

# Математичне моделювання динаміки просторово розподілених процесів з неперервно заданим початково-крайовим станом

Сергієнко Тетяна Олександрівна, Скибицький Нікіта Максимович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

16 жовтня 2019 р.

Зупинимося на проблемах дослідження функції стану  $u(x, t)$ , що розподілена в області  $V = X \times [0, T]$  динамічної системи, логіка функціонування якої визначена рівнянням

$$L(\partial_{x,t})u(x, t) = f(x, t). \quad (1)$$

Тут:

- $x \in X \subset \mathbb{R}^n$  — просторова змінна;
- $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}_+$  — часова змінна;
- $\partial_{x,t} = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}, \partial_t)$  — вектор частинних похідних за просторовими змінними  $x_1, \dots, x_n$  та часом  $t$ ;
- $L$  — лінійний диференціальний оператор;
- $f(x, t) : V \rightarrow \mathbb{R}$  — функція, що розподілена у просторі-часі  $V$  зовнішньодинамічних збурень.

Будемо виходити з того, що для розглядуваного динамічного процесу (1) мають місце початкові (при  $t = 0$ ) і крайові (на контурі/границі  $\Gamma = \partial X$  просторової області  $X$ ) спостереження вигляду

$$L_i^0(\partial_t)u(x, 0) = U_i^0(x), \quad (i = \overline{1, n_0}, x \in X), \quad (2)$$

$$L_j^\Gamma(\partial_x)u(x, t) = U_j^\Gamma(x, t), \quad (j = \overline{1, n_\Gamma}, x \in \Gamma). \quad (3)$$

На відміну від прийнятих у класичних розділах диференціальних рівнянь математичної фізики та обчислювальної математики, не будемо накладати жодних обмежень на кількості  $n_0$  та  $n_\Gamma$  початково-крайових співвідношень (2), (3) (вони можуть бути й відсутніми) і на властивості функцій  $U_i^0(x)$  ( $i = \overline{1, n_0}$ ) та  $U_j^\Gamma(x, t)$  ( $j = \overline{1, n_\Gamma}$ ).

Це робить задачі (1)–(3) некоректними й нерозв'язними методами аналітичної та обчислювальної математики.

# Середньоквадратичний критерій узгодженості

З урахуванням сказаного поставимо задачу побудови функції стану  $u(x, t)$ , яка є розв'язком рівняння (1), і узгоджується зі спостереженнями (2), (3) за середньоквадратичним критерієм:

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \sum_{i=1}^{n_0} \int_X \left( L_i^0(\partial_t) u(x, 0) - U_i^0(x) \right)^2 dx + \\ & + \sum_{j=1}^{n_\Gamma} \int_0^T \int_\Gamma \left( L_j^\Gamma(\partial_x) u(x, t) - U_j^\Gamma(x, t) \right)^2 dx dt \rightarrow \min_{u(x, t)}. \quad (4) \end{aligned}$$

Зважаючи на обмеженість області  $V$  функціонування системи (1) і наявність трьох факторів зовнішньодинамічного впливу на стан системи  $u(x, t)$ , визначення останнього зобразимо співвідношенням

$$u(x, t) = u_{\infty}(x, t) + u_0(x, t) + u_{\Gamma}(x, t), \quad (5)$$

складові якого відповідають просторово розподіленим, початковим, і крайовим збуренням, відповідно.

Для побудови функцій  $u_{\infty}(x, t)$ ,  $u_0(x, t)$ ,  $u_{\Gamma}(x, t)$  уведемо до розгляду передатну функцію  $G(x - \xi, t - \tau)$  досліджуваного процесу — функцію Гріна системи (1), що розглядається в необмеженій просторово-часовій області, співвідношенням

$$L(\partial_{x,t})G(x - \xi, t - \tau) = \delta(x - \xi, t - \tau), \quad (6)$$

де  $\delta(x - \xi, t - \tau)$  —  $\delta$ -функція Дірака.



