

# Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.\*

22 вересня 2019 р.

## Зміст

<b>1 Дробові диференціальні рівняння</b>	<b>1</b>
1.1 Основи дробового числення . . . . .	1

## 1 Дробові диференціальні рівняння

Перш за все наведемо мінімальну мотивацію вивчення дробових диференціальних рівнянь. Нагадаємо, що класичне рівняння дифузії має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x, t), \quad (1.1)$$

де функція  $f(x, t)$  відповідає джерелам речовини, що дифузує.

Втім, у реальному житті зустрічаються процеси, у яких дифузія відбувається повільніше/швидше, ніж передбачає рівняння (1.1). Для постановки відповідних рівнянь необхідно вводити дробові похідні (похідні дробових порядків).

### 1.1 Основи дробового числення

Розглянемо  $f(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Позначимо

$$(I_0^1 f)(t) = \int_0^t f(s) \, ds. \quad (1.2)$$

Також визначимо рекурсивно

$$(I_0^n f)(t) = I_0^1(I_0^{n-1} f)(t) = \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n) \, ds_n \cdots ds_1. \quad (1.3)$$

Подібне визначення не дуже зручне з обчислювальної точки зору, тому наступна теорема стане нам у пригоді.

---

\*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

**Теорема 1.1** (формула Коші-Діріхле)

Для  $f \in L_1([0, T])$ ,  $t \in [0, T]$  має місце

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) \, ds. \quad (1.4)$$

*Доведення.* Доведення проведемо за методом математичної індукції по  $n$ . **База**  $n = 1$  виконується безпосередньо за визначенням  $I_0^1$ . **Перехід:** нехай

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) \, ds. \quad (1.5)$$

Тоді

$$\begin{aligned} (I_0^{n+1} f)(t) &= I_0^1(I_0^n f)(t) = \int_0^t (I_0^n f)(s) \, ds = \\ &= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \left( \int_0^s (s-\xi)^{n-1} f(\xi) \, d\xi \right) ds = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \int_\xi^s f(\xi) (s-\xi)^{n-1} \, ds \, d\xi = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\xi) \frac{(s-\xi)^n}{n} \Big|_{s=\xi}^{s=t} d\xi = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^t f(\xi) \frac{(t-\xi)^n}{1} d\xi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

З точністю до назв змінних отримали що хотіли. □

**Зауваження 1.2** — Перехід від другого рядка до третього тут відбувається за теоремою Фубіні. Наступна картинка може допомогти у розумінні:

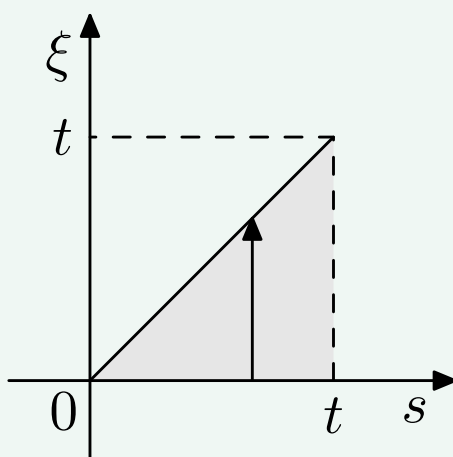


Рис. 1: При  $s : 0 \rightarrow t$  маємо  $\xi : 0 \rightarrow s$ .

Формула Коші-Діріхле мотивує введення інтегральних операторів нецілого порядку.

**Означення 1.3.** Інтегралом Рімана-Ліувілья порядку  $\alpha > 0$  з нижньою межею 0 функції  $f$  називається оператор

$$(I_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.7)$$

Також окремо зауважимо, що  $I_0^0 f = f$ .

#### Приклад 1.4

Справді, для  $\alpha \in \mathbb{N}$  маємо  $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ , тобто власне формулу Коші-Діріхле.

**Зауваження 1.5 —** Нагадаємо, що  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ .

Взагалі кажучи, подібний вираз нагадує функцію згортки зі степеневою функцією порядку  $\alpha$ :

$$I_0^\alpha f = f \star y_\alpha, \quad (1.8)$$

де  $y_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ , а операція  $\star : (\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  визначається наступним чином:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds. \quad (1.9)$$

Давайте тепер поміркуємо, як можна визначити диференціальний оператор дробового порядку, маючи відповідні інтегральні оператори. Взагалі кажучи, єдиної відповіді на це питання немає, як показує наступна картинка:

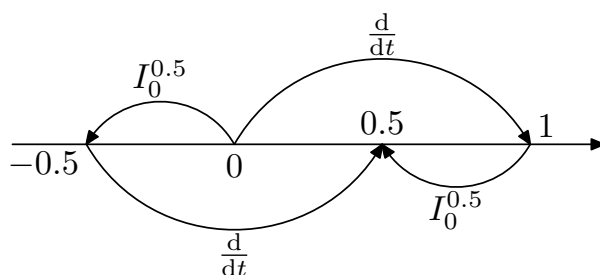


Рис. 2: Різні способи визначення диференціального оператора нецілого порядку

Введемо наступне допоміжне поняття для спрощення подальших позначень і формулювань:

**Означення 1.6.** Нехай  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тоді *стеля*  $\lceil \alpha \rceil$  — найменше ціле число, що не менше за  $\alpha$ . Також інколи кажуть *верхня ціла частина*  $\alpha$ .

Нехай  $\alpha > 0$ ,  $n = \lceil \alpha \rceil$ .

