

Теорія Різницевих Схем

чисельне моделювання процесів гідродинаміки

В'ячеслав Оноцький*

11 вересня 2020 р.

*Редактор Нікіта Скибицький

Зміст

Що таке теорія різницевих схем?	v
1 Мотивація	v
2 Модельні рівняння	vi
3 Точність апроксимації	vi
4 Сітки та сіткові рівняння	vi
5 Збіжність різницевих схем	vii
6 Багатошарові схеми	viii
7 Метод фон Неймана	ix
1 Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки	1
1.1 Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання	1
1.2 Використання обчислювальної гідродинаміки	3
1.3 Короткий історичний огляд	6
1.4 Апроксимація, збіжність і стійкість розв'язків	8
1.5 Рівняння руху нестисливої рідини в декартовій системі координат	9
1.6 Завдання для самостійної роботи	12
2 Методи апроксимації диференціальних операторів. Основні властивості різницевих схем	13
2.1 Деякі основні скінченно-різницеві формули	13
2.2 Властивість консервативності	23
3 Точні та узагальнені розв'язки диференціальних та різницевих рівнянь у банахових просторах	29
3.1 Скінченно-різницеві задачі в абстрактних просторах Банаха	29
3.2 Узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь	30
3.3 Скінченно-різницеві задачі	31
3.4 Теорема Лакса	32
4 Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі	35
4.1 Багатошарові чисельні моделі	35
4.2 Проблема постановки початкових умов для багатошарових різницевих схем	36
4.3 Властивості багатошарових різницевих схем	36
4.4 Узгодженість і порядок точності	37
4.5 Завдання для самостійної роботи	39
5 Поняття стійкості різницевих схем	41
5.1 Опис нестійкості	41
5.2 Дослідження стійкості	43
5.3 Завдання для самостійної роботи	47
6 Дослідження стійкості різницевих схем. Метод фон Неймана. Коефіцієнт та матриця переходу	49
6.1 Метод фон Неймана дослідження стійкості crr із сталими коефіцієнтами	49
6.2 Приклади застосування методу фон Неймана	56

6.3	Аналіз стійкості за Хьортом	61
6.4	Завдання для самостійної роботи	64
7	Дослідження стійкості різницевих алгоритмів для рівнянь з багатьма незалежними змінними	65
7.1	Метод фон Неймана для багатомірних задач	65
7.2	Однокрокові явні схеми. Схема “чехарда із середньою точкою”	67
7.3	Завдання для самостійної роботи	73
8	Дослідження стійкості чисельних алгоритмів із змінними операторними коефіцієнтами	75
8.1	Огляд інших умов стійкості нелінійних задач і задач із змінними коефіцієнтами	75
8.2	Дослідження стійкості різницевих схем за допомогою енергетичного методу .	78
8.3	Принцип заморожених коефіцієнтів та ознака Бабенка і Гельфанда	82
9	Метод першого диференціального наближення	87
9.1	Метод першого диференціального наближення	87
9.2	Штучна в'язкість. Дисипація та дисперсія різницевих схем	91
9.3	Приклади проявлення штучної в'язкості, дифузії	93
9.4	Завдання для самостійної роботи	96
10	ДС-алгоритми для моделювання процесів переносу, які описуються однорідними рівняннями	97
10.1	Центрально-різницеві ДС-алгоритми для розв'язування початково-крайових задач для рівнянь першого порядку	97
10.2	Стійкість задачі із сталим коефіцієнтом	98
Додатки		101
1	Контрольні запитання	101
2	Теми для рефератів	102
3	Рекомендована література	103

Що таке теорія різницевих схем?

§1 Мотивація

Припустимо, що ми хочемо передбачити, як буде змінюватися стан певної фізичної системи з часом. Що нам для цього потрібно? Зрозуміло, що ми повинні знати, як змінюються ті чи інші фізичні характеристики нашої системи, а також початковий стан цієї системи.

У рамках цього курсу ми вважаємо, що рівняння чи система рівнянь, яке описує зміну характеристик системи нам вже відоме¹. Також вважаємо, що нам задані певні початкові умови, які також виражені рівняннями чи системою рівнянь.

Може скластися враження, що цього досить, аби знайти точний аналітичний розв'язок (майбутній стан системи як функцію від часу). Це враження хибне, як демонструє наступний приклад:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Тут $t \in \mathbb{R}_+$ — часова змінна, $x, y \in \mathbb{R}$ — просторові змінні, $u, v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — компоненти вектора швидкості руху рідини, $f_x, f_y : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функції, що описують певні сили, які діють на рідину, $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — густина, $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — тиск рідини, $\nu \in \mathbb{R}_+$ — так званий коефіцієнт кінематичної в'язкості.

Це так звані *рівняння Нав'є—Стокса*. Так-так, ті самі, за розв'язання² яких математичний інститут Клея дає премію у \$1'000'000. Насправді, ці рівняння трохи простіші ніж справжні загальні рівняння Нав'є—Стокса, і навіть обмежені всього лише двома просторовими змінними, але це не робить їх аналітичне розв'язання простішим.

Як бачимо, не завжди можна легко знайти аналітичний розв'язок фізичного рівняння, а тому виникає потреба у чисельних методах розв'язування таких задач. У рамках цього курсу ми сфокусуємося на різницевих схемах — чисельних методах, які засновані на наступному спостереженні:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df}{dx}, \quad (4)$$

де df/dx — якась (повна або частинна) похідна функції f за змінною x , а $\Delta f/\Delta x$ — її скінченнорізницевий аналог. Зауважимо, що записана вище збіжність, взагалі кажучи, виконується не завжди, але у колі фізичних процесів які нас цікавитимуть це справді так.

¹Наприклад, ми вивели його з певних фізичних законів збереження, приклади подібних виведень наводяться у курсі математичної фізики.

²А точніше, за доведення існування (чи неіснування) гладких розв'язків зі скінченною кінетичною енергією.

§2 Модельні рівняння

Для аналізу адекватності того чи іншого чисельного методу потрібно мати *модельне* рівняння, для якого нам відомий точний розв'язок чи принаймні його вигляд. Найпростішими такими рівняннями є

1. Лінеаризоване одновимірне рівняння з конвективним і дифузійним членами:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (5)$$

де ζ — так званий *вихор*, $\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ для двовимірних рівнянь.

2. Рівняння Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Обидва ці рівняння зберігають нелінійність рівняння перенесення вихору³ та рівнянь Нав'є—Стокса, при цьому відомі деякі аналітичні розв'язки рівняння Бюргерса.

§3 Точність апроксимації

Як ми вже анонсували, для чисельного розв'язання рівнянь математичної фізики (а точніше гідродинаміки) ми будемо заміняти похідні, що фігурують у цих рівняннях на їхні скінченнорізницеві аналоги. Наприклад, похідна $\partial u(x, t) / \partial x$ може бути замінена на $(u(x + \Delta x, t) - u(x, t)) / \Delta x$.

Як тільки ми це зробимо виникне логічне запитання: а яка точність такої заміни? Відповідь на це питання можна отримати якщо розкласти всі значення невідомої функції у ряди Тейлора з одним і тим же центром:

$$\begin{aligned} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} &= \frac{u(x, t) + \Delta x \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + O(\Delta x^2) - u(x, t)}{\Delta x} = \\ &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + O(\Delta x). \end{aligned} \quad (7)$$

Зрозуміло, що можна записати й інші скінченнорізницеві наближення до різних похідних. Найпростішими є наступні:

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$ — *різницева похідна вперед*;
2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$ — *різницева похідна назад*;
3. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$ — *центральна різницева похідна*;
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{2\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$ — *друга різницева похідна*.

§4 Сітки та сіткові рівняння

Подібні заміни призводять до того, що нас по суті перестає цікавити поведінка невідомої функції у всіх-всіх точках. Це вмотивовує перехід від неперервного рівняння (наприклад, визначеного на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$) до *сіткового* рівняння, визначеного на певній *сітці*.

³Рівняння перенесення вихору отримується якщо виключити тиск з рівнянь Нав'є—Стокса і має вигляд $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$.

Сітка це певна (скінченна) множина точок, у яких нас цікавитиме значення невідомої функції. Зазвичай беруть так звані рівномірні сітки, хоча вони й не панацея⁴. Це означає, що рівняння розглядається на множині

$$\{n\Delta t\}_{n=0}^N \times \{i\Delta x\}_{i=0}^I \times \{j\Delta y\}_{j=0}^J \quad (8)$$

— так званій сітці. У такому випадку зазвичай замість $f(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$ пишуть $f_{i,j}^n$, що дозволяє значно скоротити рівняння і наблизити їх до синтаксису⁶ одразу кількох основних мов програмування.

Якщо використати центральні різницеві похідні за часом та простором (як найкращі які у нас поки що є), то у таких позначеннях вищезгадане модельне рівняння Бюргерса матиме вигляд

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{\Delta t} = -u_i^n \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (9)$$

яке матиме другий порядок точності як за Δt , так і за Δx . Якщо ж взяти похідну вперед за часом і центральні похідну за простором, то отримаємо рівняння

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -u_i^n \cdot \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \cdot \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (10)$$

яке матиме всього лише перший порядок точності за Δt (другий порядок точності за Δx , зрозуміло, збережеться).

Втім, якщо це все запрограмувати, то результати будуть доволі неочікуваними. Несподівано виявиться, що перша з цих схем (принаймні для деяких співвідношень на Δt і Δx) даватиме розв'язок, який буде набагато далі від точного, ніж розв'язок, який видасть друга схема. Типовою може бути наступна картина: друга схема видає розв'язок, який осцилює довкола аналітичного, а розв'язок отриманий за першою схемою з часом все далі і далі віддаляється від точного розв'язку.

Це, звичайно, неприємно, хоча і не дуже несподівано. Справді, ми поки що не доводили ніяких тверджень про зв'язок точності апроксимації диференціального рівняння із точністю наближеного розв'язку. Таким чином, наступний пункт нашої програми — дослідження точності наближеного розв'язку, або, як заведено казати, *стійкість різницевої схеми*.

§5 Збіжність різницевих схем

Центральним результатом у питанні дослідження збіжності наближених розв'язків диференціальних рівнянь до точних розв'язків є

Теорема 0.1 (Лакса, про еквівалентність)

Для збіжності наближеного розв'язку коректно поставленої задачі вигляду

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = (Au)(t), \quad u(0) = u_0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (11)$$

необхідно і достатньо, аби узгоджена скінченнорізницева апроксимація цієї задачі була стійкою.

⁴Наприклад, якщо розв'язок має суттєво різні градієнти у різних частинах області визначення, то резонним є застосування різноманітних адаптивних методів, детальніше їх висвітлює курс чисельних методів.

⁶Мова йде про індексацію, тобто звернення до елементу масиву. Справді, $x[i]$, $t[n]$, $u[i, n]$ виглядає доволі схоже на математичний запис індексу: x_i , t^n , u_i^n .

Тут фігурують одразу декілька нових позначень і слів, розберемося по черзі:

1. $u(t)$ — однопараметрична родина елементів певного банахового простору B , A — деякий лінійний оператор, визначений на елементах цього простору, u_0 — певний елемент B , який описує початковий стан системи;
2. родина операторів $C(\Delta t)$ *узгоджено апроксимує* задачу вище, якщо для довільної родини $u(t)$ точних розв'язків цієї задачі з усюди щільними⁷ в B початковими значеннями виконується умова узгодження:

$$\left\| \left(\frac{C(\Delta t) - \text{Id}}{\Delta t} - A \right) u \right\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0, \quad (12)$$

де норма — чебишівська на $[0, T]$ ($\|f\| = \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$), а Id — тотожний оператор;

3. родина $C(\Delta t)$ називається *стійкою апроксимацією* задачі вище, якщо для деякого $\tau > 0$ родина

$$C(\Delta t)^n, \quad n\Delta t \leq T, \quad 0 < \Delta t < \tau \quad (13)$$

рівномірно обмежена⁸.

Тут оператори $C(\Delta t)$ і $C(\Delta t)^n$ визначені наступними співвідношеннями:

$$C(\Delta t) : u^n \mapsto u^{n+1}, \quad (14)$$

$$C(\Delta t)^n : u^0 \mapsto u^n, \quad (15)$$

тобто вони задають переходи між часовими рівнями сітки.

Уважний читач міг зауважити, що теорема Лакса має у певному розумінні обмежену область застосування.

§6 Багатошарові схеми

А саме, вона передбачає, що ми апроксимуємо наше рівняння так званою *одношаровою* схемою, тобто що u^{n+1} явно виражається через u^n і тільки через них. Але ж ми вже знаємо щонайменше одну схему для якої це не так (такі схеми називаються багатошаровими). Це (9), та сама схема, нестійкість якої схвилювала нас раніше.

То невже одношарові схеми це панацея, а багатошарові — якась єресь? Виявляється, що ні, багатошарові схеми мають право на життя, і навіть інколи виявляються кращими за одношарові. Для багатошарових схем існують аналоги теореми Лакса, хоча необхідні умови там і мають складніший вигляд.

Окрім цього, не завжди зрозуміло звідки брати початкові значення (на більш ніж одному часовому шарі) для багатошарових схем. На це питання також є відповідь, але розгляд цього і суміжних питань виходить за рамки нашого огляду.

Навіть якщо опустити питання, які виникають при розгляді багатошарових різницевих схем, залишається більш фундаментальна проблема.

⁷Згадуємо курс функціонального аналізу.

⁸Згадуємо курс функціонального аналізу.

§7 Метод фон Неймана

Теорема Лакса зводить дослідження збіжності численного розв'язку до дослідження стійкості апроксимації, але методів дослідження стійкості у нас немає, а значить необхідно терміново їх отримати. Одним із таких методів є метод фон Неймана.

Теорема 0.2 (критерій стійкості фон Неймана)

Якщо модуль множника переходу

$$G = \varepsilon_j^{n+1} / \varepsilon_j^n \quad (16)$$

менший від одиниці, а початкові умови $u_0(x)$ розвиваються в абсолютно збіжний ряд Фур'є, то точний періодичний розв'язок скінченнорізницевого рівняння може бути поданий^a у вигляді ряду Фур'є

$$u_j^n = \sum_{m=0}^M e^{an\Delta t} e^{ik_m j \Delta x}, \quad (17)$$

а апроксимація є стійкою, адже модуль похибки не наростає.

^aТут a — певна константа, а $M = I$ з визначення сітки вище, зміна позначень виконана аби уникнути непорозумінь між уявною одиницею та індексом сумування.

Існують аналоги критерію фон Неймана у вищих розмірностях, там фігурує матриця переходу¹⁰ і її норма замість множника переходу і модуля. Окрім цього іншого вигляду набуває ряд Фур'є, який тепер містить подвійну суму (зовнішню по індексу просторової змінної, а внутрішню — за *хвильовим числом* k_m).

Спробуємо розібратися на прикладі. Розглянемо одновимірне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (18)$$

Його скінченнорізницевий аналог має вигляд

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \cdot (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (19)$$

Визначаючи похибку ε_i^n як $u(i\Delta x, n\Delta t) - u_i^n$, і враховуючи, що u задовольняє скінченнорізницевого рівнянню точно, отримуємо таке ж скінченнорізницеве рівняння на похибку:

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_j^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \cdot (\varepsilon_{j+1}^n - 2\varepsilon_j^n + \varepsilon_{j-1}^n). \quad (20)$$

Представимо неперервну версію похибки у вигляді її скінченного ряду Фур'є:

$$\varepsilon(x, t) = \sum_{m=0}^M e^{at} e^{ik_m x}, \quad (21)$$

¹⁰Вона описує залежність вектора похибок за просторовими змінними на наступному часовому шарі від вектора похибок за просторовими змінними на цьому часовому шарі.

Поведінка такого ряду Фур'є цілком залежить від поведінки його типового члену, тому розглянемо $\varepsilon_m(x, t) = e^{at} e^{ik_m x}$. Звідси можна знайти

$$\varepsilon_j^n = e^{at} e^{ik_m x}, \quad (22)$$

$$\varepsilon_j^{n+1} = e^{a(t+\Delta t)} e^{ik_m x}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_{j+1}^n = e^{at} e^{ik_m(x+\Delta x)}, \quad (24)$$

$$\varepsilon_{j-1}^n = e^{at} e^{ik_m(x-\Delta x)}. \quad (25)$$

Після підстановки у скінченнорізнцеве рівняння, спрощення і приведення подібних, а також пере-позначення $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ отримаємо

$$e^{a\Delta t} = 1 + r \cdot \left(e^{ik_m \Delta x} - 2 + e^{-ik_m \Delta x} \right), \quad (26)$$

або ж, після переходу до тригонометричної форми комплексного числа

$$e^{a\Delta t} = 1 - 4r \sin^2(k_m \Delta x / 2). \quad (27)$$

У нашому ж випадку $|G| = |e^{a\Delta t}|$, тому нас цікавить умова

$$\left| 1 - 4r \sin^2(k_m \Delta x / 2) \right| \leq 1, \quad (28)$$

яка виконується для усіх k_m тоді і тільки тоді, коли

$$r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Отримана умова і є необхідною умовою стійкості схеми FTCS¹¹ при застосуванні до одновимірного рівняння теплопровідності.

Сподіваюся, що цей стислий огляд допоміг читачам зрозуміти ідеологію та мету теорії різницевих схем, а також побачити загальну картину предмету.

Нікіта Скибицький, 19 грудня 2019 р.

¹¹Forward time, central space, це стандартна нотація для найпростіших різницевих схем, спробуйте за аналогією розшифрувати аббревіатуру CTCS.

1 Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки

Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки. Основні закони та рівняння. Дивергентна і недивергентна форми запису системи рівнянь Нав'є-Стокса. Системи безрозмірювання рівнянь.

§1.1 Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання



Рис. 1.1: місце чисельного моделювання у моделюванні

Традиційно при **моделюванні** реальних фізичних процесів і проектуванні конкретних пристроїв одночасно використовувались **теоретичні** та **експериментальні** методи дослідження, за допомогою яких визначались основні характеристики процесів. З появою потужних ЕОМ з'явилась можливість використати третій підхід — **обчислювальний експеримент**.

§1.1.1 Мета чисельного моделювання

Обчислювальний підхід у моделюванні знайшов своє місце на межі між теоретичним і експериментальним, узявши на себе певну частину функцій як теоретичних, так і експериментальних методів. Іноді він дає змогу замінити високовартісні й довгострокові натурні експерименти чисельним моделюванням процесів на ЕОМ. Інколи такий підхід є єдиним можливим для визначення тих чи інших характеристик процесу. За допомогою чисельного моделювання можна прогнозувати поведінку, а варіюючи параметри — встановлювати нові якості та закономірності протікання досліджуваного процесу, що здебільшого не під силу ані теоретичним, ані експериментальним методам.

Приклад 1.1

Чисельне моделювання доцільно застосовувати у тих випадках, коли досліджувані процеси важко або навіть неможливо моделювати на макетах через їх велику швидкоплинність, надзвичайно малі геометричні розміри досліджуваного об'єкту, багатокomпонентність, надвисокі чи наднизькі тиски та температури середовища, а також в інших складних реальних ситуаціях.

При чисельному моделюванні реальних процесів множина **задач** як об'єкт математичного дослідження, вивчена недостатньо. Задача, в самому загальному розумінні, є ситуацією, яка визначає дії деякої розв'язуючої системи.

Означення 1.1. Розв'язуюча система є основним інструментом чисельного моделювання і класифікується як біологічна, технічна і комбінована система, до складу якої входять люди і автомати (машини).

Ця система повинна мати технічні засоби розв'язування і теоретичні методи побудови розв'язку.

§1.1.ii Класифікація задач чисельного моделювання

згідно із системою «людина — автомат» залежно від можливої ситуації така:

1. існує один або кілька алгоритмів розв'язування задачі, оформлених у вигляді програми, яка може бути реалізована на ЕОМ;
2. не існує програми для ЕОМ, але людина знає, як її побудувати;
3. не існує програми і невідомий метод розв'язування задачі.

У першому випадку задача зводиться або до вибору з множини алгоритмів найбільш придатного, або використання єдиного придатного алгоритму. У другому додається процес програмування відомого алгоритму (клас програмування). У третьому виникає задача розробки алгоритму і програми (клас задач синтезу алгоритмів).

Означення 1.2. Якщо, починаючи розв'язувати задачу, людина не знає шляхів розв'язування даного класу задач, то таку задачу називають *проблемною*.

Розв'язування проблемних задач передбачає використання людиною додаткових евристичних засобів, відмінних від алгоритмів і алгоритмічних вказівок.

Означення 1.3. Задачу назовемо *добре визначеною*, якщо для неї існує алгоритм перевірки, який можна застосувати до запропонованого розв'язку.

Означення 1.4. Якщо інформації, що міститься в постановці задачі й самій розв'язуючій системі, достатньо для отримання розв'язку, то така задача є *безпошуковою*.

У пошукових задачах система повинна дістати додаткову інформацію із зовнішнього середовища. Вхідні дані задач поділяються на компоненти, які в умові описані досить повно (те, що дано в задачі), і компоненти, перелічені в умові задачі, але їх повний опис можна дістати лише після розв'язування задачі (те, що треба знайти).

Відповідно до процесу розв'язування задачі поділяються на такі типи:

1. задачі *виконання* (задано вхідні об'єкти, процедури; потрібно знайти продукти процесу);

2. задачі *відновлення* (задано продукти процесу, процедури; потрібно знайти вхідні об'єкти);
3. задачі *перетворення* (задано вхідні об'єкти, продукти процесу; потрібно знайти процедури);
4. задачі *конструювання* (відомо продукти із заданими властивостями; потрібно знайти відповідні вхідні дані та процедури).

Зауваження 1.2 — Типовою дією, яку виконує розв'язуюча система, є виділення допоміжних задач або послідовності підзадач, розв'язати які вона може значно простіше, ніж задачу в цілому. Часто такими підзадачами є суттєві задачі, без розв'язування яких неможливо розв'язати основну задачу. Процес виділення підзадач і розгалуження розв'язку в чисельному моделюванні потребує ґрунтовного аналізу і додаткових досліджень впливу похибок розв'язку кожної з підзадач на кінцевий результат.

Означення 1.5. Похибка розв'язку задачі, спричинена впливом похибки розв'язку підзадачі, є *спадковою*.

З позицій обчислювальної математики задачі можна класифікувати як задачі:

1. розв'язування рівнянь і систем: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних, функціональних;
2. дослідження властивостей розв'язків рівнянь і систем: асимптотична поведінка розв'язків; критерії стійкості; знаходження величин, залежних від розв'язків;
3. екстремальні задачі з додатковими умовами і без них;
4. задачі на відновлення (визначення коефіцієнтів): аналіз Фур'є, інтерполювання, лінійна і нелінійна апроксимація, конформні відображення;
5. задачі оцінки значень: обчислення та оцінка значень точних і наближених формул, залишків рядів.

Для ефективного чисельного моделювання складних фізичних процесів система основних рівнянь, яка описує фізичний процес, повинна насамперед досить адекватно його описувати і мати ефективні обґрунтовані чисельні методи розв'язування. Обґрунтування чисельних методів полягає у встановленні існування розв'язку, оцінки його похибки, обчислювальної стійкості алгоритму, його збіжності до точного розв'язку, консервативності, дисипативності, дисперсності та ін.

Отже, обчислювальна гідродинаміка є окремою дисципліною, відмінною від експериментальної й теоретичної гідродинаміки, що й доповнює їх. Вона має власні методи, специфічні труднощі й окрему сферу застосування, відкриваючи нові перспективи для вивчення фізичних процесів.

§1.2 Використання обчислювальної гідродинаміки

- **Аерокосмічна промисловість:** аеродинаміка, дизайн крив і лопат, реактивних снарядів і ракет, пасажирських кабін;
- **Автомобілебудування:** внутрішнє згорання, збільшення комфорту пасажирів;
- **Біологія:** дослідження польоту птахів і комах, переміщення риб;
- **Біомедицина:** серцеві клапани, гідродинаміка кровоносних судин, фільтри й респіратори;

- **Будівельна індустрія:** проектування мостів, надбудов будинків, великих конструкцій, очищення повітря в приміщеннях, вентиляція, кондиціонування;
- **Хімічні технології:** перемішування, поділ, хімічне реагування;
- **Електроніка:** охолодження електронних обладнань;
- **Екологія й безпека:** контроль промислових відходів і забруднень, протипожежна безпека, захист річкових і морських берегів;
- **Кораблебудування:** вітрове й хвильове навантаження, силові установки;
- **Машинобудування:** насоси, вентилятори, теплообмінники;
- **Метеорологія:** прогноз погоди;
- **Океанографія:** плину в ріках і океанах;
- **Енергетика:** бойлери, казани, топлення, посудини тиску, гідравлічні тракти ядерних реакторів;
- **Спортивна промисловість:** дизайн гоночних автомобілів, яхт і байдарок, велосипедних шоломів, плавальних окулярів, м'ячів для тенісу й гольфа й т.п.
- **Турбомашинобудування:** турбіни, гідротрансформатори.

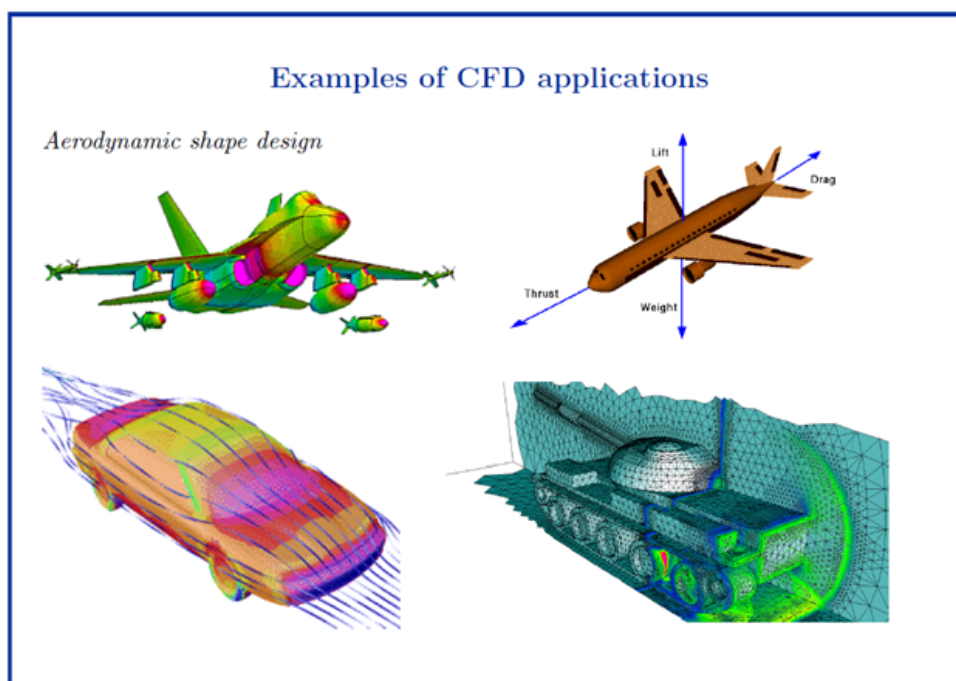
§1.2.i Приклади використання



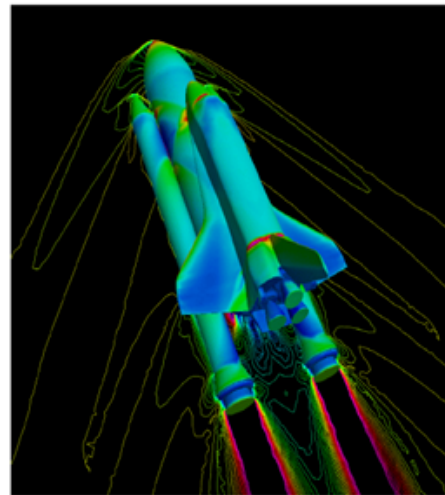
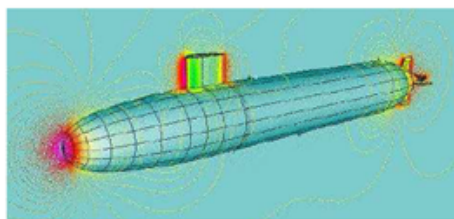
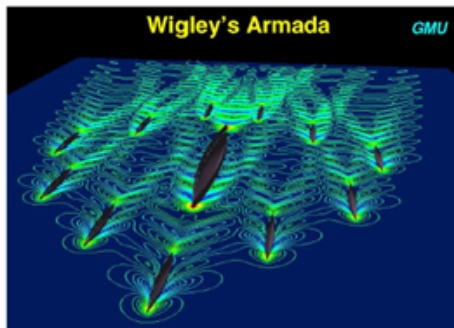
Фізичний експеримент



Обчислювальний експеримент

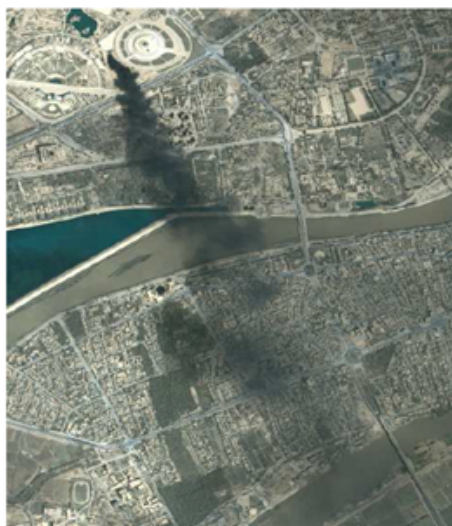


Examples of CFD applications

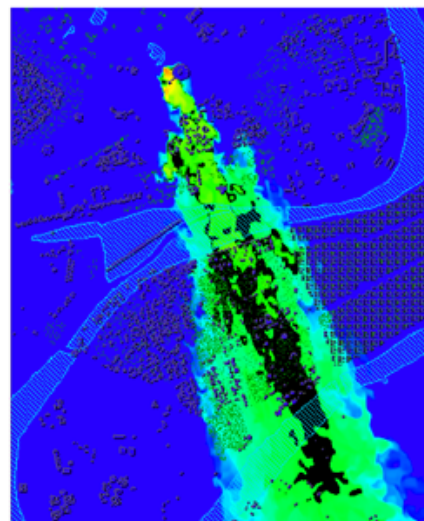


CFD simulations by Löhner et al.

Examples of CFD applications



Smoke plume from an oil fire in Baghdad



CFD simulation by Patnaik et al.

Рис. 1.2: приклади використання обчислювальної гідродинаміки

§1.3 Короткий історичний огляд

- 1910 р. Л. Річардсон — ітераційні методи розв'язку рівняння Лапласа, бігармонічного рівняння й інших рівнянь, уперше застосував чисельні методи до такої практичної задачі великого масштабу, як визначення напруг у кам'яній дамбі.
- 1918 р. Лібман вдосконалив метод за рахунок використання “нових” значень у вузлах, як тільки вони обчислені.
- 1928 р. Чисельний розрахунок гіперболічних рівнянь; метод характеристик; необхідна умова стійкості Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ) (число Куранта повинне бути менше одиниці) справедливо для рівнянь гідродинаміки як у лагранжевих, так і в ейлерових змінних; з'явилася класична робота Куранта, Фрідрікса й Леві, що визначила напрямки практичного одержання скінченно-різницевого розв'язку в наступні роки.
- 1933 р. Перший чисельний розв'язок рівнянь у частинних похідних для задач гідродинаміки в'язкої рідини було дано Томом в 1933 р.
- 1938 р. Шортлі й Уеллер розробили вдосконалений варіант методу Лібмана, а також уперше точно визначили й досліджували швидкість збіжності.
- 1946-8 рр. Саусвелл і Фокс розробили схеми верхньої й нижньої релаксації.
- 1955 р. Аллен і Саусвелл застосували метод релаксації Саусвелла для розрахунків вручну обтікання циліндра в'язкою нестислою рідиною. Були отримані чисельно стійкі розв'язки при числі Рейнольдса, рівному 1000, що перевищує фізичну межу стійкості.
- 1950 р. Франкел (і в 1954 р. незалежно від нього Янг) розробили метод, який згодом став називатися методом послідовної верхньої релаксації (назву запропонував Янг у 1954) або методом оптимальної верхньої релаксації. Франкел помітив також аналогію між ітеративним розв'язком еліптичних рівнянь і розв'язком кроками за часом параболічних рівнянь, що мало важливі наслідки.
- 1953 р. Дюфорт і Франкел — схема “чехарда” для параболічних рівнянь, яка, як і неявні схеми методу напрямків, що чергуються.
- 1955-6 рр. схеми методу змінних напрямків (Пісмен, Дуглас й Решфорд),
- 1957 р. У першій монографії Ріхтмайєра, що була вагомим внеском у розвиток одномірної нестационарної гідродинаміки, було наведено понад 10 чисельних схем. У багатомірному випадку першим неявним методом був метод Кранка-Ніклсона, опублікований в 1947 р., що й вимагав ітерацій на кожному часовому шарі.
- фон Нейман (Лос-Аламос під час II світової війни) — критерій стійкості параболічних скінченно-різницевого рівнянь; метод дослідження лінеаризованої системи.

§1.3.i Гіперболічні рівняння

- 1960 р. схема Лакса-Вендроффа.
- 1963 р. схема Ріхтмайєра.
- 1964 р. методи РІС (метод часток в комірках), ЕІС (метод вибуху в гніздах), розроблені Мадером, розмазування стрибків досягається за рахунок введення кінцевого числа часток, що розраховуються.

