1. Визначення, основні характеристики випадкових процесів.

Озн1 (випадкового процесу): ***Випадковим процесом*** називається сукупність випадкових величин, заданих на одному ймовірнісному просторі (Ω, σ, P) і індексованих елементами деякої параметричної множини T. (позн $\xi(\omega,t)$, $\xi(t)$, $X(t)$, $Y(t,\omega)$, $t \in T$)

Озн: Вимірний простір S, в якому приймають значення випадкові величини, що утворюють випадковий процес, називається ***фазовим простором***.

Приклади параметричних просторів T:

- $\mathbf{N}, \mathbf{Z}^+, \mathbf{Z}$, злічена множина, тоді випадковий процес називається випадковою послідовністю
- $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{C}$ T - скінченний або нескінченний інтервал $\mathbf{R}$, то випадковий процес називається випадковим процесом з неперервним часом
- $\mathbf{R}^n$ $T \subset \mathbf{R}^n$ - випадкове поле

Приклади фазових просторів:

- $\mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ S - вимірна множина
- $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ - тоді ВП називається багатовимірним (векторним) ВП

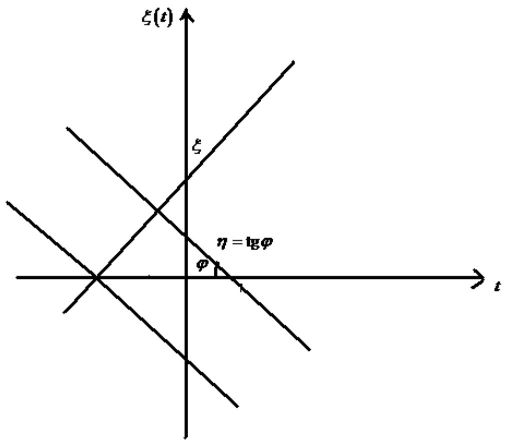
Озн: Якщо параметрична множина Т — злічена, то ВП наз. ***випадковою послідовністю***.

Якщо T=R або є інтервалом, то ВП наз ***ВП з неперервним часом.*** Якщо $T = R^n$, то ВП наз ***випадковим полем.***

Озн2 (випадкового процесу): ***Випадковим процесом*** з ймовірністним простором (Ω, σ, P), параметрично множиною Т та фазовим простором (S, F) називається функція двох змінних $\xi(\omega,t)$: $\Omega x T \to S$ така, що $\forall$ *фіксованного* $t \bullet T$ функція $\xi(\bullet, t): T \to S$ вимірна, $\forall$ *фіксованного* $\omega \bullet \Omega$ $\xi(\bullet, t): T \to S$ та наз ***траекторією***.

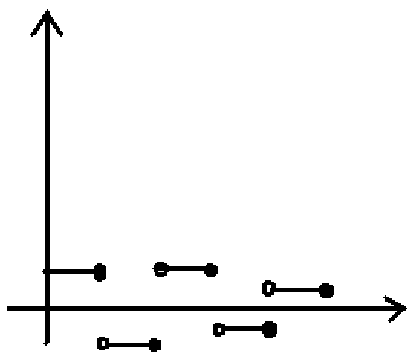
Приклади випадкових процесів та траєкторій

1. ξ, η - в.в., тоді $\xi(\omega,t) = \xi + \eta t$ - ВП $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, то траєкторії



(при деякому фіксованому ω)

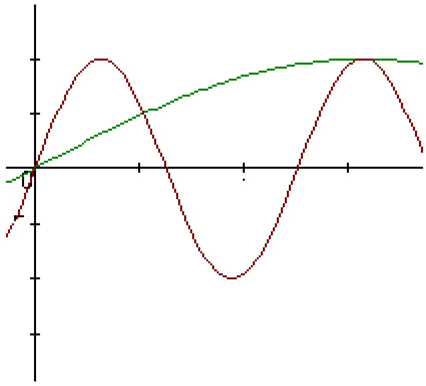
2. $\xi_i, i = 1, 2, \ldots$ - послідовність в.в., $\xi_i \in \mathbf{R}$ Визначимо ВП $\xi(\omega,t)$ наступним чином $\xi(\omega,t) = \xi_i$, якщо $t \in (i-1, i]$ $\xi(\omega,0) = 0$



(стрибкоподібні ВП)

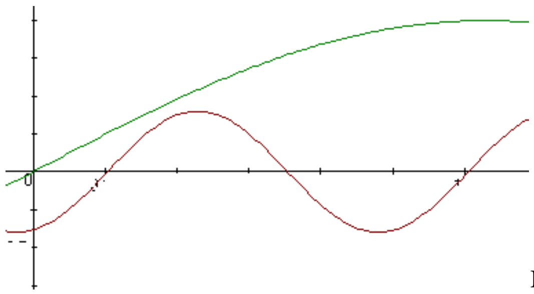
3. Нехай $\Omega = [0, \infty)$. Ймовірнісна міра задається функцією $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Визначимо ВП наступним чином $\xi(\omega,t) = \sin \omega t$. Траєкторії: при фіксованому ω період дорівнює $\dfrac{2\pi}{\omega}$



Стиснутість синусоїди визначається змінами ω.

4. Для в.в. $\theta,\xi,\eta\in\mathbf{R}$ Траєкторії ВП $\xi(\omega,t)=\theta\sin(\xi t+\eta)$



міняється частота та амплітуда

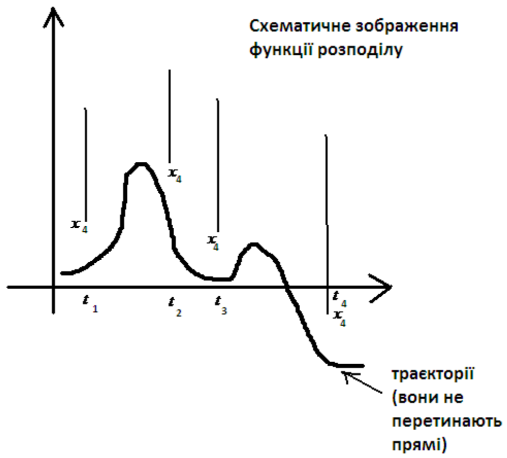
Озн3 (випадкового процесу): Нехай ймовірністний простір (Ω,σ,P), параметрична множина Т, фазовий простір (S,F). На множині функцій (або на підмножині функцій деякого класу) $\Phi=\{\phi : T\to S\}$ задана топологією. ***Випадковим процесом*** називається вимірне відображення $\xi(\omega):\Omega\to\mathbf{F}$

Озн: Нехай випадковий процес $\xi(\omega,t)\in\mathbf{R}$ ***n-вимірною функцією розподілу*** ВП $\xi(\omega,t)$ називається $\forall\ t_1\dots t_n(t_i\neq t_j)\forall\ x_1\dots x_n\in R\ \ F_{t_1\dots t_n}(x_1\dots x_n):\Omega\, x\, T\to[0;1]$

Визначаэться наступим чином:

$$F(t_1,\dots,t_n,x_1,\dots,x_n)=F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)=P(\xi(t_1)<x_1,\dots,\xi(t_n)<x_n)$$

Озн: Нехай $\xi(\omega,t)$ - ВП, $\xi(\omega,t)\in(S,F)$, $t\in T$, ***n-вимірною функцією розподілу*** $\forall\ t_1\dots t_n(t_i\neq t_j)\forall\ A_1\dots A_n\in F$ наз відображення $F_{t_1\dots t_n}(A_1\dots A_n):\Omega\, x\, S\to[0;1]$ таке, що $F_{t_1\dots t_n}=\{\xi(t_1)\in A_1\dots\xi(t_n)\in A_n\}$



$F_t(x)$ - одновимірна функція розподілу

Озн3. ВП $\xi(t)$, заданий усіма можливими скінченновимірними функціями розподілу, наз. ***заданим у широкому розумінні***.

Нехай задано вимірний простір (S,F), множину T, функції $F_{t1,...tn}(A_1...A_n)$

$\forall n=1,2,..,t_i \in T,\ A_i \in F$ такі, що виконуються умови узгодження:

1) $F_{t1,...tn}(A_1...A_n)\ \ \forall\, 1 \le k \le n$ є мірою на F по A_k

2) $\forall$ підстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$

$$F_{\sigma(1),...\sigma(n)}(A_{\sigma(1)}...A_{\sigma(n)}) = F_{t1,...tn}(A_1...A_n) \qquad (1)$$

3) $F_{t1,...,t_{n-1}tn}(A_1...A_{n-1}S) = F_{t1,...t_{n-1}}(A_1...A_{n-1})$

Th(Колмогорова) Якщо заданий узгоджений набір функцій (як визначено вище в (1)), то існує ймовірносний простір (Ω,σ,P). Ф-ю $\xi(\omega,t):\Omega\times T \to S$, яка є ВП таким, що співпадають розподіли $\xi(\omega,t)$ з функціями (1).

Озн.4 ВП $\xi(t),\eta(t)\ \ t\in T$ наз. ***стохастично еквівалентними***, якщо всі скінченновимірні розподіли $\xi(t)$ і $\eta(t)$ співпадають.

