Чисельні методи математичної фізики

Риженко А. І.*

8 жовтня 2019 р.

Зміст

3.3 Метод найменших квадратів . . . 1
3.3.1 Мінімізаційна послідовність . . . 2

4 Сіткові (дискретні/різницеві) методи **3**
4.1 Загальні поняття методу сіток . . . 3
4.2 Сітки і сіткові функції . . . 5

Коли граничні умови були першого роду то до визначення простору H_A додавалися граничні умови $u(0) = u(1) = 0$. Коли ж граничні умови стали третього роду, то до визначення простору вже нічого не додавалося.

Зауваження 3.1 — Справа у тому, що крайові умови діляться на *головні* та *природні* граничні умови.

φ_i повинні задовольняти головним похідним, а природні умови "входять" до H_A. Для диференціального оператору порядку $2m$: якщо до умови входять лише похідні порядку $< m$ то такі умови головні, а інакше — природні.

Приклад 3.2

Якщо наш оператор другого порядку, то $m = 1$, і умови першого роду є головними, а умови третього роду

3.3 Метод найменших квадратів

$$Au = f \tag{3.3.1}$$

Нехай існує єдиний розв'язок (3.3.1), A^{-1} обмежений, $A : H \to H$ — лінійний. Для цього методу

$$\Phi(u) = \|Au - f\|^2 \tag{3.3.2}$$

*Риженко Андрій Іванович, `rai-ku@ukr.net`

Зрозуміло, що

$$\inf_{u \in D(A)} \Phi(u) = 0 = \Phi(u^\star).$$

У нашому випадку

$$\Phi(u) = (Au - f, Au - f) = (Au, Au) - 2(f, Au) + \|f\|^2 \tag{3.3.3}$$

Згідно загальної теорії маємо

$$\begin{aligned} G(u, v) &= (Au, Av), \\ \ell(u) &= (f, Au), \\ c &= (Au, Av). \end{aligned}$$

3.3.1 Мінімізаційна послідовність

1) $\{\varphi_i\} \subset D(A)$ — лінійно незалежна, H – повний;

2) $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$;

3) Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \tag{3.3.4}$$

4) Отримуємо СЛАР вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_i, A\varphi_j) = (f, A\varphi_j). \tag{3.3.5}$$

Зі СЛАР (3.3.5) бачимо, що СЛАР методу найменших квадратів є СЛАР методу моментів з проекційною системою функцій $\psi_j = A\varphi_j$.

Теорема 3.3

Якщо $\{\varphi_i\}$ є A-повною (це означає, що $A\varphi_i$ повна в H) та існує M: $\|u\| \le M\|Au\|$ (A^{-1} обмежений) то мінізаційна послідовність u_n буде збігатися до u в нормі простору H: $\{u_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} u$.

Зауваження 3.4 — Варто вибирати $\{\varphi_i\}$ ортогональними, щоб СЛАР мала мале число обумовленості.

4 Сіткові (дискретні/різницеві) методи

4.1 Загальні поняття методу сіток

Розгялдаємо рівняння

$$Au = f, \tag{4.1.1}$$

де $A : B_1 \to B_2$ (B_1, B_2 — банахові простори, $D(A) \subseteq B_1$, $D(A) \subseteq B_2$.

Головна ідея методу сіток полягає у введенні просторів $B_{1,h}$ та $B_{2,h}$, які залежать від певного $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$. Далі замінюємо A оператором $A_h : B_{1,h} \to B_{2,h}$. Задачу (4.1.1) замінюємо задачею

$$A_h y_h = \varphi_h. \tag{4.1.2}$$

Суть у тому, що $B_{1,h}$ та $B_{2,h}$ — простори скінченновимірні, наприклад сіткові.

Означення 4.1. Задача (4.1.1) *коректно поставлена*, якщо:

1) $\exists!$ розв'язок (4.1.1) $\forall f \in R(A)$;

2) цей розв'язок стійки, тобто $\|\tilde{u} - u\|_1 \le M\|\tilde{f} - f\|_2$, де M стала;

Означення 4.2. Задача (4.1.2) *коректно поставлена*, якщо:

1) $\exists!$ розв'язок (4.1.2) $\forall f \in R(A)$;

2) цей розв'язок стійки, тобто $\|\tilde{y}_h - y_h\|_{1,h} \le M_1\|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2,h}$, де $M_1 > 0$ — (можливо інша) стала;

Розглянемо оператори проектування $P_{1,h} : B_1 \to B_{1,h} : P_{1,h}u = u_h$ та $P_{2,h} : B_2 \to B_{2,h} : P_{2,h}f = f_h$. Окрім цього, хочеться мати узгоджені норми в цих просторах, тобто $\lim_{|h|\to 0} \|P_{1,h}u\|_{1,h} = \|u\|_1$ і $\lim_{|h|\to 0} \|P_{2,h}f\|_{2,h} = \|f\|_2$

Означення 4.3. Функція

$$z_h = y_h - P_{1,h}u = y_h - u_h \tag{4.1.3}$$

— похибка різницевої задачі (4.1.2), визначена на просторі $B_{1,h}$.

