Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

17 вересня – 8 жовтня 2019 р.

Зміст

1 Дробові диференціальні рівняння

Перш за все наведемо мінімальну мотивацію вивчення дробових диференціальних рівнянь.

Нагадування 1.0.1 — Класичне рівняння дифузії має вигляд

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = f(x,t), \tag{1.0.1}$$

де функція $f(x,t)$ відповідає джерелам речовини, що дифундує.

Втім, у реальному житті зустрічаються процеси, у яких дифузія відбувається повільніше/швидше, ніж передбачає це рівняння. Для постановки відповідних рівнянь необхідно вводити дробові похідні (похідні дробових порядків).

*Гуляницький Андрій Леонідович, `andriy.hul@gmail.com`

1.1 Основи дробового числення

Розглянемо $f(t) : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$. Позначимо

$$(I_0^1 f)(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.1.1}$$

Також визначимо рекурсивно

$$(I_0^n f)(t) = (I_0^1(I_0^{n-1} f))(t) = \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n)\,\mathrm{d}s_n \ldots \mathrm{d}s_1. \tag{1.1.2}$$

Подібне визначення не дуже зручне з обчислювальної точки зору, тому наступна теорема стане нам у пригоді.

Формула 1.1.1 (Коші-Діріхле)
Для $f \in L_1([0,T])$, $t \in [0,T]$ виконується

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.1.3}$$

Доведення. Доведення проведемо за методом математичної індукції по n. **База** $n = 1$ виконується безпосередньо за визначенням I_0^1. **Перехід**: нехай

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.1.4}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
(I_0^{n+1} f)(t) = (I_0^1(I_0^n f))(t) = \int_0^t (I_0^n f)(s)\,\mathrm{d}s = \\
= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \left(\int_0^s (s-\xi)^{n-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}s = \\
= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \int_\xi^t f(\xi)(s-\xi)^{n-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi = \\
= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\xi) \left. \frac{(s-\xi)^n}{n} \right|_{s=\xi}^{s=t} \mathrm{d}\xi = \\
= \frac{1}{n!} \int_0^t f(\xi)(t-\xi)^n\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

З точністю до назв змінних отримали що хотіли. □

Зауваження 1.1.2 — Перехід від другого рядка до третього тут відбувається за теоремою Фубіні. Наступна картинка може допомогти у розумінні:

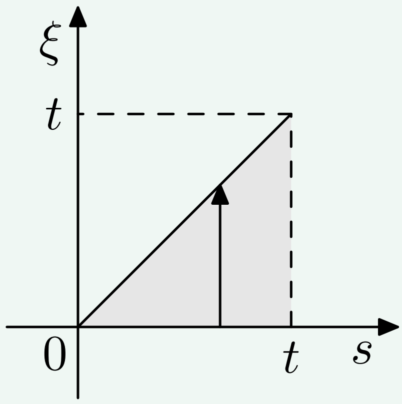

Рис. 1: При $s : 0 \to t$ маємо $\xi : 0 \to s$.

Надалі ми будемо часто явно чи неявно користатися теоремою Фубіні, тому радимо переконатися у тому, що ви розумієте цей перехід.

1.1.1 Означення дробових інтегралів та похідних

Формула Коші-Діріхле мотивує введення інтегральних операторів нецілого порядку.

Означення 1.1.3. *Інтегралом Рімана-Ліувілля* порядку $\alpha > 0$ з нижньою межею 0 функції f називається оператор

$$(I_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.1.6}$$

Також окремо зауважимо, що $I_0^0 f \equiv f$.

Приклад 1.1.4

Для $\alpha \in \mathbb{N}$ маємо $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, тобто власне формулу Коші-Діріхле.

