Лемма Холла

0. 20 юношей и 20 девушек пришли на дискотеку. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что они могут разбиться на пары для танца, чтобы каждый был знаком со своей парой.

Очевидно, в этой задаче выполнено

Условие разнообразия. Любому набору из k юношей в совокупности знакомы не менее k девушек.

Лема (Холла (о свадьбах))**.** Есть n юношей и несколько девушек. Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых тогда и только тогда, когда выполнено условие разнообразия.

Приступим к доказательству леммы Холла.

(а) (*Лёгкая часть*) Докажите, что условие разнообразия необходимо для выбора невест.

В условиях леммы Холла назовем множество из k юношей *критическим*, если совокупное количество знакомых им девушек в точности равно k.

(б) Предположим, что критическое множество юношей не содержит меньших критических подмножеств. Докажите, что никакая свадьба юноши из этого множества не испортит для остальных условий леммы Холла.

(в) Докажите, что, если удалить критическое множество юношей вместе с их знакомыми девушками, то для оставшихся будут выполнены условия леммы Холла.

(г) Докажите лемму Холла.

1. В каждой строке и в каждом столбце шахматной доски стоят по три ладьи. Докажите, что можно выбрать 8 ладей, не бьющих друг друга.

2. Прямоугольный лист бумаги разбит на 2016 фигур одинаковой площади с одной стороны и на 2016 других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот лист можно проткнуть 2016 иголками так, что каждая из 4032 фигур будет проткнута по разу.

3. Докажите, что ребра двудольного графа, степень каждой вершины которого равна k, можно правильно раскрасить в k цветов (из каждой вершины должны выходить ребра всех цветов по одному разу).

4. В таблице $n \times n$ расставлены «+»и «$-$». За ход разрешается поменять местами либо 2 строки, либо 2 столбца. Доказать, что либо на главной диагонали после некоторого числа шагов будут стоять «+», либо же в таблице найдется прямоугольник $a \times b$, $a + b \geq n + 1$, состоящий из «$-$».

5. Прямоугольник $m \times n$ $(m \leq n)$ называется *латинским прямоугольником*, если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоят разные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$.

6. (*Теорема Кенига*) На бесконечной клетчатой доске стоит конечное количество ладей. Рядом называется строка или столбец. Оказалось, что N — минимальное число рядов, которые содержат все ладьи. Докажите, что можно выбрать N ладей, не бьющих друг друга.

7. В компании юношей и девушек не менее n человек. Оказалось, что среди них нельзя составить $n+1$ брак по знакомству. Докажите, что тогда можно выбрать n людей так, что из любой пары знакомых один выбран.

8. В каждой клетке доски $n \times n$ написано неотрицательное вещественное число таким образом, что суммы в каждой горизонтали и вертикали равны 1. Докажите, что можно расставить n не бьющих друг друга ладей, так что стоящие под ними числа будут ненулевые.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшихся клетках можно расставить 8 не бьющих друг друга ладей.

2. (*Фиктивные невесты*) Докажите, что если любые k $(1 \leq k \leq n)$ юношей знакомы в совокупности не менее чем с $k-d$ девушками, то $n-d$ юношей могут выбрать себе невест из числа знакомых.

3. Докажите, что из 51 числа не большего 100 можно выбрать 6 чисел любая пара которых отличается в обоих разрядах.

4. На улице Болтунов живут n юношей и n девушек, причем каждый юноша знаком ровно с k девушками, а каждая девушка — ровно с k юношами.

(а) Докажите, что все юноши и девушки могут одновременно говорить со своими знакомыми по телефону.

(б) Докажите, что юноши и девушки могут звонить друг другу по телефону так, чтобы за k часов каждый поговорил с каждым из своих знакомых по часу.

5. (*Лемма Холла для арабских стран*) Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

Адитивна комбінаторика

Вправа. Задано дві множини натуральних чисел A і B. Розглянемо множину $A+B$, яка складається з чисел вигляду $a+b$, де $a \in A$, $b \in B$. Доведіть, що $|A+B| \geq |A|+|B|-1$.

1. Задано натуральні числа $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Доведіть, що можна взяти деякі (*хоча б одне*) з них, частину з плюсом, а частину з мінусом так, щоб у сумі вийшло число, яке ділиться на 100.

2. Сто одне натуральне число з діапазону від 1 до 10^6 пофарбували у синій колір. Доведіть, що можна вибрати 100 червоних чисел з того ж діапазону так, щоб всі можливі суми червоного і синього чисел були попарно різні.

3. Серед натуральних чисел від 1 до 365 вибрали 29. Доведіть, що серед них знайдуться 4 числа таких, що $a+b=c+d$.

4 (Теорема Коші-Девенпорта)**.** Задано дві множини A і B лишків за модулем p. Доведіть, що множина $A+B$ містить не менш ніж $\min(p, |A|+|B|-1)$ елементів.

(а) Доведіть теорему Коші-Девенпорта у випадку, коли $|A|+|B|-1 \geq p$.

(б) Доведіть, що множина $(A \cap B)+(A \cup B)$ є підмножиною множини $A+B$.

(в) Доведіть, що якщо всі елементи множини A "зсунути" на якийсь лишок c, то для отриманої множини A' кількість елементів у сумі $A'+B$ буде такою ж, як і в $A+B$.

(г) Доведіть теорему Коші-Девенпорта.

5. Доведіть, що для довільного простого числа $p>100$ можна вибрати 5 натуральних чисел, не кратних p, сума четвертих степенів яких буде ділитися на p.

6. Є множина з n натуральних чисел, взаємно простих з n. Доведіть, що для довільного a можна вибрати декілька чисел так, щоб їхня сума була конгруентна a по модулю n.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Дано $n-1$ ціле число від 0 до $n-1$, не всі рівні. Доведіть, що сума деяких з них ділиться на n.

2. Петро вибрав 100 натуральних чисел, менших ніж 100 так, що їхня сума дорівнює 200. Доведіть, що сума деяких з них дорівнє 100.

3. (а) Задано просте число p. Вибрали $2k+1$ число ($k \leq p$), серед яких немає $k+1$ однакових, і обчислили залишок від ділення суми довільних k з них на p. Доведіть, що отримали не менш ніж k різних залишків.

(б) Виведіть звідси *теорему Ердеша-Гінзбурга-Зіва*: з $2n-1$ цілого числа завжди можна вибрати n чисел із сумою кратною n.

4. Задано множину S, яка складається з n натуральних чисел. Для $k \leq n$ розглянемо всеможливі суми вигляду $x_1+\ldots+x_j$, де x_i — різні елементи з S, $j \leq k$. Доведіть, що кількість різних значень сум з не більш ніж k доданками не може бути меншою ніж $k \cdot (n-k)+1$.

Зважування

1. Як за допомогою шалькових терезів (*пристрій який дозволяє порівняти маси двох наборів предметів*) без гирь розділити 24 кг цвяхів на дві частини — 9 і 15 кг?

2. Є шалькові терези без гирь і 3 однакові за зовнішнім виглядом монети, одна з яких фальшива: вона легша ніж справжні (*всі справжні монети мають однакову вагу*). (а) Скільки зважувань необхідно щоб визначити фальшиву монету? Розв'яжіть ту ж задачу у випадках коли монет (б) 4; (в) 9.

3. Є шалькові терези без гирь і 3 однакові за зовнішнім виглядом монети. Одна з монет фальшива, але невідомо, легше вона справжніх чи важче (*всі справжні монети мають однакову вагу*). (а) Скільки зважувань необхідно щоб визначити фальшиву монету? Розв'яжіть ту ж задачу у випадках коли монет (б) 4; (в) 9.

