Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №2 на тему:
«Чисельне розв'язування крайових задач математичної фізики.
Метод скінченних елементів»

Виконав студент групи ОМ-4
Скибицький Нікіта

Київ, 2019

Зміст

1 Постановка задачі **2**
1.1 Загальна постановка задачі . . . 2
1.1.1 Зауваження . . . 2
1.2 Параметри варіанту . . . 3

2 Теоритичні відомості **3**
2.0 Аналітичні маніпуляції . . . 3
2.1 Алгоритм . . . 3
2.1.1 Координатна система функцій . . . 3
2.2 Виведення системи . . . 4

3 Практична частина **5**
3.1 Похибки . . . 5
3.2 Графіки . . . 6

1 Постановка задачі

1.1 Загальна постановка задачі

Знайти наближений розв'язок наступної задачі проекційним та варіаційним методами: задано рівняння

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\cdot\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)\cdot u(x)=f(x),\quad a<x<b, \tag{1.1}$$

з крайовими умовами

$$-k(x)\cdot\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+\alpha_1 u(x)=\mu_1,\quad x=a, \tag{1.2}$$

$$k(x)\cdot\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}+\alpha_2 u(x)=\mu_2,\quad x=b, \tag{1.3}$$

де

$$k(x)=k_1\sin(k_2x)+k_3, \tag{1.4}$$

$$k(x)>0,$$

$$q(x)=q_1\sin(q_2x)+q_3, \tag{1.5}$$

$$q(x)\geq 0,$$

$$\alpha_1,\alpha_2>0.$$

1.1.1 Зауваження

Задача *модельна*, тому функцію $f(x)$ і константи μ_1, μ_2 виражаємо з відповідних рівностей:

$$f(x)=-(k(x)\cdot u'(x))'+q(x)\cdot u(x), \tag{1.6}$$

$$\mu_1=-k(a)\cdot u'(a)+\alpha_1 u(a), \tag{1.7}$$

$$\mu_2=k(b)\cdot u'(b)+\alpha_2 u(b), \tag{1.8}$$

де $u(x)$ — точний розв'язок задачі, функція $u(x)=m_1\sin(m_2x)+m_3$.

1.2 Параметри варіанту

a	b	α_1	α_2	k_1	k_2	k_3	q_1	q_2	q_3	m_1	m_2	m_3
0	4	4	2	2	3	1	0	2	3	2	2	1

2 Теоритичні відомості

2.0 Аналітичні маніпуляції

Перш за все, виразимо функцію $f(x)$ і константи μ_1, μ_2 з рівностей (1.6)–(1.8):

$$f(x) = 10\sin(2x) + 2\sin(3x) - 2\cos(x) - 22\cos(5x) + 1, \tag{2.1}$$

$$\mu_1 = 0, \tag{2.2}$$

$$\mu_2 = 6. \tag{2.3}$$

2.1 Алгоритм

Нехай задане рівняння

$$Au = f, \tag{2.1.1}$$

де $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ — гільбертовий простір), та неоднорідні крайові умови виду (1.2)–(1.3). Наближення розв'язку $u_n(x)$ задачі (2.1.1) будемо шукати у скінченновимірному підпросторі $\mathcal{H}_n$, базис якого утворений лінійно незалежною координатною системою функцій $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$, тобто у вигляді

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_i(x). \tag{2.1.2}$$

Одразу зауважимо, що тоді $u(x_i) = y_i$.

2.1.1 Координатна система функцій

Систему функцій $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ побудуємо наступним чином: на інтервалі $[a, b]$ побудуємо рівномірну сітку з $(n+1)$-го вузла:

$$x_i = \frac{(n-i)a + ib}{n}, \quad i = \overline{0..n}. \tag{2.1.3}$$

Приклад. $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n-1}$ — так звані штафетини:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

А також φ_0, φ_n — напівштафетини, у яких обрізані половини, які виходять за $[x_0, x_n]$,

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_i}, & x_0 \le x \le x_1, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_i}, & x_{n-1} \le x \le x_n, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Графіки цих функцій мають вигляд

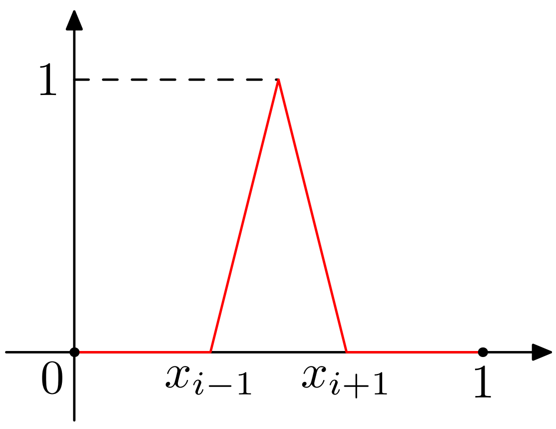


Рис. 1: "штафетина" від x_{i-1} до x_{i+1}.

