Теорія рядів Фур'є

Молодцов О. І.*

23 жовтня 2019 р.

Зміст

*Молодцов Олександр Ілліч, `semol2006@ukr.net`

1 Тригонометричний ряд Фур'є

1.1 Визначення тригонометричного ряду Фур'є

Теорема 1.1.1 (інтеграл від періодичної функції)
Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — T-періодична на $\mathbb{R}$ і $f \in L([0,T])$. Тоді $\forall \{a,b\} \subset \mathbb{R}$: $f \in L([a,b])$ і

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.1}$$

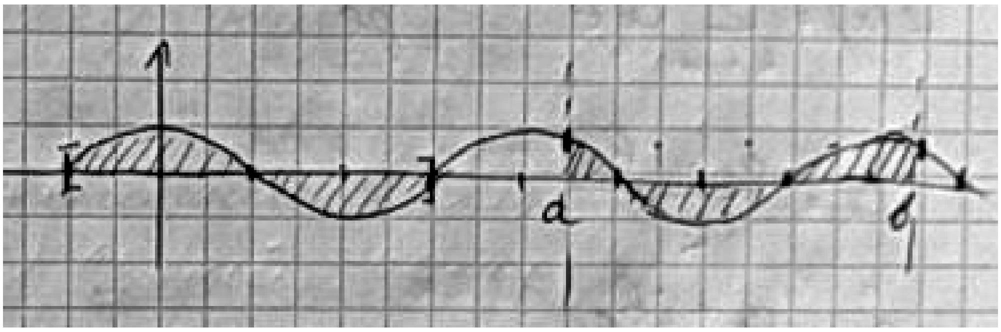

Рис. 1: Геометрична інтерпретація теореми: заштриховані площі рівні

Доведення. Спочатку доведемо, що f інтегровна на $[a,b]$ для довільних a і b.

З періодичності f маємо інтегровність f на сегментах вигляду $[kT,(k+1)T]$ для довільного цілого k:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x+kT)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.2}$$

Зауваження 1.1.2 — Аналогічно можна отримати, що $f \in L([kT,mT])$ для довільних цілих $k < m$, причому

$$\int_{kT}^{mT} f(x)\,\mathrm{d}x = (m-k)\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.1.3}$$

Далі, нехай k — таке, що $kT \le a < (k+1)T$:

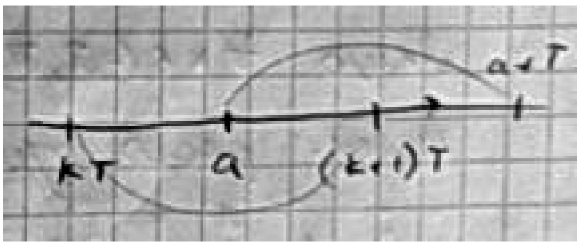

Рис. 2: Ілюстрація вибору k

Тоді, з адитивності інтегралу як функції множини, маємо:

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{(k+1)T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kT}^{a} f(x+T)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{kT}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

а цей інтеграл рівний бажаному. □

Зауваження 1.1.3 — Якщо $f(x)$ — T-періодична, то $f(\frac{Tx}{2\pi})$ — 2π-періодична. Справді:

$$f\left(\frac{T(x+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right). \tag{1.1.5}$$

Означення 1.1.4. $\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$ — *основна тригонометрична система.*

Означення 1.1.5. Довільна скінченна лінійна комбінація функцій основної тригонометричної системи — *тригонометричний многочлен*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.1.6}$$

Формула 1.1.6 (Ейлера)

Виконуються наступні співвідношення:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{1.1.7}$$

З використанням формули Ейлера можемо записати тригонометрчиний многочлен у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right), \tag{1.1.8}$$

або ж у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{1.1.9}$$

де

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \tag{1.1.10}$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \tag{1.1.11}$$

а також $b_0 = 0$.

