$ людей буде не менше $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ які знають обох наших людей або жодного.

85. Дано множину M з 1985 натуральних чисел, жодне з яких не має простих дільників більших за 23. Доведіть, що M містить принаймні одну підмножину з чотирьох елементів, добуток яких є четвертим степенем.

86. Доведіть що для кожної множини $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дійсних чисел існує непорожня її підмножина S та ціле число m таке що

$$\left| m + \sum_{s \in S} s \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

87. З точки A що лежить поза колом (у колі) виходять промені AB і AC які перетинають це коло. Доведіть, що величина кута BAC дорівнює піврізниці (півсумі) кутових мір дуг кіл що лежать всередині цього кута.

88. P в гострому $\angle BAC$. C_1, B_1 – проекції P на AB, AC. Доведіть, що $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

89. Доведіть, що кути між діагоналями правильного n-кутника кратні π/n.

90. I та O симетричні відносно сторони AB. Знайдіть кути ABC.

91. ℓ – зовнішня бісектриса $\angle C$. $D = \ell \cap (ABC)$. Доведіть, що $AD = DB$.

92. Доведіть, що $\angle BAH = \angle OAC$.

93. Кола S_1, S_2 перетинаються в M, K. Через M, K провели прямі AB, CD $(A, C \in S_1,\ B, D \in S_2)$. Доведіть, що $AC||BD$.

94. M всередині $\angle A$. P, Q – проекції M на сторони $\angle A$. K – проекція A на PQ. Доведіть, що $\angle PAK = \angle MAQ$.

95. $W = BL_b \cap (ABC)$. Доведіть, що $WA = WC = WI = WI_b$.

96. I_0 всередині ABC така, що AI_0, BI_0, CI_0 проходять через центри (BCI), (ACI), (ABI). Доведіть, що $I_0 = I$.

97. Вершини A і B трикутника ABC з прямим кутом C рухаються по сторонам прямого кута. Доведіть, що точка C рухається по відрізку.

98. Діагональ AC квадрату $ABCD$ збігається з гіпотенузою трикутника ACE, при чому точки B і E лежать по одну сторону від прямої AC. Доведіть, що $BE = (AE - CE)/\sqrt{2}$ і $DE = (AE + CE)/\sqrt{2}$.

99. В трикутнику ABC провели медіани AA_1, BB_1. Доведіть, що якщо $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ то $AC = BC$.

100. Всі кути трикутника менші за $120°$. Доведіть, що всередині нього є точка з якої всі сторони видно під кутом $120°$.

101. n діаметрів ділять коло на рівні дуги. Доведіть, що проекції точки M на ці діаметри є вершинами правильного многокутника.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

Домашні задачі

102. На колі взяли точки A, B, M, N. З точки M провели хорди MA_1, MB_1 перпендикулярно до прямих NA, NB. Доведіть, що $A_1B || AB_1$.

103. У вписаному шестикутнику дві пари протилежних сторін паралельні, доведіть що і третя пара також паралельна.

104. Многокутник $A_1 \ldots A_{2n}$ – вписаний, причому всі пари протилежних сторін крім однієї паралельні. Доведіть, що і ця пара сторін паралельна.

105. Дано трикутник ABC. Доведіть, що існує дві множини правильних трикутників, сторони яких (або продовження сторін яких) проходять через точки A, B, C. Доведіть також, що центри трикутників цих множин лежать на концентричних колах.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

106. Найменший простий дільник (не простого) числа n не більший за $\sqrt{n}$.

107. Простих чисел нескінченно багато.

108. Якщо $p|(ab)$ то $p|a$ або $p|b$.

109. Скількома нулями закінчується запис 100!? А дванадцятковий запис?

110. Чи може число, записане за допомогою 600 шісток та кількох нулів бути точним квадратом?

111. Чи існує таке 1997-цифрове число, яке при заміні будь-якої трійки сусідніх цифр на будь-які інши три цифри залишається складеним?

112. Знайдіть усі $n \in \mathbb{N}$ такі, що а) $7|(2^n - 1)$. б) $7|(2^n + 1)$.

113. Знайдіть усі натуральні числа які не можна подати у вигляді різниці двох точних квадратів.

114. Знайдіть усі $n \in \mathbb{N} : (3^{n-1} + 5^{n-1})|(3^n + 5^n)$.

115. Число p є простим тоді і тільки тоді коли $p|((p-1)! + 1)$.

116. Нехай $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n}$ – нескоротний дріб. Доведіть, що $p|m$.

117. Знайдіть усі $n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : 2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$.

118. $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2n + 1$ та $3n + 1$ – точні квадрати. Доведіть, що $8|n$.

119. Доведіть, що прості числа Ферма ($2^{2^n} + 1, n \in \mathbb{N}$) не можна подати у вигляді різниці двох п'ятих степенів натуральних чисел.

120. Знайдіть усі непарні n, для яких $(n-1)!$ не ділиться на n^2.

121. Знайдіть усі такі натуральні числа n, що для деяких взаємно простих x та y і натуральному $k > 1$ виконується рівність $3^n = x^k + y^k$.

122. Покажіть, що існує множина $A \subset \mathbb{N}$, яка володіє наступною властивістю: для кожної нескінченної множини S простих чисел існує ціле число $k \geq 2$, а також існують два натуральних числа $m \in A, n \notin A$ такі, що обидва є добутками k різних елементів множини S.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

123. Доведіть, що $\forall n \in \mathbb{Z} : [x+n] = [x] + n$.

124. Доведіть, що $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.

125. Доведіть, що $[x] \leq x \leq [x] + 1$.

126. Доведіть, що $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$.

127. Доведіть, що $[x] \cdot [y] \leq [xy]$, якщо $x, y \geq 0$.

128. Доведіть, що $\left[x + \frac{1}{2}\right]$ – найближче ціле до x число.

129. Доведіть, що $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

130. Доведіть, що $\forall n, m \in \mathbb{N}$ між 1 та m є рівно $\left[\frac{m}{n}\right]$ чисел кратних n.

131. Нехай p просте, n натуральне. Знайдіть найбільшу степінь p на яку ділиться $n!$. Надалі "найбільшу степінь числа m на яку ділиться число k" будемо позначати $\nu_m(k)$.

132. Доведіть, що $\forall n, m \in \mathbb{N}$ число $\dfrac{(2n)! \cdot (2m)!}{m! \cdot n! \cdot (m+n)!}$ також натуральне.

133. $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що

$$[nx] \geq \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[nx]}{n}$$

134. $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

135. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.

136. Доведіть, що $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$ для усіх $x > 0$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

137. Всередині одиничного квадрату дано 9 точок. Доведіть, що якісь три з них утворюють трикутник з площею не більшою ніж 1/8.

138. Кожна точка тривимірного простору пофарбована в один з трьох кольорів — червоний, зелений, чи синій. Доведіть, що існує такий колір, що для довільної відстані є дві точки цього кольору на такій відстані.

139. В колі радіусу 4 обрано 61 точку. Доведіть, що серед них знайдуться дві на відстані не більше $\sqrt{2}$.

140. Об'єднання дев'яти плоских фігур площі 1 має площу 5. Доведіть, що є дві з них з площею перетину хоча б 1/9.

141. Дано $n \geq 3$ точок (загального положеня) на площині. Доведіть що якісь три утворюють кут не більший за $360°/n$.

142. Дано квадрат і 9 прямих, які ділять його на два чотирикутники кожна. Відомо, що відношення площ таких чотирикутників однакове. Доведіть, що серед цих прямих є три, які перетинаються в одній точці.

143. Доведіть, що у кожного опуклого багатогранника знайдуться дві грані з однаковою кількістю вершин.

