Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

22 жовтня 2019 р.

Зміст

2.1 Рівняння субдифузії

2.1.1 Виведення рівняння

Розглянемо випадкове блукання із щільностями

$$\psi(t) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}}, \tag{2.1.1}$$

при $t \to +\infty$, де $\alpha \in (0,1)$, $\tau > 0$, та

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right\}. \tag{2.1.2}$$

Згадуємо наслідок з теореми Таубера для $A = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$:

$$\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta) \sim 1 - \tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha) \tag{2.1.3}$$

Крім того

$$\mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega) \sim 1 - \sigma^2\omega^2 + O(\omega^4). \tag{2.1.4}$$

Застосовуємо формулу Монтрола-Вайса

$$\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta) = \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta} \frac{\tau^\alpha\eta^\alpha + o(\eta^\alpha)}{1 - (1-\tau^\alpha\eta^\alpha + o(\eta^\alpha))(1-\sigma^2\omega^2 + O(\omega^4))} \sim \tag{2.1.5}$$

якщо $\eta \to 0$ і $\omega \to 0$ у певному розумінні “синхронно”, то $\eta^\alpha\omega^2 = o(\eta^\alpha + \omega^2)$, а тому

$$\sim \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta} \frac{\tau^\alpha\eta^\alpha}{\tau^\alpha\eta^\alpha + \sigma^2\omega^2} = \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta} \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^\alpha}\eta^{-\alpha}\omega^2 = \frac{\mathscr{F}[u_0](\omega)}{\eta}\frac{1}{1+K_\alpha\eta^{-\alpha}\omega^2}}. \tag{2.1.6}$$

Отже, з точністю до малих доданків,

$$\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta) \cdot (1 + K_\alpha\eta^{-\alpha}\omega^2) = \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta}, \tag{2.1.7}$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, `andriy.hul@gmail.com`

або ж,

$$\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta)-\frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta}=-K_\alpha\eta^{-\alpha}\omega^2\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta). \tag{2.1.8}$$

Оскільки

$$\mathscr{F}\left[g'\right](\omega)=(-i\omega)\mathscr{F}\left[g\right](\omega), \tag{2.1.9}$$

і, відповідно,

$$\mathscr{F}\left[g^{(k)}\right](\omega)=(-i\omega)^k\mathscr{F}\left[g\right](\omega), \tag{2.1.10}$$

то

$$-\omega^2\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta)=\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2\mathscr{L}\left[u\right](x,\eta)}{\partial x^2}\right] \tag{2.1.11}$$

Тому маємо

$$\mathscr{L}\left[u\right](x,\eta)-\frac{u_0(x)}{\eta}=K_\alpha\eta^{-\alpha}\frac{\partial^2\mathscr{L}\left[u\right](x,\eta)}{\partial x^2}, \tag{2.1.12}$$

звідки

Рівняння 2.1.1 (субдифузії, інтегральне)

$$u(x,t)-u_0(x)=K_\alpha I_0^\alpha\left(\frac{\partial^2u(xt)}{\partial x^2}\right), \tag{2.1.13}$$

або

Рівняння 2.1.2 (субдифузії, диференціальне, перша форма)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K_\alpha D_0^{1-\alpha}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right), \tag{2.1.14}$$

з початковою умовою $u(x,0)=u_0(x)$,

або ж

Рівняння 2.1.3 (субдифузії, диференціальне, друга форма)

$${}^{\star}D_0^\alpha u=K_\alpha\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x^2}, \tag{2.1.15}$$

з початковою умовою $u(x,0)=u_0(x)$.

Зауваження 2.1.4 — Випадкове блукання зз неперервним часом із

$$\psi(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \tag{2.1.16}$$

(показниковий розподіл) і з

$$\lambda\sim N(0,2\sigma^2) \tag{2.1.17}$$

призвело б до класичного параболічного рівняння.

2.1.2 Аналіз рівняння

Означення 2.1.5. $\mathsf{E}[(x(t)-x(0))^2] = \langle (x(t)-x(0))^2 \rangle$ — *середньо-квадратичне зміщення* (якщо $x(0)=0$, то $\langle x^2(t) \rangle$).

Лема 2.1.6

Якщо

$$\psi(t) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}}, \tag{2.1.18}$$

при $t \to +\infty$ то

$$\langle n(t) \rangle \sim \frac{t^\alpha}{\tau^\alpha \cdot \Gamma(1+\alpha)}. \tag{2.1.19}$$

Доведення.

$$\langle n(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \mathsf{P}\{n(t)=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\int_0^t (\psi^{\star k}(s) - \psi^{\star(k+1)}(s)) \, \mathrm{d}s \right). \tag{2.1.20}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\langle n \rangle](\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\eta} ((\mathscr{L}[\psi](\eta))^k - (\mathscr{L}[\psi](\eta))^{k+1}) = \\
&= \frac{1-\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} k (\mathscr{L}[\psi](\eta))^k = \\
&= \frac{1-\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\mathscr{L}[\psi]'(\eta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} (\mathscr{L}[\psi](\eta))^k = \\
&= \frac{1-\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta} \frac{\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\mathscr{L}[\psi]'(\eta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathscr{L}[\psi](\eta))^k = \\
&= \frac{\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta \cdot (1-\mathscr{L}[\psi](\eta))}.
\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Оскільки

$$\mathscr{L}[\psi](\eta) = 1 - \tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha), \tag{2.1.22}$$

