§1.1. Псевдообернення систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Скибицький Нікита Максимович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

11 жовтня 2019 р.

Постановка задачі

Розглянемо СЛАР вигляду:

$$Ax = b, \tag{1}$$

де $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — відома матриця, $x \in \mathbb{R}^n$ — невідомий вектор, $b \in \mathbb{R}^m$ — відомий вектор.

У курсі лінійної алгебри досліджуються умови існування та єдиності розв'язку СЛАР (1), а також будується цей розв'язок.

Якщо ж СЛАР (1) не має розв'язку, то виникає питання пошуку вектора x, який найкраще (за певним критерієм) її задовольняє.

Анонс результатів

Для довільних A та b побудуємо вектор $\bar{x}$, який:

- точно задовольняє СЛАР (1), якщо вона має розв'язок;
- є елементом множини розв'язків (1), якщо таких розв'язків багато;
- є однозначним *середньоквадратичним наближенням* до розв'язку (1), якщо такого розв'язку у класичному розумінні не існує;
- є елементом множини таких наближень за умов неоднозначності обернення (1).

Нехай r — ранг матриці A; нехай $A = A_1 A_2$, де $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, причому ранги як A_1 так і A_2 дорівнюють r. Позначимо

$$A_1^+ = (A_1 A_1^\intercal)^{-1} A_1^\intercal, \tag{2}$$

$$A_2^+ = A_2^\intercal (A_2 A_2^\intercal)^{-1}. \tag{3}$$

Тоді *псевдообернена матриця* A^+ визначається наступним чином:

$$A^+ = A_2^+ A_1^+. \tag{4}$$

Reduced row echelon form: construction

In practice, we can construct one specific rank factorization as follows: we can compute B, the *reduced row echelon form* of A. Then A_1 is obtained by removing from A all non-pivot columns, and A_2 by eliminating all zero rows of B.

Example: Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

B is in *reduced echelon form*.

Full rank factorization: construction

Then A_1 is obtained by removing the third column of A, the only one which is not a *pivot* column, and A_2 by getting rid of the last row of zeroes, so:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

It is straightforward to check that

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 A_2.$$

Множина розв'язків

Введемо множину

$$\Omega_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|Ax - b\| = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \|Az - b\| \right\}, \tag{5}$$

Можна показати, що

$$\Omega_x = \left\{ A^+ b + v - A^+ A v \middle| v \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{6}$$

Виділення однозначного розв'язку

За умов неоднозначності множини Ω_x виділимо з неї вектор $\bar{x}$ такий, що

$$\bar{x} = \underset{x \in \Omega_x}{\operatorname{argmin}} \|x\|^2. \tag{7}$$

Можна показати, що

$$\bar{x} = A^+ b. \tag{8}$$

Однозначність і точність розв'язку

Розв'язок $\bar{x}$ СЛАР (1) буде однозначним, якщо

$$\det(A^\intercal A) > 0. \tag{9}$$

Точність розв'язку оцінюється величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{x \in \Omega_x} \|Ax - b\|^2 = b^\intercal b - b^\intercal A A^+ b. \tag{10}$$

Дякуємо за увагу!