Зміст

1 Алгебра

1.1 Нерівності (10)

Всі латинські літери позначають невід'ємні числа

1. а) Якщо $a_1 + \ldots + a_n = 1$, то $(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)^2 \le a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2$. **б) Вагова нерівність Коші.** Якщо $a_1, \ldots, a_n > 0$ і $a_1 + \ldots + a_n = 1$, то $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \ge x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$. **в)** Визначимо середнє степеневе порядку $m \ne 0$ чисел $x_1, \ldots, x_n$ з масами $a_1, \ldots, a_n > 0$, де $a_1 + \ldots + a_n = 1$, як $S_m := \sqrt[m]{a_1x_1^m + \ldots + a_nx_n^m}$. Також довизначимо $S_0 := x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$, $S_{-\infty} := \min\{x_1, \ldots, x_n\}$, $S_{+\infty} := \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. Доведіть, що $S_a \le S_b$ при $a \le b$.

2. "Локальна нерівність". Для натуральних чисел $n > m$ виконується

$$\frac{a^n}{b^m} \ge \frac{na^{n-m} - mb^{n-m}}{n-m}.$$

Рівність досягається тільки при $a = b$.

3. а) $\dfrac{a_1^2}{a_2} + \dfrac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
б) $\dfrac{a_1^2}{a_1+a_2} + \dfrac{a_2^2}{a_2+a_3} + \ldots + \dfrac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

4. $\dfrac{x_1^2}{y_1} + \dfrac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{y_n} \geq \dfrac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}$.

5. $\dfrac{a^2}{b(a+c)} + \dfrac{b^2}{c(b+d)} + \dfrac{c^2}{d(c+a)} + \dfrac{d^2}{a(d+b)} \geq 2$.

6. а) $a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a + b + c)$. **б)** $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \geq abc(ab + bc + ca)$.

7. а) $\dfrac{a_1^3}{a_1+a_2} + \dfrac{a_2^3}{a_2+a_3} + \ldots + \dfrac{a_n^3}{a_n+a_1} \geq \dfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$.
б) $\dfrac{a}{b+2c+d} + \dfrac{b}{c+2d+a} + \dfrac{c}{d+2a+b} + \dfrac{d}{a+2b+c} \geq 1$.

8. Для натуральних a, b, c виконується

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \geq a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

9. а) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+a} + \dfrac{d}{a+b} \geq 2$. **б)** $\dfrac{a+c}{a+b} + \dfrac{b+d}{b+c} + \dfrac{c+a}{c+d} + \dfrac{d+b}{d+a} \geq 4$.

10. Якщо $ab + bc + cd + da = 1$, то $\dfrac{a^3}{b+c+d} + \dfrac{b^3}{c+d+a} + \dfrac{c^3}{d+a+b} + \dfrac{d^3}{a+b+c} \geq \dfrac{1}{3}$.

1.2 Комплексні числа (10,11)

Комплексним числом називається пара (a, b) дійсних чисел. Вона записується у вигляді $a + bi$. Сума комплексних чисел задається формулою $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$, а добуток – формулою $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

1. а) Для довільного комплексного числа z існують такі дійсні $r \geq 0$ і φ, що $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Чи єдині r і φ? **б)** $(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))(\cos(\psi) + i\sin(\psi) = \cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)$. **в)** Для кожного натурального n розв'яжіть рівняння $z^n = 1$ в комплексних числах z.

2. Розкладіть на квадратні тричлени і лінійні двочлени з *дійсними* коефіцієнтами: а) $x^4 + 4$; **б)** $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; **в)** $x^n - 1$.

3. а)* Основна теорема алгебри. Не константний многочлен з комплексними коефіцієнтами завжди має комплексний корінь. Зауваження: цю задачу можна без доведення використовувати в інших. **б)** Многочлен з комплексними коефіцієнтами степеню рівно n має рівно n коренів з урахування кратності. (Корінь z_0 многочлену P *має кратність* k, якщо P ділиться на $(z - z_0)^k$ і не ділиться на $(z - z_0)^{k+1}$.) **в)** Якщо $z_1, \ldots, z_n$ – корені многочлена P зі старшим коефіцієнтом a_n, при чому кожен корінь взятий з кратністю, то $P(z) = a_n(z - z_1)\ldots(z - z_n)$.

4. Позначимо $\overline{a + bi} := a - bi$. **а)** Для довільного многочлену P з дійсними коефіцієнтами виконується $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. **б)** Довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається у добуток многочленів першого і другого степенів з дійними коефіцієнтами. **в)** Якщо многочлен P з дійсними коефіцієнтами строго додатній на $\mathbb{R}$ то $P = Q^2 + R^2$ для деяких многочленів Q, R з дійсними коефіцієнтами.

5.* Знайдіть всі многочлени з дійсними коефіцієнтами, що задовольняють тотожність

$$P(x^2 + x + 1) \equiv P(x)P(x + 1).$$

6. а) Виразіть $\cos(n\varphi)$ і $\sin(n\varphi)$ через $\cos(\varphi)$ та $\sin(\varphi)$. **б)** Доведіть, що $\cos(n\varphi)$ і $\sin(n\varphi)/\sin(\varphi)$ – многочлени від $\cos(\varphi)$.

7. Знайдіть: **а)**$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\varphi)$; **б)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \sin(k\varphi)$; **в)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\varphi)}{3^k}$.

8. а) $\cot^2(x) < 1/x^2 < \cot^2(x) + 1$.

б) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} \cot^{2n-2j}\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right) = 0$ для довільного $k = 1, \ldots, n$.

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

г) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

д)* Знайдіть $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}, \ldots$

9. а) Яким геометричним перетворенням площини $\mathbb{C}$ отримується число iz з числа z? **б)** Позначимо $e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. Який геометричний зміст множенні на $e^{i\varphi}$? на $re^{i\varphi}$. **в)** Виразіть число ω отримане з числа z поворотом на кут φ проти годинникової стрілки відносно центру z_0 (через z, z_0 і φ). **г)** Композиція поворотів площини (з різними центрами) – поворот або паралельний перенос.

10. Знайдіть $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$, якщо $x_{n+1} = x_n\sqrt{\dfrac{x_n + x_{n-1}}{2x_{n-1}}}$ і **а)** $x_0 = 1$, $x_1 = 1/2$ **б)** $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

11. Знайдіть $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, якщо $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 4y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 4x_n \end{cases}$ і **а)** $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ **б)** $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

1.3 Комплексні числа (альтернативний варіант, 10,11)

Число $z = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, називається *комплексним*. $Re(z) = a, Im(z) = b$ – його *дійсна* та *уявна* частини. Множина комплексних чисел позначається $\mathbb{C}$. Число $\overline{z} = a - bi$ називається комплексно *спряженим* до z. *Модулем* числа називається $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1. Обчислити $\sqrt{3 - 4i}$.

2. Розв'язати рівняння: **а)** $z^2 + 2z + 2 = 0$; **б)** $z^4 = 1$; **в)** $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$.

3. Довести, що $z + \overline{z}$ та $z \cdot \overline{z}$ є дійсними числами.

4. Довести: **а)** $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, **б)** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, **в)** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

5. Тригонометрична форма комплексного числа. Довільне $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ можна єдиним чином представити у вигляді $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$, де $r > 0$, $\varphi \in [0; 2\pi)$. В такому представленні $r = |z|$, а φ – кут між дійсною віссю і променем Oz на комплексній площині.

6. Нехай $z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1))$, $z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$. Тоді **а)** $z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$, **б)** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Наслідок 1: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Наслідок 2 **(формула Муавра):** $(r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$.

7. Використовуючи формулу Муавра, обчислити $\cos(5\varphi)$ та $\sin(5\varphi)$ через $\cos(\varphi)$ та $sin(\varphi)$.

8. Для всіх натуральних n розв'яжіть рівняння $z^n = 1$.

9. Обчислити: $\cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \ldots + \cos(n\varphi)$.

Функція e^x до-визначається на $\mathbb{C}$ таким чином: $e^z = e^a(\cos(b) + i \cdot \sin(b)), z = a + ib$.

10. Перевірити формули: **а)** $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, **б)** $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. (Вони часто використовуються, коли $x \in \mathbb{R}$, але вірні і для випадку $x \in \mathbb{C}$).

11. а) Виразіть корені n-того степені одиниці через експоненту. **б)** Якому геометричному перетворенню площини відповідає множення на $re^{i\varphi}$? $(r, \varphi \in \mathbb{R})$

12. Спростити вираз: **а)** $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - ... \pm C_n^{2[n/2]}$ б) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + ... + C_n^{3[n/3]}$.

13. Основна теорема алгебри: Довільний многочлен над $\mathbb{C}$ степені ≥ 1 має корінь.

Наслідок: Довільний многочлен над $\mathbb{C}$ степені n має рівно n коренів (з урахуванням кратності).

14. Довести: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

15. Обчислити: $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{1000}$.

16. Обчислити: $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \sin(k\varphi)$.

17. Спростити вираз: $C_{2018}^0 + C_{2018}^4 + C_{2018}^8 + \ldots + C_{2018}^{2016}$.

18. Використовуючи формули з класної задачі **10.**, доведіть твердження: якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 4\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)$.

19. а) Для довільного многочлену P з дійсними коефіцієнтами і довільного $z \in \mathbb{C}$ виконується $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ **б)** Довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається у добуток многочленів першого і другого степеня з дійсними коефіцієнтами.

1.4 Функціональні рівняння (10,11)

1. Знайдіть всі функції $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ такі, що $f(1) = 2$ і $f(xy) \equiv f(x)f(y) - f(x+y) + 1$.

