13 Цепные дроби

§13.1 Теория

Означення 13.1. **Цепная дробь** (eng. *continued fraction*) — это выражение вида

$$\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

где a_0 есть целое число и все остальные a_n натуральные числа.

Различают *конечные* и *бесконечные* цепные дроби.

Означення 13.2. Любая конечная дробь $\langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \rangle$ представима в виде некоторой рациональной дроби P_n/Q_n, которую называют n-ой **подходящей дробью**.

Приклад 13.1

Для $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ имеем

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} = \langle \bar{1} \rangle.$$

Позже мы покажем что φ в каком-то смысле это наиболее трудно приближаемое число, а свойство периодичности характеристично для квадратичных иррациональностей.

§13.1.i Связь цепных дробей и алгоритма Евклида

Твердження 13.1

Для рациональных чисел цепная дробь имеет конечный вид. Кроме того, последовательность a_i— это ровно та последовательность частных, которая получается при применении алгоритма Евклида к числителю и знаменателю дроби.

Доведення. В самом деле, пусть $\alpha = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$. Применим алгоритм Евклида к числам a и b.

На первом шаге получаем число r_1:

$$a = bq_1 + r_1, \quad \frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{\left(\frac{b}{r_1}\right)}.$$

§13.2 Problems

Задача 13.1 (British Mathematical Olympiad 2004/5. Round 1. Question 5)**.** Let S be a set of rational numbers with the following properties:

- $\frac{1}{2} \in S$;
- if $x \in S$, then both $\frac{1}{x+1} \in S$ and $\frac{x}{x+1} \in S$.

Prove that S contains all rational numbers in the interval $0 < x < 1$.

Задача 13.2 (Iberoamerican Olympiad 2009, problem 5)**.** The sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfies $a_1 = 1$ and for $n \geqslant 1$,

$$a_{2n} = a_n + 1; \quad a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}.$$

Prove that every positive rational number occurs in the sequence exactly once.

Задача 13.3 (source)**.** Let $b_0 = 1$ and for $n \geqslant 1$, b_n denote the number of ways of representing n as a sum of powers of 2 with nonnegative integer exponents such that each power exists at most two times in the sum. Define $x_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$ for $n \geqslant 0$. Prove that each positive rational number exists exactly once in the sequence $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Задача 13.4 (Baltic Way 2003)**.** Find all functions $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ which for all $x \in \mathbb{Q}^+$ fulfil

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad \text{and} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x) = f(x+1).$$

Задача 13.5 (source)**.** Find all functions $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ that satisfy:

- $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 1$;
- $f(f(x)) = \frac{f(x+1)}{f(x)}$.

Задача 13.6 (French training set)**.** Find all continuous functions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ such that for all $x > 0$ we have $f(f(x)) = x$ and $f(x+1) = \frac{f(x)}{f(x)+1}$.

Задача 13.7 (source)**.** Prove that, there is not exist any possitive integer pairs (m, n) satisfying:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = m(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^4.$$

Задача 13.8 (Iran 3rd round 2012-Algebra exam-P2)**.** Suppose $N \in \mathbb{N}$ is not a perfect square, hence we know that the continued fraction of $\sqrt{N}$ is of the form $\sqrt{N} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n}]$. If $a_1 \neq 1$ prove that $a_i \leqslant 2a_0$.

Задача 13.9 (IMO ShortList 2004, algebra problem 3)**.** Does there exist a function $s : \mathbb{Q} \to \{-1, 1\}$ such that if x and y are distinct rational numbers satisfying $xy = 1$ or $x + y \in \{0, 1\}$, then $s(x)s(y) = -1$?