

7

Дослідження стійкості різницевих алгоритмів для рівнянь з багатьма незалежними змінними

Загальна схема дослідження. Відмінності в умовах стійкості різницевих схем для рівнянь дифузії-конвекції та повних рівнянь переносу

§7.1 Метод фон Неймана для багатомірних задач

Метод дискретних збурень (Томан і Шевчик [1966]) і метод Хьорта (Хьорт [1968]) можуть бути поширені на випадок дослідження стійкості в багатомірних задачах. Ми ж як приклад приведемо тут більш просте узагальнення методу Неймана на такий випадок. Використовуючи схему з різницями вперед за часом і із центральними різницями по просторовій змінній для лінеаризованого рівняння переносу вихору з постійними коефіцієнтами в плоскому випадку (коли $\alpha = 1/\text{Re}$), одержуємо

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} = -u \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - v \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \alpha \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right). \quad (7.1)$$

Тепер запишемо кожен Фур'є-компоненту розв'язку у вигляді

$$\zeta_{i,j}^n = V^n \exp\{I(k_x i \Delta x + k_y j \Delta y)\} \quad (7.2)$$

де V^n знову є амплітудою на часовому шарі n окремої Фур'є-компоненти, що має в напрямках x і y хвильові числа k_x й k_y (довжини хвиль $\Lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$ і $\Lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}$), а $I = \sqrt{-1}$.

Уводячи фазові кути $\theta_x = k_x \Delta x$ й $\theta_y = k_y \Delta y$ для координат x і y , запишемо вираз (7.2) як

$$\zeta_{i,j}^n = V^n \exp\{I(i\theta_x + j\theta_y)\} \quad (7.3)$$

аналогічно

$$\zeta_{i+1,j+1}^{n+1} = V^{n+1} \exp\{I((i+1)\theta_x + (j+1)\theta_y)\} \quad (7.4)$$

і т.д.

Означення 7.1. Відповідні двовимірні аналоги числа Куранта C визначаються як $C_x = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ і $C_y = \frac{v\Delta t}{\Delta y}$, а відповідні аналоги величини d як $d_x = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$ і $d_y = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2}$.

Підставляючи ці величини у вираз (7.2), скорочуючи на спільний множник $\exp\{I(i\theta_x + j\theta_y)\}$ і використовуючи формули Ейлера, знову одержуємо $V^{n+1} = GV^n$, де

$$G = 1 - 2(d_x + d_y) + 2d_x \cos \theta_x + 2d_y \cos \theta_y - I(C_x \sin \theta_x + C_y \sin \theta_y). \quad (7.5)$$

Твердження 7.1

Очевидні необхідні умови виконання нерівності $|G| \leq 1$ будуть

$$d_x + d_y \leq \frac{1}{2}, \quad (7.6)$$

та

$$C_x + C_y \leq 1. \quad (7.7)$$

Приклад 7.2

В частинному випадку $d_x = d_y = d$ нерівність (7.6) приймає вигляд

$$d \leq \frac{1}{4}. \quad (7.8)$$

Ця умова *вдвічі сильніше* обмеження, отриманого для одномірного рівняння з одним тільки дифузійним членом.

Приклад 7.3

В частинному випадку $C_x = C_y = C$ нерівність (7.7) приймає вигляд

$$C \leq \frac{1}{2} \quad (7.9)$$

і знову виявляється *вдвічі сильніше* відповідного необхідної умови в одномірному випадку.

Зауваження 7.4 — Фромм [1964] показав, що для частинного випадку $\Delta x = \Delta y = \Delta$ й $\theta_x = \theta_y = \theta$ обмеження на сіткове число Рейнольдса $\text{Re} = \frac{(|u|+|v|)\Delta}{\alpha}$ дається нерівністю

$$\text{Re}_c \leq 4 \quad (7.10)$$

яке є *менш жорстким*, ніж в одномірному випадку.

