Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

15 жовтня 2019 р.

Зміст

1 Дробові диференціальні рівняння

Перш за все наведемо мінімальну мотивацію вивчення дробових диференціальних рівнянь. Нагадаємо, що класичне рівняння дифузії має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x,t), \tag{1.1}$$

де функція $f(x,t)$ відповідає джерелам речовини, що дифузує.

Втім, у реальному житті зустрічаються процеси, у яких дифузія відбувається повільніше/швидше, ніж передбачає рівняння (1.1). Для постановки відповідних рівнянь необхідно вводити дробові похідні (похідні дробових порядків).

*Гуляницький Андрій Леонідович, `andriy.hul@gmail.com`

1.1 Основи дробового числення

Розглянемо $f(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$. Позначимо

$$(I_0^1 f)(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.2}$$

Також визначимо рекурсивно

$$(I_0^n f)(t) = I_0^1(I_0^{n-1} f)(t) = \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n)\,\mathrm{d}s_n \ldots \mathrm{d}s_1. \tag{1.3}$$

Подібне визначення не дуже зручне з обчислювальної точки зору, тому наступна теорема стане нам у пригоді.

Теорема 1.1 (формула Коші-Діріхле)
Для $f \in L_1([0,T])$, $t \in [0,T]$ має місце

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

Доведення. Доведення проведемо за методом математичної індукції по n. **База** $n = 1$ виконується безпосередньо за визначенням I_0^1. **Перехід**: нехай

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.5}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
(I_0^{n+1} f)(t) = I_0^1(I_0^n f)(t) = \int_0^t (I_0^n f)(s)\,\mathrm{d}s = \\
= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_0^s (s-\xi)^{n-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}s = \\
= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^s \int_\xi^t f(\xi)(s-\xi)^{n-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi = \\
= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\xi) \left. \frac{(s-\xi)^n}{n} \right|_{s=\xi}^{s=t} \mathrm{d}\xi = \\
= \frac{1}{n!} \int_0^t f(\xi) \frac{(t-\xi)^n}{1}\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

З точністю до назв змінних отримали що хотіли. □

Зауваження 1.2 — Перехід від другого рядка до третього тут відбувається за теоремою Фубіні. Наступна картинка може допомогти у розумінні:

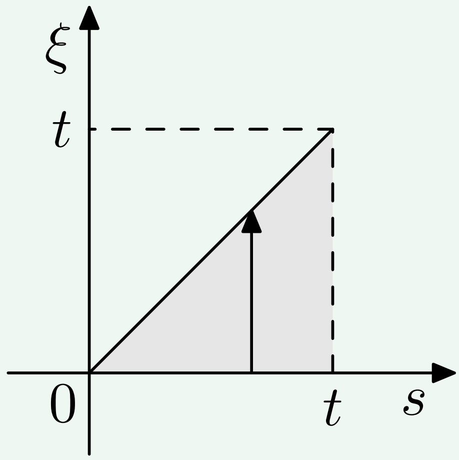

Рис. 1: При $s : 0 \to t$ маємо $\xi : 0 \to s$.

Формула Коші-Діріхле мотивує введення інтегральних операторів нецілого порядку.

Означення 1.3. *Інтегралом Рімана-Ліувілля* порядку $\alpha > 0$ з нижньою межею 0 функції f називається оператор

$$(I_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, \mathrm{d}s. \tag{1.7}$$

Також окремо зауважимо, що $I_0^0 f = f$.

Приклад 1.4

Справді, для $\alpha \in \mathbb{N}$ маємо $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, тобто власне формулу Коші-Діріхле.

Зауваження 1.5 — Нагадаємо, що $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t$.

Взагалі кажучи, подібний вираз нагадує функцію згортки зі степеневою функцією порядку α:

$$I_0^\alpha f = f \star y_\alpha, \tag{1.8}$$

де $y_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$, а операція $\star : (\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ визначається наступним чином:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(s) g(t-s)\, \mathrm{d}s. \tag{1.9}$$

Давайте тепер поміркуємо, як можна визначити диференціалний оператор дробового порядку, маючи відповідні інтегральні оператори. Взагалі кажучи, єдиної відповіді на це питання немає, як показує наступна картинка:

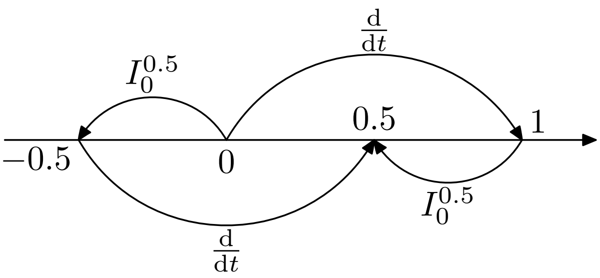

Рис. 2: Різні способи визначення диференціального оператора нецілого порядку

Введемо наступне допоміжне поняття для спрощення подальших позначень і формулювань:

Означення 1.6. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді *стеля* $\lceil \alpha \rceil$ — найменше ціле число, що не менше за α. Також інколи кажуть *верхня ціла частина* α.

Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$.

Означення 1.7. *Похідною за Капуто* функції f порядку α з нижнею межею 0 називається оператор

$$({}^{\star}D_0^{\alpha} f)(t) = I_0^{n-\alpha} \left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n} \right). \tag{1.10}$$

Означення 1.8. *Похідною Рімана-Ліувілля* функції f порядку α з нижнею межею 0 називається оператор

$$(D_0^{\alpha} f)(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left(I_0^{n-\alpha} f \right). \tag{1.11}$$

Приклад 1.9

На рисунку вище $D_0^{0.5} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{0.5}$, а ${}^{\star}D_0^{0.5} = I_0^{0.5} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right)$.

