10 ДС-алгоритми для моделювання процесів переносу, які описуються однорідними рівняннями

§10.1 Центрально-різницеві ДС-алгоритми для розв'язування початково-крайових задач для рівнянь першого порядку

В області $G = \{(x^1, x^2, x^3, t) | 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2, 3; t > t_0\}$, побудуємо розв'язок початково-крайової задачі для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} k_i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0. \tag{10.1}$$

§10.1.i Одновимірна центрально-різницева задача

Розглянемо спочатку одновимірну задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad G = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, t > t_0\} \tag{10.2}$$

при початкових $u(x, 0) = \varphi(x)$ та крайових умовах $u(0, t) = \psi(t)$ при $k > 0$, (або $u(1, t) = \psi(t)$ при $k < 0$).

Область зміни неперервних аргументів покриваємо сітковою областю

$$\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_n) | x_i = ih, t_n = n\tau; i = \overline{0..M}; n = 0, 1, 2, \ldots; h = 1/M\}$$

яку розщеплюємо на дві підобласті

$$\Omega_h^{(1,n)} = \{(x_i, t_n) | x_i = ih; t_n = n\tau; i = \overline{0..M}; n = 0, 1, 2, \ldots; h = 1/M; i + n = 2k + 1\},$$
$$\Omega_h^{(2,n)} = \{(x_i, t_n) | x_i = ih; t_n = n\tau; i = \overline{0..M}; n = 0, 1, 2, \ldots; h = 1/M; i + n = 2k\}.$$

Нехай $k = \mathrm{const}$. На часовому кроці $2n + 1$ точкам з підобласті $\Omega_h^{(1,2n+1)}$ ставимо у відповідність явні різницеві рівняння

$$u_{2i}^{2n+1} = u_{2i}^{2n} - \frac{k\tau}{2h} \left(u_{2i+1}^{2n} - u_{2i-1}^{2n} \right), \quad i = \overline{1..[(M-1)/2]}, \tag{10.3}$$

а вузлам області $\Omega_h^{(2,2n+1)}$ — різницеві рівняння з вагою $\sigma \geq 0$:

$$u_{2i+1}^{2n+1} = u_{2i+1}^{2n} - \frac{k\tau}{2h} \left(\sigma \left(u_{2i+2}^{2n} - u_{2i}^{2n} \right) + (1 - \sigma) \left(u_{2i+3}^{2n+1} - u_{2i}^{2n+1} \right) \right), \quad i = \overline{1..[M/2] - 1}. \tag{10.4}$$

На кроці $2n + 2$ у точках з $\Omega_h^{(1,2n+2)}$ записуємо рівняння

$$u_{2i+1}^{2n+2} = u_{2i+1}^{2n+1} - \frac{k\tau}{2h} \left(u_{2i+2}^{2n+1} - u_{2i}^{2n+1} \right), \quad i = \overline{1..[M/2] - 1}, \tag{10.5}$$

а точкам з $\Omega_h^{(2,2n+2)}$ —

$$u_{2i+1}^{2n+2} = u_{2i+1}^{2n+1} - \frac{k\tau}{2h}\left(\sigma\left(u_{2i+1}^{2n+1} - u_{2i}^{2n+1}\right) + (1-\sigma)\left(u_{2i+1}^{2n+2} - u_{2i}^{2n+2}\right)\right), \quad i = \overline{1..[M/2]-1}. \tag{10.6}$$

Обчислення розв'язку починаємо з точок області $\Omega_h^{(1,2n+1)}$ за явною різницевою схемою (10.3). Після обходу всіх точок цієї множини значення функції u_{2i}^{2n+1} будуть визначені. Тоді формально неявні різницеві схеми (10.4) дозволяють розв'язок у вузлах з $\Omega_h^{(2,2n+1)}$ знайти явно. Результати розрахунків, проведених за формулами (10.3), (10.4), сприймаються як допоміжні. На наступному часовому кроці виконаємо цикл розрахунків за формулами (10.5), (10.6) і одержимо значення u_i^{2n+2}, які приймаємо за розв'язок задачі. Обчислення за формулами (10.3)–(10.6) проводяться в усіх внутрішніх вузлах сітки.

