Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

8 жовтня 2019 р.

Зміст

1.4 Перетворення Лапласа

1.4.1 Допоміжні твердження про перетворення Лапласа

Означення 1.4.1. Нехай $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, тоді

$$\mathscr{L}\left[f\right](\eta) = \overline{f}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.4.1}$$

Лема 1.4.2 (перетворення Лапласа похідної)

$$\mathscr{L}\left[f'\right](\eta) = \eta \cdot \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - f(0). \tag{1.4.2}$$

Доведення. Інтегруємо частинами. □

Лема 1.4.3 (перетворення Лапласа згортки)

$$\mathscr{L}\left[f \star g\right](\eta) = \mathscr{L}\left[f\right](\eta) \cdot \mathscr{L}\left[g\right](\eta). \tag{1.4.3}$$

Доведення. Змінюємо порядок інтегрування. □

Лема 1.4.4 (перетворення Лапласа степеневої функції)

$$\mathscr{L}\left[t^{-\beta}\right](\eta) = \Gamma(1-\beta) \cdot \eta^{\beta-1}. \tag{1.4.4}$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, `andriy.hul@gmail.com`

Доведення. За означенням

$$\mathscr{L}\left[t^{-\beta}\right](\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta}. \tag{1.4.5}$$

Зробимо заміну змінних: $\eta t = \xi$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\xi/\eta$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} &= \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta} \frac{1}{\eta}\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \eta^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{-\beta}\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \eta^{\beta-1}\Gamma(1-\beta). \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

□

1.4.2 Перетворення Лапласа дробового інтеграла і похідної

Лема 1.4.5 (перетворення Лапласа інтеграла дробового порядку)

$$\mathscr{L}\left[I_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^{-\alpha} \mathscr{L}\left[f\right](\eta). \tag{1.4.7}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[I_0^\alpha f\right](\eta) &= \mathscr{L}\left[f \star y_\alpha\right](\eta) = \\ &= \mathscr{L}\left[f\right](\eta) \cdot \mathscr{L}\left[y_\alpha\right](\eta) = \\ &= \mathscr{L}\left[f\right](\eta) \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \Gamma(1-(1-\alpha)) \cdot \eta^{-\alpha} = \\ &= \eta^{-\alpha} \mathscr{L}\left[f\right](\eta). \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

□

Лема 1.4.6 (перетворення Лапласа похідної Рімана-Ліувілля)

$$\mathscr{L}\left[D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \eta^k. \tag{1.4.9}$$

Приклад 1.4.7

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathscr{L}\left[D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - (I_0^{\alpha-1} f)(0). \tag{1.4.10}$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[D_0^\alpha f\right](\eta) &= \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} f\right](\eta) = \\ &= \eta \cdot \mathscr{L}\left[I_0^{1-\alpha} f\right](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\ &= \eta \cdot \eta^{\alpha-1} \cdot \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\ &= \eta^\alpha \cdot \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0). \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

□

Лема 1.4.8 (перетворення Лапласа похідної Катупо)

$$\mathscr{L}\left[{}^{\star}D_0^{\alpha} f\right](\eta) = \eta^{\alpha} \cdot \mathscr{L}\left[f\right](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \cdot \eta^{\alpha-k-1}. \tag{1.4.12}$$

Приклад 1.4.9
Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathscr{L}\left[{}^{\star}D_0^{\alpha} f\right](\eta) = \eta^{\alpha}\mathscr{L}\left[f\right](\eta) - \eta^{\alpha-1}f(0). \tag{1.4.13}$$

Вправа 1.4.10. Довести.

1.4.3 Теорема Таубера і наслідок з неї

Лема 1.4.11 (перетворення Лапласа сталої)
$\mathscr{L}\left[c\right](\eta) = c/\eta$.

Лема 1.4.12 (перетворення Лапласа множника-експоненти)
$\mathscr{L}\left[e^{pt}f(t)\right](\eta) = \mathscr{L}\left[f\right](\eta - p)$.

Нагадаємо, що раніше ми з'ясували, що $\mathscr{L}\left[t^{-\beta}\right](\eta) = \Gamma(1-\beta)\cdot\eta^{\beta-1}$.

Теорема 1.4.13 (Таубера)
Нехай $-\beta > -1$, f монотонна при великих t (тобто вона монотонна на деякому проміжку вигляду $[t_0, +\infty)$). Тоді $f(t) \sim t^{-\beta}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}\left[f\right](\eta) \sim \Gamma(1-\beta)\cdot\eta^{\beta-1}$ при $\eta \downarrow 0$.

Зауваження 1.4.14 — Тут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ означає, що $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Наслідок 1.4.15
Нехай $0 < \alpha < 1$ і f монотонна при великих t, $f \geqslant 0$ на $[0, +\infty)$ і $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Тоді $\forall A > 0$: $f(t) \sim \alpha A \cdot t^{-\alpha-1}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}\left[f\right](\eta) = 1 - A\cdot\Gamma(1-\alpha)\cdot\eta^{\alpha} + o(n^{\alpha})$ при $\eta \downarrow 0$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.4.14}$$

Зауважимо, що $F'(t) = -f(t)$.

Вправа 1.4.16. Доведіть, що за наших припущень

$$f(t) \sim A \cdot \alpha \cdot t^{-\alpha-1} \iff F(t) \sim A \cdot t^{-\alpha}. \tag{1.4.15}$$

Розглянемо

$$\mathscr{L}\left[F\right](\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta t} \int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \tag{1.4.16}$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(s) \int_0^{s} e^{-\eta t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s &= \int_0^{+\infty} f(s) \cdot \frac{1 - e^{-\eta s}}{\eta}\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{\eta}\left(1 - \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\eta s}\,\mathrm{d}s\right) = \\ &= \frac{1 - \mathscr{L}\left[f\right](\eta)}{\eta}.\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Звідси

$$\mathscr{L}\left[f\right](\eta) = 1 - \eta \cdot \mathscr{L}\left[F\right](\eta). \tag{1.4.18}$$

Тепер можемо записати

$$\begin{aligned}f(t) \underset{t\to\infty}{\sim} A \cdot \alpha \cdot t^{-\alpha-1} &\iff F(t) \underset{t\to\infty}{\sim} A \cdot t^{-\alpha} \iff \\ &\iff \mathscr{L}\left[F\right](\eta) \underset{\eta\to 0+}{\sim} A \cdot \Gamma(1-\alpha) \cdot \eta^{\alpha-1} \iff \\ &\iff \mathscr{L}\left[F\right](\eta) = A \cdot \Gamma(1-\alpha) \cdot \eta^{\alpha-1} + o(\eta^{\alpha-1}) \iff \\ &\iff \mathscr{L}\left[f\right](\eta) = 1 - A \cdot \Gamma(1-\alpha) \cdot \eta^{\alpha} + o(\eta^{\alpha}).\end{aligned} \tag{1.4.19}$$

□