Теорія рядів Фур'є

Молодцов О. І.*

16 жовтня 2019 р.

Зміст

1.8 Достатні умови збіжності

Означення 1.8.1. $x_0 \in D_f$ називається *регулярною точкою функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ якщо функція має скінченні односторонні похідні:

$$\exists f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R} \tag{1.8.1}$$

і

$$f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}. \tag{1.8.2}$$

Означення 1.8.2. Кажуть, що функція f задовольняє у точці x_0 *умову Діні*, якщо $\exists h > 0$ таке, що обидва невласні інтеграли другого роду

$$\int_0^h \frac{|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)|}{t} \,\mathrm{d}t \tag{1.8.3}$$

є збіжними.

Теорема 1.8.3 (ознака Діні збіжності тригонометричного ряду Фур'є)
Якщо $f \in R([-\pi, \pi])$ — 2π-періодична і задовольняє у регулярній точці x_0 умову Діні, то тригонометричний ряд Фур'є функції f у точці x_0 збігається до $f(x_0)$.

*Молодцов Олександр Ілліч, semol2006@ukr.net

Доведення. Нам необхідно показати, що послідовність часткових сум $S_n(x_0) \to f(x_0)$. З одного боку, можна записати, що

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0+t) + f(x_0-t))D_n(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.8.4}$$

а з іншого

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} D_n(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0+0)+f(x_0-0))D_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.8.5}$$

Розглянемо тепер різницю

$$\begin{aligned} S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0+t) - f(x_0+0))D_n(t)\,\mathrm{d}t + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0-t) - f(x_0-0))D_n(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1.8.6}$$

Нагадаємо, що ми хочемо показати, що вираз вище $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

З умови Діні можна записати

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta \in (0,h) : \quad \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{t}\,\mathrm{d}t < \varepsilon. \tag{1.8.7}$$

А тоді можемо розбити кожний з двох попередніх інтегралів на дві частини і оцінити кожну окремо. Проробимо ці дії для інтегралу з $f(x_0+t) - f(x_0+0)$, для другого все буде аналогічно:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (f(x_0+t) - f(x_0+0))D_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\delta (f(x_0+t) - f(x_0+0))D_n(t)\,\mathrm{d}t + \\ + \int_\delta^\pi (f(x_0+t) - f(x_0+0))D_n(t)\,\mathrm{d}t = A_n(\delta) + \beta_n(\delta). \end{aligned} \tag{1.8.8}$$

Оцінимо $|A_n(x_0)|$:

$$\begin{aligned} |A_n(x_0)| &\le \int_0^\delta |f(x_0+t) - f(x_0+0)||D_n(t)|\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \frac{\pi}{2}\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{|t|}\,\mathrm{d}t < \frac{\pi\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{1.8.9}$$

Оцінимо $|\beta_n(x_0)|$:

$$|\beta_n(x_0)| = \int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\tfrac{1}{2})t\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{1.8.10}$$

за однією із доведених властивостей ядра Діріхле. □

1.9 Умова і ознака збіжності Гьольдера

Означення 1.9.1. Кажуть, що $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у точці x_0 задовольняє умову Гьольдера (Hölder) порядку α зі сталою m якщо $\exists \delta > 0$: $\forall t \in (0, \delta)$:

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)| \leq m \cdot t^\alpha. \tag{1.9.1}$$

Теорема 1.9.2 (ознака Гьольдера збіжності тригонометрчиного ряду Фур'є)
Якщо $f \in R([-\pi, \pi])$ — 2π-періодична і задовольняє у регулярній точці x_0 умову Гьольдера з $\alpha > 0$, то ряд Фур'є функції f у точці x_0 зігається до $f(x_0)$.

Доведення. З умови Гьольдера одразу отримуємо

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{t} \right| \leq \frac{m \cdot t^\alpha}{t} = \frac{m}{t^{1-\alpha}}. \tag{1.9.2}$$

Але $1 - \alpha < 1$, і тому інтеграл з умови Діні збіжний, тобто можна скористатися ознакою Діні. □

Наслідок 1.9.3
Якщо x_0 — точка розриву першого роду функції f і f задовольняє умову Гьольдера в x_0, то її ряд Фур'є у цій точці збігається до

$$\frac{f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)}{2}. \tag{1.9.3}$$

Будемо позначати

$$f'_\pm(x_0 \pm 0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{t}. \tag{1.9.4}$$

Теорема 1.9.4 (ознака збіжності ряду Фур'є функції з узагальненими односторонніми похідними)
Нехай $f \in R([-\pi, \pi])$ — 2π-періодична, і має скінченні узагальнені односторонні похідні, тоді

1) якщо x_0 — регулярна, то ряд Фур'є збінається до $\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}$;
2) якщо $\exists f'(x_0)$ то ряд Фур'є збігається до $f(x_0)$.

Доведення. Зі скінченності узагальнених односторонніх похідних маємо

$$\exists \delta > 0 : \forall t \in (0, \delta) \quad \frac{|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)|}{t} \leq m. \tag{1.9.5}$$

А далі з ознаки Гьольдера випливає збіжність. □

Теорема 1.9.5 (ознака збіжності ряду Фур'є кусково-гладкої функції)
Якщо f — кусково-гладка на $[-\pi, \pi]$, 2π-періодична функція, то її ряд Фур'є у точці x_0 збігається до

1) $f(x_0)$ якщо f неперервна в x_0;
2) $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ якщо f має розрив першого роду у точці x_0.

Нехай f — $2T$-періодична. Тоді можна записати

$$\frac{a_0}{2} + \sum \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{n\pi x}{T} \right), \tag{1.9.6}$$

де

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} \, \mathrm{d}x. \tag{1.9.7}$$

Причому, якщо f — парна, то $b_n = 0$, а

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} f(x) \cos \frac{n\pi x}{T} \, \mathrm{d}x. \tag{1.9.8}$$

Приклад 1.9.6
$f(x) = x$ розвинути в ряд Фур'є на $(0, 1)$ по:

1) $\sin$;
2) $\cos$;
3) $\sin, \cos$.

У всіх пунктах намалювати графік суми ряду Фур'є, який вийде.

Розв'язання. $2T$-періодично продовжуємо на $[-1, 1]$ непарним чином, тоді $b_n = \ldots = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$.

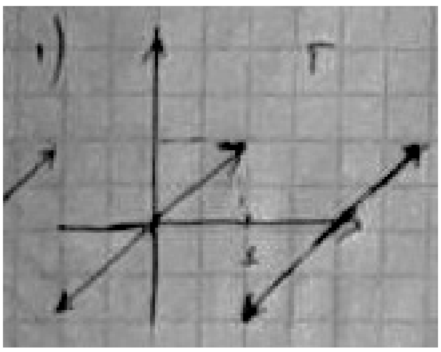

Рис. 1: Графік суми ряду Фур'є такий же як і початкової функції, що ілюструє істинність попередньої теореми