144. Доведіть, що кут між якимись діагоналями 21-кутника менше 1°.

145. Нехай $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ — перестановка вершин правильного $2n$-кутника. Доведіть, що замкнута ламана $P_1 P_2 \ldots P_{2n}$ містить дві паралельні ланки.

146. S — опукла фігура ненульової площі. Кожна точка S пофарбована у один з k кольорів. Доведіть, що для кожного n існує нескінченно багато подібних між собою n-кутників, всі вершини яких одного кольору.

147. Точки площини розфарбовано у скінченну кількість кольорів. Доведіть, що існує прямокутник з вершинами одного кольору.

148. Всередині одиничного квадрату є кілька кіл з сумою довжин 10. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає хоча б 4 з цих кіл.

149. Дано скінченну кількість квадратів з сумою площ 1. Доведіть, що їх можна розташувати всередині квадрату площі 2 без перетинів.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

150. Доведіть, що $AL_b : L_bC = AB : BC$. Доведіть, що $AI : IL_a = (b + c) : a$.

151. Знайдіть радіус описаного кола трикутника зі сторонами a, a, b.

152. У квадраті $ABCD$ ℓ – пряма через A. $E = \ell \cap CD$, $F = \ell \cap BC$. Доведіть, що $1/AE^2 + 1/AF^2 = 1/AB^2$.

153. $B_1 \in BH_b$, $C_1 \in CH_c$: $AB_1 \perp B_1C$, $AC_1 \perp C_1B$. ! $AB_1 = AC_1$.

154. Вписане коло трапеції $ABCD$ з основою AD дотикається до AB, BC, CD, AD в K, N, L, M. Доведіть, що $AK \cdot KB = CL \cdot LD$. Нехай $Q = BM \cap AN$. Доведіть, що $KQ || AD$.

155. $ABCD$ паралелограм, M, N – проекції A на BC, CD. Доведіть, що $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.

156. $ABCD$ паралелограм, $E = \ell \cap AB$, $F = \ell \cap AD$. $G = \ell \cap AC$. Доведіть, що $AB/AE + AD/AF = AC/AG$.

157. $ABCD$ паралелограм, AC – більша діагональ. E, F – проекції C на AB, AD. Доведіть, що $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

158. У ABC виконується $3\alpha + 2\beta = 180°$. Доведіть, що $a^2 + bc = c^2$.

159. $P \in AC$. ℓ_1, ℓ_2 через P такі, що $\ell_1 || AM_a$, $\ell_2 || CM_c$. $E = \ell_1 \cap BC$, $F = \ell_2 \cap AB$. Доведіть, що AM_a і CM_c ділять EF на рівні частини.

160. $P \in AL_a$. ℓ – пряма через P. $B_1 = AB \cap \ell$, $C_1 = AC \cap \ell$. Доведіть, що $1/AB_1 + 1/AC_1$ не залежить від ℓ.

161. ABC правильний. На BC як на діаметрі побудували коло. K, L ділять зовнішнє півколо на рівні дуги. ! AK, AL ділять BC на рівні частини.

162. $M \in AC$, $K \in BC$: $BK \cdot AB = BI^2$, $AM \cdot AB = AI^2$. Доведіть, що M, I, K колінеарні.

163. На MN побудовані подібні трикутники AMN, NBM, MNC. Доведіть, що ABC подібний їм, а центр (ABC) рівновіддалений від M, N.

164. Відрізок BE розбиває ABC на два подібних трикутника з коефіцієнтом подібності $\sqrt{3}$. Знайдіть кути ABC.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

Домашні задачі

165. На стороні AC трикутника ABC взяли точку E. Через E провели пряму DE паралельну до BC і пряму DF паралельну до AB (D, F – точки на BC, AB). Доведіть, що $[BDEF]^2 = 4[ADE] \cdot [EFC]$.

166. На бокових сторонах AB, CD трапеції $ABCD$ взяли M, N так, що $MN||AD$ і MN ділить $[ABCD]$ навпіл. Виразіть MN через основи.

167. Через точку всередині ABC провели три прямі паралельні до його сторін які розбивають трикутник на шість частин. Три з яких – трикутники з площами S_1, S_2, S_3. Доведіть, що $[ABC] = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$.

168. Доведіть, що площа трикутника зі сторонами, довжини яких дорівнюють довжинам медіан трикутника з площею S дорівнює $3S/4$.

169. Доведіть, що площа опуклого чотирикутника, вершинами якого є середини сторін опуклого чотирикутника $ABCD$ дорівнює $[ABCD]/2$.

170. Доведіть, що якщо довжини діагоналей опуклого чотирикутника рівні, то його площа дорівнює добутку довжин відрізків що сполучають середини його протилежних сторін.

171. Точка O лежить всередині опуклого чотирикутника площі S. Її відобразили симетрично відносно середин сторін чотирикутника. Знайдіть площу опуклого чотирикутника з вершинами в отриманих точках.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

172. Знайдіть усі пари простих p і q для яких $p^2 + pq + q^2$ є повним квадратом.

173. Знайдіть усі цілі невід'ємні числа n, для яких існують такі цілі a і b, що $n^2 = a + b$ і $n^3 = a^2 + b^2$.

174. Нехай $n \geq 3$ – натуральне число. Доведіть, що можна вилучити не більше двох чисел з множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, щоб сума чисел, які залишаться, була точним квадратом.

175. Доведіть, що для будь-якого цілого k число $(2k+1)^3 - (2k-1)^3$ можна подати у вигляді суми трьох точних квадратів.

176. Нехай n – натуральне число. Доведіть, що число $(2n+1)^3 - 3$ можна подати у вигляді суми $3n - 1$ точних квадратів, кожний з яких більше 1.

177. Про цілі числа a і b відомо, що для будь-якого цілого невід'ємного n число $a \cdot 2^n + b$ є точним квадратом. Доведіть, що $a = 0$.

178. Знайдіть усі натуральні n, для яких число $n^2 + 3^n$ є точним квадратом.

179. Доведіть, що коли n – точний куб, то $n^2 + 3n + 3$ не є точним кубом.

180. Знайдіть усі натуральні n менші за 1999, для яких виконується умова $n^2 = (S(n))^3$ (тут $S(n)$ позначає суму цифр числа n).

181. Доведіть. що для будь-якого натурального n число $2^n + 3^n + 5^n + 6^n$ не є точним кубом.

182. Доведіть, що будь-яке ціле число є сумою п'яти точних кубів.

183. Знайдіть усі трійки натуральних (в цій задачі 0 – натуральне) чисел (x, y, z), для яких число $4^x + 4^y + 4^z$ є точним квадратом.

184. Чи існують такі натуральні числа n і m, що обидва числа $m^2 + 2n^2$ і $2m^2 + n^2$ є точними квадратами?

185. Доведіть, що добуток трьох послідовних натуральних чисел не може бути точним степенем натурального числа.

186. Знайдіть усі прості p такі, що $p^2 - p + 1$ є точним кубом.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

187. Доведіть нерівність $\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{4}\geq\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$, якщо $a,b>0$.

188. Доведіть нерівність $a(x+y-a)\geq xy$, якщо $y\geq a\geq x$.

189. Доведіть нерівність $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}>\dfrac{2}{x}$, якщо $x>1$.

190. Доведіть нерівність $\dfrac{1}{3k+1}+\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3k+3}>\dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{2k+2}$, $k\in\mathbb{N}$.

191. Доведіть нерівність $\dfrac{ab}{(a+b)^2}\leq\dfrac{(1-a)(1-b)}{(2-a-b)^2}$, якщо $0<a,b\leq 1/2$.

192. Доведіть нерівність $\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\dfrac{2k+1}{2k+2}<\dfrac{1}{\sqrt{3k+4}}$, $k\in\mathbb{N}$.

