

Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

13 жовтня 2019 р.

Зміст

1.2	Властивості дробових похідних	1
1.2.1	Властивості похідних Рімана-Ліувілля	2
1.2.2	Властивості похідних за Капуто	6

1.2 Властивості дробових похідних

Приклад 1.18

Знайдемо похідні степеневих функцій.

Розв’язання. Нехай $\beta > -1$, $0 < \alpha < 1$. Тоді

$$D_0^\alpha t^\beta = \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} t^\beta. \quad (1.20)$$

У свою чергу

$$I_0^{1-\alpha} t^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha} ds. \quad (1.21)$$

Нагадаємо

Означення 1.19 (бета-функції).

$$B(a, b) = \int_0^1 \xi^{a-1} (1-\xi)^{b-1} d\xi. \quad (1.22)$$

а також наступну властивість бета-функції:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.23)$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $ds = t d\xi$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t\xi)^\beta t^{-\alpha} (1-\xi)t d\xi &= \\ &= \frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\Gamma(1-\alpha)} B(\beta+1, 1-\alpha) = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha+1}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Лишилося продиференціювати цей інтеграл:

$$\begin{aligned} D_0^\alpha \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha+1} &= \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

де ми скористалися властивістю $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$.

Зауваження 1.20 — Ця формула справедлива і для $\alpha \geq 1$, але умова $\beta > -1$ важлива для збіжності кількох інтегралів, зокрема $\int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha} ds$.

Приклад 1.21

Зокрема, якщо $\alpha \leq \beta \in \mathbb{N}$, то маємо формулу

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} t^\beta = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} t^{\beta-\alpha}. \quad (1.26)$$

Наприклад,

$$\frac{d^2}{dt^2} t^4 = \frac{4!}{2!} t^2. \quad (1.27)$$

Зауваження 1.22 — Зрозуміло також що всі введені нами оператори лінійні.

1.2.1 Властивості похідних Рімана-Ліувілья

Твердження 1.23

На жаль, не виконується наступна властивість

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}. \quad (1.28)$$

Доведення.

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (1.29)$$

Почленно диференціюємо:

$$\begin{aligned} D_0^\alpha e^{\lambda t} &= D_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_0^\alpha (t^k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha} \neq \\ &\neq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^\alpha \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

□

Твердження 1.24 (формула (не) Ньютона-Лейбніца)

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(s) ds = f(t). \quad (1.31)$$

Твердження 1.25 (формула Ньютона-Лейбніца)

$$\int_0^t f'(s) ds = f(t) - f(0). \quad (1.32)$$

Твердження 1.26 (напівгрупові властивості дробових інтегралів)

Нехай $\alpha, \beta > 0$, тоді $I_0^{\alpha+\beta} = I_0^\alpha I_0^\beta$.

Вправа 1.27. Доведіть цю властивість. **Підказка:** за означеннями,

$$I_0^{\alpha+\beta} f = f \star y_{\alpha+\beta} \stackrel{?}{=} f \star (y_\alpha \star y_\beta) \stackrel{?}{=} (f \star y_\alpha) \star y_\beta = I_0^\beta I_0^\alpha f, \quad (1.33)$$

тому достатньо перевірити асоціативність згортки і рівність $y_{\alpha+\beta} = y_\alpha \star y_\beta$.

Доведення. Перевіримо два вищезгаданих твердження:

1) Асоціативність \star отримується “в лоб”:

$$\begin{aligned}
((f \star g) \star h)(t) &= \int_0^t (f \star g)(s) h(t-s) ds = \\
&= \int_0^t \left(\int_0^s f(\xi) g(s-\xi) d\xi \right) h(t-s) ds = \\
&= \int_0^t \int_0^s f(\xi) g(s-\xi) h(t-s) d\xi ds = \\
&= \int_0^t \int_\xi^t f(\xi) g(s-\xi) h(t-s) ds d\xi = \\
&= \int_0^t \int_0^{t-\xi} f(\xi) g(s) h(t-s-\xi) ds d\xi = \\
&= \int_0^t f(\xi) \left(\int_0^{t-\xi} g(s) h(t-\xi-s) ds \right) d\xi = \\
&= \int_0^t f(\xi) (g \star h)(t-\xi) d\xi = \\
&= (f \star (g \star h))(t).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

