А.В.Скороход

Лекції з теорії випадкових процесів

Допущено Міністерством вищої
і середньої спеціальної освіти УРСР
як навчальний посібник для студентів
математичних спеціальностей
університетів і технічних вузів

КИЇВ
«ЛИБІДЬ»
1990

ББК 22.171я73
С44

УДК 519.21

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. Й. Ядренко*, д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. В. Булдигін*

Редактор *Л. В. Лисицька*

Скороход А. В.

С44 Лекції з теорії випадкових процесів: Навч. посібник.— К.: Либідь, 1990.— 168 с.
ISBN 5-11-001701-8.

Викладено основні поняття теорії випадкових процесів (означення, скінченновимірні розподіли, класифікація, умови неперервності, відсутності розривів II роду, вимірності, ергодична теорема, мартингали, стаціонарні процеси, їх спектральні зображення, прогноз), а також загальну теорію марківських процесів (чисто розривні процеси, процеси із зліченною множиною станів, процеси з незалежними приростами, гіллясті, дифузійні процеси).
Для студентів математичних спеціальностей вузів.

С $\frac{1602090000\text{-}145}{\text{М}224(04)\text{-}90}$ БЗ-12-7-90 ББК 22.171я73

Изложены основные понятия теории случайных процессов (определение, конечномерные распределения, классификация, условия непрерывности, отсутствия разрывов II рода, измеримости; эргодическая теорема, мартингалы, стационарные процессы, их спектральные представления, прогноз), а также общая теория марковских процессов (чисто разрывные процессы, процессы с измеримым множеством состояний, процессы с независимыми приращениями, ветвящиеся, диффузионные процессы).
Для студентов математических специальностей вузов.

ISBN 5-11-001701-8

ВІД АВТОРА

Ця книжка виникла внаслідок обробки річного курсу лекцій з теорії випадкових процесів, читаних автором протягом багатьох років на механіко-математичному факультеті Київського університету для студентів-математиків, що спеціалізуються з теорії імовірностей та математичної статистики. Я намагався дотримуватись стилю лекцій. Це позначилось на групуванні матеріалу не по темах, а по лекціях, кожна з яких розрахована на півтори години. Одна тема може бути викладена у кількох лекціях, що пов'язані між собою за змістом, а не за формою. Інколи, як у живій лекції, доводиться поєднувати різнорідний матеріал (бо не завжди однорідного вистачає на цілу лекцію.) Я прагнув використати всі можливості для зменшення такого роду недоречностей. Взагалі ж вважаю, що такий спосіб подання матеріалу набагато зручніший для використання лекторами особливо у вузах, які не мають кафедр теорії імовірностей, але навчальні плани яких містять теорію імовірностей і теорію випадкових процесів.

Для розуміння математичного змісту цих лекцій читач повинен бути обізнаний з основами математичного аналізу, теорією функцій комплексного змінного, початковими поняттями теорії диференціальних рівнянь та елементами теорії імовірностей. Математичні курси тих спеціальностей, які потребують знання теорії випадкових процесів, містять згадані розділи. Той, хто хоче самостійно працювати з цією книжкою, сам зрозуміє, що йому необхідно вивчити додатково.

Матеріал лекцій неоднорідний за ступенем абстракції. Менш абстрактні розділи частіше застосовуються в інженерних та природничих науках. Тому досвідчений лектор може легко відібрати той матеріал, який більше відповідає вимогам його слухачів. Насамперед можуть бути вилучені лекції, що стосуються теорії мартингалів, загальної теорії вимірності процесів, напівгрупової теорії марківських процесів, стохастичних диференціальних рівнянь. При такому підході курс скоротиться наполовину і більше відповідатиме потребам прикладних спеціальностей.

Для бажаючих розширити свої знання з теорії випадкових процесів у кінці книжки вміщений список рекомендованої літератури.

1. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ. ОЗНАЧЕННЯ. ПРИКЛАДИ

Теорія випадкових процесів вивчає нескінченні сукупності випадкових величин. Такі сукупності існують і в природознавстві, і в техніці, і в соціальних явищах. Випадкові величини можуть залежати від параметра, що є ціле число, або від дійсного параметра, який найчастіше тлумачать як час, або від векторного параметра. Відповідно до цього сукупність таких величин буде випадковою послідовністю, або випадковим процесом, або випадковим полем.

Випадковий процес трактується як стан певної системи, що змінюється випадково з часом. Якщо розглядати стан системи лише в дискретні моменти часу, то дістаємо випадкову послідовність (або процес з дискретним часом). Випадкові поля характеризують зміну випадкових величин у часі і просторі.

Завжди, коли мова йде про щось *випадкове*, мається на увазі певний імовірнісний простір. Ті сукупності випадкових величин, які будуть розглядатись далі, завжди будуть визначені на одному і тому ж імовірнісному просторі. Нагадаємо його означення.

Імовірнісний простір — це трійка об'єктів $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, де Ω — деяка множина, що називається множиною елементарних подій; $\mathcal{F}$ — сукупність підмножин Ω, що утворюють σ-алгебру, множини з $\mathcal{F}$ називаються (випадковими) подіями; P — міра на $\mathcal{F}$, що задовольняє умову, для якої $P(\Omega) = 1$ (число $P(A)$ називається імовірністю множини A).

Сукупність підмножин $\mathcal{A}$ множини Ω є алгебра, якщо: 1) $\Omega \in \mathcal{F}$; 2) $A \setminus B \in \mathcal{F}$ для $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$. За цих умов і $A \cup B \in \mathcal{F}$, і $A \cap B \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{F}$ називається σ-алгеброю, якщо з кожною послідовністю $A_n \in \mathcal{F}$ буде $\bigcup A_n \in \mathcal{F}$. Для повноти наведемо ще означення міри P. Це адитивна функція множини, визначена на $\mathcal{F}$ (тобто $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ для $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \varnothing$) і неперервна: для $A_n \uparrow$ буде $P(\bigcup_n A_n) = \lim P(A_n)$ ($A_n \uparrow$ означає, що $A_n \subset A_{n+1}$).

Коли задано імовірнісний простір, то визначені випадкові події; це множини з $\mathcal{F}$ і інші випадкові об'єкти. Випадкова величина (дійсна) — це функція $\xi(\omega) : \Omega \to R$, вимірна відносно $\mathcal{F}$. Це означає, що $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ для всіх $x \in R$. Звідси випливає, що для будь-якої множини $B \in \mathcal{B}_R$, де $\mathcal{B}_R$ — множина борелівських підмножин R, $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$. Випадковий вектор в R^m — це вимірне відображення $x(\omega) : \Omega \to R^m$, тобто таке, що $\{\omega : x(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ для $B \in$

$\in \mathcal{B}_{R^m}$ ($\mathcal{B}_{R^m}$ — борелівські множини в R^m). Довільний вимірний простір $(X, \mathcal{B})$ — це деяка множина X з виділеною σ-алгеброю підмножин $\mathcal{B}$. Вимірне відображення $x(\omega) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (X, \mathcal{B})$, тобто таке, для якого $\{\omega : x(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$, коли $B \in \mathcal{B}$, називається випадковим елементом в X. Якщо X — метричний простір, то за $\mathcal{B}$ беруть σ-алгебру, породжену відкритими кулями (для сепарабельного X це буде борелівська σ-алгебра, вона позначається $\mathcal{B}_X$). Міра μ на $\mathcal{B}$ така, що $\mu(B) = P\{\omega : x(\omega) \in B\}$, називається розподілом випадкового елемента $x(\omega)$. Звідси як окремі випадки ми дістанемо розподіл дійсної випадкової величини ($X = R$) і розподіл випадкового вектора ($X = R^m$). Відомо, що ці розподіли визначаються функціями розподілу. Для $X = R$ функція розподілу випадкової величини $\xi(\omega)$ є

$$\mathcal{F}(x) = P\{\xi(\omega) < x\}, \quad x \in R. \tag{1}$$

Звідси випливає, що розподіл випадкового елемента може визначатись його значеннями на меншій сукупності множин (так, функція розподілу задає значення міри лише на множинах $(-\infty, x)$, а не на усіх борелівських множинах). Щоб знайти меншу сукупність, можна використати такий загальний факт. Нехай $\mathcal{A}$ — деяка сукупність множин. Позначимо $\sigma(\mathcal{A})$ найменшу σ-алгебру, що містить усі множини з $\mathcal{A}$.

Сукупність множин $\mathcal{M}$ називається монотонним класом, якщо для будь-якої послідовності $A_n \in \mathcal{M}$, $A_n \uparrow \bigcup A_n \in M$ і для $A_n \downarrow \bigcap A_n \in \mathcal{M}$. Очевидно, що алгебра множин, яка є монотонний клас, утворює σ-алгебру.

Теорема про монотонний клас. Нехай $\mathcal{A}$ — алгебра множин, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ — найменший монотонний клас, що містить $\mathcal{A}$. Тоді $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Доведення. Нехай X — множина, в якій задана алгебра, $\mathfrak{A}(X)$ — множина усіх алгебр множини X. Будемо для певного класу множин позначати через $\mathcal{G}_\sigma$ множину, що містить усі об'єднання $\bigcup A_k$, де $A_k \in \mathcal{G}$ — зліченна чи скінченна сукупність; через $\mathcal{G}_\delta$ — множину всіх перерізів $\bigcap A_k$. Через $[\mathcal{G}]$ позначимо $(\mathcal{G}_\sigma)_\delta \cap (\mathcal{G}_\delta)_\sigma$. Тоді $[\mathcal{G}] \supset \mathcal{G}$. Якщо $\mathcal{G}$ — алгебра, то $[\mathcal{G}]$ також алгебра, вона містить $\bigcup_n A_n$ та $\bigcap_n A_n$, коли $A_n \in \mathcal{G}$. Будемо говорити, що сукупність алгебр $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}(X)$ регулярна, якщо вона має властивості: а) $\mathcal{A}_1 \in \mathfrak{A} \Rightarrow [\mathcal{A}] \in \mathfrak{A}$, б) $\mathcal{A}_k \in \mathfrak{A}$, $k = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigvee_k \mathcal{A}_k \in \mathfrak{A}$, де $\bigvee_k \mathcal{A}_k$ — найменша алгебра, що містить усі $\mathcal{A}_k$, це буде $\bigcup_n \bigvee_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k$. Нарешті позначимо через $R(\mathcal{A}_k)$ усі регулярні сукупності алгебр, що містять $\mathcal{A}$. Розглянемо найменшу регулярну сукупність $\mathfrak{A}_0$ з $R(\mathcal{A})$, це переріз усіх $\mathfrak{A}$ з $R(\mathcal{A})$. Вона має такі властивості: 1) якщо $B, C \in \mathfrak{A}_0$, то $B \subset C$ або $C \subset B$ (у протилежному випадку одну з них можна виключити з $\mathfrak{A}_0$), 2) B з $\mathfrak{A}_0$ належить $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, бо для $C \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ і $[C] \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $B_n \uparrow$, $B_n \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ і $\bigcup B_n \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Тому $C_0 = \bigcup C$, $C \in \mathfrak{A}_0$ має властивість: $[C_0] \subset C$. C_0 — σ-алгебра, $\sigma(\mathcal{A}) \subset C_0 \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Оскільки $\sigma(\mathcal{A})$ — монотонний клас, то $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$.

Наслідок. Нехай міри μ_1 та μ_2 збігаються на алгебрі $\mathcal{A}$. Тоді вони збігаються і на $\sigma(\mathcal{A})$. Це випливає з того, що міри збігаються на монотонному класі.

Означення випадкової функції. Нехай Θ — певна множина (параметрична множина), $(X, \mathcal{B})$ — вимірний простір (фазовий простір). Функція $x(\theta, \omega): \Theta \times \Omega \to X$ називається випадковою, якщо для кожного $\theta \in \Theta$ $x(\theta, \omega)$ є випадковий елемент у вимірному просторі $(X, \mathcal{B})$. Основними характеристиками процесу є його скінченновимірні розподіли. Це послідовності функцій

$$F_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(B_1, \ldots, B_n) = P\{x(\theta_i, \omega) \in B_i, \quad i = 1, \ldots, n\}, \qquad (2)$$

визначених на $\Theta^n \times \mathcal{B}^n$. Для $n = 1$ маємо одновимірні розподіли: $F_\theta(B) = P\{x(\theta, \omega) \in B\}$, (2) дає n-вимірні розподіли.

Зупинимося докладніше на числових процесах: $X = R$. Для їх характеристики вживаються також моментні функції. Нехай $\xi(\theta, \omega)$ — числова випадкова функція. Тоді k-ю моментною функцією називається

$$m_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = M\xi(\theta_1, \omega)\,\xi(\theta_2, \omega) \ldots \xi(\theta_k, \omega). \qquad (3)$$

Найбільш важливими моментними функціями є середнє значення $m_1(\theta)$ та кореляційна функція

$$R(\theta_1, \theta_2) = M(\xi(\theta_1, \omega) - m_1(\theta_1))(\xi(\theta_2, \omega) - m_2(\theta_2)) =$$

$$= m_2(\theta_1, \theta_2) - m_1(\theta_1)\, m_2(\theta_2). \qquad (4)$$

Існує великий розділ теорії випадкових процесів, в якому використовуються лише ці дві функції. Розглядають також сукупні характеристичні функції $\varphi_{\theta_1 \ldots \theta_n}(z_1, \ldots, z_n) = M \exp\{i\Sigma z_k \xi(\theta_k, \omega)\}$. Такі функції однозначно визначають функції (2).

Наведемо деякі приклади випадкових процесів та функцій.

1. Процес очікування. Нехай τ — випадкова величина, $\xi(t, \omega) = I_{\{\tau(\omega) \leqslant t\}}$. Процес описує появу певної події у певний момент часу, значення процесу є 0, поки подія не відбулася, 1 — після того, коли вона відбулась. Скінченновимірні розподіли задаються рівняннями

$$P\{\xi(t_1) = 0, \ldots, \xi(t_k) = 0, \ \xi(t_{k+1}) = 1, \ldots, \xi(t_n) = 1\} =$$
$$= P\{\xi(t_k) = 0, \ \xi(t_{k+1}) = 1\}.$$

Тут $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $P\{\xi(t) = 0, \ \xi(t+h) = 1\} = P\{t < \tau(\omega) \leqslant t + h\}$.

Такий процес характеризують умовною імовірністю

$$P\{\tau \in (t, t+h)/\tau > t\} = P\{\xi(t+h) = 1/\xi(t) = 0\} \qquad (5)$$

того, що подія відбудеться до моменту $t + h$, якщо вона не сталась до моменту t. Якщо вираз (5) можна подати у вигляді $\lambda(t)\,h + o(h)$ ($\lambda(t)$ називається локальною інтенсивністю імовірності появи подій), то розподіл моменту появи події має щільність

$$p(t) = \lambda(t) \exp\left\{- \int_{-\infty}^{t} \lambda(s)\, ds\right\}. \tag{6}$$

Коли $\lambda(t) = 0,\ t < 0;\ \lambda(t) = \lambda,\ t > 0$, тоді τ має експоненціальний розподіл. У цьому випадку подія відбувається на проміжку $[0, \infty)$ із сталою інтенсивністю,

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t} I_{\{t>0\}}. \tag{7}$$

2. Процес Пуассона. Розглядаємо знову події, що відбуваються одна за одною випадково через деякі проміжки часу. Величина $\xi(t, \omega)$ — це кількість подій, що відбулися на $[0, t]$. Наприклад, кількість частинок, що були зареєстровані лічильником космічних частинок, кількість дорожніх аварій, кількість захворювань на рідкісну хворобу. $\xi(t, \omega)$ буде процесом Пуассона, якщо інтенсивність чергової події не залежить ні від часу, ні від того, коли і скільки подій вже відбулося. Нехай інтенсивність появи події дорівнює a. Це означає, що імовірність появи на проміжку $[t, t + h]$ однієї події незалежно від того, що відбувалося на проміжку $[0, t]$, дорівнює $ah + o(h)$. Можна пересвідчитись, що імовірність появи у проміжку $[t, t + h]$ більш ніж однієї події буде $o(h)$. Позначимо $p_k(t)$ імовірність того, що на $[0, t]$ з'явилося k подій. Тоді

$$p_0(t + h) = p_0(t)(1 - ah + o(h)),$$
$$p_{k+1}(t + h) = p_{k+1}(t)(1 - ah + o(h)) + p_k(t)(ah + o(h)).$$

Мають місце такі диференціальні рівняння:

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -ap_0(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_{k+1}(t) = -ap_{k+1}(t) + ap_k(t). \tag{8}$$

Крім того, $p_0(0) = 1,\ p_k(0) = 0,\ k > 0$. Послідовно розв'язуючи рівняння, дістаємо

$$p_k(t) = (ta)^k (k!)^{-1} e^{-at}, \tag{9}$$

тобто число подій має розподіл Пуассона. Звідси і назва процесу. Можна знайти і скінченновимірні розподіли. Для цього треба зауважити, що число подій, які відбулися на проміжку $[t_1, t_2]$, має такий самий розподіл, як і число подій на проміжку $[0, t_2 - t_1]$, і не залежить від числа подій, що відбулися на $[0, t_1]$. Тому

$$P\{\xi(t_1, \omega) = k_1,\ \xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega) = k_2\} =$$
$$= (t_1 a)^{k_1} (k_1!)^{-1} ((t_2 - t_1) a)^{k_2} (k_2!)^{-1} \exp\{-t_2 a\}. \tag{10}$$

Аналогічні формули вірні для будь-якого числа проміжків.

3. Броунівський рух. Розглянемо імовірнісну модель фізичного явища броунівського руху (або дифузії). Це рух мікроскопічних частинок у середовищі, молекули якого перебувають у тепловому

хаотичному русі. Середовищем може бути або рідина, або газ. Будемо виходити з таких припущень. Середовище однорідне, тому усі напрямки зміщення рівноправні і розподіл величини зміщення Δx частинки з певного положення x у просторі не залежить від цієї точки і від часу, коли там опинилась частинка.

Розглянемо подібний процес в R (це означає, що ми слідкуємо лише за однією з координат частинки). Нехай $\xi(t)$ положення частинки в момент t, $\Delta\xi = \xi(t + \Delta t) - \xi(t)$ — зміщення частинки за час Δt. Ця величина не залежить від $\xi(t)$ та попередніх значень процесу, а її розподіл не залежить від t. Нехай виконуються такі умови: а) $M\Delta\xi = 0$, б) $M(\Delta\xi)^2 = b\Delta t$, в) $M|\Delta\xi|^{2+\delta} = 0(\Delta t)$, $\delta > 0$. Щоб знайти розподіл $\xi(t)$ при умові $\xi(0) = x$, розглянемо функцію $M[\varphi(\xi(t))/\xi(0) = x] = u(t, x)$. Тоді

$$u(t + \Delta t, x) = M[\varphi(\xi(t + \Delta t))/\xi(0) = x] =$$
$$= M[\varphi(\xi(t + \Delta t))/\xi(\Delta t), \xi(0) = x] = Mu(t, x + \Delta\xi(t)) =$$
$$= u(t, x) + Mu_x'(t, x)\Delta\xi(t) + \frac{1}{2}u_{xx}''(t, x)(\Delta\xi(t))^2 + o(\Delta t).$$

Тому

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2}bu_{xx}''(t, x), \quad u(0, x) = \varphi(x). \tag{11}$$

Це є рівняння теплопровідності, для якого сформульована задача Коші. Розв'язок цієї задачі відомий:

$$u(t, x) = (2\pi bt)^{-\frac{1}{2}}\int \exp\left\{-\frac{(y - x)^2}{2bt}\right\}\varphi(y)\,dy. \tag{12}$$

Звідси щільність розподілу $\xi(t)$ при умові $\xi(0) = x$ буде

$$\varphi_t(x, y) = (2\pi bt)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(y - x)^2}{2bt}\right\}. \tag{13}$$

Для $0 < t_1 < t_2$ величина $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ не залежить від значень $\xi(s)$, $s \leqslant t_1$ і має щільність $P_{t_2 - t_1}(0, y)$. Тому сукупна щільність $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_n)$, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ при умові $\xi(0) = 0$ є

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\left((2\pi(t_k - t_{k-1})b)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2b(t_k - t_{k-1})}\right\}\right). \tag{14}$$

Процес з такими щільностями скінченновимірних розподілів називається вінерівським.

2. ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА. КЛАСИФІКАЦІЯ ПРОЦЕСІВ

Основною імовірнісною характеристикою випадкового процесу є його скінченновимірні розподіли. Постає питання, коли набори функцій $F_{\theta_1, \ldots, \theta_n}(A_1, \ldots, A_n)$ є скінченновимірними розподілами, тобто існує така випадкова функція $\xi(\theta, \omega)$, для якої

$$P\{\xi(\theta_1, \omega) \in A_1, \ldots, \xi(\theta_n, \omega) \in A_n\} = F_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(A_1, \ldots, A_n). \quad (1)$$

Наведемо деякі необхідні властивості функцій F:

1) $F_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(A_1, \ldots, A_n)$ є міра по A_k на $\mathscr{B}$, де $(X, \mathscr{B})$ — фазовий простір випадкової функції;

2) $F_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(A_1, \ldots, A_n) = F_{\theta_{i_1},\ldots,\theta_{i_n}}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n})$, якщо $i_1, \ldots$ $\ldots, i_n$ — переставлення індексів $1, \ldots, n$;

3) $F_{\theta_1,\ldots,\theta_{n-1},\theta_n}(A_1, \ldots, A_{n-1}, X) = F_{\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}}(A_1, \ldots, A_{n-1})$.

Властивості 1) — 3) називаються умовами узгодженості скінченновимірних розподілів.

Теорема Колмогорова. Якщо $X = R^m$, то для кожного набору функцій $\{F_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(A_1, \ldots, A_n)\}$, що задовольняє 1) — 3), існує така випадкова функція $\xi(\theta, \omega)$, для якої вірна рівність (1).

Доведення. Треба побудувати ту випадкову функцію, існування якої стверджує теорема. Використаємо певну аналогію. Як будувати випадкову величину ξ, що має задану функцію розподілу $F(x)$? Для цього треба вказати імовірнісний простір $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$ і функцію $\xi(\omega)$. Оскільки випадкову величину можна розглядати як результат експерименту, де вимірюється дійсна величина, то природно взяти $\Omega = R$ і $\mathscr{F}$ — борелівську σ-алгебру в R. Якщо вважати, що елементарними подіями є значення нашої випадкової величини, то $\xi(\omega) = \omega$. На інтервалі $[a, b[$ повинно бути $P([a, b[) = P\{a \leqslant \xi(\omega) < b\} = \mathscr{F}(b) - \mathscr{F}(a)$. Цією рівністю міра P повністю визначена. Для того щоб побудувати випадкову функцію, теж треба вказати імовірнісний простір $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$ і саму функцію $\xi(\theta, \omega)$. Ми будемо дотримуватись тих же міркувань, що використовувались для однієї випадкової величини. За простір елементарних подій Ω візьмемо простір $\mathbb{F}(\Theta, X)$ усіх функцій з Θ в X. Якщо $\omega = \omega(\cdot)$ — така функція, візьмемо $\xi(\theta, \omega) = \omega(\theta)$. Тепер треба побудувати в $\mathbb{F}(\Theta, X)$ σ-алгебру таку, щоб $\xi(\theta, \omega)$ була вимірна відносно неї. Для цього вона повинна містити усі множини вигляду

$$C_\theta(A) = \{\omega : \omega(\theta) \in A\}, \quad \theta \in \Theta, \quad A \in \mathscr{B}. \quad (2)$$

Множини (2) називаються одновимірними циліндричними, множини $\bigcap\limits_{k=1}^{n} C_{\theta_k}(A_k)$ — n-вимірними циліндричними. Позначимо $C_0(\Theta, X)$ алгебру множин в $\mathbb{F}(\Theta, X)$, що містить усі множини (2). Вона містить n-вимірні циліндричні множини для усіх n і їх скінченні об'єднання. Те, що це буде алгебра, випливає з того, що

$$X \setminus \bigcap_{k=1}^{n} C_{\theta_k}(A_k) = \bigcup_{k=1}^{n} C_{\theta_k}(X \setminus A_k),$$

тому доповнення скінченної суми циліндричних множин є теж скінченна сума таких множин. Найменшу σ-алгебру, що містить $C_\theta(\Theta, X)$, позначимо $C(\Theta, X)$ і будемо називати циліндричною σ-алгеброю. Цю σ-алгебру візьмемо за $\mathscr{F}$. Тепер визначимо міру P. Для того щоб виконувалась рівність (1), ця міра має задовольняти умову

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} C_{\theta_k}(A_k)\right) = F_{\theta_1,\dots,\theta_n}(A_1, \dots, A_n).$$

Властивості 2), 3) гарантують, що значення P не залежить від способу зображення циліндричної множини. Кожну множину $C \subset C_\theta(\Theta, X)$ можна записати у вигляді $C = \bigcup_{k=1}^{m} C_k$, де C_k — n-вимірні циліндричні множини, C_k попарно не перетинаються. Нехай $P(C) = \sum_{k=1}^{m} P(C_k)$. Властивість 1) гарантує, що значення $P(C)$ не залежить від способу зображення C у вигляді об'єднання циліндричних множин. Отже, на $C_\theta(\Theta, X)$ визначено адитивну функцію множини P, $P(\mathbb{F}(\Theta, X)) = 1$. Якщо P можна продовжити до міри на $C(\Theta, X)$, то, скориставшись цим продовженням як P, ми побудуємо потрібний імовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Щоб таке продовження було можливим, достатньо (а також необхідно), щоб для будь-якої послідовності множин $C_n \in C_0(\Theta, X)$, для якої $C_n \downarrow$, $\bigcap C_n = \varnothing$, було $P(C_n) \to 0$. Доведемо цю властивість. Кожна множина C_n визначається значеннями функції $\omega(\theta)$ в певному скінченному числі точок $\Theta_n = \{\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \dots$ $\dots, \theta_{k_n}^{(n)}\}$. З умови $C_{n+} \supset C_n$ випливає, що можна вважати $\Theta_n \subset \subset \Theta_{n+1}$. Нехай k_n — кількість точок в Θ_n. Позначимо через C_n^* множину в $(R^m)^{k_n}$ таку, що $C_n = \{\omega(\cdot) : (\omega(\theta_1^{(n)}), \dots, \omega(\theta_{k_n}^{(n)}) \in C_n^*\}$. Це буде борелівська множина. Спрощуючи запис, будемо вважати, що $k_n = n$, $\Theta_n = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, де $\{\theta_n\}$ — деяка послідовність. У цьому випадку C_n^* є борелівська множина в $(R^m)^n$. Для кожного $\varepsilon > 0$ можна вказати таку компактну множину $F_n^* \subset C_n^*$, що $P^*(C_n^* \setminus F_n^*) \leqslant \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, де P^* є міра в $(R^m)^n$, для якої

$$P(\{(x_1, \dots, x_n) \in (R^m)^n : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}) = \\ = F_{\theta_1,\dots,\theta_n}(A_1, \dots, A_n).$$

Позначимо через $F_n \subset C_0(\Theta, R^m)$ множину $\{\omega : (\omega(\theta_1), \dots, \omega(\theta_n)) \in \in F_n^*\}$. Припустимо, що $P(C_n) \geqslant \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$. Тоді, вибравши F_n у відповідності з цим ε, будемо мати

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) \geqslant P(C_n) - \Sigma P(C_k \setminus F_k) \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо $\bigcap_{k=1}^{n} F_k = \hat{C}_n$, то $\hat{C}_n \downarrow \varnothing$, $P(\hat{C}_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ і $\hat{C}_n^* \subset (R^m)^n$ є компакт.

Позначимо π_1 проекцію $(R^m)^n$ на $R^m : \pi_1(x_1, \dots, x_n) = x_1$, $x_i \in R^m$, π_k — проекцію $(R^m)^n$ на $(R^m)^k$ для $k \leqslant n$: $\pi_k(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots$ $\dots, x_k)$. Проекції компактів є компакти. Виберемо точки $(x_1^{(n)}, \dots$

$\ldots, x_n^{(n)}) \in \hat{C}_n^*$. Діагональним методом можна побудувати таку підпослідовність, щоб для всіх n існували границі $\bar{x}_i = \lim\limits_{n\to\infty} x_i^{(n)}$. Точка $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k) \in \pi_k \hat{C}_n^*$ для всіх $n \geqslant k$. Тому функція $\bar{\omega}(\theta)$, для якої $\bar{\omega}(\theta_i) = \bar{x}_i$, належить усім $F_k \subset C_k$. Це суперечить припущенню $\bigcap C_k = \varnothing$. Отже, P продовжується на $C(\Theta, R^m)$.

Доведення правильне, якщо X — повний метричний сепарабельний простір, бо у цьому випадку теж для кожної міри P і борелівської множини B $P(B) = \sup\limits_{K \subset B} P(K)$, де K — компакт.

Перейдемо до класифікації процесів. Вона спочатку здійснюється в залежності від Θ. Ми будемо розглядати лише випадкові процеси, тобто коли $\Theta \subset R$. Якщо $\Theta = Z$ або $\Theta = Z_+$, будемо говорити про випадкову послідовність, або процес з дискретним часом. Друга ознака — фазовий простір $(X, \mathscr{B})$. Так, розрізняються дійснозначні, комплекснозначні, векторнозначні процеси. Але головна ознака, за якою класифікують процеси — це властивості скінченновимірних розподілів.

1. Процеси з незалежними значеннями. Для всіх $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta$ випадкові величини (елементи) $\xi(\theta_1, \omega), \ldots, \xi(\theta_n, \omega)$ незалежні між собою, тобто

$$F_{\theta_1,\ldots,\theta_n}(A_1, \ldots, A_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{\theta_k}(A_k). \tag{3}$$

Такі процеси в основному розглядаються для дискретного часу. Один з головних факторів, пов'язаних з такими процесами,— це закон «0 або 1» Колмогорова.

Теорема. Нехай ξ_n — послідовність незалежних елементів у фазовому просторі $(X, \mathscr{B})$. Позначимо $\mathscr{A}_n$ σ-алгебру подій $\{\xi_n \in B\}$, $B \in \mathscr{B}$, $\mathscr{F}_n = \bigvee\limits_{k \leqslant n} \mathscr{A}_k$, $\mathscr{F}^m = \bigvee\limits_{k \geqslant m} \mathscr{A}_k$, $\mathscr{F}^\infty = \bigcap\limits_m \mathscr{F}^m$. Тоді для всіх $C \subset \mathscr{F}^\infty$ $P(C) = 0$, або $P(C) = 1$.

Доведення. σ-Алгебри $\mathscr{F}_n$ і $\mathscr{F}^{n+1}$ незалежні, бо породжуються незалежними величинами: перша — $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, друга — $\{\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots\}$. Тому $\mathscr{F}_n$ та $\mathscr{F}^\infty$ незалежні. Отже, незалежні алгебра подій $\bigcup \mathscr{F}_n$ та $\mathscr{F}^\infty$. Це означає, що для кожної події $A \subset \bigcup \mathscr{F}_n$ та $B \in \mathscr{F}^\infty$ буде $P(A \cap B) = P(A) P(B)$. Легко переконатись, що сукупність подій A, для яких вірна ця рівність, є монотонний клас. На основі теореми про монотонний клас робимо висновок про незалежність $\sigma(\bigcup \mathscr{F}_n)$ та $\mathscr{F}^\infty$. Але $\mathscr{F}^\infty \subset \sigma(\bigcup \mathscr{F}_n)$. Тому кожна подія $C \subset \mathscr{F}^\infty$ не залежить сама від себе, $P(C \cap C) = P(C) P(C)$, $P(C) = P^2(C)$, $P(C)(1 - P(C)) = 0$.

Наслідок. Якщо $\{\xi_n\}$ — послідовність незалежних елементів, а $f(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ — вимірна функція на X^∞, яка має ту властивість, що не залежить від $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для кожного n, то $f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ — з імовірністю 1 стала величина.

Це випливає з того, що для всіх t $P\{f(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) < t\}$ або 0, або 1.

Прикладом такої функції f може бути $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \varphi_n(x_n)$, де φ_n — вимірна функція $X \to R$

2. Процеси з незалежними приростами. Нехай X — лінійний простір (наприклад R, R^m). Процес $\xi(t)$, $t \in T \subset R$ називається процесом з незалежними приростами, якщо для $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $t_i \in T$ величини $\xi(t_0)$, $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, ..., $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ є незалежні випадкові. Нехай $X = R^m$, $(.,.)$ — скалярний добуток в R^m. Розглянемо сукупну характеристичну функцію величин $\xi(t_0)$, ..., $\xi(t_n)$:

$$\varphi_{t_0,\ldots,t_n}(z_0, \ \ldots, \ z_n) = M \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} (z_k, \ \xi(t_k))\right\} =$$

$$= M \exp\{i(z_0 + \cdots + z_n, \ \xi(t_0)) + i(z_1 + \cdots + z_n, \ \xi(t_1) - \xi(t_0)) + \\ + \cdots + i(z_n, \ \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}))\},$$

$$z_0, \ \ldots, \ z_n \in R^m. \tag{4}$$

Позначимо $\psi_{t_1,t_2}(z) = M \exp\{i(z, \ \xi(t_2) - \xi(t_1))\}$. Формулу (4) можна записати так:

$$\varphi_{t_0,\ldots,t_n}(z_0, \ \ldots, \ z_n) = \\ = \varphi_{t_0}(z_0 + \cdots + z_n) \prod_{k=1}^{n} \psi_{t_{k-1},t_k}(z_k + \cdots + z_n). \tag{5}$$

Отже, для визначення скінченновимірних розподілів процесу з незалежними приростами досить знати одновимірні розподіли процесу, а також розподіл приросту процесу, який визначається двовимірним розподілом.

Зауваження. Якщо $\varphi_t(z) \neq 0$, то $\varphi_s(z) \neq 0$ для $s < t$; $\psi_{s,t}(z) = \varphi_t(z) \,/\, \varphi_s(z)$. Це дає змогу у багатьох випадках визначити скінченновимірні розподіли через одновимірні. Якщо $\varphi_t(z) \neq 0$ для всіх $t \in T$, $z \in R^m$, то формулу (5) можна записати так:

$$\varphi_{t_0,\ldots,t_n}(z_0, \ \ldots, \ z_n) = \varphi_{t_n}(z_n) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi_{t_k}(z_k + \cdots + z_n)}{\varphi_{t_k}(z_{k+1}, \ \ldots, \ z_n)}. \tag{6}$$

Загальні пуассонівські процеси. Це такі процеси з незалежними приростами в R, для яких $\xi(t)$, $t \in R_+$ мають пуассонівський розподіл. Нехай $\lambda(t)$ — параметр цього розподілу. Тоді $\varphi_t(z) = \exp\{\lambda(t)\ (e^{iz} - 1)\}$. Оскільки $\varphi_t(z) \neq 0$, то $\psi_{s,t}(z) = \exp\{[\lambda(t) - \lambda(s)]\ (e^{iz} - 1)\}$. Це буде характеристичною функцією, якщо $\lambda(t) \geqslant \lambda(s)$. Отже, загальний пуассонівський процес визначається своїм параметром $\lambda(t)$ — неспадною функцією t.

Загальні процеси броунівського руху. Це процеси з незалежними приростами в R^m, для яких $\xi(t)$, $t \in R_+$ мають гауссівський розподіл. Нехай $a(t)$ — середнє значення, $B(t)$ — кореляційна матриця (оператор) для $\xi(t)$. Це означає, що $M\xi(t) = a(t)$, $M(\xi(t) - a(t), z)^2 = (B(t)\ z, \ z)$, $z \in R^m$. Тоді характеристична функція $\xi(t)$ має вигляд

$$\varphi_t(z) = \exp\left\{i(z, \ a(t)) - \frac{1}{2}(B(t)z, \ z)\right\}. \tag{7}$$

Тому для $s < t$

$$\psi_{s,t}(z) = \exp\left\{i(z,\ a(t) - a(s) - \frac{1}{2}([B(t) - B(s)]z,\ z)\right\}.$$

Цей вираз буде характеристичною функцією, якщо матриця $B(t) - B(s)$ додатно визначена. Для процесу броунівського руху функції $a(t)$ та $B(t)$ вважаються неперервними.

3. Гауссівські процеси (гауссівські випадкові функції). Така випадкова функція $\xi(\theta)$ визначена на довільній множині Θ із значеннями в R, так що $\xi(\theta_1), \dots, \xi(\theta_n)$ мають сукупний гауссівський розподіл. Нехай $a(\theta) = M\xi(\theta)$, $R(\theta_1, \theta_2) = M\xi(\theta_1)\xi(\theta_2) - a(\theta_1)a(\theta_2)$. Тоді сукупна характеристична функція $\xi(\theta_1), \dots, \xi(\theta_n)$ визначена рівністю

$$\varphi_{\theta_1,\dots,\theta_n}(z_1, \dots, z_n) =$$
$$= \exp\left\{i\sum_{1}^{n} z_k a(\theta_k) - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} R(\theta_j, \theta_k) z_j z_k\right\}.$$

4. Стаціонарні процеси. Процес $\xi(t)$, $t \in T$, де $T = R$ або $T = R_+$, або $T = Z$, або $T = Z_+$, стаціонарний, якщо сукупний розподіл величин $\xi(t_1 + h)$, $\xi(t_2 + h), \dots, \xi(t_n + h)$ не залежить від $h \in T$ ($t_i \in T$) для всіх n. Численні процеси в природі мають тенденцію ставати стаціонарними.

5. Марківські процеси. *Вони являють собою імовірнісне узагальнення* динаміки систем, що зазнають випадкових впливів, незалежних у різні моменти часу. Звичайна динамічна система визначається функцією $f(s, t, x)$, $s, t \in R_+$, $x \in X$, де X — фазовий простір системи. Ця функція задає положення системи у час t, якщо її положення у час s було x. Для $s < t < u$ матимемо $f(s, u, x) = f(t, u, f(s, t, x))$.

Для марківського процесу задана імовірність $P(s, x, t, A)$, $0 \leqslant s < t$, $x \in X$, $A \in \mathscr{B}$, $(X, \mathscr{B})$ — фазовий простір процесу. Це імовірність того, що з положення x, у якому система перебуває у час s, вона в момент часу t потрапить у множину станів A. $P(s, x, t, A)$ називається імовірністю переходу процесу. Вона є: 1) імовірнісна міра по $A \in \mathscr{B}$, 2) вимірна функція $x \in X$. Для $0 \leqslant s < t < u$ виконується рівність Колмогорова — Чепмена

$$P(s,\ x,\ u,\ A) = \int P(t,\ y,\ u,\ A)\,P(s,\ x,\ t,\ dy). \tag{8}$$

Ця рівність означає ось що: щоб потрапити з положення x, у якому система перебуває у час s, у множину A в момент u, треба спочатку в момент t перейти у довільну точку y, а потім з точки y за час від t до u потрапити в A. Процес $\xi(t)$, $t \in R_+$ з фазовим простором $(X, \mathscr{B})$ називається марківським, якщо існує така імовірність переходу $P(s, x, t, A)$, що його скінченновимірні розподіли для $0 < t_1 < \dots < t_n$ мають вигляд

$$P\{\xi(0) \in A_0, \dots, \xi_n \in A_n\} =$$
$$= \int_{A_0} F_0(dx_0) \int_{A_1} P(0,\ x_0,\ t_1,\ dx_1) \dots \int_{A_n} P(t_{n-1},\ x_{n-1},\ t_n,\ dx_n). \tag{9}$$

Можна пересвідчитись, що процеси з незалежними приростами є також марківськими.

Сучасна теорія випадкових процесів присвячена у значній мірі вивченню різних класів марківських процесів. До цих процесів близький такий клас, як мартингали.

6. Квадратично-інтегровні процеси. Нехай $L_2(\Omega, P)$ — простір квадратично-інтегровних за мірою P випадкових величин; це гільбертів простір. Процеси розглядаються як криві у гільбертовому просторі $L_2(\Omega, P)$. Основними характеристиками процесу є середнє значення та кореляційна функція. Вивчаються їх спектральні зображення, лінійні перетворення, диференціальні рівняння з такими процесами. Вони широко використовуються у радіотехніці, автоматичному регулюванні, фізиці атмосфери, геології та інших природознавчих науках.

3. ВИПАДКОВІ БЛУКАННЯ. РЕКУРЕНТНІСТЬ. ВІДНОВЛЕННЯ

Розглянемо деякі класи процесів з дискретним часом. Перший такий клас — випадкові блукання. Це дискретний процес з незалежними приростами. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — послідовність незалежних однаково розподілених величин, що набувають значень з Z. Візьмемо $\zeta_0 = x$, $\zeta_1 = x + \xi_1, \ldots, \zeta_n = x + \xi_1 + \ldots + \xi_n, \ldots$ Послідовність $\{\zeta_n, n \geqslant 0\}$ називається випадковим блуканням, x — початкове положення, ξ_n — n-й крок блукання.

Рекурентність. Позначимо через ν той додатний номер, для якого вперше $\zeta_\nu = \zeta_0$. Якщо для всіх $n > 0$ $\zeta_n \neq \zeta_0$, вважаємо $\nu = +\infty$; ν називається моментом першого повернення блукання у початкове положення. Якщо $P\{\nu < \infty\} = 1$, блукання називається рекурентним, у решті випадків — нерекурентним. Рекурентне блукання відвідує нескінченне число разів положення x таке, що $P\{\zeta_n = x\} > 0$ для деякого n. Нерекурентне блукання у кожній точці може побувати лише скінченне число разів. Умови рекурентності дає така теорема.

Теорема 1. Для того щоб блукання було рекурентним, необхідно і достатньо, щоб $\sum\limits_n P\{\zeta_n = \zeta_0\} = +\infty$.

Доведення. Якщо $\zeta_n = \zeta_0$, то $\nu \leqslant n$. Тому

$$\{\zeta_n = \zeta_0\} = \{\nu = n\} \cup \bigcup (\{\nu = k\} \cap \{\zeta_n = \zeta_k\}),$$

$$P\{\zeta_n = \zeta_0\} = P\{\nu = n\} + \sum_{k=1}^{n-1} P\{\nu = k,\ \zeta_n - \zeta_k = 0\}.$$

Величина $\zeta_n - \zeta_k$ не залежить від $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, а через ці величини виражається подія $\{\nu = k\}$:

$$\{\nu = k\} = \{\xi_1 \neq 0\} \cap \{\xi_1 + \xi_2 \neq 0\} \cap \cdots \cap \{\xi_1 + \cdots + \xi_{k-1} \neq 0\} \cap \\ \cap \{\xi_1 + \cdots + \xi_k = 0\}.$$

Тому

$$P\{\nu = k,\ \zeta_n - \zeta_k = 0\} = P\{\nu = k\} P\{\zeta_n - \zeta_k = 0\} = \\ = P\{\nu = k\} P\{\zeta_{n-k} = \zeta_0\}.$$

Таким чином,

$$P\{\zeta_n = \zeta_0\} = P\{\nu = n\} + \sum_{k=1}^{n-1} P\{\nu = k\} P\{\zeta_{n-k} = \zeta_0\}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на z^n, де $0 < z < 1$, і складемо всі рівності від $n = 1$ до $+\infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n P\{\zeta_n = \zeta_0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\nu = n\} z^n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} P\{\nu = k\} z^k P\{\zeta_{n-k} = \zeta_0\} z^{n-k}.$$

Звідси

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\nu = n\} z^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} P\{\zeta_n = \zeta_0\} z^n / \sum_{n=0}^{\infty} P\{\zeta_n = \zeta_0\} z^n\right). \tag{1}$$

Умова теореми необхідна і достатня, щоб права частина (1) прямувала до 1, коли $z \uparrow 1$.

Величина $h > 0$ називається кроком розподілу випадкової величини ξ, якщо $\sum_k P\{\xi = kh\} = 1$ і h — найбільше таке число. Блукання називається *неперіодичним*, якщо крок розподілу ξ_1 дорівнює 1. Зауважимо, що в цьому випадку $M \exp\{iz\xi_1\} = \varphi(z) \neq 1$, коли $0 < |z| \leqslant \pi$. Дійсно, якщо для певного $|z_0| \leqslant \pi$, $z_0 \neq 0$

$$0 = 1 - \varphi(z) = (1 - e^{ikz_0}) p_k, \quad p_k = P\{\xi_1 = k\},$$

то $1 - e^{ikz_0} = 0$, коли $p_k > 0$. Множина тих k, для яких $kz_0 \equiv 0 \pmod 1$, є група за додаванням, тобто усі ці k кратні певному h. За умовою це $h = 1$. Але для $0 < |z_0| \leqslant \pi$ $1 - e^{iz_0} \neq 0$. Сформулюємо умову теореми через розподіл ξ_1:

$$P\{\xi_1 + \cdots + \xi_n = 0\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M \exp\{iz(\xi_1 + \cdots + \xi_n)\} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^n(z) dz.$$

Умову теореми можна переписати так:

$$\lim_{\lambda \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^n(z) dz = \lim_{\lambda \uparrow 1} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \lambda\varphi(z)} dz = +\infty.$$

Виявляється, у цій рівності можна перейти до границі під знаком інтеграла.

Т е о р е м а 2. Блукання рекурентне тоді і лише тоді, коли характеристична функція $\varphi(z)$ одного кроку блукання задовольняє умову

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \varphi(z)} dz = +\infty. \tag{2}$$

Нехай $x = 0$, $P\{\xi_1 > 0\} = 1$. Тоді блукання $\{\zeta_n, n \geqslant 0\}$ називають схемою відновлення. ξ_k — час роботи k-го приладу, прилади включають один за одним, починаючи з моменту $t = 0$. Нехай $\nu(t)$ — номер того приладу, що включений (працює) у момент t. $\nu(t) = k$, якщо $\zeta_{k-1} < t \leqslant \zeta_k$, $\nu(0) = 1$. Величина $N(t) = M\nu(t)$ називається функцією відновлення. Це середнє число приладів, які використовувались за час t. Оскільки $N(t) \leqslant t$, то $M\nu(t)$ існує. При вивченні схеми відновлення цікавляться поведінкою функції $N(t)$, коли $t \to \infty$.

Знайдемо спочатку вираз

$$\sum_{t=1}^{\infty} [N(t) - N(t-1)] z^t = M \sum_{t=1}^{\infty} [\nu(t) - \nu(t-1)] z^t.$$

Позначимо

$$\varphi(z) = Mz^{\xi_1} = \Sigma z^k p_k, \quad |z| \leqslant 1.$$

Тоді

$$Mz^{\zeta_k} = (\psi(z))^k,$$

$\nu(t) - \nu(t-1) = 0$, якщо $t-1$ не збігається з жодним числом ζ_1, $\zeta_2, \ldots$ і $\nu(\zeta_{i+1}) - \nu(\zeta_i) = 1$ для всіх $i > 0$. Тому

$$\sum_{t=1}^{\infty} [\nu(t) - \nu(t-1)] z^t = \sum_{k=0}^{\infty} z^{\zeta_k},$$

$$M \sum_{k=0}^{\infty} z^{\zeta_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi^k(z) = \frac{\psi(z)}{1 - \psi(z)}.$$

Отже,

$$\sum_{t=1}^{\infty} (N(t) - N(t-1)) z^t = \frac{\psi(z)}{1 - \psi(z)}. \tag{3}$$

Припустимо, що крок розподілу величини $\xi_1 \in 1$. Тоді $\psi(e^{iu}) = \varphi(u) \neq 0$, коли $u \neq 0$, $|u| \leqslant \pi$. Для $t > 1$

$$N(t) - N(t-1) = \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(u)}{1 - \lambda\varphi(u)} e^{-itu} du =$$

$$= \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \lambda\varphi(u)} e^{-itu} du.$$

Для $t > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \lambda\varphi(u)} e^{itu} du = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^k(u) e^{itu} du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k 2\pi P\{\zeta_k = -t\} = 0.$$

Тому

$$N(t)-N(t-1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1-\lambda\varphi(u)}[e^{-itu}-e^{itu}]\,du=$$

$$=-\frac{i}{\pi}\lim_{\lambda\uparrow 1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin tu}{1-\lambda\varphi(u)}\,du. \tag{4}$$

Оскільки $|\varphi(u)|\leqslant 1$, $|1-\lambda\varphi(u)|\geqslant\lambda|1-\varphi(u)|$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin tu|}{|1-\varphi(u)|}\,du\leqslant t\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{u}{1-\varphi(u)}\right|du,$$

а функція $\left|\frac{u}{1-\varphi(u)}\right|$ обмежена, то в (4) можна перейти до границі під знаком інтеграла. Звідси

$$N(t)-N(t-1)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin tu}{1-\varphi(u)}\,du. \tag{5}$$

Теорема 3. Нехай ξ_k має розподіл з кроком 1. Тоді

$$\lim_{t\to\infty}[N(t)-N(t-1)]=1/M\xi_1 \tag{6}$$

(якщо $M\xi_1=+\infty$, то вважаємо праву частину (6) рівною нулю).

Доведення. Нехай спочатку $M\xi_1<\infty$. Оскільки

$$\varphi'(0)=iM\xi_1,$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin tu}{u}\,du=\lim_{t\to\infty}\int_{-\pi/t}^{\pi/t}\frac{\sin u}{u}\,du=\pi,$$

то для доведення теореми досить показати, що

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{1-\varphi(u)}-\frac{1}{\varphi'(0)\,u}\right). \tag{7}$$

Маємо

$$\left|\int_{A/t}^{\pi/2}\frac{1}{1-\varphi(u)}\sin tu\,du\right|=$$

$$=\left|-\frac{\cos tu}{t}\cdot\frac{1}{1-\varphi(u)}\Bigg|_{A/t}^{\pi/2}+\int_{A/t}^{\pi/2}-\frac{\varphi'(u)}{(1-\varphi(u))^2}\cdot\frac{\cos tu}{t}\,du\right|.$$

Виберемо A так, щоб $\cos A=0$. Оскільки $|1-\varphi(u)|\geqslant c|u|^2$, то

$$\left|\int_{-A/t}^{\pi/2}\frac{1}{1-\varphi(u)}\sin tu\,du\right|=O\left(\frac{1}{t}\right)+O\left(t\int_{A/t}^{\infty}\frac{du}{cu^2}\right)=O\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{A}\right).$$

Далі,

$$\left|\int\limits_{-A/t}^{A/t} \frac{1-\varphi(u)+\varphi'(0)\,u}{u^2}\sin tudu\right| \leqslant$$

$$\leqslant t\int\limits_{-A/t}^{A/t} g(u)\,du \leqslant 2Ag\,(A/t),$$

де

$$g(u) = \sup_{|s|\leqslant u} \frac{1-\varphi(s)-\varphi'(0)\,s}{us} \to 0,$$

коли $u \to 0$.

Наведені оцінки показують, що ліва частина (7) оцінюється за модулем величиною $O\,(1/t + 1/A + Ag\,(A/t))$, де A — таке, що $\cos A = 0$. Тому, взявши $A = \pi/2 + n\pi$, матимемо

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{1-\varphi(u)} - \frac{1}{\varphi'(0)\,u}\right)\sin tudu = O\left(\left(\frac{1}{\pi/2}+n\pi\right)^{-1}\right).$$

Звідси випливає (6).

Нехай $M\xi_1 = +\infty$; $q_0 = 1$, $q_t = N\,(t) - N\,(t-1)$,

$$Q(z) = \sum_{t=0}^{\infty} q_t z^t,\ r_t = \sum_{k>t} p_k,\ R(z) = \sum_{t=0}^{\infty} r_t z^t.$$

Тоді

$$R(z) = \sum_{t=0}^{\infty} z^t \sum_{k>t} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{1-z^k}{1-z} = \frac{1-\psi(z)}{1-z}.$$

З формули (3) маємо

$$Q(z)\ R(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Тому для усіх n

$$\sum_{t=0}^{n} q_{n-t} r_t = 1. \tag{8}$$

Згідно з формулою (5)

$$q_{t+1} + q_{t-1} - 2q_t =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(t+1)\,u + \sin(t-1)\,u - 2\sin tu}{1-\varphi(u)}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{2\cos u}{1-\varphi(u)}\sin tudu$$

і тому $\lim\limits_{t\to\infty}(q_{t+1} + q_{t-1} - 2q_t) = 0$, бо $\frac{\cos u}{1-\varphi(u)}$ — функція обмежена.

Якщо для деякої послідовності n_m буде $\lim(q_{n_m} - q_{n_m-1}) = c$, то і $\lim(q_{n_m+1} - q_{n_m}) = c$, $\lim(q_{n_m+t} - q_{n_m}) = 0$ для всіх t. За рівністю (8)

$$\sum_{t=0}^{N} q_{n-t} r_t \leqslant 1.$$

Якщо $|q_n - q_{n-k}| \leqslant \varepsilon_{n,N}$ для $k \leqslant N$, то $\varepsilon_{n,N} \to 0$, коли $n \to \infty$ (N — фіксоване). Отже,

$$(q - \varepsilon_{n,N}) \sum_{t=0}^{N} r_t \leqslant 1, \quad q_n \leqslant \varepsilon_{n,N} + \frac{1}{\sum_{t=0}^{N} r_t}.$$

Переходячи до границі, коли $n \to \infty$, а потім $N \to \infty$, і враховуючи, що $\sum_{t=1}^{\infty} q_t = +\infty$, завершуємо доведення теореми.

Умовні математичні сподівання та імовірності. Наведемо деякі поняття, що будуть потрібні далі. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ — імовірнісний простір, а $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ — деяка σ-алгебра. Для величини $\xi \geqslant 0$ через $M(\xi/\mathcal{G})$ позначається така $\mathcal{G}$-вимірна величина, що задовольняє умову: для всіх $G \in \mathcal{G}$

$$M \xi I_G = M(\xi/\mathcal{G}) I_G. \tag{9}$$

$M(\xi/\mathcal{G})$ називається умовним математичним сподіванням ξ відносно *σ-алгебри* $\mathcal{G}$. *Воно визначається* однозначно з імовірністю 1. Якщо η та $\bar{\eta}$ такі $\mathcal{G}$-вимірні величини, що після заміни $M(\xi/\mathcal{G})$ на η або $\bar{\eta}$ виконується (9), то $P\{\eta = \bar{\eta}\} = 1$. Дійсно, тоді $M(\eta - \bar{\eta}) I_G = 0$, $G \in \mathcal{G}$. Візьмемо $G = \{\omega : \eta - \bar{\eta} > 0\}$. Тоді

$$M(\eta - \bar{\eta}) I_{\{\eta - \bar{\eta} > 0\}} = 0, \quad M(\eta - \bar{\eta}) I_{\{\eta - \bar{\eta} < 0\}} = 0, \quad M|\eta - \bar{\eta}| = 0.$$

Для довільних ξ можемо окремо знайти $M(\xi_+/\mathcal{G})$ та $M(\xi_-/\mathcal{G})$, де $\xi_+ = \xi I_{\{\xi > 0\}}$, $\xi_- = -\xi I_{\{\xi < 0\}}$, $M(\xi/\mathcal{G}) = M(\xi_+/\mathcal{G}) - M(\xi_-/\mathcal{G})$, якщо праворуч не стоїть $\infty - \infty$. Якщо ж там $\infty - \infty$, то $M(\xi/\mathcal{G})$ не визначено. Існування $M(\xi/\mathcal{G})$ для $\xi \geqslant 0$ випливає з теореми Радона — Нікодима про існування щільності абсолютно неперервної міри.

Основні властивості умовних математичних сподівань.

1. Якщо $M|\xi| < \infty$, то $M(\xi/\mathcal{G})$ існує.
2. Якщо $M|\xi_1| < \infty$, $M|\xi_2| < \infty$, то

$$M(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2/\mathcal{G}) = \alpha M(\xi_1/\mathcal{G}) + \beta M(\xi_2/\mathcal{G}).$$

3. Якщо η — вимірна відносно $\mathcal{G}$, а $M|\xi| < \infty$, то $M(\eta\xi/\mathcal{G}) = \eta M(\xi/\mathcal{G})$.

Усі рівності тут виконуються з імовірністю 1. Перевірка властивостей 2, 3 грунтується на перевірці рівності (9). Важливе значення має властивість повторних умовних математичних сподівань.

4. Нехай $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ — σ-алгебри, $M|\xi| < \infty$, тоді

$$M(M(\xi/\mathcal{G})/\mathcal{H}) = M(\xi/\mathcal{H}). \tag{10}$$

Дійсно, якщо $H \in \mathcal{H}$, то $H \in \mathcal{G}$, тому

$$MI_H M(\xi/H) = MI_H \xi = M(M(\xi/\mathcal{G}))_H = MM(M(\xi/\mathcal{G})/H) I_H.$$

Зауваження. Нехай $\mathcal{H}$ — тривіальна σ-алгебра, що складається з множин Ω та $\varnothing$. $\mathcal{H}$-Вимірні величини — константи. Тому $M(\xi/H) = M\xi$. Отже, $MM(\xi/\mathcal{G}) = M\xi$.

Величина $M(I_A/\mathcal{G}) = P(A/\mathcal{G})$ називається умовною імовірністю A відносно $\mathcal{G}$. Формула

$$MP(A/\mathcal{G}) = P(A) \tag{11}$$

називається формулою повної імовірності. Відзначимо ще дві властивості умовних математичних сподівань.

5. Якщо $\xi \geqslant 0$, то $M(\xi/\mathcal{G}) \geqslant 0$, отже, для $\xi_1 \leqslant \xi_2$ $M(\xi_1/\mathcal{G}) \leqslant M(\xi_2/\mathcal{G})$, якщо ці умовні математичні сподівання існують.

6. Нехай $\xi_n \to \xi$ за імовірністю і для деякого $\eta > 0$ $M\eta < \infty$ і $|\xi_n| \leqslant \eta$. Тоді

$$M(\xi_n/\mathcal{G}) \to M(\xi/\mathcal{G})$$

за імовірністю.

Дійсно, $M|\xi_n - \xi| \to 0$,

$$M|M(\xi_n/\mathcal{G}) - M(\xi/\mathcal{G})| \leqslant MM(|\xi_n - \xi|/\mathcal{G}) = M|\xi_n - \xi| \to 0.$$

З цих двох властивостей випливають такі властивості умовних імовірностей: а) $0 \leqslant P(A/\mathcal{G}) \leqslant 1$, б) якщо $A_k \cap A_j = \varnothing$, то

$$P(UA_k/\mathcal{G}) = \Sigma P(A_k/\mathcal{G}) \tag{12}$$

(це виконується з імовірністю 1).

4. МАРТИНГАЛИ. НЕРІВНОСТІ

Послідовність ξ_k, $k \in Z_+$ (або $k \in Z$) із значеннями в R називається мартингалом, якщо: а) для всіх k з області визначення задані σ-алгебри $\mathcal{F}_k$ такі, що $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}$ і ξ_k вимірне відносно $\mathcal{F}_k$; б) $M|\xi_k| < \infty$; в) $M(\xi_{k+1}/\mathcal{F}_k) = \xi_k$.

Найхарактерніші приклади мартингалів:

1) $\xi_k = \eta_0 + \ldots + \eta_k$, $k \in Z_+$, η_i — незалежні випадкові величини, $M\eta_i = 0$, σ-алгебра $\mathcal{F}_l$ породжена величинами $\eta_0, \ldots, \eta_l$,

$$M(\eta_0 + \cdots + \eta_{k+1}/\mathcal{F}_k) = \eta_0 + \cdots + \eta_k + M\eta_{k+1} = \xi_k,$$

бо η_{k+1} від $\mathcal{F}_k$ не залежить;

2) $\xi_k = \eta_0\ \eta_1 \ldots \eta_k$, де η_i — незалежні, $M\eta_i = 1$, $\mathcal{F}_k$ такі, як у попередньому прикладі.

Розглянемо більш складний приклад. Дві послідовності величин $\eta_0^{(i)}, \eta_1^{(i)}, \ldots, \eta_n^{(i)}$ $i = 1, 2$ такі, що для всіх n $\eta_0^{(i)}, \ldots, \eta_n^{(i)}$ має щільність відносно міри Лебега в R^{n+1}; ця щільність $f_n^{(i)}(x_0, \ldots, x_n) > 0$ майже усюди. Нехай

$$\xi_n = f_n^{(2)}(\eta_0^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)})/f_n^{(1)}(\eta_0^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ породжується величинами $\eta_0^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}$. Тоді ξ_n — мартингал.

Дійсно,

$$M(\xi_{n+1}/\mathcal{F}_n) =$$
$$= \int \frac{f_{n+1}^{(2)}(\eta_0^{(1)}, \eta_1^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}, x)}{f_{n+1}^{(1)}(\eta_0^{(1)}, \eta_1^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}, x)} g_n^{(1)}(x/\eta_0^{(1)}, \eta_1^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)})\, dx,$$

де $g_n(x/\ldots)$ — умовна щільність розподілу величини $\eta_{n+1}^{(1)}$ відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_n$. Легко перевірити, що

$$g_n^{(1)}(x/\eta_0^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}) = \frac{f_{n+1}^{(1)}(\eta_0^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}, x)}{f_{n+1}^{(1)}(\eta_0^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)})}.$$

Тому

$$M(\xi_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \frac{1}{f_n^{(1)}(\eta_0^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)})} \int f_{n+1}^{(2)}(\eta_0^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)}, x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{f_n^{(1)}(\eta_0^{(1)}, \ldots, \eta_n^{(1)})} f_n(\eta_0, \ldots, \eta_n) = \xi_n.$$

Крім мартингалів будемо розглядати також супермартингали, для яких виконані а) та б), а в) замінене на $B_1)$ $M(\xi_{k+1}/\mathcal{F}_k) \leqslant \xi_k$, та субмартингали, для яких замість в) буде $B_2)$ $M(\xi_{k+1}/\mathcal{F}_k) \geqslant \xi_k$.

Моменти зупинки. Випадкова величина τ із значеннями в Z_+ називається моментом зупинки, якщо $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. З моментом зупинки пов'язана σ-алгебра подій $\mathcal{F}_\tau : A \in \mathcal{F}_\tau$, якщо $A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ для усіх k. Якщо $\tau_1 \leqslant \tau_2$ — моменти зупинки, то $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$. Дійсно, нехай $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, тоді

$$A \cap \{\tau_2 = k\} = \bigcup_{i \leqslant k} A \cap \{\tau_1 = i\} \cap \{\tau_2 = k\} \in \mathcal{F}_k,$$

бо $A \cap \{\tau = i\} \in \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_k$ (бо $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$), $\{\tau_2 = k\} \in \mathcal{F}_k$, оскільки, τ_2 — момент зупинки.

Т е о р е м а 1. Нехай ξ_k — супермартингал, $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant N$ — моменти зупинки. Тоді

$$M(\xi_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}) \leqslant \xi_{\tau_1} \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Досить довести, що для всіх $A \subset \mathcal{F}_{\tau_1}$, $k < N$

$$M\xi_{\tau_2} I_A I_{\{\tau_1 = k\}} \leqslant M\xi_{\tau_1} I_A I_{\{\tau_1 = k\}}.$$

Маємо

$$MI_A I_{\{\tau_1 = k\}}(\xi_{\tau_2} - \xi_{\tau_1}) = MI_A I_{\{\tau_1 = k\}} \sum_{i=k}^{N} (\xi_{i+1} - \xi_i) I_{\{\tau_2 > i\}}. \tag{2}$$

Зауважимо, що $\{\tau_2 > i\} = \Omega \bigcup_{k=0}^{i} \{\tau_2 = k\} \in \mathcal{F}_i$. Тому для $i \geqslant k$

$$MI_A I_{\{\tau_1 = k\}} I_{\{\tau_2 > i\}} (\xi_{i+1} - \xi_i) =$$
$$= MM(\xi_{i+1} - \xi_i/\mathcal{F}_i) I_A I_{\{\tau_1 = k\}} I_{\{\tau_2 > i\}} \leqslant 0.$$

Отже, права частина (2) недодатна і тим самим (1) доведено.

Наслідки. 1. Якщо в умові теореми ξ_k — субмартингал, то $M(\xi_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}) \geqslant \xi_{\tau_1}$.

Це випливає з того, що $(-\xi_k)$ є супермартингал.

2. Якщо в умові теореми ξ_k мартингал, то $M(\xi_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}) = \xi_{\tau_1}$, бо мартингал є і супермартингал і субмартингал одночасно.

Нерівності для максимуму. Теорема 2.1. Нехай $\xi_0, \xi_1, \dots$ $\dots, \xi_N$ — субмартингал, тоді для $a > 0$

$$aP\{\max_{k\leqslant N} \xi_k \geqslant a\} \leqslant M(-\xi_N V 0). \tag{3}$$

2. Нехай $\xi_0, \dots, \xi_N$ — супермартингал, тоді

$$aP\{\max \xi_k \geqslant a\} \leqslant M\xi_0 + M(-\xi_N V 0). \tag{4}$$

Доведення. Позначимо через τ випадкову величину, для якої $\tau = k$, якщо $\xi_0 < a, \dots, \xi_{k-1} < a, \xi_k \geqslant a$ $(k \leqslant N)$, $\tau = N$, якщо $\xi_k < a$, $k = 0, 1, \dots, N$. За побудовою це буде момент зупинки. Нехай $A = \{\max_{k\leqslant N} \xi_k \geqslant a\}$. Тоді $A \cap \{\tau = k\} = \{\tau = k\}$ для $k < N$, $A \cap \{\tau = N\} \in \mathcal{F}_N$, бо $A \in \mathcal{F}_N$. Тому $A \in \mathcal{F}_\tau$.

1. Оскільки $\tau \leqslant N$, $M\xi_\tau I_A \leqslant M\xi_N I_A$, якщо відбулась подія A, то $\xi_\tau \geqslant a$, $\xi_\tau I_A \geqslant aI_A$,

$$aP(A) \leqslant M\xi_N I_A \leqslant M(\xi_N)_+ I_A \leqslant M(\xi_N)_+. \tag{5}$$

2. Оскільки $0 \leqslant \tau \leqslant N$,

$$M\xi_0 \geqslant M\xi_\tau = M\xi_\tau I_A + M\xi_\tau I_{\Omega\setminus A} \geqslant M\xi_\tau I_A + M\xi_N I_{\Omega\setminus A},$$

то

$$aP(A) \leqslant M\xi_\tau I_A \leqslant M\xi_0 - M\xi_N I_{\Omega\setminus A} =$$
$$= M\xi_0 + M(-\xi_N) I_{\Omega\setminus A} \leqslant M\xi_0 + M(-\xi_N)_+ I_{\Omega\setminus A} \leqslant$$
$$\leqslant M\xi_0 + M(-\xi_N V 0).$$

Наслідки. 1. Якщо ξ_k — субмартингал або супермартингал, то

$$aP\{\sup_{k\leqslant N} |\xi_k| \geqslant a\} \leqslant M|\xi_0| + M|\xi_N|$$

2. Якщо ξ_k — мартингал, то

$$aP\{\sup_{k\leqslant N} |\xi_k| \geqslant a\} \leqslant M|\xi_N|.$$

3. Нехай ξ_k — мартингал, $M\xi_k^2 < \infty$. Тоді

$$a^2P\{\sup_{k\leqslant N} |\xi_k| \geqslant a\} \leqslant M\xi_N^2. \tag{6}$$

Зауважимо, що ξ_k є субмартингал, бо

$$M(\xi_{k+1}^2/\mathcal{F}_k) = \xi_k^2 + 2M(\xi_{k+1} - \xi_k/\mathcal{F}_k)\xi_k +$$
$$+ M((\xi_{k+1} - \xi_k)^2/\mathcal{F}_k) = \xi_k^2 + M((\xi_{k+1} - \xi_k)^2/\mathcal{F}_k).$$

Тому (6) випливає з (3).