193. Доведіть нерівність $2^n>n$, $n\in\mathbb{N}$.

194. Доведіть нерівність $\dfrac{1-a}{1-b}+\dfrac{1-b}{1-a}\leq\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$, якщо $0<a,b\leq 1/2$.

195. Доведіть нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)\right)\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right),$$

якщо $0<a_1,\ldots,a_n\leq 1/2$.

196. Доведіть нерівність $|x-y|<|1-xy|$, якщо $|x|,|y|<1$.

197. Доведіть нерівність $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}\geq\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}-\dfrac{2}{c}$, якщо $a,b,c>0$.

198. Доведіть нерівність $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{abc}$, якщо $a^2+b^2+c^2=\dfrac{5}{3}$ і $a,b,c>0$.

199. Доведіть нерівність $3(1+a^2+a^4)\geq(1+a+a^2)^2$.

200. Доведіть нерівність $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\geq 144$, якщо $a+b=4$, $c+d=6$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

201. 21 людина прийшла на вечірку. Кожна людина порахувала кількість людей яких вона раніше знала. Чи може сума цих чисел бути непарною?

202. Доведіть, що у довільному графі є дві вершини з однаковим степенем.

203. В місті живе n людей, при чому довільні два незнайомці мають рівно двох спільних знайомих а у довільних двох знайомих немає спільних знайомих. Доведіть, що у всіх цих людей однакова кількість знайомих.

204. Ребра графу пофарбовані у два кольори так, що у ньому немає однокольорових трикутників. Скільки у цьому графі може бути вершин?

205. Двісті студентів взяли участь у математичній олімпіаді з 6 задачами. Відомо, що кожна задача була розв'язана принаймні 120 учасниками. Доведіть, що є двоє учасників які разом розв'язали усі задачі.

206. Доведіть, що у графу з n вершинами або є трикутник або є вершина степеню не більше $n/2$.

207. Доведіть, що граф дводольний тоді і тільки тоді коли в ньому немає непарних циклів.

208. Покажіть, що $\chi(G) \leq \Delta + 1$, де Δ – максимальний степінь.

209. Нехай G – дерево у якому максимальний степінь дорівнює Δ. Доведіть, що у G не менше Δ кінцевих вершин.

210. На вечірці не знайшлося хлопця який танцював з усіма дівчатами, однак кожна дівчина потанцювала принаймні з один хлопцем. Доведіть що знайдуться чотири людини b, g, b', g' такі що b танцював з g але не з g' а b' танцював з g' але не з g.

211. n гравців взяли участь у волейбольному турнірі (у волейболі немає нічиїх). Нехай x_i, y_i позначають кількість перемог та програшів відповідно i-го гравця. Доведіть, що $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2$.

212. 21 дівчина і 21 хлопець взяли участь у математичній олімпіаді. Відомо, що кожен учасник розв'язав не більше 6 задач і для кожної пари хлопець-дівчина знайдеться задача яку вони розв'язали разом. Доведіть, що є задача яку розв'язали принаймні 3 дівчини і 3 хлопця.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

213. На колі взяли точки A, B, C, D у вказаному порядку. M – середина дуги AB. Позначимо точки перетину хорд MC і MD з хордою AB через F і E. Доведіть, що $CDEF$ – вписаний.

214. По стороні правильного трикутника котиться коло радіусу рівного його висоті. Доведіть, що кутова міра дуги, яку висікають сторони трикутника на колі стала і дорівнює $60°$.

215. Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ $(AB > CD)$ перетнулися в P. Доведіть, що центр $(ABCD)$ лежить на (APB).

216. На колі взяли точки A, B, C, D у вказаному порядку. A_1, B_1, C_1, D_1 – середини дуг AB, BC, CD, DA відповідно. Доведіть, що $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

217. В ABC взяли точку P таку, що $\angle BPC = \angle BAC + 60°$, $\angle APC = \angle ABC + 60°$, $\angle APB = \angle ACB + 60°$. Прямі AP, BP, CP перетинають (ABC) в точках A', B', C'. Доведіть, що $A'B'C'$ рівносторонній.

218. На колі взяли точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 у такому порядку. Доведіть, що AA_1, BB_1, CC_1 є висотами $ABC \iff$ вони є бісектрисами $A_1B_1C_1$.

219. В коло вписані трикутники T_1, T_2, причому вершини T_1 є серединами дуг на які вершини T_2 розбивають коло. Доведіть, що в опуклому шестикутнику, вершинами якого є ці точки, великі діагоналі конкурентні.

220. Два кола перетинаються в точках P і Q. Через точку A першого кола проведені прямі AP і AQ які перетинають друге коло в точках B і C. Доведіть, що дотична в точці A до першого кола паралельна прямій BC.

221. Кола S_1 і S_2 перетинаються в A і P. Через A провели дотичну AB до S_1, а через P – пряму CD яка паралельна до AB (B і C лежать на S_2, D – на S_1). Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

222. Дотична в точці A до (ABC) перетинає пряму BC в точці E. AD – бісектриса ABC. Доведіть, що $AE = ED$.

223. Кола S_1 і S_2 перетинаються в A. Через A провели пряму, яка перетинає S_1, S_2 в B, C. В B і C провели дотичні до S_1, S_2 які перетинаються у D. Доведіть, що $\angle BDC$ не залежить від вибору прямої через A.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

Домашні задачі

224. Всередині квадрату $ABCD$ взяли точку P таку, що трикутник ABP рівносторонній. Доведіть, що $\angle PCD = 15°$.

225. Два кола дотикаються внутрішнім чином в M. AB – хорда великого кола яка дотикається меншого в T. Доведіть, що MT – бісектриса $\angle AMB$.

226. Через точку M яка лежить в колі S провели хорду AB. З M опустили перпендикуляри MP, MQ на дотичні до S через точки A, B. Доведіть, що величина $1/PM + 1/QM$ не залежить від вибору хорди через M.

227. Коло S_1 дотикається до сторін кута ABC в A і C. Коло S_2 дотикається до прямої AC в C і проходить через B. Також воно перетинає S_1 в M. Доведіть, що пряма AM ділить BC навпіл.

228. Коло S дотикається до кіл S_1, S_2 в A_1, A_2. B – точка кола S, а B_1, B_2 – другі точки перетину прямих BA_1, BA_2 з колами S_1, S_2. Доведіть, що якщо пряма B_1B_2 дотикається до S_1 то вона дотикається і до S_2.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

229. $a = bc + d, d \neq 0 \Leftrightarrow \gcd(a, b) = \gcd(a, d)$.

230. $\mathrm{lcm}[a, b] \cdot \gcd(a, b) = a \cdot b$.

231. $\gcd(a, b) = d \Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{Z} : na + mb = d$.

232. Доведіть, що дріб $(21n + 4)/(14n + 3)$ нескоротний для всіх $n \in \mathbb{N}$.

233. Доведіть, що серед 10 послідовних чисел є взаємнопросте з іншими.

234. $n, m \in \mathbb{N} : \mathrm{lcm}[n, n + 5] = \mathrm{lcm}[m, m + 5]$. Доведіть, що $n = m$.

235. Чи існують такі натуральні числа a, b, c, що $\mathrm{lcm}[a, b] = \mathrm{lcm}[a + c, b + c]$?

236. Натуральне число n таке, що $\gcd(n, n + 1) < \gcd(n, n + 2) < \cdots < \gcd(n, n + 35)$. Доведіть, що $\gcd(n, n + 35) < \gcd(n, n + 36)$.

237. Натуральне число n таке, що $\mathrm{lcm}[n, n + 1] > \mathrm{lcm}[n, n + 2] > \cdots > \mathrm{lcm}[n, n + 35]$. Доведіть, що $\mathrm{lcm}[n, n + 35] > \mathrm{lcm}[n, n + 36]$.

