Чисельні методи математичної фізики

Риженко А. І.*

1 жовтня 2019 р.

Зміст

3.2 Метод Рітца

Нехай, як і раніше, ми розв'язуємо рівняння

$$Au = f, \tag{3.2.1}$$

де $A : H \to H$, H — дійсний гільбертовий простір. Нагадаємо, що ми ставимо цій задачі й відповідність задачу мінімізації

$$\inf_{u \in D(A)} \Phi(u) = \Phi(u^\star) = u_0. \tag{3.2.2}$$

Нехай також виконуються певні припущення, необхідні для збіжності, а саме:

1) A — симетричний (самоспряжений), тобто

$$(Au, v) = (u, Av). \tag{3.2.3}$$

2) A — додатно визначений, тобто

$$(\exists \mu > 0)(\forall u \in D(A)) \quad (Au, u) \geq \mu \|u\|^2 (u, Av). \tag{3.2.4}$$

3) $f \in R(A)$ — область значень оператора A.

*Риженко Андрій Іванович, `rai-ku@ukr.net`

Теорема 3.1

Якщо A задовольняє умовам 1–3 (формули (3.2.3)– (3.2.4)), то

1) задача (3.2.2) має не більш ніж один розв'язок;

2) A^{-1} обмежений.

Доведення.

1) Розглянемо спочатку однорідну задачу, тобто $f \equiv 0$, тоді задача (3.2.1) зводиться до $Au = 0$. Тоді з (3.2.4) маємо $\mu \|u\|^2 \le (Au, u) = 0$, звідки $u = 0$. Отже однорідна задача має тільки один розв'язок, а тому неоднорідна задача має не більше ніж один розв'язок.

> **Зауваження 3.2** — Справді, загальний розв'язок неоднорідної є сумою загального розв'язку однорідної (який у нас один) і частинного розв'язку неоднорідної (один або нуль)

2) Скористаємося постановкою задачі і нерівністю Коші-Буняковського:

$$\mu \|u\|^2 \le (Au, u) = (f, u) < \|f\| \cdot \|u\|.$$

Можемо переписати це як

$$\|u\| \le \frac{1}{\mu} \|f\|,$$

або ж

$$\|A^{-1} f\| \le \frac{1}{\mu} \|f\|,$$

а це ніщо інше як

$$\|A^{-1}\| \le \frac{1}{\mu}.$$

□

3.2.1 Мінімізаційна послідовність

Алгоритм 3.3.

1) $\{\varphi_i\} \in D(A)$ — повна;

2) $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$;

3) $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$;

Де наш загальний функціонал Рітца

$$\inf_{u \in H_n} \Phi(u) = \Phi(u_n) \tag{3.2.5}$$

з функцією G вигляду

$$G(u_n, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_n, \tag{3.2.6}$$

або, що те саме в наших умовах,

$$G(u_n, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{3.2.7}$$

можна буде записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{3.2.8}$$

або, що те саме в наших умовах,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.2.9}$$

Теорема 3.4 1) Якщо $u^\star$ — розв'язок (3.2.1), а оператор A задовольняє умовам (3.2.3) і (3.2.4), то мінімум функціонала Рітца (3.2.5) буде досягатися на $u^\star$, причому тільки на ньому.

2) Якщо мінімум функціонала Рітца (3.2.5) досягається на елементі $u^\star \in D(A)$, то $u^\star$ — розв'язок (3.2.1).

Доведення.

1) Якщо $u^\star$ — розв'язок (3.2.1), то

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= (Au, u) - 2(Au^\star, u) = \\ &= (Au, u) - (Au^\star, u) + (Au^\star, u^\star) - (Au^\star, u) - (Au^\star, u^\star) = \\ &= (A(u - u^\star), (u - u^\star)) - (Au^\star, u^\star).\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Оскільки $A > 0$ то з (3.2.10) маємо

$$\Phi(u) \geq \Phi(u^\star), \tag{3.2.11}$$

оскільки

$$(A(u - u^\star), (u - u^\star)) \geq \mu \|u - u^\star\|^2,$$

причому рівність досягається лише коли $u = u^\star$.

2) Нехай на $u^\star \in D(A)$ досягається мінімум функціонала (3.2.5), тоді

$$(Au^\star, v) = (f, v), \quad \forall v \in D(G), \tag{3.2.12}$$

1 аьо

$$(Au^\star - f, v) = 0, \quad \forall v \in D(G),$$

а, оскільки $D(G)$ щільна в H, то

$$Au^\star = f. \tag{3.2.14}$$

□

Зауваження 3.5 — Мінімізаційна послідовність звелася до тієї ж системи що й у методі Бубнова-Гальоркіна, то які ж його переваги?

3.2.2 Метод Рітца в H_A

Справа в тому, що якщо оператор A задовольняє умовам (3.2.3) і (3.2.4), то можна ввести енергетичний простір H_A у якому скалярний добуток введено за формулою

$$(u, v)_A = (Au, u), \tag{3.2.15}$$

а норма за формулою

$$\|u\|_A^2 = (u, u)_A. \tag{3.2.16}$$

Можна перевірити, що ці функції задовольняють аксіомам скалярного добутку та норми. Таким чином H_A — гільбертовий простір, ширший за $D(A)$.

