Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

29 жовтня – 5 листопада 2019 р.

Зміст

2.3 Рівняння реакції-субдифузії змінного порядку

Згадаємо класичне рівняння реакції-дифузії:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv k\Delta u - \theta u, \tag{2.3.1}$$

де θ — кооефіцієнт реакції (реакція це процес у якому частинки речовини зникають).

Наївне узагальнення:

$$^{\star}\mathcal{D}_0^{\alpha} u \equiv k_\alpha \Delta u - \theta u. \tag{2.3.2}$$

> **Зауваження 2.3.1** — Основна проблема із цим рівнянням у тому, що його розв'язок $u(x,t)$, взагалі кажучи, не є невід'ємним, навіть якщо $u_0(x) \geqslant 0$.

Скористаємося напів-дискретним підходом: розглянемо сітку з рівновіддаленими вузлами (для наочності — у одновимірному випадку). Нехай $u_i(t)$ — кількість частинок речовини у i-ому вузлі у момент часу t. Будемо вважати, що стрибки відбуваються в один із сусідніх вузлів із ймовірностями $1/2$ (тобто блукання не зміщене). Нехай також, як і раніше, $\psi_i(t)$ — щільність часу очікування стрибка у вузлі i.

Також вважаємо, що час зникнення частинки має показниковий розподіл з параметром θ_i. Показниковий розподіл особливий тим, що у нього відсутній ефект післядії: ймовірність розпаду у проміжку часу $[t_0, t_0 + \Delta t]$ не залежить від t_0 і дорівнює $1 - e^{-\theta_i t}$, а ймовірність продовження існування дорівнює $e^{-\theta_i t}$.

Це рівносильно тому, що за відсутності стриків (тобто без дифузії) рівняння мало б такий вигляд:

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \equiv -\theta_i u_i, \tag{2.3.3}$$

адже розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u_i(t) = u_i(0) \cdot e^{-\theta_i t}, \tag{2.3.4}$$

тобто отримали (з точністю до множника) ймовірність продовження існування для показникового розподілу.

Введемо ще дві величини:

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Означення 2.3.2. *Вхідний та вихідний інтегральні потоки* $J_i^+(t)$, $J_i^-(t)$ такі, що

$$\int_{t_1}^{t_2} J_i^+(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.3.5}$$

— кількість частинок, що прибули в i-ий вузол впродовж часу $[t_1, t_2]$, а

$$\int_{t_1}^{t_2} J_i^-(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.3.6}$$

— кількість частинок, що вибули з i-ого вузла за час $[t_1, t_2]$.

Відносно них ми і запишемо рівняння: за наведених припущень, маємо такі рівняння:

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \equiv J_i^+ - J_i^- - \theta_i u_i \tag{2.3.7}$$

а також

$$J_i^+ \equiv \tfrac{1}{2} J_{i-1}^- + \tfrac{1}{2} J_{i+1}^-. \tag{2.3.8}$$

Безпосередньо з цих двох рівнянь випливає, що

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \equiv \tfrac{1}{2} J_{i-1}^- - J_i^- + \tfrac{1}{2} J_{i+1}^- - \theta_i u_i. \tag{2.3.9}$$

Крім того,

$$J_i^-(t) = u_i(0)\cdot e^{-\theta_i t}\psi_i(t) + \int_0^t J_i^+(s)\cdot e^{-\theta_i(t-s)}\cdot \psi_i(t-s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.3.10}$$

Перший доданок відповідає за частинки, які з самого початку були в i-ому вузлі, не розпалися за час t (ймовірність цього $e^{-\theta_i t}$) і вистринули з нього у час t (ймовірність цього $\psi_i(t)$), а підінтегральний вираз у другому — за ті частинки, які прибули у момент часу s, не розпалися за час $t-s$ (ймовірність цього $e^{-\theta_i(t-s)}$), і вистрибнули з нього через час $t-s$ після прибуття (ймовірність цього $\psi_i(t-s)$).

