§1.2. Дискретно сумовні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Скибицький Нікіта Максимович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

11 жовтня 2019 р.

Постановка задачі

Розглянемо узагальнення розв'язку СЛАР $Ax = b$ з попередньої лекції на дискретно сумовну СЛАР:

$$\sum_{i=1}^{N} A_i x_i = b, \tag{1}$$

де $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — відомі матриці, $x_i \in \mathbb{R}^n$ — невідомі вектори, $b \in \mathbb{R}^m$ — відомий вектор.

Як і звичайні СЛАР, дискретно сумовна СЛАР може мати або не мати обернення (однозначне або множину обернень). В останньому випадку, як і для звичайних СЛАР, обмежимося середньоквадратичним наближенням до такого обернення.

Множина розв'язків

Введемо множину

$$\Omega_x = \left\{ (x_1, \ldots, x_N) : \left\| \sum_{i=1}^{N} A_i x_i - b \right\|^2 = \min_{z_1,\ldots,z_N} \left\| \sum_{i=1}^{N} A_i z_i - b \right\|^2 \right\}. \tag{2}$$

Можна показати, що

$$x_i \in \left\{ A_i^\intercal P_1^+ b + v_i - A_i^\intercal P_1^+ A_v \middle| v_i \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{3}$$

де

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N} A_i A_i^\intercal, \quad A_v = \sum_{i=1}^{N} A_i v_i.$$

Виділення однозначного розв'язку

За неоднозначності Ω_x виділимо з неї вектори $\bar{x}_i$ такі, що

$$\bar{x}_i = \arg\min_{(x_1,\ldots,x_N)\in\Omega_x} \|x_i\|^2. \tag{4}$$

Можна показати, що

$$\bar{x}_i = A_i^\intercal P_1^+ b. \tag{5}$$

Однозначність і точність розв'язку

Розв'язки $\bar{x}_i$ СЛАР (1) будуть однозначними, якщо

$$\det \begin{bmatrix} A_1^\intercal A_1 & A_1^\intercal A_2 & \cdots & A_1^\intercal A_N \\ A_2^\intercal A_1 & A_2^\intercal A_2 & \cdots & A_2^\intercal A_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N^\intercal A_1 & A_N^\intercal A_2 & \cdots & A_N^\intercal A_N \end{bmatrix} > 0. \qquad (6)$$

Точність розв'язку оцінюється величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{(x_1,\dots,x_N)\in\Omega_x} \left\| \sum_{i=1}^{N} A_i x_i - b \right\|^2 = b^\intercal b - b^\intercal P_1 P_1^+ b. \qquad (7)$$

У напрямку інтегральної задачі

Розглянемо задачу

$$\sum_{i=1}^{N} A(t_i)x(t_i) = b, \tag{8}$$

де $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ — відома матрично-значна функція скалярного аргументу, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — невідома вектор-функція скалярного аргументу, $b \in \mathbb{R}^m$ — відомий вектор. Моменти часу t_i цілком конкретні і фіксовані.

Цілком очевидно, що вона еквівалентна попередній задачі, тому просто наведемо для неї аналогічні результати.

Множина розв'язків

Введемо множину

$$\Omega_x = \left\{ x(t_i), i = \overline{1, N} : \left\| \sum_{i=1}^{N} A(t_i)x(t_i) - b \right\|^2 = \right.$$
$$\left. = \min_{z(t_i), i=\overline{1,N}} \left\| \sum_{i=1}^{N} A(t_i)z(t_i) - b \right\|^2 \right\}. \quad (9)$$

Можна показати, що

$$x(t_i) \in \left\{ A^\intercal(t_i)P_1^+ b + v(t_i) - A^\intercal(t_i)P_1^+ A_v \middle| v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \right\}, \quad (10)$$

де

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N} A(t_i)A^\intercal(t_i), \quad A_v = \sum_{i=1}^{N} A(t_i)v(t_i).$$

Виділення однозначного розв'язку

За неоднозначності Ω_x виділимо з неї вектори $\bar{x}(t_i)$ такі, що

$$\bar{x}(t_i) = \underset{(x(t_i), i=\overline{1,N}) \in \Omega_x}{\arg\min} \|x(t_i)\|^2. \tag{11}$$

Можна показати, що

$$\bar{x}(t_i) = A^{\mathsf{T}}(t_i) P_1^{+} b. \tag{12}$$

Однозначність і точність розв'язку

Розв'язки $\bar{x}(t_i)$ СЛАР (8) будуть однозначними, якщо

$$\det \begin{bmatrix} A^\intercal(t_1)A(t_1) & A^\intercal(t_1)A(t_2) & \cdots & A^\intercal(t_1)A(t_N) \\ A^\intercal(t_2)A(t_1) & A^\intercal(t_2)A(t_2) & \cdots & A^\intercal(t_2)A(t_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^\intercal(t_N)A(t_1) & A^\intercal(t_N)A(t_2) & \cdots & A^\intercal(t_N)A(t_N) \end{bmatrix} > 0. \quad (13)$$

Точність розв'язку оцінюється величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{(x(t_i), i=\overline{1,N}) \in \Omega_x} \left\| \sum_{i=1}^{N} A(t_i)x(t_i) - b \right\|^2 = b^\intercal b - b^\intercal P_1 P_1^+ b. \quad (14)$$

Дякуємо за увагу!