Нагадування 1.1.5 — Гамма-функція визначається наступною рівністю:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \tag{1.1.7}$$

Взагалі кажучи, подібний вираз нагадує функцію згортки зі степеневою функцією порядку α:

$$I_0^\alpha f \equiv f \star y_\alpha, \tag{1.1.8}$$

де $y_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$, а операція $\star : (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ визначається наступним чином:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(s) g(t-s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.1.9}$$

Давайте тепер поміркуємо, як можна визначити диференціальний оператор дробового порядку, маючи відповідні інтегральні оператори. Взагалі кажучи, єдиної відповіді на це питання немає, як показує наступна картинка:

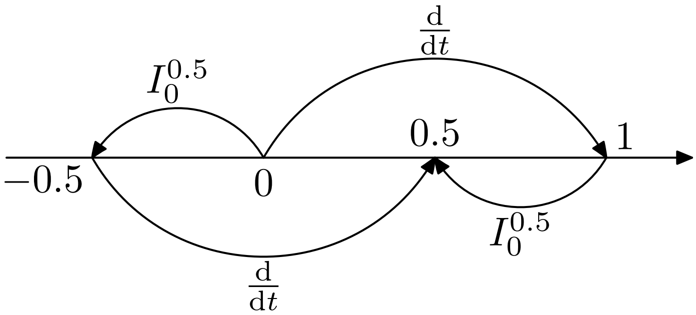

Рис. 2: Різні способи визначення диференціального оператора нецілого порядку

Введемо наступне допоміжне поняття для спрощення подальших позначень і формулювань:

Означення 1.1.6. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді *стеля* $\lceil \alpha \rceil$ — найменше ціле число, що не менше за α. Також інколи кажуть *верхня ціла частина* α.

Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$.

Означення 1.1.7. *Похідною за Капуто* функції f порядку α з нижньою межею 0 називається оператор

$$({}^{\star}D_0^{\alpha} f)(t) = I_0^{n-\alpha} \left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n} \right). \tag{1.1.10}$$

Означення 1.1.8. *Похідною Рімана-Ліувілля* функції f порядку α з нижньою межею 0 називається оператор

$$(D_0^{\alpha} f)(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} (I_0^{n-\alpha} f). \tag{1.1.11}$$

Приклад 1.1.9

На рисунку вище $D_0^{0.5} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{0.5}$, а ${}^{\star}D_0^{0.5} = I_0^{0.5}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})$.

1.1.2 Існування дробових похідних

Взагалі кажучи виникає питання коли введені вище похідні існують. Для відповіді на це питання нам знадобиться наступне:

Означення 1.1.10. Функція f називається *абсолютно неперервною* (*eng.* AC, absolutely continuous) на проміжку I якщо $\forall \varepsilon > 0$: $\exists \delta > 0$: $\forall x_1 < y_1 \leqslant x_2 < y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n < y_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon. \tag{1.1.12}$$

Твердження 1.1.11

Для AC функцій їхні похідні інтегровні (з нецілим порядком), тобто похідні (з нецілим порядком) існують.

Доведення. Без доведення. $\square$

Зауваження 1.1.12 — Поняття абсолютної неперервності має нагадувати поняття рівномірної неперервності (*eng.* UC, uniformly continuous). Зрозуміло, що з абсолютної неперервності випливає ($n = 1$) рівномірна неперервність, але зворотнє не виконується.

Вправа 1.1.13. Наведіть приклад рівномірно неперервної, але не абсолютно неперервної функції.

1.1.3 Інтегральний зв'язок між дробовими та класичними похідними

Виникає закономірне запитання: чи існує аналог формули Коші-Діріхле для диференціальних операторів? Виявляється, що так, хоча він і не зовсім такий, як можна було б очікувати.

Теорема 1.1.14
Нехай $f \in AC^n([0,T])$, $t \in [0,T]$, $n = \lceil \alpha \rceil$. Тоді

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} \,\mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)t^{\alpha-k}}. \tag{1.1.13}$$

Приклад 1.1.15
Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо $f \in AC([0,T])$ і

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} \,\mathrm{d}s + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}. \tag{1.1.14}$$

Зауваження 1.1.16 — Як показує формула, ${}^{\star}D_0^\alpha$, D_0^α — *нелокальні оператори.*