**Означення 1.7.** *Похідною за Канuto* функції  $f$  порядку  $\alpha$  з нижньою межею 0 називається оператор

$$(*D_0^\alpha f)(t) = I_0^{n-\alpha} \left( \frac{d^n f}{dt^n} \right). \quad (1.10)$$

**Означення 1.8.** *Похідною Римана-Ліувілля* функції  $f$  порядку  $\alpha$  з нижньою межею 0 називається оператор

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_0^{n-\alpha} f). \quad (1.11)$$

### Приклад 1.9

На рисунку вище  $D_0^{0.5} = \frac{d}{dt} I_0^{0.5}$ , а  $*D_0^{0.5} = I_0^{0.5} \left( \frac{d}{dt} \right)$ .

Взагалі кажучи виникає питання коли введені вище похідні існують. Для відповіді на це питання нам знадобиться наступне:

**Означення 1.10.** Функція  $f$  називається *абсолютно неперервною* (eng. AC, absolutely continuous) на проміжку  $I$  якщо  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \dots \leq x_n < y_n$ :

$$\sum_{k=1}^n (y_k - x_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon. \quad (1.12)$$

Так от для AC функцій їхні похідні інтегровні (з нецілим порядком), тобто похідні (з нецілим порядком) існують.

Поняття абсолютної неперервності має нагадувати поняття рівномірної неперервності (eng. UC, uniformly continuous). Зрозуміло, що з абсолютної неперервності випливає ( $n = 1$ ) рівномірна неперервність, але зворотнє не виконується.

**Вправа 1.11.** Наведіть приклад рівномірно неперервної але не абсолютно неперервної функції.

**Розв'язання.** Функція Кантора є класичним прикладом такої функції. нагадаємо, що функція Кантора визначається як

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}, & x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \in \mathcal{C}, \\ \sup_{y \leq x, y \in \mathcal{C}} c(y), & x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}, \end{cases} \quad (1.13)$$

де  $\mathcal{C}$  — множина Кантора, а  $b_n$  — тернарні “біти” числа  $x$ , тобто  $b_n \in \{0, 2\}$ .

Для наглядності наведемо графік функції Кантора:

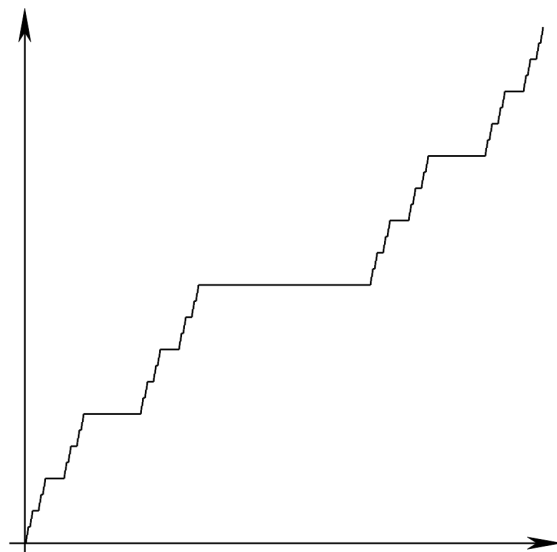


Рис. 3: функція Кантора

Як і кожна неперервна функція на компактї  $([0, 1])$ , вона є рівномірно неперервною на ньому. Втім, вона не є абсолютно неперервною, адже  $\mu(\mathcal{C}) = 0$ , тобто  $\forall \delta > 0$  знайдуться інтервали сумарною довжиною  $< \delta$  що покривають  $\mathcal{C}$ , а тому зміна значення  $c(\cdot)$  на них складатиме  $1 > \varepsilon$ .

Виникає закономірне запитання: чи існує аналог формули Коші-Діріхле для диференціальних операторів? Виявляється, що так, хоча він і не зовсім такий, як можна було б очікувати.

#### Теорема 1.12

Нехай  $f \in AC^n([0, T])$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $n = \lceil \alpha \rceil$ . Тоді

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t - s)^{\alpha+1-n}} ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1 + k - \alpha)t^{\alpha-k}}. \quad (1.14)$$

#### Приклад 1.13

Зокрема, при  $0 < \alpha < 1$  маємо  $f \in AC([0, T])$  і

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t - s)^\alpha} ds + \frac{f(0)}{\Gamma(1 - \alpha)t^\alpha}. \quad (1.15)$$

**Зауваження 1.14** — Як показує формула,  ${}^*D_0^\alpha, D_0^\alpha$  — нелокальні оператори.

*Доведення.* Доведемо частинний випадок  $0 < \alpha < 1$ :

$$\begin{aligned}
 (D_0^\alpha f)(t) &= \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} f = \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds = \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t f(s) \frac{d(-(t-s)^{1-\alpha})}{1-\alpha} ds = \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \left. \frac{-f(s)(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t f'(s) \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} ds \right) = \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(0)t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f'(s)(t-s)^{1-\alpha} ds \right) = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(0)}{t^\alpha} + \int_0^t f'(s)(t-s)^{-\alpha} ds \right).
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

□

**Зауваження 1.15** — Тут при переході від другого рядочка до третього ми скористалися інтегруванням за частинами, а в останньому переході — формулою Лейбніца:

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt. \tag{1.17}$$

На завершення визначимо ще кілька корисних для подальшого дослідження об'єктів:

**Означення 1.16.** Інтегралом Рімана-Ліувілья з нижньою межею  $a$  називається

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds. \tag{1.18}$$

**Означення 1.17.** Інтегралом Рімана-Ліувілья з правою межею для  $t < T$  називається

$$(I_a^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T f(s)(t-s)^\alpha ds. \tag{1.19}$$