1.2 Коефіцієнти тригонометричного многочлена

Теорема 1.2.1 (обчислення коефіцієнтів тригонометричного многочлена)
Якщо $\forall x \in (-\pi, \pi)$ виконується (1.1.9), то коефіцієнти c_k цього тригонометричного многочлена обчислюються наступним чином:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx, \quad k = \overline{-n, n}. \tag{1.2.1}$$

Доведення. $\forall m = \overline{-n, n}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\, dx = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)x}\, dx = \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x}\, dx. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

З інтегралів, що знаходяться у сумі лише один не рівний нулеві, а саме той, для якого $k = m$. При $k = m$ відповідний інтеграл дорівнює 2π, а тому

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x}\, dx = \frac{1}{2\pi} c_m (2\pi) = c_m. \tag{1.2.3}$$

$\square$

Наслідок 1.2.2
Якщо $\forall x \in (-\pi, \pi)$ виконується (1.1.9), то коефіцієнти a_k, b_k цього тригонометричного многочлена обчислюються наступним чином:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \tag{1.2.4}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx. \tag{1.2.5}$$

Доведення. Справді, співвідношення (1.1.10), (1.1.11) можна переписати у вигляді

$$a_k = c_k + c_{-k}, \tag{1.2.6}$$

$$b_k = \frac{c_{-k} - c_k}{i}. \tag{1.2.7}$$

Підставляючи у ці співвідношення результат теореми, отримуємо

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-ikx} + e^{ikx})\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{e^{-ikx} + e^{ikx}}{2}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

а також

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{ikx} - e^{-ikx})\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

□

Означення 1.2.3. Функціональний ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ називається *тригонометричним рядом.*

Означення 1.2.4. Якщо коефіцієнти тригонометричного ряду обчислені за формулами (1.2.4), (1.2.5), то ряд називається *тригонометричним рядом Фур'є* функції $f(x)$, а його коефіеінти — *коефіцієнтами Фур'є.*

Зауваження 1.2.5 — У комплексій формі коефіцієнти Фур'є мають вигляд:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2.10}$$

а сам ряд —

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \tag{1.2.11}$$

Вправа 1.2.6. Нехай $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$. Обчисліть її коефіцієнти Фур'є (декілька перших).

1.3 Ряд Фур'є рівномірно неперервної функції

Теорема 1.3.1 (ряд Фур'є рівномірно неперервної функції)
Якщо тригонометричний ряд збігається рівномірно на $\mathbb{R}$ то він є рядом Фур'є своєї суми.

Доведення. Позначимо суму ряду f:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.3.1}$$

Також позначимо її складові f_n:

$$f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1.3.2}$$

Зрозуміло, що $\forall n \in \mathbb{Z} : f_n \in C(\mathbb{R})$. Тому $f \in C(\mathbb{R})$ як сума рівномірно збіжного ряду з неперервних функцій.

Далі $f \in R([-\pi, \pi])$ як неперервна на компакті (тут $R([a, b])$ — клас інтегровних за Ріманом на $[a, b]$ функцій).

Знайдемо коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$. Для цього запишемо

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos kx \tag{1.3.3}$$

Твердження 1.3.2
У припущенні рівномірної збіжності ряду можемо інтегрувати ряд почленно.

А наш ряд (1.3.3) якраз рівномірно збіжний. Справді, розглянемо послідовність частинних сум $S_n(x)$. Умова рівномірної збіжності означає, що $\forall \varepsilon > 0$: $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$ $x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Позначимо $\sigma_n(x) = S_n(x) \cos kx$. Тоді $|f(x) \cos kx - \sigma_n(x)| = |\cos kx| \cdot |f(x) - S_n(x)| \leq |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Повертаємося до пошуку коефіцієнтів Фур'є:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_k}{2}\cos kx \,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx \,\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos kx \,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n-k)x + \cos(n+k)x)\,\mathrm{d}x + \right.$$
$$\left. + \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(n-k)x + \sin(n+k)x)\,\mathrm{d}x\right). \tag{1.3.4}$$

Зрозуміло, що всі доданки у сумах рівні нулеві, окрім $n = k$ у першій сумі, який якраз $\frac{a_n}{2}\cdot 2\pi$. Враховуючи ще $\frac{1}{\pi}$ отримали якраз (1.2.4). Зрозуміло, що розглядаючи аналогічним чином $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x$ отримаємо (1.2.5). А ще, при $k = 0$ маємо $\frac{a_0}{2}$. □

1.4 Збіжність в середньоквадратичному

Розглянемо функціональний ряд:

$$\sum f_n(x), \quad x \in X. \tag{1.4.1}$$

Як і раніше, позначатимемо послідовність частинних сум S_n:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \tag{1.4.2}$$