Взагалі кажучи виникає питання коли введені вище похідні існують. Для відповіді на це питання нам знадобиться наступне:

Означення 1.10. Функція f називається *абсолютно неперервною* (*eng.* AC, absolutely continuous) на проміжку I якщо $\forall \varepsilon > 0$: $\exists \delta > 0$: $\forall x_1 < y_1 \le x_2 < y_2 \le \ldots \le x_n < y_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon. \tag{1.12}$$

Так от для АС функцій їхні похідні інтегровні (з нецілим порядком), тобто похідні (з нецілим порядком) існують.

Поняття абсолютної неперервності має нагадувати поняття рівномірної неперервності (*eng.* UC, uniformly continuous). Зрозуміло, що з абсолютної неперервності випливає ($n = 1$) рівномірна неперервність, але зворотнє не виконується.

> **Вправа 1.11.** Наведіть приклад рівномірно неперервної але не абсолютно неперервної функції.

Розв'язання. Функція Кантора є класичним прикладом такої функції. нагадаємо, що функція Кантора визначається як

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{2^n}, & x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{3^n} \in \mathcal{C}, \\ \sup\limits_{y \le x, y \in \mathcal{C}} c(y), & x \in [0,1] \setminus \mathcal{C}, \end{cases} \tag{1.13}$$

де $\mathcal{C}$ — множина Кантора, а b_n — тернарні "біти" числа x, тобто $b_n \in \{0, 2\}$.

Для наглядності наведемо графік функції Кантора:

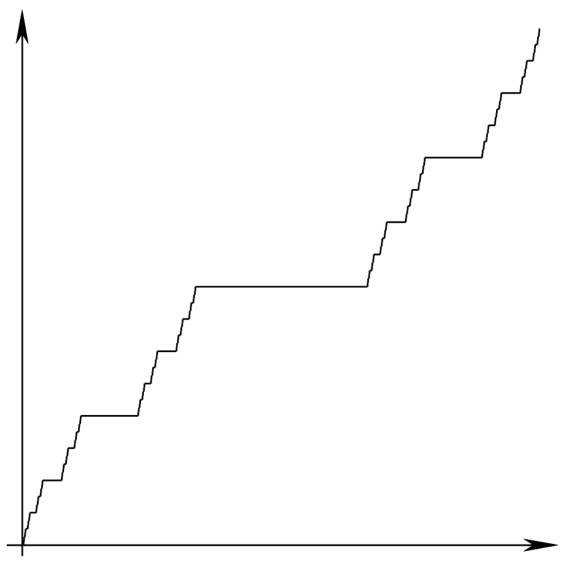

Рис. 3: функція Кантора

Як і кожна неперервна функція на компакті ($[0,1]$), вона є рівномірно неперервною на ньому. Втім, вона не є абсолютно неперервною, адже $\mu(\mathcal{C}) = 0$, тобто $\forall \delta > 0$ знайдуться інтервали сумарною довжиною $< \delta$ що покривають $\mathcal{C}$, а тому зміна значення $c(\cdot)$ на них складатиме $1 > \varepsilon$.

Виникає закономірне запитання: чи існує аналог формули Коші-Діріхле для диференціальних операторів? Виявляється, що так, хоча він і не зовсім такий, як можна було б очікувати.

Теорема 1.12

Нехай $f \in AC^n([0,T])$, $t \in [0,T]$, $n = \lceil \alpha \rceil$. Тоді

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}\,\mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)t^{\alpha-k}}. \tag{1.14}$$

Приклад 1.13

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо $f \in AC([0,T])$ і

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha}\,\mathrm{d}s + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}. \tag{1.15}$$

Зауваження 1.14 — Як показує формула, ${}^\star D_0^\alpha, D_0^\alpha$ — нелокальні оператори.

Доведення. Доведемо частинний випадок $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned}
(D_0^\alpha f)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t f(s) \frac{\mathrm{d}(-(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\left. \frac{-f(s)(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t f'(s) \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,\mathrm{d}s \right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(0)t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f'(s)(t-s)^{1-\alpha}\,\mathrm{d}s \right) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(0)}{t^\alpha} + \int_0^t f'(s)(t-s)^{-\alpha}\,\mathrm{d}s \right).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

□

Зауваження 1.15 — Тут при переході від другого рядочка до третього ми скористалися інтегруванням за частинами, а в останньому переході — формулою Лейбніца:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) = f(x,b(x)) \cdot b'(x) - f(x,a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

На завершення визначимо ще кілька корисних для подальшого дослідження об'єктів:

Означення 1.16. *Інтегралом Рімана-Ліувілля з нижньою межею a* називається
$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s. \tag{1.18}$$

Означення 1.17. *Інтегралом Рімана-Ліувілля з право межею* для $t < T$ називається
$$(I_a^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T f(s)(t-s)^{\alpha}\,\mathrm{d}s. \tag{1.19}$$

1.2 Властивості дробових похідних

Приклад 1.18

Знайдемо похідні степеневих функцій.

Розв'язання. Нехай $\beta > -1$, $0 < \alpha < 1$. Тоді
$$D_0^\alpha t^\beta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} t^\beta. \tag{1.20}$$

У свою чергу
$$I_0^{1-\alpha} t^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha}\,\mathrm{d}s. \tag{1.21}$$

Нагадаємо

Означення 1.19 (бета-функції)**.**
$$B(a,b) = \int_0^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1}. \tag{1.22}$$

а також наступну властивість бета-функції:
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.23}$$

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $\mathrm{d}s = t\,\mathrm{d}\xi$, отримаємо
$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t\xi)^\beta t^{-\alpha}(1-\xi) t\,\mathrm{d}\xi &= \\ = \frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\Gamma(1-\alpha)} B(\beta+1, 1-\alpha) &= \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha+1}&.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Лишилося продиференційовати цей інтеграл:

$$
\begin{aligned}
D_0^\alpha \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha+1} &= \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} = \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha},
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

де ми скористалився властивістю $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$.

