Теорія рядів Фур'є

Молодцов О. І.*

10 жовтня 2019 р.

Зміст

1 Тригонометричний ряд Фур'є

1.1 Визначення тригонометричного ряду Фур'є

Теорема 1.1 (інтеграл від періодичної функції)
Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — T-періодична на $\mathbb{R}$ і $f \in L([0,T])$. Тоді $\forall \{a,b\} \subset \mathbb{R}$: $f \in L([a,b])$ і

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.1.1)$$

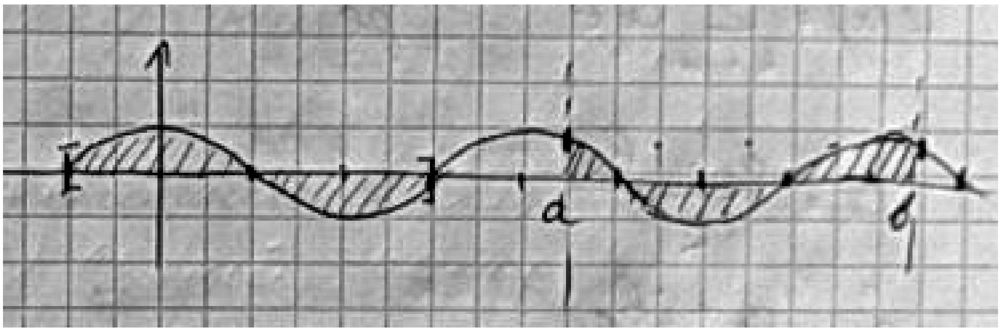

Рис. 1: Геометрична інтерпретація теореми: заштриховані площі рівні

Доведення. Спочатку доведемо, що f інтегровна на $[a,b]$ для довільних a і b.

*Молодцов Олександр Ілліч, semol2006@ukr.net

З періодичності f маємо інтегровність f на сегментах вигляду $[kT, (k+1)T]$ для довільного цілого k:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x+kT)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.2}$$

Зауваження 1.2 — Аналогічно можна отримати, що $f \in L([kT, mT])$ для довільних цілих $k < m$, причому

$$\int_{kT}^{mT} f(x)\,\mathrm{d}x = (m-k)\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.3}$$

Далі, нехай k — таке, що $kT \le a < (k+1)T$:

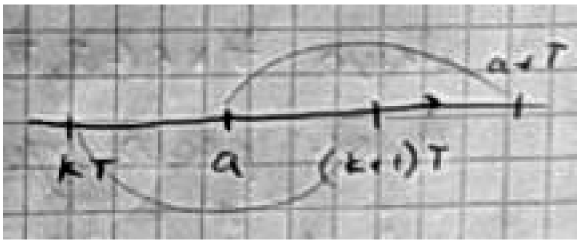

Рис. 2: Ілюстрація вибору k

Тоді, з адитивності інтегралу як функції множини, маємо:

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{(k+1)T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kT}^{a} f(x+T)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kT}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

а цей інтеграл рівний бажаному. □

Зауваження 1.3 — Якщо $f(x)$ — T-періодична, то $f(\frac{Tx}{2\pi})$ — 2π-періодична. Справді:

$$f\left(\frac{T(x+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right). \tag{1.1.5}$$

Означення 1.4. $\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$ — *основна тригонометрична система.*

Означення 1.5. Довільна скінченна лінійна комбінація функцій основної тригонометричної системи — *тригонометричний многочлен*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.1.6}$$

Формула 1.6 (Ейлера)
Виконуються наступні співвідношення:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{1.1.7}$$

З використанням формули Ейлера можемо записати тригонометрчиний многочлен у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right), \tag{1.1.8}$$

або ж у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{1.1.9}$$

де

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \tag{1.1.10}$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \tag{1.1.11}$$

а також $b_0 = 0$.

Теорема 1.7 (обчислення коефіцієнтів тригонометричного многочлена)
Якщо $\forall x \in (-\pi, \pi)$ виконується (1.1.9), то коефіцієнти c_k цього тригонометричного многочлена обчислюються наступним чином:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x, \quad k = \overline{-n, n}. \tag{1.1.12}$$

Доведення. $\forall m = \overline{-n, n}$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)x} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

З інтегралів, що знаходяться у сумі лише один не рівний нулеві, а саме той, для якого $k = m$. При $k = m$ відповідний інтеграл дорівнює 2π, а тому

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} c_m(2\pi) = c_m. \tag{1.1.14}$$

□

Наслідок 1.8

Якщо $\forall x \in (-\pi, \pi)$ виконується (1.1.9), то коефіцієнти a_k, b_k цього тригонометричного многочлена обчислюються наступним чином:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \tag{1.1.15}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.16}$$

Доведення. Справді, співвідношення (1.1.10), (1.1.11) можна переписати у вигляді

$$a_k = c_k + c_{-k}, \tag{1.1.17}$$

$$b_k = \frac{c_{-k} - c_k}{i}. \tag{1.1.18}$$

Підставляючи у ці співвідношення результат теореми, отримуємо

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-ikx} + e^{ikx})\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{e^{-ikx} + e^{ikx}}{2}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

а також

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{ikx} - e^{-ikx})\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.1.20}$$

□

Означення 1.9. Функціональний ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{-\infty}^{\infty}(a_k \cos kx+b_k \sin kx)$ називається *тригонометричним рядом.*

Означення 1.10. Якщо коефіцієнти тригонометричного ряду обчислені за формулами (1.1.15), (1.1.16), то ряд називається *тригонометричним рядом Фур'є* функції $f(x)$, а його коефієнти — *коеіцієнтами Фур'є.*

Зауваження 1.11 — У комплексій формі коефіцієнти Фур'є мають вигляд:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1.21}$$

а сам ряд —

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{1.1.22}$$

Вправа 1.12. Нехай $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$. Обчисліть її коефіцієнти Фур'є (декілька перших).

Теорема 1.13 (ряд Фур'є рівномірно неперервної функції)
Якщо тригонометричний ряд збігається рівномірно на $\mathbb{R}$ то він є рядом Фур'є своєї суми.

Доведення. Позначимо суму ряду f:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.1.23}$$

Також позначимо її складові f_n:

$$f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1.1.24}$$

Зрозуміло, що $\forall n \in \mathbb{Z} : f_n \in C(\mathbb{R})$. Тому $f \in C(\mathbb{R})$ як сума рівномірно збіжного ряду з неперервних функцій.

Далі $f \in R([-\pi, \pi])$ як неперервна на компакті (тут $R([a, b])$ — клас інтегровних за Ріманом на $[a, b]$ функцій).

Знайдемо коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$. Для цього запишемо

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\cos kx \tag{1.1.25}$$

Твердження 1.14

У припущенні рівномірної збіжності ряду можемо інтегрувати ряд почленно.

А наш ряд (1.1.25) якраз рівномірно збіжний. Справді, розглянемо послідовність частинних сум $S_n(x)$. Умова рівномірної збіжності означає, що $\forall \varepsilon > 0$: $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$ $x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Позначимо $\sigma_n(x) = S_n(x) \cos kx$. Тоді $|f(x) \cos kx - \sigma_n(x)| = |\cos kx| \cdot |f(x) - S_n(x)| \leq |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Повертаємося до пошуку коефіцієнтів Фур'є:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_k}{2} \cos kx \,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \,\mathrm{d}x \right) = \\
&\quad = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-k)x + \cos(n+k)x) \,\mathrm{d}x + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{b_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-k)x + \sin(n+k)x) \,\mathrm{d}x \right).
\end{aligned} \tag{1.1.26}$$

Зрозуміло, що всі доданки у сумах рівні нулеві, окрім $n = k$ у першій сумі, який якраз $\frac{a_n}{2} \cdot 2\pi$. Враховуючи ще $\frac{1}{\pi}$ отримали якраз (1.1.15). Зрозуміло, що розглядаючи аналогічним чином $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \,\mathrm{d}x$ отримаємо (1.1.16). А ще, при $k = 0$ маємо $\frac{a_0}{2}$. $\square$