Озн.5 ВП $\xi(t)\in R(C),\ \ T\subset R$ - скінченний або нескінченний інтервал наз. ***неперервним за ймовірністю*** **в** $t\in T$**,** якщо $\lim\limits_{t_n\to t} P(|\,\xi(t_n)-\xi(t)\,|\ge\varepsilon)=0\ \ \forall\varepsilon>0$.

Якщо $\xi(t)$ неперервний за ймовірністю $\forall\, t \in T$, то $\xi(t)$ наз. ***неперервним за ймовірністю на Т.***

Озн.6 ВП $\xi(t) \in R(C)$, $T \subset R$ - скінченний або нескінченний інтервал наз. ***неперервним з ймовірністю* 1,** якщо $\exists\, \Omega^{'} \subset \Omega, \Omega^{'} \in \sigma, P(\Omega^{'}) = 1$, така що $\forall \omega \in \Omega^{'}$ траєкторія $\xi(\omega, \cdot)$ неперервна.

Приклад 1. Нехай η – в.в. з неперервною функцією розподілу $F(x). F(0) = 0$. Визначимо ВП на $R^{+} = [0, +\infty)$

$$\xi(t) = \begin{cases} 0, \eta \geq t \\ 1, \eta < t \end{cases}.$$

Усі траєкторії ВП $\xi(t)$ розривні з імовірністю 1. Але ВП $\xi(t)$ неперервний за ймовірністю $P\big(\xi(t) + \xi(t + \Delta)\big) = P(t \leq \eta < t + \Delta) \to 0$. З неперервності за ймовірністю не випливає неперервність з ймовірністю 1.

Приклад 2. Нехай $\Omega = [0,1]$ з мірою Лебега, $T = [0,1] \subset R$. Визначимо ВП: $\xi(t, \omega) = 0\ \forall \omega \epsilon \Omega, \forall t \epsilon T$.

$$\xi(\omega, t) = \begin{cases} 1, t = \omega \\ 0, t \neq \omega \end{cases}$$

$\xi(t, \omega)$ - квадрат на площині ΩxT η має всі траєкторії розривні у т. $\omega = t$ Але ВП $\xi(t), \eta(t)$ стохастично еквівалентні.

Сепарабельність. Класифікація ВП

Теорема Колмогорова для випадкових величин Нехай $F(x): R \to [0,1]$з властивостями

1)$0 \leq F(x) \leq 1\ \forall x \epsilon R$

2) Неспадаюча (1)

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1,$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

4) $F(x)$ неперервна зліва.

В.в. $\xi: \Omega \to R$ - вимірна.

Побудова в.в. з функцією розподілу (1): Візьмемо $\Omega = R$ з σ-алгеброю борелівських множин та мірою Лебега $P(\Omega) = 1$. $\xi(\omega)$ має функцію розподілу (1). $\xi(\omega)$: $\Omega \to R$ - вимірне. $P(A) = F(x_2) - F(x_1)$.

Теорема Колмогорова для випадкових процесів

$F(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n): T\text{x}R^n \to [0,1]$

$\Omega = \{\varphi | T \to R\} = F$

$C_{t_1,\dots,t_n}(A_1, \dots, A_n)$ - циліндрична множина

$C_{t_1,\dots,t_n}(A_1, \dots, A_n) = \{\varphi | \varphi(t_1) \epsilon A_1, \dots, \varphi(t_n) \epsilon A_n\}$

$\xi(\varphi, t) = \varphi(t)$

Означення Нехай задано ВП $\xi(t, \omega) \epsilon R$, $t \epsilon T, T \subset R$ нескінч. або скінч. інтервал. ВП $\xi(t, \omega)$ називається ***сепарабельним***, якщо зліченна підмножина $\tilde{T} \subset T$всюди щільна вT, тобто $\tilde{T} = \{t_n\}, t_n \epsilon T$ така, що $\forall [a, b] \subset R, \forall (T_0, T_1) \subset T$ $P\big(\varphi(t) \epsilon [a, b], t \epsilon (T_0, T_1) \big| \xi(t_k) \epsilon [a, b], t_k \epsilon (T_0, T_1)\big) = 1$

Твердження 1. Нехай ВП $\xi(t) \epsilon R, T \subset R$ – скінч. або нескінч. інтервал, неперервні з ймовірністю 1. Тоді ВП $\xi(t)$ - сепарабельний.

Класифікація ВП за властивостями фазового простору та параметричної множини

T\S	Дискретний	Неперервний
Дискр.	ВП з дискретним часом (вип. Послідовності) з дискретним значенням	ВП зі значеннями з неперервної множини
Непер.	ВП з неперервним часом і дискретними	ВП з неперервним часом і неперервними

Класифікація ВП за скінченновимірними функціями розподілу

1. ВП з незалежними значеннями

Означення 1. ВП $\xi(t,\omega)\epsilon S, t\epsilon T$ називається ***випадковим процесом з незалежними*** значеннями, якщо$\forall t_1, \dots, t_n \epsilon T$ $t_i \neq t_j, i \neq j$ в.в. $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ незалежні (у сукупності)

Наприклад, у класичному визначенні ймовірн. $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\} \forall A \epsilon \Omega\ P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ Нез. події існують ⇔ $\overline{\text{n}}$ – складене.

2. ВП з незалежними приростами

Означення 2 ВП $\xi(t) \epsilon R(C)$, $t \epsilon T, T$ - нескінч. або скінч. Інтервал з R називається ***випадковим процесом з незалежними приростами*** якщо $\forall n \forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $t_i \neq t_j, i \neq j$ в.в. $\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ незалежні в сукупності.

3. Марківські ВП

Означення: ВП $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathrm{T}, \mathrm{T}$ – впорядкована множина наз. ***Марківським***, якщо $\forall n$ $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, $t_i \in \mathrm{T}, \forall\ x_1, \dots, x_n,\ x_i \epsilon \mathbb{R}$ виконується $\mathbb{P}\{\xi(t_n) < x_n | \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, \xi(t_1) = x_1\} = \mathbb{P}\{\xi(t_n) < x_n | \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$.

Означення: Марківський ВП з дискретним часом називають ***ланцюгом Маркова.***

Якщо ВП $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ марківський, та $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_{n+1} < \ldots < t_m$ і $\xi(t_n) = x_n$ фіксоване, то в.в. $\xi(t_1), \dots, \xi(t_{n-1})$ та $\xi(t_{n+1}), \dots, \xi(t_m)$ незалежні.

4. Стаціонарні ВП

Означення: ВП $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathrm{T}, \mathrm{T}$ – скінченний або не скінченний інтервал наз. ***Стаціонарним у вузькому сенсі***, якщо $\forall n \ \forall t_1 < t_2 <\ldots< t_n$, $\tau > 0$: $\mathcal{F}(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{F}(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n)$, $t_i + \tau \in T \Rightarrow \mathcal{F}_t(x) = \mathcal{F}(x)$, (не залежить від t)

Означення: ВП $\xi(t) \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ наз. ***Стаціонарним у широкому смислі***, якщо $\mathbb{M}\xi(t) = const$, $\mathcal{K}(\mathrm{t},\mathrm{s}) = \tau$, $\tau = s - t$.

5. Гауссівський ВП

6. Пуассонівський ВП

7. Ергодичний ВП

8. Броунівський ВП

9. L_2 – ВП

10. Дифузійні ВП

Математичне сподівання, дисперія, кореляційна функція ВП

Нехай $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathrm{T}$ - ВП

Означення: ***Математичним сподіванням випадкового процесу*** $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathrm{T}$, наз. така невипадкова функція $m(t): T \to \mathbb{R}$, що: $m(t) = m_\xi(t) = \mathbb{M}\xi(t)$.

Властивості математичного сподівання:

1) $\varphi(\mathrm{t}): \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ не випадкова функція, то: $\mathbb{M}\big(\xi(t) + \varphi(\mathrm{t})\big) = \mathbb{M}\xi(t) + \varphi(\mathrm{t})$; $\mathbb{M}\big(\xi(t)\varphi(\mathrm{t})\big) = \varphi(\mathrm{t}) m_\xi(t)$
2) Нехай $\xi_i(t) \in \mathbb{R}$ $i = \overline{1..n}$ $\mathbb{M}(\sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbb{M}\xi_i(t))$
3) Для ВП $\xi_i(t) \in \mathbb{R}, t \in T$ та функцій $\varphi_i(\mathrm{t}): \mathrm{T} \to \mathbb{R}$, $\psi_i(t): T \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1..n}$ $\mathbb{M}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i(t)\varphi_i(\mathrm{t}) + \psi_i(t)) = \sum_{i=1}^{n}(\varphi_i(\mathrm{t})\mathbb{M}\xi_i(t) + \psi_i(t))$

4) Якщо ВП $\xi(t), \eta(t) \in \mathbb{R},\ t \in T$, $\forall t\ \ \xi(t)$ і $\eta(t)$ некорельновані(незалжені), то $\mathbb{M}\xi(t)\eta(t) = m_\xi(t) m_\eta(t)$

Означення: ***Дисперсією випадкового процесу*** $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ наз. така невипадкова функція $D_\xi: T \to \mathbb{R}^+$, така що : $D_\xi(t) = \mathbb{M}(\xi(t) - m_\xi(t))^2,\ t \in T$.

ВП $\hat{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$ - центрований ВП.