§1.3.ii Двокрокові методи

- Саульєв В. К. запропонував двокроковий безумовно стійкий алгоритм, в якому в усіх просторових точках сітки на часовому кроці використовується явна схема, а на наступному кроці неявна.

- Ідею двокрокового явно-неявного чисельного “hopscotch” методу, в якому, крім того, тип схем чергується і в просторових точках сітки, запропоновано Шелдоном для ітераційного розв’язування рівняння Пуассона.
- Скала і Гордон використали цю ідею для розв’язування задачі нестационарного обтікання кругового циліндра.
- Гурлі узагальнив її для нестационарного рівняння теплопровідності, довів стійкість.
- В 1987 р. Грищенко О. Ю розробив двокрокові-симетризовані алгоритми (ДС-алгоритми), поширивши ідею “hopscotch” методу на параболізовані лінійні і нелінійні задачі течії в’язкої рідини, переносу; для систем рівнянь першого порядку та систем газової динаміки, а також системи рівнянь Нав’є-Стокса. Ці алгоритми не потребують обернення матриці системи сіткових рівнянь.

§1.3.iii Грищенко Олександр Юхимович (1946–2016)

- з 1971 р. працював на кафедрі обчислювальної математики, проф., д.ф.-м.н.
- Опублікував понад 200 наукових та науково-методичних праць
- Був членом спеціалізованої вченої ради із захисту докторських дисертацій КНУ імені Тараса Шевченка, членом редакційної колегії “Журналу обчислювальна та прикладна математика” та головним редактором серії “Прикладна математика” цього ж журналу.
- Основні напрямки теоретичних досліджень пов’язані з
 - проблемами побудови чисельних методів розв’язування крайових задач,
 - чисельного моделювання процесів динаміки та кінетики рідини, газу та плазми,
 - питаннями конструювання різницевої схем та чисельних алгоритмів із заданими властивостями,
 - розробкою чисельних методів, ефективних при розв’язуванні великих задач на багатопроцесорних комп’ютерних системах.
- Результати цих досліджень впроваджувалися:
 - при розрахунку та проектуванні фрагменту підземної частини насосної станції каналу Дніпро-Донбас
 - моделюванні процесів очищення промислових стоків,
 - моделюванні робочих середовищ газодинамічних лазерів високої потужності та в інших прикладних проблемах.
- Нагороди:
 - У 1976 році за цикл робіт став лауреатом Премії імені М. Островського ЦК ЛКСМ України в галузі науки, техніки та виробництва.
 - У 1978 році нагороджений дипломом третього ступеня МВССО України.
 - У 2013 році премією Імені Тараса Шевченка Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
 - У 2015 році Почесною Грамотою Президії академії педагогічних наук України. Також нагороджений медаллю на честь 1500 річчя міста Києва.

§1.4 Апроксимація, збіжність і стійкість розв'язків

§1.4.i Апроксимація

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df}{dx}. \quad (1.1)$$

Означення 1.6. *Збіжна скінченно-різницева схема* математично визначається як схема, що дає скінченно-різницевий розв'язок, який збігається до розв'язку диференціального рівняння при прямуванні розміру комірки сітки (Δx) до нуля.

Зауваження 1.3 — Під границею тут розуміється границя всього розв'язку диференціального рівняння, а не просто його окремих членів (похідних).

Означення 1.7. Остання властивість називається *апроксимацією* (Лакс й Ріхтмайер [1956]).

§1.4.ii Стійкість

о'Браян, Хаймен і Каплан [1950], а також Едді [1949] визначають стійкість виходячи з росту або загасання помилок округлення. Лакс й Ріхтмайер [1956] дають більш загальне визначення стійкості, установлюючи границю, до якої може зростати будь-який компонент початкових даних у процесі чисельного розрахунків.

Теорема 1.4 (Лакса)

Для системи лінійних рівнянь наявність стійкості є необхідною й достатньою умовою збіжності скінченно-різницевої схеми, що апроксимує систему диференціальних рівнянь.

Теорема 1.5 (критерій стійкості фон Неймана)

Вимагає, щоб найбільше власне значення матриці переходу ітераційної схеми було менше, чим одиниця мінус члени порядку помилки апроксимації.

Лакс й Ріхтмайер [1956] показали, що ця умова є достатньою для стійкості лінійної системи з постійними коефіцієнтами й що у випадку, коли матриця переходу задовольняє одному із трьох наборів властивостей, виконання цього критерію є достатнім також для збіжності.

Зауваження 1.6 — Дослідження лінійних рівнянь і рівнянь із постійними коефіцієнтами недостатньо для встановлення нестійкості. Визначення стійкості є неадекватним, оскільки для достатньо великого числа Рейнольдса при застосуванні стійких схем можуть виникати осциляції, що не мають нічого спільного із точним розв'язком.

§1.5 Рівняння руху нестисливої рідини в декартовій системі координат

§1.5.i Рівняння руху для фізичних змінних

Означення 1.8. Рівняння Нав'є-Стокса, що описують рух нестислої ньютонівської в'язкої рідини:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}, \nabla \vec{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{U} + \vec{F}, \quad (1.2)$$

або, у 2-вимірному випадку:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + f_x, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + f_y, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (1.5)$$

Зауваження 1.7 — Риски над буквами означають, що відповідні величини є розмірними. Рівняння записані для фізичних змінних — складових швидкості u, v і тиску p ; властивості рідини характеризуються щільністю ρ і кінематичним коефіцієнтом в'язкості ν .

Ці рівняння засновані на наступних фізичних законах: рівняння (1.3) і (1.4) є проекціями векторного рівняння кількості руху $F = ma$ (другого закону Ньютона), причому сили в'язкості пов'язані зі швидкістю деформацій лінійним ньютонівським законом для дотичних напружень. Так, з другого закону Ньютона до елементарного об'єму рідини δV масою δm маємо:

$$\delta m \frac{d\vec{U}}{dt} = \delta m \nu \Delta \vec{U} - \delta V \nabla P + \vec{F} \delta m. \quad (1.6)$$

У лівій частині формули — добуток маси δm елементарного об'єму рідини і її прискорення (\vec{U} — швидкість, t — час). У правій частині — діючі на цей обсяг сили: сила в'язкого тертя (ν — кінематична в'язкість), сила, що виникає через різницю тисків P , та інші сили $\vec{F} \delta m$.

Зауваження 1.8 — Рівняння (1.5) виражає закон збереження маси.

Означення 1.9. Наведені рівняння записані в *ейлеровій* системі координат, тобто в нерухливій системі, щодо якої рухається рідина.

§1.5.ii Рівняння переносу вихору у випадку плоских течій

З рівнянь (1.3) і (1.4) можна виключити тиск, продиференціювавши перше з них по y , а друге по x . Визначаючи *вихор* як

$$\bar{\zeta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}, \quad (1.7)$$

одержуємо *рівняння переносу вихору*, що має параболічний тип:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} &= -\bar{u} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}} - \bar{v} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu} \left(\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}^2} \right) = \\ &= -\vec{U} \cdot (\nabla \bar{\zeta}) + \bar{\nu} \Delta \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Використовуючи *субстанціональну похідну* (Лагранжа)

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)\varphi, \quad (1.9)$$

це рівняння можна представити так:

$$\frac{D\bar{\zeta}}{Dt} = \vec{U} \Delta \bar{\zeta} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} = \bar{u}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} = -\bar{v}, \quad (1.11)$$

рівняння (1.7) можна записати як рівняння Пуассона, що має еліптичний тип:

$$\Delta \bar{\varphi} = \bar{\zeta}. \quad (1.12)$$

§1.5.iii Консервативна форма рівнянь

Рівняння нерозривності (1.5)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (1.13)$$

можна записати через вектор повної швидкості \vec{V} в наступному виді:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (1.14)$$

Використовуючи відому тотожність векторної алгебри

$$\nabla \cdot (\vec{V} \bar{\zeta}) = \vec{V} \cdot (\nabla \bar{\zeta}) + \bar{\zeta} (\nabla \cdot \vec{V}) = \vec{V} \cdot (\nabla \bar{\zeta}) \quad (1.15)$$

одержуємо з (1.8) консервативну форму рівняння переносу вихору або *дивергентну форму*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\vec{V} \bar{\zeta}) + \bar{v} \Delta \bar{\zeta} = \\ &= -\frac{\partial(\bar{u} \bar{\zeta})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial(\bar{v} \bar{\zeta})}{\partial \bar{y}} + \bar{v} \left(\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

§1.5.iv Рівняння в безрозмірних змінних

Нехай \bar{L} — характерна довжина, а \bar{U}_0 — характерна швидкість задачі.

Приклад 1.9

Якщо \bar{L} — довжина хорди профілю крила й \bar{U}_0 — швидкість потоку, що набігає, то \bar{L}/\bar{U}_0 — час, за який частка потоку, що набігає, проходить увесь профіль.

Уведемо наступні безрозмірні величини:

$$u = \frac{\bar{u}}{\bar{U}_0}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\bar{U}_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{L}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}}, \quad \zeta = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{U}_0/\bar{L}}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{L}/\bar{U}_0}. \quad (1.17)$$

Тоді рівняння (1.16) і (1.12) приймуть вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{V} \zeta) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \zeta, \quad (1.18)$$

$$\Delta \varphi = \zeta, \quad (1.19)$$

Означення 1.10. Тут Re — безрозмірний параметр, *число Рейнольдса*,

$$\text{Re} = \bar{U}_0 \bar{L} / \bar{\nu}. \quad (1.20)$$

Таким чином, для будь-якого заданого набору граничних умов течія характеризується одним безрозмірним параметром — числом Рейнольдса.

Для течій з більшими числами Рейнольдса ($\text{Re} \gg 1$) конвективний член у рівнянні ((1.18)) превалує над членом в'язкої дифузії, і в цьому випадку величина \bar{L}/\bar{U}_0 буде являти собою інтервал часу, що фактично характеризує течію. Тоді, наприклад, умова для безрозмірного часу $t = \bar{t}/(\bar{L}/\bar{U}_0)$ буде підходящим критерієм для досягнення стаціонарного стану плинку. Однак течія з малими числами Рейнольдса ($\text{Re} \ll 1$) краще характеризуються безрозмірним “дифузійним” часом. Визначаючи такий безрозмірний час як

$$t' = \bar{t} \bar{\nu} / \bar{L}^2, \quad (1.21)$$

а інші безрозмірні величини так само, як в (1.17), одержуємо для функції струму те ж саме рівняння Пуассона (1.19), але рівняння переносу вихору при цьому набуває вигляду

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t'} = -\text{Re} \nabla \cdot (\vec{V} \zeta) + \Delta \zeta. \quad (1.22)$$

Величина $\bar{\nu}/\bar{L}^2$ має розмірність часу. Для того щоб оцінити її фізичну значимість як масштабу часу в завданнях з переважною дифузією, досить помітити, що в межі при $\text{Re} \rightarrow 0$ рівняння (1.18) стає сингулярним, тоді як рівняння (1.22) поводить себе при цьому добре, а конвективний член зникає. Аналогічно, рівняння (1.18) не має особливості при $\text{Re} \rightarrow \infty$, але при цьому зникає дифузійний член (1.22).

§1.5.v Одновимірні модельні рівняння переносу

Рівняння переносу вихору як у неконсервативній, так і в консервативній формі (1.18) є параболічним за часом, містять дві незалежні просторові змінні й пов'язані з еліптичним рівнянням Пуассона для функції гока (1.19) через нелінійні конвективні члени.

1. Лінеаризоване одновимірне рівняння з конвективним і дифузійним членами (Аллен [1968], У. Кроулі [1968]), записане або в консервативній формі

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (1.23)$$

або в неконсервативній формі

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (1.24)$$

У цих рівняннях ζ моделює вихор або яку-небудь іншу конвективну й дифузійну величину, α — узагальнений коефіцієнт дифузії, відповідний до величини $1/\text{Re}$ у рівнянні переносу вихору, u — лінеаризована швидкість конвекції, що не залежить від x , хоча рівняння (1.23) може бути використане й для вивчення ефектів стійкості у випадку, коли $u = u(x)$.

2. Рівняння Бюргерса (Бюргерс [1948], Хопф [1950], Родін [1970]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.25)$$

де u розглядається як узагальнена швидкість. Це рівняння зберігає нелінійність рівняння переносу вихору й рівнянь Нав'є-Стокса. Завдяки своїй нелінійності воно може служити модельним рівнянням для вивчення як турбулентності, так і ударних хвиль.

Еквівалентна консервативна форма цього рівняння така:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.26)$$

Оскільки відомі деякі аналітичні розв'язки рівняння Бюргерса, воно може служити для демонстрації переваг консервативної форми скінченно-різницевого рівнянь,

§1.6 Завдання для самостійної роботи

Встановити дивергентність системи рівнянь Нав'є-Стокса, записаних у змінних функція току-вихор. Побудувати систему обезрозмірювання для рівняння теплопровідності. Вказати умови, при яких дифузійне розповсюдження тепла переважає конвективне.

2

Методи апроксимації диференціальних операторів. Основні властивості різницевих схем

Методи апроксимації диференціальних операторів: використання формули Тейлора, застосування інтерполяційних многочленів, інтегро-інтерполяційний метод та метод контрольного об'єму. Основні властивості різницевих схем: консервативність.

§2.1 Деякі основні скінченно-різничеві формули

§2.1.1 Розкладання в ряди Тейлора

Основні скінченно-різничеві формули для частинних похідних можуть бути отримані за допомогою розкладання в ряди Тейлора. Використана прямокутна сітка показана на малюнку:

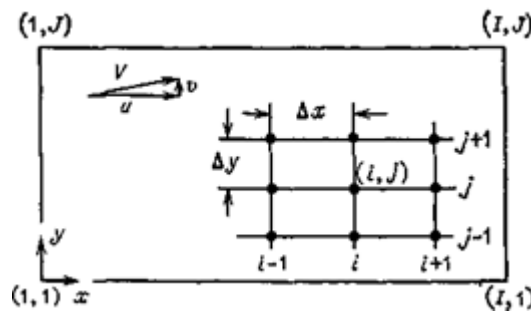


Рис. 2.1: Прямокутна скінченно-різничева сітка

Нижні індекси i й j ставляться до x та y , а верхній індекс n відповідає часовому шару. Кроки сітки в напрямках i й j позначаються через Δx і Δy відповідно. (Для простоти Δx й Δy вважаються постійними.) f — деяка функція.

Форми односторонніх різницевих виразів для першої похідної $\frac{\partial f}{\partial x}$ можна вивести в такий спосіб: припускаємо неперервність похідних і розкладаємо f в ряд Тейлора в околі точки (i, j) . Верхній індекс (часовий) для простоти опускаємо. Тоді

$$\begin{aligned} f_{i+1,j} &= f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} (x_{i+1,j} - x_{i,j}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} (x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + \dots = \\ &= f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x^2 + o(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $\frac{\partial f}{\partial x}$, одержуємо

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \Delta x + o(\Delta x),$$

або

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (2.2)$$

Формула 2.1 (різницева апроксимація вперед)

Позначимо скінченно-різницевий аналог $\frac{\partial f}{\partial x}$ через $\frac{\delta f}{\delta x}$. Тоді для $\frac{\delta f}{\delta x}$ при різницевій апроксимації вперед одержуємо вираз

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}, \quad (2.3)$$

з похибкою апроксимації порядку Δx , тобто з першим порядком точності.

Формула 2.2 (різницева апроксимація назад)

Аналогічно, розкладаючи $f_{i-1,j}$ в околі точки (i, j) , одержуємо для $\frac{\delta f}{\delta x}$ вираз при різницевій апроксимації назад:

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad (2.4)$$

який також має перший порядок точності.

Центральна (симетрична) різницева апроксимація $\frac{\delta f}{\delta x}$ виходить як різниця розкладів

$$\begin{aligned} f_{i+1,j} &= f_{i,j} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^4 + o(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (2.5)$$

та

$$\begin{aligned} f_{i-1,j} &= f_{i,j} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 - \\ &- \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^4 - o(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Справді, віднімаючи (2.6) від (2.5), одержуємо

$$f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = 2 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{3} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + o(\Delta x^4).$$

Розв'язуючи відносно $\frac{\partial f}{\partial x}$, маємо

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^2 + o(\Delta x^4) = \\ &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Формула 2.3 (центральна різницева апроксимація)

Таким чином, центральна різницева апроксимація дає вираз

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}. \quad (2.8)$$

з похибкою апроксимації порядку Δx^2 , тобто із другим порядком точності.

Зауваження 2.4 — Аналогічно можна одержати вирази для похідних по y і t . Наприклад, центрально-різницьовий аналог $\frac{\partial f}{\partial t}$ має вигляд

$$\left. \frac{\delta f}{\delta t} \right|_{i,j}^n = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (2.9)$$

Виведемо тепер центрально-різницьовий аналог $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Додаючи (2.5) і (2.6), маємо

$$f_{i+1,j} + f_{i-1,j} = 2f_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{12} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^4 + o(x^4). \quad (2.10)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, одержуємо

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{1}{12} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^2 + o(x^2). \quad (2.11)$$

Формула 2.5 (центральна різницева апроксимація другої похідної)

Звідси для $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ маємо

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}. \quad (2.12)$$

із другим порядком точності.

Також виконуються наступні формули:

$$\left. \frac{\delta g}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{\Delta x} \quad (2.13)$$

та

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}. \quad (2.14)$$

Вправа 2.1. Доведіть ці формули.

Зауваження 2.6 — Мішана похідна $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ визначена формулою (2.14) задовольняє відомій тотожності $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ яка справджується для усіх двічі неперервно диференційовних функцій. Завжди бажано, щоб скінченно-різницьові рівняння добре моделювали

якісну поведінку диференціальних рівнянь.

Комбінації отриманих скінченно-різницевих виразів для частинних похідних можна використовувати для написання скінченно-різницевих формул диференціальних рівнянь у частинних похідних. Наприклад, рівняння Лапласа

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

буде мати різницевий аналог

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0,$$

або

$$f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2(1 + \beta^2)f_{i,j} + \beta^2(f_{i,j+1} + f_{i,j-1}) = 0, \quad (2.15)$$

де β — відношення розмірів кроків, $\beta = \Delta x / \Delta y$. Це так званий п'ятиточковий аналог рівняння Лапласа. При $\beta = 1$ виходить відоме рівняння

$$f_{i,j} = \frac{1}{4}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}), \quad (2.16)$$

яке означає, що $f_{i,j}$ є середнім значенням f у чотирьох сусідніх точках. Ці формули схематично зображені на наступному малюнку:

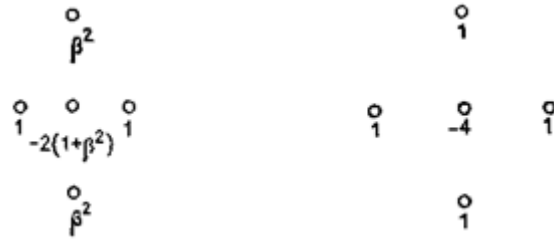


Рис. 2.2: Схематичне зображення п'ятиточкового аналога рівняння Лапласа

Зауваження 2.7 — Схема ліворуч відповідає довільному значенню β , праворуч — $\beta = 1$.

Використовуючи для апроксимації просторових похідних і похідної за часом різнице-ві вирази другого порядку точності, лінійне модельне рівняння (1.24) можна записати у вигляді

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (2.17)$$

що дозволяє явно виразити ζ_i^{n+1} через значення змінних на попередніх часових шарах. Однак така схема в дійсності виявляється неприйнятною. Для всіх $\alpha > 0$ і всіх можливих $\Delta t > 0$ ця схема чисельно нестійка, тобто приводить до виникнення хаотичних розв'язків, що не мають відношення до істинного розв'язку диференціального рівняння. Така поведінка підкреслює відмінність між точними скінченно-різницеви-ми аналогами для похідних і точним аналогом диференціального рівняння.

Якщо замість центральних різниць у нестационарному члені використовувати різниці вперед за часом, то вийде різницевий аналог лінійного модельного рівняння, що має другий порядок точності по просторовій змінній і лише перший за часом

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (2.18)$$

Означення 2.1. Цю схему з однобічними різницями вперед за часом і центральними (симетричними) різницями по просторовій змінній іноді називають схемою FTCS (від *eng.* Forward-Time Central-Space).

Надалі буде показано, що ця схема стійка (принаймні при деяких умовах, накладених на Δt , u , α і Δx). Але перш ніж приступити до дослідження стійкості, розглянемо деякі інші питання, пов'язані з скінченно-різницевиими рівняннями.

§2.1.ii Поліноміальна апроксимація

Інший метод одержання скінченно-різницеви виразів заснований на застосуванні апроксимуючої аналітичної функції з вільними параметрами, яка будується за значеннями у вузлах сітки й потім аналітично диференціюється. Це звичайний метод знаходження похідних за експериментальними даними. В ідеалі вигляд апроксимуючої функції повинен визначатися наближеним аналітичним розв'язком, однак звичайно в якості апроксимуючих функцій використовуються поліноми. Ми продемонструємо даний метод на прикладі параболічної апроксимації.

Припустимо, що значення функції f задані в точках $i-1$, i та $i+1$, і проведемо параболічну апроксимацію функції:

$$f(x) = a + bx + cx^2, \quad (2.19)$$

причому для зручності за початок координат ($x = 0$) приймемо точку i . Тоді рівняння (2.19), записане в точках $i-1$, i та $i+1$ відповідно, дасть

$$f_{i-1} = a - b\Delta x + c\Delta x^2, \quad f_i = a, \quad f_{i+1} = a + b\Delta x + c\Delta x^2. \quad (2.20)$$

Додаючи першу та третю рівності, одержуємо

$$c = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2\Delta x^2}, \quad (2.21)$$

а розв'язуючи їх відносно b , знаходимо

$$b = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (2.22)$$

У точці i значення першої похідної (2.19) буде

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i = [b + 2cx]_{x=0} = b, \quad (2.23)$$

а значення другої похідної

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_i = 2c. \quad (2.24)$$

Формули (2.23) і (2.24) з врахуванням (2.21) і (2.22) у точності збігаються з формулами (2.8) і (2.12) другого порядку із центральними різницями, отриманими розкладанням у ряд

Тейлора. Якщо припустити, що f — поліном першого ступеня, тобто $f = a + bx$, то залежно від того, які значення використовуються для визначення a й b : значення f_i й f_{i+1} або f_i й f_{i-1} для $\frac{\delta f}{\delta x}$ виходять формули з різницями вперед або назад відповідно. Очевидно, що при лінійній апроксимації f не можна одержати вирази для $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$. Однак якщо використовувати поліном першого ступеня для побудови різницевих аналогів перших похідних $\frac{\delta f}{\delta x}\bigg|_{i+1/2}$ і $\frac{\delta f}{\delta x}\bigg|_{i-1/2}$, які відповідно представляються різницями вперед та назад, то для $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ вийде вираз, що збігається з виразом (2.12) із центральними різницями.

Різницеві формули для похідних більш високого порядку виводяться з використанням поліномів вищих порядків. Вирази, отримані за допомогою поліномів порядків вище другого, вже не ідентичні виразам, отриманим розкладаннями в ряди Тейлора, і в кожному випадку похибка апроксимації повинна перевірятися за допомогою розкладання в ряд Тейлора. В обчислювальній гідродинаміці метод поліноміальної апроксимації, як правило, застосовується тільки для обчислень значень похідних поблизу границь.

Тепер відзначимо недоліки поліноміальних апроксимацій вищого порядку, добре відомі фахівцям, що обробляють дані вимірів. Зі збільшенням порядку апроксимації вони стають чутливими до “шумів”, тобто до більш-менш випадково розподілених малих помилок у даних.

Приклад 2.8

Так, поліном шостого ступеня, графік якого проходить через сім точок, точно розташованих на одній прямій, приводить до апроксимації у вигляді прямої, зображеної на мал. 2.3.а. Однак при додаванні до значень, що апроксимуються, шумових збурювань коефіцієнти полінома будуть уже визначатися цими перекрученими даними, і тоді аналітичне обчислення похідних у точці i може привести до абсурдних результатів, що можна побачити на мал. 2.3.б:

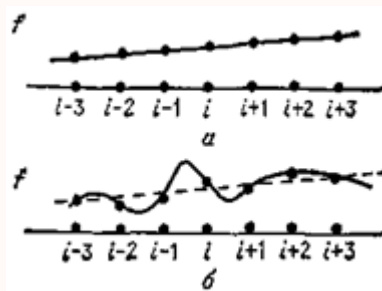


Рис. 2.3: Поліноміальна апроксимація шостого порядку

Зауваження 2.9 — Квадратична апроксимація не може відобразити наявності точки перегину в розглянутих даних, тобто точки, де $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Із цієї причини для аналізу наявних даних може бути виправдане використання поліноміальних апроксимацій третього порядку. (Часто використовуються сплайн-функції, що гарантують неперервність похідних при переході від однієї вузлової точки до іншої.) У нашому випадку рівняння, що описують розглянуте фізичне явище, не залежать від наявності точки перегину або від третьої похідної, тому немає необхідності зупинятися на цьому питанні.

§2.1.iii Інтегральний метод

В інтегральному методі потрібно приблизно задовольнити основним рівнянням, записаним в інтегральній, а не в диференціальній формі. Тут зручніше використовувати для просторової координати нижній індекс x , а для часу верхній індекс t замість i та n відповідно. Запишемо лінійне модельне рівняння в консервативній формі:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

Проінтегруємо це рівняння за часом від t до $t + \Delta t$ і по просторовій області R від $x - \Delta x/2$ до $x + \Delta x/2$, як показано на малюнку:

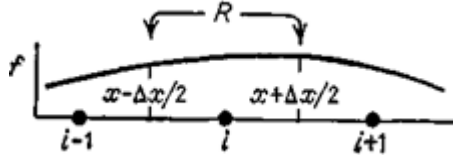


Рис. 2.4: Область інтегрування R для інтегрального методу.

Оскільки порядок інтегрування по t і x неістотний (теорема Фубіні), виберемо його так, щоб можна було провести одне точне інтегрування, а саме

$$\begin{aligned} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \left[\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt \right] dx = - \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} dx \right] dt + \\ + \alpha \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx \right] dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Виконаємо інтегрування виразів, записаних у квадратних дужках:

$$\begin{aligned} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [\zeta^{t+\Delta t} - \zeta^t] dx = - \int_t^{t+\Delta t} [(u\zeta)_{x+\Delta x/2} - (u\zeta)_{x-\Delta x/2}] dt + \\ + \alpha \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \right] dt. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Інтеграли, що залишилися, визначимо чисельно. За теоремою про середнє можна записати

$$\int_{z_1}^{z_1+\Delta z} f(z) dz \approx f(\bar{z})\Delta z,$$

де $\bar{z} \in [z_1, z_1 + \Delta z]$. Збіжність гарантується при $\Delta z \rightarrow 0$. Взявши при наближеному обчисленні інтегралів у лівій частині рівняння (2.27) середню точку x , а в правій частині значення підінтегральних функцій при нижній межі, тобто при t (формула прямокутників), одержимо

$$[\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t] \Delta x = - \left[(u\zeta)_{x+\Delta x/2}^t - (u\zeta)_{x-\Delta x/2}^t \right] \Delta t + \alpha \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2}^t - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2}^t \right] \Delta t. \quad (2.28)$$

Похідні $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ можна знайти зі співвідношення

$$\zeta_{x+\Delta x}^t = \zeta_x^t + \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_x^t dx.$$

Звідси використовуючи теорему про середнє, одержуємо

$$\zeta_{x+\Delta x}^t = \zeta_x^t + \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x+\Delta x/2}^t \Delta x.$$

або

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x+\Delta x/2}^t = \frac{\zeta_{x+\Delta x}^t - \zeta_x^t}{\Delta x}. \quad (2.29)$$

Значення $(u\zeta)_{x+\Delta x/2}^t$ можна обчислити як середнє арифметичне:

$$(u\zeta)_{x+\Delta x/2}^t = \frac{1}{2} \left((u\zeta)_x^t + (u\zeta)_{x+\Delta x}^t \right). \quad (2.30)$$

Аналогічний вираз має місце й для $(u\zeta)_{x-\Delta x/2}^t$.

Підставляючи (2.29) і (2.30) в (2.28), знаходимо

$$\begin{aligned} [\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t] \Delta x = & - \left[\frac{1}{2}(u\zeta)_x^t + \frac{1}{2}(u\zeta)_{x+\Delta x}^t - \frac{1}{2}(u\zeta)_x^t - \frac{1}{2}(u\zeta)_{x-\Delta x}^t \right] \Delta t + \\ & + \alpha \left[\frac{\zeta_{x+\Delta x}^t - \zeta_x^t}{\Delta x} - \frac{\zeta_x^t - \zeta_{x-\Delta x}^t}{\Delta x} \right] \Delta t. \end{aligned}$$

Розділивши останнє рівняння на $\Delta x \Delta t$, одержимо

$$\frac{\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t}{\Delta t} = - \frac{(u\zeta)_{x+\Delta x}^t - (u\zeta)_{x-\Delta x}^t}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{x+\Delta x}^t - 2\zeta_x^t + \zeta_{x-\Delta x}^t}{\Delta x^2}. \quad (2.31)$$

Переходячи до індексів i та n , бачимо, що рівняння (2.31) співпадає з рівнянням (2.18), виведеним за допомогою розкладань у ряди Тейлора.

Зауваження 2.10 — У будь-якому методі існує велика довільність при виводі скінченно-різницевих рівнянь.

Приклад 2.11

Якщо інтегрувати за часом не від t до $t + \Delta t$, а від $t - \Delta t$ до Δt , а в якості середньої точки обрати t , то вийде рівняння (2.17). (Як уже було відзначено вище, це рівняння безумовне нестійке.)

Зауваження 2.12 — Переваги інтегрального методу можна буде оцінити після того, як буде вивчена властивість консервативності. Відмінність між інтегральним методом і методом розкладання в ряди Тейлора найбільш чітко проявляється при використанні непрямокутних систем координат.

§2.1.iv Метод контрольного об'єму

Метод контрольного об'єму для виводу скінченно-різницевих рівнянь дуже схожий на інтегральний метод, але більш фізичний по суті. Цей метод найбільше яскраво висвітлює

процес “чисельного моделювання”. Найкращими прикладами такого підходу можуть служити широко відомий метод часток у гніздах (*eng.* PIC) і метод рідини в гніздах (*eng.* FLIC), розвинені в Лос-Аламоській лабораторії (Еванс і Харлоу [1947]; Джентрі, Мартін і Далі [1966]).

Виберемо в просторі контрольний об’єм із центром у точці x , як показано на малюнку:

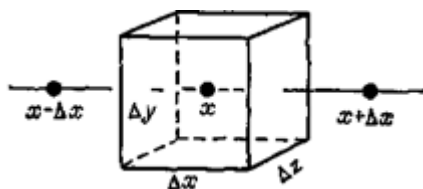


Рис. 2.5: Контрольний об’єм (КО) в точці x

У якості значення ζ у вузловій точці сітки будемо брати середнє значення цієї функції по контрольному об’єму (КО). Для питомої (тобто усередненої за об’ємом) величини ζ , де ζ можна тепер розглядати як будь-яку змінну величину, запишемо $\zeta = \Gamma / \text{об’єм}$.

Наприклад, якщо ζ — щільність ρ , то Γ — повна маса, укладена в розглянутому контрольному об’ємі із центром у точці x . Якщо ζ — вихор, то Γ — циркуляція. Тепер запишемо словесне формулювання наступного закону збереження:

Закон 2.13

Повне збільшення величини Γ у КО = чистий приплив Γ у КО за рахунок конвекції + чистий приплив Γ у КО за рахунок дифузії.

Повне збільшення величини $\Gamma = \xi \times (\text{об’єм})$ у КО за проміжок часу Δt рівно

$$\zeta|_x^{t+\Delta t} \times (\Delta x \Delta y \Delta z) - \zeta|_x^t \times (\Delta x \Delta y \Delta z).$$

Конвективний потік величини Γ , що втікає в КО через ліву грань за одиницю часу, становить

$$(u\zeta)_{x-\Delta x/2} \times (\text{площа лівої грані}) = (u\zeta)_{x-\Delta x/2} \times (\Delta y \Delta z),$$

де u може бути змінною, а значення функцій на грані $x - \Delta x/2$, які ще треба визначити, повинні бути деякими середніми за Δt . Виходячи із цієї величини вхідного конвективного потоку за одиницю часу, повний конвективний потік величини Γ у КО за проміжок часу Δt через грань $x - \Delta x/2$ можна записати так:

$$(u\zeta)_{x-\Delta x/2} \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Аналогічно, повний конвективний потік Γ , що виходить з КО через $x + \Delta x/2$, буде рівний

$$(u\zeta)_{x+\Delta x/2} \Delta y \Delta z \Delta t,$$

а чистий приріст Γ у КО виходить як різниця сумарного потоку, що втікає, і сумарного потоку, що витікає, тобто

$$\left[(u\zeta)_{x-\Delta x/2} - (u\zeta)_{x+\Delta x/2} \right] \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Щоб обчислити потік у КО за рахунок дифузії, необхідно мати закон для швидкості дифузії. Найпростіший такий закон (що узгодиться з рівнянням переносу вихору) є лінійним і говорить, що дифузійний потік величини ζ за одиницю часу, який ми назвемо q , пропорційний градієнту ζ (закон Фіка):

$$q = -\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Тут мінус указує на те, що збільшення ζ в напрямку x викликає дифузцію в протилежному напрямку.

