Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

5 листопада 2019 р.

Зміст

2.4 Рівняння супердифузії

Розглянемо випадкове блукання з неперервним часом із $\psi(t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$ (тобто час очікування стрибка ψ має показниковий розподіл з параметром τ), а також

$$\lambda(x) \sim \frac{\sigma^\mu}{|x|^{1+\mu}}, \tag{2.4.1}$$

при $|x| \to \infty$, де μ — якась стала, $1 < \mu < 2$. Спробуємо знайти дисперсію очікуваної довжини стрибка. Як відомо з курсу теорії ймовірностей,

$$\mathsf{D}\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \lambda(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.4.2}$$

Але $x^2\lambda(x) \sim \sigma^\mu |x|^{1-\mu}$. При $1 < \mu < 2$ маємо $-1 < 1 - \mu < 0$, тобто інтеграл для дисперсії розбіжний (за порівняльною ознакою збіжності, порівнюємо з $1/x$). Таким чином, сама дисперсія довжини стрибка — нескінченна.

Можна показати, що

$$\mathscr{L}[\psi](\eta) \sim 1 - \tau\eta + o(\eta), \quad \eta \to 0, \tag{2.4.3}$$

а також

$$\mathscr{F}[\lambda](\omega) = 1 - \sigma^\mu |\omega|^\mu + o(|\omega|^\mu), \quad \omega \to 0. \tag{2.4.4}$$

Як можна було здогадатися, ці рівності нам знадобляться для застосування формули Монтрола-Вайса:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta) &= \frac{\mathscr{F}[u_0]}{\eta} \cdot \frac{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta)}{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta) \cdot \mathscr{F}[\lambda](\omega)} \approx \\ &\approx \frac{\mathscr{F}[u_0]}{\eta} \cdot \frac{\tau\eta}{1 - (1-\tau\eta)\cdot(1-\sigma^\mu|\omega|^\mu)} \sim \\ &\sim \frac{\mathscr{F}[u_0]}{\eta} \cdot \frac{\tau\eta}{\tau\eta + \sigma^\mu|\omega|^\mu} = \\ &= \frac{\mathscr{F}[u_0]}{\eta + k_\mu |\omega|^\mu}. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Означення 2.4.1.

$$k_\mu = \frac{\sigma^\mu}{\tau} \tag{2.4.6}$$

— *коефіцієнт дифузії.*

Звідси:

$$\eta \cdot \mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right] - \mathscr{F}\left[u_0\right] = -k_\mu |\omega|^\mu \cdot \mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right]. \tag{2.4.7}$$

Діємо на обидві сторони оберненим перетворенням Лапласа:

$$\frac{\partial \mathscr{F}\left[u\right](\omega, t)}{\partial t} = -k_\mu |\omega|^\mu \cdot \mathscr{F}\left[u\right](\omega, t), \tag{2.4.8}$$

і оберненим перетворенням Фур'є:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_\mu \cdot \frac{\partial^\mu u}{\partial |x|^\mu}, \tag{2.4.9}$$

де

Означення 2.4.2.

$$\frac{\partial^\mu u}{\partial |x|^\mu} \tag{2.4.10}$$

— *похідна Ріса-Бейлля* порядку μ за змінною x, яка визначається рівністю

$$\frac{\partial^\mu u}{\partial |x|^\mu} = \mathscr{F}^{-1}\left[-|\omega|^\mu \cdot \mathscr{F}\left[u\right]\right]. \tag{2.4.11}$$

Зауваження 2.4.3 —

$$\frac{\partial^2 u}{\partial |x|^2} = \mathscr{F}^{-1}\left[-\omega^2 \cdot \mathscr{F}\left[u\right]\right] = \mathscr{F}^{-1}\left[(-i\omega)^2 \cdot \mathscr{F}\left[u\right]\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.4.12}$$

Зауваження 2.4.4 —

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial |x|^\mu} = \begin{cases} \dfrac{D^\mu_{-\infty} f + D^\mu_{+\infty} f}{2\cos\dfrac{\pi\mu}{2}}, & \mu \neq 1, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\pi} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \dfrac{f(\xi)}{\xi - x}\,\mathrm{d}\xi, & \mu = 1. \end{cases} \tag{2.4.13}$$