$\mathbb{M}\hat{\xi}(t) = 0;\ \ D\hat{\xi}(t) = \widehat{\mathbb{M}\xi}^2(t)$

Властивості дисперсії:

1) $D_\xi(t) > 0,\ \forall t \in T$
2) $\varphi(\mathrm{t}): \mathrm{T} \to \mathbb{R} \quad D\big(\xi(t) + \varphi(\mathrm{t})\big) = D\xi(t)$
3) Якщо ВП $\xi(t), \eta(t) \in \mathbb{R},\ t \in T$, $\forall t\ \ \xi(t)$ і $\eta(t)$ некорельновані(незалжені), то $D_\xi(t) + D_\eta(t) = D(\xi(t) + \varphi(\mathrm{t}))$
4) Для некорельованих (незалеж.) ВП $\xi(t), \eta(t) \in \mathbb{R},\ t \in T$, та функцій $\varphi(\mathrm{t}), \psi(t), \theta(t): \mathrm{T} \to \mathbb{R} \quad D\big(\varphi(\mathrm{t})\xi(t) + \psi(t)\eta(t) + \theta(t)\big) = \varphi^2(\mathrm{t})D\xi(t) + \psi^2(t)D\eta(t)$

Означення: ***Середньоквадратичним відхиленням випадкового процесу*** $\xi(t), t \in \mathbb{R}$, наз. $\sigma_\xi(t) = \sqrt{D_\xi(t)}$

ВП $\frac{\xi(t) - m_\xi(t)}{\sigma_\xi(t)} = \frac{\hat{\xi}(t)}{\sigma_\xi(t)}$ – нормований випадковий процес. Очевидно, що $\mathbb{M}\frac{\hat{\xi}(t)}{\sigma_\xi(t)} = 0, D\frac{\hat{\xi}(t)}{\sigma_\xi(t)} = 1$.

Означення 4. ***Кореляційною функцією*** ВП $\xi(t) \in \mathbf{R}$, $t \in T$ називається невипадкова функція двох змінних $K_\xi(t_1, t_2): T^2 \to R$ така, що

$$K(t_1,t_2)=M\left(\xi(t_1)-m_\xi(t_1)\right)\left(\xi(t_2)-m_\xi(t_2)\right)$$

Означення 4+1/2. ***Центрованим випадковим процесом*** для ВП $\xi(t)$ називається випадковий процес $\xi_n(t)=\dfrac{\xi^0(t)}{\sigma_\xi(t)}$ тобто $M\xi_n(t)=0 \quad D_\xi(t)=1$

$K_\xi(t_1,t_2)=M\xi^{.0}(t_1)\xi^0(t_2)\,(1)$

Властивості кореляційної функції

1. $K_\xi(t_1,t_2)=K_\xi(t_2,t_1)$

2. $K_\xi(t_1,t_2)=D_\xi(t)$

3. Для будь-яких невипадкових функцій $\varphi(t),\psi(t),\theta(t): T\to R$, випадковий процес $\xi(t)\in R, t\in T$

$$\eta_1(t)=\varphi(t)\xi(t), \eta_2(t)=\xi(t)+\psi(t), \eta_3(t)=\varphi(t)\xi(t)+\theta(t)\ K_\xi(t_1,t_2)$$

$$K_{\eta_1}(t_1,t_2)=\varphi(t_1)\varphi(t_2)K_\xi(t_1,t_2)$$

$$K_{\eta_2}(t_1,t_2)=K_\xi(t_1,t_2)$$

$$K_{\eta_3}(t_1,t_2)=\varphi(t_1)\varphi(t_2)K_\xi(t_1,t_2)$$

$$K_4(t_1,t_2)=0$$

4. $\left|K_\xi(t_1,t_2)\right|\le\sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}=\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)$

Доведення. $0\le D\big(\sigma(t_1)\xi(t_2)+\sigma(t_2)\xi(t_1)\big)=D\big(\sigma(t_1)\xi^0(t_2)+\sigma(t_2)\xi^0(t_1)\big)=$

$$=M\left(\sigma(t_1)\xi^0(t_2)+\sigma(t_2)\xi^0(t_1)\right)^2=D(t_1)D(t_2)+D(t_2)D(t_1)+2\sigma(t_1)\sigma(t_2)K(t_1,t_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sigma(t_1)\sigma(t_2)+K(t_1,t_2)\ge0 \quad \text{та} \quad -K(t_1,t_2)\le\sigma(t_1)\sigma(t_2)$$

Аналогічно отримуємо $K(t_1,t_2)\le\sigma(t_1)\sigma(t_2)\Rightarrow\left|K_\xi(t_1,t_2)\right|\le\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)$

Означення 5. ***Нормованою кореляційною*** функцією випадкового процесу $\xi(t)\in\mathbf{R}$ називається $\rho_\xi(t_1,t_2)=\dfrac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)}$

Очевидно, що $\left|\rho_{\xi}\left(t_1,t_2\right)\right| \le 1$. $\left|\rho_{\xi}\left(t_1,t_2\right)\right| = 1 \Rightarrow$ випадкові величини лінійно залежні

Означення 6. Випадкові процеси $\xi(t),\eta(t)$ називаються ***некорельованими***, якщо $\forall t_1,t_2 \in T \quad K_{\xi\eta}\left(t_1,t_2\right) = 0$

Означення 7. Нехай ВП $\xi(t) \in R, t \in T_1$; $\eta(t) \in R, t \in T_2$ (зазвичай $T_1 = T_2$). Тоді ***взаємною кореляційною*** функцією називається
$K_{\xi\eta}(t_1,t_2): T_1 x T_2 \to R$ така, що $K_{\xi\eta}(t_1,t_2) = M(\dot{\xi}(t_1)\dot{\eta}(t_2)), t_1 \in T_1, t_2 \in T_2$ (4)

Властивості взаємної кореляційної функції

1. $K_{\xi\eta}\left(t_1,t_2\right) = K_{\xi\eta}\left(t_2,t_1\right)$

2. Для невипадкових функцій $\varphi(t)\psi(t)$ ($\varphi(t): T_1 \to R, \psi(t): T_2 \to R$ та ВП

$$x_1 = \varphi(t)\psi(t), x_2 = \psi(t)\eta(t),$$

$$\theta_1(t): T_1 \to R, \theta_2(t): T_2 \to R$$

$$x_3 = \xi(t) + \theta_1(t), x_4 = \eta(t) + \theta_2(t)$$

$$x_5 = \xi(t)\varphi(t) + \theta_1(t), x_6 = \eta(t)\xi(t) + \theta_2(t)$$

$K_{x_1\eta}(t_1,t_2) = \varphi(t_1)K_{\xi\eta}(t_1,t_2)$ $K_{\xi x_2}(t_1,t_2) = \psi(t_2)K_{\xi\eta}(t_1,t_2)$

$$K_{x_1x_2}(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\psi(t_2)K_{\xi\eta}(t_1,t_2)$$

$$K_{\xi x_4}(t_1,t_2) = K_{x_3\eta}(t_1,t_2) = \psi(t_2)K_{\xi\eta}(t_1,t_2)$$

$$K_{x_5x_6}(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\psi(t_2)K_{\xi\eta}(t_1,t_2)$$

3. Для ВП $\xi(t),\eta(t) \in R, t \in T_1$ $\left|K_{\xi\eta}\left(t_1,t_2\right)\right| \le \sqrt{D_{\xi}\left(t_1\right)D_{\eta}\left(t_2\right)}$ (доводиться аналогічно попереднім)

Означення 8. ***Нормованою взаємною кореляційною функцією процесів*** $\xi(t), \eta(t) \in \mathbf{R}, t \in T$ називається $\rho_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \dfrac{K_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\eta(t_2)}$

Нормована кореляційна функція визначає рівень лінійної залежності випадкових процесів.

Очевидно, що $\left|\rho_{\xi\eta}(t_1, t_2)\right| \le 1$

Твердження 1.Нехай $\xi_i(t) \in R, t \in T_1$. Тоді ВП $\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t), \ t \in T$ має кореляційну функцію $K_\eta(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} K_{\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{i \ne j} K_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2)$. (Доведення за ММІ)

Неперервність і похідна ВП у середньоквадратичному

Нехай $\xi_n \in R\ M|\xi_n|^2 < \propto$

<u>Означення 1</u>

Послідовність в.в. ξ_n ***збігається у середньоквадратичному****, якщо*

$$\exists\, \xi \quad \in R: \lim_{n\to\infty} M(\xi_n - \xi \quad)^2 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Позначення збіжності (1):

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, \xi_n = \xi$$

Властивості збіжності (1):

- Якщо послідовність збігається у середньоквадратичному, то збігається за ймовірністю
- Якщо $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, \xi_n = \xi$, то $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, M\, \xi_n = M\, \xi$
- Якщо $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, \xi_n = \xi$, то $M\, \underset{n\to\infty}{l.i.m}\, \xi_n = \underset{n\to\infty}{l.i.m}\, M\, \xi_n = M\, \xi$

Розглянемо ВП $\xi(t) \in R,\ t \in T, T$ – скінченний або нескінченний **(2)** інтервал та $M\,\xi^{2} < \propto\ \forall\, t \in T$ (L_2 ВП)

Означення 2

ВП (2) називають ***неперервним у середньоквадратичному*** *в $t \in T$, якщо*

$$\underset{|\Delta|\to 0}{l.i.m}\, \xi\ (t+\Delta) = \xi\ (t)$$

Якщо ВП неперервний у середньоквадратичному $\forall\, t \in T$, то $\xi\ (t)$ називають ***неперервним у середньоквадратичному на T***

