Задачі на літо

Алгебра

Нерівності

Задача 1. Почнемо з чогось зовсім смішного.

- Доведіть, що якщо $x, y, z > 0$ і $\dfrac{x}{y} < 1$, то $\dfrac{x}{y} < \dfrac{x+z}{y+z}$.
- Нехай $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0$. Виявилося, що $\dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{a_2}{b_2}$. Доведіть, що $\dfrac{a_1}{b_1} < \dfrac{a_1+a_2}{b_1+b_2} < \dfrac{a_2}{b_2}$.

Задача 2. На дошці записано дріб $5/8$. За хід можна чисельник і знаменник помножити на одне і те ж натуральне число, до чисельника і знаменника додати одне і те ж натуральне число, і розділити чисельник і знаменник на одне і те ж натуральне число. Які дроби можна отримати за скінченну кількість кроків?

Задача 3. Для $x > 0$ доведіть, що $\dfrac{2x}{(1+x)^2} \geq \dfrac{x}{x^2+1}$.

Задача 4. Для $x, y, z > 0$ доведіть, що $\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x} \leq 2$.

Задача 5. Для $a, b, c, d > 0$ доведіть, що $1 < \dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} < 2$.

Задача 6. Для $a, b, c > 0$ доведіть, що $\dfrac{2a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)} + \dfrac{2b^2+c^2+a^2}{(b+c)(b+a)} + \dfrac{2c^2+a^2+b^2}{(c+a)(c+b)} \leq 3\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Задача 7. Для $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ доведіть, що $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_n}{a_1} \geq n$.

Задача 8 (Нерівність Бернуллі)**.** При $n \in \mathbb{N}, x > -1$ доведіть нерівність $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Задача 9. Доведіть, що $1.01^{1000} > 1000$.

Задача 10. Для $n, m \in \mathbb{N}$ доведіть нерівність $\dfrac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \dfrac{1}{\sqrt[m]{n+1}} \geq 1$.

Задача 11. Всі латинські літери в цій задачі позначають натуральні числа.

- Доведіть, що $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.
- Доведіть, що $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$.
- Коли $n^m > m^n$?

Многочлени

Многочленом будемо називати вираз вигляду $P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots$, у якому лише скінченна кількість коефіцієнтів $p_0, p_1, p_2, \ldots$ відмінна від нуля. Будемо писати $P \equiv Q$, якщо $p_n = q_n$ для всіх n. Будемо писати $P \in \mathbb{Z}[x]$ ($P \in \mathbb{R}[z]$) якщо $p_n \in \mathbb{Z}$ ($p_n \in \mathbb{R}$) для всіх n. Через $\deg P$ будемо позначати найбільше n таке, що $p_n \neq 0$.

(Ділення із залишком) Для довільних многочленів $F(x)$ і $G(x) \neq 0$ існують єдині многочлени $Q(x)$ і $R(x)$ такі, що $F(x) \equiv Q(x)G(x) + R(x)$ і $\deg R < \deg G$.

Задача 12. Це не задача а радше вправа для усвідомлення ідеології ділення многочленів із залишком.

- Доведіть, що ділення із залишком єдине.
- $F, G \in \mathbb{Z}[x]$. Чи обов'язково коефіцієнти частки і залишку будуть цілими?

Задача 13. А тепер трохи про ділення на лінійні многочлени.

- Доведіть теорему Безу: залишок від ділення $P(x)$ на $(x - a)$ дорівнює $P(a)$.
- Доведіть, що якщо $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – різні цілі числа, і $P(a_i) = 0$ для всіх $i \leq k$, то $P(x)$ ділиться на $(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_k)$.

Задача 14. Доведіть, що у многочлену степеню n не більше ніж n коренів.

Задача 15. Доведіть, що графік многочлену четвертого степеню і пряма не можуть перетинатися більше ніж у чотирьох точках.

Задача 16. Доведіть, що якщо $F(x) = G(x)$ для довільного x, то $F \equiv G$.

Задача 17. Чи існує унітарний ($f_{\deg F} = 1$) многочлен $F(x)$ степеню 3 такий, що $F(1000) = 1, F(1001) = 3, F(1002) = 17, F(1003) = 55$?

Задача 18. Многочлен $P(x)$ такий, що $P(-k) = P(k)$ при натуральних $k \leq \deg P$.

- Доведіть, що P – парна функція.
- Доведіть, що многочлен є парною функцією тоді і тільки тоді, коли він має вигляд $a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \ldots$

Задача 19. Чи існує многочлен $P(x)$ такий, що $P(x^2 - x + 1) \equiv P(x^2 + x + 1)$?