Теорема 3. Якщо для $\alpha > 1$ $M(\xi_N)_+^\alpha < \infty$, то

$$M(\max_{k\leqslant N} \xi_k V 0)^\alpha \leqslant \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^\alpha M(\xi_N)_+^\alpha. \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Позначимо $\eta = \max_{k \leqslant N} \xi_k V 0$. Тоді для події A в доведенні теореми 2 матимемо $A = \{\eta > a\}$. З рівності (5) випливає

$$aP\{\eta > a\} \leqslant M(\xi_N)_+ I_{\{\eta > a\}}.$$

Помножимо обидві частини нерівності на $a^{\alpha-2}$ і проінтегруємо по a від 0 до ∞. Тоді

$$\int_0^\infty a^{\alpha-1} P\{\eta > a\}\, da \leqslant M(\xi_N)_+ \int_0^\eta a^{\alpha-2} da = M(\xi_N)_+ \eta^{\alpha-1}/\alpha - 1.$$

Оскільки

$$\int_0^\infty a^{\alpha-1} P\{\eta > a\}\, da = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty a^\alpha dP\{\eta \leqslant a\} = \frac{1}{\alpha} M\eta^\alpha,$$

то

$$M\eta^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} M(\xi_N)_+ \eta^{\alpha-1}.$$

Застосуємо нерівність Гельдера: якщо $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 0$, $q > 0$, то $M\xi\eta \leqslant (M\xi^p)^{1/p} (M\eta^q)^{1/q}$. Візьмемо $p = \alpha$, $q = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$. Тоді

$$M(\xi_N)_+ \eta^{\alpha-1} \leqslant (M(\xi_N)_+^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} (M\eta^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Тому

$$M\eta^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} (M(\xi_N)_+^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} (M\eta^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Піднісши цю нерівність до степеня α, дістанемо (7).

Число перетинів смуги. Розглянемо числову послідовність $x_0, x_1, \ldots, x_N$ і числа $a < b$. Говоритимемо, що послідовність перетинає смугу згори вниз k разів, якщо існують такі $k + 1$ номери $n_0 < n_1 < \ldots < n_k \leqslant N$, що виконуються нерівності $x_{n_0} \geqslant b$, $x_{n_1} \leqslant a$, $x_{n_2} \geqslant b$, $x_{n_3} \leqslant a$, ..., але не існує $k + 2$ номерів з такою ж властивістю. Аналогічно визначається число перетинів смуги знизу вгору ($x_{n_0} \leqslant a$, $x_{n_1} \geqslant b$, ...). Визначити кількість перетинів згори вниз можна так. Знайдемо перший номер n_0, для якого $x_{n_0} \geqslant b$, після цього перший номер $n_1 > n_0$, для якого $x_{n_1} \leqslant a$, ...

Т е о р е м а 4. Нехай $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$ — субмартингал, $\nu_-(a, b)$ — число перетинів смуги (a, b) згори вниз. Тоді

$$M\nu_-(a, b) \leqslant \frac{M(\xi_N - b)_-}{b - a}. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо моменти зупинки τ_i, що визначаються послідовно таким чином. τ_0 — це найменший номер $k \leqslant N$, для якого $\xi_{\tau_0} \geqslant b$. Якщо такого номера не існує, то $\tau_0 = N$. Тоді й $\tau_i = N$ для всіх i. Якщо $\tau_0 < N$, позначимо через τ_1 такий найменший номер $k > \tau_0$, для якого $\xi_k \leqslant a$. Знову при відсутності такого номера вважаємо $\tau_1 = N$ і $\tau_i = N$ для $i > 1$. Коли $\tau_1 < N$, визначаємо τ_2 як найменший номер $k > \tau_1$, для якого $\xi_k \leqslant a$ ... . Нехай

$$A_{2m} = \{\tau_{2m} < N\} \cap \{\xi_{\tau_{2m+1}} \leqslant a\} = \{\nu_-(a,\ b) \geqslant m + 1\}.$$

Подія $A_{2m} \in \mathcal{F}_{\tau_{2m+1}}$. Так само

$$A_{2m+1} = \{\tau_{2m+1} < N\} \cap \{\xi_{\tau_{2m+2}} \geqslant b\} \in \mathcal{F}_{\tau_{2m+2}}.$$

Очевидно, $A_{2m+1} \subset A_{2m}$. Маємо

$$0 \leqslant M(\xi_{\tau_{2m+1}} - \xi_{\tau_{2m}}) I_{A_{2m-1}} = M(\xi_{\tau_{2m+1}} - \xi_{\tau_{2m}}) I_{A_{2m}} + \\ + M(\xi_{\tau_{2m+1}} - \xi_{\tau_{2m}}) I_{A_{2m-1} \setminus A_{2m}}.$$

Коли $\omega \in A_{2m}$, $\xi_{\tau_{2m+1}} \leqslant a$, $\xi_{\tau_{2m}} \geqslant b$, $\xi_{\tau_{2m+1}} - \xi_{\tau_{2m}} \leqslant a - b$. Коли $\omega \in$ $\in A_{2m-1}$, $\xi_{\tau_{2m}} \geqslant b$. Тому

$$0 \leqslant (a - b) M I_{A_{2m}} + M(\xi_{\tau_{2m+1}} - b) I_{A_{2m-1} \setminus A_{2m}} \leqslant \\ \leqslant (a - b) P(A_{2m+1}) + M(\xi_N - b) I_{A_{2m-1} \setminus A_{2m}}$$

(ми знову використали те, що ξ_k — субмартингал). Отже,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (b - a) P(A_{2m}) \leqslant M(\xi_N - b) I_{\cup(A_{2m-1} \setminus A_{2m})} \leqslant M(\xi_N - b)_+,$$

оскільки множини $A_{2m} \setminus A_{2m-1}$ не мають спільних точок для різних m. Але

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(A_{2m}) = \sum_{m=0}^{\infty} P\{\nu_-(a,\ b) > m\} = M\nu_-(a,\ b).$$

Н а с л і д о к. Якщо $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — супермартингал, $\nu_+(a,\ b)$ — число перетинів послідовністю $\xi_1, \ldots, \xi_N$ смуги $(a,\ b)$ знизу вгору, то

$$M\nu_+(a,\ b) \leqslant \frac{1}{b - a} M(a - \xi_N)_+. \tag{9}$$

Рівність (9) випливає з рівності (8), якщо зауважити, що $\nu_+(a,\ b)$ є також число перетинів субмартингалом $-\xi_1, \ldots, -\xi_N$ смуги $(-b,\ -a)$ згори вниз.

Суми незалежних випадкових величин. Нехай $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ — незалежні випадкові величини, $M\eta_k = 0$, $M|\eta_k|^\alpha < \infty$, $\alpha \geqslant 1$. Тоді $\xi_k = \sum_{i=1}^{k} \eta_i$ $(\xi_0 = 0)$ є мартингал, тому

$$P\{\sup_{k \leqslant N} |\xi_k| > a\} \leqslant a^{-1} M|\xi_N|,$$

$$P\{\sup_{k \leqslant N} |\xi_k| > a\} \leqslant a^{-\alpha} M|\xi_N|^\alpha,$$

друга нерівність випливає з того, що $|\xi_k|^\alpha$ є субмартингал, а це є наслідок такої більш загальної властивості, яку сформулюємо у вигляді леми.

Л е м а. Нехай ξ_n — мартингал, а функція $g(x)$ опукла вниз, $M|g(\xi_n)| < \infty$. Тоді $g(\xi_n)$ є субмартингал.

Доведення. Покажемо, що

$$M(g(\xi_{n+1})/\mathcal{F}_n) \geqslant g(\xi_n). \qquad (10)$$

Для $g(x)$ в умові леми завжди існує $g'(x+)$ і

$$g(x+y) - g(x) - g'(x+)y \geqslant 0$$

для усіх y. Тому для будь-якого $A \subset \mathcal{F}_n$

$$g(\xi_{n+1}) - g(\xi_n) \geqslant g'(\xi_n+)(\xi_{n+1} - \xi_n),$$

$$M[g(\xi_{n+1}) - g(\xi_n)] I_A \geqslant 0$$

і

$$M[M(g(\xi_{n+1})/\mathcal{F}_n) - g(\xi_n)] I_A \geqslant 0. \qquad (11)$$

Оскільки множник при I_A в (11) — $\mathcal{F}_n$-вимірна величина, A довільна $\mathcal{F}_n$-вимірна множина, то з (11) випливає (10).

Рівність Вальда. Нехай η_i — незалежні випадкові величини, $M\eta_i = 0$, $D\eta_i < \infty$, τ — скінченний момент зупинки. Тоді

$$M\left(\sum_1^\tau \eta_i\right)^2 = M\sum_1^\tau D\eta_i. \qquad (12)$$

Дійсно,

$$\left(\sum_1^\tau \eta_i\right)^2 = \Sigma\eta_i^2 I_{\{\tau\geqslant i\}} + 2\sum_{i<k}\eta_i I_{\{\tau\geqslant k\}}\eta_k. \qquad (13)$$

Величина η_i не залежить від $I_{\{\tau\geqslant i\}} = 1 - I_{\{\tau\leqslant i-1\}}$, бо це $\mathcal{F}_{i-1}$ — вимірна величина. Так само η_k не залежить від $\eta_i I_{\{\tau\geqslant k\}}$, якщо $i < k$. Взявши математичне сподівання в (13), дістанемо (12).

5. ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦЮ МАРТИНГАЛА

Однією з важливих властивостей мартингалів є існування границі при досить широких умовах. Розглянемо ці умови. Спочатку поширимо нерівності для мартингалів на нескінченні послідовності. Ці нерівності далі позначимо римськими цифрами.

I. Якщо ξ_n — субмартингал і $\sup M(\xi_n)_+ < \infty$, то для $a > 0$

$$P\{\sup_n \xi_n \geqslant a\} \leqslant a^{-1}\sup_n M(\xi_n)_+.$$

II. Якщо ξ_n — супермартингал і $\sup\limits_n M(\xi_n)_- < \infty$, то для $a > 0$

$$P\{\sup_n \xi_n \geqslant a\} \leqslant a^{-1}(M\xi_0 + \sup_n M(\xi_n)_-).$$

III. Якщо ξ_n — мартингал, $\sup\limits_n M|\xi_n| < \infty$, то для $a > 0$

$$P\{\sup_n |\xi_n| \geqslant a\} \leqslant a^{-1}\sup_n M|\xi_n|.$$

IV. Якщо ξ_n — субмартингал, $\nu_-(a, b)$ — число перетинів послідовністю $\xi_0, \xi_1, \ldots$ смуги (a, b) згори вниз, $\sup_n M(\xi_n - b)_+ < \infty$, то

$$M\nu_-(a, b) \leqslant (b-a)^{-1} \sup_n M(\xi_n - b)_+.$$

V. Якщо ξ_n — супермартингал, $\nu_+(a, b)$ — число перетинів послідовністю $\xi_0, \xi_1, \ldots$ смуги (a, b) знизу вгору, $\sup_n M(a - \xi_n)_+ < \infty$, то

$$M\nu_+(a, b) \leqslant (b-a)^{-1} \sup_n M(a - \xi_n)_+.$$

Усі ці нерівності доводяться за допомогою граничного переходу з використанням рівностей такого виду:

$$P\{\sup_n \xi_n \geqslant a\} = \lim_{N\to\infty} P\{\sup_{n\leqslant N} \xi_n \geqslant a\},$$

$$M\nu_-(a, b) = \lim_{N\to\infty} M\nu_-^{(N)}(a, b).$$

Тут $\nu_-^{(N)}(a, b)$ — число перетинів смуги (a, b) послідовністю $\xi_0, \ldots, \xi_N$ згори вниз.

Сформулюємо тепер найпростішу теорему про границю.

Т е о р е м а 1. Нехай ξ_n — супермартингал і

$$\sup_n M(\xi_n)_- = \sup_n M(-\xi_n V 0) < \infty.$$

Тоді з імовірністю 1 існує $\lim_{n\to\infty} \xi_n$.

Д о в е д е н н я. Числова послідовність x_n має границю $\lim x_n$ тоді і лише тоді, коли: а) вона обмежена, б) вона перетинає кожну смугу (a, b) скінченне число разів. Дійсно, якщо послідовність збігається, то вона обмежена і для досить великих N $|x_n - x_m| < b - a$ при $n > N$, $m > N$, і тому $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$ не перетинає смугу (a, b) жодного разу. Навпаки, якщо послідовність x_n обмежена, то існують $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = b_1$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a_1$. Якби $a_1 < b_1$, то для $a_1 < a < b < b_1$ смуга (a, b) перетиналась би послідовністю x_n безліч разів. Тому, коли виконуються умови а) та б), тоді $-\infty < \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n < \infty$ і $\lim x_n$ існує.

Покажемо, що в умовах теореми з імовірністю 1 виконуються а) та б). Оскільки $-\xi_n$ — субмартингал, то за I

$$P\{\sup_n(-\xi_n) \geqslant a\} \leqslant a^{-1} \sup_n M(\xi_n)_-,$$

$$P\{\sup_n(-\xi_n) = +\infty\} = 0,$$

$$P\{\overline{\lim_{n\to\infty}}(-\xi_n) = +\infty\} = P\{\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \xi_n = -\infty\} = 0.$$

Використавши II, матимемо

$$P\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \xi_n = +\infty\} \leqslant P\{\sup_n \xi_n = +\infty\} = 0,$$

отже,

$$P\{-\infty < \underline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \xi_n < \infty\} = 1.$$

Позначимо через $A_{a,b}$ подію: послідовність ξ_n перетинає смугу (a, b) скінченне число разів (це означає, що і знизу вгору вона перетинає цю смугу скінченне число разів). Тоді подія

$$A = \bigcap_{a<b} A_{a,b}$$

означає, що кожна смуга (a, b), $a < b$ перетинається послідовністю ξ_n скінченне число разів. Зауважимо, що коли $a < a_1 < b_1 < b$, тоді $A_{a,b} \supset A_{a_1,b_1}$. Якщо Q — множина раціональних чисел, то

$$A = \bigcap_{a<b,a,b\in Q} A_{a,b}.$$

Сукупність подій $A_{a,b}$, $a < b$, a, $b \in Q$ злічення. Тому $P(A) = 1$, якщо $P(A_{a,b}) = 1$, $a < b$, a, $b \in Q$. Але $A_{a,b} = \{\nu_+(a, b) < \infty\}$, $P(A_{a,b}) = 1$, бо

$$M\nu_+(a, b) \leqslant \sup_n M(a - \xi_n)_+ \leqslant |a| + \sup_n M|\xi_n|_- < \infty.$$

Отже, $$P(\{-\infty < \underline{\lim}\, \xi_n \leqslant \overline{\lim}\, \xi_n < \infty\} \cap A) = 1,$$

$$A \cap \{-\infty < \underline{\lim}\, \xi_n \leqslant \overline{\lim}\, \xi_n < \infty\} \subset \{\lim \xi_n \text{ існує}\}.$$

Н а с л і д о к 1. Якщо ξ_n — супермартингал, $\xi_n \geqslant 0$, то з імовірністю 1 $\lim \xi_n$ існує ($(\xi_n)_- = 0$).

Н а с л і д о к 2. З імовірністю 1 мають границю обмежені знизу (невипадковою величиною) мартингали та супермартингали.

Н а с л і д о к 3. Якщо ξ_n — субмартингал $\sup_n M(\xi_n)_+ < \infty$, то $\lim \xi_n$ існує з імовірністю 1.

Збіжність рядів з незалежними членами. Нехай η_k — послідовність незалежних випадкових величин, $\xi_k = \sum_{i=1}^{k} \eta_i$. Припустимо, існує $\lim_{i\to\infty} \xi_k$, це означає, що збігається ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$. Нас буде цікавити питання, коли цей ряд збігається з імовірністю 1.

Т е о р е м а 2 (Колмогорова). 1. Якщо $M\eta_i = 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} D\eta_i < \infty$, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$ збігається з імовірністю 1.

2. Якщо $P\{\sup_k |\xi_k| < \infty\} > 0$, а $|\eta_i| \leqslant C$ для всіх i, $M\eta_i = 0$, то $\sum_{i=1}^{\infty} D\eta_i < \infty$.

Д о в е д е н н я. Нехай виконуються умови 1). Тоді ξ_k — мартингал, $M\xi_k^2 = \sum_{i=1}^{k} D\eta_i < \infty$. Тому $\sup_n M|\xi_n| < \infty$. Твердження є наслідком теореми 1.

2. Нехай $\tau = \inf[k: |\xi_k| > a]$, $a > 0$, якщо $|\xi_k| \leqslant a$ для всіх k, то $\tau = +\infty$. Величина $\tau \wedge N$ є момент зупинки. На основі рівності Вальда

$$M\xi^2_{\tau\wedge N} = M \sum_1^{\tau\wedge N} D\eta_i.$$

Зауважимо, що $|\xi_{\tau-1}| < a$, тому $|\xi_\tau| \leqslant |\xi_{\tau-1}| + |\eta_\tau| \leqslant a + c$,

$$M\left(\sum_1^{\tau\wedge N} D\eta_i\right) \leqslant (a+c)^2.$$

Перейдемо до границі, коли $N \to \infty$. Матимемо

$$P\{\tau = \infty\} \sum_1^\infty D\eta_i \leqslant (a+c). \qquad (1)$$

Якщо a вибране так, щоб $P\{\tau = +\infty\} = P\{\sup|\xi_k| \leqslant a\} > 0$ (а за умовою це можна зробити), то з (1) випливає $\sum^\infty D\eta_i < \infty$. Наведемо також необхідні та достатні умови збіжності рядів.

Теорема 3 (Колмогорова про три ряди). Нехай $\eta_i(c)$, $c > 0$ визначаються рівністю $\eta_i(c) = \eta_i I_{\{|\eta_i| \leqslant c\}}$. Для збіжності ряду з незалежних величин $\Sigma\eta_i$ необхідно і достатньо, щоб збігалися для деякого $c > 0$ ряди: а) $P\{|\eta_i| > c\}$, б) $\Sigma M\eta_i(c)$, в) $\Sigma D\eta_i(c)$.

Доведення.

$$\Sigma\eta_i = \Sigma(\eta - \eta_i(c)) + \Sigma(\eta_i(c) - M\eta_i(c)) + \Sigma M\eta_i(c). \qquad (2)$$

Якщо виконані умови а) — в), то перший ряд праворуч в (2) збігається, бо з умови 1) випливає, що серед його доданків лише скінченне число відмінне від 0, другий — внаслідок теореми 2, а третій — за умовою б). Якщо збігається ряд $\Sigma\eta_i$, то для всіх досить великих i $|\eta_i(c)| \leqslant c$, тому а) є наслідок теореми Бореля — Кантеллі. Отже, збігається ряд $\Sigma\eta_i(c)$. Нехай $\{\bar\eta_i(c)\}$ не залежать від $\{\eta_i(c)\}$ і мають такий самий сукупний розподіл. Тоді збігатиметься ряд

$$\Sigma(\eta_i(c) - \tilde\eta_i(c)), \quad M[\eta_i(c) - \tilde\eta_i(c)] = 0, \quad |\eta_i(c) - \tilde\eta_i(c)| \leqslant 2c.$$

Внаслідок теореми 2 збігається ряд

$$\Sigma D[\eta_i(c) - \tilde\eta_i(c)] = 2\Sigma D\eta_i(c),$$

отже, збігається і другий ряд праворуч в (2). Тому збігається і третій ряд.

Замкнення мартингала. Нехай ξ_n — мартингал, для якого існує $\xi_\infty = \lim \xi_n$. Коли для цієї величини також виконується рівність $M(\xi_\infty/\mathcal{F}_n) = \xi_n$? Тобто, коли у рівності $\xi_n = M(\xi_m/\mathcal{F}_n)$, вірній для $m > n$, можна взяти $m = \infty$? Щоб відповісти на це запитання, нам потрібне поняття рівномірної інтегровності. Дамо це поняття у термінах випадкових величин.

Сукупність випадких величин $\{\xi_\alpha\}$ називається рівномірно інтегровною (р. і.), якщо

$$\lim_{c\to\infty}\sup_\alpha M|\xi_\alpha|I_{\{|\xi_\alpha|>c\}}=0.$$

Лема 1. Якщо: а) $\xi_n\to\xi$ за імовірністю, то: б1) $M\xi_n\to M\xi$, коли ξ_n р. і. Якщо крім а) ще $\xi_n\geqslant 0$, то: б2) послідовність ξ_n р. і., коли $M\xi_n\to M\xi$.

Доведення. б1) Нехай

$$g_c(x)=xI_{\{|x|\leqslant c\}}+c\operatorname{sign}xI_{\{|x|>c\}}.$$

Це неперервна функція, $g_c(\xi_n)\to g_c(\xi)$ за імовірністю і внаслідок теореми Лебега

$$\lim_{n\to\infty}Mg_c(\xi_n)=Mg_c(\xi).$$

Але $\lim\limits_{c\to\infty}Mg_c(\xi)=M\xi$, а

$$|Mg_c(\xi_n)-M\xi_n|\leqslant M|g_c(\xi_n)-\xi_n|\leqslant M|\xi_n|I_{\{|\xi_n|>c\}}.$$

Тому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|M\xi_n-M\xi|\leqslant|Mg_c(\xi)-M\xi|+\sup_n M|\xi_n|I_{\{|\xi_n|>c\}}.$$

Цей вираз можна зробити як завгодно малим вибором $c>0$.

б2) Оскільки $M\xi_n\to M\xi$ і $Mg_c(\xi_n)\to Mg_c(\xi)$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}M(\xi_n-g_c(\xi_n))=M(\xi-g_c(\xi)).$$

Виберемо довільне $\varepsilon>0$, нехай $\bar c$ таке, що $M(\xi-g_{\bar c}(\xi))<\varepsilon/2$. Існує таке n_ε, що коли $n>n_\varepsilon$, буде $M(\xi_n-g_{\bar c}(\xi_n))<M(\xi-g_{\bar c}(\xi))+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Тоді для всіх $c>\bar c$ $n>n_\varepsilon$ $M(\xi_n-g_c(\xi_n))<\varepsilon$. Для кожного $k=1,\ldots,n_\varepsilon$ існує c_k таке, що для $c>c_k$ $M(\xi_k-g_c(\xi_k))<\varepsilon$. Якщо $c>\bar cVc_1V\ldots Vc_k$, то $\sup\limits_n M(\xi_n-g_c(\xi_n))<\varepsilon$. Отже,

$$\lim_{c\to\infty}\sup_n M(\xi_n-g_c(\xi_n))=0.$$

Зауважимо тепер, що для всіх $0<c<b$

$$xI_{\{x>b\}}\leqslant(x-g_c(x))+cI_{\{x>b\}},$$

$$\sup_n M\xi_nI_{\{\xi_n>b\}}\leqslant\sup_n M(\xi_n-g_c(\xi_n))+c\sup\frac{M\xi_n}{b}$$

(ми використали нерівність Чебишова). Переходячи до границі, коли $b\to\infty$, а потім коли $c\to\infty$, дістанемо потрібне.

Умова рівномірної інтегровності. Якщо існує така зростаюча функція $g(x):R_+\to R_+$, що $\lim\frac{x}{g(x)}=0$, $\sup\limits_\alpha Mg(\xi_\alpha)<\infty$, то $\{\xi_\alpha\}$ р. і.

Дійсно,

$$M|\xi_\alpha| I_{\{|\xi_\alpha|>c\}} \leqslant \sup_{x\geqslant c} \frac{x}{g(x)} Mg(|\xi_\alpha|).$$

Т е о р е м а 4. Нехай ξ_n — мартингал. Для того щоб існувала границя $\lim \xi_n = \xi_\infty$ і виконувалась рівність

$$\xi_n = M(\xi_\infty/\mathcal{F}_n), \tag{3}$$

необхідно і достатньо, щоб $\{\xi_n\}$ було р. і.

Д о в е д е н н я. Нехай $\{\xi_n\}$ р. і. Тоді такою буде і послідовність $\{(\xi_n)_+\}$, $(\xi_n)_+ = \xi_n V0$. Тому $\sup\limits_n M(\xi_n)_+ < \infty$. Отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi_\infty$. Нехай $A_n \in \mathcal{F}_n$. Для $m > n$

$$M\xi_m I_{A_n} = M\xi_n I_{A_n}.$$

Сукупність $\{\xi_m I_{A_n}, m > n\}$ р. і. Тому на основі леми 1 можна у попередній рівності перейти до границі, коли $m \to \infty$:

$$M\xi_n I_{A_n} = M\xi_\infty I_{A_n}.$$

Це еквівалентно (3). Покажемо тепер, що сукупність величин ξ_n, для яких виконується (3) і $M|\xi_\infty| < \infty$, р. і. Доведемо загальне твердження.

Л е м а 2. Нехай $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ — довільна сукупність σ-алгебр з $\mathcal{F}$. $M|\eta| < \infty$. Тоді сукупність $\{\xi_\alpha = M(\eta/\mathcal{F}_\alpha)\}$ р. і.

Д о в е д е н н я. Маємо

$$M|\xi_\alpha| I_{\{|\xi_\alpha|>c\}} = M|(M\eta/\mathcal{F}_\alpha)| I_{\{|\xi_\alpha|>c\}} \leqslant MM(|\eta|/\mathcal{F}_\alpha) I_{\{|\xi_\alpha|>c\}} =$$
$$= M|\eta| I_{\{|\xi_\alpha|>c\}}$$

(ми використали те, що ξ_α вимірна відносно $\mathcal{F}_\alpha$). Далі,

$$M|\eta| I_{\{|\xi_\alpha|>c\}} \leqslant bI_{\{|\xi_\alpha|>c\}} + M|\eta| I_{\{|\eta|>b\}}.$$

Оскільки $M|\xi_\alpha| \leqslant M|\eta|$, то

$$M|\xi_\alpha| I_{\{|\xi_\alpha|>c\}} \leqslant \frac{bM|\eta|}{c} + M|\eta| I_{\{|\eta|>b\}}.$$

Права частина не залежить від α і може бути зроблена як завгодно малою для всіх досить великих c. Теорема і лема доведені.

Зауваження 1. Нехай ξ_n — р. і. мартингал $\xi_\infty = \lim \xi_n$, τ — момент зупинки, можливо, $\tau = +\infty$. Тоді

$$\xi_\tau = M(\xi_\infty/\mathcal{F}_\tau). \tag{4}$$

Дійсно, якщо $m > n$, то для $A \in \mathcal{F}_\tau$, $A \cap \{\tau \leqslant n\} \in \mathcal{F}_{\tau\wedge n}$

$$M\xi_{\tau\wedge n} I_A I_{\{\tau\leqslant n\}} = M\xi_m I_A I_{\{\tau\leqslant n\}}$$

(це встановлено у попередній лекції). Можемо перейти до границі, коли $m \to \infty$:

$$M\xi_{\tau\wedge n} I_A I_{\{\tau\leqslant n\}} = M\xi_\infty I_A I_{\{\tau\leqslant n\}}. \tag{5}$$

Звідси $\xi_{\tau\wedge n} = M(\xi_\infty/\mathcal{F}_{\tau\wedge n})$ і $\{\xi_{\tau\wedge n}\}$ р. і. за лемою 2. **Тому в (5) можна** перейти до границі, коли $n \to \infty$. Дістанемо

$$M\xi_\tau I_A I_{\{\tau<\infty\}} = M\xi_\infty I_A I_{\{\tau<\infty\}}.$$

Для будь-якого A

$$M\xi_\tau I_A I_{\{\tau<\infty\}} = M\xi_\infty I_A I_{\{\tau=\infty\}}.$$

Додавши дві попередні рівності, матимемо $M\xi_\tau I_A = M\xi_\infty I_A$, а це еквівалентно (4).

Наслідок 4. Нехай $\mathcal{F}_n$ — зростаюча послідовність σ-алгебр, $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_n \mathcal{F}_n$. Тоді для будь-якої величини ξ, для якої $M|\xi| < \infty$, з імовірністю 1

$$\lim_{n\to\infty} M(\xi/\mathcal{F}_n) = M(\xi/\mathcal{F}_\infty)$$

Існування границі випливає з того, що $M(\xi/\mathcal{F}_n)$ є р. і. мартингал. Якщо цю границю позначимо ξ_∞, то для всіх $A \in \mathcal{F}_n$ $M\xi_\infty I_A = M\xi I_A$, тому це вірно для всіх $A \in \bigvee_n \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_\infty$, тобто $\xi_\infty = M(\xi/\mathcal{F}_\infty)$.

Зауваження 2. Якщо $\{\xi_n, n \in Z_-\}$ — мартингал, то існує $\lim_{n\to-\infty} \xi_n$. Це випливає з р. і. мартингала завдяки рівності $\xi_n = M(\xi_0/\mathcal{F}_n)$, $n < 0$. Використовуючи обмеженість $M|\xi_n|$ так, як при доведенні теореми 1, встановлюємо, що ξ_n обмежене з імовірністю 1 і з імовірністю 1 перетинає будь-яку смугу $[a, b]$, де $a < b$ раціональні, скінченне число разів.

6. СТАЦІОНАРНІ ПОСЛІДОВНОСТІ. ЕРГОДИЧНА ТЕОРЕМА

Послідовність $\{\xi_n, n \in Z_+\}$ у фазовому просторі $(X, \mathcal{B})$ називається стаціонарною, якщо для всіх $n \geqslant 0$ $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ виконується рівність

$$P\{\xi_0 \in A_0, \ldots, \xi_n \in A_n\} = P\{\xi_1 \in A_0, \ldots, \xi_{n+1} \in A_n\}. \tag{1}$$

Звідси за індукцією можна встановити, що для всіх $m > 0$

$$P\{\xi_0 \in A_0, \ldots, \xi_n \in A_n\} = P\{\xi_m \in A_0, \ldots, \xi_{n+m} \in A_n\}. \tag{2}$$

Важливою властивістю стаціонарних послідовностей є існування границі

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \tag{3}$$

з імовірністю 1, якщо $M|\xi_0| < \infty$. Це випливає з більш загальної за формою теореми Біркгофа, яку ми і будемо доводити. У цій теоремі розглядається вимірне перетворення T певного вимірного простору $(Y, \mathfrak{S})$ з мірою m, яка зберігається цим перетворенням: для кожного $C \in \mathfrak{S}$, $m(T^{-1}C) = m(C)$, $T^{-1}C$ — прообраз множини C. Послідовність $\{y, Ty, T^2y, \ldots\}$ є траєкторія точки y. Нас цікавитиме середнє значення функцій вздовж траєкторій:

$$S_n(f, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k y). \tag{4}$$

Т е о р е м а 1 (Біркгофа). Якщо m — скінченна міра, $\int |f(y)| \times m(dy) < \infty$, то існує майже для всіх y за мірою m $\lim S_n(f, y) = \bar{f}(y)$. Функція $\bar{f}(y)$ має властивості: а) $\bar{f}(Ty) = \bar{f}(y)$ *майже для всіх y за мірою m, б)* $\int f(y)\, m(dy) = \int \bar{f}(y)\, m(dy)/m(X)$.

Доведення цієї теореми розглянемо далі. Покажемо, як зв'язані стаціонарні послідовності з перетвореннями, що зберігають міру. Нехай Y — множина послідовностей $\{x_0, x_1, \ldots\}$, $x_n \in X$, $\mathfrak{S}$ — циліндрична σ-алгебра, що породжується множинами $\{\{x_0, x_1, \ldots\}: x_0 \in A_0, \ldots, x_n \in A_n\}$, $A_k \in \mathscr{B}$.

На $\mathfrak{S}$ визначимо міру $m(\{x_0, x_1, \ldots\} : x_0 \in A_0, \ldots, x_n \in A_n) = P\{\xi_0 \in A_0, \ldots, \xi_n \in A_n\}$.

Нарешті визначимо перетворення $T : T\{x_0, x_1, x_2, \ldots\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$. З рівності (1) випливає, що перетворення T зберігає міру m.

Якщо розглянути $\{Y, \mathfrak{S}, m\}$ як імовірнісний простір і взяти $f(\{x_0, x_1, \ldots\}) = x_0$, то $f(T^k y) = x_k$ і

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = S_n(f, \{\xi_0, \xi_1, \ldots\}).$$

Тому існування границі (3) є наслідок теореми Біркгофа. Для доведення теореми 1 встановимо спочатку одне допоміжне твердження, що має назву максимальної ергодичної теореми.

Т е о р е м а 2. Нехай $V_n = \{y : S_n(f, y) \geqslant 0\}$, $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$; $\int |f|\, dm < \infty$. Тоді

$$\int I_V f(y)\, m(dy) \geqslant 0.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $U_n = \bigcup_{k=0}^{n} V_k$, $F_n(y) = \max_{k \leqslant n} (f(y) + f(Ty) + \cdots + f(T^k y))$. Тоді $U_n = \{y : F_n(y) \geqslant 0\}$. Маємо

$$F_n(y) = f(y) + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (f(Ty) + \cdots + f(T^k y))\, I_{\{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (f(Ty) + \cdots + f(T^k y)) \geqslant 0\}} =$$
$$= f(y) + F_{n-1}(Ty)\, I_{\{F_{n-1}(Ty) \geqslant 0\}}.$$

Тому

$$F_n(y)\, I_{\{F_n(y) \geqslant 0\}} = f(y)\, I_{\{F_n(y) \geqslant 0\}} + F_{n-1}(Ty)\, I_{\{F_{n-1}(Ty) \geqslant 0\}} I_{\{F_n(y) \geqslant 0\}} \leqslant$$
$$\leqslant f(y)\, I_{\{F_n(y) \geqslant 0\}} + F_{n-1}(Ty)\, I_{\{F_{n-1}(Ty) \geqslant 0\}}. \tag{5}$$

Зауважимо тепер, що для інтегровної за мірою m функції f буде $\int f(y)\, m(dy) = \int f(Ty)\, m(dy)$.

Це вірно, коли $f(y) = I_c(y)$, а лінійними комбінаціями таких функцій можна наблизити всі інтегровні. Проінтегруємо рівність (5):

$$\int F_n(y) I_{\{F_n(y)\geq 0\}} m(dy) = \int f(y) I_{\{F_n(y)\geq 0\}} m(dy) +$$
$$+ \int F_{n-1}(Ty) I_{\{F_{n-1}(Ty)\geq 0\}} m(dy) =$$
$$= \int_{U_n} f(y) m(dy) + \int F_{n-1}(y) I_{\{F_{n-1}(y)\geq 0\}} m(dy).$$

Оскільки $F_n(y) \geqslant F_{n-1}(y)$, то $F_n(y) \vee 0 \geqslant F_{n-1}(y) \vee 0$, тому

$$\int [F_n(y) \vee 0]\, m(dy) \leqslant \int_{U_n} f(y) m(dy) + \int [F_n(y) \vee 0]\, m(dy),$$

тобто $\int\limits_{U_n} f(y) m(dy) \geqslant 0$. Переходячи до границі, коли $n \to \infty$, дістаємо твердження теореми.

Далі нам буде потрібне поняття інваріантної множини. Це така множина A, що для всіх $y \in A$ $Ty \in A$. Позначимо для інваріантної множини A через $\mathfrak{S}_A$ сукупність $\mathfrak{S}$-вимірних підмножин A, перетворення $T^A x$, $x \in A$ $\mathfrak{S}$-вимірне. Нехай $V \in \mathfrak{S}_A$. Тоді $(T^A)^{-1} V = \{y \in A : Ty \in V\} = T^{-1}V \setminus (T^{-1}A \setminus A)$. Позначимо через m^A звуження m на $\mathfrak{S}_A$. Маємо $|\, m^A((T^A)^{-1}V) - m^A(V)\,| \leqslant m(T^{-1}A \setminus A)$. Покажемо, що праворуч стоїть 0. З інваріантності множини A випливає, що $T^{-2}A \supset T^{-1}A$, тому

$$m(T^{-1}A \setminus A) = m(T^{-1}(T^{-1}A \setminus A)) =$$
$$= m(T^{-2}A \setminus T^{-1}A) = m(A) - m(A) = 0.$$

Таким чином, перетворення TA простору $(A, \mathfrak{S}_A)$ зберігає міру m_A. Це свідчить, що можна розглядати перетворення на кожній інваріантній множині (будемо для нього вживати те саме позначення), і воно буде зберігати ту саму міру.

Д о в е д е н н я   т е о р е м и 1. Розглянемо множини

$$A^\alpha = \{y : \overline{\lim}\, S_n(f, y) > \alpha\},$$
$$A_\beta = \{y : \underline{\lim}\, S_n(f, y) < \beta\}.$$

Це інваріантні множини. Якщо $y \in A^\alpha$, то

$$\overline{\lim}\, S_n(f, Ty) = \overline{\lim}\left(\frac{n+1}{n} S_{n+1}(f, y) - \frac{1}{n} f(y)\right) =$$
$$= \overline{\lim}\, S_{n+1}(f, y) > \alpha.$$

Тому на кожній з множин A^α, A_β можна розглядати перетворення T як таке, що зберігає міру m. Для всіх $y \in A^\alpha$ існує таке n, що

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(T^k y) \geqslant \alpha,$$
$$\sum_{k=0}^{n} [f(T^k y) - \alpha] \geqslant 0.$$

Внаслідок теореми 2

$$\int\limits_{A^{\alpha}} [f(y) - \alpha]\, m(dy) \geqslant 0, \quad \alpha m(A^{\alpha}) \leqslant \int\limits_{A^{\alpha}} f(y)\, m(dy),$$

$$m(A^{\alpha}) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int |f(y)|\, m(dy).$$

Отже, $m(A^{\alpha}) \to 0$, коли $\alpha \to +\infty$, тобто

$$m(\{y : \overline{\lim}\, S_n(f, y) = +\infty\}) = 0. \tag{6}$$

Аналогічно існують такі n, що

$$\sum_{k=0}^{n} (\beta - f(T^k y)) \geqslant 0$$

для всіх $y \in A_{\beta}$,

$$\int [\beta - f(y)]\, m(dy) \geqslant 0, \quad -\beta m(A_{\beta}) \leqslant -\int\limits_{A_{\beta}} f(y)\, m(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \int |f(y)|\, m(dy);$$

$$m(A_{\beta}) \leqslant -\frac{1}{\beta} \int |f(y)|\, m(dy),$$

якщо $\beta < 0$, і

$$m(\{y : \underline{\lim}\, S_n(f, y) = -\infty\}) = 0. \tag{7}$$

Отже, майже для всіх y за мірою m скінченні $\underline{\lim}\, S_n(f, y)$ та $\overline{\lim}\, S_n(f, y)$. Тому для доведення теореми досить довести, що $\underline{\lim}\, S_n(f, y) = \overline{\lim}\, S_n(f, y)$ майже для усіх y за мірою m.

Позначимо $A_{\beta}^{\alpha} = A^{\alpha} \cap A_{\beta}$. Покажемо, що для $\beta < \alpha$ буде $m(A_{\beta}^{\alpha}) = 0$. Множина A_{β}^{α} інваріантна. Для цієї множини існують такі n, що $\sum\limits_{0}^{n} [f(T^k y) - \alpha] \geqslant 0$, і такі, що

$$\sum_{0}^{n} [\beta - f(T^k y)] \geqslant 0.$$

Тому внаслідок теореми 2

$$\int\limits_{A_{\beta}^{\alpha}} [f(y) - \alpha]\, m(dy) \geqslant 0,$$

$$\alpha m(A_{\beta}^{\alpha}) \leqslant \int\limits_{A_{\beta}^{\alpha}} f(y)\, m(dy),$$

$$\int\limits_{A_{\beta}^{\alpha}} [\beta - f(y)]\, m(dy) \geqslant 0,$$

$$\beta m(A_{\beta}^{\alpha}) \geqslant \int\limits_{A_{\beta}^{\alpha}} f(y)\, m(dy).$$

Отже, $\beta m(A_\beta^\alpha) \geqslant \alpha m(A_\beta^\alpha)$, а через те, що $\alpha > \beta$, це можливо лише, коли $m(A_\beta^\alpha) = 0$. Оскільки

$$\{y : \underline{\lim}\, S_n(f, y) < \overline{\lim}\, S_n(f, y)\} \subset \bigcup_{\alpha>\beta} A_\beta^\alpha,$$

то $\lim S_n(f, y)$ існує майже для всіх y за мірою m; α, β раціональні. Якщо ця границя існує, то існує $\lim S_n(f, Ty)$ і дорівнює $\lim S_n(f, y)$. Звідси випливає властивість а) функції $\bar f$. Перейдемо до доведення властивості б). Нехай $\alpha < \beta$. Як було встановлено,

$$\alpha m(A_\beta^\alpha) \leqslant \int_{A_\beta^\alpha} f(y)\, m(dy) \leqslant \beta m(A_\beta^\alpha). \tag{8}$$

Майже для всіх $y \in A_\beta^\alpha$ буде $\alpha \leqslant \bar f(y) \leqslant \beta$. Тому

$$\alpha m(A_\beta^\alpha) \leqslant \int_{A_\beta^\alpha} \bar f(y)\, m(dy) \leqslant \beta m(A_\beta^\alpha). \tag{9}$$

За нерівностями (8) та (9)

$$\left| \int_{A_\beta^\alpha} f(y)\, m(dy) - \int_{A_\beta^\alpha} \bar f(y)\, m(dy) \right| \leqslant (\beta - \alpha)\, m(A_\beta^\alpha). \tag{10}$$

Нехай $C_{k,\varepsilon} = \{y : k\varepsilon \leqslant \bar f(y) < (k+1)\varepsilon\}$. Згідно з (10)

$$\left| \int_{C_{k,\varepsilon}} f(y)\, m(dy) - \int_{C_{k,\varepsilon}} \bar f(y)\, m(dy) \right| \leqslant \varepsilon m(C_{k,\varepsilon}),$$

$$\left| \int f(y)\, m(dy) - \int \bar f(y)\, m(dy) \right| \leqslant \varepsilon m(Y).$$

Звідси випливає доведення, бо $\varepsilon > 0$ довільне.

Зауваження. 1. Якщо A — довільна інваріантна множина, то, розглядаючи T лише на A, можемо записати

$$\int_A \bar f(y)\, m(dy) = \int_A f(y)\, m(dy). \tag{11}$$

Тому ця рівність виконується для всіх $A \in \mathcal{T}_m$, де $\mathcal{T}_m$ — поповнення σ-алгебри, породженої інваріантними множинами за мірою m.

2. $\bar f(y)$ вимірне відносно $\mathcal{T}_m$. Це випливає з того, що множина $\{y : \bar f(y) < \alpha\}$ є інваріантною для кожного α.

3. Функція $\bar f(y)$ співвідношенням (11) та умовою 2 визначається однозначно (за мірою m). Якщо $\tilde f(y)$ — інша функція з цими властивостями, то $A = \{y : \tilde f(y) > \bar f(y)\} \in \mathcal{T}_m$, а за (11)

$$\int_A [\tilde f(y) - \bar f(y)]\, m(dy) = 0,$$

тому $m(A) = 0$. Так само $m(\{y : \tilde f(y) < \bar f(y)\}) = 0$.

Якщо m — імовірнісна міра, то $f(y)$ та $\bar{f}(y)$ можна розглядати як випадкові величини на імовірнісному просторі $\{Y, \mathfrak{S}, m\}$. Функція $\bar{f}(y)$ є умовне сподівання $f(y)$ відносно σ-алгебри $\mathcal{T}_m$.

Наслідок. Якщо ξ_n, $n \geqslant 0$ — стаціонарна числова послідовність в R, $M|\xi_0| < \infty$, то з імовірністю 1 існує

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k = \bar{\xi},$$

$\bar{\xi} = M(\xi_0/\mathcal{T})$, де $\mathcal{T}$ — σ-алгебра інваріантних множин відносно перетворення «зсуву». Вона будується так. Нехай $\mathcal{T}_{R^\infty}$ — σ-алгебра інваріантних множин в R^∞ відносно перетворення $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Тоді $\mathcal{T}$ складається з множин $\{\omega : (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots) \in S\}$, $S \in \mathcal{T}_{R^\infty}$.

7. ЕРГОДИЧНА ТЕОРЕМА. МЕТРИЧНА ТРАНЗИТИВНІСТЬ

Теорема Біркгофа, що була доведена у минулій лекції, називається ергодичною. Але власне ергодичною теоремою треба вважати таку теорему, в якій границя середніх значень є стала величина (не залежить від x чи ω). Взагалі кажучи, не завжди границя в теоремі Біркгофа має бути сталою. Для того щоб насправді було так, потрібні додаткові умови. Нехай є стаціонарна послідовність $\{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$. Вона називається ергодичною, якщо σ-алгебра $\mathcal{T}_P$ інваріантних множин (вона описана у попередній лекції) тривіальна відносно міри P, тобто для кожної $A \in \mathcal{T}_P$ буде $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$. Для будь-якої вимірної функції $f(x_0, x_1, \ldots)$ ергодичної стаціонарної послідовності на X^∞, для якої $M|f(\xi_0, \xi_1, \ldots)| < \infty$, буде з імовірністю 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots) = Mf(\xi_0, \xi_1, \ldots). \tag{1}$$

Нехай $(X, \mathcal{B}, m)$ — вимірний простір, T — перетворення, що зберігає міру m, $\mathcal{T}_T$ — сукупність інваріантних множин відносно перетворення. Міра m називається ергодичною відносно перетворення T, якщо для всіх $A \in \mathcal{T}_T$ або $m(A) = 0$, або $m(X \setminus A) = 0$. За цих самих умов перетворення T називається метрично транзитивним відносно міри m. Якщо T метрично транзитивне відносно m (або m — ергодична міра для T), то для будь-якої вимірної функції $f(x)$, для якої $\int |f(x)| \times m(dx) < \infty$, майже при всіх x за мірою m

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int f(x)\, m(dx)/m(X). \tag{2}$$

Вірне й обернене твердження: якщо для будь-якої $f(x)$, для якої $\int |f(x)|\, m(dx) < \infty$, виконується (2), то T метрично транзитивне відносно T. Дійсно, якщо це не так, то існує інваріантна множина A, для якої $m(A) > 0$, $m(X \setminus A) > 0$. Тоді для всіх $k \geqslant 0$ $I_A(T^k x) = I_A(x)$ майже при всіх x, тому

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} I_A(T^k x) = I_A(x)$$

майже для всіх x, і функція праворуч не є стала за мірою m.

Зауважимо, що границі в (1) і (2) існують за теоремою Біркгофа. Перевірити, що вони сталі, легше, ніж зразу доводити їх існування та вказані рівності.

Т е о р е м а 1. Для того щоб (2) виконувалось майже при всіх x за мірою m, для всіх вимірних f, для яких $\int |f|\, dm < \infty$, достатньо, щоб це виконувалось для $f \in L^0$, де $L^0 \subset L_1(m)$ — деяка щільна в $L_1(m)$ підмножина обмежених функцій (це означає, що для всіх $f \in L_1(m)$ існує послідовність $f_n \in L^0$, для якої $\int |f - f_n|\, dm \to 0$).

Д о в е д е н н я. Нехай $f \in L_1(m)$, $f_r \in L^0$, $m(X) = 1$. Тоді, використовуючи попередні позначення, записуємо

$$\int \left| \int f dm - S_n(f,\ x) \right| dm \leqslant \int \left| \int f dm - \int f_r dm + \right.$$
$$+ \int f_r dm - S_n(f_r(x)) + S_n(f - f_r,\ x) |\, m(dx) \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int f dm - \int f_r dm \right| + \int \left| \int f_r dm - S_n(f_r,\ x) \right| m(dx) +$$
$$+ \int |S_n(f - f_r,\ x)|\, m(dx).$$

Оскільки f_r обмежена і для неї виконується (2), то для всіх r

$$\lim_{n \to \infty} \int |\, f_r dm - S_n(f_r,\ x)|\, m(dx) = 0.$$

Далі,

$$\left| \int f dm - \int f_r dm \right| \leqslant \int |f - f_r|\, dm,$$

$$\int |S_n(f - f_r,\ x)|\, m(dx) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int |f(T^k x) - f_r(T^k x)|\, m(dx) \leqslant$$
$$\leqslant \int |f - f_r|\, dm$$

внаслідок рівності $\int g(T^k x)\, m(dx) = \int g(x)\, m(dx)$. Отже,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int \left| \int f dm - S_n(f,\ x) \right| m(dx) \leqslant 2 \int |f_r - f|\, dm$$

і вираз праворуч можна зробити як завгодно малим.

Н а с л і д о к 1. Для того щоб числова стаціонарна послідовність $\{\xi_k\}$ була ергодичною, достатньо, щоб для будь-якої обмеженої неперервної функції $f(x_0, \ldots, x_r)$ з X^{r+1} в R

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \ldots, \xi_{k+r}) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Mf(\xi_k, \ldots, \xi_{k+r})\right)^2 = 0.$$

Дійсно, якщо $f(x_0, x_1, \ldots)$ — довільна вимірна функція: $R^\infty \to R$, для якої $M\,|\,f(\xi_0, \xi_1, \ldots)\,| < \infty$, то функція

$$f_N(x_0, x_1, \ldots) = f(x_0, x_1, \ldots) I_{\{|f(x_0, x_1, \ldots)| < N\}} + \\ + N \operatorname{sign} f(x_0, x_1, \ldots) I_{\{|f(x_0, x_1, \ldots)| > N\}}$$

буде обмежена і $M\,|\,f(\xi_0, \xi_1, \ldots) - f_N(\xi_0, \xi_1, \ldots)\,| \to 0$, коли $N \to \to \infty$. Далі, візьмемо

$$f_N^r(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r) = M(f_N(\xi_0, \xi_1, \ldots)/\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r).$$

З теореми 4, яка доведена в лекції 5, випливає, що $f_N^r(\xi_0, \ldots, \xi_r) \to \to f_N(\xi_0, \ldots)$ з імовірністю 1, коли $r \to \infty$. Оскільки $|\,f_N^r\,| \leqslant N$, то

$$\lim_{r\to\infty} M\,|\,f_N^r(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r) - f_N(\xi_0, \xi_1, \ldots)\,| \to 0.$$

Функції $f_N^r(x_0, \ldots, x_r)$ борелівські, їх можна апроксимувати неперервними $f_N^r(l, x_0, \ldots, x_r)$ так, щоб $M\,|\,f_N^r(l, \xi_0, \ldots, \xi_r) - f_N^r(\xi_0, \ldots \ldots, \xi_r)\,| \to 0$, коли $l \to \infty$.

Позначимо для стаціонарної послідовності $\xi_0, \xi_1, \ldots$ через $\mathcal{F}^n$ σ-алгебру, що породжується величинами $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$, $\mathcal{F}^\infty = \bigcap \mathcal{F}^n$ називається «хвостовою» σ-алгеброю. Якщо величина $\eta = g(\xi_0, \xi_1, \ldots)$ вимірна відносно $\mathcal{T}_P$, то з імовірністю 1

$$g(\xi_0, \xi_1, \ldots) = g(\xi_1, \xi_2, \ldots) = g(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots).$$

Тому η вимірне відносно $\mathcal{F}^n$ для всіх n і відносно $\mathcal{F}^\infty$. Отже, для доведення ергодичності послідовності досить довести, що для всіх $A \in \in \mathcal{F}^\infty$ буде або $P(A) = 0$, або $P(A) = 1$. Одну таку теорему встановив А. М. Колмогоров.

Т е о р е м а 2 (закон «0 або 1» Колмогорова). Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — послідовність незалежних випадкових величин, $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра, породжена $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $\mathcal{F}^n$ — σ-алгебра, породжена $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$, $\mathcal{F}^\infty = = \bigcap \mathcal{F}^n$.

Тоді для всіх $A \in \mathcal{F}^\infty$ буде або $P(A) = 0$, або $P(A) = 1$.

Доведення розглянуто в лекції 2.

Н а с л і д о к 2. Нехай $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин у фазовому просторі $(X, \mathcal{B})$, $f(x_0, x_1, \ldots) : X^\infty \to R$ — така вимірна функція, для якої $M\,|\,f(\xi_0, \xi_1, \ldots)\,| < \infty$. Тоді з імовірністю 1 виконується (1).

Це випливає з того, що вказана послідовність є стаціонарний процес, його ергодичність є наслідок закону «0 або 1».

Зауваження. Якщо ξ_k — величини в R, для яких $M\,|\,\xi_k\,| < \infty$, то попереднє твердження можна застосувати до функції $f(x_0, x_1, \ldots) = = x_0$. Так ми дістанемо посилений закон великих чисел Колмогорова.

Наведене вище твердження має більш загальний вигляд. Його можна було б довести, використавши посилений закон великих чисел і апроксимацію, розглянуту в наслідку до теореми 1.

Умови ергодичності гауссівської стаціонарної послідовності. Нехай $\{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$ — гауссівська числова стаціонарна послідовність, для якої $M\xi_k = 0$, $M\xi_0\xi_k = r_k$. Внаслідок стаціонарності $M\xi_n\xi_{n+k} = M\xi_0\xi_k = r_k$. Спочатку знайдемо умову для того, щоб

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k \to 0\right\} = 1.$$

Оскільки величина під знаком P має границю з імовірністю 1 і її розподіл гауссівський, то це буде виконуватись, якщо

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\right)^2 = 0.$$

Це означає, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{k=0\\l=0}}^{n} M\xi_k\xi_l = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{k=0\\l=0}}^{n-1} r_{|k-l|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\,r_i = 0. \quad (3)$$

Аналогічно, для того щоб

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^2 = r_0\right\} = P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k^2 - r_0) = 0\right\} = 1,$$

треба, щоб

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k^2 - r_0)\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\,M(\xi_0^2 - r_0)(\xi_i^2 - r_0) = 0$$

(тут ми використали рівномірну інтегровність $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2$, яка випливає з нерівності

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^2\right)^4 \leqslant \frac{1}{n} M\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^8 = M\xi_0^8\Bigg).$$

Зауважимо тепер, що $M(\xi_0^2 - r_0)(\xi_i - r_0) = 2r_i^2$. Таким чином, необхідною умовою ергодичності буде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\,r_i^2 = 0. \quad (4)$$

Нехай $0 < \alpha < 1$, $[n\alpha]$ — ціла частина числа $n\alpha$, тоді

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i<\alpha n}(n-\alpha n)\,r_i^2 < \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\,r_i^2 < \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} r_i^2$$

і ліва частина дорівнює $\frac{(1-\alpha)\alpha}{[n\alpha]}\sum_{i<[n\alpha]} r_i^2$. Тому (4) виконується тоді і лише тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = 0. \quad (5)$$

Т е о р е м а 3. Умова (5) необхідна і достатня для ергодичності стаціонарної гауссівської послідовності.

Д о в е д е н н я. Досить довести, що рівність (1) виконується для функцій f, що є неперервними обмеженими функціями від $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_r$ (див. наслідок теореми 1). Такі функції є локально рівномірними границями тригонометричних многочленів, тому досить довести (1) для функцій $f(x_0, \ldots, x_r) = \exp\left\{i \sum_{k=0}^{r} z_k x_k\right\}$. Позначимо $\eta_n = \exp\left\{i \sum_{k=0}^{r} z_k \xi_{n+k}\right\}$. Це стаціонарна комплекснозначна послідовність

$$M\eta_0 = \exp\left\{-\frac{1}{2} \Sigma z_k z_j r_{|k-j|}\right\},$$

$$M\eta_0\bar{\eta}_n = \exp\left\{-\Sigma z_k z_j r_{|k-j|} + \frac{1}{2} \Sigma z_k z_j (r_{n+k-j} + r_{n+j-k})\right\}.$$

Тому

$$M|\eta_0\bar{\eta}_n - |M\eta_0|^2| \leqslant C \sum_{k,j} (|r_{n+k-j}| + |r_{n+j-k}|),$$

де C — деяка стала.

$$M\left|\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} (\eta_l - M\eta_l)\right|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{l=0\\m=0}}^{n-1} (M\eta_l\bar{\eta}_m - |M\eta_0|^2) \leqslant \frac{c}{n} \sum_{l=1}^{n+r} |r_l|.$$

З (5) випливає, що цей вираз прямує до 0, бо

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} |r_l| \leqslant \delta + \frac{1}{n\delta} \sum_{l=1}^{n} r_l^2$$

для будь-якого $\delta > 0$.

8. РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Повернемось до випадкових функцій з загальною областю визначення. Якщо функція побудована так, як вказано у теоремі Колмогорова за скінченновимірними розподілами, то можливі вибіркові функції у цієї випадкової функції ($x(\omega, \theta)$ при фіксованому ω), це всі функції з Θ в X, де Θ — область визначення випадкової функції, X — фазовий простір. Множину таких функцій ми позначали X^Θ.

Чи можна звузити множину вибіркових функцій? Наприклад, чи можна розглядати лише неперервні вибіркові функції для $X = R$, якщо з фізичних міркувань випадкова функція повинна бути неперервною? Взагалі, як впливає міра μ, побудована в теоремі Колмогорова на σ-алгебрі циліндричних множин $\mathfrak{S}(\Theta, X)$, на властивості вибіркових функцій? Це одне з важливих питань теорії випадкових процесів.

I. Перше, що ми можемо зробити, полягає ось у чому. Нехай $A \in \mathfrak{S}(\Theta, X)$ — певна множина, для якої $\mu(A) = 1$. Тоді можна множину $A \in X^\Theta$ взяти за Ω, σ-алгеброю в A буде сукупність множин $C \subset$

$\subset A$, $A \in \mathfrak{S}(\Theta, X)$, $A \subset X^{\Theta}$, міра на цій σ-алгебрі буде звуженням на неї міри μ. На жаль, така процедура не дає істотного звуження множини вибіркових функцій. Це випливає з того, що основні властивості функцій, які розглядаються у математичному аналізі, не будуть вимірними відносно $\mathfrak{S}(\Theta, X)$. Пояснимо це. Кожна множина $A \in \mathfrak{S}(\Theta, X)$ може бути побудована з циліндричних множин за допомогою операцій об'єднання та перерізу, що застосовуються не більш ніж злічене число разів. Тому для кожної такої множини A існує послідовність (можливо, скінченна) $\theta_1, \theta_2, \ldots$ така, що належність функції $x(\theta)$ до A визначається послідовністю значень $x(\theta_1)$, $x(\theta_2)$, ... Встановити, чи є функція неперервна або чи є вона без розривів II роду (для $\Theta = R$, $X = R$), вимірність або диференційовність функції, знаючи її значення на зліченній множині, неможливо. Отже, припустимо, якщо $\mathfrak{C}$ — множина неперервних функцій $\Theta = R$, $X = R$, то $\mathfrak{C} \notin \mathfrak{S}(\Theta, X)$. Розглянута конструкція у принципі не дозволяє звузити множину вибіркових функцій до множини неперервних.

II. Другий підхід, що дає змогу звузити множини вибіркових функцій, заснований на понятті стохастичної еквівалентності. Дві випадкові функції $x(\theta, \omega)$ та $\tilde{x}(\theta, \omega)$, що визначені на одному і тому ж імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з однією множиною визначення Θ і одним фазовим простором $(X, \mathcal{B})$, називаються стохастично еквівалентними, якщо

$$P\{x(\theta, \omega) = \tilde{x}(\theta, \omega)\} = 1 \ \forall \theta \in \Theta. \tag{1}$$

Прості приклади показують, що властивості стохастично еквівалентних процесів можуть істотно відрізнятись, хоч, як випливає з (1), скінченновимірні розподіли таких процесів однакові.

Наведемо приклад. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (R, \mathcal{B}_R, \mu)$, де μ — імовірнісна міра на R, що не має атомів, тобто $\mu(\{x\}) = 0 \ \forall x$, $\{x\}$ — одноточкова множина; $\Theta = R$, $X = R$. Візьмемо $\xi(t, \omega) = I_S(t - \omega)$, де S — злічення множина. Тоді $P\{\xi(t, \omega) = 1\} = \mu(\{\omega : t - \omega \in S\}) = 0$. Отже, $\xi(t, \omega)$ стохастично еквівалентна $\tilde{\xi}(t, \omega) \equiv 0$. Остання функція неперервна, $\xi(t, \omega)$ має розриви у точках $t \in \overline{S + \omega}$ ($\bar{A}$ — замкнення множини A), це може бути усе R,

$$\sup_t \xi(t, \omega) = 1, \quad \sup_t \tilde{\xi}(t, \omega) = 0.$$

Отже, другий спосіб звуження множини вибіркових функцій — це перехід від даної випадкової функції до стохастично еквівалентної. Надалі будемо називати випадкові функції $x(\theta, \omega)$ та $\tilde{x}(\theta, \omega)$, для яких виконується (1), модифікаціями одна другої (x — модифікація $\tilde{x}$, та навпаки). Задача полягає у вивченні можливостей знайти модифікацію з потрібними властивостями.

III. Нехай $F \subset X^{\Theta}$ (не обов'язково $F \in \mathfrak{S}(\Theta, X)$). Нас цікавитиме можливість розглядати випадкову функцію, що має задані скінченновимірні розподіли, і всі її вибіркові функції належать F (наприклад $F = \mathfrak{C}$). Будемо припускати, що F — досить широка множина у такому розумінні: для будь-якої циліндричної множини $C \in \mathfrak{S}_0(\Theta, X)$ і $C \neq \varnothing$ буде $F \cap C \neq \varnothing$. Ця властивість виконується, якщо для довільних n, $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta$ та $x_1, \ldots, x_n \in X$ існує $x(\theta) \in F$, для якої $x(\theta_k) = x_k$, $k = 1, \ldots, n$. Візьмемо $\tilde{\mu}(F \cap C) = \mu(C)$, де μ — та міра, що побудована в теоремі Колмогорова. Попередня рівність визначає $\tilde{\mu}$ однозначно: якби $F \cap C_1 = F \cap C_2$, то $F \cap [(C_1 \setminus C_2) \cup \cup (C_2 \setminus C_1)] = \varnothing$, а це можливо лише, коли $[C_1 \setminus C_2] \cup [C_2 \setminus C_1] = \varnothing$, тобто $C_1 = C_2$. Отже, на алгебрі множин $\tilde{\mathfrak{S}}_0(\Theta, X)$ вигляду $\tilde{C} = F \cap C$, $C \in \mathfrak{S}_0(\Theta, X)$ визначено адитивну функцію множини $\tilde{\mu}$. Якщо її можна продовжити як σ-адитивну на σ-алгебру $\tilde{\mathfrak{S}}$, що є σ-замикання $\tilde{\mathfrak{S}}_0(\Theta, X)$, то на імовірнісному просторі $(F, \tilde{\mathfrak{S}}, \tilde{\mu})$ функція $\tilde{x}(\theta, \omega) = \omega(\theta)$, де $\omega = \omega(\cdot) \in F$, є випадкова з заданими скінченновимірними розподілами, усі вибіркові функції якої належать F.

Для того щоб $\tilde{\mu}$ продовжувалась таким чином, необхідно і достатньо, щоб для будь-якої послідовності $\tilde{C}_k \in \tilde{\mathfrak{S}}_0(\Theta, X)$, для якої $\bigcup \tilde{C}_k = F$, $\tilde{C}_k \cap \tilde{C}_j = \varnothing$, $k \neq j$, *було* $\Sigma\tilde{\mu}(\tilde{C}_k) = 1$. *Це еквівалентно* такій властивості: для кожної послідовності $\tilde{C}_k \in \tilde{\mathfrak{S}}_0(\Theta, X)$, для якої $\bigcup \tilde{C}_k \supset F$, $\Sigma\tilde{\mu}(\tilde{C}_k) \geqslant 1$, а це, у свою чергу, еквівалентно такій: для кожної послідовності $C_k \in \mathfrak{S}(\Theta, X)$, для якої $\bigcup C_k \supset F$, $\Sigma\mu(C_k) \geqslant \geqslant 1$, тобто

$$\inf_{\bigcup C_k \supset F} \Sigma\mu(c_k) \geqslant 1, \quad C_k \in \mathfrak{S}_0(\Theta, F). \tag{2}$$

Зауважимо, що вираз ліворуч у формулі (2) є зовнішня міра Каратеодорі множини F для міри μ. Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 1. Для того щоб можна було побудувати за скінченновимірними розподілами таку випадкову функцію $\tilde{x}(\theta, \omega)$, щоб усі її вибіркові функції належали до даної множини F, необхідно і достатньо, щоб $\mu^*(F) = 1$, де μ^* — зовнішня міра Каратеодорі, побудована за мірою μ, що відповідає даним скінченновимірним розподілам на $\mathfrak{S}(\Theta, X)$.

Неперервність. Розглянемо випадкову функцію $x(\theta, \omega)$, визначену на повному сепарабельному метричному просторі Θ з фазовим простором $(X, \mathscr{B})$, де X — теж повний сепарабельний метричний простір, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра його борелівських множин. З теореми 1 випливає, що для перевірки існування неперервної випадкової функції з тими самими скінченновимірними розподілами треба перевіряти рівність $\mu(A) = 1$ для всіх $A \in \mathfrak{S}(\Theta, X)$, $A \supset \mathbb{C}_\Theta(X)$ (це множина усіх неперервних функцій із Θ в X). Можна описати деякий клас $\mathcal{A}$ множин A, такий що для кожної $A \in \mathfrak{S}(\Theta, X)$, для якої $F \subset A$, існує $A_1 \in \in \mathcal{A}$ така, що $F \subset A_1 \subset A$. Тому треба лише перевірити, що $\mu(A_1) = = 1$. Нехай $\Theta_0 \subset \Theta$ — зліченна щільна в Θ множина, $K \subset \Theta$ — певна компактна множина. Позначимо $A(K, \Theta_0)$ множину функцій $x(\theta)$, які рівномірно неперервні на $K \cap \Theta_0$. Якщо ρ — віддаль в Θ,

r — віддаль в X, $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\} = \Theta_0$, то $A(K, \Theta_0)$ можна зобразити за допомогою множин $A_{i,j}(m) = \left\{x(\cdot) : r(x(\theta_i), x(\theta_j)) \leqslant \frac{1}{m}\right\}$ таким чином:

$$A(K, \Theta_0) = \bigcap_m \bigcup_n \bigcap_{\theta_i \in K} \bigcap_{\theta_j \in K_{\frac{1}{n}}(\theta_i)} A_{ij}(m), \tag{3}$$

де $K_\varepsilon(\bar\theta)$ — куля радіуса ε з центром у точці $\bar\theta$. Якщо $A \supset \complement_\Theta(X)$ і $A \in C(\Theta_0, X)$, тобто для того, щоб встановити факт $x(\cdot) \in A$, досить знати $x(\theta_k)$, $\theta_k \in \Theta$, то $A \supset \bigcap_K A(K, \Theta_0)$, переріз береться по всіх компактах. Можна встановити, що тоді існує злічення послідовність компактів K_m така, що $A \supset \bigcap_m A(K_m, \Theta_0)$. Ці перерізи і утворюють $\mathcal{A}$.

Якщо Θ — компакт, то множина $A(\Theta_0)$, яка зображується формулою (3) для $K = \Theta$, має ту властивість, що $A(\Theta_0) \in \mathcal{A}$, коли $A \supset \complement_{\Theta_0}(X)$ і $A \in C(\Theta_0, X)$. З попередніх міркувань випливає, що необхідною умовою для того, щоб існувала неперервна випадкова функція для даних скінченновимірних розподілів на компакті Θ, є $\mu(A(\Theta_0)) = 1$ для будь-якої щільної в Θ зліченної множини Θ_0; μ — міра на $C(\Theta, X)$, побудована у теоремі Колмогорова.

Означення. Випадкова функція $x(\theta, \omega)$ називається стохастично неперервною в точці $\theta_0 \in \Theta$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\theta \to \theta_0} P(r(x(\theta, \omega), x(\theta_0, \omega)) > \varepsilon) = 0. \tag{4}$$

Випадкова функція стохастично неперервна, якщо вона стохастично неперервна в кожній точці. Стохастична неперервність визначається двовимірними розподілами процесу. Легко пересвідчитись, що неперервна випадкова функція стохастично неперервна. Те, що обернене твердження не вірне, показує процес $\xi(t, \omega) = I_{\{t < \tau(\omega)\}}$, де $\tau(\omega)$ має неперервний розподіл в R, $t \in R$. $\xi(t, \omega)$ обов'язково має розрив, а $P\{|\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)| > 0\} = P\{s < \tau(\omega) < t\}$, $s < t$. Цей вираз прямує до 0, коли $t - s \to 0$.

Т е о р е м а 2. Нехай Θ — компактний метричний простір, $(X, \mathscr{B})$ — повний сепарабельний метричний простір, $x(\theta, \omega)$ — випадкова функція з фазовим простором $(X, \mathscr{B})$, що стохастично неперервна на Θ. $x(\theta, \omega)$ має неперервну модифікацію тоді і лише тоді, коли для деякої зліченної щільної множини $\Theta_0 \subset \Theta$ буде $P\{x(\cdot, \omega) \in A(\Theta_0)\} = 1$.