Вправа 7.1. Застосувати метод Неймана для дослідження стійкості схеми з різницями проти потоку для рівняння переносу у випадку нульової в'язкості

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} = -u \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x} - v \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \quad u > 0, \quad v > 0. \quad (7.11)$$

Показати, що умова стійкості має вигляд

$$C_x + C_y \leq 1. \quad (7.12)$$

Вправа 7.2. Застосувати метод Неймана до схеми з різницями вперед за часом і централь-

ними різницями по просторових змінних для тривимірного рівняння дифузії

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) \quad (7.13)$$

і показати, що умова

$$d_x + d_y + d_z \leq \frac{1}{2} \quad (7.14)$$

є необхідною і достатньою для стійкості. В частинному випадку, коли $d_x = d_y = d_z = d$, умова (7.14) має вигляд

$$d \leq \frac{1}{6} \quad (7.15)$$

і виявляється втричі жорсткіше, ніж в одномірному випадку.

§7.2 Однокрокові явні схеми. Схема “чехарда із середньою точкою”

Розглянута для лінійного модельного рівняння груба схема FTCS, що використовує різниці вперед за часом і центральні різниці по просторовим змінним, є однокроковою явною двошаровою за часом схемою.

Зауваження 7.5 —

- Вона називається однокроковою, тому що для перехід до нового шару за часом потрібно тільки один обчислювальний крок.
- Ця схема називається явною, тому що всі значення в правій частині 3.44.в, необхідні для обчислення ζ_i^{n+1} на новому шарі за часом, відомі, тобто значення $\zeta_{i\pm 1}^{n+1}$ не входять у праву частину рівняння.
- Вона є двошаровою за часом, тому що для обчислень тут залучаються тільки два шари за часом; нові значення на шарі $n + 1$ обчислюються тільки за значеннями на шарі n .

Схема із центральними різницями по просторових змінних і за часом, яка, як уже було відзначено, безумовно нестійка при будь-яких $\alpha > 0$ і $\Delta t > 0$. Але при застосуванні тільки до конвективних членів (тобто при $\alpha = 0$) ця схема, називана схемою із середньою точкою (Ліллі [1965]) або схемою “чехарда із середньою точкою” або — найчастіше — просто “чехарда” (Курант, Фрідріхс, Леві [1928]), має потрібні властивості стійкості.

Приклад 7.6

Таким чином, рівняння

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} \quad (7.16)$$

за цією схемою представляється у вигляді

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{(u\zeta)_{i+1}^n - (u\zeta)_{i-1}^n}{2\Delta x}. \quad (7.17)$$

Твердження 7.7

Дана схема має другий порядок точності по просторі й за часом.

Це однокрокова явна тришарова за часом схема. Виходить, для обчислення нових значень на шарі $n + 1$ в цій схемі необхідні значення на шарах n і $n - 1$.

Зауваження 7.8 — Помітимо, що нові ζ на парному часовому шарі обчислюються як значення ζ на попередньому парному часовому шарі плюс деяке збільшення, а попередній непарний часовий шар при цьому “перестрибається” (звідси й назва схеми — “чехарда”).

Метод фон Неймана дослідження стійкості для цієї й інших багатшарових схем застосовується в такий спосіб. Використовуючи ті ж визначення й припущення, що й у попередніх прикладах, рівняння (7.17) можна записати в наступному виді:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n-1} - C(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n), \quad (7.18)$$

де $C = \frac{u\Delta y}{\Delta x}$ — число Куранта. Підставляючи сюди фур'є-компоненти, одержуємо зв'язок для амплітуд

$$V^{n+1} = aV^n + V^{n-1}, \quad (7.19)$$

де

$$a = -2/C \sin \theta. \quad (7.20)$$

Щоб одержати матричне рівняння, додамо до (7.19) тотожність

$$V^n = 1 \cdot V^n + 0 \cdot V^{n+1}. \quad (7.21)$$

Розглядаючи це рівняння разом з рівнянням (7.19) одержуємо

$$\begin{pmatrix} V^{n+1} \\ V^n \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} V^n \\ V^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

де множник переходу G тепер являє собою матрицю

$$G = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Для вивченої раніше одношарової схеми множник переходу G був просто числом, а умова стійкості мала вигляд $|G| \leq 1$.

Твердження 7.9

У випадку ж, коли G являє собою матрицю, умову стійкості (згідно фон Нейману) має такий вигляд:

$$|\lambda| \leq 1, \quad (7.24)$$

де λ — усі можливі власні значення матриці G .

