Теорія рядів Фур'є

Молодцов О. І.*

10 жовтня 2019 р.

Зміст

*Молодцов Олександр Ілліч, semol2006@ukr.net

1 Тригонометричний ряд Фур'є

1.1 Визначення тригонометричного ряду Фур'є

Теорема 1.1 (інтеграл від періодичної функції)
Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — T-періодична на $\mathbb{R}$ і $f \in L([0, T])$. Тоді $\forall\{a, b\} \subset \mathbb{R}$: $f \in L([a, b])$ і

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.1}$$

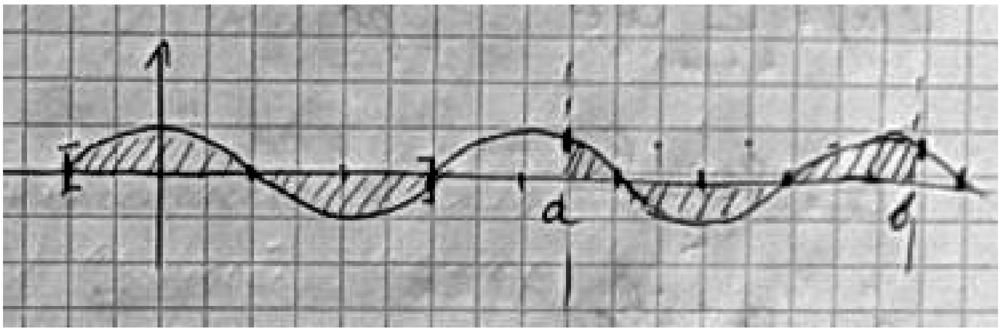

Рис. 1: Геометрична інтерпретація теореми: заштриховані площі рівні

Доведення. Спочатку доведемо, що f інтегровна на $[a, b]$ для довільних a і b.

З періодичності f маємо інтегровність f на сегментах вигляду $[kT, (k+1)T]$ для довільного цілого k:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x+kT)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.2}$$

Зауваження 1.2 — Аналогічно можна отримати, що $f \in L([kT, mT])$ для довільних цілих $k < m$, причому

$$\int_{kT}^{mT} f(x)\,\mathrm{d}x = (m-k)\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.3}$$

Далі, нехай k — таке, що $kT \le a < (k+1)T$:

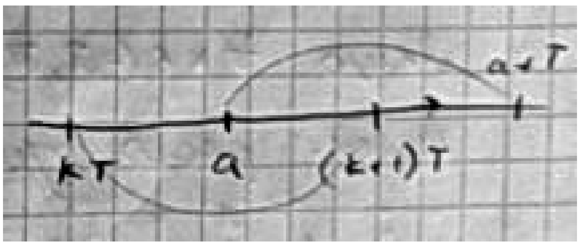

Рис. 2: Ілюстрація вибору k

Тоді, з адитивності інтегралу як функції множини, маємо:

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{(k+1)T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kT}^{a} f(x+T)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kT}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

а цей інтеграл рівний бажаному. □

Зауваження 1.3 — Якщо $f(x)$ — T-періодична, то $f(\frac{Tx}{2\pi})$ — 2π-періодична. Справді:

$$f\left(\frac{T(x+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right). \tag{1.1.5}$$

Означення 1.4. $\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$ — *основна тригонометрична система.*

Означення 1.5. Довільна скінченна лінійна комбінація функцій основної тригонометричної системи — *тригонометричний многочлен*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.1.6}$$

Формула 1.6 (Ейлера)

Виконуються наступні співвідношення:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{1.1.7}$$

З використанням формули Ейлера можемо записати тригонометрчиний многочлен у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right), \tag{1.1.8}$$

або ж у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{1.1.9}$$

де

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \tag{1.1.10}$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \tag{1.1.11}$$

а також $b_0 = 0$.

Теорема 1.7 (обчислення коефіцієнтів тригонометричного многочлена)
Якщо $\forall x \in (-\pi, \pi)$ виконується (1.1.9), то коефіцієнти c_k цього тригонометричного многочлена обчислюються наступним чином:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x, \quad k = \overline{-n, n}. \tag{1.1.12}$$

Доведення. $\forall m = \overline{-n, n}$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)x} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

З інтегралів, що знаходяться у сумі лише один не рівний нулеві, а саме той, для якого $k = m$. При $k = m$ відповідний інтеграл дорівнює 2π, а тому

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} c_m (2\pi) = c_m. \tag{1.1.14}$$

□

Наслідок 1.8
Якщо $\forall x \in (-\pi, \pi)$ виконується (1.1.9), то коефіцієнти a_k, b_k цього тригонометричного многочлена обчислюються наступним чином:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x, \tag{1.1.15}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x. \tag{1.1.16}$$

Доведення. Справді, співвідношення (1.1.10), (1.1.11) можна переписати у вигляді

$$a_k = c_k + c_{-k}, \tag{1.1.17}$$

$$b_k = \frac{c_{-k} - c_k}{i}. \tag{1.1.18}$$

Підставляючи у ці співвідношення результат теореми, отримуємо

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-ikx} + e^{ikx})\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{e^{-ikx} + e^{ikx}}{2}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