Задача 20. Дано многочлен $f(x)$ степеню 3. Назвемо невпорядковану трійку різних чисел (a, b, c) циклічною, якщо $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$.

- Доведіть, що не буває 10 різних циклічних трійок.
- Доведіть, що не буває 4 різних циклічних трійок з однаковою сумою.

Алгебраїчний різнобій

Задача 21. $a, b \in \mathbb{Q} : a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$. Доведіть, що $1 - ab = q^2$, $q \in \mathbb{Q}$.

Задача 22. Число x таке, що серед чотирьох чисел $x - \sqrt{2}, x - \dfrac{1}{x}, x + \dfrac{1}{x}, x^2 + 2\sqrt{2}$ рівно одне не ціле. Знайдіть всі такі x.

Задача 23. Числа a, b такі, що $a^3 - b^3 = 2, a^5 - b^5 \geq 4$. Доведіть, що $a^2 + b^2 \geq 2$.

Задача 24. Додатні числа a, b, c такі, що $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Доведіть, що $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$.

Задача 25. Числа a, b, c, d такі, що $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Доведіть, що $(2 + a) \cdot (2 + b) \geq cd$.

Задача 26. Для додатних a, b, c, d доведіть нерівність $\dfrac{ab + cd) \cdot (ad + bc)}{(a + c) \cdot (b + d)} \geq \sqrt{abcd}$.

Нерівність Коші-Буняковського-Шварца

Для дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ має місце нерівність

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2.$$

У всіх задачах окрім 30ої числа додатні.

Задача 27 (Нерівність Мінковського)**.**

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Задача 28. $n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}\right)^2.$

Задача 29. $a + b + c + d \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}.$

Задача 30. Відомо, що $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$. Знайдіть найбільше значення виразу $6x - 8y + 24z$.

Задача 31 (Вірменська лема/нерівність Седракяна)**.**

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Задача 32. $\dfrac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \dfrac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \dfrac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{2}.$

Задача 33. $\dfrac{a}{b + c} + \dfrac{b}{c + a} + \dfrac{c}{a + b} \geq \dfrac{3}{2}.$

Задача 34. $\dfrac{a}{b + c} + \dfrac{b}{c + d} + \dfrac{c}{d + a} + \dfrac{d}{a + b} \geq 2.$

Задача 35. Відомо, що $abc = 1$. Доведіть, що

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Задача 36. $a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2.$

Задача 37. $((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2) \cdot \left(\dfrac{1}{a_1b_1} + \dfrac{1}{a_2b_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_nb_n}\right) \geq 4n^2.$

Метод Штурма

Задача 38. Як зміниться при зближенні двох додатних чисел з фіксованою сумою їх:

- добуток,
- сума квадратів,
- сума обернених величин?

Задача 39. А як зміниться при зближенні двох чисел з фіксованим добутком їх:

- сума,
- сума обернених величин?

Задача 40. Доведіть нерівності Коші (про середні) з допомогою методу Штурма (зближення чисел).

Задача 41. Сума додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дорівнює 1. Доведіть, що

$$\frac{(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} \geq (n-1)^n.$$

Задача 42. Доведіть, що для невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з сумою 1 виконується нерівність

$$(1+x_1)\cdot(2+x_2)\cdot\ldots\cdot(n+x_n) \leq 2n!$$

Задача 43. Ця задача – провісник чогось страшного під назвою нерівність Карамати.

- Числа $a_1 > a_2 > a_3$ і $b_1 > b_2 > b_3$ такі, що $a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Що більше: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ чи $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$?
- Числа $a_1 > a_2 > a_3$ і $b_1 > b_2 > b_3$ такі, що $a_1 > b_1, a_1 + a_2 > b_1 + b_2, a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$. Що більше: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ чи $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$?

Задача 44. Доведіть, що для $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_9 > 0$ виконується нерівність

$$\frac{1}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} + \frac{1}{a_6+a_7+a_8} + \frac{1}{a_9} \geq \frac{1}{a_1+a_2+a_3} + \frac{1}{a_4+a_5+a_6} + \frac{1}{a_7+a_8+a_9}.$$

Задача 45. Для додатних $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_7$ доведіть нерівність

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 + a_7^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7)^2.$$

Геометрія

Вписаний чотирикутник з перпендикулярними діагоналями

Задача 46. Діагоналі чотирикутника перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли рівні суми квадратів його протилежних сторін ($AC \perp BD \iff AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$).