Пояснення. Подія $\{x(\cdot, \omega) \in A(\Theta_0)\}$ належить σ-алгебрі, що породжена випадковими елементами $x(\theta_k, \omega)$, $\theta_k \in \Theta$, тому вона належить кожній σ-алгебрі $\mathscr{F}$, відносно якої вимірні всі величини $x(\theta, \omega)$

Д о в е д е н н я. Якщо $\tilde{x}(\theta, \omega)$ — неперервна модифікація, то

$$P\{\tilde{x}(\cdot, \omega) \in A(\Theta_0)\} = 1,$$

$$P\{x(\theta_k, \omega) \neq \tilde{x}(\theta_k, \omega)\} = 0,$$

$$P\{x(\cdot,\ \omega)\bar{\in} A(\Theta_0)\} \leqslant P\{\tilde{x}(\cdot,\ \omega)\bar{\in} A(\Theta_0)\} +$$

$$+\sum_k P\{x(\theta_k,\ \omega) \neq \tilde{x}(\theta_k,\ \omega)\} = 0.$$

Нехай $x(\cdot,\ \omega) \in A(\Theta_0)$. Тоді $x(\theta,\ \omega)$ рівномірно неперервна на Θ_0 і для кожного $\bar{\theta} \in \Theta$ існує границя $\lim\limits_{\theta\in\Theta_0, \theta\to\bar{\theta}} x(\theta,\ \omega)$, позначимо її $\hat{x}(\bar{\theta},\ \omega)$. Це буде неперервна функція. Якщо $x(\cdot,\ \omega)\bar{\in} A(\Theta_0)$, то візьмемо $\hat{x}(\theta,\ \omega) = \bar{x}$, де $\bar{x} \in X$. $\hat{x}(\theta,\ \omega)$ — неперервна випадкова функція. Покажемо, що $\hat{x}(\theta,\ \omega)$ є модифікація $x(\theta,\ \omega)$. За побудовою

$$P\{x\ (\theta,\ \omega) \neq \hat{x}(\theta,\ \omega)\} \leqslant P\{x(\cdot,\ \omega)\bar{\in} A(\Theta)\} = 0,$$

коли $\theta \in \Theta_0$. Якщо $\bar{\theta} \in \Theta \setminus \Theta_0$, а $\theta_k \to \theta$, $\theta_k \in \Theta$, то для $\varepsilon > 0$

$$P\{r(x(\bar{\theta},\ \omega),\ \hat{x}(\bar{\theta},\ \omega)) > \varepsilon\} \leqslant P\{x(\cdot,\ \omega)\bar{\in} A(\Theta)\} +$$

$$+ P\left\{r(x(\bar{\theta},\ \omega),\ x(\bar{\theta}_k,\ \omega)) > \frac{\varepsilon}{3}\right\} + P\left\{r(\hat{x}(\theta,\omega),\ \hat{x}(\bar{\theta}_k,\omega)) > \frac{\varepsilon}{3}\right\} +$$

$$+ P\left\{r(x(\bar{\theta}_k,\ \omega),\ \hat{x}(\theta_k,\ \omega)) > \frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

Перший і останній доданки праворуч рівні 0, решта прямує до нуля, коли $k \to \infty$, внаслідок неперервності $\hat{x}(\theta,\ \omega)$ та стохастичної неперервності $x(\theta,\ \omega)$.

Теорема 2 дає необхідні та достатні умови існування неперервної модифікації, але її перевірка вимагає застосування скінченновимірних розподілів як завгодно високих порядків.

Достатня умова неперервності випадкового процесу. Ми наведемо умову неперервності процесу, що широко використовується у дослідженнях. Ця умова належить А. М. Колмогорову.

Теорема 3. Нехай $x(t,\ \omega)$ — процес на $[0,\ 1]$ з фазовим простором $(X,\ \mathscr{B})$, де X — повний сепарабельний метричний простір. Для існування неперервної модифікації процесу достатньо, щоб існували $k > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такі, що для $h > 0$, $0 \leqslant t \leqslant t + h \leqslant 1$

$$Mr^{\alpha}(x(t,\ \omega),\ x(t+h,\ \omega)) \leqslant Kh^{1+\beta}.$$

Доведення. З умови (4) випливає стохастична неперервність $x(t,\ \omega)$. Тому можна використати теорему 2. Візьмемо Θ_0 за множину двоїчно-раціональних чисел з $[0,\ 1]$. Покажемо, що $P\{x(\cdot,\ \omega) \in A(\Theta_0)\} = 1$, тобто функція $x(t,\ \omega)$ рівномірно неперервна на Θ_0. Розглянемо величини

$$\eta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant 2^n} r\left(x\left(\frac{k-1}{2^n},\ \omega\right),\ x\left(\frac{k}{2^n},\ \omega\right)\right).$$

Нехай $\frac{k}{2^n} < \frac{l}{2^m} < \frac{k+1}{2^m}$. Розклавши l у суму степенів 2: $l = 1 + 2^{p_1} + \cdots + 2^{p_2} + \cdots$, де $0 < p_1 < p_2 < \cdots$ — цілі числа, можемо переконатись, що інтервал $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{l}{2^m}\right]$ є об'єднання інтервалів вигляду $\left[\frac{n_i}{2^{m_i}}, \frac{n_{i+1}}{2^{m_i}}\right]$, де n_i парне. Тому

$$r\left(x\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{l}{2^m}, \omega\right)\right) \leqslant \sum_{n \leqslant s \leqslant m} \eta_s.$$

Аналогічно

$$r\left(x\left(\frac{l}{2^m}, \omega\right), x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right)\right) \leqslant \sum_{n < s \leqslant m} \eta_s.$$

Якщо $0 < \frac{l_1}{2^{m_1}} < \frac{l_2}{2^{m_2}}$, то, обираючи в інтервалі $\left[\frac{l_1}{2^{m_1}}, \frac{l_2}{2^{m_2}}\right]$ дріб з Θ_0, у якого найменший знаменник, можемо записати

$$r\left(x\left(\frac{l_1}{2^{m_1}}, \omega\right), x\left(\frac{l_2}{2^{m_2}}, \omega\right)\right) \leqslant 2 \sum_{s \leqslant j \leqslant N} \eta_j. \tag{5}$$

Число s таке, що інтервал $\left(\frac{l_1}{2^{m_1}}, \frac{l_2}{2^{m_2}}\right)$ містить принаймні один інтервал вигляду $\left[\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s}\right]$, тобто $\frac{1}{2^s} \leqslant \left|\frac{l_2}{2^{m_2}} - \frac{l_1}{2^{m_1}}\right|$, а $N = \max[m_1, m_2]$.

Покажемо, що ряд $\sum_n \eta_n$ збігається з імовірністю 1. Маємо

$$P\{\eta_n > c\} \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} P\left\{r\left(x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right)\right) > c\right\} \leqslant$$
$$\leqslant c^{-\alpha} 2^n k (2^{-n})^{1+\beta}.$$

Нехай $c = 2^{-n\gamma}$, тоді

$$P\{\eta_n > 2^{-n\gamma}\} \leqslant k \cdot 2^{n(\gamma\alpha-\beta)}.$$

Ряд $\Sigma P\{\eta_n > 2^{-n\gamma}\}$ збігається, якщо тільки $0 < \gamma < \frac{\beta}{\alpha}$. Тому за теоремою Бореля — Кантеллі, починаючи з якогось номера, $\eta_n \leqslant (2^{-\gamma})^n$. Звідси випливає збіжність ряду $\Sigma\eta_n$ (з імовірністю 1). За (5) та оцінкою s

$$r(x(t_1, \omega), x(t_2, \omega)) \leqslant 2 \sum_{j \geqslant \log_2 \frac{1}{|t_1 - t_2|}} \eta_j. \tag{6}$$

Це означає рівномірну неперервність $x(t, \omega)$ на Θ_0, бо величина праворуч залежить лише від $|t_1 - t_2|$ і прямує до 0, коли $|t_1 - t_2| \to 0$. Теорему доведено.

Неперервність вінерівського процесу. Нехай $w(t)$ — вінерівський процес на $[0, 1]$. Це процес з незалежними приростами, для якого

$w(t+h) - w(t)$ має нормальний розподіл (на R), $M(w(t+h) - w(t)) = 0$, $D(w(t+h) - w(t)) = h$. Покажемо, що він має неперервну модифікацію. Обчислимо

$$M|w(t+h) - w(t)|^\alpha = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int |x|^\alpha \exp\left\{-\frac{x^2}{2h}\right\} dx =$$

$$= 2h^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^\infty (2\pi)^{-\frac{1}{2}} t^\alpha e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Умови теореми Колмогорова виконуються, якщо $\alpha > 2$: можна взяти $\beta = \frac{\alpha - 2}{2}$.

Зауваження. Те, що в теоремі Колмогорова не можна взяти $\beta = 0$, показує приклад пуассонівського процесу $\xi(t)$. Це процес з незалежними приростами, для якого

$$P\{\xi(t+h) - \xi(t) = k\} = (ah)^k (k!)^{-1} e^{-ah},$$
$$k = 0, 1, \ldots .$$

Тому $$M|\xi(t+h) - \xi(t)|^\alpha = \sum_{k>0} k^\alpha (ah)^k (k!)^{-1} e^{-ah}.$$

Яке б не було α, умова (4) виконується лише для $\beta = 0$. Процес $\xi(t)$ — цілочисловий; оскільки він не константа, то розривний.

9. ПРОЦЕСИ БЕЗ РОЗРИВІВ II РОДУ

Числовий процес $\xi(t, \omega)$, $t \in [0, 1]$ не має розривів II роду, якщо для всіх $t \in [0, 1)$ існує границя $\xi(t+, \omega) = \lim_{s \downarrow t} \xi(s, \omega)$ і для всіх $t \in (0, 1]$ — границя $\xi(t-, \omega) = \lim_{s \uparrow t} \xi(s, \omega)$. Умови відсутності розривів II роду у певної функції зручно формулювати, використовуючи поняття числа ε-коливань. Нехай $x(t)$ — числова функція, $\Lambda \subset R$ — певна множина, на якій $x(t)$ визначена. $x(t)$ має n ε-коливань на множині Λ, якщо існують такі точки $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ в Λ, що $|x(t_{i+1}) - x(t_i)| \geqslant \varepsilon$, $i = 0, \ldots, n-1$, і не існує точок $t_0 < \ldots < t_{n+1}$ в Λ, для яких буде те саме.

Лема 1. *Нехай числова функція $x(t)$ визначена на множині $\Lambda \subset R$. Для того щоб у кожної монотонної послідовності $t_n \in \Lambda$ існувала границя $\lim x(t_n)$, необхідно і достатньо, щоб для всіх $\varepsilon > 0$ $x(t)$ мала на Λ скінченне число ε-коливань.*

Доведення. Якщо послідовність $x(t_n)$ необмежена, то можна вказати таку підпослідовність t_{n_k}, щоб $|x(t_{n_k}) - x(t_{n_{k+1}})| \geqslant 1$, тобто $x(t)$ матиме нескінченне число 1-коливань. Далі, якщо $x(t_n)$ обмежена і $a = \underline{\lim}\, x(t_n) < \overline{\lim}\, x(t_n) = b$, то можна вказати таку підпослідовність t_{n_k}, щоб $x(t_{n_{2k}}) < a + \frac{b-a}{3}$, $x(t_{n_{2k+1}}) > b - \frac{b-a}{3}$.

Тоді $x(t)$ має нескінченне число $\frac{b-a}{3}$-коливань. Отже, завжди, коли $x(t_n)$ не має границі, $x(t)$ для деякого $\varepsilon > 0$ матиме нескінченне число ε-коливань. Якщо $x(t)$ має для деякого $\varepsilon > 0$ нескінченне число ε-коливань, але на кожному скінченному проміжку їх число скінченне, то існує послідовність $t_n \uparrow +\infty$ або $t_n \downarrow -\infty$, для якої $|x(t_{2n}) - x(t_{2n+1})| \geqslant \varepsilon$. Для такої послідовності не може існувати $\lim x(t_n)$

Теорема 1. Нехай $\xi(t, \omega)$ — стохастично неперервний випадковий числовий процес на $[0, 1]$, $\Lambda \subset [0, 1]$ — щільна зліченна множина, $A(\Lambda, \varepsilon)$ — множина функцій, які мають на Λ скінченне число ε-коливань. Якщо для всіх $\varepsilon > 0$ $P\{\xi(\cdot, \omega) \in A(\Lambda, \varepsilon)\} = 1$, то існує неперервна справа модифікація $\tilde{\xi}(t, \omega)$ процесу $\xi(t, \omega)$, що не має розривів II роду.

Доведення. Зауважимо, що $A(\Lambda, \varepsilon)$ є множина з циліндричної σ-алгебри. Отже, такою буде і множина $A(\Lambda) = \bigcap_k A(\Lambda, 1/k)$ Якщо $x(\cdot) \in A(\Lambda)$, то для всіх $t \in [0, 1]$ існують $\lim\limits_{s \in \Lambda, s \downarrow t} x(s)$. Нехай $\Omega_0 = \{\omega : \xi(\cdot, \omega) \in A(\Lambda)\}$. Тоді $P(\Omega_0) = 1$. Для всіх $\omega \in \Omega_0$ візьмемо $\tilde{\xi}(t, \omega) = \lim\limits_{s \in \Lambda, s \downarrow t} \xi(t, \omega)$. Із стохастичної неперервності $\tilde{\xi}(t, \omega)$ випливає, що $\tilde{\xi}(t, \omega)$ є модифікація $\xi(t, \omega)$. Для $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ візьмемо $\tilde{\xi}(t, \omega) = 0$. Тоді $\tilde{\xi}(t, \omega)$ — неперервна справа функція без розривів II роду.

Теорема 2. Нехай $\xi(t, \omega)$ — числовий випадковий процес на $[0, 1]$, $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра, що породжується величинами $\{\xi(s), s \leqslant t\}$. Для всіх $\varepsilon > 0$ існує невипадкова функція $\varphi_\varepsilon(h)$ така, що $\varphi_\varepsilon(h) \downarrow 0$, коли $h \downarrow 0$ і

$$P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon/\mathcal{F}_t\} \leqslant \varphi_\varepsilon(h) \text{ для } 0 \leqslant t < t+h \leqslant 1$$

з імовірністю 1. Тоді $\xi(t)$ має модифікацію, що неперервна справа і не має розривів II роду.

Доведення цієї теореми спирається на допоміжні твердження.

Лема 2. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — послідовність числових випадкових величин, $\mathcal{F}_k$ — σ-алгебра, що породжена величинами $\xi_1, \ldots, \xi_k$, і для даного $\varepsilon > 0$ з імовірністю 1 виконується нерівність $P\{|\xi_n - \xi_k| \geqslant \varepsilon/\mathcal{F}_k\} \leqslant \alpha < 1 \ \forall k$. Тоді

$$P\{\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k - \xi_1| \geqslant 2\varepsilon/\mathcal{F}_1\} \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}. \tag{1}$$

Доведення. *Маємо*

$$\{|\xi_n - \xi_1| \geqslant \varepsilon\} \supset$$

$$\supset \bigcup_{k=2}^{n} \{|\xi_2 - \xi_1| < 2\varepsilon, \ldots, |\xi_{k-1} - \xi_1| < 2\varepsilon, |\xi_k - \xi_1| \geqslant 2\varepsilon, |\xi_n - \xi_k| \leqslant \varepsilon\}.$$

Події праворуч для різних k не сумісні. Тому вірна така нерівність для імовірностей:

$$P\{|\xi_n - \xi_1| \geqslant \varepsilon/\mathcal{F}_1\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=2}^{n} P\{|\xi_2-\xi_1|<2\varepsilon, \ \ldots, \ |\xi_{k-1}-\xi_1|<2\varepsilon, \ |\xi_k-\xi_1|\geqslant 2\varepsilon,$$

$$|\xi_n-\xi_k|\leqslant \varepsilon/\mathcal{F}_1\} = \sum_{k=2}^{n} M\left(M\left(I_{\{|\xi_n-\xi_k|\leqslant\varepsilon\}}/\mathcal{F}_k\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, I_{\{|\xi_2-\xi_1|<2\varepsilon,\ldots,|\xi_{k-1}-\xi_1|<2\varepsilon,|\xi_k-\xi_1|\geqslant 2\varepsilon\}}/\mathcal{F}_1\right)\geqslant (1-\alpha)\, P\{\sup_k|\xi_k-\xi_1|\geqslant 2\varepsilon\}.$$

Оскільки ліва частина нерівності не перебільшує α, то дістанемо (1).

Л е м а 3. Нехай $\nu_{4\varepsilon}$ — число 4ε-коливань послідовності $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_n$, що задовольняє умови леми 2. Тоді для всіх $m \in Z_+$

$$P\{\nu_{4\varepsilon}\geqslant m/\mathcal{F}_1\}\leqslant\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^m \tag{2}$$

з імовірністю 1.

Д о в е д е н н я. Застосуємо індукцію за m. Оскільки $\{\nu_{4\varepsilon}\geqslant 1\}\subset$ $\subset\{\sup|\xi_k-\xi_1|\geqslant 2\varepsilon\}$, то для $m=1$ нерівність (2) випливає з леми 2. Нехай R_k — подія, що полягає у тому, що послідовність $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_{k-1}$ має $m-2$ 4ε-коливання, а $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — $m-1$ 4ε-коливання. Тоді

$$\{\nu_{4\varepsilon}\geqslant m\}\subset\bigcup_k R_k\cap\{\sup_{l>k}|\xi_l-\xi_k|\geqslant 2\varepsilon\}.$$

Тому

$$P\{\nu_{4\varepsilon}\geqslant m/\mathcal{F}_1\}\leqslant\sum_k M\left(I_{R_k}P\{\sup_{l>k}|\xi_l-\xi_k|\geqslant 2\varepsilon/\mathcal{F}_k\}/\mathcal{F}_1\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{1-\alpha}M\left(\Sigma I_{R_k}/\mathcal{F}_1\right)=\frac{\alpha}{1-\alpha}P\{\nu_{4\varepsilon}\geqslant m-1/\mathcal{F}_1\}. \tag{3}$$

Ми використали те, що події $R_k\in\mathcal{F}_k$ несумісні, $\bigcup R_k=\{\nu_{4\varepsilon}\geqslant m-$ $-1\}$. З формули (3) маємо (2).

Д о в е д е н н я т е о р е м и. Нехай $\Lambda=\bigcup_n\Lambda_n$, де Λ_n — скінченні множини, $\Lambda_n\subset\Lambda_{n+1}$. Якщо $\nu_\varepsilon(S)$ означає число ε-коливань функції $\xi(t, \omega)$ на множині S, де $S\in[0, 1]$, то на будь-якому відрізку $[\alpha, \beta]\subset[0, 1]$

$$\nu_\varepsilon([\alpha, \beta]\cap\Lambda)=\lim_{n\to\infty}\nu_\varepsilon([\alpha, \beta]\cap\Lambda_n).$$

Для доведення теореми досить довести, що для будь-якого $\varepsilon>0$ $P(\nu_\varepsilon(\Lambda)<\infty)=1$. Оскільки

$$\nu_\varepsilon(\Lambda)\leqslant\sum_{k=1}^{r}\nu_\varepsilon(\Lambda\cap[\alpha_k, \beta_k])+r,$$

коли $[\alpha_k, \beta_k]\subset[0, 1]$, $\bigcup_{k=1}^{r}[\alpha_k, \beta_k]=[0, 1]$, то треба довести, що для досить малих $\beta-\alpha$ буде $P\{\nu_\varepsilon([\alpha, \beta]\cap\Lambda)<\infty\}=1$. Виберемо $\beta-\alpha$ так, щоб $\varphi_{\varepsilon/4}(\beta-\alpha)<\frac{1}{3}$. Тоді для всіх n на основі леми 3

$$P\{\nu_\varepsilon([\alpha, \beta]\cap\Lambda)\geqslant m\}\leqslant\left[\frac{\varphi_{\frac{\varepsilon}{4}}(\beta-\alpha)}{1-\varphi_{\frac{\varepsilon}{4}}(\beta-\alpha)}\right]^m\leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right)^m = \frac{1}{2^m}. \tag{4}$$

Це випливає з того, що для величин $\xi(t_1, \omega), \ldots, \xi(t_N, \omega)$, якщо $[\alpha, \beta] \cap \Lambda_n = \{t_1, \ldots, t_N\}$, $t_1 < \ldots < t_N$, виконується умова

$$P\left\{ |\xi(t_N, \omega) - \xi(t_k, \omega)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} / \mathcal{F}_{t_k} \right\} \leqslant \varphi_{\varepsilon/4}(\beta - \alpha).$$

Переходячи в лівій частині (4) до границі, коли $n \to \infty$, завершуємо доведення.

Зауваження. Нехай X — повний сепарабельний метричний простір, $r(.,.)$ — віддаль в X. Процес $x(t, \omega)$ з фазовим простором X має неперервну справа модифікацію без розривів II роду, якщо виконана умова

$$P\{r(x(t+h), x(t, \omega)) \geqslant \varepsilon / \mathcal{F}_t\} \leqslant \varphi_\varepsilon(h)$$

з імовірністю 1, де $\varphi_\varepsilon(h)$ має такі самі властивості, як в теоремі 2.

Процеси з незалежними приростами. Нехай X — сепарабельний банахів простір, $x(t, \omega)$ — випадковий процес з фазовим простором X, визначений на $[0, 1]$. Це буде процес з незалежними приростами, якщо для всіх $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ з $[0, 1]$ випадкові величини $x(t_0, \omega)$, $x(t_1, \omega) - x(t_0, \omega), \ldots, x(t_k, \omega) - x(t_{k-1}, \omega)$ незалежні. Цей процес стохастично неперервний, якщо $\forall\, \varepsilon > 0$ $P\{\|x(t, \omega) - x(s, \omega)\| > \varepsilon\} \to 0$, коли $s \to t$. Якщо процес стохастично неперервний, то він буде рівномірно стохастично неперервним, тобто

$$\lim_{h \to 0} \sup_{|t-s| \leqslant h} P\{\|x(t, \omega) - x(s, \omega)\| > \varepsilon\} = 0.$$

Дійсно, якби було не так, знайшлись би дві послідовності t_n та s_n такі, що $t_n - s_n \to 0$, але $P\{\|x(t_n, \omega) - x(s_n, \omega)\| > \varepsilon\} \geqslant \delta$, де ε, δ — деякі додатні числа. Можна вважати, що t_n та s_n мають границю t_0. Але

$$P\{\|x(t_n, \omega) - x(s_n, \omega)\| > \varepsilon\} \leqslant P\left\{\|x(t_n, \omega) - x(t_0, \omega)\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} +$$

$$+ P\left\{\|x(s_n, \omega) - x(t_n, \omega)\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

обидва доданки прямують до 0 внаслідок стохастичної неперервності $x(t_n, \omega)$ в точці t_0. Позначимо

$$\varphi_\varepsilon(h) = \sup_{|t-s| \leqslant h} P\{\|x(t, \omega) - x(s, \omega)\| \geqslant \varepsilon\}.$$

Тоді $\varphi_\varepsilon(h) \downarrow 0$, коли $h \downarrow 0$ для всіх $\varepsilon > 0$. Далі, якщо $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра, породжена величинами $x(s, \omega)$, $s \leqslant t$, то для $u > t$ величини $x(u, \omega) - x(t, \omega)$ не залежать від $\mathcal{F}_t$. Це випливає з незалежності приростів процесу. Тому

$$P\{\|x(t+h, \omega) - x(t, \omega)\| \geqslant \varepsilon / \mathcal{F}_t\} \leqslant \varphi_\varepsilon(h)$$

з імовірністю 1. Отже, виконується така теорема.

Теорема 3. Стохастично неперервний процес з незалежними приростами в сепарабельному банаховому фазовому просторі має неперервну справа модифікацію без розривів II роду.

Марківські процеси. Для марківського процесу $x(t, \omega)$ з фазовим простором $(X, \mathscr{B})$, визначеного на $[0, 1]$, існує імовірність переходу $P(t, x, s, B)$, $0 \leqslant t < s \leqslant 1$, $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$. Це така функція, що

$$P\{x(t+h, \omega) \in B/\mathscr{F}_t\} = P(t, x(t), t+h, B)$$

з імовірністю 1. Нехай $(X, \mathscr{B})$ — сепарабельний повний метричний простір з борелівською σ-алгеброю. Позначимо $V_\varepsilon(x) = \{y : r(x, y) > \varepsilon\}$, r — віддаль в X. Марківський процес називається стохастично неперервним у точці фазового простору x в момент t, якщо

$$\lim_{h \to 0} P(t, x, t+h, U_\varepsilon(x)) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Будемо називати його рівномірно неперервним відносно простору і часу, якщо

$$\lim_{h \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1-h} \sup_x P(t, x, t+h, U_\varepsilon(x)) = 0.$$

Теорема 4. Марківський процес, рівномірно неперервний відносно простору і часу, має неперервну справа модифікацію без розривів II роду.

Доведення.

$$P\{r(x(t+h, \omega), x(t, \omega) \geqslant \varepsilon/\mathscr{F}_t\} = P\{t, x(t, \omega), t+h, U_\varepsilon(x)) \leqslant \varphi_\varepsilon(h)$$

з імовірністю 1, якщо

$$\varphi_\varepsilon(h) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1-h} \sup_x P(t, x, t+h, U_\varepsilon(x)).$$

За умовою $\varphi_\varepsilon(h) \downarrow 0$, коли $h \downarrow 0$. Залишається використати теорему 2.

Моментна умова відсутності розривів II роду. Вона аналогічна умові Колмогорова для неперервності. Нехай $x(t)$ — деяка функція, визначена на множині $\Lambda \subset [0, 1]$ із значеннями в сепарабельному повному метричному просторі X. Введемо

$$\Delta_h^{(2)}(x, \Lambda) = \sup[\min\{r(x(t_1), x(t_2)),\ r(x(t_2), x(t_3))\};$$

$$t_1 < t_2 < t_3,\ t_i \in \Lambda,\ t_3 - t_1 \leqslant h].$$

Лема 4. Якщо функція $x(t)$ задовольняє умову

$$\lim_{h \to 0} \Delta_h^{(2)}(x(\cdot), \Lambda) = 0,$$

то вона для всіх $\varepsilon > 0$ має скінченне число ε-коливань на Λ.

Доведення випливає з того, що для функції $x(t)$, яка має на обмеженій множині $x(t)$ нескінченне число ε-коливань при кожному $h > 0$, існують три точки $t_1 < t_2 < t_3$ в Λ, в яких $t_3 - t_1 \leqslant h$ і $r(x(t_1), x(t_2)) \geqslant \varepsilon$, $r(x(t_2), x(t_3)) \geqslant \varepsilon$.

Теорема 5. Нехай $x(t, \omega)$ — стохастично неперервний процес на $[0, 1]$ з фазовим простором X, для якого при деяких $\alpha > 0$,

$\beta > 0$, k та всіх $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant 1$

$$Mr^{\alpha}(x(t_1, \omega), x(t_2, \omega))\, r^{\alpha}(x(t_2, \omega), x(t_3, \omega)) \leqslant k(t_3 - t_1)^{1+\beta}.$$

Тоді $x(t, \omega)$ має неперервну справа модифікацію без розривів II роду.

Доведення. Нехай Λ — множина усіх двоїчно-раціональних чисел з $[0, 1]$. Досить показати, що $x(t, \omega)$ має на Λ скінченне число ε-коливань для всіх $\varepsilon > 0$. Позначимо

$$\eta_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant 2^n - 2} \left[\min\left\{r\left(x\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right)\right),\right.\right.$$
$$\left.\left. r\left(x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{k+2}{2^n}, \omega\right)\right)\right\}\right].$$

Якщо t — довільна точка з Λ, $t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$, то

$$\min\left[r\left(x(t, \omega), x\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right)\right), r\left(x(t, \omega), x\frac{k+1}{2^n}, \omega\right)\right)\right] \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \eta_i.$$

Виходячи з цієї нерівності, можна дістати таку для $t_1, t_2, t_3 \in \Lambda$:

$$\sup_{\frac{k}{2^n} \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant \frac{k+1}{2^n}} \min\left[r(x(t_1, \omega), x(t_2, \omega)), r(x(t_2, \omega), x(t_3, \omega))\right] \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sum_{i=n+1}^{\infty} \eta_i.$$

Тому для доведення досить показати збіжність ряду $\Sigma\eta_k$. Маємо

$$P\{\eta_n > C\} \leqslant \sum_{k \leqslant 2^n - 2} P\left\{\min\left[r\left(x\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right)\right),\right.\right.$$
$$\left.\left. r\left(x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{k+2}{2^n}, \omega\right)\right)\right] \geqslant C\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k \leqslant 2^n - 2} P\left\{r\left(x\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right)\right) \times\right.$$
$$\left. \times\, r\left(x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{k+2}{2^n}, \omega\right)\right) \geqslant C^2\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k \leqslant 2^n - 2} Mr^{\alpha}\left(x\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right)\right) \times$$
$$\times\, r^{\alpha}\left(x\left(\frac{k+1}{2^n}, \omega\right), x\left(\frac{k+2}{2^n}, \omega\right)\right) C^{-2\alpha} \leqslant 2^n k \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{1+\beta} C^{-2\alpha}.$$

Нехай $C = 2^{-\gamma n}$. Тоді

$$P\{\eta_n > 2^{-\gamma n}\} \leqslant k \cdot 2^n \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{1+\beta} \cdot 2^{2\alpha\gamma n}.$$

Якщо $\gamma > 0$ таке, що $\beta > 2\alpha\gamma$, то $\Sigma P\{\eta_n > 2^{-\alpha\gamma n}\} < \infty$. Тому $\Sigma\eta_n < < \infty$ з імовірністю 1.

10. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ПРОЦЕСІВ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ. МАРТИНГАЛИ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

Розглянемо процес $x(t, \omega)$ на $[0, 1]$ у повному сепарабельному метричному просторі X. Припустимо, що $x(t, \omega)$ не має розривів II роду і неперервний справа. Позначимо $\Delta(t) = r(x(t-, \omega), x(t, \omega))$. Будемо називати $\Delta(t)$ величиною розриву у точці t. Може бути лише скінченне число точок $t \in [0, 1]$ таких, що $\Delta(t) > \varepsilon$. Якщо $\Delta(t) = 0$ для всіх t, то $x(t, \omega)$ є неперервний процес. Це міркування дає можливість знайти нову достатню умову неперервності процесу.

Теорема 1. Нехай $x(t, \omega)$ — процес без розривів II роду, неперервний справа, $0 = t_{n0} \leqslant t_{n1} < \ldots < t_{nn} = 1$ — довільні числа такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_k (t_{nk} - t_{nk-1}) = 0$. Якщо виконується умова: для кожного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k P\{r(x(t_{nk-1}, \omega), x(t_{nk}, \omega)) > \varepsilon\} = 0, \tag{1}$$

то процес $x(t, \omega)$ неперервний з імовірністю 1.

Доведення. Нехай $\nu_\varepsilon(\omega) = \sum\limits_t I_{\{\Delta(t) > \varepsilon\}}$. Цей вираз має смисл, якщо взяти до уваги, що таких t, для яких $\Delta(t) \neq 0$, буде лише зліченна множина, а доданків під знаком суми, що не дорівнюють нулеві, лише скінченне число, це і є $\nu_\varepsilon(\omega)$. Легко встановити

$$\Sigma I_{\left\{r(x(t_{nk-1}, \omega), x(t_{nk}, \omega)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}} \geqslant \nu_\varepsilon$$

для досить великих n. Тому для будь-якої послідовності n_m

$$\nu_\varepsilon \leqslant \sum_m \sum_k I_{\left\{r(x(t_{n_m k-1}, \omega), x(t_{n_m k}, \omega)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}},$$

$$M\nu_\varepsilon \leqslant \sum_m \sum_k P\left\{r(x(t_{n_m k-1}, \omega), x(t_{n_m k}, \omega)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Якщо m вибрати так, що

$$\sum_k P\left\{r(x(t_{n_m k-1}, \omega), x(t_{n_m k}, \omega)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant \delta^m,$$

то $M\nu_\varepsilon \leqslant \frac{\delta}{1-\delta}$. Тобто $P\{\nu_\varepsilon = 0\} = 1$ для всіх $\varepsilon > 0$.

Теорема 2. Нехай X — банахів простір, $x(t, \omega)$ — процес з незалежними приростами. Для того щоб він мав неперервну модифікацію, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова теореми 1, якщо $r(x, y) = \|x - y\|$.

Доведення. Достатність умов теореми уже встановлена, бо, як ми довели у попередній лекції, стохастично неперервний процес з незалежними приростами має модифікацію без розривів II роду, яка згідно з теоремою 1 неперервна.

Покажемо необхідність цієї умови. Оскільки для неперервного процесу $x(t, \omega)$ при всіх $\varepsilon > 0$

$$1 = \lim_{n\to\infty} P\{\sup_{k\leqslant n-1} \|x(t_{nk+1}, \omega) - x(t_{nk}, \omega)\| > \varepsilon\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} P\{\|x(t_{nk+1}, \omega) - x(t_{nk}, \omega)\| > \varepsilon\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - P\{\|x(t_{nk+1}, \omega) - x(t_{nk}, \omega)\| > \varepsilon\}),$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - P\{\|x(t_{nk+1}, \omega) - x(t_{nk}, \omega)\| > \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-\sum_{k=0}^{n-1} P\{\|x(t_{nk+1}, \omega) - x(t_{nk}, \omega)\| > \varepsilon\}\right\} \leqslant 1,$$

то середній член цієї нерівності прямує до 1, коли $n \to \infty$. Це означає, що показник експоненти прямує до 0.

Мартингали з неперервним часом. Будемо розглядати числові процеси $\xi(t)$, $t \in R_+$ на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Фіксуємо систему σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$, які є підалгебрами $\mathcal{F}$ і задовольняють умову монотонності: якщо $s < t$, то $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Таку сукупність σ-алгебр називають потоком, або фільтрацією. Процес $\xi(t)$ називається узгодженим з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$, якщо він вимірний відносно $\mathcal{F}_t$ для всіх $t \in R_+$. Узгоджений процес називається: 1) мартингалом, якщо $M|\xi(t)| < \infty$ і $M(\xi(t)/\mathcal{F}_s) = \xi(s)$ для $0 \leqslant s < t$; 2) супермартингалом, якщо $M|\xi(t)| < \infty$ і $M(\xi(t)/\mathcal{F}_s) \leqslant \xi(s)$; 3) субмартингалом, якщо $-\xi(t)$ є супермартингал.

Нехай фільтрація $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ задовольняє ще одну умову: неперервність справа. Це означає, що для всіх $t \geqslant 0$ $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.

Покажемо, що мартингал має неперервну справа модифікацію, без розривів II роду. Нехай Q_+ — множина усіх раціональних невід'ємних чисел, а $Q_+^{(q)}$ — множина таких чисел з Q_+, що їх знаменники не перебільшують натуральне число q. Якщо $\xi(t)$ — супермартингал, $t < s$, то

$$M(\xi(s) \wedge 0/\mathcal{F}_t) \leqslant 0 \wedge M(\xi(s)/\mathcal{F}_t) \leqslant 0 \wedge \xi(t),$$

тому $-M|\xi(s)| \leqslant M(0 \wedge \xi(t))$, $M\xi(t) \leqslant M\xi(0)$, $M(0 \wedge \xi(t)) + M(0 \vee \xi(t)) \leqslant M\xi(0)$, $M(0 \vee \xi(t)) \leqslant M\xi(0) - M(0 \wedge \xi(t))$, $M|\xi(t)| = M(0 \vee \xi(t)) - M(0 \wedge \xi(t)) \leqslant M\xi(0) + 2M|\xi(s)|$. Звідси випливає, що для кожного T

$$\sup_{t\leqslant T} M|\xi(t)| \leqslant M\xi(0) + 2M|\xi(T)|.$$

Внаслідок нерівностей для мартингалів (супермартингалів), можемо твердити, що для кожного T існує таке C_T, що

$$P\{\sup_{t\in Q_+^{(q)}\cap[0,T]} |\xi(t)| > a\} \leqslant a^{-1}C_T,$$

$$M\nu([\alpha, \beta], Q_+^{(q)} \cap [0, T]) \leqslant \frac{1}{\beta - \alpha}(C_T + |\alpha| + |\beta|),$$

$\nu([\alpha, \beta], \Lambda)$ — число перетинів процесом $\xi(t)$ смуги $[\alpha,\beta]$ на множині $\Lambda \subset R_+$. Перейдемо до границі, коли $q \to \infty$. Матимемо

$$
\begin{gathered}
P\{\sup_{t\in Q_t\cap[0,T]} |\xi(t)| > a\} \leqslant a^{-1}C_T, \\
M\nu([\alpha, \beta], Q_+ \cap [0, T]) \leqslant \frac{1}{\beta-\alpha}(C_T + |\alpha| + |\beta|).
\end{gathered} \tag{2}
$$

Таким чином, $\xi(t)$ на $Q_t \subset [0, T]$ обмежене і перетинає кожну раціональну смугу скінченне число разів. Тому для всіх t існує

$$\tilde{\xi}(t) = \lim_{\substack{s>t\\ s\in Q, s\downarrow t}} \xi(s, \omega).$$

Покажемо, що $\tilde{\xi}(t) = \xi(t)$ з імовірністю 1 для всіх t. Нехай $T > t$, з умови $\xi(t) = M(\xi(T)/\mathcal{F}_t)$ випливає, що $\{\xi(s), s \in [t, T] \cap Q_+\}$ — рівномірна інтегровна сукупність. $\tilde{\xi}(t)$ вимірне відносно $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$. Тому, переходячи до границі в рівності

$$0 = M(\xi(s) - \xi(t))\, I_{\{\tilde{\xi}(t)-\xi(t)>0\}},$$

коли $s \in Q_+$, $s \downarrow t$, матимемо

$$M(\tilde{\xi}(t) - \xi(t))\, I_{\{\tilde{\xi}(t)-\xi(t)>0\}} = 0.$$

Так само

$$M(\tilde{\xi}(t) - \xi(t))\, I_{\{\tilde{\xi}(t)-\xi(t)<0\}} = 0,$$

$$M|\tilde{\xi}(t) - \xi(t)| = 0.$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 3. Якщо $\xi(t)$, $t \in R_+$ є мартингал, узгоджений з фільтрацією $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$, що задовольняє умову неперервності справа, то він має неперервну справа модифікацію без розривів II роду.

Зауваження. Нехай $\xi(t)$ є рівномірно інтегровний мартингал.

1. Тоді існує $\lim_{t\to\infty} \xi(t) = \xi(\infty)$. Так само, як у випадку послідовності, матимемо $\xi(t) = M(\xi(\infty)/\mathcal{F}_t)$.

2. Якщо τ — будь-який скінченний момент зупинки, то $M(\xi(\infty)/\mathcal{F}_\tau) = \xi(\tau)$.

Щоб переконатись у цьому, візьмемо $A \in \mathcal{F}_\tau$, $\tau_n = \frac{k+1}{n}$, якщо $\frac{k}{n} \leqslant \tau < \frac{k+1}{n}$. Тоді τ_n — момент зупинки відносно послідовності σ-алгебр $\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}$, тому $M(\xi(\infty)/\mathcal{F}_{\tau_n}) = \xi(\tau_n)$, $M\xi(\infty) I_A = M\xi(\tau_n) I_A$, бо $A \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. Використавши неперервність $\xi(t)$ справа і рівномірну інтегровність $\xi(\tau_n)$, знайдемо $M\xi(\infty) I_A = M\xi(\tau) I_A$. Звідси випливає твердження 2.

3. Те саме вірне для τ, що може набувати значення $+\infty$, бо $\{\tau = +\infty\} \in \mathcal{F}_\tau$, $\{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$, отже,

$$M\xi(\infty) I_A I_{\{\tau=+\infty\}} = M\xi(\tau) I_A I_{\{\tau=+\infty\}},$$

$$M\xi(\infty) I_A I_{\{\tau<+\infty\}} = M\xi(\tau) I_A I_{\{\tau<\infty\}}.$$

4. Якщо $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant +\infty$ — два моменти зупинки, то

$$M(\xi(\tau_2)/\mathcal{F}_{\tau_1}) = \xi(\tau_1).$$

Розглянемо тепер супермартингал. Для нього теж вірні нерівності (2). Тому можна побудувати процес $\tilde{\xi}(t)$ так, як він був побудований вище. Зауважимо, що коли існує неперервна справа модифікація $\xi'(t)$, то $P\{\xi'(t) = \tilde{\xi}(t), t \in R_+\} = 1$, оскільки $P\{\xi'(t) = \tilde{\xi}(t), t \in Q_+\} = 1$, і вона з імовірністю 1 збігається з $\tilde{\xi}(t)$. Для супермартингала перехід до границі під знаком інтеграла вимагає додаткових умов: рівномірної інтегровності на скінченному проміжку (для мартингала вона виконується автоматично).

Т е о р е м а 4. Нехай $\xi(t)$, $t \in R_+$ є супермартингал, узгоджений з неперервною справа фільтрацією, рівномірно інтегровний на кожному проміжку $[0, T]$. Він має неперервну справа модифікацію тоді і лише тоді, коли функція $a(t) = M\xi(t)$ неперервна справа.

Д о в е д е н н я. Необхідність умови теореми випливає з того, що в рівності $\xi(t) = \lim\limits_{s \downarrow t} \xi(s)$ можемо взяти математичне сподівання і переставити знаки M та lim:

$$M\xi(t) = M\lim_{s\downarrow t}\xi(s) = \lim_{s\downarrow t} M\xi(s).$$

Далі, для всіх $A \in \mathcal{F}_t$

$$\lim_{\substack{s\in Q_+\\ s\downarrow t}} MI_A(\xi(s) - \xi(t)) = MI_A(\tilde{\xi}(t) - \xi(t)).$$

Але

$$MI_A(\xi(s) - \xi(t)) = MI_A(M(\xi(s)/\mathcal{F}_t) - \xi(t)) \leqslant 0.$$

Тому $MI_A(\tilde{\xi}(t) - \xi(t)) \leqslant 0$. Якщо $A = \{\tilde{\xi}(t) - \xi(t) \geqslant 0\}$, то

$$MI_{\{\tilde{\xi}(t)-\xi(t)\geqslant 0\}}(\tilde{\xi}(t) - \xi(t)) \leqslant 0,$$

отже, $P\{\tilde{\xi}(t) \leqslant \xi(t)\} = 1$.

Зауважимо, що $M\tilde{\xi}(t) = \lim\limits_{s\downarrow t} M\xi(s) = a(t_+)$. Оскільки $0 = a(t) - a(t_+) = M(\xi(t) - \tilde{\xi}(t))$, то $P\{\tilde{\xi}(t) = \xi(t)\} = 1$, $\tilde{\xi}(t)$ — модифікація $\xi(t)$.

11. ВИМІРНІ ПРОЦЕСИ

Розглянемо випадкову функцію $x(\theta, \omega)$, визначену на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, область визначення її — вимірний простір $(\theta, \mathfrak{S})$, а фазовий простір — вимірний простір $(X, \mathcal{B})$. Нагадаємо, що добутком σ-алгебр $\mathfrak{S} \otimes \mathcal{F}$ називається σ-алгебра підмножин декартового добутку $\Theta \times \Omega$ (це множина пар (θ, ω), $\theta \in \Theta$, $\omega \in \Omega$), що містить усі «прямокутники» $C \times \Lambda = \{(\theta, \omega) : \theta \in C, \ \omega \in \Lambda\}$, $C \in \mathfrak{S}$, $\Lambda \in \mathcal{F}$. Функція $x(\theta, \omega)$ називається вимірною, якщо відображення $(\Theta \times \Omega, \ \mathfrak{S} \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{x(\theta,\omega)} (X, \mathcal{B})$ вимірне, тобто $\forall B \in \mathcal{B}$ $\{(\theta, \omega) : x(\theta, \omega) \in B\} \in \mathfrak{S} \otimes \mathcal{F}$. Якщо $x(\theta, \omega)$ — вимірна випадкова функція, то для всіх $\omega \in \Omega$ $x(\theta, \omega)$ є $\mathfrak{S}$-вимірна функція відносно θ. Нехай $g(\theta, x)$ — вимірна числова функція на $\Theta \times X$, тоді $g(\theta, x(\theta, \omega))$ є $\mathfrak{S}$-вимірна функція при фіксованому ω, і можна розглядати інтеграли

$$\int g(\theta, x(\theta, \omega))\, m(d\theta),$$

$m(d\theta)$ — деяка міра на $\mathfrak{S}$. За теоремою Фубіні

$$M \int g(\theta, x(\theta, \omega))\, m(d\theta) = \int Mg(\theta, x(\theta, \omega))\, m(d\theta), \tag{1}$$

якщо, наприклад, $\int M\,|\,g(\theta, x(\theta, \omega))\,|\, m(d\theta) < \infty$. Зауважимо, що для обчислення правої частини (1) досить знати лише одновимірні розподіли $x(\theta, \omega)$.

Вимірні функції переходять у вимірні, якщо відображаються вимірно їх фазові простори. Це дозволяє зводити вивчення вимірності широкого класу фазових просторів (саме борелівських) до того випадку, коли $X = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ — борелівська σ-алгебра. Ми і будемо розглядати такий випадок.

Теорема 1. Нехай Θ — метричний простір, $X = [0, 1]$, $x(\theta, \omega)$ — стохастично неперервна функція. Тоді вона має вимірну модифікацію.

Доведення. Позначимо ρ віддаль в Θ. Із стохастичної неперервності $x(\theta, \omega)$ можемо дістати таке: для $\theta' \in \Theta$

$$\varlimsup_{\rho(\theta,\theta')\to 0} M\,|x(\theta, \omega) - x(\theta', \omega)|^2 \leqslant \varlimsup_{\rho(\theta,\theta')\to 0} P\{|x(\theta, \omega) - x(\theta', \omega)| > \varepsilon\} + \varepsilon,$$

тобто $x(\theta, \omega)$ неперервна в середньому квадратичному. Тому $x(\theta, \omega)$ буде рівномірно неперервна в середньому квадратичному:

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{\theta,\theta'\in\Theta \\ \rho(\theta,\theta')\leqslant\delta}} M\,|\,x(\theta, \omega) - x(\theta', \omega)\,|^2 = 0. \tag{2}$$

Для кожного n можна побудувати такі множини Θ_{ni}, $i \leqslant k_n$, щоб: а) $\bigcup\limits_i \Theta_{ni} = \Theta$, б) $\Theta_{ni} \in \mathfrak{S}$, $\Theta_{ni} \cap \Theta_{nj} = \varnothing$, якщо $i \neq j$, в) $\operatorname{diam} \Theta_{ni} < \delta_n$, де δ_n вибрано так, щоб $M\,|\,x(\theta, \omega) - x(\theta', \omega)\,|^n \leqslant 2^{-2}$, коли $\rho(\theta, \theta') < \delta_n$. Візьмемо у кожній із множин по одній точці $\theta_{nk} \in \Theta_{nk}$. Нехай

$$x_n(\theta, \omega) = \Sigma I_{\Theta_{nk}}(\theta)\, x(\theta_{nk}, \omega). \tag{3}$$

Покажемо, що $x_n(\theta, \omega)$ — вимірна функція. Маємо

$$\{(\theta, \omega): x_n(\theta, \omega) \in B\} = \bigcup_k \Theta_{nk} \times \{\omega: x(\theta_{nk}, \omega) \in B\},$$

праворуч стоїть скінченне об'єднання прямокутників. Покажемо тепер, що $\forall \theta \in \Theta$ з імовірністю 1 $x_n(\theta, \omega) \to x(\theta, \omega)$. Позначимо через $i_n(\theta)$ той номер, для якого $\theta \in \Theta_{n i_n(\theta)}$. Тоді $x_n(\theta, \omega) = x(\theta_{n i_n(\theta)}, \omega)$, $M|x_n(\theta, \omega) - x(\theta, \omega)|^2 = M|x(\theta_{n i_k(\theta)}, \omega) - x(\theta, \omega)|^2 \leqslant \leqslant 2^{-n}$, бо $\rho(\theta_{n i_n(\theta)}, \theta) < \delta_n$. Оскільки

$$\sum P\left\{|x_n(\theta, \omega) - x(\theta, \omega)| > \frac{1}{n}\right\} \leqslant \sum n 2^{-n} < \infty,$$

то $P\{\lim_{n\to\infty} x_n(\theta, \omega) = x(\theta, \omega)\} = 1$ за теоремою Бореля — Кантеллі. Нехай

$$\bar{x}(\theta, \omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n(\theta, \omega), & \text{якщо границя існує,} \\ 0, & \text{якщо границя не існує.} \end{cases}$$

Вище вже встановлено, що $P\{\bar{x}(\theta, \omega) = x(\theta, \omega)\} = 1$. Отже, $\bar{x}(\theta, \omega)$ є модифікація. Послідовність числових вимірних функцій збігається *на вимірній множині (і розбігається на вимірній множині), і її границя* є вимірна множина. Тому $\bar{x}(\theta, \omega)$ — вимірна випадкова функція.

Прогресивна вимірність. Розглянемо тепер імовірнісний простір з фільтрацією. Це означає, що на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ ще визначена система σ-алгебр $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$, що задовольняють умови: а) $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, б) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, коли $s < t$, в) $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$. Всі $\mathcal{F}_t$ є підалгебри основної σ-алгебри $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$ зростає з t і неперервна справа відносно t. $\mathcal{F}_t$ — це σ-алгебра подій, що спостерігаються до моменту t включно. Випадковий процес $\xi(t, \omega)$ називається узгодженим (відносно фільтрації $(\mathcal{F}_t)$, або $(\mathcal{F}_t)$-узгодженим), якщо $\xi(t, \omega)$ вимірне відносно $\mathcal{F}_t \; \forall t \in R_+$ (тобто значення процесу «спостерігаються» одразу). Припустимо, що $\xi(t, \omega)$ — числовий вимірний процес. Цілком природно чекати, що $\int_0^t \xi(s)\, ds$ теж $\mathcal{F}_t$-вимірна величина, вона визначається лише значеннями процесу $\xi(s)$, $s \leqslant t$, які $\mathcal{F}_t$-вимірні. Але це не обов'язково так. Тому поняття вимірності, яке було сформульовано вище, недостатнє для багатьох цілей. Дамо більш сильне поняття вимірності.

Нехай $x(t, \omega)$, $t \in R_+$ є узгоджений процес з фазовим простором $(X, \mathcal{B})$. Він називається прогресивно вимірним, якщо $\forall t$ функція $x(s, \omega)$, $s \in [0, t]$ є вимірною на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}_t, P\}$, тобто вона вимірна відносно σ-алгебри $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$, $\mathcal{B}_{[0,t]}$ — σ-алгебра борелівських функцій на $[0, t]$.

Позначимо через $\Phi_{\Pi,R}$ множину прогресивно вимірних процесів $\xi(t)$ з числовими значеннями. Легко встановити, що: 1) *коли* $\xi_1(t)$, $\xi_2(t) \in \Phi_{\Pi,R}$, тоді $\xi_1(t) \pm \xi_2(t) \in \Phi_{\Pi,R}$, $\xi_1(t)\,\xi_2(t) \in \Phi_{\Pi,R}$; 2) коли $\xi_n(t) \in \Phi_{\Pi,R}$, $\xi(t) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(t)$, тоді $\xi(t) \in \Phi_{\Pi,R}$. Множина $A \in R_+ \otimes$

$\otimes\ \Omega$ називається прогресивно вимірною, якщо $I_A(t, \omega) \in \Phi_{\Pi, R}$. Використовуючи властивості 1) та 2), можемо переконатись, що сукупність прогресивно вимірних множин є σ-алгебра. Позначимо її П, $\Pi \subset \mathcal{B}_{R_+} \otimes \mathcal{F}$. Якщо $\mathcal{F}_t \neq \mathcal{F}$ хоч для одного $t > 0$, то $\Pi \neq \mathcal{B}_{R_+} \otimes \mathcal{F}$.

Т е о р е м а 2. Нехай $\xi(t)$ — числовий стохастично неперервний узгоджений процес, $0 \leqslant \xi(t) \leqslant 1$. Тоді $\xi(t)$ має прогресивно вимірну модифікацію.

Д о в е д е н н я. Нехай $h_n \downarrow 0$ вибрані так, щоб $M|\xi(t) - \xi(s)| \leqslant 2^{-n}$, коли $|t - s| \leqslant h_n$, $t \leqslant n$; візьмемо

$$\xi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi(kh_n)\, I_{\{kh_n \leqslant t < (k+1)h_n\}}.$$

Так само, як у доведенні теореми 1, можемо встановити, що з імовірністю 1 для всіх k існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(t) = \xi(t)$. Покажемо, що $\xi_n(t)$ — процес прогресивно вимірний. Для $t > 0$ $\{(s, \omega) : s \leqslant t, \xi(s, \omega) \in B\} = \bigcup\limits_k [kh_n, (k+1)h_n] \cap [0, t] \times \{\omega : \xi(kh_n) \in B\} \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$. Тому процес

$$\tilde{\xi}(t) = \begin{cases} \lim \xi_n(t), & \text{якщо границя існує,} \\ 0, & \text{якщо границя не існує,} \end{cases}$$

є прогресивно вимірна модифікація.

Наведемо умову того, що процес є прогресивно вимірний.

Т е о р е м а 3. Неперервний справа або зліва процес прогресивно вимірний.

Д о в е д е н н я. Розглянемо спочатку процес, неперервний зліва. Якщо

$$\xi^{(h)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi(kh)\, I_{\{kh \leqslant t < (k+1)h\}},$$

то $\xi^{(h)}(t)$ — прогресивно вимірний і внаслідок неперервності зліва $\xi(t)$ буде $\lim\limits_{h\to 0} \xi^{(h)}(t) = \xi(t)$.

Нехай тепер $\xi(t)$ — процес неперервний справа. Зафіксуємо $t > 0$. Треба довести, що $\xi(s)$, $s \in [0, t]$ вимірний на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}_t, P\}$. Візьмемо $\xi_n(s) = \xi\left(\frac{kt}{n}\right)$, коли $\frac{k-1}{n} t < s \leqslant \frac{k}{n} t$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\xi_n(0) = \xi(0)$. Тоді $\xi_n(s)$ вимірні відносно $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$ і $\xi(s) = \lim \xi_n(s)$ для всіх $s \in [0, t]$.

Нарешті зауважимо, що коли $\xi(t)$ прогресивно вимірний, тоді $\int\limits_0^t \xi(s)\, ds$. Якщо він існує, буде $\mathcal{F}_t$-вимірним за теоремою Фубіні.

Моменти зупинки. Величина τ, що набуває значень з R_+ або значення $+\infty$, називається моментом зупинки (відносно фільтрації $(\mathcal{F}_t)$), якщо для всіх $t \in R_+$ $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. З моментом зупинки пов'язана σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}$. Це сукупність таких множин $A \in \mathcal{F}$, що $A \cap$

$\cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ для всіх $t \in R_+$. Зауважимо, що ці означення узгоджені з означенням дискретного моменту зупинки, який розглядався вище. Виявляється, що у прогресивно вимірних процесів узгодженість поширюється і на моменти зупинки. Будемо позначати сукупність моментів зупинки $\boldsymbol{M}$.

Т е о р е м а 4. Нехай $\xi(t, \omega)$ — прогресивно вимірний процес, $\tau \in \boldsymbol{M}$. Тоді $\xi(\tau, \omega)$ є $\mathcal{F}_\tau$-вимірна величина.

Д о в е д е н н я. Треба довести, що $\{\omega : \xi(\tau, \omega) \in B\} \in \mathcal{F}_t$, якщо $B \in \mathcal{B}$, $(X, \mathcal{B})$ — фазовий простір процесу. Нехай $\tau_t = \tau I_{\{\tau \leqslant t\}} + I_{\{\tau > t\}}(+\infty)$ ($\tau_t = +\infty$, коли $\tau > t$). Це теж момент зупинки. τ_t є $\mathcal{F}_t$-вимірна величина. Далі, $\{\omega : \xi(\tau, \omega) \in B\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\omega : \xi(\tau_t, \omega) \in B\} \cap \{\tau \leqslant t\}$. Відображення підмножини $\{\tau \leqslant t\}$ з σ-алгеброю $\mathcal{F}_t$ $\omega \to (\tau_t(\omega), \omega)$ є вимірне відносно $\mathcal{F}_t$ і $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$. Тому $\{\omega : \tau_t(\omega) \in \Delta, \ \omega \in \Lambda\} = \{\omega : \tau_t \in B\} \cap \Lambda \in \mathcal{F}_t$, якщо $\Lambda \in \mathcal{F}$, $\Delta \in \mathcal{B}_{[0,t]}$. Оскільки $\xi(s, \omega) \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$ — вимірне відображення в $(X, \mathcal{B})$, то $\{\omega : \xi(\tau_t, \omega) \in B\} \in \mathcal{F}_t$. Це і доводить теорему, бо $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$.

12. МОМЕНТИ ЗУПИНКИ І ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ σ- АЛГЕБРИ

На моменти зупинки поширюються властивості, які мають σ-алгебри $\mathcal{F}_t$ для невипадкових t. Вкажемо один важливий клас моментів зупинки.

Множина $G \in \mathcal{B}_{R_+} \otimes \mathcal{F}$ називається випадковою; якщо $I_G(t, \omega)$ — узгоджений процес, вона називається узгодженою; якщо $G \in \Pi$, вона називається прогресивно вимірною. Якщо $G \in \mathcal{B}_{R_+} \otimes \mathcal{F}$ і міра P повна на $\mathcal{F}$ (це означає, що з умови $P(\Lambda) = 0$, $\Lambda \in \mathcal{F}$ випливає $\Lambda_1 \in \mathcal{F}$ для всіх $\Lambda_1 \subset \Lambda$ і тоді $P(\Lambda_1) = 0$), можна визначити величину $\operatorname{deb} G = \inf\{t : (t, \omega) \in G\}$, і вона буде $\mathcal{F}$-вимірна (deb — дебют).

Будемо вважати, що фільтрація $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$ задовольняє таку умову повноти:

г) $\mathcal{F}_t$ містить усі множини P-міри 0 з $\mathcal{F}$, P повна на $\mathcal{F}$.

Умови а) — в) наведені в попередній лекції.

Т е о р е м а 1. Якщо $G \in \Pi$ і виконана умова г), то $\tau(\omega) = \operatorname{deb} G$ є момент зупинки.

Д о в е д е н н я. Прогресивна вимірність G означає, що $G \cap [0, t] \times \Omega \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$. За сформульованих умов проекція множини $G \cap [0, t] \times \Omega$ на Ω буде $\mathcal{F}_t$-вимірною. Тому такою буде і проекція $G \cap [0, s] \times \Omega$ для всіх $s < t$, отже, і проекція $G \cap [0, t) \times \Omega$. Ця проекція є множина $\{\omega : \tau(\omega) < t\}$. Таким чином, для всіх t $\{\tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$. Тому для $\varepsilon < \delta$ $\{\tau(\omega) < t + \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t+\delta}$, $\bigcap\limits_{\varepsilon<0} \{\tau(\omega) < t + \varepsilon\} = \{\tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_{t+\delta}$, $\{\tau(\omega) \leqslant t\} \in \bigcap\limits_{\delta>0} \mathcal{F}_{t+\delta} = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ (за властивістю в) фільтрації).

Т е о р е м а 2. Якщо $\{\tau_n\}$ — деяка сукупність з $\boldsymbol{M}$, то $\inf\limits_n \tau_n$, $\sup \tau_n \in \boldsymbol{M}$.

Доведення. Якщо τ_1 та $\tau_2 \in M$, то такими будуть $\tau_1 \vee \tau_2$ та $\tau_1 \wedge \tau_2$:

$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\}, \ \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cup \{\tau_2 \leqslant t\}.$$

Нехай $\tau^{(n)} = \tau_1 \vee \tau_2 \vee \ldots \vee \tau_n \in M$, $\tau^{(n)} \uparrow \sup_n \{\tau_n\}$, $\{\sup_n \{\tau_n\} \leqslant t\} = \bigcap_n \{\tau_n \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. Якщо $\tau_{(n)} = \tau_1 \vee \tau_2 \vee \ldots \vee \tau_n$, то $\tau_{(n)} \downarrow \inf \{\tau_n\}$, $\{\inf_n \{\tau_n\} < t\} = \bigcup_n \{\tau_n < t\} \in \mathcal{F}_t$. Те, що з цієї умови виводиться така $\{\inf \{\tau_n\} \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, було показано в теоремі 1.

Розглянемо тепер властивості σ-алгебр $\mathcal{F}_\tau$, аналогічні властивостям σ-алгебр $\mathcal{F}_t$.

I. Монотонність. Якщо $\tau_1 \leqslant \tau_2$ ($\tau_i \in M$), то $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$. Дійсно, нехай $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Тоді

$$A \cap \{\tau_2 \leqslant t\} = A \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\}, \tag{1}$$

бо з $\{\tau_2 \leqslant t\}$ випливає, що $\{\tau_1 \leqslant t\}$. Оскільки $A \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, бо $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, а $\{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, бо $\tau_2 \in M$, то права частина (1) належить $\mathcal{F}_t$, це означає, що $A \in \mathcal{F}_{\tau_2}$.

II. Неперервність справа. Нехай $\tau_n \in M$ і $\tau_n \downarrow \tau$. Тоді $\mathcal{F}_\tau = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n}$. Згідно з попередньою властивістю $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$ для всіх n, тому $\mathcal{F}_\tau \subset \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n}$. Нехай $A \in \mathcal{F}_{\tau_n}$ для всіх n. Тоді $A \cap \{\tau_n < t + \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ для всіх $\varepsilon > 0$, $A \cap (\bigcup_n \{\tau_n < t + \varepsilon\}) \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$, тобто $A \cap \{\tau < t + \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. Звідси так, як в теоремі I, виводимо, що $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, $A \in \mathcal{F}_\tau$.

III. Покажемо, що моменти зупинки поводять себе по відношенню до σ-алгебр $\mathcal{F}_\tau$ так, як і до $\mathcal{F}_t$: якщо τ_1 та $\tau_2 \in M$, то $\{\tau_1 \leqslant \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$, $\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$, $\{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$. Третє співвідношення є наслідком другого та першого. Нехай Q — множина раціональних чисел. Тоді

$$\{\tau_1 < \tau_2\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\} = \bigcup_{r \in Q \cap [0,t]} \{\tau_1 < r\} \cap \{r < \tau_2 \leqslant t\},$$

права частина належить $\mathcal{F}_t$. Далі,

$$\{\tau_1 > \tau_2\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\} = \{\tau_2 \leqslant t\} \cap \{\tau_1 > t\} \cup \Big(\bigcup_{r \in Q \cap [0,t]} \{\tau_2 < r\} \cap \{r < \tau_1 \leqslant t\}\Big).$$

Оскільки $\{\tau_1 > t\} \in \mathcal{F}_t$, то права частина належить $\mathcal{F}_t$. Але $\{\tau_1 \leqslant \tau_2\}$ є доповнення множини $\{\tau_1 > \tau_2\}$. Для $\tau \in M$ розглянемо σ-алгебру $\mathcal{F}_{\tau-}$. Це σ-алгебра, що породжується такими подіями: $A_t \cap \{\tau > t\}$, де $A_t \subset \mathcal{F}_t$. Подивимось, що це означає, коли $\tau = s$ — стала величина. Тоді $\mathcal{F}_{s-}$ буде σ-алгебра, що породжується A_t, $t < s$, де $A_t \in \mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_s = \bigvee_{t<s} \mathcal{F}_t$ ($\bigvee \mathcal{F}_\alpha$ для сукупності σ-алгебр $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ є найменша σ-алгебра, що містить всі $\mathcal{F}_\alpha$).

IV. Якщо τ_n — послідовність з M, $\tau_n < \tau$, $\tau_n \to \tau$, то $\bigvee_n \mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_{\tau-}$.

Покажемо спочатку, що коли $\tau_n < \tau$, тоді $\mathcal{F}_{\tau_n} \subset \mathcal{F}_{\tau-}$. Нехай $A \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. Тоді

$$A = \bigcup_{r \in Q} A \cap \{\tau_n \leqslant r\} \cap \{\tau > r\},$$

$A \cap \{\tau_n \leqslant r\} \in \mathcal{F}_r$, тому $A \in \mathcal{F}_{\tau-}$. Отже, $\bigvee_n \mathcal{F}_{\tau_n} \subset \mathcal{F}_{\tau-}$. Тепер досить показати, що $A_t \cap \{\tau > t\}$, де $A_t \in \mathcal{F}_t$ належить до $\bigvee_n \mathcal{F}_{\tau_n}$. Маємо $\{\tau > t\} = \bigcup_n \{\tau_n > t\}$. Покажемо, що $A_t \cap \{\tau_n > t\} \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. Коли $s > t$, тоді $A_t \cap \{\tau_n > t\} \cap \{\tau_n \leqslant s\} \in \mathcal{F}_s$, якщо $s \leqslant t$, то

$$A_t \cap \{\tau_n > t\} \cap \{\tau_n \leqslant s\} = \varnothing \in \mathcal{F}_s,$$

$$A_t \cap \{\tau > t\} = \bigcup_n A_t \cap \{\tau_n > t\} \in \bigcup_n \mathcal{F}_{\tau_n} \subset \bigvee_n \mathcal{F}_{\tau_n}.$$

В IV з'явилися такі моменти зупинки, які є границі менших моментів зупинки. Не всякий додатний момент зупинки є така границя. Це ми побачимо пізніше в прикладі.

Означення. Момент зупинки τ називається таким, що можна передбачити, коли на множині $\{\tau > 0\}$ існує послідовність моментів зупинки τ_n, для яких $\tau_n < \tau$ (коли $\tau > 0$) і $\tau_n \to \tau$.

Сукупність моментів зупинки, що можуть бути передбачені, будемо позначати $\boldsymbol{P}$. Відзначимо деякі прості властивості таких моментів зупинки.

V. Якщо $\theta_1, \theta_2 \in \boldsymbol{P}$, то $\theta_1 \vee \theta_2 \in \boldsymbol{P}$, $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \boldsymbol{P}$. Дійсно, якщо $\tau_n^{(1)} \uparrow \theta_1$, $\tau_n^{(2)} \uparrow \theta_2$; $\tau_n^{(1)}, \tau_n^{(2)} \in \boldsymbol{M}$, то $\tau_n^{(1)} \vee \tau_n^{(2)} \uparrow \theta_1 \vee \theta_2$, $\tau_n^{(1)} \wedge \tau_n^{(2)} \uparrow \theta_1 \wedge \theta_2$.

VI. Якщо $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_n \leqslant \ldots$, $\theta = \lim \theta_n$, $\theta_k \in \boldsymbol{P}$, то $\theta \in \boldsymbol{P}$. Якщо $\tau_n^{(k)} \in \boldsymbol{M}$, $\tau_n^{(k)} \uparrow \theta_2$, то $\tau_N = \sup\limits_{n \leqslant N, k \leqslant n} \tau_n^{(k)} \in \boldsymbol{M}$, $\tau_N < \theta$, $\tau_n \to \theta$.

VII. Нехай $\theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \ldots \theta_n \geqslant \ldots$, $\theta = \lim \theta_n$ і для кожного ω існує таке n, що $\theta_n(\omega) = \theta(\omega)$. Якщо $\theta_k \in \boldsymbol{P}$, то $\theta \in \boldsymbol{P}$. Знову нехай $\tau_n^{(k)} \in \boldsymbol{M}$, $\tau_n^{(k)} \uparrow \theta_k$, коли $n \to \infty$. За умов щодо θ_k можна вважати, що $\tau_n^{(k)} \geqslant \tau_n^{(k+1)}$. Переходячи до підпослідовності, можемо записати

$$P\{1 - \exp(-|\tau_n^{(k)} - \theta_k|) > 2^{-n}\} \leqslant 2^{-k-n}.$$

Тоді величини $\tau_n = \inf\limits_k \tau_n^{(k)} \in \boldsymbol{M}$, $\tau_n < \theta$,

$$P\{1 - \exp\{-|\tau_n - \theta|\} > 2^{-n}\} \leqslant 2^{-n},$$

тому з імовірністю 1 $\lim \tau_n = \theta$.