Перетворимо останнє рівняння перетворенням Лапласа:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[J_i^-\right](\eta) &= u_i(0)\cdot \mathscr{L}[\psi_i](\eta+\theta_i) + \mathscr{L}\left[J_i^+\right](\eta)\cdot \mathscr{L}[\psi_i](\eta+\theta_i) = \\
&= u_i(0)\cdot \mathscr{L}[\psi_i](\eta+\theta_i) + (\eta\cdot \mathscr{L}[u_i](\eta) - u_i(0) + \\
&\quad + \mathscr{L}\left[J_i^-\right](\eta) + \theta_i\cdot \mathscr{L}[u_i](\eta))\cdot \mathscr{L}[\psi_i](\eta+\theta_i) = \\
&= (\eta\cdot \mathscr{L}[u_i](\eta) + \mathscr{L}\left[J_i^-\right](\eta) + \theta_i\cdot \mathscr{L}[u_i](\eta))\cdot \mathscr{L}[\psi_i](\eta+\theta_i).
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[J_i^-\right](\eta) &= \frac{(\eta+\theta_i)\cdot \mathscr{L}[u_i](\eta)\cdot \mathscr{L}[\psi_i](\eta+\theta_i)}{1-\mathscr{L}[\psi_i](\eta+\theta_i)} = \\
&= \eta\cdot \mathscr{L}[u_i](\eta)\cdot \mathscr{L}\left[e^{-\theta_i t}\cdot \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathscr{L}[\psi_i](\eta)}{1-\mathscr{L}[\psi_i](\eta)}\right]\right] + \\
&\quad + \theta_i\cdot \mathscr{L}[u_i](\eta)\cdot \mathscr{L}\left[e^{-\theta_i t}\cdot \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathscr{L}[\psi_i](\eta)}{1-\mathscr{L}[\psi_i](\eta)}\right]\right].
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Нехай тепер $\psi_i(t) \sim r_i \cdot t^{-1-\alpha_i}$, де $0 < \alpha_i < 1$. Тоді $\mathscr{L}[\psi_i](\eta) \sim 1 - r_i \cdot \frac{\Gamma(1-\alpha_i)}{\alpha_i}\cdot \eta^{\alpha_i} + o(\eta^{\alpha_i})$ (за наслідком з теореми Таубера). Отже,

$$\frac{\mathscr{L}[\psi_i](\eta)}{1-\mathscr{L}[\psi_i](\eta)} = \frac{1 - r_i\cdot \frac{\Gamma(1-\alpha_i)}{\alpha_i}\cdot \eta^{\alpha_i} + o(\eta^{\alpha_i})}{r_i\cdot \frac{\Gamma(1-\alpha_i)}{\alpha_i}\cdot \eta^{\alpha_i} + o(\eta^{\alpha_i})} \sim \frac{\alpha_i\cdot \eta^{-\alpha_i}}{r_i\cdot \Gamma(1-\alpha_i)} = M_i\cdot \eta^{-\alpha_i}. \tag{2.3.13}$$

За теоремою Таубера з $\beta = 1 - \alpha_i$,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\mathscr{L}\left[\psi_i\right](\eta)}{1-\mathscr{L}\left[\psi_i\right](\eta)}\right] \sim \frac{M_i}{\Gamma(\alpha_i)} \cdot t^{\alpha_i - 1}. \tag{2.3.14}$$

Тому можемо продовжити

$$J_i^-(t) \sim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u_i(t) \star e^{-\theta_i t} \cdot \frac{M_i}{\Gamma(\alpha_i)} \cdot t^{\alpha_i-1}\right) + \theta_i \cdot \left(u_i(t) \star e^{-\theta_i t} \cdot \frac{M_i}{\Gamma(\alpha_i)} \cdot t^{\alpha_i-1}\right). \tag{2.3.15}$$

Зауваження 2.3.3 — У цій формулі не фігурує початкове значення, адже воно рівне нулеві для достатньо гладкої u_i, наприклад для обмеженої в околі нуля і інтегровної. Справді, тоді $u_i \star e^{-\theta_i t} t^{\alpha_i - 1}\big|_{t=0}$:

$$u_i \star e^{-\theta_i t} \cdot t^{\alpha_i-1}\big|_{t=0} = \int_0^t u_i(s) e^{-\theta_i(t-s)} \cdot (t-s)^{\alpha_i-1}\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \|u\| \cdot 1 \cdot (t-s)^{\alpha_i-1}\,\mathrm{d}s \xrightarrow[t\to 0]{} 0. \tag{2.3.16}$$