Дифузійний потік, що втікає в КО через ліву грань за одиницю часу, рівний

$$q|_{x-\Delta x/2} \Delta y \Delta z = -\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \Delta y \Delta z,$$

а потік, що впливає з КО через праву грань за одиницю часу становить

$$q|_{x+\Delta x/2} \Delta y \Delta z = -\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} \Delta y \Delta z,$$

Тут знову значення на гранях $x \pm \Delta x/2$ становить собою деякі середні за час Δt , які ще повинні бути визначені. Величина потоку в КО за рахунок дифузії за проміжок часу Δt рівна

$$\alpha \Delta y \Delta z \Delta t \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \right].$$

Тоді закон 2.13 можна переписати наступним чином:

$$\begin{aligned} \zeta|_x^{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z - \zeta|_x^t \Delta x \Delta y \Delta z &= \left[(u\zeta)_{x-\Delta x/2} - (u\zeta)_{x+\Delta x/2} \right] \Delta y \Delta z \Delta t + \\ &+ \alpha \Delta y \Delta z \Delta t \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Розділивши на $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$, одержимо

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\zeta|_x^{t+\Delta t} - \zeta|_x^t \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[(u\zeta)_{x-\Delta x/2} - (u\zeta)_{x+\Delta x/2} \right] + \frac{\alpha}{\Delta x} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \right]. \quad (2.33)$$

Як і в інтегральному методі, при подальшому виводі скінченно-різницевих виразів з'являється деяка свобода дій при визначенні значень функцій на границях об'єму. У якості значень на границі об'єму можна обрати середнє арифметичне значення в сусідніх вузлах у момент часу n ; тоді

$$(u\zeta)_{x\pm\Delta x} = \frac{1}{2} \left[(u\zeta)_{x\pm\Delta x}^n + (u\zeta)_x^n \right]$$

і градієнти

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x\pm\Delta x/2} = \frac{\delta \zeta}{\delta x} \Big|_{x\pm\Delta x/2}^n$$

можна обчислити за допомогою центральних різниць:

$$\frac{\delta \zeta}{\delta x} \Big|_{x\pm\Delta x/2}^n = \frac{\zeta|_{x\pm\Delta x}^n - \zeta|_x^n}{\Delta x}.$$

У результаті рівняння (2.33) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} [\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t] = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} [(u\zeta)_{x+\Delta x}^n + (u\zeta)_x^n] - \frac{1}{2} [(u\zeta)_{x-\Delta x}^n + (u\zeta)_x^n] \right) + \\ + \frac{\alpha}{\Delta x} \left[\frac{\zeta_{x+\Delta x}^n - \zeta_x^n}{\Delta x} - \frac{\zeta_{x-\Delta x}^n - \zeta_x^n}{\Delta x} \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

або

$$\frac{\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t}{\Delta t} = \frac{(u\zeta)_{x+\Delta x}^n - (u\zeta)_{x-\Delta x}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{x+\Delta x}^t - 2\zeta_x^t + \zeta_{x-\Delta x}^t}{\Delta x^2}. \quad (2.35)$$

Якщо повернутися до індексів i та n , то це рівняння збіжиться з отриманим раніше рівнянням (2.18).

У такий спосіб видно, що всі чотири методи виводу скінченно-різницевих аналогів диференціальних рівнянь у частинних похідних — розкладання в ряд Тейлора, метод поліноміальної апроксимації, інтегральний метод і метод контрольного об'єму — можуть привести до однакових різницевих виразів. Це обнадіює й зміцнює довіру до всіх цих методів. Але в кожному з них є деяка свобода дій, так що вибір методу для виводу скінченно-різницевого аналога диференціального рівняння визначає цей аналог не єдиним способом. Насправді, існує багато аналогів. Незважаючи на те що більшість із них різняться у незначних деталях, вони можуть сильно відрізнятися по своїй поведінці. Одним з дивних аспектів обчислювальної гідродинаміки є наявність великої кількості правдоподібних схем, які, однак, не працюють, як, наприклад, було зазначено для рівняння (2.17). Це справедливо як для основних (тобто призначених для розрахунків внутрішніх точок) різницевих схем, так і для схем, призначених для розрахунків граничних точок.

Перевага цього методу полягає в тому, що він заснований на макроскопічних фізичних законах, а не на використанні математичного апарата неперервних функцій. Особливо важливим це виявляється в тих випадках, коли мають справу з розрідженими газами або із динамікою нев'язкого газу з ударними хвилями. У цих випадках диференціальні рівняння не мають усюди неперервних розв'язків, які можна було б у кожній крапці представити рядами Тейлора. Однак маса, наприклад, все-таки зберігається, і конвективна частина рівняння (2.35) як і раніше залишається справедливою. Але навіть і в тих випадках, коли неперервні розв'язки існують, у методі контрольного об'єму увага зосереджується на фактичному виконанні фізичних законів макроскопічно, а не тільки при Δx і Δt , що прямують до нуля. Це лежить в основі поняття консервативності скінченно-різницевого методу, до обговорення якого ми переходимо.

§2.2 Властивість консервативності

Означення 2.2. Скінченно-різницевий метод є *консервативним*, якщо він забезпечує виконання певних інтегральних законів збереження, справедливих для вихідних диференціальних рівнянь.

Розглянемо рівняння переносу вихору (1.18):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (V\zeta) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \zeta,$$

поклавши $\frac{1}{\text{Re}} = \alpha$,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (V\zeta) + \alpha \nabla^2 \zeta, \quad (2.36)$$

Проінтегруємо це рівняння по деякій просторовій області R :

$$\int_R \frac{\partial \zeta}{\partial t} dR = - \int_R \nabla \cdot (V\zeta) dR + \int_R \alpha \nabla^2 \zeta dR. \quad (2.37)$$

Оскільки t не залежить від просторових змінних, маємо

$$\int_R \frac{\partial \zeta}{\partial t} dR = \frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dR. \quad (2.38)$$

Використовуючи формулу Гауса-Остроградського, одержуємо

$$\int_R \nabla \cdot (V\zeta) dR = \int_{\partial R} (V\zeta) \cdot \vec{n} ds, \quad (2.39)$$

де ∂R — границя R , \vec{n} — одиничний вектор нормалі до поверхні (додатний напрямок відповідає зовнішній нормалі) і ds — диференціал довжини дуги границі ∂R . Аналогічно, за тією ж формулою

$$\int_R \alpha \nabla^2 \zeta dR = \alpha \int_{\partial R} (\nabla \zeta) \cdot \vec{n} ds, \quad (2.40)$$

Тоді рівняння (2.37) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dR = - \int_{\partial R} (V\zeta) \cdot \vec{n} ds + \alpha \int_{\partial R} (\nabla \zeta) \cdot \vec{n} ds. \quad (2.41)$$

Це рівняння констатує, що швидкість накопичення величини ζ в області R дорівнює сумі конвективного й дифузійного притоків величини ζ в R через ∂R за одиницю часу).

Означення 2.3. Вимога консервативності полягає у тотожному збереженні у скінченно-різницевій схемі цього інтегрального співвідношення.

Розглянемо одновимірне модельне рівняння для граничного випадку нев'язкої рідини ($\alpha = 0$), яке впливає з рівняння (2.36) і має вигляд

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial(u\zeta)}{\partial x}. \quad (2.42)$$

Зауваження 2.14 — Якщо величину ζ трактувати як масову густину, то рівняння (2.42) буде рівнянням нерозривності для стисливого середовища.

Використовуючи різниці вперед за часом і центральні різниці по просторовій змінній, можна записати скінченно-різницевий аналог рівняння (2.42) у вигляді

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = - \frac{u_{i+1}\zeta_{i+1} - u_{i-1}\zeta_{i-1}}{2\Delta x}$$

Зауваження 2.15 — У правій частині тут і надалі опущено верхній індекс n оскільки він усюди однаковий.

Розглянемо тепер одновимірну область R (причому i змінюється від I_1 до I_2) і обчислимо суму $\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i \Delta x$, відповідну до інтеграла $\frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta \, dR$ в рівнянні (2.41):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^n \Delta x \right] &= \sum_{i=I_1}^{I_2} \left(-\frac{u_{i+1} \zeta_{i+1} - u_{i-1} \zeta_{i-1}}{2\Delta x} \right) \Delta x = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=I_1}^{I_2} [(u\zeta)_{i-1} - (u\zeta)_{i+1}] = \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left((u\zeta)_{I_1-1} + (u\zeta)_{I_1} \right) - \frac{1}{2} \left((u\zeta)_{I_2} + (u\zeta)_{I_2+1} \right) = \\ &= (u\zeta)_{I_1-1/2} - (u\zeta)_{I_2+1/2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Зауваження 2.16 — Сумування в (2.43) відбулося за допомогою телескопічного методу.

Отримане рівняння показує, що швидкість накопичення величини ζ в області R в точності рівна потоку величини ζ в область R через границі $I_1 - 1/2$ й $I_2 + 1/2$ (це впливає також з рівняння (2.41) при $\alpha = 0$). Таким чином, отриманий скінченно-різницевий аналог зберігає інтегральну властивість, яку виражає формула Остроградського-Гауса для диференціального рівняння, і ми будемо говорити, що цей аналог має властивість консервативності.

Властивість консервативності залежить як від використаної форми диференціального рівняння, так і від прийнятої скінченно-різницевої схеми.

Приклад 2.17

Неконсервативна форма одновимірного модельного рівняння (1.24) при $\alpha = 0$ така:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (2.45)$$

Доведення. Використовуючи ту ж схему, що й у попередньому прикладі, тобто різниці вперед за часом і центральні різниці по просторовій змінній, одержуємо

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -u_i^n \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (2.46)$$

Тоді суми, що відповідають (2.43)–(2.44), мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^n \Delta x \right] &= \sum_{i=I_1}^{I_2} \left(-u_i \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2\Delta x} \right) \Delta x = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=I_1}^{I_2} u_i (\zeta_{i-1} - \zeta_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Але ця сума не може бути згорнута телескопічним методом! (за винятком частинного випадку, коли $u_i = \text{const}$). Виходить, у цьому випадку скінченно-різницевий аналог виявляється не в змозі забезпечити виконання формули Остроградського-Гауса для диференціального рівняння. \square

Зауваження 2.18 — Тепер стає ясным зміст термінів “консервативна” і “дивергентна” форма рівняння (1.16).

У першому випадку консервативність забезпечується застосуванням методу контрольного об'єму при виводі скінченно-різницевих виразів. При використанні консервативної форми конвективний потік величини ζ , що впливає через грань $I_1 + 1/2$ із контрольного об'єму із центром у точці i за одиницю часу, становить $(u_i \zeta_i + u_{i+1} \zeta_{i+1})/2$ і в точності рівний конвективному потоку, що втікає через ту ж грань у контрольний об'єм із центром у точці за одиницю часу. Як показано вище, у випадку неконсервативної форми це не мало б місця.

Вправа 2.2. Показати, що використання для $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ виразу (2.12) із центральними різницями при $\alpha > 0$ забезпечує консервативність для дифузійних членів.

Ясно, що при $\alpha > 0$ єдиний шлях забезпечити збереження сумарного потоку в загальному випадку (коли u є функцією просторової змінної) полягає в незалежному збереженні конвективних і дифузійних членів; у неодновимірному випадку необхідно забезпечити консервативність цих членів окремо по кожній просторовій змінній.

Важливість властивості консервативності легко зрозуміти на прикладі рівняння нерозривності для стисливого середовища. Розглянемо задачу про природню конвекцію в повністю замкненому посуді з непроникними стінками. У початковий момент часу вважаємо, що в повному обсязі $V = 0$. До нижньої стінки посудини підводить тепло, і відбувається природня конвекція, що можливо досягає стаціонарного стану. Якщо для розрахунків застосовується яка-небудь неконсервативна схема, то повна маса в досліджуваному об'ємі буде мінятися. Якщо ж використовується консервативна схема, то повна маса не буде мінятися (без врахування машинних помилок округлення). Слід зауважити, що помилки, викликані порушенням збереження маси, зменшуються при $\Delta x \rightarrow 0$, але в практичних обчисленнях зі скінченною величиною Δx ці помилки є суттєвими.

Ці міркування ми вважаємо істотними й переконливо рекомендуємо застосовувати консервативні схеми. Однак тут є доводи й за й проти, причому приклади чисельних контрольних розрахунків, опубліковані в літературі, не дають можливості зробити однозначний вибір. Звернемося до цих доводів і до результатів контрольних розрахунків.

Властивість консервативності не обов'язково пов'язане з підвищенням точності схеми. Наприклад, нестійкі розв'язки консервативних рівнянь зберігають властивість консервативності. Більше того, неконсервативний метод може бути в деякому змісті точніше консервативного. Наприклад, для виразу функцій за значеннями у вузлах сітки можна було б застосовувати одновимірні апроксимації поліномами високого порядку й при цьому похідні по просторових змінних будуть, імовірно, визначатися з помилкою більш високого. Однак побудована в такий спосіб схема може бути неконсервативною, а якщо критерій точності включає умова консервативності, то неконсервативна схема виявиться менш точною.

Дотепер досвід показує, що консервативні схеми, загалом кажучи, дають більш точні результати. Чен [1968] і Аллен [1968] показали, що за допомогою консервативної схеми виходять суттєво більш точні результати для деяких розв'язків рівняння Бюргерса (1.25) і (1.26). Сайрус і Фолтон [1967] з'ясували, що для еліптичних рівнянь консервативна схема дає більш точні результати, ніж неконсервативна. На прикладі задачі про плин усередині замкненої прямокутної області з однієї рухливою границею Торранс зі співавторами [1972] переконалися в тому, що навіть схема першого порядку точності для рівнянь у консервативній формі дає більш точні результати, ніж схема другого порядку для рівнянь у

неконсервативній формі. Переваги розрахунків ударних хвиль при консервативній формі рівнянь (Гері [1964]) добре відомі, однак слід помітити, що в роботі Гару хвилі розрідження трохи точніше розраховувалися за неконсервативною схемою. Крім того, дивергентна форма рівнянь більш осмислена фізично й полегшує постановку граничних умов для плинів стисливої рідини.

Піачек [1966] показав, як вивести консервативні рівняння в осесиметричному випадку. Робертс і Вейс [1966] обговорювали консервативність для векторних величин. Лаку [1954] першим використовував у скінченно-різницевих обчисленнях консервативну форму рівнянь руху стислого газу, запропоновану Курантом і Фрідріхсом [1948], і детально досліджував властивість консервативності.

Метеорологи поширили ідею консервативності на величини, пов'язані з кількістю руху. Браян [1963, 1966] запропонував схеми, що забезпечують збереження не тільки вихру, але й кінетичної енергії. Схема Аракави [1966] зберігає вихор, квадрат вихру, кількість руху й кінетичну енергію. Але такі додаткові ускладнення схем не завжди виправдані й вигідні. Бенгтсон [1964] показав, що подібні ускладнені схеми дають невеликі поліпшення, незначні стосовно дійсних даних, і в той же час можуть привести до більших помилок у швидкості хвиль. Однак у граничному нев'язкому випадку збереження кінетичної енергії дає можливість уникнути “нелінійної” нестійкості, розглянутої в роботах Філіпса [1959] і Сандквіста [1963]. Бенгтсон [1964] запропонував схему, що зберігає різницю між кінетичною енергією й (метеорологічної) повною статичною стійкістю, що корисно в задачах з більшими градієнтами сили тяжіння.

Звичайно схеми, що забезпечують збереження основних величин, таких, як вихор, маса, кількість руху або повна енергія, не вимагають великої роботи. У двовимірній задачі про перенос вихру додаткова робота полягає у виконанні двох зайвих скінченно-різницевих операцій для одержання складових швидкості з розв'язку для функції струму й двох зайвих множень. У задачах про рух стислого середовища додаткової роботи більше, що в деяких випадках може виявитися причиною відмови від застосування консервативної схеми (метод Моретті). При розв'язку багатьох задач консервативні схеми не використовувалися, див., наприклад, роботи Аллена й Саусвела [1955], Хина й Макано [1966], Позначка й Лавана [1968], Бао й Доґерті [1969]. Помітимо, що всі схеми методу характеристик є неконсервативними й що при скінченно-різницевому розв'язку рівнянь прикордонного шару консервативна схема звичайно також не використовується. У таких випадках властивість консервативності може служити для перевірки точності обчислень.

Помітимо на закінчення, що неконсервативна форма для члена $\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$ зі змінним коефіцієнтом дифузії може привести до більш точних результатів, ніж консервативна (див. задачі (2.3) і (2.4)).

Вправа 2.3. Показати, що перший момент рівняння переносу вихору в нев'язкої рідини ($1/\text{Re} = 0$), отриманий множенням рівняння (1.18) на ζ , можна записати в консервативній формі:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot (VE).$$

Означення 2.4. Величина $E = \zeta^2$ називається *енстрофією*

3 Точні та узагальнені розв'язки диференціальних та різницевих рівнянь у банахових просторах

Поняття точного та узагальненого розв'язків диференціальних та різницевих рівнянь у банахових просторах. Розв'язуючі оператори. Коректність постановок задач. Збіжність та стійкість. Теорема Лакса.

Нехай B — нормований банаховий простір. Функції, які залежать від просторових змінних x і координати часу t , при фіксованому t будемо тлумачити як точки цього функціонального простору і позначати їх символом u . Стан фізичної системи зображатимемо точкою функціонального простору, а її положення в часі відображатиме рух цієї точки у функціональному просторі B . Через $\tilde{\mathbb{R}}_n$ позначимо n -вимірний комплексний евклідів векторний простір зі скалярним добутком

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j$$

і нормою

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j \bar{a}_j}.$$

Введемо також допоміжний нормований простір B' , елементами якого є довільні неперервні криві, які при кожному $t \in [0, T]$, визначені як функції просторових змінних $w(t) \in B$. В B' введемо норму так:

$$\|w\|_{B'} = \max_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\|_B.$$

§3.1 Скінченно-різницеві задачі в абстрактних просторах Банаха

Розглянемо однопараметричне сімейство елементів $u(t) \in B$ з дійсним параметром t таких, що

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = Au(t); \quad u(0) = u_0; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

де u_0 — заданий елемент з B , який характеризує початковий стан системи; A — лінійний оператор.

Означення 3.1. Точний розв'язок задачі визначимо як однопараметричне сімейство $u(t)$, кожен елемент якого належить області визначення оператора A , $\forall t \in [0, T]$, $u(0) = u_0$ і

$$\left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

при $\Delta t \rightarrow 0, \forall t \in [0, T]$.

Позначимо через D множину елементів $u_0 \in B$, для кожного з яких існує єдиний розв'язок задачі (3.1) при $u(0) = u_0$, а збіжність в (3.2) рівномірна за t . Нехай $E_0(T)$ відображає D в B і при фіксованому t встановлює відповідність між u_0 і $u(t)$. Тоді $u(t) = E_0(T)u_0$ є розв'язком задачі для тих $u_0 \in B$, для яких існує точний розв'язок.

Означення 3.2. Задачі, визначені лінійним оператором A , назовемо *коректними за Адамаром*, якщо:

1. область визначення D перетворення $E_0(t)$ щільна в B ;
2. сімейство перетворень $E_0(t)$ рівномірно обмежене, тобто існує така додатна стала $K \in \mathbb{R}$, що $\|E_0(t)\| \leq K$ при $0 \leq t \leq T$.

Перша умова стверджує, що якщо для деякого початкового значення u_0 точний розв'язок не існує, то цей початковий елемент можна апроксимувати як завгодно точно з допомогою тих початкових елементів з D , для яких існує точний розв'язок. З другої умови випливає, що розв'язок задачі неперервно залежить від початкового значення.

§3.2 Узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь

Теорема 3.1 (теорема про розширення оператора)

Обмежений лінійний оператор T , область визначення якого щільна в B , має єдине лінійне обмежене розширення T' , область визначення якого співпадає з B , і таке, що $\|T\| = \|T'\|$.

Означення 3.3. Обмежений лінійний оператор $E_0(t)$ з щільною в B областю визначення має єдине розширення $E(t)$, яке назовемо *узагальненим розв'язуючим оператором*.

Оператор $E(t)$ визначений на всьому просторі B , обмежений за нормою тим же числом K , що і оператор $E_0(t)$.

Означення 3.4. Рівність

$$u(t) = E(t)u_0$$

є *узагальненим розв'язком задачі* для довільного початкового елемента $u_0 \in B$.

Якщо оператор A явним чином залежить від часу, то узагальнений розв'язуючий оператор стає функцією двох змінних. Дійсно, оскільки в момент часу t_0 задано початковий стан u_0 , то $u(t) = E(t, t_0)u_0$ і в силу напівгрупової властивості $E(t_2, t_0) = E(t_2, t_1)E(t_1, t_0)$ при $t_0 \leq t_1 \leq t_2$.

Розглянемо неоднорідну крайову задачу

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - Au(t) = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad (3.3)$$

де u_0 і $g(t)$ задані, а $g(t)$ рівномірно або кусково рівномірно неперервна (в нормі простору B) за часом t функція на відрізку $0 \leq t \leq T$. Вважаємо, що оператор A , який визначає коректно поставлену однорідну задачу, замкнений, а області визначення всіх його степенів щільні в B .

Наступні твердження доводяться в []:

Твердження 3.2

Якщо

1. u_0 і $g(t) \in D(A)$;
2. $g(t) \in D(A^2)$;
3. функції $Ag(t)$ і $A^2g(t)$ неперервні,

то

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)g(s) \, ds \quad (3.4)$$

є точним розв'язком задачі (3.3).

Твердження 3.3

Якщо на u_0 і $g(t)$ не накладено ніяких обмежень, крім неперервності $g(t)$, або ці умови зводяться тільки до умови існування інтегралу в (3.4), то (3.4) є узагальненим розв'язком задачі (3.3).

Твердження 3.4

При вказаних вимогах відносно оператора A і функції $g(t)$ узагальнений розв'язок існує.

Зауваження 3.5 — Єдиність розв'язку впливає з єдиності однорідної задачі, яка за припущенням поставлена коректно.

§3.3 Скінченно-різницьові задачі

Розглянемо однорідне скінченно-різницьове рівняння

$$B_1 u^{n+1} = B_0 u^n, \quad (3.5)$$

де $B_0 = B_0(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots)$ і $B_1 = B_1(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots)$ — лінійні скінченно-різницьові оператори, залежні від приростів $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ і можливо від просторових змінних. Обидві частини рівняння є лінійними функціями значень u , визначених в точках з деякої множини (шаблону).

Нехай існує обернений оператор B_1^{-1} , $B_1^{-1}B_0$ обмежений і вони визначені на всьому B , а $\Delta x_i = q_i(\Delta t)$, $i = \overline{1, d}$, де d — розмірність простору. Позначимо

$$B_1^{-1}(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots) \cdot B_0(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots) = C(\Delta t)$$

тоді

$$u^{n+1} = C(\Delta t)u^n. \quad (3.6)$$

Означення 3.5. Сімейство операторів $C(\Delta t)$ узгоджено апроксимує крайову задачу (3.1), якщо для довільного $u(t)$ з деякого класу U точних розв'язків, початкові елементи яких утворюють в B цільну множину, справедлива умова узгодження:

$$\left\| \left(\frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} - A \right) u(t) \right\| \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$, $0 \leq t \leq T$.

Тут I — одиничний оператор.

Означення 3.6. Враховуючи (3.2), маємо

$$\left\| \frac{u(t + \Delta t) - C(\Delta t)u(t)}{\Delta t} \right\| \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$, $0 \leq t \leq T$, в якому вираз під знаком норми є *похибкою апроксимації*.

Якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ таке, що

$$\|(C(\Delta t) - E(\Delta t)) u(t)\| < \varepsilon \Delta t, \quad (3.9)$$

при $0 \leq t \leq T$, $0 < \Delta t < \delta$, то *збіжність рівномірна за часом t* .

Означення 3.7. Сімейство $C(\Delta t)$ забезпечує *збіжну апроксимацію* задачі, якщо для будь-якого фіксованого $t \in [0, T]$, для кожного $u_0 \in B$ і для кожної збіжної до нуля послідовності додатних приростів $\{\Delta_j t\}_{j=1}^{\infty}$, має місце граничне відношення

$$\|C(\Delta_j t)^{n_j} u_0 - E(t)u_0\| \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

при $j \rightarrow \infty$, де $n_j \in \mathbb{N}$ такі, що $n_j \Delta_j t \rightarrow t$ при $j \rightarrow \infty$.

Означення 3.8. Апроксимацію $C(\Delta t)$ назвемо *стійкою*, якщо для деякого $\tau > 0$ нескінченна множина операторів

$$C(\Delta t)^n, \quad 0 \leq n\Delta t \leq T, \quad 0 < \Delta t < \tau \quad (3.11)$$

рівномірно обмежена.

§3.4 Теорема Лакса

Теорема 3.6 (Лакса, про еквівалентність)

Нехай задача (3.1)–(3.2) коректно поставлена та її скінченно-різницева апроксимація задовольняє умову узгодження. Тоді *стійкість необхідна і достатня для збіжності*.

Доведення. Необхідність. Спочатку ми покажемо, що збіжна схема необхідно є стійкою. Ми стверджуємо, що для всякої збіжної схеми й для довільного початкового фіксованого елемента $u_0 \in B$ величини $\|C(\Delta t)^n u_0\|$, ($0 < \Delta t < \tau$, $0 \leq n\Delta t \leq T$), обмежені при деякому $\tau > 0$. Дійсно, якщо це не так, то знайдуться дві послідовності $\Delta_1 t, \Delta_2 t, \dots, \Delta_j t, \dots$ і $n_1, n_2, \dots, n_j, \dots$, для яких норми елементів $C(\Delta_1)^{n_1} t, C(\Delta_2)^{n_2} t, \dots, C(\Delta_j)^{n_j} t, \dots$ необмежено зростають (при цьому $\Delta_j t$ повинні прямувати до нуля в силу припущення про неперервну залежність $C(\Delta t)$ від додатних значень Δt); із цих елементів ми можемо вибрати

підпоследовність, для якої величини $n_j \delta_j t$ збігаються до деякого t з відрізка $0 \leq t \leq T$; але це суперечить припущенню про збіжність схеми, оскільки при наявності збіжності норми елементів цієї підпоследовності повинні були б прямувати до кінцевої границі $\|E(t)u_0\|$. Отже, існує така функція $K_1(u)$, що неперервність $\|C(\Delta t)n_j u_0\| \leq K_1(u)$ виконується для всіх операторів з множини (3.11) і всіх $u \in B$, отже множина (3.11) рівномірно обмежена. Таким чином, апроксимація стійка.

Достатність. Щоб довести зворотне твердження, припустимо, що $u(t) = E(t)u_0$ є точним розв'язком, що належать класу U , про який йшла мова при визначенні узгодженості. Нехай ε, δ ті ж, що й в умові узгодженості у формі (3.9), n_j і $\Delta_j t$ обрані так само, як і при визначенні збіжності, а ψ_j позначає різницю між обчисленим і точним значенням і в момент часу $n_j \Delta_j t$, тобто

$$\psi_j = \left[C(\Delta_j t)^{n_j} - E(n_j \Delta_j t) \right] = \sum_{k=0}^{n_j} C(\Delta_j t)^k \left[C(\Delta_j t) - E(\Delta_j t) \right] E((n_j - 1 - k) \Delta_j t) u_0. \quad (3.12)$$

Третя частина цієї рівності, співпадає з другою: після приведення подібних залишаються тільки перший і останній члени. Норму величини ψ_j можна оцінити за допомогою (3.9) і нерівності трикутника: якщо $0 < \Delta_j t < \delta$, то

$$\|\psi_j\| \leq K_2 \sum_{k=0}^{n_j-1} \varepsilon \Delta_j t = K_2 \varepsilon n_j \Delta_j t \leq K_2 \varepsilon T, \quad (3.13)$$

де K_2 позначає рівномірну границю множини (3.11). Оскільки ε довільне, то $\|\psi_j\| \rightarrow 0$ при $\Delta_j t \rightarrow 0$, $n_j \Delta_j t \rightarrow t$. Для доведення збіжності покажемо, що в граничному переході при $j \rightarrow \infty$ в (3.12) можна замінити $E(n_j \Delta_j t)$ на $E(t)$. Якщо $s = |t - n_j \Delta_j t|$, $t' = \min\{t, n_j \Delta_j t\}$, то в силу напівгрупової властивості сім'ї $E(t)$ маємо $E(s + t') = E(s)E(t')$, тому $E(n_j \Delta_j t) - E(t) = \pm(E(s) - I)E(t')$, причому знак визначається знаком різниці $t - n_j \Delta_j t$. У будь-якому випадку

$$\|(E(n_j \Delta_j t) - E(t))u_0\| \leq K_E \|(E(s) - I)u_0\|, \quad (3.14)$$

де K_E позначає границю для $\|E(t)\|$ при $0 \leq t \leq T$. Але права частина останньої нерівності прямує до нуля, якщо $s \rightarrow 0$, тобто якщо $j \rightarrow \infty$. Отже, величина

$$\|(E(s) - I)u_0\| \quad (3.15)$$

може бути зроблена як завгодно малою вибором достатньо малих $\Delta_j t$ і $|t - n_j \Delta_j t|$. Це справедливо для довільного u_0 , що є початковим елементом точного розв'язку із класу U : але такі елементи щільні в B , тому для довільного $u \in B$ з них можна вибрати последовність u_1, u_2, \dots збіжну до u . Тому

$$\left(C(\Delta_j t)^{n_j} - E(t) \right) u = \left(C(\Delta_j t)^{n_j} - E(t) \right) u_m + C(\Delta_j t)^{n_j} (u - u_m) - E(t) (u - u_m). \quad (3.16)$$

Тут два останні члени в правій частині можуть бути зроблені як завгодно малими за допомогою вибору досить великого m , оскільки клас (3.11) і множина операторів $E(t)$ рівномірно обмежені, а малість першого члена може бути забезпечена за рахунок вибору достатньо малих $\Delta_j t$ і $|t - n_j \Delta_j t|$. Оскільки u — довільний елемент із B , то збіжність встановлена й теорема про еквівалентність доведена. \square

Відзначимо в якості природного наслідку цієї теореми, що для даного початкового елемента u_0 збіжність рівномірна по t на відрізку $[0, T]$ у тому розумінні, що обмеження, які

потрібно накладати на $\Delta_j t$ і $|t - n_j \Delta_j t|$, щоб зробити (3.16) нескінченно малим, не залежать ні від вибору t , ні від вибору послідовності $\Delta_j t$. Ця обставина має велике практичне значення, тому що дозволяє при чисельному інтегруванні знаходити такий крок Δt , при якому наближений розв'язок виявляється досить точним на всьому відрізку $[0, T]$ одночасно. Часто для досягнення потрібної точності Δt варіюють у процесі обчислень, але існує таке граничне додатне значення Δt , нижче якого заходити нема рації.

Викладену теорему Лакса можна дуже просто застосувати до неявного різницевого рівняння для одномірного завдання дифузії

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.17)$$

Насамперед покажемо, що розв'язок цього рівняння задовольняє наступному принципу максимуму. Припустимо, що рівняння розглядається в прямокутнику $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq T$ і що Δx вибирається рівним a/J , де J — натуральне число. Тоді максимальне значення M_1 , що досягається величиною u_j^n усередині цього прямокутника, не може перевищувати максимального значення M_2 , що досягається початковими й граничними значеннями (тобто значеннями на відрізках прямих $t = 0$, $x = 0$, $x = a$). Дійсно, припустимо протилежне, а саме що $M_1 > M_2$, і нехай (n, j) — перша внутрішня точка сітки, у якій $u_j^n = M_1$ (перша у тому розумінні, що індекси n і j мають найменші значення). Тоді в цій точці сітки ліва частина наведеного вище рівняння повинна бути додатна, а права від'ємна, тому що u_j^n за припущенням перевершує сусіднє значення u_{j-1}^n ліворуч і сусіднє значення u_{j+1}^{n-1} знизу й щонайменше дорівнює сусідньому значенню u_{j+1}^n праворуч. Отже, наше припущення неправильне, і принцип максимуму встановлений. Очевидно, що ці міркування можна застосувати й до $-u_j^n$ і тим самим установити, що $|u_j^n|$ обмежені при будь-якому виборі сітки, тобто що розглянуте різницеве рівняння стійке.

Система різницевих рівнянь для задачі (3.3) має вигляд

$$B_1 u^{n+1} - B_0 u^n = g^{n+1}, \quad u^0 = u_0, \quad (3.18)$$

де B_1 і B_0 — розглянуті раніше різницеві оператори, а g^n апроксимує $g(n\Delta t)$. Якщо величину $\|g^n - g(n\Delta t)\|$ можна зробити як завгодно малою рівномірно за n при $0 \leq n\Delta t \leq T$ за допомогою вибору Δt , то останнє різницеве рівняння можна подати у вигляді

$$u^{n+1} - C(\Delta t)u^n = D(\Delta t)g^{n+1}, \quad (3.19)$$

де $C(\Delta t) = B_1^{-1}B_0$ і $D(\Delta t) = B_1^{-1}$ обмежені і залежать тільки від Δt і, можливо, координат, а Δx_i можуть бути виражені через Δt .