4. Лиса Аліса і Кіт Базиліо — фальшивомонетники. Базиліо робить монети важче справжніх, а Аліса — легше. У Буратіно є 15 однакових за зовнішнім виглядом монети, але якась одна — фальшива. Як двома зважування на шалькових терезах без гирь Буратіно може визначити, хто зробив фальшиву монету — Базиліо чи Аліса?

5. Відомо, що “"мідні” монети вартістю у 1, 2, 3, 5 коп. важать відповідно 1, 2, 3, 5 г. Серед чотирьох “мідних” монет (*по одній кожної вартості*) є одна бракована, яка відрізняється вагою від нормальної. Як за допомогою зважувань на шалькових терезах без гирь визначити браковану монету?

6. У кошику лежать 13 яблук. Є ваги, за допомогою яких можна з'ясувати сумарну вагу довільних двох яблук. За 8 зважувань знайдіть сумарну вагу усіх яблук.

7. На фізичному гуртку вчитель поставив наступний експеримент. Він розклав на шалькові терези 16 гирьок з масами $1, 2, 3, \ldots, 16$ грамів так, щоб одна з шальок переважила. П'ятнадцять учнів по черзі виходили з класу і забирали з собою по одній гирьці, причому після виходу кожного учня ваги змінювали своє положення і переважувала протилежна шалька терезів. Яка гирька могла залишитися на терезах?

8. Сім монет розкладені по колу. Відомо, що якісь чотири з них, що йдуть поспіль, — фальшиві і що кожна фальшива монета легше справжньої. Поясніть, як знайти дві фальшиві монети за одне зважування на шалькових терезах без гирь. (*Всі фальшиві монети важать однаково*).

Задачі для самостійного розв'язування

1. На столі в ряд лежать чотири монети. Серед них обов'язково є як справжні, так і фальшиві (*які легше справжніх*). Відомо, що довільна справжня монета лежить лівіша довільної фальшивої. Як за одне зважування на шалькових терезах без гирь визначити тип кожної монети, що лежать на столі?

2. З 11 куль 2 радіоактивні. Є зламаний лічильник Гейгера (*пристрій для вимірювання інтенсивності радіоактивного випромінювання*) який за одну перевірку дозволяє про довільний набір куль дізнатися, чи є там хоча б одна радіоактивна куля (*але невідомо, скільки їх*). Чи можна за 7 перевірок знайти обидві радіоактивні кулі?

3. З п'яти монет дві фальшиві. Одна з фальшивих монет легше справжньої, а друга — на стільки ж важче. За три зважування на шалькових терезах без гирь знайдіть обидві фальшиві монети (*але не обов'язково визначати яка з них легша а яка важча*).

4. Золотошукач Назар добув 9 кг золотого піску. Чи зможе він за три зважування відміряти 2 кг піску за допомогою шалькових терезів: (а) з двома гирями — 200 г і 50 г; (б) з однією гирею 200 г?

Алгоритми

0. Двоє хлопчиків каталися на човні. До берега підійшла шеренга солдатів. Човен настільки малий, що у нього поміщаються або двоє хлопчиків, або один солдат. Однак, усі солдати змогли переправитися через річку. Як це їм вдалося?

1. Маляр може за один хід перейти на сусідню за стороною клітинку шахової дошки, після чого він зобов'язаний перефарбувати її у протилежний колір. Маляр ставиться на кутову клітинку дошки, всі клітинки якої білі. Доведіть, що він може розфарбувати усю дошку у шаховому порядку.

2. В рядок у випадковому порядку записані числа $1, 2, \ldots, 2000$. Дозволяється переставляти (змінювати місцями):

(а) довільні два сусідніх числа.

(б) довільні два числа які відрізняються на 1 (наприклад, 7 і 8), де б вони не стояли.

Доведіть, що можна розставити числа за зростанням.

3. (а) Придумайте 3 різних натуральних числа, щоб кожне ділило суму інших; (б) як **(а)** але числа більші 100; (в) як **(а)** але 4 числа; (г) як **(а)** але 10 чисел.

4. Розріжте квадрат на n менших квадратів (*не обов'язково однакових*), де
(а) $n = 4$; (б) $n = 7$; (в) $n = 8$; (г) $n = 2013$.

5. Давним-давно в обігу були 3-копієчні і 5-копієчні монети. Доведіть, що можна було набрати довільну суму більшу ніж 7 копійок цими монетами.

6. Дано n гирь, маси яких дорівнюють відповідно $1, 2, 3, \ldots, n$ грамів. Для яких n ці гирі можна розкласти на три рівні за вагою купки? (а) Доведіть, що для $n = 3k + 1$ це неможливо; (б) Доведіть, що для $n \in \{5, 6, 8, 9\}$ це можливо. (в) Для яких n ці гирі можна розкласти на три рівні за вагою купки?

7. Доведіть, що квадрат (а) 4×4; (б) 8×8; (в) $2^n \times 2^n$ з довільною вирізаною клітиною можна розрізати на куточки з трьох клітин.

8. У майстерні виготовляють квадратні ґратки, які складаються з квадратних клітинок зі стороною 1. Для цього використовують заготовки, які складаються з трьох стержнів довжини 1, спаяних під прямими кутами у вигляді літери П. При виготовленні ґратки забороняється накладати стержні; можна лише спаювати їх між собою у точках дотику. Виготовте квадратні ґратки розміру
(а) 2×2; (б) 3×3; (в) 5×5; (г) 9×9.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Представте число 1 як суму (а) трьох; (б) чотирьох; (в) десяти різних дробів з чисельником 1.

2. Якщо на дошці записане число n, то до нього можна додати довільний його власний дільник (відмінний від 1 і самого n). Доведіть, що з $n = 4$ можна отримати довільне складене число.

3. Для яких натуральних n натуральні числа від 1 до n можна розбити на декілька груп так, щоб у них одне число помножене на два дорівнювало сумі решти?

Последовательности

Определение. *Последовательность* действительных чисел — это отображение $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Обозначение: $(x_n, n \geq 1) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Определение. Последовательность *(строго) возрастает*, если для всех $n \geq 1$ $a_{n+1} > a_n$.

1. Дайте определение убывающей, невозрастающей, неубывающей последовательностей.

Определение. Пусть $(n_i, i \geq 1)$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $(a_{n_i}, i \geq 1)$ называется *подпоследовательностью* последовательности $(a_n, n \geq 1)$.

2. Придумайте две различные последовательности, являющиеся подпоследовательностями друг друга.

3. Докажите, что в бесконечной последовательности натуральных чисел существует бесконечная неубывающая подпоследовательность.

4. В клетки неограниченной вправо таблицы $3 \times \infty$ вписаны натуральные числа. Докажите, что можно отметить некоторые столбцы так, чтобы в каждой строке оказалась отмечена неубывающая бесконечная последовательность.

5. Бесконечное клетчатое поле раскрашено в несколько цветов. Докажите, что найдется прямоугольник с углами одинакового цвета.

6. Ребра полного графа с бесконечным числом вершин покрашены в несколько цветов.

а) Докажите, что из каждой вершины выходит бесконечно много ребер одного цвета;

б) докажите, что в этом графе можно выделить бесконечную последовательность вершин так, чтобы каждая из этих вершин была соединена со всеми последующими вершинами ребрами одинакового цвета;

в) докажите, что из этого графа можно выделить полный бесконечный подграф, все ребра которого покрашены в один цвет.

Определение. Последовательность называется *монотонной*, если она является либо неубывающей, либо невозрастающей.

