

Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

13 жовтня 2019 р.

Зміст

1	Дробові диференціальні рівняння	1
1.1	Основи дробового числення	1
1.2	Властивості дробових похідних	7
1.2.1	Властивості похідних Рімана-Ліувілля	8
1.2.2	Властивості похідних за Капуто	12
1.3	Початкові значення	13
1.3.1	Початкові значення інтегралу	13
1.3.2	Початкові значення похідних	15
1.4	Перетворення Лапласа дробових інтегралів і похідних	16
2	Моделі аномальної дифузії	20

1 Дробові диференціальні рівняння

Перш за все наведемо мінімальну мотивацію вивчення дробових диференціальних рівнянь. Нагадаємо, що класичне рівняння дифузії має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x, t), \quad (1.1)$$

де функція $f(x, t)$ відповідає джерелам речовини, що дифузує.

Втім, у реальному житті зустрічаються процеси, у яких дифузія відбувається повільніше/швидше, ніж передбачає рівняння (1.1). Для постановки відповідних рівнянь необхідно вводити дробові похідні (похідні дробових порядків).

1.1 Основи дробового числення

Розглянемо $f(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$. Позначимо

$$(I_0^1 f)(t) = \int_0^t f(s) ds. \quad (1.2)$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Також визначимо рекурсивно

$$(I_0^n f)(t) = I_0^1(I_0^{n-1} f)(t) = \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \dots ds_1. \quad (1.3)$$

Подібне визначення не дуже зручне з обчислювальної точки зору, тому наступна теорема стане нам у пригоді.

Теорема 1.1 (формула Коші-Діріхле)

Для $f \in L_1([0, T])$, $t \in [0, T]$ має місце

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds. \quad (1.4)$$

Доведення. Доведення проведемо за методом математичної індукції по n . **База** $n = 1$ виконується безпосередньо за визначенням I_0^1 . **Перехід:** нехай

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds. \quad (1.5)$$

Тоді

$$\begin{aligned} (I_0^{n+1} f)(t) &= I_0^1(I_0^n f)(t) = \int_0^t (I_0^n f)(s) ds = \\ &= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_0^s (s-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi \right) ds = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \int_\xi^s f(\xi) (s-\xi)^{n-1} ds d\xi = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\xi) \left. \frac{(s-\xi)^n}{n} \right|_{s=\xi}^{s=t} d\xi = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^t f(\xi) \frac{(t-\xi)^n}{1} d\xi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

З точністю до назв змінних отримали що хотіли. □

Зауваження 1.2 — Перехід від другого рядка до третього тут відбувається за теоремою Фубіні. Наступна картинка може допомогти у розумінні:

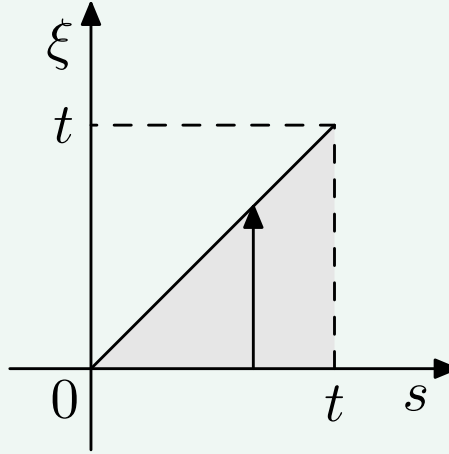


Рис. 1: При $s : 0 \rightarrow t$ маємо $\xi : 0 \rightarrow s$.

Формула Коші-Діріхле мотивує введення інтегральних операторів нецілого порядку.

Означення 1.3. Інтегралом Рімана-Ліувілья порядку $\alpha > 0$ з нижньою межею 0 функції f називається оператор

$$(I_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.7)$$

Також окремо зауважимо, що $I_0^0 f = f$.

Приклад 1.4

Справді, для $\alpha \in \mathbb{N}$ маємо $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, тобто власне формулу Коші-Діріхле.