Означення 3

Похідною *ВП (2) в $t \in T$ називають ВП $\xi'\ (t)$, для якого існує границя*

$$\underset{|\Delta|\to 0}{l.i.m} \frac{\xi\ (t+\Delta) - \xi\ (t)}{\Delta} = \xi'\ (t)$$

Якщо похідна існує $\forall\, t \in T$, то ВП $\xi\ (t)$ називають ***диференційованим на T***

Твердження 1

Якщо ВП (2) неперервний в у середньоквадратичному в $t \in T$, то:

$$\underset{|\Delta|\to 0}{l.i.m}\, M\,\xi\ (t+\Delta) = M\,\xi\ (t) = m_{\xi}(t)$$

Твердження 2

Якщо ВП (2) неперервний у середньоквадратичному в $t \in T$, то $K_{\xi}(t_1, t_2)$ неперервна в t як функція 2 змінних

Твердження 3

Якщо ВП (2) має похідну в $t \in T$*, то* $\exists m'_{\xi}(t)$ *і* $M\,\xi'(t) = m'_{\xi}(t)$

<u>Твердження 4</u>

Якщо $\exists$ *похідна ВП (2) на* T*, то виконуються рівності:*

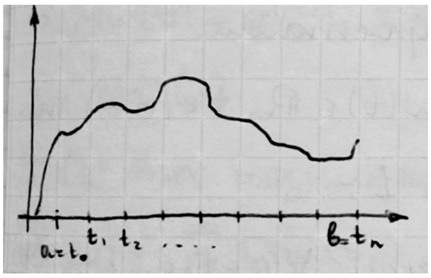
a) $K_{\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$

b) $R_{\xi\,\xi'}(t_1, t_2) = K_{\xi\,\xi'}(t_1, t_2) = \frac{\partial\ K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_2}$

c) $R_{\xi'\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi'\xi}(t_1, t_2) = \frac{\partial\ K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_1}$

Інтеграл ВП у середньоквадратичному

Для ВП (2) розглянемо таку границю



$$[a, b] \subset T$$
$$[t_0, t_1] = \theta_1, (t_{i-1}, t_i] = \theta_i, i = \overline{2, n}$$
$$\Delta_i = t_i - t_{i-1}, i = \overline{1, n}$$
$$\tau_i \in \theta_i$$

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m} \sum_{i=1}^{n} \xi(\tau_i)\Delta_i, \max|\Delta_i| \to 0 \qquad \textbf{(4)}$$

<u>Означення 4</u>

Якщо $\exists$ *границя у середньоквадратичному (4)* $\forall$ *розбиття* $[a, b]$ *та* $\forall$ *вибору точок*

$\tau_i \in \theta_i$*, то ця границя (4) називається* ***інтегралом у середньоквадратичному випадкового процесу*** $\xi(t)$ *на* $[a, b]$ *і позначається:*

$$\int_a^b \xi(t)\,dt = \eta(t)$$

Властивості інтегралу (4):

1) $\int_a^b \alpha\xi(t)dt = \alpha\int_a^b \xi(t)dt$
2) $\int_a^b \big(\xi_1(t)+\xi_2(t)\big)dt = \int_a^b \xi_1(t)dt + \int_a^b \xi_2(t)dt$
3) $\int_a^b \sum_{i=1}^n \alpha_i\, \xi_i(t)dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b \xi_i(t)dt$
4) $M\int_a^b \xi(t)dt = \int_a^b M\xi(t)dt$
5) Позначимо $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds,\ t \in [a,b]$. Тоді $K_\eta(t_1,t_2) = \int_a^{t_1}\int_a^{t_2} K_\xi(s_1,s_2)ds_2 ds_1,\ t_1,t_2 \in [a,b]$

$R_{\eta\xi}(t_1,t_2) = \int_a^{t_1} K_\xi(s_1,t_2)ds_1$ $R_{\eta\xi}(t_1,t_2) = \int_a^{t_2} K_\xi(t_1,s_2)ds_2$

Вінерівські ВП

Процес з незалежними приростами.

ОЗНАЧЕННЯ ***Вінерівським ВП*** називають процес $\omega(t)\epsilon\mathbb{R},\ t \in [0,\infty)$ такий, що:

1) $\omega(0) = 0$ з ймовірністю 1
2) $\omega(t)$ має незалежні прирости: $\forall\ 0 \le t_1 < \cdots < t_n : \omega(t_1), \omega(t_2) - \omega(t_1)$,..., $\omega(t_n) - \omega(t_{n-1})$ – незалежні у сукупності
3) $\omega(t)$ однорідний: $\forall h > 0$ розподіли $\omega(t+h) - \omega(t)$ та $\omega(t)$ $\forall t\epsilon T$ співпадають
4) $\omega(t)$ неперервний з імовірністю 1.

ТВЕРДЖЕННЯ 1. Одновимірна функція розподілу $F_t(x)$ є гауссівська з параметрами $at, \sigma^2 t(a,\sigma \in \mathbb{R})$, a – коефіцієнт зсуву, σ – коефіцієнт дифузії. $\mathrm{a} = \mathrm{M}\omega(1), \sigma^2 = D\omega(1)$

Доведення на с. 21 в фотках

ТВЕРДЖЕННЯ 2. Скінченновимірна щільність $\omega(t)$ $\forall n$ $\forall 0 \le t_1 < \cdots < t_n$ $\big(t_i \ne t_j, i \ne j\big)$ дорівнює

$f_{t_1 \dots t_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{\left(x_i - x_{i-1} - a(t_i - t_{i-1})\right)^2}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})}}, t_0 = 0$

ТВЕРДЖЕННЯ 3. Кореляційна функція випадкового процесу $\omega(t)$ має вигляд:

$K_\omega(t_1, t_2) = \sigma^2 min\{t_1, t_2\}$

Доведення на с. 22 в фотках

ТВЕРДЖЕННЯ 4. Випадковий процес $\omega(t)$ не має похідної у середньо-квадратичному.

Доведення на с. 23 в фотках

Твердження 5 ВП $\omega(t)$ має інтеграл у сер.квадр. $\eta(\boldsymbol{t}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{s})\, \boldsymbol{ds}$ та $\boldsymbol{M}\eta(t) = \frac{1}{2}at^2, D\eta(t) = \frac{1}{3}t^3\sigma^2;$ $K_\eta(t_1, t_2) = \sigma^2\left[\frac{1}{2}t_1^2 t_2 - \frac{1}{6}t_1^3\right],\ t_1 < t_2$

Твердження 7 Для вінерівського ВП умовна щільність при $0 \le t_1 < t < t_2$

$f_t(\omega(x) | \omega(t_1) = x_1, \omega(t) = x_2)$ гауссівська з мат. сподіванням $x_1 + \frac{(x_2 - x_1)(t - t_1)}{t_2 - t_1}$

та дисперсією $\sigma^2 \frac{(t - t_1)(t_2 - t)}{t_2 - t_1}$

Гауссівські ВП (фото 24)

Моделювання ВП Венера та гауссівського

Означення 1 ***випадковий процес*** $\xi(t) \in R, t \in T$ наз. ***гауссівським***, якщо $\forall\ t_1, t_2, \dots, t_n \in T \quad t_i \ne t_j,$ n=1,2,…, якщо T нескінч., n=1,2…,|T|, якщо T-скінч. мн-на, вип. вектор $\left(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)\right)$ має гауссівський розподіл.

(1)

$$M\xi(t_i) = m_i, \qquad D\xi(t_i) = \sigma_i^2, \qquad K\left(t_i, t_j\right) = k_{ij},\ K = ||k_{ij}||_{i=1}^{n}$$

$\rho_{ij} = \rho(t_i, t_j)$ – нормована корел. ф-я

$$P = ||\rho_{ij}||_1^n$$

Моделювання вінерівського та гаусівського ВП

Нехай ДВЧ (датчик випадкових чисел) задано. Він видає послідовність реалізацій незалежних в.в. з рівномірним на [0,1] розподілом $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ (2) Тобто $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ або реалізації, або вип.. величини рівномірного та незал. розподілу на [0,1]

Нехай $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ Тоді послідовність $\eta_1, \ldots, \eta_n$, де $\eta_i = \Phi^{-1}(\alpha_i)$, незалежних стандартних нормальних в.в. (або їх реалізації)

Моделювання вінерівського ВП

$w(t)$ з коеф. зсуву $a = 0$ та коеф. дифузії σ^2 у двійково-раціональних точках, тобто для $t = \frac{k}{2^n}$, $n = 0,1,\ldots$, $k = 0,1,\ldots$

Твердження 1. Якщо фіксовано значення $w\left(\frac{k-1}{2^n}\right) = x_1$ та $w\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = x_2$, тоді розподіл в.в. $w\left(\frac{k}{2^n}\right)$ є нормальний з мат. сподіванням $\frac{1}{2}\left(w\left(\frac{k-1}{2^n}\right) + w\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right)$ та дисперсією $\sigma^2 \frac{(t-t_1)(t_2-t)}{t_2-t_1} = \frac{\sigma^2}{2^{n+1}}$ $\quad (t = \frac{k}{2^n}, t_1 = \frac{k-1}{2^n}, t_2 = \frac{k+1}{2^n})$

(3)

За ДВЧ (2,3) будуємо послідовність станд. норм. розподілу в.в. η_{ij}, $i = 0,1,2,\ldots,$ $j = 0,1,2,\ldots$

Будуємо ВП $w(t)$ послідовно (з коев. зсуву a)

$$w(n) = an + \sum_{i=1}^{n} \sigma \eta_{i0}, n \in {}^{+}$$

$$w(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(w(n+1) + w(n)) + \frac{\sigma}{2}\eta_{n+1,1}$$

Нехай побудовано $w(t)$ для $t = \dfrac{k}{2^n}$. Тоді

$$w\left(\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(w\left(\frac{k+1}{2^n}\right) + w\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) + \frac{\sigma}{2^{n+1}}\eta_{k+1,n+1}$$

Якщо $n \to \infty$, то ВП $w(t)$ буде побудовано в двійково раціональних точках.

