

Теорія різницевих схем. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки

Оноцький В. В.

12 жовтня 2019 р.

Зміст

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 4 Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі | 1 |
| 4.1 Багатошарові чисельні моделі | 1 |
| 4.2 Проблема постановки початкових умов для багатошарових різницевих схем | 2 |
| 4.3 Властивості багатошарових різницевих схем | 3 |
| 4.4 Узгодженість і порядок точності | 4 |
| 4.5 Завдання для самостійної роботи | 6 |

4 Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі

Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі. Методи дослідження. Особливості подання початкових умов. Зведення їх до одношарових. [1, 2]

4.1 Багатошарові чисельні моделі

Нехай крайова задача

$$\frac{\partial \vec{u}(t)}{\partial t} = A\vec{u}, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

апроксимується за допомогою $(q + 1)$ -шарової різницевої схеми

$$B_q \vec{u}^{n+q} + B_{q-1} \vec{u}^{n+q-1} + \dots + B_0 \vec{u}^n = 0, \quad (4.2)$$

де B_q, \dots, B_0 — скінченно—різницеві оператори, а \vec{u}^n — деяка апроксимація $\vec{u}(n\Delta t)$. Припустимо, що рівняння (4.2) разом з відповідними граничними умовами має єдиний розв’язок відносно \vec{u}^{n+q} , залежний від $\vec{u}^{n+q-1}, \dots, \vec{u}^n$. Запишемо еквівалентне до (4.2) рівняння

$$\vec{u}^{n+q} = C_{q-1} \vec{u}^{n+q-1} + \dots + C_0 \vec{u}^n \quad (4.3)$$

де $C_i = C_i(\Delta t) = B_q^{-1} B_i$ — лінійні обмежені оператори, а Δx_j є заданими функціями від Δt .

Уведемо нові залежні змінні: $\vec{v}^n = \vec{u}^{n-1}$, $\vec{w}^n = \vec{v}^{n-1}$ і так далі, тоді рівняння (4.3) замінено системою

$$\vec{u}^{n+1} = C_{q-1}\vec{u}^n + C_{q-2}\vec{v}^n + C_{q-3}\vec{w}^n + \dots, \quad \vec{v}^{n+1} = \vec{u}^n, \vec{w}^{n+1} = \vec{v}^n, \dots \quad (4.4)$$

Якщо \tilde{B} це простір, елементами якого є q -вимірні вектор-стовпчики

$$\vec{\varphi} = (\vec{u}^{n+q-1} \quad \dots \quad \vec{u}^n)^\top$$

з нормою введеною, наприклад, так:

$$\|(\vec{u} \quad \vec{v} \quad \dots)^\top\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \dots}$$

і якщо покласти

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{q-1} & C_{q-2} & \dots & \dots & C_1 & C_0 \\ E & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & E & 0 \end{pmatrix},$$

де E — тотожний оператор, то рівняння (4.4) можна записати так:

$$\vec{\varphi}^{n+1} = \tilde{C}(\Delta t)\vec{\varphi}^n, \quad (4.5)$$

де

$$\vec{\varphi}^n = (\vec{u}^{n+q} \quad \dots \quad \vec{u}^n)^\top. \quad (4.6)$$

Тут \tilde{C} — матриця, яка відповідає системі (4.4).

Тобто $(q+1)$ -шарова різницева задача (4.3) зводиться до системи двошарових схем.

4.2 Проблема постановки початкових умов для багатшарових різницевоїх схем

Початкові дані для диференціальної задачі задаються в момент часу t_0 , а дані для різницевої задачі в точках сітки повинні бути визначені через початкові дані за допомогою апроксимації, яка дозволяє починати обчислення розв'язку за рівнянням (4.3). Припустимо, що значення $\vec{\varphi}$ обчислені точно, тобто

$$\vec{\varphi} = (E((q-1)\Delta t)\vec{u}^0 \quad E((q-2)\Delta t)\vec{u}^0 \quad \dots \quad \vec{u}^0)^\top, \quad (4.7)$$

де $\vec{u}^0 \in B$, а $E(t)$ — розв'язуючий оператор для (4.1). Тоді

$$\tilde{\vec{u}}^0 = (\vec{u}^0 \quad \dots \quad \vec{u}^0)^\top, \quad (4.8)$$

а

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} E((q-1)\Delta t) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & E((q-2)\Delta t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & E \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

— діагональна матриця.

