# Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

17 вересня 2019 р.

## Зміст



## 1 Дробові диференціальні рівняння

Перш за все наведемо мінімальну мотивацію вивчення дробових диференціальних рівнянь. Нагадаємо, що класичне рівняння дифузії має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x, t), \tag{1.1}$$

де функція $f(x, t)$ відповідає джерелам речовини, що дифузує.

Втім, у реальному житті зустрічаються процеси, у яких дифузія відбувається повільніше/швидше, ніж передбачає рівняння (1.1). Для постановки відповідних рівнянь необхідно вводити дробові похідні (похідні дробових порядків).

### 1.1 Основи дробового числення

Розглянемо $f(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$. Позначимо

$$(I_0^1 f)(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.2}$$

Також визначимо рекурсивно

$$(I_0^n f)(t) = I_0^1 (I_0^{n-1} f)(t) = \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n)\,\mathrm{d}s_n \ldots \mathrm{d}s_1. \tag{1.3}$$

Подібне визначення не дуже зручне з обчислювальної точки зору, тому наступна теорема стане нам у пригоді.

*Гуляницький Андрій Леонідович, `andriy.hul@gmail.com`

**Теорема 1.1** (формула Коші-Діріхле)
Для $f \in L_1([0,T])$, $t \in [0,T]$ має місце

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

*Доведення.* Доведення проведемо за методом математичної індукції по $n$. **База** $n = 1$ виконується безпосередньо за визначенням $I_0^1$. **Перехід**: нехай

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.5}$$

Тоді

$$\begin{aligned}(I_0^{n+1} f)(t) = I_0^1(I_0^n f)(t) = \int_0^t (I_0^n f)(s)\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!}\left(\int_0^s (s-\xi)^{n-1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s = \\ = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t \int_\xi^t f(\xi)(s-\xi)^{n-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi = \\ = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(\xi)\left.\frac{(s-\xi)^n}{n}\right|_{s=\xi}^{s=t}\mathrm{d}\xi = \\ = \frac{1}{n!}\int_0^t f(\xi)(t-\xi)^n\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{1.6}$$

З точністю до назв змінних отримали що хотіли. □

**Зауваження 1.2** — Перехід від другого рядка до третього тут відбувається за теоремою Фубіні. Наступна картинка може допомогти у розумінні:

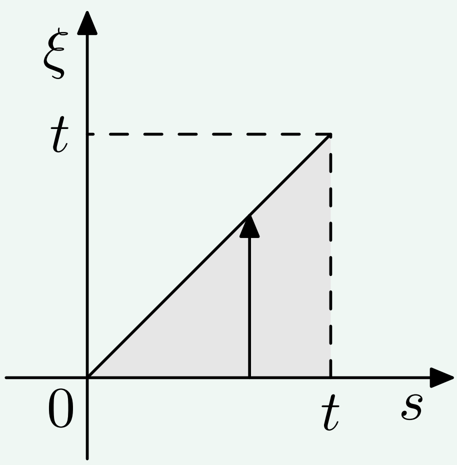


Рис. 1: При $s : 0 \to t$ маємо $\xi : 0 \to s$.

Формула Коші-Діріхле мотивує введення інтегральних операторів нецілого порядку.

**Означення 1.3.** *Інтегралом Рімана-Ліувілля* порядку $\alpha > 0$ з нижньою межею 0 функції $f$ називається оператор

$$(I_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, \mathrm{d}s. \tag{1.7}$$

Також окремо зауважимо, що $I_0^0 f = f$.

**Приклад 1.4**

Справді, для $\alpha \in \mathbb{N}$ маємо $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, тобто власне формулу Коші-Діріхле.

**Зауваження 1.5** — Нагадаємо, що $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t$.

Взагалі кажучи, подібний вираз нагадує функцію згортки зі степеневою функцією порядку $\alpha$:

$$I_0^\alpha f = f \star y_\alpha, \tag{1.8}$$

де $y_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$, а операція $\star : (\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ визначається наступним чином:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(s) g(t-s)\, \mathrm{d}s. \tag{1.9}$$

Давайте тепер поміркуємо, як можна визначити диференціалний оператор дробового порядку, маючи відповідні інтегральні оператори. Взагалі кажучи, єдиної відповіді на це питання немає, як показує наступна картинка:

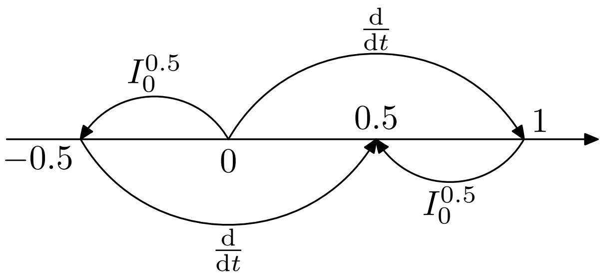


Рис. 2: Різні способи визначення диференціального оператора нецілого порядку

Введемо наступне допоміжне поняття для спрощення подальших позначень і формулювань:

**Означення 1.6.** Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді *стеля* $\lceil \alpha \rceil$ — найменше ціле число, що не менше за $\alpha$. Також інколи кажуть *верхня ціла частина* $\alpha$.

Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$.

