Чисельні методи математичної фізики

Риженко А. І.*

22 вересня 2019 р.

Зміст

1 Проекційні методи. Метод моментів. Метод Бубнова-Гальоркіна

Розгялнемо рівняння

$$Au = f, \tag{1.1}$$

де $A : E \to F$ — лінійний, діє на парі лінійниї нормованих просторів, $D(A) \subseteq E$, $R(A) \subseteq F$.

Розглянемо послідовність підпросторів $E_n \subseteq D(A)$, $F_n \subseteq F$. Введемо лінійні *оператори проектування* $P_n : F \to F_n$ такі, що $P_n^2 = P_n$. Тоді можна розглянути послідовність рівнянь

$$P_n(Au_n - f) = 0, \tag{1.2}$$

із розв'язками $u_n \in E_n$. Враховуючи лінійність операторів проектування маємо $P_n(Au_n) = P_n f$. Зрозуміло, що у залежності від вибору E_n, F_n, P_n отримаємо різні *проекційні розв'язки* u_n.

Нехай надалі E, F — гільбертові простори.

Означення 1.1. Розглянемо лінійно незалежні системи функцій $\{\varphi_i\} \in D(A)$ і $\{\psi_i\} \in F$. Система $\{\varphi_i\}$ називається *координатною*, а система $\{\psi_i\}$ — *проекційною*.

У якості E_n візьмемо $\mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а в якості F_n — $\mathcal{L}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$.

*Риженко Андрій Іванович, `rai-ku@ukr.net`

Твердження 1.2

Тоді для виконання умови $P_n^2 = P_n$ достатньо, аби $P_n|_{F_n}$ був тотожнім оператором.

Доведення. Справді, тоді $P_n f = f_n \in F_n$ і $P_n^2 f = P_n f_n = f_n$. □

Розв'язок задачі (1.2) будемо шукати у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i. \tag{1.3}$$

Лема 1.3

Для довільного елементу $\psi \in F$ рівність

$$P_n \psi = 0 \tag{1.4}$$

та система рівностей

$$(\psi, \psi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \tag{1.5}$$

рівносильні.

Доведення. Нехай виконується (1.4), тоді маємо

$$(\psi, \psi_j) = (\psi, P_n \psi_j) = (P_n \psi, \psi_j) \overset{(1.4)}{=} (0, \psi_j) = 0,$$

тому виконується (1.5).

В інший бік: нехай виконується (1.5), тоді

$$(P_n \psi, P_n \psi) = \left(P_n \psi, \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j \right) = \left(\psi, \sum_{j=1}^{n} a_j P_n \psi_j \right) = \\ = \left(\psi, \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} (\psi, \psi_j) \overset{(1.5)}{=} 0.$$

□

Зауваження 1.4 — Тут ми скористалися самоспряженістю оператора проектування, хоча і не довели її.

Вправа 1.5. Доведіть, що P_n — самоспряжений оператор.

Розв'язання. Нехай $x = \psi_x + f_x$, $y = \psi_y + f_y$ де $\psi_x, \psi_y \in F_n$ а $f_x, f_y \in F_n^{\perp}$, тоді

$$(P_n x, y) = (\psi_x, \psi_y + f_y) = (\psi_x, \psi_y) = (\psi_x + f_x, \psi_y) = (x, P_n y).$$

Зауваження 1.6 — Тут ми скористалися тим, що $F = F_n \oplus F_n^{\perp}$. Це, взагалі кажучи, не так, якщо F_n нескінченновимірний, але ми не оперуємо з такими просторами, тому все законно.

Таким чином, ми можемо знайти розв'язок

$$(Au_n - f, \psi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.6}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді (1.3) і підставляємо в (1.6):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_i, \psi_i) = (f, \psi_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.7}$$

Це і є **метод моментів**.

Алгоритм 1.7.

1) Обираємо повну систему лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_i\} \in D(A)$;

2) Обираємо замкнену систему лінійно-незалежних функцій $\{\psi_i\} \in F$;

3) Шукаємо розв'язки у вигляді $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$, отримуємо СЛАР (1.7).

Зауваження 1.8 — Якщо $\psi_j = \varphi_j$, то отримуємо метод Бубнова-Гальоркіна. Для нього система має вигляд

$$(Au_n - f, \psi_j) = 0,$$

або, у розгорнутому вигляді,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.8}$$

Зауваження 1.9 — У книжці Ляшка, Макарова, і Скоробагатько "Методы вычис..." наведена загальна теорема про збіжність.

2 Виділення самоспряженого оператору. Узагальнений розв'язок

Для ситуації, коли

$$A = A_0 + B, \tag{2.1}$$

де A_0 — самоспряжений додатновизначений оператор введемо розглянемо рівняння

$$[u, v] + (Bu, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_{A_0}, \tag{2.2}$$

де

Означення 2.1. H_{A_0} — *енергетичний простір* зі скалярним добутком

$$[u,v]=(A_0u,v)$$

і породженю ним нормою

$$\|u\|_{A_0}=|[u]|=\sqrt{[u,u]}.$$

Зауваження 2.2 — Енергетичний простір у чомусь ідеологічно схожий на слабкий топологічний простір.

