Міністерство освіти ти науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Реферат на тему:
«Фазова похибка різницевих схем.
Схема Лейта»

Виконав студент групи ОМ-4
Скибицький Нікіта

Київ, 2019

Зміст

1 Схема Лейта

Побудуємо схему для одновимірної течії нестисливої рідини, використавши лагранжевий опис руху рідини, при якому стежать за рухом частинок.

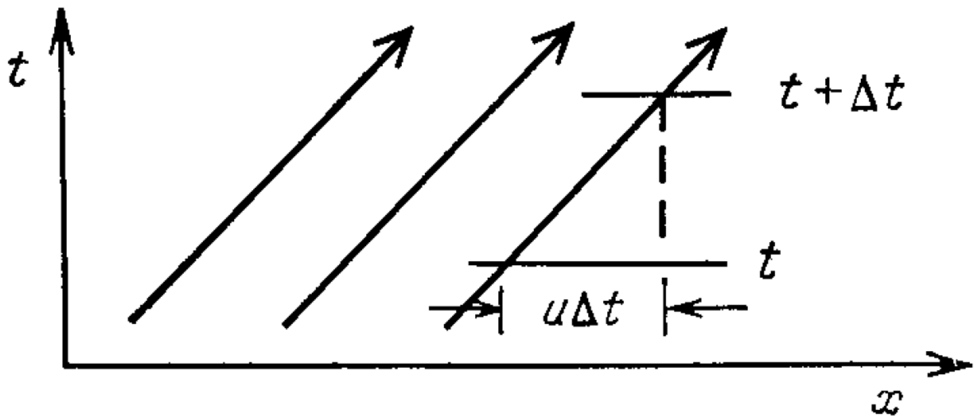

Рис. 1: Траєкторії частинок в площині (x, t) при $u = \text{const}$

На рис. 1 стрілками показано траєкторії (криві в площині (x, t)) частинок рідини для одновимірної задачі для постійної швидкості u. При зміні часу від t до $t+\Delta t$ частинки переміщуються у напрямку x на відстань $u\Delta t$. Позначимо тепер кожну частинку, приписавши їй значення ζ, причому ζ може бути будь-якою природньою властивістю, пов'язаною з окремою частинкою рідини. У випадку відсутності дифузії кожна частинка рідини буде зберігати своє значення ζ. Таким чином, траєкторії, зображені на рис. 1, є лініями рівня ζ.

Рівняння конвекції для нев'язкої рідини

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{u \partial \zeta}{\partial x} \tag{1}$$

означає саме те, що ζ є деякою властивістю рідини, що не змінюється під час руху. Це є визначенням субстаціональної похідної, що у позначеннях Лагранжа записується як

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u \partial \zeta}{\partial x}. \tag{2}$$

Похідна $D\zeta/Dt$ пов'язана з частинкою рідини, а рівняння конвекції для нев'язкої рідини означає саме те, що $D\zeta/Dt = 0$, тобто значення ζ будь-якої частинки є незмінним.