2. Знайдіть усі функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що виконується

$$g(x+y) + g(x)g(y) \equiv g(xy) + g(x) + g(y).$$

3. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє рівнянню $x + f(x) \equiv f(f(x))$. Знайдіть усі розв'язки рівняння $f(f(x)) = 0$.

4. Знайдіть усі ін'єктивні функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, що задовольняють умовам

$$f(f(m) + f(n)) \equiv f(f(m)) + f(n), \qquad f(1) = 2, f(2) = 4.$$

5. Розв'яжіть функціональне рівняння $f(xf(x) + f(y)) \equiv y + (f(x))^2$.

6. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $f(xy + x + y) \equiv f(xy) + f(x) + f(y)$. Доведіть, що $f(x+y) \equiv f(x) + f(y)$.

7. Чи існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що $f(f(x)) \equiv x^2 - 2$?

8. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такі, що $f(x)f(yf(x)) \equiv f(x+y)$.

9. Знайдіть усі пари функцій $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так, що $f(x + g(y)) \equiv xf(y) - yf(x) + g(x)$.

10. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ що задовольняють рівнянню $f(f(x)) + af(x) \equiv b(a+b)x$.

11. Нехай F – множина всіх функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що $f(3x) \geq f(f(2x)) + x$. Знайдіть найбільше дійсне число α таке, що для всіх $f \in F$ виконується $f(x) \geq \alpha \cdot x$.

12. Знайдіть усі функції $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $f(x+y) = g(x-y) \equiv 2h(x) + 2h(y)$.

1.5 Функціональні рівняння (альтернативний варіант, 10,11)

Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (якщо в умові не вказано інше), що для всіх значень з області визначення виконуються співвідношення:

1. $f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

2. $x(f(x) + f(-x) + 2) + 2f(-x) = 0$.

3. $f : \mathbb{R}/\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) + f(y) = (x + y + 2)f(x)f(y)$.

4. $2f(x) + f(1-x) = x^2$.

5. $x^2 f(y) + yf(x^2) = f(xy) + a$, де a – параметр.

6. $f((x+y)^2) = f(x^2) + f(y^2) + 2xy$.

7. $f(x^3) - f(y^3) = (x^2 + xy + y^2)(f(x) - f(y))$.

8. $f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4)$.

9. Рівняння Коші. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Доведіть, що $f(x) = kx, k \in \mathbb{R}$.

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Доведіть, що якщо f задовольняє хоча б одну з наступних властивостей, то $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$: **a)** f – неперервна; **b)** f – монотонна; **c)** f – обмежена знизу (зверху) на деякому інтервалі (наприклад, $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) $\forall x \geq 0$ ($\forall x \leq 0$)).

11. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$: $f(xy) = f(x) + f(y)$, f – неперервна.

12. $f(x^3 - y^3) = f(x+y)^3$.

13. $(x-1)f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

14. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє рівнянню $x + f(x) = f(f(x))$. Знайдіть усі розв'язки рівняння $f(f(x)) = 0$.

15. $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$.

16. $f(x+y) = f(x)f(y)$, f – неперервна.

1.6 Аналіз для многочленів (11)

Відомо, що квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має

$$\begin{cases} \text{два розв'язки} & \text{при } b^2 > 4ac, \\ \text{один розв'язок} & \text{при } b^2 = 4ac, \\ \text{нуль розв'язків} & \text{при } b^2 < 4ac. \end{cases}$$

Іншими словами, кількість розв'язків цього рівняння дорівнює $1 + \operatorname{sgn}(b^2 - 4ac)$. Аналогічно можна знайти формули, що дають кількість коренів рівнянь третього та четвертого степеню без розв'язування самих цих рівнянь, що ми і зробимо у задачах **2** і **3**.

1.* **Теорема про проміжне значення.** Нехай P – многочлен. Якщо $P(a) > 0$ і $P(b) < 0$, то існує таке $c \in [a, b]$, що $P(c) = 0$.

2. а) Рівняння $x^3 + x + q = 0$ має рівно один розв'язок при довільному q. **б)** Для функції $p(x) = x^3 - 6x + 2$ знайдіть проміжки зростання і спадання. **в)** Для цієї ж функції знайдіть найбільше і найменше значення на відрізку $[0, 3]$. **г)** Для цієї ж функції знайдіть рівняння дотичної в точці $x = 0$. **д)** При яких q рівняння $x^3 - x + q = 0$ має рівно один розв'язок? **е)** Як за параметрами p і q визначити кількість розв'язків рівняння $x^3 + px + q = 0$? **ж)** Поясніть, як знаходити кількість розв'язків рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ за заданими параметрами a, b, c, d.

3. Як за параметрами p, q, r, s, t визначати кількість коренів рівняння: **а)** $x^4 - x + r = 0$; **б)** $x^4 + qx + r = 0$; **в)** $x^n + qx + r = 0$; **г)**** $x^4 \pm x^2 + qx + r = 0$; **д)** $x^4 + px^2 + qx + r = 0$; **е)** $px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$?

Правило знаків Декарта. Число додатних коренів рівняння $p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0 = 0$ не перевищує кількості змін знаку в послідовності $p_0, \ldots, p_n$ з якої викинуто нулі.

3. а) Чи можна в правилі Декарта замінити “не перевищує” на “дорівнює” (для многочленів без кратних коренів)? **б)** Доведіть правило знаків Декарта для $n \leq 3$. **в)*** Як аналогічно до правила знаків Декарта оцінити кількість коренів заданого многочлена на заданому проміжку $[a, b]$?

Похідною $P'(x)$ многочлена $P(x)$ називається многочлен, отриманий підстановкою $y = x$ у многочлен $\dfrac{P(y) - P(x)}{y - x}$ від двох змінних x, y.

4. а) $(x^n)' = nx^{n-1}$.
б) $(p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0)' = np_n x^{n-1} + \ldots + p_1$.
в) Формула Лейбніца. $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

5. Нехай задано число a.
а) $\forall \varepsilon > 0, \forall P \in \mathbb{R}[x] : \exists \delta = \delta(P, \varepsilon) : \forall h \in (-\delta, \delta) : \left| \dfrac{P(a+h) - P(a)}{h} - P'(a) \right| < \varepsilon$.
б) Теорема Ферма. Якщо a – точка локального екстремуму многочлену P, то $P'(a) = 0$.
в) Чи істинне зворотнє твердження?
г) Якщо многочлен P нестрого зростає на інтервалі, то похідна P' невід’ємна на цьому інтервалі. Чи можна обидві умови замінити на строгі?
д) Якщо похідна P' многочлену P невід’ємна на інтервалі, то многочлен P нестрого зростає на цьому інтервалі.

6. а) Теорема Ролля. Між кожними двома коренями многочлену є корінь його похідної.
б) Доведіть правило знаків Декарта для довільного n.
в) Теорема Лагранжа. $\forall a, b \in \mathbb{R}, P \in \mathbb{R}[x] : \exists c \in (a, b) : P'(c) = \dfrac{P(a) - P(b)}{a - b}$.

2 Теорія чисел

2.1 Рівняння Пелля (10)

1. Розв’яжіть в цілих числах рівняння $x^2 + y^2 - 1 = 4xy$.

2. Для заданого цілого d розв’яжіть рівняння $x^2 2 - dy^2 = 1$ над раціональними числами.

3. Нехай $(x, y) = (a, b)$ – найменший натуральний розв’язок рівняння $x^2 - dy^2 = 1$. Розглянемо послідовність $y_0 = 0$, $y_1 = b$, $y_{n+1} = 2ay_n - y_{n-1}$ при $n \geq 1$. Покажіть, що $ay_n^2 + 1$ – квадрат, і що всі квадрати вигляду $ay^2 + 1$ мають такий вигляд.

4. Доведіть, що $5x^2 + 4$ чи $5x^2 - 4$ є точним квадратом тоді і лише тоді, коли x – число Фібоначчі.

5. Знайдіть усі $n \in \mathbb{N}$ для яких $\binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ для якогось натурального $k < n$.

6. Нехай $d = a^2 - 1$. Доведіть, що для $x, y \in \mathbb{Z}$ число $|x^2 - dy| < 2a + 2$ є точним квадратом.

7. Доведіть, що якщо $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ для натуральних n, m то m квадрат.

8. Доведіть, що якщо різниця двох послідовних кубів дорівнює n^2 то $2n - 1$ також квадрат.

9. Число n таке, що $3n + 1$ і $4n + 1$ – квадрати. Доведіть, що n ділиться на 56.

10. Доведіть, що рівняння $x^2 - dy^2 = -1$ має розв'язок в цілих числах тоді і лише тоді, коли розв'язок в цілих має рівняння $x^2 - dy^2 = -4$.

11. Нехай p просте. Доведіть, що рівняння $x^2 - py^2 = -1$ має цілі розв'язки тоді і тільки тоді, коли $p = 2$ або $p = 4k + 1$.

12. Для простих $p = 4k+3$ доведіть, що рівно одне з рівнянь $x^2 - py^2 = \pm 2$ має цілий розв'язок.

13. Доведіть, що $3^n - 2$ є квадратом лише при $n = 1$ і $n = 3$.

14. Доведіть, що якщо вираз $\dfrac{x^2+1}{y^2} + 4$ є квадратом, то його значення 9.

2.2 Квадратичні лишки (10,11)

1. а) З'ясуйте, які залишки можуть бути у квадратів (цілих) чисел при діленні на 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. **б)** Якщо $a^2 + b^2$ ділиться на 3 (на 7), то a і b діляться на 3 (на 7). **в)** Число вигляду $4k + 3$ не може бути представлене у вигляді суми двох квадратів. **г)** Число, що має простий дільник вигляду $4k + 3$ в непарному степені не може бути представлене у вигляді суми двох квадратів. **е)** Існують як завгодно великі трійки послідовних натуральних чисел, жодне з яких не є точним квадратом. **ж)** Існує нескінченно багато чисел, що не можуть бути представлені у вигляді суми трьох квадратів.