Зауваження 1.20 — Ця формула справедлива і для $\alpha \geq 1$, але умова $\beta > -1$ важлива для збіжності кількох інтегралів, зокрема $\int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha} \, \mathrm{d}s$.

Приклад 1.21

Зокрема, якщо $\alpha \leq \beta \in \mathbb{N}$, то маємо формулу

$$
\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} t^\beta = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} t^{\beta-\alpha}. \tag{1.26}
$$

Наприклад,

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} t^4 = \frac{4!}{2!} t^2. \tag{1.27}
$$

Зауваження 1.22 — Зрозуміло також що всі введені нами оператори лінійні.

1.2.1 Властивості похідних Рімана-Ліувілля

Твердження 1.23

На жаль, не виконується наступна властивість

$$
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}. \tag{1.28}
$$

Доведення.

$$
e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \tag{1.29}
$$

Почленно диференціюємо:

$$
\begin{aligned}
D_0^\alpha e^{\lambda t} &= D_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_0^\alpha \left(t^k\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha} t^{k-\alpha} \neq \\
&\neq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^\alpha \frac{(\lambda t)^k}{k!}.
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

□

Твердження 1.24 (формула (не) Ньютона-Лейбніца)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = f(t). \tag{1.31}$$

Твердження 1.25 (формула Ньютона-Лейбніца)

$$\int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s = f(t) - f(0). \tag{1.32}$$

Твердження 1.26 (напівгрупова властивість дробових інтегралів)
Нехай $\alpha, \beta > 0$, тоді $I_0^{\alpha+\beta} = I_0^\alpha I_0^\beta$.

Вправа 1.27. Доведіть цю властивість. **Підказка**: за означеннями,

$$I_0^{\alpha+\beta} f = f \star y_{\alpha+\beta} \overset{?}{=} f \star (y_\alpha \star y_\beta) \overset{?}{=} (f \star y_\alpha) \star y_\beta = I_0^\beta I_0^\alpha f, \tag{1.33}$$

тому достатньо перевірити асоціативність згортки і рівність $y_{\alpha+\beta} = y_\alpha \star y_\beta$.

Доведення. Перевіримо два вищезгаданих твердження:

1) Асоціативність $\star$ отримується "в лоб":

$$
\begin{aligned}
((f\star g)\star h)(t) &= \int_0^t (f\star g)(s)h(t-s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \left(\int_0^\xi f(\xi)g(s-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) h(t-s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \int_0^s f(\xi)g(s-\xi)h(t-s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \int_\xi^t f(\xi)g(s-\xi)h(t-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi = \\
&= \int_0^t \int_0^{t-\xi} f(\xi)g(s)h(t-s-\xi)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi = \\
&= \int_0^t f(\xi)\left(\int_0^{t-\xi} g(s)h(t-\xi-s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi = \\
&= \int_0^t f(\xi)(g\star h)(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\
&= (f\star(g\star h))(t).
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

2) Далі

$$
\begin{aligned}
y_\alpha(t)\star y_\beta(t) &= \int_0^t y_\alpha(s)y_\beta(t-s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)}s^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}(t-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{1.35}
$$

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $\mathrm{d}s = t\,\mathrm{d}\xi$, отримаємо

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t (\xi t)^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}t^{\beta-1}t\,\mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}t^{(\alpha-1)+(\beta-1)+1}\int_0^t \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}t^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}t^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}t^{\alpha+\beta-1} = \\
&= y_{\alpha+\beta}(t).
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

□

Теорема 1.28 (аналог формули (не) Ньютона-Лейбніца)
Для $\alpha > 0$
$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = f. \tag{1.37}$$

Доведення. Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, тоді
$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^{n-\alpha} I_0^\alpha f = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^n f = f. \tag{1.38}$$
□

Зауваження 1.29 — Тут ми скористалися напівгруповою властивістю.

Твердження 1.30 (аналог формули Ньютона-Лейбніца)
Нехай $f, D_0^\alpha f \in L_1([0,T])$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, тоді для $0 < t < T$ маємо
$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}. \tag{1.39}$$

Зауваження 1.31 — Тут під $D_0^{-|\beta|}$ маємо на увазі $I_0^{|\beta|}$.

Приклад 1.32
Для $0 < \alpha < 1$ маємо
$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.40}$$

Зауваження 1.33 — Тут $(I_0^{1-\alpha} f)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (I_0^{1-\alpha} f)(\varepsilon)$.

Доведення. Доведемо частинний випадок:
$$\begin{aligned}(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (D_0^\alpha f)(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(s)\,\mathrm{d}s \right).\end{aligned} \tag{1.41}$$

Виконаємо наступні маніпуляції з виразом що стоїть під похідною:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left((t-s)^\alpha I_0^{1-\alpha} f(s)\Big|_{s=0}^{s=t} + \alpha\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} I_0^{1-\alpha} f(s)\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^\alpha I_0^{1-\alpha} f = \\
&= -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f.
\end{aligned}
\tag{1.42}
$$

Лишилося всього лише продиференціювати:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f\right) = f(t) - \frac{t^{\alpha-1}(I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.43}
$$

$\square$

1.2.2 Властивості похідних за Капуто

Теорема 1.34

Нехай $f \in L_\infty([0,T])$, тобто $\exists M \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \overset{\text{a.e.}}{\leq} M$, тоді, як і очікувалося, $({}^\star D_0^\alpha I_0^\alpha f)(0) = (I_0^{\alpha\star} D_0^\alpha f)(0)$.

