Міністерство освіти ти науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №1 на тему:
«Чисельне розв'язування крайових задач математичної фізики.
Проекційні та варіаційні методи»

Виконав студент групи ОМ-4
Скибицький Нікіта

Київ, 2019

Зміст

1 Постановка задачі

1.1 Загальна постановка задачі

Знайти наближений розв'язок наступної задачі проекційним та варіаційним методами: задано рівняння

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\cdot\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)+p(x)\cdot\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+q(x)\cdot u(x)=f(x),\quad a<x<b, \tag{1.1}$$

з крайовими умовами

$$-k(x)\cdot\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+\alpha_1 u(x)=\mu_1,\quad x=a, \tag{1.2}$$

$$k(x)\cdot\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+\alpha_2 u(x)=\mu_2,\quad x=b, \tag{1.3}$$

де

$$\begin{aligned}
k(x) &= k_1\sin(k_2x)+k_3, && (1.4)\\
k(x) &> 0, \\
p(x) &= p_1\cos(p_2x)+p_3, && (1.5)\\
q(x) &= q_1\sin(q_2x)+q_3, && (1.6)\\
q(x) &\geq 0, \\
\alpha_1, \alpha_2 &> 0.
\end{aligned}$$

1.1.1 Зауваження

Задача *модельна*, тому функцію $f(x)$ і константи μ_1, μ_2 виражаємо з відповідних рівностей:

$$f(x)=-(k(x)\cdot u'(x))'+p(x)\cdot u'(x)+q(x)\cdot u(x), \tag{1.7}$$

$$\mu_1=-k(a)\cdot u'(a)+\alpha_1 u(a), \tag{1.8}$$

$$\mu_2=k(b)\cdot u'(b)+\alpha_2 u(b), \tag{1.9}$$

де $u(x)$ — точний розв'язок задачі, функція $u(x)=m_1\sin(m_2x)+m_3$.

1.2 Параметри варіанту

a	b	α_1	α_2	k_1	k_2	k_3	p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3	m_1	m_2	m_3
0	4	4	2	2	3	1	2	1	1	0	2	3	2	2	1

1.3 Методи

Використати проекційний *метод колокацій* та варіаційний *метод Рітца*.

2 Теоретичні відомості

2.0 Аналітичні маніпуляції

Перш за все, виразимо функцію $f(x)$ і константи μ_1, μ_2 з рівностей (1.7)–(1.9):

$$f(x) = 3 + 14\sin(2x) + 4\cos(2x) + 4\cos(3x) - 20\cos(5x), \tag{2.1}$$

$$\mu_1 = 0, \tag{2.2}$$

$$\mu_2 = 6. \tag{2.3}$$

2.0.1 Однорідні крайові умови

Зведемо крайові умови до однорідних. Для цього знайдемо представлення

$$u(x) = \varphi_0(x) + v(x), \tag{2.4}$$

де функція $\varphi_0(x)$ задовольняє неоднорыдним крайовим умовам, а функція $v(x)$ — однорідним крайовим умовам

$$0 = -k(a) \cdot u'(a) + \alpha_1 u(a), \tag{2.5}$$

$$0 = k(b) \cdot u'(b) + \alpha_2 u(b). \tag{2.6}$$

Шукатимемо $\varphi_0(x)$ у вигляді

$$\varphi_0(x) = Cx + D. \tag{2.7}$$

Константи C, D знайдемо із співвідношень (1.2), (1.3). Отримаємо наступну систему:

$$C(\alpha_1 a - k(a)) + \alpha_1 D = \mu_1, \tag{2.8}$$

$$C(\alpha_2 b - k(b)) + \alpha_2 D = \mu_2. \tag{2.9}$$

Її розв'язок

$$C = \texttt{0.7120099335017387}, \quad D = \texttt{0.17800248337543467}. \tag{2.10}$$

2.0.2 Координатна система функцій

В якості системи координатних функцій оберемо:

$$\varphi_1(x) = (x-a)^2(x-c), \tag{2.11}$$

$$\varphi_2(x) = (x-d)(b-x)^2, \tag{2.12}$$

$$\varphi_n(x) = (x-a)^2(b-x)^{n-1}, \quad n \geq 3, \tag{2.13}$$

де c, d — такі константи, що φ_1, φ_2 задовольняють однорідним крайовим умовам (2.5), (2.6), а саме

$$c = b + \frac{k(b)(b-a)}{2k(b) + \alpha_2(b-a)}, \tag{2.14}$$

$$d = a - \frac{k(a)(b-a)}{2k(a) + \alpha_1(b-a)}. \tag{2.15}$$

В результаті обчислень отримуємо:

$$c = \texttt{3.96274583524315}, \quad d = \texttt{-0.2222222222222222}. \tag{2.16}$$