Доведення. Доведемо частинний випадок $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned}
(D_0^\alpha f)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) \,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t f(s) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \frac{-(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{-f(s)(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \bigg|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t f'(s) \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \,\mathrm{d}s \right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(0)t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f'(s)(t-s)^{1-\alpha} \,\mathrm{d}s \right) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(0)}{t^\alpha} + \int_0^t f'(s)(t-s)^{-\alpha} \,\mathrm{d}s \right).
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

□

Зауваження 1.1.17 — Тут при переході від другого рядка до третього ми скористалися інтегруванням за частинами, а в останньому переході — формулою Лейбніца:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x,b(x))\cdot b'(x) - f(x,a(x))\cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.1.16}$$

На завершення визначимо ще кілька корисних для загального розвитку об'єктів:

Означення 1.1.18. *Інтегралом Рімана-Ліувілля порядку α з нижньою (лівою) межею a* називається

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s. \tag{1.1.17}$$

Означення 1.1.19. *Інтегралом Рімана-Ліувілля порядку α з правою (верхньою) межею T* для $t < T$ називається

$$(I_{T-}^{\alpha} f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s. \tag{1.1.18}$$

Надалі ми (майже) не будемо їх використовувати, але знати ці визначення варто.

1.2 Властивості дробових похідних

1.2.1 Похідні степеневих функцій

Знайдемо похідні степеневих функцій. Нехай $\beta > -1$, $0 < \alpha < 1$. Тоді, безпосередньо за визначення дробової похідної Рімана-Ліувілля

$$D_0^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} t^{\beta}. \tag{1.2.1}$$

У свою чергу, безпосередньо за визначенням дробового інтеграла

$$I_0^{1-\alpha} t^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^{\beta}(t-s)^{-\alpha}\,\mathrm{d}s. \tag{1.2.2}$$

Нагадування 1.2.1 —

Означення 1.2.2 (бета-функції).

$$B(a,b) = \int_0^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1}\,\mathrm{d}\xi, \tag{1.2.3}$$

Властивість 1.2.3 (бета-функції)

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.2.4}$$

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $\mathrm{d}s = t\,\mathrm{d}\xi$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t\xi)^\beta t^{-\alpha} (1-\xi)^{-\alpha} t\,\mathrm{d}\xi &= \\ = \frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot B(\beta+1, 1-\alpha) &= \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} \cdot t^{\beta-\alpha+1}&. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Лишилося продиференціювати цей інтеграл:

$$\begin{aligned} D_0^\alpha \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} \cdot t^{\beta-\alpha+1} \right) &= \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} \cdot (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} &= \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} \cdot t^{\beta-\alpha}&, \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

де в останньому переході ми скористалися властивістю $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.

Зауваження 1.2.4 — Ця формула справедлива і для $\alpha \geqslant 1$, але умова $\beta > -1$ важлива для збіжності кількох інтегралів, зокрема

$$\int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha}\,\mathrm{d}s. \tag{1.2.7}$$

Приклад 1.2.5

Зокрема, якщо $\mathbb{N} \ni \alpha \leqslant \beta \in \mathbb{N}$, то маємо формулу

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} t^\beta = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} \cdot t^{\beta-\alpha}. \tag{1.2.8}$$

Наприклад,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} t^4 = \frac{4!}{2!} \cdot t^2. \tag{1.2.9}$$

Зауваження 1.2.6 — Зрозуміло також, що всі введені нами оператори лінійні.

1.2.2 Властивості похідних Рімана-Ліувілля

Твердження 1.2.7

На жаль, не виконується наступна властивість

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}. \tag{1.2.10}$$

Доведення.

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \tag{1.2.11}$$

Почленно диференціюємо:

$$
\begin{aligned}
D_0^\alpha e^{\lambda t} &= D_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_0^\alpha (t^k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \cdot t^{k-\alpha} \neq \\
&\neq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^\alpha \frac{(\lambda t)^k}{k!}.
\end{aligned} \tag{1.2.12}
$$

□

Нагадаємо основні співвідношення між похідними та інтегралами із класичного аналізу:

Формула 1.2.8 ((не) Ньютона-Лейбніца)

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = f(t), \tag{1.2.13}
$$

а також

Формула 1.2.9 (Ньютона-Лейбніца)

$$
\int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s = f(t) - f(0). \tag{1.2.14}
$$

Важливою для подальшого аналізу є

Властивість 1.2.10 (дробових інтегралів, напівгрупова)
Нехай $\alpha > 0$, $\beta > 0$, тоді $I_0^{\alpha+\beta} \equiv I_0^\alpha I_0^\beta$.

Вправа 1.2.11. Доведіть цю властивість. **Підказка**: за означеннями,

$$
I_0^{\alpha+\beta} f \equiv f \star y_{\alpha+\beta} \overset{?}{\equiv} f \star (y_\alpha \star y_\beta) \overset{?}{\equiv} (f \star y_\alpha) \star y_\beta \equiv I_0^\beta I_0^\alpha f, \tag{1.2.15}
$$

тому достатньо перевірити асоціативність згортки і рівність $y_{\alpha+\beta} \equiv y_\alpha \star y_\beta$.

Формула 1.2.12 (аналог формули (не) Ньютона-Лейбніца)
Для $\alpha > 0$

$$
D_0^\alpha I_0^\alpha f \equiv f. \tag{1.2.16}
$$

Доведення. Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, тоді

$$
D_0^\alpha I_0^\alpha f \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^{n-\alpha} I_0^\alpha f \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^n f = f. \tag{1.2.17}
$$

□

Зауваження 1.2.13 — Тут ми скористалися напівгруповою властивістю.

Формула 1.2.14 (аналог формули Ньютона-Лейбніца)
Нехай $f, D_0^\alpha f \in L_1([0,T])$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, тоді для $0 < t < T$ маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}. \tag{1.2.18}$$

Зауваження 1.2.15 — Тут під $D_0^{-|\beta|}$ маємо на увазі $I_0^{|\beta|}$.

Приклад 1.2.16
Для $0 < \alpha < 1$ маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.2.19}$$

Зауваження 1.2.17 — Тут $(I_0^{1-\alpha} f)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (I_0^{1-\alpha} f)(\varepsilon)$.

Доведення. Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned}(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (D_0^\alpha f)(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(s)\,\mathrm{d}s \right).\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Виконаємо наступні маніпуляції з виразом що стоїть під похідною:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(t)\,\mathrm{d}t = \\ &\quad = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left((t-s)^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(s) \Big|_{s=0}^{s=t} + \alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (I_0^{1-\alpha} f)(s)\,\mathrm{d}s \right) = \\ &\quad = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^\alpha I_0^{1-\alpha} f = \\ &\quad = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f.\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

Лишилося всього лише продиференціювати:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f \right) = f(t) - \frac{t^{\alpha-1} (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.2.22}$$

□

1.2.3 Властивості похідних за Капуто

Теорема 1.2.18
Нехай $f \in L_\infty([0,T])$, тобто $\exists M \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} M$, тоді, як і очікувалося,

$$({}^\star D_0^\alpha I_0^\alpha f)(t) = (I_0^\alpha {}^\star D_0^\alpha f)(t). \tag{1.2.23}$$

Теорема 1.2.19
Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in AC^n([0,T])$, тоді

$$(I_0^\alpha {}^\star D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot t^k. \tag{1.2.24}$$

Зауваження 1.2.20 — Ця формула справедлива і для цілих α.

Твердження 1.2.21
Для похідних у загальному випадку не виконується напівгрупова властивість.