а також

Теорема 1.35

Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in AC^n([0,T])$, тоді

$$
(I_0^{\alpha\star} D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \tag{1.44}
$$

Зауваження 1.36 — Ця формула справедлива і для цілих α

Твердження 1.37

Для похідних у загальному випадку не виконується напівгрупова властивість.

Теорема 1.38

Нехай $f, D_0^{\beta} \in L_1([0,T])$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Тоді

$$(D_0^{\alpha} D_0^{\beta} f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta}) f(t) - \sum_{k=0}^{\lceil\beta\rceil-1} (D_0^{\beta-k-1} f)(0) \frac{t^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(-\alpha-k)} \tag{1.45}$$

Приклад 1.39

Зокрема, для $0 < \alpha, \beta < 1$:

$$(D_0^{\alpha} D_0^{\beta} f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta}) f(t) - (I_0^{1-\beta} f)(0) \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \tag{1.46}$$

Доведення. Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned}
(D_0^{\alpha} D_0^{\beta} f)(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} D_0^{\beta} f \right)(t) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha} D_0^{\beta} f \right)(t) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha-\beta} I_0^{\beta} D_0^{\beta} f \right)(t) = \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha-\beta} \left(f(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0) t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} D_0^{\alpha+\beta} t^{\beta-1} = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha} = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

□

1.3 Початкові значення

1.3.1 Початкові значення інтегралу

Дослідимо, за яких умов початкове значення інтегралу ($(I_0^{\alpha} f)(t) = o(1)$) дорівнює нулю.

Теорема 1.40

Нехай $\alpha > 0$, $p > 1/\alpha$, $p \geq 1$, $f \in L_p((0,T))$. Тоді $(I_0^{\alpha} f)(t) = o(t^{\alpha-1/p})$ при $t \to 0$.

Доведення.

$$\begin{aligned}
|(I_0^\alpha f)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s\right| \le \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s| \le \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}\left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)q}\,\mathrm{d}s\right)^{1/q} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}\left(\frac{t^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1}\right)^{1/q} = \\
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}\frac{t^{\alpha-1+1/q}}{c(\alpha,p)} = \\
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p}\frac{t^{\alpha-1/p}}{c(\alpha,p)} = \\
&= o(t^{\alpha-1/p}),
\end{aligned}$$

де останній перехід справджується адже $\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s = o(1)$ при $t \to 0$ □

Зауваження 1.41 (абсолютна неперервність інтеграла Лебега) — Якщо $f \in L_1$ то

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall A : \mu(A) < \delta(\varepsilon)) \quad \int_A f\,\mathrm{d}\mu \le \varepsilon. \tag{1.48}$$

Зауваження 1.42 (інтегральна нерівність Коші-Буняковського) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \le \|f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2}. \tag{1.49}$$

Зауваження 1.43 (інтегральна нерівність Гельдера) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \le \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}, \tag{1.50}$$

де $1/p + 1/q = 1$.

Зауваження 1.44 — Умова $p > 1/\alpha$ необхідна для збіжності усіх інтегралів з доведення

Наслідок 1.45

При $\alpha > 1/p$ маємо $(I_0^\alpha f)(t) = o(1)$, тобто $(I_0^\alpha f)(0) = 0$.

Вправа 1.46. Наведіть приклад f для якої $(I_0^\alpha f)(0) \neq 0$ (але і не ∞).

Приклад 1.47

Розглянемо $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на $[0, 1]$. Можна показати, що

$$\int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x = 2, \tag{1.51}$$

тому $f \in L_1((0,1))$. З іншого боку,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty, \tag{1.52}$$

тому $f \notin L_2((0,1))$. Це означає, що $1 < p < 2$. Тоді нерівність $p > 1/\alpha$ з умов теореми не буде виконуватися, для $\alpha \le \frac{1}{2}$. Зокрема, виникають певні сподівання на $\alpha = \frac{1}{2}$. Розглянемо $(I_0^{1/2} f)(t)$:

$$(I_0^{1/2} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}} = \frac{\pi}{\Gamma(1/2)} = \sqrt{\pi}. \tag{1.53}$$

Як бачимо, отриманий вираз не просто не прямує до нуля при $t \to 0$, а взагалі не залежить від t, тобто наші сподівання не були марні і $(I_0^{1/2} f)(0) = \sqrt{\pi} \neq 0$ (але і не ∞).

1.3.2 Початкові значення похідних

Теорема 1.48

Нехай $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^{n-1}([0,T])$, $p > \frac{1}{n-\alpha}$, $f^{(n)} \in L_p([0,T])$. Тоді $(D_0^\alpha)(0) = 0 \iff f^{(k)}(0) = 0$ при $k = \overline{0, n-1}$.

Розв'язання. *Доведення.* За умов теореми

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} \,\mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{1.54}$$

($\Longleftarrow$) У формулі вище інтеграл дорівнює нулю за першою сьогоднішньою теоремою, а уся сумма зануляється за умовою теореми.

($\Longrightarrow$) Домножатимемо (1.54) на $t^{\alpha-k}$ для $k = \overline{0, n-1}$. Наприклад, для $k = 0$ матимемо

$$t^\alpha (D_0^\alpha f)(t) = t^\alpha ({}^\star D_0^\alpha f)(t) + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) t^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{1.55}$$

Бачимо, що $t^\alpha ({}^\star D_0^\alpha f)(t) = o(1)$, всі доданки суми нескінченно малі, тому $f(0) = 0$. Далі за індукцією по k отримуємо рівність нулеві усіх похідних до $(n-1)$-ої. $\square$

Зауваження 1.49 — При $0 < \alpha < 1$ маємо $(D_0^\alpha 1)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \neq 0$.