2.1 Метод колокацій

Розглянемо загальне рівняння

$$Au = f, \tag{2.1.1}$$

де $A : E \to F$. Замінимо його на рівняння

$$P_n(Au_n) = P_n f, \tag{2.1.2}$$

або на

$$P_n(Au_n - f) = 0. \tag{2.1.3}$$

Координатну систему візьмемо $\{\varphi_i\} \in D(A) \subseteq E$, а проекційну — $\{\psi_i\} \in F^\star$. Тоді можемо останню рівність переписати у вигляді

$$\psi_j(Au_n - f) = 0, \tag{2.1.4}$$

або ж, що те саме,

$$\psi_j(Au_n) = \psi_j f. \tag{2.1.5}$$

Шукачи розв'язок у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \tag{2.1.6}$$

матимемо

$$\psi_j\left(A\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i\right)\right) = \psi_j f, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.1.7}$$

або ж, враховучи лінійність A і ψ_j,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_j(A\varphi_i) = \psi_j f, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.1.8}$$

У матричному вигляді, систему вище можна записати як

$$\begin{pmatrix} \psi_1(A\varphi_1) & \psi_1(A\varphi_2) & \cdots & \psi_1(A\varphi_n) \\ \psi_2(A\varphi_1) & \psi_2(A\varphi_2) & \cdots & \psi_2(A\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(A\varphi_1) & \psi_n(A\varphi_2) & \cdots & \psi_n(A\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 f \\ \psi_2 f \\ \vdots \\ \psi_n f \end{pmatrix} \tag{2.1.9}$$

Якщо взяти у якості $\{\psi_j\}$ систему функцій Чебишова, то отримаємо, що визначник цієї системи не рівний нулеві.

2.2 Метод Рітца

Нехай, як і раніше, ми розв'язуємо рівняння

$$Au = f, \tag{2.2.1}$$

де $A : H \to H$, H — дійсний гільбертовий простір. Нагадаємо, що ми ставимо цій задачі й відповідність задачу мінімізації

$$\inf_{u \in D(A)} \Phi(u) = \Phi(u^\star) = u_0. \tag{2.2.2}$$

Нехай також виконуються певні припущення, необхідні для збіжності, а саме:

1. A — симетричний (самоспряжений), тобто

$$(Au, v) = (u, Av). \tag{2.2.3}$$

2. A — додатно визначений, тобто

$$\exists \mu > 0 : \forall u \in D(A) \quad (Au, u) \geq \mu \|u\|^2 (u, Av). \tag{2.2.4}$$

3. $f \in R(A)$ — область значень оператора A.

2.2.1 Мінімізаційна послідовність

1. Як і раніше, нехай $\{\varphi_i\} \in D(A)$ — повна;
2. Ввводимо простір $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$;
3. Розв'язок шукаємо у вигляді $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$.

Наш загальний функціонал Рітца

$$\inf_{u \in H_n} \Phi(u) = \Phi(u_n) \tag{2.2.5}$$

з функцією G вигляду

$$G(u_n, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_n, \tag{2.2.6}$$

або, що те саме у наших умовах,

$$G(u_n, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.2.7}$$

можна буде записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.2.8}$$

або, що те саме в наших умовах,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.2.9}$$

Мінімізаційна послідовність звелася до тієї ж системи що й у методі Бубнова-Гальоркіна, то які ж його переваги?

2.3 Метод Рітца в H_A

Справа в тому, що якщо оператор A задовольняє умовам (2.2.3) і (2.2.4), то можна ввести енергетичний простір H_A у якому скалярний добуток і норму введено за формулами

$$(u, v)_A = (Au, u), \quad \|u\|_A^2 = (u, u)_A. \tag{2.3.1}$$

Можна перевірити, що ці функції задовольняють аксіомам скалярного добутку та норми. Таким чином H_A — гільбертовий простір, ширший за $D(A)$.