З (3.19) випливає

$$u^n = C(\Delta t)^n u_0 + \Delta t \sum_{j=1}^n C(\Delta t)^{n-j} g^j. \quad (3.20)$$

Якщо виконуються умови теореми Лакса, то остання сума апроксимує інтеграл з (3.4), звідки випливає збіжність наближеного розв'язку до точного.

4 Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі

Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі. Методи дослідження. Особливості подання початкових умов. Зведення їх до одношарових.

§4.1 Багатошарові чисельні моделі

Нехай крайова задача

$$\frac{\partial \vec{u}(t)}{\partial t} = A\vec{u}, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

апроксимується за допомогою $(q+1)$ -шарової різницевої схеми

$$B_q \vec{u}^{n+q} + B_{q-1} \vec{u}^{n+q-1} + \dots + B_0 \vec{u}^n = 0, \quad (4.2)$$

де B_q, \dots, B_0 — скінченно-різницеві оператори, а \vec{u}^n — деяка апроксимація $\vec{u}(n\Delta t)$. Припустимо, що рівняння (4.2) разом з відповідними граничними умовами має єдиний розв'язок відносно \vec{u}^{n+q} , залежний від $\vec{u}^{n+q-1}, \dots, \vec{u}^n$. Запишемо еквівалентне до (4.2) рівняння

$$\vec{u}^{n+q} = C_{q-1} \vec{u}^{n+q-1} + \dots + C_0 \vec{u}^n \quad (4.3)$$

де $C_i = C_i(\Delta t) = B_q^{-1} B_i$ — лінійні обмежені оператори, а Δx_j є заданими функціями від Δt .

Уведемо нові залежні змінні: $\vec{v}^n = \vec{u}^{n-1}$, $\vec{w}^n = \vec{v}^{n-1}$ і так далі, тоді рівняння (4.3) замінено системою

$$\vec{u}^{n+1} = C_{q-1} \vec{u}^n + C_{q-2} \vec{v}^n + C_{q-3} \vec{w}^n + \dots, \quad \vec{v}^{n+1} = \vec{u}^n, \vec{w}^{n+1} = \vec{v}^n, \dots \quad (4.4)$$

Якщо \tilde{B} це простір, елементами якого є q -вимірні вектор-стовпчики

$$\vec{\varphi} = (\vec{u}^{n+q-1} \quad \dots \quad \vec{u}^n)^\top$$

з нормою введеною, наприклад, так:

$$\|(\vec{u} \quad \vec{v} \quad \dots)^\top\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \dots}$$

і якщо покласти

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{q-1} & C_{q-2} & \dots & \dots & C_1 & C_0 \\ E & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & E & 0 \end{pmatrix},$$

де E — тотожний оператор, то рівняння (4.4) можна записати так:

$$\vec{\varphi}^{n+1} = \tilde{C}(\Delta t) \vec{\varphi}^n, \quad (4.5)$$

де

$$\vec{\varphi}^n = (\vec{u}^{n+q} \quad \dots \quad \vec{u}^n)^\top. \quad (4.6)$$

Тут \tilde{C} — матриця, яка відповідає системі (4.4).

Тобто $(q+1)$ -шарова різницева задача (4.3) зводиться до системи двошарових схем.

§4.2 Проблема постановки початкових умов для багатшарових різницевих схем

Початкові дані для диференціальної задачі задаються в момент часу t_0 , а дані для різницевої задачі в точках сітки повинні бути визначені через початкові дані за допомогою апроксимації, яка дозволяє починати обчислення розв'язку за рівнянням (4.3). Припустимо, що значення $\vec{\varphi}$ обчислені точно, тобто

$$\vec{\varphi} = (E((q-1)\Delta t)\vec{u}^0 \quad E((q-2)\Delta t)\vec{u}^0 \quad \dots \quad \vec{u}^0)^\top, \quad (4.7)$$

де $\vec{u}^0 \in B$, а $E(t)$ — розв'язуючий оператор для (4.1). Тоді

$$\tilde{\vec{u}}^0 = (\vec{u}^0 \quad \dots \quad \vec{u}^0)^\top, \quad (4.8)$$

а

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} E((q-1)\Delta t) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & E((q-2)\Delta t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & E \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

— діагональна матриця.

Отже, наближений розв'язок крайової задачі (4.1) визначається формулою

$$\vec{\varphi} = \tilde{C}(\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0, \quad (4.10)$$

яка є апроксимацією виразу

$$(\vec{u}((n+q-1)\Delta t) \quad \vec{u}((n+q-2)\Delta t) \quad \dots \quad \vec{u}(n\Delta t))^\top = E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0. \quad (4.11)$$

Порівняємо $\tilde{C}(\Delta t)^n\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$ з $E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$. При $\Delta t \rightarrow 0$ приходимо до підпростору \tilde{B}^0 простору \tilde{B} , елементами якого є вектори, всі q компонент яких рівні між собою. Тоді

$$(\vec{u}(t) \quad \dots \quad \vec{u}(t))^\top = E(t)(\vec{u}^0 \quad \dots \quad \vec{u}^0)^\top \quad (4.12)$$

До цієї ж границі прямує і $E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ ($\tilde{S} \rightarrow E$). Елементи $\vec{u}(t)$ і \vec{u}^0 належать простору B^0 , але їх апроксимації — ні, вони лежать поза цим простором. При практичних обчисленнях, початкові значення отримуємо не з допомогою обчислення $\vec{\varphi}^0 = \tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$, а з допомогою апроксимації $\vec{\varphi}^0 = \vec{\psi}$. Для того, щоб наближене значення розв'язку $\tilde{\vec{u}}^n$ збігалось до точного розв'язку, необхідно, щоб $\vec{u}^n \rightarrow \vec{u}(t)$, а $\vec{\varphi}^0 = \vec{\psi} \rightarrow \vec{u}(0)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ незалежно одне від одного.

§4.3 Властивості багатшарових різницевих схем

Означення 4.1. Багатопарову різницеву схему (4.5) називають *стійкою*, якщо для деякого додатного τ при $0 < \Delta t < \tau$ і $0 \leq n\Delta t \leq T$ сім'я операторів $\tilde{C}^n(\Delta t)$ з (4.5) рівномірно обмежена $\forall n$.

Означення 4.2. Важливу роль відіграють *умови узгодженості*, які полягають в тому, що існує щільна в просторі B множина U^0 можливих початкових елементів для точних розв'язків така, що якщо $\vec{u}^0 \in U^0$ та існує $\varepsilon > 0$, таке що, якщо покласти

$$\tilde{\vec{u}}^0 = (E(t)\vec{u}^0 \quad \dots \quad E(t)\vec{u}^0) \quad (4.13)$$

то

$$\|(\tilde{C}(\Delta t) - E(\Delta t)\tilde{S})\tilde{\vec{u}}(t)\| < \varepsilon\Delta t \quad (4.14)$$

для достатньо малих Δt і $0 \leq t \leq T$.

Означення 4.3. Апроксимація є *збіжною*, якщо для довільних послідовностей $\Delta_j t$ і n_j , таких що $\Delta_j t > 0$ і $n_j \Delta_j t \rightarrow t$ при $j \rightarrow \infty$, ($0 \leq t \leq T$) та $\forall \vec{u} \in \tilde{B}^0$ буде

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ \vec{\psi} \rightarrow \vec{u}^0}} \left\| \tilde{C}(\Delta_j t)^{n_j} \vec{\psi} - E(t)\vec{u}(t) \right\| = 0. \quad (4.15)$$

Порядок і похибка апроксимації багатопарових різницевих схем визначається звичайним чином.

У [??] доводиться, що істинні такі твердження:

Твердження 4.1

Якщо різницева схема стійка і її похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta t \rightarrow 0$, то умова узгодженості для цієї різницевої схеми виконується.

Твердження 4.2

Для коректно поставленої крайової задачі і її багатопарової апроксимації, яка задовольняє умови узгодженості, стійкість є необхідною і достатньою умовою збіжності.

§4.4 Узгодженість і порядок точності

При дослідженні узгодженості і точності різницевих схем бажано різницеві рівняння подати їх у формі

$$B_q \vec{u}^{n+q} + B_{q-1} \vec{u}^{n+q-1} + \dots + B_0 \vec{u}^n = 0, \quad (4.16)$$

де рівняння не розв'язане відносно \vec{u}^{n+q} . Невизначеність внаслідок множення зліва на довільну не вироджену матрицю знімається тим припущенням, що для довільної достатньо гладкої функції $u(t)$ різницевий оператор в лівій частині апроксимує оператор $\frac{\partial}{\partial t} - A$, тобто

$$B_q u(t + q\Delta t) + \dots + B_0 u(t) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right) u(t) = o(1) \quad (4.17)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$.

Означення 4.4. *Порядок точності* різницевої схеми визначимо як найбільше дійсне число ρ , для якого

$$\|B_q u(t + q\Delta t) + \dots + B_0 u(t)\| = o((\Delta t)^\rho) \quad (4.18)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ для всіх достатньо гладких точних розв'язків диференціального рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$.

Означення 4.5. Вираз у лівій частині (4.18) є *похибкою апроксимації* багатопарової різницевої схеми.

Встановимо зв'язок між узгодженістю та порядком точності різницевих схем. Для цього повернемося до рівняння (4.2) зі сталими коефіцієнтами і умови періодичності розв'язку. Розв'язок задачі виразимо через оператори $C_j = -B_q^{-1}B_j$.

Виходячи з обмеженості операторів C_1, \dots, C_{q-1} та з того, що виконується умова (4.18), можна показати, що $B_q^{-1} = O(\Delta t)$.

Отже у вектора $\tilde{C}(\Delta t)\tilde{S}u(t)$ відмінною від нуля є тільки перша компонента і нам потрібно показати, що при довільному $\varepsilon > 0$:

$$\|(C_{q-1}E((q-1)\Delta t) + \dots + C_0 - E(q\Delta t))u_0(t)\| < \varepsilon \Delta t \quad (4.19)$$

для довільного елемента $u(0)$ з деякої щільної в B множини U^0 і для всіх достатньо малих Δt .

Нехай B_m — підпростір тригонометричних поліномів степеня m з гільбертового простору B періодичних функцій, а u_0 презентує деяку функцію $u_0(\vec{x})$ з B_m . Якщо в рівності (4.18) покласти $u(t) = tu_0$, то

$$Lu_0 = o(1), \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad (4.20)$$

де

$$L = \Delta t(qB_q + (q-1)B_{q-1} + \dots + B_1) - E. \quad (4.21)$$

Оскільки B_m має скінчений базис, кожен елемент якого задовольняє співвідношення (4.20), то для норми оператора L в просторі B_m маємо $\|L\|_m < \varepsilon_1$ для достатньо малих Δt , де ε_1 — довільне додатне число. Тому оператор $E + L$ має обернений в цьому просторі, а саме

$$(E + L)^{-1} = E + M,$$

де

$$\|M\|_m < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1}.$$

Таким чином

$$(qB_q + \dots + B_1)^{-1} = \Delta t(E + M).$$

За визначенням $C_j = -B_q^{-1}B_j$, тому

$$B_q^{-1} = (qE - (q-1)C_{q-1} - \dots - C_1)\Delta t(E + M). \quad (4.22)$$

Якщо $u_0 \in B_m$, а A — диференціальний оператор рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \quad (4.23)$$

із сталими коефіцієнтами, то $u(t) \in B_m$. Крім того, для цього розв'язку буде $\frac{\partial u}{\partial t} - Au = 0$, оскільки в силу (4.18)

$$\|(B_q E(q\Delta t) + B_{q-1} E((q-1)\Delta t) + \dots + B_0)u(t)\| < \varepsilon_0 \quad (4.24)$$

для довільного $\varepsilon_0 > 0$ та для всіх достатньо малих Δt .

Помноживши (4.22) на (4.24), одержимо

$$\|(E(q\Delta t) + C_{q-1} E((q-1)\Delta t) + \dots + C_0)u(t)\| < \varepsilon_3 \Delta t, \quad (4.25)$$

де

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_0 \|I + M\|_m \max_{0 < \Delta t < \tau} \|qE - (q-1)C_{q-1} - \dots - C_0\|.$$

Максимум, який входить в останню рівність існує, оскільки ми припустили, що різниці рівняння стійкі. Звідси випливає, що оператори $C_{q-1}(\Delta t), \dots, C_1(\Delta t)$ рівномірно обмежені при $0 < \Delta t < \tau$.

Нерівність вигляду (4.25) має місце для довільного розв'язку, який належить B_m . Якщо розглянути всі можливі підпростори B_m з простору B , то можливі початкові елементи $u(0)$ для цих розв'язків утворять щільну множину в B .

Отже, доведено:

Теорема 4.3

Якщо різницева схема стійка і похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta t \rightarrow 0$, то умова узгодженості (4.4) виконується.

§4.5 Завдання для самостійної роботи

Побудувати та дослідити тришарові явні та неявні різницеві схеми для рівнянь параболічного та гіперболічного типів другого порядку

5 Поняття стійкості різницевих схем

Поняття стійкості різницевих схем. Причини і види розповсюдження збурення. Поняття асимптотичної збіжності різницевих схем. Метод дискретних збурень.

§5.1 Опис нестійкості

Для ознайомлення з деякими феноменологічними аспектами чисельної нестійкості розглянемо одновимірне модельне лінійне рівняння для ζ . На мал. 5.1(а) показаний стаціонарний розв'язок $\hat{\zeta}^n$ на n -му часовому шарі, а на мал. 5.1(б) — накладення на ζ^n збурення ε , форма якого представлена на мал. 5.1(в). Такі збурення можуть породжуватися або машинними похибками округлення, або поперечними рухами у реальній двовимірній задачі. Використовуючи схему з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторовій змінній, простежимо за розвитком накладеного збурення. Лінійне модельне рівняння в консервативній формі має вигляд

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

а різницеве — вигляд

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2} \quad (5.1)$$

Представимо величину ζ як суму стаціонарної компоненти $\hat{\zeta}$ й збурення ε :

$$\zeta_i^n = \hat{\zeta}_i^n + \varepsilon_i. \quad (5.2)$$

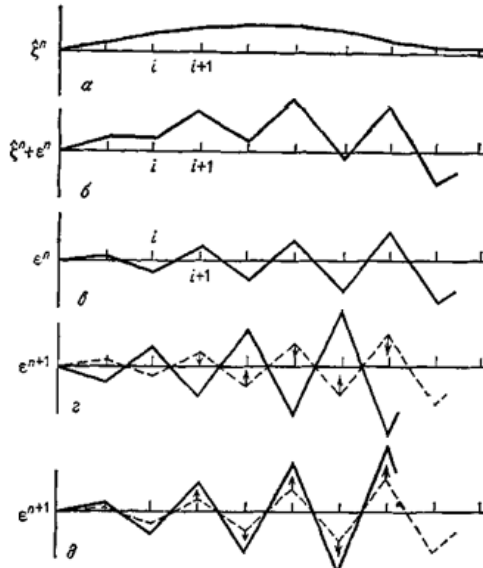


Рис. 5.1: Зростання похибки при використанні (5.1). а — стаціонарний розв'язок на n -му шарі за часом; б — збурений розв'язок на n -му шарі; в — збурення на n -му шарі; г — коливальне зростання похибки, пов'язане з надмірно великим кроком Δt (динамічна нестійкість); д — монотонне зростання похибки, обумовлене застосуванням центральних різниць для конвективного члена (статична нестійкість)

Після цього рівняння (5.1) запишеться так:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\hat{\zeta}_{i+1}^n - u\hat{\zeta}_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\hat{\zeta}_{i+1}^n - 2\hat{\zeta}_i^n + \hat{\zeta}_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{u\varepsilon_{i+1}^n - u\varepsilon_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (5.3)$$

Сума перших двох членів у правій частині рівняння (5.3) являє собою скінченно-різницеве значення $(\partial\hat{\zeta}/\partial t)_i^n$, рівне нулю в силу припущення, що на n -му часовому шарі існує стаціонарний розв'язок. Тоді рівняння (5.3) зводиться до наступного:

$$\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n \equiv \Delta\zeta_i = \Delta t \frac{u\varepsilon_{i+1}^n - u\varepsilon_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \Delta t \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (5.4)$$

Перший член у правій частині рівняння (5.4) дає зміну ζ , обумовлену конвекцією, а другий — обумовлену дифузією. Розглянемо рівняння (5.4) тільки з одним дифузійним членом і оцінимо його в точці i . Оскільки $\varepsilon_{i+1} > 0$, $\varepsilon_i < 0$ і $\varepsilon_{i-1} > 0$, маємо

$$\Delta\zeta_i = \alpha \Delta t \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{\Delta x^2} > 0. \quad (5.5)$$

Виходить, для всіх $\Delta t > 0$ приріст $\Delta\zeta_i$ додатний й прагне компенсувати від'ємне збурення ε_i . Аналогічно, розглядаючи $\Delta\zeta$ в точці $i+1$, маємо $\varepsilon_{i+2} < 0$, $\varepsilon_i < 0$ і $\varepsilon_{i+1} > 0$, тому

$$\Delta\zeta_{i+1} = \alpha \Delta t \frac{\varepsilon_{i+2}^n - 2\varepsilon_{i+1}^n + \varepsilon_i^n}{\Delta x^2} < 0. \quad (5.6)$$

тобто додатне збурення ε_{i+1} коректується від'ємним приростом $\Delta\zeta_{i+1}$.

Помітимо, що приріст $\Delta\zeta_i = \zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n$ (а також $\Delta\zeta_{i+1}$ і т.д.) пропорційний кроку Δt . Якщо крок Δt занадто великий, то поправка за рахунок збільшення $\Delta\zeta_i$ виявиться надмірною. Для таких занадто великих Δt величина нового ζ_i^{n+1} буде більше початкового збурення, як це показано на мал. 5.1(г):

$$|\zeta_i^{n+1}| > |\varepsilon_i| \quad (5.7)$$

і аналогічно

$$|\zeta_{i\pm 1}^{n+1}| > |\varepsilon_{i\pm 1}|. \quad (5.8)$$

Означення 5.1. Поява таких осциляцій наростаючої амплітуди, обумовлених надмірно великим кроком за часом, називається *динамічною нестійкістю*, яку можна усунути зменшенням кроку за часом, зробивши його менше деякого “критичного кроку за часом” $\Delta t_{\text{кр}}$.

Розглянемо тепер рівняння (5.4) тільки з одним конвективним членом. Оцінимо це рівняння в точці i , вважаючи $u > 0$. Припустимо, що збурення коливається по i , а його амплітуда зростає з ростом i . Тому $u\varepsilon_{i+1} > 0$, $u\varepsilon_{i-1} > 0$, $u\varepsilon_i < 0$ і

$$\Delta\zeta_i = -\Delta t \frac{u\varepsilon_{i+1}^n - u\varepsilon_i^n}{2\Delta x} < 0, \quad (5.9)$$

тобто приріст ζ_i , обумовлений конвекцією, від'ємний навіть при $\varepsilon_i < 0$. Це означає, що похибка зростає монотонно (див. мал. 5.1(д)). Поява такої наростаючої похибки називається статичною нестійкістю, яку не можна усунути зменшенням кроку за часом і можна усунути тільки переходом до якої-небудь іншої скінченно-різницевої схеми.

Якщо просторовий напрямок зростання ε по відношенню до u відрізняється від показаного на мал. 5.1, тобто якщо або $u < 0$, або амплітуда ε зменшується за i , то конвективний

член стає статично стійким, але при достатньо великих Δt ще може мати місце динамічна нестійкість. У будь-якій реальній задачі початкові похибки розподілені більш-менш випадково, і можна бути впевненим, що в деякий момент часу й у деякій точці їх розподіл буде схожий на зображений на мал. 5.1 “катастрофічний” розподіл.

Якщо в рівняння (5.4) входять і конвективний, і дифузійний члени, то вони взаємодіють. Як ми далі побачимо, для розглянутої різницевої схеми виникає обмеження на Δt , обумовлене дифузійним членом, і інше обмеження на Δt , що залежить від порівняльної величини статично нестійкого конвективного члена й статично стійкого дифузійного члена, тобто від числа Рейнольдса.

§5.2 Дослідження стійкості

Після того як був даний загальний опис стійкості, розглянемо методи дослідження стійкості, їх взаємозв'язки й їх порівняння. Ці методи будуть продемонстровані на прикладі різницевої схеми з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторовій змінній у застосуванні до лінійного модельного рівняння (2.18).

§5.2.i Метод дискретних збурень

Метод дослідження стійкості, який ми називаємо методом дискретних збурень, являє собою узагальнення методу, уперше використаного Томом і Апельтом [1961] і розвиненого Томаном і Шевчиком [1966]. Цей метод повністю відповідає вже даному нами опису нестійкості. Він прямий і простий по ідеї, і може застосовуватися для аналізу як стійкості, так і властивості транспортності, яке буде визначено далі. Ідея: у рівняння в деякій точці вводиться дискретне збурення величини ζ й прослідковується вплив цього збурення; скінченно-різницева схема буде стійкою, якщо збурення загасають.

Для простоти спочатку розглянемо рівняння (2.18) тільки з дифузійним членом і припустимо, що знайдений стаціонарний розв'язок $\zeta_i^n = 0$ для всіх i . Введемо в розв'язок збурення ε й з (2.18) за схемою з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторовій змінній одержимо

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - (\zeta_i^n + \varepsilon)}{\Delta t} = \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n - 2(\zeta_i^n + \varepsilon) + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (5.10)$$

або

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \varepsilon}{\Delta t} = -\frac{2\alpha\varepsilon}{\Delta x^2}, \quad (5.11)$$

$$\zeta_i^{n+1} = \varepsilon(1 - 2d), \quad (5.12)$$

де дифузійне число d визначається рівністю

$$d = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}. \quad (5.13)$$

В силу вимоги стійкості ці збурення повинні загасати. Для першого кроку за часом це приводить до умови

$$|\zeta_i^{n+1}/\varepsilon| \leq 1, \quad (5.14)$$

або

$$-1 \leq 1 - 2d \leq 1. \quad (5.15)$$

Права нерівність є результатом вимоги статичної стійкості й автоматично виконується при додатних d , тобто при $\alpha > 0$ й $\Delta t > 0$. Ліва нерівність є вимогою динамічної стійкості й виконується при $d \leq 1$. Якщо, слідуючи Томану й Шевчику [1966], вимагати, щоб чисельний розв'язок моделював фізичне явище, не допускаючи осциляцій, обумовлених надмірно великим кроком за часом, тобто щоб

$$\zeta_i^{n+1}/\varepsilon \geq 0, \quad (5.16)$$

то впливає обмеження

$$d \leq 1/2. \quad (5.17)$$

Нерівність (5.16), однак, не є умовою стійкості в розумінні зменшення амплітуди збурення. Якщо розглядати досить велику кількість шарів за часом, то буде потрібно виконання нерівності (5.17). Спочатку за схемою з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторовій змінній (рівняння (2.18)) обчислимо збурення в сусідніх точках:

$$\zeta_{i\pm 1}^{n+1} = d\varepsilon. \quad (5.18)$$

Для наступного шару за часом одержимо

$$\zeta_i^{n+2} = \zeta_i^{n+1} + d(\zeta_{i+1}^{n+1} - 2\zeta_i^{n+1} + \zeta_{i-1}^{n+1}) = \varepsilon(1-2d) + d(d\varepsilon - 2\varepsilon(1-2d) + d\varepsilon) = \varepsilon(1-4d+6d^2). \quad (5.19)$$

Знову будемо вимагати, щоб мало місце нерівність

$$|\zeta_i^{n+2}/\varepsilon| \leq 1, \quad (5.20)$$

звідки випливає

$$-1 \leq 1 - 4d + 6d^2 \leq 1. \quad (5.21)$$

Ліва нерівність виконується завжди, у той час як права накладає обмеження $d \leq 2/3$.

Таким чином, розгляд першого часового шару приводить до умови $d \leq 1$, а другого — до умови $d \leq 2/3$. Можна розглядати й наступні часові шари, які приводять до ще більш жорстких умов для d . Початкове одиничне збурення ε в точці i асимптотично прямує до осцилюючого розподілу $\zeta_i = \pm\varepsilon'$, де ε' — деяке збурення меншої амплітуди, як показано на мал. 5.2.

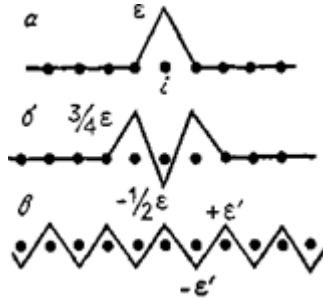


Рис. 5.2: Асимптотичне поширення одиничного збурення в у точці i для рівняння дифузії, що розв'язується за схемою з різницями вперед за часом і із центральними різницями по просторовим змінним, а — початкове збурення; б — збурення після одного кроку за часом, $d = 3/4$; в — збурення після дуже великої кількості кроків за часом.

Таким чином, видно, що найбільш жорстка умова для d з'являється при такому типі розподілу збурень; починаючи розрахунки з таким осцилюючим збуренням ε' , накладеним

на $\zeta = 0$, і застосовуючи схему (2.18) з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторовій змінній, одержуємо

$$\zeta_i^{n+1} = \varepsilon' + d(-\varepsilon' - 2\varepsilon' - \varepsilon') = \varepsilon'(1 - 4d). \quad (5.22)$$

Вимога стійкості

$$|\zeta_i^{n+1}/\varepsilon'| \leq 1, \quad (5.23)$$

дає

$$-1 \leq 1 - 4d \leq 1, \quad (5.24)$$

або

$$d \leq 1/2. \quad (5.25)$$

Для наступних часових шарів умова (5.25) не міняється. Таким чином, це умова для великих значень часу еквівалентно умові (5.17) — умові відсутності осциляцій, обумовлених надмірно великим кроком за часом, у випадку ізольованого збурення.

Твердження 5.1

З формули (5.13) випливає, що при фіксованому кроці просторової сітки й фіксованому α умову $d \leq 1/2$ накладає обмеження на крок за часом:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\alpha} \quad (5.26)$$

Відзначимо, що обмеження, що накладається умовою (5.26), є важким у розумінні витрат часу для чисельного розв'язку рівняння дифузії. Припустимо, що розрахунки ведуться з деяким просторовим кроком Δx_1 до деякого безрозмірного часу $T = N_1 \Delta t_1$, де $\Delta t_1 = \Delta x_1^2 / (2\alpha)$ — максимально можливий крок за часом. Якщо треба повторити розрахунки із удвічі меншим просторовим кроком $\Delta x_2 / \Delta x_1 / 2$ (наприклад, для того, щоб проконтролювати зменшення похибок апроксимації), то треба брати крок за часом $\Delta t_2 = \Delta t_1 / 4$. Виходить, щоб досягти того ж значення безрозмірного часу T , буде потрібно вчетверо більше кроків за часом. Крім того, для розрахунків кожного часового шару буде потрібно вдвічі більше часу, тому що $\Delta x_2 = \Delta x_1 / 2$, а це означає, що число розрахункових точок у досліджуваній області зросло вдвічі. Таким чином, для одномірного випадку зменшення вдвічі кроку просторової сітки збільшує витрати машинного часу у 8 разів!

У двовимірній задачі зменшення вдвічі кроків Δx і Δy збільшує число розрахункових точок у чотири рази, збільшуючи тим самим необхідний машинний час в 16 раз. У тривимірній задачі дифузії зменшення всіх трьох просторових кроків удвічі збільшує машинний час в 32 рази. У загальному випадку зменшення розміру кроку з Δx_1 до Δx_2 при розв'язку D -мірної задачі дифузії з використанням явної схеми з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторових змінних збільшує машинний час у $(\Delta x_1 / \Delta x_2)^{2+D}$ разів. Ясно, що методи, у яких вдається уникнути умови стійкості (5.26), були б досить бажані.

В наведених вище міркуваннях припущення про стаціонарність розв'язку несуттєве. Якщо зі збуреного рівняння відняти повне незбурене нестационарне рівняння, то вийде рівняння для зміни похибки

$$\varepsilon_i^{n+1} = d(\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n) + \varepsilon_i^n \quad (5.27)$$

з умовою стійкості $|\varepsilon_i^{n+1}/\varepsilon_i^n| \leq 1$ і т.д. Результати в цьому випадку будуть ті ж, що й вище.

Розглянемо тепер рівняння (2.18) з конвективним й дифузійним членами й без обмеження загальності покладемо $u > 0$ (Якщо $u < 0$, то зміниться роль індексів $i + 1$ і $i - 1$). Знову застосуємо схему з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторовій змінній, накладаючи на ζ_i^{n+1} в точці i збурення ε , що дасть

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - (\zeta_i^n + \varepsilon)}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \left(\frac{\zeta_{i+1}^n - 2(\zeta_i^n + \varepsilon) + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (5.28)$$

Дослідження цього рівняння не дає додаткової інформації в порівнянні з попереднім аналізом рівняння з одним тільки дифузійним членом, тому що на конвективних членах у точках $i \pm 1$ не позначається збурення в точці i . Застосовуючи схему з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторовій змінній і в точці $i + 1$, одержуємо

$$\zeta_{i+1}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u\zeta_{i+2}^n - u(\zeta_i^n + \varepsilon)) + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(\zeta_{i+2}^n - 2\zeta_{i+1}^n + \zeta_i^n + \varepsilon) + \zeta_{i+1}^n. \quad (5.29)$$

або

$$\zeta_{i+1}^{n+1} = \frac{C\varepsilon}{2} + d\varepsilon \quad (5.30)$$

де $C = u\Delta t/\Delta x$ — число Куранта, а $d = \alpha\Delta t/\Delta x^2$, як і раніше. Для стійкості знову будемо вимагати, щоб

$$|\zeta_{i+1}^{n+1}/\varepsilon| \leq 1, \quad (5.31)$$

або

$$-1 \leq \frac{C}{2} + d \leq 1. \quad (5.32)$$

Ліва нерівність автоматично виконується при $u > 0$. Права нерівність (вимога статичної стійкості) дає іншу необхідну умову стійкості:

$$u\Delta t/\Delta x + 2\alpha\Delta t/\Delta x^2 \leq 2, \quad (5.33)$$

або

$$\Delta t \leq \frac{2}{2\alpha/\Delta x^2 + u/\Delta x}. \quad (5.34)$$

Звернувшись тепер до точки $i - 1$, одержимо

$$\zeta_{i-1}^{n+1} = -\frac{C\varepsilon}{2} + d\varepsilon \quad (5.35)$$

і вимога стійкості $|\zeta_{i-1}^{n+1}/\varepsilon| \leq 1$ тут дає

$$-1 \leq -\frac{C}{2} + d \leq 1. \quad (5.36)$$

Розглядаючи спочатку праву нерівність (5.36) (статична стійкість), одержуємо

$$\Delta t \left(\frac{2\alpha}{\Delta x^2} - \frac{u}{\Delta x} \right) \leq 2. \quad (5.37)$$

Якщо член у дужках від'ємний, то ця нерівність буде справедливою для всіх $\Delta t > 0$, якщо ж цей член додатний, то одержуємо

$$\Delta t \leq \frac{2}{2\alpha/\Delta x^2 - u/\Delta x}. \quad (5.38)$$

Оскільки знаменник додатний, умова (5.38) менш жорстка, ніж (5.34), і тому перекривається нею.

Дослідження лівої нерівності (5.36) (динамічна стійкість) дає

$$-2 \leq \Delta t \left(\frac{2\alpha}{\Delta x^2} - \frac{u}{\Delta x} \right) \quad (5.39)$$

Якщо член у дужках додатний, то ця нерівність виконується для всіх $\Delta t > 0$, якщо ж цей член від'ємний, то одержуємо

$$\Delta t \leq \frac{2}{u/\Delta x - 2\alpha/\Delta x^2}. \quad (5.40)$$

де знаменник додатний. Умова (5.40) також менш жорстка, ніж (5.34), і тому перекривається нею.

Таким чином, з аналізу стійкості рівняння, що включає конвективний і дифузійний члени, за допомогою методу дискретних збурень випливають дві необхідні умови — рівняння (5.26) і (5.34). Якщо поширити цей аналіз на наступні шари за часом, то можуть з'явитися інші більш обмежувальні умови, але метод аналізу при цьому стає дуже незручним. Помітимо (і це буде показано нижче), що аналіз стійкості по фон Нейману дає іншу умову (нерівність $C^2 \leq 2d$).

Крім того, якщо додержуватися роботи Томана й Шевчика [1966] і додатково вимагати відсутності в точці $i - 1$ осциляцій, обумовлених надмірно великим кроком за часом, то повинне бути

$$\zeta_{i-1}^{n+1}/\varepsilon > 0, \quad (5.41)$$

а рівняння (5.35) дасть

$$-C/2 + d \geq 0, \quad (5.42)$$

тобто

$$-u\Delta t/\Delta x + 2\alpha\Delta t/\Delta x^2 \geq 0, \quad (5.43)$$

або

$$u\Delta t/\alpha \leq 2. \quad (5.44)$$

У рівнянні переносу вихору $\alpha = 1/\text{Re}$ й член $u\Delta x/\alpha$ являє собою сіткове число Рейнольдса Re_c . Таким чином, Re_c є число Рейнольдса, отримане по локальній швидкості й характерній довжині, рівній розміру кроку просторової сітки Δx . Для відсутності осциляцій, обумовлених надмірно великим кроком за часом, потрібно, щоб

$$\text{Re}_c \leq 2 \quad (5.45)$$

незалежно від Δt . Якщо вимогу відсутності осциляцій (5.44) скомбінувати з умовою (5.26), що накладається дифузією, то в результаті виходять наступні обмеження: число Куранта $C = u\Delta t/\Delta x \leq 1$ й $\Delta t \leq 2\alpha/u^2$. Як побачимо надалі, ці обмеження є правильними.