Зауваження 1.50 — Але $({}^\star D_0^\alpha 1)(t) = 0$.

Теорема 1.51

Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^n([0,T])$, тоді $D_0^\alpha f \equiv 0 \iff f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}$ — дробовий многочлен.

Доведення.

Вправа 1.52. $(\Longrightarrow)$ За умов теореми

$$0 = (I_0^\alpha 0)(t) = (I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}, \tag{1.56}$$

звідки

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}, \tag{1.57}$$

і, перепозначаючи $c_k = \frac{D_0^{\alpha-k-1} f)(0)}{\Gamma(\alpha-k)}$, отримуємо якраз ту форму для f, яку хотіли.

$(\Longleftarrow)$ Нехай

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}, \tag{1.58}$$

тоді

$$D_0^\alpha f = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^{n-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{\alpha-k-1} \right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(n-k)} t^{n-k-1} = 0. \tag{1.59}$$

□

Теорема 1.53 (похідна добутку)

Нехай f, g — аналітичні в $(-h, h)$. Тоді для $t \in (0, h/2)$

$$D^\alpha (f \cdot g)(t) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\alpha} D_0^k f(t) \cdot D_0^{\alpha-k} f(t), \tag{1.60}$$

де

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\alpha-k-1)}. \tag{1.61}$$

Теорема 1.54 (Тарасова)
Нехай $0 < \alpha < 1$, тоді D^α — лінійний оператор, що задовольняє умову

$$D^\alpha(f \cdot g) = D^\alpha f \cdot g + f \cdot D^\alpha g. \tag{1.62}$$

Тоді $\exists p(t)$: $(D_0^\alpha f)(t) = p(t) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

1.4 Перетворення Лапласа дробовах інтегралів і похідних

Означення 1.55. Нехай $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, тоді

$$\mathscr{L}[f](\eta) = \overline{f}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.63}$$

Лема 1.56 (перетворення Лапласа похідної)

$$\mathscr{L}[f'](\eta) = \eta \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - f(0). \tag{1.64}$$

Доведення. Інтегруємо частинами. □

Лема 1.57 (перетворення Лапласа згортки)

$$\mathscr{L}[f \star g](\eta) = \mathscr{L}[f](\eta) \cdot \mathscr{L}[g](\eta). \tag{1.65}$$

Доведення. Змінюємо порядок інтегрування. □

Лема 1.58 (перетворення Лапласа степеневої функції)

$$\mathscr{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1-\beta)\eta^{\beta-1}. \tag{1.66}$$

Доведення. За означенням

$$\mathscr{L}[t^{-\beta}](\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta}. \tag{1.67}$$

Зробимо заміну змінних: $\eta t = \xi$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\xi/\eta$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} &= \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta} \frac{1}{\eta}\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \eta^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{-\beta}\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \eta^{\beta-1}\Gamma(1-\beta). \end{aligned} \tag{1.68}$$

$\square$

Лема 1.59 (перетворення Лапласа інтегралу дробового порядку)

$$\mathscr{L}[I_0^\alpha f](\eta) = \eta^{-\alpha}\mathscr{L}[f](\eta). \tag{1.69}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[I_0^\alpha f](\eta) &= \mathscr{L}[f \star y_\alpha](\eta) = \\ &= \mathscr{L}[f](\eta) \cdot \mathscr{L}[y_\alpha](\eta) = \\ &= \mathscr{L}[f](\eta) \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(1-(1-\alpha))\eta^{-\alpha} = \\ &= \eta^{-\alpha}\mathscr{L}[f](\eta). \end{aligned} \tag{1.70}$$

$\square$

Лема 1.60 (перетворення Лапласа похідної Рімана-Ліувіля)

$$\mathscr{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathscr{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1}(D_0^{\alpha-k-1}f)(0)\eta^k. \tag{1.71}$$

Приклад 1.61

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathscr{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathscr{L}[f](\eta) - (I_0^{\alpha-1}f)(0). \tag{1.72}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[D_0^\alpha f](\eta) &= \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} f\right](\eta) = \\ &= \eta \cdot \mathscr{L}[I_0^{1-\alpha} f](\eta) - (I_0^{1-\alpha}f)(0) = \\ &= \eta \cdot \eta^{\alpha-1} \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha}f)(0) = \\ &= \eta^\alpha \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha}f)(0). \end{aligned} \tag{1.73}$$

$\square$

Лема 1.62 (перетворення Лапласа похідної Катупо)

$$\mathscr{L}\left[{}^\star D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\eta^{\alpha-k-1}. \tag{1.74}$$

Приклад 1.63
Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathscr{L}\left[{}^{\star}D_0^{\alpha} f\right](\eta) = \eta^{\alpha} \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - \eta^{\alpha-1} \cdot f(0). \tag{1.75}$$

Вправа 1.64. Довести.

Доведення.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[{}^{\star}D_0^{\alpha} f\right](\eta) &= \mathscr{L}\left[I_0^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right](\eta) = \\ &= \eta^{\alpha-1} \cdot \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right](\eta) = \\ &= \eta^{\alpha-1} \cdot \Big(\eta \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - f(0)\Big) = \\ &= \eta^{\alpha} \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - \eta^{\alpha-1} \cdot f(0).\end{aligned} \tag{1.76}$$

□

Лема 1.65
$\mathscr{L}[c](\eta) = c/\eta$.

Лема 1.66
$\mathscr{L}[e^{pt} f(t)](\eta) = \mathscr{L}[f(t)](\eta - p)$.