Зауваження 1.5 — Нагадаємо, що $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

Взагалі кажучи, подібний вираз нагадує функцію згортки зі степеневою функцією порядку α :

$$I_0^\alpha f = f \star y_\alpha, \quad (1.8)$$

де $y_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$, а операція $\star : (\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ визначається наступним чином:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds. \quad (1.9)$$

Давайте тепер поміркуємо, як можна визначити диференціальний оператор дробового порядку, маючи відповідні інтегральні оператори. Взагалі кажучи, єдиної відповіді на це питання немає, як показує наступна картинка:

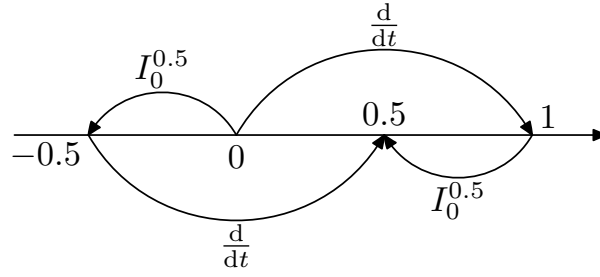


Рис. 2: Різні способи визначення диференціального оператора нецілого порядку

Введемо наступне допоміжне поняття для спрощення подальших позначень і формулювань:

Означення 1.6. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді *стеля* $\lceil \alpha \rceil$ — найменше ціле число, що не менше за α . Також інколи кажуть *верхня ціла частина* α .

Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$.

Означення 1.7. *Похідною за Капуто* функції f порядку α з нижньою межею 0 називається оператор

$$({}^*D_0^\alpha f)(t) = I_0^{n-\alpha} \left(\frac{d^n f}{dt^n} \right). \quad (1.10)$$

Означення 1.8. *Похідною Рімана-Ліувілья* функції f порядку α з нижньою межею 0 називається оператор

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_0^{n-\alpha} f). \quad (1.11)$$

Приклад 1.9

На рисунку вище $D_0^{0.5} = \frac{d}{dt} I_0^{0.5}$, а ${}^*D_0^{0.5} = I_0^{0.5} \left(\frac{d}{dt} \right)$.

Взагалі кажучи виникає питання коли введені вище похідні існують. Для відповіді на це питання нам знадобиться наступне:

Означення 1.10. Функція f називається *абсолютно неперервною* (eng. AC, absolutely continuous) на проміжку I якщо $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \dots \leq x_n < y_n$:

$$\sum_{k=1}^n (y_k - x_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon. \quad (1.12)$$

Так от для АС функцій їхні похідні інтегровні (з нецілим порядком), тобто похідні (з нецілим порядком) існують.

Поняття абсолютної неперервності має нагадувати поняття рівномірної неперервності (*eng.* UC, uniformly continuous). Зрозуміло, що з абсолютної неперервності випливає ($n = 1$) рівномірна неперервність, але зворотнє не виконується.

Вправа 1.11. Наведіть приклад рівномірно неперервної але не абсолютно неперервної функції.

Розв’язання. Функція Кантора є класичним прикладом такої функції. нагадаємо, що функція Кантора визначається як

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}, & x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \in \mathcal{C}, \\ \sup_{y \leq x, y \in \mathcal{C}} c(y), & x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}, \end{cases} \quad (1.13)$$

де \mathcal{C} — множина Кантора, а b_n — тернарні “біти” числа x , тобто $b_n \in \{0, 2\}$.

Для наглядності наведемо графік функції Кантора:

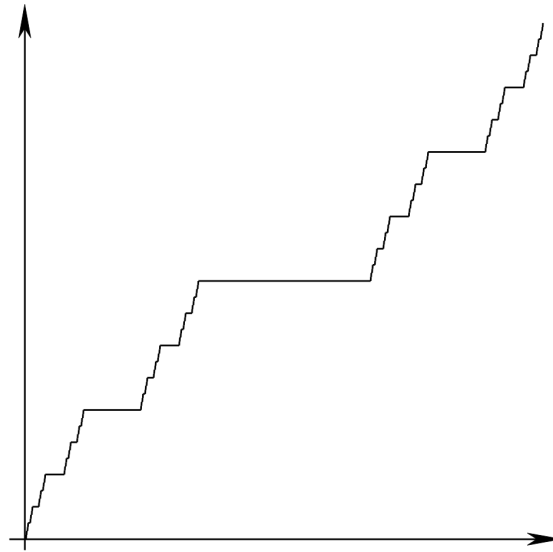


Рис. 3: функція Кантора

Як і кожна неперервна функція на компактї $([0, 1])$, вона є рівномірно неперервною на ньому. Втім, вона не є абсолютно неперервною, адже $\mu(\mathcal{C}) = 0$, тобто $\forall \delta > 0$ знайдуться інтервали сумарною довжиною $< \delta$ що покривають \mathcal{C} , а тому зміна значення $c(\cdot)$ на них складатиме $1 > \varepsilon$.