Зауваження 7.10 — Власне значення до матриці визначається як корінь характеристичного рівняння, яке утворюється прирівнюванням до нуля визначника матриці, у якого з кожного діагонального елемента віднімається λ). Таким чином, характеристичне рівняння для визначення матриці G записується так:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7.25)$$

Коли G являє собою просте число, як у попередніх прикладах, воно розглядається як одинірвна матриця. Тоді рівняння для визначення власного значення приймає вигляд $G - \lambda = 0$ або $\lambda = G$, тому умова (7.24) зведеться до попередньої умови $|G| \leq 1$. Розкриваючи визначник і розв'язуючи отримане квадратне рівняння відносно λ , знаходимо два розв'язки:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4}). \quad (7.26)$$

Враховуючи, що $a = -2IC \sin \theta$ й $a^2 = -4C^2 \sin^2 \theta$, маємо

$$\lambda_{\pm} = -IC \sin \theta \pm \sqrt{1 - C^2 \sin^2 \theta}. \quad (7.27)$$

У тих випадках, коли $C^2 \sin^2 \theta \leq 1$, підкореневий вираз буде від'ємним, і тоді

$$\lambda_{\pm} = I \left(-C \sin \theta \pm \sqrt{C^2 \sin^2 \theta - 1} \right). \quad (7.28)$$

При цьому абсолютна величина $|\lambda| > 1$, що означає нестійкість. У тому ж випадку, коли $C^2 \sin^2 \theta \leq 1$, для чого, загалом кажучи, потрібне виконання умови

$$C \leq 1 \quad (7.29)$$

одержуємо

$$|\lambda_{\pm}|^2 = C^2 \sin^2 \theta + (1 - C^2 \sin^2 \theta), \quad (7.30)$$

$$|\lambda_{\pm}| = 1, \quad C \leq 1. \quad (7.31)$$

Це задовольняє умові стійкості (7.24) у граничному випадку рівності. Аналогічний результат виходить також при двох просторових змінних, але тут для стійкості потрібне виконання нерівності $C_x + C_y \leq 1$.

Можна подумати, що, значення $|\lambda_{\pm}| = 1$ з (7.31), що відповідає границі стійкості, є прийнятним лише в крайньому випадку, але в дійсності це значення навіть досить бажане, якщо розв'язок вихідного диференціального рівняння не є загасаючим. Насправді, рівняння конвекції (7.16) при відсутності в'язкості й постійному u виражає той факт, що довільний початковий розподіл функції $\zeta(x, 0)$ просто зсувається зі швидкістю конвекції u ; виходить, для будь-якого зсуву τ за часом розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\zeta(x, t + \tau) = \zeta(x - u\tau, t). \quad (7.32)$$

Таким чином, метод фон Неймана показує, що схема “чехарда” правильно моделює одну із властивостей, властивих розв'язку вихідного диференціального рівняння при $u = \text{const}$, а саме відсутність загасання. Будь-яка різницева схема для розв'язку рівняння для нев'язкої рідини, така, що $|G| < 1$, має помилку, обумовлену штучним або чисельним загасанням. У будь-якій збіжній різницевій схемі ця помилка повинна, звичайно, прямувати до нуля при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, але застосування методу фон Неймана показує, що схема “чехарда” при $u = \text{const}$ й $C \leq 1$ має нульову похибку, обумовлену загасанням, навіть при скінченних Δx і Δy .

Дійсно, в частинному випадку $C = 1$ розглянута схема дає точні результати. Поклавши $\tau = \Delta t$, маємо $x - u\tau = x - C\Delta x$, тому при $C = 1$ розв'язок (7.32) можна переписати так:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-1}^n. \quad (7.33)$$

Отже, точний розв'язок диференціального рівняння, якщо його розглядати у вузлових точках кінцево-різницевої сітки, виражає перенос величини ζ із точки $i - 1$ на шарі n в точку i на шарі $n + 1$. Величина ζ за один крок за часом переноситься з конвективною швидкістю u на відстань $u\Delta t$, а при $C = 1$ відстань $u\Delta t$ рівна Δx . Через два часові кроки точний розв'язок буде

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-2}^{n-1}. \quad (7.34)$$

У результаті застосування схеми “чехарда” (7.18) при $C = 1$ одержуємо

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n-1} - \zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n. \quad (7.35)$$

Задавши правильні початкові значення згідно з рівнянням (7.33), а саме $\zeta_{i+1}^n = \zeta_i^{n-1}$ й $\zeta_{i-1}^n = \zeta_{i-2}^{n-1}$, одержуємо, що різницевий розв'язок (7.35) збігається з точним розв'язком (7.34). Таким чином, при $u = \text{const}$ й $C = 1$ схема “чехарда” дає точний розв'язок.

