Чисельні методи математичної фізики

Риженко А. І.*

15 жовтня 2019 р.

Зміст

4.2 Сітки і сіткові функції

4.2.1 Сітки

1) Одновимірна рівномірна сітка: задана область $\bar{\Omega} = [a, b]$, її границя $\partial\bar{\Omega} = \Gamma$. Власне сітки:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = a + ih, h = (b-a)/N, i = \overline{0, N}\}, \tag{4.2.1}$$
$$\omega_h = \{x_i = a + ih, h = (b-a)/N, i = \overline{1, N-1}\}, \tag{4.2.2}$$

де $\gamma_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h = \{a, b\}$ — вузли на границі.

2) Нерівномірна сітка: там сама область, але

$$\bar{\omega} = \{x_i = x_{i-1} + h_i, \sum_{i=1}^{n} h_i = b - a\}, \tag{4.2.3}$$

де $\gamma_h = \{x_0 = a, x_n = b\}$ — вузли на границі.

3) Просторово-часова сітка: задана область $\bar{Q}_T = \Omega \times [0, T]$, її границя $\partial Q_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Власне сітка:

$$\bar{\omega}_{h,\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \tag{4.2.4}$$

де

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = a + ih, i = \overline{0, N}, h = (b-a)/N\}, \tag{4.2.5}$$
$$\bar{\omega}_\tau = \{t_i = j\tau, j = \overline{0, M}, \tau = T/M\}. \tag{4.2.6}$$

*Риженко Андрій Іванович, `rai-ku@ukr.net`

4) Двовимірна сітка: задана область $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2$, де $\Omega_1 = [a, b]$, і $\Omega_2 = [c, d]$. Власне сітка:

$$\bar{\omega}_{h_1,h_2} = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2}, \tag{4.2.7}$$

де

$$\bar{\omega}_{h_1} = \{x_i = a + ih_1, i = \overline{0, N}, h_1 = (b - a)/N\}, \tag{4.2.8}$$

$$\bar{\omega}_{h_2} = \{y_j = c + jh_2, i = \overline{0, M}, h_2 = (d - c)/M\}. \tag{4.2.9}$$

5) Ω — довільна область у двовимірній площині. Власне сітка:

$$R_{h_\alpha} = \{x_{\alpha_i} = ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \alpha = 1, 2\}, \tag{4.2.10}$$

де

$$R_h = R_{h_1} \times R_{h_2}, \quad \omega_h = R_h \cap \Omega. \tag{4.2.11}$$

4.2.2 Сіткові функції

1) Розглянемо простір $B_1 = C([a, b])$, норма у якому визначається як $\|u\|_C = \max_{a \le x \le b} |u(x)|$. Тоді простір $B_{1,h} = C(\bar{\omega}_h)$, і у ньому норма вже $\|y\|_{C(\omega_h)} = \max_{\omega_h} |y_i|$.

2) Розглянемо (гільбертів) простір $B_1 = H = L_2([a, b])$, норма у якому визначається як $\|u\|^2 = \int_a^b u^2 \,\mathrm{d}x$. Тоді простір $B_{1,h} = L_2(\omega_h)$, і у ньому норма вже

$$\|y\|_{L_2(\omega_h)} = h \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 + \frac{h}{2}(y_0^2 + y_N^2). \tag{4.2.12}$$

По суті нова норма — початковий інтеграл, записаний через формулу трапецій. До речі, проектування для цієї пари просторів матиме вигляд

$$P_{1,h}(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{h} \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x_0 + h/2} u(x) \,\mathrm{d}x, & x = x_0, \\ \dfrac{1}{h} \displaystyle\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \,\mathrm{d}x, & x = x_i, \\ \dfrac{2}{h} \displaystyle\int\limits_{x_N - h/2}^{x_N} u(x) \,\mathrm{d}x, & x = x_N. \end{cases} \tag{4.2.14}$$