Виникає закономірне запитання: чи існує аналог формули Коші-Діріхле для диференціальних операторів? Виявляється, що так, хоча він і не зовсім такий, як можна було б очікувати.

Теорема 1.12

Нехай $f \in AC^n([0, T])$, $t \in [0, T]$, $n = \lceil \alpha \rceil$. Тоді

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t - s)^{\alpha+1-n}} ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1 + k - \alpha)t^{\alpha-k}}. \quad (1.14)$$

Приклад 1.13

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо $f \in AC([0, T])$ і

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t - s)^\alpha} ds + \frac{f(0)}{\Gamma(1 - \alpha)t^\alpha}. \quad (1.15)$$

Зауваження 1.14 — Як показує формула, ${}^*D_0^\alpha, D_0^\alpha$ — нелокальні оператори.

Доведення. Доведемо частинний випадок $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned} (D_0^\alpha f)(t) &= \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} f = \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} f(s) ds = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t f(s) \frac{d(-(t - s)^{1-\alpha})}{1 - \alpha} ds = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left(\frac{-f(s)(t - s)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t f'(s) \frac{(t - s)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} ds \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left(\frac{f(0)t^{1-\alpha}}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^t f'(s)(t - s)^{1-\alpha} ds \right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left(\frac{f(0)}{t^\alpha} + \int_0^t f'(s)(t - s)^{-\alpha} ds \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

□

Зауваження 1.15 — Тут при переході від другого рядочка до третього ми скористалися інтегруванням за частинами, а в останньому переході — формулою Лейбніца:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt. \quad (1.17)$$

На завершення визначимо ще кілька корисних для подальшого дослідження об'єктів:

Означення 1.16. *Інтегралом Рімана-Ліувілья з нижньою межею a називається*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds. \quad (1.18)$$

Означення 1.17. *Інтегралом Рімана-Ліувілья з правою межею для $t < T$ називається*

$$(I_a^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds. \quad (1.19)$$

1.2 Властивості дробових похідних

Приклад 1.18

Знайдемо похідні степеневих функцій.

Розв'язання. Нехай $\beta > -1$, $0 < \alpha < 1$. Тоді

$$D_0^\alpha t^\beta = \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} t^\beta. \quad (1.20)$$

У свою чергу

$$I_0^{1-\alpha} t^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha} ds. \quad (1.21)$$

Нагадаємо

Означення 1.19 (бета-функції).

$$B(a, b) = \int_0^1 \xi^{a-1} (1-\xi)^{b-1} d\xi. \quad (1.22)$$

а також наступну властивість бета-функції:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.23)$$

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $ds = t d\xi$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t\xi)^\beta t^{-\alpha} (1-\xi) t d\xi &= \\ &= \frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\Gamma(1-\alpha)} B(\beta+1, 1-\alpha) = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha+1}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Лишилося продиференціювати цей інтеграл:

$$\begin{aligned} D_0^\alpha \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha+1} &= \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

де ми скористалися властивістю $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$.

Зауваження 1.20 — Ця формула справедлива і для $\alpha \geq 1$, але умова $\beta > -1$ важлива для збіжності кількох інтегралів, зокрема $\int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha} ds$.

Приклад 1.21

Зокрема, якщо $\alpha \leq \beta \in \mathbb{N}$, то маємо формулу

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} t^\beta = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} t^{\beta-\alpha}. \quad (1.26)$$

Наприклад,

$$\frac{d^2}{dt^2} t^4 = \frac{4!}{2!} t^2. \quad (1.27)$$

Зауваження 1.22 — Зрозуміло також що всі введені нами оператори лінійні.