238. Нехай n і m – взаємнопрості натуральні числа. Знайдіть найбільше можливе значення $\gcd(m + 2000n, n + 2000m)$.

239. Натуральні числа n та m – взаємнопрості. Знайдіть усі можливі значення $\gcd(n + m, n^2 + m^2)$.

240. $n \in \mathbb{N}, 2|n$. Знайдіть усі такі $a, b \in \mathbb{N}$, що $\gcd(a, b) = 1$ та $(a + b)|(a^n + b^n)$.

241. Нехай $a, b, n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що $\gcd(n^a - 1, n^b - 1) = n^{\gcd(a,b)} - 1$.

242. Натуральні числа n, m такі, що число $(n+1)/m+(m+1)/n$ є цілим. Доведіть, що $\gcd(n, m) \leq \sqrt{n + m}$.

243. Знайдіть кількість пар $n, m \in \mathbb{N} : \gcd(n, m) = 5!$ і $\mathrm{lcm}[n, m] = 50!$.

244. Нехай a, b, c – такі натуральні числа, що $c|\left(2^a + 1\right)$, $c|\left(2^b + 1\right)$. Доведіть, що $c|\left(2^{\gcd(a,b)} + 1\right)$.

245. Знайдіть усі трійки $a, b, c \in \mathbb{N}$ такі, що $a^3 + b^3 + c^3$ ділиться на числа a^2b, b^2c, c^2a.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

246. Доведіть, що $(a-b)|(P(a)-P(b))$ якщо $P \in \mathbb{Z}[x]$.

247. Доведіть, що не існує $P \in \mathbb{Z}[x]$ такого, що $P(7)=5$ і $P(15)=9$.

248. Доведіть, що у $P \in \mathbb{Z}[x]$ не може бути орбіти довжини 3, тобто що не існує таких чисел a, b та c, що $P(a)=b$, $P(b)=c$ та $P(c)=a$.

249. Знайдіть усі дійсні корені системи рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

250. Знайдіть кубічний поліном Q такий, що $Q(1)=2$, $Q(2)=4$, $Q(3)=8$, $Q(4)=16$.

251. Позначимо

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5+5x^4+5x^3+5x^2+1 \\ (x) &= x^5+5x^4+3x^3-5x^2-1 \end{aligned}$$

Знайдіть усі прості p для яких існує ціле невід'ємне $n<p$ таке, що $p|f(n)$, $p|g(n)$. Для кожного такого p знайдіть усі такі n.

252. Нехай a, b – два корені рівняння $x^4+x^3-1=0$. Доведіть, що ab – корінь рівняння $x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$.

253. Знайдіть поліном P степеню не більше 5 який при діленні на $(x-1)^3$ та $(x+1)^3$ дає залишки -1 та 1 відповідно.

254. Доведіть, що якщо поліном степеню n приймає цілі значення у $n+1$ послідовній цілій точці, то він приймає ціле значення у кожній цілій точці.

255. Знайдіть усі поліноми $P \in \mathbb{R}[x]$ такі, що

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

для всіх a, b і c таких, що $ab+bc=ca=0$.

256. Знайдіть усі поліноми P для яких $P(x^2+1) \equiv P(x)^2+1$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

257. Яку найбільшу кількість доміно можна розташувати на шаховій дошці без клітинок a1, c1, e1, g1, g3, g5, g7, e7, c7, a7, a5, a3?

258. За яку найменшу кількість пострілів можна гарантовано влучити у корабель 1×3 на полі гри “Морський бій”?

259. Правильний трикутник зі стороною 10 порізали на правильні трикутники зі стороною 1. Скільки трикутників можна обійти якщо ходити у сусідній за стороною трикутник і не заходити в один трикутник двічі?

260. По колу виписано рядок з літер a і b. Доведіть, що кількість підрядків ab дорівнює кількості підрядків ba.

261. Чи може шаховий кінь обійти всі поля дошки 9×9 по одному разу і повернутися останнім ходом на стартове поле?

262. Коник може стрибати по прямій на 7 або 13 у.о. ліворуч або праворуч. Чи може він рівно за 2000 ходів переміститися рівно на 1999 у.о.?

263. Є пара $(5, 4)$. За хід можна змінити одне з чисел на 1, причому заборонено отримувати 0, 10, та повторювати пару. Яку найбільшу кількість ходів можна зробити?

264. На прямій сидять три коника. За хід один з них перестрибує рівно через одного іншого. Коли вони зможуть повернутися на початкові позиції?

265. Шаховий король обійшов усю дошку 8×8 побувавши на кожній клітинці рівно по разу і повернувшись на початкову клітинку. Доведіть, що він зробив парну кількість діагональних кроків.

266. За одну операцію дозволено число помножити або поділити на просте число. Чи можна рівно за 100 операцій отримати з числа 1 число 100. А за 200 ходів з числа 1 число 200?

267. У групі з 11 людей є староста. Після сесії в групу або додають когось одного або відраховують когось одного з початкових студентів. У групі не може бути менше 3 студентів. Повертатися до попередніх складів групи заборонено. Чи можуть всі можливі склади бути групи реалізовані?

268. Доведіть, що у грі у 15 не можна переставити дві сусідні фішки.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

269. $\angle C = 90°$. D, E ділять BC на рівні частини. Доведіть, що якщо $BC = 3AC$, то $\angle AEC + \angle ADC + \angle ABC = 90°$.

270. $ABCD$ квадрат. $L \in AC$: $AL : LC = 3 : 1$. Доведіть, що $\angle M_cLD = 90°$.

271. $ABCD$ квадрат. ℓ_1, ℓ_2 – прямі через A. B_1, B_2, D_1, D_2 – проекції B, D на ℓ_1, ℓ_2. Доведіть, що $B_1B_2 = D_1D_2$ і $B_1B_2 \perp D_1D_2$.

272. $\angle C = 90°$, $CA = CB$. $D \in CA$, $E \in CB$: $CE = CD$. ℓ_1, ℓ_2 через B, D перпендикулярні AE. $K = \ell_1 \cap AB$, $L = \ell_2 \cap AB$. Доведіть, що $KL = LB$.

273. На сторонах $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ вписаного $ABCD$ побудували назовні прямокутники розмірів $a \times c$, $b \times d$, $c \times a$, $d \times b$. Доведіть, що центри цих прямокутників є вершинами прямокутника.

274. Шестикутник $ABCDEF$ вписаний у коло радіуса R з центром O, причому $AB = CD = EF = R$. Доведіть, що точки перетину (BOC), (DOE), (FOA) є вершинами правильного трикутника зі стороною R.

275. $ABCD$ паралелограм. На BC, CD побудували назовні правильні трикутники BCK, DCL. Доведіть, що AKL правильний

276. На сторонах паралелограму зовнішнім чином побудували квадрати. Доведіть, що їхні центри утворюють квадрат.

277. На сторонах ABC побудували назовні рівнобедрені трикутники з вершинами A', B', C' і кутами 2α, 2β, 2γ при них, причому $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Доведіть, що кути трикутника $A'B'C'$ дорівнюють α, β, γ.

278. Сторони ABC – основи подібних рівнобедрених AB_1C, AC_1B (назовні) і BA_1C (всередину). Доведіть, що $AB_1A_1C_1$ паралелограм.

279. На сторонах AB, BC трикутника ABC зовнішнім чином побудовані прямокутні трикутники ABC_1, AB_1C, причому $\angle B_1 = \angle C_1 = 90°$, $\angle ABC_1 = \angle ACB_1 = \varphi$. Доведіть, що $M_aB_1 = M_aC_1$ і $\angle B_1M_aC_1 = 3\varphi$.