2) Далі

$$\begin{aligned}
y_\alpha(t) \star y_\beta(t) &= \int_0^t y_\alpha(s) y_\beta(t-s) ds = \\
&= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} (t-s)^{\beta-1} ds = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} ds.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $ds = t d\xi$, отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (\xi t)^{\alpha-1} (1-\xi)^{\beta-1} t^{\beta-1} t d\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{(\alpha-1)+(\beta-1)+1} \int_0^1 \xi^{\alpha-1} (1-\xi)^{\beta-1} d\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1} = \\
&= y_{\alpha+\beta}(t).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

□

Теорема 1.28 (аналог формули (не) Ньютона-Лейбніца)Для $\alpha > 0$

$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = f. \quad (1.37)$$

Доведення. Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, тоді

$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_0^{n-\alpha} I_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_0^n f = f. \quad (1.38)$$

□

Зауваження 1.29 — Тут ми скористалися напівгруповою властивістю.**Твердження 1.30** (аналог формули Ньютона-Лейбніца)Нехай $f, D_0^\alpha f \in L_1([0, T])$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, тоді для $0 < t < T$ маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}. \quad (1.39)$$

Зауваження 1.31 — Тут під $D_0^{-|\beta|}$ маємо на увазі $I_0^{|\beta|}$.**Приклад 1.32**Для $0 < \alpha < 1$ маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.40)$$

Зауваження 1.33 — Тут $(I_0^{1-\alpha} f)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (I_0^{1-\alpha} f)(\varepsilon)$.*Доведення.* Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned} (I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (D_0^\alpha f)(s) ds = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(s) ds \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Виконаємо наступні маніпуляції з виразом що стоїть під похідною:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(t) dt = \\
& = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left((t-s)^\alpha I_0^{1-\alpha} f(s) \Big|_{s=0}^{s=t} + \alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} I_0^{1-\alpha} f(s) ds \right) = \\
& = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^\alpha I_0^{1-\alpha} f = \\
& = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Лишилося всього лише продиференціювати:

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f \right) = f(t) - \frac{t^{\alpha-1} (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.43}$$

□

1.2.2 Властивості похідних за Капуто

Теорема 1.34

Нехай $f \in L_\infty([0, T])$, тобто $\exists M \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \stackrel{\text{a.e.}}{\leq} M$, тоді, як і очікувалося, $({}^*D_0^\alpha I_0^\alpha f)(0) = (I_0^{\alpha*} D_0^\alpha f)(0)$.

а також

Теорема 1.35

Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in AC^n([0, T])$, тоді

$$(I_0^{\alpha*} D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \tag{1.44}$$

Зауваження 1.36 — Ця формула справедлива і для цілих α

Твердження 1.37

Для похідних у загальному випадку не виконується напівгрупова властивість.

Теорема 1.38

Нехай $f, D_0^\beta \in L_1([0, T])$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Тоді

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \sum_{k=0}^{[\beta]-1} (D_0^{\beta-k-1} f)(0) \frac{t^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(-\alpha-k)} \quad (1.45)$$

Приклад 1.39

Зокрема, для $0 < \alpha, \beta < 1$:

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - (I_0^{1-\beta} f)(0) \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \quad (1.46)$$

Доведення. Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned} (D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) &= \left(\frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} D_0^\beta f \right) (t) = \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} I_0^{2-\alpha} D_0^\beta f \right) (t) = \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} I_0^{2-\alpha-\beta} I_0^\beta D_0^\beta f \right) (t) = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} I_0^{2-\alpha-\beta} \left(f(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0) t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) = \\ &= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} D_0^{\alpha+\beta} t^{\beta-1} = \\ &= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha} = \\ &= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

□