

# Чисельні методи математичної фізики

Риженко А. І.\*

24 вересня 2019 р.

## Зміст

2.4	Прямий метод	1
2.5	Метод колокацій	2
3	Варіаційні методи розв’язування крайових задач	4
3.1	Загальні положення задачі мінімізації функціоналів	4
3.1.1	Процес Рітца побудови мінімізаційної послідовності	8

## 2.4 Прямий метод

Нагадаємо попередню лекцію: задано рівняння

$$Au = f, \quad (2.4.1)$$

з параметром  $f \in W_2^{-1}$ . Нагадаємо також, що такі умови на праву частину означають, що розв’язок  $u \in W_2^1$ .

### Приклад 2.1

Розглянемо рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b, \quad (2.4.2)$$

з крайовими умовами

$$-ku' + \alpha_1 u = \mu_1, \quad x = a, \quad (2.4.3)$$

і

$$ku' + \alpha_2 u = \mu_2, \quad x = b. \quad (2.4.4)$$

**Розв’язання.** Запишемо

$$(Au, v) = (f, v).$$

---

\*Риженко Андрій Іванович, rai-ku@ukr.net

У явному вигляді маємо

$$\int_a^b (ku'v' - pu'v + quv) dx + \alpha_1 u(a)v(a) + \alpha_2 u(b)v(b) - \mu_1 v(a) - \mu_2 v(b) = \int_a^b f v dx. \quad (2.4.5)$$

Тут ми скористалися формулою інтегрування за частинами:

$$\int_a^b -(ku')' dx = -ku'v|_a^b + \int_a^b ku'v' dx,$$

звідки (а саме з  $ku'v|_{x=a}$  і  $ku'v|_{x=b}$ ) і виникли доданки з  $\alpha_{1,2}$  та  $\mu_{1,2}$ .

## 2.5 Метод колокацій

Розглянемо рівняння

$$Au = f, \quad (2.5.1)$$

де  $A : E \rightarrow F$ , замінюємо на рівняння

$$P_n(Au_n) = P_n f, \quad (2.5.2)$$

або на

$$P_n(Au_n - f) = 0. \quad (2.5.3)$$

Координатну систему візьмемо  $\{\varphi_i\} \in D(A) \subseteq E$ , а проєкційну —  $\{\psi_i\} \in F^*$ . Тоді можемо (2.5.3) переписати у вигляді

$$\psi_j(Au_n - f) = 0,$$

або

$$\psi_j Au_n = \psi_j f.$$

Шукачи розв'язок у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i,$$

матимемо

$$\psi_j \left( A \left( \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) \right) = \psi_j f,$$

або ж, враховучи лінійність,

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_j (A\varphi_i) = \psi_j f, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5.4)$$

Матриця системи вище має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} \psi_1(A\varphi_1) & \psi_1(A\varphi_2) & \cdots & \psi_1(A\varphi_n) \\ \psi_2(A\varphi_1) & \psi_2(A\varphi_2) & \cdots & \psi_2(A\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(A\varphi_1) & \psi_n(A\varphi_2) & \cdots & \psi_n(A\varphi_n) \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

Якщо взяти у якості  $\{\psi_j\}$  систему функцій Чебишова, то отримаємо  $|D| \neq 0$ .

### Приклад 2.2

Нехай  $F = C([a, b])$ , і візьмемо  $\psi_j(f) = f(x_j)$ , де  $x_j$  — множина попарно різних вузлів на  $[a, b]$ .

### Приклад 2.3

Розглянемо рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b,$$

з крайовими умовами

$$u(0) = u(1) = 0.$$

**Розв'язання.** Візьмемо

$$\omega_n = \{x_j = jh, h = 1/n\},$$

тоді шукачи розв'язок у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i,$$

отримаємо систему

$$\sum_{i=1}^n c_i ((-k(x_j)\varphi'_i(x_j)) - p(x_j)\varphi'_i(x_j) + q(x_j)\varphi_i(x_j)) = f(x_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5.6)$$

**Зауваження 2.4** — На практиці метод колокацій збігається ще повільніше ніж метод Бубнова-Гальоркіна, але він зручний в випадках, коли розв'язки мають різні градієнти:



Рис. 1: Покращуємо точність за рахунок скупчення точок  $x_j$  у регіонах де розв'язок має великий градієнт.

