

# Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.\*

8 жовтня 2019 р.

## Зміст

### 2 Моделі аномальної дифузії

4

#### Лема 1.64

$$\mathcal{L}[c](\eta) = c/\eta.$$

#### Лема 1.65

$$\mathcal{L}[e^{pt}f(t)](\eta) = \mathcal{L}[f(t)](\eta - p).$$

Нагадаємо, що раніше ми з'ясували, що  $\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1 - \beta)\eta^{\beta-1}$ .

#### Теорема 1.66 (Таубера)

Нехай  $-\beta > -1$ ,  $f$  монотонна при великих  $t$  (тобто вона монотонна на деякому проміжку вигляду  $[t_0, +\infty)$ ). Тоді  $f(t) \sim t^{-\beta}$  при  $t \rightarrow +\infty \iff \mathcal{L}[f](\eta) = \Gamma(1 - \beta)\eta^{\beta-1}$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

**Зауваження 1.67** — Тут  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  означає, що  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

#### Наслідок 1.68

Нехай  $0 < \alpha < 1$  і  $f$  монотонна при великих  $t$ ,  $f \geq 0$  на  $[0, +\infty)$  і  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$ . Тоді  $\forall A > 0$ :  $f(t) \sim \alpha A t^{-\alpha-1}$  при  $t \rightarrow +\infty \iff \mathcal{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1 - \alpha)\eta^\alpha + o(\eta^\alpha)$  при  $\eta \rightarrow 0+$ .

---

\*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

*Доведення.* Розглянемо функцію

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s) \, ds. \quad (1.71)$$

Зауважимо, що  $F'(t) = -f(t)$ .

**Вправа 1.69.** Доведіть, що за наших припущень

$$f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1} \iff F(t) \sim At^{-\alpha}. \quad (1.72)$$

*Доведення.* ( $\implies$ ) Якщо  $f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1}$ , то, за визначенням асимптотики,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad \left| \frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} - 1 \right| < \varepsilon, \quad (1.73)$$

або ж, що те саме,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad (A - \varepsilon)\alpha t^{-\alpha-1} < f(t) < (A + \varepsilon)\alpha t^{-\alpha-1}, \quad (1.74)$$

щоправде вже з іншим  $t_0(\varepsilon)$ , але не суть.

Інтегруємо:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad \int_t^\infty (A - \varepsilon)\alpha s^{-\alpha-1} \, ds < \int_t^\infty f(s) \, ds < \int_t^\infty (A + \varepsilon)\alpha s^{-\alpha-1} \, ds, \quad (1.75)$$

звідки

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad (A - \varepsilon)t^{-\alpha} < F(t) < (A + \varepsilon)t^{-\alpha}, \quad (1.76)$$

отримали що хотіли.

( $\impliedby$ ) Припустимо, що  $F(t) \sim At^{-\alpha}$ , але  $f(t) \not\sim A\alpha t^{-\alpha-1}$ . За визначенням, це означає, що

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall t_0)(\exists t > t_0) \quad \left| \frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} - 1 \right| > \varepsilon. \quad (1.77)$$

Зрозуміло, що для деякого  $C > 0$  нескінченно часто відбувається або

$$\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} > 1 + C, \quad (1.78)$$

або

$$\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} < 1 - C, \quad (1.79)$$

а також нескінченно часто відбувається

$$\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} = 1. \quad (1.80)$$

Без обмеження загальності, перше, розглянемо тоді зростаючу  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  таку, що  $t_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  і

$$\frac{f(t_n)}{A\alpha t_n^{-\alpha-1}} = 1. \quad (1.81)$$

Позначимо

$$T_n = \min_{t \geq t_n} \left\{ t : \frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} = 1 + C \right\}. \quad (1.82)$$