1.2.1 Властивості похідних Рімана-Ліувілля

Твердження 1.23

На жаль, не виконується наступна властивість

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}. \quad (1.28)$$

Доведення.

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (1.29)$$

Почленно диференціюємо:

$$\begin{aligned}
 D_0^\alpha e^{\lambda t} &= D_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_0^\alpha (t^k) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha} \neq \\
 &\neq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^\alpha \frac{(\lambda t)^k}{k!}.
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

□

Твердження 1.24 (формула (не) Ньютона-Лейбніца)

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(s) ds = f(t). \tag{1.31}$$

Твердження 1.25 (формула Ньютона-Лейбніца)

$$\int_0^t f'(s) ds = f(t) - f(0). \tag{1.32}$$

Твердження 1.26 (напівгрупова властивість дробових інтегралів)

Нехай $\alpha, \beta > 0$, тоді $I_0^{\alpha+\beta} = I_0^\alpha I_0^\beta$.

Вправа 1.27. Доведіть цю властивість. **Підказка:** за означеннями,

$$I_0^{\alpha+\beta} f = f \star y_{\alpha+\beta} \stackrel{?}{=} f \star (y_\alpha \star y_\beta) \stackrel{?}{=} (f \star y_\alpha) \star y_\beta = I_0^\beta I_0^\alpha f, \tag{1.33}$$

тому достатньо перевірити асоціативність згортки і рівність $y_{\alpha+\beta} = y_\alpha \star y_\beta$.

Доведення. Перевіримо два вищезгаданих твердження:

1) Асоціативність \star отримується “в лоб”:

$$\begin{aligned}
((f \star g) \star h)(t) &= \int_0^t (f \star g)(s) h(t-s) \, ds = \\
&= \int_0^t \left(\int_0^s f(\xi) g(s-\xi) \, d\xi \right) h(t-s) \, ds = \\
&= \int_0^t \int_0^s f(\xi) g(s-\xi) h(t-s) \, d\xi \, ds = \\
&= \int_0^t \int_\xi^t f(\xi) g(s-\xi) h(t-s) \, ds \, d\xi = \\
&= \int_0^t \int_0^{t-\xi} f(\xi) g(s) h(t-s-\xi) \, ds \, d\xi = \\
&= \int_0^t f(\xi) \left(\int_0^{t-\xi} g(s) h(t-s-\xi) \, ds \right) \, d\xi = \\
&= \int_0^t f(\xi) (g \star h)(t-\xi) \, d\xi = \\
&= (f \star (g \star h))(t).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

2) Далі

$$\begin{aligned}
y_\alpha(t) \star y_\beta(t) &= \int_0^t y_\alpha(s) y_\beta(t-s) \, ds = \\
&= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} (t-s)^{\beta-1} \, ds = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} \, ds.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $ds = t \, d\xi$, отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} \, ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (\xi t)^{\alpha-1} (1-\xi)^{\beta-1} t^{\beta-1} t \, d\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{(\alpha-1)+(\beta-1)+1} \int_0^1 \xi^{\alpha-1} (1-\xi)^{\beta-1} \, d\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1} = \\
&= y_{\alpha+\beta}(t).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

□

Теорема 1.28 (аналог формули (не) Ньютона-Лейбніца)Для $\alpha > 0$

$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = f. \quad (1.37)$$

Доведення. Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, тоді

$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_0^{n-\alpha} I_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_0^n f = f. \quad (1.38)$$

□

Зауваження 1.29 — Тут ми скористалися напівгруповою властивістю.**Твердження 1.30** (аналог формули Ньютона-Лейбніца)Нехай $f, D_0^\alpha f \in L_1([0, T])$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, тоді для $0 < t < T$ маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}. \quad (1.39)$$

Зауваження 1.31 — Тут під $D_0^{-|\beta|}$ маємо на увазі $I_0^{|\beta|}$.**Приклад 1.32**Для $0 < \alpha < 1$ маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.40)$$

