## §16. Розв'язування одновимірного рівняння теплопровідності

**Постановка задачі.** В області $\overline{Q}_T = \{a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ знайти розв'язок одновимірного нестаціонарного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m} \frac{\partial u}{\partial x} \left( x^m k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x,t) u + f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t > 0, \tag{1}$$

яке задовольняє початкові умови

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [a,b] \tag{2}$$

і крайові умови

$$\begin{aligned} \alpha_1 k(a,t) \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} &= \beta_1 u(a,t) - \mu_1(t); \\ -\alpha_2 k(b,t) \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} &= \beta_2 u(b,t) - \mu_2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

де $k(x,t)$, $q(x,t)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — задані функції; $\alpha_k$, $\beta_k$ $(k = 1,2)$ — задані невід'ємні сталі, причому виконуються нерівності $0 < k_0 \leqslant k(x,t)$ ($k_0$ — деяка стала), $q(x,t) \geqslant 0$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$ $(k = 1,2)$.

**Методичні вказівки.** Розглянемо різницеві методи розв'язування задачі (1)–(3). В області $\overline{Q}_T$ введемо сітку $\overline{\omega}_{h,\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, де $\overline{\omega}_h = \{x_i = a + ih, h = (b-a)/N, i = \overline{0..N}\}$; $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \tau = T/M, j = \overline{0..M}\}$. Позначимо $y_i^j = y(x_i, t_j)$.

За допомогою інтегро-інтерполяційного методу апроксимуємо задачу (1)–(3) різницевою схемою з ваговими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} \overline{x}_i^m y_{t,i}^j = \sigma \left(\overline{p} y_{\overline{x}}^{j+1}\right)_{x,i} - \sigma \overline{x}_i^m \overline{q}_i y_i^{j+1} + (1-\sigma) \left(\overline{p} y_{\overline{x}}^j\right)_{x,i} - \\ - (1-\sigma) \overline{x}_i^m \overline{q}_i y_i^j + \overline{x}_i^m \overline{f}_i, \quad i = \overline{1..N-1}, \quad j = \overline{1..M}, \end{aligned} \tag{4}$$

з початковими умовами

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0..N},$$

та крайовими умовами

$$\begin{aligned} \sigma \alpha_1 \overline{p}_1 y_{\overline{x},0}^{j+1} + (1-\sigma) \alpha_1 \overline{p}_1 y_{\overline{x},0}^j = \sigma x_0^m \beta_1 y_0^{j+1} + (1-\sigma) \beta_1 x_0^m y_0^j - x_0^m \overline{\mu}_1 + \\ + \frac{h}{2} \alpha_1 \overline{x}_0^m y_0^j - \frac{h}{2} \alpha_1 \overline{x}_0^m \left( \overline{f}_0 - \sigma \overline{q}_0 y_0^{j+1} + (1-\sigma) \overline{q}_0 y_0^j \right); \end{aligned} \tag{5}$$

$$
-\sigma\,\alpha_2\overline{p}_N y_{\overline{x},N}^{j+1} - (1-\sigma)\,\alpha_2\overline{p}_N y_{\overline{x},N}^{j} = \sigma\,x_N^m\beta_2 y_N^{j+1} + (1-\sigma)\,\beta_2 x_N^m y_N^j - x_N^m\overline{\mu}_2 + \\
+\frac{h}{2}\,\alpha_2\overline{x}_N^m y_N^j - \frac{h}{2}\,\alpha_2\overline{x}_N^m\left(\overline{f}_N - \sigma\,\overline{q}_N y_N^{j+1} - (1-\sigma)\,\overline{q}_N y_N^j\right), \quad (6)
$$

де

$$
\overline{x}_0^m = \frac{1}{h}\int_0^{x_1} x^m\,dx; \quad \overline{x}_N^m = \frac{1}{h}\int_{x_{N-1}}^{x_N} x^m\,dx;
$$

$$
\overline{x}_i^m = \frac{1}{2h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} x^m\,dx, \quad i = \overline{1..N-1};
$$

$$
\overline{p}_i = x_{i-1/2}^m\overline{k}_{i-1/2}, \quad i = \overline{1..N}.
$$

Покладаючи в (4)–(6) $\sigma = 0$, дістаємо явну схему; при $\sigma = 1$ — схему з випередженням (повністю неявну схему); при $\sigma = 0.5$ — симетричну схему Кранка—Ніколсона, яка записується на шаблоні з шести вузлів.