3) Розглянемо простір $B_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$, норма у якому визначається як $\|u\|^2 = \int_0^1 (u^2 + u')^2 \,\mathrm{d}x$. Тоді простір $B_{1,h} = W_2^1(\omega_h)$, і у ньому норма вже

$$\|y\|^2 = h \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 + h \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right)^2. \tag{4.2.15}$$

4.3 Апроксимація диференціальних операторів

Диференціальний оператор Au будемо наближати оператором

$$A_h y_h(x) = \sum_{\xi \in Ш(x)} A(x,\xi) y(\xi), \quad x \in \omega_h, \xi \in \omega_h \tag{4.3.1}$$

де $Ш(x)$ — шаблон (множина точок).

Приклад 4.1

Проапроксимуємо оператор $Au = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Розв'язання.

1) Введемо позначення (права різницева похідна, різницева похідна вперед)

$$A_h y_h = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} =: y_{x,i}. \tag{4.3.2}$$

Тоді $Ш(x) = \{x_i, x_{i+1}\}$.

2) Введемо позначення (ліва різницева похідна, різницева похідна назад)

$$A_h y_h = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} =: y_{\bar{x},i}. \tag{4.3.3}$$

Тоді $Ш(x) = \{x_{i-1}, x_i\}$.

3) Введемо позначення (центральна різницева похідна)

$$A_h y_h = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} =: y_{\mathring{x},i}. \tag{4.3.4}$$

Тоді $Ш(x) = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$.

Зауваження 4.2 — Нагадаємо ряди Тейлора:

$$u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(\mathrm{IV})} + O(h^5),$$
$$u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(\mathrm{IV})} + O(h^5),$$

де $u_{i\pm1} = u(x_i \pm h)$.

Обчислимо похибки:

1)

$$\begin{aligned}
\psi_h^A &= A_h u_h - (Au)_h = \\
&= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u_i' = \\
&= \frac{u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + O(h^3) - u_i}{h} - u_i' = \\
&= \frac{hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + O(h^3)}{h} - u_i' = \\
&= u_i' + \frac{h}{2}u_i'' + O(h^2) - u_i' = \\
&= \frac{h}{2}u_i'' + O(h^2).
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\psi_h^A &= A_h u_h - (Au)_h = \\
&= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - u_i' = \\
&= \frac{u_i - \Big(u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + O(h^3)\Big)}{h} - u_i' = \\
&= \frac{hu_i' - \frac{h^2}{2}u_i'' + O(h^3)}{h} - u_i' = \\
&= u_i' - \frac{h}{2}u_i'' + O(h^2) - u_i' = \\
&= -\frac{h}{2}u_i'' + O(h^2).
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\psi_h^A &= A_h u_h - (Au)_h = \\
&= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h} - u_i' = \\
&= \frac{u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(\mathrm{IV})} + O(h^5)}{2h} - \\
&\quad - \frac{u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(\mathrm{IV})} + O(h^5)}{2h} - u_i' = \\
&= \frac{2hu_i' + \frac{2h^3}{6}u_i''' + O(h^5)}{2h} - u_i' = \\
&= u_i' + \frac{h^2}{6}u_i''' + O(h^4) - u_i' = \\
&= \frac{h^2}{6}u_i''' + O(h^4).
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Тут ми розплачуємося необхідністю $u \in C^3([a, b])$

Приклад 4.3

Проапроксимемо оператор $Au = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} A_h y_h &= (y_{\bar{x}})_{x,i} = \\ &= y_{\bar{x}x,i} = \\ &= \frac{y_{\bar{x},i+1} - y_{\bar{x},i}}{h} = \\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = \\ &= \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Похибка:

$$\psi_h^A = A_h u_h - (Au)_h = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - u_i'' = \ldots = \frac{h^2}{12} u_i^{((IV)} + O(h^4). \tag{4.3.7}$$

Тут ми розплачуємося необхідністю $u \in C^4([a,b])$

Приклад 4.4

Проапроксимемо оператор

$$Au = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right). \tag{4.3.8}$$

оператором

$$A_h y_h = (a y_{\bar{x}})_{x,i} \tag{4.3.9}$$

так, щоб похибка мала другий порядок.