§5.3 Завдання для самостійної роботи

Використовуючи метод дискретних збурень, дослідити стійкість схеми з різницями проти потоку

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_i^n - u\zeta_{i-1}^n}{\Delta z}, \quad u > 0 \quad (5.46)$$

що відповідає модельному рівнянню руху невязкої рідини. Показати, що умова стійкості накладає на число Куранта обмеження $C = u\Delta t/\Delta x \leq 1$ й що вона включає критерій відсутності осциляцій, обумовлених надмірно великим кроком за часом.

6 Дослідження стійкості різнице- вих схем. Метод фон Неймана. Коефіцієнт та матриця переходу

*Метод фон Неймана. Коефіцієнт та матриця переходу. Явні та неявні різнице-
ві схеми, алгоритми дослідження. Теорема про збіжність ряду Фур'є та стійкість явної та неявної різнице-
вих схем*

§6.1 Метод фон Неймана дослідження стійкості спп із сталими коефіцієнтами

§6.1.1 Подання функцій у вигляді рядів та інтегралів Фур'є

Якщо вектор-функція $\vec{u}(\vec{x})$ ($\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$) з простору B періодична за кожним з аргу-
ментів x_j з періодом L_j , то її ряд Фур'є має вигляд

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot \dots \cdot L_d}} \sum_{\vec{k} \in L} \vec{u}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad (6.1)$$

де $i = \sqrt{-1}$, $\vec{k} \in d$ -вимірний вектор, який при підсумуванні пробігає множину L , складену з
векторів \vec{k}_j , компоненти яких незалежно один від одного приймають всі можливі значення
вигляду $\frac{2\pi r_j}{L_j}$, де r_j — довільне ціле число.

Означення 6.1. Векторний коефіцієнт Фур'є $\vec{u}(\vec{k})$, розглянутий як функція аргументу \vec{k}
на множині L , визначає точку в просторі B' :

$$\vec{u}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot \dots \cdot L_d}} \int_0^L \vec{u}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d\vec{x}. \quad (6.2)$$

Тут позначено $\int_0^L d\vec{x} = \int_0^{L_1} dx_1 \dots \int_0^{L_d} dx_d$.

В просторах B і B' введемо середньоквадратичні норми за допомогою норми

$$\|\vec{u}\|^2 = \sum_{j=1}^p |u_j|^2.$$

Твердження 6.1Тоді *рівність Парсеваля*

$$\int_0^L \|\vec{u}(\vec{x})\|^2 d\vec{x} = \sum_{\vec{k} \in L} \|\vec{u}(\vec{k})\|^2 \quad (6.3)$$

встановлює однозначну відповідність між елементами цих просторів із збереженням норми^a.

^aТака відповідність носить назву “ізоморфізм”.

Довільну інтегровну з квадратом вектор-функцію $\vec{u}(\vec{x})$ можна подати у вигляді інтегралу Фур'є

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int \vec{u}(\vec{k}) e^{I\vec{k}\vec{x}} d\vec{k}, \quad (6.4)$$

де інтегрування ведеться по всьому простору змінних k_1, \dots, k_d , а функція $\vec{u}(\vec{k})$ визначається рівністю

$$\vec{u}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int \vec{u}(\vec{x}) e^{I\vec{k}\vec{x}} d\vec{x}. \quad (6.5)$$

Рівність Парсеваля в цьому випадку має вигляд

$$\int \|\vec{u}(\vec{x})\|^2 d\vec{x} = \int \|\vec{u}(\vec{k})\|^2 d\vec{k}. \quad (6.6)$$

Зауваження 6.2 — Під функцією e^A , аргументом якої є $(p \times p)$ -матриці, будемо розуміти степеневий ряд

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

Для достатньо гладких функцій всі ці рівності можна розуміти буквально. Але якщо множини елементів просторів B і B' обмежити тільки такими функціями то може виявитись, що ці простори не будуть повними. Тому для збереження необхідного рівня строгості доцільно прийняти всі положення теорії гільбертового простору L_2 .

Зокрема будемо:

- вважати дві функції рівними, якщо вони різняться одна від одної на множині міри нуль;
- інтеграли розуміти як інтеграли Лебега;
- збіжність до границі — як збіжність в середньо-квадратичному.

Під рівністю (6.1) будемо розуміти $\|u - u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, якщо під u_n розуміємо послідовність частинних сум ряду, для яких індекс підсумування змінюється від $-n$ до n . Аналогічно, під рівністю (6.4) розуміємо границю $\|u - u_K\| \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$, в якій u_j — це інтеграл, для якого кожна змінна k_j пробігає інтервал $-K \leq k_j \leq K$.

При прийнятті цих умов простори B і B' є повними банаховими просторами. Перетворення (6.2) відображає весь простір B в B' і в силу теореми Фур'є є оберненим по відношенню

до (6.1), а за теоремою Рісса—Фішера, перетворення (6.1) переводить весь простір B' в B , так що довільна визначена на L послідовність $\vec{u}(\vec{k})$, для якої збігається сума в правій частині рівності (6.3), є послідовністю коефіцієнтів Фур'є деякої функції $\vec{u}(\vec{x}) \in B$. Аналогічно, (6.4) в силу теореми Планшереля є взаємно однозначним відображенням простору B' на простір B , а (6.5) — оберненим до нього.

Далі при використанні перетворення Фур'є ми будемо неявно використовувати усі прийняті положення, а під множиною L розуміти або увесь простір змінних k_1, \dots, k_d , або описану вище дискретну решітку.

Означення 6.2. *Носієм функції називається замикання множини тих точок, у яких вона відмінна від нуля.*

Означення 6.3. *Кажуть, що функція має компактний носій, якщо її носій є компактна множина.*

Зауваження 6.3 (щодо коректності постановок задач) — Перша вимога коректності крайових задач про щільність області визначення розв'язуючого оператора $E_0(t)$ в B , впливає з того, що початковий елемент $\vec{u}(\vec{x}, 0)$ можна як завгодно точно наблизити тригонометричним поліномом або функцію $\vec{u}(\vec{x}, 0)$ можна подати за допомогою перетворення Фур'є з компактним носієм. Такі початкові множини у обох випадках є щільними в B .

Друга умова коректності у даному разі полягає в тому, що $\|e^{tp(Ik)}\|$ повинна бути рівномірно обмеженою за усіма k , тоді

$$\|E(t)\| = \max_{k \in L} \|e^{tp(Ik)}\|.$$

Виконання цієї умови потрібно перевіряти у кожному конкретному випадку окремо.

Надалі ми будемо вважати, що маємо справу тільки з коректно поставленими задачами. У цьому випадку вибір банахового простору є частиною постановки задачі. Як ми уже бачили вище, вибір середньоквадратичної метрики визначається бажанням використати перетворення Фур'є, але для самого розв'язку \vec{u} , норма якого визначена як середньоквадратична, залишається ще значна свобода вибору. Це відноситься до випадків, коли перед застосуванням загальної теорії диференціальних рівнянь, рівняння високого порядку приводиться до системи рівнянь першого порядку. Так у [5] розглянуто задачу про хвильовий рух, яка є коректною при одному простому виборі банахового простору і не коректною при іншому також простому його виборі.

Для цих простіших випадків перевірка коректності, як правило, порівняно не складна. Проте існують задачі, наприклад задача про багатовимірний рух рідких середовищ, для яких до нашого часу незрозуміло як коректно поставити крайову задачу, не використовуючи додаткових фізичних принципів.

Крім того ми будемо вважати, що усі неявні різницеві рівняння

$$B_1 \vec{u}^{n+1} - B_0 \vec{u}^n = 0,$$

тобто рівняння у яких оператор B_1 не є діагональною матрицею, мають єдиний розв'язок принаймні для умов періодичності за просторовими змінними.

§6.1.ii Умови стійкості чисельних алгоритмів

Нехай тепер $\vec{u}^n = \vec{u}^n(\vec{x})$ є наближенням розв'язку $\vec{u}(\vec{x}, n\Delta t)$ системи різницевих рівнянь

$$B_1 \vec{u}^{n+1} - B_0 \vec{u}^n = 0.$$

Ці різницеві рівняння можна записати у вигляді

$$\sum_{\beta \in N_1} B_1^\beta T^\beta \vec{u}^{n+1} = \sum_{\beta \in N_0} B_0^\beta T^\beta \vec{u}^n, \quad (6.7)$$

де підсумування проведене за всіма точками шаблонів N_1 і N_0 ; через T^β позначено складову різницевого оператора, яка замінює значення функції в точці $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$ на значення функції в деякій точці шаблону N_j оператора B_j ($j = 0, 1$):

$$(x_1 + \beta_1 \Delta x_1, \dots, x_d + \beta_d \Delta x_d),$$

а компоненти векторного індексу $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ приймають певні цілі значення. Коефіцієнти матриці B_1^β і B_0^β , які ставляться у відповідність значенням функції в кожній точці шаблону, можуть залежати від приростів координат Δt і Δx , але не залежать від самих координат.

Твердження 6.4

При виконанні таких умов щодо функцій \vec{u}^n і \vec{u}^{n+1} можна застосувати перетворення Фур'є.

Нехай задача (6.7) має розв'язок, тобто існує обмежений обернений оператор B_1^{-1} і

$$\vec{u}^{n+1} = B \vec{u}^n, \quad (6.8)$$

де $B = B_1^{-1} B_0 = \sum_{\beta \in N} B^\beta T^\beta$, N — шаблон оператора B .

Зауваження 6.5 — Уважаємо, що розв'язок задачі — періодична вектор-функція. В іншому разі її можна продовжити в деяку область, таким чином, щоб в цій області вона стала періодичною.

Твердження 6.6

Відзначимо, що функцію f , визначену на напіввідкритому інтервалі довжини 2ℓ , тобто на $[a, a+2\ell)$ або $(a, a+2\ell]$, можна продовжити (причому єдиним чином) на всю числову вісь так, що одержана функція буде періодичною з періодом 2ℓ , а будь-яка періодична функція, яка має на проміжку $(a, a+2\ell)$ не більше ніж скінчене число точок розривів і абсолютно інтегровна на цьому сегменті, у всіх внутрішніх точках диференційованості з цього сегмента може бути розвинутою в ряд Фур'є.

Уведемо банаховий простір B' сіткових векторних функцій

$$\vec{\varphi}(m_s) = (\xi^{(1)}(m_s) \quad \dots \quad \xi^{(d)}(m_s))^T$$

амплітудних членів m_s -тих гармонік розвинення розв'язку в збіжні ряди Фур'є

$$\vec{u}_i^{n+1} = \sum_{s=1}^d \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s) \vec{\varphi}^{n+1}(m_s) \exp \left\{ I \sum_{\ell=1}^d i_{\ell} m_{\ell} h_{\ell} \right\}, \quad (6.9)$$

де $A(m_s)$ — діагональна матриця, складена з коефіцієнтів розвинення вектор-функції $\vec{u}(x, 0)$ в ряди Фур'є, а $\vec{\varphi}(m_s)$ — вектори, які підлягають визначенню у процесі розв'язування різницевого рівняння (6.8):

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^d \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s) \vec{\varphi}^{n+1}(m_s) \exp \left\{ I \sum_{\ell=1}^d i_{\ell} m_{\ell} h_{\ell} \right\} = \\ = B \left(\sum_{s=1}^d \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s) \vec{\varphi}^n(m_s) \exp \left\{ I \sum_{\ell=1}^d i_{\ell} m_{\ell} h_{\ell} \right\} \right). \end{aligned}$$

Оскільки оператор B лінійний і B^{β} не залежить від координат, то обидві частини рівняння мають типовий множник

$$\exp \left\{ I \sum_{\ell=1}^d i_{\ell} m_{\ell} h_{\ell} \right\} \neq 0.$$

Розділивши обидві частини останнього рівняння на цей множник, одержимо

$$H_1 \vec{\varphi}^{n+1}(\vec{k}) - H_0 \vec{\varphi}^n(\vec{k}) = 0,$$

де

$$H_1 = \sum_{\beta \in N_1} B_1^{\beta} \exp \{ I(k_1 \beta_1 \Delta x_1 + \dots + k_d \beta_d \Delta x_d) \}$$

і

$$H_0 = \sum_{\beta \in N_0} B_0^{\beta} \exp \{ I(k_1 \beta_1 \Delta x_1 + \dots + k_d \beta_d \Delta x_d) \}.$$

Тоді оператори H_1 і H_0 не залежать від x_s та t і залежать тільки від Δt та m для всіх s . Якщо матриця H_1 має обернену і виконується умова узгодженості розв'язку різницевого рівняння (6.8) з початковою умовою, тобто $\|\vec{\varphi}^0\| = 1$, то з останнього рівняння маємо рекурентну формулу для визначення $\vec{\varphi}(m_s)$:

$$\vec{\varphi}^{n+1}(m_s) = G(m_s, \Delta t, \Delta x) \vec{\varphi}^n(m_s), \quad (6.10)$$

Означення 6.4. Тут $G(m_s, \Delta t, \Delta x) = H_1^{-1} H_0$ — матриця переходу.

Оскільки рівність (6.10) є аналогом рівності $u^{n+1} = C(\Delta t)u^n$ в просторі B і визначає в просторі перетворень Фур'є B' оператор, що відповідає оператору $C(\Delta t)$ в просторі B , то умова стійкості рівняння (6.7) полягає в тому, що для деякого числа $\tau > 0$ нескінченна множина матриць $G^n(m_s, \Delta t, \Delta x)$ при $0 < \Delta t < \tau$, $0 \leq n\Delta t \leq T$ і $\forall \vec{k} \in L$ повинна бути рівномірно обмеженою.

Враховуючи збіжність ряду (6.9), після очевидних перетворень маємо

$$\sum_{s=1}^d \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s) \exp \left\{ I \sum_{\ell=1}^d i_{\ell} m_{\ell} h_{\ell} \right\} (\vec{\varphi}^{n+1}(m_s) - G(m_s, \Delta t, \Delta x) \vec{\varphi}^n) = 0.$$

Теорема 6.7

Якщо норма матриці переходу менша від одиниці, а функції початкового розподілу розв'язку $\vec{u}(x, 0)$ розвиваються в абсолютно збіжний ряд Фур'є, то точний періодичний розв'язок різницевого рівняння (6.8) із сталими коефіцієнтами може бути поданий у вигляді ряду Фур'є (6.9).

Доведення. Для доведення цього твердження обидві частини (6.10) помножимо на

$$A(m_s) \exp \left\{ I \sum_{\ell=1}^d i_{\ell} m_{\ell} h_{\ell} \right\},$$

і підсумуємо результат за всіма значеннями m_s та s . Тоді, маємо

$$\begin{aligned} \vec{u}^{n+1} &= \sum_{s=1}^d \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s) \vec{\varphi}^{n+1}(m_s) \exp \left\{ I \sum_{\ell=1}^d i_{\ell} m_{\ell} h_{\ell} \right\} = \\ &= \sum_{s=1}^d \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s) G(m_s, \Delta t, \Delta x) \vec{\varphi}^n(m_s) \exp \left\{ I \sum_{\ell=1}^d i_{\ell} m_{\ell} h_{\ell} \right\}. \end{aligned}$$

Отже

$$\|\vec{u}^{n+1}\| \leq \sum_{s=1}^d \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} \|A(m_s)\| \cdot \|G(m_s, \Delta t, \Delta x)\| \cdot \|\vec{\varphi}^n(m_s)\| \leq q^n \sum_{s=1}^d \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} \|A(m_s)\|.$$

Оскільки $q = \max_{m_s} \|G(m_s, \Delta t, \Delta x)\| \leq 1$, а ряд Фур'є для початкової функції абсолютно збіжний, то остання нерівність є мажорантою для збіжності ряду (6.9).

Отже ряд (6.9) збіжний, задовольняє початкові умови різницевої задачі та різницеве рівняння (6.8) оскільки вектори $\vec{\varphi}(m_s)$ є розв'язками різницевого рівняння (6.10). Тобто він є точним розв'язком задачі (6.7), а умова

$$q = \max_{m_s} \|G(m_s, \Delta t, \Delta x)\| \leq 1$$

є необхідною умовою стійкості різницевої схеми (6.7). □

Тут і далі норму лінійного оператора P , заданого в B' за допомогою матриці $A(\vec{k})$ визначаємо так

$$\|P\| = \max_{\vec{k} \in L} \|A(\vec{k})\|,$$

де при фіксованому \vec{k}

$$\|A(\vec{k})\| = \max_{|\vec{V}|=1} |(A(\vec{k}), \vec{V})| = \max_{\vec{V} \neq 0} \frac{|(A(\vec{k}), \vec{V})|}{|\vec{V}|},$$

а під $|\cdot|$ розуміємо норму в евклідовому векторному просторі.

Твердження 6.8

Виконання нерівності

$$\rho(G^n(m_s, \Delta t, \Delta x)^n) = \max_j |\lambda_j| \leq 1 + O(\Delta t)$$

при $0 < \Delta t < \tau$, $0 \leq n\Delta t \leq T$ і $\forall \vec{k} \in L$, де λ_j — власні числа матриці $G(m_s, \Delta t, \Delta x)$, є *необхідною умовою стійкості фон Неймана*.

Таке визначення стійкості при малих τ допускає скінчене зростання значення похибки за часом.

Якщо матриця $G(m_s, \Delta t, \Delta x)$ нормальна, то умова фон Неймана є не тільки необхідною, але й достатньою умовою.

Зокрема, при $p = 1$, тобто коли матриця переходу вироджується у множник переходу, умова фон Неймана для двохшарової різницевої схеми з однією залежною змінною є необхідною і достатньою умовою стійкості.

Оскільки

$$\rho(G(m_s, \Delta t, \Delta x)) \leq \|G(m_s, \Delta t, \Delta x)\|_{B'},$$

то розв'язок відповідного різницевого рівняння стійкий, якщо для деякого додатного числа M і деякого $\tau > 0$ при $0 < \Delta t < \tau$ виконується нерівність

$$\|G(m_s, \Delta t, \Delta x)\|_{B'} \leq 1 + M\Delta t. \quad (6.11)$$

В цьому випадку при $0 \leq n\Delta t \leq T$, $0 < \Delta t < \tau$ маємо

$$\|G(m_s, \Delta t, \Delta x)\|_{B'} \leq e^{MT}.$$

Малі збурення оператора $C(\Delta t)$ не порушують стійкості розв'язку різницевого оператора, що впливає з твердження.

Теорема 6.9 (Крайса)

Якщо розв'язок різницевого рівняння $\vec{u}^{n+1} = C(\Delta t)\vec{u}^n$ стійкий, а сімейство операторів $Q(\Delta t)$ — обмежене, то розв'язки рівнянь

$$\vec{u}^{n+1} = (C(\Delta t) + \Delta t Q(t)\Delta)\vec{u}^n$$

також стійкі.

У ряді випадків вводиться більш жорсткої умови, а саме $\max_j |\lambda_j| \leq 1$. Це виправдовується тим, що у цих випадках граничні умови задачі не залежать від часу, тобто розв'язок задачі прямує до деякої стаціонарної функції не зростаючи.

Означення 6.5. Кажуть, що розв'язок різницевої задачі *слабко стійкий*, якщо розв'язуючий оператор схеми задовольняє нерівності

$$\|C^n(\Delta t)\| \leq \text{const}(\Delta t)^{-\alpha} = \text{const } n^\alpha,$$

при $0 \leq n\Delta t \leq T$ та $0 < \Delta t < \tau$ для деякого фіксованого скінченного $\alpha \geq 0$ (традиційно $\alpha = 0$).

Деякі визначення стійкості дозволяють розв'язку задачі бути більш чутливий до збурень. Так, якщо замість рівномірної обмеженості операторів $C^n(\Delta t)$ вимагається щоб їх зростання за нормою не перевищувало швидкість зростання деякого степеня $1/\Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, то просте збурення може привести до невиправданого зростання норм відповідної множини операторів переходу.

Якщо для крайової задачі область визначення оператора $E_0(t)$ щільна в B , але $E_0(t)$ не обмежений ні в одному з інтервалів $0 < t < \tau$, то не існує різницевої схеми, апроксимація якої була б узгодженою з цією задачею і стійкою.

При дослідженні стійкості розв'язків практичних задач необхідно слідкувати, щоб обмеження, які накладаються на початкову функцію, виконувались для розв'язку цієї задачі.

Резюмуючи, доцільно відзначити, що існують випадки, коли жодне з наведених нами визначень стійкості різницевих схем не може бути використане для практичних задач. Такою задачею є, наприклад, задача про спільне розповсюдження звуку та теплоти та інші [5].

§6.2 Приклади застосування методу фон Неймана

Приклад 6.10

Розглянемо початково-крайову задачу теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

з періодичним за просторовою змінною розв'язком.

Твердження 6.11

Явна різницева схема, яка апроксимує цю диференціальну задачу, має вигляд

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad i = \overline{-M+1..M-1}, \quad n = \overline{1..N},$$

$$u_0^n = u_M^n, \quad u_1^n = u_{M+1}^n, \quad n = \overline{1..N},$$

$$u_i^0 = \varphi_0(ih), \quad i = \overline{-M+1..M-1}.$$

Будемо уважати, що початкова функція $\varphi_0(jh)$ розвивається у абсолютно збіжний ряд Фур'є, а сам розв'язок різницевої задачі можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$u_j^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^n(m) \exp\{Imjh\}. \quad (6.12)$$

Тут I — уявна одиниця ($I^2 = -1$), A_m — коефіцієнти Фур'є початкової функції $\varphi_0(jh)$, $V(m)$ — амплітудні коефіцієнти, які підлягають подальшому визначенню.

Нехай ряд, яким подано розв'язок, збіжний. Підставимо шуканий розв'язок у різницеве рівняння і враховуючи, що $\forall m: A_m \exp\{Imjh\} \neq 0$, для визначення $V(m)$ одержимо рівняння

$$V(m) - 1 = \frac{\alpha\tau}{h^2} (e^{Imh} - 2 + e^{-Imh}).$$

Оскільки $e^{Imh} + e^{-Imh} = 2 \cos(mh)$, то

$$V = V(m) = 1 + d(\cos(mh) - 1), \quad d = \frac{2\alpha\tau}{h^2}.$$

При виконанні останньої рівності сіткова функція (6.12) буде розв'язком різницевого рівняння, задовольняти граничні умови періодичності, а також початкові умови.

Очевидно, що при $\max_m |V(m)| \leq 1$ ряд Фур'є (6.12) є збіжним. Легко також переконатися, що

$$G = V(m) = 1 + d(\cos(mh) - 1)$$

є коефіцієнтом переходу розв'язку різницевого рівняння з часового шару $t_n = n\tau$ на шар $t_{n+1} = (n+1)\tau$, а умова $q = \max_m |G(m)| \leq 1$ є умовою стійкості різницевого розв'язку.

Дійсно, обидві частини очевидної рівності

$$V^{n+1}(m) = GV^n(m)$$

розділимо на $A_m \exp\{Imjh\} \neq 0$, підсумуємо результат за усіма m :

$$u_j^{n+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^{n+1}(m) \exp\{Imjh\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m G(m) V^n(m) \exp\{Imjh\}$$

і зробимо оцінку

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1}| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^{n+1}(m) \exp\{Imjh\} \right| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m G(m) V^n(m) \exp\{Imjh\} \right| \leq \\ &\leq \max_m |G(m)| \cdot \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^n(m) \exp\{Imjh\} \right| \leq |u_j^n|, \end{aligned}$$

або

$$\|u^{n+1}\| = h \sqrt{\sum_{j=-M+1}^{M-1} (u_j^{n+1})^2} \leq q^n h \sqrt{\sum_{j=-M+1}^{M-1} (u_j^0)^2} = q^n \|u^0\|.$$

Отже, $\|u^{n+1}\| \leq q^n \|u^0\|$ і умовою стійкості різницевої схеми є $\max_m |G(m)| \leq 1$. Звідси випливає, що для усіх m

$$-1 \leq 1 + d(\cos(mh) - 1) \leq 1$$

або

$$-1 \leq 1 - 2d \sin^2(mh/2) \leq 1$$

тобто $d \leq 1/2$, або

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\alpha}.$$

Приклад 6.12

До апроксимації початково-крайової задачі теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

з періодичним за просторовою змінною розв'язком застосуємо неявну різницеву схему

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \alpha \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}, \quad i = \overline{-M+1..M-1}, \quad n = \overline{1..N},$$

$$u_0^n = u_M^n, \quad u_1^n = u_{M+1}^n, \quad n = \overline{1..N},$$

$$u_i^0 = \varphi_0(ih), \quad i = \overline{-M+1..M-1}.$$

Як і раніше вважаємо, що початкова функція $\varphi_0(jh)$ розвивається у абсолютно збіжний ряд Фур'є, а сам розв'язок різницевої задачі можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$u_j^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^n(m) \exp\{Imjh\}. \quad (6.13)$$

Після підстановки шуканого розв'язку у різницеве рівняння і врахування рівнос, що $A_m \exp\{Imjh\} \neq 0$, для визначення $V(m)$ маємо рівність

$$V(m) = (1 + d(1 - \cos(mh)))^{-1}.$$

Очевидно, що у цьому випадку $\max_m |V(m)| \leq 1$ і отже ряд Фур'є (6.13) є збіжним, а функція (6.13) розв'язком різницевої задачі.

Оскільки модуль коефіцієнта переходу $|G| = |V(m)|$ розв'язку різницевого рівняння з часового шару $t_n = n\tau$ на шар $t_{n+1} = (n+1)\tau$ менший від одиниці для усіх m , то різницева схема буде безумовно стійкою.

Приклад 6.13

Розглянемо задачу Коші для рівняння конвективного переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x, 0) = u_0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty.$$

Запишемо для неї явну центрально різницеву схему

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = -k \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}.$$

Стійкість цієї схеми дослідимо застосовуючи метод фон Неймана. Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є (6.13). Після підстановки розв'язку у різницеве рівняння і проведення перетворень аналогічних до проведених у першому прикладі, для визначення множника переходу одержимо

$$V(m) = 1 - \frac{k\tau}{2h} (e^{mh} - e^{-mh}) = 1 + IC \sin mh.$$

Тут $C = \frac{k\tau}{h}$ — число Куранта. Оскільки

$$|V(m)|^2 = 1 + C^2 \sin^2 mh \geq 1$$

то цей чисельний алгоритм не буде стійким ні при яких значення τ та h .

Твердження 6.14

Стійкою для цієї задачі є різницева схема з різницями проти потоку.

Для одновимірного хвильового рівняння цю різницеву схему можна подати як схему з односторонніми різницями першого порядку апроксимації за просторовими змінними:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \begin{cases} -k \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}, & k > 0, \\ -k \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, & k < 0. \end{cases}$$

Твердження 6.15

Така схема має перший порядок апроксимації.

Використовуючи метод фон Неймана, легко перекоонатися, що умовою стійкості цієї схеми буде $|C| \leq 1$, де $C = \frac{k\tau}{h}$ — число Куранта.

Приклад 6.16

Для рівняння конвективного переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

запишемо тришарову різницеву схему

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -k \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{5\Delta x}.$$

Твердження 6.17

За допомогою безпосередньої перевірки легко перекоонатися, ця схема має другий порядок апроксимації за обома змінними.

Дослідження цієї схеми проведемо за методом фон Неймана. Для цього записане різницеве рівняння подаємо у вигляді

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n),$$

де $C = \frac{u\delta t}{\Delta x}$ — число Куранта. Після підстановки в останню формулу гармоніку ряду Фур'є (6.13) та виконання елементарних перетворень, приходимо до рівності

$$V^{n+1} = aV^n + V^{n-1}$$

де $a = -2IC \sin \theta$, а $\theta = m\Delta x$.

Для того, щоб одержати рівняння для визначення матриці переходу додатково розглянемо тотожність

$$V^n = 1 \cdot V^n + 0 \cdot V^{n-1}.$$

Об'єднавши ці дві рівності одержуємо векторне рівняння

$$\begin{bmatrix} V^{n+1} \\ V^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^n \\ V^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Тут матриця

$$G(m) = \begin{bmatrix} a(m) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

є матрицею переходу.

Використаємо відоме

Твердження 6.18

Для стійкості багатопарової різницевої схеми спектральний радіус матриці переходу $\rho(G) = \max_j |\lambda_j|$ (тут λ_j — j -те власне значення матриці G) не повинен перевищувати одиниці.

Отже, для установлення умови стійкості необхідно дослідити, при яких усі умовах розв'язки характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 - a\lambda - 1 = 0$$

менші від одиниці.

Оскільки $\lambda_{\pm} = (a \pm \sqrt{a^2 + 4})/2$, а $a = -2IC \sin \theta$, то при $C^2 \sin^2 \theta > 1$ власні числа матриці G

$$\lambda_{\pm} = I(-C \pm \sqrt{C^2 \sin^2 \theta - 1})$$

є чисто уявними числами, модуль яких більший від одиниці. Якщо $C^2 \sin^2 \theta \leq 1$, (оскільки умова стійкості повинна виконуватись для всіх гармонік ($\forall m$), це еквівалентно умові $|C| \leq 1$) то

$$|\lambda_{\pm}|^2 = \lambda \bar{\lambda} = 1$$

і отже, різницева схема буде стійкою при $C = 1$.

Робити висновок, що така умова є задовільною тільки в крайньому разі невірно. Це граничне значення умови стійкості є навіть бажаним в випадку, коли розв'язок початкового диференціального рівняння не затухає. Дійсно, рівняння конвективного переносу описує простий зсув довільного початкового розподілу $u(x, 0)$ функції із швидкістю конвекції k ($k\tau = h$). Тобто за проміжок часу τ розв'язок переноситься з точки $(x - k\tau, t)$ у точку $(x, t + \tau)$ і при цьому маємо $u(x, t + \tau) = u(x - k\tau, t)$. Якщо $C = 1$, то запропонована тришарова різницева схема дає точний розв'язок задачі. Вибираючи $\tau = \Delta t$, маємо $x - k\tau = x - C\Delta x$, а отже, точний розв'язок диференціального рівняння на сітковій множині запишеться відповідно:

- $u_{i+1}^n = u_i^{n-1}$ в точці $(x_i + \Delta x, t_n)$;

- $u_i^{n+1} = u_{i-1}^n$ в точці $(x_i, t_n + \Delta t)$.

Об'єднавши ці рівності приходимо до рівняння

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - u_{i+1}^n + u_{i-1}^n,$$

яке відповідає розглянутій трикроковій різницевої схемі при $C = 1$. Тобто у даному разі розв'язок різницевої задачі співпадає з точним розв'язком диференціальної.

Відмітимо, що при $k \neq \text{const}$ досягти виконання умови $C = 1$ практично неможливо.

Суттєвим недоліком тришарових схем є те, що для знаходження розв'язку потрібно задавати не один початковий розподіл в момент часу $t = 0$, як це робиться для диференціальної задачі, а задавати значення на двох часових кроках t_0 та t_1 . Тобто різницева рівняння є по суті рівнянням другого порядку і вимагає початкових умов, еквівалентних умовам $u(x, 0) = \varphi(x)$ та $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x)$, які приводять до перевизначеності диференціальної задачі. Для подолання цієї проблеми використовують наближені значення шуканого розв'язку, одержаного за допомогою деякого двошарового різницевого методу. При цьому для збереження другого порядку точності розв'язку в двошаровій схемі використовують значно менший крок $\tau' = \tau/k$ і за значення u_i^1 приймають значення одержане в момент часу $k\tau'$.

§6.3 Аналіз стійкості за Хьортом

Третій метод аналізу стійкості був запропонований Хьортом [1968]. У цьому методі члени, що входять у кінцево-різницеві рівняння, розкладаються в ряди Тейлора для того, щоб одержати диференціальне рівняння в частинних похідних. Стійкість потім визначається з відомих властивостей стійкості диференціальних рівнянь. (Аналогічний підхід до вивчення кінцево-різницевих рівнянь за допомогою отриманих у такий спосіб диференціальних рівнянь був використаний у роботі Сайруса й Фалтона [1967] для дослідження не стійкості, а точності кінцево-різницевих методів, застосовуваних для еліптичних рівнянь.)

Розглянемо знову схему з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторовій змінній для модельного рівняння, що включає конвективний і дифузійний члени, припускаючи, що u постійно:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -u \left(\frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \alpha \left(\frac{\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right). \quad (6.14)$$

Розкладемо кожний член рівняння (6.14) у ряди Тейлора в околі точки (x, t) , тобто відносно ζ_i^n тоді

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \Delta t \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_i^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\Delta t^3), \quad (6.15)$$

$$\zeta_{i\pm 1}^n = \zeta_i^n \pm \Delta x \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_i^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right|_i^n \pm O(\Delta x^3). \quad (6.16)$$

Підставляючи ці розкладання в (6.14) і приводячи подібні члени, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\Delta t \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_i^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\Delta t^3) \right) = \\ = \frac{u}{2\Delta x} \left(2\Delta x \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_i^n + O(\Delta x^3) \right) + \frac{\alpha}{\Delta x^2} \left(\Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right|_i^n + O(\Delta x^4) \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

або, опускаючи індекси i і n ,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2). \quad (6.18)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ це рівняння переходить у вихідне диференціальне рівняння в частинних похідних (1.24). Але при $\Delta t > 0$ рівняння (6.18) приймає вид

$$\frac{\Delta t}{2\alpha} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u}{\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (6.19)$$

Це рівняння, отримане збереженням усіх членів першого порядку в розкладаннях ряду Тейлора, є гіперболічним

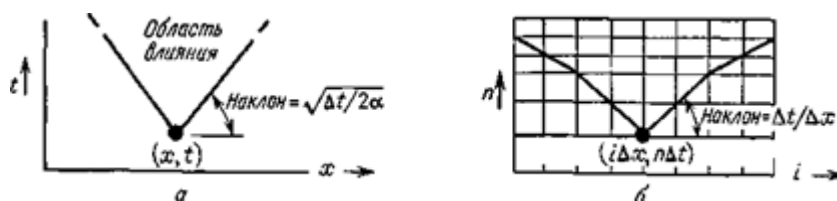


Рис. 6.1: Область впливу точки (x, t) для рівняння (6.18) гіперболічного типу, а — область впливу для диференціального рівняння; б — область впливу для скінчено-різницевого рівняння.

Як показано на мал. 6.1.а, для таких рівнянь існує область впливу довільної точки (x, t) , що обмежена характеристиками, що мають нахил $\pm \sqrt{\frac{\Delta t}{2\alpha}}$ і проходять через цю точку. Збурювання, що виникають у точці (x, t) , проявляються тільки усередині цієї області.

Означення 6.6. Частину площини (x, t) , розташовану поза цією областю, іноді називають зоною мовчання.

Для скінчено-різницевого рівняння (6.14) також існує область впливу. Кожне нове розраховане значення ζ_i^{n+1} залежить від значень $\zeta_{i\pm 1}^n$ у сусідніх точках $i \pm 1$ у попередній момент часу. Інакше кажучи, кожне значення ζ_i^n впливає на значення $\zeta_{i\pm 1}^{n+1}$ в сусідніх точках на наступному шарі за часом. Цей вплив у свою чергу поширюється на значення $\zeta_{i\pm 2}^{n+2}$ і т.д. Таким чином, область впливу дискретизованого рівняння (6.18) обмежується скінчено-різницевиими “характеристичними лініями” з нахилом $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ (див. мал.. 6.1.б). Умова Куранта (Курант, Фрідріху й Леви [1928]) стійкості скінчено-різницевого аналога таких гіперболічних рівнянь вимагає, щоб область впливу скінчено-різницевого рівняння принаймні містила в собі область впливу диференціального рівняння. З мал. 6.1 видно, що це накладає умову

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \sqrt{\frac{\Delta t}{2\alpha}}$$

або

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\alpha}. \quad (6.20)$$

Але це обмеження на Δt в точності збігається з обмеженням, обумовленим дифузійним членом у рівнянні й отриманим раніше з аналізу стійкості як за допомогою методу дискретних збурювань, так і за допомогою методу фон Неймана.

Щоб визначити іншу необхідну умову стійкості, обчислимо член $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ у рівнянні (6.19), диференціюючи вихідне диференціальне рівняння з урахуванням припущення $u = \text{const}$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial x} + \alpha \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2}. \quad (6.22)$$

Змінюючи порядок диференціювання й підставляючи $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ з вихідного диференціального рівняння в частинних похідних, отримуємо

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(-u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right), \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2u\alpha \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^4} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}. \quad (6.24)$$

Підставляючи цей вираз в (6.19) і перетворюючи результат, одержуємо

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\alpha - \frac{u^2 \Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + u\alpha \Delta t \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} - \frac{\alpha^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}. \quad (6.25)$$

Ідучи за Хьортом [1968], відкидаємо в рівнянні (6.25) вищі похідні й зберігаємо перші й другі похідні по кожній незалежній змінній (x і t), що дає корисне диференціальне наближення. Воно має сенс із двох причин. По-перше, похідні вищих порядків звичайно менші. По-друге, а posteriori відомо, що умова стійкості, отримана в результаті цього аналізу, буде сильніше за обмеження, що накладається на крок за часом при наявності тільки дифузійного члена, лише для течій з малою в'язкістю, тобто для $\alpha \ll u$, коли коефіцієнти при вищих похідних у рівнянні (6.25) стають малими. У результаті виходить диференціальне наближення

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha_{\text{еф}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (6.26)$$

де

$$\alpha_{\text{еф}} = \alpha - \frac{u^2 \Delta t}{2}. \quad (6.27)$$

Означення 6.7. Оскільки рівняння (6.26) еквівалентно вихідному модельному диференціальному рівнянню, будемо називати $\alpha_{\text{еф}}$ *ефективною в'язкістю*.

З математичної (і фізичної) точки зору роль в'язкості (дифузії) полягає в “розмазуванні” (дифузії) збурювання величини ζ , у прагненні зробити розподіл ζ ; однорідним. Негативна в'язкість фізично неможлива, тому що вона приводила б до концентрації будь-яких малих збурень, що виникли в однорідному розподілі, і створювала б у такий спосіб монотонну нестійкість. Для стійкості необхідно, щоб виконувалася умова $\alpha_{\text{еф}} \geq 0$, або умова $\Delta t \leq \frac{2\alpha}{u^2}$, що співпадає з умовою, отриманою за допомогою методу фон Неймана. У комбінації з умовою (6.20) вона включає умову Куранта $C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Цей аналіз не знімає обмеження на сіткове число Рейнольдса й тому забезпечує необхідні, але не достатні умови стійкості для модельного рівняння з конвективним і дифузійним членами.

Вправа 6.1. Повторити попередні дві вправи по визначенню умови стійкості для схеми з різницями проти потоку, використовуючи метод Хьорта.

§6.4 Завдання для самостійної роботи

Побудувати та дослідити стійкість різницевих схем, які апроксимують рівняння дифузійного та конвективного переносу з двома та трьома просторовими змінними. Визначити, які з них будуть консервативними та транспортивними.

7

Дослідження стійкості різницевих алгоритмів для рівнянь з багатьма незалежними змінними

Загальна схема дослідження. Відмінності в умовах стійкості різницевих схем для рівнянь дифузії-конвекції та повних рівнянь переносу

§7.1 Метод фон Неймана для багатомірних задач

Метод дискретних збурень (Томан і Шевчик [1966]) і метод Хьорта (Хьорт [1968]) можуть бути поширені на випадок дослідження стійкості в багатомірних задачах. Ми ж як приклад приведемо тут більш просте узагальнення методу Неймана на такий випадок. Використовуючи схему з різницями вперед за часом і із центральними різницями по просторовій змінній для лінеаризованого рівняння переносу вихору з постійними коефіцієнтами в плоскому випадку (коли $\alpha = 1/\text{Re}$), одержуємо

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} = -u \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - v \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \alpha \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right). \quad (7.1)$$

Тепер запишемо кожен Фур'є-компоненту розв'язку у вигляді

$$\zeta_{i,j}^n = V^n \exp\{I(k_x i \Delta x + k_y j \Delta y)\} \quad (7.2)$$

де V^n знову є амплітудою на часовому шарі n окремої Фур'є-компоненти, що має в напрямках x і y хвильові числа k_x й k_y (довжини хвиль $\Lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$ і $\Lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}$), а $I = \sqrt{-1}$.

Уводячи фазові кути $\theta_x = k_x \Delta x$ й $\theta_y = k_y \Delta y$ для координат x і y , запишемо вираз (7.2) як

$$\zeta_{i,j}^n = V^n \exp\{I(i\theta_x + j\theta_y)\} \quad (7.3)$$

аналогічно

$$\zeta_{i+1,j+1}^{n+1} = V^{n+1} \exp\{I((i+1)\theta_x + (j+1)\theta_y)\} \quad (7.4)$$

і т.д.

Означення 7.1. Відповідні двовимірні аналоги числа Куранта C визначаються як $C_x = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ і $C_y = \frac{v\Delta t}{\Delta y}$, а відповідні аналоги величини d як $d_x = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$ і $d_y = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2}$.

Підставляючи ці величини у вираз (7.2), скорочуючи на спільний множник $\exp\{I(i\theta_x + j\theta_y)\}$ і використовуючи формули Ейлера, знову одержуємо $V^{n+1} = GV^n$, де

$$G = 1 - 2(d_x + d_y) + 2d_x \cos \theta_x + 2d_y \cos \theta_y - I(C_x \sin \theta_x + C_y \sin \theta_y). \quad (7.5)$$

Твердження 7.1

Очевидні необхідні умови виконання нерівності $|G| \leq 1$ будуть

$$d_x + d_y \leq \frac{1}{2}, \quad (7.6)$$

та

$$C_x + C_y \leq 1. \quad (7.7)$$

Приклад 7.2

В частинному випадку $d_x = d_y = d$ нерівність (7.6) приймає вигляд

$$d \leq \frac{1}{4}. \quad (7.8)$$

Ця умова *вдвічі сильніше* обмеження, отриманого для одномірного рівняння з одним тільки дифузійним членом.

Приклад 7.3

В частинному випадку $C_x = C_y = C$ нерівність (7.7) приймає вигляд

$$C \leq \frac{1}{2} \quad (7.9)$$

і знову виявляється *вдвічі сильніше* відповідного необхідної умови в одномірному випадку.

Зауваження 7.4 — Фромм [1964] показав, що для частинного випадку $\Delta x = \Delta y = \Delta$ й $\theta_x = \theta_y = \theta$ обмеження на сіткове число Рейнольдса $\text{Re} = \frac{(|u|+|v|)\Delta}{\alpha}$ дається нерівністю

$$\text{Re}_c \leq 4 \quad (7.10)$$

яке є *менш жорстким*, ніж в одномірному випадку.

Вправа 7.1. Застосувати метод Неймана для дослідження стійкості схеми з різницями проти потоку для рівняння переносу у випадку нульової в'язкості

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} = -u \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x} - v \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \quad u > 0, \quad v > 0. \quad (7.11)$$

Показати, що умова стійкості має вигляд

$$C_x + C_y \leq 1. \quad (7.12)$$

Вправа 7.2. Застосувати метод Неймана до схеми з різницями вперед за часом і централь-

ними різницями по просторових змінних для тривимірного рівняння дифузії

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) \quad (7.13)$$

і показати, що умова

$$d_x + d_y + d_z \leq \frac{1}{2} \quad (7.14)$$

є необхідною і достатньою для стійкості. В частинному випадку, коли $d_x = d_y = d_z = d$, умова (7.14) має вигляд

$$d \leq \frac{1}{6} \quad (7.15)$$

і виявляється втричі жорсткіше, ніж в одномірному випадку.

§7.2 Однокрокові явні схеми. Схема “чехарда із середньою точкою”

Розглянута для лінійного модельного рівняння груба схема FTCS, що використовує різниці вперед за часом і центральні різниці по просторовим змінним, є однокроковою явною двошаровою за часом схемою.

Зауваження 7.5 —

- Вона називається однокроковою, тому що для перехід до нового шару за часом потрібно тільки один обчислювальний крок.
- Ця схема називається явною, тому що всі значення в правій частині 3.44.в, необхідні для обчислення ζ_i^{n+1} на новому шарі за часом, відомі, тобто значення $\zeta_{i\pm 1}^{n+1}$ не входять у праву частину рівняння.
- Вона є двошаровою за часом, тому що для обчислень тут залучаються тільки два шари за часом; нові значення на шарі $n + 1$ обчислюються тільки за значеннями на шарі n .

Схема із центральними різницями по просторових змінних і за часом, яка, як уже було відзначено, безумовно нестійка при будь-яких $\alpha > 0$ і $\Delta t > 0$. Але при застосуванні тільки до конвективних членів (тобто при $\alpha = 0$) ця схема, називана схемою із середньою точкою (Лілі [1965]) або схемою “чехарда із середньою точкою” або — найчастіше — просто “чехарда” (Курант, Фрідрікс, Леві [1928]), має потрібні властивості стійкості.

Приклад 7.6

Таким чином, рівняння

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} \quad (7.16)$$

за цією схемою представляється у вигляді

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{(u\zeta)_{i+1}^n - (u\zeta)_{i-1}^n}{2\Delta x}. \quad (7.17)$$

Твердження 7.7

Дана схема має другий порядок точності по просторі й за часом.

Це однокрокова явна тришарова за часом схема. Виходить, для обчислення нових значень на шарі $n + 1$ в цій схемі необхідні значення на шарах n і $n - 1$.

Зауваження 7.8 — Помітимо, що нові ζ на парному часовому шарі обчислюються як значення ζ на попередньому парному часовому шарі плюс деяке збільшення, а попередній непарний часовий шар при цьому “перестрибається” (звідси й назва схеми — “чехарда”).

Метод фон Неймана дослідження стійкості для цієї й інших багатшарових схем застосовується в такий спосіб. Використовуючи ті ж визначення й припущення, що й у попередніх прикладах, рівняння (7.17) можна записати в наступному виді:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n-1} - C(\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n), \quad (7.18)$$

де $C = \frac{u\Delta y}{\Delta x}$ — число Куранта. Підставляючи сюди фур'є-компоненти, одержуємо зв'язок для амплітуд

$$V^{n+1} = aV^n + V^{n-1}, \quad (7.19)$$

де

$$a = -2/C \sin \theta. \quad (7.20)$$

Щоб одержати матричне рівняння, додамо до (7.19) тотожність

$$V^n = 1 \cdot V^n + 0 \cdot V^{n+1}. \quad (7.21)$$

Розглядаючи це рівняння разом з рівнянням (7.19) одержуємо

$$\begin{pmatrix} V^{n+1} \\ V^n \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} V^n \\ V^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

де множник переходу G тепер являє собою матрицю

$$G = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Для вивченої раніше одношарової схеми множник переходу G був просто числом, а умова стійкості мала вигляд $|G| \leq 1$.

Твердження 7.9

У випадку ж, коли G являє собою матрицю, умову стійкості (згідно фон Нейману) має такий вигляд:

$$|\lambda| \leq 1, \quad (7.24)$$

де λ — усі можливі власні значення матриці G .

Зауваження 7.10 — Власне значення до матриці визначається як корінь характеристичного рівняння, яке утворюється прирівнюванням до нуля визначника матриці, у якого з кожного діагонального елемента віднімається λ). Таким чином, характеристичне рівняння для визначення матриці G записується так:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7.25)$$

Коли G являє собою просте число, як у попередніх прикладах, воно розглядається як одинірвна матриця. Тоді рівняння для визначення власного значення приймає вигляд $G - \lambda = 0$ або $\lambda = G$, тому умова (7.24) зведеться до попередньої умови $|G| \leq 1$.) Розкриваючи визначник і розв'язуючи отримане квадратне рівняння відносно λ , знаходимо два розв'язки:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 + 4}). \quad (7.26)$$

Враховуючи, що $a = -2IC \sin \theta$ й $a^2 = -4C^2 \sin^2 \theta$, маємо

$$\lambda_{\pm} = -IC \sin \theta \pm \sqrt{1 - C^2 \sin^2 \theta}. \quad (7.27)$$

У тих випадках, коли $C^2 \sin^2 \theta \leq 1$, підкореневий вираз буде від'ємним, і тоді

$$\lambda_{\pm} = I \left(-C \sin \theta \pm \sqrt{C^2 \sin^2 \theta - 1} \right). \quad (7.28)$$

При цьому абсолютна величина $|\lambda| > 1$, що означає нестійкість. У тому ж випадку, коли $C^2 \sin^2 \theta \leq 1$, для чого, загалом кажучи, потрібне виконання умови

$$C \leq 1 \quad (7.29)$$

одержуємо

$$|\lambda_{\pm}|^2 = C^2 \sin^2 \theta + (1 - C^2 \sin^2 \theta), \quad (7.30)$$

$$|\lambda_{\pm}| = 1, \quad C \leq 1. \quad (7.31)$$

Це задовольняє умові стійкості (7.24) у граничному випадку рівності. Аналогічний результат виходить також при двох просторових змінних, але тут для стійкості потрібне виконання нерівності $C_x + C_y \leq 1$.

Можна подумати, що, значення $|\lambda_{\pm}| = 1$ з (7.31), що відповідає границі стійкості, є прийнятним лише в крайньому випадку, але в дійсності це значення навіть досить бажане, якщо розв'язок вихідного диференціального рівняння не є загасаючим. Насправді, рівняння конвекції (7.16) при відсутності в'язкості й постійному u виражає той факт, що довільний початковий розподіл функції $\zeta(x, 0)$ просто зсувається зі швидкістю конвекції u ; виходить, для будь-якого зсуву τ за часом розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\zeta(x, t + \tau) = \zeta(x - u\tau, t). \quad (7.32)$$

Таким чином, метод фон Неймана показує, що схема “чехарда” правильно моделює одну із властивостей, властивих розв'язку вихідного диференціального рівняння при $u = \text{const}$, а саме відсутність загасання. Будь-яка різницева схема для розв'язку рівняння для нев'язкої рідини, така, що $|G| < 1$, має помилку, обумовлену штучним або чисельним загасанням. У будь-якій збіжній різницевій схемі ця помилка повинна, звичайно, прямувати до нуля при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, але застосування методу фон Неймана показує, що схема “чехарда” при $u = \text{const}$ й $C \leq 1$ має нульову похибку, обумовлену загасанням, навіть при скінченних Δx і Δy .

Дійсно, в частинному випадку $C = 1$ розглянута схема дає точні результати. Поклавши $\tau = \Delta t$, маємо $x - u\tau = x - C\Delta x$, тому при $C = 1$ розв'язок (7.32) можна переписати так:

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-1}^n. \quad (7.33)$$

Отже, точний розв'язок диференціального рівняння, якщо його розглядати у вузлових точках кінцево-різницевої сітки, виражає перенос величини ζ із точки $i - 1$ на шарі n в точку i на шарі $n + 1$. Величина ζ за один крок за часом переноситься з конвективною швидкістю u на відстань $u\Delta t$, а при $C = 1$ відстань $u\Delta t$ рівна Δx . Через два часові кроки точний розв'язок буде

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-2}^{n-1}. \quad (7.34)$$

У результаті застосування схеми “чехарда” (7.18) при $C = 1$ одержуємо

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n-1} - \zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n. \quad (7.35)$$

Задавши правильні початкові значення згідно з рівнянням (7.33), а саме $\zeta_{i+1}^n = \zeta_i^{n-1}$ й $\zeta_{i-1}^n = \zeta_{i-2}^{n-1}$, одержуємо, що різницевий розв'язок (7.35) збігається з точним розв'язком (7.34). Таким чином, при $u = \text{const}$ й $C = 1$ схема “чехарда” дає точний розв'язок.

Зауваження 7.11 — Однак при практичних гідродинамічних розрахунках, коли швидкість змінюється в просторі, обмеження на крок Δt буде визначатися (якщо не враховувати додаткові ускладнення, обумовлені нелінійністю) найбільшим значенням u у вузлових точках сітки. Виходить, загалом кажучи, не можна одержати $C = 1$ у всіх точках. Але при $C < 1$ різницева схема “чехарда” вже не буде давати точного розв'язку.

Насамперед всупереч результатам методу фон Неймана розглянутій схемі може бути притаманно певне чисельне загасання, хоча це звичайно не допускається. На мал. 7.1 представлені тривимірні графіки величини $\zeta(x, t)$, розрахованої за схемою “чехарда” при синусоїдально мінливій на вхідній границі потоку величині $\zeta(0, t) = \sin t$. При $C = 1$, як видно на мал. 7.1.а, отримується точний розв'язок із синусоїдальним законом на вхідній границі, який переноситься за рахунок конвекції без загасання. На мал. 7.1.б побудована діаграма, розрахована із удвічі меншим кроком за часом, тобто при $C = \frac{1}{2}$. Видно, що в цьому випадку максимум амплітуди першого горба зменшується при русі вниз за потоком. Мал. 7.1.в знову відповідає $C = \frac{1}{2}$, але період зміни ζ на вхідній границі й величина кроку за часом обрані таким чином, щоб їх відношення (і крок Δx) були такими ж, як і для мал. 7.1.а; у цьому випадку загасання дуже сильне.

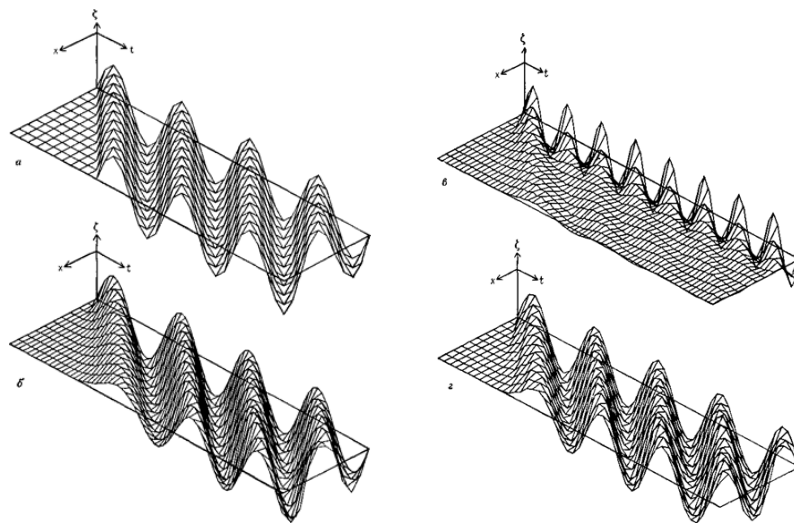


Рис. 7.1: [У. Сандберг]. Розв'язки рівняння $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{u \partial \zeta}{\partial x}$, отримані за допомогою схеми “чехарда”. Тут C — число Куранта, N — сіткова частота. а: $C = 1$, $N = 8$; б: $C = \frac{1}{2}$, $N = 16$; в: $C = \frac{1}{2}$, $N = 8$; г: $C = \frac{3}{4}$, $N = 10.667$.

Зауваження 7.12 — Тут виникає питання щодо застосування терміна “загасання”. Метод фон Неймана став настільки широко відомим, що “загасання” звичайне розуміється в значенні поведінки Фур’є-компонентів як випадок, коли $|\lambda| < 1$. Очевидно, якщо термін “загасання” означає по визначенню, що $|\lambda| < 1$, то схема “чехарда” по визначенню не має загасання.

Зменшення ж екстремальних величин амплітуди, яке видно на мал. 7.1.б і 7.1.в, правильно пов’язувати з дисперсійною помилкою, яка проявляється в методі фон Неймана й буде коротко обговорюватися надалі. Така термінологія доцільна, і її можна навіть рекомендувати в тих випадках, коли мається на увазі, що схема насправді може викликати зменшення екстремальних величин амплітуд хвиль. Звичайно таку властивість називають “загасанням”; що ж стосується мал. 7.1.в, то краще було б говорити, що хвиля не загасає, а зменшує свою амплітуду в міру її переносу за рахунок конвекції.

Грунтуючись на мал. 7.1 можна зробити й інший висновок. При розв’язанні скінченно-різницевого рівняння для задач, аналогічних представленої на мал. 7.1 існує два характеристичні параметри. Перший параметр являє собою число Куранта, яке є єдиним параметром при розв’язку скінчено-різницевого рівняння у внутрішніх точках. Другим параметром є сіткова частота $N = \frac{2\pi}{\Delta t}$, тобто число часових шарів за період зміни функції на вхідній границі потоку.

Порівняння мал. 7.1.б і 7.1.в приводить до висновку, що для фіксованого $C < 1$ загасання (зменшення екстремальних амплітуд) послабляється зі збільшенням сіткової частоти в тому випадку, коли сіткова частота N являє собою ціле число. Але коли N не є цілим числом (випадок, зображений на мал. 7.1.г), то відбувається “недозагасання” амплітуди; як показано на мал. 7.1.г, амплітуди “недозагасають” на 15% від амплітуди піка на вхідній границі, що обумовлене фазовими помилками. Даний ефект не можна повністю спасити на рахунок умови на вихідній границі потоку; уже до того, як почується який-небудь вплив цих умов, спостерігається недозагасання амплітуди на 8%.

Схемі “чехарда” властиві також інші помилки й аномалії. Диференціальне рівняння (7.16) є рівнянням першого порядку по просторових змінних і за часом; для всіх $x > 0$, $t > 0$ розв’язок повністю визначається завданням початкових умов $\zeta(x, 0)$ і граничних умов $\zeta(0, t)$. Але для початку обчислень за допомогою дискретного аналога (7.17) потрібно два набори початкових умов, тому що для розрахунків значень на $(n + 1)$ -ому шарі необхідні значення на n -ому і $(n - 1)$ -ому шарах.

Таким чином, скінчено-різницеве рівняння фактично є рівнянням другого порядку за часом і вимагає початкових умов ζ_i^1 і ζ_i^2 . Це аналогічно завданню початкових значень $\zeta(x, 0)$ і $\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_{t=0}$ для диференціального рівняння, що робить задачу для диференціального рівняння перевизначеною. Для одержання ζ_i^2 повинна бути використана інша “розгінна” скінчено-різницева схема, після чого можна застосовувати схему “чехарда”. Якщо така “розгінна” схема дає точні результати, як це передбачалося після обговорення рівняння (7.35), то й наступний розв’язок за схемою “чехарда” при $C = 1$ буде точним. Якщо ж “розгінна” схема вносить помилку в значення ζ_i^2 , то ця помилка буде зберігатися при наступних розрахунках за схемою “чехарда”.

Таким чином, правильніше казати, що схема “чехарда” при $C = 1$ зберігає, а не дає точний розв’язок, заданий на першому часовому шарі, для всіх часових шарів.

Іншим типом помилки схеми “чехарда” (і всіх інших схем) при $C = 1$ є фазова помилка. При розв’язанні диференціального рівняння весь початковий розподіл $\zeta(x, 0)$ поширюється

зі швидкістю конвекції u . При скінчено-різницевих розрахунках різні Фур'є-компоненти мають різні швидкості конвекції, причому швидкість компонентів з найбільшою довжиною хвилі Λ наближається до правильного значення u , а компоненти з меншими довжинами хвиль поширюються з меншими швидкостями. Це явище легко продемонструвати, розглядаючи (див. мал. 7.2) найменшу можливу довжину хвилі $\Lambda = 2\Delta x$ на просторовій сітці нескінченної довжини. Для загальності збурення на $(n-1)$ -му і n -му часових шарах узяті з різними амплітудами, що відповідає використанню “розгінної” схеми, для якої не виконується умова $G = 1$.

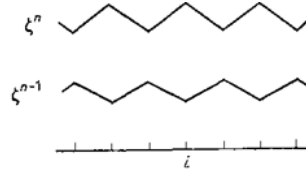


Рис. 7.2: Фур'є-компонента з довжиною хвилі $\Lambda = 2\Delta x$ на просторовій сітці нескінченної довжини.

З мал. 7.2 ясно, що

$$\left. \frac{\delta \zeta}{\delta t} \right|_i^n = \frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (7.36)$$

для всіх i . Таким чином, $\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^{n-1}$ і $\zeta_i^{n+2} = \zeta_i^n$ і т.д. Виходить, тут має місце чергування двох штучно заданих початкових розподілів з довільною амплітудою. Фур'є-компонента з довжиною хвилі $\Lambda = 2\Delta x$ є повністю стаціонарною, причому має місце повна помилка фазової швидкості.

Ця поведінка узгоджується з тим фактом, що схема “чехарда” при $C = 1$ зберігає точний розв'язок. Якщо почати розрахунки з точного розв'язку $\zeta_i^n = \zeta_{i-1}^n$, то для компоненти з $\Lambda = 2\Delta x$ наступний правильний розв'язок насправді буде $\zeta_i^{n+1} = \zeta_{i-2}^n = \zeta_i^{n-1}$. Ясно, що, хоча схема “чехарда” має другий порядок точності, у дійсності точність визначається точністю “розгінної” схеми, що використовується на початковій стадії розрахунків.

Схема “чехарда”, розглянута для конвективних членів, застосовна також для течій з малими Re (Хин і Макано [1966]) і для течій невязкої рідини за умови, що точний початковий розв'язок розраховується окремо й що стаціонарний стан не досягається.

У схемі “чехарда” (і у всіх схемах другого порядку точності із центральними різницями по просторових змінних) мають місце й додаткові помилки. Розглянемо скінчено-різницеву схему, у якій найбільше значення i рівно IL . Застосування схеми “чехарда” (7.17) для обчислення ζ_{IL}^{n+1} вимагало б значення величини ζ_{IL+1}^{n+1} в точці, яка перебуває поза розрахунковою сіткою. Тому в точці IL не можна провести розрахунки й для визначення потрібно задати чисельну граничну умову в IL .

Така вимога аналогічна необхідності задання двох наборів початкових умов і веде до перевизначеності задачі для диференціального рівняння. Помітимо також, що звичайно використовувана умова рівності нулю градієнта для задання умови на вхідній границі потоку, коли вважаються $\zeta_{IL}^{n+1} = \zeta_{IL+1}^{n+1}$ приводить до руху стаціонарної (в інших відносинах) фур'є-компоненти з довжиною хвилі $\Lambda = 2\Delta x$, але цей рух не має нічого спільного з тим, що відбувається при конвекції. З ростом часу ця фур'є-компонента із $\Lambda = 2\Delta x$ загасає по сітці зправа (від вихідної границі потоку) наліво, тоді як справжня конвекція розвивається зліва направо.

Така неправильна вимога, що полягає в заданні додаткової умови на вихідній границі потоку, є наслідком помилки ще одного виду, а саме обумовленої порушенням властивості транспортності.

Вправа 7.3. За допомогою обчислень вручну й геометричних міркувань перевірити, що схема “чехарда” дає правильну поведінку розв’язку на лівій границі (вхідна границя потоку). Задавши початкову умову, що включає тільки компоненту з $\lambda = 2\Delta x$, і зафіксувавши граничну умову на вхідній границі потоку для всіх моментів часу, почати розрахунки за схемою “чехарда” при $C = 1$ при точному розв’язку на другому тимчасовому шарі. Показати, що при $C = 1$ початковий профіль правильно поширюється по сітці.

Слід також помітити, що назва “чехарда” застосовується для багатьох схем, що відрізняються видом апроксимації просторових похідних, але всі вони є тришаровими й використовують центральні різниці за часом, як і тільки що розглянута схема.

§7.3 Завдання для самостійної роботи

Побудувати апріорну оцінку кількості арифметичних операцій при використанні явних та неявних різницевих алгоритмів знаходження розв’язків дво- і трьохвимірних рівнянь переносу.

8

Дослідження стійкості чисельних алгоритмів із змінними операторними коефіцієнтами

Дослідження стійкості чисельних алгоритмів із змінними операторними коефіцієнтами. Енергетичний метод.

§8.1 Огляд інших умов стійкості нелінійних задач і задач із змінними коефіцієнтами

1. Нехай розв'язком задачі є вектор функція $\vec{u}(\vec{x}, t)$, яка має неперервні похідні по \vec{x} до порядку p включно. Визначаємо норму $\|\vec{u}\|_p$ за рівністю

$$\|\vec{u}\|_p^2 = \sum_{|\vec{v}| \leq p} \|\partial_{x_1}^{v_1} \partial_{x_2}^{v_2} \dots \partial_{x_d}^{v_d} \vec{u}\|^2,$$

де $|\vec{v}| = v_1 + v_2 + \dots + v_d$ означає порядок похідної, середньоквадратична норма якої стоїть під знаком суми. Задачу вважатимемо коректно поставленою, якщо її розв'язок і початковий елемент задовольняють умову

$$\|\vec{u}(\vec{x}, t)\| \leq \text{const} \|\vec{u}(\vec{x}, 0)\|_p, \quad \forall t \in [0, T]$$

для деякого фіксованого p і для щільної множини початкових елементів. Це відповідає визначенню неперервної залежності порядку p від початкових даних.

2. Умови *сильної стійкості* визначаються так:

1. при кожному фіксованому Δt оператор $H(\Delta t)$ визначений всюди і такий, що якщо позначити

$$\|\vec{u}\|_H^2 = (\vec{u}, H\vec{u}),$$

то існує додатна стала K_1 , незалежна від параметрів різницевої схеми, така що

$$K_1^{-1} \|\vec{u}\|^2 \leq \|\vec{u}\|_H^2 \leq K_1 \|\vec{u}\|^2;$$

2. розв'язок задачі задовольняє умові

$$\|\vec{u}^{n+1}\|_H^2 \leq (1 + K_2 \Delta t) \|\vec{u}^n\|_H^2, \quad (8.1)$$

де K_1 і K_2 обмежені додатні сталі.

Зауваження 8.1 — Це визначення стійкості в загальному випадку принаймні не слабкіше вище уведеного, бо якщо різницева схема сильно стійка, то при $n\Delta t \leq T$:

$$\|\vec{u}^n\| \leq K_1^{1/2} \|\vec{u}^n\|_H \leq (1 + K_2 \Delta t)^n K_1^{1/2} \|\vec{u}^0\|_H \leq K_1 e^{K_2 T} \|\vec{u}^0\|_H.$$

Отже для операторів зі сталими коефіцієнтами ці визначення еквівалентні.

Якщо побудована норма, в якій розв'язок задачі задовольняє умові (8.1), то при достатній гладкості її можна використати і для різницевих задач.