Тоді задачі (2.2.1) ставимо у відповідність задачу

$$\inf_{u \in H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n), \tag{2.3.2}$$

для якої мають місце аналогічні результати:

Теорема 1. *Виконуються наступні співвідношення:*

1.

$$\Phi(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \|u - u^\star\|_A^2 - \|u^\star\|_A^2, \tag{2.3.3}$$

2.

$$\inf_{u \in H_n \subset H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n) = \Phi_0. \tag{2.3.4}$$

З останнього співвідношення маємо

$$(Au_n, v) = (f, v), \quad v \in H_n, \tag{2.3.5}$$

тоді

$$(Au_n - Au^\star, v) = 0, \quad v \in H_n, \tag{2.3.6}$$

або ж, що те саме,

$$(u_n - u^\star, v)_A = 0, \quad v \in H_n. \tag{2.3.7}$$

Це означає, що

$$u = P_{H_n} u^\star. \tag{2.3.8}$$

Теорема 2. *Нехай координатна система $\{\varphi_i\}$ є повною в H_A, тоді при $n \to \infty$ мінімізуюча послідовність $\{u_n\}$ метода Рітца збігається до розв'язку задачі (2.2.1) в нормі простору H_A.*

Приклад. $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n-1}$ — так звані штафетини:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{2.3.9}$$

А також φ_0, φ_n — напівштафетини, у яких обрізані половини, які виходять за $[x_0, x_n]$,

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_i}, & x_0 \le x \le x_1, \\ 0, & x_1 \le x. \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & x_{n-1} \le x, \\ \frac{x - x_{n-1}}{h_i}, & x_{n-1} \le x \le x_n. \end{cases}$$

Графіки цих функцій мають вигляд

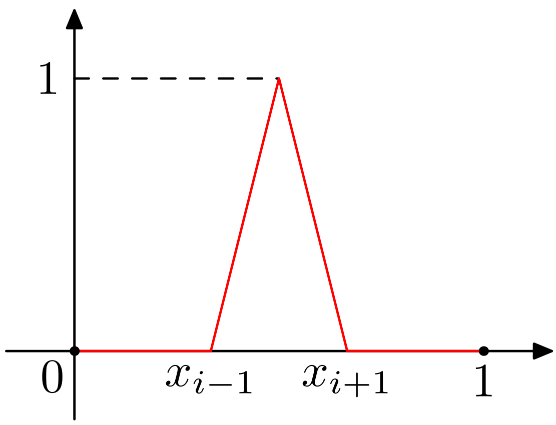


Рис. 1: "штафетина" від x_{i-1} до x_{i+1}.

3 Чисельне моделювання

Було використано мову програмування `python` і бібліотеки `sympy` (для символьних обчислень), `numpy` (для ефективного розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що виникають, а також `matplotlib` (для побудови графіків).

3.1 Похибки

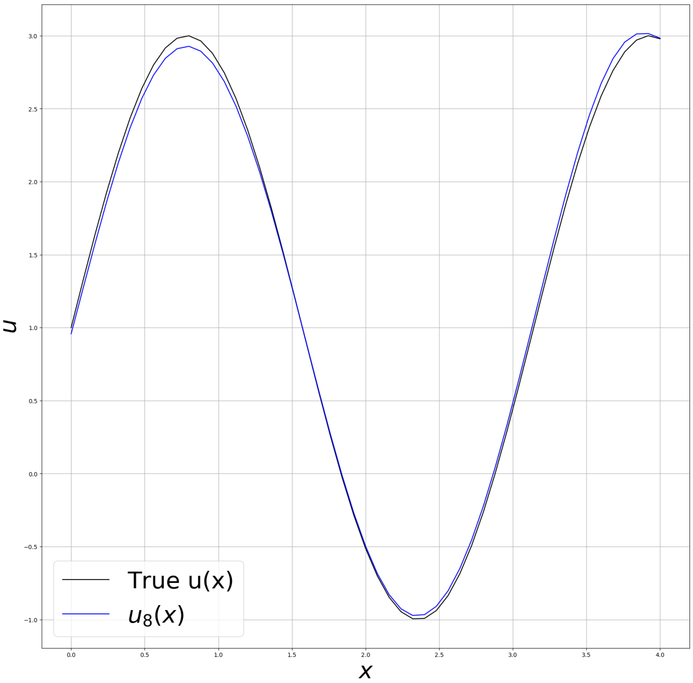
Відхилення від точного розв'язку в нормі