Для зручності запишемо це як

$$f(T_n) = (1 + C)A\alpha T_n^{-\alpha-1}. \quad (1.83)$$

Без обмеження загальності вважаємо, що  $f$  монотонна починаючи з деякого  $t_0 < t_1$ , а тому  $f(T_n) \leq f(t_n)$ . Тоді

$$(1 + C)A\alpha T_n^{-\alpha-1} \leq A\alpha t_n^{-\alpha-1}. \quad (1.84)$$

Логарифмуючи маємо

$$\ln(1 + C) + \ln A + \ln \alpha - (\alpha + 1) \ln T_n \leq \ln A + \ln \alpha - (\alpha + 1) \ln t_n, \quad (1.85)$$

або ж

$$(\alpha + 1) \ln T_n \geq (\alpha + 1) \ln t_n + \ln(1 + C). \quad (1.86)$$

Звідси

$$\ln T_n \geq \ln t_n + k, \quad (1.87)$$

або ж

$$T_n \geq K t_n, \quad (1.88)$$

де  $k = \frac{\ln(1+C)}{\alpha+1}$  — додатнє,  $K = e^k$ . Аналогічним чином можна показати, що  $f(t) \geq (1 + C')A\alpha t^{-\alpha-1}$  на  $[T_n/K', T_n]$  для певних сталих  $C' < C$  і  $1 < K' < K$ .

Розглянемо тепер  $\int_{t_n}^{T_n} f(s) ds$ . Доволі просто показати, що

$$\begin{aligned} \int_{T_n/K'}^{T_n} f(s) ds &< (A - \varepsilon)(T_n/K')^{-\alpha} - (A + \varepsilon)T_n^{-\alpha} = \\ &= A\left((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\right) - \varepsilon\left((T_n/K')^{-\alpha} + T_n^{-\alpha}\right). \end{aligned} \quad (1.89)$$

для довільного  $\varepsilon > 0$ , починаючи з деякого  $n_0(\varepsilon)$ , звичайно. Але ж  $f(t) \geq (1 + C')A\alpha t^{-\alpha-1}$  на  $[T_n/K', T_n]$ , а тому

$$\begin{aligned} \int_{T_n/K'}^{T_n} f(s) ds &\geq \int_{T_n/K'}^{T_n} (1 + C')A\alpha t^{-\alpha-1} = \\ &= (1 + C')A(T_n/K')^{-\alpha} - (1 + C')AT_n^{-\alpha} = \\ &= A\left((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\right) + C'A\left((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\right). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Лишилося порівняти (якщо права частина більше то ми отримали протиріччя)

$$\varepsilon\left((T_n/K')^{-\alpha} + T_n^{-\alpha}\right) \vee C'A\left((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\right), \quad (1.91)$$

або ж

$$\varepsilon T_n^{-\alpha} K_2 \vee C' A T_n^{-\alpha} K_3, \quad (1.92)$$

де  $K_2 = (K')^\alpha + 1$ ,  $K_3 = (K')^\alpha - 1$  — додатні константи.

Помітимо, що тепер  $T_n^{-\alpha}$  можна скоротити, отримуємо

$$\varepsilon K_2 \vee C' A K_3. \quad (1.93)$$

Цілком очевидно, що при  $\varepsilon \rightarrow 0$  права частина переважає, а тому отримали протиріччя.  $\square$

Розглянемо

$$\mathcal{L}[F](\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta t} \int_t^{+\infty} f(s) \, ds \, dt, \quad (1.94)$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(s) \int_0^s e^{-\eta t} \, dt \, ds &= \int_0^{+\infty} f(s) \frac{1 - e^{-\eta s}}{\eta} \, ds = \\ &= \frac{1}{\eta} \left( 1 - \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\eta s} \, ds \right) = \\ &= \frac{1 - \mathcal{L}[f](\eta)}{\eta}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Звідси

$$\mathcal{L}[f](\eta) = 1 - \eta \mathcal{L}[F](\eta). \quad (1.96)$$

Тепер можемо записати

$$\begin{aligned} f(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A \alpha t^{-\alpha-1} &\iff F(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A t^{-\alpha} \iff \\ &\iff \mathcal{L}[F](\eta) \underset{\eta \rightarrow 0+}{\sim} A \Gamma(1 - \alpha) \eta^{\alpha-1} \iff \\ &\iff \mathcal{L}[F](\eta) = \Gamma(1 - \alpha) \eta^{\alpha-1} + o(\eta^{\alpha-1}) \iff \\ &\iff \mathcal{L}[f](\eta) = 1 - A \Gamma(1 - \alpha) \eta^\alpha + o(\eta^\alpha). \end{aligned} \quad (1.97)$$