а також позначимо

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(x). \tag{1.4.3}$$

Означення 1.4.1. Якщо $\forall x \in X\ \exists \lim_{n\to\infty}\sigma_n(x) = f(x)$, то кажуть, що функціональний ряд $S_n(x)$ збігається до $f(x)$ *поточково в середньоарифметичному.*

Означення 1.4.2. Якщо $\exists \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f(x)-\sigma_n(x)| = 0$, то кажуть, що функціональний ряд $S_n(x)$ збігається до $f(x)$ *рівномірно в середньоарифметичному.*

Означення 1.4.3. Якщо $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f_n \in R(X)$ і

$$\exists \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 \,\mathrm{d}x, \tag{1.4.4}$$

то кажуть, що функціональний ряд $S_n(x)$ збігається до $f(x)$ *в середньоквадратичному.*

Повернемося до функції $f \in R([-\pi, \pi])$. Нехай її ряд Фур'є має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.4.5}$$

Зрозуміло, що послідовність часткових сум цього ряду буде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.4.6}$$

Розглянемо тепер довільний тригонометричний многочлен "степеню" не вище n, тобто

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx). \tag{1.4.7}$$

Розглянемо задачу знаходження

$$\operatorname*{argmin}_{T_n} \|f - T_n\| = \sqrt{\int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 \,\mathrm{d}x}. \tag{1.4.8}$$

Логічним припущенням є $T_n = S_n$.

Теорема 1.4.4 (про найкраще середньоквадратичне наближення)
Якщо $f \in R([-\pi, \pi])$, то $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall T_n(x)$:

$$\|f(x) - S_n(x)\| \leq \|f(x) - T_n(x)\|. \tag{1.4.9}$$

Доведення. Розділимо інтеграл з норми на три наступним чином:

$$\begin{aligned} \|f(x) - T_n(x)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big((f(x))^2 - 2f(x)T_n(x) + (T_n(x))^2 \Big) \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Перетворимо другий інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x) \,\mathrm{d}x = \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \,\mathrm{d}x + \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \,\mathrm{d}x = \\ = \pi\alpha_0 a_0 + \pi \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k + b_k). \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Перетворимо третій інтеграл:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi\alpha_0^2 + 2\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx\,\mathrm{d}x + \\ &+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)(\alpha_m\cos mx + \beta_m\sin km) = \\ &= 2\pi\alpha_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2).\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Підставляємо назад і перетворюємо:

$$\begin{aligned}\|f-T_n\|^2 = &\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\pi\alpha_0 a_0 - 2\pi\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \\ &+ 2\pi\alpha_0^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x + \\ &+ \pi\left(\frac{(2\alpha_0-a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big((\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\Big)\right) - \\ &- \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right).\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Перший і третій доданки від α і β не залежать, тому можемо просто прирівняти другий до нуля для досягнення мінімуму всього виразу. Далі нескладно бачити, що $\alpha_0 = a_0/2$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$, тобто $T_n = S_n$. □

1.5 Нерівність Бесселя

Теорема 1.5.1 (нерівність Бесселя)
$\forall f \in R([-\pi,\pi])$ виконується нерівність Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x, \tag{1.5.1}$$

де a_0, a_n, b_n — коефіцієнти Фур'є функції f.

Доведення. Підставимо у (1.4.13) $T_n = S_n$, отримаємо

$$0 \le \|f(x)-S_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,\mathrm{d}x - \pi\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_n^2+b_n^2)\right). \tag{1.5.2}$$

Елементарними перетвореннями нерівності отримуємо

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x. \tag{1.5.3}$$

Це означає, що послідовність часткових сум обмежена (і монотонна), а тому ряд збіжний, а граничним переходом маємо нерівність Бесселя. □

Приклад 1.5.2

Розглянемо функцію

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}. \tag{1.5.4}$$

Для неї $a_i = 0$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Але

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1.5.5}$$

— розбіжний, тому наведений вище ряд не є рядом Фур'є (своєї суми).