З моментами зупинки пов'язані їх «обмеження» на певну множину. Нехай $A \in \mathcal{F}$, $\tau \in \boldsymbol{M}$, позначимо

$$(\tau)_A = \begin{cases} \tau, & \text{якщо } \omega \in A; \\ +\infty, & \text{якщо } \omega \notin A. \end{cases}$$

VIII. (τ_A) буде моментом зупинки тоді і лише тоді, коли $A \in \mathcal{F}_\tau$. Дійсно, для всіх t

$$\{(\tau)_A \leqslant t\} = \{(\tau)_A = \tau\} \cap \{\tau \leqslant t\} = A \cap \{\tau \leqslant t\}. \qquad (2)$$

Якщо $(\tau)_A \in \boldsymbol{M}$, то для всіх $t \in R_+$, $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$, $A \in \mathcal{F}_\tau$.

Навпаки, якщо $A \in \mathcal{F}_\tau$, то права частина (2) належить $\mathcal{F}_t$, тобто $(\tau)_A \in \in \boldsymbol{M}$.

IX. Нехай $\theta \in \boldsymbol{P}$. Якщо $A \in \mathcal{F}_{\theta-}$, то момент зупинки $(\theta)_A \in \boldsymbol{P}$. Дійсно, нехай $\theta > 0$, $\theta_n < \theta$, $\theta_n \to \theta$. Припустимо спочатку, що $B_t \in \mathcal{F}_t$, $A = B_t \cap \{\theta > t\}$. Тоді $\tau_n = (\theta_n \vee t)_{B_t} \wedge n$ є та послідовність моментів зупинки, для якої $\tau_n < (\theta)_A$, $\tau_n \to (\theta)_A$. Якщо $A = \{\theta \leqslant t\}$, то при $\tau_n = (\theta_n)_{\{\theta_n \leqslant t\}} \wedge n$ матимемо $\tau_n < (\theta)_A$, $\tau_n \to (\theta)_A$.

Позначимо через $\mathcal{A}_{\theta-}$ сукупність множин, що є скінченними об'єднаннями і перерізами множин вигляду $B_t \cap \{\theta > t\}$, $\{\theta \leqslant t\}$, де $B_t \in \in \mathcal{F}_t$, $t \in R_+$. Це алгебра множин, що породжує $\mathcal{F}_{\theta-}$. Якщо $A_1, A_2 \in \in \mathcal{F}_\theta$, то

$$(\theta)_{A_1 \cup A_2} = (\theta)_{A_1} \wedge (\theta)_{A_2}, \quad (\theta)_{A_1 \cap A_2} = (\theta)_{A_1} \vee (\theta)_{A_2},$$

тому, використовуючи V, можемо впевнитись, що IX вірне на $\mathcal{A}_{\theta-}$. Згідно з VI, VII сукупність тих A, для яких $(\theta)_A \in \boldsymbol{P}$, буде монотонним класом. Найменший монотонний клас, що містить $\mathcal{A}_\theta$, є $\mathcal{F}_{\theta-}$.

Розглянемо приклад. Нехай $\Omega = R_+$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{R+}$, P — неперервна міра на R_+ (вона має неперервну функцію розподілу); $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра, що породжується $\mathcal{B}_{[0,t]}$ і атомом $(t, +\infty)$; $\tau(\omega)$ — момент зупинки. Якщо існують такі $s < \omega$, що $\tau(\omega) = s$, то $\tau(\omega) = s$ на (s, ∞), бо $\{\tau(\omega) = s\} \in \mathcal{F}_s$, а (s, ∞) — атом цієї σ-алгебри. Тому таке s тільки одне. Для $\omega \leqslant s$ буде $\tau(\omega) \geqslant \omega$. Загальний вигляд моменту зупинки: це або така функція, що $\tau(\omega) \geqslant \omega$ (звичайно вимірна), або при деякому s

$$\tau(\omega) = \begin{cases} s, & \omega > s, \\ \geqslant \omega, & \omega \leqslant s. \end{cases}$$

Функція $\tau_1(\omega) = \omega$ задовольняє цю умову, але не існує такого моменту зупинки $\tau(\omega) > 0$, щоб було $\tau(\omega) < \tau_1(\omega)$ для всіх ω.

13. ЦІЛКОМ ВИМІРНІ ПРОЦЕСИ

Стохастичні інтервали. Будемо розглядати сукупність випадкових множин, тобто підмножини в просторі $R_+ \times \Omega$, що вимірні відносно $\mathcal{B}_{R+} \otimes \mathcal{F}$. Серед цих множин уже виділено σ-алгебру прогресивно вимірних множин П. Це такі множини $A \subset \mathcal{B}_{R+} \otimes \mathcal{F}$, для яких $A \cap \cap [0, t] \times \Omega \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$ при всіх t. Розглянемо множини, пов'язані з моментами зупинки. Нехай $\boldsymbol{M}$ — сукупність всіх моментів зупинки відносно фіксованої фільтрації $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$. Для $\tau_1, \tau_2 \in \boldsymbol{M}$ будемо позначати $[\![\tau_1, \tau_2]\!] = \{(t, \omega) : \tau_1(\omega) \leqslant t \leqslant \tau_2(\omega)\}$, $]\!]\tau_1, \tau_2[\![= = \{(t, \omega) : \tau_1(\omega) < t < \tau_2(\omega)\}$, аналогічно визначається $[\![\tau_1, \tau_2[\![$, $]\!]\tau_1\tau_2]\!]$. Для $\tau \in \boldsymbol{M}$ позначимо $[\![\tau]\!] = [\![\tau, \tau]\!]$. Ця множина називається графіком моменту зупинки τ. Усі вказані випадкові множини називаються стохастичними інтервалами.

Означення. Найменша σ-алгебра, що містить всі стохастичні інтервали $[\![\tau_1\tau_2[\![$, де τ_1, τ_2 довільні з $\boldsymbol{M}$, називається σ-алгеброю цілком вимірних множин і позначається $\mathcal{W}$.

Розглянемо властивості σ-алгебри $\mathcal{W}$.

I. $[\![\tau_1, \tau_2]\!] \in \mathcal{W}$, які б не були $\tau_1 \tau_2 \in \boldsymbol{M}$.

Дійсно, якщо $\tau \in \boldsymbol{M}$, $h > 0$, то $\tau + h \in \boldsymbol{M}$, бо $\{\tau + h \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t - h\} \in \mathcal{F}_{t-h} \subset \mathcal{F}_t$. Оскільки і $[\![\tau_1, \tau_2 + \frac{1}{k}[\![\in \mathcal{W}$, то

$[\![\tau_1, \tau_2]\!] = \cap [\![\tau_1, \tau_2 + \frac{1}{k}[\![\in \mathcal{W}$.

II. $]\!]\tau_1, \tau_2]\!] \in \mathcal{W}$, $]\!]\tau_1, \tau_2[\![\in \mathcal{W}$, бо $]\!]\tau_1, \tau_2]\!] = \bigcup\limits_k [\![\tau_1 + \frac{1}{k}, \tau_2]\!]$,

$]\!]\tau_1, \tau_2[\![= \bigcup\limits_k [\![\tau_1 + \frac{1}{k}, \tau_2[\![$.

III. $[\![\tau]\!] = \bigcap\limits_k [\![\tau, \tau + \frac{1}{k}[\![\in \mathcal{W}$.

IV. $\mathcal{W} \subset \Pi$. Дійсно, $I_{[\![\tau_1,\tau_2[\![}(t, \omega)$ є неперервний справа процес. Тому він є прогресивно вимірний, і

$$[\![\tau_1, \tau_2[\![= \{(t, \omega) : I_{[\![\tau_1,\tau_2[\![}(t, \omega) = 1\} \in \Pi.$$

Оскільки $\mathcal{W}$ породжується інтервалами $[\![\tau_1, \tau_2[\![$, то $\mathcal{W} \subset \Pi$.

V. $\mathcal{W}$ породжується стохастичними інтервалами $[\![\tau_1, \tau_2]\!]$. Якщо цю *σ-алгебру позначити $\mathcal{W}'$, то згідно з I $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$. З іншого боку, $[\tau_2] \in$* $\in \mathcal{W}'$, $[\![\tau_1, \tau_2[\![= [\![\tau_1, \tau_2]\!] \setminus [\![\tau_2]\!] \in \mathcal{W}$. Тому $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$.

Означення. Процес $x(t, \omega)$, визначений на R_+ з фазовим простором $(X, \mathcal{B})$, називається цілком вимірним, якщо він за сукупністю змінних є $\mathcal{W}$-вимірний, тобто для всіх $B \in \mathcal{B}$ $\{(t, \omega) : x(t, \omega) \in B\} \in \mathcal{W}$.

Будь-який цілком вимірний процес буде прогресивно вимірним. Приклади показують, що обернене твердження не завжди вірне.

Теорема 1. Нехай X — повний метричний сепарабельний простір, $x(t, \omega)$ — узгоджений стохастично неперервний, тоді $x(t, \omega)$ має $\mathcal{W}$-вимірну модифікацію $\tilde{X}(t, \omega)$.

Доведення. Нехай h_n вибрано так, що для $t \leqslant n$, $s \leqslant n$, $|t - s| \leqslant h_n$

$$P\left\{r(x(t, \omega), x(s, \omega)) > \frac{1}{n}\right\} \leqslant 2^{-n}.$$

Візьмемо $x_n(t, \omega) = x(kh_n, \omega)$, якщо $kh_n \leqslant t < (k + 1) h_n$. Тоді для всіх t з імовірністю 1 $\lim x_n(t, \omega) = x(t, \omega)$ (цей факт було встановлено, коли розглядалась вимірність і прогресивна вимірність процесів). Тому

$$\breve{x}(t, \omega) = \begin{cases} \lim x_n(t, \omega), & \text{якщо границя існує}, \\ \bar{x}, & \text{якщо границя не існує}, \end{cases}$$

де $\bar{x} \in X$ — довільна фіксована точка, є процес, стохастично еквівалентний $x(t, \omega)$.

Залишилось встановити, що $\mathcal{W}$-вимірними будуть процеси $x_n(t, \omega)$. Маємо

$$\{(t; \omega) : x_n(t, \omega) \in B\} = \bigcup_k [kh_n, (k+1) h_n[\times \{\omega: x(kh_n, \omega) \in B\}.$$

Нехай $\Lambda_{k,n} = \{\omega : x(kh_n, \omega) \in B\}$, $\Lambda_{k,n} \in \mathcal{F}_{kh_n}$. Тоді $[kh_n, (k+1)h_n] \times \Lambda_{k,n} = [\![\tau_{k,n}, (k+1)h_n[\![$, де

$$\tau_{k,n} = \begin{cases} kh_n, & \omega \in \Lambda_{k,n}, \\ +\infty, & \omega \bar{\in} \Lambda_{k,n}, \end{cases}$$

$(k+1)h_n$, є момент зупинки. Те, що $\tau_{k,n}$ є момент зупинки, випливає з того, що $\{\tau_{k,n} \leqslant s\} = \varnothing \in \mathcal{F}_s$, коли $s < kh_n$,

$$\{\tau_{k,n} \leqslant s\} = \Lambda_{k,n} \in \mathcal{F}_{kh_n} \subset \mathcal{F}_s, \text{ коли } s \geqslant kh_n.$$

Теорему доведено.

Наступна теорема дає умови цілком вимірності.

Т е о р е м а 2. Нехай X — повний сепарабельний простір, $x(t, \omega)$ — узгоджений процес, що не має розривів II роду і неперервний справа. Тоді він цілком вимірний.

Д о в е д е н н я. Для даного $\varepsilon > 0$ побудуємо послідовно величини

$$\tau_1^\varepsilon = \operatorname{deb}\{(t, \omega) : t > 0,\ r(x(t, \omega),\ x(0, \omega)) \geqslant \varepsilon\},$$

$$\tau_2^\varepsilon = \operatorname{deb}\{(t, \omega) : t > \tau_1^\varepsilon,\ r(x(t, \omega),\ x(\tau_1^\varepsilon, \omega)) \geqslant \varepsilon\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Згідно з неперервністю $x(t, \omega)$ справа $\tau_1^\varepsilon < \tau_2^\varepsilon < \dots < \tau_{k-1}^\varepsilon < < \tau_k^\varepsilon < \dots$. Оскільки $x(t, \omega)$ не має розривів II роду, то $\tau_k^\varepsilon \to \infty$. Легко впевнитись, що усі τ_k^ε є моменти зупинки. Нехай $x^\varepsilon(t, \omega) = x(0, \omega)$, коли $\tau < \tau_1^\varepsilon$, $x^\varepsilon(t, \omega) = x(\tau_k^\varepsilon, \omega)$, коли $\tau_k^\varepsilon \leqslant t < \tau_{k+1}^\varepsilon$. За побудовою $r(x(t, \omega))$, $x^\varepsilon(t, \omega) < \varepsilon\ \forall t$. Тому досить довести, що цілком вимірним є процес $x^\varepsilon(t, \omega)$:

$$\{(t, \omega) : x^\varepsilon(t, \omega) \in B\} = \bigcup_k [\![\tau_k^\varepsilon, \tau_{k+1}^\varepsilon[\![\cap \{(t, \omega) : t \geqslant \tau_k^\varepsilon, x(\tau_k^\varepsilon, \omega) \in B\}. \quad (1)$$

Позначимо $\Lambda_k^\varepsilon = \{\omega : x(\tau_\varepsilon^k, \omega) \in B\}$. Оскільки процес $x(t, \omega)$ неперервний справа, він прогресивно вимірний, тому $\Lambda_k^\varepsilon \in \mathcal{F}_{\tau_\varepsilon^k}$. Нехай

$$(\tau_k^\varepsilon)_{\Lambda_k^\varepsilon} = \begin{cases} \tau_k^\varepsilon, & \text{якщо } \omega \in \Lambda_k^\varepsilon, \\ +\infty, & \text{якщо } \omega \in \Lambda_k^\varepsilon. \end{cases}$$

Тоді $(\tau_k^\varepsilon)_{\Lambda_k^\varepsilon}$ є момент зупинки. Згідно з (1)

$$\{(t, \omega) : x^\varepsilon(t, \omega) \in B\} = \bigcup_k [\![(\tau_k^\varepsilon)_{\Lambda_k^\varepsilon}, \tau_{k+1}^\varepsilon[\![. \quad (2)$$

Множина праворуч в (2) належить $\mathcal{W}$.

Н а с л і д о к. $\mathcal{W}$ є найменша σ-алгебра, відносно якої вимірні усі числові процеси, узгоджені, неперервні справа, без розривів II роду. Нехай $\tilde{\mathcal{W}}$ — така σ-алгебра. Тоді з теореми 2 випливає $\tilde{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}$. З іншого боку, $I_{[\![\tau_1, \tau_2]\!]}$ є $\tilde{\mathcal{W}}$-вимірні, тому $\mathcal{W} \subset \tilde{\mathcal{W}}$.

Зауваження. Можна встановити теорему для неперервних справа процесів, розглядаючи трансфінітну множину моментів зупинки τ_α^ε, де α — порядкові числа: якщо існує попереднє $\alpha - 1$, то

$$\tau_\alpha^\varepsilon = \operatorname{deb}\{(t, \omega) : t > \tau_{\alpha-1}^\varepsilon, r(x(t, \omega), x(\tau_{\alpha-1}^\varepsilon, \omega)) \geqslant \varepsilon\},$$

якщо ж такого нема, то $\tau_\alpha^\varepsilon = \sup\limits_{\beta<\alpha} \tau_\beta^\varepsilon$.

Теорема про переріз та її наслідки. Ми вже розглядали операцію проектування $\pi_\Omega((t, \omega)) = \omega$. Якщо виконується умова повноти: $\mathcal{F}$ повна відносно P, $\mathcal{F}_0$ містить усі множини P-міри нуль, то для $A \in \mathcal{B}_R \otimes \mathcal{F}$ буде $\pi_\Omega(A) \in \mathcal{F}$.

Теорема 3 (про переріз). Якщо $A \in \mathcal{W}$, $P(\pi_\Omega(A)) > 0$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий момент зупинки τ_ε, що $[\![\tau^\varepsilon]\!] \subset A$ і $P(\pi_\Omega[\![\tau^\varepsilon]\!]) \geqslant P(\pi_\Omega(A)) - \varepsilon$.

Доведення. Використаємо такий загальний факт. Якщо $\mathcal{F}$ — повна σ-алгебра відносно P, $A \in \mathcal{B}_{R_+} \otimes \mathcal{F}$, то на $\pi(A) \in \mathcal{F}$ існує $\mathcal{F}$-вимірна величина $z(\omega)$, для якої $\{(z(\omega); \omega) \in A\}$. Розглянемо на $\mathcal{B}_{R_+} \otimes \mathcal{F}$ міру

$$\lambda_z(C) = \int I_{\{(z(\omega); \omega) \in C\}} dP.$$

Позначимо через $\mathcal{K}$ сукупність множин з $\mathcal{W}$, які мають вигляд $\bigcap S_n$, а $S_n \in \mathcal{A}$, це множини з $\mathcal{W}$, що є об'єднання скінченного числа інтервалів вигляду $[\![\tau_1, \tau_2]\!]$. $\mathcal{A}$ є алгебра множин. Усі множини з $\mathcal{A}$ замкнені зліва (спадні послідовності в цих множинах мають границі, що належать цим множинам). Такими ж будуть і множини з $\mathcal{K}$. Тому для всіх $B \in \mathcal{K}$ $[\operatorname{deb} B] \in \mathcal{K}$. Оскільки $\mathcal{W}$ є σ-алгебра, що породжується алгеброю $\mathcal{A}$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує така множина $B_\varepsilon \in \mathcal{K}$, що $\lambda(B) \geqslant \lambda(A) - \varepsilon$. Але $\lambda(B) \leqslant P(\pi_\Omega(B \cap A)) = P(\pi_\Omega(B))$, $\lambda(A) = P(\pi_\Omega(A))$, $\tau^\varepsilon = \operatorname{deb} B$ буде шуканий момент зупинки.

Теорема 4. Нехай $x(t, \omega)$, $\tilde{x}(t, \omega)$ — числові цілком вимірні процеси. Якщо для будь-якого моменту зупинки τ $P\{x(\tau, \omega) = \tilde{x}(\tau, \omega), \tau < +\infty\} = 0$, то $P\{\sup\limits_t |x(t, \omega) - \tilde{x}(t, \omega)| > 0\} = 0$.

Доведення. Позначимо $A_+ = \{(t, \omega) : x(t, \omega) - \tilde{x}(t, \omega) > 0\}$, $A_- = \{(t, \omega) : x(t, \omega) - \tilde{x}(t, \omega) < 0\}$. Тоді $\{\omega : \sup\limits_t |x(t, \omega) - \tilde{x}(t, \omega)| > 0\} = \pi_\Omega(A_+) \cup \pi_\Omega(A_-)$. Покажемо, що $P(\pi_\Omega(A_\pm)) = 0$. Якщо $P(\pi_\Omega(A_+)) > 0$, то за теоремою 3 існує такий момент зупинки τ, що $P(\pi[\![\tau]\!]) > 0$ і $[\![\tau]\!] \in A_+$, тобто $P\{x(\tau, \omega) > \tilde{x}(\tau, \omega), \tau < +\infty\} > 0$. Це суперечить умові. Так само для $A_- : P(\pi_\Omega(A_-)) = 0$.

Зауваження. Якщо процеси $x(t, \omega)$ та $\tilde{x}(t, \omega)$ рівномірно інтегровні, то досить умови: для всіх $\tau \in M$

$$Mx(\tau, \omega) I_{\{\tau<\infty\}} = M\tilde{x}(\tau, \omega) I_{\{\tau<\infty\}}.$$

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ — імовірнісний простір. Розглянемо сукупність дійсних або комплекснозначних величин на цьому просторі, для яких $M|\xi|^2 < \infty$. Через $L_2(\Omega, P)$ позначимо гільбертів простір таких величин із скалярним добутком $M\xi\bar{\eta} = (\xi, \eta)$. (У випадку, коли розглядаються дійсні величини, простір буде дійсним, $\bar{\eta} = \eta$; в загальному випадку — $\bar{\eta}$ — комплексноспряжена величина.) L_2-Теорія випадкових процесів вивчає лише такі процеси $\xi(t)$, для яких $M|\xi(t)|^2 < < \infty$ при всіх t з області визначення. $\xi(t)$ розглядається як крива в гільбертовому просторі $L_2(\Omega, P)$. Характеристики, які вважаються даними або обчислюються, це перші моменти випадкових величин (їх математичні сподівання) та $M\xi\bar{\eta}$. Так, основними характеристиками випадкового процесу будуть дві функції: середнє значення $a(t) = = M\xi(t)$ та кореляційна функція $R(t, s) = M\xi(t)\overline{\xi}(s) - a(t)\overline{a}(s)$.

Встановимо умови, які повинні задовольняти функції $a(t)$ та $R(t, s)$, для того щоб вони були середнім значенням та кореляційною функцією деякого випадкового процесу.

Т е о р е м а 1. Для того щоб функції $a(t)$ та $R(t, s)$, визначені на $T \subset R$ та $T \times T$ з комплексними значеннями, були середнім значенням та кореляційною функцією комплекснозначного випадкового процесу $\xi(t)$, визначеного на T, необхідно і достатньо, щоб функція $R(t, s)$ була додатно визначеною: які б не були $n \geqslant 1$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ та $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} R(t_j, t_k) z_j \bar{z}_k \geqslant 0. \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Якщо $\xi(t)$ — процес з кореляційною функцією $R(t, s)$, то $\xi_1(t) = \xi(t) - a(t)$ буде мати середнє значення 0 та кореляційну функцію $R(t, s)$. Тоді

$$0 \leqslant M\left|\sum_{k=1}^{n} z_k \xi_1(t_k)\right|^2 = \sum_{k,j=1}^{n} R(t_j, t_k) z_j \bar{z}_k.$$

Необхідність умови теореми встановлена. Для доведення достатності побудуємо гауссівський процес на T із значеннями в R^2 $(\eta_1(t); \eta_2(t))$, для якого $M\eta_1(t) = M\eta_2(t) = 0$,

$$R_1(t, s) = M\eta_1(t)\eta_1(s) = M\eta_2(t)\eta_2(s) = \operatorname{Re} R(t, s), \quad t, s \in T,$$

$$R_2(t, s) = M\eta_1(t)\eta_2(s) = -M\eta_2(t)\eta_1(s) = \operatorname{Im} R(t, s), \quad t, s \in T.$$

Нехай $z_k = u_k + iv_k$, $u_k, v_k \in R$. Для $n = 2$ та дійсних z_1, z_2 з (1) випливає $R(t_1, t_2) = \overline{R(t_1, t_2)}$, тому

$$0 \leqslant \sum_{k,j=1}^{n} R(t_k, t_j) z_k \bar{z}_j = \sum_{k,j=1}^{n} \operatorname{Re} R(t_k, t_j)(u_k u_j + v_k v_j) +$$

$$+ \sum_{k,j=1}^{n} \operatorname{Im} R(t_k, t_j)(u_k v_j - u_j v_k) =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} [R^{(1)}(t_k, t_j)(u_k u_j + v_k v_j) + R^{(2)}(t_k, t_j)(u_k v_j - u_j v_k)].$$

Отже, матриця

$$\begin{Vmatrix} R^{(1)}(t_k, t_j) & R^{(2)}(t_k, t_j) \\ -R^{(2)}(t_k, t_j) & R^{(1)}(t_k, t_j) \end{Vmatrix}$$

додатно визначена і тому може бути кореляційною для гауссівського вектора $(\eta_1(t_1), \ldots, \eta_1(t_n), \eta_2(t_1), \ldots, \eta_2(t_n))$. Існування процесів $\eta_1(t)$ та $\eta_2(t)$ випливає тепер з теореми Колмогорова. Процес $\xi(t) = \eta_1(t) + i\eta_2(t) + a(t)$ задовольняє умову теореми.

Розглянемо властивості процесів $L_2(\Omega, P)$ в залежності від властивостей середнього значення та кореляційної функції. Це такі властивості, як неперервність, диференційовність, інтегровність. Будемо використовувати визначення границі в $L_2(\Omega, P)$, тобто у середньому квадратичному: послідовність ξ_n із значеннями в $\mathbb{C}$ збігається до ξ, якщо $M|\xi_n - \xi|^2 \to 0$.

Л е м а. Якщо ξ_n — послідовність в $L_2(\Omega, P)$, то вона має границю тоді і тільки тоді, коли існує $\lim\limits_{n\to\infty\, m\to\infty} M\xi_n\bar{\xi}_m$.

Д о в е д е н н я. Якщо $\xi_n \to \xi$, то $\lim\limits_{n,m\to\infty} M\xi_n\bar{\xi}_m = M|\xi|^2$. Якщо $\lim\limits_{n,m\to\infty} M\xi_n\bar{\xi}_m = c$, то

$$\lim_{n,m\to\infty} M|\xi_n - \xi_m|^2 = \lim_{n\to\infty} M\xi_n\bar{\xi}_n + \lim_{m\to\infty} M\xi_m\bar{\xi}_m -$$

$$- \lim_{n,m\to\infty} (M\xi_n\bar{\xi}_m + M\xi_m\bar{\xi}_n) = c + c - c - c = 0.$$

Т е о р е м а 2. Нехай $\xi(t)$ — процес в $L_2(\Omega, P)$, визначений на $[a, b]$ з середнім значенням $a(t)$ та кореляційною функцією $R(t, s)$. Він буде неперервним (в $L_2(\Omega, P)$) тоді і лише тоді, коли будуть неперервними $a(t)$ та $R(t, s)$ (остання — як функція двох змінних).

Д о в е д е н н я. Нехай $\xi(t)$ — неперервний. Тоді

$$|M\xi(t) - M\xi(t_0)| = |a(t) - a(t_0)| \leqslant \sqrt{M|\xi(t) - \xi(t_0)|^2},$$

звідси випливає неперервність $a(t)$. Отже, буде неперервним процес $\xi_1(t) = \xi(t) - a(t)$. Далі,

$$|R(t, s) - R(t_0, s_0)| = |M\xi_1(t)\xi_1(s) - M\xi_1(t_0)\xi_1(s_0)| \leqslant$$

$$\leqslant (M|\xi_1(s)|^2 M|\xi_1(t) - \xi_1(t_0)|^2)^{1/2} + (M|\xi_1(t_0)|^2 M|\xi_1(s) - \xi_1(s_0)|^2)^{1/2}.$$

Другий доданок прямує до 0, коли $s \to s_0$. Ми встановимо те саме і для першого доданка, якщо покажемо, що $M|\xi(s)|^2$ — обмежене. Але

$$\sqrt{M|\xi_1(s)|^2} \leqslant \sqrt{M|\xi(s_0)|^2} + \sqrt{M|\xi_1(s) - \xi_1(s_0)|^2},$$

і другий доданок прямує до нуля.

Якщо $a(t)$ та $R(t, s)$ неперервні, то досить довести неперервність $\xi_1(t)$. Але

$$M|\xi_1(t) - \xi_1(t_0)|^2 = R(t, t) + R(t_0, t_0) - R(t_0, t_0) - R(t_0, t) \to 0,$$

коли $t \to t_0$ внаслідок неперервності $R(t, s)$.

Означення. Процес $\xi(t)$ диференційовний у середньому квадратичному в точці t_0, якщо існує така величина $\xi'(t_0) \in L_2(\Omega, P)$, що

$$\lim_{h\to 0} M\left|\frac{1}{h}(\xi(t_0 + h) - \xi(t_0)) - \xi'(t_0)\right|^2 = 0.$$

Теорема 3. Для того щоб процес $\xi(t)$ був диференційовним на $[a, b]$, необхідно, щоб існували похідні $a'(t)$, $\frac{\partial}{\partial t} R(t, s)$, $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} R(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} R(t, s)$, $t \in [a, b]$, $s \in [a, b]$, і достатньо, щоб існували $a'(t)$ та

$$\lim_{\Delta\to 0, h\to 0} \frac{1}{h\Delta}[R(t + h, t + \Delta) + R(t, t) - R(t, t + \Delta) - R(t + h, t)], \quad t \in [a, b]. \tag{2}$$

Доведення. 1. Нехай існує $\xi'(t)$, $t \in [a, b]$. Легко побачити, що

$$M\xi'(t) = \lim_{h\to 0} M \frac{\xi(t + h) - \xi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(t + h) - a(t)}{h}.$$

Отже, існує $a'(t)$. Тому буде диференційовним процес $\xi_1(t) = \xi(t) - a(t)$. Так само можемо показати, що

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t, s) = M\xi_1(t)\overline{\xi_1(s)},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} R(t, s) = M\xi_1(t)\xi_1'(s),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} R(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} R(t, s) = M\xi_1'(t)\xi_1'(s).$$

2. Оскільки $a'(t)$ існує, то треба довести диференційовність процесу $\xi_1(t)$. На основі леми досить показати існування границі

$$\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ h\to 0}} M \frac{\xi_1(t + h) - \xi_1(t)}{h} \cdot \overline{\frac{\xi_1(t + \Delta) - \xi_1(t)}{\Delta}},$$

а цей вираз дорівнює (2).

Зауваження 1. Процес називається неперервно диференційовним, якщо $\xi'(t)$ неперервний (в $L_2(\Omega, P)$) Для неперервної диференційовності необхідно і достатньо існування неперервних похідних

$$a'(t), \quad \frac{\partial}{\partial t} R(t, s), \quad \frac{\partial}{\partial s} R(t, s), \quad \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} R(t, s), \quad \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} R(t, s).$$

Дійсно, якщо $\xi'(t)$ існує, то $a'(t)$ є його середнє значення, а $\frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial s \partial t}$ — кореляційна функція. Якщо $\xi'(t)$ неперервний, то з теореми 2 випливає неперервність цих функцій. Неперервність $\frac{\partial}{\partial t} R(t, s) = M\xi_1'(t)\overline{\xi_1(s)}$ та $\frac{\partial}{\partial s} R(t, s) = M\xi_1(t)\overline{\xi_1'(s)}$ є наслідок неперервності $\xi(t)$ та $\xi'(t)$:

$$|M\xi_1(t)\overline{\xi_1'(s)} - M\xi_1(t_0)\xi_1(s_0)| \leqslant \sqrt{M|\xi_1(t)|^2}\sqrt{M|\xi_1'(s) - \xi'(s_0)|^2} + \\ + \sqrt{M|\xi_1'(s_0)|^2}\sqrt{M|\xi_1(t) - \xi_1(t_0)|^2}.$$

Навпаки, якщо виконані умови неперервності похідних від a та R, то за теоремою Лагранжа про скінченні прирости

$$R(t+\Delta, t+h) - R(t+\Delta, t) - R(t, t+h) - R(t, t) =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial t} R(t+\theta_1\Delta, t+h) - \frac{\partial}{\partial t} R(t+\theta_1\Delta, t)\right]\Delta =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial s\partial t} R(t+\theta_1\Delta, t+\theta_2 h)h\Delta,$$
$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1,$$

тому виконана умова (2), $\xi'(t)$ існує, а з теореми 2 випливає його неперервність.

Н а с л і д о к 1. *Для того щоб процес $\xi(t)$ мав неперервну похідну порядку n, необхідно і достатньо, щоб існували неперервні похідні*

$$\frac{d^k}{dt^k} a(t), \ \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial s^l} R(t, s), \quad k \leqslant n, \quad l \leqslant n$$

(похідні визначаються за індукцією: $\xi''(t)$ є похідна від $\xi'(t)$, $\xi^{(k)}(t)$ — похідна від $\xi^{(k-1)}(t)$, усі похідні і неперервність їх розглядаються в $L_2(\Omega, P)$).

Н а с л і д о к 2. Нехай процес $\xi(t)$ має неперервну похідну порядку n, а $Ly(t)$ є диференціальний оператор,

$$Ly(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k(t)\, y^{(k)}(t).$$

Тоді процес $\eta(t) = L\xi(t)$ має середнє значення $a_\eta(t)$ та кореляційну функцію $R_\eta(t)$, що визначаються формулами

$$a_\eta(t) = La_\xi(t),$$
$$R_\eta(t, s) = L_t L_s R_\xi(t, s) = \sum_{k,l=0}^{n} c_k(t)\, c_l(s) \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial s^l} R_\xi(t, s).$$

Тут a_ξ та R_ξ відповідно середнє значення та кореляційна функція процесу $\xi(t)$.

Інтегрування. Розглянемо процес $\xi(t)$ на $[a, b]$. Він називається інтегровним у середньому квадратичному (с. к. інтегровним), якщо існує границя в $L_2(\Omega, P)$ інтегральних сум

$$\sum_{k=0}^{n-1} \xi(\tau_k)\Delta t_k, \text{ де } a \leqslant t_0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n = b, \quad \tau_k \in [t_k, t_{k+1}],$$
$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Границя існує, коли $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$ незалежно від вибору τ_k. Ця границя позначається $\int\limits_a^b \xi(t)\,dt$ і називається інтегралом. У тому випадку, коли функція $\xi(t, \omega)$ вимірна, цей інтеграл з імовірністю 1 дорівнює звичайному інтегралу Лебега $\int\limits_a^b \xi(t, \omega)\,dt$.

Теорема 4. Процес $\xi(t)$ (с. к.) інтегровний тоді і лише тоді, коли існують інтеграли Рімана

$$\int\limits_a^b a(t)\,dt, \quad \int\limits_a^b \int\limits_a^b R(t, s)\,dt ds,$$

$a(t)$, $R(t, s)$ — середнє значення та кореляційна функція процесу $\xi(t)$.

Доведення. Розглянемо дві довільні інтегральні суми:

$$S(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi(\tau_k)\,\Delta t_k;$$

$$S(s_1, \ldots, s_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = \sum_{l=0}^{m-1} \xi(\sigma_l)\,\Delta s_l,$$

$$a = t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1 \leqslant \tau_2 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_{n-1} \leqslant \tau_n \leqslant t_n = b,$$
$$a = s_0 \leqslant \sigma_1 \leqslant s_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_{m-1} \leqslant \sigma_m \leqslant s_m = b.$$

Для існування границі необхідно і достатньо, щоб існувала границя, коли $\max \Delta t_k \to 0$, $\max \Delta s_l \to 0$, виразу

$$\lim MS(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n)\overline{S(s_1, \ldots, s_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_m)} =$$
$$= \lim\left(\sum_{k=0}^{n-1} a(\tau_k)\,\Delta t_k \sum_{l=0}^{m-1} \overline{a(\sigma_l)}\,\Delta s_l + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} R(\tau_k, \sigma_l)\,\Delta t_k \Delta s_l. \qquad (3)$$

Праворуч стоять ріманові інтегральні суми для $a(t)$ та $R(t, s)$. Звідси випливає достатність умов теореми. Для доведення необхідності зауважимо, що існування $\int\limits_a^b \xi(t)\,dt$ спричинює правильність співвідношення

$$MS(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a(\tau_k)\,\Delta t_k \to M\int\limits_a^b \xi(t)\,dt.$$

Тому перший доданок в (3) праворуч прямує до $M\int\limits_a^b \xi(t)dt M\int\limits_a^b \xi(t)\,dt$.

Якщо $\xi(t)$ інтегровна, то ліва частина (3) має границю $M\int\limits_a^b \xi(t)\,dt \times$ $\times \int\limits_a^b \overline{\xi(t)\,dt}$, тому існує границя подвійної суми в правій частині

(3), а ця сума є ріманова інтегральна для подвійного інтеграла $\int\limits_a^b\int\limits_a^b R(t, s)\,dtds$.

Зауваження 2. Ми встановили такі формули «внесення знака математичного сподівання під знак інтеграла»:

$$M\int\limits_a^b \xi(t)\,dt = \int\limits_a^b M\xi(t)\,dt; \tag{4}$$

$$M\int\limits_a^b \xi(t)\,dt\int\limits_a^b \overline{\xi(s)}\,ds = \int\limits_a^b\int\limits_a^b M\xi(t)\,\overline{\xi(s)}\,dtds. \tag{5}$$

Друга формула є наслідок такої формули, що випливає з (3):

$$M\int\limits_a^b \xi(t)\,dt\int\limits_a^b \overline{\xi(s)}\,ds = \int\limits_a^b a(t)\,dt\int\limits_a^b \overline{a(s)}\,ds + \int\limits_a^b\int\limits_a^b R(t, s)\,dtds. \tag{6}$$

Нарешті з (5) можна вивести таку більш загальну формулу. Нехай $\xi(t)$ та $\eta(t)$ — інтегровні випадкові процеси на $[a, b]$. Тоді

$$M\int\limits_a^b \xi(t)\,dt\int\limits_a^b \overline{\eta(t)}\,dt = \int\limits_a^b\int\limits_a^b M\xi(t)\,\overline{\eta(s)}\,dtds. \tag{7}$$

Інтегральні перетворення. Нехай $V(t, s)$ — функція, інтегровна за Ріманом на $[a, b]\times[a, b]$, а $\xi(t)$ — с. к. інтегровний на $[a, b]$ процес з середнім значенням $a_\xi(t)$ і кореляційною функцією $R_\xi(t, s)$. Візьмемо

$$\eta(t) = \int\limits_a^b V(t, s)\,\xi(s)\,ds. \tag{8}$$

Теорема 5. $\eta(t)$ є процес в $L_2(\Omega, P)$, для якого

$$a_\eta(t) = M\eta(t) = \int\limits_a^b V(t, s)\,a_\xi(s)\,ds. \tag{9}$$

$$R_\eta(t, s) = \int\limits_a^b\int\limits_a^b V(t, u)\,\overline{V(s, r)}\,R_\xi(u, r)\,dudr. \tag{10}$$

Ці формули випливають з (4) та (6).

15. СТОХАСТИЧНІ ІНТЕГРАЛИ

Випадкові міри з ортогональними значеннями. Нехай $(X, \mathscr{B})$ — вимірний простір. Припустимо, що кожному $B\in\mathscr{B}$ відповідає комплексна випадкова величина $\mu(B)$ з $L_2(\Omega, P)$ так, що виконуються умови: 1) $M\mu(A)\,\overline{\mu(B)} = 0$, якщо $A\cap B=\varnothing$; 2) $m(B) = M|\mu(B)|^2$ є міра на $\mathscr{B}$; 3) $\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)$, якщо $A\cap B = \varnothing$. Тоді μ називається випадковою мірою з ортогональними значеннями.

Теорема 1. Для того щоб сукупність випадкових величин $\{\mu(B), B \in \mathscr{B}\}$ була випадковою мірою з ортогональними значеннями, необхідно і достатньо, щоб існувала така скінченна числова міра $m(B)$ на $\mathscr{B}$, що

$$M\mu(A)\overline{\mu(B)} = m(A \cap B). \tag{1}$$

Випадкова міра μ має властивість: якщо $A_n \uparrow A$ або $A_n \downarrow A$, то $\mu(A_n) \to \mu(A)$ в $L_2(\Omega, P)$.

Доведення. Якщо μ — міра з ортогональними значеннями, то

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B),$$

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A),$$

$$M\mu(A)\overline{\mu(B)} = M|\mu(A \setminus B)|^2 + M\mu(A \cap B)\overline{\mu(B \setminus A)} +$$

$$+ M\mu(A \setminus B)\overline{\mu(A \cap B)} + M\mu(A \setminus B)\overline{\mu(B \setminus A)} = m(A \cap B).$$

Якщо виконується (1), то для A та B таких, що $A \cap B = \varnothing$, матимемо

$$M(\mu(A \cup B) - \mu(A) - \mu(B))\overline{(\mu(A \cup B) - \mu(A) - \mu(B))} =$$

$$= m(A \cup B) - m(A) - m(B) - m(A) - m(B) + m(A) + m(B) = 0.$$

Таким чином, умова 3) виконана. Умови 1) та 2) випливають з (1) безпосередньо. Далі, нехай, наприклад, $A_n \uparrow A$. Тоді $\mu(A) = \mu(A_n) + \mu(A - A_n)$, $M|\mu(A) - \mu(A_n)|^2 = m(A \setminus A_n) = m(A) - m(A_n) \to 0$. Нехай $\mathscr{B}_0$ — деяка алгебра множин, $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$ і μ визначена лише для $B \in \mathscr{B}_0$. Постає питання, чи можна продовжити міру μ з $\mathscr{B}_0$ на $\mathscr{B}$, якщо вона задовольняє умову (1) на $\mathscr{B}_0$. Виявляється це можна зробити, якщо $m(B)$ може бути подовжена на $\mathscr{B}$ з $\mathscr{B}_0$.

Теорема 2. Нехай $\mathscr{B}_0$ — така підалгебра $\mathscr{B}$, що $\sigma(\mathscr{B}_0) = \mathscr{B}$ і визначена сукупність величин $\{\mu(B), B \in \mathscr{B}_0\}$, для якої виконується (1) при $B \in \mathscr{B}_0$ з деякою мірою $m(B)$ на $\mathscr{B}$. Тоді існує така міра з ортогональними значеннями $\mu^*(B)$ на $\mathscr{B}$, для якої $\mu^*(B) = \mu(B)$ при $B \in \mathscr{B}_0$ і $M\mu^*(A)\overline{\mu^*(B)} = m(A \cap B)$ для $A, B \in \mathscr{B}$.

Доведення. Позначимо через $\tilde{\mathscr{B}}$ сукупність таких множин A з $\mathscr{B}$, для яких

$$\inf_{B \in \mathscr{B}_0} [m(A \setminus B) + m(B \setminus A)] = 0.$$

Легко переконатись, що $\tilde{\mathscr{B}}$ є монотонний клас, $\tilde{\mathscr{B}} \supset \mathscr{B}_0$, тому $\tilde{\mathscr{B}}$ за теоремою про монотонний клас збігається з $\sigma(\mathscr{B}_0) = \mathscr{B}$. Нехай $A \in \mathscr{B}$, B_n — така послідовність з $\mathscr{B}_0$, що

$$\lim_{n \to \infty} [m(A \setminus B_n) + m(B_n \setminus A)] = 0. \tag{2}$$

Тоді $m(B_n \setminus B_m) + m(B_m \setminus B_n) = m(B_n \setminus B_m \cap A) + m(B_m \setminus B_n \cap A) \leqslant m(A \setminus B_m) + m(A \setminus B_n)$, а ця величина прямує до нуля, коли $n \to \infty$, $m \to \infty$. Отже,

$$M|\mu(B_n) - \mu(B_m)|^2 = m(B_n \setminus B_m) + m(B_m \setminus B_n) \to 0,$$

$\mu(B_n)$ — фундаментальна послідовність в $L_2(\Omega, P)$. Існує $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n(B_n) = \mu^*(A)$. Те, що $\mu^*(A)$ не залежить від вибору послідовності, для якої виконується (1), випливає з того, що для двох таких послідовностей B_n та $\breve{B}_n$ такою ж буде послідовність $B_n^* = B_{n/2}$, коли n — парне, $B_n^* = \breve{B}_{(n+1)/2}$, коли n — непарне. Згідно з (1) $M \mid \mu^* (A) \mid^2 = m (A)$. Нехай $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $m (A_i \setminus B_n^i) + m (B_n^i \setminus A_i) \to 0$, $i = 1, 2$. Тоді $m (B_n^1 \cap B_n^2) \to 0$, $\mu^* (A_i) = \lim \mu (B_n^i \setminus B_n^1 \cap B_n^2)$, а

$$\mu ([B_n^1 \setminus B_n^1 \cap B_n^2] \cup [B_n^2 \setminus B_n^1 \cap B_n^2]) =$$
$$= \mu [B_n^1 \setminus B_n^1 \cap B_n^2] + \mu (B_n^2 \setminus B_n^1 \cap B_n^2).$$

Тому

$$\mu^* (A_1 \cup A_2) = \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2),$$
$$M\mu^* (A_1) \overline{\mu^* (A_2)} = \lim_{n\to\infty} M\mu (B_n^1 \setminus B_n^1 \cap B_n^2) \overline{\mu (B_n^2 \setminus B_n^1 \cap B_n^2)} = 0.$$

Отже, μ^* задовольняє умови 1) — 3). За побудовою $\mu^* (B) = \mu (B)$ для $B \subset \mathcal{B}_0$.

Стохастичний інтеграл. Позначимо $L_2 (m)$ гільбертів простір комплекснозначних $\mathcal{B}$-вимірних функцій $f (x)$, для яких $\| f \| = \int | f (x) |^2 \times m (dx) < \infty$. Скалярний добуток в $L_2 (m)$ визначається так:

$$(f, g)_{L_2(m)} = \int f (x) \overline{g (x)}\, m (dx) = \int f\bar{g} dm.$$

Позначимо тепер $H_2 (\mu)$ підпростір $L_2 (\Omega, P)$, який породжується величинами $\{\mu (B), B \in \mathcal{B}\}$, де $\mu (B)$ — міра з ортогональними значеннями, для якої $m (B) = M \mid \mu (B) \mid^2$.

Т е о р е м а 3. Існує єдине ізометричне лінійне відображення $\mathcal{J} L_2 (m)$ на $H_2 (\mu)$ таке, що $\mathcal{J} (I_B) = \mu (B)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $L^0 \subset L_2 (m)$ сукупність скінченнозначних $\mathcal{B}_0$-вимірних функцій, де $\mathcal{B}_0$ — така алгебра, що $\sigma (\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}$. Через $H_0 (\mu)$ позначимо лінійну оболонку величин $\{\mu (B), B \in \mathcal{B}_0\}$. Елементами L^0 є функції

$$\sum_{k=1}^n c_k I_{B_k} (x), \quad B_k \in \mathcal{B}_0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, B_k \cap B_j = \varnothing, \quad k \neq j.$$

Елементами $H_0 (\mu)$ — лінійні комбінації $\sum_{k=1}^n c_k \mu (B_k)$. Візьмемо

$$I \left(\sum_{k=1}^n c_k I_{B_k} \right) = \sum_{k=1}^n c_k \mu (B_k). \tag{3}$$

Маємо

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k I_{B_k} \right\|^2 = \int \left| \sum_{k=1}^n c_k I_{B_k} (x) \right|^2 m (dx) =$$
$$= \int \sum_{k=1}^n | c_k |^2 L_{B_k} (x)\, m (dx) = \sum | c_k |^2 m (B_k),$$
$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \mu (B_k) \right\|_{L_2(\Omega, P)} = M \left| \sum_{k=1}^n c_k \mu (B_k) \right|^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_k \bar{c}_l m (B_k \cap B_l) = \sum_{k=1}^n | c_k |^2 m (B_k).$$

Отже, оператор $\mathcal{I}$ лінійно і ізометрично відображає L^0 на $H_0(\mu)$. Такий оператор однозначно поширюється на замикання множини L_0 в $L_2(m)$, але це замикання є $L_2(m)$, бо за умовою на $\mathcal{B}_0$ L_0 щільне в $L_2(m)$. Так само $H_0(\mu)$ щільне в $H_2(\mu)$. Отже, $\mathcal{I}$ однозначно визначений в $L_2(m)$, відображає $L_2(m)$ лінійно та ізометрично в $H_2(\mu)$. Теорему доведено.

Означення. Будемо називати $\mathcal{I}(f)$ стохастичним інтегралом від функції f за мірою з ортогональними значеннями μ і позначати $\mathcal{I}(f) = \int f(x)\mu(dx) = \int f d\mu$.

За побудовою

$$M \int f d\mu \overline{\int g d\mu} = \int f\bar{g} dm, \quad f, \ g \in L_2(m). \tag{4}$$

Гауссівські випадкові міри. Комплекснозначна випадкова величина $\xi + i\eta$ називається гауссівською, якщо ξ та η — незалежні гауссівські величини, для яких $D\xi = D\eta$.

Можна перевірити, що для $z \in \mathbb{C}$ $z\zeta$ є комплексна гауссівська випадкова величина, якщо такою буде ζ. Якщо $\zeta_n \to \zeta$ і ζ_n є комплексні гауссівські величини, то ζ теж така.

Сукупність $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ комплекснозначних величин має сукупний комплексний гауссівський розподіл (є комплексна гауссівська сукупність), якщо $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\xi_k$ має комплексний гауссівський розподіл, які б не були $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. $\mu(B)$ є комплекснозначна гауссівська міра, якщо для кожного n та $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ $\{\mu(B_k), k = \overline{1, n}\}$ є комплексна гауссівська сукупність.

За побудовою стохастичного інтеграла $\int f_1 d\mu, \int f_2 d\mu, \ldots, \int f_n d\mu$ є комплексна гауссівська сукупність, які б не були $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L_2(m)$.

Зауваження. Нехай $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — комплексна гауссівська сукупність. Для того щоб величини $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ були незалежними, необхідно і достатньо, щоб $M\zeta_k\bar{\zeta_j} = M\zeta_k M\bar{\zeta_j}$ для $k \neq j$. Дійсно, нехай $\zeta_k = \zeta_k + i\eta_k$, $c_k = a_k + ib_k$. Можна вважати, що $M\zeta_k = 0$. Тоді

$$M \left| \sum_{k=1}^{n} c_k\zeta_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 M |\zeta_k|^2, \tag{5}$$

але

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\zeta_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k\xi_k - b_k\eta_k) + i \sum_{k=1}^{n} (a_k\eta_k + b_k\xi_k),$$

тому

$$M \left| \sum_{k=1}^{n} (a_k\xi_k - b_k\eta_k) \right|^2 + M \left| \sum (a_k\eta_k + b_k\xi) \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) M (\xi_k^2 + \eta^2).$$

Враховуючи, що $M\xi_k^2 = M\eta_k^2$, знайдемо $M\xi_k\eta_j = 0$, $M\xi_k\xi_j = 0$, $M\eta_k\eta_j = 0$, $k \neq j$.

Інтегральні зображення випадкових функцій. Нехай $(\Theta, \mathfrak{S})$ — деякий вимірний простір. Розглянемо функцію $K(\theta, x)$ з $\Theta \times X$ в C, яка вимірна відносно $\mathfrak{S} \times \mathcal{B}$. Функція

$$\eta(\theta) = \int K(\theta, x)\,\mu(dx), \tag{6}$$

яка визначена, якщо для всіх $\theta \in \Theta$ $K(\theta, \cdot) \in L_2(m)$, задана своїм інтегральним зображенням за допомогою стохастичного інтеграла. Це буде функція із значеннями в $L_2(\Omega, P)$. Зауважимо, що $\alpha(B) = M\mu(B)$ є комплекснозначна адитивна функція множини, більш того, це функція обмеженої варіації. Дійсно, нехай $B_1, \ldots, B_n$ такі, що $B_i \cap B_j = \varnothing$, коли $i \neq j$. Тоді для $\theta_k = \alpha(B_k)/|\alpha(B_k)|$

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha(B_k)| = M \sum_{k=1}^{n} \theta_k \mu(B_k) \leqslant \sqrt{M \left| \sum_{k=1}^{n} \theta_k \mu(B_k) \right|^2} = \left(m \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k \right) \right)^{1/2},$$

бо $|\theta_k| = 1$. Легко перевірити, що

$$a_\eta(\theta) = M\eta(\theta) = \int K(\theta, x)\,\alpha(dx),$$

$$R_\eta(\theta_1, \theta_2) = \int K(\theta_1, x)\,\overline{K(\theta_2, x)}\,m(dx), \tag{7}$$

де R_η — кореляційна функція $\eta(\theta)$.

Дійсна гауссівська міра. Нехай кожному $B \in \mathcal{B}$ відповідає дійсна випадкова величина $\mu(B)$, що має гауссівський розподіл, $M\mu(B) = 0$, $D\mu(B) = m(B)$, $m(B)$ — міра на B для $B_1, \ldots, B_n$, для яких $B_k \cap B_l = \varnothing$, при $k \neq l$ величини $\mu(B_1), \ldots, \mu(B_n)$ незалежні. Формула (6) дає зображення деякої гауссівської випадкової функції, для якої $M\eta(\theta) = 0$,

$$R_\eta(\theta_1, \theta_2) = \int K(\theta_1, x)\,K(\theta_2, x)\,m(dx). \tag{8}$$

Інтеграл за вінерівським процесом. Нехай $w(t)$ — вінерівський процес на R_+. Розглянемо спочатку деякий обмежений відрізок $[0, T]$ і побудуємо $\int_0^T f(t)\,dw(t)$ для будь-якої вимірної функції f, для якої $\int_0^T f^2(t)\,dt < \infty$.

Нехай $\mathcal{B}[0, T]$ — σ-алгебра борелівських підмножин $[0, T]$, $\mathcal{B}_0$ — алгебра, що породжується інтервалами вигляду $[\alpha, \beta)$, де $0 \leqslant \alpha < \beta < T$, та $[\alpha, T]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant T$. Як і раніше, L_0 — сукупність простих $\mathcal{B}_0$-вимірних скінченнозначних функцій. На $\mathcal{B}_0$ визначимо випадкову міру $\mu_w(B)$, для якої $\mu_w([\alpha, \beta)) = w(\beta) - w(\alpha)$. Якщо

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k) \cup [\alpha_{n+1}, T],$$

$$0 \leqslant \alpha < \beta_1 \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant T,$$

то

$$\mu_w(B) = \sum_{k=1}^{n} [w(\beta_k) - w(\alpha_k)] + w(T) - w(\alpha_{n+1}).$$

Оскільки процес $w(t)$ має незалежні прирости, то

$$M\mu_w^2(B) = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) + T - \alpha_{n+1} = m_L(B),$$

де m_L є міра Лебега на прямій. Знову ж таки з незалежності приростів виводимо, що величини $\mu_w(B_1), \ldots, \mu_w(B_n)$ незалежні, якщо $B_k \cap B_l = \varnothing$, коли $k \neq l$. Звідси $M\mu_m(B_2)\mu_w(B_2) = 0$, якщо $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Ми маємо дійсну гауссівську міру з ортогональними значеннями на $\mathscr{B}_0$. Оскільки $m_L(B)$ поширюється на $\mathscr{B}[0, T]$, то μ_w також може бути поширена на $\mathscr{B}_{[0,T]}$. Інтеграл $\int f(t)\mu_w(dt)$ існує, якщо

$$\int f^2(t)\, m_L(dt) = \int f^2(t)\, dt < \infty.$$

Цей інтеграл позначається $\int\limits_0^T f(t)\, dw(t)$.

Нехай $f(t)$ визначено на R_+, $\int\limits_0^T f(t)\, dw(t)$ — для всіх $T > 0$. Якщо існує границя

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T f(t)\, dw(t),$$

то будемо позначати її $\int\limits_0^\infty f(t)\, dw(t)$. Оскільки для $T < T_1$

$$M\left(\int\limits_0^T f dw(t) - \int\limits_0^{T_1} f(t)\, dw(t)\right)^2 = \int\limits_T^{T_1} f^2(t)\, dt,$$

то інтеграл $\int\limits_0^\infty f(t)\, dw(t)$ існує, якщо $\int\limits_0^\infty f^2(t)\, dt < \infty$.

Інтеграл за процесом з ортогональними приростами. Розглянемо процес $\zeta(\lambda)$, $\lambda \in R$ із значеннями в $\mathbb{C}$. Це процес з ортогональними приростами, якщо для $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ $M[\zeta(\lambda_3) - \zeta(\lambda_2)]\overline{\zeta}(\lambda_1) = 0$. Позначимо $M|\zeta(\lambda)|^2 = \mathscr{F}(\lambda)$. Для $\lambda_1 < \lambda_2$

$$\zeta(\lambda_2) = (\zeta(\lambda_2) - \zeta(\lambda_1)) + \zeta(\lambda_1),$$

$$M|\zeta(\lambda_2)|^2 = M|\zeta(\lambda_2) - \zeta(\lambda_1)|^2 + M|\zeta(\lambda_1)|^2,$$

тому функція $\mathscr{F}(\lambda)$ зростає. Далі, для $\lambda_1 < \lambda_2$

$$M\zeta(\lambda_2)\overline{\zeta(\lambda_1)} = M|\zeta(\lambda_1)|^2 = \mathscr{F}(\lambda_1),$$

існує $\lim\limits_{\lambda_1\to-\infty,\lambda_2\to-\infty} M\zeta(\lambda_2)\overline{\zeta(\lambda_1)}$. Отже, на основі леми з попередньої лекції існує $\zeta(-\infty) = \lim\limits_{\lambda\to-\infty}\zeta(\lambda)$. Будемо вважати, що $\zeta(-\infty) = 0$. Припустимо, що $\mathscr{F}(\lambda)$ неперервна справа, $\mathscr{F}(\lambda+) = \mathscr{F}(\lambda)$, $\sup\limits_\lambda \mathscr{F}(\lambda) < \infty$. Тоді існує $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\mathscr{F}(\lambda) = \mathscr{F}(+\infty)$ і тому існує $\zeta(+\infty) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\zeta(\lambda)$. На інтервалі $(\alpha, \beta]$ візьмемо $\mu_\zeta((\alpha, \beta]) =$

$= \zeta(\beta) - \zeta(\alpha)$. Використовуючи ортогональність приростів процесу $\zeta(\lambda)$ так само, як для вінерівського процесу, можемо побудувати міру μ_ζ на алгебрі $\mathcal{B}_0$, породженій інтервалами $(-\infty, \beta]$. Вона буде мати ортогональні прирости і

$$M|\mu_\zeta(B)|^2 = m_{\mathcal{F}}(B),$$

де міра $m_{\mathcal{F}}$ визначається рівністю $m_{\mathcal{F}}((\alpha, \beta]) = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha)$. Тоді $\int f(\lambda) m_{\mathcal{F}}(d\lambda) = \int f(\lambda) d\mathcal{F}(\lambda)$. Міра $\mu_\zeta(B)$ поширюється на σ-алгебру $\mathcal{B}$ всіх борелівських підмножин R. Інтеграл $\int f d\zeta$ визначаємо як

$$\int f(\lambda) d\zeta(\lambda) = \int f(\lambda) \mu_\zeta(d\lambda),$$

він існує для тих $f(\lambda)$, для яких $\int |f(\lambda)|^2 d\mathcal{F}(\lambda) < \infty$,

$$M \int f(\lambda) d\zeta(\lambda) \overline{\int g(\lambda) d\zeta(\lambda)} = \int f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d\mathcal{F}(\lambda).$$

16. СТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ, ЇХ СПЕКТРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ

Комплекснозначний процес $\xi(t)$ на R (або R_+, Z, Z_+) називається стаціонарним (у широкому розумінні), якщо виконуються умови $M\xi(t) = \text{const}$, $M\xi(t)\overline{\xi(s)} - M\xi(t)M\overline{\xi(s)} = R(t-s)$.

Найпростішим прикладом стаціонарного процесу є випадкове гармонійне коливання. Взагалі гармонійне коливання задається рівномірним рухом по колу у фазовій площині. Якщо амплітуда коливання A, кругова частота λ, початкова фаза φ, то таке коливання описується функцією $y(t) = A \exp\{i(\lambda t + \varphi)\}$. Якщо позначити $Ae^{i\varphi} = A_1$, то $y(t) = A_1 e^{i\lambda t}$, A_1 називається комплексною амплітудою. Гармонійне коливання випадкове, коли випадковою є амплітуда A_1. *Справа у тому, що джерела гармонійних коливань, як правило*, можуть давати коливання лише певних частот (власні частоти). Амплітуди залежать від «початкових умов», які міняються випадково. Отже, найпростіший стаціонарний процес має вигляд

$$\xi(t) = \zeta e^{i\lambda t},$$

де $M\zeta = 0$, $M|\zeta|^2 < 0$. Тоді $M\xi(t) = 0$,

$$M\xi(t)\overline{\xi(s)} = M|\zeta|^2 e^{i\lambda(t-s)} = R(t-s).$$

Суперпозиція гармонійних коливань. Розглянемо тепер процес, що зображається сумою таких найпростіших. Нехай $\zeta_1 \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ — комплекснозначні випадкові величини, $M\zeta_k = 0$, $M\zeta_k^2 = a_k$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$. Зауважимо, що енергія гармонійного коливання пропорціональна квадрату амплітуди, або квадрату модуля комплексної амплітуди. Тому для коливання

$$\xi_k(t) = \zeta_k e^{i\lambda_k t},$$

$a_k = M|\zeta_k|^2$ є середнє значення енергії.

Розглянемо процес

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e^{i\lambda_k t}. \tag{1}$$

Тоді $M\xi(t) = 0$,

$$M\xi(t)\overline{\xi(s)} = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k(t-s)} + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k\neq l}}^{n} M\zeta_k\bar{\zeta}_l e^{i\lambda_k t - i\lambda_l s}.$$

Якщо величини ζ_k некорельовані, тобто $M\zeta_k\bar{\zeta}_l = 0$ для $k \neq l$, то

$$R(t-s) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k(t-s)}. \tag{2}$$

Припущення про некорельованість коливань з різними частотами цілком природне: вони породжуються різними джерелами і тому їх комплексні амплітуди можуть бути незалежними. Це можна пояснити ще так. Якщо $\zeta_k = |\zeta_k| e^{i\varphi_k}$, то φ_k, як правило, рівномірно розподілена на $[0, 2\pi]$ і не залежить від $|\zeta_k|$. Це буде, наприклад, тоді, коли ζ_k має нормальний розподіл. ζ_k та ζ_l будуть некорельованими, якщо φ_k, φ_l незалежні рівномірно розподілені і не залежать від $|\zeta_k|$ та $|\zeta_l|$. Нехай $\mathcal{F}(\lambda) = \Sigma a_k I_{\{\lambda_k \leq \lambda\}}$. Тоді з (1) випливає

$$R(t) = \int e^{i\lambda t} d\mathcal{F}(\lambda). \tag{3}$$

Функція $\mathcal{F}(\lambda)$ називається спектральною процесу $\xi(t)$, що визначається формулою (1). Вона характеризує енергетичний спектр $\xi(t)$: $\mathcal{F}(\lambda)$ має стрибки у точках, які є частотами гармонійних коливань, що складають $\xi(t)$. Якщо λ_k — одна з таких точок, то величина стрибка $\mathcal{F}(\lambda_k) - \mathcal{F}(\lambda_k^-)$ є середнє значення енергії коливання з частотою λ_k.

Розглянемо тепер довільний стаціонарний процес $\xi(t)$, що задовольняє умови неперервності в $L_2(\Omega, P)$. Це буде тоді і лише тоді, коли кореляційна функція процесу $R(t)$ неперервна. Зауважимо, що вона додатно визначена: які б не були комплексні $z_1, \ldots, z_n$ та $t_1, \ldots, t_n \in R$,

$$\sum_{k,l=1}^{n} R(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geq 0. \tag{4}$$

З теореми Бохнера можемо вивести, що функція $R(t)$ може бути зображена правою частиною формули (3), де $\mathcal{F}(\lambda)$ — неспадна, неперервна справа функція, для якої $\mathcal{F}(-\infty) = 0$, $\mathcal{F}(+\infty) = \lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{F}(\lambda) < < \infty$. Ця функція називається спектральною функцією процесу $\xi(t)$. Але вона може бути довільною, аби виконувались умови неперервності справа, монотонності та обмеженості (умови $\mathcal{F}(-\infty) = 0$ можна досягти за допомогою адитивної константи, яка не впливає на вигляд формули (3)). Будь-яка функція $R(t)$, що має вигляд (3), задовольняє (4), тому $R(t-s)$ є кореляційна функція деякого процесу в $L_2(\Omega, P)$. Отже, спектральною функцією може бути будь-яка, що задовольняє вказані вище умови. Основний результат, який ми встановимо, полягатиме у тому, що відповідно до зображення кореляційної функції за формулою (3) існує і зображення самого процесу $\xi(t)$ у вигляді «континуальної» суми некорельованих гармонійних коливань. Запишемо формулу (1) в інтегральній формі. Нехай $\zeta(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k I_{\{\lambda_k \le \lambda\}}$. Оскільки ζ_k ортогональні, то $\zeta(t)$ має ортогональні прирости. Формулу (1) перепишемо так:

$$\xi(t) = \int e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda). \tag{5}$$

Оскільки

$$M|\zeta(\lambda') - \zeta(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda' < \lambda_k \le \lambda} M|\zeta_k|^2 = \mathcal{F}(\lambda) - \mathcal{F}(\lambda'),$$

то

$$M\xi(t)\overline{\xi(s)} = \int e^{i\lambda t} e^{-i\lambda s} d\mathcal{F}(\lambda).$$

Тобто формула (3) є наслідок формули (5). Легко обчислити, що процес $\xi(t)$, який зображується формулою (5), де $\zeta(\lambda)$ — процес з ортогональними приростами такий, що

$$M|\zeta(\lambda) - \zeta(\lambda')|^2 = \mathcal{F}(\lambda) - \mathcal{F}(\lambda'), \tag{6}$$

має кореляційну функцію $R(t)$, що зображується формулою (3).

Теорема 1. Нехай $\xi(t)$ — с. к. неперервний стаціонарний процес із значеннями в $L_2(\Omega, P)$, $M\xi(t) = 0$, кореляційна функція $R(t)$ процесу зображується формулою (3). Позначимо $H_2^\xi \subset L_2(\Omega, P)$ лінійний підпростір, що породжується величинами $\{\xi(t), \ t \in R\}$. Існує процес $\zeta(\lambda)$, $\lambda \in R$ із значеннями в H_2^ξ такий, що виконані умови: 1) $\zeta(\lambda)$ — процес з ортогональними приростами, 2) для $\lambda' < \lambda$ буде $M|\zeta(\lambda) - \zeta(\lambda')|^2 = \mathcal{F}(\lambda) - \mathcal{F}(\lambda')$, 3) вірна формула (5).

Доведення. Побудуємо деяке відображення $L_2(\mathcal{F})$ — гільбертового простору комплекснозначних вимірних функцій $f(\lambda)$ $R \to \mathbb{C}$, для яких $\|f\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\mathcal{F}(\lambda) < \infty$, а скалярний добуток $\langle f, g\rangle_{\mathcal{F}} = \int f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\, d\mathcal{F}(\lambda)$ на H_2^ξ. Нехай функції $e^{i\lambda t}$ (її аргумент λ, t — фіксоване) відповідає величина $\xi(t)$. Позначивши це відображення Φ, матимемо $\Phi(e^{i\lambda t}) = \xi(t)$. Далі, $\Phi(\Sigma c e^{i\lambda t_k}) = \Sigma c_k \xi(t_k)$. Зауважимо, що це ізометричне відображення:

$$\int |\sum c_k e^{i\lambda t_k}|^2 d\mathcal{F}(\lambda) = \int \sum_{k,l} c_k \bar{c}_l e^{i\lambda(t_k - t_l)} d\mathcal{F}(\lambda) = \sum_{k,l} c_k \bar{c}_l R(t_k - t_l) =$$

$$= \sum_{k,l} c_k \bar{c}_l M\xi(t_k)\overline{\xi(t_l)} = M\left|\sum_k c_k \xi(t_k)\right|^2.$$

Оскільки тригонометричні многочлени $\Sigma c_k e^{i\lambda t_k}$ щільні в $L_2(\mathcal{F})$, то ізометрія Φ може бути поширена на все $L_2(\mathcal{F})$. Образ $\Phi(L_2(\mathcal{F}))$ містить усі лінійні комбінації $\Sigma c_k \xi(t_k)$, а тому (він замкнений) і все H_2^ξ. Тому існує Φ^{-1}, воно ізометрично відображає $L_2(\mathcal{F})$ на H_2^ξ. Нехай для $\lambda_0 \in R$ $\zeta(\lambda_0) = \Phi(I_{\{\lambda < \lambda_0\}})$. Це випадкова величина з H_2^ξ.