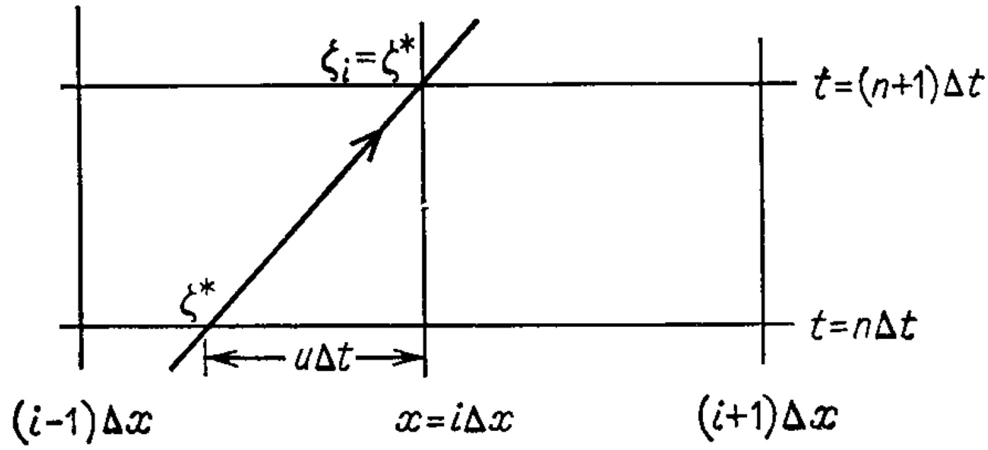

Рис. 2: Перенесення величини ζ^*

Як показує рис. 2, рівняння конвекції без урахування в'язких членів означає, що $\zeta_i^{n+1} = \zeta^*$. Побудова скінченно-різницевих рівнянь зводиться до задачі приблизного визначення ζ^* за допомогою якоїсь інтерполяції за відомими значеннями ζ^n.

Помітимо, що за деякої комбінації параметрів траєкторія проходить через вузлову точку з координатами $i-1$ та n. У цьому випадку $\zeta^* = \zeta_{i-1}^n$, тобто ζ^* знаходиться точно, без додавання помилки при інтерполяції. Необхідна для цього умова (див. рис. 2) має вигляд $u\Delta t = \Delta x$, або $C = 1$; отже, при числі Куранта, що дорівнює одиниці, виходить точний розв'язок $\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-1}^n$.

Розглянемо тепер більш загальну умову $C \neq 1$. Якщо $u\Delta t < \Delta x$, то точка зі значенням ζ^* знаходиться між точками i та $i-1$ (з рис. 2). Використовуючи для приблизного визначення ζ^* інтерполяцію по точкам $i-1$, i та $i+1$, використовуючи квадратичний апроксимуючий поліном, отримуємо схему Лейта:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n - \frac{1}{2}\left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left(\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n\right). \tag{3}$$

Число Куранта $C = u\Delta t/\Delta x$ тепер можна розглядати як *параметр інтерполяції*. Обмеження $C \leq 1$, що накладається умовою стійкості, яка застосовується для різницевого рівняння (3), тепер можна інтерпретувати як вимогу, що ζ^* повинно визначатися інтерполяцією, а не екстраполяцією.

2 Штучне затухання

Якщо всі члени, що входять в рівняння (3), розкласти в ряди Тейлора в околі точки (i, n), то вийде

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3) = -\frac{u\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Delta x - \frac{1}{6}\frac{u\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\Delta x^3 + \frac{1}{2}\frac{u^2\Delta t^2}{\Delta x^2}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Delta x^2 + O(\Delta x^4)\right], \tag{4}$$

або

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta t\left[-\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + u^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right] + O(\Delta t^2, \Delta x^2). \tag{5}$$

В рівнянні (5) член, що стоїть в квадратних дужках, при постійному u дорівнює нулю. Коефіцієнт при $\partial^2\zeta/\partial x^2$ дорівнює нулю, і в схемі Лейта немає схемної штучної в'язкості. Таким чином, схема Лейта, фактично представляючи рівняння для нев'язкої рідини в різницевій формі з похибкою порядку $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, приводить до тієї самої формули (3), що й схема з різницями вперед по часу та центральними по просторовій змінній, що дає при застосуванні до повного рівняння для в'язкої рідини похибку порядка $O(\Delta t, \Delta x)$ при $\alpha_e = 0.5u^2\Delta t$.

Однак при дослідженні тільки стаціонарних рівнянь для цієї схеми знову виходить $\alpha_e = 0.5u^2\Delta t$, звідки випливає, що стаціонарне рівняння залежить від Δt та має лише перший порядок точності. Така аномалія пов'язана з необхідністю поставновки додаткової умови на вихідній границі потоку при використанні центральних різниць для похідних по просторовим змінним.

Зауважимо ще один важливий момент, на який зазвичай не зважають уваги. Якщо в рівнянні, що включає в себе конвективний і в'язкий члени, для конвективного члена використовується схема Лейта, то схемна штучна в'язкість має конкретний вигляд $\alpha_e = 0.5u^2\Delta t$, за виключенням єдиного випадку, коли $C = 1$.

