§1.4. Системи інтегральних та функціональних рівнянь

Скибицький Нікіта Максимович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

11 жовтня 2019 р.

Постановка інтегральної задачі

Продовжимо узагальнювати псевдообернення, цього разу для задачі

$$\int_0^T A(t)x(t)\,\mathrm{d}t = b, \tag{1}$$

де $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ — невідома вектор-функція, $A : [0, T] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ — відома матрично-значна функція, $b \in \mathbb{R}^m$ — відомий вектор.

Множина розв'язків

Введемо множину

$$\Omega_x = \left\{ x(t) : \left\| \int_0^T A(t)x(t)\,\mathrm{d}t - b \right\|^2 = \right.$$
$$\left. = \min_{z(t)} \left\| \int_0^T A(t)z(t)\,\mathrm{d}t - b \right\|^2 \right\}. \quad (2)$$

Можна показати, що

$$\Omega_x = \left\{ A^\intercal(t)P_1^+ b + v(t) - A^\intercal(T)P_1^+ A_v \,\middle|\, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \right\}, \quad (3)$$

де

$$P_1 = \int_0^T A(t)A^\intercal(t)\,\mathrm{d}t, \quad A_v = \int_0^T A(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Виділення однозначного розв'язку

За неоднозначності Ω_x виділимо з неї вектор $\bar{x}(t)$ такий, що

$$\bar{x}(t) = \operatorname*{arg\,min}_{x(t)\in\Omega_x} \int_0^T \|x(t)\|^2 \, \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Можна показати, що

$$\bar{x}(t) = A^{\mathsf{T}}(t) P_1^{+} b. \tag{5}$$

Однозначність і точність розв'язку

Розв'язок $\bar{x}(t)$ СЛАР (1) буде однозначним, якщо

$$\lim_{\Delta_N \to 0} \det \begin{bmatrix} A^\intercal(t_1)A(t_1) & A^\intercal(t_1)A(t_2) & \cdots & A^\intercal(t_1)A(t_N) \\ A^\intercal(t_2)A(t_1) & A^\intercal(t_2)A(t_2) & \cdots & A^\intercal(t_2)A(t_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^\intercal(t_N)A(t_1) & A^\intercal(t_N)A(t_2) & \cdots & A^\intercal(t_N)A(t_N) \end{bmatrix} > 0, \tag{6}$$

де Δ_N — діаметр розбиття відрізку $[0, T]$ точками $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

Точність розв'язку оцінюється величиною

$$\varepsilon^2 = b^\intercal b - b^\intercal P_1 P_1^+ b. \tag{7}$$

Постановка функціональної задачі

Розглянемо задачу

$$B(t)x = b(t), \quad t \in [0, T] \tag{8}$$

де $B : [0, T] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ — відома матрично-значна функція скалярного аргументу, $x \in \mathbb{R}^n$ — невідомий вектор, $b : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ — відома вектор-функція скалярного аргументу.

Введемо множину

$$\Omega_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_0^T \|B(t)x - b(t)\|^2 \, \mathrm{d}t = \right.$$
$$\left. = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \int_0^T \|B(t)z - b(t)\|^2 \, \mathrm{d}t \right\}. \quad (9)$$

Можна показати, що

$$\Omega_x = \left\{ P_2^+ B_b + v - P_2^+ P_2 v \,\middle|\, v \in \mathbb{R}^n \right\}, \quad (10)$$

де

$$P_2 = \int_0^T B^\intercal(t) B(t) \, \mathrm{d}t, \quad B_b = \int_0^T B^\intercal(t) b(t) \, \mathrm{d}t.$$

Виділення однозначного розв'язку

За неоднозначності Ω_x виділимо з неї вектор $\bar{x}$ такий, що

$$\bar{x} = \arg\min_{x \in \Omega_x} \|x\|^2. \tag{11}$$

Можна показати, що

$$\bar{x} = P_2^+ B_b. \tag{12}$$

Однозначність і точність розв'язку

Розв'язок $\bar{x}$ СЛАР (8) буде однозначним, якщо

$$\det P_2 > 0. \tag{13}$$

Точність розв'язку оцінюється величиною

$$\varepsilon^2 = \int_0^T b^\mathsf{T}(t) b(t)\, \mathrm{d}t - B_b^\mathsf{T} P_2^+ B_b. \tag{14}$$

Дякуємо за увагу!