Надалі p – непарне просте число, а решта латинських літер позначають цілі числа.

2. Розв'яжіть в цілих числах рівняння: **а)** в непарних числах $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = y^2$; **б)** $3x = 5y^2 + 4y - 1$; **в)** $x^2 + y^2 = 3z^2$; **г)** $x^2 + y^2 + z^2 = 4t^2$; **д)** $2^x + 1 = 3y^2$; **е)** $x^2 = 2003y - 1$; **ж)** $x^2 + 1 = py$, де $p = 4k + 3$; **з)** якщо $p = 4k + 3$ ділить $a^2 + b^2$ то $p|a$ і $p|b$.

3. Зведіть рівняння $py = at^2 + bt + c$ до конгруенції $x^2 \equiv a \pmod p$.

Залишок $a \neq 0$ називається *квадратичним лишком (квадратичним нелишком) за модулем p*, якщо конгруенція $x^2 \equiv a \pmod p$ має розв'язок (не має розв'язку). Слова "за модулем p" надалі опускатимемо.

4. а) Для деяких a і p обидва числа a і $-a$ є лишками. **б)** Конгруенція $x^2 \equiv a^2 \pmod p$ має рівно два розв'язки для a що не ділиться на p. **в)** Кількість лишків дорівнює кількості нелишків і дорівнює $\dfrac{p-1}{2}$.

5. а) Для довільного $a \neq 0$ існує і єдине b таке що $ab \equiv 1 \pmod p$. Позначатимемо його a^{-1}. **б)** Розв'яжіть конгруенцію $x \equiv x^{-1} \pmod p$. **в) Теорема Вільсона.** $(p-1)! + 1$ ділиться на p.

6. а) Якщо $a \neq 0$ – лишок, то a^{-1} також лишок. **б)** Кількість лишків парна тоді і тільки тоді, коли -1 є лишком. **в)** Рівняння $x^2 + 1 = py$ має розв'язок в цілих числах при $p \equiv 1 \pmod 4$ (і не має розв'язку інакше).

7. а) Добуток двох лишків є лишком. **б)** Добуток лишку і нелишку є квадратичним нелишком. **в)** Добуток двох нелишків є нелишком.

8. Якщо число $p = 8k+5$ просте, то **а)** $2^{4k+2} \equiv -1 \pmod p$; **б)** рівняння $x^2 - 2 = py$ не має розв'язків в цілих числах.

9. Якщо число $p = 8k+1$ просте, то **а)** $2^{4k} \equiv -1 \pmod p$; **б)** рівняння $x^2 - 2 = py$ має розв'язок в цілих числах.

10. а) Якщо число $p = 8k \pm 1$ просте, то $2^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$. **б)** Якщо число $p = 8k \pm 3$ просте, то $2^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$. **в)** Для яких простих чисел p рівняння $x^2 - 2 = py$ має розв'язок в цілих числах?

11. а) Якщо число $p = 12k \pm 1$ просте, то $3^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$. **б)** Якщо число $p = 12k \pm 5$ просте, то $2^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p$. **в)** Для яких простих чисел p рівняння $x^2 - 3 = py$ має розв'язок в цілих числах?

12. Позначимо

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} +1, & \text{якщо } a \text{ – лишок за модулем } p, \\ -1, & \text{якщо } a \text{ – нелишок за модулем } p. \end{cases}$$

Наприклад, $\left(\dfrac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$ за задачею 10; $\left(\dfrac{ab}{p}\right) = \left(\dfrac{a}{p}\right)\left(\dfrac{b}{p}\right)$ за задачею 7.

а) Критерій Ейлера. $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\dfrac{a}{p}\right) \pmod p$.

б) $\left(\dfrac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{(p-1)/2} \left[\frac{2ax}{p}\right]}$.

в) $\left(\dfrac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{(p-1)/2} \left[\frac{ax}{p}\right]}$ для непарного a.

г)* Квадратичний закон взаємності Гауса.

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$$

для непарних простих p і q.

д) Як за допомогою попередніх задач швидко обчислювати $\left(\dfrac{a}{p}\right)$?

2.3 Первісні корені (10,11)

Це заняття вмотивоване наступною загальною проблемою: розв'язати конгруенцію $a^x \equiv b \pmod{m}$ (при заданих параметрах a, b і m). Будемо вважати, що a і b не діляться на m.

1. Сформулюйте і обґрунтуйте алгоритм розв'язання цієї конгруенції для $m = 2, 3, 4, 5, 7$.

Нехай $(g, m) = 1$. Залишок g називається *первісним коренем* за модулем m, якщо залишки від ділення на m чисел $g^1, g^2, \dots, g^{\varphi(m)} \equiv 1$ різні.

2. Доведіть існування первісного кореня за модулем: **а)** 17; **б)** 257; **в)** $p = 2^l + 1$; **г)** 97; **д)** $p = 2^k \cdot 3^l + 1$; **е)** $p = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$; **ж)** p. (Тут p – просте число.)

Теорема про первісний корінь. *Для простого p існує первісний корінь за модулем p.*

3. Леми до теореми про первісний корінь. Нехай p просте і a не ділиться на p. **а)** $p - 1$ ділиться на найменше $k > 0$, для якого $a^k \equiv 1 \pmod{p}$. **б)** Для довільних цілих n і a конгруенція $x^n \equiv a \pmod{p}$ має не більше n розв'язків. **в)** Якщо $p - 1$ ділиться на d, то конгруенція $x^d \equiv 1 \pmod{p}$ має рівно d розв'язків.

4. а) Якщо $(a, 35) = 1$, то $a^{12} \equiv 1 \pmod{35}$. **б)** Якщо m ділиться на два різних простих непарних числа і $(a, m) = 1$, то $a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1 \pmod{m}$.

5. а) Якщо m ділиться на два різних простих непарних числа, то не існує первісного кореня за модулем m. **б)** Нехай $x \equiv 3 \pmod{4}$. Чи може виконуватися $x^2 \equiv 1 \pmod{2^{100}}$? **в)*** При $n > 2$ не існує первісного кореня за модулем 2^n.

6. а) Число 2 є первісним коренем за модулем 3^n. **б)** Число 2 є первісним коренем за модулем 5^n. **в)** Знайдіть первісний корінь за модулем 7^n.

7. Нехай g первісний корінь за модулем простого $p > 2$. **а)** Існують такі t і u, що $(g + pt)^{p-1} = 1 + pu$ і u не ділиться на p. **б)** Для довільного цілого додатного n існує первісний корінь за модулем p^n. **в)** Те саме по модулю $2p^n$.

8. Теорема. Первісні корені існують тільки за модулями 2, 4, p^n, $2p^n$.

9. Нехай p просте і a не ділиться на p. Позначимо $\operatorname{ord} a = \operatorname{ord}_p a := \min\{k \geq 1 | a^k \equiv 1 \pmod{p}\}$. Число $\operatorname{ord}_p a$ називається *порядком елементу a за модулем p*. **а)** Якщо $a^m \equiv a^n \pmod{p}$, то $m - n$ ділиться на $\operatorname{ord} a$. **б)** $a \cdot \operatorname{ord} x^a = \operatorname{ord} x$. **в)** Якщо $\operatorname{ord} x$ і $\operatorname{ord} y$ взаємно прості, то $\operatorname{ord}(xy) = \operatorname{ord} x \cdot \operatorname{ord} y$.

10. Для яких n: **а)** $2^n - 1$ ділиться на 3^{100}? **б)** $2^n + 1$ ділиться на 3^{100}? **в)** $5^n - 1$ ділиться на 2^{100}? **г)** $3^n + 1$ ділиться на 2^{100}?

11. Знайдіть довжину періоду дробу **а)** $1/3^{100}$; **б)** $1/7^{100}$.

12. а) При циклічній перестановці цифр в періоді дробу $1/7$ отримуємо дроби $1/7$, $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$, $6/7$. Доведіть аналогічний факт для дробу $1/p$, якщо в ній довжина періоду дорівнює $p-1$. **б)** Знайдіть множину залишків від ділення чисел вигляду 10^k на 3^{100}. **в)** Доведіть, що у десятковому записі дробу $1/3^{100}$ зустрічається довільна (послідовна) комбінація з 20 цифр.

13.* Знайдіть усі такі n, що серед останніх 1000 цифр числа 2^n знайдеться 100 послідовних **а)** нулів **б)** дев'яток.

14.* Задача **13** для числа 5^n.

15. Лема Гензеля. Нехай p – просте число, $x \equiv 1 \pmod{p^n}$, $x \not\equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$, $p > 2$ або $n > 1$. Доведіть, що **а)** якщо $(a,p) = 1$, то $x^a \equiv 1 \pmod{p^n}$, але $x^a \not\equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$; **б)** $x^p \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$ і якщо $n > 1$ або $p > 2$, то $x^p \not\equiv 1 \pmod{p^{n+2}}$; **в)** якщо $a = p^k q$ і $(p,q) = 1$, то $x^a \equiv 1 \pmod{p^{n+k}}$ і $x^a \not\equiv 1 \pmod{p^{n+k+1}}$.

16. Якщо x – первісний корінь за модулем p^3, де p – непарне просте, то x – первісний корінь за модулем p^n.

17. Якщо $d|(2^{2^n}+1)$, то $2^{n+1}|(d-1)$.

2.4 Задачі з теорії чисел з IMO (11)

2000, 5. Чи існує таке $n \in \mathbb{N}$, що має рівно 2000 різних простих дільників, що $n|(2^n+1)$?