Процес $\zeta(\lambda_0)$, $\lambda_0 \in R$ має ортогональні прирости: для $\lambda_0 \leqslant \lambda_0' < \lambda_0''$

$$M[\zeta(\lambda_0'') - \zeta(\lambda_0')]\overline{\zeta(\lambda_0)} = \int [I_{\{\lambda \leqslant \lambda_0''\}} - I_{\{\lambda \leqslant \lambda_0'\}}] I_{\{\lambda \leqslant \lambda_0\}} d\mathcal{F}(\lambda) = 0,$$

бо добуток під інтегралом є нуль. Крім того,

$$M|\zeta(\lambda_0'') - \zeta(\lambda_0')|^2 = \int [I_{\{\lambda \leqslant \lambda_0''\}} - I_{\{\lambda \leqslant \lambda_0'\}}] d\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda_0'') - \mathcal{F}(\lambda_0').$$

Таким чином, $\zeta(\lambda)$ задовольняє умови 1) та 2) теореми. Далі,

$$\zeta(\lambda_0) = \int I_{\{\lambda \leqslant \lambda_0\}} d\zeta(\lambda) = \Phi(I_{\{\lambda \leqslant \lambda_0\}}).$$

Використовуючи лінійність Φ, дістанемо

$$\Phi(\sum c_k I_{(-\infty,\lambda_k]}) = \int \sum c_k I_{(-\infty;\lambda_k]}(\lambda)\, d\zeta(\lambda).$$

Якщо L_0 — простір простих функцій вигляду $\Sigma c_k I_{(-\infty;\lambda_k]}$, то для $g \in L^0$

$$\Phi(g(\cdot)) = \int g(\lambda)\, d\zeta(\lambda). \tag{7}$$

Враховуючи ізометричність Φ і те, що L^0 щільне в $L_2(\mathcal{F})$, переконуємось у тому, що (7) вірне для всіх $g \in L_2(\mathcal{F})$. Підставимо сюди замість g функцію $g_t(\lambda) = e^{i\lambda t}$, тоді дістанемо (3).

Зауваження 1. Розглянемо стаціонарну послідовність ξ_n. Нехай $M\xi_n = 0$, $M\xi_n\xi_m = r_{n-m}$. Теорема Бохнера дає таке зображення послідовності r_n:

$$r_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} d\mathcal{F}(\lambda). \tag{8}$$

$\mathcal{F}(\lambda)$ теж називається спектральною функцією послідовності. Виходячи з цього зображення, можемо так само, як в теоремі, встановити існування такого процесу $\zeta(\lambda)$ з ортогональними приростами на $[-\pi, \pi]$, що

$$M|\zeta(\beta) - \zeta(\alpha)|^2 = \mathcal{F}(\beta) - \mathcal{F}(\alpha), \quad \text{де } -\pi \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi,$$

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} d\zeta(\lambda). \tag{9}$$

Диференціальні оператори від стаціонарних процесів. Припустимо, $\xi(t)$ — стаціонарний процес, для якого існує $\xi'(t)$. Тоді величина

$$\frac{1}{h^2} M|\xi(h) - \xi(0)|^2 = \frac{1}{h^2}[2R(0) - R(h) - R(-h)]$$

обмежена, коли $h \to 0$, отже,

$$\infty > \overline{\lim_{h\to 0}} \int \frac{2 - e^{i\lambda h} - e^{-i\lambda h}}{h^2}\, d\mathcal{F}(\lambda) =$$

$$= \overline{\lim_{h\to 0}} \int \frac{4}{h^2} \sin^2\frac{\lambda h}{2}\, d\mathcal{F}(\lambda) \geqslant \int \lambda^2 d\mathcal{F}(\lambda).$$

Тому існує

$$\int i\lambda e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda) = \lim_{h\to\infty} \int \frac{e^{i\lambda(t+h)} - e^{i\lambda t}}{h} d\zeta(\lambda) = \lim_{h\to\infty} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} = \xi'(t)$$

Таким чином, для $\xi'(t)$ маємо таке спектральне зображення

$$\xi'(t) = \int e^{i\lambda t} (i\lambda)\, d\zeta(\lambda). \tag{10}$$

Це є просто результат диференціювання по t формули (3). Аналогічно з існування $\xi''(t)$ випливає існування $\int \lambda^4 d\mathcal{F}(\lambda) < \infty$ і спектральне зображення

$$\xi''(t) = \int e^{i\lambda t} (i\lambda)^2\, d\zeta(\lambda). \tag{11}$$

Взагалі, формулу (3) (праву частину під знаком інтеграла) можна диференціювати по t стільки разів, скільки у $\xi(t)$ існує похідних, або доти, поки праворуч інтеграл збігається. Сформулюємо цей результат у вигляді теореми.

Теорема 2. Нехай $\xi(t)$ має спектральне зображення (3). Для існування $\xi^{(n)}(t)$ необхідно і достатньо, щоб $\int \lambda^{2n} d\mathcal{F}(\lambda) < \infty$. У цьому випадку вірна формула

$$\xi^{(n)}(t) = \int e^{i\lambda t} (i\lambda)^n\, d\zeta(\lambda). \tag{12}$$

Зауваження 2. З формули (12) випливає, що $\xi^{(n)}(t)$ є с. к. неперервний процес, якщо тільки похідна існує, а для її існування досить, щоб вона існувала хоча б в одній точці.

Розглянемо диференціальний оператор $P\left(\frac{d}{dt}\right)$, де $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами. Якщо $\xi(t)$ має похідні до порядку n включно, то

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^{(k)}(t) = \int e^{i\lambda t} P(i\lambda)\, d\zeta(t). \tag{13}$$

Формулу (13) можна використати для розв'язання диференціального рівняння.

Нехай $\eta(t)$ — стаціонарний процес, який має спектральне зображення

$$\eta(t) = \int e^{i\lambda t} d\zeta_\eta(t), \tag{14}$$

а $P(z)$ — многочлен, що не має нулів на уявній осі. Розглянемо диференціальне рівняння

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = \eta(t). \tag{15}$$

Будемо шукати такий стаціонарний процес $\xi(t)$, який є розв'язком (15). Тоді з (13) випливає, що одним з розв'язків буде процес

$$\xi(t) = \int e^{i\lambda t} (P(i\lambda))^{-1}\, d\zeta_\eta(\lambda). \tag{16}$$

Інші розв'язки повинні відрізнятись на розв'язок однорідного рівняння $P\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) = 0$. Але можна побачити, що будь-який такий розв'язок необмежений (при наших припущеннях відносно нулів $P(z)$), тому $\xi(t) + y(t)$ може бути стаціонарним лише у випадку $y(t) = 0$.

Зауважимо, що з (16) випливає таке спектральне зображення $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \int e^{i\lambda t} d\zeta_{\xi}(\lambda);$$

$$\zeta_{\xi}(\lambda_0) = \int (P(i\lambda))^{-1} I_{\{\lambda \leq \lambda_0\}} d\zeta_{\eta}(\lambda). \qquad (17)$$

Це теж процес з ортогональними приростами.

Інтегральні перетворення. Нехай $\xi(t)$ — стаціонарний процес, що має спектральне зображення (3),

$$\eta(t) = \int K(t-s)\,\xi(s)\,ds, \qquad (18)$$

де $K(t)$ — комплекснозначна функція, інтегровна за Ріманом на кожному скінченному проміжку, і $\int |K(t)|\,dt < \infty$. Тоді

$$\eta(t) = \int \tilde{K}(\lambda)\,e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda), \qquad (19)$$

де $\tilde{K}(\lambda) = \int e^{-i\lambda s} K(s)\,ds$. (19) дістанемо, якщо у формулу (18) підставимо (3).

З формули (19) виводимо таку формулу для спектральної функції $\mathcal{F}_{\eta}(\lambda)$ процесу $\eta(t)$:

$$\mathcal{F}_{\eta}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} |\tilde{K}(u)|^2\,d\mathcal{F}(u). \qquad (20)$$

Спектральна щільність. Припустимо, $\mathcal{F}(\lambda)$ — абсолютно неперервна, $f(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\mathcal{F}(\lambda)$. Ця функція називається спектральною щільністю процесу $\xi(t)$. З формули (20) випливає, що тоді існує і спектральна щільність $f_{\eta}(\lambda)$ процесу $\eta(t)$,

$$f_{\eta}(\lambda) = |\tilde{K}(\lambda)|^2 f(\lambda).$$

Множник $|\tilde{K}(\lambda)|^2$ може збільшувати (посилювати) енергію на певних частотах, зменшувати (або навіть перетворювати в нуль) енергію на інших частотах. Тому перетворення (18) називається фільтром.

17. СТАЦІОНАРНІ ПОСЛІДОВНОСТІ. РЕГУЛЯРНІСТЬ ТА СИНГУЛЯРНІСТЬ

Розглянемо комплекснозначну стаціонарну послідовність $\{\xi_n, n \in Z\}$, $M\xi_n = 0$, $M\xi_n\bar{\xi}_m = r_{n-m}$. Для всіх $k \in Z$ позначимо H_k гільбертів підпростір $L_2(\Omega, P)$, який породжується величинами $\{\xi_i, i \leqslant k\}$. Нехай H — гільбертів простір, що породжується $\{\xi_k, k \in Z\}$,

$H_k \subset H$, $H_{k-1} \subset H_k \ \forall\, k$. Розглянемо лінійне перетворення T, що діє в H за формулою $T\xi_k = \xi_{k+1}$. Це перетворення є ізометрія в $H \subset L_2(\Omega, P)$: для будь-якого $\eta \in H$, що має вигляд $\eta = \Sigma c_k \xi_k$, маємо

$$T\eta = \Sigma c_k \xi_{k+1},$$

$$MT\eta\overline{T\eta} = M\Sigma c_k\xi_{k+1}\overline{\Sigma c_l \xi_{l+1}} = \Sigma c_k c_l M\xi_{k+1}\overline{\xi_{l+1}} = \Sigma c_k c_l M \xi_k \bar{\xi}_l = M\eta\bar{\eta}.$$

Крім того, $TH_k = H_{k+1}$. Якщо $H_{k+1} = TH_k = H_k$ для деякого k, то $T^k H_0 = H_0$ для $k \in Z_+$ ($T^{-1}\xi_k = \xi_{k-1}$, це показує, що T^{-1} означений на всьому H і теж ізометричний оператор). Тому $H_0 = H = H_{-\infty} = \bigcap\limits_k H_k$.

Стаціонарний процес називається сингулярним, якщо $H_{-\infty} = H_k = H \ \forall\, k \in Z$.

Процес називається регулярним, якщо $H_{-\infty} = \{0\}$.

Розглянемо регулярні процеси. У цьому випадку для всіх k $H_k \neq H_{k+1}$. Оскільки $H_k \subset H_{k+1}$, то можна побудувати ортогональне доповнення $H_{k+1} \ominus H_k = E_{k+1}$.

Лема. Розмірність E_{k+1} (якщо $H_k \neq H_{k+1}$) дорівнює 1.

Доведення. Нехай P_{k+1} — оператор ортогонального проектування H_{k+1} на H_k. Якщо $\sum\limits_{i \leqslant k+1} c_i \xi_i \in H_{k+1}$, то

$$P_{k+1} \sum_{i \leqslant k+1} c_i \xi_i = \sum_{i \leqslant k} c_i \xi_i + c_{k+1} P_{k+1} \xi_{k+1},$$

тому

$$\sum_{i \leqslant k+1} c_i \xi_i = P_{k+1} \sum_{i \leqslant k+1} c_i \xi_i + c_{k+1}(\xi_{k+1} - P_{k+1}\xi_{k+1}).$$

Якщо ліву частину позначити η, то $\eta = P\eta + c_{k+1}(\xi_{k+1} - P_{k+1}\xi_{k+1})$. Якщо тепер візьмемо такі $\eta \in H_{k+1}$ і $\|\eta_n - \eta\| \to 0$, то $P_{k+1}\eta_n \to P_{k+1}\eta$, $\eta_n - P_{k+1}\eta_n = c^n_{k+1}(\xi_{k+1} - P_{k+1}\xi_{k+1}) \to \eta - P_{k+1}\eta$. Звідси $\eta - P_{k+1}\eta = c(\xi_{k+1} - P_{k+1}\xi_{k+1})$, де c — деяка величина з $\mathbb{C}$. Отже, E_{k+1} — це підпростір величин вигляду $c\varepsilon_{k+1}$, де $\varepsilon_{k+1} = \xi_{k+1} - P_{k+1}\xi_{k+1}$.

Зауваження. Легко встановити, що $T\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1}$. Це можна вивести з ізометрії оператора T і того, що він відображає H_k на H_{k+1}.

Послідовність $\varepsilon_n = T^n \varepsilon_0$, $n \in Z$ ортогональна, бо $\varepsilon_m \in H_m$, а $\varepsilon_n \perp H_{n-1}$, тому $\varepsilon_n \perp \varepsilon_m$, коли $m < n$. Більш того, $\{\varepsilon_n, n \in Z\}$ є базис в H. Покажемо це. Якщо η ортогональне ε_n, $n > k$, то $\eta \in H_k$. Тому η, яке ортогональне усім ε_k, належить $\bigcap H_k = H_{-\infty} = \{0\}$, $\eta = 0$. Звідси і випливає це твердження. Якщо

$$\xi_0 = \sum_{k \leqslant 0} c_k \varepsilon_k$$

(оскільки $\{\varepsilon_k\}$ — базис, то такий розклад існує), то для всіх n

$$\xi_n = \sum_{k \leqslant 0} c_k \varepsilon_{k+n} = \sum_m c_{m-n} \varepsilon_m, \tag{1}$$

де $c_k = 0$ для $k > 0$. Формула (1) дає зображення регулярної стаціонарної послідовності у вигляді формули «ковзаючого» підсумовування.

Розглянемо спектральну функцію регулярної стаціонарної послідовності. Використовуючи формулу (1), можемо записати

$$r_{n-m} = M\xi_n\bar{\xi}_m = M \sum_k c_{k-n}\varepsilon_k \sum_l \overline{c_{l-m}\varepsilon_l} = M\,|\,\varepsilon_0|^2 \sum_k c_{k-n}\overline{c_{k-m}} =$$

$$= \frac{M\,|\,\varepsilon_0\,|^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(n-m)}\,|\sum c_k e^{-i\lambda k}\,|^2\,d\lambda.$$

Таким чином, існує спектральна щільність $f(\lambda)$, що може бути зображена формулою

$$f(\lambda) = \left|\sum_{k\leqslant 0} c_k e^{-i\lambda k}\right|^2 \frac{M\,|\,\varepsilon_0\,|^2}{2\pi}. \tag{2}$$

Розклад процесу на сингулярну та регулярну компоненти. Розглянемо загальний випадок: $H_k \neq H_{k+1}$, але $\bigcap_k H_k = H_{-\infty}$ — нетривіальний підпростір H. Знову візьмемо $\varepsilon_{k+1} = \xi_{k+1} - P_k\xi_{k+1}$, де P_k — оператор проектування на H_k. Якщо H^1 — лінійний підпростір, що породжений $\{\varepsilon_k,\ k \in Z\}$, то $H = H_{-\infty} \oplus H^1$ (це ортогональна сума). Простір $H_{-\infty}$ інваріантний для перетворення T, так само як і простір H^1. Нехай $P_{-\infty}$ — оператор проектування на $H_{-\infty}$, $P_{-\infty}\xi_k = \xi_k''$, $\xi_k' = \xi_k - \xi_k''$. Якщо $\xi_0' = \sum_{k\leqslant 0} c_k\varepsilon_k$, то $T^n\xi_0' = \xi_n' = \sum_{k\leqslant 0} c_k\varepsilon_{k+n}$. Тому ξ_n' є стаціонарна послідовність. Так само стаціонарною буде $\xi_n'' = T^n\xi_0'' = \xi_n - \sum_{k\leqslant 0} c_k\varepsilon_{k+n}$. За побудовою $\xi_n'' \in H_{-\infty}$, $\xi_n' \in H^1$. Тому послідовності $\{\xi_n'\}$ та $\{\xi_n''\}$ некорельовані: $M\xi_n'\overline{\xi_m''} = 0$ $\forall\, n, m$. Оскільки $M\xi_n'\overline{\xi_m'} = MT^n\xi_0'\overline{T^m\xi_0'} = MT^{n-m}\xi_0'\overline{\xi_0'}$ (ми використали те, що T та T^{-1} є ізометричні відображення), то $\{\xi_n'\}$ — стаціонарна послідовність. Так само встановлюємо, що й $\{\xi_n''\}$ — стаціонарна послідовність.

Доведемо, що $\{\xi_n'\}$ — регулярна послідовність. Позначимо через H_n' підпростір H^1, що породжується величинами $\{\xi_k',\ k \leqslant n\}$, а через $\mathscr{E}_n$ — підпростір, що породжується величинами $\{\varepsilon_k,\ k \leqslant n\}$. Тоді $H_n' \subset \mathscr{E}_n$, а $\bigcap_n \mathscr{E}_n = \{0\}$, бо $\{\varepsilon_k\}$ — ортогональна послідовність, $\bigcup_n \mathscr{E}_n$ містить вектори, що розкладаються по цьому базису, а $\bigcap_n \mathscr{E}_n$ — вектори, ортогональні всім ε_k. Покажемо тепер, що $\{\xi_n''\}$ — сингулярна послідовність. Нехай H_n'' — підпростір, що породжується величинами $\{\xi_k'',\ k \leqslant n\}$. Очевидно, це підпростір $H_{-\infty}$. Оскільки $H_{-\infty} \subset H_n$, то для кожного $\eta \in H_{-\infty}$ та $\varepsilon > 0$ можна вказати такі c_k, $k \leqslant n$, що $M\,|\,\eta - \sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k\,|^2 \leqslant \varepsilon$. Звідси

$$\varepsilon \geqslant M\left|\eta - \sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k'' - \sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k'\right|^2 = M\left|\eta - \sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k''\right|^2 +$$

$$+ M\left|\sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k'\right|^2 \geqslant M\left|\eta - \sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k''\right|^2.$$

Ми скористались тим, що $\eta - \sum_{k<n} c_k\xi_k'' \in H_{-\infty}$, $\sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k' \in H^1$, а також ортогональністю підпросторів $H_{-\infty}$ та H^1. Отже, $\eta \in H_n''$, тобто для всіх n $H_{-\infty} = H_n''$. Це і означає сингулярність послідовності $\{\xi_n''\}$. Таким чином, будь-яка стаціонарна послідовність $\{\xi_n\}$ може бути зображена у вигляді суми $\xi_n = \xi_n' + \xi_n''$, де $\{\xi_n'\}$ та $\{\xi_n''\}$ некорельовані стаціонарні послідовності, перша з них регулярна, а друга — сингулярна.

Припустимо, існує ще один такий розклад $\xi_n = \tilde{\xi}_n' + \tilde{\xi}_n''$, причому $\tilde{\xi}_n'$ та $\tilde{\xi}_n''$ належать H_n. Позначимо $\tilde{H}''$ підпростір, породжений величинами $\{\tilde{\xi}_k'', k \leqslant n\}$, внаслідок сингулярності він не залежить від n. Через $\tilde{H}_n'$ позначимо простір, що породжується $\{\tilde{\xi}_k', k \leqslant n\}$. Оскільки $\tilde{H}'' \subset H_n$ для всіх n, то $\tilde{H}_n'' \subset H_{-\infty}$. Як уже було показано, ортогональне доповнення $\tilde{H}'$ до $\tilde{H}_{n-1}$ має розмірність 1. Якщо ε_n' — той вектор, що породжує $\tilde{H}_n' \ominus \tilde{H}_{n-1}'$, то $\varepsilon_n' \in H_n$ і ε_n' ортогональний до $\tilde{H}''$ и $\tilde{H}_{n-1}'$, отже, і до $\tilde{H}'' \oplus \tilde{H}_{n-1}' \supset H_{n-1}$. А це означає, що $\varepsilon_n' = \lambda\varepsilon_n$, де $\varepsilon_n = H_n \ominus H_{n-1}$. Звідси $\tilde{H}_n' = H_n'$ і тому $\tilde{H}'' = H_n \ominus \tilde{H}_n' = H_n \ominus H_n' = H_{-\infty}$. Отже, $\tilde{\xi}_n'' = P_{-\infty}\xi_n = \xi_n''$, тому і $\xi_n' = \tilde{\xi}_n'$. Ми довели таку теорему.

Теорема 1. Якщо $\{\xi_n\}$ — стаціонарна послідовність, для якої $M\xi_n = 0$, H_n — підпростір в $L_2(\Omega, P)$, що породжується величинами $\{\xi_k, k \leqslant n\}$, то існує і притому єдиний розклад $\xi_n = \xi_n' + \xi_n''$, де $\{\xi_n'\}$ та $\{\xi_n''\}$ — послідовності, що задовольняють умови: а) $\{\xi_n'\}$ та $\{\xi_n''\}$ ортогональні; б) $\{\xi_n'\}$ — регулярна послідовність; в) $\{\xi_n''\}$ — сингулярна послідовність.

Лінійний прогноз. Розглянемо стаціонарну послідовність $\{\xi_n\}$. Сформулюємо задачу: знайти найкраще в середньому квадратичному наближення величини ξ_{n+1} за допомогою лінійних комбінацій $\sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k$. Цю задачу можна сформулювати ще так: за значенням випадкової послідовності $\{\xi_k, k \leqslant n\}$ до даного моменту n знайти з найменшою похибкою її значення в наступний момент $n+1$. Треба вказати, що означає «знайти». Вважаючи, що відомі значення ξ_k для $k \leqslant n$, ми можемо будувати довільні лінійні комбінації $\sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k$ і за допомогою цих лінійних комбінацій наближати ξ_{n+1}. Очевидно, що

$$\inf M\left|\xi_{n+1} - \sum_{k\leqslant n} c_k\xi_k\right|^2 = M\,|\xi_{n+1} - P_n\xi_{n+1}|^2 = M\,|\varepsilon_{n+1}|^2.$$

Тим самим ми встановлюємо два твердження: 1) $M\,|\varepsilon_0|^2$ є квадрат мінімальної похибки, з якою можна лінійними комбінаціями $\{\xi_k, k \leqslant n\}$ наблизити ξ_{n+1}; 2) найкраще таке наближення дає $P_n\xi_{n+1}$. Пошук $P_n\xi_{n+1}$ та $M\,|\varepsilon_0|^2$ — два основні етапи розв'язку задачі про лінійний прогноз. Це задача про те, як за попередніми спостереженнями за стаціонарною послідовністю визначити якомога точніше її майбутні значення. Припустимо, спостерігаються значення $\{\xi_k,\ k \leqslant 0\}$, а треба знайти значення ξ_m, $m > 0$. Найкращим наближенням ξ_m буде $P_0\xi_m$, а $M \mid \xi_m - P_0\xi_m \mid^2$ —найкраща точність прогнозу.

Задача про фільтрацію. Припустимо, що спостерігаються дві стаціонарні послідовності: $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$. Вони називаються стаціонарно пов'язаними, якщо 2×2-матриця

$$\begin{Vmatrix} M\xi_n\bar{\xi}_m & M\xi_n\bar{\eta}_m \\ M\eta_n\bar{\xi}_m & M\eta_n\bar{\eta}_m \end{Vmatrix}$$

має елементи, які залежать лише від $n - m$. Спостерігаючи послідовність $\{\eta_n\}$, треба знайти найкраще наближення значень послідовності $\{\xi_n\}$. Ця операція називається *фільтрацією* послідовності $\{\xi_n\}$ з послідовності $\{\eta_n\}$.

Нехай H^η — підпростір в $L_2(\Omega, P)$, що породжується величинами $\{\eta_n,\ n \in Z\}$; P^η — оператор проектування на цей підпростір. Найкраще наближення величини ξ_n за допомогою послідовності $\{\eta_m\} \in P^n\xi_n$ — це фільтрація по всіх значеннях $\{\eta_n\}$. Але в багатьох випадках нам треба знати ξ_n саме в момент n, тому у нашому розпорядженні є тільки спостереження $\{\eta_k,\ k \leqslant n\}$. Якщо H_n^η — підпростір, що породжується цими величинами, а P_n^η — оператор проектування на H_n^η, то найкращий прогноз буде $P_n^\eta\xi_n$.

Досі ми розглядали послідовність з середнім 0. Припустимо, що $M\xi_k = a$. Для визначення a за спостереженнями $\{\xi_k,\ k \in Z\}$ використаємо спектральне зображення стаціонарної послідовності

$$\xi_k = a + \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} d\zeta(\lambda),$$

де $\zeta(\lambda)$ — процес з ортогональними приростами. Нас цікавитиме умова, коли середні значення $\hat{S}_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \xi_k$ збігаються в $L_2(\Omega, P)$ до a;

$$\hat{S}_n = a + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda}{(2n+1)\sin\frac{\lambda}{2}} d\zeta(\lambda). \tag{3}$$

З того, що $\zeta(\lambda)$ має ортогональні прирости, випливає існування границь $\zeta(0-)$ та $\zeta(0+)$. Нехай $\hat{\zeta}(\lambda) = \zeta(\lambda)$, $\lambda < 0$, $\hat{\zeta}(\lambda) = \zeta(\lambda) - \zeta(0+) + \zeta(0-)$, $\lambda > 0$. Згідно з (3)

$$\hat{S}_n = a + \zeta(0+) + \zeta(0-) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda}{(2n+1)\sin\frac{\lambda}{2}} d\hat{\zeta}(\lambda). \tag{4}$$

Зауважимо, що $\hat{\zeta}(\lambda)$ є також процес з ортогональними приростами, для якого функція $M|\hat{\zeta}(\lambda)-\hat{\zeta}(-\pi)|^2 = \hat{\mathcal{F}}(\lambda)$ неперервна в точці нуль

$$M\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda}{(2n+1)\sin\frac{\lambda}{2}}\,d\hat{\zeta}(\lambda)\right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda}{(2n+1)^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}\,d\hat{\mathcal{F}}(\lambda). \quad (5)$$

Цей вираз прямує до нуля, бо підінтегральний вираз є обмежена функція, що прямує до нуля майже для всіх λ за мірою $d\mathcal{F}(\lambda)$ (він не прямує до нуля лише у точці $\lambda = 0$). Отже, ми встановили «слабку» ергодичну теорему.

Теорема 2. Для будь-якої стаціонарної послідовності $\{\xi_n\}$ існує (в $L_2(\Omega, P)$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}\xi_k = a + \zeta(0+) - \zeta(0-). \quad (6)$$

Для того щоб виконувався закон великих чисел, необхідно і достатньо, щоб спектральна функція послідовності $\mathcal{F}(\lambda)$ була неперервна в точці нуль.

Доведення полягає у перевірці рівності $M|\zeta(0+)-\zeta(0-)|^2 = \mathcal{F}(0+) - \mathcal{F}(0-)$.

18. ПРОГНОЗ СТАЦІОНАРНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Розглянемо метод побудови найкращого прогнозу стаціонарної послідовності. Спочатку зупинимось на такій простій задачі: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta$ — деякі випадкові величини з $L_2(\Omega, P)$, треба побудувати найкраще лінійне наближення величини η за допомогою величин $\{\xi_k, k \leqslant n\}$. Якщо $\hat{\eta}$ — таке наближення, $\hat{\eta} = \sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k$, то $\eta - \hat{\eta}$ буде ортогональним до простору, породженого $\xi_1, \ldots, \xi_n$, тому $M(\eta - \hat{\eta})\bar{\xi}_k = 0\ \forall k = 1, \ldots, n$. Отже, для розрахунку коефіцієнтів c_k маємо систему рівнянь

$$\Sigma c_k M\xi_k\bar{\xi}_l = M\eta\bar{\xi}_l, \quad l = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

Якщо $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — лінійно незалежні величини, то матриця $(M\xi_k\bar{\xi}_l)_{k,l=\overline{1,n}}$ буде невироджена, тому система рівнянь (1) матиме єдиний розв'язок. Якщо вона вироджена, то треба вибрати з неї невироджену підсистему (тобто вибрати максимальну лінійну незалежну сукупність величин $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}$) і розв'язувати задачу для неї.

Коли ми переходимо до нескінченної системи випадкових величин, то з'являються проблеми: 1) як можна ефективно зобразити можливі лінійні наближення, 2) як розв'язати нескінченну систему рівнянь: $M\eta\bar{\xi}_k = M\hat{\eta}\xi_k\ \forall k$.

Ми будемо розглядати задачу про прогноз стаціонарної послідовності на 1 крок. Наприклад, будемо шукати $P_0\xi_1 = \hat{\xi}_1$ — найкращу лінійну оцінку величини ξ_1 за величинами $\{\xi_k,\ k \leqslant 0\}$. Зауважимо, що використовуючи спектральне зображення послідовності, можемо записати

$$\sum_{k\leqslant 0} c_k\xi_k = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{k\leqslant 0} c_k e^{i\lambda k}\Big)\, d\zeta(\lambda). \tag{2}$$

Позначимо через $L_2^-(\mathcal{F})$ підпростір $L_2(\mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ — спектральна функція послідовності), який породжується функціями $\{e^{i\lambda k},\ k \leqslant 0\}$. Тоді для $g \in L_2^-(\mathcal{F})$ величина

$$\eta = \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, d\zeta(\lambda) \tag{3}$$

є границя величин

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k\leqslant 0} c_k^{(n)} e^{i\lambda k} d\zeta(\lambda) = \sum_{k\leqslant 0} c_k^{(n)}\xi_k, \tag{4}$$

де $\int_{-\pi}^{\pi} \Big| g(\lambda) - \sum_{k\leqslant 0} c_k^{(n)} e^{i\lambda k}\Big|^2 d\mathcal{F}(\lambda) \to 0$. Тому сукупність величин (3), де $g \in L_2^-(\mathcal{F})$, і утворює H_0. Для того щоб $\eta = \hat{\xi}_1$, необхідно і достатньо, щоб

$$M(\xi_1 - \hat{\xi}_1)\bar{\xi}_k = 0, \quad k = 0.$$

Припустимо,

$$\hat{\xi}_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{g}(\lambda)\, d\zeta(\lambda), \quad \hat{g}(\lambda) \in L_2^-(\mathcal{F}).$$

Тоді

$$M \int_{-\pi}^{\pi} [e^{i\lambda} - \hat{g}(\lambda)]\, d\zeta(\lambda)\, \overline{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} d\zeta(\lambda)} = 0, \quad k \leqslant 0$$

або

$$\int_{-\pi}^{\pi} [e^{i\lambda} - \hat{g}(\lambda)]\, e^{-i\lambda k} d\mathcal{F}(\lambda) = 0, \quad k \leqslant 0. \tag{5}$$

Це і є основне рівняння прогнозу (тобто знаходження функції $\hat{g}(\lambda)$). Ми будемо розв'язувати рівняння (5) при деяких додаткових припущеннях відносно $\mathcal{F}(\lambda)$.

А. Припустимо, що $\mathcal{F}(\lambda)$ має спектральну щільність $f(\lambda)$ і для деяких $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ $c_1 \leqslant f(\lambda) \leqslant c_2$.

Лема. Якщо виконане A, то $L_2(\mathcal{F})$ складається з функцій $g(\lambda)$, для яких вірне зображення

$$g(\lambda) = \sum_k c_k e^{i\lambda k}, \quad \sum_k |c_k|^2 < \infty,$$

а $L_2^-(\mathcal{F})$ складається з функцій, для яких вірне зображення

$$g_-(\lambda) = \sum_{k\leqslant 0} c_k e^{i\lambda k}.$$

Доведення. Нехай L_2 — це простір функцій $g(\lambda)$, визначених на $[-\pi, \pi]$, для яких $\|g\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$. Тоді

$$\|g\|_{\mathcal{F}}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda \leqslant c_2 \int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda)|^2 d\lambda \leqslant c_2 \|g\|^2.$$

Так само $\|g\|_{\mathcal{F}}^2 \geqslant c_1 \|g\|^2$. Тому поповнення лінійних комбінацій $\sum c_k e^{ik\lambda}$ та $\sum_{k\leqslant 0} c_k e^{ik\lambda}$ у нормах $\|\cdot\|$ та $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ збігаються. Звідси і випливає доведення леми, бо в $\|\cdot\|$ це будуть функції, що зображаються рядами $\sum c_k e^{i\lambda k}$, де $\sum |c_k|^2 < \infty$, та $\sum_{k\leqslant 0} c_k e^{ik\lambda}$, де $\sum_{k\leqslant 0} |c_k|^2 < \infty$.

Таким чином, функція $\hat{g}(\lambda)$ має вигляд

$$\hat{g}(\lambda) = \sum_{k\leqslant 0} c_k e^{ik\lambda}, \quad \sum_{k\leqslant 0} |c_k|^2 < \infty. \tag{6}$$

Для обчислення коефіцієнтів c_k треба використати рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} [e^{i\lambda} - \hat{g}(\lambda)]\, e^{-i\lambda k} f(\lambda)\, d\lambda = 0, \quad k \leqslant 0. \tag{7}$$

Перепишемо (7) так:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_1(\lambda) f(\lambda)\, e^{-i\lambda(k-1)} d\lambda = 0, \quad k \leqslant 0, \tag{8}$$

де $g_1(\lambda) = 1 - e^{-i\lambda}\hat{g}(\lambda)$. Ця функція теж належить $L_2^-(\mathcal{F})$. Якщо $g_2(\lambda) = g_1(\lambda) f(\lambda)$, то з (8) маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_2(\lambda)\, e^{i\lambda m} d\lambda = 0 \text{ для всіх } m > 0.$$

Це означає, що

$$g_2(\lambda) = \sum_{m\geqslant 0} b_m e^{im\lambda},$$

$$\text{де } \Sigma |b_m|^2 < \infty.$$

Сукупність таких функцій позначимо через L_2^+. Отже, повинно бути

$$f(\lambda) = \frac{g_2(\lambda)}{g_1(\lambda)}, \quad g_2(\lambda) \in L_2^+, \quad g_1(\lambda) \in L_2^- \tag{9}$$

(з леми випливає, що $L_2^-(\mathcal{F}) = L_2^-$ не залежить від $\mathcal{F}$).

Припустимо, що ми дістали зображення $f(\lambda)$ у вигляді (9), де

$$g_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ik\lambda}, \quad g_1(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-ik\lambda}.$$

Тоді для всіх $m > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-ik\lambda}\right) e^{im\lambda} d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} g_2(\lambda)\, e^{im\lambda} d\lambda = 0.$$

Тому для функції $\hat{g}(\lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-i(k-1)\lambda}$ матимемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\lambda} - \hat{g}(\lambda))\, e^{i(m-1)\lambda} d\lambda = 0, \quad m > 0.$$

Це означає, що для $\hat{g}(\lambda)$ виконується (7), крім того, $\hat{g}(\lambda) \in L_2^-$. Таким чином, це буде та функція, яку нам треба знайти.

В. Функція $\ln f(\lambda)$ розкладається в абсолютно збіжний ряд Фур'є

$$\ln f(\lambda) = \sum_{\infty}^{\infty} a_k e^{i\lambda k}, \quad \sum |a_k| < \infty.$$

Т е о р е м а 1. Нехай виконується умова В. Тоді $f(\lambda)$ має зображення (9), де

$$g_1(\lambda) = \exp\left\{-\sum_{k<0} a_k e^{ik\lambda}\right\}, \tag{10}$$

$$g_2(\lambda) = \exp\left\{\sum_{k\geqslant 0} a_k e^{ik\lambda}\right\}. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Встановимо, що $g_1(\lambda) \in L_2^-$, а $g_2(\lambda) \in L_2^+$. Те й друге доводиться однаково. За формулою Тейлора

$$g_1(\lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left(-\sum_{k<0} a_k e^{ik\lambda}\right)^m (m!)^{-1}. \tag{12}$$

Збіжність ряду праворуч випливає з оцінок

$$\left|\sum_{k<0} a_k e^{i\lambda k}\right|^m \leqslant \left(\sum_{k\leqslant 0} |a_k|\right)^m$$

і абсолютної збіжності ряду $(\Sigma\, |a_k| < \infty)$. Легко переконатись, що ряд праворуч в (12), якщо його розписати, підносячи кожну дужку до відповідного степеня, буде абсолютно збіжним. Тому можна зібрати подібні члени і ряд, який ми дістанемо, теж буде абсолютно збіжним. Але

$$\left(\sum_{k<0} a_k e^{ik\lambda}\right)^m = \sum a_{m,k} e^{i\lambda k},$$

де $a_{m,k} = 0$, якщо $k > -m$. Це й показує, що $g_1(\lambda) \in L_2^-$. Крім того, з формули (12) випливає, що коефіцієнт розкладу $g_2(\lambda)$ у тригонометричний ряд при $e^{i0\lambda} = 1$ є 1, як і треба, виходячи з побудови $g_2(\lambda)$. Залишається зауважити, що

$$f_2(\lambda)/f_1(\lambda) = \exp\{\Sigma a_k e^{ik\lambda}\} = e^{\ln f(\lambda)} = f(\lambda).$$

Нехай стаціонарна послідовність має щільність, що задовольняє умову A, неперервна, $f(-\pi) = f(\pi)$.

Теорема 2. Похибка прогнозу обчислюється за формулою

$$M|\xi_1-\hat{\xi}_1|^2 = 2\pi\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)\,d\lambda\right\}. \tag{13}$$

Доведення. Припустимо спочатку, що виконується умова теореми 1. Тоді

$$M(\xi_1-\hat{\xi}_1)\overline{(\xi_1-\hat{\xi}_1)} = M(\xi_1-\hat{\xi}_1)\bar{\xi}_1,$$

бо $\hat{\xi}_1\in H_0$ і $\xi_1-\hat{\xi}_1\perp H_0$. Отже,

$$M|\xi-\hat{\xi}_1|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\lambda}-\hat{g}(\lambda))\,e^{-i\lambda}f(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi}g_1(\lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}g_2(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{\sum_{k\geqslant 0}a_ke^{ik\lambda}\right\}d\lambda =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}e^{a_0}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\right)\left(\sum_{k>0}a_ke^{i\lambda k}\right)^m d\lambda =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}e^{a_0}d\lambda = 2\pi e^{a_0} = 2\pi\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)\,d\lambda\right\}.$$

Ми використали те, що $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k\geqslant 1}a_ke^{ik\lambda}\right)^m d\lambda = 0$ для всіх $m\geqslant 1$, а також формулу для обчислення коефіцієнтів Фур'є. Якщо умова теореми 1 не виконується, то виберемо послідовність щільностей $f_n(\lambda)$, для яких вона виконана, $\sup_\lambda|f(\lambda)-f_n(\lambda)|\to 0$. (Зауважимо, що для виконання умов теореми 1 досить, щоб існувала і була обмеженою похідна $f(\lambda)$). Якщо $\{c_k^{(n)},\ k\leqslant 0\}$ такі, що

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{i\lambda}-\sum_{k\leqslant 0}c_k^{(n)}e^{ik\lambda}\right|^2 f_n(\lambda)\,d\lambda = 2\pi\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f_n(\lambda)\,d\lambda)\right\} = \sigma_n^2$$

набуває найменшого значення, то

$$M|\xi_1-\hat{\xi}_1|^2 \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{i\lambda}-\sum_{k\leqslant 0}c_k^{(n)}e^{ik\lambda}\right|^2 f(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \varliminf_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{i\lambda}-\sum_{k\leqslant 0}c_k^{(n)}e^{ik\lambda}\right|^2 f_n(\lambda)\,d\lambda = 2\pi\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln f(\lambda)\,d\lambda\right\},$$

бо

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{i\lambda}-\sum c_k^{(n)}e^{ik\lambda}|^2|f_n(\lambda)-f(\lambda)|\,d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sup_{-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi}|f_n(\lambda)-f(\lambda)|\,\varlimsup_{n\to\infty}c\int\left|e^{i\lambda}-\sum_{k\leqslant 0}c_k^{(n)}e^{ik\lambda}\right|^2 f_n(\lambda)\,d\lambda = 0$$

(c вибрано так, щоб для всіх n $cf_n(\lambda) \geqslant 1$). Якщо $\hat{g}(\lambda) = \Sigma c_k e^{ik\lambda}$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\lambda} - \hat{g}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\lambda} - \hat{g}(\lambda)|^2 f_n(\lambda)\, d\lambda \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 2\pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda)\, d\lambda \right\}.$$

Дробово-раціональна спектральна щільність. Припустимо, що

$$f(\lambda) = \frac{P(e^{i\lambda})}{Q(e^{i\lambda})}, \quad f(\lambda) > 0, \quad -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi,$$

де $P(z)$ та $Q(z)$ — многочлени відносно z. Оскільки функція $\frac{P(z)}{Q(z)}$ дійсна, коли $|z| = 1$, то

$$P\left(\frac{1}{z}\right) / Q\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\bar{P}(z)}{\bar{Q}(z)}.$$

Отже, якщо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — корені $P(z)$, для яких $|\alpha_k| < 1$, то $P(z) = c_1(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_m)\left(z - \frac{1}{\bar{\alpha}_1}\right) \ldots \left(z - \frac{1}{\bar{\alpha}_m}\right) z^r$, а якщо $\beta_1, \ldots, \beta_l$ — корені $Q(z)$, для яких $|\beta_k| < 1$, то

$$Q(z) = c_2(z - \beta_1) \ldots (z - \beta_m)\left(z - \frac{1}{\bar{\beta}_1}\right) \ldots \left(z - \frac{1}{\bar{\beta}_l}\right) z^s.$$

Тут r — кратність нуля у $P(z)$, s — кратність нуля у $Q(z)$.

Отже, $f(\lambda)$ можна записати у такому вигляді:

$$f(\lambda) = c_3 \frac{\prod_{k=1}^{m} (1 - \alpha_k e^{-i\lambda})(1 - \bar{\alpha}_k e^{i\lambda})}{\prod_{k=1}^{l} (1 - \beta_k e^{-i\lambda})(1 - \bar{\beta}_k e^{i\lambda})} e^{i\lambda(r+m-s-l)}.$$

Оскільки $f(\lambda)$ дійсне, то таким буде c_3, а $r + m - s - l = 0$.

Тепер

$$g_2(\lambda) = c_3 \frac{\prod_{k=1}^{m} (1 - \bar{\alpha}_k e^{i\lambda})}{\prod_{j=1}^{l} (1 - \bar{\beta}_k e^{i\lambda})} = c_3 \left(\prod_{k=1}^{m} (1 - \bar{\alpha} e^{i\lambda})\right)\left(\prod_{j=1}^{l} \sum_{q=0}^{\infty} (\bar{\beta}_j e^{i\lambda})^q\right),$$

$$g_1(\lambda) = \prod_{j=1}^{l} (1 - \beta_k e^{-i\lambda}) \prod_{k=1}^{m} (1 - \alpha_k e^{-i\lambda})^{-1} =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{l} (1 - \beta_j e^{-i\lambda})\right)\left(\prod_{k=1}^{m} \sum_{q=0}^{\infty} (\alpha_k e^{-i\lambda})^q\right).$$

19. МАРКІВСЬКІ ПРОЦЕСИ

Розглянемо імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, на якому існує потік σ-алгебр $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, тобто монотонно зростаюча з t сукупність σ-алгебр. σ-Алгебра $\mathcal{F}_t$ трактується як сукупність подій, що можуть спостерігатись до моменту часу t включно. Випадковий процес $x(t, \omega)$ з фазовим простором $(X, \mathcal{B})$, узгоджений з потоком $(\mathcal{F}_t)$, називається марківською випадковою функцією у широкому розумінні, якщо він задовольняє умову: для всіх $B \in \mathcal{B}$ та $s < t$

$$P\{x(t, \omega) \in B/\mathcal{F}_s\} = P\{x(t, \omega) \in B/x(s, \omega)\}. \tag{1}$$

Вираз, що стоїть в (1) праворуч, є вимірна функція від $x(s, \omega)$, тому його можна розглядати як результат підстановки $x(s, \omega)$ у деяку функцію $P(s, x, t, B)$ замість x. Якщо цю функцію можна вибрати так, щоб задовольнялись умови:

1) $P(s, x, t, B)$ вимірна за x, 2) $P(s, x, t, B)$ є імовірнісна міра на $\mathcal{B}$ за B, 3) виконується рівняння: для $x \in X$, $0 \leqslant s < t < u$, $B \in \mathcal{B}$

$$P(s, x, u, B) = \int P(s, x, t, dy)\, P(t, y, u, B) \tag{2}$$

(воно має назву рівняння Колмогорова—Чепмена), то $x(t, \omega)$ називається марківською випадковою функцією у вузькому розумінні. Пояснимо умову 3) (дві перші умови зрозумілі). З властивості повторних математичних сподівань випливає

$$M(x(u, \omega)/\mathcal{F}_s) = M(M(x(u, \omega)/\mathcal{F}_t)/\mathcal{F}_s),$$

$$P(s, x(s, \omega), u, B) = M(P(t, x(t, \omega), u, B)/\mathcal{F}_s) =$$

$$= \int P(t, y, u, B)\, P(s, x(s, \omega), t, dy), \tag{3}$$

тобто умова 3) виконується, якщо замість x підставити $x(s, \omega)$ (вона є наслідок (1)). Для марківської випадкової функції у вузькому розумінні ця умова має виконуватись при всіх x. Функція $P(s, x, t, B)$, яка задовольняє умови 1) — 3), називається імовірністю переходу.

Розглянемо скінченновимірні розподіли марківської випадкової функції з імовірністю переходу $P(s, x, t, A)$. Нехай $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $B_k \in \mathcal{B}$. Тоді

$$P\{x(t_1, \omega) \in B_1, \ \ldots, \ x(t_n) \in B_n\} = MI_{B_1}(x(t_1, \omega)) \ldots$$

$$\ldots I_{B_{n-1}}(x(t_{n-1}, \omega)\, M(I_{B_n}(x(t_n, \omega))/\mathcal{F}_{t_{n-1}}) = MI_{B_1}(x(t_1, \omega)) \ldots$$

$$\ldots I_{B_{n-1}}(x(t_{n-1}, \omega)) \int_{B_n} P(t_{n-1}, x(t_{n-1}, \omega), t_n, dy_n) =$$

$$= MI_{B_1}(x(t_1\omega)) \ldots I_{B_{n-1}}(x(t_{n-2}, \omega)) \int_{B_{n-1}} P(t_{n-2}, x(t_{n-2}, \omega), t_{n-1}, dy) \times$$

$$\times \int_{B_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy) = MI_{B_1}(x(t_1\omega)) \times$$

$$\times \int_{B_2} P(t_1, x(t, \omega), t_2, dy_2) \ldots \int_{B_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy_n).$$

Вираз

$$\int\limits_{B_2} P(t_1, x, t_2, dy_2) \ \ldots \ \int\limits_{B_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy_n) \tag{4}$$

можна розглядати як умовну імовірність

$$P\{x(t_2, \omega) \in B_2, \ \ldots, \ x(t_n, \omega) \in B_n / x(t_1, \omega) = x_2\}.$$

При фіксованих t_1 та x_1 для $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ (4) є узгоджені скінченно-вимірні розподіли деякого процесу. Позначимо через $P_{t_1,x}$ міру на $\{\Omega, \mathcal{F}\}$, що відповідає цьому процесу. Нехай $x(t, \omega)$ — траєкторія процесу. Разом з кожною траєкторією будемо розглядати її обмеження на $[t_1, \infty)$, позначаючи його так само. Будемо розглядати сукупність $\{\Omega, \mathcal{F}(\mathcal{F}_t); P_{t_1,x}\}$ імовірнісних просторів з потоком σ-алгебр і системою імовірнісних мір $P_{t_1,x}$; функцію $x(t, \omega)$ таку, що $P_{t_1,x_1}\{x(t_1, \omega) = x_1\} = 1$ для всіх $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, x_1 та $B_2, \ldots, B_n$ з $\mathcal{B}$. $P_{t_1,x_1}\{x(t_2, \omega) \in B_2, \ldots, x(t_n, \omega) \in B_n\}$ має вигляд (4), де $P(s, x, t, B)$ — певна імовірність переходу. Ця сукупність імовірнісних просторів разом з функцією $x(t, \omega)$, що задовольняє вказані умови, називається марківським процесом. $x(t, \omega)$ — його траєкторії, $P(t, x, s, B)$ — імовірності переходу, P_{t_1,x_1} — імовірність процесу, що починається в момент t_1 в точці x_1.

Основна аналітична характеристика процесу — імовірність переходу. За нею, як в теоремі Колмогорова про побудову процесу, можна визначити імовірності P_{t_1,x_1} за скінченновимірними розподілами вигляду (4). Якщо Ω — простір усіх функцій $\omega(t)$, визначених на R_+ із значеннями в X, то $x(t, \omega) = \omega(t)$, $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра, що породжується подіями $\{x(s, \omega) \in B, s \leqslant t, B \in \mathcal{B}\}$ (коли розглядається міра P_{t_1,x_1}, тоді $x(s, \omega)$ вважається визначеним лише на $[t_1, \infty)$). Тому перша задача теорії марківських процесів — описати імовірності переходу. Вони задовольняють нелінійне рівняння (2), отже, задачу можна сформулювати так: описати розв'язки рівняння Колмогорова — Чепмена $P(s, x, t, B)$, вимірні за x, і міри за B, для яких $P(s, x, t, X) = 1$.

Чисто розривний процес. Так називають процес, для якого існують границі

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1 - P(t, x, t+h, \{x\})) = \lambda(t, x); \tag{5}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P(t, x, t+h, B) = g(t, x, B), \quad x \bar{\in} B, \ B \in \mathcal{B} \tag{6}$$

для всіх $t \in R_+$, $x \in X$, $B \in \mathcal{B}$. (Ми вважаємо, що для всіх $x\ \{x\} \in \mathcal{B}$). Нехай $q(t, x, B) = \lambda(t, x)\pi(t, x, B)$, де $\pi(t, x, B)$ — імовірнісна міра по B. Розглянемо імовірнісний смисл функцій $\lambda(t, x)$ та $\pi(t, x, B)$. Будемо вважати, що $\lambda(t, x)$ обмежена функція, неперервна по t і вимірна по сукупності змінних (для цього треба, щоб була вимірна по сукупності змінних $P(t, x, s, \{x\})$). Нехай початкова умова для процесу є $x(s, \omega) = x$. Позначимо $\tau = \inf\{t \in Q \cap [s, \infty) : x(t, \omega) \neq x\}$, де Q — множина двоїчно-раціональних чисел. Якщо $\tau_n = \inf\{t \in Q_n \cap [s, \infty) : x(t, \omega) \neq x\}$, де Q_n — множина $\left\{\frac{k}{2^n},\right.$

$k = 0, 1, 2, \ldots\}$, то $\tau = \inf \tau_n$ можна назвати моментом першого виходу з початкового стану. Для $u > s$

$$P_{sx}\{\tau_n > u\} = P\left(s,\ x,\ \frac{k_1}{2^n},\ \{x\}\right) P\left(\frac{k}{2^n},\ x,\ \frac{k_1+1}{2^n},\ \{x\}\right) \ldots$$

$$\ldots\ P\left(\frac{k_2-1}{2^n},\ x,\ \frac{k_2}{2^n},\ \{x\}\right), \tag{7}$$

де $\frac{k_1-1}{2^n} \leqslant s < \frac{k_1}{2^n} < \cdots < \frac{k_2}{2^n} < u \leqslant \frac{k_2+1}{2^n}$. Враховуючи рівність

$$P\left(\frac{i}{2^n},\ x,\ \frac{i+1}{2^n},\ \{x\}\right) = 1 - \lambda\left(\frac{i}{2^n},\ x\right)\cdot\frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right), \tag{8}$$

що випливає з (5), можемо з (7) вивести таку формулу:

$$P_{s,x}\{\tau_n > u\} = \lim_{n\to\infty} P_{s,x}\{\tau_n > u\} = \exp\left\{-\lim \sum_{i=k_1}^{k_2} \lambda\left(\frac{i}{2^n},\ x\right)\frac{1}{2^n}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_s^u \lambda(t,\ x)\,dt\right\}.$$

Згідно з цією формулою, якщо процес $x(t, \omega)$ потрапляє у деякий стан, то він буде у цьому стані (коли брати тільки раціональні точки) деякий час. Якщо $x \notin B$, де $B \in \mathscr{B}$, можна розглянути подію $\{x(\tau, \omega) \in \in B\} = \bigcup\limits_k \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} \{x(t_n,\ \omega) \in B\}$. Тоді

$$P_{s,x}\{x(\tau, \omega) \in B\} = \lim_{n\to\infty} P_{s,x}\{x(\tau_n,\ \omega) \in B\}.$$

Для $\frac{k_1-1}{2^n} \leqslant s < \frac{k_1}{2^n}$

$$P_{s,x}\{x(\tau_n,\ \omega) \in B\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(s,\ x,\ \frac{k_1}{2^n},\ \{x\}\right) \ldots$$

$$\ldots\ P\left(\frac{i-1}{2^n},\ x,\ \frac{i}{2^n},\ \{x\}\right) P\left(\frac{i}{2^n},\ x,\ \frac{i+1}{2^n},\ B\right) =$$

$$= \sum_{i=k_1}^{\infty}\left(1 - \lambda(s,\ x)\left(\frac{k_1}{2^n} - s\right) + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\left(1 - \lambda\left(\frac{k_1}{2^n},\ x\right)\frac{1}{2^n} +\right.$$

$$\left. + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) \ldots \left(1 - \lambda\left(\frac{i-1}{2^n},\ x\right)\frac{1}{2^n} +\right.$$

$$\left. + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\left(\lambda\left(\frac{i}{2^n},\ x\right) + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\pi\left(\frac{i}{2^n},\ x,\ B\right)\frac{1}{2^n}\Bigg).$$

Тому

$$P_{s,x}(x(\tau, \omega) \in B) =$$

$$= \int_s^{\infty} \exp\left\{-\int_s^u \lambda(t,\ x)\,dt\right\}\lambda(u,\ x)\,\pi(u,\ x,\ B)\,du. \tag{9}$$

Аналогічно можемо знайти сукупний розподіл величин τ та $x(\tau, \omega)$ для $t > s$, $B \subset \mathcal{B}$, $x \notin B$:

$$P_{s,x}\{\tau < t,\ x(\tau, \omega) \in B\} =$$
$$= \int_s^t \exp\left\{-\int_s^u \lambda(v, x)\,dv\right\} \lambda(u, x)\,\pi(u, x, B)\,du. \tag{10}$$

Разом з формулою (9), з якої випливає така формула для щільності розподілу величини τ:

$$g(s, x, t) = \exp\left\{-\int_s^t \lambda(v, x)\,dv\right\} \lambda(t, x), \tag{11}$$

(10) дає формулу для умовного розподілу $x(\tau, \omega)$ при заданому τ:

$$P_{s,x}(x(\tau, \omega) \in B/\tau = t) = \pi(t, x, B), \quad t > s. \tag{12}$$

Рівняння Колмогорова для чисто розривних процесів. Розглянемо дві системи рівнянь для $P(s, x, t, B)$, які дозволяють визначити імовірність переходу за функціями $\lambda(t, x)$ та $\pi(t, x, B)$. Для $h > 0$

$$P(s, x, t, B) - P(s-h, x, t, B) = P(s, x, t, B) -$$
$$- \int P(s-h, x, s, dy)\,P(s, y, t, B) = P(s, x, t, B) -$$
$$- P(s-h, x, s, \{x\})\,P(s, x, t, B) - \int_{X-\{x\}} P(s-h, x, s, dy)\,P(s, y, t, B) =$$
$$= [1 - \lambda(s-h, x)\,h + o(h)]\,P(s, x, t, B) -$$
$$- h \int_{X-\{x\}} \lambda(s-h, x)\,\pi(s-h, x, dy)\,P(s, y, t, B) + o(h).$$

Тому

$$\frac{1}{h}(P(s, x, t, B) - P(s-h, x, t, B)) = -\lambda(s-h, x)\,P(s, x, t, B) +$$
$$+ \int_{X-\{x\}} \pi(s-h, x, dy)\,P(s, y, t, B) + \frac{o(h)}{h}.$$

Отже, існує ліва похідна

$$-\frac{d^-}{ds} P(s, x, t, B) = -\lambda(s, x)\,P(s, x, t, B) +$$
$$+ \lambda(s, x) \int_{X-\{x\}} \pi(s, x, dy)\,P(s, y, t, B). \tag{13}$$

Ця рівність буде виконуватись, якщо $P(s, x, t+h, \{x\}) = 1 - \lambda(s, x)\,h + o(h)$ рівномірно за $s < t$, $\lambda(s, x)$ — неперервна за s обмежена функція, $P(s, x, s+h, B) = h\lambda(s, x)\,\pi(s, x, B) + o(h)$ рівномірно за B та $s < t$, $\pi(x, s, B)$ — неперервна за s функція. Природно вважати (це випливає з формули (12)), що $\pi(x, s, \{x\}) = 0$. Тоді область інтегрування $X - \{x\}$ можна замінити на X. Права частина (13) є неперервна за s функція. Тому $\frac{d^-}{ds}$ збігається з $\frac{d}{ds}$ (якщо ліва похідна неперервна, то існує похідна, яка збігається з лівою похідною). Отже, виконується таке рівняння:

$$-\frac{d}{ds} P(s, x, t, B) = -\lambda(s, x) P(s, x, t, B) +$$
$$+\lambda(s, x)\int \pi(s, x, dy) P(s, y, t, B). \quad (14)$$

Це перше, або обернене рівняння Колмогорова. Воно розв'язується для $s < t$. При $s = t$ повинна виконуватись така гранична умова: $P(t, x, t, B) = I_B(x)$. Рівняння (14) можна переписати в інтегральній формі:

$$I_B(x) - P(s, x, t, B) = \int_s^t [-\lambda(u, x) P(u, x, t, B) +$$
$$+\lambda(u, x)\int \pi(u, x, dy) P(u, y, t, B)]\, du. \quad (15)$$

Рівняння (15) можна розв'язувати методом послідовних наближень, поклавши $P^0(s, x, t, B) = I_B(x)$:

$$I_B(x) - P^n(s, x, t, B) = \int_s^t [-\lambda(u, x) P^{n-1}(u, x, t, B) +$$
$$+\lambda(u, x)\int \pi(u, x, dy) P^{n-1}(u, y, t, B)]\, du.$$

Розглянемо

$$P(s, x, t+h, B) - P(s, x, t, B) = \int P(s, x, t, dy) P(t, y, t+h, B) -$$
$$-P(s, x, t, B) = \int P(s, x, t, dy) I_B(y) P(t, y, t+h, \{y\}) +$$
$$+\int P(s, x, t, dy) P(t, y, t+h, B \setminus \{y\}) - P(s, x, t, B) =$$
$$= \int_B P(s, x, t, dy)(P(t, y, t+h, \{y\}) - 1) +$$
$$+\int P(s, x, t, dy) P(t, y, t+h, B \setminus \{y\}).$$

Отже,

$$\frac{1}{h}(P(s, x, t+h, B) - B(s, x, t, B)) =$$
$$= \int_B P(s, x, t, dy)\frac{1}{h}(P(t, y, t+h, \{y\}) - 1) +$$
$$+\int P(s, x, t, dy)\frac{1}{h} P(t, y, t+h, B \setminus \{y\}). \quad (16)$$

Якщо $\frac{1}{h}(1 - P(t, y, t+h, \{y\}) = \frac{1}{h} P(t, y, t+h, X \setminus \{y\})$ — величина обмежена, то права частина (16) має границю, коли $h \to 0$, тому існує права похідна $\frac{d^+}{dt} P(s, x, t, B)$. Вона буде неперервною, якщо виконуються попередні умови, тому $\frac{d}{dt} P(s, x, t, B) = = \frac{d^+}{dt} P(s, x, t, B)$. Ми дістаємо друге (пряме) рівняння Колмогорова:

$$\frac{d}{dt} P(s, x, t, B) = -\int_B P(s, x, t, dy)\lambda(t, y) + + \int P(s, x, t, dy)\lambda(t, y)\pi(t, y, B). \qquad (17)$$

Припустимо, що $x(0, \omega)$ має розподіл $\mu_0(B)$. Позначаючи $\mu_t(B) = = P\{x(t, \omega) \in B\} = \int \mu_0(dy) P(0, y, t, B)$ і інтегруючи (17) за $\mu_0(dy)$, дістаємо таке рівняння:

$$\frac{d}{dt}\mu_t(B) = -\int_B \lambda(t, y)\mu_t(dy) + \int \mu_t(dy)\lambda(t, y)\pi(t, y, B). \qquad (18)$$

20. ОДНОРІДНИЙ МАРКІВСЬКИЙ ПРОЦЕС ТА ПОВ'ЯЗАНА З НИМ НАПІВГРУПА

Марківський процес називається однорідним, якщо його імовірність переходу задовольняє таку умову: $P(s, x, t, B) = P(0, x, t - - s, B)$, тобто залежить лише від різниці аргументів t та s. Це означає, що розподіл процесу $\xi_{x,s}(t)$, який почався в момент s з точки x, буде такий самий, як і розподіл процесу $\xi_{x,0}(t - s)$, що почався в момент 0 з точки x. Тому досить розглядати лише процеси, що почалися в момент 0, але треба, щоб одночасно з кожною траєкторією процесу $x(t, \omega)$ була також траєкторія $\theta_s(x(t, \omega)) = x(t + s, \omega)$, s — фіксоване, тобто для кожного $s \geqslant 0$ та $\omega \in \Omega$ існувало таке ω_s, що $\theta_s x(t, \omega) = x(t, \omega_s)$. У тому випадку, коли Ω — множина всіх функцій з R_+ в X, ця умова, очевидно, виконується. Імовірність переходу однорідного процесу позначимо $P(t, x, B)$. Це імовірність того, що процес, перебуваючи в певний момент у точці x, перейде за час t у множину B. Функція $P(t, x, B)$, вимірна за x, — імовірнісна міра за B. Рівняння Колмогорова — Чепмена для $t > 0$, $s > 0$ має такий вигляд:

$$P(t + s, x, B) = \int P(t, x, dy) P(s, y, B). \qquad (1)$$

Скінченновимірні розподіли процесу для $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ задаються формулою

$$P\{\xi(t_0) \in B_0, \xi(t_1) \in B_1, \ldots, \xi(t_n) \in B_n\} = = \int_{B_0} P\{\xi(t_0) \in dx_0\} \int_{B_1} P(t - t_0, x_0, dx_1) \ldots \int_{B_n} P(t_n - t_{n-1}, x, dx_n). \qquad (2)$$

Для вивчення однорідної імовірності переходу (так будемо називати імовірність переходу однорідного процесу) зручно використати напівгрупу лінійних операторів, побудовану за цією імовірністю. Нехай B_X — сукупність усіх $\mathscr{B}$-вимірних функцій $f(x)$ з X в R. Це лінійний простір, але якщо $\|f\| = \sup_x |f(x)|$, він перетворюється у простір Банаха. Нехай для $f \in B_X$

$$T_t f(x) = \int f(y) P(t, x, dy). \tag{3}$$

Ця функція теж належить B_X, вона обмежена:

$$\|T_t f(x)\| \leqslant \sup_x \int |f(y)| P(t, x, dy) \leqslant \sup_x \int \|f\| P(t, x, dy) = \|f\|.$$

Крім того, вона $\mathscr{B}$-вимірна, якщо $f = I_B$, і $f = \Sigma c_k I_{B_k}$, а такими функціями можна рівномірно наблизити будь-яку функцію $f \in B_X$. Отже, T_t є лінійний оператор з B_X в B_X, $\| T_t \| \leqslant 1$, як було показано вище. Крім того, $T_t f \geqslant 0$ для всіх $f \geqslant 0$. Нарешті з рівняння Колмогорова — Чепмена випливає така рівність:

$$T_{t+s} f = T_t T_s f \tag{4}$$

(рівняння (1) є запис цієї рівності для $f = I_B$; використовуючи лінійність T_t і апроксимацію f функціями $\Sigma c_k I_{B_k}$, дістаємо з (1) рівність (4)). Рівність (4) означає, що оператори $\{T_t, t \geqslant 0\}$ (T_0 вважаємо рівним I — оператору тотожного перетворення) утворюють напівгрупу операторів. Нас будуть цікавити напівгрупи, для яких $\| T_t \| \leqslant \leqslant 1$ (вони називаються стискуючими) та $T_t f \geqslant 0$ для $f \geqslant 0$ (такими, що зберігають позитивність).

Розглянемо найпростіший приклад напівгрупи. Нехай X — одна точка, тоді $B_X = R$ (функція $f(x)$ визначається своїм єдиним значенням). Будь-яке лінійне перетворення R в R має вигляд $A(x) = cx$, $x \in R$. Воно стискуюче, якщо $|c| \leqslant 1$, зберігає позитивність, якщо $c > 0$. Отже, $T_t x = f(t) x$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$. З (4) маємо $f(t + s) = f(t) f(s)$. Звідси $f(t) = e^{at}$, де $a \leqslant 0$. Цим самим ми описали усі напівгрупи у даному випадку. Як ми побачимо далі, експоненціальні зображення напівгруп будуть відігравати важливу роль при їх вивченні.

Рівномірно неперервна напівгрупа. Так називають напівгрупи T_t, для яких $\| T_t - I \| \to 0$, коли $t \to 0$. У цьому випадку для всіх $t > 0$ та $h > 0$ $\| T_{t+h} - T_t \| \leqslant \| T_t \| \| T_h - I \| \leqslant \| T_h - I \|$, тому функція T_t рівномірно неперервна за нормою. Нам будуть потрібні інтеграли

$$\int_a^b T_s ds = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} T_{t_k} \Delta t_k, \quad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$
$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Існування границі випливає з такої нерівності:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-} T_{t_k} \Delta t - \sum_{i=0}^{m-1} T_i \Delta s_i \right\| \leqslant (b-a) \sup_{a \leqslant t < b} \| T_t' - T_t'' \|,$$

якщо $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b$, $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$, де $T_t' = T_{t_k}$, коли $t_k \leqslant t < t_{k+1}$, $T_t = T_{s_i}$, коли $s_i \leqslant t < s_{i+1}$. Тому

$$\|T_t' - T_t''\| \leqslant \|T_t' - T_t\| + \|T_t'' - T_t\| \leqslant \sup \|T_u - I\| + \max \|T_u - I\|,$$
$$0 \leqslant u \leqslant \max \Delta t_k, \quad 0 \leqslant u \leqslant \max \Delta s_i.$$

Цей вираз прямує до нуля, коли $\max \Delta t_k + \max \Delta s_i \to 0$. Зауважимо, що використали лише неперервність T_t; так само можна побудувати інтеграл для будь-якої неперервної операторної функції $F(t)$. З властивостей інтеграла відзначимо такі:

1) якщо $a < b < c$, то

$$\int_a^c F(t)\,dt = \int_a^b F(t)\,dt + \int_b^c F(t)\,dt,$$

2) $$\left\| \int_a^b F(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|F(t)\|\,dt,$$

3) якщо C — обмежений оператор, то $C\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b CF(t)\,dt$.

Усі ці властивості доводяться за допомогою граничного переходу від відповідних інтегральних сум. Наступна теорема дає повну відповідь на питання, як побудовані рівномірно неперервні напівгрупи.

Т е о р е м а. Нехай T_t — рівномірно неперервна напівгрупа. Тоді вірні такі твердження:

а) існує $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(T_h - I) = A$ (за нормою, A — деякий обмежений оператор з $\boldsymbol{B}_X$ в $\boldsymbol{B}_X$);

б) T_t задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt} T_t = AT_t = T_t A; \tag{5}$$

в) T_t зображається формулою

$$T_t = \exp\{tA\} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я. Покажемо спочатку, що з а) випливає б). Для $h > 0$ маємо

$$\frac{1}{h}(T_{t+h} - T_t) = \frac{1}{h}(T_h - I)\,T_t = T_t\,\frac{1}{h}(T_h - I),$$

а для $h < 0$

$$\frac{1}{h}\,T_{t+h} - T_t = \frac{1}{h}(I - T_{-h})\,T_{t+h} = T_{t+h}\,\frac{1}{h}(I - T_{-h}),$$

але

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h - I) = \lim_{h\uparrow 0} \frac{1}{h}(I - T_{-h}) = A, \quad I_{t+h} \to T_t,$$

коли $h \to 0$. Рівняння (5) встановлене. Покажемо тепер, що вірна формула (6). Виходячи з розкладу $\exp\{tA\}$ у ряд, можемо переконатись, що

$$\exp\{tA\}\exp\{-tA\} = I,$$

$$\frac{d}{dt}\exp\{-tA\} = -A\exp\{-tA\} = -\exp\{-tA\}A.$$

Тому

$$\frac{d}{dt}T_t\exp\{-tA\} =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}T_t\right)\exp\{-tA\} - T_tA\exp\{-tA\} = T_tA\exp\{-tA\} -$$

$$- T_tA\exp\{-tA\} = 0.$$

Отже, $T_t \exp\{-tA\}$ — сталий оператор. При $t = 0$ **бачимо**, що $T_t\exp\{-tA\} = I$, $T_t = \exp\{tA\}$.