Зауваження 1.33 — Тут $(I_0^{1-\alpha} f)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (I_0^{1-\alpha} f)(\varepsilon)$.*Доведення.* Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned} (I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (D_0^\alpha f)(s) ds = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(s) ds \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Виконаємо наступні маніпуляції з виразом що стоїть під похідною:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(t) dt = \\
& = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left((t-s)^\alpha I_0^{1-\alpha} f(s) \Big|_{s=0}^{s=t} + \alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} I_0^{1-\alpha} f(s) ds \right) = \\
& = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^\alpha I_0^{1-\alpha} f = \\
& = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Лишилося всього лише продиференціювати:

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f \right) = f(t) - \frac{t^{\alpha-1} (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.43}$$

□

1.2.2 Властивості похідних за Капуто

Теорема 1.34

Нехай $f \in L_\infty([0, T])$, тобто $\exists M \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \stackrel{\text{a.e.}}{\leq} M$, тоді, як і очікувалося, $({}^*D_0^\alpha I_0^\alpha f)(0) = (I_0^{\alpha*} D_0^\alpha f)(0)$.

а також

Теорема 1.35

Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in AC^n([0, T])$, тоді

$$(I_0^{\alpha*} D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \tag{1.44}$$

Зауваження 1.36 — Ця формула справедлива і для цілих α

Твердження 1.37

Для похідних у загальному випадку не виконується напівгрупова властивість.

Теорема 1.38

Нехай $f, D_0^\beta \in L_1([0, T])$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Тоді

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \sum_{k=0}^{[\beta]-1} (D_0^{\beta-k-1} f)(0) \frac{t^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(-\alpha-k)} \quad (1.45)$$

Приклад 1.39

Зокрема, для $0 < \alpha, \beta < 1$:

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - (I_0^{1-\beta} f)(0) \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \quad (1.46)$$

Доведення. Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned} (D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) &= \left(\frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} D_0^\beta f \right) (t) = \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} I_0^{2-\alpha} D_0^\beta f \right) (t) = \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} I_0^{2-\alpha-\beta} I_0^\beta D_0^\beta f \right) (t) = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} I_0^{2-\alpha-\beta} \left(f(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0) t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) = \\ &= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} D_0^{\alpha+\beta} t^{\beta-1} = \\ &= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha} = \\ &= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

□

1.3 Початкові значення**1.3.1 Початкові значення інтегралу**

Дослідимо, за яких умов початкове значення інтегралу $((I_0^\alpha f)(t) = o(1))$ дорівнює нулю.

Теорема 1.40

Нехай $\alpha > 0$, $p > 1/\alpha$, $p \geq 1$, $f \in L_p((0, T))$. Тоді $(I_0^\alpha f)(t) = o(t^{\alpha-1/p})$ при $t \rightarrow 0$.

Доведення.

$$\begin{aligned}
|(I_0^\alpha)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |f(s)(t-s)^{\alpha-1}| ds \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)q} ds \right)^{1/q} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \left(\frac{t^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right)^{1/q} = \\
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1+1/q}}{c(\alpha, p)} = \\
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1/p}}{c(\alpha, p)} = \\
&= o(t^{\alpha-1/p}),
\end{aligned}$$

де останній перехід справджується адже $\int_0^t |f(s)|^p ds = o(1)$ при $t \rightarrow 0$ □

Зауваження 1.41 (абсолютна неперервність інтеграла Лебега) — Якщо $f \in L_1$ то

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall A : \mu(A) < \delta(\varepsilon)) \quad \int_A f d\mu \leq \varepsilon. \quad (1.48)$$

Зауваження 1.42 (інтегральна нерівність Коші-Буняковського) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2}. \quad (1.49)$$

Зауваження 1.43 (інтегральна нерівність Гельдера) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}, \quad (1.50)$$

де $1/p + 1/q = 1$.

Зауваження 1.44 — Умова $p > 1/\alpha$ необхідна для збіжності усіх інтегралів з доведення

Наслідок 1.45

При $\alpha > 1/p$ маємо $(I_0^\alpha f)(t) = o(1)$, тобто $(I_0^\alpha f)(0) = 0$.

Вправа 1.46. Наведіть приклад f для якої $(I_0^\alpha f)(0) \neq 0$ (але і не ∞).

