Поліноми

1. Доведіть, що $(a-b)|(P(a)-P(b))$ якщо $P \in \mathbb{Z}[x]$.

2. Доведіть, що не існує $P \in \mathbb{Z}[x]$ такого, що $P(7) = 5$ і $P(15) = 9$.

3. Доведіть, що у $P \in \mathbb{Z}[x]$ не може бути орбіти довжини 3, тобто що не існує таких чисел a, b та c, що $P(a) = b$, $P(b) = c$ та $P(c) = a$.

4. Знайдіть усі дійсні корені системи рівнянь

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

5. Знайдіть кубічний поліном Q такий, що $Q(1) = 2$, $Q(2) = 4$, $Q(3) = 8$, $Q(4) = 16$.

6. Позначимо

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5+5x^4+5x^3+5x^2+1 \\ (x) &= x^5+5x^4+3x^3-5x^2-1 \end{aligned}$$

Знайдіть усі прості p для яких існує ціле невід'ємне $n < p$ таке, що $p|f(n)$, $p|g(n)$. Для кожного такого p знайдіть усі такі n.

7. Нехай a, b – два корені рівняння $x^4+x^3-1=0$. Доведіть, що ab – корінь рівняння $x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$.

8. Знайдіть поліном P степеню не більше 5 який при діленні на $(x-1)^3$ та $(x+1)^3$ дає залишки -1 та 1 відповідно.

9. Доведіть, що якщо поліном степеню n приймає цілі значення у $n+1$ послідовній цілій точці, то він приймає ціле значення у кожній цілій точці.

10. Знайдіть усі поліноми $P \in \mathbb{R}[x]$ такі, що

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

для всіх a, b і c таких, що $ab+bc=ca=0$.

11. Знайдіть усі поліноми P для яких $P(x^2+1) \equiv P(x)^2+1$.

12. У ЛМШ є n учнів, у кожного з яких є бейджик. Ми перемішали бейджики і роздали їх випадковим чином. Скільки в середньому людей отримають свій бейджик?

13. У дитячому садочку 2006 дітей сіли в коло. Одночасно кожна дитина штовхнула одного зі своїх сусідів. Скільки в середньому дітей залишаться нештовхані?

14. 7 хлопців і 13 дівчат стали в ряд. Скільки в середньому пар (дівчина, хлопець) опиняться поруч?

15. Нехай S – множина дійсних чисел вигляду $0.\overline{abc}$ де a, b, c – різні цифри. Знайдіть суму елементів S.

16. Доведіть, що у довільного підграфу $K_{n,n}$, у якому принаймні $n^2 - n + 1$ ребер, знайдеться ідеальне розбиття на пари.

17. Доведіть, що $R(k,k) > 2^{k/2}$.

18. Доведіть, що можна провести турнір (серед певної фіксованої, але початково не заданої і не обмеженої кількості учасників) так, що для кожних 1000 учасників знайшовся учасник, який переміг їх всіх.

19. Розглянемо n дійсних чисел з сумую 0 не всі з яких 0. Доведіть, що їх можна занумерувати $a_1, a_2, \ldots, a_n$ так, що $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1 < 0$.

20. У Думі 1600 делегатів які утворили 16000 комітетів по 80 людей. Доведіть, що знайдуться два комітети у яких принаймні 4 спільні делегати.

21. В олімпіаді було 6 задач, і в ній взяли участь 200 учасників, причому кожну задачу розв'язало принаймні 120 учасників. Доведіть, що знайдуться два учасники які разом розв'язали всі задачі.

22. Нехай A – множина з N залишків $\pmod{N^2}$. Доведіть, що існує множина B з N залишків $\pmod{N^2}$ така, що $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$ містить принаймні половину всіх залишків $\pmod{N^2}$.

23. У турнірі взяли участь 799 команд. Доведіть, що можна знайти дві неперетинні групи A і B з семи команд кожна такі, що всі команди з A виграли у всіх команд з B.

24 (Менелай)**.** Доведіть, що точки A_1, B_1, C_1 на сторонах BC, CA, AB трикутника ABC колінеарні тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

Тут колінеарні – такі, що лежать на одній прямій.

25 (Сімсон)**.** Доведіть, що основи перпендикулярів з точки $P \in (ABC)$ на сторони ABC чи їх продовження колінеарні. Тут (ABC) позначає описане коло трикутника ABC.