Наслідок 1.5.3

Нехай $f \in R([-\pi, \pi])$, a_n, b_n — її коефіцієнти Фур'є. Тоді

1)
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = 0; \tag{1.5.6}$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = 0. \tag{1.5.7}$$

Наслідок 1.5.4 (прямування до 0 косинусів та синусів перетворення Фур'є)

Нехай $f \in R([-\pi, \pi])$, тоді $\forall [a, b] \subset [-\pi, \pi]$:

1)
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x; \tag{1.5.8}$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(n + \tfrac{1}{2})x \, \mathrm{d}x = 0. \tag{1.5.9}$$

Вправа 1.5.5. Доведіть другий пункт.

Зауваження 1.5.6 — Другий наслідок є частинним випадком теореми про косинус та синус перетворення Фур'є.

1.6 Інтегральне зображення частинних

Далі вважаємо функцію f 2π-періодичною, $f \in R([-\pi, \pi])$. Тоді

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\,\mathrm{d}t + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\,\mathrm{d}t \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \right) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Можемо записати останню рівність у вигляді

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.6.2}$$

Означення 1.6.1. $D_n(x-t)$ — *ядро Діріхле.*

$$\begin{aligned} 2 \sin \tfrac{x}{2} D_n(x) &= \sin \tfrac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \tfrac{x}{2} \cos kx = \\ &= \sin \tfrac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\sin(k + \tfrac{1}{2}) - \sin(k - \tfrac{1}{2})x \right) = \\ &= \sin(n + \tfrac{1}{2})x \to 0. \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

З останнього маємо

$$D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2\pi m, \\ n + \frac{1}{2}, & x = 2\pi m. \end{cases} \tag{1.6.4}$$

Властивості 1.6.2 (ядра Діріхле)

1) неперервне: $\forall n \in \mathbb{N}$: $D_n \in C(\mathbb{R})$;
2) обмежене: $|D_n(x)| \le n + \frac{1}{2}$;
3) парне: $D(x) = D(-x)$;
4) періодичне з періодом 2π;
5) $|D_n(x)| \le \frac{\pi}{2|x|}$, $-\pi \le x \le \pi$.

Вправа 1.6.3. Доведіть останню властивість. Підказка: $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y) D_n(-y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+t) D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \Big(f(x+t) + f(x-t) \Big) D_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

Якщо підставити сюди $f \equiv 1$, то отримаємо $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2$, $a_n = b_n = 0$, тобто $S_n \equiv 1$. Отже,

$$\int_0^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{1.6.7}$$

1.7 Принцип локалізації Рімана

Теорема 1.7.1 (принцип локалізації Рімана)
Якщо f — 2π-періодична, і $f \in R([-\pi, \pi])$, то збіжність/розбіжність її ряду Фур'є у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ залежить лише від "поведінки" f в околі точки x_0.

Доведення. Нехай $\delta \in (0, \pi)$, тоді

$$\begin{aligned} S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Позначимо

$$I_n(x_0) = \int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\delta}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t. \tag{1.7.2}$$

Якщо тепер взяти $F(t) = \frac{f(x_0+t)}{2\sin\frac{t}{2}}$, то $F \in R([\delta, \pi])$, а тому, за другим наслідком $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, тобто з трьох інтегралів вище лишається лише середній, "локальний". $\square$

1.8 Достатні умови збіжності

Означення 1.8.1. $x_0 \in D_f$ називається *регулярною точкою функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ якщо функція має скінченні односторонні похідні:

$$\exists f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R} \tag{1.8.1}$$

і

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}. \tag{1.8.2}$$

Означення 1.8.2. Кажуть, що функція f задовольняє у точці x_0 *умову Діні*, якщо $\exists h > 0$ таке, що обидва невласні інтеграли другого роду

$$\int_0^h \frac{|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)|}{t}\,\mathrm{d}t \tag{1.8.3}$$

є збіжними.

Теорема 1.8.3 (ознака Діні збіжності тригонометричного ряду Фур'є)
Якщо $f \in R([-\pi, \pi])$ — 2π-періодична і задовольняє у регулярній точці x_0 умову Діні, то тригонометричний ряд Фур'є функції f у точці x_0 збігається до $f(x_0)$.