Приклад 1.47

Розглянемо $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на $[0, 1]$. Можна показати, що

$$\int_0^1 |f(x)| dx = 2, \quad (1.51)$$

тому $f \in L_1((0, 1))$. З іншого боку,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty, \quad (1.52)$$

тому $f \notin L_2((0, 1))$. Це означає, що $1 < p < 2$. Тоді нерівність $p > 1/\alpha$ з умов теореми не буде виконуватися, для $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Зокрема, виникають певні сподівання на $\alpha = \frac{1}{2}$. Розглянемо $(I_0^{1/2} f)(t)$:

$$(I_0^{1/2} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{(t-s)}\sqrt{(s)}} = \frac{\pi}{\Gamma(1/2)} = \sqrt{\pi}. \quad (1.53)$$

Як бачимо, отриманий вираз не просто не прямує до нуля при $t \rightarrow 0$, а взагалі не залежить від t , тобто наші сподівання не були марні і $(I_0^{1/2} f)(0) = \sqrt{\pi} \neq 0$ (але і не ∞).

1.3.2 Початкові значення похідних

Теорема 1.48

Нехай $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha]$, $f \in C^{n-1}([0, T])$, $p > \frac{1}{n-\alpha}$, $f^{(n)} \in L_P([0, T])$. Тоді $(D_0^\alpha)(0) = 0 \iff f^{(k)}(0) = 0$ при $k = \overline{0, n-1}$.

Розв'язання. Доведення. За умов теореми

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (1.54)$$

(\Leftarrow) У формулі вище інтеграл дорівнює нулю за першою сьогоденішньою теоремою, а уся сума зануляється за умовою теореми.

(\Rightarrow) Домножимо (1.54) на $t^{\alpha-k}$ для $k = \overline{0, n-1}$. Наприклад, для $k = 0$ матимемо

$$t^\alpha (D_0^\alpha f)(t) = t^\alpha (*D_0^\alpha f)(t) + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)t^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (1.55)$$

Бачимо, що $t^\alpha (*D_0^\alpha f)(t) = o(1)$, всі доданки суми нескінченно малі, тому $f(0) = 0$. Далі за індукцією по k отримуємо рівність нулів усіх похідних до $(n-1)$ -ої. \square

Зауваження 1.49 — При $0 < \alpha < 1$ маємо $(D_0^\alpha 1)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \neq 0$.

Зауваження 1.50 — Але $(^*D_0^\alpha 1)(t) = 0$.

Теорема 1.51

Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^n([0, T])$, тоді $D_0^\alpha f \equiv 0 \iff f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}$ — дробовий многочлен.

Вправа 1.52. (\implies) Вправа.

(\impliedby) Нехай

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}, \quad (1.56)$$

тоді

$$D_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_0^{n-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{\alpha-k-1} \right) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(n-k)} t^{n-k-1} = 0. \quad (1.57)$$

□

Теорема 1.53 (похідна добутку)

Нехай f, g — аналітичні в $(-h, h)$. Тоді для $t \in (0, h/2)$

$$D^\alpha(f \cdot g)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\alpha} D_0^k f(t) \cdot D_0^{\alpha-k} g(t), \quad (1.58)$$

де

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\alpha-k-1)}. \quad (1.59)$$

Теорема 1.54 (Тарасова)

Нехай $0 < \alpha < 1$, тоді D^α — лінійний оператор, що задовольняє умову

$$D^\alpha(f \cdot g) = D^\alpha f \cdot g + f \cdot D^\alpha g. \quad (1.60)$$

Тоді $\exists p(t): (D_0^\alpha f)(t) = p(t) \cdot \frac{df}{dt}$.