26. Коло S дотикається до кіл S_1, S_2 в A_1, A_2. Доведіть, що пряма AB проходить через точку перетину спільних дотичних до S_1, S_2.

27. Серпер до бісектриси AD трикутника ABC перетинає пряму BC у E. Доведіть, що $BE : EC = c^2 : b^2$. Тут серпер – серединний перпендикуляр, $b = AC$, $c = AB$.

28. Доведіть, що точки перетину серперів до бісектрис з продовженнями протилежних сторін колінеарні.

29. З вершини C прямого кута ACB опущена висота CK. CE – бісектриса ACK. Пряма через B паралельно CE перетинає CK в F. Доведіть, що пряма EF ділить AC навпіл.

30. На прямих BC, CA, AB взяли колінеарні точки A_1, B_1, C_1. Прямі симетричні до AA_1, BB_1, CC_1 відносно бісектрис ABC перетинають прямі BC, CA, AB в A_2, B_2, C_2. Доведіть, що A_2, B_2, C_2 колінеарні.

31 (Дезарг)**.** $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = P$. Доведіть, що A_2, B_2, C_2 колінеарні, де $A_2 = BC \cap B_1C_1$, $B_2 = CA \cap C_1A_1$, $C_2 = AB \cap A_1B_1$.

32 (Папп)**.** $A_1, B_1, C_1 \in \ell_1$, $A_2, B_2, C_2 \in \ell_2$. Доведіть, що A, B, C колінеарні, де $A = B_1C_2 \cap B_2C_1$, $B = C_1A_2 \cap C_2A_1$, $C = A_1B_2 \cap A_2B_1$.

33. На прямих AB, BC, CD взяли точки K, L, M. $KL \cap AC = P$, $LM \cap BD = Q$. Доведіть, що $R = KQ \cap MP$ лежить на AD.

34. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \cap CD = P$, $BC \cap DA = Q$. Пряма через P перетинає BC, AD в E, F. Доведіть, що точки перетину діагоналей чотирикутників $ABCD$, $ABEF$, $CDFE$ і Q колінеарні.

35. $P \in \ell_{p,i}$, $Q \in \ell_{q,i}$, $A_{i,j} = \ell_{p,i} \cap \ell_{q,j}$ $\left(i, j = \overline{1,3}\right)$. Доведіть, що ℓ_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ конкурентні, де $\ell_i = A_{j,k}A_{k,j}$ $(i \neq j, j \neq k, k \neq i)$. Також, якщо $A_{i,i}$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ колінеарні, то точка перетину ℓ_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ лежить на PQ.

36. Нехай $xy = z^n$ і $\gcd(x, y) = 1$, де $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$, тоді існують натуральні числа t і s такі, що $x = t^n$ і $y = s^n$.

37. Якщо $a \in \mathbb{Q}$ і $a^n \in \mathbb{N}$, де $n \in \mathbb{N}$, то $a \in \mathbb{N}$.

38. Якщо $a \in \mathbb{N}$ і $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{Q}$, де $n \in \mathbb{N}, n > 1$, то $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{N}$.

39. Якщо $x^a = b^y$, де a, b, x, y – натуральні числа, причому $\gcd(a, b) = 1$, тоді існує таке натуральне число z, що $x = z^b$ і $y = z^a$.

40. Якщо $xy = zt$, деx, y, z, t – натуральні числа, то існують такі натуральні числа $a, b, c, d, (b, c) = 1$, що $x = ab, y = cd, z = ac$ і $t = bd$.

41. Рівняння вигляду $ax + by = c$ має розв'язок у цілих числах тоді і тільки тоді, коли $d = \gcd(a, b)$ ділить c.

42. Якщо (x_0, y_0) – розв'язок рівняння $ax+by = c$, то всі інші розв'язки (x, y) мають вигляд $x = x_0+\dfrac{b}{d}t, y = y_0 - \dfrac{a}{d}t$, де $d = \gcd(a, b)mt \in \mathbb{Z}$.

43. Будь-який розв'язок рівняння вигляду $x^2+y^2 = z^2$ має вигляд $x = 2mnk, y = (m^2-n^2)k, z = (m^2+n^2)k$ або $x = (m^2-n^2)k, y = 2mnk, z = (m^2+n^2)k$, де m, n і k – цілі числа, що задовольняють умови $\gcd(m, n) = 1$ та $2|n$ або $2|m$.