Задача 47 (Теорема синусів)**.** Відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута дорівнює діаметру описаного кола цього трикутника ($AB : \sin\angle ACB = 2R_{ABC}$).

Задача 48. Дано чотири палиці і відомо, що з них можна скласти чотирикутник з перпендикулярними сторонами (палиці є його сторонами). Доведіть, що з них можна скласти чотирикутник з двома прямими кутами.

Задача 49. У цій задачі, і до кінця `subsection`, $ABCD$ – вписаний в коло з радіусом R і центром O чотирикутник з перпендикулярними діагоналями, які перетинаються в точці P.

- Доведіть, що $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$.
- Знайдіть $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.
- Доведіть, що $AC^2 + BD^2 = 8R^2 - 4OP^2$.

Задача 50. Через вершини вписаного чотирикутника провели дотичні до його описаного кола. Доведіть, що точки перетину сусідніх дотичних є вершинами вписаного чотирикутника тоді і тільки тоді, коли діагоналі першого чотирикутника перпендикулярні.

Задача 51. З вершин A і B опустили перпендикуляри на пряму CD, які перетнули прямі BD і AC в точках K і L відповідно. Доведіть, що:

- $\angle ALB = \angle KDC$ або $\angle ALB + \angle KDC = 180°$.
- $AKLB$ – ромб.

Задача 52. Доведіть, що відстань від точки O до сторони AB дорівнює половині CD.

Задача 53. Доведіть, що пряма, проведена через точку P перпендикулярно стороні BC ділить сторону AD навпіл.

Задача 54. Якщо у когось виникало питання що таке `subsection`, то це остання задачі в ній.

- Доведіть, що середини сторін чотирикутника лежать на одному колі.
- Доведіть, що проекції (основи перпендикулярів з) точки P на сторони чотирикутника лежать на тому ж колі.
- Виразіть радіус цього кола через R і $p = OP$.
- Доведіть, що точка P є центром кола, вписаного в чотирикутник, вершинами якого є проекції точки P на сторони $ABCD$.

Додаткові побудови

Задача 55. Згадайте типові додаткові побудови які застосовувалися для розв'язання таких задач:

- Побудова трикутника по двом сторонам і медіані до третьої.
- Побудова трапеції по чотирьом сторонам.
- Побудова трапеції по основам і діагоналям.
- Побудова рівнобічної трапеції по діагоналі і радіусу описаного кола.

Задача 56. Доведіть, що якщо у трикутнику медіана є бісектрисою, то він рівнобедрений.

Задача 57. У $\triangle ABC$: $AB = 4$, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть BC якщо медіана $BM_b = 2$.

Задача 58. У трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні. На більшій основі AD обрана точка M так, що $BM = MD = 3$. Знайдіть довжину середньої лінії.

Задача 59. Відрізки AB, BC і CD є хордами одного кола, точки M, P і K – їхні середини відповідно. Відомо, що $\angle CKP = \alpha, \angle PCK = \beta$. Знайдіть $\angle KMB$.

Задача 60. Відрізки AB і CD лежать на перпендикулярних променях (з однієї точки). точки M, P, N і Q – середини відрізків AC, BD, BC і AD відповідно. Знайдіть QN якщо $MP = 4$.

Задача 61. У рівнобедреному $\triangle ABC$ на бічних сторонах AB і BC взято точки K і L так, що $AK = BL$. Доведіть, що $KL \geq AC/2$.

Задача 62. Точка M взята на стороні AC рівностороннього $\triangle ABC$, а на продовженні сторони BC за C позначена точка N така, що $BM = MN$. Доведіть, що $AM = CN$.

Два кола що перетинаються

Задача 63. Згадайте основні теореми які знадобляться у цій `subsection`:

- Теорему про вписаний кут (половина дуги) і її наслідки (про кут з вершиною поза і в колі).
- Теорему про кут між дотичною і хордою.
- Необхідну і достатню умову вписаності чотирикутника (сума протилежних кутів $180°$) і два еквівалентних твердження (про рівність певних кутів).
- Геометричне місце точок з яких заданий відрізок видно під заданим кутом.

Задача 64. Два кола перетинаються в точках P і Q. Через точку P проведена січна, яка перетинає ці кола в точках A і B. Доведіть, що $\angle AQB$ не залежить від вибору січної.

Задача 65. Два кола перетинаються в точках P і Q. Через точку P проведена січна, яка перетинає ці кола в точках A і B, а через точку Q – січна, яка перетинає ці кола в точках C і D відповідно. Доведіть, що:

- $\angle AQB = \angle CPD$.
- $AC||BD$.
- $AC = BD \iff AB||CD$.