Розв'язання. Розглянемо одразу похибку апроксимації:

$$\begin{aligned} \varphi_h^A &= A_h y_h - (Au)_h = \\ &= (a u_{\bar{x}})_{x,i} - (ku')' = \\ &= \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right) - (ku')_i' = \\ &= \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\left(u_i' + \frac{h}{2}u_i'' + \frac{h^2}{6}u_i'''\right) - a_i\left(u_i' - \frac{h}{2}u_i'' + \frac{h^2}{6}u_i'''\right)\right) + O(h^2) - k_i' u_i - k_i u_i'' = \\ &= \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - k_i'\right) u_i' + \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2} - k_i\right) u_i'' + \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{6}\right) h u_i''' + O(h^2). \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Бачимо, що похибка буде $O(h^2)$ якщо

$$\begin{cases} \dfrac{a_{i+1} - a_i}{h} = k_i' + O(h^2), \\ \dfrac{a_{i+1} + a_i}{2} = k_i + O(h^2). \end{cases} \tag{4.3.11}$$

Зрозуміло, що існує не єдине a_i для яких похибка буде $O(h^2)$. Далі

$$2a_i = 2 \cdot (4.3.11)(2) - h \cdot (4.3.11)(1) = 2k_i - hk_i' + O(h^2),$$

звідки

$$a_i = k_i - \frac{h}{2}k_i' + O(h^2),$$

отримали розвинення в ряд Тейлора. Можемо також записати будь-яким зручним нам способом із наступних:

$$a_i = k_{i-1/2} = k\left(x_i - \frac{h}{2}\right),$$
$$a_i = \frac{k_i + k_{i-1}}{2},$$
$$a_i = \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}}\right)^{-1}.$$

Приклад 4.5

Проапроксимуємо оператор

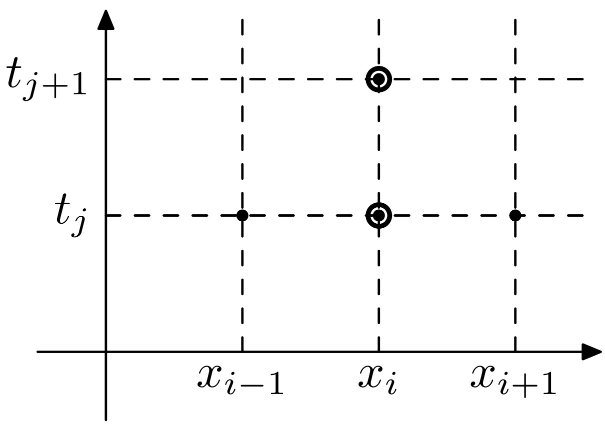
$$Au = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.3.12}$$

Розв'язання. Пригадаємо, що для просторово-часових областей сітки мають вигляд $\bar{\omega}_{h,\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$.

1) Один з варіантів — взяти наступну апроксимацію:

$$A_h y_h = y^j_{t,i} + y^j_{\bar{x}x,i}. \tag{4.3.14}$$

Тоді $Ш(x) = \{(x_{i-1}, t_j), (x_i, t_j), (x_{i+1}, t_j), (x_i, t_{j+1})\}$:



2) Інший варіант – взяти апроксимацію

$$A_h y_h = y_{t,i}^{j} + y_{\bar{x}x,i}^{j+1} \tag{4.3.15}$$

Тоді Ш$(x) = \{(x_{i-1}, t_{j+1}), (x_i, t_{j+1}), (x_{i+1}, t_{j+1}), (x_i, t_j)\}$: