Теорія рядів Фур'є

Молодцов О. І.*

23 жовтня 2019 р.

Зміст

1.10 Рівномірна збіжність

Теорема 1.10.1 (про рівномірну збіжність ряду Фур'є)
Нехай функція f неперервна, кусково-гладка на проміжку $[-\pi, \pi]$ і $f(-\pi) = f(\pi)$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається на цьому проміжку до f рівномірно.

Доведення. Скористаємося ознакою Вейєрштрасса. Наш функціональний ряд мажорується наступним чином:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \prec \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n). \tag{1.10.1}$$

Досліджуємо останній числовий ряд починаючи з $n = 1$ (збіжність/розбіжність ряду не залежить від сталої a_0):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\sin nx = \ldots \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{b_n'}{n}, \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

*Молодцов Олександр Ілліч, semol2006@ukr.net

де $b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$ — b_n для функції f'. Аналогічно,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\cos nx = \ldots \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{a'_n}{n}, \end{aligned} \tag{1.10.3}$$

де $a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ — a_n для функції f'.

Поєднуючи, маємо

$$|a_n| + |b_n| = \tfrac{1}{n}\left(|a'_n| + |b'_n|\right). \tag{1.10.4}$$

Далі

$$\tfrac{1}{n}\cdot|a'_n| + \tfrac{1}{n}\cdot|b'_n| \le \tfrac{1}{2}\left((a'_n)^2 + \tfrac{1}{n^2}\right) + \tfrac{1}{2}\left((b'_n)^2 + \tfrac{1}{n^2}\right) = \tfrac{1}{2}\left((a'_n)^2 + (b'_n)^2\right) + \tfrac{1}{n^2}. \tag{1.10.5}$$

Остаточно, $f' \in R([-\pi,\pi])$, тому для неї виконується нерівність Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((a'_n)^2 + (b'_n)^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.10.6}$$

Тому $\sum\left((a'_n)^2 + (b'_n)^2\right) < \infty$. Враховуючи, що ряд $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, тобто також збіжний, отримуємо збіжність досліджуваного числового ряду. □

1.11 Швидкість збіжності

Теорема 1.11.1 (про зв'язок степеню гладкості і швидкості збіжності ряду Фур'є) Якщо $f \in C^{(m)}([-\pi,\pi])$ і $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$, $k = \overline{0,m}$ і $f^{(m+1)}$ кусково-неперервна на $[-\pi,\pi]$, то виконуються співвідношення

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \tag{1.11.1}$$

а також

$$\sum n^k\left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty, \quad k = \overline{0,m}. \tag{1.11.2}$$

Доведення. Аналогічно доведенню попередньої теореми, багатократно інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \ldots = \\ &= \pm\frac{1}{n^{m+1}}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x)\begin{Bmatrix}\cos nx\\ \sin nx\end{Bmatrix}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.11.3}$$

Аналогічним чином можна отримати наступне співвідношення

$$b_n = \pm \frac{1}{n^{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) \begin{Bmatrix} \sin nx \\ \cos nx \end{Bmatrix} \mathrm{d}x \tag{1.11.4}$$

Звідси маємо

$$|a_n| = \begin{Bmatrix} \dfrac{\left|a_n^{(m+1)}\right|}{n^{m+1}} \\ \dfrac{\left|b_n^{(m+1)}\right|}{n^{m+1}} \end{Bmatrix}, \quad |b_n| = \begin{Bmatrix} \dfrac{\left|b_n^{(m+1)}\right|}{n^{m+1}\pi} \\ \dfrac{\left|a_n^{(m+1)}\right|}{n^{m+1}\pi} \end{Bmatrix}. \tag{1.11.5}$$

Поєднучи, отримуємо

$$|a_n| + |b_n| = \frac{1}{n^{m+1}} \left(\left|a_n^{(m+1)}\right| + \left|b_n^{(m+1)}\right|\right) \tag{1.11.6}$$

$f^{(m+1)} \in R([-\pi, \pi])$, тому для неї виконується нерівність Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n^{(m+1)}\right)^2 + \left(b_n^{(m+1)}\right)^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f^{(m+1)}(x)\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{1.11.7}$$

Тому $a_n^{(m+1)}, b_n^{(m+1)} \to 0$, тобто $a_n^{(m+1)}, b_n^{(m+1)} = o(1)$,

$$a_n, b_n = \frac{o(1)}{n^{m+1}} = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right). \tag{1.11.8}$$

Вправа 1.11.2. Довести, що

$$\sum n^m \left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty \tag{1.11.9}$$

аналогічним чином.

□

Зауваження 1.11.3 — Збіжність рядів

$$\sum n^k \left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty, \quad k = \overline{0, m} \tag{1.11.10}$$

означає, що ряд Фур'є можна почленно диференціювати m разів, і він буде рівномірно збігатися до m-ої похідної.

Твердження 1.11.4

n-залишок ряду Фур'є має асиптотику $O\left(\frac{1}{n^{m+1/2}}\right)$.

Доведення. Прості перетворення:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right|\le\\
&\le\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)=\\
&=\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{n^{(m+1)}}\left(\left|a_n^{(m+1)}\right|+\left|b_n^{(m+1)}\right|\right)\overset{\text{CS}}{\le}\\
&\le\sqrt{\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m+2}}}\cdot\sqrt{2\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\left(a_n^{(m+1)}\right)^2+\left(b_n^{(m+1)}\right)^2\right)}\le\\
&\le\sqrt{\int_{n_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2m+2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f^{(m+1)}(x)\right)^2\mathrm{d}x}=\\
&=\sqrt{\frac{A}{n_0^{2m+1}}}=O\left(\frac{1}{n^{m+1/2}}\right).
\end{aligned}\tag{1.11.11}$$

□

2 Інтеграл та перетворення Фур'є

2.1 Визначення інтегралу Фур'є

Означення 2.1.1. Невласний інтеграл

$$\int_0^{\infty}(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)\,\mathrm{d}x,\quad x\in\mathbb{R}.\tag{2.1.1}$$

називається *тригонометрчиним інтегралом.*

Якщо f абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty,\tag{2.1.2}$$

то, виходячи з порівняльних ознак

$$|f(x)\cos\lambda x|,|f(x)\sin\lambda x|\le|f(x)|,\tag{2.1.3}$$

отримуємо, що функції

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x,\tag{2.1.4}$$

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x,\tag{2.1.5}$$

$$(2.1.6)$$

визначені для довільного λ на $[0, \infty)$.

Означення 2.1.2. Якщо f абсолютно збіжна на $\mathbb{R}$, то

$$\int_0^{\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.7}$$

називається *інтегралом Фур'є* якщо $a(\lambda), b(\lambda)$ обчислюються за формулами вище.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\cos\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\lambda = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\lambda. \tag{2.1.8}$$

Твердження 2.1.3 (ознака Діні збіжності інтегралу Фур'є)
Якщо f абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$ і $\forall x \in \mathbb{R}$ вона задовольняє умови Діні, то її інтеграл Фур'є збігається в кожній точці $\mathbb{R}$ до числа $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Доведення. Використаємо отримане вище зображення ряду Фур'є. Нам необхідно показати, що

$$\exists \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{A}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\lambda \overset{?}{=} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{2.1.9}$$

Позначимо виписану вище функцію як $\mathcal{J}(A)$. Змінимо в ній порядок інтегрування, отримаємо

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(A) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_0^{A}\cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\frac{1}{t-x}\sin\lambda(t-x)\Big|_0^A\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Вправа 2.1.4. Завершити доведення.

□