У разі досить гладких вхідних даних різницева схема (4)–(6) стійка при $\sigma \geqslant 0.5$ і має місце рівномірна збіжність її зі швидкістю $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$, де

$$
m_\sigma = \begin{cases} 2, & \text{при} \quad \sigma = 0.5; \\ 1, & \text{при} \quad \sigma \neq 0.5. \end{cases}
$$

Різницева схема (4)–(6) при $\sigma \neq 0$ буде неявною, тому $y^{j+1}$ знаходиться як розв'язок СЛАР з тридіагональною матрицею, а саме:

$$
\begin{aligned}
c_0 v_0 + b_1 v_1 &= \varphi_0, \\
d_{i-1}v_{i-1} + c_i v_i + b_{i+1}v_{i+1} &= \varphi_i, \quad i = \overline{1..N-1}, \\
d_{N-1}v_{N-1} + c_N v_N &= \varphi_N,
\end{aligned} \quad (7)
$$

де

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\sigma\tau}{h^2}\,\alpha_1\overline{p}_1; \quad c_0 = -\frac{\sigma\tau}{h}\,\beta_1 x_o^m - \frac{\alpha_1}{2}\,\overline{x}_0^m - \frac{\sigma\tau}{2}\,\alpha_1\overline{x}_0^m\overline{q}_0 - b_1; \\
\varphi_0 &= \frac{(1-\sigma)\tau}{h}\,\beta_1 x_0^m y_o^j - \frac{\tau}{h}\,x_0^m\overline{\mu}_1 - \frac{\alpha_1}{2}\,\overline{x}_0^m y_0^j - \frac{\tau}{2}\,\alpha_1\overline{x}_o^m\overline{f}_0 + \\
&+ \frac{(1-\sigma)\tau}{2}\,\alpha_1\overline{x}_0^m\overline{q}_0 y_0^j - \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\,\alpha_1\overline{p}_1\left(y_1^j - y_0^j\right);
\end{aligned} \quad (8)
$$

а також

$$
\begin{aligned}
d_{i-1} &= \frac{\sigma\tau}{h^2}\,\overline{p}_i; \quad b_{i+1} = \frac{\sigma\tau}{h^2}\,\overline{p}_{i+1}; \quad c_i = -\overline{x}_i^m - \sigma\tau\overline{x}_i^m\overline{q}_i - (d_{i-1} + b_{i+1}); \\
\varphi_i &= -\overline{x}_i^m y_i^j - \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\left(\overline{p}_{i+1}\left(y_{i+1}^j - y_i^j\right) - \overline{p}_i\left(y_i^j - y_{i-1}^j\right)\right) + \\
&+ (1-\sigma)\,\tau\overline{x}_i^m\overline{q}_i y_i^j - \tau\overline{f}_i\overline{x}_i^m, \quad i = \overline{1..N-1};
\end{aligned} \quad (9)
$$

і нарешті

$$
\begin{aligned}
d_{N-1} &= \frac{\sigma\tau}{h^2}\,\alpha_2\overline{p}_N; \quad c_N = -\frac{\sigma\tau}{h}\,\beta_2 x_N^m - \frac{\alpha_2}{2}\,\overline{x}_N^m - \frac{\sigma\tau}{2}\,\alpha_2\overline{x}_N^m\overline{q}_N - d_{N-1};\\
\varphi_N &= \frac{(1-\sigma)\tau}{h}\,\beta_2 x_N^m y_N^j - \frac{\tau}{h}\,x_N^m\overline{\mu}_2 - \frac{\alpha_2}{2}\,\overline{x}_N^m y_N^j - \frac{\tau}{2}\,\alpha_2\overline{x}_N^m\overline{f}_N + \\
&\quad + \frac{(1-\sigma)\tau}{2}\,\alpha_2\overline{x}_N^m\overline{q}_N y_N^j + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\,\alpha_2\overline{p}_N\left(y_N^j - y_{N-1}^j\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Таким чином, розв'язавши СЛАР (7), знайдемо значення $y_i^{j+1} = \nu_i$ $(i = \overline{0..N})$, якщо відомо розв'язок $y_i^j$ на $j$-му ярусі (на нульовому ярусі розв'язок задається виразом (5)).

