1 Подсчёты в комбинаторике

§1.1 Вместо предисловия

Вправа 1.1. Сколько есть способов разложить k карандашей по n коробкам, если:

(а) карандаши и коробки разные;

(б) карандаши одинаковые, а коробки разные;

(в) карандаши разные, а коробки одинаковые.

(г) карандаши и коробки одинаковые.

§1.1.i Подсчёты числа способов

Задача 1.1. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое из мужчин сидят друг напротив друга.

Задача 1.2.

(а) Назовем натуральное число *симпатичным*, если в его записи встречаются только четные цифры. Сколько существует пятизначных симпатичных чисел?

(б) Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

(в) Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица, или остальных?

Задача 1.3. Имеется $2k+1$ карточек, занумерованных числами от 1 до $2k+1$. Какое наибольшее число карточек можно выбрать так, чтобы ни один из извлеченных номеров не был равен сумме двух других извлеченных номеров?

Задача 1.4. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в нее должен входить хотя бы один математик?

Задача 1.5. Найдите сумму всех семизначных чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр $1, \dots, 7$.

Задача 1.6.

(а) На двух клетках шахматной доски стоят черный и белый короли. За один ход можно пойти любым королем (короли дружат, так что могут стоять на соседних клетках, но не в одной и той же). Могут ли в результате их передвижений встретиться все возможные варианты расположения этих королей, причем ровно по одному разу?

(б) Тот же вопрос, если короли разучились ходить по диагонали.

§1.5 Домашнее задание (всякое разное)

§1.5.i Day 1

Задача 1.41 (RMM 2018 P5)**.** Let n be positive integer and fix $2n$ distinct points on a circle. Determine the number of ways to connect the points with n arrows (oriented line segments) such that all of the following conditions hold:

- each of the $2n$ points is a startpoint or endpoint of an arrow;
- no two arrows intersect; and
- there are no two arrows $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{CD}$ such that A, B, C and D appear in clockwise order around the circle (not necessarily consecutively).

Задача 1.42 (USAMO 2016 P2)**.** Prove that for any positive integer k,

$$(k^2)! \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

is an integer.

Задача 1.43. Given n points in the plane, prove that the number of pairs of points which are distance 1 apart is at most (a) $n^{3/2}$ (b) $100n^{4/3}$.

§1.5.ii День 2

Задача 1.44 (ММО 1958 10.3)**.** В школе изучают $2n$ предметов. Все ученики учатся на 4 и 5. Никакие два ученика не учатся одинаково, ни про каких двух нельзя сказать, что один из них учится лучше другого. Доказать, что число учеников в школе не больше $\binom{2n}{n}$. (Мы считаем, что ученик p учится лучше ученика q, если у p оценки по всем предметам не ниже, чем у q, а по некоторым предметам — выше.)

Задача 1.45 (Квант 1973 №12 М238)**.** Для любого натурального числа n сумма

$$\binom{n}{1} + 1973\binom{n}{3} + 1973^2\binom{n}{5} + \dots$$

делится на 2^{n-1}. Докажите это.

Задача 1.46 (Турнир 2007 11.7)**.** Перед Алёшей 100 закрытых коробочек, в каждой — либо красный, либо синий кубик. У Алёши на счету есть рубль. Он подходит к любой закрытой коробочке, объявляет цвет и ставит любую сумму (можно нецелое число копеек, но не больше, чем у него на счету в данный момент). Алёша может поставить и 0, то есть просто бесплатно открыть коробочку и увидеть цвет кубика.

Коробочка открывается, и Алёшин счет увеличивается или уменьшается на поставленную сумму в зависимости от того, угадан или не угадан цвет кубика. Игра продолжается, пока не будут открыты все все коробочки. Какую наибольшую сумму на счету может гарантировать себе Алёша, если ему известно, что

(а) синий кубик только один;

(б) синих кубиков ровно n.