Тоді задачі (3.2.1) ставимо у відповідність задачу

$$\inf_{u \in H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n), \tag{3.2.17}$$

для якої мають місце аналогічні результати:

Теорема 3.6

Мають місце наступні співвідношення:

1)
$$\Phi(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \|u - u^\star\|_A^2 - \|u^\star\|_A^2, \tag{3.2.18}$$

2)
$$\inf_{u \in H_n \subset H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n) = \Phi_0. \tag{3.2.19}$$

З (3.2.19) бачимо

$$(Au_n, v) = (f, v), \quad v \in H_n,$$

тоді

$$(Au_n - Au^\star, v) = 0, \quad v \in H_n,$$

або

$$(u_n - u^\star, v)_A = 0, \quad v \in H_n. \tag{3.2.20}$$

Це означає, що

$$u = P_{H_n} u^\star \tag{3.2.21}$$

Теорема 3.7

Нехай координатна система $\{\varphi_i\}$ є повною в H_A, тоді при $n \to \infty$ мінімізуюча послідовність $\{u_n\}$ метода Рітца збігається до розв'язку задачі (3.2.1) в нормі простору H_A.

3.2.3 Приклади

Приклад 3.8

Задано рівняння

$$-(ku')' + qu = f, \quad 0 < x < 1$$

з крайовими умовами

$$u(0) = u(1) = 0,$$

і функціями

$$k(x) \geq c_0 > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Зауваження 3.9 — Взагалі кажучи, перед тим як будь-що робити, ми маємо показати симетричність A:

$$\begin{aligned}(Au, v) &= \int_0^1 \Big(-(ku')'v + quv \Big) \, \mathrm{d}x = \\ &= -ku'v\big|_0^1 + \int_0^1 (-ku'v' + quv) \, \mathrm{d}x = \\ &= (u, Av).\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

а також додатну визначеність: з $u(0) = 0$ маємо

$$u(x) = \int_0^x u'(\xi) \, \mathrm{d}\xi,$$

звідки

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^2(x) \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^x u'(\xi) \, \mathrm{d}\xi \right)^2 \mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^x \xi \, \mathrm{d}\xi \int_0^x (u'(\xi))^2 \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}x \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u'\|^2,\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

або ж

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u'\|^2, \quad u \in D(A) \tag{3.2.24}$$

Тоді, підставляючи в (3.2.22) u замість v маємо

$$\begin{aligned}(Au, u) &= \int_0^1 \Big(-(ku')'u + qu^2 \Big)\,\mathrm{d}x \geq \\ &\geq c_0 \int_0^1 (u'(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(u(x))^2 \geq \\ &\geq c_0 \int_0^1 (u'(x))^2\,\mathrm{d}x \geq \\ &\geq c_1 \|u\|^2,\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

де $c_1 = 2c_0$. Розгялдаючи ліву і праву частини цієї рівності маємо додатновизначеність A.

Розв'язання.

1) Класичний розв'язок: функціонал:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (-(ku')'u + qu^2 - 2f(u))\,\mathrm{d}x,$$

з множиною

$$F(A) = \{u \in C^2([0,1]), u(0) = u(1) = 0\}.$$

У якості $\{\varphi_i\}$ можна взяти $\varphi_i(x) = x^i(1-x)$, $i = \overline{1,n}$. Тоді

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\int_0^1 (k\varphi_i')'\varphi_j + q\varphi_i\varphi_j \right) \mathrm{d}x = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1,n}.$$

2) Узагальнений розв'язок: функціонал:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (k(u')^2 u + qu^2 - 2f(u))\,\mathrm{d}x,$$

Енергетичний простір H_A зі скалярним добутком

$$(u, v)_A = \int_0^1 (ku'v' + quv)\,\mathrm{d}x, \tag{3.2.27}$$

елементи якого

$$H_A = \{u : \|u\|_A < \infty, u(0) = u(1) = 0\}.$$

Це по суті є $\overset{\circ}{W}{}_2^1((0,1))$ (2 — інтегровні з квадратом, 1 — до першої похідної, $\circ$ — нуль на краях).

Приклад $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n-1}$ — так звані штафетини:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x_i}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{3.2.28}$$

Це все, що стосується першої граничної задачі. Тепер про задачу третього роду:

Приклад 3.10

Задано рівняння

$$-(ku')' + qu = f, \quad 0 < x < 1$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} -ku' + \alpha_1 u = \beta_1, \quad x = 0, \\ -ku' + \alpha_1 u = \beta_1, \quad x = 1. \end{aligned}$$

Розв'язання. Розглянемо тут узагальнений розв'язок

$$\Phi(u) = \int_0^1 (k(u')^2 u + qu^2 - 2f(u))\,\mathrm{d}x + \alpha_1 u^2(0) + \alpha_2 u^2(1) - 2\beta_1 u(0) - 2\beta_2 u(1),$$

Енергетичний простір H_A з нормою

$$\|u\| = \int_0^1 (k(u')^2 + qu^2)\,\mathrm{d}x + \alpha_1 u^2(0) + \alpha_2 u^2(1), \tag{3.2.29}$$

елементи якого

$$H_A = \{u : \|u\|_A < \infty\}.$$

Приклад $\{\varphi\}$ — $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$.