# Представлення складових розв'язку

Позначимо також  $V_0 = X \times (-\infty, 0]$ ,  $V_\Gamma = (\mathbb{R}^n \setminus X) \times [0, T]$ , тоді:

$$u_\infty(x, t) = \int_V G(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (7)$$

$$u_0(x, t) = \int_{V_0} G(x - \xi, t - \tau) f_0(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (8)$$

$$u_\Gamma(x, t) = \int_{V_\Gamma} G(x - \xi, t - \tau) f_\Gamma(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (9)$$

де  $f_0(x, t)$ ,  $f_\Gamma(x, t)$  — функції, дія яких в областях інтегрування  $V_0$  та  $V_\Gamma$  згідно з (4) моделюватиме вплив визначених у (2), (3) початково-крайових зовнішньодинамічних збурень.

# Дискретні моделюючі функції

Зауважимо, що моделюючі функції  $f_0(x, t)$ ,  $f_\Gamma(x, t)$ , як і функція  $f(x, t)$ , можуть бути визначені дискретно, тобто векторами-стовпчиками своїх значень у точках:

$$f = \left( f(x_i, t_i), i = \overline{1, m} \right)^T, \quad (x_i, t_i) \in V, \quad (10)$$

$$f_0 = \left( f_0(x_i^0, t_i^0), i = \overline{1, m_0} \right)^T, \quad (x_i^0, t_i^0) \in V_0, \quad (11)$$

$$f_\Gamma = \left( f_\Gamma(x_i^\Gamma, t_i^\Gamma), i = \overline{1, m_\Gamma} \right)^T, \quad (x_i^\Gamma, t_i^\Gamma) \in V_\Gamma. \quad (12)$$

Позначимо  $f_i = f(x_i, t_i)$  ( $i = \overline{1, m}$ );  $f_{0,i} = f_0(x_i^0, t_i^0)$  ( $i = \overline{1, m_0}$ );  $f_{\Gamma,i} = f_\Gamma(x_i^\Gamma, t_i^\Gamma)$  ( $i = \overline{1, m_\Gamma}$ ).

# Представлення складових розв'язку

У випадку дискретних моделюючих функцій співвідношення (7)–(9) набувають вигляду

$$u_{\infty}(x, t) = \sum_{i=1}^m G(x - x_i, t - t_i) f_i, \quad (13)$$

$$u_0(x, t) = \sum_{i=1}^{m_0} G(x - x_i^0, t - t_i^0) f_{0,i}, \quad (14)$$

$$u_{\Gamma}(x, t) = \sum_{i=1}^{m_{\Gamma}} G(x - x_i^{\Gamma}, t - t_i^{\Gamma}) f_{\Gamma,i}, \quad (15)$$

і задача побудови функції  $u(x, t)$  зведеться до знаходження векторів  $f_0, f_{\Gamma}$  згідно з критерієм (4).

Визначення функції  $G(x - \xi, t - \tau)$  згідно з (6) дозволяє стверджувати, що функція стану  $u(x, t)$ , зображена співвідношеннями (5), (7)–(9), за будь-яких  $f_0, f_\Gamma$  з моделлю (1) узгоджуватиметься точно.

Це означає, що задача побудови функції  $u(x, t)$  визначеного згідно з (1) і спостережуваного згідно з (2), (3) процесу зводиться до знаходження векторів  $f_0, f_\Gamma$ , моделюючих згідно з (4) початково-крайові збурення (2), (3).

Саме на розрахункових алгоритмах розв'язання задач побудови моделюючих факторів, визначених векторами  $f_0, f_\Gamma$  зупинимося далі.

# Теорія пошуку $f_0$ , $f_\Gamma$

Розглянемо задачу знаходження моделюючих векторів  $f_0$  та  $f_\Gamma$ , що згідно з (4) дозволяють виконати початково-крайові умови (2), (3).