1.4 Перетворення Лапласа дробових інтегралів і похідних

Означення 1.55. Нехай $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, тоді

$$\mathcal{L}[f](\eta) = \bar{f}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} f(t) dt. \quad (1.61)$$

Лема 1.56 (перетворення Лапласа похідної)

$$\mathcal{L}[f'](\eta) = \eta \mathcal{L}[f](\eta) - f(0). \quad (1.62)$$

Доведення. Доведення. Інтегруємо частинами. □

Лема 1.57 (перетворення Лапласа згортки)

$$\mathcal{L}[f \star g](\eta) = \mathcal{L}[f](\eta) \cdot \mathcal{L}[g](\eta). \quad (1.63)$$

Доведення. Змінюємо порядок інтегрування. □

Лема 1.58 (перетворення Лапласа степеневі функції)

$$\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1 - \beta) \eta^{\beta-1}. \quad (1.64)$$

Доведення. За означенням

$$\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} dt. \quad (1.65)$$

Зробимо заміну змінних: $\eta t = \xi$, $dt = d\xi/\eta$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} dt &= \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta} \frac{1}{\eta} d\xi = \\ &= \eta^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{-\beta} d\xi = \\ &= \eta^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta). \end{aligned} \quad (1.66)$$

□

Лема 1.59 (перетворення Лапласа інтегралу дробового порядку)

$$\mathcal{L}[I_0^\alpha f](\eta) = \eta^{-\alpha} \mathcal{L}[f](\eta). \quad (1.67)$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[I_0^\alpha f](\eta) &= \mathcal{L}[f \star y_\alpha](\eta) = \\
 &= \mathcal{L}[f](\eta) \cdot \mathcal{L}[y_\alpha](\eta) = \\
 &= \mathcal{L}[f](\eta) \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(1 - (1 - \alpha)) \eta^{-\alpha} = \\
 &= \eta^{-\alpha} \mathcal{L}[f](\eta).
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

□

Лема 1.60 (перетворення Лапласа похідної Рімана-Ліувіля)

$$\mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathcal{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \eta^k. \tag{1.69}$$

Приклад 1.61

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathcal{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0). \tag{1.70}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) &= \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} f \right] (\eta) = \\
 &= \eta \cdot \mathcal{L}[I_0^{1-\alpha} f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\
 &= \eta \cdot \eta^{\alpha-1} \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\
 &= \eta^\alpha \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0).
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

□

Лема 1.62 (перетворення Лапласа похідної Катупо)

$$\mathcal{L} \left[{}^\star D_0^\alpha f \right] (\eta) = \eta^\alpha \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \eta^{\alpha-k-1}. \tag{1.72}$$

Приклад 1.63

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - \eta^{\alpha-1} f(0). \tag{1.73}$$

Вправа 1.64. Довести.

Доведення. □

Лема 1.65

$$\mathcal{L}[c](\eta) = c/\eta.$$

Лема 1.66

$$\mathcal{L}[e^{pt}f(t)](\eta) = \mathcal{L}[f(t)](\eta - p).$$

Нагадаємо, що раніше ми з'ясували, що $\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1 - \beta)\eta^{\beta-1}$.

Теорема 1.67 (Таубера)

Нехай $-\beta > -1$, f монотонна при великих t (тобто вона монотонна на деякому проміжку вигляду $[t_0, +\infty)$). Тоді $f(t) \sim t^{-\beta}$ при $t \rightarrow +\infty \iff \mathcal{L}[f](\eta) = \Gamma(1 - \beta)\eta^{\beta-1}$ при $\eta \rightarrow 0$.

Зауваження 1.68 — Тут $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow \infty$ означає, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Наслідок 1.69

Нехай $0 < \alpha < 1$ і f монотонна при великих t , $f \geq 0$ на $[0, +\infty)$ і $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$. Тоді $\forall A > 0$: $f(t) \sim \alpha A t^{-\alpha-1}$ при $t \rightarrow +\infty \iff \mathcal{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1 - \alpha)\eta^\alpha + o(\eta^\alpha)$ при $\eta \rightarrow 0+$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s) ds. \quad (1.74)$$

Зауважимо, що $F'(t) = -f(t)$.