3. Якщо

$$G(x, \xi) = \sum_{\beta} c^{\beta} e^{I\beta\xi} = 1 - a(x)\xi + O(\xi^2)$$

— локальний множник переходу різницевої схеми

$$u^{n+1}(x) = (Cu^n(x)) \equiv \sum_{\beta} c^{\beta} u^n(x + \beta\Delta x)$$

для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

із змінним коефіцієнтом $a(x) \geq \alpha > 0$, то, як встановлено роботі [5], різницева схема стійка при виконанні умов:

1. $a(x)$ задовольняє умові Ліпшиця,
2. $\forall x, \forall \xi \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$: $|G(x, \xi)| < 1$,
3. $G(x, 0) = 1$ (умова узгодженості).
4. При розгляді гіперболічних рівнянь, різницеву схему

$$\vec{u}^{n+1} = C(\Delta T) \vec{u}^n \quad (8.2)$$

визначимо як *дисипативну порядку $2r$* (де r натуральне число), якщо існує таке $\delta > 0$, що для всіх x і ξ , які задовольняють умові $\max |\xi| \leq \pi$ та Δt менших деякого $\tau > 0$ виконується

$$|\lambda_v(x, \Delta t, \xi)| \leq 1 - \delta |\xi|^{2r},$$

де λ_v — власні значення локальної матриці переходу G .

Теорема 8.2 (13)

Якщо різницева схема (8.2) апроксимує диференціальне рівняння

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^d A_j(\vec{x}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}; \quad x_j \in \mathbb{R}; \quad t \in [0, 1],$$

де $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ — вектор розмірності p , $A_j(\vec{x})$ — $(p \times p)$ -ермітові матриці гладко залежні від \vec{x} , але незалежні від t , рівномірно обмежені та рівномірно задовольняють умові Ліпшиця по \vec{x} , схема (8.2) дисипативна порядку $2r$ і має порядок точності $2r - 1$, то вона стійка.

5. Нехай $\delta x_j = q_j(\Delta t)$, тоді різницева схема

$$\vec{u}^{n+1} = C(\Delta t) \vec{u}^n = \left[\sum_{\beta} c^{\beta}(\vec{x}) T^{\beta} \right] \vec{u}^n. \quad (8.3)$$

стійка, якщо [13]:

1. матриці $c^{\beta}(\vec{x})$ ермітові, не залежать від Δt і задовольняють умові Ліпшиця по компонентам вектора \vec{x} ;
2. $c^{\beta}(\vec{x}) \geq 0$.

Теорема 8.3

Якщо $c^\beta(\vec{x})$ — дійсні симетричні матриці, їх коефіцієнти не залежать від Δt і мають обмежені другі похідні по \vec{x} , а умова

$$\|G(\vec{x}, \xi)\| = \left\| \sum_{\beta} c^\beta(\vec{x}) e^{I\beta\xi} \right\| \leq 1 \quad \forall x, \xi \quad (8.4)$$

виконується всюди, то для дійсних векторних функцій \vec{u}^n різницева схема (8.3) стійка [13].

В роботах Лакса та Ніренберга встановлено умову, яка визначає прямий зв'язок між локальною стійкістю (8.4) та стійкістю в цілому.

Теорема 8.4

Нехай дійсні симетричні матричні коефіцієнти $c^\beta(\vec{x})$ не залежать від Δt і мають обмежені другі похідні по \vec{x} , а умова (8.4) виконується всюди. Тоді для дійсних векторних функцій \vec{u}^n різницева схема (8.3) стійка, тобто

$$\|C(\Delta t)\| \leq 1 + O(\Delta t).$$

6. Для нелінійних задач до сьогодні ще не створено ефективних методів дослідження достатньо широких класів різницевої схем. Мало досліджені і різницеві схеми, які апроксимують розривні розв'язки. Тут найбільш розповсюджені методи лінеаризації та використання першої варіації розв'язку [5].

Так, нехай маємо задачу Коші для системи гіперболічних рівнянь

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^d A_j(\vec{u}, \vec{x}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}; \quad x_j \in \mathbb{R}; \quad t \in [0, 1] \quad (8.5)$$

з початковими умовами

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}).$$

Різницеву схему, яка апроксимує цю задачу, запишемо у вигляді

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{\varphi}(\vec{u}^n, \vec{x}, \Delta t), \quad (8.6)$$

де права частина є нелінійною функцією від \vec{u}^n та \vec{u}^{n+1} , заданих в скінченному числі точок шаблону оператора. Нехай оператор $\vec{\varphi}$ з рівняння (8.6) є погодженим в розумінні апроксимації і його перша варіація стійка в L_2 .

Тоді внаслідок узгодженості для будь-якої гладкої функції \vec{v} :

$$\vec{\varphi}(\vec{v}, \vec{x}, \Delta t) = \vec{v} + \Delta t \sum_{j=1}^d A_j(\vec{v}, \vec{x}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} + o(\Delta t).$$

Нехай

$$\vec{U}(\vec{x}, t, \Delta t) = \vec{u}(\vec{x}, t) + \sum_m (\Delta t)^m \vec{U}_m(\vec{x}, t)$$

задовольняє (8.6).

Тоді $\vec{U}_m(\vec{x}, t)$ задовольняють лінійним рівнянням

$$\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial t} = \sum_{j=1}^d A_j(\vec{u}, \vec{x}) \frac{\partial U_m}{\partial x_j} + \alpha(\vec{x}, t) \vec{U}_m + \beta_m(\vec{x}, t), \quad \vec{U}_m(\vec{x}, 0) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7)$$

Тут α залежить від перших похідних \vec{u} та перших похідних A_j по \vec{u} . Розв'язки (8.7) існують і неперервно залежать від неоднорідних членів β_m та їх похідних до деякого порядку r_0 . Якщо, крім того, \vec{u} , A_j , $\vec{\varphi}$ мають неперервні похідні до порядку $[\frac{d+1}{2}] + r_0 + 2$, то при $\Delta t \rightarrow 0$ різницева апроксимація \vec{u}^{n+1} збігається до розв'язку задачі (8.5) [5].

Для багатьох задач жодна з цих умов не виконується і виникає необхідність шукати більш досконалі критерії стійкості. Аналіз інших відомих методів можна знайти в монографіях [1, 7–9] та ін.

§8.2 Дослідження стійкості різницевих схем за допомогою енергетичного методу

§8.2.i Аналіз стійкості одного різницевого рівняння

Проілюструємо ідею методу на прикладі розв'язку задачі Коші для модельного рівняння конвективного переносу [12]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad k = \text{const}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (8.8)$$

який задовольняє початковій умові

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Будемо вважати, що функція $\varphi(x) \in \text{фінітної}$, тобто вона перетворюється в нуль поза межами деякого скінченного проміжку: $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq \ell$. Тоді розв'язок задачі $u(x, t)$ в довільний момент часу t_1 також перетворюється в нуль при достатньо великому значенні $|x| \geq \ell(t_1)$. На сітковій множині

$$\bar{\omega}_{h,\tau} = \{x_i, t_n | x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots; t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

зі сталими невід'ємними кроками сітки h і τ функції $u(x, t)$ буде відповідати сіткова функція $u_i^n = u(ih, n\tau)$, причому $u_i^n = 0$ при $|i| \geq N_n$. У такому разі для фінітних функцій скалярний добуток

$$(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i^n v_i^n h$$

запишеться як

$$(u, v) = \sum_{i=-N_n}^{N_n} u_i^n v_i^n h.$$

У просторі сіткових функцій уведемо різницеві оператори

$$L_h u_i^k = k \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}, \quad \text{та} \quad L_\tau u_i^k = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

кожен з яких є також сітковою функцією того ж простору.

Використовуючи формулу підсумування за частинами [3, стор. 98], легко переконатися, що на скінченному інтервалі $|i| < N$ вірна формула

$$\sum_{i=-N-\ell}^{N+\ell} v_i^n \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} h = y_{N+\ell}^n v_{N+\ell}^n - y_{-N-1-\ell}^n v_{-N-1-\ell}^n - \sum_{i=-N-\ell-1}^{N+\ell+1} y_{i-1}^n \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h} h.$$

Звідки, враховуючи фінітність функцій y_i^n та u_i^n , маємо

$$\sum_{i=-N-\ell}^{N+\ell} v_i^n \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} h = - \sum_{i=-N-\ell-1}^{N+\ell+1} y_{i-1}^n \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h} h.$$

Виходячи з визначення спряженого оператора

$$(L_h u, v) = (u, L_h^* v)$$

встановлюємо, що $L_h^* u = -k \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}$. Причому $L_h^* \neq L_h$.

Запишемо ще одну очевидну рівність

$$y_i^n \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = \frac{(y_i^n)^2 - (y_{i-1}^n)^2}{2h} + \frac{(y_i^n - y_{i-1}^n)^2}{2h} = \frac{1}{2} [L_h(y)^2 + h(L_h y)^2].$$

Звідси після підсумування та врахування фінітності функцій випливає, що

$$(L_h y, y) = \frac{h \|L_h y\|^2}{2k}.$$

Різницеве рівняння

$$L_\tau u + L_h u = 0 \tag{8.9}$$

помножимо на $u_i^{n+0.5}$ і підсумуємо за усіма точками просторової сітки. У результаті одержимо

$$\frac{1}{2} L_\tau \|u^n\|^2 = -(L_h u^n, u^{n+0.5}).$$

Оскільки

$$u_i^{n+0.5} = u_i^n + \tau \frac{u_i^{n+0.5} - u_i^n}{\tau/2} = u_i^n - \frac{\tau}{2} L_h u_i^n,$$

то

$$\frac{1}{2} L_\tau \|u\|^2 = -(L_h u^n, u^n) + \frac{\tau}{2} \|L_h u^n\|^2,$$

або ж

$$\frac{1}{2} L_\tau \|u^n\|^2 = \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{h}{k} \right) \|L_h u^n\|^2.$$

Отже, якщо права частина рівності не додатна, тобто $\tau \leq \frac{h}{|k|}$, то

$$L_\tau \|u^n\|^2 \leq 0$$

і, отже

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u_n\|. \tag{8.10}$$

Нерівність (8.10), яка вірна при $\tau \leq \frac{h}{|k|}$, свідчить про рівномірну стійкість різницевого рівняння (8.9) за початковими даними.

Енергетичний метод встановлює достатні умови стійкості.

Відзначимо, що енергетичний метод дозволяє отримати більшу ніж в методі фон Неймана інформацію про різницеву схему. Так відомо, що центрально різницева апроксимація рівняння конвективного переносу безумовно нестійка. Тобто для довільного вибору кроків сітки модуль множника переходу більший від одиниці. Проаналізуємо тепер цю схему за допомогою енергетичного методу. Для цього уведемо оператор

$$L_h^0 u_i^n = k \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно, що

$$L_h^0 u_i^n = \frac{1}{2} (L_h u_i^n - L_h^* u_i^n),$$

а отже, в силу визначення спряженого оператора

$$(L_h^0 u, u) = \frac{1}{2} [(L_h u, u) - (L_h^* u, u)] = 0.$$

Запишемо різницеве рівняння

$$L_\tau u_i^n + k L_h^0 u_i^n = 0, \quad (8.11)$$

помножимо його на $u_i^{n+0.5}$ і підсумуємо за усіма індексами просторових точок сітки та, скориставшись апроксимуючим різницеvim рівнянням, одержимо

$$\frac{1}{2} L_\tau \|u^n\|^2 = -(L_h^0 u^n, u^{n+0.5}) = -(L_h^0 u^n, u^n) + \frac{\tau}{2} \|L_h^0 u^n\|^2.$$

Врахувавши, що $(L_h^0 u, u) = 0$, маємо

$$L_\tau \|u^n\|^2 = \tau \|L_h^0 u^n\|^2 \geq 0.$$

Отже, норма сіткового розв'язку при переході на наступний часовий шар не може спадати. Проте її зростання обмежене. Дійсно

$$\begin{aligned} \|L_h^0 u^n\|^2 &= k^2 \sum_i (L_h^0 u_i^n)^2 h = \frac{k^2}{4h^2} \sum_i (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)^2 h \leq \\ &\leq \frac{k^2}{2h^2} \sum_i ((u_{i+1}^n)^2 + (u_{i-1}^n)^2) h \leq \frac{k^2}{h^2} \|u^n\|^2. \end{aligned}$$

Звідки випливає, що

$$L_\tau \|u^n\|^2 \leq \frac{k^2}{h^2} \|u^n\|^2,$$

або

$$\|u^{n+1}\|^2 \leq \left[1 + \frac{k^2 \tau}{h^2} \right] \|u^n\|^2.$$

Нехай $d_0 \geq \frac{k^2 \tau}{h^2}$. Тоді вірна мажорантна оцінка

$$1 + \frac{k^2 \tau}{h^2} \leq e^{d_0 \tau},$$

з якої випливає

$$\|u^{n+1}\| \leq e^{0.5 d_0 \tau} \|u^n\|.$$

Ця нерівність приводить до умови стійкості за початковими даними такого виду

$$\|u^{n+1}\| \leq e^{0.5d_0T} \|u^n\|.$$

Тут T граничне значення інтервалу часу, на якому розглядається розв'язок задачі.

Відзначимо, що умова стійкості $\tau \geq \frac{d_0 h^2}{k^2}$ не є природною для рівнянь гіперболічного типу. Вона є більш притаманною для параболічних рівнянь.

§8.2.ii Застосування енергетичного методу до системи різницьових рівнянь

В області $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку

,

при заданих початкових умовах

.

Вважаємо, що функції u та v є фінітними. Помножимо перше рівняння системи на v , а друге на u і складемо результати

.

Зінтегрувавши останню рівність по x одержимо

,

де $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (u^2 + v^2) dx$.

З останньої диференціальної рівності випливає енергетична тотожність

$$E(t) = E(0),$$

яка виражає закон збереження енергії.

Перейдемо далі до дослідження різницевої схеми. Диференціальній задачі поставимо у відповідність сімейство різницьових схем

,

,

де α та β — вільні параметри.

Помножимо перше рівняння системи на α , а друге на β і підсумуємо одержані співвідношення за індексами просторових точок

=,

=.

Склавши ці рівняння, після простих перетворень [12], маємо

$$L_{\tau} J = Q,$$

або

$$J^{n+1} = J^n + \tau Q,$$

де

Якщо для якоїсь з конкретних схем (тобто при конкретно заданих значеннях параметрах α та β) може бути встановлено умову

$$Q \leq 0$$

то ця умова є достатньою умовою стійкості у енергетичній нормі. Тобто

$$J^{n+1} \leq J^n.$$

Так, якщо в системі різницевих рівнянь покласти $\beta = 0.5$, залишивши α вільним параметром, то $Q = -\tau(\alpha - 0.5)\|L_\tau u^n\|^2$, а отже для виконання нерівності $Q \leq 0$, яка забезпечує стійкість схеми достатньо вимагати $\alpha \geq 0.5$.

Наприкінці відзначимо, що при $\alpha = 0.5$ апроксимація є стійкою і $Q = 0$. Остання рівність означає виконання на сітковій множині закону збереження кількості енергії, який в цьому разі має вигляд

$$\|u^{n+1}\|^2 + \|v^{n+1}\|^2 = \|u^0\|^2 + \|v^0\|^2.$$

Якщо ж $0.5 < \alpha \leq 1$, то $Q \leq 0$ і енергія в різницевій схемі спадає внаслідок дії дисипативних властивостей притаманних самій різницевій схемі. Швидкість спадання енергії різницевої схеми є величиною порядку $O(\tau)$.

§8.2.iii Завдання для самостійної роботи

Принцип заморожених коефіцієнтів. Ознака Бабенка—Гельфонда

§8.3 Принцип заморожених коефіцієнтів та ознака Бабенка і Гельфонда

При дослідженні стійкості різницевих рівнянь з змінними коефіцієнтами важливе місце займає принцип заморожених коефіцієнтів [7].

В області визначення розв'язку вибирається довільна точка (\tilde{x}, \tilde{t}) . Значення коефіцієнтів різницевого рівняння, визначеного на шаблоні цієї точки, фіксуються (заморожуються) і вважається, що в усіх точках області розв'язуються різницеві рівняння з цими сталими коефіцієнтами. За допомогою спектральної ознаки встановлюються умови стійкості одержаної різницевої задачі з сталими коефіцієнтами. Дослідивши побудовані, таким чином, різницеві задачі в усіх точках сіткової області, за необхідну умову стійкості задачі вибираємо найбільш жорстку умову.

Тобто [7], має місце

Твердження 8.5 (принцип заморожених коефіцієнтів)

Для стійкості лінійної різницевої задачі з змінними коефіцієнтами необхідно, щоб кожна задача Коші для різницевого рівняння з сталими замороженими коефіцієнтами задовольняла необхідній спектральній ознаці стійкості фон Неймана.

Така ознака стійкості є необхідною умовою і має назву ознаки локальної стійкості.

Розглянемо, наприклад, різницеву схему

$$\quad, \quad (8.12)$$

$$\quad, \quad (8.13)$$

де ℓ_1 та ℓ_2 — різницеві оператори граничних умов. В довільній точці сіткової області (\tilde{x}, \tilde{t}) зафіксуємо значення коефіцієнта $a(x, t) = a(\tilde{x}, \tilde{t})$ і дослідимо одержану різницеву схему зі сталим коефіцієнтом

$$= \quad (8.14)$$

у всіх внутрішніх точках сіткової області.

Як встановлено вище, умовою стійкості такого різницевого рівняння є виконання нерівності

$$\leq .$$

Оскільки в силу принципу заморожених коефіцієнтів для стійкості різницевої задачі ця умова повинна виконуватись для всіх точок (\tilde{x}, \tilde{t}) з області визначення розв'язку, то умовою локальної стійкості для рівняння з змінним коефіцієнтом є умова

$$\leq .$$

Принцип заморожених коефіцієнтів ґрунтується на евристичному рівні строгості і при дослідженні нелінійних задач. Так [7], для нелінійної задачі

$$\quad, \quad$$

використаємо різницеву схему

$$\quad, \quad$$

В цій різницевій схемі крок за часом може змінюватись при переході від одного часового шару до іншого. Нехай якимось чином ми дійшли до часового шару t_p . Виникає природне питання яким вибрати наступний крок τ_{p+1} , щоб одержана різницева схема була стійкою? Прогнозувати оцінку цього параметра дозволяє принцип заморожених коефіцієнтів, виходячи з встановленої вище оцінки

$$\tau_{p+1} \leq \frac{h^2}{2 \max_i |1 + (u_i^n)^2|}.$$

Різноманітні чисельні експерименти на ЕОМ підтверджують вірність цього евристичного твердження [7].

Якщо необхідну умову стійкості для задачі Коші з замороженими коефіцієнтами у якійсь точці буде порушено, то не можна чекати стійкості розв'язку крайової задачі ні при яких крайових умовах.

Принцип заморожених коефіцієнтів не враховує вплив граничних умов. Локальна стійкість може мати місце при одних і не мати місця при інших граничних умовах. Однією з причин цього є локальна некоректність постановки різницевої задачі. Відомі приклади

Крайса [5, 12], де в одному з них для коректно поставленої крайової задачі для рівняння з змінними коефіцієнтами, всі задачі з відповідними замороженими коефіцієнтами некоректні, а в другому — всі задачі зі сталими коефіцієнтами коректні, в той час як задача зі змінними коефіцієнтами такою не є.

Стренг довів [5], що для коректно поставленої задачі для рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$, після заміни оператора A його головною частиною (тобто сумою членів, які містять похідні найвищого порядку) всі задачі з сталими коефіцієнтами є коректно поставленими. Тому всі задачі для систем рівнянь першого порядку є локально коректні. Для симетричних гіперболічних систем вищих порядків коректність постановки лінійних задач із змінними коефіцієнтами забезпечується теоремами чисто локального характеру.

При дослідженні стійкості різницевих початково–крайових задач з змінними коефіцієнтами і врахуванні впливу можливих збурень в крайових умовах використовується ознака Бабенка–Гельфанда. Вона вимагає одночасного дослідження трьох різницевих задач:

1. задачі Коші з збуренням в точці, яка лежить всередині області

$$=$$

без урахування граничних умов (задача Коші);

2. дослідження різницевої задачі у всіх точках справа від лівої граничної точки $x = x_0$ з врахуванням тільки граничної умови в цій точці з замороженими в ній коефіцієнтами

$$,$$

$$,$$

віднісши при цьому праву границю в нескінченно віддалену точку (це можливо тільки для тих розв'язків, для яких $u_i^n \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$);

3. розглянути задачу з врахуванням тільки правої граничної умови, з замороженими в ній коефіцієнтами і дослідити її стійкості в області зліва від даної точки границі

$$,$$

$$.$$

віднісши ліву границю в $-\infty$ (це можливо тільки для тих розв'язків, для яких $u_i^n \rightarrow 0$ при $i \rightarrow -\infty$).

Останні дві задачі є значно простішими від першої задачі, оскільки при фіксованому відношенні кроків $r = \frac{\tau}{h^2}$ вони не залежать від h і є задачами з сталими коефіцієнтами.

Отже, потрібно скласти три незалежні від h різницеві задачі і для кожної з (попередньо поклавши $r = \frac{\tau}{h^2}$) знайти усі ті власні числа оператора переходу (з часового шару n на шар $n + 1$) при яких існує обмежений при прямуванні x до $+\infty$ чи $-\infty$ розв'язок виду

$$u_i^n = \lambda^n u_i^0 \quad (8.15)$$

при виконанні вказаних у цих задачах граничних умов.

Твердження 8.6

Для стійкості початково–крайової задачі з змінними коефіцієнтами спектри операторів переходу кожної з трьох наведених задач повинні лежати в крузі одиничного радіуса.

Методику визначення відповідних власних чисел λ оператора переходу проілюструємо модельному прикладі. Для спрощення викладок покладемо і обчислимо спектри всіх трьох задач при різних крайових умовах та . Після підстановки розв'язку задачі у вигляді (6.2) у різницеве рівняння, (6.1), одержимо , , або . Характеристичним рівнянням цього різницевого рівняння є квадратне рівняння [5] . (6.3) Якщо є коренем рівняння (6.3), то сіткова функція

є одним з розв'язків різницевого рівняння . (6.4) При , тобто (), обмеженим при та розв'язком є сіткова функція [5] . (6.5) Після підстановки (6.5) у (6.4), маємо , або, врахувавши, що , знаходимо , . Ці значення заповнюють відрізок , який є спектром розглянутої задачі. Поза цим відрізком власних чисел не існує, оскільки у випадку відсутності у характеристичного рівняння кореня рівного за модулем одиниці різницева задача не має обмежених при розв'язків. Якщо не лежить на відрізку , то модулі обох коренів характеристичного рівняння відмінні від одиниці, але їх добуток рівний вільному члену, тобто одиниці. Нехай для визначеності . а .Тоді загальний розв'язок різницевого рівняння, модуль якого спадає при , має вигляд , а загальний розв'язок різницевого, яке прямує до нуля при , має вигляд . Для визначення власних значень другої різницевої задачі потрібно підставити у ліве граничне значення і знайти ті значення при яких воно виконується. Тобто, множина Це будуть усі власні значення другої різницевої задачі. Так при , умова не виконується ні при яких , отже власних значень на границі не існує і множина , містить усі власні числа. Умова приводить до рівняння . Оскільки , то при власних чисел немає. Якщо ж, наприклад, , то умова

виконується при . Використовуючи рівняння , знаходимо . Це і є єдине власне значення різницевої задачі. Воно лежить поза одиничним кругом. Аналогічно, використовуючи граничну умову при , знаходимо власні значення третьої різницевої задачі.

9

Метод першого диференціального наближення

Дисперсійність та дисипативність різницевих рівнянь. Метод першого диференціального наближення. Приклади застосування методу диференціального наближення. Гіперболічна та параболична форми запису першого диференціального наближення. Схемна в'язкість.

§9.1 Метод першого диференціального наближення

Метод першого диференціального наближення є важливим інструментом дослідження різницевих схем. Згідно з цим методом усі функції дискретного аргументу, які входять до різницевого рівняння, розвиваються в ряди Тейлора. Ці розвинення підставляються в різницеве рівняння. У рівнянні залишають доданки, які залежать від кроків у нульовому та першому ступені, і аналізують якість одержаного рівняння, виходячи з відомих умов, що накладаються на коефіцієнти даного диференціального рівняння. Проведення такого аналізу пов'язано з тим, що виконання розрахунків на ЕОМ допускає використання хоча й досить малих, але все ж таки скінченних кроків сітки. Оцінки апроксимації мають асимптотичний характер і не дають змоги отримати реальну оцінку похибки обчислень, яку необхідно враховувати, аналізуючи схему.

Приклад 9.1

Ідею використання методу першого диференціального наближення проілюструємо на різницевій схемі Лакса

$$u_i^{n+1} = \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} - \frac{k\tau}{2h_x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad (9.1)$$

яка апроксимує хвильове диференціальне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (9.2)$$

Припускаючи, що розглядувана функція має достатню кількість неперервних похідних, розвинемо її в околі точки (x_i, t_n) за формулою Тейлора за часовою

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \tau \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\tau^3),$$

і просторовою змінними

$$u_{i\pm 1}^n = u_i^n \pm h_x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n + \frac{h_x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^n \pm \frac{h_x^3}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i^n + O(h^4),$$

Підставляючи ці розвинення в схему Лакса, дістанемо

$$0 = u_i^{n+1} - \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} + \frac{k\tau}{2h_x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \tau k \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h_x^2 + \tau^3).$$

Звідси маємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h_x^2}{2\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h_x^2 + \tau^2).$$

Це **гіперболічна форма** подання першого диференціального наближення. Продиференціювавши рівняння (9.2) за часом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

і підставивши в нього замість $\frac{\partial u}{\partial t}$ праву частину рівняння $-k \frac{\partial u}{\partial x}$, дістанемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \left(-k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Отже, перше диференціальне наближення можна подати у параболічній формі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{h_x^2}{2\tau} - \frac{\tau k^2}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h_x^2 + \tau^2).$$

Якщо $h_x \rightarrow 0$ і $\tau \rightarrow 0$, це рівняння перетворюється на початкове. Але оскільки розрахунки виконуються хоча при малих, але все ж таки скінченних кроках сітки $\tau > 0$, то при дослідженні доцільно залишати в апроксимуючому рівнянні принаймні перше наближення розвинення. Це вказує на те, що схема Лакса еквівалентна рівнянню дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (9.3)$$

з ефективною схемною дифузією $\alpha = \frac{h_x^2}{2\tau} - \frac{\tau k^2}{2}$, яка відсутня у вхідному рівнянні. При досить малих значеннях кроку за часом коефіцієнт штучної дифузії буде значним, а отже і достатнім для стабілізації розрахунків з потужними ударними хвилями. Якщо $C = 1$, демпфування зникає і таку схему не доцільно використовувати для розрахунку ударних хвиль.

Для коректності задачі в рівнянні переносу коефіцієнт дифузії має бути додатним, тобто

$$\alpha = \frac{h_x^2}{2\tau} - \frac{\tau k^2}{2} \geq 0. \quad (9.4)$$

Це можливо при $h^2 - k^2 \tau^2 \geq 0$. Звідси встановлюємо, що умовою стійкості схеми Лакса буде $|C| \leq 1$, а при $C = 1$ схема Лакса дає точний розв'язок модельного рівняння (де $C = \frac{k\tau}{h}$ — число Куранта).

З першого диференціального наближення випливає, що похибка апроксимації схеми Лакса дорівнює $O(\tau, h_x^2, h_x^2/\tau)$. Отже, схема апроксимує диференціальне рівняння тільки тоді, коли прямують до нуля одночасно кроки сітки τ та h_x і відношення $h_x^2\tau$.

Зауваження 9.2 — До недоліків схеми Лакса відносять погану її пристосованість до розв'язування задач дозвукових і безударних потоків. Вона не задовольняє вимоги транспортності, тобто дозволяє розповсюджувати малі збурення проти потоку надзвукового не в'язкого газу.

Останнє твердження легко перевірити. Для цього достатньо розглянути схему передавання інформації з n -го часового кроку на $(n+1)$ -й. Так, при переході до вузла (x_i, t_{n+1}) використовується інформація, яка міститься у вузлах (x_{i-1}, t_n) і (x_{i+1}, t_n) . Отже, при будь-якому напрямі вектора швидкості потоку довільне мале збурення має змогу передаватися в протилежному до нього напрямі.

Незважаючи на зазначені недоліки, схема Лакса має важливу перевагу — простоту реалізації. Крім того, вона легко адаптується як до циліндричних, так і до сферичних систем координат.

Приклад 9.3

Застосуємо метод першого диференціального наближення до дослідження різницевої схеми для рівняння переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9.5)$$

для якого явна схема має вигляд

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = -2k \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{h} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

Записавши для членів u_i^{n+1} , $u_{i\pm 1}^n$ формули Тейлора в околі точки

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \tau \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i^n + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\tau^3),$$

$$u_{i\pm 1}^n = u_i^n \pm h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i^n + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i^n \pm \frac{h^3}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_i^n + O(h^4),$$

і підставивши їх у різницеву схему, дістанемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -k \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2, h^2).$$

Якщо $h \rightarrow 0$ і $\tau \rightarrow 0$, це рівняння перейде в рівняння переносу, але при $\tau > 0$, $h > 0$ його перше диференціальне наближення є гіперболічним рівнянням

$$\frac{\tau}{2\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (9.6)$$

Отримане рівняння має область впливу довільної точки (x, t) , обмежену характеристиками з тангенсами кута нахилу $\pm \sqrt{\frac{\tau}{2\alpha}}$. Збурення, які виникають у точці (x, t) , мають вплив лише всередині зазначеної області.

Для різницевої схеми також існує область впливу. Оскільки кожне значення u_i^{n+1} залежить від $u_{i\pm 1}^n$, то область впливу сіткового рівняння обмежується лініями з тангенсами кутів нахилу $\pm \tau/h$. Умова стійкості для таких рівнянь вимагає, щоб область впливу різницевого рівняння принаймні вміщувала область впливу диференціального рівняння. Тобто $\frac{\tau}{h} \leq \sqrt{\frac{\tau}{2\alpha}}$. Звідси маємо таку умову стійкості різницевої схеми

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\alpha}. \quad (9.7)$$

Параболічна форма запису першого диференціального наближення визначає другу необхідну умову стійкості.

Для побудови параболічної форми першого диференціального наближення визначимо $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Продиференціювавши рівняння переносу (9.5) за часом і використавши саме рівняння, маємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2k\alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Підставимо цю рівність в початкове рівняння. Після простих перетворень і відкидання членів з похідними третього і четвертого порядків маємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9.8)$$

де $\alpha = \alpha - \frac{k^2 \tau}{2}$.

Нехтування членами з похідними порядків вищих другого обґрунтовується тим, що, по-перше, їх величини значно менші за решту похідних; по-друге, а posteriori відомо, що умова стійкості, отримана в результаті цього аналізу, дасть жорсткіші обмеження на крок за часом у присутності дифузійного члена лише для течій з малою в'язкістю, тобто для $\alpha \ll k$, коли коефіцієнти при старших похідних у рівнянні стають малими.

Оскільки коректність постановки задачі вимагає, щоб в'язкість була невід'ємною, то друга умова стійкості має вигляд $\tau \leq \frac{2\alpha}{k^2}$.

Приклад 9.4

Явні однокрокові двошарові схеми з різницями проти потоку для розв'язування хвильового рівняння можна подати у вигляді

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \begin{cases} -k \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}, & k > 0, \\ -k \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, & k < 0. \end{cases} \quad (9.9)$$

Якщо $C = 1$, ця схема дає точний розв'язок хвильового рівняння. Ця умова є також і граничною умовою стійкості. Дослідження стійкості за методом фон Неймана показує, що при $|C| < 1$, де $C = \frac{k\tau}{h}$ — число Куранта, коефіцієнт переходу (чи норма матриці для системи рівнянь) буде меншим від одиниці. Будь-яка схема для рівняння лише з одним конвективним доданком при $C < 1$ має схемне загасання.

Використання першого диференціального наближення показує, що при врахуванні членів, у які входять кроки сітки в першому ступені, це рівняння еквівалентне рівнянню повного переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(cu)}{\partial x} + \alpha_c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o(\Delta x^2)$$

з не фізичною в'язкістю $\alpha_c = 0.5kh(1 - C)$. Це пояснює не лише наявність штучного загасання, а й те, що схема з різницями проти потоку має штучну дифузію (штучну в'язкість). Інтерпретація цього факту в багатовимірному випадку, а також для в'язких течій не така очевидна.

Дослідження випадку, коли $k < 0$, проводиться аналогічно і приводять до тих же, що раніше одержано умов стійкості. різницевої схеми.

§9.2 Штучна в'язкість. Дисипація та дисперсія різницевих схем

Як було показано у попередньому пункті, при $|C| \neq 1$ схема з різницями проти потоку має схемну в'язкість $\alpha = \frac{k^2 \tau}{2} > 0$.

Означення 9.1. Таку в'язкість називають також *штучною в'язкістю*.

Ця в'язкість на відміну від явної, яку у різницеве рівняння уводять цілеспрямовано, є внутрішньою характеристикою різницевої задачі. Схемна в'язкість згладжує розривні розв'язки рівняння, зменшує градієнти всіх параметрів незалежно від причини виникнення цих градієнтів, фізичної чи обчислювальної.

Означення 9.2. Така властивість різницевої схеми, обумовлена присутністю у виразі для похибки апроксимації похідних парного порядку за просторовою змінною називається *дисипацією* на різницевій сітці.

Дисипація здебільше визначає відносну похибку обчислення амплітуди розв'язку.

Означення 9.3. Друга близька за фізичним змістом властивість різницевої схеми є *дисперсія*.