Задача 66. Два кола перетинаються в точках A, B. Через точку A проведена січна, яка перетинає кола в точках C, D. Через точки C, D проведені дотичні, які перетинаються в точці E. Доведіть, що:

- $BCED$ вписаний.
- $\angle CED$ не залежить від вибору січної.

Задача 67. На хорді AB колі з центром O взято довільну точку C. Через точки A, O і C проведено коло, яке перетинає дане коло в точці D. Доведіть, що $\triangle BCD$ рівнобедрений.

Задача 68. Два кола перетинаються в точках P і Q. Пряма перетинає ці кола (послідовно) в точках A, B, C і D. Доведіть, що $\angle APB = \angle CQD$.

Задача 69. Два кола перетинаються в точках P і Q. Через точку P проведена січна, яка перетинає ці кола в точках A і B. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, описаних довкола $\triangle AQB$.

Задача 70. Два кола перетинаються в точках A і B. Через довільну точку X першого кола проведено пряму XA, яка перетинає друге коло в точці Y, і пряму XB, яка перетинає друге коло в точці Z. Доведіть, що:

- Пряма YZ перпендикулярна діаметру першого кола, який проходить через X.
- Висоти всіх таких $\triangle XYZ$ що проведені з точки X перетинаються в одній точці.
- Бісектриси всіх таких $\triangle XYZ$ що проведені з точки X перетинаються в одній точці.

Зовнівписане коло

Коло, що дотикається сторони трикутника і продовжень двох інших сторін називається *зовнівписаним.*

Задача 71. Дайте відповідь на такі питання.

- Скільки зовнівписаних кіл у кожного трикутника?
- Де знаходяться їх центри?
- Які в них радіуси?

Задача 72. Коло дотикається сторони BC трикутника ABC в точці M, а продовжень сторін AB і AC – в точках N і P відповідно. Вписане в цей трикутник коло дотикається сторони BC в точці K, а сторони AB – в точці L. Доведіть, що:

- $BK = p - AC$, де p – напівпериметр ABC.
- $AN = p$.
- $BK = CM$, тобто точки дотику вписаного і зовнівписаного кола до сторони симетричні відносно середини цієї сторони.
- $NL = BC$.

Задача 73. Прямі PA і PB дотикаються кола з центром O (A і B – точки дотику). Проведено третю дотичну до кола, яка перетинає відрізки PA і PB в точках M і K. Доведіть, що:

- периметр MPK
- $\angle MOK$

не залежать від вибору третьої дотичної.

Задача 74. Тут має бути якась легенда задля кращого форматування, але я її не придумав.

- Доведіть, що радіус одного з зовнівписаних кіл дорівнює напівпериметру трикутника тоді і тільки тоді, коли цей трикутник прямокутний.
- Відрізок, відмінний від діагоналі, розбиває квадрат на два многокутника, в кожен з яких вписано коло. Знайдіть довжину цього відрізка, якщо радіуси кіл дорівнюють R і r ($R > r$).

Задача 75. Чи існує трикутник, у якого радіус одного з зовнівписаних кіл дорівнює радіусу описаного кола?

Задача 76. Побудуйте $\triangle ABC$, знаючи розташування точок A_1, B_1 і C_1, які є центрами зовнівписаних кіл цього трикутника.

Задача 77. Дано кут, точка у ньому, і пряма, яка перетинає сторони цього кута. Проведіть пряму:

- через цю точку
- паралельно заданій прямій

так, щоб вона відсікала від цього кута трикутник з заданим периметром.

Задача 78. У $\triangle ABC$ проведено бісектриси AD і BE. Виявилося, що DE – бісектриса $\triangle ADC$. Знайдіть $\angle BAC$.

Задача 79. У $\triangle ABC$ з $\angle BAC = 120°$ проведені бісектриси AM, BL і CK.

- Доведіть, що MKL прямокутний.
- Знайдіть $\angle MKC$.

Задача 80. Кути, що прилягають до однієї з сторін трикутника дорівнюють $15°$ і $30°$. Який кут з цією стороною утворює медіана проведена до неї?

Допоміжні кола

Задача 81. У гострокутному $\triangle ABC$ провели висоти AA_1, BB_1 і CC_1, які перетинаються в точці H.

- Знайдіть п'ять рівних кутів на цих 7 точках.
- Доведіть, що AA_1B_1B вписаний з діаметром AB.
- Доведіть, що CA_1B_1H вписаний з діаметром CH.

Задача 82. Доведіть, що висоти $\triangle ABC$ є бісектрисами $\triangle A_1B_1C_1$.