З урахуванням зображення (5), (13)–(15) функції  $u(x, t)$  стану розглядуваної системи із (2), (3) отримаємо систему рівнянь для знаходження компонент  $f_{0,i}$  ( $i = \overline{1, m_0}$ ) та  $f_{\Gamma,i}$  ( $i = \overline{1, m_\Gamma}$ ) векторів  $f_0$  та  $f_\Gamma$ .

Позначимо

$$\begin{aligned}\overline{U}_i^0(x) &= U_i^0(x) - L_i^0(\partial_t)u_\infty(x, 0), \\ \overline{U}_i^\Gamma(x, t) &= U_i^\Gamma(x, t) - L_i^\Gamma(\partial_x)u_\infty(x, t), \quad x \in \Gamma.\end{aligned}$$

Тоді вищезгадана система має вигляд

$$\sum_{k=1}^{m_0} L_i^0(\partial_t) G(x - x_k^0, -t_k^0) f_{0,k} + \sum_{k=1}^{m_\Gamma} L_i^0(\partial_t) G(x - x_k^\Gamma, -t_k^\Gamma) f_{\Gamma,k} = \\ = \overline{U}_i^0(x), \quad (i = \overline{1, n_0}), \quad (16)$$

а також, для  $x \in \Gamma$ :

$$\sum_{k=1}^{m_0} L_j^\Gamma(\partial_x) G(x - x_k^0, t - t_k^0) f_{0,k} + \sum_{k=1}^{m_\Gamma} L_j^\Gamma(\partial_t) G(x - x_k^\Gamma, t - t_k^\Gamma) f_{\Gamma,k} = \\ = \overline{U}_j^\Gamma(x, t), \quad (j = \overline{1, n_\Gamma}). \quad (17)$$

Для розв'язання системи (16), (17) згідно із критерієм (4) зведемо її до вигляду

$$B(x, t)f = U(x, t), \quad (18)$$

де  $f = (f_0, f_\Gamma)^\top$ , а  $U(x, t) = (U_0(x, t), U_\Gamma(x, t))^\top$ , у відповідних областях визначення. У свою чергу,

$$B(x, t) = \begin{pmatrix} B_{1,1}(x) & B_{1,2}(x) \\ B_{2,1}(x, t) & B_{2,2}(x, t) \end{pmatrix} \quad (19)$$

у відповідних областях визначення.

# Позначення іншого вигляду системи

Тут

$$\begin{aligned}U_0(x) &= \left( \overline{U}_i^0(x), i = \overline{1, n_0} \right)^T, \\U_\Gamma(x) &= \left( \overline{U}_j^\Gamma(x), j = \overline{j, n_\Gamma} \right)^T.\end{aligned}\tag{20}$$

а також

$$\begin{aligned}B_{1,1}(x) &= \left( L_i^0(\partial_t) G(x - x_k^0, -t_k^0) \right)_{k=\overline{1, m_0}}^{i=\overline{1, n_0}}, \\B_{1,2}(x) &= \left( L_i^0(\partial_t) G(x - x_k^\Gamma, -t_k^\Gamma) \right)_{k=\overline{1, m_\Gamma}}^{i=\overline{1, n_0}}, \\B_{2,1}(x, t) &= \left( L_j^\Gamma(\partial_x) G(x - x_k^0, t - t_k^0) \right)_{k=\overline{1, m_0}}^{j=\overline{1, n_\Gamma}}, \\B_{2,2}(x, t) &= \left( L_j^\Gamma(\partial_x) G(x - x_k^\Gamma, t - t_k^\Gamma) \right)_{k=\overline{1, m_\Gamma}}^{j=\overline{1, n_\Gamma}}.\end{aligned}\tag{21}$$

( $i, j$  — індекси рядків,  $k$  — стовпчиків)



