Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

15 жовтня 2019 р.

Зміст

2 Моделі аномальної дифузії **1**
2.0.1 Основні поняття 1
2.0.2 Формула Монтрола-Вайса 2

2 Моделі аномальної дифузії

2.0.1 Основні поняття

Нагадаємо, що класичні рівняння дифузії та теплопровідності зумовлені наступними чинниками:

1. закон збереження кількості речовини/тепла;
2. джерела і стоки;
3. "закон" Фіка/Фур'є — емпірично встановлене для широкого класу процесів твердження про те, що інтенсивність потоку речовини/тепла пропорційна мінус градієнту концентрації речовини/кількості тепла на границі.

Розглянемо тепер інший підхід, який грунтується на випадкових блуканнях з неперервним часом (*eng.* CTRW, continuous time random walk). А саме, нехай $x(t)$ — випадкова величина (координата частинки в момент часу t), а $u(x,t)$ (при фіксованому t — щільність координати частинки).

Параметри моделі:

1. $u_0(x)$ — щільність початкового (при $t=0$) розподілу;
2. $\psi(t)$ — щільність часу очікування наступного стрибка;
3. $\lambda(x)$ — щільність зміщення.

Означення 2.0.1. Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є* називається

$$\mathscr{F}\left[f\right](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.0.1}$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, `andriy.hul@gmail.com`

Твердження 2.0.2
Для перетворення Фур'є справедлива теорема згортки:

$$\mathscr{F}\left[f \star g\right](\omega) = \mathscr{F}\left[f\right](\omega) \cdot \mathscr{F}\left[f\right](\omega), \tag{2.0.2}$$

де

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.0.3}$$

Означення 2.0.3. Нехай $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є-Лапласа* називається

$$\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta) = \tilde{\tilde{u}}(\omega,\eta) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta t + i\omega x} u(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{2.0.4}$$

2.0.2 Формула Монтрола-Вайса

Формула 2.0.4 (Монтрола-Вайса)

$$\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta) = \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta} \frac{1 - \mathscr{L}\left[\psi\right](\eta)}{1 - \mathscr{L}\left[\psi\right](\eta) \cdot \mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega)}, \tag{2.0.5}$$

як тільки

$$\left|\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta) \cdot \mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega)\right| < 1. \tag{2.0.6}$$

Доведення. Введемо додаткове позначення: $n(t)$ — кількість стрибків до моменту t. $\psi_k(t)$ — щільність часу k-го стрибка. І нарешті, $\lambda_k(x)$ — щільність координати після k-го стрибка.

Запишемо формулу повної ймовірності:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{n(t) = k\} \lambda_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathsf{P}\{n(t) \geqslant k\} - \mathsf{P}\{n(t) \geqslant k+1\}) \lambda_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi_k(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \psi_{k+1}(s)\,\mathrm{d}s \right) \lambda_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi^{\star k}(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \psi^{\star(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s \right) \cdot (u_0 \star \lambda^{\star k})(x). \end{aligned} \tag{2.0.7}$$

Зауваження 2.0.5 — Тут ми скористалися тим, що

$$\psi_k \equiv \psi^{\star k} \equiv \underbrace{\psi \star \psi \star \ldots \star \psi}_{k} \tag{2.0.8}$$

і

$$\lambda_k \equiv u_0 \star \lambda^{\star k} \equiv u_0 \star \underbrace{\lambda \star \lambda \star \ldots \star \lambda}_{k}. \tag{2.0.9}$$

Доведення. Справді, аби здійснити k-ий стрибок у момент часу T необхідно зробити $k-1$ стрибок до моменту часу t, після чого зачекати час $T-t$. Вже видно, звідки береться згортка у першій формулі, лишається просто формально застосувати математичну індукцію по k.

Справді, потрапити у точку y після k стрибків можна з довільної точки x у якій ми опинилися після $(k-1)$-го стрибка, причому ймовірність цього $\lambda(y-x)$. Вже видно, звідки береться згортка у другій формулі, лишається просто формально застосувати математичну індукцію по k. □

Враховуючи, що

- $\mathscr{L}\left[I_0^1 f\right](\eta) = \frac{1}{\eta}\mathscr{L}\left[f\right](\eta)$;
- $\mathscr{L}\left[\psi^{\star k}\right](\eta) = (\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta))^k$;
- $\mathscr{F}\left[\lambda^{\star k}\right](\omega) = (\mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega))^k$;

маємо

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\eta}((\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta))^k - (\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta))^{k+1})\cdot\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)\cdot(\mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega))^k = \\ &= \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)\cdot(1-\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta))}{\eta}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta))^k\cdot(\mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega))^k = \\ &= \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)\cdot(1-\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta))}{\eta(1-\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta)\cdot\mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega)},\end{aligned} \tag{2.0.10}$$

де останній перехід — формула для суми нескінченної геометричної прогресії.

Зауваження 2.0.6 — Рівності

$$\mathscr{L}\left[\psi^{\star k}\right](\eta) = (\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta))^k \tag{2.0.11}$$

і

$$\mathscr{F}\left[\lambda^{\star k}\right](\omega) = (\mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega))^k \tag{2.0.12}$$

— безпосередній наслідок теореми згортки для перетворень Лапласа та Фур'є відповідно, а також застосування методу математичної індукції по k.

□