Задача 83. Доведіть, що:

- $\angle AMB > 90^\circ \iff M$ лежить всередині кола з діаметром AB.
- $\angle AMB < 90^\circ \iff M$ лежить ззовні кола з діаметром AB.

Задача 84. Спільна гіпотенуза AB прямокутних трикутників ABC і ABD дорівнює 5. Знайдіть найбільшу можливу відстань між точками C і D.

Задача 85. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кути A і C – тупі. Порівняйте довжини діагоналей AC і BD.

Задача 86. Дано рівносторонній трикутник ABC зі стороною a. Точка D знаходиться на відстані a від точки A. Які значення може набувати $\angle BDC$?

Задача 87. В опуклому чотирикутнику $ABCD : \angle A = 60^\circ, \angle B = 150^\circ, \angle C = 45^\circ, AB = BC$. Доведіть, що $\triangle ABD$ рівносторонній.

Задача 88. Дано квадрат $ABCD$. Промінь AE перетинає сторону BC, причому $\angle BAE = 30^\circ, \angle BCE = 75^\circ$. Знайдіть $\angle CBE$.

Задача 89. Рівносторонні трикутники ABC і DEF розташовані на площині так, що $B \in DE, F \in AC$ (як відрізків а не як прямих). Яким є чотирикутник з вершинами A, C, D і E?

Задача 90. В опуклому чотирикутнику $ABCD : \angle ABD = \angle CDB = 60^\circ, \angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$. Знайдіть BD якщо $AB = 2$.

Комбінаторика

Комбінаторика орбіт

Задача 91. Гайка має форму правильної шестикутної призми. Кожна бокова грань гайки пофарбована в один з трьох кольорів, причому сусідні грані пофарбовані у різні кольори. Скільки існує різних (що не суміщаються поворотом) розфарбувань?

Задача 92. 17 дівчат водять хоровод (дуга кола, але не все коло). Скількома способами вони можуть стати в коло?

Задача 93. Скільки існує намист з 17 різних намистин?

Задача 94. Завод випускає брязкальця у вигляді кільця з надітими на нього трьома жовтими і сімома синіми кулями. Скільки різних (що не суміщаються поворотом) брязкалець може бути випущено?

Задача 95. p – просте число. Скільки існує різних (що не суміщаються поворотом) способів розфарбувати вершини правильного p-кутника в a кольорів?

Задача 96. Скількома способами 6 людей попарно різного зросту можуть сісти на місця у прямокутнику 2×3 так, щоб кожна людина сиділа за нижчою за себе (оригінальна легенда каже про кінотеатр, але її надто довго набирати).

Задача 97. Іграшкова фабрика випускає кубики, вершини яких пофарбовано у різні кольори. За державним стандартом, у кожному кубику мають бути використані всі 8 доступних фабриці кольорів. Скільки різних (що не суміщаються рухом простору) кубиків може випустити фабрика?

Числа Каталана

Задача 98. Розглянемо шахову дошку $n \times n$. Необхідно провести туру (ладью) з лівого нижнього кута в правий верхній. Рухатися можна тільки вгору та праворуч, не заходячи при цьому на клітинки головної діагоналі та нижче неї. Скільки є різних таких маршрутів у тури?

Задача 99. Квитки коштують 50 центів, і $2n$ покупців стоять в черзі в касу. Половина з них має по одному долару, решта – по 50 центів. Касир починає продаж квитків, не маючи грошей. Скільки існує різних порядків в черзі, таких, що касир завжди зможе дати решту?

Задача 100. Доведіть, що числа Каталана задовольняють рекурентному співвідношенню $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0$.

Задача 101. Скільки послідовностей $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$, що складаються з ±1, мають суму 0, а всі частинні суми $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}$ невід'ємні?

Задача 102. Скільки існує способів розрізати опуклий $(n + 2)$-кутник діагоналями на трикутники?

Задача 103. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ – послідовність з сумою 1.

- Доведіть, що рівно у одного з її зсувів $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\{a_2, \ldots, a_n, a_1\}, \ldots, \{a_n, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ всі частинні суми додатні.
- Виведіть звідси рівності: $C_n = \dfrac{\binom{2n+1}{n}}{2n+1} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \dfrac{(4n-2)!!!!}{(n+1)!}$, де $(4n-2)!!!! = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)$.

Задача 104. На колі розташовані 20 точок. Ці 20 точок попарно з'єднуються 10 хордами, які не мають спільних точок. Скількома способами це можна зробити?

