4 Клітинкова комбінаторика

Оскільки ви вже всі не перший раз бачите цю тему, то сьогодні буде просто кілька різних сюжетів і практика розв'язування задач.

§4.1 Шахові фігури

§4.1.i Класичні шахові фігури

Задача 4.1 (СПб 2016, 9.2)**.** На дошці 300×300 розташовані тури, вони б'ють усю дошку. При цьому кожна тура б'є не більш ніж одну іншу туру. Для якого найменшого k можна стверджувати що у довільному квадраті $k \times k$ стоїть хоча б одна тура?

Задача 4.2. На дошці 101×101 розташована 101 тура, жодна з яких не б'є жодну іншу. Потім усі тури одночасно перемістилися на хід коня. Чи обов'язково в результаті якісь дві тури будуть бити одна одну?

Задача 4.3. Яку найбільшу кількість тур можна розташувати на дошці $m \times n$ таким чином, щоб кожна тура била не більш ніж дві інші? Тури не б'ють одна крізь одну.

Задача 4.4. На шаховій дошці розташували 8 ферзів, що не б'ють один одного. Скільки ферзів може стояти на чорних клітинках?

Задача 4.5 (Квант 1973 №8 М220)**.** На шаховій дошці стоїть король. Король взяв і обійшов усі клтинки рівно по одному разу. Вздовж свого шляху король з'єднував центри клітинок відрізками; отриманий шлях виявився без самоперетинів.

(а) Якої максимальної довжини шлях міг пройти король?

(б) Який максимальний шлях міг пройти король, якщо останнім ходом він повернувся до початкової клітинки?

Задача 4.6 (IMO 2014 P2)**.** Нехай $n \geqslant 2$ — ціле число. Задана шахівниця $n \times n$, яка складається з n^2 одиничних клітинок. Розстановка n тур в клітинках шахівниці називається *мирною*, якщо в кожному горизонтальному і в кожному вертикальному ряду знаходиться рівно по одній турі.

Знайдіть найбільше ціле додатнє k таке, що для кожної мирної розстановки n тур знайдеться клітчастий квадрат $k \times k$, у жодній із k^2 клітинок якого немає тури.

Задача 4.7 (IMO SL 2010 C3)**.** 2500 королів розташовані на дошці 100×100 таким чином, що

- жоден король не б'є жодного іншого (тобто, жодні два королі не стоять на сусідніх за стороною чи вершиною клітинках);
- у кожному рядку та стовпчику знаходиться рівно 25 королів.

Знайдіть кількість розташувань, що задовольняють цим умовам. (Два розташування, які відрізняються поворотом чи симетрію також вважаються різними.)

§4.4 Shortlisted Homework

§4.4.i Day 1

Задача 4.25 (IMO SL 2017 C6)**.** Let $n \geqslant 1$ be an integer. An $n \times n \times n$ cube is composed of n^3 unit cubes. Each unit cube is painted with one color. For each $n \times n \times 1$ box consisting of n^2 unit cubes (of any of the three possible orientations), we consider the set of the colors present in that box (each color is listed only once). This way, we get $3n$ sets of colors, split into three groups according to the orientation. It happens that for every set in any group, the same set appears in both of the other groups. Determine, in terms of n, the maximal possible number of colors that are present.

Задача 4.26 (RMM SL 2018 C4)**.** Let k and s be positive integers such that $s < (2k+1)^2$. Initially, one cell out of an $n \times n$ grid is coloured green. On each turn, we pick some green cell c and colour green some s out of the $(2k+1)^2$ cells in the $(2k+1) \times (2k+1)$ square centred at c. No cell may be coloured green twice. We say that s is *k-sparse* if there exists some positive number C such that, for every positive integer n, the total number of green cells after any number of turns is always going to be at most Cn. Find, in terms of k, the least k-sparse integer s.

Задача 4.27 (IMO SL 2016 C8)**.** Let n be a positive integer. Determine the smallest positive integer k with the following property: it is possible to mark k cells on a $2n \times 2n$ board so that there exists a unique partition of the board into 1×2 and 2×1 dominoes, none of which contains two marked cells.

§4.4.ii День 2

Подивитися розбір деяких задач минулого домашнього завдання, який з'явиться десь на тижні у списку відтворення на YouTube.