Чисельні методи математичної фізики

Риженко А. І.*

24 вересня 2019 р.

Зміст

2.1 Прямий метод

Нагадаємо попередню лекцію: задано рівняння

$$Au = f, \tag{2.1}$$

з переметром $f \in W_2^{-1}$. Нагадаємо також, що такі умови на праву частину означають, що розв'язок $u \in W_2^1$.

Приклад 2.1
Розглянемо рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b, \tag{2.2}$$

з крайовими умовами

$$-ku' + \alpha_1 u = \mu_1, \quad x = a, \tag{2.3}$$

і

$$ku' + \alpha_2 u = \mu_2, \quad x = b. \tag{2.4}$$

Розв'язання. Запишемо

$$(Au, v) = (f, v).$$

*Риженко Андрій Іванович, rai-ku@ukr.net

У явному вигляді маємо

$$\int_a^b (ku'v' - pu'v + quv)\,\mathrm{d}x + \alpha_1 u(a)v(a) + \alpha_2 u(b)v(b) - \mu_1 v(a) - \mu_2 v(b) = \int_a^b fv\,\mathrm{d}x. \quad (2.5)$$

Тут ми скористалися формулою інтегрування за частинами:

$$\int_a^b -(ku')'\,\mathrm{d}x = -\left. ku'v\right|_a^b + \int_a^b ku'v'\,\mathrm{d}x,$$

звідки (а саме з $ku'v|_{x=a}$ і $ku'v|_{x=b}$) і виникли доданки з $\alpha_{1,2}$ та $\mu_{1,2}$.

3 Метод колокацій

Розглянемо рівняння

$$Au = f, \quad (3.1)$$

де $A : E \to F$, замінюємо на рівняння

$$P_n(Au_n) = P_n f, \quad (3.2)$$

або на

$$P_n(Au_n - f) = 0. \quad (3.3)$$

Координатну систему візьмемо $\{\varphi_i\} \in D(A) \subseteq E$, а проекційну — $\{\psi_i\} \in F^\star$. Тоді можемо (3.3) переписати у вигляді

$$\psi_j(Au_n - f) = 0,$$

або

$$\psi_j A u_n = \psi_j f.$$

Шукачи розв'язок у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i,$$

матимемо

$$\psi_j \left(A \left(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) \right) = \psi_j f,$$

або ж, враховучи лінійність,

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_j \left(A\varphi_i \right) = \psi_j f, \quad j = \overline{1,n}. \quad (3.4)$$

Матриця системи вище має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} \psi_1(A\varphi_1) & \psi_1(A\varphi_2) & \cdots & \psi_1(A\varphi_n) \\ \psi_2(A\varphi_1) & \psi_2(A\varphi_2) & \cdots & \psi_2(A\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(A\varphi_1) & \psi_n(A\varphi_2) & \cdots & \psi_n(A\varphi_n) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Якщо взяти у якості $\{\psi_j\}$ систему функцій Чебишова, то отримаємо $|D| \neq 0$.

Приклад 3.1

Нехай $F = C([a,b])$, і візьмемо $\psi_j(f) = f(x_j)$, де x_j — множина попарно різних вузлів на $[a,b]$.

Приклад 3.2

Розглянемо рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b,$$

з крайовими умовами

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Розв'язання. Візьмемо

$$\omega_n = \{x_j = jh, h = 1/n\},$$

тоді шукачи розв'язок у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i,$$

отримаємо систему

$$\sum_{i=1}^{n} c_i((-k(x_j)\varphi_i'(x_j)) - p(x_j)\varphi_i'(x_j) + q(x_j)\varphi_i(x_j)) = f(x_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.6}$$

Зауваження 3.3 — На практиці метод колокацій збігається ще повільніше ніж метод Бубнова-Гальоркіна, але він зручний в випадках, коли розв'язки мають різні градієнти:

Рис. 1: Покращуємо точність за рахунок скупчення точок x_j у регіонах де розв'язок має великий градієнт.