7. Докажите, что любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

Последовательность *ограничена сверху*, если $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n < C$.

8. Дайте определение ограниченной снизу последовательности.

Последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу.

9. Дайте определение неограниченной последовательности, не используя отрицания.

10. Докажите, что следующие последовательности ограничены:

(а) $a_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n, |x| < 1$;

(б) $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{n}$;

(в) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dots + \dfrac{1}{(n-1)\cdot n}$;

(г) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dots + \dfrac{1}{n!}$;

(е) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

11. Докажите, что следующие последовательности неограничены:

а) $a_n = 1 + x + x^2 + ... + x^n, |x| > 1$;

б) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n}$ (*гармонический ряд*).

Задачи для самостоятельного решения

1. Все целые числа разбиты на два подмножества. Докажите, что можно выбросить одно подмножество так, чтобы для любого $k \geq 1$ осталось бесконечно много чисел, кратных k.

2. Придумайте такую последовательность натуральных чисел, чтобы любая другая последовательность натуральных чисел являлась её подпоследовательностью.

3. Вдоль бесконечного в обе стороны коридора расположены комнаты, пронумерованные по порядку целыми числами. В некоторых из них живут пианисты (конечное количество). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (с номерами n и $n+1$), решают, что мешают друг другу, и переселяются соответственно в комнаты с номерами $n-1$ и $n+2$ (при этом несколько пианистов могут жить в одной комнате). Докажите, что когда-нибудь переселения закончатся.

4. Доказать что последовательности ограничены:

(а) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$;

(б) $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$;

(в) $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$.

5. Докажите, что следующие последовательности неограничены:

(а) $a_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots$;

(б) $a_n = a_n + \dfrac{1}{a_n}; a_1 = 1$;

(в) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

Ориентированные углы

Определение. Величиной *ориентированного угла* между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 (обозначение $\measuredangle(\ell_1;\ell_2)$), будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую ℓ_1 так, чтобы она стала параллельна прямой ℓ_2. При этом, углы, отличающиеся на $n \cdot 180°$, где n – целое, считаются *равными*.

Свойства ориентированных углов

(а) $\ell_1 \parallel \ell_2$ тогда и только тогда, когда $\measuredangle(\ell_1;\ell_2) = 0°$
(б) $\measuredangle(\ell_1;\ell_2) + \measuredangle(\ell_2;\ell_1) = 0°$
(в) $\measuredangle(\ell_1;\ell_2) + \measuredangle(\ell_2;\ell_3) = \measuredangle(\ell_1;\ell_3)$
(г) $\measuredangle(AB;BC) + \measuredangle(BC;CA) + \measuredangle(CA;AB) = 0°$
(д) Точки A, B, C, D лежат на одной прямой или принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда $\measuredangle(AB;BC) = \measuredangle(AD;DC)$

1. Для точек A и B ГМТ X, для которых $\measuredangle(AX;XB) = \alpha$ есть окружность без точек A и B, либо точки A, X, B лежат на одной прямой, если $\alpha = 0°$.

2. Даны окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, проходящие через точку X. Вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2 – точка P, ω_2 и ω_3 – точка Q, ω_3 и ω_1 – точка R. На окружности ω_1 выбрана произвольная точка A. Вторая точка пересечения прямой AP с ω_2 – точка B, прямой AR с ω_3 – точка C. Докажите, что B, C, Q лежат на одной прямой.

3. На окружности даны точки A, B, C, D. M – середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через C_1 и D_1. Докажите, что точки C, D, C_1, D_1 лежат на одной окружности.

4. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

5. На окружности даны точки A, B, M, N. Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1, перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

6. (*Точка Микеля*) На плоскости даны четыре прямые общего положения. Вокруг каждого треугольника, образованного любыми тремя из них описана окружность. Докажите, что эти четыре окружности имеют общую точку.

7. На плоскости дано восемь точек $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$. Оказалось, что четвёрки точек A_1, A_2, B_1, B_2; A_2, A_3, B_2, B_3; A_3, A_4, B_3, B_4; A_4, A_1, B_4, B_1; A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности каждая. Докажите, что точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат либо на одной прямой, либо на одной окружности.

8. (*Прямая Симсона*) Пусть ABC – треугольник, а Ω – его описанная окружность, P – какая-то точка. Проекции точки P на стороны треугольника обозначим соответственно P_A, P_B, P_C. Докажите:
   (а) Если P лежит на Ω, то P_A, P_B, P_C лежат на одной прямой.
   (б) Если P_A, P_B, P_Cлежат на одной прямой, то P лежит на Ω.

Для самостоятельного решения

1. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую – в точках B и D. Докажите, что AC параллельно BD.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точке A. Через точку A проведена прямая пересекающая ω_1 в точке B, ω_2 в точке C. в точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D. Докажите, что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через A.

3. Точку P, лежащую на описанной окружности треугольника ABC, отразили относительно каждой из трёх сторон треугольника. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой.

4. Точки A, B, C лежат на одной прямой, точка P – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

5. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной P.

6. Окружность с центром в точке I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Окружность, проходящая через точки B и I, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Докажите, что середина отрезка MN лежит на прямой A_1C_1.

Радикальна вісь

Задача 1. На площині задано коло S і точка P. Пряма, що проходить через точку P, перетинає коло в точках A і B. Доведіть, що добуток $PA \cdot PB$ не залежить від вибору прямої.

Ця величина зі знаком плюс для точки P поза колом і зі знаком мінус для точки P всередині кола, називається *степенем точки* P відносно кола S.

Задача 2. Доведіть, що для точки P, що лежить поза колом, її степінь відносно S дорівнює квадрату довжини дотичної, проведеної з цієї точки.

Задача 3. Доведіть, що степінь точки P відносно кола S дорівнює $d^2 - R^2$, де R — радіус S, d — відстань від точки P до центру кола S.

Задача 4. **(!)** На площині задано два не концентричних кола S_1 і S_2. Доведіть, що геометричним місцем точок, для яких степінь відносно S_1 дорівнює степеню відносно S_2, є пряма.

Цю пряму називаються *радикальною віссю* кіл S_1 і S_2.

Задача 5. Доведіть, що радикальна вісь двох кіл що перетинаються проходить через точки їх перетину.

Задача 6. На площині задано три кола, центри яких не лежать на одній прямій. Проведемо радикальні вісі для кожної пари цих кіл. Доведіть, що всі три радикальні вісі перетинаються в одній точці.

Цю точку називаються *радикальним центром* трьох кіл.

Задача 7. На площині задано три попарно неперетинні кола. Через точки перетину довільних двох з них проведена пряма. Доведіть, що ці три прямі перетинаються в одній точці або паралельні.

Задача 8. Задано два не концентричних кола S_1 і S_2. Доведіть, що множиною центрів кіл, які перетинають обидва задані кола під прямим кутом, є радикальна вісь з якої (якщо задані кола перетинаються) викинута їх спільна хорда.

Задача 9. **а)** Доведіть, що середини чотирьох спільних дотичних до двох заданих неперетинних кіл лежать на одній прямій. **б)** Через дві з точок дотику спільних зовнішніх дотичних з двома заданими колами проведена пряма. Доведіть, що кола висікають на цій прямій рівні хорди.

Задача 10. На сторонах BC і AC трикутника ABC взято точки A_1 і B_1. Пряма l проходить через спільні точки кіл з діаметрами AA_1 і BB_1. Доведіть, що: **а)** пряма l проходить через ортоцентр (точку H перетину висот трикутника ABC); **б)** Пряма l тоді і тільки тоді проходить через точку C, коли $AB_1 : AC = BA_1 : BC$.