44. Якщо в задачі вище $\gcd(x, y) = 1$ або $\gcd(x, z)$ або $\gcd(y, z)$ то в представленні вище існує розв'язок з $k = 1$.

45. 175 жовтих кульок коштують дорожче, ніж 125, і дешевше, ніж 126 блакитних кульок. Доведіть, що на 3 жовті кульки і 1 блакитну 1 грн не вистачить. (Кульки коштують натуральне число копійок.)

46. Чи існують два послідовних натуральних числа, сума цифр кожного ділиться на 2017? Якщо так то знайдіть найменші такі числа.

47. Знайдіть усі розв'язки рівняння $6x + 10y + 15z = 7$.

48. Розв'яжіть рівняння $1/x^2 + 1/y^2 = 1/z^2$.

49. Розв'яжіть рівняння $x^2 + y^2 = 2017(x - y)$.

50. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(f(x))\equiv x,\ f(f(x)+1)\equiv 1-x$.

51. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(f(x))\equiv (f(x)+1)\cdot(x+1)$.

52. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(x+y)\equiv \max\{f(x),y\}+\min\{f(y),x\}$.

53. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(xy)\equiv \max\{f(x),y\}+\min\{f(y),x\}$

54. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(xy)+f(xz)\geq f(x)\cdot f(yz)+1$.

55. $\frac{1}{2}\in E_f$ та $f(x)-f(y)\equiv f(x)\cdot f\left(\frac{1}{y}\right)-f(y)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$. Знайдіть $f(-1)$.

56. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що

$$f(x+xy+f(y))\equiv\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(f(y)+\frac{1}{2}\right).$$

57. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f([x]y)\equiv f(x)[f(y)]$.

58. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що

$$f(x^2+y^2+2017xy)\equiv x^2+y^2+2017f(x)f(y).$$

59. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $x\cdot f(x+xy)\equiv x\cdot f(x)+f(x^2)\cdot f(y)$.

60. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(0)=2$ та

$$f(x+(x+2y))\equiv f(2x)+f(2y).$$

61. Знайдіть усі $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такі, що $f(1)=1$ та

$$f\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\equiv f(x)+\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2.$$

62. Знайдіть усі $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такі, що $f(n+1)>f(f(n))$.

63. Для натуральних $n \geq m \geq 1$ доведіть, що $m \mid \left(n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k}\right)$.

64. Для $k, m \in \mathbb{N}$ доведіть, що поліном $(x^m - 1) \cdot (x^{m-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (x - 1)$ ділить поліном $\left(x^{k+m} - 1\right) \cdot \left(x^{k+m-1} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(x^{k+1} - 1\right)$.

65. Обчисліть A^n для всіх $n \in \mathbb{N}$ якщо A – матриця на діагоналі і над діагоналлю якої стоять одиниці, а під діагоналлю – нулі.

66. Доведіть, що $F_1\binom{n}{1} + F_2\binom{n}{2} + \cdots + F_n\binom{n}{n} = F_{2n}$.

67. Нехай S_n – сума перших n елементів арифметичної прогресії (a_n). Доведіть, що $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+1} = \frac{2^n}{n+1} S_{n+1}$.

68. Доведіть, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ число

$$S_n = \binom{2n+1}{0} \cdot 2^{2n} + \binom{2n+1}{2} \cdot 2^{2n-2} \cdot 3 + \cdots + \binom{2n+1}{2n} \cdot 3^n$$

є сумою двох послідовних точних квадратів.

69. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо a_n, b_n, c_n наступним чином:

$$a_n + b_b \sqrt[3]{2} + c_n \sqrt[3]{4} = \left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^n$$

Доведіть, що $2^{-n/3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \begin{cases} a_n & n \equiv 0 \pmod 3 \\ b_n \sqrt[3]{2} & n \equiv 1 \pmod 3 \\ c_n \sqrt[3]{4} & n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$

70. Доведіть формулу аналогічну біному Ньютона:

$$[x + y]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_k [y]_{n-k}$$

де $[x]_n = x \cdot (x - 1) \cdot \ldots \cdot (x - n + 1)$

71. На прямих AB, BC, CA взяли C_1, A_1, B_1, k з них на сторонах. Нехай

$$R = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B}$$

Доведіть, що A_1, B_1, C_1 колінеарні $\iff$ $R = 1$ і $2|k$. Доведіть, що AA_1, BB_1, CC_1 конкурентні $\iff$ $R = 1$ і $2\nmid k$.