Приклад 3.4
Нехай задано неоднорідну задачу

$$Au \equiv (-ku')' - pu' + qu = f \tag{3.7}$$

з умовами

$$u(0) = C, \quad u(1) = D. \tag{3.8}$$

Розв'язання. Тоді розв'язок шукаємо у вигляді

$$u = v + \varphi_0, \tag{3.9}$$

де φ_0 — відома функція що задовольняє неоднорідним крайовим умовами, наприклад $\varphi_0(x) = C + x(D - C)$. Тоді матимето

$$Av + A\varphi_0 = f,$$

або ж

$$Av = f - A\varphi_0 = f_1, \tag{3.10}$$

з умовами

$$v(0) = v(1) = 0. \tag{3.11}$$

За розв'язком цього рівняння відновлюється розв'язок початкового за формулою $u_n = v_n + \varphi_0$.

4 Варіаційні методи розв'язування крайових задач

Розглянемо рівняння

$$Au = f, \tag{4.1}$$

де $A : E \to F$, E, F — пара гільбертових просторів. Припустимо також, що існує і єдиний розв'язок задачі (4.1).

Ідея варіаційних методів полягає у тому, що ми будемо зводити задачу (4.1) до знаходження мінімуму деякого функціоналу, що відповідає цій задачі, а саме $\Phi(u) : E \to \mathbb{R}$,

$$\inf_{u \in E} \Phi(u) = \Phi_0. \tag{4.2}$$

4.1 Загальні положення задачі мінімізації функціоналів

Нехай $G(u, v)$ — білінійна симетрична функція (функціонал) у дійсному гільбертовому просторі.

Означення 4.1. Функціонал G називається *додатним*, якщо $G(u, u) > 0$, $\forall u \in D(G) \setminus \{0\}$.

Означення 4.2. Функціонал G називається *додатно визначеним*, якщо

$$G(u,u) > \mu\|u\|^2, \quad \forall u \in D(G) \setminus \{0\}, \tag{4.3}$$

де $\mu > 0$.

Визначимо функціонал Φ наступним чином:

$$\Phi(u) = G(u,u) - 2\ell(u) + C, \tag{4.4}$$

де $\ell(u)$ — лінійний функціонал з не вужчою областю визначення ніж G, тобто $D(G) \subseteq D(\ell)$, а C — довільна (можливо навіть від'ємна) константа.

Лема 4.3

Нехай $G(u,u)$ — додатно визначений, а $\ell(u)$ — обмежений, тоді $\Phi(u)$ — обмежений знизу.

Зауваження 4.4 — Тут *обмеженість* ℓ розуміється у тому сенсі, що $\exists a > 0$: $\|\ell(u)\| \leq a\|u\|$.

Доведення. Безпосередньо з (4.4) і (4.3) маємо

$$\|\Phi(u)\| \geq \mu\|u\|^2 - 2a\|u\| + C, \tag{4.5}$$

Роблячи заміну змінної $x = \|u\|$ і перепозначаючи праву частину за $f(x)$ отримаємо

$$f(x) = \mu x^2 - 2ax + C,$$

а це парабола з гілками вгору, у якої існує мінімум, який досягається в $x_0 = \frac{a}{\mu}$, і дорівнює $C - \frac{a^2}{\mu}$. □

Наслідок 4.5

$\exists u^\star$: $\inf_{u\in D(G)} \Phi(u) = \Phi_0 = \Phi(u^\star)$.

Доведення. Див. книгу Ляшка, Макарова і Скоробагатька, або ж Ліонса. □

Теорема 4.6

Нехай

$$\exists u^\star \in D(G), \tag{4.6}$$

тоді виконуються наступні умови

1) $$G(u^\star, v) = \ell(v), \quad \forall v \in D(G) \tag{4.7}$$

2) $$\Phi(u^\star + v) = \Phi(u^\star) + G(v, v). \tag{4.8}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}
\Phi(u^\star + v) &= G(u^\star + v, u^\star + v) - 2\ell(u^\star + v) + C = \\
&= G(u^\star, u^\star) + G(v, v) + G(u^\star, v) - 2\ell(u^\star) - 2\ell(v) + C = \\
&= \Phi(u^\star) + \Big(2(G(u^\star, v) - \ell(v)) + G(v, v)\Big) \geq \\
&\geq \Phi(u^\star).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Тоді