Розв'язання системи (16), (17) згідно з (4) еквівалентне знаходженню вектора  $f_*$  такого, щоб

$$f_* = \arg \min_{f \in \mathbb{R}^{m_0+m_\Gamma}} \int \|B(x, t)f - U(x, t)\|^2 dx dt, \quad (22)$$

де інтегрування розуміється по області змiну аргументу  $(x, t)$  з (19). Задача (22) є задачею псевдообернення лінійних функціональних рівнянь, для якої маємо

$$f_* \in \Omega = \left\{ P^+ B_u + v - P^+ P v \mid v \in \mathbb{R}^{m_0+m_\Gamma} \right\}, \quad (23)$$

де

$$P = \int B^\top(x, t) B(x, t) dx dt, \quad B_u = \int B^\top(x, t) U(x, t) dx dt. \quad (24)$$

# Позначення для розв'язання системи

З урахуванням області визначення аргументів  $(x, t)$  можемо записати

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} B_{u,1} \\ B_{u,2} \end{pmatrix},$$

де

$$P_{i,j} = \int_X B_{1,i}^T(x) B_{1,j}(x) dx + \int_0^T \int_{\Gamma} B_{2,i}^T(x, t) B_{2,j}(x, t) dx dt,$$

$$B_{u,i} = \int_X B_{1,i}^T(x) U_0(x) dx + \int_0^T \int_{\Gamma} B_{2,i}^T(x, t) U_{\Gamma}(x, t) dx dt,$$

для  $i, j = \overline{1, 2}$ .

# Останні позначення для розв'язання системи

Вважаючи, що

$$P^+ = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{pmatrix},$$

де  $Q_{1,1} \in \mathbb{R}^{m_0 \times m_0}$ ,  $Q_{1,2} \in \mathbb{R}^{m_0 \times m_\Gamma}$ ,  $Q_{2,1} \in \mathbb{R}^{m_\Gamma \times m_0}$ ,  $Q_{2,2} \in \mathbb{R}^{m_\Gamma \times m_\Gamma}$ , а  $v = (v_0, v_\Gamma)^T$ ,  $v_0 \in \mathbb{R}^{m_0}$ ,  $v_\Gamma \in \mathbb{R}^{m_\Gamma}$ , із (23) знаходимо шукані згідно з (4) моделюючі вектори  $f_0$  та  $f_\Gamma$ . При цьому

$$f_0 \in \Omega_0 = \left\{ (Q_{1,1}, Q_{1,2})B_f + v_0 - (Q_{1,1}, Q_{1,2})Pv \mid v_0 \in \mathbb{R}^{m_0} \right\}, \quad (25)$$

$$f_\Gamma \in \Omega_\Gamma = \left\{ (Q_{2,1}, Q_{2,2})B_f + v_\Gamma - (Q_{2,1}, Q_{2,2})Pv \mid v_\Gamma \in \mathbb{R}^{m_\Gamma} \right\}. \quad (26)$$

Знайдені згідно (25), (26) вектори  $f_0$ ,  $f_\Gamma$  з урахуванням (5), (13)–(15) дозволяють знайти функцію  $u(x, t)$  стану розглядуваної системи, яка, задовольняючи (1) точно, початково-крайові умови (2), (3) моделює з точністю

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^2 &= \min_{\substack{f_0 \in \Omega_0 \\ f_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi = \min_{f \in \Omega_0 \times \Omega_\Gamma} \int \|B(x, t)f - U(x, t)\|^2 dx dt = \\ &= \int_X U_0^T(x) U_0(x) dx + \int_0^T \int_\Gamma U_\Gamma^T(x, t) U_\Gamma(x, t) dx dt - B_f^T P^+ B_f,\end{aligned}$$

де  $\Phi$  визначене співвідношенням (4).

Моделювання буде однозначним ( $v \equiv 0$ ) при  $\det P > 0$ . За інших умов розв'язок задачі буде неоднозначним.

*Дякуємо за увагу!*