### Приклад 2.5

Нехай задано неоднорідну задачу

$$Au \equiv (-ku')' - pu' + qu = f \quad (2.5.7)$$

з умовами

$$u(0) = C, \quad u(1) = D. \quad (2.5.8)$$

**Розв'язання.** Тоді розв'язок шукаємо у вигляді

$$u = v + \varphi_0, \quad (2.5.9)$$

де  $\varphi_0$  — відома функція що задовольняє неоднорідним крайовим умовами, наприклад  $\varphi_0(x) = C + x(D - C)$ . Тоді матимемо

$$Av + A\varphi_0 = f,$$

або ж

$$Av = f - A\varphi_0 = f_1, \quad (2.5.10)$$

з умовами

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (2.5.11)$$

За розв'язком цього рівняння відновлюється розв'язок початкового за формулою  $u_n = v_n + \varphi_0$ .

## 3 Варіаційні методи розв'язування крайових задач

Розглянемо рівняння

$$Au = f, \quad (3.0.1)$$

де  $A : E \rightarrow F$ ,  $E, F$  — пара гільбертових просторів. Припустимо також, що існує і єдиний розв'язок задачі (3.0.1).

Ідея варіаційних методів полягає у тому, що ми будемо зводити задачу (3.0.1) до знаходження мінімуму деякого функціоналу, що відповідає цій задачі, а саме  $\Phi(u) : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\inf_{u \in E} \Phi(u) = \Phi_0. \quad (3.0.2)$$

### 3.1 Загальні положення задачі мінімізації функціоналів

Нехай  $G(u, v)$  — білінійна симетрична функція (функціонал) у дійсному гільбертовому просторі.

**Означення 3.1.** Функціонал  $G$  називається *додатним*, якщо  $G(u, u) > 0$ ,  $\forall u \in D(G) \setminus \{0\}$ .

**Означення 3.2.** Функціонал  $G$  називається *додатно визначеним*, якщо

$$G(u, u) > \mu \|u\|^2, \quad \forall u \in D(G) \setminus \{0\}, \quad (3.1.1)$$

де  $\mu > 0$ .

Визначимо функціонал  $\Phi$  наступним чином:

$$\Phi(u) = G(u, u) - 2\ell(u) + C, \quad (3.1.2)$$

де  $\ell(u)$  — лінійний функціонал з не вужчою областю визначення ніж  $G$ , тобто  $D(G) \subseteq D(\ell)$ , а  $C$  — довільна (можливо навіть від’ємна) константа.

### Лема 3.3

Нехай  $G(u, u)$  — додатно визначений, а  $\ell(u)$  — обмежений, тоді  $\Phi(u)$  — обмежений знизу.

**Зауваження 3.4** — Тут *обмеженість*  $\ell$  розуміється у тому сенсі, що  $\exists a > 0$ :  $\|\ell(u)\| \leq a\|u\|$ .

*Доведення.* Безпосередньо з (3.1.2) і (3.1.1) маємо

$$\|\Phi(u)\| \geq \mu \|u\|^2 - 2a\|u\| + C, \quad (3.1.3)$$

Роблячи заміну змінної  $x = \|u\|$  і перепозначаючи праву частину за  $f(x)$  отримаємо

$$f(x) = \mu x^2 - 2ax + C,$$

а це парабола з гілками вгору, у якій існує мінімум, який досягається в  $x_0 = \frac{a}{\mu}$ , і дорівнює  $C - \frac{a^2}{\mu}$ .  $\square$

### Наслідок 3.5

$\exists u^*: \inf_{u \in D(G)} \Phi(u) = \Phi_0 = \Phi(u^*)$ .

*Доведення.* Див. книгу Ляшка, Макарова і Скоробагатька, або ж Ліонса.  $\square$

### Теорема 3.6

Нехай

$$\exists u^* \in D(G), \quad (3.1.4)$$

тоді виконуються наступні умови

1)

$$G(u^*, v) = \ell(v), \quad \forall v \in D(G) \quad (3.1.5)$$

2)

$$\Phi(u^* + v) = \Phi(u^*) + G(v, v). \quad (3.1.6)$$

*Доведення.*

$$\begin{aligned} \Phi(u^* + v) &= G(u^* + v, u^* + v) - 2\ell(u^* + v) + C = \\ &= G(u^*, u^*) + G(v, v) + G(u^*, v) - 2\ell(u^*) - 2\ell(v) + C = \\ &= \Phi(u^*) + \left(2(G(u^*, v) - \ell(v)) + G(v, v)\right) \geq \\ &\geq \Phi(u^*). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Тоді