Задача 11. Продовження сторін AB і CD сторін чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці F, а продовження сторін BC і AD — в точці E. Доведіть, що кола з діаметрами AC, BD і EF мають спільну радикальну вісь, при чому на ній лежать ортоцентри трикутників ABE, CDE, ADF і BCF.

Задача 12. Три кола попарно перетинаються в точках A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2. Доведіть, що $A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1$.

Для самостійнго розв'язування

Задача 1. В шестикутнику $ABCDEF$: $AB = BC, CD = DE, EF = FA, \angle A = \angle C = \angle E$. Доведіть, що головні діагоналі шестикутника перетинаються в одній точці.

Задача 2. До двох кіл, розташованих один поза іншим, проведені одна зовнішня і одна внутрішня дотичні. Розглянемо дві прямі, кожна з яких проходить через точки дотику, що належать одному колу. Доведіть що точка перетину цих прямих розташована на прямій, яка з'єднує центри кіл.

Задача 3. Всередині опуклого многокутника розташовано декілька кіл різних радіусів, які попарно не перетинаються. Доведіть, що многокутник можна розрізати на маленькі многокутники так, аби всі вони були опуклими і в кожному з них знаходилося одне з заданих кіл.

Задача 4. Доведіть, що точка перетину діагоналей опуклого описаного навколо кола чотирикутника збігається з точкою перетину діагоналей чотирикутника, вершинами якого служать точки дотику сторін першого чотирикутника з колом.

Задача 5. На колі S з діаметром AB взята точка C, з точки C проведено перпендикуляр CH на пряму AB. Доведіть, що спільна хорда кола S і кола S' з центром C і радіусом CH ділить відрізок CH навпіл.

Задача 6.

a) Побудуйте коло, ортогональне до трьох даних кіл.

b) На даному колі знайдіть точку, щоб дотичні з неї до другого даного кола були рівні відрізку від шуканої точки до даної точки A.

c) Побудуйте коло, дотичні до якого, провдені з даних точок A, B, C, були рівні відповідно трьом даним відрізкам a, b, c.

d) Побудуйте коло, яке проходить через дві дані точки A, B і ортогональне даному колу.

e) Побудуйте коло, даного радіусу, ортогональне двом даним колам.

Транснеравенство

В жизни невозможно равенство,
в смерти невозможно неравенство.
Ошо.

Транснеравенство это неравенство о жадности, вкратце его можно сформулировать так: лучше большее брать большее число раз, а меньшее – меньшее число раз.

1. Есть три конверта с большим числом купюр по 100$, 50$ и 20$ соответственно. Разрешается забрать 3 купюры из одного конверта, 2 из другого и 1 из третьего. Какую наибольшую сумму можно взять? А наименьшую?

2. Известно, что $x_1 \geq x_2$, $y_1 \geq y_2$. Докажите неравенство $x_1y_1 + x_2y_2 \geq x_1y_2 + x_2y_1$. Когда в нём достигается равенство?

Теорема 1. *Пусть заданы два упорядоченных набора вещественных чисел:* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ *и* $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$. *Для каждой перестановки* $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ *чисел от* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *выполнены неравенства*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x_1y_{\sigma_1} + x_2y_{\sigma_2} + \cdots + x_ny_{\sigma_n} \geq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1.$$

3. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\} = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Найти наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_{10}}{10}.$$

4. Доказать неравенства:

а) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$;

в) $2^a a + 2^b b + 2^c c \geq 2^b a + 2^c b + 2^a c$ для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$;

г) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2c + b^2a + c^2a$ для всех $a, b, c \geq 0$.

5. Для всех $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$ доказать неравенство

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_1^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_5} + \frac{x_5^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5.$$

6. Для всех $a, b, c > 0$ доказать неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

7. Для всех $a, b, c > 0$ доказать неравенство

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \geq a + b + c.$$

Теорема 2 (Неравенство Чебышёва). *Для произвольных* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ *выполнены неравенства*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \geq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1.$$

8. Для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ доказать неравенство

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

9. Для всех $a, b, c > 0$ доказать неравенство

$$\frac{3(a+b+c)}{2(ab+ac+bc)} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Неравенство Коши

1. Простое, но полезное неравенство: для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

2. Доказать неравенства:

0) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ для всех $x, y > 0$;

1) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ для всех $x, y > 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ для всех $x, y, z > 0$;

3) $(a+b)\cdot(b+c)\cdot(a+c) \geq 8abc$ для всех $a, b, c > 0$;

4) $a^4 + b^4 + 2c^2 \geq 4abc$;

5) $(x+y)\cdot(x+z) \geq 2\sqrt{xyz(x+y+z)}$ для всех $x, y, z > 0$.

3. Пусть положительные числа таковы, что $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Доказать неравенство:

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geq 2^n.$$

4. Для положительных a, b, c доказать неравенство:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и для всех действительных $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, выполнено неравенство:*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

5. Доказать, что для всех положительных a, b, c, d выполнено неравенство:

$$\sqrt{(a+b)\cdot(c+d)} + \sqrt{(b+c)\cdot(a+d)} + \sqrt{(a+c)\cdot(b+d)} \geq 6\sqrt[4]{abcd}.$$

6. Доказать, что для всех положительных a, b, c, d выполнено неравенство:

$$ab^2c^3d^4 \leq \left(\frac{a+2b+3c+4d}{10}\right)^{10}.$$

7. Числа $x, y \in \mathbb{R}$ таковы, что $x^6 + y^6 = 1$. Найти максимальное возможное значение xy. А x^2y?

8. Для всех $x \in \mathbb{R}$ доказать неравенство:

$$3x^{14} - 7x^6 + 4 \geq 0.$$

9. Найти такое положительное x при котором достигается минимум выражения

а) $x^2 + \frac{16}{x^2}$; б) $5x^4 + \frac{4}{x^5}$; в) $5x^4 + \frac{8}{x^5}$.

10. Для всех $a, b, c > 0$ доказать неравенство:

$$\sqrt{a(b+c)} + \sqrt{b(a+c)} + \sqrt{c(b+a)} \leq 3\sqrt{2}(a+b+c).$$

Осьова симетрія

Найкращим доведенням мудрості
є неперервно гарний душевний стан.
Мішель де Монтень

Визначення. Точки M і M_1 називаються *симетричними відносно заданої прямої* ℓ, якщо ця пряма є серединним перпендикуляром до відрізка MM_1. Точки прямої ℓ вважаються симетричними самі собі.

Визначення. Перетворення площини, при якому кожна точка відображається у симетричну їй точку відносно даної прямої ℓ, називається *осьовою симетрією* з віссю ℓ і позначається S_ℓ.

Теорема 1. Осьова симетрія є рухом.

1. Пряма переходить в пряму.

2. Пряма, відмінна від перпендикуляра до осі симетрії, і її образ при цій симетрії перетинаються на осі симетрії або їй паралельні.

3. Коло при осьовій симетрії переходить в коло.

4. Як побудувати образ точки при осьовій симетрії? Як побудувати образ прямої, кола?

5. Дано пряму ℓ і дві точки A і B по одну сторону від неї. Знайдіть на прямій ℓ точку X так, щоб довжина ламаної AXB була мінімальна.

6. Всередині гострого кута з вершиною M відмічені точки A і B. Побудуйте точки C і D на різних сторонах кута, так щоб довжина ламаної $ACBD$ була найменшою.

7. Чотирикутник має рівно дві осі симетрії. Чи правильно, що він — або прямокутник, або ромб?