72. Вписане (або зовнівписані) коло ABC дотикається до BC, CA, AB в A_1, B_1, C_1. Доведіть, що AA_1, BB_1, CC_1 конкурентні.

73. Доведіть, що висоти гострокутного трикутника конкурентні.

74. $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$, $C_1 = CP \cap AB$. Доведіть, що прямі через середини BC, CA, AB паралельно AP, BP, CP конкурентні. Доведіть, що прямі які з'єднують середини BC, CA, AB з серединами AA_1, BB_1, CC_1 конкурентні.

75. На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC взяли A_1, B_1, C_1 такі, що AA_1, BB_1, CC_1 конкурентні. A_1B_1, A_1C_1 перетинають пряму через A паралельну до BC в C_2, B_2. Доведіть, що $AB_2 = AC_2$.

76. Нехай α, β, γ – такі кути, що сума кожних двох з яких менше $180°$. На сторонах ABC зовнішнім (внутрішнім) чином побудовані AB_1C, BC_1A, CA_1B такі, що $\angle B_1AC = \angle BAC_1 = \alpha$, $\angle A_1BC = \angle ABC_1 = \beta$, $\angle A_1CB = \angle ACB_1 = \gamma$. Доведіть, що AA_1, BB_1, CC_1 конкурентні.

77. A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного кола до BC, CA, AB. На променях IA_1, IB_1, IC_1 відклали рівні відрізки IA_2, IB_2, IC_2. Доведіть, що AA_2, BB_2, CC_2 конкурентні.

78. $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$, $C_1 = CP \cap AB$. $A_2 \in BC$, $B_2 \in CA$, $C_2 \in AB$: $\dfrac{BA_2}{A_2C} = \dfrac{A_1C}{BA_1}$, $\dfrac{CB_2}{B_2A} = \dfrac{B_1A}{CB_1}$, $\dfrac{AC_2}{C_2B} = \dfrac{C_1B}{AC_1}$. Доведіть, що AA_2, BB_2, CC_2 конкурентні (ізотомічне спряження).

79. $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Доведіть, що

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA}$$

Домашні задачі

80. $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ такі, що AA_1, BB_1, CC_1 конкурентні в P. Доведіть, що AA_2, BB_2, CC_2 які симетричні AA_1, BB_1, CC_1 відносно бісектрис кутів ABC конкурентні в Q (ізогональне спряження).

81. Протилежні пари сторін опуклого шестикутника паралельні. Доведіть, що прямі які з'єднують середини протилежних сторін конкурентні.

82. З P опущені перпендикуляри PA_1, PA_2 на BC і на висоту AA_3. Аналогічно задали B_1, B_2, C_1, C_2. Доведіть, що A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 конкурентні.

83. $A, D \in \omega$. Дотичні в A, D до ω перетнулися в S. B, C на дузі AD. $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$. Доведіть, що P, Q, S колінеарні.

84. $AC = CB$. $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$: AA_1, BB_1, CC_1 конкурентні. Доведіть, що $AC_1/C_1B = \sin ABB_1/\sin BAA_1 \cdot \sin CAA_1/\sin CBB_1$.

85. У рівнобічному ABC з основою AB взяли M, N такі, що $\angle CAM = \angle ABN$ і $\angle CBM = \angle BAN$. Доведіть, що C, M, N колінеарні.

86. AA_1, BB_1, CC_1 – бісектриси кутів ABC. $M = AA_1 \cap C_1B_1$, $N = CC_1 \cap A_1B_1$. Доведіть, що $\angle MBB_1 = \angle NBB_1$.

87. $\mathbb{Z}_p$ – абелева група.

88. $p|(a^p - a)$ якщо p просте, причому $p|(a^{p-1} - 1)$ якщо $\gcd(a, p) = 1$.

89. Нехай $\gcd(a, n) = 1$, тоді $n|(a^{\varphi(n)} - 1)$.

90. Якщо $(n^b - 1)|(n^a - 1)$ то $b|a$, де $a, b, n \in \mathbb{N} : a \geq b \geq 1, n > 1$.

91. Якщо $m > 1$ і $\gcd(a, m) = 1$ то для будь-якого b конгруенція $ax \equiv b \pmod p$ має єдиний розв'язок в $\mathbb{Z}_p$.

