Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

13 жовтня 2019 р.

Зміст

1.3 Початкові значення

1.3.1 Початкові значення інтегралу

Дослідимо, за яких умов початкове значення інтегралу ($(I_0^\alpha f)(t) = o(1)$) дорівнює нулю.

Теорема 1.40

Нехай $\alpha > 0$, $p > 1/\alpha$, $p \geq 1$, $f \in L_p((0,T))$. Тоді $(I_0^\alpha f)(t) = o(t^{\alpha - 1/p})$ при $t \to 0$.

Доведення.

$$
\begin{aligned}
|(I_0^\alpha f)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s| \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s \right)^{1/p} \left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)q}\,\mathrm{d}s \right)^{1/q} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s \right)^{1/p} \left(\frac{t^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right)^{1/q} = \\
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s \right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1+1/q}}{c(\alpha,p)} =
\end{aligned}
$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

$$= \left(\int_0^t |f(s)|^p \,\mathrm{d}s\right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1/p}}{c(\alpha,p)} =$$
$$= o(t^{\alpha-1/p}),$$

де останній перехід справджується адже $\int_0^t |f(s)|^p \,\mathrm{d}s = o(1)$ при $t \to 0$ □

Зауваження 1.41 (абсолютна неперервність інтеграла Лебега) — Якщо $f \in L_1$ то

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall A : \mu(A) < \delta(\varepsilon)) \quad \int_A f \,\mathrm{d}\mu \le \varepsilon. \tag{1.48}$$

Зауваження 1.42 (інтегральна нерівність Коші-Буняковського) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \le \|f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2}. \tag{1.49}$$

Зауваження 1.43 (інтегральна нерівність Гельдера) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \le \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}, \tag{1.50}$$

де $1/p + 1/q = 1$.

Зауваження 1.44 — Умова $p > 1/\alpha$ необхідна для збіжності усіх інтегралів з доведення

Наслідок 1.45
При $\alpha > 1/p$ маємо $(I_0^\alpha f)(t) = o(1)$, тобто $(I_0^\alpha f)(0) = 0$.

Вправа 1.46. Наведіть приклад f для якої $(I_0^\alpha f)(0) \ne 0$ (але і не ∞).

Приклад 1.47

Розглянемо $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на $[0,1]$. Можна показати, що

$$\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 2, \tag{1.51}$$

тому $f \in L_1((0,1))$. З іншого боку,

$$\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \infty, \tag{1.52}$$

тому $f \notin L_2((0,1))$. Це означає, що $1 < p < 2$. Тоді нерівність $p > 1/\alpha$ з умов теореми не буде виконуватися, для $\alpha \le \frac{1}{2}$. Зокрема, виникають певні сподівання на $\alpha = \frac{1}{2}$. Розглянемо $(I_0^{1/2} f)(t)$:

$$(I_0^{1/2} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}} = \frac{\pi}{\Gamma(1/2)} = \sqrt{\pi}. \tag{1.53}$$

Як бачимо, отриманий вираз не просто не прямує до нуля при $t \to 0$, а взагалі не залежить від t, тобто наші сподівання не були марні і $(I_0^{1/2} f)(0) = \sqrt{\pi} \ne 0$ (але і не ∞).

1.3.2 Початкові значення похідних

Теорема 1.48

Нехай $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^{n-1}([0,T])$, $p > \frac{1}{n-\alpha}$, $f^{(n)} \in L_p([0,T])$. Тоді $(D_0^\alpha)(0) = 0 \iff f^{(k)}(0) = 0$ при $k = \overline{0, n-1}$.

Розв'язання. *Доведення.* За умов теореми

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\,\mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{1.54}$$

($\Longleftarrow$) У формулі вище інтеграл дорівнює нулю за першою сьогоднішньою теоремою, а уся сумма зануляється за умовою теореми.

($\Longrightarrow$) Домножатимемо (1.54) на $t^{\alpha-k}$ для $k = \overline{0, n-1}$. Наприклад, для $k = 0$ матимемо

$$t^\alpha (D_0^\alpha f)(t) = t^\alpha ({}^\star D_0^\alpha f)(t) + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) t^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{1.55}$$

Бачимо, що $t^\alpha ({}^\star D_0^\alpha f)(t) = o(1)$, всі доданки суми нескінченно малі, тому $f(0) = 0$. Далі за індукцією по k отримуємо рівність нулеві усіх похідних до $(n-1)$-ої. $\square$

Зауваження 1.49 — При $0 < \alpha < 1$ маємо $(D_0^\alpha 1)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \neq 0$.

Зауваження 1.50 — Але $({}^\star D_0^\alpha 1)(t) = 0$.

Теорема 1.51
Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^n([0,T])$, тоді $D_0^\alpha f \equiv 0 \iff f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}$ — дробовий многочлен.

Доведення.