Тоді алгоритм Бубнова-Гальоркіна набуває вигляду

1) Обираємо повну систему лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_i\}\in H_{A_0}$;

2) $H_n=\mathcal{L}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$;

3) Шукаємо розв'язки у вигляді $u_n=\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$.

У такій ситуації маємо

$$[u_n,\varphi_j]+(Bu_n,\varphi_j)=(f\varphi_j), \tag{2.3}$$

тобто

$$L\vec{c}=\vec{f}, \tag{2.4}$$

де

$$L_{ij}=[\varphi_i,\varphi_j]+(B\varphi_i,\varphi_j),\quad \vec{f}=(f,\varphi_j),\quad i,j=\overline{1,n}.$$

Означення 2.3. Послідовність просторів E_n називається *гранично щільною* в E, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\varphi,u_n)=\lim_{n\to\infty}\inf_{u_n\in E_n}\|\varphi-u_n\|=0,\quad \forall f\in E. \tag{2.5}$$

Означення 2.4. Оператор A називається *майже всюди неперервним*, якщо $A=A_1+A_2$, де $\|A_2\|\le\varepsilon$, а $A_1u=\sum_{i=1}^n(u,\varphi_i)\psi_i$.

Теорема 2.5

Нехай (1.1) має єдиний розв'язок, $A_0^{-1}B$ є майже всюди неперервним, а H_n — гранично щільною в H_{A_0}, тоді алгоритм Бубнова-Гальоркіна генерує єдиний розв'язок задачі (2.4), причому послідовність цих розв'язків збігається до розв'язку задачі (1.1) у просторі H_{A_0}.

Приклад 2.6

Розглянемо найпростіше диференціальне рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b \tag{2.6}$$

з крайовими умовами першого роду

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2.7}$$

Його класичний двічі неперервно диференційовний (з $C^2([a,b])$) розв'язок існує за умов $k(x) \geq k_0 > 0$, $k \in C^1((a,b))$, $p, q, f \in C(a,b)$.

Розгялнемо тепер системи функцій φ_i, ψ_i:

1) $\varphi_i = (x-a)^i(b-x)$;

2) $\varphi_i = \sin\left(\dfrac{x-a}{b-a} i\pi\right)$;

і $\psi_i = x^{i-1}$, $i = \overline{1,n}$.

Тоді у класичному методі моментів будемо мати

$$(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

і

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (-(k\varphi_i')' - p\varphi_i' + q\varphi_i)\psi_j\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\psi_j\,\mathrm{d}x, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.8}$$

Зауваження 2.7 — У методі Бубнова-Гальоркіна матимемо

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (-(k\varphi_i')' - p\varphi_i' + q\varphi_i)\varphi_j\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\varphi_j\,\mathrm{d}x, \quad j = \overline{1,n}.$$

Приклад 2.8

Нехай $f \in L_2$ $(p, q, k' \in L_2)$, тоді отримуємо $W_2^2((a,b))$.

Приклад 2.9

Нехай $f \in W_2^{-1}$, тоді $u \in W_2^1((a,b))$, а $D(A) = \{u \in W_2^1([a,b]), u(a) = u(b) = 0\}$.

Зауваження 2.10 — Оскільки тепер функція має лише першу похідну, то необхідно переписати (2.8):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b (k\varphi_i'\varphi_j' - p\varphi_i'\varphi_j + q\varphi_i\varphi_j)\,\mathrm{d}x - k\varphi_i'\varphi_j\big|_{x=a} + k\varphi_i'\varphi_j\big|_{x=b} = \int_a^b f\varphi_j\,\mathrm{d}x.$$

Зауваження 2.11 — Якщо $f \in W_2^{-1}$, то $f = f_0 - \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}$, де $f_0, f_1 \in L_2$, тому базисними функціями для цієї ситуації можна взяти "штафетини":

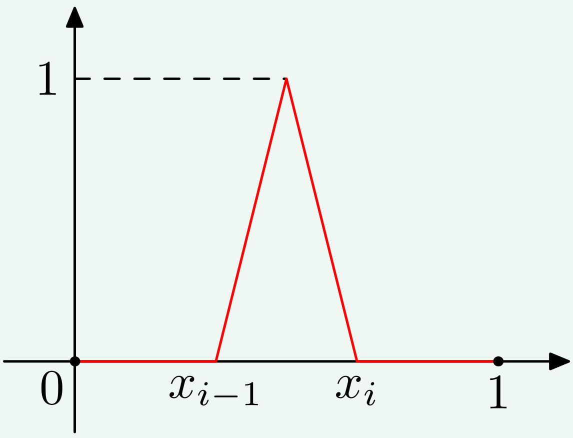

Рис. 1: "штафетина" від x_{i-1} до x_i.