280. На сторонах ABC назовні побудовані правильні трикутники. Доведіть, що їхні центри утворюють правильний трикутник з центром M.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

Домашні задачі

281. На нерівних сторонах AB, AC трикутника ABC як на основах побудували назовні подібні рівнобедрені трикутники AC_1B, AB_1C з кутом φ при вершині. $E \in AM_a$: $B_1E = EC_1$. Доведіть, що $\angle B_1EC_1 = \varphi$.

282. На нерівних сторонах AB, AC трикутника ABC як на основах побудували назовні подібні рівнобедрені трикутники AC_1B, AB_1C з кутом φ при вершині. F: $OF \perp BC$ і $B_1F = FC_1$. Доведіть, що $\angle B_1FC_1 = 180° - \varphi$.

283. На сторонах опуклого $ABCD$ побудували назовні подібні ромби, причому їхні гострі кути α прилягають до A, C. Доведіть, що відрізки які з'єднують центри протилежних ромбів рівні, а кут між ними α.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

284. Доведіть, що для $n \in \mathbb{N}, n > 1$ число $n^5 + n^4 + 1$ не просте.

285. Знайдіть усі прості p, q, r такі, що $pq + qr + rp > pqr$.

286. Нехай p, q – різні прості числа. Доведіть , що існують $a, b \in \mathbb{N}$ такі, що середнє арифметичне всіх дільників числа $n = p^a \cdot q^b$ ціле.

287. Нехай p, q, r – прості числа, а $n \in \mathbb{N}$ таке, що $p^n + q^n = r^2$. Доведіть, що $n = 1$.

288. Ненульові цілі числа a, b, c, $a \neq c$, такі, що

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$$

Доведіть, що число $a^2 + b^2 + c^2$ складене.

289. Доведіть, що кожне натуральне число може бути подане у вигляді різниці двох натуральних чисел з однаковою кількістю простих дільників.

290. Нехай p – просте число. Знайдіть усі $k \in \mathbb{Z}$ такі, що число $\sqrt{k^2 - pk}$ натуральне.

291. Нехай $p > 5$ – просте число, $X = \{p - n^2 | n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$. Доведіть, що у X є два різних елементи x, y такі, що $x \neq 1$ і $x|y$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

292. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(f(x))\equiv x$, $f(f(x)+1)\equiv 1-x$.

293. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(f(x))\equiv (f(x)+1)\cdot(x+1)$.

294. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(x+y)\equiv \max\{f(x),y\}+\min\{f(y),x\}$.

295. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(xy)\equiv \max\{f(x),y\}+\min\{f(y),x\}$

296. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(xy)+f(xz)\geq f(x)\cdot f(yz)+1$.

297. $\frac{1}{2}\in E_f$ та $f(x)-f(y)\equiv f(x)\cdot f\left(\frac{1}{y}\right)-f(y)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$. Знайдіть $f(-1)$.

298. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що

$$f(x+xy+f(y))\equiv\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(f(y)+\frac{1}{2}\right).$$

299. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f([x]y)\equiv f(x)[f(y)]$.

300. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що

$$f(x^2+y^2+2017xy)\equiv x^2+y^2+2017f(x)f(y).$$

301. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $x\cdot f(x+xy)\equiv x\cdot f(x)+f(x^2)\cdot f(y)$.

302. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(0)=2$ та

$$f(x+(x+2y))\equiv f(2x)+f(2y).$$

303. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(1)=1$ та

$$f\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\equiv f(x)+\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2.$$

304. Знайдіть усі $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такі, що $f(n+1)>f(f(n))$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

305. Нехай $\delta \geq 2$ – найменший степінь графу G. Покажіть, що у ньому є цикл розміру $\geq \delta + 1$, причому якщо G – зв'язний, то у ньому є шлях довжини $\geq \min\{2\delta, V - 1\}$.

306. Доведіть, що якщо $\Delta \leq 3$, то є амортизоване (2,2)-розфарбування, тобто вершини можна розфарбувати у два кольори так, що в підграфі на вершинах одного кольору всі компонент зв'язності не більше за 2.

307. 20 команд взяли участь у турнірі. Доведіть, що після двох ігрових днів можна вибрати 10 команд таких, що жодні дві з них не грали між собою.

308. Українське космічне агентство представило план заселення Марсу з 2017 станціями. За проектом, деякі станції мають бути сполучені тунелями. Втім, один ледачий чиновник вирішив не читати документацію, а провести N тунелів випадково з єдиною умовою: він не проводить два тунелі між однією парою станцій. Знайдіть найменше N яке гарантує, що вибрані тунелі з'єднають усі станції.

309. В Україні є 460 міст, деякі з яких з'єднані ґрунтовими дорогами. Відомо, що з кожного міста можна дістатися до кожного іншого цими дорогами. Доведіть, що уряд України може заасфальтувати деякі з цих доріг так, щоб з кожного міста виходила непарна кількість асфальтових доріг. (Вважаємо що початково в Україні немає асфальтованих доріг.)

310. На факультеті кібернетики деякі студенти знайомі. Кожної суботи один зі студентів запрошує своїх знайомих на вечірку і знайомить їх. Припустимо, що дві людини не познайомилися після того як кожен студент влаштовував вечірку. Доведіть, що вони так ніколи і не познайомляться.

311. Кожен зі студентів факультету кібернетики та комп'ютерних наук (їх більше ніж 6) переписується рівно з трьома іншими. Доведіть, що факультет можна розбити на два факультети (кібернетики та комп'ютерних наук) так, що кожний студент буде переписувати як мінімум з двома студентами з його нового факультету.

312. Можна робити наступну операцію з графом: взяти цикл довжини 4 і викинути з нього ребро. Знайдіть найменшу кількість ребер у графі який може утворитися при таких операціях якщо починали з n-кліки.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

313. З довільної точки M катету BC прямокутного ABC на гіпотенузу AB опустили перпендикуляр MN. Доведіть, що $\angle MAN = \angle MCN$.

314. Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами AD і BC перетинаються в точці O. Точки B' і C' симетричні вершинам B і C відносно бісектриси кута BOC. Доведіть, що $\angle C'AC = \angle B'DB$.

315. У вписаному $ABCD$ $AB \cap CD = P$, $BC \cap AD = Q$. Доведіть, що точки перетину бісектрис $\angle AQB$, $\angle BPC$ з $ABCD$ є вершинами ромбу.

316. Вписане коло дотикається до сторін AB, AC трикутника ABC в M, N. Нехай P – точка перетину прямої MN і бісектриси кута ABC (або її продовження). Доведіть, що $\angle BPC = 90^\circ$ і $[ABC] = 2[ABP]$.

317. Всередині чотирикутника $ABCD$ взяли точку M таку, що $ABMD$ – паралелограм. Доведіть, що якщо $\angle CBM = \angle CDM$ то $\angle ACD = \angle BCM$.

318. Прямі AP, BP, CP перетинають (ABC) в A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 взяли на прямих BC, AC, AB так, що $\angle(PA_2, BC) = \angle(PB_2, AC) = \angle(PC_2, AB)$. Доведіть, що $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$.

319. Навколо правильного APQ описали прямокутник $ABCD$, $P \in BC$, $Q \in CD$. P', Q' – середини AP, AQ. Доведіть, що $BQ'C$, $CP'D$ правильні.

320. Доведіть, що якщо у вписаному чотирикутнику $ABCD$ виконується $CD = AD + BC$ то точка перетину бісектрис кутів A і B лежить на CD.

321. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ обрано точки $M \in CA$, $N \in CE$ так, що $M/CA = CN/CE = \lambda$. Знайдіть λ, якщо B, M, N колінеарні.