Теорема 1.2.22
Нехай $f, D_0^\beta \in L_1([0,T])$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Тоді

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \sum_{k=0}^{\lceil \beta \rceil - 1} (D_0^{\beta-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(-\alpha-k)} \tag{1.2.25}$$

Приклад 1.2.23
Зокрема, для $0 < \alpha, \beta < 1$:

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - (I_0^{1-\beta} f)(0) \cdot \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}. \tag{1.2.26}$$

Доведення. Доведемо частинний випадок:

$$
\begin{aligned}
(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} D_0^\beta f\right)(t) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha} D_0^\beta f\right)(t) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha-\beta} I_0^\beta D_0^\beta f\right)(t) = \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha-\beta} \left(f(t) - (I_0^{1-\beta} f)(0) \cdot \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right) = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} \cdot D_0^{\alpha+\beta} t^{\beta-1} = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha)} \cdot t^{-1-\alpha} = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(-\alpha)} \cdot t^{-1-\alpha}.
\end{aligned}
\tag{1.2.27}
$$

□

1.3 Початкові значення

1.3.1 Початкові значення інтегралів

Дослідимо, за яких умов початкове значення інтегралу дорівнює нулю.

Теорема 1.3.1
Нехай $\alpha > 0$, $p > 1/\alpha$, $p \geqslant 1$, $f \in L_p((0,T))$. Тоді $(I_0^\alpha f)(t) = o(t^{\alpha-1/p})$ при $t \to 0$.

Доведення.

$$
\begin{aligned}
|(I_0^\alpha f)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s \right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} \left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)q}\,\mathrm{d}s\right)^{1/q} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} \left(\frac{t^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1}\right)^{1/q} = \\
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1+1/q}}{c(\alpha,p)} = \\
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1/p}}{c(\alpha,p)} = \\
&= o(t^{\alpha-1/p}),
\end{aligned}
\tag{1.3.1}
$$

де останній перехід справджується адже $\int_0^t |f(s)|^p\,\mathrm{d}s = o(1)$ при $t \to 0$. □

Нагадування 1.3.2 —

Твердження 1.3.3 (абсолютна неперервність інтеграла Лебега)
Якщо $f \in L_1$ то

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall A : \mu(A) < \delta(\varepsilon)) \quad \int_A f \, \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon. \tag{1.3.2}$$

Нерівність 1.3.4 (Коші-Буняковського, інтегральна)
Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2}. \tag{1.3.3}$$

Нерівність 1.3.5 (Гельдера, інтегральна)
Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}, \tag{1.3.4}$$

де $1/p + 1/q = 1$.

Зауваження 1.3.6 — Умова $p > 1/\alpha$ необхідна для збіжності усіх інтегралів з доведення

Наслідок 1.3.7
При $\alpha > 1/p$ маємо $(I_0^\alpha f)(t) = o(1)$, тобто $(I_0^\alpha f)(0) = 0$.

Вправа 1.3.8. Наведіть приклад f для якої $(I_0^\alpha f)(0) \neq 0$ (але і не ∞).

1.3.2 Початкові значення похідних

Теорема 1.3.9
Нехай $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^{n-1}([0,T])$, $p > \frac{1}{n-\alpha}$, $f^{(n)} \in L_p([0,T])$. Тоді $(D_0^\alpha)(0) = 0 \iff f^{(k)}(0) = 0$ при $k = \overline{0, n-1}$.

Доведення. За умов теореми

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} \, \mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) \cdot t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{1.3.5}$$

($\Longleftarrow$) У формулі вище інтеграл дорівнює нулю за першою сьогоднішньою теоремою, а уся сумма зануляється за умовою теореми.

($\Longrightarrow$) Домножатимемо (1.3.5) на $t^{\alpha-k}$ для $k = \overline{0, n-1}$. Наприклад, для $k = 0$ матимемо

$$t^\alpha (D_0^\alpha f)(t) = t^\alpha ({}^\star D_0^\alpha f)(t) + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) \cdot t^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{1.3.6}$$

Бачимо, що $t^\alpha({}^*\!D_0^\alpha f)(t) = o(1)$, всі доданки суми нескінченно малі, тому $f(0) = 0$. Далі за індукцією по k отримуємо рівність нулеві усіх похідних до $(n-1)$-ої. □

Зауваження 1.3.10 — При $0 < \alpha < 1$ маємо $(D_0^\alpha \mathbf{1})(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \neq 0$.

Зауваження 1.3.11 — Але $({}^*\!D_0^\alpha \mathbf{1})(t) = 0$.