Твірні функції

Твірною функцією послідовності (a_n) називається вираз $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Задача 105. Беруть всі можливі непорожні підмножини множини $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Для кожної підмножини беруть величина, обернену до добутку всіх його елементів. Знайдіть суму всіх цих величин.

Задача 106. Нехай a_n – кількість розв'язків рівняння $x_1 + \cdots + x_k = n$ в цілих невід'ємних числах і $F(x)$ – твірна функція послідовності a_n. Доведіть,що $F(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^k = (1 - x)^{-k}$.

Задача 107. Розглянемо 1000000 автобусних квитків з номерами від 000000 до 999999. Будемо називати квиток щасливим, якщо сума перших трьох його цифр дорівнює сумі трьох останніх цифр. Нехай N – кількість щасливих квитків. Доведіть рівності:

- $(1 + x + \cdots + x^9)^3 \cdot (1 + x^{-1} + \cdots + x^{-9})^3 = x^{27} + \cdots + a_1 x + N + a_1 x^{-1} + \cdots + x^{-27}$;
- $(1 + x + \cdots + x^9)^6 = 1 + \cdots + N x^{27} + \cdots + x^{54}$.
- Знайдіть кількість щасливих квитків.

Задача 108. Знайти коефіцієнти при x^{17} і x^{18} у виразі $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

Задача 109. Для кожного n-цифрового числа взяли добуток його цифр, а потім ці добутки додали. Скільки отримали, якщо:

- $n = 3$;
- $n = 4$;
- n – довільне натуральне число.

Задача 110. Нехай $p(n)$ – кількість розбиттів числа n. Доведіть рівність:

$$p(0)+p(1)x+p(2)x^2+\cdots = (1+x+x^2+\cdots)\cdot\ldots\cdot(1+x^k+x^{2k}+\cdots)\cdot\ldots = (1-x)^{-1}\cdot(1-x^2)^{-1}\cdot(1-x^3)^{-1}\cdot\ldots$$

(за визначенням $p(0) = 1$)

Задача 111. З перших k простих чисел $2, 3, 5, \ldots, p_k$ $(k > 5)$ складені всі можливі добутки, в які кожне з чисел входить не більше одного разу (наприклад, $3 \cdots 5, 3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p_k, 11$ і т. д.). Позначимо суму всіх таких чисел через S. Доведіть, що $S + 1$ розкладається в добуток не більш ніж $2k$ простих дільників.

Задача 112. Сходами висоти n назвемо фігуру, що складається з усіх клітинок квадрату $n \times n$, що лежать не вище діагоналі. Скількома різними способами можна розбити сходини висоти n на декілька прямокутників, сторони яких проходять по лініям сітки, а площі попарно різні?

Планарні графи

Задача 113. Чи можна розташувати на площині:

- 4 точки так, щоб кожна з них була з'єднані відрізками з трьома іншими (без перетинів)?
- 6 точок і з'єднати їх відрізками які не перетинаються так, щоб з кожної точки виходило рівно 4 відрізка?

Задача 114. Грані деякого багатогранника розфарбовані у два кольори так, що сусідні грані мають різні кольори. Відомо, що всі грані, окрім однієї, мають число ребер, кратне 3. Доведіть, що і ця грань має число ребер кратне 3.

Задача 115. Нехай зв'язний плоский граф з V вершинами і E ребрами розрізає площину на F шматків. Доведіть формулу Ейлера: $V - E + F = 2$.

Задача 116. В озерній країну сім озер, з'єднаних між собою десятьма каналами, що не перетинаються, причому від довільного озера можна доплисти до довільного іншого. Скільки в цій країні островів?

Задача 117. Доведіть, що для довільного плоского графу виконується нерівність $2E \geq 3F$.

Задача 118. Доведіть, що для дводольного плоского графу виконується нерівність $E \geq 2F$, якщо $E \geq 2$.

Задача 119. В квадраті позначили 20 точок і з'єднали їх між собою і з вершинами квадрату відрізками що не перетинаються так, що квадрат розбився на трикутники. Скільки отримали трикутників?

Задача 120. Чи можна побудувати три будинки, три колодязі і з'єднати їх стежками кожен будинок з кожним колодязем так, щоб стежки не перетиналися?

Задача 121. Яку найбільшу кількість клітинок дошки 9×9 можна розрізати по обом діагоналям так, щоб при цьому дошка не розпалася на декілька частин?

Задача 122. У грі "Десант" дві армії захоплюють країну. Вони ходять по черзі, кожним кроком, займаючи одне з вільних місті. Своє перше місто армія захоплює з повітря, а кожним наступним кроком вона може захопити довільне місто, з'єднане дорогою з одним з вже захоплених цією країною міст (якщо таких міст немає, то ця армія закінчує захоплення. Чи знайдеться така схема міст і доріг, що друга армія зможе захопити більше половини міст?