Побудова $w(t)$ з $a = 0$, $Dw(t) = \sigma^2 t$ з використанням граничних теорем

Твердження 2. Якщо η_i - послідовність незал. станд. нормальних в.в., то скінченновимірні розподіли ВП $\xi(t) = \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k \in n} \eta_k$ збігаються до розподілу вінерівського ВП $w(t)$ з коеф. зсуву 0 та коеф. дифузії σ^2.

Моделювання гауссівскького ВП $\xi(t)$ з $M\xi(t) = 0$ та кореляційною ф-єю $K(t_1, t_2)$

Нехай η_i - послідовність незал. гауссівських в.в. станд. Побудуємо ВП $\xi(t)$ в $t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$. Шукаємо ВП у вигляді $\xi(t_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}\eta_j$

$$K(t_m, t_n) = M\left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\eta_j\right)\left(\sum_{j=1}^{m} a_{mj}\eta_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{mj}a_{nj},\ 1 \le m \le n \qquad (4)$$

З (4) послідовно знаходимо коеф.

$$a_{11} = \pm\sqrt{K(t_1, t_2)}$$
$$a_{21} = \pm\frac{K_{12}}{a_{11}}$$

Однорідний ВП Пуассона

В.в. $\tau \in$ має показниковий розподіл з параметром λ якщо ф-я розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Властивості в.в. τ з розподілом (1):

1. Щільність $f(x)=\begin{Bmatrix}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{Bmatrix}$

2. Характеристична ф-я

$$\varphi(t)=Me^{it\tau}=\int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{1-\frac{it}{\lambda}}$$

3. $Mx^k=\dfrac{k!}{\lambda^k}$

Доведення

$$\varphi^{(k)}(t)=i^k\int_0^\infty x^k e^{itx-\lambda x}dx;$$

$$\varphi^{(k)}(0)=i^k\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}dx=i^k M\tau^k; \qquad (2)$$

З іншого боку

$$\varphi^{(k)}(0)=\left.\left(\frac{1}{1-\frac{it}{\lambda}}\right)^{(k)}\right|_{t=0}=k!\frac{i^k}{\lambda^k} \qquad (3)$$

$$(2)=(3)\Rightarrow M\tau^k=\frac{k!}{\lambda^k}$$

$$M\tau=\frac{1}{\lambda}$$

$$D\tau=M\tau^2-(M\tau)^2=\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$$

4. Відсутність післядії

$P\{\tau>t+x|\tau>t\}=\dfrac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda x}$ Тобто розподіл в.в. τ умовно $\tau>t$ співпадає з розподілом τ

Нехай задано послід. в.в. τ_n - нез. У сукупності з показниковим розподілом (парам. λ). Визначимо в.в. S_n

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$ $\qquad \tau_0 = 0, \quad \tau_i = t_i - t_{i-1}$

<u>Озн 1.</u> Однорідним ВП Пуассона з параметром λ

$\prod_{\lambda}(t) : \prod_{\lambda} = max\{n | S_n < t\}$ - кількість подій на інтервалі (0,t).

Властивості:

Твердження 1.

Для ВП $\prod_{\lambda}(t)$ виконується:

1) $P(\prod_{\lambda}(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$, n=0,1,2,... (4)
2) $M\Pi_{\lambda}(t) = \lambda t, \; D\Pi_{\lambda}(t) = \lambda t, \; K(t_1, \; t_2) = \lambda \, min\{t_1, \; t_2\}$
3) $\Pi_{\lambda}(t)$ - ВП однорідний з незалеж. приростами

<u>Озн 2.</u> Однорідним ВП Пуассона назів відповідний ВП з незалеж. приростами та одновимірною ф-єю розподілу $P(\Pi_{\lambda}(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \; \dots$ та ймовірністю 0 в інших випадках

Очевидно, що **<u>Озн 2</u>** => **<u>Озн 1</u>**

<u>Твердження 2.</u>

n-вимірний розподіл $\Pi_{\lambda}(t)$ для $\forall n = 1, 2, \dots \; \forall \; 0 < t_1 < \dots < t_n$

$$P\{\; \Pi_{\lambda}(t_1) = k_1, \; \dots, \; \Pi_{\lambda}(t_n) = k_n\} = \begin{cases} \lambda^{kn} e^{-tn} t_1{}^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2} \dots (t_n - t_{n-1})^{kn} \\ 0, \text{ інакше} \end{cases}$$

<u>Твердження 2:</u>

Можна взяти за Озн 3 однорідний ВП Пуассона

Твердження 3:

Якщо інтервал $\Delta_i \subset [0, +\infty)$ та попарно не перетинаються, то ймов. того,що на інт $\Delta_i,\ i = \overline{1,r}$ виникає k_i подій, дорівнює $\prod_{i=1}^{r} \frac{(\lambda\Delta_i)^{k_i} e^{-\lambda\Delta_i}}{k_i!}$

Твердження 4:

Для одновимірного ВП Пуассона $\Pi_\lambda(t)$ викон при $\Delta \to 0,\ \Delta > 0$

$P(\Pi_\lambda(t) = 1) = \lambda\Delta + o(\Delta)$

$P(\Pi_\lambda(t) > 1) = o(\Delta)$

Озн 4.

Однорідним ВП Пуассона наз. дійснознач ВП з незал приростами, для якого викон умови (5)

Озн 5.

Однорідним ВП $\Pi_\lambda(t),\ \lambda > 0$, наз. ВП який приймає значення з Z^+, $P(\Pi_\lambda(0) = 0) = 1,$ траекторії зростають на 1 в точках $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ та в.в. $t_i - t_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots,\ t_0$ - незалежні в сукупності та мають показниковий розподіл з параметром λ

Стаціонарні ВП

Означення 1 Нехай вип. посл. $\xi_n \in (S, F), n \in Z^+$. ***Випадкова послідовність*** називається ***стаціонарною***, якщо $\forall n \in N \ \ \forall A_1, \dots, A_n \in F$ (1)

$P\{\xi_0 \in A_1, \dots, \xi_{n-1} \in A_n\} = P\{\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n\}$

Наслідок Для випадкової послідовності (1) виконується
$P\{\xi_0 \in A_1, \dots, \xi_{n-1} \in A_n\} = P\{\xi_k \in A_1, \dots, \xi_{n+k} \in A_n\} \, \forall k \in N \, \forall n \in Z^+$

Означення 2 ВП $\xi(t) \in R, t \in T, T = [0, \infty]$ або $T = (-\infty, +\infty)$. ***ВП*** $\xi(t)$ називають ***стаціонарним у вузькому сенсі***, якщо $\forall n \in N \ \ \forall t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ n −вимірна ф-я розподілу $F(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = P(\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n) = P(\xi(t_1 + \tau) < x_1, \dots, \xi(t_n + \tau) < x_n), \tau > 0$

1) Ф-я розподілу не залежить від зсуву часу
   $F(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = F(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, x_1, \dots, x_n)$
   $\tau_i = t_{i+1} - t_i, i = \overline{1, n-1}$
   Та залежить від $2n - 1$ змінної (а не $2n$)
2) Одновимірна ф-я розподілу не залежить від часу $F(t, x) = F(t + \tau, x) = F(x)$
   2-вимірна ф-я розподілу залежить від 3-ох змінних
   $F(t_1, t_2, x_1, x_2), F(\tau, x_1, x_2), \tau = t_2 - t_1, t_2 > t_1$
3) $M\,\xi(t) = m = const$
   $D\xi(t) = \sigma^2 = const$
   $K_\xi(t_1, t_2) = k(\tau), \tau = t_2 - t_1, k(\tau) = k(-\tau)$
4) $|k(\tau)| \le \sqrt{D\xi(t_1) D\xi(t_2)} = \sigma^2 = k(0)$
   $|k(\tau)| \le k(0)$

   Нормована корел. Функція $\rho(\tau) = \frac{k(\tau)}{k(0)}, |\rho(\tau)| \le 1$
5) Якщо $\exists$ похідна $\xi'(t)$ у сер. квадр. ВП $\xi(t)$, то $M\xi'(t) = 0, k_{\xi'}(\tau) = -k''_\xi(\tau)$