2002, 3. Знайдіть всі такі цілі $m, n \in \{1,2,3\}$, що для нескінченної кількості натуральних чисел a число $a^m + a - 1$ ділиться на $a^n + a^2 - 1$.

2003, 2. Знайдіть всі пари (a,b) натуральних чисел для яких a^2 ділиться на $2ab^2 - b^3 + 1$.

2003, 6. Нехай p – просте число. Доведіть, що для деякого просто q число $n^p - p$ не ділиться на q при жодному n.

2005, 4. Знайдіть усі цілі числа, взаємнопрості з $2^n + 3^n + 6^n - 1$ для довільного n.

2006, 5. Нехай $P(x)$ – многочлен степеню n з цілими коефіцієнтами. Розглянемо многочлен $Q(x) = P(P(\ldots(x)\ldots))$, де P застосовується k разів. Доведіть, що існує не більш ніж n таких цілих чисел t, що $Q(t) = t$.

2007, 5. Нехай a і b – натуральні числа, для яких $4ab - 1$ ділить $(4a^2-1)^2$. Доведіть, що $a = b$.

3 Геометрія

3.1 Ортоцентр, ортотрикутник і коло дев'яти точок (9,10)

1. Всередині рівностороннього трикутника ABC знайдіть геометричне місце точок M, для яких $\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = 90°$.

2. Нехай a, b, c – довжини сторін гострокутного трикутника, u, v, w – відстані від відповідних вершин до ортоцентру. Доведіть, що $avw + ubw + uvc = abc$.

3. Задано гострокутний трикутник. Знайдіть для нього всі *трикутні більярди*, тобто всі вписані в нього трикутники, що володіють наступною властивістю: дві сторони, що виходять з довільної вершини вписаного трикутника утворюють рівні кути з відповідною стороною заданого трикутника.

4. Нехай $A_1B_1C_1$ – ортотрикутник трикутника ABC, A_2, B_2, C_2 – проекції вершин A, B, C на прямі B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 відповідно. Доведіть, що перпендикуляри, опущені з A_2, B_2, C_2 на прямі BC, CA, AB відповідно, перетинаються в одній точці.

5. Доведіть, що точки, симетричні ортоцентру відносно сторін трикутника, лежать на описаному колі.

6. Доведіть, що середини сторін трикутника, основи його висот і середини відрізків, що сполучають вершини з ортоцентром, лежать на одному колі (*коло дев'яти точок*). Радіус цього кола дорівнює $R/2$, а його центр знаходиться в середині відрізку OH.

7. Довжини сторін ортотрикутника помножили на косинуси протилежних кутів. Доведіть, що з трьох отриманих відрізків можна скласти трикутник. Чому дорівнює радіус його описаного кола, якщо радіус описаного кола початкового трикутника дорівнює R?

8. Теорема Тебо. Нехай ABC – заданий трикутник, $A_1B_1C_1$ – його ортотрикутник. Доведіть, що прямі Ейлера трикутників AB_1C_1, BC_1A_1 і CB_1A_1 перетинаються в одній точці, що лежить на колі дев'яти точок трикутника ABC.

9. Задано чотирикутник $ABCD$. Доведіть, що кола дев'яти точок трикутників ABC, BCD, CDA, DAB перетинаються в одній точці.

10. Теорема Брахмангупти. Задано вписаний чотирикутник з перпендикулярними діагоналями. Доведіть, що пряма, що проходить через точку перетини діагоналей і перпендикулярна одній зі сторін, ділить протилежну сторону навпіл.

11. Задано чотирикутник з перпендикулярними діагоналями. Доведіть, що вісім точок: середини сторін і проекції середин сторін на протилежні сторони лежать на одному колі (*колі восьми точок* чотирикутника)

3.2 Бісектриси, висоти і описане коло (9,10)

У цьому занятті A', B', C' – середини менших дуг BC, CA, AB відповідно.

1. Доведіть, що трикутники $AC'C'$ і $IB'C'$ рівні (і аналогічно $\triangle CA'B' = \triangle IA'B'$, $\triangle BC'A' = \triangle IC'A'$).

2. Доведіть, що AA', BB', CC' – висоти трикутника $A'B'C'$.

3. Лема про тризуб. Доведіть, що $A'I = A'B = A'C$ (і аналогічно $B'I = B'C = B'A$, $C'I = C'A = C'B$).

4. Доведіть, що діагоналі шестикутника в перетині трикутників ABC і $A'B'C'$ перетинаються в точці I і паралельні сторонам трикутника ABC.

5. Доведіть, що $\dfrac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \dfrac{2r}{R}$.

Нехай гомотетія з центром I і коефіцієнтом 2 переводить трикутник $A'B'C'$ в трикутник $I_aI_bI_c$.

6. Доведіть, що I_a, I_b, I_c – центри зовнівписаних кіл трикутника ABC.

Нехай A'', B'', C'' – середини дуг BAC, CBA, ACB описаного кола трикутника ABC відповідно.

7. Доведіть, що A'', B'', C'' – середини відрізків I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b.

Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до сторін BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 відповідною

8. Доведіть, що прямі A_1A'', B_1B'', C_1C'' проходять через одну точку.

9. Доведіть, що пряма IO проходить через ортоцентр трикутника $A_1B_1C_1$.

3.3 Радикальна вісь (10)

1. На площині задано коло S і точка P. Пряма, що проходить через точку P, перетинає коло в точках A і B. Доведіть, що добуток $PA \cdot PB$ не залежить від вибору прямої.

Ця величина зі знаком плюс для точки P поза колом і зі знаком мінус для точки P всередині кола, називається *степенем точки* P відносно кола S.

2. Доведіть, що для точки P, що лежить поза колом, її степінь відносно S дорівнює квадрату довжини дотичної, проведеної з цієї точки.

3. Доведіть, що степінь точки P відносно кола S дорівнює $d^2 - R^2$, де R – радіус S, d – відстань від точки P до центру кола S.

4. (!) На площині задано два не концентричних кола S_1 і S_2. Доведіть, що геометричним місцем точок, для яких степінь відносно S_1 дорівнює степеню відносно S_2, є пряма.

Цю пряму називаються *радикальною віссю* кіл S_1 і S_2.

5. Доведіть, що радикальна вісь двох кіл що перетинаються проходить через точки їх перетину.

6. На площині задано три кола, центри яких не лежать на одній прямій. Проведемо радикальні вісі для кожної пари цих кіл. Доведіть, що всі три радикальні вісі перетинаються в одній точці.

Цю точку називаються *радикальним центром* трьох кіл.

7. На площині задано три попарно неперетинні кола. Через точки перетину довільних двох з них проведена пряма. Доведіть, що ці три прямі перетинаються в одній точці або паралельні.

8. Задано два не концентричних кола S_1 і S_2. Доведіть, що множиною центрів кіл, які перетинають обидва задані кола під прямим кутом, є радикальна вісь з якої (якщо задані кола перетинаються) викинута їх спільна хорда.

9. **а)** Доведіть, що середини чотирьох спільних дотичних до двох заданих неперетинних кіл лежать на одній прямій. **б)** Через дві з точок дотику спільних зовнішніх дотичних з двома заданими колами проведена пряма. Доведіть, що кола висікають на цій прямій рівні хорди.

10. Н сторонах BC і AC трикутника ABC взято точки A_1 і B_1. Пряма l проходить через спільні точки кіл з діаметрами AA_1 і BB_1. Доведіть, що: **а)** пряма l проходить через ортоцентр (точку H перетину висот трикутника ABC); **б)** Пряма l тоді і тільки тоді проходить через точку C, коли $AB_1 : AC = BA_1 : BC$.

11. Продовження сторін AB і CD сторін чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці F, а продовження сторін BC і AD – в точці E. Доведіть, що кола з діаметрами AC, BD і EF мають спільну радикальну вісь, при чому на ній лежать ортоцентри трикутників ABE, CDE, ADF і BCF.

12.* Три кола попарно перетинаються в точках A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2. Доведіть, що $A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1$.

3.4 Напіввписане коло (10,11)

У $\triangle ABC$: A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного кола ω до сторін; ω_A, ω_B, ω_C – зовнівписані кола, A_2, B_2, C_2 – точки їх дотику до сторін; A' і A'' – середини дуг BC описаного кола Ω, відповідно що не містить і містить точку A; B' і B'', C' і C'' визначаються аналогічно.

Розглянемо коло S_A (назвемо його *напіввписаним*), що дотикається до сторін AB, AC і описаного кола Ω (внутрішнім чином) в точках K, L, $T = T_A$. Аналогічно визначаються кола S_B, S_C і відповідні точки дотику T_B і T_C.

Доведіть наступні твердження:

1. Точки T, K, C' (а також T, L, B') лежать на одній прямій.

2. TA – симедіана (тобто пряма, що симетрична медіані відносно відповідної бісектриси) трикутника $B'C'T$.

3. Прямі AT_A, BT_B, CT_C перетинаються в одній точці X, яка є центром гомотетії з додатним коефіцієнтом, що переводить коло ω в коло Ω.

4. TA'' – медіана трикутника $B'C'T$.

5. Точки T, I, A'' лежать на одній прямій.

6. Точки T, I, K, B (а також T, I, L, C) лежать на одному колі, при чому CC' (відповідно BB') дотикається до цього кола.

7. Точки K, I, L лежать на одній прямій.

8. AA' – бісектриса кута TAA_2. Зауваження: звідси випливає новий розв'язок задачі **3** і новий спосіб задати точку X: точка X ізогонально спряжена до точки Нагеля (тобто до точки перетину прямих AA_2, BB_2, CC_2).

9. Прямі KL, TA' і BC перетинаються в одній точці або паралельні.