8. Вісь симетрії многокутника перетинає його сторони в точках A і B. Доведіть, що точка A є або вершиною многокутника, або серединою сторони, перпендикулярної осі симетрії.

9. Доведіть, що якщо фігура має дві перпендикулярні осі симетрії, то вона має *центр симетрії.*

10. Через точку M основи AB рівнобедреного трикутника ABC проведена пряма, яка перетинає його бокові сторони CA і CB (або їх продовження) в точках A_1 и B_1. Доведіть, що $A_1A : A_1M = B_1B : B_1M$.

11. Доведіть, що площа будь-якого опуклого чотирикутника не перевищує половини суми добутків протилежних сторін.

12. Дано три прямі ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, які перетинаються в одній точці, і точка A, яка лежить на прямій ℓ_1. Побудуйте трикутник ABC так, щоб точка A була його вершиною, а бісектриси (*не обов'язково внутрішні*) трикутника лежали на прямих ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3.

13. Побудуйте чотирикутник $ABCD$, в який можна вписати коло, знаючи довжини двох сусідніх сторін AB і AD і кути при вершинах B і D.

14. Точка M лежить на діаметрі AB кола. Хорда CD кола проходить через точку M і перетинає пряму AB під кутом в $45°$. Доведіть, що величина $CM^2 + DM^2$ не залежить від вибору точки M.

15. Доведіть, що якщо многокутник має більше двох осей симетрії, то всі вони перетинаються в одній точці.

Задачі для самостійного розв'язування

1. На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взята точка M, відмінна від C. Доведіть, що $MA + MB > CA + CB$.

2. Всередині кута з вершиною M відмічена точка A. З цієї точки випустили кулю, котра відбилася від однієї сторони кута в точці B, потім від другої сторони в точці C і повернувся в A. Доведіть, що центр O кола, описаного навколо трикутника BCM, лежить на прямій AM.

3. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте трикутник за основами двох його бісектрис і прямої, на якій лежить третя бісектриса.

4. Побудуйте чотирикутник $ABCD$, у якого діагональ AC є бісектрисою кута A, знаючи довжини його сторін.

5. В даний гострокутний трикутник впишіть трикутник найменшого периметра.

6. Чи існує фігура, яка не має жодної осі симетрії, немає центрів симетрії, але переходить в себе при деякому повороті?

Асимптотика:
поведінка на нескінченності

1. (а) Доведіть, що існує число, більше ніж мільйон, яке не можна подати у вигляді суми квадрату і куба натуральних чисел.

(б) Яких чисел не більших ніж 10^{2022} більше: таких, що представляються у вигляді суми куба і шостого степеню чи точних квадратів?

2. Для довільного многочлена $P(x) = p_k x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \ldots + p_0$ степеню $k > 0$ доведіть, що з якогось моменту $P(n) < 2^n$.

3. Задано скінченну кількість геометричних прогресій з дійсних чисел. Доведіть, що існує натуральне число, яке не входить до жодної з прогресій.

4. Чи існує квадратний тричлен, всі значення якого в натуральних числах — степені двійки?

5. Доведіть, що для довільного натурального числа n існує нескінченно багато натуральних чисел, які не можна представити у вигляді суми n доданків, кожне з яких є n-им степенем натурального числа.

6. Петро і Василь по черзі зафарбовують клітинки нескінченної білої клітчатої площини. За один хід Петро зафарбовує 11 клітинок блакитним, а Василь — 10 клітинок жовтим. Перефарбовувати клітика не можна. Петро хоче намалювати повністю блакитний квадрат 10×10. Чи зможе Василь йому завадити?

7. На нескінченній дошці клітинка має такі ж координати, як і її центр: є клітинка $(0, 0)$, її сусіди — $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$ і так далі. З дошки вирізали всі клітинки, обидві координати яких кратні 100. Чи можна клітинки, що залишилися, обійти ходом коня, пройшовши по кожній рівно один раз?

8. Дано положительное иррациональное число α, меньшее 1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. За каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α.

(а) Докажите, что когда-нибудь он окажется на расстоянии меньше чем $1/1000$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).

(б) Докажите, что кузнечик рано или поздно посетит любую наперёд выбранную дугу окружности. Верно ли, что он посетит любую наперёд заданную точку окружности?

(в) (*Лемма Кронекера*) Докажите, что если $\alpha > 0$ — иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) числовой прямой содержит число вида $n\alpha - m$, где m, n — неотрицательные целые числа. (Иными словами, множество значений выражения $n\alpha - m$ *всюду плотно* на числовой прямой).

9. (а) Двієчник Арсеній задумав натуральне число n і повідомив відміннику Петру знаки чисел: $\sin(n), \sin(n+1), \ldots, \sin(n+1000)$. Доведіть, що яке б число Арсеній не загадав, Петро не зможе однозначно його визначити.

(б) Петро хоче помститися Арсенію: він задумує натуральне число n і каже Арсенію знаки чисел $\sin(n), \ldots, \sin(1000n)$. Доведіть, що помста вдалася.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Нехай $\sigma(n)$ — сума цифр числа n. Доведіть, що знайдеться нескінченно багато таких n, що:

(а) $\sigma(3^{n+1}) \leq \sigma(3^n)$;

(б) $\sigma(2^{n+1}) \leq \sigma(2^n)$;

2. $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ — нескінченна послідовність цілих чисел, в якій жодне число не зустрічається двічі і $a_n + b_n = n$ для довільного натурального n. Доведіть, що в послідовності ${}^{a_1}/_1, {}^{b_1}/_1, {}^{a_2}/_2, {}^{b_2}/_2, \ldots, {}^{a_k}/_k, {}^{b_k}/_k, \ldots$ є нескінченно багато чисел більших за ${}^7/_5$.

3. Чи правда, що з довільного числа можна отримати квадрат, додаючи до його десяткового запису не більш ніж 100′500 цифр? Цифри можна вписувати у довільні місця.

4. Дійсні числа x, y, z такі, що для довільного натурального n виконується рівність $[nx] + [ny] = [nz]$.

(а) Доведіть, що $x + y = z$.

(б) Доведіть, що серед чисел x та y є ціле.

Топология прямой

> Ум сугубо математический будет правильно работать, только если ему заранее известны все определения и начала, в противном случае он сбивается с толку и становится невыносимым.
>
> *Блез Паскаль. Мысли*

Определение 1. *Окрестностью* точки $x \in \mathbb{R}$ называется произвольный интервал, содержащий x. Все вводимые далее понятия имеют смысл не только для прямой, но и для плоскости, пространства, их подмножеств и вообще произвольных множеств, в которых грамотно определены окрестности.

Определение 2. Точка $x \in \mathbb{R}$ по отношению к множеству $M \subset \mathbb{R}$ называется:

- *внутренней*, если она содержится в M вместе с некоторой своей окрестностью;
- *предельной*, если в любой ее окрестности есть точка из M, отличная от x;
- *граничной*, если в любой ее окрестности есть точка из M и точка из дополнения $\mathbb{R} \setminus M$;
- *изолированнной*, если $x \in M$ и в некоторой окрестности x нет больше точек из M.

Множество всех внутренних точек множества M называется его *внутренностью* ($\operatorname{Int} M$), граничных — границей (δM).

Задача 1. Найдите внутренние, предельные, граничные и изолированные точки множеств:
(а)$[0;\ 1]$; (б) $\{(-2)/(2+n):\ n \in \mathbb{N}\}$; (в)$\mathbb{Q} \cap (0;1)$.
Для каждого из этих множеств укажите границу и внутренность.