Отже, наближений розв'язок крайової задачі (4.1) визначається формулою

$$\vec{\varphi} = \tilde{C}(\Delta t) \tilde{S} \tilde{u}^0, \quad (4.10)$$

яка є апроксимацією виразу

$$(\vec{u}((n+q-1)\Delta t) \quad \vec{u}((n+q-2)\Delta t) \quad \cdots \quad \vec{u}(n\Delta t))^T = E(n\Delta t) \tilde{S} \tilde{u}^0. \quad (4.11)$$

Порівняємо $\tilde{C}(\Delta t)^n \tilde{S} \tilde{u}^0$ з $E(n\Delta t) \tilde{S} \tilde{u}^0$. При $\Delta t \rightarrow 0$ приходимо до підпростору \tilde{B}^0 простору \tilde{B} , елементами якого є вектори, всі q компонент яких рівні між собою. Тоді

$$(\vec{u}(t) \quad \cdots \quad \vec{u}(t))^T = E(t) (\vec{u}^0 \quad \cdots \quad \vec{u}^0)^T \quad (4.12)$$

До цієї ж границі прямує і $E(n\Delta t) \tilde{S} \tilde{u}^0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ ($\tilde{S} \rightarrow E$). Елементи $\vec{u}(t)$ і \vec{u}^0 належать простору B^0 , але їх апроксимації — ні, вони лежать поза цим простором. При практичних обчисленнях, початкові значення отримуємо не з допомогою обчислення $\vec{\varphi}^0 = \tilde{S} \tilde{u}^0$, а з допомогою апроксимації $\vec{\varphi}^0 = \vec{\psi}$. Для того, щоб наближене значення розв'язку \tilde{u}^n збігалось до точного розв'язку, необхідно, щоб $\vec{u}^n \rightarrow \vec{u}(t)$, а $\vec{\varphi}^0 = \vec{\psi} \rightarrow \vec{u}(0)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ незалежно одне від одного.

4.3 Властивості багатопарових різницевих схем

Означення 4.1. Багатопарову різницеву схему (4.5) називають *стійкою*, якщо для деякого додатного τ при $0 < \Delta t < \tau$ і $0 \leq n\Delta t \leq T$ сім'я операторів $\tilde{C}^n(\Delta t)$ з (4.5) рівномірно обмежена $\forall n$.

Означення 4.2. Важливу роль відіграють *умови узгодженості*, які полягають в тому, що існує щільна в просторі B множина U^0 можливих початкових елементів для точних розв'язків така, що якщо $\vec{u}^0 \in U^0$ та існує $\varepsilon > 0$, таке що, якщо покласти

$$\tilde{\vec{u}}^0 = (E(t)\vec{u}^0 \quad \cdots \quad E(t)\vec{u}^0) \quad (4.13)$$

то

$$\|(\tilde{C}(\Delta t) - E(\Delta t)\tilde{S})\tilde{\vec{u}}(t)\| < \varepsilon\Delta t \quad (4.14)$$

для достатньо малих Δt і $0 \leq t \leq T$.

Означення 4.3. Апроксимація є збіжною, якщо для довільних послідовностей $\Delta_j t$ і n_j , таких що $\Delta_j t > 0$ і $n_j \Delta_j t \rightarrow t$ при $j \rightarrow \infty$, ($0 \leq t \leq T$) та $\forall \vec{u} \in \tilde{B}^0$ буде

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ \vec{\psi} \rightarrow \vec{u}^0}} \left\| \tilde{C}(\Delta_j t)^{n_j} \vec{\psi} - E(t) \vec{u}(t) \right\| = 0. \quad (4.15)$$

Порядок і похибка апроксимації багатопарових різницевих схем визначається звичайним чином.

У [2] доводиться, що істинні такі твердження:

Твердження 4.4

Якщо різницева схема стійка і її похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta t \rightarrow 0$, то умова узгодженості для цієї різницевої схеми виконується.

Твердження 4.5

Для коректно поставленої крайової задачі і її багатопарової апроксимації, яка задовольняє умови узгодженості, стійкість є необхідною і достатньою умовою збіжності.

4.4 Узгодженість і порядок точності

При дослідженні узгодженості і точності різницевих схем бажано різницеві рівняння подати їх у формі

$$B_q \vec{u}^{n+q} + B_{q-1} \vec{u}^{n+q-1} + \dots + B_0 \vec{u}^n = 0, \quad (4.16)$$

де рівняння не розв'язане відносно \vec{u}^{n+q} . Невизначеність внаслідок множення зліва на довільну не вироджену матрицю знімається тим припущенням, що для довільної достатньо гладкої функції $u(t)$ різницевий оператор в лівій частині апроксимує оператор $\frac{\partial}{\partial t} - A$, тобто

$$B_q u(t + q\Delta t) + \dots + B_0 u(t) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right) u(t) = o(1) \quad (4.17)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$.