10. Точка перетину Y_A із задачі **9** і точки Y_B, Y_C, визначені аналогічно, лежать на одній прямій.

11. Знайдіть аналоги попередніх задач для "зовнінапіввписаного кола", тобто кола S'_A, зо дотикається до продовжень сторін AB, AC і кола Ω зовнішнім чином.

3.5 Дотичність (10,11)

1. Коло ω_2 дотикається до кола ω_1 внутрішнім чином в точці D, а хорди AB – в точці C. Точка E – середина дуги AB, що не містить точки D. Доведіть, що точки C, D і E лежать на одній прямій і $BE^2 = CE \cdot DE$.

2. Хорди AB і CD кола ω_1 перетинаються в точці P. Коло ω_2 дотикається внутрішнім чином до ω_1 в точці S і дотикається до відрізків PB і PD. Точки A_0 і C_0 – середини дуг CD і AB відповідно (дуги не містять точку S). Прямі l і m – дотичні до ω_1 в точках A_0 и C_0 відповідно. Прямі l и m перетинаються в точці Q. Доведіть, що точки S, P і Q лежать на одній прямій.

3. На площині задано кола ω_1, ω_2 і ω_3 що не перетинаються. Точки O_1, O_2 и O_3 такі: точка O_1 – центр гомотетії, що суміщає ω_2 і ω_3 з додатним коефіцієнтом; точка O_2 – центр гомотетії, що суміщає ω_1 і ω_3 з додатним коефіцієнтом; точка O_3 – центр гомотетії, що суміщає ω_1 і ω_2 з додатним коефіцієнтом. Доведіть, що точки O_1, O_2 і O_3 лежать на одній прямій.

4. Задано кола ω_1 і ω_2 що не перетинаються з центрами в точках O_1 і O_2. До них проведена спільна зовнішня дотична AB і спільна внутрішня дотична CD, такі що точки A і D лежать на ω_1, а B і C – на ω_2. Прямі AD і BC перетинаються в точці P. Доведіть, що точка P лежить на прямій O_1O_2.

5. Трикутник ABC вписано в коло ω_1. Коло ω_2 дотикається до сторін AB і BC в точках K і L відповідно і дотикається до кола ω_1 внутрішнім чином в точці M. Нехай I – центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що чотирикутник $AKIM$ – вписаний і що MI – бісектриса кута AMC.

6. Трикутник ABC вписано в коло ω_1. Коло ω_2 дотикається до кола ω_1 внутрішнім чином і відрізків AB і BC в точках K і L. Точка I – центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що I – середина KL.

7.* Три хорди кола ω попарно перетинаються в точках A, B і C. Коло ω_A дотикається до променів AC і AB і дотикається до кола ω внутрішнім чином в точці A'. Аналогічно визначимо кола ω_B і ω_C, що дотикаються до кола ω в точках B' і C' відповідно. Доведіть, що прямі AA', BB' и CC' перетинаються в одній точці.

8.* Всередині кута, утвореного променями OP і OQ, проведено промінь OR. В кут POQ вписано кола ω_1 і ω_2 що не перетинаються. Точки A, B, C і D – точки перетину кута OR з колами ω_1 і ω_2, що лежать на OR у вказаному порядку. З точки A проведено дотичні l_A і m_A до ω_2. У криволінійний трикутник, що висікається ними в колі ω_1 вписана коло τ_1. З точки D проведено дотичні l_D і m_D до кола ω_1. В криволінійному трикутнику, що висікається ними в колі ω_2, вписана коло τ_2. Доведіть, що радіуси кіл τ_1 і τ_2 рівні.

9.* Трикутник ABC вписано в коло ω. Коло ω_1 дотикається до сторін AB і BC в точках K і L і дотикається до кола ω в точці M внутрішнім чином. Точка N – середина дуги AC кола ω, що не містить точки B. Доведіть, що прямі KL і MN перетинаються на прямій AC.

3.6 Вписані та описані (11)

1. Задано чотирикутник $ABCD$. Точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 лежать на сторонах AB, BC, CD, DA відповідно. Відрізки A_1C_2, A_2C_1, B_1D_2, B_2D_1 ділять $ABCD$ на 9 чотирикутників. Виявилося, що центральний чотирикутник і чотирикутники, що прилягають до вершин A, B, C, D – описані. Доведіть, що і $ABCD$ – описаний.

2. Нехай точка B_1 – точка дотику вписаного кола до сторони AC трикутника ABC. Точки A_2, B_2, C_2 – точки дотику кола, зовнівписаного в кут B з відповідними сторонами трикутника. Доведіть, що $CB_1 = AB_2 = AC)2 = \dfrac{AC + BC - AB}{2}$.

3. Точки F_1 і F_2 – фокуси еліпсу. Точки A і C – точки перетину відрізків BF_1 і BF_2 з цим еліпсом відповідно. Нехай D – точка перетину відрізків F_1C і F_2A. Доведіть, що $ABCD$ – описаний чотирикутник.

4. Через точки перетину продовжень сторін опуклого чотирикутника $ABCD$ проведені 2 прямі, що ділять його на 4 чотирикутника. Доведіть, що якщо чотирикутники, що прилягають до вершин B і D, – описані, то чотирикутник $ABCD$ також описаний.

5. $ABCD$ – вписаний чотирикутник. H_C, H_D – ортоцентри трикутників ABD і ABC. Доведіть, що CDH_CH_D – описаний.

6. Нехай $ABCD$ – вписаний чотирикутник. Доведіть, що центри вписаних кіл трикутників ABC, BCD, CDA і DAB є вершинами прямокутника.

7. В трикутнику ABC на стороні AC як на діаметрі побудовано коло. Воно перетинає сторони AB і BC в точках K і L. Нехай M – точка перетину дотичних до кола, проведених в цих точках. Доведіть, що $BM \perp AC$.

8. Діагоналі описаної трапеції $ABCD$ з основами AD і BC перетинаються в точці O. Радіуси вписаних кіл трикутників AOD, AOB, BOC і COD дорівнюють r_1, r_2, r_3, r_4 відповідно. Доведіть, що $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_4}$.

3.7 Подвійні відношення (11)

Подвійним відношенням чотирьох точок A, B, C і D на прямій l називається вираз

$$(A, B, C, D) = \frac{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)}{\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right)}.$$

Коментар. Вважається, що на цій прямій вибрано фіксований напрямок. Тоді для точок P, Q цієї прямої $\overrightarrow{PQ}$ – *орієнтована відстань.* Вона дорівнює $|PQ|$, якщо вектор співнапрямлений з обраним напрямком прямої, і $-|PQ|$ інакше.

Подвійним відношенням чотирьох прямих a, b, c і d на площині називається вираз

$$(ab, cd) = \frac{\sin\angle(a, c) \cdot \sin\angle(b, d)}{\sin\angle(a, d) \cdot \sin\angle(b, c)}.$$

Коментар. Вважається, що в площині обрано "додатний" напрямок повороту, а на кожній з прямих обрано "додатний" напрямок. Тоді для прямих p, q на площині $\angle(p, q)$ – *орієнтовний кут.* Він дорівнює мінімальному куту повороту площини у "додатному" напрямку прямої p, що переведе її у пряму q зі збереження "додатного" напрямку на прямій. Не очевидно, що ця величина не змінюється при іншому виборі "додатних" напрямків на прямих. Доведіть це як нескладну вправу.

Подвійним відношенням чотирьох точок A, B, C і D на колі називається вираз $(A, B, C, D) = (XA, XB, XC, XD)$ для довільної точки X.

Коментар. (XA, XB, XC, XD) це визначене раніше подвійне відношення чотирьох прямих. Не очевидно, що це означення коректне (не залежить від точки X). Доведіть це як нескладну вправу.

Кажуть, що декілька прямих *конкурентні*, якщо вони всі мають спільну точку. Кажуть, що декілька точок *колінеарні*, якщо вони всі лежать на одній прямій.

1. Прямі a, b, c, d проходять через точку O і перетинають пряму l в точках A, B, C, D. Доведіть, що $(A, B, C, D) = (ab, cd)$.

2. На двох прямих m і n що перетинаються в точці A обрано точки. На m – B_1, C_1, D_1, на n – B_2, C_2, D_2. Доведіть, що прямі B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 конкурентні тоді і тільки тоді, коли $(A, B_1, C_1, D_1) = (A, B_2, C_2, D_2)$.

3. Нехай $(A, B, C, D) = k$. Знайдіть всі подвійні відношення для точок A, B, C, D записаних в інших порядках.

4. В чотирикутнику $ABCD$ прямі AB і CD перетинаються в точці G, AD і BC – в точці E. Прямі DB і EG перетинаються в точці H, AC і EG – в F. Доведіть, що $(E, G, F, H) = -1$.

Четвірка точок або прямих p, q, r, s для яких $(p, q, r, s) = -1$ називається *гармонічною.*

5. а) Якщо якісь два числа з (A,B,C,D), (C,D,A,B), (B,A,C,D), (A,B,D,C) рівні, то $(A,B,C,D)^2 = 1$. **б)** Якщо $(A,B,C,D)^2 = 1$, то $(A,B,C,D) = (C,D,A,B) = (B,A,C,D) = (A,B,D,C)$.

6. а) Нехай M_B – середина сторони AC трикутника ABC. Доведіть, що $(AB, BC, BM_B, AC) = -1$. **б)** Нехай BL_B – внутрішня бісектриса трикутника ABC, BK_B – зовнішня. Доведіть, що $(AB, BC, BL_B, BK_B) = -1$.

7. Прямі l_1, l_2, l_3, l_4 на площині такі, що $(l_1 l_2, l_3 l_4) = -1$. Доведіть, що **а)** якщо точка $O \in l_1, l_2, l_3$, то ці прямі висякають рівні відрізки на l_4; **б)** якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вона паралельні бісектрисі кута між l_3 і l_4.

8. Точки A, B, C, D лежать на одному колі. Для довільної точки X цього кола позначимо через k_X дотичну до цього кола, проведену з цієї точки. **а)** Доведіть, що CD, k_A, k_B конкурентні тоді і тільки тоді, коли $(A,B,C,D) = -1$. **б)** Доведіть, що CD, k_A, k_B конкурентні тоді і тільки тоді, коли AB, k_C, k_D конкурентні.

9. Точки A, B – основи дотичних, проведених до заданого кола з точки X. Прямі c, d проходять через X і перетинають це коло в точках C_1, C_2 і D_1, D_2 відповідно. D_1C_2 і D_2C_1 перетинаються в Y. **а)** Доведіть, що A, B, Y колінеарні. **б)** Нехай M – середина C_1C_2. Доведіть, що $\angle AMX = \angle BMX$.

10. Нехай AB, CD – паралельні хорди кола ω. M – середина AB. Пряма CM вдруге перетинає ω в точці K, P – середина DK. Доведіть, що $\angle BPK = \angle KPA$.

11. В трикутнику ABC: H_B – основа висоти що опущена на сторону AC; K_B – точка дотику вписаного кола до сторони AC; L_B – основа бісектриси що проведена до до сторони AC; T_B – точка дотику зовнівписаного кола до сторони AC. Аналогічно визначаються точки H_A, K_A, L_A, T_A. Доведіть, що:
а) $(T_B, K_B, L_B, H_b) = -1$;
б) $CT_B = AK_B = \dfrac{AC + AB - BC}{2}$;
в) $CH_B = \dfrac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2AC}$;
г) $(C, H_B, T_B, K_B) = (C, H_A, T_A, K_A)$;
д) T_AT_B, L_AL_B, K_AK_B, H_AH_B конкурентні.

3.8 Подвійні відношення (альтернативний варіант, 10,11)

- Нехай l_1 і l_2 – дві прямі на площині, O – точка, що не лежить ні на одній з цих прямих. *Центральним проектуванням* прямої l_1 на пряму l_2 з центром O називають відображення, яке кожній точці A_1 прямої l_1 ставить у відповідність точку перетину прямої OA_1 з прямою l_2.

- Нехай l_1 і l_2 – дві прямі на площині, l – пряма, не паралельна жодній з них. *Паралельним проектуванням* прямої l_1 на пряму l_2 вздовж прямої l називають відображення, яке кожній точці A_1 прямої l_1 ставить у відповідність точку перетину прямої l_2 з прямою, проведеною через точку A_1 паралельно прямій l.

- Відображення P прямої a на пряму b називають проективним, якщо воно є композицією центральних чи паралельних проектувань, тобто якщо існують прямі $a_0 = a, a_1, a_2, ..., a_n =$

b і відображення P_i прямих a_i на a_{i+1}, кожне з яких є центральним або паралельним проектуванням, і P є композицією перетворень P_i.

1. Доведіть, що існує проективне відображення, яке три дані точки однієї прямої переводить в три дані точки іншої прямої.

Подвійним відношенням четвірки точок A, B, C, D, що лежать на одній прямій, називають число $(AB, CD) = \dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b}$, де через a, b, c, d позначені координати точок A, B, C, D відповідно. Ми будемо також писати $(AB, CD) = \dfrac{AC}{BC} : \dfrac{AD}{BD}$, маючи на увазі, що через AC/BC (відповідно AD/BD) позначено відношення довжин цих відрізків, взяте зі знаком "+", якщо вектори AC і BC (відповідно AD і BD) співнапрямлені, і взяте зі знаком "-", якщо ці вектори протилежно напрямлені.

Подвійним відношенням четвірки прямих a, b, c, d, що проходять через одну точку, називають число $(ab, cd) = \pm\dfrac{sin(a,c)}{sin(b,c)} : \dfrac{sin(a,d)}{sin(b,d)}$, знак якого вибирається наступним чином: якщо один з кутів, утворений прямими a і b, не перетинається ні з однією з прямих c або d, то $(ab, cd) \geq 0$; в протилежному випадку $(ab, cd) \leq 0$.

2. Доведіть, що $(AB, CD) = \frac{1}{(BA,CD)} = \frac{1}{(AB,DC)} = 1 - (AC, BD)$.

Теорема. Прямі a, b, c, d проходять через точку O і перетинають пряму l в точках A, B, C, D відповідно. Тоді $(AB, CD) = (ab, cd)$.

Наслідок: Подвійне відношення четвірки точок зберігається при проективних перетвореннях.

3. а) Доведіть, що якщо $(AB, CX) = (AB, CY)$, то $X = Y$ (всі точки попарно різні, крім, може бути, точок X і Y, і лежать на одній прямій). **б)** Доведіть, що проективне перетворення прямої однозначно визначається образами трьох точок.

4. У трикутнику ABC проведені чевіани AM, BN та CK, що перетинаються в точці T. Пряма KN перетинає прямі AM та BC у точках P та Q відповідно. Доведіть, що $(BC, MQ) = (KN, PQ) = (AT, PM) = -1$.

5. Прямі m і n перетинаються в точці A. На прямій m вибрані точки B_1, C_1, D_1, на прямій n – B_2, C_2, D_2. Доведіть, що прямі B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли $(AB_1, C_1D_1) = (AB_2, C_2D_2)$.

6. Точки M і N лежать на прямій a. Через точку M проведені прямі b_1, c_1, d_1, через точку N – b_2, c_2, d_2. Доведіть, що точки перетину прямих b_1 і b_2, c_1 і c_2, d_1 і d_2 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $(ab_1, c_1d_1) = (ab_2, c_2d_2)$.

7. Дано відображення прямої a на пряму b, яке зберігає подвійне відношення будь-якої четвірки точок. Доведіть, що це відображення проективне.

8. а) Нехай H_B, H_C – основи висот, L_B, L_C – основи бісектрис, K_B, K_C – точки дотику вписаного кола, що лежать на сторонах AC та AB трикутника ABC відповідно. Доведіть, що прямі

H_BH_C, L_B, L_C та K_B, K_C перетинаються в одній точці або паралельні. **б**) Нехай X, Y, Z – точки перетину прямих H_BL_C і H_CL_B, H_BK_C і H_CK_B, L_BK_C і L_CK_B відповідно. Доведіть, що точки A, X, Y, Z лежать на одній прямій.

Означення. *Подвійним відношенням* четвірки точок A, B, C, D, що лежать на одному колі, називають подвійне відношення прямих $(XA, XB; XC, XD)$ для довільної точки X цього кола.

9. Доведіть, що попереднє означення коректне, тобто $(XA, XB; XC, XD)$ не залежить від вибору точки X на колі.

10. Дані пряма l, коло і точки M і N, які лежать на колі і не лежать на прямій l. Розглянемо відображення P прямої l на себе, яке є композицією проектування прямої l на дане коло з точки M і проектування кола на пряму l з точки N. (Якщо точка X лежить на прямій l, то $P(X)$ є перетином прямої NY з прямою l, де Y – відмінна від M точка перетину прямої MX з даним колом). Доведіть, що перетворення P проективне.

11. Теорема Дезарга. Прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в одній точці. Довести, що точки перетину прямих A_1B_1 і A_2B_2, A_1C_1 і A_2C_2, B_1C_1 і B_2C_2 лежать на одній прямій.

12. Конфігурація Бріаншона. Прямі l_1, m_1 і n_1 проходять через точку X, а l_2, m_2 і n_2 – через Y. Доведіть, що прямі, що з'єднують точки перетину прямих l_1, m_2 і l_2, m_1; l_1, n_2 і l_2, n_1; m_1, n_2 і m_2, n_1 проходять через одну точку.

13. В трикутнику ABC точка A_1 – точка перетину дотичної до описаного кола, проведеної з вершини A, зі стороною BC. Аналогічно визначаються точки B_1 і C_1. Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 – колінеарні.

14. Для яких точок A, B, C, D виконується $(AB, CD) = 1$?

15. M_B – середина сторони AC трикутника ABC, l – пряма, що проходить через B паралельно до AC. Доведіть, що $(BA, BC; BM_B, l) = -1$.

16. Нехай L, K – основи внутрішньої та зовнішньої бісектрис, проведених з вершини A трикутника ABC. Доведіть, що $(BCLK) = -1$.

17. а) Теорема Паппа. Точки A_1, B_1, C_1 лежать на прямій l_1, а точки A_2, B_2, C_2 лежать на прямій l_2. Доведіть, що точки перетину прямих A_1B_2 і A_2B_1, A_1C_2 і A_2C_1, B_1C_2 і B_2C_1 лежать на одній прямій l. **б)** Сформулюйте і доведіть критерій того, що пряма l із теореми Паппа проходить через точку перетину l_1 і l_2.

18. Обернена теорема Дезарга. Точки перетину прямих l_1 і l_2, m_1 і m_2, n_1 і n_2 лежать на одній прямій. Доведіть, що прямі, що з'єднують точки перетину прямих l_1, m_1 і l_2, m_2; l_1, n_1 і l_2, n_2; m_1, n_1 і m_2, n_2, проходять через одну точку.

19. Нехай A, B, C, D – точки на колі ω, а точка Y не лежить на ω. Позначимо $A_1 = AY \cap \omega, B_1 = BY \cap \omega, C_1 = CY \cap \omega, D_1 = DY \cap \omega$. Доведіть, що $(AB, CD) = (A_1B_1, C_1D_1)$.

20. Теорема Паскаля. Доведіть, що у вписаного шестикутника три точки перетину протилежних сторін лежать на одній прямій.

21. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло ω, X, Y – точки перетину протилежних сторін, Z, T – точки перетину дотичних до кола ω, проведених з протилежних вершин. Доведіть, що точки X, Y, Z, T – колінеарні.

4 Комбінаторика

4.1 Підрахунки в графах (10)

1. Назвемо людину *нетовариською*, якщо у неї менше ніж 10 знайомих. Назвемо людину *диваком*, якщо всі його знайомі нетовариські. Доведіть, що кількість диваків не більше кількості нетовариським.

2. На вечірку прийшло 10 людей. Ті, у кого не було знайомих серед тих, хто прийшов, пішли. Потім ті, у кого був рівно 1 знайомий серед тих, хто залишився, також пішли. І так далі для $2, 3, 4, \ldots, 9$ знайомих серед тих хто залишився. Яка найбільша кількість людей могла залишитися в кінці вечірки?

3. В круговому турнірі взяли участь 2007 команд і не було нічиїх. Знайдіть максимально можливу кількість трійок команд таких, що перша виграла у другої, друга у третьої, а третя у першої.

4. В кожній з трьох шкіл вчиться по n учнів. Довільний учень має в сумі рівно $n+1$ знайомих з двох інших шкіл. Доведіть, що можна вибрати по одному учню з кожної школи так, щоб всі троє обраних учнів були знайомі один з одним.

5. а) У графі для довільних двох суміжних вершин є рівно одна вершина, суміжна з ними обома. Чи може в цьому графі бути рівно 100 ребер?
б) У графі для довільних двох суміжних вершин є рівно дві вершини, суміжні з ними обома. Чи може в цьому графі бути рівно 100 ребер?

6. У графі 2007 вершин і степінь кожної вершини є степенем двійки. Володя порахував для кожної вершини кількість шляхів, що виходять з неї і проходять не більш ніж по двом ребрам, додав всі отримані числа і отримав 100000. Доведіть, що Володя помилився.

7. На підприємстві працюють 50000 людей. Для кожного з них сума кількості його безпосередніх керівників і безпосередньо підпорядкованих йому працівників дорівнює 7. В понеділок кожний робітник підприємства видає наказ і видає копію цього наказу кожному безпосередньо підпорядкованому йому робітнику (якщо такі є). Далі, кожний день робітник бере всі отримані ним у попередні дні (і ще не виконані) накази і або роздає їхні копії всім безпосередньо підпорядкованих йому робітникам, або, якщо таких немає, виконує накази сам. Виявилося, що у п'ятницю ніякі папери по підприємству вже не передаються. Доведіть, що на підприємстві є не менш ніж 97 керівників над якими немає керівників.

4.2 Скінченне і зліченне (10)

1. Натуральні числа розбиті на нескінченні арифметичні прогресії з різницями $d_1, d_2, \ldots$

а) Доведіть, що якщо кількість прогресій скінченна, то $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} + \ldots = 1$.

б) Чи істинне твердження пункту **а**, якщо кількість прогресій нескінченна?

2. Площина освітлена прожекторами, кожний з яких освітлює якийсь кут.

а) Доведіть, що якщо кількість прожекторів скінченна, то сума їхніх кутів не менше $360°$.

б) Чи істинне твердження пункту **а**, якщо кількість прожекторів нескінченна?

3. Чи можна розставити у клітинки нескінченної клітчатої площини так, що кожне число зустрічалося рівно один раз і щоб довільна два числа з одного рядка чи стовпця були взаємнопростими?

4. Множина натуральних чисел розбито на дві частини A і B. Відомо, що A не містить арифметичної прогресії довжини 3. Чи могло так статися, що B не містить нескінченних арифметичних прогресій?

5. Чи існує така послідовність $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$ натуральних чисел, що кожне натуральне число може бути єдиним чином представлене у вигляді різниці двох чисел з M?

6. Чи можна розфарбувати цілі точки площини у 2007 кольорів так, щоб всі кольори були використані, на кожній прямій розфарбування було періодичним, а розфарбування всієї площини не було періодичним (тобто не існує вектору, при зсуві на який розфарбування не змінюється).

7. Чи існує така функція $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, що не є многочленом від двох змінних, що для довільного $a \in \mathbb{Q}$ функції $f(a, x)$ і $f(x, a)$ є многочленами?

4.3 Принцип Діріхле в комбінаторній геометрії (10)

Простою називається фігура, що є об'єднанням скінченної кількості трикутників. Назвемо фігуру *квадровною* якщо її можна квадрувати, тобто якщо існує пара простих фігур, одна з яких містить нашу фігуру, а інша міститься в нашій фігурі і різниця площ яких як завгодно мала.

1. Доведіть, що фігура, обмежена скінченною кількістю відрізків і дуг кіл, є квадровною.

2. Доведіть, що довільна квадровна фігура є обмеженою.

Принцип Діріхле для площ. *Якщо A, $A_1, \ldots, A_m \subset A$ – квадровні фігури і $nS(A) < S(A_1) + \ldots + S(A_m)$, то щонайменше $n+1$ фігура з сім'ї $\{A_1, \ldots, A_n\}$ має спільну внутрішню точку.*

3. Всередині квадрату зі стороною 1 розташована фігура площі більше $1/2$. Доведіть, що ця фігура містить дві точки симетричні відносно центру квадрату.

4. На сфері розташована пляма, площа якого більше половини площі сфери. Доведіть, що ця пляма покриває пару діаметрально протилежних точок сфери.

5. У квадраті зі стороною 1 розмістили декілька кіл з сумою радіусів 0.51. Доведіть, що знайдеться пряма паралельні одній зі сторін квадрату що перетинає не менш ніж 2 з цих кіл.

6. У квадраті зі стороною 1 розмістили декілька кіл з сумою довжин 10. Доведіть, що знайдеться пряма паралельні одній зі сторін квадрату що перетинає не менш ніж 4 з цих кіл.

Теорема Бліхфельдта. *Нехай A – квадровна фігура на площини площі більше n. Тоді існує зсув фігури A що покриває не менш ніж $n+1$ вузла цілочисельної сітки.*

Теорема Мінковського. *Нехай A – симетрична відносно початку координат опукла квадровна фігура площі > 4. Тоді A містить принаймні одну цілу точку відмінну від початку координат.*

7. Покажіть, що в теоремі Мінковського умову $S(A) > 4$ не можна замінити на $S(A) \geq 4$.

8. Нехай A – квадровна фігура на координатній площині, площа якої $< n$. Доведіть, що існує зсув фігури A що покриває не більше ніж $n-1$ цілу точку.

9. Нехай A – симетрична відносно початку координат квадровна фігура площі $> 4n$. Доведіть, що тоді A містить не менше ніж $2n+1$ цілу точку.

Теорема Діріхле. *Для довільного ірраціонального числа α і натурального числа s знайдуться такі цілі числа x і y, що $0 < x \leq s$ і $|\alpha x - y| < 1/s$.*

10. Доведіть, що для довільного ірраціонального числа α і натурального числа s існує таке раціональне число m/n, що $0 < n \leq s$ і $|\alpha - m/n| < 1/s$.

11. Доведіть, що для довільного ірраціонального числа α існує нескінченно багато таких раціональних чисел m/n, що $\alpha - m/n| < 1/n^2$.

4.4 Комбінаторика класів еквівалентності (11)

1. Скількома способами можна розфарбувати грані куба у червоний і сірий кольори? Розфарбування, що суміщаються рухом тривимірного простору, вважаються однаковими.

2. Знайдіть кількість розфарбувань каруселі з n вагончиків у a кольорів, якщо розфарбування, що суміщаються поворотом, вважаються однаковими для **а)** $n = 5$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$.

3.* Знайдіть кількість замкнутих орієнтованих зв'язних ламаних з вершинами у вершинах заданого правильного p-кутника (де p – просте). Ламані, що суміщаються поворотом вважаються однаковими.

4. Знайдіть кількість **а)** розфарбувань каруселі з n вагончиків у a кольорів; **б)** a-кольорових намист з n намистин.

5. Скількома способами можна розфарбувати в a кольорів грані **а)** правильного тетраедра; **б)** куба? (Розфарбування, що суміщають рухом простору вважаються однаковими.)

6. а) Скільки існує не ізоморфних неорієнтованих графів з 4 вершинами? **б)** А з 5 вершинами? **в)**, **г)** Ті ж питання для орієнтованих графів.

7.* Відображення $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ називаються конгруентними, якщо вони стають рівними після перейменування змінних. **а)** Знайдіть кількість b_n таких відображень з точністю до конгруенції. **б)** Доведіть, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!b_n}{2^{2^n}}$ і знайдіть цю границю.

8. Лема Бернсайда. *Нехай задано скінченну множину M і сім'ю $\{g_1 = \mathrm{id}\, M, g_2, \ldots, g_n\}$ перетворень цієї множини замкнуту відносно композиції і взяття оберненого елементу, де* $\mathrm{id}\, M$ *– тотожне перетворення. Назвемо два елементи множини M еквівалентними, якщо один з них можна перевести в інший одним із заданих перетворень. Тоді кількість класів еквівалентності дорівнює*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{fix}(g_i),$$

де $\mathrm{fix}(g_i)$ *– кількість елементів множини M, які перетворення g_i переводить в себе.*

Назвемо *(скінченною) групою* скінченну сім'ю G перетворень певної множини, що замкнута відносно композиції і взяття оберненого елементу.

9. а) Довільна група містить тотожне перетворення. **б)** Якщо кількість n перетворень в групі G просте, то для довільного не тотожного перетворення $g \in G$ маємо $G = \{g, g^2, \ldots, g^n = \mathrm{id}\, M\}$.