Определение 3. Множесто $M \subset \mathbb{R}$ называется *открытым* (в $\mathbb{R}$), если оно вместе с каждой своей точкой содержит некоторую ее окрестность (т.е. $M = \operatorname{Int} M$). Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется замкнутым (в $\mathbb{R}$), если оно является дополнением до открытого (т.е. $M = \mathbb{R}$(открытое множество)).

Пример. а) Интервал открыт, отрезок замкнут, точка замкнута, полуинтервал — никакой.
б) Вся прямая и пустое множество открыты и замкнуты одновременно.

Задача 2. Докажите, что
(а) объединение любого числа открытых множеств открыто;
(б) пересечение конечного числа открытых множеств открыто;
(в) пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто;
(г) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;
(д) Приведите контрпример, показывающий, что в утверждениях (а) и (в) нельзя поменять объединение и пересечение местами.

Вообще говоря, *топологией* на некотором множестве X называется набор его подмножеств, содержащий $\varnothing$ и X и удовлетворяющий условиям (а) и (б). Элементы этого наборы называют *открытыми* в X множествами.

Задача 3. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Определение 4. *Замыканием* множества M называется объединение M и множества его предельных точек (обозначается через $\overline{M}$)

Пример. а) $\overline{[a,b]} = [a,b]$; б) $\overline{(a,b)} = [a,b]$; в) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Задача 4. Докажите, что (а) замыкание замкнуто; (б) M замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{M} = M$.

Задача 5. Докажите, что любое открытое множество прямой является не более чем счетным объединением непересекающихся интервалов.

Задача 6. Найдите все подмножества прямой, которые открыты и замкнуты одновременно.

Определение 5. *Покрытием* множества M называется такой набор открытых множеств U_α, что $M \subset U_\alpha$. Множество M называется *компактом* (точнее бикомпактом), если из каждого его покрытия можно выбрать конечное *подпокрытие* (т.е. оставить только конечное число из этих множеств так, чтобы они по-прежнему покрывали M).

Задача 7. Докажите, что (а) точка – компакт; (б) две точки – компакт; (в) интервал – не компакт; (г) прямая – тоже; (д) компакт замкнут; (е) замкнутое подмножество компакта – компакт

Лема 6. *(про вложенные отрезки) Пусть есть последовательность отрезков в которой каждый следующий вложен в предыдущий. Тогда у всех этих отрезков есть общая точка.*

Теорема 7. *(Гейне–Борель) Отрезок–компакт.*

Определение 8. Функция называется локально ограниченной на множестве M, если у каждой точки из M есть окрестность, в которой эта функция ограничена.

Задача 8. Докажите, что

(а) функция, локально ограниченная на отрезке, ограничена на нем;

(б) функция, *локально знакопостоянная*(определите сами) на отрезке, знакопостоянна на нем.

(в) Докажите, что для интервала утверждение (а) неверно.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пусть X – множество и $A_\alpha : \alpha \in M$ – семейство его подмножеств. Докажите, что

(а) $X \setminus \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in M\} = \bigcup\{X \setminus A_\alpha : \alpha \in M\}$;

(б) $X \setminus \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in M\} = \bigcap\{X \setminus A_\alpha : \alpha \in M\}$;

Эти соотношения называются формулами де Моргана.

Задача 2. Докажите, что

(а) замыкание множества M – это наименьшее замкнутое множество, содержащие M;

(б) внутренность множества M – это наибольшее открытое множество, содержащееся в M.

Задача 3. Докажите, что

(а) $\overline{M} = M \bigcup \delta M$; (б) $\operatorname{Int} M = M \setminus \delta M$; (в)$\operatorname{Int}(\operatorname{Int} M) = \operatorname{Int} M$; (г)$\overline{\mathbb{R} \setminus M} = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int} M$; (д) $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus M) = \mathbb{R} \setminus \overline{M}$

Задача 4. Докажите, что любое открытое множество прямой является не более чем счетным объединением непересекающихся интервалов.

Задача 5. **(Канторово множество)** Выкинем из отрезка $[0,1]$ интервал $(1/3, 2/3)$ (средняя треть), затем средние трети из оставшихся двух отрезков и т.д. Докажите, что

(а) сумма длин выброшенных интервалов равна 1;

(б) в *канторовом множестве* (єто то, что осталось) кроме концов интервалов и точек 0 и 1 есть еще точки;

(в) канторово множество замкнуто, а замыкание его дополнения равно $\mathbb{R}$;

(г) канторово множество несчетно.

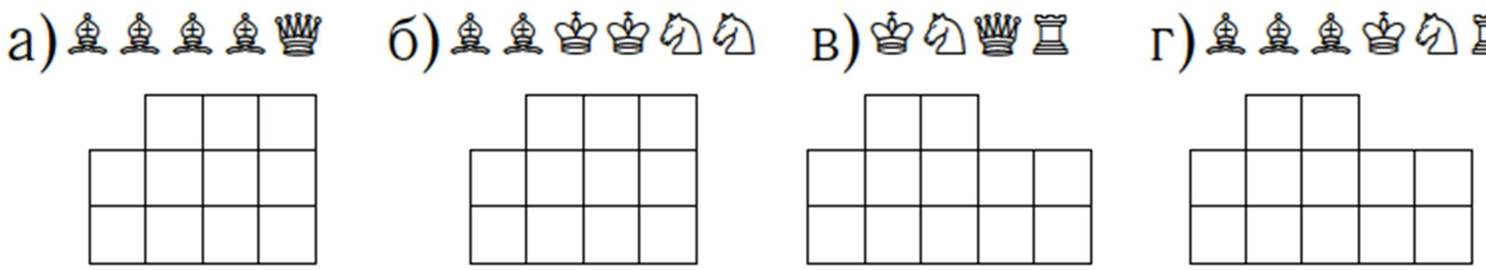
Задача 6. (компакты в $\mathbb{R}$) Докажите, что множество $M \subset \mathbb{R}$ является компактом тогда и только тогда, когда M – ограничено и замкнуто.

Можно или нельзя?

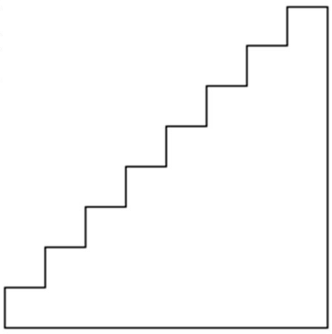
Или всё-таки можно? Или нельзя? Или как? А-а-а-а-а!!!!!!

1. Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков во всех кучках было различным (и ненулевым)?
2. Можно ли в примере на сложение заменить одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными так, чтобы получилось ОДИН + ОДИН + ПЯТЬ = СЕМЬ?
3. Максим, Леонид и Тимур вместе съели 10 конфет.
   - Максим сказал: «Я съел три конфеты, а Леонид — четыре»
   - Леонид ответил: «Я съел всего лишь две конфеты, а Тимур — три»
   - Тимур заявил: «Я съел четыре конфеты, а вот Максим съел целых пять»

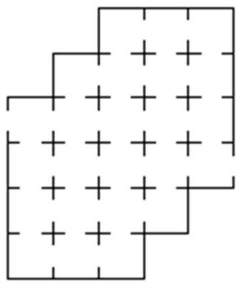
   Могло ли быть так, что каждый из них был прав хотя бы в одном из двух своих утверждений?
4. На каждом рисунке изображена шахматная доска необычной формы и несколько шахматных фигур. Можно ли эти фигуры расставить на доске так, чтобы они не били друг друга?