то

$$\mathscr{L}[\langle n \rangle](\eta) = \frac{1 - \tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha)}{\eta \cdot (\tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha))} \underset{n \to 0}{\sim} \frac{1}{\tau^\alpha \eta^{\alpha+1}}. \tag{2.1.23}$$

Застосовуємо "зворотню" теорему Таубера для $\beta = -\alpha$ отримуємо

$$\langle n(t) \rangle \sim \frac{t^\alpha}{\tau^\alpha \cdot \Gamma(1+\alpha)}. \tag{2.1.24}$$

□

Наслідок 2.1.7

Якщо $x(0)=0$, то

$$\langle x(t)^2 \rangle = 2\sigma^2 \langle n(t) \rangle \sim \frac{2\sigma^2 t^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)} = \frac{2K_\alpha t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{2.1.25}$$

Означення 2.1.8. Якщо у випадкового (дифузійного) процесу середньоквадратичне зміщення зростає повільніше ніж лінійна функція ($\langle x(t)^2 \rangle = o(t)$), то процес називається *субдифузійним.*

Означення 2.1.9. Якщо у випадкового (дифузійного) процесу середньоквадратичне зміщення зростає швидше ніж лінійна функція ($t = o(\langle x(t)^2 \rangle)$), то процес називається *супердифузійним.*

Означення 2.1.10. Якщо ж у випадкового (дифузійного) процесу середньоквадратичне зміщення зростає так само як лінійна функція, то процес називається *нормально-дифузійним.*

Зауваження 2.1.11 — $\langle x^2(t) \rangle$ — середньоквадратичне зміщення, усереднене за сукупністю частинок (eng. *ensemble-averaged*).

Інший підхід — усереднення за часом:

$$\overline{\delta^2(t,T)} = \frac{1}{T-t}\int_0^{T-t} (x(s+t) - x(s))^2 \, \mathrm{d}s, \tag{2.1.26}$$

де t — часове вікно, T — загальна тривалість спостереження.

$$\overline{\delta^2(t,T)} = \frac{1}{T-t}\int_0^{T-t} (x(t+s) - x(s))^2 \, \mathrm{d}s \tag{2.1.27}$$

— усереднене зміщення (за часом). Усереднимо за сукупністю частинок:

$$\begin{aligned} \overline{\langle \delta^2(t,T) \rangle} &= \frac{1}{T-t}\int_0^{T-t} \langle (x(t+s) - x(s))^2 \rangle \, \mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{T-t}\int_0^{T-t} 2\sigma^2 \langle (n(t+s) - n(s))^2 \rangle \, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.1.28}$$

За умов, що $t \to \infty$, $T \to \infty$ і $T \gg t$ маємо

$$\langle n(t) \rangle \sim \frac{1}{\tau^\alpha \cdot \Gamma(1+\alpha)} t^\alpha, \tag{2.1.29}$$

а тому попередній вираз асимптотично рівний

$$\frac{2\sigma^2}{T-t}\int_0^{T-t} \frac{1}{\tau^\alpha \cdot \Gamma(1+\alpha)} \cdot ((s+t)^\alpha - s^\alpha) \, \mathrm{d}s. \tag{2.1.30}$$

У свою чергу, можемо переписати $(s+t)^\alpha - s^\alpha$ за рядом Тейлора:

$$(s+t)^\alpha - s^\alpha = s^\alpha \left(1 + \frac{t}{s}\right)^\alpha - s^\alpha \sim s^\alpha \left(1 + \frac{\alpha t}{s}\right) - s^\alpha = \frac{\alpha t}{s^{1-\alpha}}, \tag{2.1.31}$$

а тому попередній вираз асимптотично рівний

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma^2}{T-t} \cdot \frac{\alpha t}{\Gamma(1+\alpha) \cdot \tau^\alpha} \int_0^{T-t} s^{\alpha-1} \, \mathrm{d}s &= \frac{2\sigma^2 \alpha t}{(T-t) \cdot \Gamma(1+\alpha) \cdot \tau^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot (T-t)^\alpha = \\ &= \frac{2\sigma^2 t}{\Gamma(1+\alpha)\tau^\alpha} \cdot (T-t)^{\alpha-1} \sim \frac{2K_\alpha}{\Gamma(1+\alpha) \cdot T^{1-\alpha}} t, \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

тобто отримали лінійну функцію від t.

Означення 2.1.12. Ситуація, у якій $\langle x^2(t)\rangle$ і $\overline{\langle\delta^2(t,T)\rangle}$ мають різний вигляд як функції змінної t називається *слабкою неергодичністю* (*eng.* weak ergodicity breaking).

Зауваження 2.1.13 — В обмеженій області

$$\langle x^2(t)\rangle = c_1, \quad t \to \infty, \tag{2.1.33}$$

$$\langle\delta^2(t,T)\rangle = c_2 t^{1-\alpha}, \quad t \to \infty, \tag{2.1.34}$$

де c_1, c_2 — певні (можливо різні) константи.