Означення 4.4. Будемо говорити, що розв'язок задачі (4.1.2) *збігається* до розв'язку задачі (4.1.1) (або ж, що різницева схема збіжна), якщо $\lim_{|h|\to 0} \|z_n\|_{1,h} \to 0$.

Означення 4.5. Будемо говорити, що розв'язок задачі (4.1.2) *збігається* до розв'язку задачі (4.1.1) *з порядком* m, якщо

$$\|z_n\|_{1,h} = O(|h|^m). \tag{4.1.4}$$

Зауваження 4.6 — Тут $O(|h|^m) = C \cdot |h|^m$, де $C > 0$ — незалежна від $|h|$ константа.

З формули (4.1.3) маємо

$$y_h = z_h + u_n.$$

Позначимо

$$A_h z_h = \psi_h, \tag{4.1.5}$$

тоді, підставляючи в (4.1.2) маємо

$$\psi_h = \varphi_h - A_h u_h. \tag{4.1.6}$$

Означення 4.7. Величина ψ_h визначена є *похибкою апроксимації* (нев'язкою) різницевої схеми (4.1.2) на розв'язку y.

$$\psi_h = \varphi_h - A_h u_h - P_{2,h}(f - Au) = (\varphi_h - P_{2,h} f) - (A_h u_h - P_{2,h} Au) = \psi_h^f - \psi_h^A. \tag{4.1.7}$$

Звідси бачимо, що похибка апроксимації схеми складається з похибки апроксимації правих частин:

$$\psi_h^f = \varphi_h + P_{2,h} f = \varphi_h - f_h, \tag{4.1.8}$$

та похибки апроксимації диференціального оператору A різницеми оператором A_h:

$$\psi_h^A = A_h u_n - P_{2,h} Au. \tag{4.1.9}$$

Лема 4.8 (Лакса-Філіпова)
Нехай різницева задача (4.1.2) апроксимує задачу (4.1.1) та є коректно поставленою. Тоді розв'язок задачі (4.1.2) буде збігатися до розв'язку задачі (4.1.1), причому порядок збіжності буде таким же, як і порядок апроксимації.

Доведення. Підставимо

$$z_h = y_h - u_h \tag{4.1.10}$$

в (4.1.2). Тоді для похибки отримуємо задачу (4.1.6). За умовою лемми задача є коректно поставленою, а тому і стійкої. З умови стійкості випливає, що

$$\|z_h\|_{1,h} \leq M \|\psi_h\|_{2,h}. \tag{4.1.11}$$

Звідси і випливає, що

$$\lim_{|h|\to 0} \|z_h\|_{1,h} \le M \lim_{|h|\to 0} \|\psi_h\|_{2,h} = 0. \tag{4.1.12}$$

Причому,

$$\lim_{|h|\to 0} \|z_h\|_{1,h} \le M \cdot O(|h|^m) = O(|h|^m). \tag{4.1.13}$$

□

Зауваження 4.9 — z_h — стійкість і ψ_h. ψ_h — $\varphi_h \sim f_h$ і $A_h \sim A$. Тому лему ще називають "апроксимація + стійкість = збіжність".

Означення 4.10. Будемо говорити, що A_h *наближає* A якщо

$$\lim_{|h|\to 0} \|A_h u_h - P_{2,h} A u\|_{2,h} = 0. \tag{4.1.15}$$

Означення 4.11. Будемо говорити, що A_h *наближає* A *з порядком* m якщо

$$\|A_h u_h - P_{2,h} A u\|_{2,h} = O(|h|^m). \tag{4.1.16}$$

Означення 4.12. Будемо говорити, що φ_h *наближає* f якщо

$$\lim_{|h|\to 0} \|\varphi_h - P_{2,h} f\|_{2,h} = 0. \tag{4.1.17}$$

Означення 4.13. Будемо говорити, що φ_h *наближає* f *з порядком* m якщо

$$\|\varphi_h - P_{2,h} f\|_{2,h} = O(|h|^m). \tag{4.1.18}$$

4.2 Сітки і сіткові функції

Одновимірна рівномірна сітка: задана область $\bar\Omega = [ab]$, $\partial\bar\Omega = \Gamma$, $\bar\omega_h = \{x_i : a + ih, h = (b-a)/N, i = \overline{0, N}\}$, $\omega_h = \{x_i : a + ih, h = (b-a)/N, i = \overline{1, N-1}\}$, де $\gamma_h = \bar\omega_h \setminus \omega_h$.