Доведення. Нам необхідно показати, що послідовність часткових сум $S_n(x_0) \to f(x_0)$. З одного боку, можна записати, що

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t))D_n(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.8.4}$$

а з іншого

$$f(x_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0+0)+f(x_0-0))D_n(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.8.5}$$

Розглянемо тепер різницю

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0+t)-f(x_0+0))D_n(t)\,\mathrm{d}t + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0-t)-f(x_0-0))D_n(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.8.6}$$

Нагадаємо, що ми хочемо показати, що вираз вище $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

З умови Діні можна записати

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0,h) : \quad \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}\,\mathrm{d}t < \varepsilon. \tag{1.8.7}$$

А тоді можемо розбити кожний з двох попередніх інтегралів на дві частини і оцінити кожну окремо. Проробимо ці дії для інтегралу з $f(x_0+t)-f(x_0+0)$, для другого все буде аналогічно:

$$\int_0^\pi (f(x_0+t)-f(x_0+0))D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\delta (f(x_0+t)-f(x_0+0))D_n(t)\,\mathrm{d}t + \\ + \int_\delta^\pi (f(x_0+t)-f(x_0+0))D_n(t)\,\mathrm{d}t = A_n(\delta) + \beta_n(\delta). \tag{1.8.8}$$

Оцінимо $|A_n(x_0)|$:

$$|A_n(x_0)| \le \int_0^\delta |f(x_0+t)-f(x_0+0)||D_n(t)|\,\mathrm{d}t \le \\ \le \frac{\pi}{2}\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{|t|}\,\mathrm{d}t < \frac{\pi\varepsilon}{2}. \tag{1.8.9}$$

Оцінимо $|\beta_n(x_0)|$:

$$|\beta_n(x_0)| = \int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\tfrac{1}{2})t\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{1.8.10}$$

за однією із доведених властивостей ядра Діріхле. □

1.9 Умова і ознака збіжності Гьольдера

Означення 1.9.1. Кажуть, що $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у точці x_0 задовольняє умову Гьольдера (Hölder) порядку α зі сталою m якщо $\exists \delta > 0$: $\forall t \in (0,\delta)$:

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)| \le m \cdot t^\alpha. \tag{1.9.1}$$

Теорема 1.9.2 (ознака Гьольдера збіжності тригонометрчиного ряду Фур'є)
Якщо $f \in R([-\pi, \pi])$ — 2π-періодична і задовольняє у регулярній точці x_0 умову Гьольдера з $\alpha > 0$, то ряд Фур'є функції f у точці x_0 зігається до $f(x_0)$.

Доведення. З умови Гьольдера одразу отримуємо

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{t} \right| \leq \frac{m \cdot t^\alpha}{t} = \frac{m}{t^{1-\alpha}}. \tag{1.9.2}$$

Але $1 - \alpha < 1$, і тому інтеграл з умови Діні збіжний, тобто можна скористатися ознакою Діні. □

Наслідок 1.9.3
Якщо x_0 — точка розриву першого роду функції f і f задовольняє умову Гьольдера в x_0, то її ряд Фур'є у цій точці збігається до

$$\frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{2}. \tag{1.9.3}$$

Будемо позначати

$$f'_\pm(x_0 \pm 0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{t}. \tag{1.9.4}$$

Теорема 1.9.4 (ознака збіжності ряду Фур'є функції з узагальненими односторонніми похідними)
Нехай $f \in R([-\pi, \pi])$ — 2π-періодична, і має скінченні узагальнені односторонні похідні, тоді

1) якщо x_0 — регулярна, то ряд Фур'є збінається до $\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$;

2) якщо $\exists f'(x_0)$ то ряд Фур'є збігається до $f(x_0)$.

Доведення. Зі скінченності узагальнених односторонніх похідних маємо

$$\exists \delta > 0 : \forall t \in (0, \delta) \quad \frac{|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)|}{t} \leq m. \tag{1.9.5}$$

А далі з ознаки Гьольдера випливає збіжність. □

Теорема 1.9.5 (ознака збіжності ряду Фур'є кусково-гладкої функції)
Якщо f — кусково-гладка на $[-\pi, \pi]$, 2π-періодична функція, то її ряд Фур'є у точці x_0 збігається до

1) $f(x_0)$ якщо f неперервна в x_0;
2) $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ якщо f має розрив першого роду у точці x_0.

Нехай f — $2T$-періодична. Тоді можна записати

$$\frac{a_0}{2} + \sum \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right), \tag{1.9.6}$$

де

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} \, dx. \tag{1.9.7}$$

Причому, якщо f — парна, то $b_n = 0$, а

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} \, dx. \tag{1.9.8}$$

Приклад 1.9.6
$f(x) = x$ розвинути в ряд Фур'є на $(0, 1)$ по:

1) $\sin$;
2) $\cos$;
3) $\sin, \cos$.