Означення 4.6. Порядок точності різницевої схеми визначимо як найбільше дійсне число ρ , для якого

$$\|B_q u(t + q\Delta t) + \dots + B_0 u(t)\| = o((\Delta t)^\rho) \quad (4.18)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ для всіх достатньо гладких точних розв'язків диференціального рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$.

Означення 4.7. Вираз у лівій частині (4.18) є *похибкою апроксимації* багатопарової різницевої схеми.

Встановимо зв'язок між узгодженістю та порядком точності різницевих схем. Для цього повернемося до рівняння (4.2) зі сталими коефіцієнтами і умови періодичності розв'язку. Розв'язок задачі виразимо через оператори $C_j = -B_q^{-1}B_j$.

Виходячи з обмеженості операторів C_1, \dots, C_{q-1} та з того, що виконується умова (4.18), можна показати, що $B_q^{-1} = O(\Delta t)$.

Отже у вектора $\tilde{C}(\Delta t)\tilde{S}\tilde{u}(t)$ відмінною від нуля є тільки перша компонента і нам потрібно показати, що при довільному $\varepsilon > 0$:

$$\|(C_{q-1}E((q-1)\Delta t) + \dots + C_0 - E(q\Delta t))u_0(t)\| < \varepsilon\Delta t \quad (4.19)$$

для довільного елемента $u(0)$ з деякої щільної в B множини U^0 і для всіх достатньо малих Δt .

Нехай B_m — підпростір тригонометричних поліномів степеня m з гільбертового простору B періодичних функцій, а u_0 презентує деяку функцію $u_0(\vec{x})$ з B_m . Якщо в рівності (4.18) покласти $u(t) = tu_0$, то

$$Lu_0 = o(1), \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad (4.20)$$

де

$$L = \Delta t(qB_q + (q-1)B_{q-1} + \dots + B_1) - E. \quad (4.21)$$

Оскільки B_m має скінчений базис, кожен елемент якого задовольняє співвідношення (4.20), то для норми оператора L в просторі B_m маємо $\|L\|_m < \varepsilon_1$ для достатньо малих Δt , де ε_1 — довільне додатне число. Тому оператор $E + L$ має обернений в цьому просторі, а саме

$$(E + L)^{-1} = E + M, \quad (4.22)$$

де

$$\|M\|_m < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}. \quad (4.23)$$

Таким чином

$$(qB_q + \dots + B_1)^{-1} = \Delta t(E + M). \quad (4.24)$$

За визначенням $C_j = -B_q^{-1}B_j$, тому

$$B_q^{-1} = (qE - (q-1)C_{q-1} - \dots - C_1)\Delta t(E + M). \quad (4.25)$$

Якщо $u_0 \in B_m$, а A — диференціальний оператор рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \quad (4.26)$$

із сталими коефіцієнтами, то $u(t) \in B_m$. Крім того, для цього розв'язку буде $\frac{\partial u}{\partial t} - Au = 0$, оскільки в силу (4.18)

$$\|(B_qE(q\Delta t) + B_{q-1}E((q-1)\Delta t) + \dots + B_0)u(t)\| < \varepsilon_0 \quad (4.27)$$

для довільного $\varepsilon_0 > 0$ та для всіх достатньо малих Δt .

Помноживши (4.25) на (4.27), одержимо

$$\|(E(q\Delta t) + C_{q-1}E((q-1)\Delta t) + \dots + C_0)u(t)\| < \varepsilon_3\Delta t, \quad (4.28)$$

де

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_0 \|I + M\|_m \max_{0 < \Delta t < \tau} \|qE - (q-1)C_{q-1} - \dots - C_0\|. \quad (4.29)$$

Максимум, який входить в останню рівність існує, оскільки ми припустили, що різницеві рівняння стійкі. Звідси випливає, що оператори $C_{q-1}(\Delta t), \dots, C_1(\Delta t)$ рівномірно обмежені при $0 < \Delta t < \tau$.

Нерівність вигляду (4.28) має місце для довільного розв'язку, який належить B_m . Якщо розглянути всі можливі підпростори B_m з простору B , то можливі початкові елементи $u(0)$ для цих розв'язків утворюють щільну множину в B .

Отже, доведено:

Теорема 4.8

Якщо різницева схема стійка і похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta t \rightarrow 0$, то умова узгодженості (4.4) виконується.

4.5 Завдання для самостійної роботи

Побудувати та дослідити тришарові явні та неявні різницеві схеми для рівнянь параболічного та гіперболічного типів другого порядку

Література

- [1] Грищенко and Ляшко, *Методи Фур'є та першого диференціального наближення в теорії різницевих схем*. ВПЦ Київський університет, 2005.
- [2] Рихтмайер and Мортон, *Разностные методы решения краевых задач*. Мир, 1972.