Теорема 1.3.12
Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^n([0,T])$, тоді

$$D_0^\alpha f \equiv 0 \iff f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1} \tag{1.3.7}$$

— дробовий многочлен.

Доведення.

Вправа 1.3.13. $(\Longrightarrow)$

$(\Longleftarrow)$ Нехай

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}, \tag{1.3.8}$$

тоді

$$D_0^\alpha f = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^{n-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{\alpha-k-1} \right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(n-k)} \cdot t^{n-k-1} = 0. \tag{1.3.9}$$

□

Теорема 1.3.14 (похідна добутку)
Нехай f, g — аналітичні в $(-h,h)$. Тоді для $t \in (0, h/2)$

$$(D_0^\alpha (f \cdot g))(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\alpha} (D_0^k f)(t) (D_0^{\alpha-k} f)(t), \tag{1.3.10}$$

де

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(\alpha-k-1)}. \tag{1.3.11}$$

Теорема 1.3.15 (Тарасова)
Нехай $0 < \alpha < 1$, тоді D_0^α — лінійний оператор, що задовольняє умову

$$D_0^\alpha (f \cdot g) = D_0^\alpha f \cdot g + f \cdot D_0^\alpha g. \tag{1.3.12}$$

Тоді $\exists p(t)$: $(D_0^\alpha f)(t) = p(t) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

1.4 Перетворення Лапласа

1.4.1 Допоміжні твердження про перетворення Лапласа

Означення 1.4.1. Нехай $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, тоді

$$\mathscr{L}\left[f\right](\eta) = \overline{f}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.4.1}$$

Лема 1.4.2 (перетворення Лапласа похідної)

$$\mathscr{L}\left[f'\right](\eta) = \eta \cdot \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - f(0). \tag{1.4.2}$$

Доведення. Інтегруємо частинами. □

Лема 1.4.3 (перетворення Лапласа згортки)

$$\mathscr{L}\left[f \star g\right](\eta) = \mathscr{L}\left[f\right](\eta) \cdot \mathscr{L}\left[g\right](\eta). \tag{1.4.3}$$

Доведення. Змінюємо порядок інтегрування. □

Лема 1.4.4 (перетворення Лапласа степеневої функції)

$$\mathscr{L}\left[t^{-\beta}\right](\eta) = \Gamma(1-\beta) \cdot \eta^{\beta-1}. \tag{1.4.4}$$

Доведення. За означенням

$$\mathscr{L}\left[t^{-\beta}\right](\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta}. \tag{1.4.5}$$

Зробимо заміну змінних: $\eta t = \xi$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\xi/\eta$. Тоді

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} &= \int_0^\infty e^{-\xi}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta}\frac{1}{\eta}\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \eta^{\beta-1}\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{-\beta}\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \eta^{\beta-1}\Gamma(1-\beta).\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

□

1.4.2 Перетворення Лапласа дробового інтеграла і похідної

Лема 1.4.5 (перетворення Лапласа інтеграла дробового порядку)

$$\mathscr{L}\left[I_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^{-\alpha}\mathscr{L}\left[f\right](\eta). \tag{1.4.7}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[I_0^\alpha f\right](\eta) &= \mathscr{L}\left[f \star y_\alpha\right](\eta) = \\ &= \mathscr{L}\left[f\right](\eta) \cdot \mathscr{L}\left[y_\alpha\right](\eta) = \\ &= \mathscr{L}\left[f\right](\eta) \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(1-(1-\alpha)) \cdot \eta^{-\alpha} = \\ &= \eta^{-\alpha} \mathscr{L}\left[f\right](\eta).\end{aligned} \tag{1.4.8}$$

□

Лема 1.4.6 (перетворення Лапласа похідної Рімана-Ліувілля)

$$\mathscr{L}\left[D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \eta^k. \tag{1.4.9}$$

Приклад 1.4.7

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathscr{L}\left[D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - (I_0^{\alpha-1} f)(0). \tag{1.4.10}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[D_0^\alpha f\right](\eta) &= \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} I_0^{1-\alpha} f\right](\eta) = \\ &= \eta \cdot \mathscr{L}\left[I_0^{1-\alpha} f\right](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\ &= \eta \cdot \eta^{\alpha-1} \cdot \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\ &= \eta^\alpha \cdot \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0).\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

