Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

1 жовтня 2019 р.

Зміст

1.3 Початкові значення

1.3.1 Початкові значення інтегралів

Дослідимо, за яких умов початкове значення інтегралу дорівнює нулю.

Теорема 1.3.1
Нехай $\alpha > 0$, $p > 1/\alpha$, $p \geqslant 1$, $f \in L_p((0,T))$. Тоді $(I_0^\alpha f)(t) = o(t^{\alpha - 1/p})$ при $t \to 0$.

Доведення.

$$
\begin{aligned}
|(I_0^\alpha f)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s \right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s \right)^{1/p} \left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)q}\,\mathrm{d}s \right)^{1/q} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s \right)^{1/p} \left(\frac{t^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right)^{1/q} = \\
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s \right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1+1/q}}{c(\alpha,p)} = \\
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s \right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1/p}}{c(\alpha,p)} = \\
&= o(t^{\alpha-1/p}),
\end{aligned}
\tag{1.3.1}
$$

де останній перехід справджується адже $\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s = o(1)$ при $t \to 0$. □

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Нагадування 1.3.2 —

Твердження 1.3.3 (абсолютна неперервність інтеграла Лебега)
Якщо $f \in L_1$ то

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall A : \mu(A) < \delta(\varepsilon)) \quad \int_A f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon. \tag{1.3.2}$$

Нерівність 1.3.4 (Коші-Буняковського, інтегральна)
Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2}. \tag{1.3.3}$$

Нерівність 1.3.5 (Гельдера, інтегральна)
Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}, \tag{1.3.4}$$

де $1/p + 1/q = 1$.

Зауваження 1.3.6 — Умова $p > 1/\alpha$ необхідна для збіжності усіх інтегралів з доведення

Наслідок 1.3.7
При $\alpha > 1/p$ маємо $(I_0^\alpha f)(t) = o(1)$, тобто $(I_0^\alpha f)(0) = 0$.

Вправа 1.3.8. Наведіть приклад f для якої $(I_0^\alpha f)(0) \neq 0$ (але і не ∞).

1.3.2 Початкові значення похідних

Теорема 1.3.9
Нехай $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^{n-1}([0,T])$, $p > \frac{1}{n-\alpha}$, $f^{(n)} \in L_p([0,T])$. Тоді $(D_0^\alpha)(0) = 0 \iff f^{(k)}(0) = 0$ при $k = \overline{0, n-1}$.

Доведення. За умов теореми

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} \, \mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) \cdot t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{1.3.5}$$

($\Longleftarrow$) У формулі вище інтеграл дорівнює нулю за першою сьогоднішньою теоремою, а уся сумма зануляється за умовою теореми.

($\Longrightarrow$) Домножатимемо (1.3.5) на $t^{\alpha-k}$ для $k = \overline{0, n-1}$. Наприклад, для $k = 0$ матимемо

$$t^\alpha (D_0^\alpha f)(t) = t^\alpha ({}^\star D_0^\alpha f)(t) + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) \cdot t^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{1.3.6}$$

Бачимо, що $t^\alpha ({}^\star\mathcal{D}_0^\alpha f)(t) = o(1)$, всі доданки суми нескінченно малі, тому $f(0) = 0$. Далі за індукцією по k отримуємо рівність нулеві усіх похідних до $(n-1)$-ої. $\square$

Зауваження 1.3.10 — При $0 < \alpha < 1$ маємо $(D_0^\alpha \mathbf{1})(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \neq 0$.

Зауваження 1.3.11 — Але $({}^\star\mathcal{D}_0^\alpha \mathbf{1})(t) = 0$.

Теорема 1.3.12

Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^n([0,T])$, тоді

$$D_0^\alpha f \equiv 0 \iff f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1} \tag{1.3.7}$$

— дробовий многочлен.

Доведення.

Вправа 1.3.13. $(\Longrightarrow)$

$(\Longleftarrow)$ Нехай

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}, \tag{1.3.8}$$

тоді

$$D_0^\alpha f = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^{n-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{\alpha-k-1} \right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(n-k)} \cdot t^{n-k-1} = 0. \tag{1.3.9}$$

$\square$

Теорема 1.3.14 (похідна добутку)

Нехай f, g — аналітичні в $(-h,h)$. Тоді для $t \in (0, h/2)$

$$(D_0^\alpha (f \cdot g))(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\alpha} (D_0^k f)(t) (D_0^{\alpha-k} f)(t), \tag{1.3.10}$$

де

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(\alpha-k-1)}. \tag{1.3.11}$$

Теорема 1.3.15 (Тарасова)

Нехай $0 < \alpha < 1$, тоді D_0^α — лінійний оператор, що задовольняє умову

$$D_0^\alpha (f \cdot g) = D_0^\alpha f \cdot g + f \cdot D_0^\alpha g. \tag{1.3.12}$$

Тоді $\exists p(t)$: $(D_0^\alpha f)(t) = p(t) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.