Задача 123. В ідеальному місті шість площ. Кожна площа з'єднана прямими вулицями рівно з трьома іншими площами. Жодні дві вулиці не перетинаються. З трьох вулиця, що відходять від довільної площі, знайдеться одна, яка проходить всередині кута утвореного іншими двома вулицями. Як може виглядати таке місто?

Задача 124. У країні деякі пари міст з'єднані дорогами, які не перетинаються. У кожному міст встановлено дорожній знак, на якому вказана мінімальна довжина шляху, що виходить з цього міста і проходить по всім іншим містам. Доведіть, що довільні два з цих чисел відрізняються не більш ніж у півтора рази.

Трикутник Паскаля і біном Ньютона

Задача 125. Доведіть, що кожне число в трикутнику Паскаля, зменшене на 1, дорівнює сумі всіх чисел, що заповнюють паралелограм, обмежений тими правою і лівою діагоналями, на перетині яких стоїть наше число (самі числа на діагоналі не рахуються).

Задача 126. При яких значеннях n всі коефіцієнти в розкладі бінома Ньютона $(a+b)^n$ непарні?

Задача 127. Виявляється, є багато зв'язків між біноміальними коефіцієнтами і подільністю, ми поговоримо про це детальніше восени, а поки що така задача:

- Доведіть, що якщо $p \in \mathbb{P}$ і $2 \leq k \leq p-2$, то $\binom{p-k+1}{k} - \binom{p-k-1}{k-2}$ ділиться на p.
- Чи істинне зворотнє твердження?

Задача 128. Доведіть, що при довільних $0 < k < m < n \in \mathbb{N}$ виконується $\left(\binom{n}{k}, \binom{n}{m}\right) > 1$.

Задача 129. В Анчурії проходить ЗНО. Ймовірність вгадати правильну відповідь на кожне питання дорівнює 1/4. В 2011 році, щоб отримати атестат, потрібно було правильно відповісти всього на 3 питання з 20. У 2012 році МОН вирішило, що 3 питання це замало. Тепер треба правильно відповісти на шість питань з 40. У якому році ймовірність отримати атестат вище, якщо просто вгадувати відповіді на всі питання?

Задача 130. Доведіть, що на області визначення $\dfrac{(2m)! \cdot (2n)!}{m! \cdot n! \cdot (m+n)!} \in \mathbb{Z}$.

Теорія чисел

У цій `section` немає `subsetion`, тільки задачі.

Задача 131. Знайдіть всі $n \in \mathbb{N}$ для яких $3^n + 55$ – точний квадрат.

Задача 132. Доведіть, що ні при яких п'яти послідовних $n \in \mathbb{N}$ число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ не може ділитися на 2005.

Задача 133. $a, b \in \mathbb{N}$. Доведіть, що $(a+b, [a, b]) = (a, b)$. У цій задачі і надалі, $(a, b) = \gcd(a, b), [a, b] = \operatorname{lcm}(a, b)$, якщо не сказано інакше.

Задача 134. Знайдіть всі $m, n \in \mathbb{N}$ такі, що $m^2 + n$ і $n^2 + m$ – точні квадрати.

Задача 135. Знайдіть всі $a, b, c \in \mathbb{N}$ такі, що число $ab + bc + ca$ просте, і $\dfrac{a+b}{a+c} = \dfrac{b+c}{b+a}$.

Задача 136. Доведіть, що якщо числа ab, cd і $ac + bd$ діляться на k, то і ac і bd також діляться на k.

Задача 137. Розв'яжіть в $\mathbb{Z}$ рівняння $x^2 + 5xy + 4y^2 = 101$.

Задача 138. Знайдіть всі $a, b, c \in \mathbb{Z}$ такі, що a ділиться на $b + c$, b ділиться на $c + a$, c ділиться на $a + b$.

Задача 139. Для якого найбільшого $n \in \mathbb{N}$ існує єдине $k \in \mathbb{N}$ таке, що $\dfrac{10}{11} < \dfrac{n}{n+k} < \dfrac{11}{12}$?

Задача 140. Яку долю серед всіх натуральних дільників числа 21! складають непарні?

Задача 141. Яка найбільша можлива кількість послідовних натуральних чисел має рівно 4 натуральні дільники?