Вправа 1.70. Доведіть, що за наших припущень

$$f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1} \iff F(t) \sim At^{-\alpha}. \quad (1.75)$$

Розглянемо

$$\mathcal{L}[F](\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta t} \int_t^{+\infty} f(s) ds dt, \quad (1.76)$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(s) \int_0^s e^{-\eta t} dt ds &= \int_0^{+\infty} f(s) \frac{1 - e^{-\eta s}}{\eta} ds = \\
&= \frac{1}{\eta} \left(1 - \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\eta s} ds \right) = \\
&= \frac{1 - \mathcal{L}[f](\eta)}{\eta}.
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Звідси

$$\mathcal{L}[f](\eta) = 1 - \eta \mathcal{L}[F](\eta). \tag{1.78}$$

Тепер можемо записати

$$\begin{aligned}
f(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A \alpha t^{-\alpha-1} &\iff F(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A t^{-\alpha} \iff \\
&\iff \mathcal{L}[F](\eta) \underset{\eta \rightarrow 0+}{\sim} A \Gamma(1 - \alpha) \eta^{\alpha-1} \iff \\
&\iff \mathcal{L}[F](\eta) = \Gamma(1 - \alpha) \eta^{\alpha-1} + o(\eta^{\alpha-1}) \iff \\
&\iff \mathcal{L}[f](\eta) = 1 - A \Gamma(1 - \alpha) \eta^{\alpha} + o(\eta^{\alpha}).
\end{aligned} \tag{1.79}$$

□

2 Моделі аномальної дифузії

Нагадаємо, що класичні рівняння дифузії та теплопровідності зумовлені наступними чинниками:

- 1) закон збереження кількості речовини/тепла;
- 2) джерела і стоки;
- 3) “закон” Фіка/Фур’є — емпірично встановлене для широкого класу процесів твердження про те, що інтенсивність потоку речовини/тепла пропорційна мінус градієнту концентрації речовини/кількості тепла на границі.

Розглянемо тепер інший підхід, який ґрунтується на випадкових блуканнях з неперервним часом (eng. *CTRW*, *continuous time random walk*). А саме, нехай $x(t)$ — випадкова величина (координата частинки в момент часу t), а $u(x, t)$ (при фіксованому t — щільність координати частинки).

Параметри моделі:

- 1) $u_0(x)$ — щільність початкового (при $t = 0$) розподілу;
- 2) $\psi(t)$ — щільність часу очікування наступного стрибка;
- 3) $\lambda(x)$ — щільність зміщення.

Означення 2.1. Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є* називається

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(x) dx. \quad (2.1)$$

Твердження 2.2

Для перетворення Фур'є справедлива теорема згортки:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega), \quad (2.2)$$

де

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy. \quad (2.3)$$

Означення 2.3. Нехай $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є-Лапласа* називається

$$\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) = \tilde{u}(\omega, \eta) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta t + i\omega x} u(x, t) dx dt. \quad (2.4)$$

Формула 2.4 (Монтрола-Вайса)

$$\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)}{1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}, \quad (2.5)$$

як тільки $|\mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)| < 1$.

Доведення. Введемо додаткове позначення: $n(t)$ — кількість стрибків до моменту t . $\psi_k(t)$ — щільність часу k -го стрибка. І нарешті, $\lambda_k(x)$ — щільність координати після k -го стрибка.

Запишемо формулу повної ймовірності:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{n(t) = k\} \lambda_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbb{P}\{n(t) \geq k\} - \mathbb{P}\{n(t) \geq k+1\} \right) \lambda_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi_k(s) ds - \int_0^t \psi_{k+1}(s) ds \right) \lambda_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi^{*k}(s) ds - \int_0^t \psi^{*(k+1)}(s) ds \right) \cdot (u_0 * \lambda^{*k})(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Зауваження 2.5 — Тут ми скористалися тим, що $\psi_k(x) = \psi^{\star k} = \underbrace{\psi \star \psi \star \dots \star \psi}_k$
і $\lambda_k(x) = u_0 * \lambda^{\star k} = u_0 * \underbrace{\lambda * \lambda * \dots * \lambda}_k$.

Вправа 2.6. Поновити у конспекті формальне доведення цих фактів.

З урахуванням %перелік_нагадувань%, маємо

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta} \left((\mathcal{L}[\psi](\eta))^k - \mathcal{L}[\psi](\eta)^{k+1} \right) \mathcal{F}[u_0](\omega) \mathcal{F}[\lambda](\omega)^k = \\
 &= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta))}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}[\psi](\eta)^k \mathcal{F}[\lambda](\omega)^k = \\
 &= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta))}{\eta(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega))}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

□