$\square$

## 2 Моделі аномальної дифузії

Нагадаємо, що класичні рівняння дифузії та теплопровідності зумовлені наступними чинниками:

- 1) закон збереження кількості речовини/тепла;
- 2) джерела і стоки;
- 3) “закон” Фіка/Фур’є — емпірично встановлене для широкого класу процесів твердження про те, що інтенсивність потоку речовини/тепла пропорційна мінус градієнту концентрації речовини/кількості тепла на границі.

Розглянемо тепер інший підхід, який ґрунтується на випадкових блуканнях з неперервним часом (eng. *CTRW, continuous time random walk*). А саме, нехай  $x(t)$  — випадкова величина (координата частинки в момент часу  $t$ ), а  $u(x, t)$  (при фіксованому  $t$  — щільність координати частинки).

Параметри моделі:

- 1)  $u_0(x)$  — щільність початкового (при  $t = 0$ ) розподілу;
- 2)  $\psi(t)$  — щільність часу очікування наступного стрибка;
- 3)  $\lambda(x)$  — щільність зміщення.

**Означення 2.1.** Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , тоді її *перетворенням Фур'є* називається

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(x) dx. \quad (2.1)$$

### Твердження 2.2

Для перетворення Фур'є справедлива теорема згортки:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega), \quad (2.2)$$

де

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy. \quad (2.3)$$

**Означення 2.3.** Нехай  $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , тоді її *перетворенням Фур'є-Лапласа* називається

$$\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) = \tilde{u}(\omega, \eta) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta t + i\omega x} u(x, t) dx dt. \quad (2.4)$$

### Формула 2.4 (Монтрола-Вайса)

$$\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)}{1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}, \quad (2.5)$$

як тільки  $|\mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)| < 1$ .

*Доведення.* Введемо додаткове позначення:  $n(t)$  — кількість стрибків до моменту  $t$ .  $\psi_k(t)$  — щільність часу  $k$ -го стрибка. І нарешті,  $\lambda_k(x)$  — щільність координати після  $k$ -го стрибка.

Запишемо формулу повної ймовірності:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{n(t) = k\} \lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \mathbf{P}\{n(t) \geq k\} - \mathbf{P}\{n(t) \geq k+1\} \right) \lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^t \psi_k(s) \, ds - \int_0^t \psi_{k+1}(s) \, ds \right) \lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^t \psi^{*k}(s) \, ds - \int_0^t \psi^{*(k+1)}(s) \, ds \right) \cdot (u_0 * \lambda^{*k})(x).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

**Зауваження 2.5** — Тут ми скористалися тим, що  $\psi_k(x) = \psi^{*k} = \underbrace{\psi * \psi * \dots * \psi}_k$  і  $\lambda_k(x) = u_0 * \lambda^{*k} = u_0 * \underbrace{\lambda * \lambda * \dots * \lambda}_k$ .

**Вправа 2.6.** Поновити у конспекті формальне доведення цих фактів.

З урахуванням %перелік\_нагадувань%, маємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta} \left( (\mathcal{L}[\psi](\eta)^k - \mathcal{L}[\psi](\eta)^{k+1}) \mathcal{F}[u_0](\omega) \mathcal{F}[\lambda](\omega)^k \right) = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta))}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}[\psi](\eta)^k \mathcal{F}[\lambda](\omega)^k = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta))}{\eta(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega))}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

□