5. Можно ли раскрасить клетки доски 5×5 в два цвета — чёрный и белый — так, чтобы у каждой белой клетки были ровно три соседние по стороне чёрные клетки, а у каждой чёрной клетки — ровно две соседние по стороне белые?
6. Про 25 чисел известно, что сумма любых четырёх из них положительна. Может ли сумма всех 25 чисел быть отрицательна?
7. На рисунке справа показана лестница. Можно ли разрезать её:
   a) на две части и сложить из них прямоугольник;
   b) на три части и сложить из них квадрат?



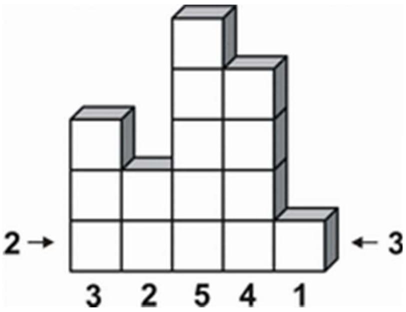
Для самостоятельного решения



1. Существуют ли два последовательных целых числа:
   a) у каждого из которых сумма цифр делится на 4;
   b) у которых одинаковая сумма цифр?
2. На рисунке справа изображён план замка Барона Мюнхгаузена. Барон утверждает, что он может войти в замок, обойти все 24 комнаты ровно по одному разу и выйти. Можно ли ему верить?
3. На территории страны, имеющей форму квадрата со стороной 1000 км, находится 51 город. Страна располагает средствами для прокладки 11000 км. Сможет ли правительство страны соединить сетью дорог все свои города?

Небоскребы

План города представляет собой квадрат, в каждой клетке которого стоит дом определенной высоты. Во всех строках и столбиках высоты домов должны быть различны, это – числа от 1 до N (где N – размер сетки). Числа вне сетки указывают, сколько домов видно, если смотреть в соответствующем положении, как на иллюстрации ниже.



Узнайте высоту всех домов в сетке, вписав соответствующие числа в клетки квадрата. Пример:

	3	2	1	2	4	
2						3
2						3
1						3
3						1
3						2
	3	3	3	1	2	

→

3	2	5	4	1
4	5	3	1	2
5	4	1	2	3
2	1	4	3	5
1	3	2	5	4

1.

	3	2	1	2	
3					2
3					1
1					2
2					3
	2	1	3	3	

2.

	1	2	2	3	2	
1						3
3						3
3						1
2						2
2						2
	2	2	3	1	3	

3.

	2	1	2	2	4	
2						3
3						2
1						2
3						1
2						2
	2	3	3	1	2	

4.

	1	2	4	2	3	
1						4
3						2
2						4
2						1
3						3
	3	3	1	2	2	

5.

	3	3	3	1	2	
2						2
3						1
2						2
2						3
1						4
	1	2	2	3	3	

6.

	3	3	3	1	3	2	
2							2
5							1
2							4
3							2
1							3
2							3
	2	1	2	5	3	2	

7.

	2	3	3	1	5	2	
2							2
4							1
1							3
2							3
3							3
2							2
	2	3	2	3	1	4	

8.

	3	5	2	3	1	2	
3							2
3							4
2							1
3							2
2							3
1							2
	1	2	3	2	3	2	

Для самостоятельного решения

	2	4	1	3	2	4	3	3	
2									4
3									2
1									4
4									2
2									3
4									4
3									1
2									2
	2	3	4	2	4	1	5	2	

1.

	1	2	3	6	2	4	2	
1								3
3								3
2								3
2								1
2								4
5								2
2								2
	3	4	2	1	3	2	2	

2.

	2	2	3	3	1	2	3	
2								3
3								2
2								4
5								1
3								3
3								2
1								4
	1	2	2	3	3	4	3	

3.

Инварианты

Ликбез *(учимся формулировать решения правильно)*

1. 100 фишек выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

2. На доске написано 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят либо на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

Четность *(и другие модули)*

3. Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу, и каждый или прибавляет к числу или отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 10?

4. Лягушка прыгает вдоль прямой. Сначала она прыгнула на 1 см, затем на 3 см в том же или в противоположном направлении, затем на 5 см в том же или в другом направлении и т. д. Могло ли случиться так, что она оказалась в исходной точке после 2017-го своего прыжка?

5. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно перезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

6. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

7. На доске написаны шесть чисел: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

8. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2017$. Разрешается стереть два любых числа и вместо них написать разность. Можно ли добиться того, чтобы все числа были нулями?

9. В пробирке находятся марсианские амебы трех типов: A, B, C. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каков ее тип, если исходно амеб типа A было 20 штук, типа B — 21 штука и типа C — 22 штуки?

10. Есть три автомата. Первый по карточке (a, b) выдает карточку $(a + 1, b + 1)$; второй по карточке (a, b) выдает карточку $(a/2, b/2)$; третий автомат по паре карточек (a, b) и (b, c) выдает карточку (a, c). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью автоматов из карточки $(5, 19)$ получить карточку $(1, 2019)$?

11. В алфавите языка племени 5 всего две буквы: 1 и 0, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы 10, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания 01 или 1100. Можно ли утверждать, что слова 100 и 011 имеют одинаковый смысл?

12. На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучки, состоящие из трех камней?

13. В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число $+1$ (*рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения*). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали. Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки?

Суммы

14. Набор чисел a, b, c каждую секунду заменяется на $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. В начале имеется набор чисел $2014, 2015, 2016$. Может ли через некоторое время получиться набор $2015, 2016, 2017$?

15. На шести елках сидят шесть чижей, на каждой елке — по чижу. Елки растут в ряд с интервалами в 10 метров. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж перелетает на столько же метров, но в обратном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной елке?

16. Дана некоторая тройка чисел. С любыми двумя из них разрешается проделывать следующее: если эти числа равны a и b, то их можно заменить на $(a+b)/\sqrt{2}$ и $(a-b)/\sqrt{2}$. Можно ли с помощью таких операций получить тройку $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ из тройки $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$?

17. В центре каждой клетки шахматной доски стоит по фишке. Фишки переставили так, что попарные расстояния между ними не уменьшились. Докажите, что в попарные расстояния не изменились.

18. Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (*по стороне или вершине*). Может ли увеличиться сумма чисел в таблице, если «старые»мины убрать, а в ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

Для самостоятельного решения

19. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (*сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается*). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (*Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг*). В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

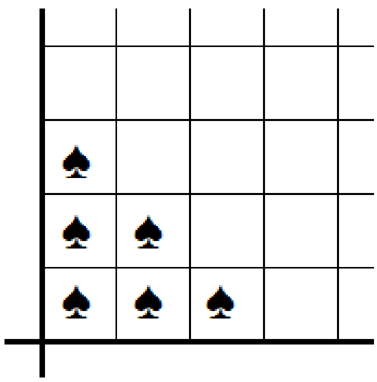
20. Гулливер попал в страну лилипутов, имея 7000000 тугриков. На все деньги он сразу купил кефир в бутылках по цене 7 тугриков за бутылку (пустая бутылка стоила в то время 1 тугрик). Выпив весь кефир, он сдал бутылки и на все вырученные деньги сразу купил кефир. При этом он заметил, что и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки выросли в два раза. Затем он снова выпил весь кефир, сдал бутылки, на все вырученные деньги снова купил кефир и т.д. При этом между каждыми двумя посещениями магазина и стоимость кефира, и стоимость пустой бутылки возрастали в два раза. Сколько бутылок кефира выпил Гулливер?

21. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета её соседей, а также убрать красную точку и изменить цвета её бывших соседей. Пусть первоначально было всего две красные точки (менее двух точек оставлять не разрешается). Доказать, что за несколько разрешённых операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.