3 Стійкість

Аналіз стійкості за допомогою метода фон Неймана можно зробити дуже просто – шляхом підстановки ($\zeta_i^n = V^n \exp{(Ii\theta)}, \theta = k_x\Delta x$), скорочень та тотожніх перетворень отримуємо для множника переходу в схемі Лейта:

$$G = 1 - C^2(1-\cos\theta) - IC\sin\theta, \tag{6}$$

звідки випливає, що

$$|G|^2 = 1 + C^2(C^2-1)(1-\cos\theta)^2, \tag{7}$$

і для стійкості повинні виконуватися нерівності

$$-1 \le 1 + C^2(C^2-1)(1-\cos\theta)^2 \le 1. \tag{8}$$

Легко перевірити, що ліва нерівність виконується завжди, а права – тільки при $C \le 1$.

4 Фазова похибка

Лейт провів аналіз похибок у випадку, коли $C \ll 1$, а θ мале, що є цікавим для метеорологічних розрахунків. Перша умова зумовлена тим, що метеорологічні розрахунки проводяться для малих Δt, а друга пов'язана з тим, що найбільш цікавими тут є довгохвильові (відносно Δx) збурення, коли $\theta = k_x\Delta x = 2\pi\Delta x/\Lambda \ll 1$.

Точна фазова швидкість для диференціального рівняння для всіх θ буде u. Розв'язок диференціального рівняння можна (не вважаючи на вплив границь) записати у вигляді:

$$\zeta(x,t) = \zeta(x-u\tau, t-\tau), \tag{9}$$

де τ – довільний зсув по часу. Цей розв'язок можна записати через Фур'є-компоненти із хвильовим числом k_x та відповідною амплітудою V:

$$\zeta_{k_x} = V\exp{(Ik_x(x-ut))}\,, \tag{10}$$

або

$$\zeta_{k_x}(x,t) = V\exp{(I(\theta - k_xut))}\,. \tag{11}$$

Продиференціювавши (10), отримаємо

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -Iuk_x\zeta \quad \text{і} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = Ik_x\zeta, \tag{12}$$

тобто рівняння

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{u \partial \zeta}{\partial x} \tag{13}$$

виконується точно.

Отже, точний зсув за фазою за час τ для розв'язання диференціального рівняння дорівнює $\Delta\theta = -k_x u \tau$. Порівнямо тепер цей результат із зсувом по фазі для диференціального рівняння (ДР) в часткових похідних за час $\tau = \Delta t$:

$$(\Delta\theta)_{\text{ДР}} = -k_x u \Delta t = -k_x C \Delta x, \tag{14}$$

тобто

$$(\Delta\theta)_{\text{ДР}} = -C\theta. \tag{15}$$

Фактичний зсув за фазою для скінчено-різницевого рівняння (СРР) знаходиться з геометричних міркувань та визначається рівністю

$$\sin\left[(\Delta\theta)_{\text{СРР}}\right] = \frac{\operatorname{Im} G}{|G|}. \tag{16}$$

З рівняння (6) маємо $\operatorname{Im} G = -C\sin\theta$. Поклавши $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$ та використовуючи, що $|G| \approx 1 - C^2\theta^2/8$ (виводиться з (7), використовуючи, що $C^4 \ll C^2$, $1 - \cos\theta \approx \theta^2/2$ та $(1-\varepsilon)^{1/2} \approx 1 - \varepsilon/2$ при $\varepsilon \ll 1$), отримуємо

$$(\Delta\theta)_{\text{СРР}} = \frac{-C\sin\theta}{1 - C^2\theta^4/8}, \tag{17}$$

або, оскільки $(1-\varepsilon)^{-1} \approx 1 + \varepsilon$ при $\varepsilon \ll 1$,

$$(\Delta\theta)_{\text{СРР}} = -C\sin\theta(1 + C^2\theta^4/8). \tag{18}$$

Для зручності порівняння з (15) перепишемо (18) у вигляді

$$(\Delta\theta)_{\text{СРР}} = -C\theta r, \tag{19}$$

де

$$r = \frac{\sin\theta}{\theta}\left(1 + \frac{C^2\theta^4}{8}\right) \approx \frac{\sin\theta}{\theta}. \tag{20}$$

