§1.3. Дискретно розподільні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Скибицький Нікита Максимович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

11 жовтня 2019 р.

Постановка задачі

Продовжимо узагальнювати псевдообернення СЛАР, цього разу для задачі

$$B_i x = b_i, \quad i = \overline{1, N}, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ — невідомий вектор, $B_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — відомі матриці, $b_i \in \mathbb{R}^m$ — відомі вектори.

Множина розв'язків

Введемо множину

$$\Omega_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{N} \|B_i x - b_i\|^2 = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{N} \|B_i z - b_i\|^2 \right\}. \quad (2)$$

Можна показати, що

$$\Omega_x = \left\{ P_2^+ B_b + v - P_2^+ P_2 v \,\middle|\, v \in \mathbb{R}^n \right\}, \quad (3)$$

де

$$P_2 = \sum_{i=1}^{N} B_i^\intercal B_i, \quad B_b = \sum_{i=1}^{N} B_i^\intercal b_i.$$

Виділення однозначного розв'язку

За неоднозначності Ω_x виділимо з неї вектор $\bar{x}$ такий, що

$$\bar{x} = \arg\min_{x \in \Omega_x} \|x\|^2. \tag{4}$$

Можна показати, що

$$\bar{x} = P_2^+ B_b. \tag{5}$$

Однозначність і точність розв'язку

Розв'язок $\bar{x}$ СЛАР (1) буде однозначним, якщо

$$\det P_2 > 0. \tag{6}$$

Точність розв'язку оцінюється величиною

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{N} b_i^\intercal b_i - B_b^\intercal P_2^+ B_b. \tag{7}$$

У напрямку функціональної задачі

Розглянемо задачу

$$B(t_i)x = b(t_i), \tag{8}$$

де $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ — відома матрично-значна функція скалярного аргументу, $x \in \mathbb{R}^n$ — невідомий вектор, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ — відома вектор-функція скалярного аргументу. Моменти часу t_i цілком конкретні і фіксовані.

Цілком очевидно, що вона еквівалентна попередній задачі, тому просто наведемо для неї аналогічні результати.

Множина розв'язків

Введемо множину

$$\Omega_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{N} \|B(t_i)x - b(t_i)\|^2 = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{N} \|B(t_i)z - b(t_i)\|^2 \right\}. \tag{9}$$

Можна показати, що

$$\Omega_x = \left\{ P_2^+ B_b + v - P_2^+ P_2 v \,\middle|\, v \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{10}$$

де

$$P_2 = \sum_{i=1}^{N} B^\mathsf{T}(t_i) B(t_i), \quad B_b = \sum_{i=1}^{N} B^\mathsf{T}(t_i) b(t_i).$$

Виділення однозначного розв'язку

За неоднозначності Ω_x виділимо з неї вектор $\bar{x}$ такий, що

$$\bar{x} = \arg\min_{x \in \Omega_x} \|x\|^2. \tag{11}$$

Можна показати, що

$$\bar{x} = P_2^+ B_b. \tag{12}$$

Однозначність і точність розв'язку

Розв'язок $\bar{x}$ СЛАР (8) буде однозначним, якщо

$$\det P_2 > 0. \tag{13}$$

Точність розв'язку оцінюється величиною

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{N} b^{\mathsf{T}}(t_i) b(t_i) - B_b^{\mathsf{T}} P_2^{+} B_b. \tag{14}$$

Дякуємо за увагу!