□

Лема 1.4.8 (перетворення Лапласа похідної Катупо)

$$\mathscr{L}\left[{}^\star\!D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \cdot \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \cdot \eta^{\alpha-k-1}. \tag{1.4.12}$$

Приклад 1.4.9

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathscr{L}\left[{}^\star\!D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - \eta^{\alpha-1} f(0). \tag{1.4.13}$$

Вправа 1.4.10. Довести.

1.4.3 Теорема Таубера і наслідок з неї

Лема 1.4.11 (перетворення Лапласа сталої)
$\mathscr{L}[c](\eta) = c/\eta$.

Лема 1.4.12 (перетворення Лапласа множника-експоненти)
$\mathscr{L}[e^{pt}f(t)](\eta) = \mathscr{L}[f](\eta - p)$.

Нагадаємо, що раніше ми з'ясували, що $\mathscr{L}\left[t^{-\beta}\right](\eta) = \Gamma(1-\beta)\cdot\eta^{\beta-1}$.

Теорема 1.4.13 (Таубера)
Нехай $-\beta > -1$, f монотонна при великих t (тобто вона монотонна на деякому проміжку вигляду $[t_0, +\infty)$). Тоді $f(t) \sim t^{-\beta}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}[f](\eta) \sim \Gamma(1-\beta)\cdot\eta^{\beta-1}$ при $\eta \downarrow 0$.

Зауваження 1.4.14 — Тут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ означає, що $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Наслідок 1.4.15
Нехай $0 < \alpha < 1$ і f монотонна при великих t, $f \geqslant 0$ на $[0, +\infty)$ і $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Тоді $\forall A > 0$: $f(t) \sim \alpha A\cdot t^{-\alpha-1}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}[f](\eta) = 1 - A\cdot\Gamma(1-\alpha)\cdot\eta^{\alpha} + o(n^{\alpha})$ при $\eta \downarrow 0$.

Доведення. Розглянемо функцію
$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.4.14}$$
Зауважимо, що $F'(t) = -f(t)$.

Вправа 1.4.16. Доведіть, що за наших припущень
$$f(t) \sim A\cdot\alpha\cdot t^{-\alpha-1} \iff F(t) \sim A\cdot t^{-\alpha}. \tag{1.4.15}$$

Розглянемо
$$\mathscr{L}[F](\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta t}\int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \tag{1.4.16}$$
Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(s)\int_0^{s} e^{-\eta t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s &= \int_0^{+\infty} f(s)\cdot\frac{1-e^{-\eta s}}{\eta}\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{\eta}\left(1 - \int_0^{+\infty} f(s)e^{-\eta s}\,\mathrm{d}s\right) = \\ &= \frac{1-\mathscr{L}[f](\eta)}{\eta}.\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Звідси
$$\mathscr{L}[f](\eta) = 1 - \eta\cdot\mathscr{L}[F](\eta). \tag{1.4.18}$$

Тепер можемо записати

$$
\begin{aligned}
f(t) \underset{t\to\infty}{\sim} A\cdot\alpha\cdot t^{-\alpha-1} \iff{}& F(t) \underset{t\to\infty}{\sim} A\cdot t^{-\alpha} \iff \\
\iff{}& \mathscr{L}\left[F\right](\eta) \underset{\eta\to 0+}{\sim} A\cdot\Gamma(1-\alpha)\cdot\eta^{\alpha-1} \iff \\
\iff{}& \mathscr{L}\left[F\right](\eta) = A\cdot\Gamma(1-\alpha)\cdot\eta^{\alpha-1} + o(\eta^{\alpha-1}) \iff \\
\iff{}& \mathscr{L}\left[f\right](\eta) = 1 - A\cdot\Gamma(1-\alpha)\cdot\eta^{\alpha} + o(\eta^{\alpha}).
\end{aligned}
\tag{1.4.19}
$$

□