

Чисельні методи математичної фізики

Риженко А. І.*

8 жовтня 2019 р.

Зміст

3.2	Метод Рітца	1
3.2.1	Мінімізаційна послідовність	2
3.2.2	Метод Рітца в H_A	4
3.2.3	Приклади	5

3.2 Метод Рітца

Нехай, як і раніше, ми розв'язуємо рівняння

$$Au = f, \quad (3.2.1)$$

де $A : H \rightarrow H$, H — дійсний гільбертовий простір. Нагадаємо, що ми ставимо цій задачі й відповідність задачу мінімізації

$$\inf_{u \in D(A)} \Phi(u) = \Phi(u^*) = u_0. \quad (3.2.2)$$

Нехай також виконуються певні припущення, необхідні для збіжності, а саме:

1) A — симетричний (самоспряжений), тобто

$$(Au, v) = (u, Av). \quad (3.2.3)$$

2) A — додатно визначений, тобто

$$(\exists \mu > 0)(\forall u \in D(A)) \quad (Au, u) \geq \mu \|u\|^2 (u, Av). \quad (3.2.4)$$

3) $f \in R(A)$ — область значень оператора A .

*Риженко Андрій Іванович, rai-ku@ukr.net

Теорема 3.1

Якщо A задовольняє умовам 1–3 (формули (3.2.3)–(3.2.4)), то

- 1) задача (3.2.2) має не більш ніж один розв’язок;
- 2) A^{-1} обмежений.

Доведення.

- 1) Розглянемо спочатку однорідну задачу, тобто $f \equiv 0$, тоді задача (3.2.1) зводиться до $Au = 0$. Тоді з (3.2.4) маємо $\mu\|u\|^2 \leq (Au, u) = 0$, звідки $u = 0$. Отже однорідна задача має тільки один розв’язок, а тому неоднорідна задача має не більше ніж один розв’язок.

Зауваження 3.2 — Справді, загальний розв’язок неоднорідної є сумою загального розв’язку однорідної (який у нас один) і частинного розв’язку неоднорідної (один або нуль)

- 2) Скористаємося постановкою задачі і нерівністю Коші-Буняковського:

$$\mu\|u\|^2 \leq (Au, u) = (f, u) < \|f\| \cdot \|u\|.$$

Можемо переписати це як

$$\|u\| \leq \frac{1}{\mu} \|f\|,$$

або ж

$$\|A^{-1}f\| \leq \frac{1}{\mu} \|f\|,$$

а це ніщо інше як

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}.$$

□

3.2.1 Мінімізаційна послідовність

Алгоритм 3.3.

- 1) $\{\varphi_i\} \in D(A)$ — повна;
- 2) $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$;
- 3) $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$;

Де наш загальний функціонал Рітца

$$\inf_{u \in H_n} \Phi(u) = \Phi(u_n) \tag{3.2.5}$$

з функцією G вигляду

$$G(u_n, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_n, \quad (3.2.6)$$

або, що те саме в наших умовах,

$$G(u_n, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.2.7)$$

можна буде записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.2.8)$$

або, що те саме в наших умовах,

$$\sum_{i=1}^n c_i (A\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.2.9)$$

Теорема 3.4 1) Якщо u^* — розв'язок (3.2.1), а оператор A задовольняє умовам (3.2.3) і (3.2.4), то мінімум функціонала Рітца (3.2.5) буде досягатися на u^* , причому тільки на ньому.

2) Якщо мінімум функціонала Рітца (3.2.5) досягається на елементі $u^* \in D(A)$, то u^* — розв'язок (3.2.1).

Доведення.

1) Якщо u^* — розв'язок (3.2.1), то

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= (Au, u) - 2(Au^*, u) = \\ &= (Au, u) - (Au^*, u) + (Au^*, u^*) - (Au^*, u) - (Au^*, u^*) = \\ &= (A(u - u^*), (u - u^*)) - (Au^*, u^*). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Оскільки $A > 0$ то з (3.2.10) маємо

$$\Phi(u) \geq \Phi(u^*), \quad (3.2.11)$$

оскільки

$$(A(u - u^*), (u - u^*)) \geq \mu \|u - u^*\|^2,$$

причому рівність досягається лише коли $u = u^*$.

2) Нехай на $u^* \in D(A)$ досягається мінімум функціонала (3.2.5), тоді

$$(Au^*, v) = (f, v), \quad \forall v \in D(G), \quad (3.2.12)$$

і або

$$(Au^* - f, v) = 0, \quad \forall v \in D(G),$$

а, оскільки $D(G)$ щільна в H , то

$$Au^* = f. \quad (3.2.14)$$

□

Зауваження 3.5 — Мінімізаційна послідовність звелася до тієї ж системи що й у методі Бубнова-Гальоркіна, то які ж його переваги?

3.2.2 Метод Рітца в H_A

Справа в тому, що якщо оператор A задовольняє умовам (3.2.3) і (3.2.4), то можна ввести енергетичний простір H_A у якому скалярний добуток введено за формулою

$$(u, v)_A = (Au, u), \quad (3.2.15)$$

а норма за формулою

$$\|u\|_A^2 = (u, u)_A. \quad (3.2.16)$$

Можна перевірити, що ці функції задовольняють аксіомам скалярного добутку та норми. Таким чином H_A — гільбертовий простір, ширший за $D(A)$.