Зауваження 7.11 — Однак при практичних гідродинамічних розрахунках, коли швидкість змінюється в просторі, обмеження на крок Δt буде визначатися (якщо не враховувати додаткові ускладнення, обумовлені нелінійністю) найбільшим значенням u у вузлових точках сітки. Виходить, загалом кажучи, не можна одержати $C = 1$ у всіх точках. Але при $C < 1$ різницева схема “чехарда” вже не буде давати точного розв'язку.

Насамперед всупереч результатам методу фон Неймана розглянутій схемі може бути притаманно певне чисельне загасання, хоча це звичайно не допускається. На мал. 7.1 представлені тривимірні графіки величини $\zeta(x, t)$, розрахованої за схемою “чехарда” при синусоїдально мінливій на вхідній границі потоку величині $\zeta(0, t) = \sin t$. При $C = 1$, як видно на мал. 7.1.а, отримується точний розв'язок із синусоїдальним законом на вхідній границі, який переноситься за рахунок конвекції без загасання. На мал. 7.1.б побудована діаграма, розрахована із удвічі меншим кроком за часом, тобто при $C = \frac{1}{2}$. Видно, що в цьому випадку максимум амплітуди першого горба зменшується при русі вниз за потоком. Мал. 7.1.в знову відповідає $C = \frac{1}{2}$, але період зміни ζ на вхідній границі й величина кроку за часом обрані таким чином, щоб їх відношення (і крок Δx) були такими ж, як і для мал. 7.1.а; у цьому випадку загасання дуже сильне.

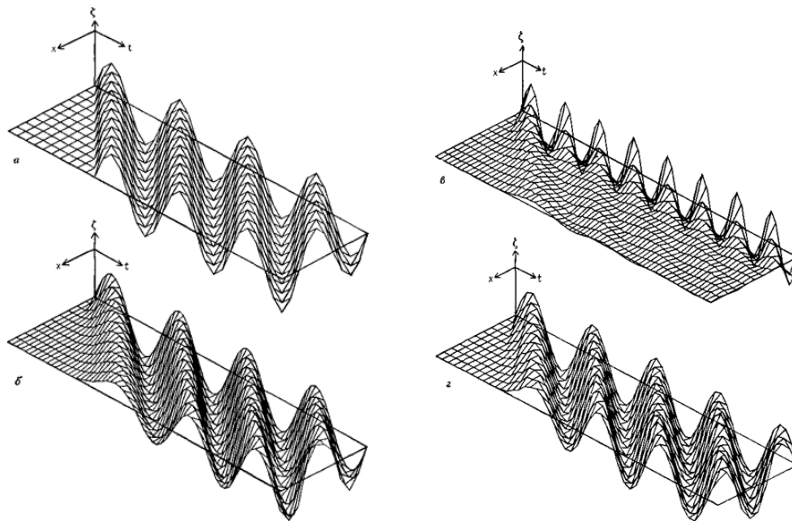


Рис. 7.1: [У. Сандберг]. Розв'язки рівняння $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{u \partial \zeta}{\partial x}$, отримані за допомогою схеми “чехарда”. Тут C — число Куранта, N — сіткова частота. а: $C = 1$, $N = 8$; б: $C = \frac{1}{2}$, $N = 16$; в: $C = \frac{1}{2}$, $N = 8$; г: $C = \frac{3}{4}$, $N = 10.667$.

Зауваження 7.12 — Тут виникає питання щодо застосування терміна “загасання”. Метод фон Неймана став настільки широко відомим, що “загасання” звичайне розуміється в значенні поведінки Фур’є-компонентів як випадок, коли $|\lambda| < 1$. Очевидно, якщо термін “загасання” означає по визначенню, що $|\lambda| < 1$, то схема “чехарда” по визначенню не має загасання.