§10.1.ii Стійкість алгоритмів за початковими даними

Дослідження стійкості за початковими даними рівносильне визначенню умов, при яких справедлива нерівність $\|u^{2n}\|_{L_{2,h}} \le c\|u^0\|_{L_{2,h}}$ де u_i^0 — початкове значення розв'язку; $\|\cdot\|_{L_{2,h}}$ — дискретний аналог норми в просторі L_2; $c > 0$ — обмежена додатна стала, незалежна від h, τ і u_i^0. Умова стійкості різницевої задачі Коші із сталими коефіцієнтами (умова фон Неймана [148]) стверджує, що для виконання умови стійкості необхідно, щоб спектр матриці переходу різницевого рівняння на наступний часовий шар повністю лежав в крузі комплексної площини з радіусом $1 + \tilde{n}_1\tau$ (тобто, щоб модуль коефіцієнта переходу не перевищував $1 + O(\tau)$, а зростання збурення не перевищувало експоненційного). Якщо спектр не залежить від часу, то ця умова набуває вигляду $\max_m |g(m)| \le 1$, де $g(m)$ — коефіцієнт переходу m-ї гармоніки точного розв'язку різницевої задачі.

§10.2 Стійкість задачі із сталим коефіцієнтом

Покладемо для визначеності в задачі (10.2) $\psi = 0$. Для різницевої задачі (10.3)–(10.6) доведемо

Теорема 10.1

Якщо величина τ стала або змінюється не частіше ніж через парне число часових кроків, а функція $u(x,0) = \varphi(x)$ з умови може бути розвинена в абсолютно збіжний ряд Фур'є і

$$u_i^0 = \varphi(ih) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{I\pi(ihm)},$$

то при $\sigma = 0$ ДС-схема (10.3)–(10.6) безумовно стійка за початковими даними, а при $\sigma > 0$ — умовно стійка при

$$\tau \le \frac{h\sqrt{2}}{|k|\sqrt{\sigma}}.$$

Доведення. Припустимо, що функція дискретного аргументу u_i^n розвивається в ряд [148]

$$u_i^n = \sum_{k_1}^{\infty} C^{(s)}(n\tau)e^{Iihk_1}, \quad I = \sqrt{-1}, \tag{10.7}$$

де B_m — коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є початкової умови $\varphi(x)$, а $c(m)$ — невідомі поки що коефіцієнти ($c(x) = c_1(x)c_2(x)$). Визначимо їх так, щоб ряд (10.7) був збіжний і був розв'язком задачі (10.3)–(10.6).

Нехай $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_h^{(1,2n+1)}$. Гармоніки точного розв'язку явних різни-цевих схем (10.3),(10.5) позначимо

$$\tilde{u}_{2i}^{2n+1} = B_m c_1^n(m) e^{I2\pi ihm},$$

а неявних (10.4), (10.6) відповідно

$$\tilde{u}_{2i}^{2n+2} = B_m c_2^n(m) e^{I2\pi ihm}.$$

Підставимо гармоніки $c_1(m)$ і $c_2(m)$ в рівняння (10.3) і (10.6). Після нескладних перетворень з (10.3) дістанемо, що

$$c_1^{n+1}(m) = (1 + Ik\tau h^{-1}\sin(mh))c_2^n(m) \equiv g_1(m)c_2(m). \tag{10.8}$$

Використавши неявну схему (10.6), для переходу з кроку $2n+1$ на крок $2n+2$ при $\sigma = 0$ маємо

$$c_1^{n+1}(m) = (1 - Ik\tau h^{-1}\sin(mh))^{-1}c_2^n(m) \equiv g_2(m)c_1(m). \tag{10.9}$$

Отже

$$c^{n+1}(m) = g(m)c^n(m), \tag{10.10}$$

де $g(m)$ — множник переходу з кроку $2n$ на крок $2n+2$, записаний у вигляді

$$g(m) = g_1(m)g_2(m) = \frac{1 + Ik\tau h^{-1}\sin(mh)}{1 - Ik\tau h^{-1}\sin(mh)}, \tag{10.11}$$

а $c^0(m) \equiv 1$ (умова узгодженості початкових і граничних умов).