Ми майже досягнули нашої мети:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M_i} \cdot J_i^-(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t u_i(s) \cdot e^{-\theta_i(t-s)} \cdot (t-s)^{\alpha_i-1}\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + \theta_i \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t u_i(s) \cdot e^{-\theta_i(t-s)} \cdot (t-s)^{\alpha_i-1}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-\theta_i t} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t u_i(s) e^{\theta_i s} \cdot (t-s)^{\alpha_i-1}\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + \theta_i \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t u_i(s) \cdot e^{-\theta_i(t-s)} \cdot (t-s)^{\alpha_i-1}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-\theta_i t} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t u_i(s) \cdot e^{\theta_i s} \cdot (t-s)^{\alpha_i-1}\,\mathrm{d}s + \\
&\quad + \theta_i \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t u_i(s) \cdot e^{-\theta_i(t-s)} \cdot (t-s)^{\alpha_i-1}\,\mathrm{d}s = \\
&= e^{-\theta_i t} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t u_i(s) \cdot e^{\theta_i s} \cdot (t-s)^{\alpha_i-1}\,\mathrm{d}s = \\
&= e^{-\theta_i t} \cdot D_0^{1-\alpha_i}(e^{\theta_i t} \cdot u_i(t)).
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Підставляємо це назад:

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \frac{M_{i-1}}{2}. \tag{2.3.18}$$

$$\frac{1}{M_i} \cdot J_i^- = e^{-\theta_i t} \cdot D_0^{1-\alpha_i}(e^{\theta_t t} u_i(t)), \tag{2.3.19}$$

де

$$M_i = \frac{\alpha_i}{r_i - \Gamma(1-\alpha_i)}, \tag{2.3.20}$$

а α_i береться з

$$\psi_i(t) \sim r_i \cdot t^{1-\alpha_i}. \tag{2.3.21}$$

Звідси маємо

Рівняння 2.3.4 (реакції-субдифузії, напівдискретне)

$$\frac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}M_{i-1} \cdot e^{-\theta_{i-1}t} \cdot D_0^{1-\alpha_{i-1}}(e^{\theta_{i-1}t}u_{i-1})+ \\ + \tfrac{1}{2}M_{i+1} \cdot e^{-\theta_{i+1}t} \cdot D_0^{1-\alpha_{i+1}}(e^{\theta_{i+1}t}u_{i+1})+ \\ - M_i \cdot e^{-\theta_i t} \cdot D_0^{1-\alpha_i}(e^{\theta_i t}u_i) - \theta_i u_i. \tag{2.3.22}$$

Граничний перехід до неперервної за простором моделі:

- $i \in \mathbb{Z} \mapsto x \in \mathbb{R}$;
- $u(t) \mapsto u(x,t)$;
- $\alpha_i \mapsto \alpha(x)$;
- $\theta_i \mapsto \theta(x)$;
- $r_i \mapsto r(x)$.

Якщо все це обережно пробити то отримаємо

Рівняння 2.3.5 (реакції субдифузії, змінного порядку)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(k(x) \cdot e^{-\theta(x)t} \cdot D_0^{1-\alpha(x)}\left(e^{\theta(x)t} \cdot u\right)\Big) - \theta(x) \cdot u. \tag{2.3.23}$$

Тут

$$k(x) = \frac{\alpha(x) \cdot \sigma^2}{2 \cdot r(x) \cdot \Gamma(1-\alpha(x))} \tag{2.3.24}$$

— *як-би коефіцієнт дифузії.*

Зауваження 2.3.6 — Нагадаємо, що класичне рівняння реакції дифузії мало вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv k\Delta u - \theta u. \tag{2.3.25}$$

Як бачимо, результат переходу до дробових похідних анітрохи не очевидний, тобто рівняння потрібно виводити, а не вгадувати.

Якщо $\theta = 0$ (реакції немає), то маємо рівняння субдифузії змінного порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial u} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k(x)D_0^{1-\alpha(x)}(u)). \tag{2.3.26}$$

Зауваження 2.3.7 — Причому $D_0^{1-\alpha(x)}$ не можна винести за $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, тобто останнє рівняння не еквівалентне такому:

$$^{\star}D_0^{\alpha(x)}u = k(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.3.27}$$

А от у рівняння субдифузії для достатньо гладких функцій можна було.

Зауваження 2.3.8 — Якщо у моделі реакції-субдифузії $\theta = \theta(x, t, u(x, t))$, то отримаємо рівняння аналогічне (2.3.23), але з

$$\exp\left\{\pm \int_0^t \theta(x, s, u(x, s))\, \mathrm{d}s\right\} \tag{2.3.28}$$

замість $e^{\pm\theta(x)t}$.

Зауваження 2.3.9 — Якщо α — стала, то отримуємо старе рівняння субдифузії: рівняння (2.3.26) з $\alpha(x) = \alpha = \mathrm{const}$ з $r(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \tau^\alpha$ зводиться до рівняння субдифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_\alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_0^{1-\alpha} u \tag{2.3.29}$$

з $k_\alpha = \frac{\sigma^2}{2\tau^\alpha}$.