Означення 3 ВП $\xi(t) \in R$ (або C), $t \in T, T = [0, \infty]$ або $T = R$ називають ***стаціонарним у широкому розумінні***, якщо $M\ \xi(t) = m - const\ \forall t \in T$, корел. функція $K(t_1, t_2) = k(\tau), \tau = t_2 - t_1$. Тоді і $D\xi(t) = D = const > 0$

Зауваження Очевидно, що якщо ВП стаціонарний у вузькому сенсі, то він стаціонарний і в широкому сенсі. Стаціонарний у широкому може бути нестаціонарним у вузькому

Спектральна теорія стаціонарних ВП

Дискретний спектр

I. Нехай задано ВП $\xi(t) = \xi \cos \omega t + \eta sin\omega t$ (2)

$\xi, \eta -$ некорельовані, $M\xi = M\eta = 0, D\xi = D\eta = D, t \in R$

Очевидно,$M\xi(t) = 0$

Кор. ф-я $K(t_1, t_2) = M(\xi \cos \omega t_1 + \eta sin\omega t_1)\ (\xi \cos \omega t_2 + \eta sin\omega t_2) = cos\omega t\ , \tau = t_2 - t_1$ => ВП (2) стаціонарний у широкому сенсі

Нехай $P(\eta = 0) = 0$

Розглянемо в.в $\frac{\xi}{\eta}, arctg\ \frac{\xi}{\eta} = \varphi,$ тобто $tg\varphi = \frac{\xi}{\eta}\ , cos\varphi = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}$, $sin\varphi = \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}$

Тоді ВП (2) $\xi(t) = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}(sin\varphi \cos \omega t + cos\varphi \sin \omega t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, де $A = \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$

Траєкторії ВП (2) – синусоїди

II. ***Скінченний спектр стац. ВП***

Нехай $\xi_i, \eta_i, i = \overline{1, n}$ –некорел. попарно в.в., $M\xi_i = M\eta_i = 0, D\xi_i = D\eta_i = D_i, i = \overline{1, n},\ P\{\eta_i + 0\} = 1$

$$\xi_i(t) = \xi_i \cos\omega_i t + \eta_i \sin\omega_i t \qquad (3)$$

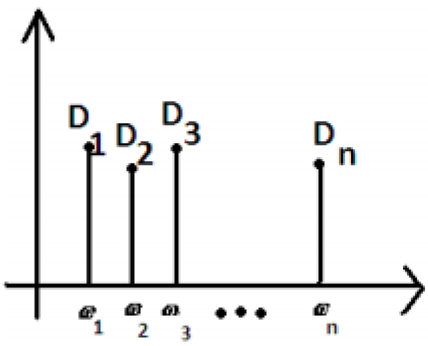
Визначимо ВП $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)$. (4)

Очевидно, $M\xi(t) = 0$. $K_\xi(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} K_{\xi_i}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{n} D_i \cos(\omega_i \tau), \tau = t_2 - t_1$, тоді ВП (4) стаціонарний у широкому сенсі. Для кожного ВП $\xi_i(t)$ (3) зробимо перетворення, аналогічні до п.1:

$\xi_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, де $A_i = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}$.

$\varphi_i = \arctan\frac{\xi_i}{\eta_i}$. Тоді ВП (4) можна записати у вигляді $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, де A_i, φ_i - відповідні випадкова амплітуда та випадкова фаза.

Означення 4. ***Спектром випадкового процесу*** (4) називаються множини пар $\{(\omega_i, D_i), i = \overline{1,n}\}$.



D_i - потужність гармоніки (квадрат амплітуди)

ТУТ ГРАФИК

III. Зліченний спектр стаціонарного ВП

Нехай задано випадкову послідовність $\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, \ldots$, - попарно некорельовані (у сукупності) випадкові величини. $M\xi_i = M\eta_i = 0, D\xi_i = D\eta_i = D_i$ - $const$.

$\sum_{i=1}^{\infty} D_i < \infty$. Визначимо послідовність ВП $\xi_i(t) = \xi_i \cos\omega_i t + \eta_i \sin\omega_i t$, $\omega_i = \frac{i\pi}{T}$,

$T = const > 0$

Твердження. Ряд $\sum_{i=1}^{n} \theta_i$ збігається у сер. квадр. тоді й тільки тоді, коли

збігаються ряди $\sum_{i=1}^{n} M\theta_i$ та $\sum_{i=1}^{n} D\theta_i$.

Визначимо ВП $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t)$. (5)

$\forall t \sum_{i=1}^{n} M\xi_i(t) = 0$ (6)

$\sum_{i=1}^{n} D\xi_i(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i < \infty$, тоді ВП (6) існує, оскільки за твердженням $\forall t$ збігаються ряди (6).

Зліченний спектор ВП (продовження)

Розглянемо послідовності випадкових величин ξ_i, η_j - попарно некорельовані.

$M\xi_i = M\eta_j = 0, D\xi_i = D\eta_j = D_i$. Будується ВП $\xi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t)$, $\xi_i(t) = \xi_i \cos\omega_i t + \eta_i \sin\omega_i t$,

$\omega_i = \frac{i\pi}{T}$, $T = const > 0$. $\sum_{i=1}^{\infty} D_i < \infty$. Було доведено, що ВП $\xi(t)$ існує. Оскільки ВП $\xi_i(t)$ - стаціонарний у широкому сенсі, то ВП $\xi(t)$ також стаціонарний.

$M\xi(t) = 0,\ K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(\tau),\ \tau = t_2 - t_1$. Таким чином кореляційна функція

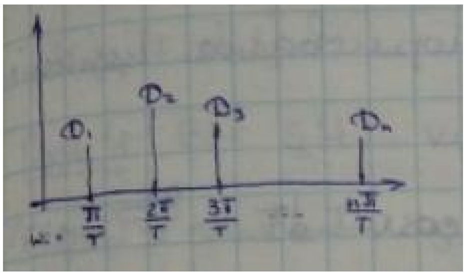
$$K_\xi(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_{\xi_i}(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos\frac{\pi i}{T} \qquad (1)$$

$D_\xi = K_\xi(0) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i = D$. Перетворення (1) – перетворення Фур’є. D_i - коефіцієнт Фур’є.

$D_i = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} K_\xi(t)\cos\frac{\pi i}{T} t\, dt$. Аналогічно попередньому дов. ВП $\xi(t)$ запишемо як

$\xi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin\left(\frac{\pi i}{T} t + \varphi_i\right)$, де $A_i = \sqrt{\xi_i + \eta_i}$, $\frac{\xi_i}{\eta_i} = \tan\varphi_i$.

Означення 1. ***Спектром випадкового процесу*** $\xi(t)$ називається сукупність пар $\{(\omega_i, D_i), i = 1, 2, ...\}$, де $\omega_i = \frac{i\pi}{T}$.



Неперервний спектр стаціонарних ВП

Нехай для ВП $\xi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(t)$, $T \to \infty$.

Означення 2. ***Спектральною щільністю стаціонарного у широкому сенсі ВП*** $\xi(t)$ з $K_\xi(\tau)$ наз. $S(\omega): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої виконуються рівності:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_\xi(\tau)\, d\tau, \quad K_\xi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S(\omega)\, d\omega \qquad (2)$$

(2) – співвідношення Вінера-Хінчина.

$K_\xi(\tau)$ - парна, тоді (2) мають вигляд:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} K_\xi(\tau)\cos(\omega t)\, d\tau, \quad K_\xi(\tau) = 2\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cos(\omega t)\, d\omega \qquad (3)$$

(3) – косинус-перетворення Фур'є.

Дисперсія ВП

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega = D$$

Означення 3. ***Нормована щільність задовольняє***

$$\rho_\xi(\tau) = 2\int_0^\infty s_H(\omega)\cos(\omega\tau)\,d\omega,\; s_H(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \rho_\xi(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau \quad (4),$$

де $s_H(\omega) = \frac{s(\omega)}{D} = \frac{s(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\,d\omega}$ - нормована щільність

Ергодичні теореми стаціонарного ВП

Комплекснозначні ВП

Фазовий простір В-С – множина комплексних чисел.

Комплекснозначні ВП записується у вигляді:

$$\theta(t) = \xi(t) + i\eta(t) \quad (5)$$

Математичне сподівання ВП (5) $M\theta(t) = m_\xi(t) + i m_\eta(t)$

ВП $\xi(t), \eta(t) \in \mathbb{R}$

$\dot{\theta}(t) = \theta(t) - M\theta(t)$

Кореляційна функція

$K_\theta(t_1, t_2) = M\dot{\theta}(t_1)\overline{\dot{\theta}(t_2)}$

$K_\theta(t_1, t_2) = M\left(\dot{\xi}(t_1) + i\dot{\eta}(t_1)\right)\left(\dot{\xi}(t_2) - i\dot{\eta}(t_2)\right) \qquad (6)$

$(6) \Rightarrow K_\theta(t_2, t_1) = \overline{K_\theta(t_1, t_2)}$

$(6) \Rightarrow K_\theta(t_1, t_2) = M(\dot{\xi}(t_1)\dot{\xi}(t_2) - i\dot{\xi}(t_1)\dot{\eta}(t_2) + i\dot{\eta}(t_1)\dot{\xi}(t_2) + \dot{\eta}(t_1)\dot{\eta}(t_2))$

Таким чином $K_\theta(t_1, t_2) = K_\xi(t_1, t_2) + K_\xi(t_1, t_2) + K_\eta(t_1, t_2) - i(K_{\xi\eta}(t_1, t_2) - K_{\eta\xi}(t_1, t_2))$

Означення 4. ВП $\xi(t)$ – комплекснозначний ($\xi(t) \in \mathbb{C}$) з $M\xi(t) = \mathrm{const} = m$ називається ***ергодичним по відношенню до математичного сподівання***, якщо інтеграл

$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt \xrightarrow{P} m \qquad (7)$

збігається до математичного сподівання за ймовірністю.