322. Сторони трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні, причому AB і A_1B_1 лежать на одній прямій. Доведіть, що пряма через точки перетину (A_1BC) і (AB_1C) містить точку C_1.

323. В ABC провели висоти AA_1, BB_1, CC_1. $KL || CC_1$, причому K, L лежать на BC, B_1C_1. Доведіть, що центр (A_1KL) лежить на AC.

324. Через інцентр I трикутника ABC провели пряму $MN \perp CI$, причому M, N лежать на AC, BC. Прямі AI, BI перетинають (ABC) в A', B'. Доведіть, що $A'N \cap B'M$ лежить на (ABC).

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

325. Доведіть, що $S(n) \equiv n \pmod 9$.

326. Доведіть, що $S(a+b) \leq S(a)+S(b)$.

327. Доведіть, що $S(a_1+\dots+a_n) \leq S(a_1)+\dots+S(a_n)$.

328. Доведіть, що $S(ab) \leq \min\{a \cdot S(b), b \cdot S(a)\}$.

329. Доведіть, що $S(ab) \leq S(a) \cdot S(b)$.

330. Відомо, що $S(n) = S(2n)$. Доведіть, що $9|n$.

331. Числа X та Y отримані одне з одного перестановкою цифр. Доведіть, що $S(5X) = S(5Y)$.

332. Кожна цифра числа N більша за лівіші від неї цифри. Знайдіть $S(9N)$.

333. Чи існує n таке, що $S(n) = 1996 \cdot S(3n)$.

334. Доведіть, що існує нескінченно багато натуральних чисел які діляться на суму своїх цифр.

335. Знайдіть усі натуральні n такі, що $S(5^n) = 2^n$.

336. Знайдіть $S\left(S\left(S\left(4444^{4444}\right)\right)\right)$.

337. Доведіть, що для довільного натурального k існують попарно різні натуральні числа $n_1, \dots, n_k$ такі, що

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = \ldots = n_k + S(n_k).$$

338. Доведіть, що для довільного натурального n виконується нерівність

$$S(n) \leq 5S(2n).$$

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

339. Обчисліть значення функцій

$$P(x) = 2x^3 - 27x^2 + 141x - 256, \quad x = 16$$
$$Q(x) = x^4 + \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + 1, \quad x = -\frac{3}{4}$$

340. А тепер зробіть те саме не "в лоб" а за схемою Горнера:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

341. Скільки операцій множення і додавання необхідно зробити в обох способах для обчислення значення поліному степеню n?

342. Для довільного $P \in \mathbb{R}[x]$ і $a \in \mathbb{R}$ існує $Q \in \mathbb{R}[x]$ такий, що $P \equiv (x-a)Q + P(a)$, причому $\deg Q < \deg P$.

343. Доведіть, що поліном степеню n має не більше ніж n коренів.

344. Доведіть, що якщо значення двох поліномів збігаються в кожній точці то вони збігаються покоефіцієнтно.

345. Зауважимо, що попередня задача не виконується у $\mathbb{Z}_p[x]$.

346. Доведіть, що якщо значення двох поліномів степеню n збігаються в $n+1$ точці то вони рівні.

347. Доведіть тотожність

$$\frac{d(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{a(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d} +$$
$$+ \frac{d(x-d)(x-c)(x-a)}{(b-d)(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-d)(x-b)(x-a)}{(c-d)(c-b)(c-a)} = x$$

348. Нехай $P \in \mathbb{Z}[x]$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ – різні корені P. Доведіть, що P ділиться на $(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_k)$.

349. Сформулюйте і доведіть теорему про ділення із залишком в $\mathbb{R}[x]$.

350. Чи виконується теорема про ділення із залишком в $\mathbb{Q}[x]$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

351. У ЛМШ є n учнів, у кожного з яких є бейджик. Ми перемішали бейджики і роздали їх випадковим чином. Скільки в середньому людей отримають свій бейджик?

352. У дитячому садочку 2006 дітей сіли в коло. Одночасно кожна дитина штовхнула одного зі своїх сусідів. Скільки в середньому дітей залишаться нештовхані?

353. 7 хлопців і 13 дівчат стали в ряд. Скільки в середньому пар (дівчина, хлопець) опиняться поруч?

354. Нехай S – множина дійсних чисел вигляду $0.\overline{abc}$ де a, b, c – різні цифри. Знайдіть суму елементів S.

355. Доведіть що у довільного підграфу $K_{n,n}$ у якому принаймні $n^2 - n + 1$ ребер знайдеться ідеальне парування.

356. Доведіть, що $R(k, k) > 2^{k/2}$.

357. Доведіть, що можна провести турнір так, що для кожних 1000 учасників знайшовся учасник який переміг їх всіх.

358. Розглянемо n дійсних чисел з сумую 0 не всі з яких 0. Доведіть, що їх можна занумерувати $a_1, a_2, \ldots, a_n$ так, що $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 < 0$.

359. У Думі 1600 делегатів які утворили 16000 комітетів по 80 людей. Доведіть, що знайдуться два комітети у яких принаймні 4 спільні делегати.

360. В олімпіаді було 6 задач, і в ній взяли участь 200 учасників, причому кожну задачу розв'язало принаймні 120 учасників. Доведіть, що знайдуться два учасники які разом розв'язали 6 всі задачі.

361. Нехай A – множина з N залишків $\pmod{N^2}$. Доведіть, що існує множина B з N залишків $\pmod{N^2}$ така, що $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ містить принаймні половину всіх залишків $\pmod{N^2}$.

362. У турнірі взяли участь 799 команд. Доведіть, що можна знайти дві неперетинні групи A і B з семи команд кожна такі, що всі команди з A виграли у всіх команд з B.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

363. Доведіть, що $\triangle H_aH_bC \sim \triangle ABC$ і знайдіть коефіцієнт подібності.

364. M, N – проекції H_c на BC, AC. Доведіть, що $\triangle MNC \sim \triangle ABC$.

365. Доведіть що дотична в A до (ABC) паралельна до H_bH_c.

366. Доведіть, що $H_bH_c \perp OA$.

367. Доведіть, що $\triangle H_aH_bH_c \sim \triangle DEF$, де $\triangle DEF$ утворюється дотичними до (ABC) проведеними в A, B, C.

368. $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$: AA_1, BB_1, CC_1 конкурентні в H_0. Доведіть, що $AH_0 \cdot A_1H_0 = BH_0 \cdot B_1H_0 = CH_0 \cdot C_1H_0 \iff H_0 = H$.

369. Доведіть, що AH_a, BH_b, CH_c є бісектрисами кутів $H_aH_bH_c$.

370. $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Доведіть, що якщо $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$, $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то $A_1 = H_a$, $B_1 = H_b$, $C_1 = H_c$.

371. Доведіть, що точка симетрична H_a відносно AC лежить на H_bH_b.

372. Доведіть, що якщо $H_aH_b || AB$, $H_bH_c || BC$ то $H_cH_a || CA$.

373. p – напівпериметр ABC, q – периметр $H_aH_bH_c$. Доведіть, що $p : q = R : r$, де R, r – радіуси описаного та вписаного кіл ABC.

374. Доведіть, що шість точок які є проекціями H_a, H_b, та H_c на AB, AC, BC, BA, та CA, CB відповідно, лежать на одному колі.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

375. Нехай $xy = z^n$ і $\gcd(x, y) = 1$, де $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), тоді існують натуральні числа t і s такі, що $x = t^n$ і $y = s^n$.

376. Якщо $a \in \mathbb{Q}$ і $a^n \in \mathbb{N}$, де $n \in \mathbb{N}$, то $a \in \mathbb{N}$.