Для $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_h^{(2,2n+1)}$ і $(x_i, t_{2n+2}) \in \Omega_h^{(1,2n+2)}$ гармоніки (10.7) подаємо відповідно так:

$$\tilde{u}_{2i+1}^{2n+1} = B_m c_2^n(m) e^{I(2i+1)\pi hm},$$
$$\tilde{u}_{2i+1}^{2n+2} = B_m c_1^n(m) e^{I(2i+1)\pi hm}.$$

З рівнянь (10.4), (10.5), повторюючи попередні міркування, для коефіцієнта переходу одержуємо рівності (10.10) та (10.11). Отже

$$q = \max_m |g(m)| = 1.$$

Якщо $\sigma > 0$, то при переході з кроку $2n+1$ на крок $2n+2$ для розглянутих точок області одержимо

$$c_2^{n+1}(m) = \hat{g}_2(m)c_1^n(m),$$

де

$$\hat{g}_2(m) = \frac{1 + I\tau kh^{-1}\sigma\sin(mh)}{1 + I\tau kh^{-1}(1+\sigma)\sin(mh)}.$$

Тобто,

$$c^{n+1}(m) = \frac{(1 - IZ)(1 + I\sigma Z)}{(1 + I(1+\sigma)Z}c^n(m) = \hat{g}(m)c^n(m).$$

Тут

$$\hat{g}(m) = \frac{(1 - IZ)(1 + I\sigma Z)}{1 + I(1+\sigma)Z},$$

а $Z = k\tau h^{-1}\sin(mh)$. З нерівності $q \equiv \max_m |\hat{g}(m)| \le 1$ випливає, що при $\sigma > 0$:

$$\tau \le \frac{h\sqrt{2}}{|k|\sqrt{\sigma}}.$$

При виконанні останньої нерівності $q = 1$, а рівняння (10.3) і (10.6) та (10.4),(10.5) перетворюються на тотожність.

Помножимо обидві частини (10.10) на $B(m)e^{I\pi mih}$ і підсумуємо одержану рівність за всіма m:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m c^{n+1}(m)e^{I\pi mih} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m g(m)c^n(m)e^{I\pi mih}.$$

Враховуючи, що $q = 1$, встановимо оцінку

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m c^{n+1}(m)e^{I\pi mih}\right| \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| \cdot |g(m)| \cdot |c^n(m)| \le$$
$$\le \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| \cdot |g(m)|^{n+1} \cdot |c^0(m)| \le q^{n+1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m|. \quad (10.12)$$

З останньої нерівності в силу умови теореми випливає збіжність ряду (10.7) $\forall n = 1, 2, \ldots$.

Оскільки:

- при $n > 0$ ряд (10.7) абсолютно збіжний;
- кожен член ряду (10.7), а отже і його сума задовольняє рівняння (10.3)–(10.6);
- при $n = 0$ ряд співпадає з рядом для $\varphi(x)$ і задовольняє початкові умови,

то сіткова функція (10.7) є точним розв'язком системи рівнянь (10.3)–(10.6).

Оскільки $\|u^n\|^2_{L_{2,h}} = \sum_{i=1}^{M} |u_i^n|^2 h$ є дискретним аналогом норми в просторі $L_2([-\pi, \pi])$, то після нескладних перетворень і використання рівності Парсеваля, для точного розв'язку різницевої (10.3)–(10.6) задачі маємо

$$\|u^{2n}\|^2_{L_{2,h}} = \sum_{i=1}^{M} \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m (c(m))^n e^{I\pi mih}\right|^2 h \le q^{2n} \sum_{i=1}^{M} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|B_m e^{I\pi mih}\right|^2 h =$$
$$= q^{2n} \sum_{i=1}^{M} |u_i^0|^2 h = q^{2n} \|u^0\|^2_{L_{2,h}}. \quad (10.13)$$

З оцінки (10.13) випливає стійкість алгоритму. □