Достатньою умовою для збіжності (7) є $\Delta_T = M\left|\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)dt - m\right|^2 \to 0, T \to \infty$ (8)

Твердження(д-ня шукай на стр. 39-40) Нехай для ВП $\xi(t) \in \mathbb{C}$ з $M\xi(t) = const = m$ $K_\theta(t_1, t_2) \to 0$, коли $|t_2 - t_1| \to \infty$. Тоді ВП $\xi(t) \in \mathbb{C}$ ергодичний по відношенню до математичного сподівання.

Означення 5. ВП $\xi(t) \in \mathbb{C}$ з $M\xi(t) = 0, D\xi(t) = 1$ називається ***ергодичним по відношенню до кореляційної функції $K_\xi(t)$***, якщо інтеграл у середньоквадратичному

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t+\tau)\,\overline{\xi(t)}dt \xrightarrow{P} K_\xi(t), T \to \infty\ \forall\, \tau > 0$$

Твердження. Гауссівський стаціонарний ВП $\xi(t) \in \mathbb{R}$ ергодичний по відношенню до кореляційної функції, якщо

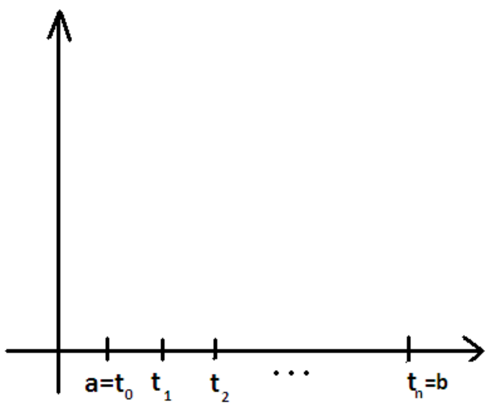
$K_\xi(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$

Узагальнення інтегралу в середньоквадратичному

Стохастичний інтеграл

Розглянемо L_2 - ВП на $[a,b] \subset R$. Нехай $\zeta(t)$ - кусково-постійна ф-я.

1. Розглянемо L_2-випадковий процес на $[a,b]$ вигляду



$\varphi(t) = \varphi(t_k),\ k = \overline{0, n-1},\ t \in [t_k, t_{k+1})$

$\varphi(t_k)$ - L_2-в.в.

Цей процес на $[a,b]$ буде кусково-постійний

Позначимо $\Delta_k = t_{k+1} - t_k$

Означення. Інтегралом $\varphi(t)$ на $[a,b]$ називається

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k)\Delta_k = \int_a^b \varphi(t)\,dt$$

Властивості.

1) $\int_a^b (\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t))\,dt = \lambda_1\int_a^b \varphi_1(t)dt + \lambda_2\int_a^b \varphi_2(t)dt$ (Якщо φ_1 і φ_2 задані на одному розбитті, то все очевидно, інакше будуємо спільне розбиття)

2) $M\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b M\varphi(t)\,dt$

(сума скінченна, все очевидно)

3) $\left\| \int_a^b \varphi(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|\varphi(t)\|dt$

Твердження 2. Якщо L_2-ВП рівномірно-неперервний на $[a,b]$ у середньоквадратичному $\underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\,\xi(t+\Delta) = \xi(t)$, то узагальнений інтеграл

$\int_a^b \xi(t)\,dt = \mathrm{l.i.m}\sum_{i=0}^{n-1} \xi(\tau_i)\Delta_i$, тобто співпадає з інтегралом в середньоквадратичному

3. $\left\| \int_a^b \varphi(t)dt \right\|^2 \le \int_a^b \|\varphi(t)\|^2 dt$ - нер-ть $\Delta - ка$

Побудова узагальненого інтегралу для L_2 - ВП.

Нехай $\xi(t) \in L_2 - В\Pi, t \in [a,b]$. Розглянемо поел.ну…во постійних L_2 - ВП на [a,b]. Нехай $\exists \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \xi(t)$ рівномірно на [a,b]. Очевидно, що $\varphi_n(t)$ - фундаментальна послідовність.

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\| \le \|\varphi_n(t) - \xi(t)\| + \|\varphi_m(t) - \xi(t)\| \xrightarrow[\text{рівномірно\_за\_}t]{m,n\to\infty} 0$$

Розглянемо посл. Інтегралів

$\int_a^b \varphi_n(t)dt$ - фундаментальна посл.

$$\left\| \int_a^b \varphi_n(t)dt - \int_a^b \varphi_m(t)dt \right\| \le \int_a^b \|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\| dt$$

З (4), враховуючи (3), випливає фундаментальність послідовності $\int_a^b \varphi_n(t)dt$ та

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt = \int_a^b \xi(t)dt$$

Озн. Якщо для L_2 - ВП $\xi(t)$ та [a,b] існує послідовність кусково-постійних L_2 - ВП $\varphi_n(t)$ (1), така що

$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \xi(t)$ рівномірно по t, то $\exists$ (5), яка не залежить від вибору послідовності $\varphi_n(t)$, що збігається до $\xi(t)$ б яка називається ***інтегралом у середньому квадратичному*** та позначається $\int_a^b \xi(t)dt$ незалежно від вибору послідовності $\varphi_n(t)$.

Нехай:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \xi(t)$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi'_n(t) = \xi(t)$$

Побудуємо послідовність:

$\varphi_1(t), \varphi'_1(t), \varphi_2(t), \varphi'_2(t), ..., \tilde{\varphi}_n(t),$

Очевидно, що $\lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_n(t) = \xi(t)$. Відповідно

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \tilde{\varphi}_n(t)dt = \xi(t) = \int_a^b \xi(t)dt$$

Маємо, що для $\forall$ послідовності в (6) існує границя.

Твердження (без доведення) Нехай $\xi(t)$ - L_2 - ВП на [a,b] рівномірно неперервний. Тоді узагальнений інтеграл існує та $\int_a^b \xi(t)dt = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta t_k|\to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(\tau_k)\Delta t_k$ - ***інтеграл у сер. квардратичному.***

Стохастичний інтеграл (Інтеграл Іто)

Нехай $w(t)$ - стандартний вінерівський процес

$$Mw(t) = 0, Dw(t) = t \qquad (7)$$

Нехай $\varphi(t)$ - кусково-постійний L_2 - ВП та $[a,b] \subset R^+$, при чому прирости $w(t)$ $\forall 0 \le u \le t \le s \le b$ $w(s) - w(t)$ не залежать від $\varphi(u) \forall 0 \le u \le t$

Означення Визначимо для $L_2 -$ ВП $w(t)$ та $\varphi(t)$ (8) з властивістю (9) інтеграл:

$$\int_a^b \varphi(t)dw(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k)\Delta w(t_k) \qquad (10)$$

Властивості:

1) $\int_a^b \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t)dw(t) = \lambda_1 \int_a^b \varphi_1(t)dw(t) + \lambda_2 \int_a^b \varphi_2(t)dw(t)$
2) $M \int_a^b \varphi(t)dw(t) = 0$
3) $\left\| \int_a^b \varphi(t)dw(t) \right\|^2 = \int_a^b \|\varphi(t)\|^2 dt$

Доведення:

$$\left\|\int_a^b \varphi(t)dw(t)\right\|^2 = M\left(\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(t_k)\Delta w(t_k)\right)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=o}^{n-1} M\varphi(t_k)\Delta w(t_k)\varphi(t_l)\Delta w(t_l) = 0$$

Очевидно = 0 для $l \neq k$

для $l = k,\ \approx M\varphi^2(t_k)\Delta t_k$

Доведено.

Побудова інтегралу Іто

Нехай $\xi(t) \in [a,b] \subset R^+$ - L_2 – ВП та ∃ така послідовність кусково-постійних L_2 – ВП на $[a,b]$ $\varphi_n(t)$, що ∀ $a \leq u \leq t < s \leq b$ прирости $w(s) - w(t)$ не залежать від $\varphi_n(t)$ та ∃ $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \xi(t)$ рівномірно по е ∈ $[a,b]$.

Послідовність $\varphi_n(t)$ – фундаментальна (11)

$$\left\|\int_a^b \varphi_n(t)dw(t) - \int_a^b \varphi_m(t)dw(t)\right\|^2 = \int_a^b \|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\|^2 dt \to_{m,n\to\infty} 0$$

Тоді послідовність $\int_a^b \varphi_n(t)dw(t)$ фундаментальна й ∃ границя

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dw(t) = \int_a^b \xi(t)dw(t)$ (12)

При чому границя (12) не залежить від вибору $\varphi_n(t)$, що збігається до $\xi(t)$.