Вона безпосередньо пов'язана з похідними непарного порядку за просторовими змінними у виразі для похибки апроксимації. Дисперсія приводить до невірної відображення відношення фаз різних хвиль.

Дисперсія визначає внесок у розв'язок похибки визначення фази розв'язку.

Означення 9.4. Сумісна дія дисперсії та дисипації на розв'язок у ряді випадків називають *дифузиею*.

Дифузія приводить до розтягу крутих ліній розділу, які можуть виникати у області розрахунку.

Так, чисельний розв'язок, одержаний у тому випадку, коли похибка в основному є дисипативною (такий розв'язок типовий для схем першого порядку точності), значно згладжує лінії великих градієнтів. Подібні схеми не доцільно використовувати для розрахунків, які повинні досить точно відображати рух розривів. Разом з тим вони можуть бути корисними при знаходженні стаціонарного розв'язку.

Чисельні розв'язки, які одержані у випадку коли схема є дисперсійною (це притаманно для схем другого порядку точності) вносять нефізичні коливання (осциляції) розв'язку навіть при незначних збуреннях. Ці коливання з'являються перед і після точки виникнення збурення. Здебільше такі схеми використовуються для знаходження гладких розв'язків.

Дослідження похибок розв'язків різницевих рівнянь можна проводити за допомогою аналізу модуля та аргументу коефіцієнту переходу. Запишемо коефіцієнт переходу для схеми

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{(ku)_i^n - (ku)_{i-1}^n}{h}$$

для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(ku)}{\partial x}, \quad k > 0$$

у вигляді

$$G = (1 - C + C \cos \beta) - I(C \sin \beta)$$

або

$$G = |G|e^{I\varphi},$$

де

$$|G| = \sqrt{(1 - C + C \cos \beta)^2 + (C \sin \beta)^2},$$

$$\varphi = \arg G = \arctan \frac{\operatorname{Im} G}{\operatorname{Re} G} = \arctan \left(\frac{-C \sin \beta}{1 - C + C \cos \beta} \right)$$

а $\beta = mh$ — хвильове число.

Означення 9.5. *Фазовий кут* точного аналітичного розв'язку хвильового рівняння φ_e визначається аналогічно, через відомий коефіцієнт переходу точного розв'язку хвильового рівняння.

Для визначення точного значення коефіцієнта переходу підставимо у хвильове рівняння його фундаментальний розв'язок $u = e^{\alpha t} e^{Ik_m x}$ і знайдемо, що $\alpha = -Ik_m k$. Тоді $u = e^{Ik_m(x-kt)}$, а отже, коефіцієнт переходу для точного розв'язку має вигляд

$$G_e = \frac{u(t + \Delta t)}{u(t)} = \frac{e^{Ik_m(x-k(t+\Delta t))}}{e^{Ik_m(x-kt)}}.$$

З останнього співвідношення випливає, що

$$G_e = e^{-Ik_m k \Delta t} = e^{I\varphi_e}.$$

Тобто $|G| = 1$, а $\varphi_e = -k_m k \Delta t = -\beta C$.

Твердження 9.5

Отже, сумарна похибка у визначенні амплітуди, яка обумовлена дисипацією, після n часових кроків розв'язку хвильового рівняння з різницями проти потоку рівна

$$(1 - |G|^n) A_0,$$

де A_0 — початкове значення амплітуди хвилі.

Твердження 9.6

Аналогічно можна визначити *дисперсійну* похибку (викривлення фази хвилі) як $n(\varphi_e - \varphi)$.

Твердження 9.7

Відносна похибка у визначенні зміщення за фазою на одному кроці за часом рівна

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} = \frac{\arctan \left(\frac{-C \sin \beta}{1 - C + C \cos \beta} \right)}{-\beta C}$$

При малих значення хвильових чисел β вираз для відносної похибки при визначенні фази можна привести до вигляду

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} \approx 1 - \frac{2C^2 - 3C + 1}{6} \beta^2.$$

Якщо відносна похибка у визначенні фази при заданому β більша від одиниці, то розрахункове значення швидкості розповсюдження відповідної гармонічної хвилі виявляється більшим від точного значення швидкості цієї хвилі. Такі хвилі розповсюджуються з *випередженням за фазою*.

Аналогічно, якщо відносна похибка у визначенні фази менша від одиниці, то розрахункова швидкість розповсюдженні гармонічної хвилі виявляється меншою від точного значення швидкості цієї хвилі, тому кажуть, що такі хвилі розповсюджуються з *відставанням за фазою*.

При використуванні різницевої схеми з різницями проти потоку випередження за фазою виникає при $\frac{1}{2} < C < 1$, а відставання при $C < \frac{1}{2}$.

Розглядаючи неявний метод Ейлера, приходимо до висновку, що його перше диференціальне наближення має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

а коефіцієнт переходу та відносна похибка визначення фази записуються відповідно так

$$G = \frac{1 - IC \sin \beta}{1 + C^2 \sin^2 \beta},$$

та

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} = \frac{\arctan(-C \sin \beta)}{-\beta C}.$$

Неявний метод Ейлера веде до значної дисипації при середніх хвильових числах і до значного запізнення за фазою при великих хвильових числах.

§9.3 Приклади проявлення штучної в'язкості, дифузії

§9.3.і Двокроковий симетризований алгоритм (ДС-алгоритм)

Розв'язки задачі про рух квадратної хвилі за допомогою алгоритму (2.37)–(2.40) на 200 кроці відповідно

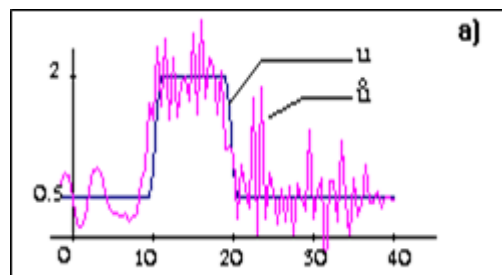


Рис. 9.1: без штучної в'язкості ($\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\sigma = 0.01$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = 0$, $\sigma_2 = 0$; $h = 0.5$, $\tau = 0.25$)

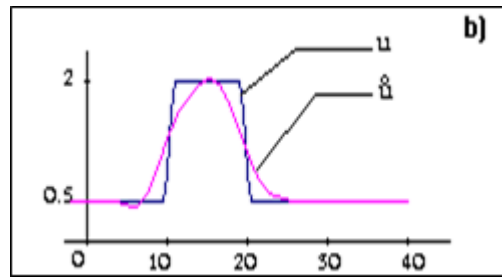


Рис. 9.2: із штучною в'язкістю ($\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\sigma = 0.01$, $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_3 = 0.1$, $\sigma_2 = 0$; $h = 0.5$, $\tau = 0.25$)

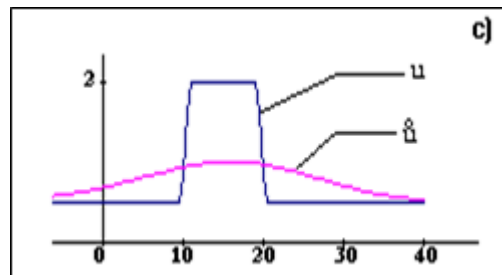


Рис. 9.3: із надто великою штучною в'язкістю ($\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\sigma = 0.01$, $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_3 = 0.1$, $\sigma_2 = 0$; $h = 0.5$, $\tau = 0.25$)

Тут і далі u — точний розв'язок, \hat{u} — розв'язок, знайдений за допомогою ДС-методу (2.37), (2.38). На наступних малюнках представлені результати тестування ДС-алгоритмів із штучною в'язкістю (a — коефіцієнт при явній штучній в'язкості, a_1 — коефіцієнт при неявній штучній в'язкості) на вказаних модельних задачах (схеми, в яких явні частини — проти потоку, неявні частини — за потоком).



Рис. 9.4: $h = 0.5$, $\tau = 0.5$, $\sigma = 2$, $a = 0$, $a_1 = 0$

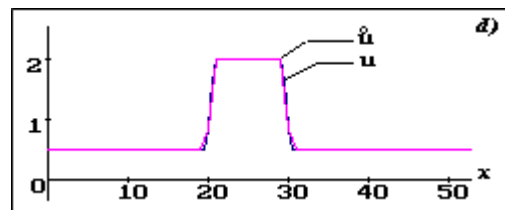


Рис. 9.5: $h = 0.5$, $\tau = 0.5$, $\sigma = 0.01$, $a = 0$, $a_1 = 0$

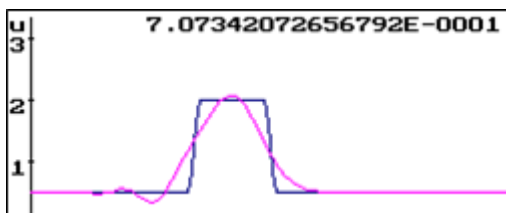


Рис. 9.6: $h = 0.5$, $\tau = 0.25$, $\sigma = 1$, $a = 1$, $a_1 = 1$

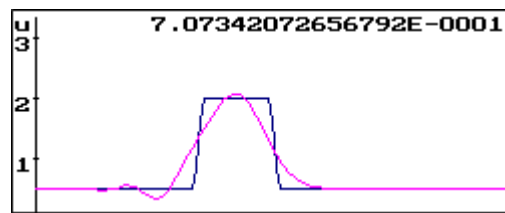
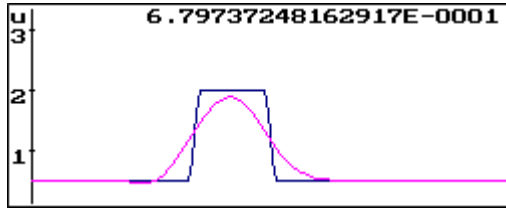
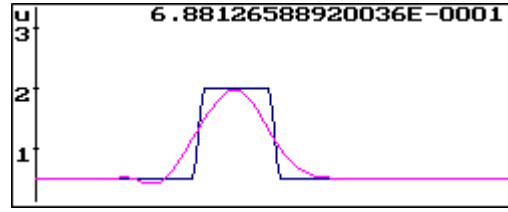
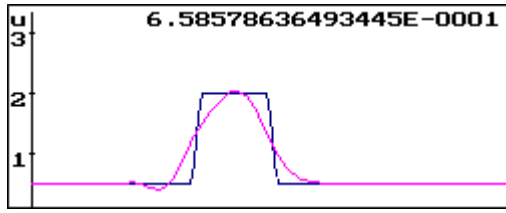
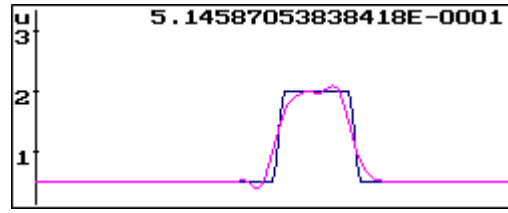
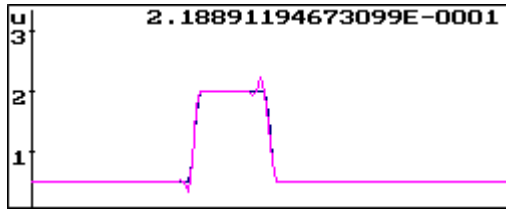
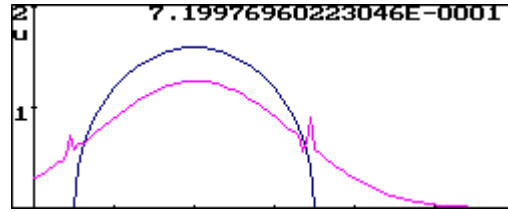
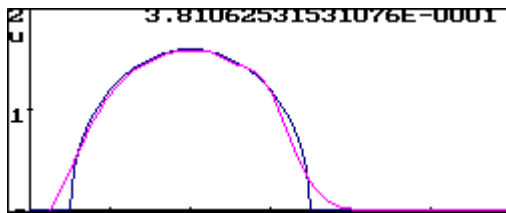
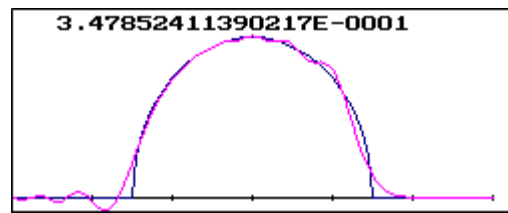
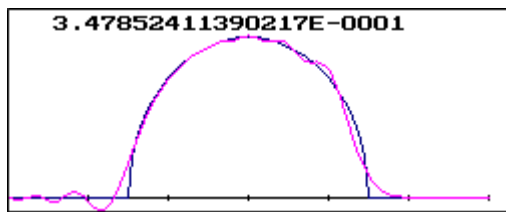
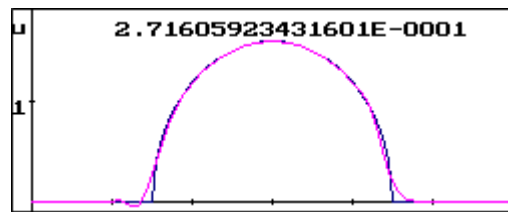
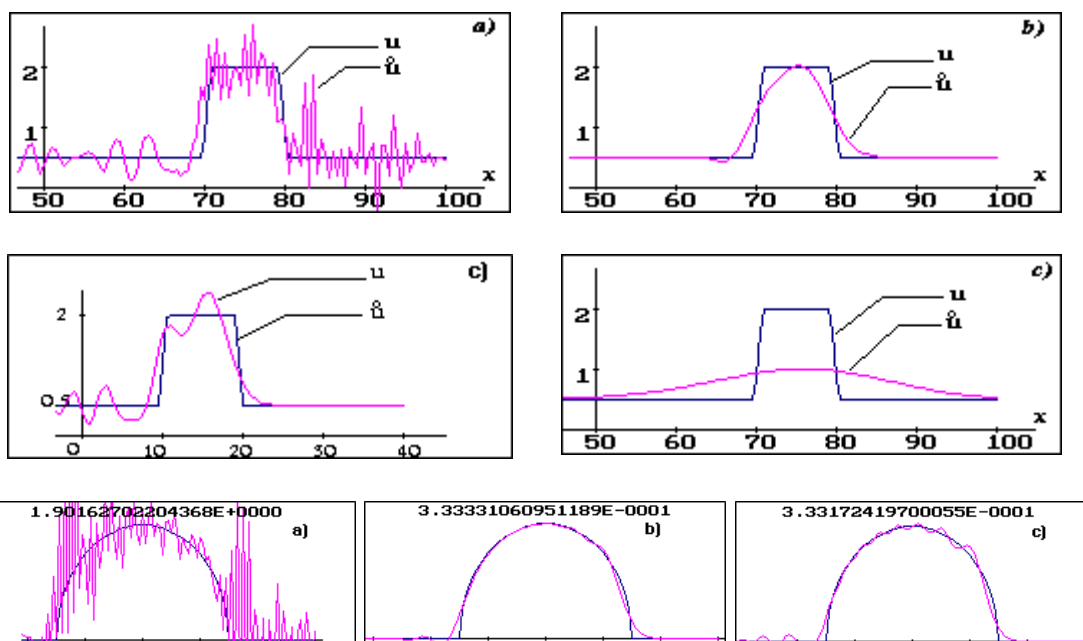


Рис. 9.7: $h = 0.5$, $\tau = 0.25$, $\sigma = 0.01$, $a = 0.1$, $a_1 = 0$

Рис. 9.8: $h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 0.01, a = 0.1, a_1 = 0.1$ Рис. 9.9: $h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 0.01, a = 0.1, a_1 = 0.05$ Рис. 9.10: $h = 0.5, \tau = 0.125, \sigma = 0.01, a = 0.5, a_1 = 0$ Рис. 9.11: $h = 0.5, \tau = 0.025, \sigma = 0.01, a = 2, a_1 = 2$ Рис. 9.12: $h = 0.5, \tau = 0.5, \sigma = 100, a = 1, a_1 = 0$ Рис. 9.13: $h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 1, a = 1, a_1 = 1$ Рис. 9.14: $h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 0.01, a = 0.1, a_1 = 0$ Рис. 9.15: $h = 0.5, \tau = 0.125, \sigma = 0.01, a = 0.1, a_1 = 0.05$ Рис. 9.16: $h = 0.5, \tau = 0.025, \sigma = 0.01, a = 0, a_1 = 0$ Рис. 9.17: $h = 0.5, \tau = 0.025, \sigma = 0.01, a = 2, a_1 = 2$



§9.4 Завдання для самостійної роботи

Дослідити перше диференціальне наближення телеграфного рівняння. Встановити наявність схемної в'язкості.

10 ДС-алгоритми для моделювання процесів переносу, які описуються однорідними рівняннями

§10.1 Центральні-різницеві ДС-алгоритми для розв'язування початково-крайових задач для рівнянь першого порядку

В області $G = \{(x^1, x^2, x^3, t) | 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2, 3; t > t_0\}$, побудуємо розв'язок початково-крайової задачі для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 k_i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0. \quad (10.1)$$

§10.1.1 Одновимірна центральні-різницева задача

Розглянемо спочатку одновимірну задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad G = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, t > t_0\} \quad (10.2)$$

при початкових $u(x, 0) = \varphi(x)$ та крайових умовах $u(0, t) = \psi(t)$ при $k > 0$, (або $u(1, t) = \psi(t)$ при $k < 0$).

Область зміни неперервних аргументів покриваємо сітковою областю

$$\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_n) | x_i = ih, t_n = n\tau; i = \overline{0..M}; n = 0, 1, 2, \dots; h = 1/M\}$$

яку розщеплюємо на дві підобласті

$$\begin{aligned} \Omega_h^{(1,n)} &= \{(x_i, t_n) | x_i = ih; t_n = n\tau; i = \overline{0..M}; n = 0, 1, 2, \dots; h = 1/M; i + n = 2k + 1\}, \\ \Omega_h^{(2,n)} &= \{(x_i, t_n) | x_i = ih; t_n = n\tau; i = \overline{0..M}; n = 0, 1, 2, \dots; h = 1/M; i + n = 2k\}. \end{aligned}$$

Нехай $k = \text{const}$. На часовому кроці $2n + 1$ точкам з підобласті $\Omega_h^{(1,2n+1)}$ ставимо у відповідність явні різницеві рівняння

$$u_{2i+1}^{2n+1} = u_{2i}^{2n} - \frac{k\tau}{2h} (u_{2i+1}^{2n} - u_{2i-1}^{2n}), \quad i = \overline{1..[(M-1)/2]}, \quad (10.3)$$

а вузлам області $\Omega_h^{(2,2n+1)}$ — різницеві рівняння з вагою $\sigma \geq 0$:

$$u_{2i+1}^{2n+1} = u_{2i+1}^{2n} - \frac{k\tau}{2h} (\sigma (u_{2i+2}^{2n} - u_{2i}^{2n}) + (1 - \sigma) (u_{2i+3}^{2n+1} - u_{2i}^{2n+1})), \quad i = \overline{1..[M/2] - 1}. \quad (10.4)$$

На кроці $2n + 2$ у точках з $\Omega_h^{(1,2n+2)}$ записуємо рівняння

$$u_{2i+1}^{2n+2} = u_{2i+1}^{2n+1} - \frac{k\tau}{2h} (u_{2i+2}^{2n+1} - u_{2i}^{2n+1}), \quad i = \overline{1..[M/2] - 1}, \quad (10.5)$$

а точкам з $\Omega_h^{(2,2n+2)}$ —

$$u_{2i+1}^{2n+2} = u_{2i+1}^{2n+1} - \frac{k\tau}{2h} \left(\sigma (u_{2i+1}^{2n+1} - u_{2i}^{2n+1}) + (1 - \sigma) (u_{2i+1}^{2n+2} - u_{2i}^{2n+2}) \right), \quad i = \overline{1..[M/2] - 1}. \quad (10.6)$$

Обчислення розв'язку починаємо з точок області $\Omega_h^{(1,2n+1)}$ за явною різницевою схемою (10.3). Після обходу всіх точок цієї множини значення функції u_{2i}^{2n+1} будуть визначені. Тоді формально неявні різницеві схеми (10.4) дозволяють розв'язок у вузлах з $\Omega_h^{(2,2n+1)}$ знайти явно. Результати розрахунків, проведених за формулами (10.3), (10.4), сприймаються як допоміжні. На наступному часовому кроці виконаємо цикл розрахунків за формулами (10.5), (10.6) і одержимо значення u_i^{2n+2} , які приймаємо за розв'язок задачі. Обчислення за формулами (10.3)–(10.6) проводяться в усіх внутрішніх вузлах сітки.

§10.1.ii Стійкість алгоритмів за початковими даними

Дослідження стійкості за початковими даними рівносильне визначенню умов, при яких справедлива нерівність $\|u^{2n}\|_{L_{2,h}} \leq c \|u^0\|_{L_{2,h}}$ де u_i^0 — початкове значення розв'язку; $\|\cdot\|_{L_{2,h}}$ — дискретний аналог норми в просторі L_2 ; $c > 0$ — обмежена додатна стала, незалежна від h , τ і u_i^0 . Умова стійкості різницевої задачі Коші із сталими коефіцієнтами (умова фон Неймана [148]) стверджує, що для виконання умови стійкості необхідно, щоб спектр матриці переходу різницевого рівняння на наступний часовий шар повністю лежав в крузі комплексної площини з радіусом $1 + \tilde{n}_1\tau$ (тобто, щоб модуль коефіцієнта переходу не перевищував $1 + O(\tau)$, а зростання збурення не перевищувало експоненційного). Якщо спектр не залежить від часу, то ця умова набуває вигляду $\max_m |g(m)| \leq 1$, де $g(m)$ — коефіцієнт переходу m -ї гармоніки точного розв'язку різницевої задачі.

§10.2 Стійкість задачі із сталим коефіцієнтом

Покладемо для визначеності в задачі (10.2) $\psi = 0$. Для різницевої задачі (10.3)–(10.6) доведемо

Теорема 10.1

Якщо величина τ стала або змінюється не частіше ніж через парне число часових кроків, а функція $u(x, 0) = \varphi(x)$ з умови може бути розвинена в абсолютно збіжний ряд Фур'є і

$$u_i^0 = \varphi(ih) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{I\pi(ihm)},$$

то при $\sigma = 0$ ДС-схема (10.3)–(10.6) безумовно стійка за початковими даними, а при $\sigma > 0$ — умовно стійка при

$$\tau \leq \frac{h\sqrt{2}}{|k|\sqrt{\sigma}}.$$

Доведення. Припустимо, що функція дискретного аргументу u_i^n розвивається в ряд [148]

$$u_i^n = \sum_{k_1}^{\infty} C^{(s)}(n\tau) e^{I h k_1}, \quad I = \sqrt{-1}, \quad (10.7)$$

де B_m — коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є початкової умови $\varphi(x)$, а $c(m)$ — невідомі поки що коефіцієнти ($c(x) = c_1(x)c_2(x)$). Визначимо їх так, щоб ряд (10.7) був збіжний і був розв'язком задачі (10.3)–(10.6).

Нехай $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_h^{(1,2n+1)}$. Гармоніки точного розв'язку явних різни-цевих схем (10.3), (10.5) позначимо

$$\tilde{u}_{2i}^{2n+1} = B_m c_1^n(m) e^{I2\pi i h m},$$

а неявних (10.4), (10.6) відповідно

$$\tilde{u}_{2i}^{2n+2} = B_m c_2^n(m) e^{I2\pi i h m}.$$

Підставимо гармоніки $c_1(m)$ і $c_2(m)$ в рівняння (10.3) і (10.6). Після нескладних перетворень з (10.3) дістанемо, що

$$c_1^{n+1}(m) = (1 + Ik\tau h^{-1} \sin(mh)) c_2^n(m) \equiv g_1(m) c_2(m). \quad (10.8)$$

Використавши неявну схему (10.6), для переходу з кроку $2n+1$ на крок $2n+2$ при $\sigma = 0$ маємо

$$c_1^{n+1}(m) = (1 - Ik\tau h^{-1} \sin(mh))^{-1} c_2^n(m) \equiv g_2(m) c_1(m). \quad (10.9)$$

Отже

$$c^{n+1}(m) = g(m) c^n(m), \quad (10.10)$$

де $g(m)$ — множник переходу з кроку $2n$ на крок $2n+2$, записаний у вигляді

$$g(m) = g_1(m) g_2(m) = \frac{1 + Ik\tau h^{-1} \sin(mh)}{1 - Ik\tau h^{-1} \sin(mh)}, \quad (10.11)$$

а $c^0(m) \equiv 1$ (умова узгодженості початкових і граничних умов).

Для $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_h^{(2,2n+1)}$ і $(x_i, t_{2n+2}) \in \Omega_h^{(1,2n+2)}$ гармоніки (10.7) подаємо відповідно так:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{2i+1}^{2n+1} &= B_m c_2^n(m) e^{I(2i+1)\pi h m}, \\ \tilde{u}_{2i+1}^{2n+2} &= B_m c_1^n(m) e^{I(2i+1)\pi h m}. \end{aligned}$$

З рівнянь (10.4), (10.5), повторюючи попередні міркування, для коефіцієнта переходу одержуємо рівності (10.10) та (10.11). Отже

$$q = \max_m |g(m)| = 1.$$

Якщо $\sigma > 0$, то при переході з кроку $2n+1$ на крок $2n+2$ для розглянутих точок області одержимо

$$c_2^{n+1}(m) = \hat{g}_2(m) c_1^n(m),$$

де

$$\hat{g}_2(m) = \frac{1 + I\tau k h^{-1} \sigma \sin(mh)}{1 + I\tau k h^{-1} (1 + \sigma) \sin(mh)}.$$

Тобто,

$$c^{n+1}(m) = \frac{(1 - IZ)(1 + I\sigma Z)}{(1 + I(1 + \sigma)Z)} c^n(m) = \hat{g}(m) c^n(m).$$

Тут

$$\hat{g}(m) = \frac{(1 - IZ)(1 + I\sigma Z)}{1 + I(1 + \sigma)Z},$$

а $Z = k\tau h^{-1} \sin(mh)$. З нерівності $q \equiv \max_m |\hat{g}(m)| \leq 1$ випливає, що при $\sigma > 0$:

$$\tau \leq \frac{h\sqrt{2}}{|k|\sqrt{\sigma}}.$$

При виконанні останньої нерівності $q = 1$, а рівняння (10.3) і (10.6) та (10.4),(10.5) перетворюються на тотожність.

Помножимо обидві частини (10.10) на $B(m)e^{I\pi mih}$ і підсумуємо одержану рівність за всіма m :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m c^{n+1}(m) e^{I\pi mih} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m g(m) c^n(m) e^{I\pi mih}.$$

Враховуючи, що $q = 1$, встановимо оцінку

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m c^{n+1}(m) e^{I\pi mih} \right| &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| \cdot |g(m)| \cdot |c^n(m)| \leq \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| \cdot |g(m)|^{n+1} \cdot |c^0(m)| \leq q^{n+1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m|. \end{aligned} \quad (10.12)$$

З останньої нерівності в силу умови теореми випливає збіжність ряду (10.7) $\forall n = 1, 2, \dots$

Оскільки:

- при $n > 0$ ряд (10.7) абсолютно збіжний;
- кожен член ряду (10.7), а отже і його сума задовольняє рівняння (10.3)–(10.6);
- при $n = 0$ ряд співпадає з рядом для $\varphi(x)$ і задовольняє початкові умови,

то сіткова функція (10.7) є точним розв'язком системи рівнянь (10.3)–(10.6).

Оскільки $\|u^n\|_{L_{2,h}}^2 = \sum_{i=1}^M |u_i^n|^2 h$ є дискретним аналогом норми в просторі $L_2([-\pi, \pi])$, то після нескладних перетворень і використання рівності Парсеваля, для точного розв'язку різницевої (10.3)–(10.6) задачі маємо

$$\begin{aligned} \|u^{2n}\|_{L_{2,h}}^2 &= \sum_{i=1}^M \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m (c(m))^n e^{I\pi mih} \right|^2 h \leq q^{2n} \sum_{i=1}^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m e^{I\pi mih}|^2 h = \\ &= q^{2n} \sum_{i=1}^M |u_i^0|^2 h = q^{2n} \|u^0\|_{L_{2,h}}^2. \end{aligned} \quad (10.13)$$

З оцінки (10.13) випливає стійкість алгоритму. □

Додатки

§1 Контрольні запитання

1. Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки. Основні закони та рівняння. Дивергентна і недивергентна форми запису системи рівнянь Нав'є—Стокса. Системи обезрозмірювання рівнянь.
2. Методи апроксимації диференціальних операторів (загальна характеристика). Методи засновані на використанні інтерполяційних многочленів, інтегро-інтерполяційний метод та метод контрольного об'єму. Основні властивості різницевих схем: консервативність, транспортивність, дисипативність.
3. Поняття точного та узагальненого розв'язків диференціальних та різницевих рівнянь в банахових просторах. Розв'язуючі оператори. Коректність постановок задач. Збіжність та стійкість Терема Лакса.
4. Поняття стійкості та збіжності різницевих схем.
5. Поняття багатопарових схем та багатокрокових алгоритмів. Методи їх дослідження. Особливості подання початкових умов. Зведення їх до однопарових.
6. Метод дискретних збурень.
7. Метод фон Неймана. Коефіцієнт та матриця переходу. Явні та неявні різницеві схеми: алгоритм дослідження та теореми про збіжність ряду Фур'є та стійкість явної та неявної різницевих схем.
8. Стійкість різницевих схем, які апроксимують рівняння дифузійного та конвективного переносу, дослідження консервативності та транспортивності.
9. Дослідження стійкості чисельних алгоритмів із змінними операторними коефіцієнтами Енергетичний метод.
10. Принцип заморожених коефіцієнтів та ознака Бабенка—Гельфонда.
11. Метод першого диференціального наближення. Приклади застосування методу диференціального наближення. Гіперболічна та параболічна форми запису першого диференціального наближення. Схемна в'язкість.

§2 Теми для рефератів

1. Апроксимація оператора конвективного переносу. [1, 5, 8, 9]

Властивості операторів конвективного переносу. Апроксимація оператора конвективного переносу. Схеми з несиметричними різницями за просторовими координатами. Транспортивність чисельних моделей. Зв'язок між консервативністю та транспортивністю.

2. Схеми з різницями проти потоку. Схеми з донорними комірками. Консервативність та транспортивність схем з різницями проти потоку та схем з донорними комірками. [1]

3. Фазова похибка різницевих схем. [1, 2]

Схема Лейта. Фазова похибка. Її виникнення, розповсюдження і методи зменшення.

4. Аналіз виникнення фазової похибки при апроксимації часових та просторових диференціальних операторів. [1, 2]

5. Тришарові різницеві схеми. [2, 3]

Дослідження стійкості та збіжності. Схема Дюфорта—Франклена.

6. Апроксимація рівняння конвективного переносу у двовимірному просторі при виконанні умови нерозривності. [8, 9]

7. Схеми методу змінних напрямків.

Явні та неявні схеми методу змінних напрямків.

Схеми Пісмена—Решфорда, Яненка, Брили, Саульєва.

8. Схеми методу змінних напрямків Адамса—Бешфорта та Крокко. Схема Лейта. [1]

9. Загальні схеми методу розщеплення. [8]

Метод дробових кроків М.М. Яненка, метод розщеплення Г.І. Марчука.

Їх схожість і відмінності.

10. Практична побудова багатокрокових явних схем.

Багатокрокові явні схеми Лакса, Лакса—Вендроффа, Мак—Кормака та Браїловської.

11. Дослідження умови стійкості явних схем Лакса та Лакса—Вендроффа. [2, 10]

12. Загальна ідея багатокрокових алгоритмів. Двокрокові алгоритми. ДС-алгоритми. [1, 4, 5]

Уточнюючі багатокрокові алгоритми. Схеми предиктор-коректор. Ідея двокрокового симетризованого методу, дослідження стійкості та реалізація.

13. Тришарові різницеві схеми другого та третього порядків. [4]

14. Економічні ітераційні багато шарові алгоритми.

Методи прискорення збіжності ітераційних алгоритмів. Дослідження кількості операцій в одному циклі ітераційного алгоритму. Асимптотична та практична збіжність.

15. Ітераційні алгоритми для знаходження розв'язку різницевої задачі Діріхле та першої крайової задачі рівняння повного переносу. [5, 6]

16. Різницеві схеми для системи телеграфних рівнянь. Дослідження схемної в'язкості.

§3 Рекомендована література

- [1] Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*. — Мир, 1980.
- [2] Андерсон Д., Танненхилл Дж., Плетчер Р. *Вычислительная гидродинамика и теплообмен*. — Мир, 1990.
- [3] Самарський А. А. *Теория разностных схем*. — Наука, 1983.
- [4] Грищенко О. Ю., Ляшко С. І. *Методи Фур'є та першого диференціального наближення в теорії різницевих схем*. — Київський університет, 2005.
- [5] Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач*. — Мир, 1972.
- [6] Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. — Мир.
- [7] Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы*. — Наука, 1977.
- [8] Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики*. — Наука, 1989.
- [9] Самарський А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения задач конвекции-диффузии*. 1999.
- [10] Грищенко О. Ю., Ляшко С. І., Молодцов О. І. *Чисельне моделювання процесів релаксаційної газової динаміки*. 1997.
- [11] Шокин Ю. И. *Метод дифференциальных приближений*. — Наука, 1979.
- [12] http://www.unicyb.kiev.ua/Library/Methods_dif_sheems/zmist.htm
- [13] http://www.unicyb.kiev.ua/Library/Calc_met_gas_dyn/Gr3.htm