а також

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{ikx} - e^{-ikx})\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

□

Означення 1.9. Функціональний ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ називається *тригонометричним рядом.*

Означення 1.10. Якщо коефіцієнти тригонометричного ряду обчислені за формулами (1.1.15), (1.1.16), то ряд називається *тригонометричним рядом Фур'є* функції $f(x)$, а його коефіеінти — *коеіцієнтами Фур'є.*

Зауваження 1.11 — У комплексій формі коефіцієнти Фур'є мають вигляд:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1.21}$$

а сам ряд —

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{1.1.22}$$

Вправа 1.12. Нехай $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$. Обчисліть її коефіцієнти Фур'є (декілька перших).

Теорема 1.13 (ряд Фур'є рівномірно неперервної функції)
Якщо тригонометричний ряд збігається рівномірно на $\mathbb{R}$ то він є рядом Фур'є своєї суми.

Доведення. Позначимо суму ряду f:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.1.23}$$

Також позначимо її складові f_n:

$$f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1.1.24}$$

Зрозуміло, що $\forall n \in \mathbb{Z} : f_n \in C(\mathbb{R})$. Тому $f \in C(\mathbb{R})$ як сума рівномірно збіжного ряду з неперервних функцій.

Далі $f \in R([-\pi, \pi])$ як неперервна на компакті (тут $R([a, b])$ — клас інтегровних за Ріманом на $[a, b]$ функцій).

Знайдемо коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$. Для цього запишемо

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos kx \tag{1.1.25}$$

Твердження 1.14
У припущенні рівномірної збіжності ряду можемо інтегрувати ряд почленно.

А наш ряд (1.1.25) якраз рівномірно збіжний. Справді, розглянемо послідовність частинних сум $S_n(x)$. Умова рівномірної збіжності означає, що $\forall \varepsilon > 0$: $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$ $x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Позначимо $\sigma_n(x) = S_n(x) \cos kx$. Тоді $|f(x) \cos kx - \sigma_n(x)| = |\cos kx| \cdot |f(x) - S_n(x)| \leq |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Повертаємося до пошуку коефіцієнтів Фур'є:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \\
&\quad = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_k}{2} \cos kx \, \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, \mathrm{d}x \right) = \\
&\quad = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-k)x + \cos(n+k)x) \, \mathrm{d}x + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-k)x + \sin(n+k)x) \, \mathrm{d}x \right).
\end{aligned} \tag{1.1.26}$$

Зрозуміло, що всі доданки у сумах рівні нулеві, окрім $n = k$ у першій сумі, який якраз $\frac{a_n}{2} \cdot 2\pi$. Враховуючи ще $\frac{1}{\pi}$ отримали якраз (1.1.15). Зрозуміло, що розглядаючи аналогічним чином $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x$ отримаємо (1.1.16). А ще, при $k = 0$ маємо $\frac{a_0}{2}$. □

1.2 Збіжність в середньоквадратичному

Розглянемо функціональний ряд:

$$\sum f_n(x), \quad x \in X. \tag{1.2.1}$$

Як і раніше, позначатимемо послідовність частинних сум S_n:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \tag{1.2.2}$$

а також позначимо

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(x). \tag{1.2.3}$$

Означення 1.15. Якщо $\forall x \in X \; \exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$, то кажуть, що функціональний ряд $S_n(x)$ збігається до $f(x)$ *поточково в середньоарифметичному.*

Означення 1.16. Якщо $\exists \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f(x) - \sigma_n(x)| = 0$, то кажуть, що функціональний ряд $S_n(x)$ збігається до $f(x)$ *рівномірно в середньоарифметичному.*

Означення 1.17. Якщо $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f_n \in R(X)$ і

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 \,\mathrm{d}x, \tag{1.2.4}$$

то кажуть, що функціональний ряд $S_n(x)$ збігається до $f(x)$ *в середньоквадратичному.*

Повернемося до функції $f \in R([-\pi, \pi])$. Нехай її ряд Фур'є має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.2.5}$$

Зрозуміло, що послідовність часткових сум цього ряду буде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.2.6}$$

Розглянемо тепер довільний тригонометричний многочлен “степеню” не вище n, тобто

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx). \tag{1.2.7}$$

Розглянемо задачу знаходження

$$\operatorname*{argmin}_{T_n} \|f - T_n\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 \, \mathrm{d}x}. \tag{1.2.8}$$

Логічним припущенням є $T_n = S_n$.