377. Якщо $a \in \mathbb{N}$ і $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q}$, де $n \in \mathbb{N}, n > 1$, то $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{N}$.

378. Якщо $x^a = b^y$, де a, b, x, y – натуральні числа, причому $\gcd(a, b) = 1$, тоді існує таке натуральне число z, що $x = z^b$ і $y = z^a$.

379. Якщо $xy = zt$, деx, y, z, t – натуральні числа, то існують такі натуральні числа $a, b, c, d, (b, c) = 1$, що $x = ab, y = cd, z = ac$ і $t = bd$.

380. Рівняння вигляду $ax + by = c$ має розв'язок у цілих числах тоді і тільки тоді, коли $d = \gcd(a, b)$ ділить c.

381. Якщо (x_0, y_0) – розв'язок рівняння $ax + by = c$, то всі інші розв'язки (x, y) мають вигляд $x = x_0 + \dfrac{b}{d}t, y = y_0 - \dfrac{a}{d}t$, де $d = \gcd(a, b)mt \in \mathbb{Z}$.

382. Будь-який розв'язок рівняння вигляду $x^2+y^2 = z^2$ має вигляд $x = 2mnk, y = (m^2-n^2)k, z = (m^2+n^2)k$ або $x = (m^2-n^2)k, y = 2mnk, z = (m^2+n^2)k$, де m, n і k – цілі числа, що задовольняють умови $\gcd(m, n) = 1$ та $2|n$ або $2|m$.

383. Якщо в задачі вище $\gcd(x, y) = 1$ або $\gcd(x, z)$ або $\gcd(y, z)$ то в представленні вище існує розв'язок з $k = 1$.

384. 175 жовтих кульок коштують дорожче, ніж 125, і дешевше, ніж 126 блакитних кульок. Доведіть, що на 3 жовті кульки і 1 блакитну 1 грн не вистачить. (Кульки коштують натуральне число копійок.)

385. Чи існують два послідовних натуральних числа, сума цифр кожного ділиться на 2017? Якщо так то знайдіть найменші такі числа.

386. Знайдіть усі розв'язки рівняння $6x + 10y + 15z = 7$.

387. Розв'яжіть рівняння $1/x^2 + 1/y^2 = 1/z^2$.

388. Розв'яжіть рівняння $x^2 + y^2 = 2017(x - y)$.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

389. Рівняння $ax^3+bx^2+cx+d=0$ зводиться до рівняння $x^3+px+q=0$, а рівняння $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ – до рівняння $x^4+px^2+qx+r=0$.

390. Знайдіть координати центру симетрії графіка функції

$$y = -2x^3 - 6x^2 + 4$$

і доведіть, що графік кожного кубічного многочлена має центр симетрії.

391. Знайдіть хоча б один корінь рівняння $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$, враховуючи, що $(b+c)^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b+c)$. Використовуючи цей корінь, розв'яжіть це рівняння.

392. Виведіть з попередньої задачі загальний алгоритм розв'язку рівнянь третього степеню.

393. Доведіть, що

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Виведіть звідси нерівності $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ та $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ при $a, b, c > 0$. Коли у цих нерівностях досягається рівність?

394. Розв'яжіть рівняння $(x^2+2)^2 = 18(x-1)^2$, $x^4 + 4x - 1 = 0$.

395. Розв'яжіть рівняння $x^4 - 10x^2 - 8x + 5 = 0$.

396. Виведіть з попередньої задачі загальний алгоритм розв'язку рівнянь четвертого степеню.

397. Розв'яжіть рівняння $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Для цього підберіть такі α, A, B, що

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \left(x^2 + \frac{ax}{2} + \alpha\right)^2 - (Ax+B)^2.$$

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

398. На столі стоять n склянок. З них k стоять правильно, а $n-k$ – дном догори. Дозволяється одночасно перегортати довільні m склянки. Для яких m, n, k такими операціями можна поставити всі склянки правильно?

399. Дано набір дійсних чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ та асоціативну функцію. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Для довільних $1 \leq i < j \leq n$ дозволяється набір

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

замінити набором

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n, f(a_i, a_j))$$

Скільки різних наборів з одного числа можна отримати такими операціями?

400. Дано набір цілих чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ та натуральні числа k і m. Дозволяється k з чисел набору збільшити на m. Для яких m, n, k такими операціями з довільного набору $(a_1, \ldots, a_n)$ можна отримати набір де всі числа рівні?

401. Дано квадрат і набір натуральних чисел $(a_1, \ldots, a_n)$. Для довільного i дозволяється частину квадрату розрізати на a_i частин. Нехай натуральне число k більше за $\mathrm{lcm}\{a_1, \ldots, a_n\}$. Для яких k такими операціями можна розрізати квадрат рівно на k частин?

402. Є нескінченна шахова дошка. Для яких натуральних n, m, k (m, k)-конем (фігура яка ходить на m клітинок в одному напрямку та на k в іншому) можна побувати на всіх клітинках (x, y) з $0 \leq x, y \leq n$ однакову кількість разів?

403. Розв'яжіть задачу 3 якщо збільшувати можна лише числа $a_{i+1}, \ldots a_{i+k}$ (нумерація циклічна).

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

404. На сторонах трикутника ABC назовні побудовані трикутники ABC', $AB'C$, $A'BC$, причому сума кутів при вершинах A', B', C' кратна 180°. Доведіть, що (ABC'), $(AB'C)$, $(A'BC)$ перетинаються в одній точці.

405. $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Доведіть, що (A_1B_1C), (A_1BC_1), (AB_1C_1) перетинаються в одній точці.

406. $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ рухаються так, що $A_1B_1C_1$ залишається подібним одному і тому ж трикутнику. Доведіть, то точка перетину (A_1B_1C), (A_1BC_1), (AB_1C_1) при цьому нерухома.

407. $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Доведіть, що якщо $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (але орієнтація різна), то (A_1B_1C), (A_1BC_1), (AB_1C_1) перетинаються в центрі (ABC).

408. A', B', C' симетричні P відносно BC, CA, AB. Доведіть, що $(A'B'C)$, $(A'BC')$, $(AB'C')$, (ABC) перетинаються. Доведіть, що $(A'BC)$, $(AB'C)$, (ABC'), $(A'B'C')$ перетинаються в Q. Доведіть, що якщо I, J, K, O – центри $(A'BC)$, $(AB'C)$, (ABC'), $(A'B'C')$, то $QI/OI = QJ/OJ = QK/OK$.

409. Чотири прямі утворюють чотири трикутника. Доведіть, що описані кола цих трикутників перетинаються в одній точці (Мікель). Доведіть, що центри цих кіл і точка Мікеля циклічні.

410. $A_1 = \ell \cap BC$, $B_1 = \ell \cap CA$, $C_1 = \ell \cap AB$. O, O_a, O_b, O_c – центри (ABC), (AB_1C_1), (A_1BC_1), (A_1B_1C). Доведіть, що $\triangle O_aO_bO_c \sim \triangle ABC$. Доведіть, що серпери до OH, O_aH_a, O_bH_b, O_cH_c конкурентні, де H, H_a, H_b, H_c – ортоцентри вищезгаданих трикутників.

411. $ABCD$ вписаний. Доведіть, що точка Мікеля його сторін лежить на відрізку який з'єднує точки перетину пар протилежних сторін.

412. $ABCD$ вписаний у коло з центром O. $E = AB \cap CD$, $P = (AEC) \cap (BED)$. Доведіть, що A, D, P, O циклічні, і що $\angle EPO = 90^\circ$.

413. Доведіть, що проекції точки Мікеля чотирьох прямих на ці прямі колінеарні.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

414. Не існує нескінченної спадної послідовності невід'ємних цілих чисел.