$$\|f\| = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x : \tag{3.1.1}$$

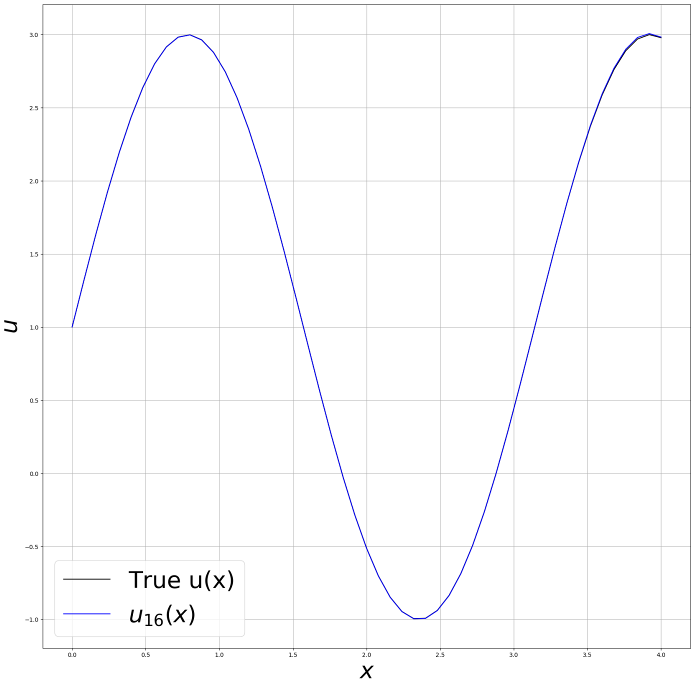
- Колокацій, 8 функцій: `0.002511601887423443`;
- Колокацій, 16 функцій: `1.1242967189129815e-05`;
- Рітца, 4 функції: `0.5227343590104221`;
- Рітца, 8 функцій: `1.0763937437329292e-06`.

Бачимо, що метод Рітца збігається швидше.

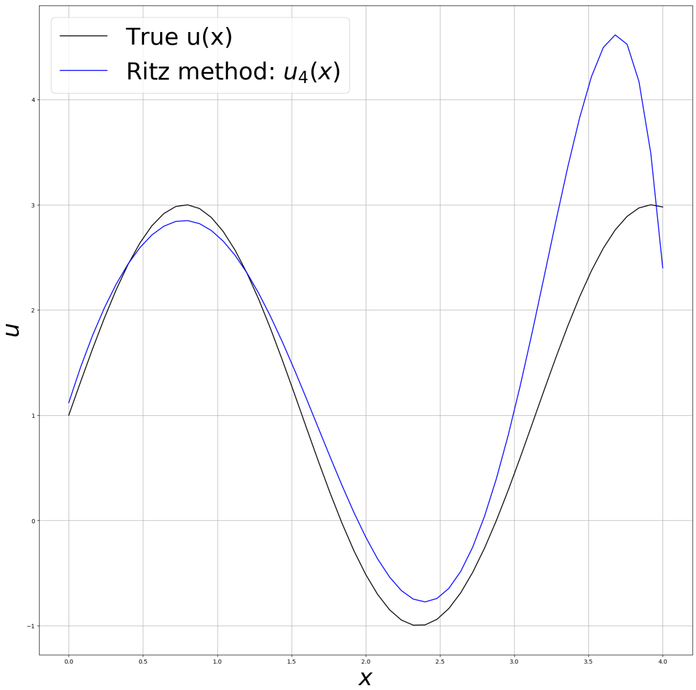
3.2 Графіки



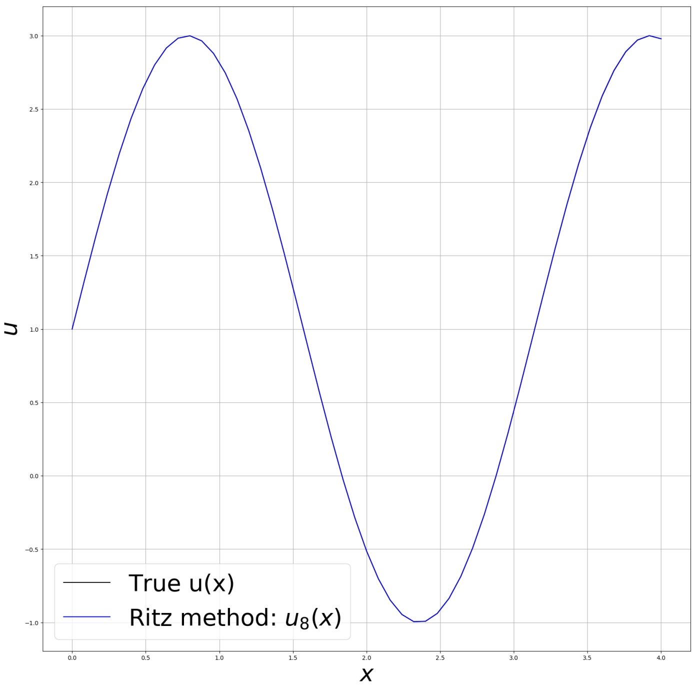
(а) Колокацій, 8 функцій



(б) Колокацій, 16 функцій



(в) Рітца, 4 функції



(г) Рітца, 8 функцій