Вправа 1.52. ($\Longrightarrow$) За умов теореми

$$0 = (I_0^\alpha 0)(t) = (I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}, \tag{1.56}$$

звідки

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}, \tag{1.57}$$

і, перепозначаючи $c_k = \frac{D_0^{\alpha-k-1} f)(0)}{\Gamma(\alpha-k)}$, отримуємо якраз ту форму для f, яку хотіли.

($\Longleftarrow$) Нехай

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}, \tag{1.58}$$

тоді

$$D_0^\alpha f = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^{n-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{\alpha-k-1} \right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(n-k)} t^{n-k-1} = 0. \tag{1.59}$$

□

Теорема 1.53 (похідна добутку)
Нехай f, g — аналітичні в $(-h, h)$. Тоді для $t \in (0, h/2)$

$$D^\alpha (f \cdot g)(t) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\alpha} D_0^k f(t) \cdot D_0^{\alpha-k} f(t), \tag{1.60}$$

де

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\alpha-k-1)}. \tag{1.61}$$

Теорема 1.54 (Тарасова)
Нехай $0 < \alpha < 1$, тоді D^α — лінійний оператор, що задовольняє умову

$$D^\alpha(f \cdot g) = D^\alpha f \cdot g + f \cdot D^\alpha g. \tag{1.62}$$

Тоді $\exists p(t)$: $(D_0^\alpha f)(t) = p(t) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

1.4 Перетворення Лапласа дробовах інтегралів і похідних

Означення 1.55. Нехай $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, тоді

$$\mathscr{L}[f](\eta) = \overline{f}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.63}$$

Лема 1.56 (перетворення Лапласа похідної)

$$\mathscr{L}[f'](\eta) = \eta \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - f(0). \tag{1.64}$$

Доведення. Інтегруємо частинами. □

Лема 1.57 (перетворення Лапласа згортки)

$$\mathscr{L}[f \star g](\eta) = \mathscr{L}[f](\eta) \cdot \mathscr{L}[g](\eta). \tag{1.65}$$

Доведення. Змінюємо порядок інтегрування. □

Лема 1.58 (перетворення Лапласа степеневої функції)

$$\mathscr{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1-\beta)\eta^{\beta-1}. \tag{1.66}$$

Доведення. За означенням

$$\mathscr{L}[t^{-\beta}](\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta}. \tag{1.67}$$

Зробимо заміну змінних: $\eta t = \xi$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\xi/\eta$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} &= \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta} \frac{1}{\eta}\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \eta^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{-\beta}\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \eta^{\beta-1}\Gamma(1-\beta). \end{aligned} \tag{1.68}$$

$\square$

Лема 1.59 (перетворення Лапласа інтегралу дробового порядку)

$$\mathscr{L}[I_0^\alpha f](\eta) = \eta^{-\alpha}\mathscr{L}[f](\eta). \tag{1.69}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[I_0^\alpha f](\eta) &= \mathscr{L}[f \star y_\alpha](\eta) = \\ &= \mathscr{L}[f](\eta) \cdot \mathscr{L}[y_\alpha](\eta) = \\ &= \mathscr{L}[f](\eta) \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(1-(1-\alpha))\eta^{-\alpha} = \\ &= \eta^{-\alpha}\mathscr{L}[f](\eta).\end{aligned} \tag{1.70}$$

$\square$

Лема 1.60 (перетворення Лапласа похідної Рімана-Ліувіля)

$$\mathscr{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathscr{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1}(D_0^{\alpha-k-1}f)(0)\eta^k. \tag{1.71}$$

Приклад 1.61

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathscr{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathscr{L}[f](\eta) - (I_0^{\alpha-1}f)(0). \tag{1.72}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[D_0^\alpha f](\eta) &= \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_0^{1-\alpha}f\right](\eta) = \\ &= \eta \cdot \mathscr{L}[I_0^{1-\alpha}f](\eta) - (I_0^{1-\alpha}f)(0) = \\ &= \eta \cdot \eta^{\alpha-1} \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha}f)(0) = \\ &= \eta^\alpha \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha}f)(0).\end{aligned} \tag{1.73}$$

$\square$

Лема 1.62 (перетворення Лапласа похідної Катупо)

$$\mathscr{L}\left[{}^\star D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\eta^{\alpha-k-1}. \tag{1.74}$$

Приклад 1.63

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathscr{L}\left[{}^\star D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - \eta^{\alpha-1} \cdot f(0). \tag{1.75}$$

Вправа 1.64. Довести.

Доведення.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left[{}^\star D_0^\alpha f\right](\eta) &= \mathscr{L}\left[I_0^{1-\alpha}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right](\eta) = \\
&= \eta^{\alpha-1} \cdot \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right](\eta) = \\
&= \eta^{\alpha-1} \cdot \Big(\eta \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - f(0)\Big) = \\
&= \eta^\alpha \cdot \mathscr{L}[f](\eta) - \eta^{\alpha-1} \cdot f(0).
\end{aligned} \tag{1.76}$$

□