Якщо у групі G знайдеться перетворення g для якого $G = \{g, g^2, \ldots, g^n = \mathrm{id}\, M\}$, то така група називається *циклічною.* Група G називається *біциклічною* якщо для деяких цілих $p > 1$ і $q > 1$ і перетворень $g, h \in G$ виконується $gh = hg$, $g^p = \mathrm{id}\, M$, $h^q = \mathrm{id}\, M$ і $G = \{g^k h^l | 1 \le k \le p, 1 \le l \le q\}$.

10. Наведіть приклад біциклічної групи з 4 елементів.

11. Чи довільна група з n перетворень є або циклічною або біциклічною для **а)** $n = 4$; **б)** $n = 6$; **в)** $n = 8$; **г)*** $n = 9$; **д)** $n = 10$; **е)*** $n = 15$?

12.* **Теорема Лагранжа.** Якщо H – підгрупа групи G, то кількість лементів в G ділиться на кількість елементів в H.

13.* **Теореми Силова.** Нехай p – просте, n ділиться на p^k і не ділиться на p^{k+1}, а G – група з n елементів. Доведіть, що:
а) в G є підгрупа з p^k елементів;
б) кількість таких підгруп дорівнює 1 за модулем p;
в) для довільних двох таких підгруп H і H' існує перетворення $g \in G$, що $H' = \{ghg^{-1} | h \in H\}$;
г) якщо p і q – прості, $p < q$ і $q - 1$ не ділиться на p то довільна група з pq перетворень є або циклічною або біциклічною.

4.5 Випадкові графи (11)

Зафіксуємо натуральне число n, а також $p \in [0,1]$ і $q = 1 - p$. Розглянемо множину $V = \{1, \ldots, n\}$. *Ймовірністю* графу $G = (V, E)$ без петель і кратних ребер назвемо $P(G) := p^{|E|} q^{C_n^2 - |E|}$.

Ймовірністю довільної сім'ї (або, що те саме, властивості) графів з множиною вершин V назвемо суму ймовірностей всіх графів що входять до сім'ї.

Довільну функцію, визначену на множині графів будемо називати *випадковою величиною*. Якщо випадкова величина X набуває k різних значень $y_1, \ldots, y_k$, то *математичним сподіванням* величини X називатимемо її зважене середнє:

$$MX = \sum_{i=1}^{k} y_1 P(X^{-1}(y_i)),$$

де $X^{-1}(y_i)$ – сім'я графів на яких X набуває значення y_i. Для скорочення, останню ймовірність позначають $P(X = y_i)$.

1. а) Доведіть *лінійність* математичного сподівання:

$$M(c_1X_1 + \ldots + c_sXs) = c_1MX_1 + \ldots + x_sMX_s$$

для довільних випадкових величин $X_1, \ldots, X_s$ і констант $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$.
б) Доведіть, що якщо X набуває невід'ємні цілі значення, то $P(X =) \geq 1 - MX$.

2. Знайдіть MX для графів G з n вершинами і випадкової величини X, що дорівнює кількості: **а)** трикутників в G; **б)** циклів довжини k в G; **в)** k-клік в G; **г)** різних k-вершинних дерев в G; **д)** k-вершинних деревних компонент в G; **е)** вершин на деревних компонентах в G; **ж)** вершин на циклічних компонентах в G. (Деревною/циклічною компонентою називається компонента зв'язності що є деревом/простим циклом.)

Нехай f і g – деякі функції натурального аргументу n, при чому $g(n) \neq 0$ для всіх n. Скажемо, що $f = o(g)$ якщо $\dfrac{f(n)}{g(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Нехай P_a і P_b – многочлени степенів a і b відповідно, $a < b$. Доведіть, що $P_a = o(P_b)$.

Корисним буває змінювати p як функцію від n (у цьому є глибокий сенс, що проясниться далі). Кажуть, що властивість B *особливо вірогідна*, якщо $P(B_n) \to 1$ при $n \to \infty$, де B_n – сім'я графів з n вершинами, що задовольняють умові B. Кажуть також, що у такому випадку властивість виконується *майже напевно*.

4. Доведіть, що якщо $p_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, то у випадковому графі майже напевно немає трикутників.

5. Нехай $k \geq 2$ – константа. Доведіть, що якщо $p_n = o\left(n^{-k/(k-1)}\right)$, то у випадковому графі майже напевно немає компонент зв'язності, що є деревами на k вершинах.

6. Доведіть, що якщо $p_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, то випадковий граф майже напевно є лісом.

7. Доведіть, що якщо $p_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, то випадковий граф майже напевно є дводольним.

8. Визначимо *число незалежності* $\alpha(G)$ графу G як розмір максимальної підмножини вершин в G, що попарно не з'єднані ребрами. Нехай $p_n = \dfrac{1}{2}$. Доведіть, що майже напевно

$$\alpha(G) = 2\log_2(n) + 10\log_2(\log_2(n)).$$

Хроматичне число $\chi(G)$ графу G – мінімальна кількість кольорів, у які можна розфарбувати вершини графу G правильним чином.

9. Доведіть, що якщо ${}_np = \frac{1}{2}$, то хроматичне число випадкового графу майже напевно більше за $\frac{n}{2\log_2(n)} + o\left(\frac{n}{\log_2(n)}\right)$.

10. Доведіть, що якщо $p_n > \frac{3\ln(n)}{n}$, то майже напевно випадковий граф зв'язний.

11.* Нехай $p_n = n^{-\alpha}$, де $\alpha > \frac{5}{6}$. Доведіть, що

$$P(\forall S \subset V, |S| \leq \sqrt{n} : \chi(G|_S) \leq 3) \to 1, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Тут $G|_S$ – *породжений*, або *індукований*, підграф графу $G = (V, E)$, тобто граф $H = (S, F)$ у якого $x = (x, y) \in F$ тоді і тільки тоді, коли $x, y \in S$ і $e \in E$.

12.* *Граф відстаней* на площині – граф, вершини якого є точками площини і ребрами з'єднані пари вершин, що знаходяться на відстані 1. Доведіть, що якщо $p_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, то випадковий граф майже напевне може бути реалізованим як граф відстаней на площині, а якщо $p_n > \frac{1000}{n}$, то майже напевне виконується зворотнє.

4.6 Теорема Хеллі (11)

Всі сім'ї множин що згадуються у цьому занятті вважати скінченними.

1. Нехай кожні два відрізка, що належать певній сім'ї відрізків, що розташовані на одній прямій, мають принаймні одну спільну точку. Доведіть, що тоді і всі відрізки цієї сім'ї мають принаймні одну спільну точку.

2. Нехай кожні два прямокутника з певної сім'ї прямокутників з паралельними сторонами мають принаймні одну спільну точку. Доведіть, що тоді і всі прямокутники мають принаймні одну спільну точку.

3.* Нехай на прямій задана сім'я з $2n + 1$ відрізку така, що кожний відрізок перетинається принаймні з n іншими відрізками цієї сім'ї. Доведіть, що тоді знайдіться відрізок, що перетинає всі відрізки цієї сім'ї.

4. Теорема Хана-Банаха. а) На площині задано два неперетинних опуклих многокутника. Доведіть, що знайдеться пряма така, що вони лежать (строго) по різні боки від неї. **б)** Узагальніть теорему на випадок n-вимірного простору.

5. Теорема Хеллі. а) Нехай кожні три многокутника із сім'ї опуклих многокутників мають принаймні одну спільну точку. Доведіть, що тоді всі многокутники цієї сім'ї мають спільну точку. **б)** Узагальніть теорему на випадок n-вимірного простору.

6. а) Нехай певна сім'я дуг, що належать одному колу і мають довжину меншу ніж довжина півкола, має таку властивість, що кожні три дуги цієї системи мають принаймні одну спільну точку. Доведіть, що тоді всі дуги цієї системи мають принаймні одну спільну точку. **б)** Який критерій на довжину дуг, аби умова попарного перетину дуг була достатньою для існування спільної точки для всієї сім'ї дуг?

7. а) Доведіть, що якщо кожні три точки певної підмножини площини можна покрити колом радіуса R то і всі точки цієї множини можна покрити колом цього радіуса. **б)*** Доведіть, що якщо кожні три прямі з певної сім'ї прямих можна перетнути колом радіуса r то і всі прямі цієї множини можна перетнути колом цього радіуса.

8. Чи можна узагальнити теорему Хеллі на випадок двох і більшої кількості точок? Іншими словами, чи існує таке n, що якщо для довільних n опуклих множин з певної сім'ї можна знайти 2 точки такі, що кожна з цих n множин містить одну з цих точок, то такі дві точки можна знайти і для усієї сім'ї?

9. На прямій обрано 100 множин $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, кожне з яких є об'єднанням 100 попарно неперетинних відрізків. Доведіть, що перетин множин $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ є об'єднання не більш ніж 9901 попарно неперетинного відрізка. (Одна точка також є відрізком.)

10. На прямій задано $2k-1$ білий і $2k-1$ чорний відрізок. Відомо, що кожен білий відрізок перетинає принаймні k чорних, а кожен чорний – принаймні k білих. Доведіть, що знайдуться чорний відрізок що перетинає всі білі і білий відрізок що перетинає всі чорні.

11. На прямокутному столі лежать однакові картонні квадрати k різних кольорів зі сторонами паралельними сторонам столу. Якщо розглянути довільні k квадратів різних кольорів, то якісь два з них можна прибити до столу одним гвіздком. Доведіть, що всі квадрати можна прибити до столу не більш ніж $2k-2$ гвіздками.

12. На площині задано скінченну множину точок X і правильний трикутник T. Відомо, що довільну підмножину X' множини X, що містить не більш ніж 9 точок, можна покрити двома паралельними переносами трикутника T. Доведіть, що всю множину X можна покрити не більш ніж двома паралельними переносами трикутника T.