Нагадаємо, що раніше ми з'ясували, що $\mathscr{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1-\beta)\eta^{\beta-1}$.

Теорема 1.67 (Таубера)
Нехай $-\beta > -1$, f монотонна при великих t (тобто вона монотонна на деякому проміжку вигляду $[t_0, +\infty)$). Тоді $f(t) \sim t^{-\beta}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}[f](\eta) = \Gamma(1-\beta)\eta^{\beta-1}$ при $\eta \to 0$.

Зауваження 1.68 — Тут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$ означає, що $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Наслідок 1.69
Нехай $0 < \alpha < 1$ і f монотонна при великих t, $f \geq 0$ на $[0, +\infty)$ і $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Тоді $\forall A > 0$: $f(t) \sim \alpha A t^{-\alpha-1}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha} + o(n^{\alpha})$ при $\eta \to 0+$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.77}$$

Зауважимо, що $F'(t) = -f(t)$.

Вправа 1.70. Доведіть, що за наших припущень

$$f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1} \iff F(t) \sim At^{-\alpha}. \tag{1.78}$$

Доведення. ($\Longrightarrow$) Якщо $f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1}$, то, за визначенням асимптотики,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad \left|\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} - 1\right| < \varepsilon, \tag{1.79}$$

або ж, що те саме,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad (A-\varepsilon)\alpha t^{-\alpha-1} < f(t) < (A+\varepsilon)\alpha t^{-\alpha-1}, \tag{1.80}$$

щоправде вже з іншим $t_0(\varepsilon)$, але не суть.

Інтегруємо:

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0)\\ &\qquad\int_t^\infty (A-\varepsilon)\alpha s^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}s < \int_t^\infty f(s)\,\mathrm{d}s < \int_t^\infty (A+\varepsilon)\alpha s^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{1.81}$$

звідки

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad (A-\varepsilon)t^{-\alpha} < F(t) < (A+\varepsilon)t^{-\alpha}, \tag{1.82}$$

отримали що хотіли.

($\Longleftarrow$) Припустимо, що $F(t) \sim At^{-\alpha}$, але $f(t) \not\sim A\alpha t^{-\alpha-1}$. За визначенням, це означає, що

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall t_0)(\exists t > t_0) \quad \left|\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} - 1\right| > \varepsilon. \tag{1.83}$$

Зрозуміло, що для деякого $C > 0$ нескінченно часто відбувається або

$$\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} > 1 + C, \tag{1.84}$$

або

$$\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} < 1 - C, \tag{1.85}$$

а також нескінченно часто відбувається

$$\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} = 1. \tag{1.86}$$

Без обмеження загальності, перше, розглянемо тоді зростаючу $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ таку, що $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ і

$$\frac{f(t_n)}{A\alpha t_n^{-\alpha-1}} = 1. \tag{1.87}$$

Позначимо

$$T_n = \min_{t \geq t_n} \left\{ t : \frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} = 1 + C \right\}. \tag{1.88}$$

Для зручності запишемо це як

$$f(T_n) = (1 + C)A\alpha T_n^{-\alpha-1}. \tag{1.89}$$

Без обмеження загальності вважаємо, що f монотонна починаючи з деякого $t_0 < t_1$, а тому $f(T_n) \leq f(t_n)$. Тоді

$$(1 + C)A\alpha T_n^{-\alpha-1} \leq A\alpha t_n^{-\alpha-1}. \tag{1.90}$$

Логарифмуючи маємо

$$\ln(1 + C) + \ln A + \ln \alpha - (\alpha + 1)\ln T_n \leq \ln A + \ln \alpha - (\alpha + 1)\ln t_n, \tag{1.91}$$

або ж

$$(\alpha + 1)\ln T_n \geq (\alpha + 1)\ln t_n + \ln(1 + C). \tag{1.92}$$

Звідси

$$\ln T_n \geq \ln t_n + k, \tag{1.93}$$

або ж

$$T_n \geq K t_n, \tag{1.94}$$

де $k = \frac{\ln(1+C)}{\alpha+1}$ — додатнє, $K = e^k$. Аналогічним чином можна показати, що $f(t) \geq (1 + C')A\alpha t^{-\alpha-1}$ на $[T_n/K', T_n]$ для певних сталих $C' < C$ і $1 < K' < K$.

Розглянемо тепер $\int_{t_n}^{T_n} f(s)\,\mathrm{d}s$. Доволі просто показати, що

$$\begin{aligned}\int_{T_n/K'}^{T_n} f(s)\,\mathrm{d}s &< (A - \varepsilon)(T_n/K')^{-\alpha} - (A + \varepsilon)T_n^{-\alpha} = \\ &= A\Big((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\Big) - \varepsilon\Big((T_n/K')^{-\alpha} + T_n^{-\alpha}\Big).\end{aligned} \tag{1.95}$$

для довільного $\varepsilon > 0$, починаючи з деякого $n_0(\varepsilon)$, звичайно. Але ж $f(t) \geq (1 + C')A\alpha t^{-\alpha-1}$ на $[T_n/K', T_n]$, а тому

$$\begin{aligned}\int_{T_n/K'}^{T_n} f(s)\,\mathrm{d}s &\geq \int_{T_n/K'}^{T_n} (1 + C')A\alpha t^{-\alpha-1} = \\ &= (1 + C')A(T_n/K')^{-\alpha} - (1 + C')AT_n^{-\alpha} = \\ &= A\Big((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\Big) + C'A\Big((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\Big).\end{aligned} \tag{1.96}$$

Лишилося порівняти (якщо права частина більше то ми отримали протиріччя)

$$\varepsilon\Big((T_n/K')^{-\alpha} + T_n^{-\alpha}\Big) \vee C'A\Big((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\Big), \tag{1.97}$$

або ж

$$\varepsilon T_n^{-\alpha} K_2 \vee C' A T_n^{-\alpha} K_3, \tag{1.98}$$

де $K_2 = (K')^\alpha + 1$, $K_3 = (K')^\alpha - 1$ — додатні константи.