Задача 142. Назвемо *обрізком* числа нове число, яке отримується з початкового витиранням однієї чи кількох послідовних цифр. Знайдіть найбільше п'ятицифрове число, яке ділиться на всі свої обрізки.

Задача 143. Чи існує $n \in \mathbb{N}$, у якого сума цифр така ж, як і у числа $n^2 - 1$?

Задача 144. $a, b \in \mathbb{N}$ такі, що $(a - b)^2 = [a, b]$. Доведіть, що $(a, b) > 1$.

Задача 145. Розв'яжіть в $\mathbb{N}$ рівняння $(n!)^2 + n! = m!$.

Задача 146. Доведіть, що кількість способів, яким задане натуральне число можна представити у вигляді суми кількох (більш ніж одного) послідовних цілих чисел, непарна.

Задача 147. Знайдіть всі такі пари $m, n \in \mathbb{N}$, що $5^5 - 4^5 + 5^n = m^2$.

Задача 148. Доведіть нерівність $[x, y, z]^2 \leq [x, y] \cdot [y, z] \cdot [z, x]$.

Задача 149. Доведіть, що для кожного $p \in \mathbb{P}$ існують такі $x, y \in \mathbb{Z}$, що $p \mid (x^2 + y^2 + 1)$.

Задача 150. Розв'яжіть в $\mathbb{Z}$ рівняння $x^2 = 3y^2$.

Задача 151. Розв'яжіть в $\mathbb{Z}$ рівняння $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Задача 152. Розв'яжіть в $\mathbb{Z}$ рівняння $x^2 - 10x + 30 = y^2$.

Задача 153. Доведіть, що при всіх $n \in \mathbb{N}$:

- $n^2 - 10n + 26 > 0$.
- $n^2 - 9n + 20 \geq 0$.

Задача 154. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p-1}=\frac{m}{n}$ – нескоротний дріб. Доведіть, що якщо $p\in\mathbb{P}\setminus\{2\}$, то m ділиться на p.

Задача 155. Доведіть, що для довільних $x,y\in\mathbb{N}$ число

- $xy+x+y+1$
- $2xy+2y+x+1$

складене.

Задача 156. Доведіть, що при $a,b\in\mathbb{N}$ і непарному n число a^n+b^n ділиться на $a+b$.

Задача 157. Знайдіть останню цифру перед комою в десятковому записі числа $\frac{10^{210}}{10^{10}+3}$.

Задача 158. Добуток різних $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ – точний квадрат. Доведіть, що число $a^4+b^4+c^4+a^4$ є сумою п'яти квадратів натуральних чисел.

Задача 159. Доведіть, що не існує такого $n\in\mathbb{N}$, що $n+k^2$ є квадратом принаймні для n різних значень k.

Задача 160. Доведіть, що кожне натуральне число є сумою всіх попарних добутків деяких чисел, кожне з яких дорівнює ±1.

Задача 161. Дано $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Позначимо $F_k(n)$ – найменше натуральне число, яке більше за kn для якого $F_k(n)\cdot n$ – точний квадрат. Доведіть, що якщо $F_k(n)=F_k(m)$ то $n=m$.

Задача 162. Доведіть, що при довільних $a,b\in\mathbb{Z}$ система рівнянь $x+y+2z+2t=a, 2x-2y+z-t=b$ має розв'язок в $\mathbb{Z}$.

Задача 163. Побудуйте нескінченну множину натуральних чисел таку, що жодне з чисел цієї множини і жодна сума кількох чисел з цієї множини не є точним квадратом.

Задача 164. Доведіть, що $2^{58}+1$ можна представити у вигляді добутку трьох натуральних множників більших за 1.

Задача 165. Доведіть, що якщо для деякого $n\in\mathbb{N}$ числа $2n+1$ і $3n+1$ – точні квадрати, то n ділиться на 40.

Задача 166. Розкладіть на множники многочлен n^4+n^2+1.

Задача 167. Нехай $n\in\mathbb{N}$ можна представити у вигляді суми k своїх різних дільників. Доведіть, що $(n,(k-1)!)>1$.

Задача 168. У деякого числа обчислили суму цифр, у отриманого числа знову обчислили суму цифр і так зробили 11 разів. В результаті вийшло 11. Чи могло у початкового числа бути рівно 11 дільників?

Задача 169. Нехай $a,b\in\mathbb{Z}$ можна представити у вигляді x^2-5y^2, де $x,y\in\mathbb{Z}$. Доведіть, що число ab також можна представити у такому вигляді.

Задача 170. Число, яке більше ніж 10, є добутком степеню трійки і степеню сімки. Доведіть, що у його десятковому записі є хоча б одна парна цифра.