Оскільки θ мале, то, розклавши $\sin\theta$ в ряд, отримуємо

$$r \approx \frac{\theta - \theta^3/3! + O(\theta^5)}{\theta}, \tag{21}$$

або

$$r \approx 1 - \theta^2/6 < 1. \tag{22}$$

Порівнюючи нерівності (15) та (19), бачимо, що в скінчено-різницевому розв'язку кожна Фур'є-компонента переноситься вздовж вісі x повільніше за рахунок множника $r(\theta) < 1$. В точному розв'язку диференційного рівняння в частинних похідних (ДР) всі компоненти переносяться за рахунок конвекції зі швидкістю u; в розв'язку скінчено-різницевих рівнянь залишаються всі Фур'є-компоненти точного розв'язку, але різні компоненти переносяться з різними швидкостями. Ця похибка більша для більших θ, тобто для більш коротких хвиль Λ. Таким чином, в процесі чисельного розв'язання різні Фур'є-компоненти будуть відхилятися одна від одної та диспергувати; це явище часто називають *дисперсійною похибкою*.

Фазова похибка за один крок по часу буде $E_\theta = (\Delta\theta)_{\text{СРР}} - (\Delta\theta)_{\text{ДР}}$. З формул (15), (19) знаходимо, що

$$E_\theta \approx -C\sin\theta - (-C\theta) = -C[\theta - \theta^3/3! + \ldots - \theta], \tag{23}$$

або

$$E_\theta \approx C\theta^3/6. \tag{24}$$

Таким чином, фазова похибка має третій порядок по θ, а отже, третій порядок і по x.

Граничний випадок коротких довжин хвиль можно разглянути без додаткових приблизних припущень. При $C < 1$ з рівняння (7) випливає, що $|G|^2 < 1$, за винятком випадку, коли $\theta = 0$. З рівності (6) маємо, що $\operatorname{Im} G = -C \sin\theta$. В границі при $\theta \to \pi, \operatorname{Im}(G) \to 0$ та з рівності (16) отримуємо, що $\sin\Delta\theta \to 0$ або $(\Delta\theta)_{\mathrm{CPP}} \to 0$. Таким чином, фазова похибка буде повною, причому Фур'є-компонента з найменшою довжиною хвилі стає повністю стаціонарною.

При $C = 1$ з рівності (7) випливає, що $|G|^2 = 1$. Тут фазова похибка також зникає, оскільки рівність (16) набуває вигляду

$$[\sin(\Delta\theta)]_{\mathrm{CPP}} = -\frac{\sin\theta}{1}, \tag{25}$$

або

$$(\Delta\theta)_{\mathrm{CPP}} \approx -\theta, \tag{26}$$

що відповідає рівності (15) для точного розв'язку при $C = 1$.

В роботі Фромма [1968] наведені ізолінії фазової та амплітудної похибок схеми Лейта в залежності від параметрів C і θ. Відзначається гарна поведінка цих ліній у граничних випадках $C \to 1$ і $\theta \to 0, 2\pi$.

Якщо є інтерес тільки до стаціонарного розв'язку, то фазові похибки не є цікавими. Але в нестаціонарному розв'язку вони можуть грати важливу роль. Базуючись на формулі (24) Лейт знайшов, що число N кроків по часу, при якому отримується фазова похибка в один радіан, дорівнює $N = 6/(C\theta^3)$. Лейт вважає, що при чисельних розрахунках фазові похибки виявляються важливішими за амплітудні похибки.

Література

[1] Роуч П. *Вычислительная гидродинамика.* М. "Мир", 1980

[2] Андерсон Д., Танненхилл Дж., Плетчер Р. *Вычислительная гидродинамика и теплообмен.* Том 1, 2. М. "Мир", 1990