Зменшення ж екстремальних величин амплітуди, яке видно на мал. 7.1.б і 7.1.в, правильно пов’язувати з дисперсійною помилкою, яка проявляється в методі фон Неймана й буде коротко обговорюватися надалі. Така термінологія доцільна, і її можна навіть рекомендувати в тих випадках, коли мається на увазі, що схема насправді може викликати зменшення екстремальних величин амплітуд хвиль. Звичайно таку властивість називають “загасанням”; що ж стосується мал. 7.1.в, то краще було б говорити, що хвиля не загасає, а зменшує свою амплітуду в міру її переносу за рахунок конвекції.

Грунтуючись на мал. 7.1 можна зробити й інший висновок. При розв’язанні скінченно-різницевого рівняння для задач, аналогічних представленої на мал. 7.1 існує два характеристичні параметри. Перший параметр являє собою число Куранта, яке є єдиним параметром при розв’язку скінчено-різницевого рівняння у внутрішніх точках. Другим параметром є сіткова частота $N = \frac{2\pi}{\Delta t}$, тобто число часових шарів за період зміни функції на вхідній границі потоку.

Порівняння мал. 7.1.б і 7.1.в приводить до висновку, що для фіксованого $C < 1$ загасання (зменшення екстремальних амплітуд) послабляється зі збільшенням сіткової частоти в тому випадку, коли сіткова частота N являє собою ціле число. Але коли N не є цілим числом (випадок, зображений на мал. 7.1.г), то відбувається “недозагасання” амплітуди; як показано на мал. 7.1.г, амплітуди “недозагасають” на 15% від амплітуди піка на вхідній границі, що обумовлене фазовими помилками. Даний ефект не можна повністю спасити на рахунок умови на вихідній границі потоку; уже до того, як почується який-небудь вплив цих умов, спостерігається недозагасання амплітуди на 8%.

Схемі “чехарда” властиві також інші помилки й аномалії. Диференціальне рівняння (7.16) є рівнянням першого порядку по просторових змінних і за часом; для всіх $x > 0$, $t > 0$ розв’язок повністю визначається завданням початкових умов $\zeta(x, 0)$ і граничних умов $\zeta(0, t)$. Але для початку обчислень за допомогою дискретного аналога (7.17) потрібно два набори початкових умов, тому що для розрахунків значень на $(n + 1)$ -ому шарі необхідні значення на n -ому і $(n - 1)$ -ому шарах.

Таким чином, скінчено-різницева рівняння фактично є рівнянням другого порядку за часом і вимагає початкових умов ζ_i^1 і ζ_i^2 . Це аналогічно завданню початкових значень $\zeta(x, 0)$ і $\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{t=0}$ для диференціального рівняння, що робить задачу для диференціального рівняння перевизначеною. Для одержання ζ_i^2 повинна бути використана інша “розгінна” скінчено-різницева схема, після чого можна застосовувати схему “чехарда”. Якщо така “розгінна” схема дає точні результати, як це передбачалося після обговорення рівняння (7.35), то й наступний розв’язок за схемою “чехарда” при $C = 1$ буде точним. Якщо ж “розгінна” схема вносить помилку в значення ζ_i^2 , то ця помилка буде зберігатися при наступних розрахунках за схемою “чехарда”.

Таким чином, правильніше казати, що схема “чехарда” при $C = 1$ зберігає, а не дає точний розв’язок, заданий на першому часовому шарі, для всіх часових шарів.

Іншим типом помилки схеми “чехарда” (і всіх інших схем) при $C = 1$ є фазова помилка. При розв’язанні диференціального рівняння весь початковий розподіл $\zeta(x, 0)$ поширюється

зі швидкістю конвекції u . При скінчено-різницевих розрахунках різні Фур'є-компоненти мають різні швидкості конвекції, причому швидкість компонентів з найбільшою довжиною хвилі Λ наближається до правильного значення u , а компоненти з меншими довжинами хвиль поширюються з меншими швидкостями. Це явище легко продемонструвати, розглядаючи (див. мал. 7.2) найменшу можливу довжину хвилі $\Lambda = 2\Delta x$ на просторовій сітці нескінченної довжини. Для загальності збурення на $(n-1)$ -му і n -му часових шарах узяті з різними амплітудами, що відповідає використанню “розгінної” схеми, для якої не виконується умова $G = 1$.