$$2(G(u^\star, v) - \ell(v)) + G(v, v) \geq 0. \tag{4.10}$$

Тоді це виконується і для $v := tv$, тобто

$$2t(G(u^\star, v) - \ell(v)) + t^2 G(v, v) \geq 0, \tag{4.11}$$

причому можемо взяти t таким, аби перший доданок переважав другий за модулем, і був від'ємний за знаком. Тоді нерівність можлива якщо і тільки якщо

$$G(u^\star, v) = \ell(v), \tag{4.12}$$

а це ніщо янше як (4.7). Підставляючи (4.12) в (4.9) отримуємо (4.8) □

Означення 4.7. Послідовність $\{u_n\}$ називається *мінімізуючою* для Φ, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \Phi(u^\star) = \inf \Phi(u) = \Phi_0.$$

Теорема 4.8

Нехай $\{u_n\}$ мінімізуюча для Φ, тоді вона фундаментальна і збігається до $u^\star$ у розумінні відстані

$$\rho_G(u, v) = \sqrt{G(u - v, u - v)}. \tag{4.14}$$

Доведення. Наступні дві нерівності справджуються (як наслідок з визначення інфімума) для достатньо великого N і $n, m > N$:

$$\begin{aligned} \Phi(u_n) &\le \Phi_0 + \varepsilon, \\ \Phi(u_m) &\le \Phi_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

У сумі маємо

$$\begin{aligned} \Phi(u_n) + \Phi(u_m) \le 2\Phi_0 + 2\varepsilon \le \\ \le 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Тоді шляхом нескладних арифметичних перетворень маємо

$$2\varepsilon \ge \Phi(u_n) + \Phi(u_m) - 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) = \frac{1}{2}G(u_m - u_n, u_m - u_n). \tag{4.15}$$

Підставляючи сюди (4.14) маємо

$$\rho^2(u_n, u_m) \le 4\varepsilon, \tag{4.16}$$

тобто

$$\rho(u_n, u_m) \le 2\sqrt{\varepsilon},$$

що говорить про фундаментальність $\{u_n\}$. □

Вправа 4.9. Переконатися в істинності рівності в (4.15).

Розв'язання. Нескладні арифметичні перетворення:

$$\begin{aligned} &\Phi(u_n) + \Phi(u_m) - 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) = \\ &= G(u_n, u_n) - 2\ell(u_n) + C + G(u_m, u_m) - 2\ell(u_m) + C - \\ &\quad - 2\left(G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) - 2\ell\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + C\right) = \\ &= G(u_n, u_n) + G(u_m, u_m) - 2G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) - \\ &\quad - 2\left(\ell(u_n) + \ell(u_m) - 2\ell\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Другий доданок скорочується за лінійністю ℓ, а для першого можемо записати:

$$\begin{aligned} &G(u_n, u_n) + G(u_m, u_m) - 2G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}G(u_n, u_n) + \frac{1}{2}G(u_m, u_m) - G(u_n, u_m) = \\ &= \frac{1}{2}G(u_m - u_n, u_m - u_n), \end{aligned}$$

що і показує істинність (4.15).

4.2 Процес Рітца побудови мінімізаційної послідовності

1) Вибираємо повну лінійно незалежну систему функцій $\{\varphi_i\} \in D(G)$.

2) Будуємо простори $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, тоді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i. \tag{4.17}$$

3) Будемо шукати розв'язок задачі

$$\inf_{u \in H_n} \Phi(u) = \Phi(u_n). \tag{4.18}$$

Тоді з (4.7) маємо

$$G(u_n, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_n. \tag{4.19}$$

Підставляючи сюди u_n з (4.17) будемо мати

$$\sum_{i=1}^{n} c_i G(\varphi_i, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_n, \tag{4.20}$$

або ж

$$\sum_{i=1}^{n} c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = \ell(\varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.21}$$

отримали систему систему лінійних рівнянь з матрицею Грама на коефіцієнти c_i. Якщо система лінійно незалежна то розв'язок існує і єдиний.