Тоді задачі (3.2.1) ставимо у відповідність задачу

$$\inf_{u \in H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n), \quad (3.2.17)$$

для якої мають місце аналогічні результати:

Теорема 3.6

Мають місце наступні співвідношення:

$$1) \quad \Phi(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \|u - u^*\|_A^2 - \|u^*\|_A^2, \quad (3.2.18)$$

$$2) \quad \inf_{u \in H_n \subset H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n) = \Phi_0. \quad (3.2.19)$$

З (3.2.19) бачимо

$$(Au_n, v) = (f, v), \quad v \in H_n,$$

тоді

$$(Au_n - Au^*, v) = 0, \quad v \in H_n,$$

або

$$(u_n - u^*, v)_A = 0, \quad v \in H_n. \quad (3.2.20)$$

Це означає, що

$$u = P_{H_n} u^* \quad (3.2.21)$$

Теорема 3.7

Нехай координатна система $\{\varphi_i\}$ є повною в H_A , тоді при $n \rightarrow \infty$ мінімізуюча послідовність $\{u_n\}$ метода Рітца збігається до розв'язку задачі (3.2.1) в нормі простору H_A .

3.2.3 Приклади

Приклад 3.8

Задано рівняння

$$-(ku')' + qu = f, \quad 0 < x < 1$$

з крайовими умовами

$$u(0) = u(1) = 0,$$

і функціями

$$k(x) \geq c_0 > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Зауваження 3.9 — Взагалі кажучи, перед тим як будь-що робити, ми маємо показати симетричність A :

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int_0^1 \left(-(ku')'v + quv \right) dx = \\ &= -ku'v|_0^1 + \int_0^1 (-ku'v' + quv) dx = \\ &= (u, Av). \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

а також додатну визначеність: з $u(0) = 0$ маємо

$$u(x) = \int_0^x u'(\xi) d\xi,$$

звідки

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^2(x) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x u'(\xi) d\xi \right)^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^x \xi d\xi \int_0^x (u'(\xi))^2 d\xi dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u'\|^2, \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

або ж

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u'\|^2, \quad u \in D(A) \tag{3.2.24}$$

Тоді, підставляючи в (3.2.22) u замість v маємо

$$\begin{aligned}
 (Au, u) &= \int_0^1 \left(-(ku')'u + qu^2 \right) dx \geq \\
 &\geq c_0 \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 q(u(x))^2 dx \geq \\
 &\geq c_0 \int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq \\
 &\geq c_1 \|u\|^2,
 \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

де $c_1 = 2c_0$. Розглядаючи ліву і праву частини цієї рівності маємо додатновизначеність A .

Розв'язання.

1) Класичний розв'язок: функціонал:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (-(ku')'u + qu^2 - 2f(u)) dx,$$

з множиною

$$F(A) = \{u \in C^2([0, 1]), u(0) = u(1) = 0\}.$$

У якості $\{\varphi_i\}$ можна взяти $\varphi_i(x) = x^i(1-x)$, $i = \overline{1, n}$. Тоді

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\int_0^1 (k\varphi_i')' \varphi_j + q\varphi_i \varphi_j \right) dx = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

2) Узагальнений розв'язок: функціонал:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (k(u')^2 u + qu^2 - 2f(u)) dx,$$

Енергетичний простір H_A зі скалярним добутком

$$(u, v)_A = \int_0^1 (ku'v' + quv) dx, \tag{3.2.27}$$

елементи якого

$$H_A = \{u : \|u\|_A < \infty, u(0) = u(1) = 0\}.$$

Це по суті є $\overset{\circ}{W}_2((0, 1))$ (2 — інтегровні з квадратом, 1 — до першої похідної, 0 — нуль на краях).

Приклад $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n-1}$ — так звані штафетини:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{3.2.28}$$

Це все, що стосується першої граничної задачі. Тепер про задачу третього роду:

Приклад 3.10

Задано рівняння

$$-(ku')' + qu = f, \quad 0 < x < 1$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} -ku' + \alpha_1 u &= \beta_1, & x = 0, \\ -ku' + \alpha_1 u &= \beta_1, & x = 1. \end{aligned}$$

Розв'язання. Розглянемо тут узагальнений розв'язок

$$\Phi(u) = \int_0^1 (k(u')^2 u + qu^2 - 2f(u)) \, dx + \alpha_1 u^2(0) + \alpha_2 u^2(1) - 2\beta_1 u(0) - 2\beta_2 u(1),$$

Енергетичний простір H_A з нормою

$$\|u\| = \int_0^1 (k(u')^2 + qu^2) \, dx + \alpha_1 u^2(0) + \alpha_2 u^2(1), \quad (3.2.29)$$

елементи якого

$$H_A = \{u : \|u\|_A < \infty\}.$$

Приклад $\{\varphi\} = \{\varphi_i\}_{i=0}^n$.