92. Якщо $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – попарно взаємнопрості натуральні числа, то для будь-яких $a_1, a_2, \ldots, a_n$ існує таке ціле число x, що

$$x_1 \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x_2 \equiv a_2 \pmod{m_2}, \quad \ldots, \quad x_n \equiv a_n \pmod{m_n}$$

93. Доведіть, що рівняння $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+2001)^2 = y^2$ не має розв'язків у цілих числах.

94. Знайдіть усі пари простих чисел p, q таких, що $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

95. Доведіть, що рівняння $x^5 - y^2 = 4$ не має розв'язків у цілих числах.

96. Знайдіть усі прості p, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 = p + 1 \\ 2y^2 = p^2 + 1 \end{cases}$$

має розв'язки в цілих числах.

97. Знайдіть усі натуральні $n, m \geq 2$ такі, що $\dfrac{m^{2 \cdot 3^n} + m^{3^n} + 1}{n} \in \mathbb{Z}$.

98. Нехай $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\dfrac{3^{2^m} + 1}{2^{m+1} + 1} \in \mathbb{Z}$. Доведіть, що $2^{m+1} + 1$ просте.

99. Нехай $n \in \mathbb{N}$ таке, що для чотирьох його найменших дільників d_1, d_2, d_3, d_4 виконується $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$. Знайдіть усі n для яких це можливо.

100. Обчисліть значення функцій

$$P(x) = 2x^3 - 27x^2 + 141x - 256, \quad x = 16$$
$$Q(x) = x^4 + \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + 1, \quad x = -\frac{3}{4}$$

101. А тепер зробіть те саме не “в лоб” а за схемою Горнера:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

102. Скільки операцій множення і додавання необхідно зробити в обох способах для обчислення значення поліному степеню n?

103. Для довільного $P \in \mathbb{R}[x]$ і $a \in \mathbb{R}$ існує $Q \in \mathbb{R}[x]$ такий, що $P \equiv (x-a)Q + P(a)$, причому $\deg Q < \deg P$.

104. Доведіть, що поліном степеню n має не більше ніж n коренів.

105. Доведіть, що якщо значення двох поліномів збігаються в кожній точці то вони збігаються покоефіцієнтно.

106. Зауважимо, що попередня задача не виконується у $\mathbb{Z}_p[x]$.

107. Доведіть, що якщо значення двох поліномів степеню n збігаються в $n+1$ точці то вони рівні.

108. Доведіть тотожність

$$\frac{d(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{a(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d} +$$
$$+\frac{d(x-d)(x-c)(x-a)}{(b-d)(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-d)(x-b)(x-a)}{(c-d)(c-b)(c-a)} = x$$

109. Нехай $P \in \mathbb{Z}[x]$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ – різні корені P. Доведіть, що P ділиться на $(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_k)$.

110. Сформулюйте і доведіть теорему про ділення із залишком в $\mathbb{R}[x]$.

111. Чи виконується теорема про ділення із залишком в $\mathbb{Q}[x]$.

112. Скільки чисел до 1000 не діляться на 2, 3, і на 5?

113. У алфавіті є літери $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Доведіть, що кількість слів які містять кожну з літер алфавіту рівно двічі і не поспіль дорівнює

$$\frac{1}{2^n}\left((2n)! - \binom{n}{1}\cdot 2\cdot(2n-1)! + \binom{n}{2}\cdot 2^2\cdot(2n-2)! - \cdots + (-1)^n\cdot 2^n\cdot n!\right)$$

114. $m > r > p, n > s > q \in \mathbb{N}$. Скільки є способів пройти від точки $(0,0)$ у точку (m,n) ходами $(0,+1)$ і $(+1,0)$ не проходячи через (p,q) та (r,s)?

115. Скільки існує сюр'єкцій з E на F якщо $|E| = n \geq p = |F|$?

116. Перестановка σ називається *безладною* якщо у неї немає нерухомих точок. Скільки безладних перестановок множини з n елементів?

117. Доведіть, що у графі з n вершин або є трикутник, або є вершина степеню не більше ніж $[n/2]$.

118. $n, m \geq 5 \in \mathbb{N}$, P – правильний $(2n+1)$-кутник. Знайдіть кількість опуклих m-кутників у яких є принаймні один гострий кут, і всі вершини яких – вершини P.