У всіх пунктах намалювати графік суми ряду Фур'є, який вийде.

Розв'язання. $2T$-періодично продовжуємо на $[-1, 1]$ непарним чином, тоді $b_n = \ldots = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$.

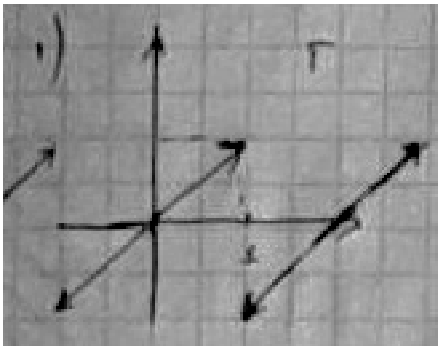

Рис. 3: Графік суми ряду Фур'є такий же як і початкової функції, що ілюструє істинність попередньої теореми

1.10 Рівномірна збіжність

Теорема 1.10.1 (про рівномірну збіжність ряду Фур'є)
Нехай функція f неперервна, кусково-гладка на проміжку $[-\pi, \pi]$ і $f(-\pi) = f(\pi)$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається на цьому проміжку до f рівномірно.

Доведення. Скористаємося ознакою Вейєрштрасса. Наш функціональний ряд мажорується наступним чином:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \prec \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n). \tag{1.10.1}$$

Досліджуємо останній числовий ряд починаючи з $n = 1$ (збіжність/розбіжність ряду не залежить від сталої a_0):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\sin nx = \ldots \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = -\frac{b_n'}{n}, \end{aligned} \tag{1.10.2}$$

де $b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$ — b_n для функції f'. Аналогічно,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\cos nx = \ldots \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{a_n'}{n}, \end{aligned} \tag{1.10.3}$$

де $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ — a_n для функції f'.

Поєднуючи, маємо

$$|a_n| + |b_n| = \tfrac{1}{n}\left(|a_n'| + |b_n'|\right). \tag{1.10.4}$$

Далі

$$\tfrac{1}{n}\cdot|a_n'| + \tfrac{1}{n}\cdot|b_n'| \le \tfrac{1}{2}\left((a_n')^2 + \tfrac{1}{n^2}\right) + \tfrac{1}{2}\left((b_n')^2 + \tfrac{1}{n^2}\right) = \tfrac{1}{2}\left((a_n')^2 + (b_n')^2\right) + \tfrac{1}{n^2}. \tag{1.10.5}$$

Остаточно, $f' \in R([-\pi, \pi])$, тому для неї виконується нерівність Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n')^2 + (b_n')^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x. \tag{1.10.6}$$

Тому $\sum\left((a_n')^2 + (b_n')^2\right) < \infty$. Враховуючи, що ряд $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, тобто також збіжний, отримуємо збіжність досліджуваного числового ряду. □

1.11 Швидкість збіжності

Теорема 1.11.1 (про зв'язок степеню гладкості і швидкості збіжності ряду Фур'є) Якщо $f \in C^{(m)}([-\pi, \pi])$ і $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$, $k = \overline{0, m}$ і $f^{(m+1)}$ кусково-неперервна на $[-\pi, \pi]$, то виконуються співвідношення

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), \tag{1.11.1}$$

а також

$$\sum n^k \left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty, \quad k = \overline{0, m}. \tag{1.11.2}$$

Доведення. Аналогічно доведенню попередньої теореми, багатократно інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \ldots = \\ &= \pm \frac{1}{n^{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{Bmatrix} \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.11.3}$$

Аналогічним чином можна отримати наступне співвідношення

$$b_n = \pm \frac{1}{n^{m+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) \begin{Bmatrix} \sin nx \\ \cos nx \end{Bmatrix} \mathrm{d}x \tag{1.11.4}$$