Помітимо, що тепер $T_n^{-\alpha}$ можна скоротити, отримаємо

$$\varepsilon K_2 \vee C' A K_3. \tag{1.99}$$

Цілком очевидно, що при $\varepsilon \to 0$ права частина переважає, а тому отримали протиріччя. □

Розглянемо

$$\mathscr{L}[F](\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta t} \int_t^{+\infty} f(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t, \tag{1.100}$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(s) \int_0^s e^{-\eta t}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s &= \int_0^{+\infty} f(s) \frac{1 - e^{-\eta s}}{\eta}\, \mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{\eta}\left(1 - \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\eta s}\, \mathrm{d}s\right) = \\ &= \frac{1 - \mathscr{L}[f](\eta)}{\eta}. \end{aligned} \tag{1.101}$$

Звідси

$$\mathscr{L}[f](\eta) = 1 - \eta \mathscr{L}[F](\eta). \tag{1.102}$$

Тепер можемо записати

$$\begin{aligned} f(t) \underset{t\to\infty}{\sim} A\alpha t^{-\alpha-1} &\iff F(t) \underset{t\to\infty}{\sim} A t^{-\alpha} \iff \\ &\iff \mathscr{L}[F](\eta) \underset{\eta\to 0+}{\sim} A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} \iff \\ &\iff \mathscr{L}[F](\eta) = \Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} + o(\eta^{\alpha-1}) \iff \\ &\iff \mathscr{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha} + o(\eta^{\alpha}). \end{aligned} \tag{1.103}$$

□

2 Моделі аномальної дифузії

Нагадаємо, що класичні рівняння дифузії та теплопровідності зумовлені наступними чинниками:

1) закон збереження кількості речовини/тепла;

2) джерела і стоки;

3) "закон" Фіка/Фур'є — емпірично встановлене для широкого класу процесів твердження про те, що інтенсивність потоку речовини/тепла пропорційна мінус градієнту концентрації речовини/кількості тепла на границі.

Розглянемо тепер інший підхід, який грунтується на випадкових блуканнях з неперервним часом (eng. *CTRW, continuous time random walk*). А саме, нехай $x(t)$ — випадкова величина (координата частинки в момент часу t), а $u(x,t)$ (gпри фіксованому t — щільність координати частинки).

Параметри моделі:

1) $u_0(x)$ — щільність початкового (при $t=0$) розподілу;

2) $\psi(t)$ — щільність часу очікування наступного стрибка;

3) $\lambda(x)$ — щільність зміщення.

Означення 2.1. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є* називається

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Твердження 2.2

Для перетворення Фур'є справедлива теоерма згортки:

$$\mathcal{F}[f*g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[f](\omega), \tag{2.2}$$

де

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.3}$$

Означення 2.3. Нехай $u(x,t) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є-Лапласа* називається

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta) = \tilde{\tilde{u}}(\omega,\eta) = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta t + i\omega x} u(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

Формула 2.4 (Монтрола-Вайса)

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta) = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta}\frac{1-\mathscr{L}[\psi](\eta)}{1-\mathscr{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}, \tag{2.5}$$

як тільки $|\mathscr{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)| < 1$.

Доведення. Введемо додаткове позначення: $n(t)$ — кількість стрибків до моменту t. $\psi_k(t)$ — щільність часу k-го стрибка. І нарешті, $\lambda_k(x)$ — щільність координати після k-го стрибка.

Запишемо формулу повної ймовірності:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{n(t)=k\}\lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\mathsf{P}\{n(t)\ge k\} - \mathsf{P}\{n(t)\ge k+1\}\Big)\lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi_k(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \psi_{k+1}(s)\,\mathrm{d}s\right)\lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi^{\star k}(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \psi^{\star(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s\right)\cdot (u_0 * \lambda^{*k})(x).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Зауваження 2.5 — Тут ми скористалися тим, що $\psi_k(x) = \psi^{\star k} = \underbrace{\psi\star\psi\star\ldots\star\psi}_{k}$ і $\lambda_k(x) = u_0 * \lambda^{*k} = u_0 * \underbrace{\lambda*\lambda*\ldots*\lambda}_{k}$.

Вправа 2.6. Поновити у конспекті формальне доведення цих фактів.

З урахуванням %перелік_нагадувань%, маємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta}\Big((\mathscr{L}[\psi](\eta)^k - \mathscr{L}[\psi](\eta)^{k+1})\mathcal{F}[u_0](\omega)\mathcal{F}[\lambda](\omega)^k\Big) = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1-\mathscr{L}[\psi](\eta))}{\eta}\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}[\psi](\eta)^k\mathcal{F}[\lambda](\omega)^k = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1-\mathscr{L}[\psi](\eta))}{\eta(1-\mathscr{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

□

2.1 Рівняння субдифузії

Розглянемо випадкове блукання із щільностями

$$\psi(t) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}}, \tag{2.8}$$

при $t\to+\infty$, де $\alpha\in(0,1)$, $\tau>0$, та

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right\} \tag{2.9}$$

Згадуємо наслідок з теореми Таубера для $A = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$:

$$\mathscr{L}[\psi](\eta) \sim 1 - \tau^\alpha\eta^\alpha + o(\eta^\alpha) \tag{2.10}$$

Крім того

$$\mathcal{F}[\lambda](\eta) \sim 1 - \sigma^2\omega^2 + O(\omega^4). \tag{2.11}$$

