# Теорія рядів Фур'є

Молодцов О. І.*

9 жовтня 2019 р.

## Зміст



### 1.4 Збіжність в середньоквадратичному

Розглянемо функціональний ряд:

$$\sum f_n(x), \quad x \in X. \tag{1.4.1}$$

Як і раніше, позначатимемо послідовність частинних сум $S_n$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \tag{1.4.2}$$

а також позначимо

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k(x). \tag{1.4.3}$$

**Означення 1.4.1.** Якщо $\forall x \in X\ \exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x)$, то кажуть, що функціональний ряд $S_n(x)$ збігається до $f(x)$ *поточково в середньоарифметичному*.

**Означення 1.4.2.** Якщо $\exists \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f(x) - \sigma_n(x)| = 0$, то кажуть, що функціональний ряд $S_n(x)$ збігається до $f(x)$ *рівномірно в середньоарифметичному*.

*Молодцов Олександр Ілліч, semol2006@ukr.net

**Означення 1.4.3.** Якщо $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f_n \in R(X)$ і

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 \, dx, \tag{1.4.4}$$

то кажуть, що функціональний ряд $S_n(x)$ збігається до $f(x)$ *в середньоквадратичному.*

Повернемося до функції $f \in R([-\pi, \pi])$. Нехай її ряд Фур'є має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.4.5}$$

Зрозуміло, що послідовність часткових сум цього ряду буде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.4.6}$$

Розглянемо тепер довільний тригонометричний многочлен "степеню" не вище $n$, тобто

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx). \tag{1.4.7}$$

Розглянемо задачу знаходження

$$\operatorname*{argmin}_{T_n} \|f - T_n\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 \, dx}. \tag{1.4.8}$$

Логічним припущенням є $T_n = S_n$.

**Теорема 1.4.4** (про найкраще середньоквадратичне наближення)
Якщо $f \in R([-\pi, \pi])$, то $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall T_n(x)$:

$$\|f(x) - S_n(x)\| \le \|f(x) - T_n(x)\|. \tag{1.4.9}$$

*Доведення.* Розділимо інтеграл з норми на три наступним чином:

$$\begin{aligned} \|f(x) - T_n(x)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 \, dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big( (f(x))^2 - 2f(x)T_n(x) + (T_n(x))^2 \Big) \, dx. \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Перетворимо другий інтеграл:

$$\begin{gathered} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x) \, dx = \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \\ = \pi \alpha_0 a_0 + \pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k + b_k). \end{gathered} \tag{1.4.11}$$

Перетворимо третій інтеграл:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \,\mathrm{d}x + \\ &+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)(\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin km) = \\ &= 2\pi\alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2).\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Підставляємо назад і перетворюємо:

$$\begin{aligned}\|f - T_n\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\pi\alpha_0 a_0 - 2\pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \\ &+ 2\pi\alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x + \\ &+ \pi \left( \frac{(2\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left( (\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 \right) \right) - \\ &- \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right).\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Перший і третій доданки від $\alpha$ і $\beta$ не залежать, тому можемо просто прирівняти другий до нуля для досягнення мінімуму всього виразу. Далі нескладно бачити, що $\alpha_0 = a_0/2$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$, тобто $T_n = S_n$. □

## 1.5 Нерівність Бесселя

**Теорема 1.5.1** (нерівність Бесселя)
$\forall f \in R([-\pi, \pi])$ виконується нерівність Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x, \tag{1.5.1}$$

де $a_0, a_n, b_n$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$.

*Доведення.* Підставимо у (1.4.13) $T_n = S_n$, отримаємо

$$0 \le \|f(x) - S_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2\,\mathrm{d}x - \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_n^2 + b_n^2) \right). \tag{1.5.2}$$

Елементарними перетвореннями нерівності отримуємо

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.5.3}$$

Це означає, що послідовність часткових сум обмежена (і монотонна), а тому ряд збіжний, а граничним переходом маємо нерівність Бесселя. □

**Приклад 1.5.2**

Розглянемо функцію

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}. \tag{1.5.4}$$

Для неї $a_i = 0$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Але

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \tag{1.5.5}$$

— розбіжний, тому наведений вище ряд не є рядом Фур'є (своєї суми).

**Наслідок 1.5.3**

Нехай $f \in R([-\pi,\pi])$, $a_n, b_n$ — її коефіцієнти Фур'є. Тоді

1)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0; \tag{1.5.6}$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.5.7}$$

**Наслідок 1.5.4** (прямування до 0 косинусів та синусів перетворення Фур'є)

Нехай $f \in R([-\pi,\pi])$, тоді $\forall [a,b] \subset [-\pi,\pi]$:

1)
$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x; \tag{1.5.8}$$

2)
$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.5.9}$$

**Вправа 1.5.5.** Доведіть другий пункт.

**Зауваження 1.5.6** — Другий наслідок є частинним випадком теореми про косинус та синус перетворення Фур'є.

## 1.6 Інтегральне зображення частинних

Далі вважаємо функцію $f$ $2\pi$-періодичною, $f \in R([-\pi, \pi])$. Тоді

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left( \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\,\mathrm{d}t + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\,\mathrm{d}t \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \right) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Можемо записати останню рівність у вигляді

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.6.2}$$

**Означення 1.6.1.** $D_n(x-t)$ — *ядро Діріхле.*

$$\begin{aligned} 2 \sin \tfrac{x}{2} D_n(x) &= \sin \tfrac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \tfrac{x}{2} \cos kx = \\ &= \sin \tfrac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big( \sin(k + \tfrac{1}{2}) - \sin(k - \tfrac{1}{2})x \Big) = \\ &= \sin(n + \tfrac{1}{2})x \to 0. \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

З останнього маємо

$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2\pi m, \\ n + \frac{1}{2}, & x = 2\pi m. \end{cases} \tag{1.6.4}$$

**Властивості 1.6.2** (ядра Діріхле)

1) неперервне: $\forall n \in \mathbb{N}$: $D_n \in C(\mathbb{R})$;
2) обмежене: $|D_n(x)| \le n + \frac{1}{2}$;
3) парне: $D(x) = D(-x)$;
4) періодичне з періодом $2\pi$;
5) $|D_n(x)| \le \frac{\pi}{2|x|}$, $-\pi \le x \le \pi$.

**Вправа 1.6.3.** Доведіть останню властивість. Підказка: $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y)D_n(-y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \Big(f(x+t) + f(x-t)\Big) D_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

Якщо підставити сюди $f \equiv 1$, то отримаємо $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2$, $a_n = b_n = 0$, тобто $S_n \equiv 1$. Отже,

$$\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{1.6.7}$$

## 1.7 Принцип локалізації Рімана

**Теорема 1.7.1** (принцип локалізації Рімана)
Якщо $f$ — $2\pi$-періодична, і $f \in R([-\pi, \pi])$, то збіжність/розбіжність її ряду Фур'є у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ залежить лише від "поведінки" $f$ в околі точки $x_0$.

*Доведення.* Нехай $\delta \in (0, \pi)$, тоді

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}. \tag{1.7.1}$$

Позначимо

$$I_n(x_0) = \int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t. \tag{1.7.2}$$

Якщо тепер взяти $F(t) = \frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$, то $F \in R([\delta, \pi])$, а тому, за другим наслідком $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, тобто з трьох інтегралів вище лишається лише середній, “локальний”. $\square$