

# Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.\*

13 жовтня 2019 р.

## Зміст

### 2 Моделі аномальної дифузії

3

#### Лема 1.64

$$\mathcal{L}[c](\eta) = c/\eta.$$

#### Лема 1.65

$$\mathcal{L}[e^{pt}f(t)](\eta) = \mathcal{L}[f(t)](\eta - p).$$

Нагадаємо, що раніше ми з'ясували, що  $\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1 - \beta)\eta^{\beta-1}$ .

#### Теорема 1.66 (Таубера)

Нехай  $-\beta > -1$ ,  $f$  монотонна при великих  $t$  (тобто вона монотонна на деякому проміжку вигляду  $[t_0, +\infty)$ ). Тоді  $f(t) \sim t^{-\beta}$  при  $t \rightarrow +\infty \iff \mathcal{L}[f](\eta) = \Gamma(1 - \beta)\eta^{\beta-1}$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

**Зауваження 1.67** — Тут  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  означає, що  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

#### Наслідок 1.68

Нехай  $0 < \alpha < 1$  і  $f$  монотонна при великих  $t$ ,  $f \geq 0$  на  $[0, +\infty)$  і  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$ . Тоді  $\forall A > 0$ :  $f(t) \sim \alpha A t^{-\alpha-1}$  при  $t \rightarrow +\infty \iff \mathcal{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1 - \alpha)\eta^\alpha + o(\eta^\alpha)$  при  $\eta \rightarrow 0+$ .

---

\*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

*Доведення.* Розглянемо функцію

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s) \, ds. \quad (1.71)$$

Зауважимо, що  $F'(t) = -f(t)$ .

**Вправа 1.69.** Доведіть, що за наших припущень

$$f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1} \iff F(t) \sim At^{-\alpha}. \quad (1.72)$$

*Доведення.* ( $\implies$ ) Якщо  $f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1}$ , то

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists t_0)(\forall t > t_0) \quad \left| \frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} - 1 \right| < \varepsilon, \quad (1.73)$$

або ж, що те саме,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists t_0)(\forall t > t_0) \quad (A - \varepsilon)\alpha t^{-\alpha-1} < f(t) < (A + \varepsilon)\alpha t^{-\alpha-1}, \quad (1.74)$$

щоправде вже з іншим  $t_0(\varepsilon)$ , але не суть.

Інтегруємо:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists t_0)(\forall t > t_0) \quad \int_t^\infty (A - \varepsilon)\alpha s^{-\alpha-1} \, ds < \int_t^\infty f(s) \, ds < \int_t^\infty (A + \varepsilon)\alpha s^{-\alpha-1} \, ds, \quad (1.75)$$

звідки

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists t_0)(\forall t > t_0) \quad (A - \varepsilon)t^{-\alpha} < F(t) < (A + \varepsilon)t^{-\alpha}, \quad (1.76)$$

отримали що хотіли.

$$(\Longleftarrow) \quad \square$$

Розглянемо

$$\mathcal{L}[F](\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta t} \int_t^{+\infty} f(s) \, ds \, dt, \quad (1.77)$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(s) \int_0^s e^{-\eta t} \, dt \, ds &= \int_0^{+\infty} f(s) \frac{1 - e^{-\eta s}}{\eta} \, ds = \\ &= \frac{1}{\eta} \left( 1 - \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\eta s} \, ds \right) = \\ &= \frac{1 - \mathcal{L}[f](\eta)}{\eta}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Звідси

$$\mathcal{L}[f](\eta) = 1 - \eta \mathcal{L}[F](\eta). \quad (1.79)$$

Тепер можемо записати

$$\begin{aligned}
f(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A\alpha t^{-\alpha-1} &\iff F(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} At^{-\alpha} \iff \\
&\iff \mathcal{L}[F](\eta) \underset{\eta \rightarrow 0+}{\sim} A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} \iff \\
&\iff \mathcal{L}[F](\eta) = \Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} + o(\eta^{\alpha-1}) \iff \\
&\iff \mathcal{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha} + o(\eta^{\alpha}).
\end{aligned} \tag{1.80}$$

□

## 2 Моделі аномальної дифузії

Нагадаємо, що класичні рівняння дифузії та теплопровідності зумовлені наступними чинниками:

- 1) закон збереження кількості речовини/тепла;
- 2) джерела і стоки;
- 3) “закон” Фіка/Фур’є — емпірично встановлене для широкого класу процесів твердження про те, що інтенсивність потоку речовини/тепла пропорційна мінус градієнту концентрації речовини/кількості тепла на границі.

Розглянемо тепер інший підхід, який ґрунтується на випадкових блуканнях з неперервним часом (eng. *CTRW*, *continuous time random walk*). А саме, нехай  $x(t)$  — випадкова величина (координата частинки в момент часу  $t$ ), а  $u(x, t)$  (при фіксованому  $t$  — щільність координати частинки).

Параметри моделі:

- 1)  $u_0(x)$  — щільність початкового (при  $t = 0$ ) розподілу;
- 2)  $\psi(t)$  — щільність часу очікування наступного стрибка;
- 3)  $\lambda(x)$  — щільність зміщення.

**Означення 2.1.** Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , тоді її перетворенням Фур’є називається

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(x) dx. \tag{2.1}$$

### Твердження 2.2

Для перетворення Фур’є справедлива теорема згортки:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega), \tag{2.2}$$

де

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy. \tag{2.3}$$

**Означення 2.3.** Нехай  $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , тоді її *перетворенням Фур'є-Лапласа* називається

$$\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) = \tilde{u}(\omega, \eta) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta t + i\omega x} u(x, t) dx dt. \quad (2.4)$$

#### Формула 2.4 (Монтрола-Вайса)

$$\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)}{1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}, \quad (2.5)$$

як тільки  $|\mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)| < 1$ .

*Доведення.* Введемо додаткове позначення:  $n(t)$  — кількість стрибків до моменту  $t$ .  $\psi_k(t)$  — щільність часу  $k$ -го стрибка. І нарешті,  $\lambda_k(x)$  — щільність координати після  $k$ -го стрибка.

Запишемо формулу повної ймовірності:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{n(t) = k\} \lambda_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \mathbb{P}\{n(t) \geq k\} - \mathbb{P}\{n(t) \geq k+1\} \right) \lambda_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^t \psi_k(s) ds - \int_0^t \psi_{k+1}(s) ds \right) \lambda_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^t \psi^{*k}(s) ds - \int_0^t \psi^{*(k+1)}(s) ds \right) \cdot (u_0 * \lambda^{*k})(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

**Зауваження 2.5** — Тут ми скористалися тим, що  $\psi_k(x) = \psi^{*k} = \underbrace{\psi * \psi * \dots * \psi}_k$  і  $\lambda_k(x) = u_0 * \lambda^{*k} = u_0 * \underbrace{\lambda * \lambda * \dots * \lambda}_k$ .

**Вправа 2.6.** Поновити у конспекті формальне доведення цих фактів.

З урахуванням %перелік\_нагадувань%, маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta} \left( (\mathcal{L}[\psi](\eta))^k - \mathcal{L}[\psi](\eta)^{k+1} \right) \mathcal{F}[u_0](\omega) \mathcal{F}[\lambda](\omega)^k = \\ &= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta))}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}[\psi](\eta)^k \mathcal{F}[\lambda](\omega)^k = \\ &= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta))}{\eta(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega))}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