22. (*Гроб. Или нет?*) На бесконечной клетчатой бумаге отмечено шесть клеток. На некоторых клетках стоят фишки. Положение фишек разрешается преобразовывать по следующему правилу: если клетки соседняя сверху и соседняя справа от данной фишки обе свободны, то можно поставить в эти клетки по фишке, убрав при этом старую. Ставится цель за некоторое количество таких операций освободить все шесть отмеченных клеток. Можно ли достигнуть этой цели, если

(а) в исходной позиции имеются всего 6 фишек, и они стоят на отмеченных клетках;

(б) в исходной позиции имеется всего одна фишка, и она стоит в левой нижней отмеченной клетке.



Для экзамена

23. Из книги вырвали 25 страниц. Может ли сумма 50 чисел, являющихся номерами (*с двух сторон*) этих страниц, быть равной 2017?

24. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата размером 2×2. Может ли при этом на доске остаться ровно одна черная клетка?

25. Александр написал на доске в некотором порядке 2016 плюса и 2017 минусов. Время от времени Григорий подходит к доске, стирает любые два знака и пишет вместо них один, причем если он стер одинаковые знаки, то вместо них он пишет плюс, а если разные, то минус. После нескольких таких действий на доске остался только один знак. Какой?

26. В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа $+1$ и -1 так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается изменять знак в любых k подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число -1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину, если (а) $k = 3$; (б) $k = 4$; (в) $k = 6$.

Раскраски 2

1. На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент времени все жуки переползают на соседние по диагонали клетки. Докажите, что при этом найдется хотя бы 5 пустых клеток.

2. Игра «Летающие уголки». В левом нижнем углу доски 12×12 стоят 9 шашек, которые образуют квадрат 3×3. За один ход можно выбрать некоторые две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за границу доски). Можно ли за несколько шагов передвинуть эти шашки так, чтобы они образовали квадрат 3×3 в: (а) левом верхнем углу; (б) правом верхнем углу?

3. Можно ли шахматную доску разрезать на 15 вертикальных и 17 горизонтальных доминошек?

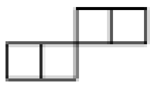
4. Из шахматной доски (размером 8×8) вырезали центральный квадрат размером 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на равные фигурки в виде буквы «Г», состоящие из четырёх клеток?

5. Шахматный слон ходит по диагонали на любое число клеток. Назовем ход слона нечетным, если слон за этот ход переместился на нечетное число клеток. Однажды слон, сделав несколько ходов, попал из левого нижнего в правый верхний угол шахматной доски (8×8). Докажите, что он сделал нечетное число нечетных ходов.

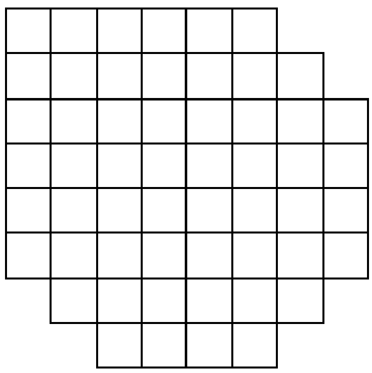
6. На шахматной доске стоят несколько королей. Докажите, что их можно покрасить в четыре цвета так, чтобы короли одного цвета не били один другого.

7. Шестиугольная доска 4 на 4 разрезана на шестиугольные доминошки. Доказать, что доминошек каждой из трёх возможных ориентаций чётное число.

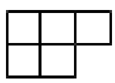
8. Можно ли доску размером 10×10 покрыть фигурами следующего вида:



9. Хулиган Александр Борисович отрезал у шахматной доски три угла



Сможет ли отличница Роксолана покрыть остаток доски фигурами (*их можно поворачивать, но нельзя переворачивать*) следующего вида:



Для самостоятельного решения

10. Можно ли замостить доску 1001×1001 доминошками 1×2, которые разрешается располагать только горизонтально, и прямоугольниками 1×3, которые разрешается располагать только вертикально?

11. Можно ли доску размером 7×7, из которой вырезана угловая клетка, разделить на прямоугольники 1×2 таким образом, чтобы половина из них была размещена горизонтально?

12. На клетчатой бумаге отмечены произвольные n клеток. Докажите, что из них можно выбрать не меньше $n/4$ клеток, которые не имеют общих точек.

13. Петр изготовляет металлическую решетку $n \times n$, что состоит из квадратных клеток со стороною 1. Петр может использовать лишь элементы вида F, которые состоят из четырех элементов длины 1. Элементы можно поворачивать и переворачивать произвольным образом, они не могут перекрываться и могут касаться лишь в местах соединения или концах стержней длины 1. Может ли Петр изготовить решетку для (а) $n = 125$ (б) $n = 250$?

Функціональні рівняння.
Метод підстановок

Визначення. *Функціональне рівняння* — це рівняння, яке містить одну чи декілька невідомих функцій (із заданими областями визначення і значень). *Розв'язати функціональне рівняння* — означає знайти усі функції, котрі тотожно йому задовольняють.

Приклад 1. Знайти усі функції вигляду $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівняння: $f(x+y) = x + y \cdot f(x) + (1-x) \cdot y$.

Розв'язок. Покладемо $y = 0$, тоді $f(x) = x$. Вже очевидно, що інші функції не підходять, але треба перевірити, що ця підходить. У цій задачі функція $f(x) = x$ підходить, але так буде не завжди:

Приклад 2. Знайти усі функції вигляду $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівняння: $f(x+y) = x + y \cdot f(x) + (1-\sin x) \cdot y$.

Розв'язок. Покладемо $y = 0$, робимо перевірку.

1. Знайти усі функції вигляду $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних $x, y, z \in \mathbb{R}$ виконується рівняння:

(а) $f(y)\sin x = f(x^2 + y) - 7y$;

(б) $f(x)\cos y + f(\frac{\pi}{2} - x)\sin y = \sin(x+y)$.

(в) $(x+y) \cdot f(x+y) = x \cdot f(x) + y^2$.

(г) $x \cdot f(y) + y \cdot f(x) + z \cdot f(x+y+z) = z^2 + x(y+z) + y(x+z)$.

2. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x, y, z: $f(x)f(y)f(z) - f(xyz) = xy + xz + yz + x + y + z$.

3. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівняння:

$$f(x + y^2 + 2y + 1) = y^4 + 4y^3 + 2xy^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + x^2 + x + 1.$$

4. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y: $f(x^3 - y^3) = f^3(x+y)$.

5. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y:

(а) $f^2(xy) = f^2(x) + f^2(y)$;

(б) $f^2(x+y) = f^2(x) + f^2(y)$.

6. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільного x: $x \cdot (f(x) + f(-x)) + 2f(-x) = 0$.

7. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y: $f(x^2y + f(x+y^2)) = x^3 + y^3 + f(xy)$.

8. Для яких $a, b \in \mathbb{R}$ існує $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ така, що $f(xy) = f(x)^{ay} + f(y)^{bx}$?

9. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y: $f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2$.

10. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y: $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ і $f(x) \le x$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y:

$$f((x^2 + 6x + 6)y) = y^2x^4 + 12y^2x^3 + 48y^2x^2 - 4yx^2 + 72y^2x - 24yx + 36y^2 - 24y.$$

2. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y: $f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x$.

3. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y: $f((x+y)^2) = f(x^2) + f(y^2) + 2xy$.

4. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y: $f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y$.

5. Знайти усі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для довільних x, y, z: $f(xy) + f(xz) - f(x) \cdot f(yz) \ge 1$.