Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

8 жовтня 2019 р.

Зміст

Лема 1.64
$\mathscr{L}[c](\eta) = c/\eta$.

Лема 1.65
$\mathscr{L}[e^{pt}f(t)](\eta) = \mathscr{L}[f(t)](\eta - p)$.

Нагадаємо, що раніше ми з'ясували, що $\mathscr{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1-\beta)\eta^{\beta-1}$.

Теорема 1.66 (Таубера)
Нехай $-\beta > -1$, f монотонна при великих t (тобто вона монотонна на деякому проміжку вигляду $[t_0, +\infty)$). Тоді $f(t) \sim t^{-\beta}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}[f](\eta) = \Gamma(1-\beta)\eta^{\beta-1}$ при $\eta \to 0$.

Зауваження 1.67 — Тут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$ означає, що $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Наслідок 1.68
Нехай $0 < \alpha < 1$ і f монотонна при великих t, $f \geq 0$ на $[0, +\infty)$ і $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Тоді $\forall A > 0$: $f(t) \sim \alpha A t^{-\alpha-1}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha} + o(n^{\alpha})$ при $\eta \to 0+$.

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.71}$$

Зауважимо, що $F'(t) = -f(t)$.

Вправа 1.69. Доведіть, що за наших припущень

$$f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1} \iff F(t) \sim At^{-\alpha}. \tag{1.72}$$

Розглянемо

$$\mathscr{L}[F](\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta t} \int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \tag{1.73}$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(s) \int_0^s e^{-\eta t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s &= \int_0^{+\infty} f(s)\frac{1-e^{-\eta s}}{\eta}\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{\eta}\left(1 - \int_0^{+\infty} f(s)e^{-\eta s}\,\mathrm{d}s\right) = \\ &= \frac{1-\mathscr{L}[f](\eta)}{\eta}.\end{aligned} \tag{1.74}$$

Звідси

$$\mathscr{L}[f](\eta) = 1 - \eta\mathscr{L}[F](\eta). \tag{1.75}$$

Тепер можемо записати

$$\begin{aligned}f(t) \underset{t\to\infty}{\sim} A\alpha t^{-\alpha-1} &\iff F(t) \underset{t\to\infty}{\sim} At^{-\alpha} \iff \\ &\iff \mathscr{L}[F](\eta) \underset{\eta\to 0+}{\sim} A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} \iff \\ &\iff \mathscr{L}[F](\eta) = \Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} + o(\eta^{\alpha-1}) \iff \\ &\iff \mathscr{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha} + o(\eta^{\alpha}).\end{aligned} \tag{1.76}$$

□

2 Моделі аномальної дифузії

Нагадаємо, що класичні рівняння дифузії та теплопровідності зумовлені наступними чинниками:

1) закон збереження кількості речовини/тепла;

2) джерела і стоки;

3) "закон" Фіка/Фур'є — емпірично встановлене для широкого класу процесів твердження про те, що інтенсивність потоку речовини/тепла пропорційна мінус градієнту концентрації речовини/кількості тепла на границі.

Розглянемо тепер інший підхід, який грунтується на випадкових блуканнях з неперервним часом (eng. *CTRW, continuous time random walk*). А саме, нехай $x(t)$ — випадкова величина (координата частинки в момент часу t), а $u(x,t)$ (gпри фіксованому t — щільність координати частинки).

Параметри моделі:

1) $u_0(x)$ — щільність початкового (при $t=0$) розподілу;
2) $\psi(t)$ — щільність часу очікування наступного стрибка;
3) $\lambda(x)$ — щільність зміщення.

Означення 2.1. Нехай $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є* називається

$$\mathcal{F}[f](\omega)=\tilde{f}(\omega)=\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t}f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Твердження 2.2

Для перетворення Фур'є справедлива теоерма згортки:

$$\mathcal{F}[f*g](\omega)=\mathcal{F}[f](\omega)\cdot\mathcal{F}[f](\omega), \tag{2.2}$$

де

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.3}$$

Означення 2.3. Нехай $u(x,t):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є-Лапласа* називається

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta)=\tilde{\tilde{u}}(\omega,\eta)=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta t+i\omega x}u(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

Формула 2.4 (Монтрола-Вайса)

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta)=\frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta}\frac{1-\mathscr{L}[\psi](\eta)}{1-\mathscr{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}, \tag{2.5}$$

як тільки $|\mathscr{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)|<1$.

Доведення. Введемо додаткове позначення: $n(t)$ — кількість стрибків до моменту t. $\psi_k(t)$ — щільність часу k-го стрибка. І нарешті, $\lambda_k(x)$ — щільність координати після k-го стрибка.

Запишемо формулу повної ймовірності:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{n(t)=k\}\lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\mathsf{P}\{n(t)\ge k\} - \mathsf{P}\{n(t)\ge k+1\}\Big)\lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi_k(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \psi_{k+1}(s)\,\mathrm{d}s\right)\lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi^{\star k}(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \psi^{\star(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s\right)\cdot (u_0 * \lambda^{*k})(x).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Зауваження 2.5 — Тут ми скористалися тим, що $\psi_k(x) = \psi^{\star k} = \underbrace{\psi \star \psi \star \ldots \star \psi}_{k}$ і $\lambda_k(x) = u_0 * \lambda^{*k} = u_0 * \underbrace{\lambda * \lambda * \ldots * \lambda}_{k}$.

Вправа 2.6. Поновити у конспекті формальне доведення цих фактів.

З урахуванням %перелік_нагадувань%, маємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta}\Big((\mathscr{L}[\psi](\eta)^k - \mathscr{L}[\psi](\eta)^{k+1})\mathcal{F}[u_0](\omega)\mathcal{F}[\lambda](\omega)^k\Big) = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1-\mathscr{L}[\psi](\eta))}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{L}[\psi](\eta)^k \mathcal{F}[\lambda](\omega)^k = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1-\mathscr{L}[\psi](\eta))}{\eta(1-\mathscr{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

□