$$2(G(u^*, v) - \ell(v)) + G(v, v) \geq 0. \quad (3.1.8)$$

Тоді це виконується і для  $v := tv$ , тобто

$$2t(G(u^*, v) - \ell(v)) + t^2 G(v, v) \geq 0, \quad (3.1.9)$$

причому можемо взяти  $t$  таким, аби перший доданок переважав другий за модулем, і був від'ємний за знаком. Тоді нерівність можлива якщо і тільки якщо

$$G(u^*, v) = \ell(v), \quad (3.1.10)$$

а це ніщо янше як (3.1.5). Підставляючи (3.1.10) в (3.1.7) отримуємо (3.1.6)  $\square$

**Означення 3.7.** Послідовність  $\{u_n\}$  називається *мінімізуючою* для  $\Phi$ , якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \Phi(u^*) = \inf \Phi(u) = \Phi_0.$$

### Теорема 3.8

Нехай  $\{u_n\}$  мінімізуюча для  $\Phi$ , тоді вона фундаментальна і збігається до  $u^*$  у розумінні відстані

$$\rho_G(u, v) = \sqrt{G(u - v, u - v)}. \quad (3.1.11)$$

*Доведення.* Наступні дві нерівності справджуються (як наслідок з визначення інфімуму) для достатньо великого  $N$  і  $n, m > N$ :

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) &\leq \Phi_0 + \varepsilon, \\ \Phi(u_m) &\leq \Phi_0 + \varepsilon.\end{aligned}$$

У сумі маємо

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) + \Phi(u_m) &\leq 2\Phi_0 + 2\varepsilon \leq \\ &\leq 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Тоді шляхом нескладних арифметичних перетворень маємо

$$2\varepsilon \geq \Phi(u_n) + \Phi(u_m) - 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) = \frac{1}{2}G(u_m - u_n, u_m - u_n). \quad (3.1.12)$$

Підставляючи сюди (3.1.11) маємо

$$\rho^2(u_n, u_m) \leq 4\varepsilon, \quad (3.1.14)$$

тобто

$$\rho(u_n, u_m) \leq 2\sqrt{\varepsilon},$$

що говорить про фундаментальність  $\{u_n\}$ . □

**Вправа 3.9.** Переконатися в істинності рівності в (3.1.12).

**Розв'язання.** Нескладні арифметичні перетворення:

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) + \Phi(u_m) - 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) &= \\ &= G(u_n, u_n) - 2\ell(u_n) + C + G(u_m, u_m) - 2\ell(u_m) + C - \\ &\quad - 2\left(G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) - 2\ell\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + C\right) = \\ &= G(u_n, u_n) + G(u_m, u_m) - 2G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) - \\ &\quad - 2\left(\ell(u_n) + \ell(u_m) - 2\ell\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Другий доданок скорочується за лінійністю  $\ell$ , а для першого можемо записати:

$$\begin{aligned}G(u_n, u_n) + G(u_m, u_m) - 2G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) &= \\ &= \frac{1}{2}G(u_n, u_n) + \frac{1}{2}G(u_m, u_m) - G(u_n, u_m) = \\ &= \frac{1}{2}G(u_m - u_n, u_m - u_n),\end{aligned}$$

що і показує істинність (3.1.12).

### 3.1.1 Процес Рітца побудови мінімізаційної послідовності

- 1) Вибираємо повну лінійно незалежну систему функцій  $\{\varphi_i\} \in D(G)$ .
- 2) Будуємо простори  $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , тоді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i. \quad (3.1.15)$$

- 3) Будемо шукати розв'язок задачі

$$\inf_{u \in H_n} \Phi(u) = \Phi(u_n). \quad (3.1.16)$$

Тоді з (3.1.5) маємо

$$G(u_n, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_n. \quad (3.1.17)$$

Підставляючи сюди  $u_n$  з (3.1.15) будемо мати

$$\sum_{i=1}^n c_i G(\varphi_i, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_n, \quad (3.1.18)$$

або ж

$$\sum_{i=1}^n c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = \ell(\varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.1.19)$$

отримали систему лінійних рівнянь з матрицею Грама на коефіцієнти  $c_i$ . Якщо система лінійно незалежна то розв'язок існує і єдиний.