Означення Нехай для L_2 – ВП $\xi(t)$ та $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$ ∃ послідовність кусково-постійних ВП L_2 $\varphi_n(t)$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \xi(t)$ рівномірно по t (13) та ∀ n $a \leq u \leq t < s \leq b$ $w(s) - w(t)$ не залежить від

$\varphi_n(u)$. Тоді існує границя (12), яка не залежить від вибору $\varphi_n(t)$ (13) , що називається ***стохастичним інтегралом за вінерівським ВП (інтеграл Іто)***. Позначення $\int_a^b \xi(t)dw(t)$.

Твердження Якщо $\xi(t) \in \mathbb{R}$ L_2 – ВП рівномірно неперервний на $[a, b]$ у сер. квадратичному і ∃ інтеграл Іто, то

$$\int_a^b \xi(t)dw(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(\tau_k)\Delta w(t_k)$$

Стохастичний диференціал

Нехай заданий стандартний вінерівський ВП $w(t)$ $Mw(t) = 0$ $Dw(t) = 0$. ВП $a(t), \sigma(t)$ однозначно визначаються ВП $w(s), s \in [t_0, t]$. $a(t), \sigma(t)$ рівномірно неперервні у сер. квадр. на кожному обм. інтервалі.

Тоді ∃ $\int_{t_0}^t a(s)ds$, $\int_{t_0}^t \sigma(s)dw(s)$.

Визначимо ВП

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^t a(s)ds + \int_{t_0}^t \sigma(s)dw(s) \qquad (1)$$

Означення 1 ***Стохастичним диференціалом*** називається вираз

$d\xi(t) = a(t)dt + \sigma(t)dw(t)$ (2), якщо для ВП $\xi(t)$ виконується (1).

Приклад 1

$w(t)$ – вінерівський стандартний ВП, що має стохастичний диференціал (2) на $[T_0, T]$.

Функції $\varphi(t, x) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ такі, що мають неперервні похідні $\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x^2}$

Тоді ВП $\varphi(t, w(t))$ має стохастичний диференціал $d\xi(t) = a(t)dt + \sigma(t)dw(t)$, де

$a(t) = \frac{\partial\varphi(t,w(t))}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(t,w(t))}{\partial x^2}$

$\sigma(t) = \frac{\partial\varphi(t,w(t))}{\partial x}$

Пояснення

За формулою Тейлора для функцій від двох змінних маємо

$$\Delta\xi(t) = \frac{\partial\varphi(t,w(t))}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial\varphi\big(t,w(t)\big)}{\partial x}\Delta w(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi\big(t,w(t)\big)}{\partial x^2}(\Delta w(t))^2 + \frac{\partial\varphi\big(t,w(t)\big)}{\partial t\partial x}\Delta t\Delta w(t) + o(t)$$

При $\Delta t \to \infty$ збіжність $\Delta\xi(t),\ \Delta w(t)$ - у сер. квадратичному. $M\Delta w(t) = 0$, $M\big(\Delta w(t)\big)^2 = \Delta t =>$

$d\xi(t) = \left[\frac{\partial\varphi(t,w(t))}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(t,w(t))}{\partial x^2}\right]dt + \frac{\partial\varphi\big(t,w(t)\big)}{dx}dw(t).$

Приклади 1) Знайти стохастичний диференціал ВП $\xi(t) = \varphi\big(t,\omega(t)\big)$, де похідні функції

$\varphi(t,x)$ $\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}$ будуть неперервні

За формулою Тейлора прирости процесу можна записати так: $\Delta\xi(t) =$
$\frac{\partial\varphi\big(t,\omega(t)\big)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial\varphi\big(t,\omega(t)\big)}{\partial x}\Delta\omega(t) + +\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi\big(t,\omega(t)\big)}{\partial x^2}\big[\Delta\omega(t)\big]^2 + o(\Delta t)$

$\frac{\partial^2\varphi\big(t,\omega(t)\big)}{\partial t\partial x}\underbrace{\Delta t\Delta\omega(t)}_{o(\Delta t)}$ - тому змішані не враховуємо

Граничний вираз має вигляд $d\xi(t) = a(t)dt + \sigma(t)d\omega(t)$, де

$$a(t)=\frac{\partial\varphi(t,\omega(t))}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(t,\omega(t))}{\partial x^2}\quad \sigma(t)=\frac{\partial\varphi(t,\omega(t))}{\partial x}$$

2) Знайти інтеграл $\int_{t_0}^{t}\omega(t)\,d\omega(t)=\xi(t)$

Шукаємо $\xi(t)=\varphi(t,\omega(t))$, $d\xi(t)=\omega(t)\,d\omega(t)$, $a(t)=0$, $\sigma(t)=x$

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0\\ \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}=x\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \varphi(t,x)=\frac{1}{2}\left(x^2-t\right)$$

$$\xi(t)=\frac{1}{2}\left[\omega^2(t)-\omega^2(t_0)-(t-t_0)\right]$$

Твердження 1. (*Формула Іто*) Нехай $\xi(t)-L_2$ - ВП, має стохастичний диференціал.

$d\xi(t)=a(t)+\sigma(t)d\omega(t)$ та функція $\varphi(t,x)\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$ має неперервні похідні

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t},\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x},\frac{\partial\varphi^2(t,x)}{\partial x^2}$$

Тоді випадковий процес $\varphi(t,\xi(t))$ має ***стохастичний диференціал***, що задається співвідношенням

$$d\varphi(t,\xi(t))=\left[\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}a(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi^2(t,x)}{\partial x^2}\sigma^2(t)\right]dt+\frac{\partial\varphi(t,\xi(t))}{\partial x}\sigma(t)d\omega(t)$$ - ***формула Іто.***

Марківські випадкові процеси з неперервним часом і дискретним фазовим простором

Означення: ***Ланцюгом маркова з неперервним часом*** називають випадковим процесом $\xi(t)\in S$,

$t \in [T_0, T_1] \subset \mathbb{R}$ або $[T_0, T_1] = T \subset \mathbb{R}^+$, скінченна або злічена множина з мірою. (S- множина станів, існує бієкція $\varphi: S \to Z^+$,а $\varphi': S \to \mathbb{N}$. Тобто усі стани нумеруються $E_0, E_1, \ldots$ або $E_0, E_1, \ldots E_i$-стани випадковим процесом. Тобто можна вважати що $S = \mathbb{Z}^+$, або $S = \mathbb{N}$) $\xi(t)$-випадковим процесом з неперервним часом, якщо $\forall t_1 <.. < t_n \in T\ n \geq 2$ виконується:$P\{\xi(t_n) = i_n | \xi(t_{n-1}), \ldots, \xi(t_1) = i_1\} = P\{\xi(t_n) = i_n | \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\}$ властивість Маркова.

Твердження: Якщо випадковий процес $\xi(t) \in \mathbb{R}^+$-Ланцюг Маркова з неперервним часом то $\forall a > 0, b \geq 0$ $\xi(an + b)$- Ланцюг Маркова з дискретним часом (n=0,1,..)

Характеристики Ланцюга Маркова з неперервним часом

Позначимо $p_{ij}(t_0 + t) = P\{\xi(t_0 + t) = j | \xi(t_0) = i\}$ ймовірність переходу з i в j

<u>Означення 2</u> ***ланцюг маркова з неперервним часом*** $\xi(t)$ ***наз. однорідним*** (ОЛМ) з неп. часом ,якщо $\forall i, j\ \ p_{i,j}(t_0 + t)$ не залежить від t_0.

Далі розглядаємо ОЛМ з неп часом

МПІ $P(t) = \| p_{i,j}(t) \|$.

Позначимо $p(t) = \{p_i(t), i = 1, 2, 3 \ldots\}$,де $p_i(t) = P\{\xi(t) = i\}$.

$p(0)$-початковий розподіл ЛМ , $p(t)$- у момент t.

За ф-лою повної ймовірності та властивості Марковості:

$$\left.\begin{aligned} p_j(t+\tau) &= \sum_k p_k(t) p_{kj}(\tau) \\ p_j(t) &= \sum_k p_k(0) p_{kj}(t) \\ p_{i,j}(t+\tau) &= \sum_k p_{ik}(t) p_{kj}(\tau) \end{aligned}\right\}$$ --р-ня Колмогорова-Чепмена (1).

У матричній формі (1) виглядає :

$$\left.\begin{aligned} p(t+\tau) &= P(t)P(\tau) \\ p(t) &= p(0)P(t) \\ p(t+\tau) &= p(t)P(\tau) \end{aligned}\right\}$$

<u>Твердження 1:</u> Нехай $A = \{\xi(t) = i, t \in [t_0, T_0]\}$. Тоді $P(A \mid \xi(t_0) = i) = e^{-l_i * T}$, $T = T_0 - t_0$ - розподіл часу до виходу зі стану i.

Диф. р-ня Колмогорова

За умовою (1) для $\square \to 0$: (замість квадратиків дельта як трикутник)

$$P(t+\square) = P(t)(E + A\square + R(\square)\square) \cdot \frac{1}{\square}(P(t+\square) - P(t)) =$$

$$= P(t)A + P(t)R(\square).$$

При $\square \to 0$: $\dfrac{dP(t)}{dt} = P(t)A$ -(7) пряме ДР Колмогорова

З $P(\square + t) = P(\square)P(t) : \dfrac{dP(t)}{dt} = AP(t)$ -(8) обернене ДРК

Початкова умова для (7),(8) : $P(0) = E$.

Розв’язок (7): $P(t) = e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{A^n t^n}{n!}$.