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (7) розв'язується методом прогонки. Обчислювальна схема цього методу зводиться до виконання таких дій:

а) визначення коефіцієнтів $m_0$, $w_0$ за формулами

$$
m_0 = -\frac{b_1}{c_0}, \quad w_0 = \frac{\varphi_0}{c_0}, \quad c_0 \neq 0;
$$

б) визначення коефіцієнтів $m_i$, $w_i$ за формулами

$$
m_i = -\frac{b_{i+1}}{c_i + d_{i-1}m_{i-1}}, \quad w_i = \frac{\varphi_i - d_{i-1}w_{i-1}}{c_i + d_{i-1}m_{i-1}}, \quad i = \overline{1..N-1};
$$

в) обчислення $\nu_N$ за формулою

$$
\nu_N = \frac{\varphi_N - d_{N-1}w_{N-1}}{c_N + d_{N-1}m_{N-1}};
$$

г) визначення $\nu_i$ за формулою

$$
\nu_i = m_i\nu_{i+1} + w_i, \quad i = \overline{N-1..0}.
$$

З (8)–(10) випливає, що умова стійкості методу прогонки $|c_i| \geqslant |b_{i+1}| + |d_{i-1}|$ виконується.

Задача (1)–(3) є математичною моделлю різних нестаціонарних процесів, наприклад теплопровідності, дифузії та ін. Так, процес поширення тепла в тілі може бути описаний диференціальним рівнянням

$$
c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m\lambda\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - d(u - u_{\text{ср.}}) + F, \quad x \in (a,b), \quad t > 0, \tag{11}
$$

яке задовольняє такі початкові та крайові умови:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b]; \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \lambda \frac{\partial u}{\partial x} &= \gamma_1 (u - u_{\text{ср.}}) \quad \text{при} \quad x = a; \\ -\alpha_2 \lambda \frac{\partial u}{\partial x} &= \gamma_2 (u - u_{\text{ср.}}) \quad \text{при} \quad x = b. \end{aligned} \tag{13}$$

Тут $c$ — питома теплоємність; $\rho$ — щільність; $\lambda$ — коефіцієнт теплопровідності; $d$ — коефіцієнт теплообміну на поверхні тіла; $F$ — щільність джерел тепла; $u_{\text{ср.}}$ — температура навколишнього середовища; $u_0$ — початковий розподіл температури; $\gamma_k$ $(k = 1, 2)$ — коефіцієнт тепловіддачі на границі; $\alpha_k$ $(k = 1, 2)$ — деякі сталі величини, які дорівнюють нулю чи одиниці.

Показник $m$ може дорівнювати 0, 1, або 2, що відповідає запису рівняння в декартових, циліндричних, або сферичних координатах. Якщо величини $c$ та $\rho$ сталі, то задачу (11)–(13) можна записати у вигляді (1)–(3), де $k = \frac{\lambda}{c\rho}$, $q = \frac{d}{c\rho}$, $f = qu_{\text{ср.}} + \frac{F}{c\rho}$, $\beta_k = \frac{\gamma_k}{c\rho}$ $\mu_k = \frac{\gamma_k u_{\text{ср.}}}{c\rho}$.

Співвідношення (3) залежно від значень параметрів $\alpha_k$, $\beta_k$ $(k = 1, 2)$ визначають різні фізичні умови на границі:

а) випадок $\alpha_k = 0$, $\beta_k > 0$ означає, що на границі задано температуру тіла (*крайові умови першого роду*);

б) випадок $\alpha_k > 0$, $\beta_k = 0$ свідчить про те, що на границі задано тепловий потік (*крайові умови другого роду*);

в) випадок $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$ означає, що на границі задано теплообмін з навколишнім середовищем (*крайові умови третього роду*).

Зауважимо, що коли рівняння (1) розглядається в циліндричних або сферичних координатах ($m = 1$ або $m = 2$) і $a = 0$, то в точці $x = 0$ має виконуватися умова регулярності, тобто $\lim\limits_{x \to 0} x^m k \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.