Теорема 1.18 (про найкраще середньоквадратичне наближення)
Якщо $f \in R([-\pi, \pi])$, то $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall T_n(x)$:

$$\|f(x) - S_n(x)\| \leq \|f(x) - T_n(x)\|. \tag{1.2.9}$$

Доведення. Розділимо інтеграл з норми на три наступним чином:

$$\begin{aligned} \|f(x) - T_n(x)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 \, \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big((f(x))^2 - 2f(x)T_n(x) + (T_n(x))^2 \Big) \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Перетворимо другий інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x) \, \mathrm{d}x = \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \\ = \pi \alpha_0 a_0 + \pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k + b_k). \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Перетворимо третій інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x) \, \mathrm{d}x = 2\pi \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \, \mathrm{d}x + \\ + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin km) = \\ = 2\pi \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2). \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Підставляємо назад і перетворюємо:

$$\begin{aligned}\|f - T_n\|^2 = &\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x - 2\pi\alpha_0 a_0 - 2\pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \\ &+ 2\pi\alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \\ = &\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x + \\ &+ \pi \left(\frac{(2\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 \right) \right) - \\ &- \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right).\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Перший і третій доданки від α і β не залежать, тому можемо просто прирівняти другий до нуля для досягнення мінімуму всього виразу. Далі нескладно бачити, що $\alpha_0 = a_0/2$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$, тобто $T_n = S_n$. □

1.3 Нерівність Бесселя

Теорема 1.19 (нерівність Бесселя)
$\forall f \in R([-\pi, \pi])$ виконується нерівність Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x, \tag{1.3.1}$$

де a_0, a_n, b_n — коефіцієнти Фур'є функції f.

Доведення. Підставимо у (1.2.13) $T_n = S_n$, отримаємо

$$0 \leq \|f(x) - S_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_n^2 + b_n^2) \right). \tag{1.3.2}$$

Елементарними перетвореннями нерівності отримуємо

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x. \tag{1.3.3}$$

Це означає, що послідовність часткових сум обмежена (і монотонна), а тому ряд збіжний, а граничним переходом маємо нерівність Бесселя. □

Приклад 1.20
Розглянемо функцію

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}. \tag{1.3.4}$$

Для неї $a_i = 0$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Але

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1.3.5}$$

— розбіжний, тому наведений вище ряд не є рядом Фур'є (своєї суми).

Наслідок 1.21
Нехай $f \in R([-\pi, \pi])$, a_n, b_n — її коефіцієнти Фур'є. Тоді

1)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x = 0; \tag{1.3.6}$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.3.7}$$

Наслідок 1.22 (прямування до 0 косинусів та синусів перетворення Фур'є)
Нехай $f \in R([-\pi, \pi])$, тоді $\forall [a, b] \subset [-\pi, \pi]$:

1)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{b} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{a}^{b} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x; \tag{1.3.8}$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{b} f(x) \sin(n + \tfrac{1}{2}) x \,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.3.9}$$

Вправа 1.23. Доведіть другий пункт.

Зауваження 1.24 — Другий наслідок є частинним випадком теореми про косинус та синус перетворення Фур'є.

1.4 Інтегральне зображення частинних сум ряду Фур'є

Далі вважаємо функцію f 2π-періодичною, $f \in R([-\pi, \pi])$. Тоді

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\,\mathrm{d}t + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\,\mathrm{d}t \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \right) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Можемо записати останню рівність у вигляді

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.4.2}$$

Означення 1.25. $D_n(x-t)$ — *ядро Діріхле.*

$$\begin{aligned} 2 \sin \tfrac{x}{2} D_n(x) &= \sin \tfrac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \tfrac{x}{2} \cos kx = \\ &= \sin \tfrac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sin(k + \tfrac{1}{2}) - \sin(k - \tfrac{1}{2})x \right) = \\ &= \sin(n + \tfrac{1}{2})x \to 0. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

З останнього маємо

$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2\pi m, \\ n + \frac{1}{2}, & x = 2\pi m. \end{cases} \tag{1.4.4}$$

Властивості 1.26 (ядра Діріхле)

1) неперервне: $\forall n \in \mathbb{N}$: $D_n \in C(\mathbb{R})$;
2) обмежене: $|D_n(x)| \leq n + \frac{1}{2}$;
3) парне: $D(x) = D(-x)$;
4) періодичне з періодом 2π;
5) $|D_n(x)| \leq \frac{\pi}{2|x|}$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Вправа 1.27. Доведіть останню властивість. Підказка: $\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y)D_n(-y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \Big(f(x+t)+f(x-t)\Big)D_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Якщо підставити сюди $f \equiv 1$, то отримаємо $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x = 2$, $a_n = b_n = 0$, тобто $S_n \equiv 1$. Отже,

$$\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{1.4.7}$$

1.5 Принцип локалізації Рімана

Теорема 1.28 (принцип локалізації Рімана)

Якщо f — 2π-періодична, і $f \in R([-\pi,\pi])$, то збіжність/розбіжність її ряду Фур'є у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ залежить лише від "поведінки" f в околі точки x_0.

Доведення. Нехай $\delta \in (0,\pi)$, тоді

$$\begin{aligned} S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}&\int_{-\pi}^{-\delta} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \\ &+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}+ \\ &+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Позначимо

$$I_n(x_0) = \int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t. \tag{1.5.2}$$

Якщо тепер взяти $F(t) = \frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$, то $F \in R([\delta,\pi])$, а тому, за другим наслідком $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, тобто з трьох інтегралів вище лишається лише середній, "локальний". □