Звідси маємо

$$|a_n| = \begin{Bmatrix} \dfrac{\left|a_n^{(m+1)}\right|}{n^{m+1}} \\ \\ \dfrac{\left|b_n^{(m+1)}\right|}{n^{m+1}} \end{Bmatrix}, \quad |b_n| = \begin{Bmatrix} \dfrac{\left|b_n^{(m+1)}\right|}{n^{m+1}\pi} \\ \\ \dfrac{\left|a_n^{(m+1)}\right|}{n^{m+1}\pi} \end{Bmatrix}. \tag{1.11.5}$$

Поєднучи, отримуємо

$$|a_n| + |b_n| = \frac{1}{n^{m+1}} \left(\left|a_n^{(m+1)}\right| + \left|b_n^{(m+1)}\right|\right) \tag{1.11.6}$$

$f^{(m+1)} \in R([-\pi, \pi])$, тому для неї виконується нерівність Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n^{(m+1)}\right)^2 + \left(b_n^{(m+1)}\right)^2\right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f^{(m+1)}(x)\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{1.11.7}$$

Тому $a_n^{(m+1)}$, $b_n^{(m+1)} \to 0$, тобто $a_n^{(m+1)}$, $b_n^{(m+1)} = o(1)$,

$$a_n, b_n = \frac{o(1)}{n^{m+1}} = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right). \tag{1.11.8}$$

Вправа 1.11.2. Довести, що

$$\sum n^m \left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty \tag{1.11.9}$$

аналогічним чином.

□

Зауваження 1.11.3 — Збіжність рядів

$$\sum n^k \left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty, \quad k = \overline{0, m} \tag{1.11.10}$$

означає, що ряд Фур'є можна почленно диференціювати m разів, і він буде рівномірно збігатися до m-ої похідної.

Твердження 1.11.4
n-залишок ряду Фур'є має асиптотику $O\left(\frac{1}{n^{m+1/2}}\right)$.

Доведення. Прості перетворення:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right| \leq \\
&\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(|a_n| + |b_n|\right) = \\
&= \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^{(m+1)}} \left(\left|a_n^{(m+1)}\right| + \left|b_n^{(m+1)}\right|\right) \overset{\text{CS}}{\leq} \\
&\leq \sqrt{\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m+2}}} \cdot \sqrt{2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\left(a_n^{(m+1)}\right)^2 + \left(b_n^{(m+1)}\right)^2\right)} \leq \\
&\leq \sqrt{\int_{n_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2m+2}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f^{(m+1)}(x)\right)^2 \mathrm{d}x} = \\
&= \sqrt{\frac{A}{n_0^{2m+1}}} = O\left(\frac{1}{n^{m+1/2}}\right).
\end{aligned} \tag{1.11.11}$$

□

2 Інтеграл та перетворення Фур'є

2.1 Визначення інтегралу Фур'є

Означення 2.1.1. Невласний інтеграл

$$\int_0^{\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.1}$$

називається *тригонометрчиним інтегралом.*

Якщо f абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty, \tag{2.1.2}$$

то, виходячи з порівняльних ознак

$$|f(x)\cos\lambda x|, |f(x)\sin\lambda x| \le |f(x)|, \tag{2.1.3}$$

отримуємо, що функції

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x, \tag{2.1.4}$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x, \tag{2.1.5}$$

$$\tag{2.1.6}$$

визначені для довільного λ на $[0, \infty)$.

Означення 2.1.2. Якщо f абсолютно збіжна на $\mathbb{R}$, то

$$\int_0^{\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.7}$$

називається *інтегралом Фур'є* якщо $a(\lambda), b(\lambda)$ обчислюються за формулами вище.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\cos\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\lambda = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\lambda. \tag{2.1.8}$$

Твердження 2.1.3 (ознака Діні збіжності інтегралу Фур'є)

Якщо f абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$ і $\forall x \in \mathbb{R}$ вона задовольняє умови Діні, то її інтеграл Фур'є збігається в кожній точці $\mathbb{R}$ до числа $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Доведення. Використаємо отримане вище зображення ряду Фур'є. Нам небохідно показати, що

$$\exists \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^A \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\lambda \overset{?}{=} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \tag{2.1.9}$$

Позначимо виписану вище функцію як $\mathcal{J}(A)$. Змінимо в ній порядок інтегрування, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(A) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_0^A \cos\lambda(t-x)\,\mathrm{d}\lambda \right) \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{1}{t-x} \sin\lambda(t-x) \Big|_0^A \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Вправа 2.1.4. Завершити доведення.

□