Застосовуємо формулу Монтрола-Вайса

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega) = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{\tau^\alpha\eta^\alpha + o(\eta^\alpha)}{1-(1-\tau^\alpha\eta^\alpha + o(\eta^\alpha))(1-\sigma^2\omega^2+O(\omega^4))} \tag{2.12}$$

Якщо $\eta \to 0$, $\omega \to 0$, $\eta^\alpha\omega^2 = o(\eta^\alpha + \omega^2)$, то

$$\sim \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{\tau^\alpha\eta^\alpha}{\tau^\alpha\eta^\alpha + \sigma^2\omega^2} = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{1}{1+\frac{\sigma^2}{\tau^\alpha}\eta^{-\alpha}\omega^2 = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta}\frac{1}{1+K_\alpha\eta^{-\alpha}\omega^2}}. \tag{2.13}$$

Отже, з точністю до малих доданків,

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega)\cdot(1+K_\alpha\eta^{-\alpha}\omega^2) = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta}, \tag{2.14}$$

або ж,

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega) - \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} = -K_\alpha\eta^{-\alpha}\omega^2\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega). \tag{2.15}$$

Оскільки

$$\mathcal{F}[g'](\omega) = (-i\omega)\mathcal{F}[g](\omega), \tag{2.16}$$

і, відповідно,

$$\mathcal{F}[g^{(k)}](\omega) = (-i\omega)^k\mathcal{F}[g](\omega), \tag{2.17}$$

то

$$-\omega^2\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2\mathscr{L}[u(x,\eta)]}{\partial x^2}\right] \tag{2.18}$$

Тому маємо

$$\mathscr{L}[u](x,\eta) - \frac{u_0(x)}{\eta} = -K_\alpha\eta^{-\alpha}\frac{\partial^2\mathscr{L}[u(x,\eta)]}{\partial x^2}, \tag{2.19}$$

звідки %пропущене_інтегральне_рівняння%, або

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_\alpha D_0^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.20}$$

з початковою умовою $u(x,0) = u_0(x)$, або ж

$$^\star D_0^\alpha u = K_\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.21}$$

з початковою умовою $u(x,0) = u_0(x)$.

Означення 2.7. Останні три рівняння відомі під спільною назвою *рівняння субдифузії.*

Зауваження 2.8 — Випадкове блукання з неперервним часом із $\psi(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$ (показниковій розподіл) і $\lambda \sim N(0, 2\sigma^2)$ призвело б до параболічного рівняння.

2.2 Аналіз рівняння

Означення 2.9. $\mathsf{E}[(x(t) - x(0))^2] = \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle$ — середньо-квадратичне зміщення (якщо $x(0) = 0$, то $\langle x(t)^2 \rangle$).

Лема 2.10

Якщо

$$\psi(t) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}}, \quad t \to +\infty, \tag{2.22}$$

то

$$\langle n(t) \rangle \sim \frac{t^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)}. \tag{2.23}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \langle n(t) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathsf{P}\{n(t) = k\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\int_0^t \left(\psi^{\star k}(s) - \psi^{\star(k+1)}(s) \right) \mathrm{d}s \right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[\langle n(\eta) \rangle] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\eta} \Big(\mathscr{L}[\psi]^k(\eta) - \mathscr{L}[\psi]^{k+1}(\eta) \Big) = \\ &= \frac{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} k \mathscr{L}[\psi]^k(\eta) = \\ &= \frac{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\mathscr{L}[\psi]'(\eta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \mathscr{L}[\psi]^k(\eta) = \\ &= \frac{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta} \frac{\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\mathscr{L}[\psi]'(\eta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{L}[\psi]^k(\eta) = \\ &= \frac{\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta(1 - \mathscr{L}[\psi](\eta))}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Оскільки

$$\mathscr{L}[\psi](\eta) = 1 - \tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha), \tag{2.26}$$

то

$$\mathscr{L}[\langle n(\eta) \rangle] = \frac{1 - \tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha)}{\eta(\tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha))} \underset{n \to 0}{\sim} \frac{1}{\tau^\alpha \eta^{\alpha+1}}. \tag{2.27}$$

Застосовуємо зворотню теорему Таубера для $\beta = -\alpha$ отримуємо

$$\langle n(t) \rangle \sim \frac{t^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)}. \tag{2.28}$$

□

Наслідок 2.11

Якщо $x(0) = 0$, то

$$\langle x(t)^2 \rangle = 2\sigma^2 \langle n(t) \rangle \sim \frac{2\sigma^2 t^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)} = \frac{2K_\alpha t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{2.29}$$

Означення 2.12. Якщо у випадкового (дифузійного) процесу середньоквадратичне зміщення зростає повільніше ніж лінійна функція ($\langle x(t)^2 \rangle = o(t)$), то процес називається *суб-дифузійним*.

Означення 2.13. Якщо у випадкового (дифузійного) процесу середньоквадратичне зміщення зростає швидше ніж лінійна функція ($t = o(\langle x(t)^2 \rangle)$), то процес називається *супер-дифузійним*.

Означення 2.14. Якщо ж у випадкового (дифузійного) процесу середньоквадратичне зміщення зростає так само як ніж лінійна функція, то процес називається *нормально-дифузійним*.

Зауваження 2.15 — $\langle (x(t))^2 \rangle$ — середньоквадратичне зміщення, усереднене за сукупністю частинок (eng. *ensemble-averaged*).

Інший підхід — усереднення за часом:

$$\overline{d^2(t,T)} = \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} (x(s+t) - x(s))^2 \, \mathrm{d}s, \tag{2.30}$$

де t — часове вікно, T — загальна тривалість спостереження.