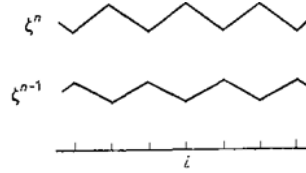


Рис. 7.2: Фур'є-компонента з довжиною хвилі $\Lambda = 2\Delta x$ на просторовій сітці нескінченної довжини.

З мал. 7.2 ясно, що

$$\left. \frac{\delta \zeta}{\delta t} \right|_i^n = \frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (7.36)$$

для всіх i . Таким чином, $\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n-1}$ і $\zeta_i^{n+2} = \zeta_i^n$ і т.д. Виходить, тут має місце чергування двох штучно заданих початкових розподілів з довільною амплітудою. Фур'є-компонента з довжиною хвилі $\Lambda = 2\Delta x$ є повністю стаціонарною, причому має місце повна помилка фазової швидкості.

Ця поведінка узгоджується з тим фактом, що схема “чехарда” при $C = 1$ зберігає точний розв'язок. Якщо почати розрахунки з точного розв'язку $\zeta_i^n = \zeta_{i-1}^n$, то для компоненти з $\Lambda = 2\Delta x$ наступний правильний розв'язок насправді буде $\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-2}^n = \zeta_i^{n-1}$. Ясно, що, хоча схема “чехарда” має другий порядок точності, у дійсності точність визначається точністю “розгінної” схеми, що використовується на початковій стадії розрахунків.

Схема “чехарда”, розглянута для конвективних членів, застосовна також для течій з малими Re (Хин і Макано [1966]) і для течій нев'язкої рідини за умови, що точний початковий розв'язок розраховується окремо й що стаціонарний стан не досягається.

У схемі “чехарда” (і у всіх схемах другого порядку точності із центральними різницями по просторових змінних) мають місце й додаткові помилки. Розглянемо скінчено-різницеву схему, у якій найбільше значення i рівно IL . Застосування схеми “чехарда” (7.17) для обчислення ζ_{IL}^{n+1} вимагало б значення величини ζ_{IL+1}^{n+1} в точці, яка перебуває поза розрахунковою сіткою. Тому в точці IL не можна провести розрахунки й для визначення потрібно задати чисельну граничну умову в IL .

Така вимога аналогічна необхідності задання двох наборів початкових умов і веде до перевизначеності задачі для диференціального рівняння. Помітимо також, що звичайно використовувана умова рівності нулю градієнта для задання умови на вхідній границі потоку, коли вважаються $\zeta_{IL}^{n+1} = \zeta_{IL+1}^{n+1}$ приводить до руху стаціонарної (в інших відносинах) фур'є-компоненти з довжиною хвилі $\Lambda = 2\Delta x$, але цей рух не має нічого спільного з тим, що відбувається при конвекції. З ростом часу ця фур'є-компонента із $\Lambda = 2\Delta x$ загасає по сітці зправа (від вихідної границі потоку) наліво, тоді як справжня конвекція розвивається зліва направо.

Така неправильна вимога, що полягає в заданні додаткової умови на вихідній границі потоку, є наслідком помилки ще одного виду, а саме обумовленої порушенням властивості транспортності.

Вправа 7.3. За допомогою обчислень вручну й геометричних міркувань перевірити, що схема “чехарда” дає правильну поведінку розв’язку на лівій границі (вхідна границя потоку). Задавши початкову умову, що включає тільки компоненту з $\lambda = 2\Delta x$, і зафіксувавши граничну умову на вхідній границі потоку для всіх моментів часу, почати розрахунки за схемою “чехарда” при $C = 1$ при точному розв’язку на другому тимчасовому шарі. Показати, що при $C = 1$ початковий профіль правильно поширюється по сітці.

Слід також помітити, що назва “чехарда” застосовується для багатьох схем, що відрізняються видом апроксимації просторових похідних, але всі вони є тришаровими й використовують центральні різниці за часом, як і тільки що розглянута схема.

§7.3 Завдання для самостійної роботи

Побудувати апріорну оцінку кількості арифметичних операцій при використанні явних та неявних різницевих алгоритмів знаходження розв’язків дво- і трьохвимірних рівнянь переносу.