Залишається довести а). Розглянемо інтеграл $\int\limits_0^a T_tdt$. Застосовуючи до нього оператор T_h, на основі властивості 3) матимемо

$$T_h\int\limits_0^a T_tdt = \int\limits_0^a T_{t+h}dt = \int\limits_h^{a+h} T_tdt.$$

Тому

$$\left(\frac{1}{h}[T_h - I]\right)\int\limits_0^a T_tdt = \frac{1}{h}\left(\int\limits_h^{a+h} T_tdt - \int\limits_0^a T_tdt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int\limits_a^{a+h} T_tdt - \int\limits_0^h T_tdt\right) = (T_a - I)\frac{1}{h}\int\limits_0^h T_tdt.$$

Зауважимо, що

$$\left\|\frac{1}{a}\int\limits_0^a T_tdt - I\right\| = \left\|\frac{1}{a}\int\limits_0^a (T_t - I)\,dt\right\| \leqslant \frac{1}{a}\int\limits_0^a \|T_t - I\|\,dt \to 0,$$

коли $a \to 0$. Тому $\frac{1}{h}\int\limits_0^h T_tdt \to I$, і можна вибрати таке a, щоб $\left\|\frac{1}{a}\int\limits_0^a T_tdt - I\right\| < 1$. Тоді оператор $\frac{1}{a}\int\limits_0^a T_tdt$ має обернений (якщо $\|C - I\| \leqslant 1$, то $C^{-1} = (I + (C - I))^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(I - C)^k$). Вибравши таке a, матимемо

$$\frac{1}{h}(T_t - I) = (T_h - I)\frac{1}{h}\int\limits_0^h T_tdt\left(\int\limits_0^a T_tdt\right)^{-1}.$$

Оскільки права частина має границю, коли $h \to 0$, то ліва теж її має, отже, а) виконується і $A = (T_a - I)\left(\int_0^a T_t dt\right)^{-1}$, де $a > 0$ досить мале.

Зауваження. Формула (6) дає зображення усіх рівномірно неперервних напівгруп (не обов'язково стискаючих і таких, що зберігають позитивність). Який вигляд має оператор A для напівгруп, що пов'язані з марківським процесом, ми розглянемо у наступній лекції.

Наведемо приклад однорідних процесів із скінченною множиною станів. Нехай $X = \{1, \ldots, m\}$ є скінченна множина. B_X можна ототожнити з R^m (функція визначається своїми значеннями $f_1, \ldots, f_m$). T_t є лінійний оператор з R^m в R^m. Позначимо елементи матриці T_t через $p_{ij}(t)$. Якщо $p_{ij}(t)$ — неперервні функції t і $p_{ij}(t) \to \delta_{ij}$, коли $t \to 0$, то $\| T_t - I \| \to 0$ при будь-якому розумному визначенні норми оператора. За таких умов існує границя $\lim \frac{1}{h}(T_t - I)$, а тому і

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(p_{ij}(h) - \delta_{ij}) = a_{ij}.$$

Якщо A — матриця з елементами a_{ij}, то виконуються дві системи рівнянь

$$\frac{d}{dt} p_{ij}(t) = \sum_k a_{ik} p_{kj}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{ij} = \sum_k p_{ik}(t)\, a_{kj}, \tag{7}$$

крім того, матриця $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,m}}$ має таке зображення:

$$P(t) = \exp\{tA\}. \tag{8}$$

Можна вказати, які будуть a_{ij}, якщо T_t є напівгрупа, що пов'язана з однорідним марківським процесом в X. Будемо вважати, що $\mathscr{B}$ породжується одноточковими множинами. Тоді імовірність переходу $P(t, x, B)$ визначається імовірностями $P(t, x, \{y\})$ переходу в одноточкові множини:

$$P(t, x, B) = \sum_y I_{\{y\in B\}} P(t, x, \{y\}).$$

Візьмемо $p_{ij}(t) = P(t, i, \{j\})$. Оператор T_t має вигляд

$$T_t f(i) = \Sigma P_{ij}(t) f(j), \quad P_{ij}(t) \geqslant 0, \quad \Sigma p_{ij}(t) = 1.$$

Оскільки

$$a_{ij} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} p_{ij}(t) \geqslant 0,$$

$$a_{ii} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(p_{ii}(t) - 1) \leqslant 0, \quad \Sigma a_{ij} = 0,$$

то при $\lambda_i = -a_{ii}$, $a_{ij} = \lambda_i \pi_{ij}$ можемо так само, як при розгляді чисто розривних процесів, встановити, що

$$P_i\{\tau > t, x(\tau, \omega) = j\} = e^{-\lambda_i t}\pi_{ij},$$

якщо τ — момент виходу із початкового стану. Тепер можна побудувати процес $x(t, \omega)$, для якого матриця $A = (a_{ij})$, де $a_{ij} \geqslant 0$, $i \neq j$, $\sum_j a_{ij} = 0$ визначає імовірності переходу згідно з (7) або (8).

Нехай $\tau_1^{(k)}, \tau_2^{(k)}, \ldots, \tau_n^{(k)}, \ldots$ — незалежні між собою величини, для кожного k це послідовність однаково розподілених за показниковим законом з параметром λ_k, $k = 1, \ldots, m$ випадкових величин, а $\xi_1, \xi_2, \ldots \ldots, \xi_n$ — ланцюг Маркова в X з імовірностями переходу за 1 крок π_{ij} (він незалежний від величин $\tau_n^{(k)}$). Процес, що починається в точці i, побудуємо так: $\xi_0 = i$, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ разом з ξ_0 утворюють однорідний ланцюг Маркова, $\tau_i = \tau_i^{\xi_{i-1}}$, $x(t, \omega) = \xi_0$, якщо $t < \tau_1$, $x(t, \omega) = \xi_{n-1}$, якщо $\tau_1 + \ldots + \tau_{n-1} \leqslant t < \tau_1 + \ldots + \tau_n$.

21. ОДНОРІДНІ ЧИСТО РОЗРИВНІ ПРОЦЕСИ. УМОВИ РЕГУЛЯРНОСТІ

Будемо називати однорідний марківський процес чисто розривним, якщо йому відповідає рівномірно неперервна напівгрупа. Як ми побачимо далі, це визначення не суперечить тому, яке було дане для загальних процесів Маркова, але попередні вимоги у нас — набагато слабкіші.

Теорема 1. Для того щоб напівгрупа $T_t f(x) = \int f(y) P(t, x, dy)$ була рівномірно неперервною, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\lim_{t\to 0} \sup_x (1 - P(t, x, \{x\})) = 0. \qquad (1)$$

Доведення. Маємо

$$\|T_t f - f\| = \sup_x \left| \int (f(y) - f(x)) P(t, x, dy) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|f\| \sup_x P(t, x, X \setminus \{x\}) \leqslant 2\|f\| \sup_x (1 - P(t, x, \{x\}).$$

Тому

$$\|T_t - I\| \leqslant 2 \sup_x (1 - P(t, x, \{x\})).$$

З іншого боку,

$$\|T_t - I\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \sup_x \left| \int (f(y) - f(x)) P(t, x, dy) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_x \left| \int (\delta_z(y) - \delta_z(x)) P(t, x, dy) \right|,$$

де $\delta_z(x) = \begin{cases} 1, & x = z, \\ 0, & x \neq z. \end{cases}$

Тому

$$\|T_t - I\| \geqslant \left| \int (\delta_z(y) - 1) P(t, z, dy) \right| = 1 - P(t, z, \{z\}).$$

Оскільки це вірно для всіх z, то

$$\sup_x (1 - P(t, x, \{x\})) \leqslant \|T_t - I\| \leqslant 2 \sup_x (1 - P(t, x, \{x\})). \qquad (2)$$

Звідси й випливає доведення.

Наслідок 1. Якщо виконується умова (1), то для всіх $f \in \boldsymbol{B}_X$ рівномірно по x існує границя

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int (f(y) - f(x))\, P(t, x, dy). \tag{3}$$

Знайдемо вигляд оператора A. Нехай спочатку $f(y) = \delta_z(y)$. Тоді існує границя

$$A\delta_z(z) = -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (1 - P(t, z, \{z\}) = -\lambda(z),$$
$$\lambda(z) \geqslant 0$$

($\lambda(z)$ — позначення). Оскільки $\| A\delta_z(z) \| \leqslant \| A \|$, то $\lambda(z)$ — обмежена вимірна функція (як границя вимірних). Розглянемо тепер

$$AI_B(x) = \lim \frac{P(t, x, B) - I_B(x)}{t} = Q(x, B) \quad \text{для} \quad x \overline{\in} B.$$

Легко переконатись, що $Q(x, X \setminus \{x\}) = \lambda(x)$, тому можна взяти $Q(x, B) = \lambda(x)\pi(x, B)$, де $\pi(x, X \setminus \{x\}) = 1$. Будемо вважати, що $\pi(x, \{x\}) = 0$, коли $\lambda(x) > 0$, а коли $\lambda(x) = 0$, то $\pi(x, \{x\}) = 1$, $\pi(x, X \setminus \{x\}) = 0$.

Теорема 2. Оператор A, що визначається формулою (3), має такий вигляд:

$$Af(x) = -\lambda(x) f(x) + \lambda(x) \int f(y)\, \pi(x, dy). \tag{4}$$

Доведення. Встановимо спочатку цю формулу для функції $f(x) = I_B(x)$. Якщо $x \overline{\in} B$, то $I_B(x) = 0$,

$$AI_B(x) = Q(x, B) = -\lambda(x) I_B(x) + \lambda(x)\pi(x, B).$$

Якщо $z \in B$, то $I_B(x) = \delta_z(x) + I_{B\setminus\{z\}}(x)$ і

$$AI_B(z) = A\delta_z(z) + AI_{B\setminus\{z\}}(z) = -\lambda(z) + \lambda(z)\pi(z, B \setminus \{z\}) =$$
$$= -\lambda(z) + \lambda(z)\pi(z, B),$$

бо $\lambda(z)\pi(z, \{z\}) = 0$ завжди. Отже, формула (4) виконується для $I_B(x)$ як при $x \overline{\in} B$, так і при $x \in B$. Ми знаємо, що оператор A обмежений, і функція $\lambda(x)$ теж обмежена. Тому, використавши рівномірну апроксимацію довільної функції $f \in \boldsymbol{B}_X$ функціями $\Sigma c_k I_{B_k}$, переконуємось, що формула (4) вірна для всіх $f \in \boldsymbol{B}_X$.

Розглянемо X як метричний простір, у якого віддаль $\rho(x, y)$ визначається так: $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$, якщо $x \neq y$. Це дискретний простір, куля $U_\varepsilon(x)$ з центром у точці x радіуса $\varepsilon > 0$ містить лише одну точку x, якщо $\varepsilon < 1$. З умови (1) випливає, що

$$\lim_{t\to 0} \sup_x P(t, x, X \setminus U_\varepsilon(x)) = 0, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Ми довели раніше, що при виконанні цієї умови процес має модифікацію, яка не має розривів II роду. Це означає, що процес на кожному скінченному проміжку може зробити лише скінченне число переходів із стану в стан, тому в кожному стані він перебуває певний додатний час і після виходу з нього потрапляє в деякий інший стан. Позначимо через τ момент виходу з початкового стану, $x(\tau)$ — положення процесу після виходу з цього стану (вважаємо, що траєкторія процесу неперервна справа).

Теорема 3. Сукупний розподіл величин τ та $x(\tau)$ визначається формулою

$$M_x e^{-s\tau} f(x, \tau) = \frac{\lambda(x)}{\lambda(x)+s} \int f(y)\,\pi(x, dy) \tag{5}$$

для $s > 0$, $f \in \boldsymbol{B}_X$.

Доведення. Нехай $\tau_n = \frac{k+1}{2^n}$, якщо $x\left(\frac{i}{2^n}\right) = x$ для $i \leqslant k$, $x\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \neq x$. Тоді $\tau_{n+1} \leqslant \tau_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \tau$. Отже,

$$M_x e^{-s\tau} f(x(\tau)) = \lim_{n\to\infty} M_x e^{-s\tau_n} f(x(\tau_n)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int P_x\left\{\tau_n = \frac{k}{2^n},\right.$$

$$\left. x(\tau_n) \in dy\right\} e^{-s\frac{k}{2^n}} f(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(P\left(\frac{1}{2^n}, x, \{X\}\right)\right)^{k-1} \int\limits_{X\setminus\{x\}} P\left(\frac{1}{2^n}, x, dy\right) \times$$

$$\times f(y) e^{-\frac{sk}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{s}{2^n}}}{1 - P\left(\frac{1}{2^n}, x, \{x\}\right) e^{-\frac{s}{2^n}}} \int\limits_{X\setminus\{x\}} P\left(\frac{1}{2^n}, x, dy\right) f(y).$$

Формула (5) є наслідок рівностей

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{X\setminus\{x\}} P(h, x, dy) f(y) = \lambda(x) \int f(y)\,\pi(x, dy),$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 - P(h, x, \{x\})\, e^{-sh}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1 - e^{-sh}}{h} + e^{-sh} \frac{1 - P(h, x, \{x\})}{h} \right) = s + \lambda(x).$$

Строго марківська властивість. Для однорідного процесу $x(t)$ марківську властивість можна ще записати так: яка б не була множина $C \in C_0(R_+, X)$ — це циліндрична σ-алгебра,

$$P_x(\theta_h(x(\cdot)) \in C/\mathcal{F}_h) = P_{x(h)}(C) \text{ з імовірністю } P_x = 1, \tag{6}$$

$\theta_h(x(t)) = x(t+h)$. Для циліндричної множини C (6) виводиться з формули для скінченновимірних розподілів процесу. Процес називається строго марківським, якщо для будь-якого моменту зупинки ζ буде

$$P_x(\theta_\zeta(x(\cdot)) \in C/\mathcal{F}_\zeta) = P_{x(\zeta)}(C) \text{ з імовірністю } \boldsymbol{P}_x = 1. \tag{7}$$

Теорема 4. Чисто розривний неперервний справа однорідний марківський процес є строго марківський.

Доведення. Нехай ζ — дискретний момент зупинки, $\{t_k, k = 1, 2, \ldots\}$ — його можливі значення. Якщо $A \in \mathcal{F}_\zeta$, то $A_k = A \cap \{\zeta_k = t_k\} \in \mathcal{F}_{t_k}$. Тому

$$P_x(A \cap \{\theta_\zeta(x(\cdot)) \in C\}) = \sum_k P_x(A_k \cap \{\theta_{t_k}(x(\cdot)) \in C\}) =$$

$$= \sum_k M_x I_{A_k} P(\theta_{t_k}(x(\cdot)) \in C/\mathcal{F}_{t_k}) = \sum_k M_x I_{A_k} P_{x(t_k)}(C) = \sum_k M_x I_A P_{x(\zeta)}(C) =$$

$$= M_x I_A P(C).$$

Це означає, що $P_x(\theta_\zeta(x(\cdot)) \in C/\mathcal{F}_\zeta) = P_{x(\zeta)}(C)$. Для довільного ζ візьмемо $\zeta_\varepsilon = k\varepsilon$, якщо $(k-1)\varepsilon < \zeta \leqslant k\varepsilon$. Це момент зупинки. Тоді $\zeta_\varepsilon \geqslant \zeta$, $\mathcal{F}_{\zeta_\varepsilon} \supset \mathcal{F}_\zeta$ і, якщо $A \in \mathcal{F}_\zeta$, то $A \in \mathcal{F}_{\zeta_\varepsilon}$. За доведеним

$$P_x(A \cap \{\theta_{\zeta_\varepsilon} x(\cdot) \in C\}) = M_x I_A P_{x(\zeta_\varepsilon)}(C). \tag{8}$$

Оскільки для кожного $t \geqslant 0$ $x(t+\zeta_\varepsilon) = x(t+\zeta)$ при досить малих ε, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_x(A \cap \{\theta_{\zeta_\varepsilon} x(\cdot) \in C\}) = P_x(A \cap \{\theta_\zeta x(\cdot) \in C\}),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{x(\zeta_\varepsilon)}(C) = P_{x(\zeta)}(C).$$

З (8) дістаємо доведення теореми.

Наслідок 2. Визначимо величини $x_0, x_1, x_2, \ldots$ як послідовні положення процесу $x(t)$ в X, $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — час перебування процесу відповідно у станах $x_0, x_1, \ldots$. Таким чином, $x(t) = x_k$, якщо $\tau_1 + \ldots + \tau_{k-1} \leqslant t < \tau_1 + \ldots + \tau_k$ (для $k=0$ $\tau_1 + \ldots + \tau_{k-1}$ є 0). Тоді

$$M_{x_0} \exp\left\{-\sum_1^n s_k\tau_k\right\} \prod_1^n f(x_k) = \int \ldots \int \prod_{k=1}^n \left(f(y_k)\frac{\lambda(y_{k-1})}{s_k + \lambda(y_{k-1})}\right)\pi(x_0, dy_1)\ldots$$
$$\ldots \pi(y, dy_n). \tag{9}$$

Для доведення цієї формули скористаємось індукцією за n. При $n=1$ вона є наслідок теореми 3. Нехай вона вірна для $n-1$ величин, $\zeta_{n-1} = \tau_1 + \ldots + \tau_{n-1}$. Тоді

$$M_{x_0} \exp\left\{-\sum_1^n s_k\tau_k\right\} \prod_1^n f(x_k) =$$

$$= M_{x_0} \exp\left\{-\sum_1^{n-1} s_k\tau_k\right\} \prod_1^{n-1} f(x_k)\, M(e^{-s_n\tau_n} f(x_n)/\mathcal{F}_{\zeta_{n-1}}) =$$

$$= M_{x_0} \exp\left\{-\sum_1^{n-1} s_k\tau_k\right\} \prod_1^{n-1} f(x_k) \frac{\lambda(x_{n-1})}{s + \lambda(x_{n-1})} \int f(y_n)\,\pi(x_{n-1}, dy) \tag{10}$$

(ми використали те, що τ_n є момент виходу з початкового стану для $\theta_{\zeta_{n-1}}(x(t))$, а x_n — положення процесу після виходу з початкового стану). Права частина (10) уже залежить від $x_1, \ldots, x_{n-1}$ та $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$, і за припущенням індукції формула (9) у цьому випадку вірна. Формула (9) показує, що величини $x_0, x_1, x_2, \ldots$ утворюють однорідний ланцюг Маркова в X з імовірністю переходу $\pi(x, B)$, а величини $\tau_1, \ldots, \tau_n$ при заданих $x_0, x_1, \ldots, x_n$ незалежні і мають показникові розподіли з параметрами $\lambda(x_0), \ldots, \lambda(x_{n-1})$.

Ця властивість дає змогу побудувати процес $x(t)$ таким способом. Побудуємо спочатку ланцюг Маркова $x_0, x_1, x_2, \ldots$ з імовірністю переходу $\pi(x, B)$. Нехай тепер $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — послідовність однаково розподілених незалежних величин, $P\{\xi_1 > t\} = e^{-t}$, $t \geqslant 0$; $\tau_k = \dfrac{\xi_k}{\lambda(x_{k-1})}$.

Якщо по $\{x_k\}$ та $\{\tau_k\}$ побудувати процес так, як було вказано вище, то це буде однорідний марківський процес, для якого оператор A визначається формулою (3), $\lambda(x)$ та $\pi(x, B)$ такі, які були використані при побудові $\{x_k\}$ та $\{\tau_k\}$.

Загальні чисто розривні процеси. Регулярність. Однорідний марківський процес — чисто розривний загальний, якщо виконуються дві умови: 1) *у кожному своєму стані він перебуває певний додатний час*, 2) після виходу з цього стану процес безпосередньо переходить у деякий інший, його траєкторії неперервні справа. Для такого процесу можна визначити ланцюг x_0, x_1, ... (він називається вкладеним ланцюгом Маркова для процесу), а також величини τ_1, τ_2, ... Так само як і раніше, можна встановити теорему 3 та формулу (9). Але функція $\lambda(x)$ тут вже не обов'язково обмежена, тому можливо, що процес зробить за скінченний проміжок часу нескінченне число переходів із стану в стан. Процес називається регулярним, якщо для всіх x $P_x\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k<\infty\right\}=0$.

Т е о р е м а 5. Для того щоб процес був регулярним, необхідно і достатньо, щоб рівняння

$$[\lambda+\lambda(x)]\,g(x)=\lambda(x)\int\pi(x,dy)\,g(y) \tag{11}$$

не мало невід'ємного обмеженого розв'язку, крім $g=0$, яке б не було $\lambda>0$.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що $P_x\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k<+\infty\right\}>0$ для деяких x. Візьмемо $u_\lambda(x)=M\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k\right\}$, ця функція не є тотожний нуль,

$$u_\lambda(x)=M_xe^{-\lambda\tau_1}M_{x(\tau_1)}\exp\left\{-\sum_{k=2}^{\infty}\tau_k\right\}=$$

$$=M_xe^{-\lambda\tau_1}u_\lambda(x(\tau_1))=\frac{\lambda(x)}{\lambda+\lambda(x)}\int u_\lambda(y)\,\pi(x,dy).$$

Тому $u_\lambda(x)$ є розв'язок (11). Припустимо, що $g\geqslant 0$, $g\leqslant c$, g — розв'язок (11). Тоді

$$g(x)=\frac{\lambda(x)}{\lambda+\lambda(x)}\int g(y)\,\pi(x,dy)=M_xe^{-\lambda\tau_1}g(x(\tau_1))=$$

$$=M_xe^{-\lambda\tau_1}\frac{\lambda(x(\tau_1))}{\lambda+\lambda(x(\tau_1))}\int g(y)\,\pi(x(\tau_1),dy))=M_xe^{-\lambda\tau_1-\lambda\tau_2}g(x(\tau_2))=\cdots$$

$$\cdots=M_x\exp\{-\lambda\tau_1-\lambda\tau_2-\cdots-\lambda\tau_n\}\,g(x(\tau_n)),$$

тому

$$g(x)\leqslant cM_x\exp\left\{-\lambda\sum_{1}^{n}\tau_n\right\},\quad g(x)\leqslant cM_x\exp\left\{-\lambda\sum_{1}^{\infty}\tau_k\right\}.$$

У випадку регулярного процесу $g(x)=0$.

22. ПРОЦЕСИ ІЗ ЗЛІЧЕННОЮ МНОЖИНОЮ СТАНІВ

Розглянемо однорідні процеси у множині $X = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{B}$ — це σ-алгебра усіх підмножин X, вона породжується одноточковими множинами. Тому імовірність переходу визначається рівностями

$$P(t, x, B) = \sum_{y \in B} P(t, x, \{y\}).$$

Будемо позначати $p_{ij}(t) = P(t, i, \{j\})$. Функції $\{p_{ij}(t), i \in X, j \in \in X\}$ називаються імовірностями переходу процесу із зліченною множиною станів. Вони задовольняють умови: а) $p_{ij}(t) \geqslant 0$; б) $\sum_j p_{ij}(t) = 1$; в) виконуються рівняння Колмогорова — Чепмена:

$$p_{ij}(t + s) = \sum_k p_{ik}(t)\, p_{kj}(s). \tag{1}$$

Введемо ще умову стохастичної неперервності: г) для всіх i $p_{ii}(t) \to 1$, коли $t \to 0$. Далі розглянемо теорію, розвинену А. М. Колмогоровим, яка при найменших припущеннях дозволяє дослідити будову імовірностей переходу.

Л е м а 1. Імовірності переходу — рівномірно неперервні функції t.

Д о в е д е н н я. Маємо

$$p_{ij}(t + h) - p_{ij}(t) = \sum_k (p_{ik}(h) - \delta_{ik})\, p_{kj}(t) =$$

$$= (p_{ii}(h) - 1)\, p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} p_{ik}(h)\, p_{kj}(t),$$

$$p_{ii}(h) - 1 \leqslant p_{ij}(t + h) - p_{ij}(t) \leqslant \sum_{k \neq i} p_{ik}(h) = 1 - p_{ii}(h).$$

Звідси і випливає твердження леми.

Л е м а 2. Існує границя (можливо, рівна $+\infty$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h}.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $s = \sup_{t \geqslant 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}$, може бути $s = +\infty$. Покажемо, що $\underline{\lim}_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = s$. Для цього треба показати, що для всіх $c < s$ існує таке $\delta > 0$, що $\frac{1 - p_{ii}}{t} > c$, коли $t < \delta$. Для будь-яких $h < t$, якщо $nh \leqslant t < (n + 1)h$,

$$p_{ii}(t) \geqslant [p_{ii}(h)]^n\, p_{ii}(t - nh),$$

$$\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} \leqslant \frac{1 - (p_{ii}(h))^n\, p_{ii}(t - nh)}{t} \leqslant \frac{1 - (p_{ii}(h))^n}{nh} +$$

$$+ \frac{1 - p_{ii}(t - nh)}{t} \leqslant \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} + \frac{1}{t} \sup_{u \leqslant h} (1 - p_{ii}(u)).$$

Виберемо t_0 так, щоб $\frac{1-p_{ii}(t_0)}{t_0} > c$. Оскільки $\frac{1}{t_0}\sup_{u\leqslant h}(1-p_{ii}(u)) \to$ $\to 0$, коли $h\to 0$, то можна вказати таке δ, що при $h<\delta$

$$\frac{1-p_{ii}(t_0)}{t_0} - \frac{1}{t_0}\sup_{u\leqslant h}(1-p_{ii}(u)) > 0.$$

Тоді $\frac{1-p_{ii}(h)}{h} > c$ при $h<\delta$.

Лема 3. Якщо $i\neq j$, то існує скінченна границя

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}p_{ij}(t) = a_{ij}.$$

Доведення. Розглянемо ланцюг Маркова в X $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з імовірностями переходу $p_{ij}(h)$. Тоді

$$p_{ij}(nh) = P_i\{\xi_n = j\} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_k P_i\{\xi_1\neq j, \ldots, \xi_{k-1}\neq j, \xi_k = i, \xi_{k+1} = j, \ldots, \xi_n = j\}. \quad (2)$$

Ця нерівність є наслідок того, що події під знаком P_i праворуч у (2) несумісні і кожна міститься у події $\{\xi_n = j\}$. Використовуючи марківську властивість, з (2) виводимо таке:

$$p_{ij}(nh) \geqslant \sum_k P_i\{\xi_1\neq j, \ldots, \xi_{k-1}\neq j, \xi_k = i\}\, p_{ij}(h)\, p_{jj}((n-k-1)h). \quad (3)$$

Візьмемо довільне $\varepsilon>0$ і $\delta>0$ таке, що $p_{ii}(t) > 1-\varepsilon$, $p_{jj}(t) >$ $> 1-\varepsilon$, коли $t<\delta$. Тоді для $nh<\delta$

$$P_i\{\xi_1\neq j, \ldots, \xi_{k-1}\neq j, \xi_k = i\} =$$
$$= P_i\{\xi_k = i\} - \sum_{l<k} P_i\{\xi_1\neq j, \ldots, \xi_{l-1}\neq j, \xi_l = j, \xi_k = i\} =$$
$$= P_i\{\xi_k = i\} - \sum_{l<} P_i\{\xi_1\neq j, \ldots, \xi_{l-1}\neq j, \xi_l = j\}\, p_{ji}((k-l)h) \geqslant$$
$$\geqslant 1-\varepsilon-\varepsilon\sum_{l<k} P_i\{\xi_1\neq j, \ldots, \xi_{l-1}\neq j, \xi_l = j\}$$

(ми використали те, що $p_{ij}((k-l)h) \leqslant 1-p_{jj}((k-l)h) < \varepsilon$). Сума праворуч не перебільшує 1, бо події під знаком P_i несумісні. Отже,

$$P_i\{\xi_1\neq j, \ldots, \xi_{k-1}\neq j, \xi_k = i\} \geqslant 1-2\varepsilon.$$

Тому з (3) випливає

$$p_{ij}(nh) \geqslant n(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)\, p_{ij}(h). \quad (4)$$

Нехай $h\to 0$, $n = \left[\frac{t}{h}\right]$ (тут $[\ ]$ — ціла частина числа), $t<\delta$, тоді $nh\to t$. Поділивши обидві частини нерівності (4) на nh, після переходу до границі, коли $h \to 0$, матимемо

$$(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)\varlimsup_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}\leqslant\frac{p_{ij}(t)}{t}, \qquad (5)$$

звідси випливають скінченність верхньої границі і нерівність

$$(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)\varlimsup_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}\leqslant\varliminf_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}.$$

З того, що $\varepsilon > 0$ — довільне, дістанемо твердження леми.

Зауваження 1. Позначимо

$$a_{ii}=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ii}(t)-1}{t},$$

можливо, $a_{ii} = -\infty$. Тоді

$$\sum_{j\neq i} a_{ij}\leqslant -a_{ii} \qquad (6)$$

внаслідок нерівності $\displaystyle\sum_{j\neq i,\, j\leqslant n}\frac{p_{ij}(t)}{t}\leqslant\frac{1-p_{ii}(t)}{t}$.

Означення. Стан i називається регулярним, якщо $a_{ii} > -\infty$, $\sum_j a_{ij}=0$. Процес, у якого усі стани регулярні, називається локально регулярним.

Теорема 1. Якщо стан i регулярний, то для всіх j існує похідна $\frac{d}{dt}p_{ij}(t)$ і виконується рівність

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t)=\sum_k a_{ik}p_{kj}(t). \qquad (7)$$

Доведення. Маємо

$$\left|\frac{1}{h}(p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t))-\sum_k a_{ik}p_{kj}(t)\right| = \left|\sum_k\left(\frac{p_{ik}(h)-\delta_{ik}}{h}-a_{ik}\right)p_{kj}(t)\right|.$$

Виберемо таке N, щоб було $i < N$. Тоді

$$\left|\frac{1}{h}(p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t))-\sum_k a_{ik}p_{kj}(t)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{k\leqslant N}\left(\frac{p_{ik}(h)-\delta_{ik}}{h}-a_{ik}\right)p_{kj}(t)\right|+\sum_{k>N}\frac{p_{ik}(h)}{h}+\sum_{k>N}a_{ik}.$$

Але

$$\sum_{k>N}\frac{p_{ik}(h)}{h}=\sum_{k\leqslant N}\frac{\delta_{ik}-p_{ik}(h)}{h}=\sum_{k\leqslant N}\left(\frac{\delta_{ik}-p_{ik}(h)}{h}+a_{ik}\right)-\sum_{k\leqslant N}a_{ik}=$$

$$=\sum_{k\leqslant N}\left(\frac{\delta_{ik}-p_{ik}(h)}{h}+a_{ik}\right)+\sum_{k>N}a_{ik}.$$

Отже, рівномірно по t

$$\left|\frac{1}{h}\left(p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)\right)-\sum_k a_{ik}p_{kj}(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k\leqslant N}\left|\frac{p_{ik}(h)-\delta_{ik}}{h}\right| + 2\sum_{k>N} a_{ik},$$

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{1}{h}\left(p_{ik}(t+h)-p_{ij}(t)\right)\right| - \sum_k a_{ik}p_{kj}(t)\Big| \leqslant 2\sum_{k\geqslant N} a_{ik}.$$

Переходячи тепер до границі, коли $N\to\infty$, завершуємо доведення.

Зауваження 2. Якщо (7) виконується для всіх i (це буде, коли процес локально регулярний), то (7) є перша система рівнянь Колмогорова (це обернена система).

Мінімальний розв'язок системи Колмогорова. Перепишемо (7) в інтегральній формі так:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} - a_{ii}p_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} a_{ik}p_{kj}(t),$$

$$\frac{d}{dt}\left(p_{ij}(t)e^{-a_{ii}t}\right) = e^{-a_{ii}t}\sum_{k\neq i} a_{ik}p_{kj}(t),$$

$$p_{ij}(t)e^{-a_{ii}t} - p_{ij}(0+) = \int_0^t e^{-a_{ii}s}\sum_{k\neq i} a_{ik}p_{kj}(s)\,ds,$$

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij}e^{a_{ii}t} + \int_0^t \exp\{a_{ii}(t-s)\}\sum_{k\neq i} a_{ik}p_{kj}(s)\,ds \tag{8}$$

(ми використали те, що $p_{ij}(t)\to\delta_{ij}$, коли $t\to 0$). Рівняння у формі (8) зручне тим, що воно має невід'ємне ядро. Будемо розв'язувати (8) методом послідовних наближень. Нехай

$$\begin{gathered} p_{ij}^0(t) = \delta_{ij}e^{a_{ii}t}, \\ p_{ij}^n(t) = \delta_{ij}e^{a_{ii}t} + \int_0^t \exp\{a_{ii}(t-s)\}\sum_{k\neq i} a_{ik}p_{kj}^{n-1}(s)\,ds, \quad n>1. \end{gathered} \tag{9}$$

За індукцією можемо встановити, що: 1) $p_{ij}^n(t)\geqslant 0$, 2) $\sum\limits_j p_{ij}^n(t)\leqslant 1$. Для доведення 2) маємо

$$\sum_j p_{ij}^0(t) = e^{a_{ii}t}\leqslant 1.$$

Якщо $\sum\limits_j p_{ij}^{n-1}(t)\leqslant 1$, то

$$\sum p_{ij}^n(t)\leqslant e^{a_{ii}t} + \int_0^t \exp\{a_{ii}(t-s)\}\sum_{k\neq i} a_{ik}ds =$$

$$= e^{a_{ii}t} + \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)}(-a_{ii})\,ds = 1.$$

Нарешті покажемо, що: 3) $p_{ij}^n(t)\geqslant p_{ij}^{n-1}(t)$.

Нехай $q_{ij}^0(t) = p_{ij}^0(t)$, $q_{ij}^n(t) = p_{ij}^n(t) - p_{ij}^{n-1}(t)$. Тоді $q_{ij}^0(t) \geqslant 0$, для $n > 0$ виконується рівність

$$q_{ij}^n(t) = \int_0^t \exp\{a_{ii}(t-s)\} \sum_{k \neq i} a_{ik} q_{ik}^{n-1}(s)\, ds, \tag{10}$$

отже, $q_{ij}^n(t) \geqslant 0$, якщо такими будуть $q_{ij}^{n-1}(t)$. Властивість 3) доведена. З властивостей 1) — 3) випливає, що існують $\bar{p}_{ij}(t) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n(t)$; ці функції задовольняють умови: а) $\bar{p}_{ij}(t) \geqslant 0$, б) $\sum_j \bar{p}_{ij}(t) \leqslant 1$, в) $\bar{p}_{ij}(t)$ задовольняє рівняння (8), якщо його підставити замість $p_{ij}(t)$. Остання властивість може бути встановлена граничним переходом у рівнянні (9). Покажемо, що $\bar{p}_{ij}(t)$ має таку властивість: г) який би не був розв'язок $p_{ij}(t)$ системи (8), для якого $p_{ij}(t) \geqslant 0$, буде $\bar{p}_{ij}(t) \leqslant p_{ij}(t)$. Дійсно, $p_{ij}(t) \geqslant \delta_{ij} e^{a_{ii}t} = p_{ij}^0(t)$. Якщо $p_{ij}^{n-1}(t) \leqslant$ $\leqslant p_{ij}(t)$, то

$$p_{ij}^n(t) = \delta_{ij} e^{a_{ii}t} + \int_0^t \exp\{a_{ii}(t-s)\} \sum a_{ik} p_{ij}^{n-1}(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \delta_{ij} e^{a_{ii}t} + \int_0^t \exp\{a_{ii}(t-s)\} \sum_k a_{ik} p_{ij}(s)\, ds.$$

Переходячи до границі, матимемо $\bar{p}_{ij}(t) \leqslant p_{ij}(t)$.

Регулярність і єдиність розв'язку рівнянь Колмогорова. Ми довели існування розв'язку рівняння (7), який задовольняє умови

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad p_{ij}(t) \geqslant 0, \quad \sum_j p_{ij}(t) \leqslant 1.$$

Знайдемо умову, коли розв'язок єдиний. Якщо існує розв'язок $p_{ij}(t)$, який відмінний від $\bar{p}_{ij}(t)$, то функції $g_i(t) = \sum_j [p_{ij}(t) - \bar{p}_{ij}(t)]$ будуть невід'ємні і не всі тотожно рівні нулю. Вони задовольнятимуть систему рівнянь

$$g_i(t) = \int_0^t e^{a_{ii}(t-s)} \sum_{k \neq i} a_{ik} g_k(s)\, ds. \tag{11}$$

Нехай $\hat{g}_i(\lambda) = \int_0^\infty g_i(t) e^{-\lambda t} dt$. Застосовуючи перетворення Лапласа, дістанемо

$$\hat{g}_i(\lambda) = \frac{1}{\lambda - a_{ii}} \sum_{k \neq i} a_{ik} \hat{g}_k(\lambda). \tag{12}$$

Зауважимо, що з умов

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -a_{ii},$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = a_{ij} = -a_{ii}\pi_{ij},$$

де $\pi_{ij} \geqslant 0$, $\sum\limits_{j \neq i} \pi_{ij} = 1$, випливає, що коли $\tau = \inf\{t \in Q,\ x(t) \neq x(0)\}$, де Q — множина двоїчно-раціональних чисел, тоді $P_i\{\tau > t,\ x(t) = j\} = e^{a_{ii}t}\pi_{ij}$. Це доводиться так, як для чисто розривних процесів. Тому $x(t)$ можна розглядати як загальний чисто розривний процес. Згідно з теоремою про регулярність для такого процесу, існування ненульового обмеженого (по t) розв'язку системи (12) можливе тоді і лише тоді, коли процес нерегулярний. Отже, єдиність розв'язку еквівалентна регулярності процесу.

Нехай $q_{ij}^n(t) = p_{ij}^n(t) - p_{ij}^{n-1}(t)$, $q_{ij}^0(t) = p_{ij}^0(t)$. Тоді $\sum\limits_{n=0} q_{ij}^n(t) = p_{ij}(t)$. Функції $q_{ij}^n(t)$ мають простий імовірнісний смисл. Нехай $\nu(t)$ — число переходів із стану в стан, що відбулися за час t: $\nu(t) = k$, якщо $\tau_1 + \ldots + \tau_k \leqslant t < \tau_1 + \ldots + \tau_{k+1}$. Тоді

$$q_{ij}^n(t) = P_i\{x(t) = j,\ \nu(t) = n\}.$$

Щоб переконатись у цьому, досить зауважити, що

$$P_i\{x(t) = j,\ \nu(t) = n\} =$$

$$= \sum_{k \neq i} M_i I_{\{\tau_1 < t, x(\tau) = k\}} P_i\{x(t),\ \nu(t) = n / \mathcal{F}_{\tau_1}\} =$$

$$= \sum_{k \neq i} \int\limits_0^t e^{a_{ii}s} a_{ik} P_k\{x(t-s) = j,\ \nu(t-s) = n-1\},$$

а q_{ij}^n задовольняють рівняння (10), яке еквівалентне попередньому. А при $n = 0$

$$P_i\{x(t) = j,\ \nu(t) = 0\} = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ P_i\{\tau < t\} = e^{a_{ii}t}, & i = j. \end{cases}$$

Оскільки для регулярного процесу $\Sigma\tau_j = +\infty$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{\nu(t) = n\} = 1,$$

$$\bar{p}_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^n(t) = \sum P_i\{\nu(t) = n\} = 1.$$

Отже, маємо ще таку умову регулярності: необхідно і достатньо, щоб для всіх $t > 0$

$$\sum_j \bar{p}_{ij}(t) = 1.$$

Друга система рівнянь Колмогорова. Маємо

$$\frac{1}{h}[p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)] = \sum_k p_{ik}(t)\frac{1}{h}(p_{kj}(h) - \delta_{kj}) =$$

$$= p_{ij}(t)\frac{p_{kj}(h) - 1}{h} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(t)}{h}.$$

Перехід до границі дає для всіх n

$$p'_{ij}(t) \geqslant p_{ik}(t)\,a_{jj} + \sum_{\substack{k \neq j \\ k \leqslant n}} p_{ik}(t)\,a_{kj},$$

отже,

$$p'_{ij}(t) \geqslant p_{ik}(t)\,a_{jj} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t)\,a_{kj},$$

якщо у попередній нерівності буде рівність, то

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)\,a_{kj} \tag{13}$$

називається другою системою рівнянь Колмогорова. Вона вірна для $\overline{p}_{ij}(t)$ (перевірка є аналітичний виклад, що спирається на формулу

$$q^n_{ij}(t) = \int_0^t \sum q^{n-1}_{ik}(s)\,a_{kj}e^{a_{jj}(t-s)}ds).$$

Тому друга система виконується для регулярного процесу.

23. ПРОЦЕС РОЗМНОЖЕННЯ ТА ЗАГИБЕЛІ

Так називається процес з фазовим простором $Z_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$, у якого можливі переходи з кожного стану лише у два сусідні: при $k \geqslant 1$ процес із стану k може перейти або в $k+1$, або в $k-1$, а із стану 0 — лише в стан 1. Тому $a_{ij} = 0$, коли $|i - j| > 1$.

Будемо вважати, що процес локально регулярний. Нехай

$$a_{ii+1} = \lambda_i, \quad a_{ii-1} = \mu_i, \quad a_{ii} = -\lambda_i - \mu_i, \quad i > 0, \quad a_{00} = -\lambda_0.$$

Перша система рівнянь Колмогорова має вигляд

$$\frac{d}{dt}\,p_{ij}(t) = -(\lambda_i + \mu_i)\,p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t) + \mu_i p_{i+1,j}(t). \tag{1}$$

Вона вірна завжди. Друга система має вигляд

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -(\lambda_i + \mu_i)\,p_{ij}(t) + p_{ij+1}(t)\,\mu_{j+1} + p_{ij-1}(t)\,\lambda_{j-1}. \tag{2}$$

Вона виконується, якщо процес регулярний. Припустимо, що $(p_0, p_1, \ldots)$ — початковий розподіл, $P\{x(0, \omega) = k\} = p_k$. Тоді $p_i(t) = \sum_k p_k p_{ki}(t)$ є імовірність того, що $x(t, \omega) = i$. З (2) дістанемо таке рівняння для $p_i(t)$:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -(\lambda_i + \mu_i)\,p_i(t) + \mu_{i+1}p_{i+1}(t) + \lambda_{i-1}\,p_{i-1}(t). \tag{3}$$

Розглянемо умову існування стаціонарних імовірностей, тобто такого початкового розподілу $(p_0, p_1, \ldots)$, для якого $p_i(t) = p_i$ при всіх t, яке б не було i. З рівності (3) випливає, що $\{p_i\}$ задовольняють систему рівнянь

$$(\lambda_i + \mu_i)\,p_i = \mu_{i+1}p_{i+1} + \lambda_{i-1}p_{i-1}, \quad i > 0 \tag{4}$$
$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

Будемо вважати, що всі $\lambda_i > 0$, $i \geqslant 0$, $\mu_i > 0$, $i > 0$. Тоді можемо всі p_i, $i > 0$ записати як кратні p_0:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1} p_0, \qquad p_k = \frac{\lambda_{k-1} \ldots \lambda_0}{\mu_k \ldots \mu_1} p_0 \tag{5}$$

(це можна перевірити, використовуючи метод математичної індукції). Якщо $p_0 = 0$, то всі $p_i = 0$. Але треба, щоб було $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Тому умовою існування стаціонарного розподілу є

$$s = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1} \ldots \lambda_0}{\mu_k \ldots \mu_q} < \infty \tag{6}$$

і тоді

$$p_0 = (1+s)^{-1}, \quad p_k = (1+s)^{-1} \frac{\lambda_{k-1} \ldots \lambda_0}{\mu_k \ldots \mu_1}, \quad k > 0. \tag{7}$$

Умова регулярності. Для процесу із зліченною множиною станів, локально регулярного була встановлена необхідна і достатня умова регулярності: для будь-якого $\lambda > 0$ рівняння

$$\lambda g_i = \sum a_{ik} g_k \tag{8}$$

не може мати обмеженого невід'ємного розв'язку, крім тотожного нуля. У нашому випадку рівняння (8) має вигляд

$$\begin{gathered} \lambda g_0 = -\lambda_0 g_0 + \lambda_0 g_1, \\ \lambda g_i = -(\lambda_i + \mu_1) g_i + \lambda_i g_{i+1} + \mu_i g_{i-1}, \quad i > 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Нехай $f_0 = g_0$, $f_1 = g_1 - g_0, \ldots, f_n = g_n - g_{n-1}, \ldots$ Тоді з (9) матимемо

$$\begin{gathered} \lambda g_0 = \lambda_0 f_1, \quad \lambda g_i = \lambda_i f_{n+1} - \mu_i f_i, \quad i > 0, \\ \lambda_i f_{i+1} = \lambda g_i + \mu_i f_i. \end{gathered} \tag{10}$$

Якщо $g_0 = 0$, то $f_1 = 0$, $g_1 = g_0 + f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $g_2 = g_1 + f_2 = 0 \ldots$, тобто усі $f_k = 0$ і усі $g_k = 0$. Якщо $g_0 \geqslant 0$, то за індукцією в формули (10) можемо вивести, що $f_k \geqslant 0 \ \forall\ k$, тому

$$f_{i+1} = \frac{\lambda}{\lambda_i} g_i + \frac{\mu_i}{\lambda_i} \frac{\lambda}{\lambda_{i-1}} g_{i-1} + \cdots + \frac{\mu_i \ldots \mu_1 \lambda}{\lambda_i \ldots \lambda_1 \lambda_0} g_0. \tag{11}$$

Оскільки $g_i \geqslant g_k \geqslant g_0$ для $i \geqslant k \geqslant 0$, то дістанемо такі дві нерівності:

$$f_{i+1} \leqslant A_i(\lambda) g_i, \quad f_{i+1} \geqslant A_i(\lambda) g_0, \tag{12}$$

де

$$A_i(\lambda) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i \lambda_{i-1}} + \cdots + \frac{\mu_i \ldots \mu_1}{\lambda_i \ldots \lambda_0} \right).$$

Припустимо, що $\{g_i\}$ — невід'ємний розв'язок (9), не всі $g_i = 0$. Тоді $g_0 > 0$,

$$g_i = f_0 + \cdots + f_i \geqslant g_0 \sum_{k=0}^{i-1} A_i(\lambda), \quad A_0(\lambda) = 1.$$

Тому з обмеженості g_i випливає збіжність ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i(\lambda)$. Навпаки, припустимо, що цей ряд збіжний. Тоді з першої нерівності (13)

$$g_{i+1} - g_i \leqslant A_i(\lambda) g_i, \quad g_{i+1} \leqslant (1 + A_i(\lambda)) g_i \leqslant g_i e^{A_i(\lambda)},$$

$$g_{i+1} \leqslant g_0 \exp\left\{\sum_{k=0}^{i} A_k(\lambda)\right\} \leqslant g_0 \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\lambda)\right\},$$

отже, g_i обмежені. Ми довели таке твердження.

Теорема. Для регулярності процесу розмноження та загибелі необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i\lambda_{i-1}} + \cdots + \frac{\mu_i \ldots \mu_1}{\lambda_i \ldots \lambda_0}\right) = +\infty. \tag{13}$$

Розглянемо деякі важливі приклади таких процесів.

1. Процес чистого розмноження. Це процес, у якого $\mu_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. З умови (13) випливає, що він буде регулярний тоді і лише тоді, коли $\sum\limits_k \lambda_k^{-1} = +\infty$. Очевидно, що умова (6) не виконується і стаціонарний розподіл відсутній. Можна у явному вигляді знайти імовірності переходу. Нехай τ_i — величина, що має показниковий розподіл з параметром λ_i, для різних i ці величини незалежні. Якщо початкове положення процесу k, то він може перейти з цього стану лише у стан $n \geqslant k$. Він буде у стані n в момент t, якщо $\tau_k + \ldots + \tau_{n-1} \leqslant t < \tau_k + \ldots + \tau_n$ (коли $k = n$, то $0 \leqslant t < \tau_k$). Отже, $p_{kk}(t) = \exp\{-\lambda_k t\}$, $p_{kn}(t) = P\{\tau_k + \ldots + \tau_n > t\} - P\{\tau_k + \ldots + \tau_{n-1} > t\}$ для $k > n$. Ці імовірності можна записати у явному вигляді. Але це будуть досить складні вирази. Більш простий вираз мають перетворення Лапласа — Стілтьєса:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dp_{kk}(t) = -\frac{\lambda_k}{\lambda + \lambda_k},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dp_{kn}(t) = \prod_{i=k}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda + \lambda_i} - \prod_{i=k}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda + \lambda_i}.$$

2. Процес лінійного росту. Вважаємо, що стан процесу визначається кількістю осіб у популяції, кожна особа може породити ще одну за час Δt з імовірністю $a\Delta t$. Імовірність, що хоч одна загине за цей час, $b\Delta t$. Якщо особи загинули, то з імовірністю $c\Delta t$ може з'явитись одна особа із «зовнішнього середовища», після чого розвиток продовжується за вказаними правилами. Таким чином, $\lambda_0 = c$, $\lambda_k = ka$, $k > 0$, $\mu_k = b$. Процес регулярний, бо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Далі,

$$\frac{\lambda_{k-1} \ldots \lambda_0}{\mu_k \ldots \mu_1} = \frac{ca^{k-1}(k-1)!}{b^k}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ca^{k-1}}{b^k}(k-1)! = +\infty,$$

якщо $c > 0$, $a > 0$. Тому стаціонарного розподілу не існує.

3. Системи обслуговування. Така система характеризується кількістю приладів N, інтенсивністю вхідного потоку об'єктів a, інтенсивністю обслуговування, а також наявністю чи відсутністю черги. Величина $a\Delta t + o(\Delta t)$ є імовірність того, що в систему за час $[t, t + \Delta t]$ прийде новий об'єкт обслуговування; $b\Delta t + o(\Delta t)$ — це імовірність того, що за час $[t, t + \Delta t]$ прилад, що обслуговує якийсь об'єкт, звільниться для обслуговування наступного. Об'єкт, який прийшов у систему, починає одразу обслуговуватись вільним приладом. Якщо таких нема, то він зникає (нема черги), або стає в чергу на обслуговування і почне обслуговуватись першим звільненим приладом. Стан системи визначається числом об'єктів, що обслуговуються і стоять у черзі. Ми вважаємо, що прилади працюють незалежно один від одного і від вхідного потоку.

а) Нескінченне число приладів. Фазовий простір Z_+. Якщо система має стан n, то перехід у стан $n + 1$ відбудеться, коли з'явиться новий об'єкт. Для всіх n імовірність такої події за час Δt є $a\Delta t + o(\Delta t)$. Перехід у стан $n - 1$ буде, якщо звільниться один з тих n приладів, що обслуговують наявні об'єкти. Імовірність того, що це станеться за час Δt, є $nb\Delta t + o(\Delta t)$. Отже, $\mu_n = nb$, $\lambda_n = a$, $n \geqslant 0$. Процес регулярний, бо $\Sigma\lambda_n^{-1} = +\infty$. Стаціонарні імовірності завжди існують і визначаються формулами

$$p_k = \frac{a^k}{b^k k!} e^{-\frac{a}{b}},$$

це розподіл Пуассона з параметром $\frac{a}{b}$.

б) N приладів, є черга. Знову фазовий простір Z_+. Як і раніше, $\lambda_n = a$ для всіх n. Якщо $n \leqslant N$ і в системі n об'єктів, то всі вони обслуговуються, тому $\mu_k = nb$. Якщо ж $n \geqslant N$, то обслуговується лише N об'єктів, тому $\mu_n = Nb$. Процес знову регулярний, стаціонарні імовірності існують, якщо

$$S = \sum_{k \geqslant N} \frac{a^k}{(Nb)^{k-N}} < \infty, \quad a < Nb.$$

У цьому випадку

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{a^k}{b^k k!}\left(\displaystyle\sum_{l=1}^{N} \frac{a^b}{b^l l!} + \frac{N^N}{N!} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{a^k}{Nb}\right)^k\right)^{-1}, & k \leqslant N, \\ \left(\dfrac{a}{Nb}\right)^k \dfrac{N^N}{N!}\left(\displaystyle\sum_{l=1}^{N} \frac{a^l}{b^l l!} + \frac{N^N}{N!} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{a}{Nb}\right)^k\right)^{-1}, & k \geqslant N. \end{cases}$$

в) N приладів, черги нема. Фазовий простір $X = \{0, 1, \ldots, N\}$. Процес має скінченну множину станів. $\lambda_k = 0$, якщо $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, $\lambda_N = 0$, $\mu_k = kb$, $k \leqslant N$. Стаціонарні імовірності виражені формулами

$$P_k(N) = \frac{a^k}{b^k k!}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{b^k k!}\right)^{-1}.$$

4. Іонізація. Розглянемо систему N молекул газу, які під впливом жорсткого випромінювання можуть іонізуватись, $a\Delta t + o(\Delta t)$ є імовірність іонізації однієї молекули за час Δt. Пара іонів різних електричних зарядів може рекомбінувати знову, утворюючи молекулу газу, імовірність цього за час Δt є $b\Delta t$. Будемо вважати, що стан системи визначається числом іонізованих молекул. Отже, стани є $\{0, 1, \ldots, N\}$. Припустимо, що стан системи є n. Тоді є $N - n$ неіонізованих молекул. Оскільки кожна з них може іонізуватись за час Δt з імовірністю $a\,\Delta t$, то $\lambda_n = (N - n)\,a$. Якщо вважати, що імовірність рекомбінацій пропорціональна числу пар іонів різних знаків (їх n^2), то $\mu_n = n^2 b$. Тому для стаціонарних імовірностей матимемо таку формулу:

$$p_k = \frac{a^k N \ldots (N-k+1)}{b^k (k!)^2}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{b^k}\,\frac{N \ldots (N-k+1)}{(k!)^2}\right)^{-1}.$$

24. ГІЛЛЯСТІ ПРОЦЕСИ З ОДНИМ ТИПОМ ЧАСТИНОК

Розглянемо систему однакових частинок, які можуть випадково зникати або перетворюватись у кілька частинок. Будемо вважати, що стан системи визначається кількістю частинок. Еволюція кожної з них не залежить ні від кількості інших частинок у системі, ні від того, які перетворення відбуваються з цими іншими частинками. Вперше задачі, пов'язані з такими системами, ставилися при вивченні вимирання сімей серед англійської аристократії. Взагалі розвиток біологічних популяцій за певних умов досить природно описувати подібними процесами.

Процеси з дискретним часом. Позначимо число частинок у час n через ξ_n. Нехай $\eta_i^{(n)}$, $i \leqslant \xi_n$ — число частинок, в які перетворилась i-та з наявних в момент n частинок. Тоді

$$\xi_{n+1} = \sum_{i=1}^{\xi_n} \eta_i^{(n)}. \qquad (1)$$

З тих умов, які були сформульовані вище, робимо висновок, що $\eta_i^{(n)}$ — однаково розподілені незалежні величини, вони не залежать від ξ_n. Будемо вважати, що розподіл $\eta_i^{(n)}$ не залежить від n. Такий гіллястий процес називається однорідним. Для вивчення гіллястих процесів зручно використати твірні функції. Далі ми матимемо справу з невід'ємними цілочисловими величинами. Якщо ξ — така величина, то її твірна функція

$$\varphi(z) = Mz^{\xi} = \sum_{k\geqslant 0} P\{\xi = k\}\, z^k, \qquad (2)$$

вона визначена для комплексних z, для яких $|z| \leqslant 1$. Нехай $\varphi(n, z) = Mz^{\xi_n}$. Тоді з (1) дістанемо

$$\varphi(n+1, z) = Mz^{\sum_{i=1}^{\xi_n} \eta_i^{(n)}} = \sum_{k=0}^{\infty} Mz^{\sum_{i=1}^{k} \eta_i^{(n)}}\, P\{\xi_n = k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi(z))^k P\{\xi_n = k\} = \varphi(n, \varphi(z)),$$
$$\varphi(z) = Mz^{\eta_i^{(n)}} = M(z^{\xi_1}/\xi_0 = 1).$$

Зауважимо, що умовний розподіл ξ_{n+1}, коли задані $\xi_0, \ldots, \xi_n$, залежить лише від ξ_n (і не залежить від n), тому $\{\xi_n\}$ — однорідний ланцюг Маркова з фазовим простором Z_+. Отже, ми маємо такі рекурентні формули для $\varphi(n, z)$:

$$\varphi(n, z) = \varphi(0, \varphi(\varphi \ldots \varphi(z) \ldots)). \tag{3}$$

Досить розглядати твірну функцію. Якщо в початковий момент була 1 частинка, тоді

$$\varphi(n, z) = \varphi_n(z), \quad \varphi_1(z) = \varphi(z), \ \ldots, \ \varphi_n(z) = \varphi(\varphi_{n-1}(z)) = \varphi_{n-1}(\varphi(z)).$$

Якщо в початковий момент часу було k частинок, то

$$\varphi(n, z) = (\varphi_n(z))^k. \tag{4}$$

Задача про виродження процесу. Нехай $q_n = P\{\xi_n = 0\} = \varphi(n, 0)$. Очевидно, що $q_n \leqslant q_{n+1}$, тому існує границя $q = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$, яка називається імовірністю виродження процесу. Це є імовірність того, що колись у системі всі частинки зникнуть. Будемо розглядати цю імовірність для системи, у якої на початку була одна частинка (з формули (4) випливає, що тоді q^k є імовірність виродження системи, якщо на початку було k частинок).

Т е о р е м а 1. q є найменший додатний корінь рівняння

$$\varphi(z) = z, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Д о в е д е н н я. Те, що $q = \varphi(q)$, є наслідок рівності $q_{n+1} = \varphi(q_n)$. Далі, $\varphi(1) = 1$. Для $0 < z < 1$

$$\varphi''(z) = \Sigma k(k-1) z^{k-2} P\{\xi_1 = k/\xi_0 = 1\} \geqslant 0.$$

Тому функція $\varphi(z)$ опукла вниз на $[0, 1]$. Вона аналітична. Якщо $\varphi(z) \not\equiv z$, то рівняння $\varphi(z) = z$ може мати не більше одного кореня $z \in [0, 1)$. Якщо $\varphi(0) = 0$, то цей корінь є 0. У цьому випадку частинки не зникають і тому $q = 0$. Припустимо, що $\varphi(z) = z$ не має коренів, коли $0 \leqslant z < 1$. Тоді 1 є найменший додатний корінь рівняння, і тому імовірність виродження 1. Нехає існує $0 < \alpha < 1$, для якого $\varphi(\alpha) = \alpha$. Оскільки $\varphi(z)$ строго зростає на $[0, 1]$, то $\varphi(0) < \varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi(\varphi(0)) < \varphi(\alpha) = \alpha$, ..., якщо вже встановлено, що $q_n < \alpha$, то

$$q_{n+1} = \varphi(q_n) < \varphi(\alpha) = \alpha.$$

Отже, $q \leqslant \alpha$, але $\varphi(q) = q$, тому $\alpha = q$ (третього розв'язку бути не може).

Зауваження. Нехай $a = \varphi'(1) = M(\xi_1/\xi_0 = 1)$, можливо, $a = +\infty$. Умова $a \leqslant 1$ необхідна і достатня, щоб було $q = 1$. Дійсно, $\varphi'(z)$ — неспадна функція. Якщо $\varphi(z) \not\equiv z$, то $\varphi'(z) < 1$ для $z < 1$. Якби для $0 \leqslant \alpha < 1$ було $\varphi(\alpha) = \alpha$, то за формулою Лагранжа для деякого $\alpha < \beta < 1$ було б $\varphi(1) - \varphi(\alpha) = \varphi'(\beta)(1 - \alpha)$, $\varphi'(\beta) = 1$, що неможливо.

Оскільки $\varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(\varphi(z))$, $\varphi_n'(1) = \varphi_{n-1}'(1)\varphi'(1) = a\varphi_{n-1}'(1)$, то $\varphi_n'(1) = a^n$. Процес називається критичним, якщо $a = 1$, надкритичним, якщо $a > 1$, докритичним, якщо $a < 1$. У надкритичного процесу буде додатна імовірність того, що він не вироджується. Про те, як він себе поводить у цьому випадку, говорить така теорема.

Теорема 2. Якщо $a > 1$, існує границя $\lim \xi_n/a^n$ з імовірністю 1. Якщо її позначити η, то перетворення Лапласа величини η $\psi(\lambda) = M \exp\{-\lambda\eta\}$, $\lambda \geqslant 0$ задовольняє рівняння

$$\psi(\lambda) = \varphi\left(\psi\left(\frac{\lambda}{a}\right)\right). \tag{5}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра, що породжується величинами $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ($\xi_0 = 1$). Тоді

$$M(\xi_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \sum_{i=1}^{\xi_n} M(\eta_i/\mathcal{F}_n) = a\xi_n.$$

Тому $\xi_{n+1}\, a^{n+1}$ є мартингал. Звідси випливає існування границі. Нехай $\eta_n = \xi_n/a^n$. Тоді

$$Me^{-\lambda\eta_n} = Me^{-\frac{\lambda}{a^n}\xi_n} = \varphi_n(e^{-\frac{\lambda}{a^n}}) = \varphi(\varphi_{n-1}(e^{-\frac{\lambda}{a^n}})). \tag{6}$$

Оскільки

$$\psi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(e^{-\frac{\lambda}{a^n}}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n-1}(e^{-\frac{\lambda}{a^{n-1}}}),$$

то ліва частина (6) прямує до лівої частини (5), а права частина (6) до правої частини (5).

Процеси з неперервним часом. Нехай $\xi(t)$ — число частинок у момент t. Як і за дискретного часу, досить розглядати процес, коли в початковий момент була 1 частинка. Позначимо $\varphi_t(z)$ твірну функцію $\xi(t)$ (при умові $\xi(0) = 1$). Так само, як вище, для $t > 0$, $s > 0$ маємо рівність

$$\xi(t+s) = \sum_{i=1}^{\xi(t)} \eta_i^{(s)}, \tag{7}$$

де $\eta_i^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, \xi(t)$ є «нащадки» i-ї частинки з тих, що були в момент t (нащадки — це ті частинки, які виникли внаслідок перетворень частинок, у які перетворилась i-та частинка). За умовою величини $\eta_i^{(s)}$ однаково розподілені, незалежні і не залежать від $\xi(t)$. Будемо вважати, що їх розподіл не залежить від t. Такі процеси називаються однорідними. Тоді розподіл $\eta_i^{(s)}$ збігається з розподілом $\xi(s)$. Тому з (7) маємо таке рівняння:

$$\varphi_{t+s}(z) = \varphi_t(\varphi_s(z)). \tag{8}$$

Це аналог рівняння Колмогорова — Чепмена для гіллястого процесу.

Теорема 3. Нехай $\varphi_t(z) \to z$ для $|z| \leqslant 1$. Тоді існує границя

$$\psi(z) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t(z) - z}{t}, \tag{9}$$

$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$, де $\pi_1 \leqslant 0$, $\pi_k \geqslant 0$ для $k \neq 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 0$. Функція $\varphi_t(z)$ диференційовна по t і задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(z) = \psi(\varphi_t(z)), \quad \varphi_0(z) = z. \tag{10}$$

Доведення. Нехай $t > 0$, $h > 0$. Поклавши $\varphi(t, z) = \varphi_t(z)$, матимемо

$$\varphi(t+h, z) - \varphi(t, z) = \varphi(t, \varphi(h, z)) - \varphi(t, z),$$

$$\int_0^t [\varphi(s+h, z) - \varphi(s, z)]\, ds = \int_0^t [\varphi(s, \varphi(h, z)) - \varphi(s, z)]\, ds,$$

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(s, z)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(s, z)\, ds = \frac{1}{h} [\Phi(\varphi(h, z)) - \Phi_t(z)], \tag{11}$$

де $\Phi_t(u) = \int_0^t \varphi(s, u)\, du$. Коли $h \to 0$, то ліва частина (11) прямує до $\varphi(t, z) - z$.

Далі, для $|u| < 1$ функція $\Phi_t(u)$ аналітична, тому існує $\frac{d}{du} \Phi_t(u)$ і, оскільки $\frac{1}{t} \Phi_t(u) \to u$, $\frac{d}{du} \cdot \frac{1}{t} \Phi_t(u) \to 1$ рівномірно для $|u| < 1 - \varepsilon$, яке б не було $\varepsilon > 0$. Отже,

$$\Phi_t(\varphi(h, z)) - \Phi_t(z) = (\varphi(h, z) - z) \frac{d}{dz} \Phi_t(z + \theta[\varphi(h, z) - z]),$$

де $0 < \theta < 1$. Тому

$$\frac{1}{h} [\varphi(h, z) - z] =$$

$$= \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(s, z)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(s, z)\, ds \right) \left[\frac{d}{dz} \Phi_t(z + \theta[\varphi(h, z) - z]) \right]^{-1}.$$

Права частина цієї рівності прямує до $[\varphi(t, z) - z] \left(\frac{d}{dt} \Phi_t(z) \right)^{-1}$, отже, існує і границя зліва для всіх $|z| < 1$. Далі, $\psi(z)$ як границя послідовності степеневих рядів є теж степеневий ряд: $\psi(z) = \Sigma \pi_k z^k$, він збігається для $|z| < 1$. Оскільки

$$\pi_k = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} P\{\xi(h) = k/\xi(0) = 1\}, \quad k \neq 1,$$

$$\pi_1 = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (P\{\xi(h) = 1/\xi(0) = 1\} - 1),$$

то $\pi_1 \leqslant 0$, $\pi_k \geqslant 0$. Те, що $\sum_{k \neq 1} \pi_k = \sum_{k \neq 1} a_{1k} \leqslant -a_{11} = -\pi_1$, випливає з властивостей зліченних процесів Маркова.

Тому ряд збігається для $|z| \leqslant 1$. Якщо $|z| < 1$, то

$$\frac{1}{h}[\varphi(t+h, z) - \varphi(z)] = \frac{1}{h}[\psi_h(\varphi(t, z)) - \varphi(t, z)],$$

границя праворуч, коли $h \to 0$, існує і дорівнює $\psi(\varphi(t, z))$. Цим встановлено рівняння (10). Нарешті, покажемо, що $\psi(1) = \sum_k \pi_k = 0$. З рівняння (10) для $|z| < 1$ маємо

$$\varphi_t(z) - z = \int_0^t \psi(\varphi_s(t, z))\, ds.$$

Перейдемо до границі, коли $z \to 1$, тоді $\varphi_t(z) \to 1$, $\varphi_s(z) \to 1$, отже,

$$0 = \int_0^t \psi(1)\, ds = t\psi(1).$$

Умова виродження неперервного процесу. Позначимо $P\{\xi(t) = 0\} = \varphi_t(0)$. Ця функція зростає, коли $t\uparrow$, тому існує $q = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi_t(0)$. За рівнянням (10) $\frac{d}{dt}\varphi_t(0) = \psi(\varphi_t(0))$, ліва частина прямує до $\psi(q)$, коли $t \to \infty$. Оскільки $\varphi_t(0)$ обмежена функція, то $\psi(q) = 0$. Покажемо, що q є мінімальний розв'язок рівняння $\psi(z) = 0$. Оскільки $\psi''(z) \geqslant 0$, $\psi(1) = 0$, то може бути не більше ще одного розв'язку цього рівняння. Якщо $\psi(z) > 0$ для $0 < z < 1$, то $q = 1$; оскільки $\psi'(z)$ зростає ($\psi'(z) \leqslant 0$), то існує $\psi'(1) \leqslant 0$. Це є умова того, що процес вироджується з імовірністю 1. Якщо $\psi(0) = 0$, то $q = 0$, бо процес не може вироджуватись. Нарешті, нехай $\psi(0) > 0$, $\psi'(1) > 0$ (можливо, $\psi'(1) = +\infty$). Тоді існує один корінь рівняння $\psi(z) = 0$ для $z = \alpha$, де $0 < \alpha < 1$, $\psi(z) > 0$ для $z < \alpha$, $\psi(z) < 0$ для $z \in (a, 1)$. Оскільки розв'язок рівняння

$$\frac{d}{dt} g(t) = \psi(g(t))$$

зростає там, де $g(t) < \alpha$, і $g(t)$ спадає, коли $g(t) > \alpha$, то $g(t) \to \alpha$, яка б не була початкова умова $g(0) \in [0, 1]$. Таким чином, $\varphi_t(0) \to \alpha$.