**Означення 1.7.** *Похідною за Капуто* функції $f$ порядку $\alpha$ з нижньою межею 0 називається оператор

$$({}^{\star}D_0^\alpha f)(t) = I_0^{n-\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}\right). \tag{1.10}$$

**Означення 1.8.** *Похідною Рімана-Ліувілля* функції $f$ порядку $\alpha$ з нижньою межею 0 називається оператор

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(I_0^{n-\alpha} f\right). \tag{1.11}$$

**Приклад 1.9**

На рисунку вище $D_0^{0.5} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{0.5}$, а ${}^{\star}D_0^{0.5} = I_0^{0.5}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$.

Взагалі кажучи виникає питання коли введені вище похідні існують. Для відповіді на це питання нам знадобиться наступне:

**Означення 1.10.** Функція $f$ називається *абсолютно неперервною* (*eng.* AC, absolutely continuous) на проміжку $I$ якщо $\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x_1 < y_1 \le x_2 < y_2 \le \ldots \le x_n < y_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon. \tag{1.12}$$

Так от для AC функцій їхні похідні інтегровні (з нецілим порядком), тобто похідні (з нецілим порядком) існують.

Поняття абсолютної неперервності має нагадувати поняття рівномірної неперервності (*eng.* UC, uniformly continuous). Зрозуміло, що з абсолютної неперервності випливає ($n = 1$) рівномірна неперервність, але зворотнє не виконується.

**Вправа 1.11.** Наведіть приклад рівномірно неперервної але не абсолютно неперервної функції.

**Розв'язання.** Функція Кантора є класичним прикладом такої функції. нагадаємо, що функція Кантора визначається як

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}, & x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \in \mathcal{C}, \\ \displaystyle\sup_{y \le x, y \in \mathcal{C}} c(y), & x \in [0,1] \setminus \mathcal{C}, \end{cases} \tag{1.13}$$

де $\mathcal{C}$ — множина Кантора, а $b_n$ — тернарні "біти" числа $x$, тобто $b_n \in \{0, 2\}$.

Для наглядності наведемо графік функції Кантора:

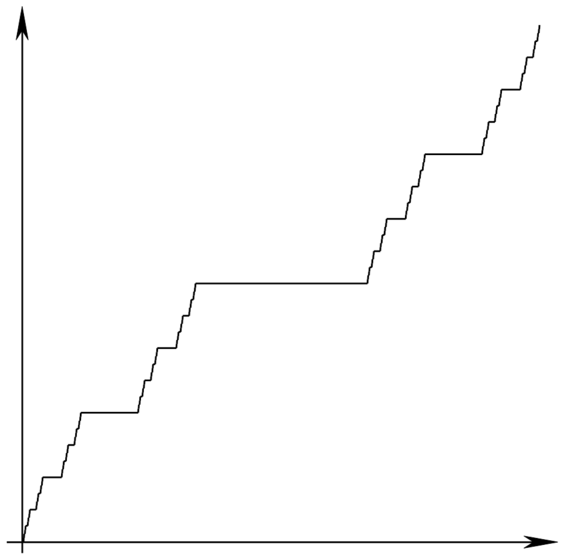

Рис. 3: функція Кантора

Як і кожна неперервна функція на компакті ($[0, 1]$), вона є рівномірно неперервною на ньому. Втім, вона не є абсолютно неперервною, адже $\mu(\mathcal{C}) = 0$, тобто $\forall \delta > 0$ знайдуться інтервали сумарною довжиною $< \delta$ що покривають $\mathcal{C}$, а тому зміна значення $c(\cdot)$ на них складатиме $1 > \varepsilon$.

Виникає закономірне запитання: чи існує аналог формули Коші-Діріхле для диференціальних операторів? Виявляється, що так, хоча він і не зовсім такий, як можна було б очікувати.

**Теорема 1.12**

Нехай $f \in AC^n([0, T])$, $t \in [0, T]$, $n = \lceil \alpha \rceil$. Тоді

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} \, \mathrm{d}s + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha) t^{\alpha-k}}. \tag{1.14}$$

**Приклад 1.13**

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо $f \in AC([0, T])$ і

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} \, \mathrm{d}s + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha) t^\alpha}. \tag{1.15}$$

**Зауваження 1.14** — Як показує формула, ${}^{\star}D_0^{\alpha}, D_0^{\alpha}$ — нелокальні оператори.

*Доведення.* Доведемо частинний випадок $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned}(D_0^{\alpha} f)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t f(s) \frac{\mathrm{d}(-(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{-f(s)(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t f'(s) \frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,\mathrm{d}s \right) = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(0)t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f'(s)(t-s)^{1-\alpha}\,\mathrm{d}s \right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left( \frac{f(0)}{t^{\alpha}} + \int_0^t f'(s)(t-s)^{-\alpha}\,\mathrm{d}s \right).\end{aligned} \tag{1.16}$$

□

**Зауваження 1.15** — Тут при переході від другого рядочка до третього ми скористалися інтегруванням за частинами, а в останньому переході — формулою Лейбніца:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) = f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

На завершення визначимо ще кілька корисних для подальшого дослідження об'єктів:

**Означення 1.16.** *Інтегралом Рімана-Ліувілля з нижньою (лівою) межею $a$* називається

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s. \tag{1.18}$$

**Означення 1.17.** *Інтегралом Рімана-Ліувілля з правою (верхньою) межею $T$* для $t < T$ називається

$$(I_{T-}^{\alpha} f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T f(s)(t-s)^{\alpha}\,\mathrm{d}s. \tag{1.19}$$