415. Якщо послідовність невід'ємних цілих чисел задовольняє нерівностям $n_1 \geq n_2 \geq \cdots$ то існує такий номер i що $n_i = n_{i+1} = \cdots$

416. Доведіть, що число $\sqrt{2}$ – ірраціональне.

417. Знайдіть усі прості p для яких існують натуральні x, y, n такі, що

$$p^n = x^3 + y^3$$

418. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ в цілих числах.

419. Доведіть, що число $\dfrac{2^n - 1}{n}$ не є цілим.

420. Знайдіть найбільше значення виразу $m^2 + n^2$, якщо

$$\left(n^2 - nm - m^2\right)^2 = 1$$

421. $(ab+1) \mid (a^2+b^2)$. Доведіть, що число

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

є точним квадратом.

422. Доведіть, що якщо число

$$\frac{a^2+b^2+a+b+1}{ab}$$

ціле, то воно дорівнює 5.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

423. Петро розділив число a на число b. Після цього, збільшивши a на 1 і зменшивши b на 2, він з подивом з'ясував, що частка не змінилася. Чому вона могла дорівнювати?

424. Додатні числа a, b, c, d такі, що $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Доведіть, що $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$.

425. Нехай $k = \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}$. Виразіть через k число $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}$.

426. Про додатні числа a, b, c, d відомо, що $ac + ad - bd - bc = 0$. Чому може дорівнювати $(a-b)/(c+d)$?

427. Розв'яжіть в натуральних числах рівняння $xy - x - y - 1 = 17$.

428. Розв'яжіть в натуральних числах рівняння $xy - 3x - 5y = 8$.

429. Натуральне n таке, що $2^n - 1$ просте. Доведіть, що і n – просте.

430. Відомо, що для деяких числа a і b виконується $a + b = 1$. Чому може дорівнювати $a^3 + 3ab + b^3$?

431. Відомо, що b – середнє арифметичне чисел a і c, причому $a - c = 6$. Чому може дорівнювати значення виразу $ab + bc - ac - b^2$?

432. Розв'яжіть в цілих числах рівняння $x^2 - y^2 = 2017$.

433. Для простого p доведіть, що $(2^p - 1) \mid \left(2^{2^p} - 4\right)$.

434. Натуральні числа $x, y > 1$ такі, що $(x + y - 1) \mid (x^2 + y^2 - 1)$. Доведіть, що $x + y - 1$ – складене.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

$$S = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i, \text{ де } S = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|, S_k = \sum_{\substack{I \subset \overline{1..n} \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|,$$

$A_1, \ldots, A_n$ – довільні множини, а $|A|$ позначає кількість елементів в A.

435. Доведіть формулу включення-виключення (для цього розгляньте елемент, що лежить рівно в k множинах і подивіться, скільки разів він порахований у правій частині).

436. Скільки існує нескоротних дробів з чисельником 2015, менших за 1/2015 та більших за 1/2016?

437. Кожна сторона трикутника ABC розділена на 8 рівних відрізків. Скільки існує різних трикутників з вершинами у точках поділу, сторони яких не паралельні сторонам ABC?

438. Скільки існує перестановок множини $\overline{1..n}$, у яких жодні два з чисел 1, 2, 3 не стоять поруч?

439. На стороні AD трикутника AMD взяли точки B і C такі, що $\angle AMC = \angle BMD = 90°$ і $\angle BMC = \varphi$. Знайдіть площі трикутника BMC, якщо площі трикутників AMC та BMD дорівнюють p і q.

440. Доведіть формулу для функції Ейлера: якщо $n = \prod_{i=1}^{s} p_i{}^{\alpha_i}$, то

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

441. В класі 30 учнів. Скількома способами вони можуть пересісти так, щоб жоден не сів на своє місце?

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

442. Доведіть, що в одній точці перетинаються серпери сторін трикутника.

443. Доведіть, що бісектриси кутів трикутника конкурентні.

444. В чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$. На серпері до AC взяли точку E таку, що $\angle BAE = \angle ECD$. Доведіть, що E лежить на серпері BD.

445. Дано квадрат $ABCD$. На продовженні AC за C взяли K таку, що $BK = AC$. Знайдіть $\angle BKC$.

446. Дано M-подібну ламану $ABCDE$. Відомо, що $AB = BC = CD = DE$, $\angle ABC = \angle CDE$, K – середина BD. Доведіть, що $AK = KE$.

447. На сторонах кута з вершиною O взяли точки A_1, A_2 та B_1, B_2 такі, що $OA_1 = OB_1, OA_2 = OB_2$. Відрізки A_1B_2 і A_2B_1 перетинаються в точці C. Доведіть, що C лежить на бісектрисі цього кута.

448. Відрізки AD і CE – бісектриси кутів трикутника ABC. Точки K і M – основи перпендикулярів з B на AD і CE відповідно. Доведіть, що якщо $BK = KM$, то трикутник ABC – рівнобедрений.

449. Точка C лежить всередині прямого кута AOB. Доведіть, що периметр $\triangle ABC$ більше $2OC$.

450. В трикутнику ABC на стороні AB взяли точку D. Знайдіть точки E і F на сторонах BC і CA такі, що периметр трикутника DEF мінімальний.

451. В точках A і B що лежать на різних сторонах кута побудували перпендикуляри до сторін кута, які перетнули бісектрису кута в точках C і D. Доведіть, що середина CD рівновіддалена від A і B.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018

452. Нехай p, q – послідовні непарні прості. Доведіть, що $p+q$ – добуток трьох (не обов'язково різних) натуральних чисел більших від одиниці.

453. $a, b, c \in \mathbb{N}$ такі, що $a^3b^5c^6$ – сьомий степінь деякого натурального числа. Доведіть, що $a^5b^6c^3$ – також сьомий степінь деякого натурального числа.

454. Карина записала на дошці в ряд 2018 цілих чисел. Доведіть, що Варвара може вибрати декілька (можливо одне) послідовних чисел, сума яких кратна 2018.

455. Всі власні дільники числа n виписали в ряд: $d_1 > d_2 > \cdots > d_k$. Виявилося, що в кожній парі дільників однаково віддалених від кінців більший ділиться на менший. Доведіть, що n є степенем простого.

456. $a, b, x, y, n \in \mathbb{N}$ такі, що кожне з чисел $ax-1$, $by-1$ і $x+y-1$ ділиться на n. Доведіть, що число $ab-a-b$ також ділиться на n.

457. Чи в довільному графі можна кожній вершині присвоїти натуральне число так, щоб серед довільних чисел, присвоєних довільним двом суміжним вершинам одне ділиться на інше, а серед довільних двох чисел, присвоєних довільним двом не суміжним вершинам жодне з них не ділиться на інше?

458. Денис задумав натуральне число, всі (≥ 2) цифри якого однакові. Доведіть, що воно не квадрат.

459. Нехай a, b, c – три натуральних числа. На дошку виписали три добутки ab, bc, ca і у кожного з них витерли всі цифри, окрім двох останніх. Чи могли отримати три послідовних двозначних числа?

460. Просте число p і цілі числа a, b, c, d, e такі, що a^2-b, a^3-c, c^5-d, b^7-e діляться на p. Доведіть, що число $ae-d$ також ділиться на p.

461. $a, b > 1$ – натуральні числа. Відомо, що a^2+b ділиться на a^2+b. Доведіть, що b^2+a – складене.

462. Розв'яжіть в натуральних числах рівняння $5^k - 3^n = 16$.

463. Різні натуральні числа a, b, c такі, що $c|(ab+a+b)$, $b|(ac+a+c)$, $a|(bc+b+c)$. Доведіть, що хоча б одне з чисел a, b, c – складене.

© Нікіта Скибицький, Денис Пушкін, 2018