Нехай величина $\mu = \psi'(1)$ скінченна, $\mu > 0$. Позначимо $m_t = M\xi(t)$. Покажемо, що $m_t < \infty$ і $m_t = e^{\mu t}$. Диференціювання (10) по z для $|z| < 1$ дає

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\varphi_t(z) = \psi'(\varphi_t(z))\frac{\partial}{\partial z}\varphi_t(z). \tag{12}$$

Оскільки $\frac{\partial}{\partial z}\varphi_0(z) = 1$, то з рівняння (12) випливає

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi_t(z) = \exp\left\{\int_0^t \psi'(\varphi_s(z))\, ds\right\}.$$

Переходячи до границі, коли $z \uparrow 1$, і використовуючи рівності $m_t = \frac{\partial}{\partial z}\varphi_t(1)$, $\psi'(1) = \mu$, дістанемо те, що треба. Процес $\xi(t)e^{-\mu t}$ є мартингал. Як для дискретного часу, встановлюємо існування з імовірністю 1 границі $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) e^{-\mu t} = \eta$. Якщо $f(\lambda) = Me^{-\lambda\eta}$, то так само, як рівняння (5), можна вивести рівність

$$f(\lambda) = \varphi_h(f(\lambda e^{-h\mu})),$$

$$\frac{1}{h}[f(\lambda e^{h\mu}) - f(\lambda)] = \frac{1}{h}[\varphi_h(f(\lambda)) - f(\lambda)],$$

звідси випливає рівняння

$$\mu f'(\lambda) = \psi(f(\lambda)).$$

25. ОДНОРІДНІ ПРОЦЕСИ І СИЛЬНО НЕПЕРЕРВНІ НАПІВГРУПИ. РЕЗОЛЬВЕНТА І ГЕНЕРАТОР

Розглянемо однорідний процес у локально-компактному метричному просторі $(X, \mathscr{B})$, $\mathscr{B}$ — борелівська σ-алгебра. Позначимо $\mathcal{C}_X$ та $\mathcal{C}_X^0$ відповідно простір обмежених неперервних функцій $f(x)$ з нормою $\|f\| = \sup\limits_x |f(x)|$ і його підпростір таких функцій, для яких $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Це означає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує компакт $K \subset X$ такий, що $|f(x)| < \varepsilon$, коли $x \notin K$). Нехай $P(t, x, B)$ — імовірність переходу процесу (його траєкторії позначатимуться $x(t, \omega)$). Процес називається: а) стохастично неперервним, якщо для всіх $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to 0} P(t, x, U_\varepsilon(x)) = 1, \text{ де } U_\varepsilon(x) = \{y : r(x, y) \leqslant \varepsilon\},$$

r — віддаль в X; б) феллерівським, якщо для $f \in \mathcal{C}_X$

$$T_t f(x) = \int P(t, x, dy) f(y) \in \mathcal{C}_X, \tag{1}$$

в) регулярним, якщо для кожного компакта $K \subset X$ $\lim\limits_{x\to\infty} P(t, x, K) = 0$.

Ми будемо вивчати процеси, що задовольняють ці умови.

Л е м а 1. Нехай процес задовольняє умови а) —в), T_t — відповідна напівгрупа. Тоді: 1) $T_t \mathcal{C}_X^0 \subset \mathcal{C}_X^0$, 2) $\lim\limits_{t\to 0} \|T_t f - f\| = 0$ для $f \in \mathcal{C}_X^0$.

Д о в е д е н н я. 1. Нехай $f \in \mathcal{C}_X^0$, K — такий компакт, що $|f| \leqslant \varepsilon$, коли $x \notin K$. Тоді

$$|T_t f(x)| = \left| \int_K f(y) P(t, x, dy) + \int_{X\setminus K} f(y) P(t, x, dy) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\| P(t, x, K) + \varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty} |T_t f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $T_t f \in \mathcal{C}_X^0$.

2. Позначимо через L сукупність тих f, для яких $\| T_t f - f \| \to 0$, L — лінійний многовид. Крім того, L — замкнена за нормою: якщо $\| f_n - f \| \to 0$ і $f_n \in L$, то

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \| T_t f - f \| \leqslant \overline{\lim_{t\to 0}} (\| T_t f - T_t f_n \| + \| T_t f_n - f_n \| + \| f - f_n \|) \leqslant 2 \| f - f_n \|.$$

Якщо існує $g \in \mathcal{C}_X^0$, $g \notin L$, то можна вказати такий лінійний функціонал $l(f)$ на $\mathcal{C}_X^0$, що $l(f) = 0$ для $f \in L$, $l(g) \neq 0$. Але кожний лінійний функціонал l на $\mathcal{C}_X^0$ має вигляд

$$l(f) = \int f(y)\, l(dy),$$

де l — зліченно-адитивна функція множини на $\mathcal{B}$ обмеженої варіації. Зауважимо, що функція

$$g_t(x) = \frac{1}{t} \int_0^t T_s g(x)\, ds$$

належить до L, бо

$$T_h g_t(x) - g_t(x) = \frac{1}{t} \left(\int_0^t T_{s+h} g(x)\, ds - \int_0^t T_s g(x)\, ds \right) =$$

$$= \frac{1}{t} \left(\int_0^h T_{t+s} g(x)\, ds - \int_0^h T_s g(x)\, ds \right),$$

$$\| T_h g_t(x) - g_t(\cdot) \| \leqslant \frac{2}{t} \| g \| h.$$

Тому

$$\int l(dx)\, g_t(x) = 0.$$

Переходячи до границі, коли $t \to 0$, матимемо $\int g(x) l(dx) = 0$. Ми прийшли до суперечності.

Будемо називати процес $\mathcal{C}^0$-феллерівським, якщо $T_t(\mathcal{C}_X^0) \subset \mathcal{C}_X^0$. Для стохастичного неперервного $\| \mathcal{C}^0 \|$ - феллерівського процесу $\| T_t f - f \| \to 0$ при всіх $f \in \boldsymbol{B}$.

Напівгрупа T_t в деякому банаховому просторі $\boldsymbol{B}$ називається сильно неперервною, якщо $\| T_t f - f \| \to 0$ для всіх $f \in \boldsymbol{B}$. Далі ми будемо розглядати загальні властивості сильно неперервних напівгруп, не використовуючи конкретного вигляду як простору, так і напівгрупи.

Генератор напівгрупи. Позначимо через $D_A \subset \boldsymbol{B}$ сукупність тих елементів $\varphi \in \boldsymbol{B}$, для яких існує границя (за нормою $\boldsymbol{B}$)

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (T_t \varphi - \varphi) = g. \tag{2}$$

Якщо $\varphi \in D_A$ і виконується (2), то будемо говорити, що на φ визначено генератор напівгрупи A і $A\varphi = g$.

Якщо $D_A = \boldsymbol{B}$, то оператор A обмежений і $T_t = \exp\{tA\}$. Цей факт був доведений для конкретного простору $\boldsymbol{B}$ всіх обмежених $\mathcal{B}$-вимірних функцій, але доведення не зміниться в загальному випадку.

Зауважимо, що $T_t f$ для $f \in \boldsymbol{B}$ буде обмеженою неперервною функцією. Тому можна визначити інтеграл $\int_a^b T_s f ds$ так само, як це робилось для неперервної операторнозначної функції (при побудові використовувалась лише неперервність за нормою).

Л е м а 2. Область визначення $\mathcal{D}_A$ генератора напівгрупи щільна в $\boldsymbol{B}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $f \in \boldsymbol{B}$, $f_t = \frac{1}{t}\int_0^t T_s f ds$. Покажемо, що $f_t \in \mathcal{D}_A$. Маємо

$$\frac{1}{h}(T_h f_t - f_t) = \frac{1}{ht}\left(\int_0^t T_h T_s f ds - \int_0^t T_s f\right) = \frac{1}{ht}\left(T_t \int_0^h T_s f ds - \int_0^h T_s f ds\right).$$

Але $\left\| \frac{1}{h}\int_0^h T_s f - f \right\| \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \| T_s f - f \| ds \to 0$, коли $h \to 0$. Тому

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(T_h f_t - f_t) = \frac{1}{t}(T_t f - f).$$

Ми довели, що $f_t \in \mathcal{D}_A$; те, що $\| f_t - f \| \to 0$, коли $t \to 0$, теж встановлено.

Л е м а 3. Для всіх $f \in \mathcal{D}_A$ вірні рівняння

$$\frac{d}{dt} T_t f = T_t A f = A T_t f. \tag{3}$$

(Це перша і друга система рівнянь Колмогорова.)

Д о в е д е н н я.

$$\frac{1}{s-t}(T_s f - T_t f) = T_{t\wedge s} \frac{1}{|s-t|}(T_{|s-t|} f - f), \quad t \wedge s = \min(t, s),$$

$\frac{1}{|s-t|}(T_{|s-t|} f - f) \to Af$, коли $s \to t$. Ми довели, що $\frac{d}{dt} T_t f = T_t A f$. Нехай $f \in \mathcal{D}_A$. Покажемо, що $T_t f \in \mathcal{D}_A$ і $A T_t f = T_t A f$.

Маємо

$$\frac{1}{h}(T_h T_t f - T_t f) = T_t \frac{1}{h}(T_h - I) f.$$

Границя праворуч існує і дорівнює $T_t A f$. Тому існує границя зліва, за означенням це $A T_t f$.

Резольвента напівгрупи. Будемо вважати, що $\boldsymbol{B}$ — дійсний банахів простір, позначимо через $\boldsymbol{B}$ його комплексне розширення, елементами якого є функції $f_1 + i f_2$, де $f_1, f_2 \in \boldsymbol{B}$ із звичайно визначеними операціями додавання і множення на комплексні числа (наприклад,

$$(a + ib)(f_1 + if_2) = af_1 - bf_2 + i(bf_1 + af_2)', \ \|f_1 + if_2\| =$$
$$= \sqrt{\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2}).$$

Нехай $T_t(f_1 + if_2) = T_tf_1 + iT_tf_2$. Визначимо для $\mathrm{Re}\lambda > 0$ оператор $R_\lambda f$, що діє з $\bar{B}$ в $\bar{B}$ за формулою

$$R_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f\, dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} (\cos\beta t + i\sin\beta t)(T_tf_1 + iT_tf_2)\, dt,$$

якщо $\lambda = a + i\beta$, $a > 0$, $f = f_1 + if_2$. Оператор R_λ називається резольвентою напівгрупи. Збіжність інтеграла випливає з нерівності

$$\| e^{-\lambda t} T_t f \| \leqslant | e^{-\lambda t} | \| T_t f \| \leqslant e^{-\alpha t} \| f \|.$$

Наведемо основні властивості резольвенти.

1. $\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda}$, бо

$$\| R_\lambda f \| \leqslant \int_0^\infty \| e^{-\lambda t} T_t f \|\, dt \leqslant \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\,\lambda} \| f \|\, dt = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda} \| f \|.$$

2. Якщо $\lambda > 0$, $f \in \boldsymbol{B}$, то $R_\lambda f \in \boldsymbol{B}$ (окремо відзначимо, що коли T_t відповідає марківському процесу в X, $f \in C_X$, то $R_\lambda f \geqslant 0$, якщо $f \geqslant 0$).

3. $\lim\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda \to \infty} \| \lambda R_\lambda f - f \| \to 0$, якщо $\frac{|\lambda|}{\mathrm{Re}\,\lambda} \leqslant c$ для деякого $c > 0$.

Це є наслідок нерівності

$$\| \lambda R_\lambda f - f \| \leqslant \left\| \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T_t f - f)\, dt \right\| \leqslant |\lambda| \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\,\lambda t} \| T_t f - f \| dt =$$

$$= \frac{|\lambda|}{\mathrm{Re}\,\lambda} \int_0^\infty e^{-t} \| T_{t/\mathrm{Re}\,\lambda} f - f \|\, dt \to 0,$$

коли $\frac{|\lambda|}{\mathrm{Re}\,\lambda} \leqslant c$, $\mathrm{Re}\,\lambda \to \infty$.

4. $R_\lambda f - R_\mu f = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu f$, $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, $\mathrm{Re}\,\mu > 0$.

Це рівняння називається резольвентним.

Маємо

$$R_\lambda R_\mu f = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t - \lambda s} T_{t+s} f\, dt\, ds = \int_0^\infty du \int_0^u e^{-\lambda t - \mu(u-t)} T_u f\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^u e^{(\mu-\lambda)t} dt \right) e^{-\mu u} T_u f\, du = \frac{1}{\mu - \lambda} \int_0^\infty (e^{-\lambda u} - e^{-\mu u})\, T_u f\, du =$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda} (R_\lambda f - R_\mu f).$$

Оскільки $T_t f$ — неперервна функція, то $R_\lambda f$ визначає напівгрупу: який би не був лінійний функціонал $l \in B'$, буде

$$l(R_\lambda f) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} l(T_t f)\, dt,$$

$l(T_t f)$ — неперервна функція, вона визначається своїм перетворенням Лапласа.

Т е о р е м а. Якщо $\lambda > 0$, то R_λ взаємно однозначно відображає $\boldsymbol{B}$ на $\mathcal{D}_A$, при цьому

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}. \tag{4}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $f \in \boldsymbol{B}$, покажемо, що $R_\lambda f \in \mathcal{D}_A$, і обчислимо $AR_\lambda f$. Маємо

$$\frac{1}{h}(T_h - I)\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt = \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T_{t+h} f dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} T_t f dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t dt\right) = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} R_\lambda - \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T_t f dt.$$

Вираз праворуч має границю, коли $h \to 0$, вона дорівнює $\lambda R_\lambda f - f$. Таким чином, $R_\lambda f \in \mathcal{D}_A$,

$$A(R_\lambda f) = \lambda R_\lambda f - f. \tag{5}$$

Звідси

$$(\lambda I - A) R_\lambda f = f, \quad f \in \boldsymbol{B}. \tag{6}$$

Покажемо, що для $g \in \mathcal{D}_A$ $R_\lambda(\lambda I - A) g = g$, $\lambda g - Ag = \lim\limits_{h \to 0}\Big[\lambda g - \frac{1}{h}(T_h g - g)\Big]$, тому

$$R_\lambda(\lambda g - Ag) = \lim_{h \to \infty} R_\lambda\left(\lambda g - \frac{1}{h}(T_h g - g)\right) =$$

$$= \lambda R_\lambda g - \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}(R_\lambda T_h g - R_\lambda g).$$

Але

$$R_\lambda T_h g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t T_h f dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_h T_t f dt = T_h \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f dt = T_h R_\lambda f.$$

Таким чином,

$$R_\lambda(\lambda g - Ag) = \lambda R_\lambda g - \lim_{h \to 0}\frac{1}{h}(T_h R_\lambda g - R_\lambda g) = \lambda R_\lambda g - A R_\lambda g = g, \tag{7}$$

ми використали формулу (5). Те, що для всіх $g \in \mathcal{D}_A$ знайдеться таке f, що $R_\lambda f = g$, випливає з формули (7): треба взяти $f = \lambda g - Ag$. Те, що відображення $R_\lambda f$ є взаємно однозначне, випливає з рівності $f_k = \lambda g - Ag$, $k = 1, 2$, якщо $R_\lambda f_1 = R_\lambda f_2 = g$. З формул (6) та (7) дістанемо твердження теореми.

Зауваження. Якщо позначити $\tilde{\mathcal{D}}_A$ множину тих $f \in \tilde{\boldsymbol{B}}$, що мають вигляд $f_1 + if_2$, $f_1, f_2 \in \mathcal{D}_A$, то R_λ відображає $\tilde{\boldsymbol{B}}$ в $\tilde{\mathcal{D}}_A$ для всіх комплексних λ, для яких $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Формула (4) зберігається і у цьому випадку.

Наведемо приклад. Розглянемо вінерівський процес $w(t)$, для якого $Mw(t) = 0$, $Dw(t) = t$, як однорідний марківський процес.

Процес, що починається в момент $t = 0$ у точці $w(0) = x$, має вигляд $w(t) + x$. Імовірність переходу

$$P(t, x, B) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_B \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\} dy.$$

Якщо B — обмежена множина, то $P(t, x, B) \to 0$, коли $|x| \to \infty$. Напівгрупа має вигляд

$$T_t f(x) = \int (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int f(x+y) \exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\} dy.$$

Звідси видно, що вона є феллерівською, регулярною. Далі, для всіх $\varepsilon > 0$

$$P(t, x, (x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\} dt =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\varepsilon/\sqrt{t}}^{\varepsilon/\sqrt{t}} e^{-u^2/2} du \to 1,$$

коли $t \to 0$. Якщо f двічі неперервно диференційовна, то

$$\frac{1}{t}(T_t f(x) - f(x)) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} t^{-1} \int [f(x+y) - f(x)] \exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\} dt =$$

$$= (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} t^{-1} \int \left[f'(x) y + \frac{1}{2} f''(x) y^2 + o(y)\right] \exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\} dy =$$

$$= \frac{1}{2} f''(x) + \frac{o(t)}{t}, \quad Af = \frac{1}{2} f''.$$

Нарешті, можна обчислити, що

$$R_\lambda f(x) = \int e^{-\sqrt{2\lambda}|y-x|} f(y)\, dy$$

(для цього можемо використати рівність

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} R_\lambda f(x) + \lambda R_\lambda f(x) = f(x)).$$

26. ТЕОРЕМА ХІЛЛЄ—ЮСІДА

Сформулюємо необхідні і достатні умови того, щоб оператор A, визначений на деякій множині $D_A \subset C_X^0$, був генератором напівгрупи в C_X^0, що відповідає марківському процесу, який є стохастично неперервним і феллерівським. Припустимо, що T_t — така напівгрупа в C_X^0, для якої $T_t f \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$ і $\| T_t \| \leqslant 1$. Тоді $T_t f(x)$ при фіксованому x є лінійний функціонал, тому він зображується інтегралом за знакозмінною мірою. Внаслідок позитивності ця міра має бути додатною, отже,

$$T_t f(x) = \int f(y) P(t, x, dy), \tag{1}$$

$$\| T_t \| = \int P(t, x, X), \quad \text{тому} \quad P(t, x, X) \leqslant 1.$$

Таким чином, досить знайти умови, коли оператор A буде генератором напівгрупи, що зберігає позитивність, і $\| T_t \| \leqslant 1$. Стохастична неперервність такого процесу є наслідок рівності $f(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} T_t f(x_0)$, в якій $f(x) \in \mathcal{C}_X^0$ вибрана так, що $f(x_0) > f(x)$ для $x \neq x_0$.

Розглянемо деякі необхідні умови.

1) D_A щільне в $\mathcal{C}_X^0$; 2) A — оператор замкнений; 3) для всіх λ, для яких $\operatorname{Re}\lambda > 0$, рівняння

$$\lambda g - Ag = f \tag{2}$$

має розв'язок в $\tilde{D}_A$ при всіх $f \in \tilde{\mathcal{C}}_X^0$ ($\tilde{D}_A$ та $\tilde{\mathcal{C}}_X^0$ — комплексні розширення D_A та $\mathcal{C}_X^0$). Розв'язок g рівняння (2) задовольняє умови: 3а) $\| g \| \leqslant \| f \| (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$, 3б) якщо $\lambda > 0$, $f \geqslant 0$, то $g \geqslant 0$.

Умова 1) була доведена раніше.

2) Замкненість A означає, що для послідовності $f_n \in D_A$, для якої $\| f_n - f \| \to 0$, $\| Af_n - g \| \to 0$, буде $f \in D_A$, $Af = g$.

Дійсно, перейшовши до границі в рівності $R_\lambda (\lambda f_n - Af_n) = f_n$, отримаємо $R_\lambda (\lambda f - g) = f$, тому $f \in D_A$,

$$Af = AR_\lambda (\lambda f - g) = \lambda R_\lambda (\lambda f - g) - \lambda f + g = \lambda f - \lambda f + g = g.$$

Умова 3) є наслідок того, що розв'язком (2) буде $g = R_\lambda f$, і властивостей оператора R_λ.

Теорема Хілле — Іосіда. Умови 1) — 3) необхідні і достатні для того, щоб A був генератором напівгрупи в $\mathcal{C}_X^0$, що відповідає стохастично неперервному $\mathcal{C}^0$-феллерівському процесу.

Доведення. Необхідність умов встановлена вище. Будемо доводити достатність. З умови 3) випливає, що розв'язок рівняння (2) єдиний, бо розв'язком рівняння $\lambda g - Ag = 0$ може бути лише $g = 0$. Таким чином, для всіх λ, для яких $\operatorname{Re}\lambda > 0$, визначено оператор R_λ, що діє з $\mathcal{C}_X^0$ в $\tilde{D}_A$ за формулою $\lambda R_\lambda f - AR_\lambda f = f$, тобто $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$; R_λ задовольняє умови:

$$\text{а) } \| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}, \quad \text{б) для } f \geqslant 0 \ \ f \in \mathcal{C}_X^0$$

і $R_\lambda f \geqslant 0$ для $\lambda > 0$. Покажемо, що для всіх $f \in \mathcal{C}_X^0$ буде $\lambda R_\lambda f \to f$, якщо $\lambda \to \infty$, $\frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|} \leqslant c$.

Нехай спочатку $f \in \mathcal{D}_A$. Тоді

$$\lambda R_\lambda f - R_\lambda A f = f; \tag{3}$$

оскільки $\| R_\lambda Af \| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \| Af \| \to 0$, то $\lambda R_\lambda f \to f$. Зауважимо, що $\| \lambda R_\lambda \| \leqslant \frac{|\lambda|}{\operatorname{Re}\lambda}$. Якщо $f_n \in \mathcal{D}_A$, $\| f_n - f \| \to 0$, то при $\lambda R_\lambda f \to f$, $\frac{|\lambda|}{\operatorname{Re}\lambda} \leqslant c$

$$\varlimsup_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty} \| \lambda R_\lambda f - f \| \leqslant c \| f_n - f \| + \| f_n - f \| + \varlimsup_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty} \| \lambda R_\lambda f_n - f_n \| =$$
$$= (c+1) \| f_n - f \|.$$

Тому $\|\lambda R_\lambda f - f\| \to 0$, якщо $\operatorname{Re}\lambda \to \infty$, $\frac{|\lambda|}{\operatorname{Re}\lambda} \leqslant c$ для f із замикання $\mathcal{D}_A$, яке збігається з C_X^0. З рівняння (3) виводимо таке: для $f \in \mathcal{D}_A$

$$R_\lambda f = \frac{f}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} R_\lambda A f. \tag{4}$$

Розглянемо тепер оператор A^2. Якщо $\mathcal{D}_{A^2}$ — його область визначення, то $R_\lambda^2 f \in \mathcal{D}_{A^2}$, бо

$$A^2 R_\lambda^2 f = A(AR_\lambda R_\lambda f) = A(\lambda R_\lambda R_\lambda f - R_\lambda f) = AR_\lambda(\lambda R_\lambda f - f) =$$
$$= \lambda R_\lambda(\lambda R_\lambda f - f) - \lambda R_\lambda f + f.$$

Так само до $\mathcal{D}_{A^2}$ належать $R_\lambda R_\mu f$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Оскільки

$$\lim_{\lambda\to\infty,\mu\to\infty} \lambda\mu R_\lambda R_\mu f = \lim_{\mu\to\infty} \mu R_\mu f = f,$$

то D_{A^2} щільне в C_X^0. Якщо $f \in D_{A^2}$, то, застосувавши (4) до Af і підставивши результат в (4), дістанемо

$$R_\lambda f = \frac{1}{\lambda} f + \frac{1}{\lambda^2} Af + \frac{1}{\lambda^2} R_\lambda A^2 f. \tag{5}$$

Побудуємо тепер функцію $u(t, f, x)$ таку, щоб для $f \in D_{A^2}$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t, f, x)\, dt = R_\lambda f. \tag{6}$$

Нехай

$$u(t, f, x) = f(x) + tAf(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{\lambda t} R_\lambda A^2 f(x)}{\lambda^2}\, d\lambda, \tag{7}$$

де $\alpha > 0$, інтеграл береться за вертикальною прямою $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$. Оскільки

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x)\, dt = \frac{1}{\lambda} f(x),$$

$$\int_0^\infty tAf(x)\, e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} Af(x),$$

то досить перевірити, що перетворення Лапласа функції

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{\lambda t} \frac{R_\lambda A^2 f(x)}{\lambda^2}\, d\lambda$$

є функція $\frac{1}{\lambda^2} R_\lambda A^2 f$. Зауважимо, що функція $R_\lambda A^2 f$ на прямій $\operatorname{Rg}\lambda = \alpha$ обмежена за модулем числом $\frac{1}{\alpha}\|A^2 f\|$, а $\frac{1}{\lambda^2}$ на цій прямій абсолютно інтегровна, тому (6) є наслідок (5), (7) і комплексної формули для оберненого перетворення Лапласа. Оскільки $|e^{\lambda t}| = e^{\alpha t}$, то функція $u(t, f, x)$ неперервна по t.

Розглянемо тепер другу формулу оберненого перетворення Лапласа, яка використовує лише додатні значення λ.

Лема 1. Нехай $g(t)$ — неперервна функція і для якогось $\alpha > 0$ $|g(t)|e^{-\alpha t}$ обмежена. Візьмемо

$$\hat{g}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t)\, dt, \quad \lambda \geqslant \alpha. \tag{8}$$

Тоді для всіх $t > 0$

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\lambda^{n+1} \frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{g}(\lambda)\right)_{\lambda} = \frac{n}{t}\,. \tag{9}$$

Доведення. Величина, що стоїть під знаком границі в (9), має такий вигляд:

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty \lambda(\lambda s)^n e^{-\lambda s} g(s)\, ds = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{n}{t}\left(\frac{ns}{t}\right)^n e^{-\frac{ns}{t}} g(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty u^n e^{-u} g\left(\frac{ut}{n}\right) du.$$

Можна показати, що для всіх $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n!}\int_{|n-u|>\varepsilon n} u^n e^{-u} g\left(\frac{ut}{n}\right) du \to 0,$$

а $\frac{1}{n!}\int_{|n-u|\leqslant \varepsilon_n} u^n e^{-u} du \to 1$. Звідси випливає твердження леми.

Оскільки $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$, то в області $\operatorname{Re}\lambda > 0$ $\frac{d}{d\lambda} R_\lambda = -R_\lambda^2$ і

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R_\lambda = (-1)^n n!\, R_\lambda^{n+1}.$$

Тому

$$u(t, f, x) = \lim_{n\to\infty} [(\lambda R_\lambda)^{n+1} f(x)]_{\lambda = \frac{n}{t}}\,. \tag{10}$$

Оскільки $\|\lambda R_\lambda\| \leqslant 1$ для $\lambda > 0$, то $\sup_x |u(t, f, x)| \leqslant \|f\|$. Тому $u(t, f, x)$ за неперервністю в $\|\cdot\|$ можна продовжити на всі $f \in \mathcal{C}_X^0$, це буде лінійний оператор по f, і можна позначити $u(t, f, x) = T_t f(x)$. За формулою (10) також для $f \geqslant 0$ $R_\lambda f \geqslant 0$, $R_\lambda^{n+1} f \geqslant 0$, тому і $u(t, f, x) \geqslant 0$. Отже, і $T_t f \geqslant 0$, якщо $f \in \mathcal{C}_X^0$, $f \geqslant 0$.

Покажемо, що T_t є напівгрупа. З рівності для $\lambda > 0$, $\mu > 0$

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} =$$
$$= R_\lambda(\lambda I - A)[(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1}](\mu I - A) R_\mu =$$
$$= R_\lambda[(\mu I - A) - (\lambda I - A)] R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$$

випливає, що R_λ задовольняє резольвентне рівняння. Оскільки $T_t f$ є рівномірна границя неперервних за t функцій, то функція $T_t f$ теж така. Подвійне перетворення Лапласа функції $T_t T_s f$:

$$\iint_0^\infty e^{-\lambda t-\mu s} T_t T_s f \, dt ds = R_\lambda R_\mu f.$$

Подвійне перетворення Лапласа функції $T_{t+s} f$:

$$\iint_0^\infty e^{-\lambda t-\mu s} T_{t+s} f ds = \frac{1}{\mu-\lambda}(R_\lambda f - R_\mu f)$$

(ці обчислення виконані для виведення резольвентного рівняння для R_λ, визначеного як резольвента напівгрупи). З рівності перетворень Лапласа робимо висновок про рівність неперервних функцій $T_t T_s f$ та $T_{t+s} f$. Отже, T_t — напівгрупа. Залишилось перевірити стохастичну неперервність, тобто умову $\| T_t f - f \| \to 0$, коли $t \to 0$. Для $f \in \mathcal{D}_{A^2}$

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \| T_t f - f \| \leqslant \overline{\lim_{t\to 0}} \sup_x |u(t, f, x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\| A^2 f \|}{\alpha^2 + u^2} du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{\| A^2 f \|}{\alpha^2} \pi.$$

Ця нерівність вірна для всіх $\alpha > 0$. Тому $\| T_t f - f \| \to 0$ на щільній множині $\mathcal{D}_{A^2}$, отже, і для всіх $f \in C_X^0$. Це завершує доведення теореми.

Оператори, що задовольняють принцип максимуму. Оператор A задовольняє принцип максимуму, якщо з умов $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi(x_0) \geqslant \varphi(x)$ для всіх x, $\varphi(x_0) \geqslant 0$ випливає $A\varphi(x_0) \leqslant 0$. Коли $\| T f_t \| \leqslant \| f \|$ і $T_t f \geqslant 0$ для $f \geqslant 0$, тоді генератор такої напівгрупи задовольняє принцип максимуму. Дійсно, якщо $\varphi \in \mathcal{D}_A$, $\varphi(x_0) \geqslant 0$, $\varphi(x_0) \geqslant \varphi(x)$, то

$$T_t(\varphi(x_0) - \varphi(x)) = T_t \cdot 1 \cdot \varphi(x_0) - T_t \varphi(x),$$

тому

$$A\varphi(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{T_t \varphi(x) - \varphi(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{T_t(\varphi(x) - \varphi(x_0))}{t} + \frac{\varphi(x_0)(T_t \cdot 1 - 1)}{t} \right],$$

$$0 \leqslant |T_t 1| \leqslant 1.$$

Обидва доданки під знаком $\lim\limits_{t\to 0}$ недодатні, $A\varphi(x_0) \leqslant 0$. Наступна лема показує, що оператор, який задовольняє принцип максимуму, задовольняє майже усі умови теореми Хілле — Іосіда.

Л е м а 2. Нехай A — оператор, що задовольняє принцип максимуму. Тоді: а) розв'язок рівняння (2) єдиний для всіх $g \in C_X^0$; б) якщо g — розв'язок рівняння (2), то $\| g \| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda} \| f \|$; в) якщо $\lambda > 0$, $f \geqslant 0$, g — розв'язок рівняння (2), то $g \geqslant 0$.

Доведення. Покажемо спочатку б). Нехай $\lambda = \alpha + i\beta$, $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$. Якщо

$$(\alpha + i\beta)(g_1 + g_2 i) - Ag_1 + iAg_2 = f_1 + if_2, \tag{11}$$

то

$$\alpha g_1 = f_1 + \beta g_2 + Ag_1, \tag{12}$$

$|g| \to 0$, коли $x \to \infty$, тому існує таке x_0, що $\|g\| = |g(x_0)|$. Домноживши обидві частини рівняння (11) на множник $\frac{|g(x_0)|}{g(x_0)}$, можемо досягти того, щоб $\|g\| = g_1(x_0)$, $g_2(x_0) = 0$. Тоді $Ag_1(x_0) \leqslant 0$ і $\alpha g_1(x_0) \leqslant f_1(x_0)$, тому

$$\|g\| \leqslant \frac{f_1(x)}{\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f\|.$$

Звідси при $f = 0$ випливає, що $\|g\| = 0$, тому рівняння (2) має єдиний розв'язок. Доведено твердження а).

Якщо $\lambda > 0$, $f(x) \geqslant 0$ і $g(x)$ може мати від'ємне значення, то існує від'ємний мінімум g. Якщо $g(x_0) < 0$, $g(x) \geqslant g(x_0)$, то $Ag(x_0) \geqslant 0$ і $\lambda g(x_0) = A(g(x_0)) < 0$, що неможливо.

Зауваження. Нехай $\mathcal{D}_A$ щільне в C_X^0. Можна вказати й умову, коли A задовольняє інші умови теореми Хілле — Іосіда. Позначимо $\Delta_\lambda = (\lambda I - A)\mathcal{D}_A$. Треба, щоб для деякого $\lambda_0 > 0$ Δ_{λ_0} було щільне в C_X^0 (в умовах теореми Хілле — Іосіда $\Delta_\lambda = C_X^0$ для всіх $\lambda > 0$). Якщо ця умова виконана, то на Δ_{λ_0} існує обмежений оператор R_{λ_0}, для якого $\lambda_0 R_{\lambda_0} g - AR_{\lambda_0} g = f$ при всіх $f \in \Delta_{\lambda_0}$, $\|R_{\lambda_0}\| \leqslant \frac{1}{\lambda_0}$. За неперервністю цей оператор можна продовжити на C_X^0. Позначимо це продовження $\hat{R}_{\lambda_0}$. В оператора $\hat{R}_{\lambda_0}$ існує обернений. Якщо для деякого $f \neq 0$ $\hat{R}_{\lambda_0} f = 0$, то існує така послідовність $g_n \in \mathcal{D}_A$, що $g_n \to 0$, $Ag_n \to f$. Нехай $f(x_0) > 0$, $\varphi(x) \in C_X^0$, $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ для $x \neq x_0$; $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в C_X^0. Коли $\sup\limits_x \varphi_n(x) = \varphi_n(x_n)$, тоді $x_n \to x_0$ і для $\varepsilon > 0$ можна вибрати таке m, щоб $r(x_m, x_0) < \varepsilon$ і $\sup\limits_{r(x_n, x) \geqslant 2\varepsilon} \varphi_m(x) < \varphi_m(x_m)$. Оскільки $\varphi_m(x) + cg_n \to \varphi_m(x)$, для досить великих n

$$\sup(\varphi_m(x)\, cg_n(x)) = \varphi_m(\hat{x}_n) + cg_n(\hat{x}_n),$$

де $r(\hat{x}_n, x_m) < \varepsilon$, $r(\hat{x}_n, x_0) < 3\varepsilon$. Можна вважати, що ε вибране так, щоб для $r(x, x_0) < 3\varepsilon$ $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0)$, а c так, щоб $\|A\varphi_m\| < \frac{c}{2} f(x_0)$. Тоді

$$A(\varphi_m^-(\hat{x}_n) + cAg_n(\hat{x}_n)) \geqslant -\|A\varphi_m\| + \frac{c}{2} f(x_0) > 0,$$

тобто принцип максимуму для A не виконується. Нарешті, візьмемо

$$\hat{A} = -\hat{R}_{\lambda_0}^{-1} + \lambda_0 I,$$

це замкнений оператор, який є розширенням A. Рівняння

$$\lambda_0 g - \hat{A} g = f \tag{13}$$

має розв'язок $\hat{R}_{\lambda_0} f$ для всіх $f \in \mathcal{C}_X^0$. Якщо побудувати тепер оператор $\hat{R}_\lambda$ для дійсних $\lambda > 0$ за формулою

$$\hat{R}_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^{k-1} (\hat{R}_{\lambda_0})^k \tag{14}$$

(ряд збігається при $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0$), то можна переконатись, що $\hat{R}_\lambda f$ є розв'язок рівняння (13) для $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_0$. Цей процес можна продовжити на всі λ, $\mathrm{Re}\lambda > 0$, беручи у формулі (14) нові $\lambda_0 > 0$ і λ.

27. ПРОЦЕСИ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ. БУДОВА РОЗРИВНОЇ ЧАСТИНИ

Нехай $\xi(t)$, $t \in [0, T]$ — стохастично неперервний процес з незалежними приростами у фазовому просторі $X = R^m$. Як було встановлено раніше, такий процес має модифікацію без розривів II роду, неперервну справа. Саме цю модифікацію ми будемо розглядати. Величину $\Delta(t) = \xi(t) - \xi(t-)$ будемо називати стрибком процесу у точці t. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує лише скінченне число точок $t \in [0, 1]$, для яких $|\Delta(t)| > \varepsilon$. Тому множина тих t, для яких $|\Delta(t)| > 0$, зліченна. Величину $|\Delta(t)|$ назвемо розміром стрибка. Позначимо через $\mathcal{B}_\varepsilon$ σ-кільце множин $B \in \mathcal{B}$, для яких $\rho(0, B) > \varepsilon$ (тут $\rho(x, B) = \inf\limits_{y \in B} |x - y|$ — віддаль від точки x до множини B). В кільці множин можна з множинами виконувати операції $\cup$, $\cap$, $\setminus$, у σ-кільці — зліченне число раз, але X не обов'язково належить кільцю. Візьмемо $A \in \bigcup\limits_{\varepsilon} \mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}_0$ ($\mathcal{B}_0$ — кільце)

$$\xi(A, t) = \sum_{s \leqslant t} \Delta(s) I_{\{|\Delta(s)| \in A\}},$$

$$\nu(A, t) = \sum_{s \leqslant t} I_{\{\Delta(s) \in A\}}.$$

Підсумовування виконується по точках розриву $\xi(t)$. Оскільки $A \in \mathcal{B}_\varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$, то обидві суми мають лише скінченне число доданків, що відмінні від 0.

Нехай $\mathcal{F}_t^s$ для $s < t$ означає σ-алгебру, породжену величинами $\{\xi(u) - \xi(s), u \in [s, t]\}$. Тоді $\mathcal{F}_t^0$ породжується величинами $\{\xi(u) - \xi(0), u \in [0, t]\}$. Нехай $\mathcal{F}_0$ породжується ξ_0. З визначення процесу з незалежними приростами виводимо таку властивість:

I) $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_{t_1}^0, \mathcal{F}_{t_2}^{t_1}, \ldots, \mathcal{F}_{t_k}^{t_{k-1}}$ — незалежні σ-алгебри для $0 < t_1 < \cdots < t_k \leqslant T$.

Легко переконатись, що вірні також властивості:

II) $\Delta(t)$ вимірне відносно $\mathcal{F}_{t_k}^{t_{k-1}}$, якщо $t_{k-1} < t \leqslant t_k$;

III) $\xi(A, t_k) - \xi(A, t_{k-1})$, $\nu(A, t_k) - \nu(A, t_{k-1})$ вимірне відносно $\mathcal{F}_{t_k}^{t_{k-1}}$;

IV) які б не були $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_0$, випадковий процес в $X^{n+1} \times R^n$

$$(\xi(t);\ \xi(A_1, t);\ \ldots;\ \xi(A_n, t);\ \nu(B_1, t);\ \ldots;\ \nu(B_n, t))$$

є процес з незалежними приростами (його приріст на $[t_{k-1}, t_k]$ вимірний відносно $\mathcal{F}_{t_k}^{t_{k-1}}$).

Розглянемо спочатку процес $\nu(A, t)$. Це процес з незалежними приростами стохастично неперервний без розривів II роду, він має лише значення з Z_+, і усі його стрибки рівні 1. Ці властивості досить повно характеризують такий процес.

Л е м а 1. Якщо $\nu(t)$ — стохастично неперервний процес з незалежними приростами із значеннями в Z_+, такий, що: 1) $\nu(0) = 0$, 2) не має розривів II роду, 3) $\nu(t) - \nu(t-) = 0$ або 1, то $\nu(t)$ — пуассонівський процес, тобто існує така неперервна зростаюча функція $\lambda(t)$, що

$$P\{\nu(t+h) - \nu(t) = k\} = \frac{[\lambda(t+h) - \lambda(t)]^k}{k!} e^{-[\lambda(t+h)-\lambda(t)]}. \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $\max\limits_{0 \leqslant k < n-1} [\nu(t_{i+1}) - \nu(t_k)] \leqslant 1$ для досить малих Δt_k, де $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, то

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} P\{\max_{0 \leqslant k < n-1} [\nu(t_{k+1}) - \nu(t_k)] \leqslant 1\} = 1,$$

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - P\{\nu(t_{k+1}) - \nu(t_k) > 1\}) = 1, \tag{2}$$

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P\{\nu(t_{k+1}) - \nu(t_k) > 1\} = 0.$$

Позначимо $P\{\nu(t) = 0\} = \rho(t)$. Для $s < t$ $P\{\nu(t) = 0\} = P\{\nu(s) = 0\} P\{\nu(t) - \nu(s) = 0\}$, тому $\rho(t) = \rho(s) P\{\nu(t) - \nu(s) = 0\}$. Оскільки попередня імовірність прямує до 1 внаслідок стохастичної неперервності $\nu(t)$, коли $t - s \to 0$, то $\rho(t)$ — неперервна додатна функція. Вона спадає. Тому функція $\lambda(t) = -\ln \rho(t)$ неперервна, додатна, зростає,

$$P\{\nu(t+h) - \nu(t) = 0\} = \frac{\rho(t+h)}{\rho(t)} = \exp\{-[\lambda(t+h) - \lambda(t)]\} =$$

$$= 1 - [\lambda(t+h) - \lambda(t)] + o(\lambda(t+h) - \lambda(t)).$$

Тепер $P\{\nu(t+h) - \nu(t) > 0\} = [\lambda(t+h) - \lambda(t)] + o(\lambda(t+h) - \lambda(t))$. Якщо $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, то з (2) випливає

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P\{\nu(t_{k+1}) - \nu(t_k) = 1\} =$$

$$= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P\{\nu(t_{k+1}) - \nu(t_k) > 0\} =$$

$$= \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} [\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k) + o(\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k))] = \lambda(T).$$

Далі,

$$P\{\nu(T)=1\}=\lim_{\max \Delta t_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}P\{\nu(t_k)=0\}P\{\nu(t_{k+1})-$$

$$-\nu(t_k)=1\}P\{\nu(T)-\nu(t_{k+1})\}=0=$$

$$=\lim_{\max \Delta t_k\to 0}e^{-\lambda(T)}\sum_{k=0}^{n-1}P\{\nu(t_{k+1})-\nu(t_k)=1\}e^{\lambda(t_{k+1})-\lambda(t_k)}=\lambda(T)e^{-\lambda(T)}.$$

Так само $P\{\nu(T)-\nu(s)=1\}=(\lambda(T)-\lambda(s))e^{-(\lambda(T)-\lambda(s))}$. Тому

$$P\{\nu(T)=2\}=\lim_{\max \Delta t_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}P\{\nu(t_k)=0\}P\{\nu(t_{k+1})-\nu(t_k)=1\}\times$$

$$\times P\{\nu(T)-\nu(t_{k+1})=1\}=$$

$$=e^{-\lambda(T)}\lim_{\max \Delta t_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}P\{\nu(t_{k+1})-\nu(t_k)=1\}[\lambda(T)-\lambda(t_{k+1})]=$$

$$=e^{-\lambda(T)}\int_0^T(\lambda(T)-\lambda(s))\,d\lambda(s)=\frac{(\lambda(T))^2}{2}e^{-\lambda(T)}.$$

Формулу (1) тепер можна встановити за індукцією.

Таким чином, $\nu(A, t)$ має розподіл Пуассона. Нехай $\pi(t, A)=M\nu(t, A)$. Якщо множини $A_k\in\mathcal{B}_0$, $A_k\cap A_l=\varnothing$ для $k\neq l$, $\bigcup A_k\in\mathcal{B}_0$, то $\nu(\bigcup A_k, t)=\Sigma\nu(A_k, t)$, тому

$$\pi(t, \bigcup A_k)=\Sigma\pi(t, A_k),$$

π є скінченна міра на кожному $\mathcal{B}_\varepsilon$.

Для того щоб з'ясувати, як між собою зв'язані $\nu(A, t)$ та $\xi(B, t)$ при різних A та B, доведемо таке твердження.

Л е м а 2. Нехай $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$, $t\in[0, T]$ — стохастично неперервні процеси з фазовими просторами X_1 та X_2 (це скінченновимірні евклідові простори). Пара $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ є процес з незалежними приростами в $X_1\times X_2$, що не має розривів II роду, неперервний справа. Процес $\xi_1(t)$ має скінченне число стрибків на $[0, T]$, $\xi(0)=0$, процеси $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ не мають спільних стрибків: якщо $\Delta_1(t)=\xi_1(t)-\xi_1(t-)$, $\Delta_2(t)=\xi_2(t)-\xi_2(t-)$, то $|\Delta_1(t)|\cdot|\Delta_2(t)|=0$ $\forall\, t\in[0, T]$. Тоді процеси $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ незалежні.

Д о в е д е н н я. Незалежність процесів означає, що для $0\leqslant t_1<\ldots<t_k\leqslant T$ незалежні групи величин $\{\xi_1(t_1), \xi_1(t_2)-\xi_1(t_1), \ldots, \xi_1(t_k)-\xi_1(t_{k-1})\}$ та $\{\xi_2(t_1), \xi_2(t_2)-\xi_2(t_1), \ldots, \xi_2(t_k)-\xi_2(t_{k-1})\}$. Оскільки незалежними є пари $\{\xi_1(t_1); \xi_2(t_1)\}$, $\{\xi_1(t_1)-\xi_1(t_1); \xi_2(t_2)-\xi_2(t_1)\}$, ..., $\{\xi_1(t_k)-\xi_1(t_{k-1}), \xi_2(t_k)-\xi_2(t_{k-1})\}$, то досить довести незалежність величин у кожній парі, тобто незалежність приростів $\xi_1(t)-\xi_1(s)$ та $\xi_2(t)-\xi_2(s)$. Будемо доводити незалежність $\xi_1(T)-\xi_1(0)$, $\xi_2(T)-\xi_2(0)$; $\xi_1(0)=0$; можна вважати, що і $\xi_2(0)=0$. Крім того, для спрощення запису розглянемо випадок, коли $X_1=X_2=R$. Досить довести, що для $u, v\in R$

$$M\exp\{iu\xi_1(T)+iv\xi_2(T)\}-$$
$$-M\exp\{iu\xi_1(T)\}M\exp\{iv\xi_2(T)\}=0. \qquad (3)$$

Нехай $\xi_k^{(1)} = u\xi_1(t_{k+1}) - u\xi_1(t_k)$,

$$\xi_k^{(2)} = [v\xi_2(t_{k+1}) - v\xi_2(t_k)]\, I_{\{\xi_k^{(1)}=0\}}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \quad \delta = \max(t_{k+1} - t_k).$$

Для доведення (3) досить показати, що

$$\lim_{\delta\to 0}\left| M \exp\left\{i\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^{(1)} + i\sum \xi_k^{(2)}\right\} - M\exp\left\{i\sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^{(1)}\right\} M\exp\{i\sum \xi_k^{(2)}\}\right| = 0. \tag{4}$$

Це випливає з того, що за умовами леми

$$v\xi_2(T) - \Sigma\xi_k^{(2)} = \Sigma\,[(\xi_2(t_{k+1})) - \xi_2(t_k)\, I_{\{\xi_k^{(1)}\neq 0\}}] \to 0,$$

бо якщо $\xi_1(t)$ має r стрибків, у цій сумі лише r доданків може бути ненульовими, і кожен з доданків прямує до нуля (точки розриву $\xi_1(t)$ є точки неперервності $\xi_2(t)$). Внаслідок незалежності пар $\{\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}\}$ для доведення (4) треба встановити, що

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\prod_{k=0}^{n-1} M\exp\{i\xi_k^{(1)} + i\xi_k^{(2)}\} - \prod_{k=0}^{n-1} M\exp\{i\xi_k^{(1)}\} M\exp\{i\xi_k^{(2)}\}\right| = 0. \tag{5}$$

Використавши нерівності $|\Pi a_k - \Pi b_k| \leqslant \Sigma|a_k - b_k|$, якщо $|a_k| \leqslant 1$, $|b_k| \leqslant 1$, а також рівність $e^{x+y} = e^x + e^y - 1$, якщо $xy = 0$, і врахувавши $\xi_k^{(1)}\,\xi_k^{(2)} = 0$, переконуємось, що для доведення (5) треба встановити, що

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} |Me^{i\xi_k^{(1)}} + Me^{i\xi_k^{(2)}} - 1 - Me^{i\xi_k^{(1)}} Me^{i\xi_k^{(2)}}| =$$
$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} |Me^{i\xi_k^{(1)}} - 1|\,|Me^{i\xi_k^{(2)}} - 1| = 0. \tag{6}$$

Із стохастичної неперервності $\xi_2(t)$ випливає, що

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_k |Me^{i\xi_k^{(2)}} - 1| = 0,$$

$$M\sum_{k=0}^{n-1}\left|e^{i\xi_k^{(1)}} - 1\right| \leqslant M\nu,$$

де ν — число стрибків $\xi_1(t)$ на $[0, T]$. За лемою 1 воно має розподіл Пуассона, тому $M\nu < \infty$, отже, (6) виконане.

Наслідки. 1. $\xi(A, t)$ та $\xi(t) - \xi(A, t)$ для $A \in \mathscr{B}_0$ — процеси незалежні: а) $\{\xi(A, t), \xi(t) - \xi(A, t)\}$ — процес з незалежними приростами, б) $\xi(A, t)$ має скінченне число стрибків, в) $\xi(A, t)$ та $\xi(t) - \xi(A, t)$ не мають спільних стрибків.

2. $\nu(A, t)$ та $\xi(t) - \xi(A, t)$ процеси незалежні.

3. Нехай $B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathscr{B}_0$, $B_i \subset A \in \mathscr{B}_0$, тоді $\{\nu(B_1, t); \ldots; \nu(B_k, t)\}$ та $\xi(t) - \xi(A, t)$ незалежні. Це випливає з того, що $\nu(B_k, t)$ для $B_i \subset A$ є число стрибків $\xi(A, t)$, що потрапили в B_i, $\xi(A, t)$ не залежить від $\xi(t) - \xi(A, t)$.

4. $\nu(A, t)$ є міра з незалежними значеннями на $\mathscr{B}_0$. Це означає, що для будь-яких $A_1, \ldots, A_n$ з $\mathscr{B}_0$, для яких $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, величини $\{\nu(A_i, t), i = 1, \ldots, n\}$ незалежні між собою. Насправді незалежні і процеси як функції t. Досить довести, що $\nu(A_1, t)$ не залежить від сукупності $\{\nu(A_2, t), \ldots, \nu(A_n, t)\}$. Це випливає з 2), бо $\nu(A_2, t), \ldots, \nu(A_n, t)$ визначаються процесом $\xi(t) - \xi(A_1, t)$. Так само $\nu(A_2, t)$ не залежить від $\{\nu(A_3, t), \ldots, \nu(A_n, t)\}$ тощо. Тому всі $\nu(A_i, t)$ незалежні у сукупності.

Зображення процесу $\xi(A, t)$. *Покажемо, що* $\xi(A, t)$ ***виражається*** через інтеграли за мірою $\nu(B, t)$. Якщо $\hat{\nu}(B, t) = \nu(B, t) - M\nu(B, t)$, то для $A \cap B = \varnothing$ $M\hat{\nu}(A, t)\hat{\nu}(B, t) = M\hat{\nu}(A, t)M\hat{\nu}(B, t) = 0$, крім того, $M\hat{\nu}^2(B, t) = \pi(B, t)$. Тому $\hat{\nu}(B, t)$ є міра з ортогональними значеннями і існує інтеграл $\int f(x)\hat{\nu}(dx, t)$ для будь-якої вимірної функції f, для якої $\int f^2(x)\pi(dx, t) < \infty$. Нехай A — обмежена множина з $\mathscr{B}_0$, d — її діаметр. Тоді для $x \in A$ $|\xi(A, t) - x\nu(A, t)| \leqslant \nu(A, t)\, d$ ($\xi(A, t)$ має $\nu(A, t)$ стрибків, кожен стрибок не більше ніж на d відрізняється від x). Згідно з цією формулою, якщо $A = \bigcup\limits_{k=}^{n} B_k$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $\operatorname{diam} B_i \leqslant \lambda$, то для $x_i \in B_i$

$$\left|\xi(A, t) - \sum_{i=1}^{n} x_i \nu(B_i, t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi(B_i, t) - x_i \nu(B_i, t)| \leqslant \lambda\nu(A, t). \qquad (7)$$

З формули (7) за допомогою граничного переходу, коли $\lambda \to 0$, маємо таку:

$$\xi(A, t) = \int_A x\nu(dx, t) \qquad (8)$$

(інтеграл за ν можна розуміти як суму інтегралів за $\hat{\nu}$ та π). Інтеграли на необмеженій області можна визначити за допомогою (7), беручи нескінченні послідовності B_k, для яких $\operatorname{diam} B_k < \lambda$. Нарешті, характеристичну функцію $\xi(A, t)$ знову ж таки можемо обчислити, виходячи з нерівності (7): для $z \in X$

$$M\exp\{i(z, \xi(A, t))\} = \lim_{\lambda\to 0} M\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}(z, x_k)\,\nu(B_k, t)\right\} =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\prod_{k=1}^{n} M\exp\{i(z, x_k)\,\nu(B_k, t)\} =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\prod_{k=1}^{n}\exp\{\pi(B_k, t)(e^{i(z,x_k)} - 1)\} =$$
$$= \exp\left\{\lim_{\lambda\to 0}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\exp\{i(z, x_k)\} - 1)\,\pi(B_k, t)\right\}\right\} =$$
$$= \exp\left\{\int_A (e^{i(z,x)} - 1)\,\pi(dx, t)\right\}. \qquad (9)$$

28. ЗАГАЛЬНИЙ ВИГЛЯД СТОХАСТИЧНО НЕПЕРЕРВНОГО ПРОЦЕСУ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ

Позначимо замкнену кулю з центром у точці 0 радіуса δ через U_δ, її доповнення V_δ. Нехай $\xi^\delta(t) = \xi(t) - \xi(V_\delta, t)$. Цей процес не має стрибків більших ніж δ і

$$\xi(t) = \xi^\delta(t) + \int_{V_\delta} x\nu(dx, t). \tag{1}$$

Доданки у правій частині незалежні. Наша мета відділити стрибкову частину процесу від неперервної. Хотілося б перейти до границі у формулі (1), але безпосередньо це зробити неможливо. Дослідимо деякі властивості процесу $\xi^\delta(t)$. Будемо вважати, що $\xi(0) = 0$, тоді і $\xi^\delta(0) = 0$.

Лема 1. Для всіх $\delta > 0$ існує $M|\xi^\delta(t)|^2$.

Доведення. Нехай $\eta_z(t) = (\xi^\delta, z)$. Досить довести, що для всіх $z \in X$ $M(\eta_z(T))^2 < \infty$. Оскільки стрибки $\eta_z(t)$ не перебільшують $|z|\delta$, то для $c > |z|\delta$

$$P\{\max_{0\le k<n} |\eta_z(t_{k+1}) - \eta_z(t_k)| \le c\} \to 1,$$

коли $0 = t_0 < \ldots < t_n = T$, $\max \Delta t_k \to 0$, тому

$$\sum_{k=0}^{n-1} P\{|\eta_z(t_{k+1}) - \eta_z(t)| > c\} \to 0$$

при тих же умовах. Звідси

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\eta_z(t_{k+1}) - \eta_z(t_k))\, I_{\{|\eta_z(t_{k+1}) - \eta_z(t_k)| \le c\}} \to \eta(T).$$

Якщо $M\eta^2(T) = +\infty$, то при $\eta_{nk} = \eta_z(t_{k+1}) - \eta_z(t_k)$ встановлюємо, що

$$\zeta_n = \frac{\Sigma(\eta_{nk} - M\eta_{nk})}{\sqrt{\Sigma D\eta_{nk}}}$$

обмежена за імовірністю, тому:

1) якщо $\Sigma D\eta_{nk} \to 0$, то $\eta(T) - \Sigma M\eta_{nk} \to 0$, тобто $\eta(T)$ — стала величина і $M\eta^2(T)$ існує;

2) якщо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \Sigma D\eta_{nk} < \infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \Sigma D\eta_{nk} > 0$, то $\eta(T) - \Sigma M\eta_{nk}$ обмежена за імовірністю, величина $\Sigma M\eta_{nk}$ обмежена, тому обмежена $M(\Sigma\eta_{nk})^2$;

3) якщо $\overline{\lim}\ \Sigma D\eta_{nk} = +\infty$, то для деякої підпослідовності ζ_n асимптотично нормальна з дисперсією 1, а це не може бути, бо

$$\zeta_n + \frac{\Sigma M\eta_{nk}}{\sqrt{\Sigma D\eta_{nk}}} \to 0$$

за імовірністю.

Нехай $\varepsilon < \delta$, тоді

$$\xi^0(t) - \xi^\varepsilon(t) = \int_{U_\delta \setminus U_\varepsilon} x\nu(dx,\ t),$$

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi^0(t) + \int_{U_\delta \setminus U_\varepsilon} x\nu(dx,\ t).$$

Доданки в правій частині незалежні. Тому

$$D(\xi^0(t),\ z) = D(\xi^\varepsilon(t),\ z) + D\int_{U_\delta \setminus U_\varepsilon} (x,\ z)\,\nu(dx,\ t).$$

Легко підрахувати, що $D\Sigma c_k\nu\,(B_n,\ t) = \Sigma c_k^2\pi\,(B_k,\ t)$, коли $B_i \cap B_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Тому

$$D\int_{U_\delta \setminus U_\varepsilon} (x,\ z)\,\nu(dx,\ t) = \int_{U_\delta \setminus U_\varepsilon} (x,\ z)^2\,\pi(dx,\ t),$$

$$\int_{\varepsilon<|x|\leqslant\delta} (x,\ x)^2\,\pi(dx,\ t) \leqslant M\,|\,\xi^0(T)\,|^2$$

для $t \leqslant T$,

$$\int_{0<|x|\leqslant\delta} (x,\ x)^2\,\pi(dx,\ t) \leqslant M\,|\,\xi^0(T)\,|^2, \quad t \leqslant T \tag{2}$$

З нерівності (2) робимо висновок, що існує

$$\int_{0<|x|\leqslant\delta} x\,[\nu(dx,\ t) - \pi(dx,\ t)].$$

Розглянемо процес

$$\xi^0(t) - \int_{0<|x|\leqslant\delta} x\,[\nu(dx,\ 0) - \pi(dx,\ t)] = \xi_0(t).$$

Покажемо, що $\xi_0(t)$ має неперервну модифікацію. Зауважимо, що $\pi(B,\ t)$ — неперервна функція. Тому для $\varepsilon < \delta$

$$\xi^0(t) - \int_{\varepsilon<|x|\leqslant\delta} x\,[\nu(dx,\ t) - \pi(dx,\ t)] = \xi^\varepsilon(t) + \int_{\varepsilon<|x|\leqslant\delta} x\pi(dx,\ t)$$

не має стрибків більших ніж ε. Нехай для $\varepsilon > 0$

$$\theta_\varepsilon(t) = \int_{\varepsilon<|x|\leqslant\delta} x\,[\nu(dx,\ t) - \pi(dx,\ t)].$$

Покажемо, що можна вибрати так послідовність $\varepsilon_n \downarrow 0$, щоб $\theta_{\varepsilon_n}(t)$ збігалися рівномірно. Для процесу з незалежними приростами $\theta(t)$, для якого $M\,\theta(t) = 0$, $D\theta(t) < \infty$, $\theta(t)$ не має розривів II роду і

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\,\theta(t)\,| > c\} \leqslant \frac{1}{c}\,M\,|\,\theta(t)\,|^2 \tag{3}$$

(це нерівність Колмогорова для неперервного процесу). Тому для $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\theta_{\varepsilon_n}(t) - \theta_{\varepsilon_{n+1}}(t)| > c_n\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{c_n^2} \int_{\varepsilon_{n+1}<|x|\leqslant\varepsilon_n} |x|^2 \pi(dx, T).$$

Візьмемо $c_n > 0$ такі, щоб $\Sigma c_n < \infty$, потім виберемо $\varepsilon_n \to 0$, для яких

$$\Sigma c_n^{-2} \int_{|x|\leqslant\varepsilon_n} |x|^2 \pi(dx, T) < \infty. \tag{4}$$

Переконуємось, що, починаючи з деякого номера n (внаслідок теореми Бореля—Кантеллі), $|\theta_{\varepsilon_n}(t) - \theta_{\varepsilon_{n+1}}(t)| \leqslant c_n$, $t \in [0, T]$, тому $\theta_{\varepsilon_n}(t)$ рівномірно прямує до $\theta_0(t)$ (насправді до деякої модифікації цього процесу). Тоді процес $\xi^\delta(t) - \theta_\varepsilon(t)$ не має стрибків більших ніж ε і рівномірно прямує до $\xi_0(t)$, який не матиме стрибків більших ніж ε, яке б не було $\varepsilon > 0$. Отже, $\varepsilon_0(t)$ неперервний. Ми встановили таке твердження.

Т е о р е м а 1. Стохастично неперервний процес без розривів другого роду $\xi(t)$ має таке зображення:

$$\xi(t) = \int_{|x|>\delta} x\nu(dx, t) + \int_{0<|x|\leqslant\delta} x[\nu(dx, t) - \pi(dx, t)] + \xi_0(t), \tag{5}$$

де $\xi_0(t)$ — неперервний процес з незалежними приростами, він не залежить від міри $\nu(A, t)$.

Неперервний процес з незалежними приростами. Л е м а 2. Нехай $\eta(t)$ — неперервний числовий процес з незалежними приростами, $\eta(0) = 0$. Тоді $\eta(t)$ має нормальний розподіл.

Д о в е д е н н я. Нехай $0 = t_{n_0} < t_{n_1} < \ldots < t_{nn}$,

$$\max_k \Delta t_{n_k} \to 0, \ \eta_{n_k} = \eta(t_{n_k}) - \eta(t_{n_{k-1}}).$$

Тоді з неперервності процесу випливає

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma P\{|\eta_{n_k}| > \varepsilon\} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Тому можна вибрати так $\varepsilon_n \downarrow 0$, що

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma P\{|\eta_{n_k}| > \varepsilon_n\} = 0.$$

Візьмемо $\tilde{\eta}_{n_k} = \eta_{n_k} I_{\{|\eta_{n_k}|\leqslant\varepsilon_n\}}$. Тоді $\eta(t) = \lim_{n\to\infty} \Sigma\eta_{n_k}$ (за імовірністю).

А для величин

$$\zeta_n = \frac{\Sigma(\tilde{\eta}_{n_k} - M\tilde{\eta}_{n_k})}{\sqrt{D\tilde{\eta}_{n_k}}}$$

виконується центральна гранична теорема. Це можливо лише тоді, коли $\eta(t)$ має нормальний розподіл (можливо, дисперсія цього розподілу 0).

Наслідок 1. Якщо $\eta(t)$ — неперервний процес з незалежними приростами, то його прирости мають нормальний розподіл.

Зауваження 1. Нехай $\eta(0)=0$, $M\eta(t)=a(t)$, $b(t)=D\eta(t)$. Оскільки для $0<s<t$

$$D\eta(t)=D\eta(s)+D(\eta(t)-\eta(s))\geqslant D\eta(s),$$

то функція $b(t)$ зростає. Нехай $\eta^*(t)$ — незалежний від $\eta(t)$ процес, який має такі самі розподіли. Тоді $\eta(t)-\eta^*(t)$ — теж неперервний процес з незалежними приростами,

$$M(\eta(t)-\eta^*(t))=0,\ M(\eta(t)-\eta^*(t))^2=2b(t).$$

Покажемо, що $b(t)$ — неперервна функція. Якби для деякого t_0 було $\sigma=b(t_0+)-b(t_0-)>0$, то

$$P\{|\eta(t_0+h)-\eta^*(t_0+h)-\eta(t_0-h)+\eta^*(t_0-h)|>\varepsilon\}\to$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma}\right\}dy>0.$$

Процес $\eta(t)-M\eta(t)=\eta(t)-a(t)$ має $M(\eta(t)-a(t))=0$, $M(\eta(t)-a(t))^2=b(t)$ — неперервна функція, тому він неперервний за імовірністю. Якби $a(t)$ було розривне, то $\eta(t)$ не був би неперервним за імовірністю, отже, $a(t)$ та $b(t)$ неперервні.

Наслідок 2. Якщо $\xi_0(t)$ — неперервний процес з незалежними приростами, то для $t>s$ величина $\xi_0(t)-\xi_0(s)$ має гауссівський розподіл в X. Якщо $a(t)=M(\xi_0(t)-\xi_0(0))$, а $B(t)$ — такий симетричний невід'ємний оператор з $L(X)$, що $M(\xi_0(t)-\xi_0(0)-a(t), z)^2=(B(t)z, z)$, то функції $a(t)$ та $B(t)$ неперервні, крім того, $B(t)$ — операторна зростаюча функція: для $s<t$ оператор $B(t)-B(s)$ невід'ємний.

Дійсно, нехай $\eta_z(t)=(\xi_0(t), z)$, тоді величина $\eta_z(t)-\eta_z(s)$ має нормальний розподіл для всіх $z\in X$. Це означає, що $\xi(t)-\xi(s)$ має гауссівський розподіл в X, з зауваження випливає, що функції

$$M\eta_z(t)-\eta_z(0)=M(\xi_0(t)-\xi_0(0),\ t)=(a(t),\ z),$$

$$D[\eta_z(t)-\eta_z(0)]=(B(t)z,\ z)$$

неперервні для всіх z, тому неперервні $a(t)$ та $B(t)$, а функція $(B(t)z, z)$ ще й зростає.

Зауваження 2. Використовуючи умову неперервності процесу з незалежними приростами, легко перевірити, що гауссівський процес з незалежними приростами, для якого $a(t)=0$, $B(t)$ — неперервна функція, має неперервну модифікацію. Очевидно, що до неї можна додати будь-яку неперервну функцію $a(t)$, вона залишається неперервною.

Характеристична функція процесу з незалежними приростами. Доданки у формулі (5) незалежні. Тому характеристична функція $\xi(t)-\xi(0)$ є добуток характеристичних функцій:

1) $\xi_0(t)-\xi_0(0)$,

$$M\exp\{i(z,\ \xi_0(t)-\xi_0(0))\}=\exp\left\{i(z,\ a(t)=\frac{1}{2}(B(t(z,\ z)\right\},\quad(6)$$

2) $\int\limits_{|x|>\delta} x\nu(dx,\ t)$,

$$M\exp\left\{i\left(z,\ \int\limits_{|x|>\delta} x\nu(dx,\ t)\right)\right\} = \exp\left\{\int\limits_{|x|>\delta}(e^{i(z,x)}-1)\,\pi(dx,\ t)\right\}, \qquad (7)$$

3) $\int\limits_{0<|x|\leqslant\delta} x\,[\nu(dx,\ t)-\pi(dx,\ t)]$,

$$M\exp\left\{i\left(z,\ \int\limits_{0<|x|\leqslant\delta} x\,[\nu(dx,\ t)-\pi(dx,\ t)]\right)\right\} =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0} M\exp\left\{\int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant\delta} i(x,\ z)\,[\nu(dx,\ t)-\pi(dx,\ t)]\right\} =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0} M\exp\left\{-i\int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant\delta}(x,\ z)\,\pi(t,\ dx)+i\int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant\delta}(x,\ z)\,\nu(dx,\ t)\right\} =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\exp\left\{-i\int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant\tau}(x,\ z)\,\pi(dx,\ t)+\int\limits_{\varepsilon<|x|\leqslant\delta}(e^{i(x,z)}-1)\,\pi(dx,\ t)\right\} =$$

$$=\exp\left\{\int\limits_{0<|x|\leqslant\delta}(e^{i(z,x)}-1-i(z,\ x))\,\pi(dx,\ t)\right\}.$$

Таким чином,

$$M\exp\{i(z,\ \xi(t)-\xi(0))\} = \exp\left\{i(z,\ a(t))-\frac{1}{2}(B(t)z,\ z)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0<|x|\leqslant\delta}(e^{i(z,x)}-1-i(z,\ x)\,\pi(dx,\ t)+\int\limits_{|x|>\delta}(e^{i(z,x)}-1)\,\pi(dx,\ t)\right\}. \qquad (8)$$

Властивості функцій $a(t)$, $B(t)$, $\pi(B,\ t)$: вони неперервні за t, $B(t)$ — операторна зростаюча, $\pi(B,\ t)$ зростає для кожного B і $\int\limits_{|x|\leqslant\delta}|x|^2\,\pi(dx,$ $t)<\infty$ для всіх $\delta>0$ і $t\in[0,\ T]$.

29. ДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ

Так називається деякий клас неперервних марківських процесів, що можуть служити математичною моделлю явища дифузії — руху частинки внаслідок взаємодії з молекулами середовища, які перебувають у хаотичному тепловому русі. Спочатку визначимо процес через його імовірність переходу, а потім обговоримо зміст введених умов. Нехай X — скінченновимірний евклідів простір — фазовий простір процесу $x(t)$, визначеного для $t\in R_+$; $P(s,\ x,\ t,\ B)$ — його імовірність переходу. Введемо таку умову (вона не належить до умов дифузійності, а є загальна умова регулярності):

0) для кожного $T>0$

$$\sup_x \sup_{0\leqslant t\leqslant T-h} P(t,\ x,\ t+h,\ V_\varepsilon(x))\to 0,$$

коли $h\to 0$, $V_\varepsilon(x)=\{y:|x-y|>\varepsilon\}$.

Умова 0) дозволяє зразу розглядати $x(t)$ як процес без розривів II роду.

Тепер сформулюємо умови дифузійності: для $x \in X$, $t \in R_+$, $\varepsilon > 0$

1) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} P(t, x, t+h, V_\varepsilon(x)) = 0$,

2) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{|x-y| \leq \varepsilon} (y-x) P(t, x, t+h, dy) = a(t, x)$, де $a(t, x)$ — вимірна функція з $R_+ \times X$ в X;

3) для всіх $z \in X$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{|x-y| \leq \varepsilon} (y-x, z)^2 P(t, x, t+h, dy) = (B(t, x) z, z),$$

$B(t, x)$ — вимірна функція з $R_+ \times X$ в $L_+(X)$ — простір симетричних невід'ємних операторів з X в X. $a(t, x)$ та $B(t, x)$ називаються дифузійними коефіцієнтами процесу, $a(t, x)$ — вектором переносу, $B(t, x)$ — оператором дифузії. Умова 1) є певна умова неперервності процесу. Оскільки він не має розривів II роду, то для неперервності досить, щоб

$$\lim_{h \to 0} \sum_{kh<T} P\{|x((k+1)h) - x(kh)| > \varepsilon\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} M \sum_{kz<T} P(kh, x(kh), (k+1)h, V_\varepsilon(x(kh))) = 0.$$

Якби умова 1) виконувалась рівномірно, то під знаком суми стояло б $o(h)$, а число доданків було $O\left(\frac{t}{h}\right)$, тоді б виконувались і умови неперервності.

Умова 2) вказує на наявність певної «течії» в рідині або «вітру» в газі: частинка з точки x у момент t за час h в середньому зміщується на $a(t, x) h$. Оператор $B(t, x)$ вказує на розмір середнього квадратичного відхилення частинки від її положення x в момент t, до якого призводить самий випадковий вплив середовища навіть при відсутності «течії». Якщо середовище ізотропне (його властивості по всіх напрямках однакові), то $B(t, x) = \sigma(t, x) \mathrm{I}$, де $\sigma(t, x)$ — числовий коефіцієнт, який називається коефіцієнтом дифузії.

Умови 1) — 3) можна об'єднати в одну еквівалентну умову. Позначимо через L_t диференціальний оператор, який діє на двічі диференційовні функції $\varphi : X \to R$ за формулою

$$L_t \varphi(x) = (\varphi'(x), a(t, x)) + \frac{1}{2} \operatorname{Sp} B(t, x) \varphi''(x). \tag{1}$$

Під $\varphi'(x)$ ми розуміємо вектор такий, що

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+hy) - \varphi(y)}{h} = (\varphi'(x), y),$$

а під $\varphi''(x)$ — оператор з $L(x)$, для якого

$$(\varphi''(x) y, z) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \varphi(x + ty + sz)|_{t=0, s=0}.$$

Якщо $x^1, \ldots, x^m$ — координати $x \in X = R^m$, то

$$L_t\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^k} a_k(t, x) + \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{m} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k \partial x^i} b_{ki}(t, x), \tag{2}$$

де $a_k(t, x)$ — координати вектора $a(t, x)$, $b_{ki}(t, x)$ — елементи матриці оператора $B(t, x)$ в природному базисі R^m: $e_k = (\overleftarrow{0, \ldots,} \overset{k\rightarrow}{1}, 0, \ldots, 0)$.

Лема. Умови 1) — 3) еквівалентні такій: для будь-якої двічі неперервно диференційовної обмеженої функції φ, $t \in R_+$, $x \in X$

$$\int [\varphi(y) - \varphi(x)] P(t, x, t+h, dy) = hL_t\varphi(x) + o(h). \tag{3}$$

Доведення. Якщо виконані умови 1) — 3), то, розкладаючи $\varphi(y) - \varphi(x)$ за формулою Тейлора, для $|y - x| < \varepsilon$ матимемо

$$\int [\varphi(y) - \varphi(x)] P(t, x, t+h, dy) = o_\varepsilon(h) +$$

$$+ \int_{|x-y|\leq\varepsilon} \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^k}(y^k - x^k) + \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{m} \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^i \partial x^k} + \beta_{ik}(\varepsilon)\right] \times$$

$$\times P(t, x, t+h, dy) = o_\varepsilon(h) + hL_t\varphi(x) + h\gamma_\varepsilon,$$

де $\frac{o_\varepsilon(h)}{h} \to 0$ для всіх $\varepsilon > 0$, $\gamma_\varepsilon \to 0$, коли $\varepsilon \to 0$. Звідси випливає (3). Навпаки, нехай виконується (3). Візьмемо $\varphi_{x_0}(x) = 1 - \exp\{-|x - x_0|^4\}$. Це обмежена функція, має всі похідні, $\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{x_0}(x) = 0$, коли $x = x_0$; $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_{x_0}(x) = 0$, коли $x = x_0$. Тому умова 1) виконується. Нехай $\varphi_{x_0}(y) = (y - x_0, z)$ для $|y - x_0| < 1$, а далі функція продовжена так, щоб бути обмеженою і неперервно двічі диференційовною. Тоді для $\varepsilon < 1$

$$\int_{|y-x_0|\leq\varepsilon} (y - x_0, z) P(t, x_0, t+h, dy) = (a(t, x_0), z)h + o(h).$$

Це є умова 2). Для доведення умови 3) треба взяти квадрат попередньої функції.

Розглянемо найпростіший випадок дифузійних процесів.

Теорема 1. Нехай умови 1) — 3) виконуються рівномірно за $t \leq T$, $x \in U_r$, які б не були $T > 0$, $r > 0$, U_r — куля з центром в точці 0 радіуса r. Якщо $a(t, x) = 0$, $B(t, x) = I$, то $x(t)$ є вінерівський процес.

Доведення. Виберемо $r > 0$ та $T > 0$. Нехай τ_r — момент першого виходу процесу $x(t)$ з кулі U_r. Тоді для процесу без розривів II роду $x_r(t) = x(t \wedge \tau_r)$ маємо

$$\sum_{kh<T} P\{|x_r(kh+h) - x(kh)| > \varepsilon\} \leq$$

$$\leq M \sum_{kh<T} P(kh, x(kh), kh+h, V_\varepsilon(x(kh))) I_{\{x(kh)\in U_r\}} \leq O\left(\frac{T}{h}\right) o(h). \tag{4}$$

Тому процес $x(t)$ неперервний. Нехай $\chi_h^r(kh) = \prod_{i=0}^{k} I_{\{x(ih)\in U_r\}}$,

$$\xi_k^{(h)}(\varepsilon) = (x(kh+h) - x(kh))\,\chi_h^r(kh)\, I_{\{|x(kh+h)-x(kh)|\le\varepsilon\}}.$$

Враховуючи (4), можемо записати для $t < T$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{kh<t}\xi_k^{(h)}(\varepsilon) = x(t\wedge\tau_r) - x(0). \qquad (5)$$

Оскільки рівномірно за $kh < T$

$$|M(\xi_k^{(h)}(\varepsilon)/\mathcal{F}_{kh})| = o(h),$$

$$M(|\xi_k^h(\varepsilon)|^2/\mathcal{F}_{kh}) = hI_{\{x(kh)\in U_r\}} + o(h),$$

де $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра, що породжується $x(s)$, $s \leqslant t$, то

$$M(e^{i(\xi_k^h(\varepsilon),z)}/\mathcal{F}_{kh}) = 1 - \frac{h}{2}|z|^2\prod_{i=0}^{k} I_{\{x(ih)\in U_r\}} + o(h).$$

Тому

$$M\exp\left\{i\sum_{k=0}^{n}(\xi_k^h(\varepsilon),\ z)\right\} - 1 =$$

$$= M\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left\{i\sum_{k=0}^{m-1}(\xi_k^h(\varepsilon),\ z)\right\} M(\exp\{i(\xi_m^h(\varepsilon),\ z)\} - 1/\mathcal{F}_{m_h}) =$$

$$= M\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left\{i\sum_{k=0}^{m-1}(\xi_k^h(\varepsilon),\ z)\right\}\left(-\frac{h}{2}|z|^2\prod_{i=0}^{k} I_{\{x(ih)\in U_r\}} + o(h)\right).$$

Отже, коли $nh \to t < T$, тоді

$$M\exp\{i(x(t\wedge\tau_r) - x(0),\ z)\} - 1 =$$

$$= -\frac{|z|^2}{2}\int_0^t M\exp\{i(x(s\wedge\tau_r) - x(0),\ z)\}\, I_{\{\sup_{u\leqslant s}|x(u)|<r\}}ds.$$

Перехід до границі, коли $r\to\infty$, дає

$$M\exp\{i(x(t) - x(0),\ z)\} = 1 - \frac{|z|^2}{2}\int_0^t M\exp\{i(x(s) - x(0),\ z)\}\,ds.$$

Тому

$$M\exp\{i(x(t) - x(0),\ z)\} = \exp\left\{-\frac{t}{2}|z|^2\right\}.$$

Аналогічно можна встановити, що

$$M(\exp\{i(x(t) - x(s),\ z)\}/\mathcal{F}_s) = \exp\left\{-\frac{(t-s)^2}{2}|z|^2\right\}.$$

Це завершує доведення теореми.

Наслідок. Дифузійний процес із сталими коефіцієнтами: вектором переносу a і оператором дифузії B — має такий вигляд:

$$x(t) = x(0) + ta + B^{1/2}w(t).$$

Тут $x(0)$ — початкове положення процесу, $w(t)$ — вінерівський процес в X.

Зауважимо, що це процес з незалежними приростами. Можна вважати, що кожний дифузійний процес локально (на малих проміжках часу) поводить себе подібно до такого процесу. Пізніше ми доведемо строгий математичний факт, що надасть словам чіткого змісту.

Рівняння Колмогорова. Ми вже багато разів встановлювали рівняння, які показували, як змінюються з часом імовірності переходу. Знайдемо такі рівняння і для дифузійних процесів.

Теорема 2. Нехай функції $a(t, x)$ та $B(t, x)$ неперервні за t, умови 1) — 3) виконуються рівномірно відносно t на обмежених інтервалах і для деякого $T > 0$ та обмеженої неперервної функції $\varphi(x)$ функція

$$u_T(t, x) = \int P(t, x, T, dy)\varphi(y)$$

неперервна за сукупністю змінних і має похідні $\frac{\partial}{\partial x} u_T(t, x)$, $\frac{\partial}{\partial x^2} u_T(t, x)$, що неперервні за t. Тоді функція $u_T(t, x)$ має похідну по t і задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} u_T(t, x) + L_t u_T(t, x) = 0 \tag{6}$$

з початковою умовою $\lim\limits_{t \to T} u_T(t, x) = \varphi(x)$.

Доведення. Те, що виконується гранична умова, випливає з умови 1) для дифузійних процесів. Оскільки $u_T(t, x)$ диференційовна по x двічі, то за лемою 1

$$u_T(t-h, x) = \int P(t-h, x, t, dy)\, u_T(t, y) =$$
$$= u_T(t, x) + \int P(t-h, x, t, dy)\,[u_T(t, y) - u_T(t, x)] =$$
$$= hL_{t-h}u_T(t, x) + u_T(t, x) + o(h),$$

отже,

$$\frac{1}{h}[u_T(t-h, x) - u_T(t, x)] = L_{t-h}u_T(t, x) + \frac{o(h)}{h}.$$

Звідси дістанемо (6), якщо замість похідної $\frac{\partial}{\partial t}$ підставимо ліву похідну $\frac{\partial^-}{\partial t}$. Ця ліва похідна неперервна, тому вона є і звичайна похідна.

Рівняння (6) є обернене (перше) рівняння Колмогорова для дифузійних процесів. Припустимо, що існує щільність імовірності переходу процесу $p(s, x, t, y)$:

$$p(s, x, t, B) = \int_B p(s, x, t, y)\,dy.$$

Зараз ми виведемо рівняння для $p(s, x, t, y)$ по змінних t, y. Це пряме рівняння Колмогорова (друге), воно ще інколи називається рівнянням Фоккера — Планка (ці автори вперше його вивели у фізиці). Не будемо строго слідкувати за умовами, припускаючи, що все, що буде робитись, можливо. Для фінітної неперервної функції g з неперервними похідними $\frac{\partial}{\partial y} g$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2} g$ має місце

$$\int p(s, x, t+h, y) g(y) dy =$$

$$= \int p(s, x, t, z) \int p(t, z, t+h, y) g(y) dy dz =$$

$$= \int p(s, x, t, z) g(z) dz +$$

$$+ \int p(s, x, t, z) \left(\int p(t, z, t+h, y) [g(y) - g(z)] dy \right) dz =$$

$$= \int p(s, x, t, z) g(z) dz + h \int p(s, x, t, z) L_t [g(z)] dz + o(h).$$

Інтегруючи за частинами, записуємо

$$\int p(s, x, t, z)(a(t, z), g_z'(z)) = -\int (\nabla_z, p(s, x, t, z) a(t, z)) g(z) dz$$

(якщо $a(z)$ — векторна функція, то $(\nabla_z, a(z)) = \sum \frac{\partial a_k}{\partial z^k}$, де a_k — координати a, z^k — координати z),

$$\int p(s, x, t, z) b_{ik}(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial z^k} \varphi(z) dz =$$

$$= \int \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial z^k} (p(s, x, t, z) b_{ik}(t, z)) \varphi(z) dz,$$

$$\sum_{i,k} \int p(s, x, t, z) b_{ik}(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial z^k} \varphi(z) dz = \int \operatorname{sp} \nabla_z^2 p(s, x, t, z) \times$$

$$\times B(t, z) \varphi(z) dz.$$

Таким чином,

$$\int \Big(\frac{1}{h} (p(s, x, t, z) - p(s, x, t+h, z)) - (\nabla_z, p(s, x, t, z) a(t, z)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \nabla_z^2 p(s, x, t, z) B(t, z) \Big) \varphi(z) dz = o(h).$$

Звідси випливає таке рівняння для $p(s, x, t, z)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, z) = -(\nabla_z, p(s, x, t, z) a(t, z)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \nabla_z^2 p(s, x, t, z) B(t, z). \qquad (7)$$

Це і є друге рівняння Колмогорова, або рівняння Фоккера — Планка.

30. СТОХАСТИЧНІ ІНТЕГРАЛИ

Ми бачили, що приріст дифузійного процесу $x(t)$ при умові, що його коефіцієнти сталі, має вигляд

$$x(t+h) - x(t) = ah + B^{1/2} [w(t+h) - w(t)],$$

де $w(t)$ — вінерівський процес у фазовому просторі X. У тому випадку, коли коефіцієнти змінні, беручи значення коефіцієнтів у точці t, $x(t)$, ми повинні знайти приріст процесу з похибкою більш високого порядку:

$$x(t+h)-x(t)=a(t,\ x(t))h+$$
$$+B^{1/2}(t,\ x(t))[w(t+h)-w(t)]+o(h). \tag{1}$$

Якби була можливість надати співвідношенню строгий смисл, то це рівняння можна було б використати для побудови траєкторій дифузійного процесу через траєкторії вінерівського. Для цього треба рівняння (1) переписати таким чином, щоб зникла невизначена величина $o(h)$. Це можна формально зробити, підсумовуючи прирости, а потім переходячи до границі, коли $h\to 0$. Так можна вивести інтегральне рівняння для $t_1<t_2$:

$$x(t_2)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}a(s,\ x(s))\,ds+\int_{t_1}^{t_2}B^{1/2}(s,\ x(s))\,dw(s). \tag{2}$$

Поки це рівняння має чисто формальний характер, бо невизначений другий інтеграл. Справа у тому, що $w(t)$ має необмежену варіацію, і цей інтеграл не можна розуміти як звичайний інтеграл Стілтьєса. Але такий інтеграл можна визначити, це стохастичний інтеграл Іто. Ми розглянемо інтеграл Іто за одновимірним процесом. Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P\}$ — простір з фільтрацією $(\mathcal{F}_t)$ (потоком). На цьому просторі визначено вінерівський процес, погоджений з $\mathcal{F}_t$. Це означає, що $w(t)$ вимірне відносно $\mathcal{F}_t$, а $w(t+h)-w(t)$ не залежить від $\mathcal{F}_t$ для $h>0$. Будемо розглядати $\mathcal{F}_t$-узгоджені вимірні функції $f(t)=$ $=f(t,\ \omega)$, що задовольняють умову $\forall\, t>0$ $\int_0^t f^2(s)\,ds<\infty$ з імовірністю 1. Позначимо простір таких функцій $\mathcal{M}_2$. Для всіх $f\in\mathcal{M}_2$ побудуємо

$$\mathcal{I}_t(f)=\int_0^t f(s)\,dw(s). \tag{3}$$

Відзначимо основні властивості цього інтеграла:

1) він лінійний функціонал від f у такому розумінні: якщо c_1, $c_2\in R$, f_1, $f_2\in\mathcal{M}_2$, то з імовірністю 1

$$\mathcal{I}_t(c_1f_1+c_2f_2)=c_1\mathcal{I}_t(f_1)+c_2\mathcal{I}_t(f_2);$$

2) якщо $f(t)=\eta I_{[t_1,t_2]}$ (для того щоб $f(t)\in\mathcal{M}_2$, треба щоб η було $\mathcal{F}_t$-вимірним), то

$$\mathcal{I}_t(f)=\eta\,[w(t\wedge t_2)-w(t\wedge t_1)];$$

3) інтеграл неперервний за f у такому розумінні: якщо $f_n\in\mathcal{M}_2$, $f\in\mathcal{M}_2$ і $\forall\, t$ $\int_0^t(f_n(s)-f(s))^2\,ds\to 0$ за імовірністю, то $\mathcal{I}_t(f_n)\to\mathcal{I}_t(f)$ за імовірністю.

Властивість 1) природна для будь-якого інтеграла; 2) показує, що цей інтеграл є у якомусь розумінні інтеграл Стілтьєса; властивість 3) специфічна саме для інтеграла Іто.

Введемо два підпростори $\mathcal{M}_2$. Позначимо $\mathcal{M}_0$ множину функцій $f(t) \in \mathcal{M}_2$, для яких існує послідовність $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$, $t_n \uparrow \infty$ така, що $f(t) = f(t_k)$, коли $t_k \leqslant t < t_{k+1}$. Для $f \in \mathcal{M}_0$ і $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ введемо

$$\mathfrak{I}_t(f) = \sum_{i=0}^{k-1} f(t_i)[w(t_{i+1}) - w(t_i)] + f(t_k)[w(t) - w(t_k)]. \qquad (4)$$

Очевидно, що властивості 1), 2) мають місце. Позначимо $\hat{\mathcal{M}}_2$ сукупність таких функцій з $\mathcal{M}_2$, для яких існує $Mf^2(t)$ майже при всіх $t > 0$:

$$\int_0^t Mf^2(s)\, ds < \infty.$$

Лема 1. Нехай $f \in \hat{\mathcal{M}}_2 \cap M_0$. Тоді $\mathfrak{I}_t(f)$ має такі властивості:

а) $M\mathfrak{I}_t(f) = 0$,

б) $M\mathfrak{I}_t(f)$ є $\mathcal{F}_t$-мартингал;

в) $M(\mathfrak{I}_t(f))^2 = \int_0^t Mf^2(s)\, ds$,

г) для $s < t$

$$M((\mathfrak{I}_t(f) - \mathfrak{I}(f))^2/\mathcal{F}_s) = M\left(\int_s^t f^2(u)\, du/\mathcal{F}_t\right). \qquad (5)$$

Доведення. З формули (4) маємо $\mathfrak{I}_0(f) = 0$. Тому а) є наслідок б). Нехай ξ — обмежена $\mathcal{F}_s$-вимірна величина, $s < t$. Якщо $t_l \leqslant s < t_{l+1} < \ldots < t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, то

$$M\xi\mathfrak{I}_t(f) = M\xi\left(\sum_{i=0}^{l-1} f(t_i)[w(t_{i+1}) - w(t_i)] + \right.$$
$$+ f(t_l)(w(s) - w(t_l)] + f(t_l)[w(t_{l+1}) - w(s)] +$$
$$\left. + \sum_{i=l}^{k-1} f(t_i)[w(t_{i+1}) - w(t_i)] + f(t_k)[w(t) - w(t_k)]\right) = M\xi\mathfrak{I}_s(f),$$

бо

$$M\xi f(t_l)[w(t_{l+1}) - w(s)] = M\xi f(t_l)\, M([w(t_{l+1}) - w(s)]/\mathcal{F}_s) = 0$$

і для $s \leqslant u < v$

$$M\xi f(u)[w(v) - w(u)] = M\xi f(u)\, M([w(v) - w(u)]/\mathcal{F}_u) = 0.$$

Властивість в) є наслідком формули (5) при $s = 0$. Використовуючи попередні позначення, матимемо

$$M\xi(\mathfrak{I}_t(f) - \mathfrak{I}_s(f))^2 = M\xi\left(\sum_{i=l}^{k} f(t_i^*)[w(t_{i+1}^*) - w(t_i^*)]\right)^2.$$

Для скорочення запису ми позначили $s = t_l^*$, $t = t_{k+1}^*$, $t_i = t_i^*$, якщо $l < i \leqslant k$, за умовою $f(t_l) = f(s)$. Якщо $i < j$, то

$$M\xi f(t_i^*)[w(t_{i+1}^*) - w(t_i^*)] f(t_j^*)[w(t_{j+1}^*) - w(t_j^*)] =$$
$$= M\xi f(t_i^*)[w(t_{i+1}^*) - w(t_i^*)] f(t_j^*) M(w(t_{j+1}^*) - w(t_j^*)/\mathcal{F}_{t_j^*}) = 0, \quad (6)$$

крім того,

$$M\xi f^2(t_i^*)[w(t_{i+1}^*) - w(t_i^*)]^2 = M\xi f^2(t_i^*) M([w(t_{i+1}^*) - w(t_i^*)]^2/\mathcal{F}_{t_i^*}) =$$
$$= M\xi f^2(t_i^*)(t_{i+1}^* - t_i^*).$$

Тому права частина (6) має вигляд

$$M\xi \sum_{i=l}^{k} f^2(t_i^*)(t_{i+1}^* - t_i^*) = M\xi \int_s^t f^2(u)\,du. \quad (7)$$

Якщо підставимо праву частину (7) у праву частину (6), дістанемо (5).

Побудуємо тепер інтеграл для $f \in \widehat{\mathcal{M}}_2$. Для таких f існує послідовність $f_n \in \mathcal{M}_0 \cap \widehat{\mathcal{M}}_2$ така, що при всіх $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t M(f_n(s) - f(s))^2\,ds = 0. \quad (8)$$

Тоді

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \int_0^t M(f_n(s) - f_m(s))^2\,ds = 0.$$

Отже,

$$0 = \lim_{n,m\to\infty} M(\mathfrak{I}_t(f_n - f_m))^2 = M(\mathfrak{I}_t(f_n) - \mathfrak{I}_t(f_m))^2.$$

Таким чином, послідовність $\mathfrak{I}_t(f_n)$ фундаментальна відносно збіжності в середньому квадратичному. Тому існує така випадкова величина η, що $M(\mathfrak{I}_t(f_n) - \eta)^2 \to 0$. Легко перевірити, що коли $\tilde{\eta}$ — границя для будь-якої іншої послідовності $\tilde{f}_n$, яка задовольняє (8), тоді $M(\eta - \tilde{\eta})^2 = 0$, тобто $P\{\eta = \tilde{\eta}\} = 1$. Отже, така границя залежить лише від f. За визначенням $\eta = \mathfrak{I}_t(f)$. Можемо переконатись, що $\mathfrak{I}_t(f)$ задовольняє усі умови леми 1.

Нарешті поширимо визначення інтеграла на всі функції з $\mathcal{M}_2$. Нехай для $f \in \mathcal{M}_2$

$$f^{(N)}(t) = f(t)\, I_{\left\{\int_0^t f^2(s)ds < N\right\}}.$$

Тоді

$$\int_0^\infty (f^{(N)}(t))^2\,dt = \int_0^\infty f^2(t)\, I_{\left\{\int_0^t f^2(s)ds < N\right\}} dt \leqslant N.$$

Тому $\forall\, t$

$$\int_0^t M(f^{(N)}(s))\,ds \leqslant N,\quad f^{(N)} \in \widehat{\mathcal{M}}_2,$$

$\mathfrak{I}_t(f^{(N)})$ існує. Ми покажемо, що $\mathfrak{I}_t\ (f^{(N)})$, коли $N \to \infty$, збігаються за мовірністю до деякої випадкової величини, яку позначимо $\mathfrak{I}_t\ (f)$. Для цього встановимо одне допоміжне твердження.

Лема 2. Нехай $f\,(t) \in \widehat{\mathcal{M}}_2$, а τ — такий момент зупинки відносно $(\mathcal{F}_t)$, що $f\,(s) I_{\{\tau > s\}} = 0$. Тоді $\mathfrak{I}_t\ (f) = 0$ на множині $\tau > t$.

Доведення. Припустимо, $f_n\,(s)$ — послідовність функцій з $\mathcal{M}_0 \cap \widehat{\mathcal{M}}_2$, що задовольняє умову (8). Нехай $\tau_n = \frac{k+1}{n}$, якщо $\frac{k}{n} \leqslant \tau < \frac{k+1}{n}$. Це також момент зупинки. Тоді функції $f_n(s) \times \times I_{\{\tau_n \leqslant s\}}$ теж належать $\mathcal{M}_0 \cap \widehat{\mathcal{M}}_2$,

$$M\int_0^t (f_n\,(s)\,I_{\{\tau_n \leqslant s\}} - f\,(s))^2\,ds = M\left[\int_0^{\tau \wedge t} (f_n\,(s)\,I_{\{\tau_n \leqslant s\}} - f\,(s))^2\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau \wedge t}^{\tau_n \wedge t} (f_n\,(s)\,I_{\{\tau_n \leqslant s\}} - f\,(s))^2\,ds + \int_{\tau_n \wedge t}^{t} (f_n\,(s) - f\,(s))^2\,ds \right] \leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^t (f_n\,(s) - f\,(s))^2\,ds \to 0.$$

Але $\int_0^t f_n(s)\,I_{\{\tau_n \leqslant s\}} dw\,(s) = 0$ на множині $\tau > t$, бо на цій множині $f_n(s)\,I_{\{\tau_n \leqslant s\}} = 0$ для всіх $s \leqslant t$, а інтеграл обчислюється за формулою (5). Оскільки

$$M\,|\,\mathfrak{I}_t\,(f_n I_{\{\tau \geqslant t\}})\,|\,I_{\{\tau \geqslant t\}} = 0,$$
$$M\,(\mathfrak{I}_t\,(f) - \mathfrak{I}_t\,(f_n I_{\{\tau_n \leqslant s\}})^2\,I_{\{\tau \geqslant t\}} \to 0,$$

то і $M\,|\,\mathfrak{I}_t\,(f)\,|\,I_{\{\tau \geqslant t\}} = 0$.

Нехай для $f \in \mathcal{M}_2$ момент зупинки τ_N визначається так: $\tau_N = = \sup\left\{t : \int_0^t f^2\,(s)\,ds < N\right\}$. Якщо $\int_0^\infty f^2\,(s)\,ds \geqslant N$, то τ_N — перший момент, коли $\int_0^{\tau_N} f^2\,(s)\,ds = N$; якщо такого моменту немає, то $\tau_N = = +\infty$. Позначимо $f^{(N)}\,(s) = f\,(s)\,I_{\{\tau_N > s\}}$. Якщо $N \to \infty$, то $\tau_N \to \to +\infty$, отже, для всіх $t > 0$ $P\,\{\tau_N > t\} \to 1$, коли $N \to \infty$.

Зауважимо тепер, що $f^{(N)}\,(s) - f^{(N')}\,(s) = 0$ для $s < \tau^N \wedge \tau^{N'}$. Тому $\mathfrak{I}_t(f^{(N)} - f^{(N')}) = 0$, коли $t \leqslant \tau^N \wedge \tau^{N'}$. Отже,

$$\lim_{N, N' \to \infty} P\,\{\mathfrak{I}_t\,(f^{(N)}) \neq \mathfrak{I}_t\,(f^{(N')})\} = 0.$$

Це й доводить існування $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{I}_t(f^{(N)})$ за імовірністю. Позначимо цю границю $\mathcal{I}_t(f)$. Оскільки $\mathcal{I}_t(f^{(N)}) = \mathcal{I}_t(f^{(n)})$, коли $t \leqslant \tau_n$, $N > n$, то $\mathcal{I}_t(f) = \mathcal{I}_t(f^{(n)})$ на множині $t < \tau_n$. Це дозволяє переконатись, що для $\mathcal{I}_t(f)$ виконуються 1) та 2). Покажемо, що виконується 3). Для цього встановимо таку нерівність:

$$P\{|\mathcal{I}_t(f)| > c\} \leqslant P\left\{\int_0^t f^2(s)\,ds \geqslant N\right\} + \frac{N}{c^2}. \tag{9}$$

Оскільки на множині $\tau_N \geqslant t$ буде $\mathcal{I}_t(f) = \mathcal{I}_t(f^{(N)})$, то

$$P\{|\mathcal{I}_t(f)| > c\} \leqslant P\{\tau_n < t\} + P\{|\mathcal{I}_t(f^{(N)})| > c\} \leqslant$$
$$\leqslant P\left\{\int_0^t f^2(s)\,ds \geqslant N\right\} + \frac{1}{c^2} M(\mathcal{I}_t(f^{(N)}))^2.$$

Залишається зауважити, що $M\mathcal{I}_t(f^{(N)})^2 \leqslant N$.

Нехай $\int_0^t (f - f_n(s))^2\,ds \to 0$, тоді для всіх $\varepsilon > 0$ та $\delta > 0$

$$P\{|\mathcal{I}_t(f_n) - \mathcal{I}_t(f)| > \varepsilon\} \leqslant P\left\{\int_0^t (f(s) - f_n(s))^2\,ds > \varepsilon^2\delta\right\} + \delta.$$

Звідси і випливає властивість 3).

Встановимо ще одну важливу властивість.

Теорема. $\mathcal{I}_t(f)$ має неперервну модифікацію.

Доведення. Те, що це так для $f \in \mathcal{M}_0$, є наслідком формули (4), яка і зображає цю модифікацію. Нехай $f \in \widehat{\mathcal{M}}_2$, а f_n така послідовність з $\mathcal{M}_0 \cap \widehat{\mathcal{M}}_2$, що

$$2^n \int_0^n M[f(s) - f_n(s)]^2\,ds \leqslant 1.$$

Тоді

$$P\{\sup_{t\leqslant n} |\mathcal{I}_t(f_n) - \mathcal{I}_t(f_{n+1})| > a^n\} = P\{\sup_{t\leqslant n} |\mathcal{I}_t(f_n - f_{n+1})| > a^n\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M(\mathcal{I}_n(f_n - f_{n+1}))^2}{a^{2n}} \leqslant \left(\frac{1}{2a^2}\right)^n.$$

Ми використали те, що $\mathcal{I}_t(f_n - f_{n+1})$ є мартингал, і нерівність Колмогорова для неперервного мартингала. Якщо $a < 1$, а $2a^2 > 1$, то ряд

$$\mathcal{I}_t(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_t(f_{n+1} - f_n)$$

збігається рівномірно на кожному інтервалі, його сума є неперервний процес, який є модифікація $\mathcal{I}_t(f)$.

Зауважимо нарешті, що для $f \in \mathcal{M}_2$, яка б не була послідовність $n_k \uparrow \infty$,

$$\mathfrak{I}_t(f) = \mathfrak{I}_t(f^{(n_1)}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{I}_t(f^{(n_{k+1})} - f^{(n_k)}).$$

За доведеним доданки праворуч мають неперервні модифікації, $\mathfrak{I}_t(f)$ буде неперервною, якщо доданки неперервні, бо сума має лише скінченне число ненульових членів на кожному обмеженому інтервалі зміни t.

31. ІСНУВАННЯ, ЄДИНІСТЬ, ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Стохастичний диференціал. Нехай функція $\varphi(t, \omega)$ узгоджена з потоком $(\mathcal{F}_t)$. Вона має диференціал Іто (стохастичний диференціал), якщо існують такі функції $a(t, \omega)$ та $b(t, \omega)$, узгоджені з потоком $(\mathcal{F}_t)$, що $\int_0^t (a(s, \omega))\, ds + \int_0^t b^2(s, \omega)\, ds < \infty$ $\forall$ t і $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$

$$\varphi(t_2, \omega) - \varphi(t_1, \omega) = \int_{t_1}^{t_2} a(s, \omega)\, ds - \int_{t_1}^{t_2} b(s, \omega)\, dw(s). \tag{1}$$

Її стохастичний диференціал

$$d\varphi(t, \omega) = a(t, \omega)\, dt + b(t, \omega)\, dw(t). \tag{2}$$

Вирази (2) та (1) рівносильні.

Стохастичне диференціальне рівняння для процесу в R. Нехай $a(t, x)$, $b(t, x)$ — вимірні, локально обмежені функції на $R_+ \times R$ із значеннями в R. Якщо $x(t, \omega)$ — випадковий неперервний узгоджений процес, для якого існує стохастичний диференціал $dx(t, \omega)$, що задовольняє рівність

$$dx(t, \omega) = a(t, x(t, \omega))\, dt + b(t, x(t, \omega))\, dw(t), \tag{3}$$

то $x(t, \omega)$ називається розв'язком стохастичного диференціального рівняння (3). Звичайно вважають, що задано функції $a(t, x)$ та $b(t, x)$, і шукають функцію $x(t, \omega)$, яка задовольняє рівність (3). За означенням стохастичного диференціала (3) еквівалентне рівності

$$x(t, \omega) = x(0, \omega) + \int_0^t a(s, x(s, \omega))\, ds + \int_0^t b(s, x(s, \omega))\, dw(s), \tag{4}$$

яка називається стохастичним інтегральним рівнянням (Іто). Таке рівняння з'явилось при розгляді дифузійних процесів. Оскільки обидва інтеграли в правій частині (4), якщо вони існують, неперервні, то будуть розглядатись лише неперервні розв'язки (4). Величина $x(0, \omega)$ вважається також заданою (як і звичайні диференціальні рівняння, стохастичні рівняння розв'язуються, коли задане початкове значення).

Теорема 1. Нехай вимірні $a(t, x)$, $b(t, x)$ задовольняють умови: 1) для деякого $l > 0$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leqslant l|x - y|$$

(виконується умова Ліпшиця), 2) $a(t, 0)$, $b(t, 0)$ обмежені. Тоді рівняння (4) має неперервний розв'язок $x(t, \omega)$. Цей розв'язок єдиний з імовірністю 1: якщо $\tilde{x}(t, \omega)$ — другий такий розв'язок, то $P\{\sup\limits_s |x(s, \omega) - \tilde{x}(s, \omega)| > 0\} = 0$.

Доведення. Доведемо спочатку єдиність. Припустимо, є два розв'язки рівняння (4) — $x(t, \omega)$ та $\tilde{x}(t, \omega)$, для яких $x(0, \omega) = \tilde{x}(0, \omega)$. Тоді

$$\tilde{x}(t, \omega) - x(t, \omega) = \int_0^t [a(s, \tilde{x}(s, \omega)) - a(s, x(s, \omega))]\, ds +$$
$$+ \int_0^t [b(s, \tilde{x}(s, \omega)) - b(s, x(s, \omega))]\, dw(s).$$

Нехай для $c > 0$ $\tau_c = \sup\{t : |\tilde{x}(t, \omega) - x(t, \omega)| < c\}$. Тоді

$$\tilde{x}(t \wedge \tau_c, \omega) - x(t \wedge \tau_c, \omega) = \int_0^{t \wedge \tau_c} [a(s, \tilde{x}(s, \omega)) - a(s, x(s, \omega))]\, ds +$$
$$+ \int_0^{t \wedge \tau_c} [b(s, \tilde{x}(s, \omega)) - b(s, x(s, \omega))]\, dw(s) =$$
$$= \int_0^t I_{\{s < \tau_c\}} [a(s, \tilde{x}(s, \omega)) - a(s, x(s, \omega))]\, ds +$$
$$+ \int_0^t I_{\{s < \tau_c\}} [b(s, \tilde{x}(s, \omega)) - b(s, x(s, \omega))]\, dw(s),$$

$$M|\tilde{x}(t \wedge \tau_c, \omega) - x(t \wedge \tau_c, \omega)|^2 \leqslant 2M\left(\int_0^t I_{\{s < \tau_c\}} [a(s, \tilde{x}(s, \omega)) -\right.$$
$$\left. - a(s, x(s, \omega))]\, ds\right)^2 + 2M\left(\int_0^t I_{\{s < \tau_c\}} [b(s, \tilde{x}(s, \omega)) -\right.$$
$$\left. - b(s, x(s, \omega))]\, dw(s)]\right)^2 \leqslant 2tM \int_0^t I_{\{s < \tau_c\}} |a(s, \tilde{x}(s, \omega)) -$$
$$- a(s, x(s, \omega))|^2\, ds + 2M \int_0^t I_{\{s < \tau_c\}} |b(s, \tilde{x}(s, \omega)) -$$
$$- b(s, x(s, \omega))|^2\, ds \leqslant 2(t + 1)\, l^2 \int_0^t M I_{\{s < \tau_c\}} |x(s, \omega) - x(s, \omega)|^2\, ds \leqslant$$
$$\leqslant 2(t + 1)\, l^2 \int_0^t M|\tilde{x}(s \wedge \tau_c, \omega) - x(s \wedge \tau_c, \omega)|^2\, ds.$$

Отже, для кожного $T > 0$ існує таке K_T, що

$$\varphi_c(t) = M\,|\tilde{x}(t \wedge \tau_c, \omega) - x(t \wedge \tau_c, \omega)|^2$$

задовольняє нерівність

$$\varphi_c(t) \leqslant K \int_0^t \varphi_c(s)\,ds.$$

Нам буде потрібне таке елементарне твердження.

Якщо $\varphi(t) \geqslant 0$ — вимірна інтегровна функція і $\varphi(t) \leqslant A + B \times \times \int_0^t \varphi(s)\,ds$, то $\varphi(t) \leqslant Ae^{Bt}$, бо

$$\left[\ln\left(A + B\int_0^t \varphi(s)\,ds\right)\right]' = \frac{B\varphi(t)}{A + B\int_0^t \varphi(s)\,ds} \leqslant B,$$

$$\ln\left(A + B\int_0^L \varphi(s)\,ds\right) \leqslant \ln A + Bt,$$

$$A + B\int_0^t \varphi(s)\,ds \leqslant Ae^{Bt}.$$

У нашому випадку $A = 0$, тому $\varphi_c(t) = 0$ для всіх $c > 0$. Переходячи до границі, коли $c \to \infty$, матимемо

$$M\,|\tilde{x}(t, \omega) - x(t, \omega)|^2 = 0.$$

Якщо Q_+ — множина раціональних невід'ємних чисел, то

$$P\{\sup_{t \in Q_+} |x(t, \omega) - \tilde{x}(t, \omega)| = 0\} = 1.$$

Але $\tilde{x}(t, \omega) - x(t, \omega)$ — неперервна функція, тому

$$\{\omega : \sup_{t \in Q_+} |x(t, \omega) - \tilde{x}(t, \omega)| = 0\} = \{\omega : \sup_{t \in R_+} |x(t, \omega) - \tilde{x}(t, \omega)| = 0\}.$$

Єдиність встановлено.

Доведемо існування. Побудуємо розв'язок рівняння (4) з початковою умовою $x(0, \omega) = x$, де $x \in R$. Цей розв'язок позначимо $\xi_x(t)$. Скористаємось методом послідовних наближень. Візьмемо $\xi_x^0(t) = x$, а для $n > 0$

$$\xi_x^n(t) = x + \int_0^t a(s, \xi_x^{n-1}(s))\,ds + \int_0^t b(s, \xi_x^{n-1}(s))\,dw(s). \tag{5}$$

Якщо $\xi_x^{n-1}(s)$ — неперервна узгоджена функція, то інтеграли в (5) існують, бо $a(s, \xi_x^{n-1}(s))$ та $b(s, \xi_x^{n-1}(s))$ вимірні, узгоджені, локально обмежені функції. Якщо ці інтеграли існують, то і $\xi_x^n(t)$ неперервна, узгоджена. Оскільки $\xi_x^0(t) = x$ є така функція, то формула (5) визначає послідовність неперервних узгоджених функцій. Далі,

$$|\xi_x^n(t)|^2 \leqslant 3|x|^2 + 3\left|\int_0^t a(s, \xi_x^{n-1}(s)\, ds\right|^2 + 3\left(\int_0^t b(s, \xi_x^{n-1}(s))\, du(s)\right)^2. \quad (6)$$

З умов теореми можемо вивести, що для всіх $T > 0$ існує таке K_T, що

$$|a(s, x)| \leqslant K_T(1 + |x|), \quad |b(s, x)|^2 \leqslant K_T(1 + |x|)^2.$$

Тому з нерівності (6) випливає, що для $t \leqslant T$

$$M|\xi_x^n(t)|^2 \leqslant 3|x|^2 + L_T \int_0^t M|\xi_x^{n-1}(s)|^2 ds, \quad (7)$$

де стала L_T залежить лише від T та K_T. Нерівність (7) показує, що $M|\xi_x^n(t)|^2$ є функція локально обмежена. Більш того, використавши лему, взявши з обох сторін (7) $\sup\limits_{k\leqslant n}$, матимемо

$$\sup_{k\leqslant n} M|\xi_x^k(t)|^2 \leqslant 3|x|^2 e^{TL_T}, \quad t \leqslant T.$$

Отже, $\sup\limits_n M|\xi_x^n(t)|^2$ теж локально обмежена функція. Покажемо, що $\xi_x^n(t)$ збігаються у середньому квадратичному до деякої границі. Маємо

$$\xi_x^{n+1}(t) - \xi_x^n(t) = \int_0^t [a(s, \xi_x^n(s)) - a(s, \xi_x^{n-1}(s))]\, ds +$$

$$+ \int_0^t [b(s, \xi_x^n(s)) - b(s, \xi_x^{n-1}(s))]\, dw(s).$$

Звідси (так, як при доведенні необхідності) дістанемо, що для $t \leqslant T$

$$M|\xi_k^{n+1}(t) - \xi_k^n(t)|^2 \leqslant K_T \int_0^t M|\xi_k^n(s) - \xi_k^{n-1}(s)|\, ds. \quad (8)$$

Крім того,

$$M|\xi_x^1(t) - \xi_x^0(t)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\int_0^t a(s, x)\, ds + \int_0^t b(s, x)\, dw(s)\right) \leqslant c_T t \quad (9)$$

для $t \leqslant T$, c_T — деяка стала. З (8) та (9) за індукцією можемо встановити

$$M|\xi_x^{n+1}(t) - \xi_x^n(t)|^2 \leqslant c_T K_T^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отже, ряд $\xi_x^0(t) + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\xi_x^{n+1}(t) - \xi_x^n(t))$ збігається рівномірно у середньому квадратичному. Його сума $\xi_x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_k^n(t)$ (границя у середньому квадратичному) задовольняє рівняння (4), бо, як встановлено при доведенні необхідності, для $t \leqslant T$

$$M\left(\int_0^t a(s,\ \xi_x(s))\,ds + \int_0^t b(s,\ \xi_x(s))\,dw(s) - \int_0^t a(s,\ \xi_x^n(s))\,ds -\right.$$

$$\left. - \int_0^t b(s,\ \xi_x^n(s))\,dw(s)\right)^2 \leqslant K_T M\,|\,\xi_x(s) - \xi_x^n(s)\,|^2\,ds.$$

Тому

$$M\,(\xi_x(t) - x - \int_0^t a(s,\ \xi_x(s))\,ds - \int_0^t b(s,\ \xi_k(s)\,dw(s))^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2M\,|\,\xi_x(t) - \xi_x^n(t)\,|^2 + 2M\left(\int_0^t a(s,\ \xi_x^{n-1}(s))\right)ds +$$

$$+ \int_0^t b(s,\ \xi_x^{n-1}(s))\,dw(s) - \int_0^t a(s,\ \xi_x(s))\,ds - \int_0^t b(s,\ s^*(s))\,dw(s)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2M\,|\,\xi_x(t) - \xi_x^n(t)\,|^2 + 2K_T M\,|\,\xi_x(t) - \xi_x^{n-1}(t)\,|^2 \to 0,$$

коли $n \to \infty$. *Отже,* $\xi_x(t)$ *— дійсно розв'язок (4) з початковою умо*вою $\xi_x(0) = x$.

Як вже робилось вище, можемо встановити існування такої сталої A_T, що

$$M\,|\,\xi_x(t) - \xi_y(t)\,|^2 \leqslant A_T\,|\,x - y\,|^2\,e^{tA_T}, \quad t \leqslant T,$$

$$M\,|\,\xi_x(t) - \xi_x(t+h)\,|^2 \leqslant A_t\,(1 + |\,x\,|^2)\,e^{tA_{T_h}}, \quad t \leqslant T.$$

Тому функцію $\xi_x(t)$ можна зробити вимірною за x (бо вона стохастично неперервна). Якщо замість x підставити $x(0,\ \omega)$, то $\xi_{x(0,\omega)}(t)$ буде задовольняти рівняння (4).

Зауваження. Умови теореми можна послабити. Досить, щоб виконувались такі умови:

1) для всіх $T \geqslant 0$ існувало таке k_T, що при $t \leqslant T$

$$|\,a(t,\ x)\,| + |\,b(t,\ x)\,| \leqslant k_T\,(1 + |\,x\,|);$$

2) для всіх $c > 0$ існувало таке $l_c > 0$, що при $t \leqslant c$, $|\,x\,| \leqslant c$, $|\,y\,| \leqslant c$

$$|\,a(t,\ x) - a(t,\ y)\,| + |\,(t,\ x) - b(t,\ y)\,| \leqslant l_c\,|\,x - y\,|.$$

Теорема 2. Нехай $\xi_{s,x}(t)$ — розв'язок рівняння

$$\xi_{s,x}(t) = x + \int_s^t a(u,\ \xi_{s,x}(u)\,du + \int_s^t b(u,\ \xi_{s,x}(u))\,dw(u), \quad t \geqslant s, \quad (10)$$

коефіцієнти якого задовольняють умови теореми 1. Позначимо

$$P(s,\ x,\ t,\ B) = P\,\{\xi_{s,x}(t) \in B\}. \quad (11)$$

Розв'язок рівняння (4) є марківський процес, імовірність переходу якого є ліва частина рівності (11).

Доведення. Існування і єдиність розв'язку рівняння (10) встановлюється так само, як в теоремі 1. Якщо $x(t, \omega)$ — розв'язок рівняння (4), то для $t > s$ $\xi_{s,x(s,\omega)}(t)$ є розв'язок рівняння (10), коли $x = x(s, \omega)$. З іншого боку,

$$x(t, \omega) - x(s, \omega) = \int_s^t a(u, x(u, \omega))\, du + \int_s^t b(u, x(u, \omega))\, dw(u),$$

тобто $x(t, \omega)$ є також розв'язок рівняння (10), якщо $x = x(s, \omega)$, $t \geqslant s$. Тому $x(t, \omega) = \xi_{s,x(s,\omega)}(t)$. Нехай $\mathcal{F}_s$ — σ-алгебра, що породжена $x(0, \omega)$ та $w(u)$, $u \leqslant s$. θ — $\mathcal{F}_s$-вимірна величина, $|\theta| \leqslant 1$. Якщо $g(x)$ — обмежена функція, то

$$M\theta g(x(t, \omega)) = M\theta g(\xi_{s,x(s,\omega)}(t)) = M\theta M(g(\xi_{s,x}(t))_{x=x(s,\omega)} =$$

$$= M\theta\left(\int g(y) P(s, x, t, dy)\right)\Big|_{x=x(s,\omega)} = M\theta \int g(y) P(s, x(s, \omega), t, dy).$$

Ми використали той факт, що $\xi_{s,x}(t)$ залежить лише від $w(u) - w(s)$ для $u \geqslant s$, тому не залежить від $\mathcal{F}_s$. Таким чином,

$$M(g(x(t, \omega))/\mathcal{F}_s) = \int g(y) P(s, x(s, \omega), t, dy).$$

Це доводить теорему.

32. ФОРМУЛА ІТО. ДЕЯКІ НАСЛІДКИ

Стохастичний диференціал Іто є лінійна операція: якщо $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ мають диференціал Іто, то такою буде і функція $c_1\varphi(t) + c_2\psi(t)$, $d(c_1\varphi(t) + c_2\psi(t)) = c_1 d\varphi(t) + c_2 d\psi(t)$. Цим він подібний до звичайного диференціала. Але вже при нелінійних перетвореннях диференційовних за Іто функцій диференціал Іто поводить себе не так, як звичайний, з'являються додаткові члени. Формули для диференціалів при таких перетвореннях мають назву формул Іто. Ми встановимо деякі з них. Появу таких додаткових членів продемонструємо на простішому випадку.

Лема 1. Функція $w^2(t)$, де $w(t)$ — вінерівський процес, має диференціал Іто, він дається формулою

$$dw^2(t) = 2w(t)\, dw(t) + dt. \tag{1}$$

Доведення. Формула (1) еквівалентна такій:

$$w^2(t) = 2\int_0^t w(s)\, dw(s) + t. \tag{2}$$

Обчислимо стохастичний інтеграл у правій частині (2). Використовуючи властивість 3) стохастичного інтеграла, можемо записати (в усіх формулах lim розуміємо за імовірністю)

$$\int_0^t w(s)\, dw(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k<nt} w\left(\frac{k}{n}\right)\left[w\left(\frac{k+1}{n}\right) - w\left(\frac{k}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\sum_{k<nt}\frac{w\left(\frac{k}{n}\right)+w\left(\frac{k+1}{n}\right)}{2}\left(w\left(\frac{k+1}{n}\right)-w\left(\frac{k}{n}\right)\right)- -\sum_{k<nt}\frac{1}{2}\left(w\left(\frac{k+1}{n}\right)-w\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\Bigg].$$

Границя першої суми є $w^2(t)$, а

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\sum_{k<nt}\left[\left(w\left(\frac{k+1}{n}\right)-w\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2-\frac{1}{n}\right]\right)^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k<nt}\frac{2}{n^2}=0.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k<nt}\left(w\left(\frac{k+1}{n}\right)-w\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2=\lim_{n\to\infty}\sum\frac{1}{n}=t.$$

Ми встановили

$$\int_0^t w(s)\,dw(s)=\frac{1}{2}w^2(t)-\frac{1}{2}t,$$

вона еквівалентна (2).

Зауваження. Якби ми розглядали звичайний диференціал, то було б $dw^2(t)=2w(t)\,dw(t)$. Якщо розписати повний приріст $w^2(t)$, то $\Delta w^2(t)=2w(t)\,\Delta w\ (t)+(\Delta w(t))^2$. Формула (1) показує, що $(\Delta w(t))^2$ не можна відкинути, цей член треба замінити на Δt. Виявляється, це загальне правило, так можна формально виписувати формули Іто (більш високі степені приросту $\Delta w(t)$ відкидаємо). Наприклад,

$$d\,\frac{1}{w(t)}=\frac{1}{w(t)+dw(t)}-\frac{1}{w(t)}=\frac{1}{w(t)}\left(\frac{1}{1+\frac{dw(t)}{w(t)}}-1\right)=$$

$$=\frac{dw(t)}{w^2(t)}+\frac{(dw(t))^2}{w^3(t)}=-\frac{dw(t)}{w^2(t)}+\frac{dt}{w^3(t)}.$$

Звичайно, це не є доведення. Те, що це справді так, буде наслідком загальної формули Іто.

Л е м а 2 (диференціювання добутку). Нехай $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ мають диференціали Іто:

$$d\varphi(t)=\alpha dt+\beta dw(t),\quad d\psi(t)=\gamma dt+\delta dw(t).$$

Тоді $\varphi\psi$ теж має диференціал Іто

$$d\varphi\psi(t)=\varphi(t)\,d\psi(t)+\psi(t)\,d\varphi(t)+\beta\delta dt. \tag{3}$$

Д о в е д е н н я. Досить довести, що для малих $t_{k+1}-t_k$

$$\varphi(t_{k+1})\,\psi(t_{k+1})-\varphi(t_k)\,\psi(t_k)=\int_{t_k}^{t_{k+1}}\psi(s)\,[\alpha(s)\,ds+\beta(s)\,dw(s)]+$$

$$+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(s)\,[\gamma(s)\,ds+\delta(s)\,dw(s)]+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\beta(s)\,\delta(s)\,ds. \tag{4}$$

Далі, можемо вважати, що $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$, $\delta(s)$ — функції з $\mathcal{M}_0$ (кусково сталі), бо такими функціями можна апроксимувати всі функції з $\mathcal{M}_2$. Можна брати такі інтервали (t_k, t_{k+1}), на яких α, β, γ, δ — сталі. Отже, досить розглянути той випадок, коли α, β, γ, δ сталі всюду. Нарешті, треба розглянути випадки: 1) $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = t$, 2) $\varphi(t) = t$, $\psi(t) = w(t)$, 3) $\varphi(t) = w(t)$, $\psi(t) = t$, 4) $\varphi(t) = w(t)$, $\psi(t) = w(t)$.

Випадок 1) — це формула для звичайних диференціалів, 4) досліджений в лемі 1. Тому треба розглянути 2) та 3). Для цього покажемо, що

$$tw(t) = \int_0^t w(s)\,ds + \int_0^s s\,dw(s), \tag{5}$$

вона є наслідком рівності

$$\sum_{kn<t}\left(\frac{k+1}{n}w\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{k}{n}w\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{kn<t}\frac{k}{n}\left[w\left(\frac{k+1}{n}\right) - w\left(\frac{k}{n}\right)\right] + \sum_{kn<t}\frac{1}{n}w\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Коли $n \to \infty$, тоді ліва частина прямує до $tw(t)$, а права — до суми інтегралів у правій частині (5).

Наслідок 1. Для всіх $n > 0$

$$dw^n(t) = nw^{n-1}(t)\,dw(t) + \frac{n(n-1)}{2}w^{n-2}(t)\,dt. \tag{6}$$

Встановимо за індукцією. Для $n = 1$ це так. Нехай це виконується для $n = m$. Покажемо, що тоді формула (6) вірна і для $n = m + 1$. Використаємо формулу (3), де $\varphi(t) = w^m(t)$, $\psi(t) = w(t)$,

$$\alpha(t) = \frac{m(m-1)}{2}w^{m-2}(t),$$
$$\beta(t) = mw^{m-1}(t),$$
$$\gamma(t) = 0, \quad \delta(t) = 1.$$

Маємо

$$dw^{m+1}(t) = w^m(t)\,dw(t) + w(t)\left[mw^{m-1}(t)\,dw(t) + \frac{m(m-1)}{2}w^{m-2}(t)\,dt\right] + mw^{m-1}(t)\,dt = (m+1)w^m(t)\,dw(t) + \frac{m(m+1)}{2}w^{m-1}(t)\,dt.$$

Наслідок 2. Нехай $P(x)$ — многочлен відносно x, тоді

$$dP(w(t)) = P'(w(t))\,dw(t) + \frac{1}{2}P''(w(t))\,dt. \tag{7}$$

Ця формула лінійна за P, для $P(x) = x^n$ це є формула (6).

Наслідок 3. Нехай $\varphi(x)$ — неперервна функція, що має неперервні похідні $\varphi'(x)$ та $\varphi''(x)$. Тоді $\varphi(w(t))$ має диференціал Іто

$$d\varphi(\omega(t)) = \varphi'(w)(t))\,dw(t) + \frac{1}{2}\varphi''(w(t))\,dt. \tag{8}$$

Доведення випливає з того, що можна побудувати послідовність многочленів $q_n(x)$ відносно x, для яких $q_n(x) \to \varphi(x)$, $q_n'(x) \to \varphi'(x)$, $q_n''(x) = \varphi''(x)$ рівномірно на кожному скінченному проміжку, а потім перейти до границі у рівності

$$q_n(w(t)) - q_n(0) = \int_0^t q_n'(w(s))\,dw(s) + \int_0^t \frac{1}{2} q_n''(w(s))\,ds. \tag{9}$$

Наслідок 4. Нехай $\Phi(t, x)$ неперервна функція на $R_+ \times R$, що має неперервні похідні $\Phi_t'(t, x)$, $\Phi_x'(t, x)$, $\Phi_{xx}''(t, x)$, тоді

$$d\Phi(t,\ w(t)) = \left[\Phi_t'(t,\ w(t)) + \frac{1}{2}\Phi_{xx}''(t,\ w(t))\right]dt + \\ + \Phi_x'(t,\ w(t))\,dw(t). \tag{10}$$

Спочатку перевіримо формулу (10) для $\Phi(t, x) = g(t)\,\Phi(x)$, де $g(t)$ — неперервно диференційовна, а $\Phi(x)$ — двічі неперервно диференційовна. Тоді (10) є наслідок (3) та (8). Залишається зауважити, що $\Phi(t, x)$ можна наблизити рівномірно функціями

$$\Phi_n(t,\ x) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t)\,\Phi_k(x)$$

так, щоб рівномірно збігалися також похідні $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_n(t,\ x)$, $\frac{\partial}{\partial x}\Phi_n(t,\ x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_n(t,\ x)$.

Тепер встановимо формулу Іто (для одновимірного випадку).

Теорема. Нехай функція $\Phi(t, x)$ неперервна і має неперервні похідні $\Phi_t'(t, x)$, $\Phi_x'(t, x)$, $\Phi_{xx}'(t, x)$, а $\xi(t)$ має стохастичний диференціал $d\xi(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dw(t)$.

Тоді $\Phi(t, \xi(t))$ теж має стохастичний диференціал:

$$d\Phi(t, \xi(t)) = \left[\Phi_t'(t, \xi(t)) + \Phi_x'(t, \xi(t))\,a(t) + \frac{1}{2}\Phi_{xx}''(t, \xi(t))\,b^2(t)\right]dt + \\ + \Phi_x'(t),\ \xi(t))\,b(t)\,dw(t). \tag{11}$$

Доведення. Так само, як в лемі 2, досить розглянути сталі $a(t)$ та $b(t)$. Тоді $\xi(t) = \xi_0 + at + bw(t)$, $\Phi(t, \xi(t)) = \Phi(t, \xi_0 + at + bw(t))$. Нехай

$$G(t,\ x_0,\ a_0,\ b_0,\ x) = \Phi(t,\ x_0 + a_0 t + b_0 x),$$

x_0, a_0, b_0 — числа. Функція $G(t, x_0, a_0, b_0, x)$ вимірна за x_0, a_0, b_0, неперервна за t, x, має неперервні похідні G_t', G_x', G_{xx}''. Можемо для неї записати формулу (10). Якщо тепер замість x_0 підставити ξ_0, замість a_0 — a, замість b_0 — b, то дістанемо (11) (величини ξ_0, a, b випадкові і $\mathcal{F}_0$-вимірні). Зауважимо, що $G_t' = \Phi_t' + \Phi_x' a$.

Застосування формули Іто до розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. I. Нехай $a(t, x)$ та $b(t, x)$ — неперервні функції, що задовольняють умову Ліпшиця. Тоді стохастичне диференціальне рівняння

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\,dt + b(t, \xi(t))\,dw(t) \tag{12}$$

має єдиний розв'язок для будь-якої $\mathcal{F}_0$-вимірної початкової умови $\xi(0)$. Припустимо, що функція $\varphi(x)$ неперервна обмежена і має неперервні обмежені похідні $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$. Тоді

$$\varphi(\xi(t+h)) - \varphi(\xi(t)) = \int_t^{t+h} L_s\varphi(\xi(s)\,ds + \int_t^{t+h} \varphi'(\xi(s))\,b(s, \xi(s))\,dw(s),$$

де

$$L_t\varphi(x) = a(t, x)\,\varphi'(x) + \frac{1}{2} b^2(t, x)\,\varphi''(x).$$

Тому

$$M[\varphi(\xi(t+h)) - \varphi(\xi(t))/\mathcal{F}_t] = M\left(\int_t^{t+h} L_s\varphi(\xi(s))\,ds/\mathcal{F}_t\right) =$$

$$= hL_s\varphi(\xi(t) + o(h). \tag{13}$$

Це означає, що $\xi(t)$ є дифузійний процес з коефіцієнтом переносу $a(t, x)$ і коефіцієнтом дифузії $b^2(t, x)$.

II. Розглянемо лінійне рівняння

$$d\xi(t) = \alpha(t)\,\xi(t)\,dt + \beta(t)\,\xi(t)\,dw(t). \tag{14}$$

Якщо початкова умова $\xi(0) = 0$, то $\xi(t) = 0$ є розв'язок. Коли $\alpha(s)$ та $\beta(s)$ — обмежені вимірні функції, то розв'язок єдиний. Отже, для $\xi(0) > 0$ буде $\xi(t) \geqslant 0$ (коли $\xi(s) = 0$ для деякого s, тоді для $t \geqslant s$ буде $\xi(t) = 0$). Для $\xi(t) > 0$ розглянемо функцію $\eta(t) = \ln \xi(t)$. З формули Іто випливає

$$d\eta(t) = \frac{1}{\xi(t)}(\alpha(t)\,\xi(t)\,dt + \beta(t)\,\xi(t)\,dw(t)) - \frac{1}{2\xi^2(t)}\beta^2(t)\,\xi^2(t)\,dt =$$

$$= \left(\alpha(t) - \frac{1}{2}\beta^2(t)\right)dt + \beta(t)\,dw(t).$$

Тому $$\xi(t) = \xi(0)\exp\left\{\int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s)\right)ds + \int_0^t \beta(s)\,dw(s)\right\}.$$

Зокрема, рівняння

$$d\xi(t) = \alpha\xi(t)\,dt + \beta\xi(t)\,dw(t), \tag{15}$$

де α, β — сталі, має розв'язок

$$\xi(t) = \xi(0)\exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t + \beta w(t)\right\}.$$

III. Нехай $\xi(t)$ — розв'язок однорідного рівняння

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + b(\xi(t))\,dw(t). \tag{16}$$

Позначимо через $V(x)$ будь-який локально обмежений розв'язок рівняння

$$a(x)V(x)+\frac{1}{2}b^2(x)V''(x)=0.$$

Нехай $\tau_{[c,d]}$ є момент виходу $\xi(t)$ з відрізка $[c,d]$. Якщо $x\in[c,d]$, то для розв'язку рівняння (13), для якого $\xi(0)=x$, матимемо

$$V(\xi(t))-V(x)=\int_0^t\left[a(\xi(s))V'(\xi(s))+\frac{1}{2}b^2(\xi(s))dV''(\xi(s))\right]ds+$$

$$+\int_0^t V'(\xi(s)b^2(\xi(s))\,dw(s),$$

$$V(\xi(\tau_{[c,d]}\wedge t))-V(x)=\int_0^{\tau_{[c,d]}\wedge t}V'(\xi(s))\,b^2(\xi(s))\,dw(s),$$

$$MV(\xi(\tau_{[c,d]}\wedge t))-V(x)=0.$$

Якщо перейдемо до границі, коли $t\to\infty$, то

$$MV(\xi(\tau_{[c,d]}))=V(x),$$

$$V(c)P\{\xi(\tau_{[c,d]})=c\}+V(d)P\{\xi(\tau_{[c,d]})=d\}=V(x).$$

Оскільки $P\{\tau_{[c,d]}=c\}+P\{\tau_{[c,d]}=d\}=1$, якщо $b(x)>0$, то

$$P\{\tau_{[c,d]}=c\}=\frac{V(d)-V(x)}{V(d)-V(c)}. \tag{17}$$

Припустимо, що $z(x)$ задовольняє рівняння

$$a(x)z'(x)+\frac{1}{2}b^2(x)z''(x)=1,\quad c<x<d,\quad z(c)=z(d)=0.$$

Тоді

$$z(\xi(\tau_{[c,d]}\wedge t))-z(x)=\tau_{[c,d]}\wedge t+\int_0^{\tau_{[c,d]}\wedge t}z'(\xi(s))\,dw(s).$$

Якщо взяти математичне сподівання і перейти до границі, коли $t\to\to\infty$, то

$$M\tau_{[c,d]}=-z(x). \tag{18}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М., 1956. 605 с.
2. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. М., 1963. 856 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., 1977. 568 с.
4. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М., 1974. 696 с.
5. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М., 1962. 719 с.
6. *Мейер П. А.* Вероятность и потенциалы. М., 1973. 323 с.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : В 2 т. М., 1964, 498 с.; 1967, 752 с.

Готичний алфавіт

𝔄 𝔞	а	𝔑 𝔫	ен
𝔅 𝔟	бе	𝔒 𝔬	о
ℭ 𝔠	це	𝔓 𝔭	пе
𝔇 𝔡	де	𝔔 𝔮	ку
𝔈 𝔢	е	ℜ 𝔯	ер
𝔉 𝔣	еф	𝔖 𝔰	ес
𝔊 𝔤	ге	𝔗 𝔱	те
ℌ 𝔥	ха	𝔘 𝔲	у
ℑ 𝔦	і	𝔙 𝔳	фау
𝔍 𝔧	йот	𝔚 𝔴	ве
𝔎 𝔨	ка	𝔛 𝔵	ікс
𝔏 𝔩	ель	𝔜 𝔶	іпсілон
𝔐 𝔪	ем	ℨ 𝔷	цет

Грецький алфавіт

Α α	альфа	Ν ν	ні
Β β	бета	Ξ ξ	ксі
Γ γ	гамма	Ο ο	омікрон
Δ δ	дельта	Π π	пі
Ε ε	епсілон	Ρ ρ	ро
Ζ ζ	дзета	Σ σ	сігма
Η η	ета	Τ τ	тау
Θ θ ϑ	тета	Υ υ	іпсілон
Ι ι	йота	Φ φ	фі
Κ ϰ	каппа	Χ χ	хі
Λ λ	ламбда	Ψ ψ	псі
Μ μ	мі	Ω ω	омега

ЗМІСТ

Учебное пособие

Скороход Анатолий Владимирович

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебного пособия для студентов математических специальностей университетов и технических вузов

Киев, издательство «Лыбидь»
при Киевском государственном университете

На украинском языке

Зав редакцією *Л. В. Маришева*
Художник обкладинки *О. В. Дирдира*
Художній редактор *Т. О. Щур*
Технічний редактор *Т. М. Піхота*
Коректори *А. І. Бараз, Л. Ф. Іванова*

ИБ № 9

Здано до набору 19.04.90. Підп. до друку 19.10.90.
Формат 60×90/16. Папір друк. № 1. Літ. гарн.
Вис. друк. Ум. друк. арк. 10,5. Ум. фарб.-відб. 10,5.
Обл.-вид арк. 11,3. Тираж 3000 пр. Вид. № 2674-к.
Зам. № 0—1460. Ціна 70 к.

Видавництво «Либідь» при Київському державному університеті,
252001 Київ, Хрещатик, 10

Головне підприємство республіканського виробничого об'єднання
«Поліграфкнига», 252057, Київ, Довженка, 3