119. Для $a, b, c \in \mathbb{N}$ доведіть

$$\frac{\operatorname{lcm}(a,b,c)^2}{\operatorname{lcm}(a,b)\cdot\operatorname{lcm}(b,c)\cdot\operatorname{lcm}(c,a)} = \frac{\gcd(a,b,c)^2}{\gcd(a,b)\cdot\gcd(b,c)\cdot\gcd(c,a)}$$

120. З кубиків $1\times1\times1$ склеїли паралелепіпед $150\times324\times375$. Через внутрішність скількох кубиків проходить головна діагональ?

121. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$. Для функцій $f : S^1 \to s^1$ визначимо $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Точка $\omega \in S^1$ називається періодичною точкою функції f з періодом n якщо $\forall i \in \overline{1, n-1} : f^i(\omega) \neq \omega$ і $f^n(\omega) = \omega$. Знайдіть кількість точок з періодом 1989 якщо $f(z) = z^m, m \in \mathbb{N}$.

122. $P \in (ABC) \iff$ проекції P на BC, CA, AB колінеарні (Сімсон).

123. $A, B, C \in \ell$, $P \notin \ell$. ! $O(ABP)$, $O(BCP)$, $O(CAP)$, P циклічні.

124. AD – бісектриса в ABC. B', C' проекції D на AC, AB. $M \in B'C'$: $DM \perp BC$. Доведіть, що M належить медіані з A.

125. $P \in (ABC)$. З P провели прямі PA_1, PB_1, PC_1 під одним і тим же кутом α до прямих BC, CA, AB. Доведіть, що A_1, B_1, C_1 колінеарні. Доведіть, що кут між прямою Сімсона і новою прямою складає $90° - \alpha$.

126. $P \in (ABC)$, A_1, B_1 – проекції P на BC, CA. Доведіть, що $PA \cdot PA_1 = 2Rd$, де R – радіус (ABC), d – відстань від P до A_1B_1. Доведіть, що якщо α – кут між A_1B_1 і BC. Доведіть, що $\cos\alpha = PA/2R$.

127. $P \in (ABC)$, A_1, B_1 – проекції P на BC, CA. Доведіть, що довжина A_1B_1 дорівнює довжині проекції AB на пряму A_1B_1.

128. На колі зафіксовано точки P і C, а точки A і B рухаються по ньому так, що дуга AB стала. Доведіть, що прямі Сімсона точки P відносно всіх таких трикутників ABC дотикаються д одного фіксованого кола.

129. P рухається по (ABC). Доведіть, що при цьому пряма Сімсона повертається половину кута повороту P.

130. Доведіть, що прямі Сімсона двох діаметрально протилежних точок перпендикулярні, а їхня точка перетину лежить на колі 9 точок.

131. A, B, C, P, Q лежать на колі з центром O, причому кути між OP і OA, OB, OC, OQ рівні α, β, γ, $(\alpha + \beta + \gamma)/2$. Доведіть, що пряма Сімсона P відносно ABC паралельна OQ.

132. Хорда $P, Q \in (ABC)$: $PQ \perp BC$. Доведіть, що пряма Сімсона P відносно ABC паралельна AQ.

133. $P \in (ABC)$, H – ортоцентр ABC. Доведіть, що пряма Сімсона P відносно ABC ділить відрізок PH навпіл.

134. $ABCD$ вписаний, ℓ_A – пряма Сімсона A відносно BCD, аналогічно визначаються ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D. Доведіть, що ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D конкурентні.

135. Не існує нескінченної спадної послідовності невід'ємних цілих чисел.

136. Якщо послідовність невід'ємних цілих чисел задовольняє нерівностям $n_1 \geq n_2 \geq \cdots$ то існує такий номер i що $n_i = n_{i+1} = \cdots$

137. Доведіть, що число $\sqrt{2}$ – ірраціональне.

138. Знайдіть усі прості p для яких існують натуральні x, y, n такі, що

$$p^n = x^3 + y^3$$

139. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ в цілих числах.

140. Доведіть, що число $\dfrac{2^n - 1}{n}$ не є цілим.

141. Знайдіть найбільше значення виразу $m^2 + n^2$, якщо

$$\left(n^2 - nm - m^2\right)^2 = 1$$

142. $(ab + 1) \mid (a^2 + b^2)$. Доведіть, що число

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

є точним квадратом.

143. Доведіть, що якщо число

$$\frac{a^2 + b^2 + a + b + 1}{ab}$$

ціле, то воно дорівнює 5.