Зауваження: у коді зручно задавати їх у вигляді `phi[i](x) := max(0, 1 - abs(x - x[i]) / h) * (a <= x <= b)`, або навіть без індикатора належності x області $[a, b]$ якщо це гарантує клієнтський код.

2.2 Виведення системи

Розв'язок шукаємо як мінімум функціонала

$$\Phi_n = \min_{u_n \in \mathcal{H}_n} \Phi(u_n) = \min_{u_n \in \mathcal{H}_n} \|Au_n - f\|^2 \tag{2.2.1}$$

Відомо (з леми), що $G(u_n, \varphi_i) = \ell(\varphi_i)$, при $i = \overline{0..n}$. Це рівносильно системі:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = \ell(\varphi_j), \quad j = \overline{0..n}, \tag{2.2.2}$$

або, іншими словами,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} y_i = b_j, \quad j \in \overline{0..n}. \tag{2.2.3}$$

Він досягається на розв'язку наступної системи $(n+1)$-го алгебраїчного рівняння відносно y_i:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = \ell(\varphi_j), \quad j = \overline{0..n}, \tag{2.2.4}$$

де

$$\begin{aligned} a_{ij} = G(\varphi_i, \varphi_j) &= \int\limits_a^b (-k(x)\varphi_i'(x))'\varphi_j(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_a^b -k(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x - k(x)\varphi_i'(x)\varphi_j(x)\big|_a^b = \\ &= \int\limits_a^b -k(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x + \alpha_1\varphi_i(a)\varphi_j(a) + \alpha_2\varphi_i(b)\varphi_j(b), \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

і

$$b_j = \ell(\varphi_j) = \int\limits_a^b f(x)\varphi_j(x)dx + \mu_1\varphi_j(a) + \mu_2\varphi_j(b). \tag{2.2.6}$$

Зауважимо, що

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ -\frac{1}{h}, & x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

при $i = \overline{1..n-1}$, і

$$\varphi_0'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{h}, & x_0 \le x \le x_1, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases} \qquad \varphi_n'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_{n-1} \le x \le x_n, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Підставимо точні значення функції $\varphi_i(x)$ та їх похідних в систему, матимемо:

$$a_{0,0} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{k(x)}{h^2} + q(x)\varphi_0^2(x)\,\mathrm{d}x + \alpha_1\varphi_0^2(a), \tag{2.2.9}$$

$$a_{i,i} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{k(x)}{h^2} + q(x)\varphi_i^2(x)\,\mathrm{d}x, \quad i = \overline{1..n-1}, \tag{2.2.10}$$

$$a_{n,n} = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{k(x)}{h^2} + q(x)\varphi_n^2(x)\,\mathrm{d}x + \alpha_2\varphi_n^2(b), \tag{2.2.11}$$

$$a_{i,i-1} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} -\frac{k(x)}{h^2} + q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i-1}(x)\,\mathrm{d}x, \quad i = \overline{1..n}, \tag{2.2.12}$$

$$a_{i,i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{k(x)}{h^2} + q(x)\varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)\,\mathrm{d}x, i = \overline{0..n-1}, \tag{2.2.13}$$

а також

$$b_0 = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_0(x)\,\mathrm{d}x + \mu_1, \tag{2.2.14}$$

$$b_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\,\mathrm{d}x, \quad i = \overline{1..n-1}, \tag{2.2.15}$$

$$b_n = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + \mu_2. \tag{2.2.16}$$

Зауваження: $a_{i,j} = 0$ при $|i-j| > 1$, адже тоді області де $\varphi_i \neq 0$ та $\varphi_j \neq 0$ не перетинаються, і $G(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, отже матриця системи — тридіагональна і її (систему) можна розв'язувати методом прогонки.

3 Практична частина

Було використано мову програмування `python` і бібліотеки `numpy`, `scipy` і `matplotlib`.

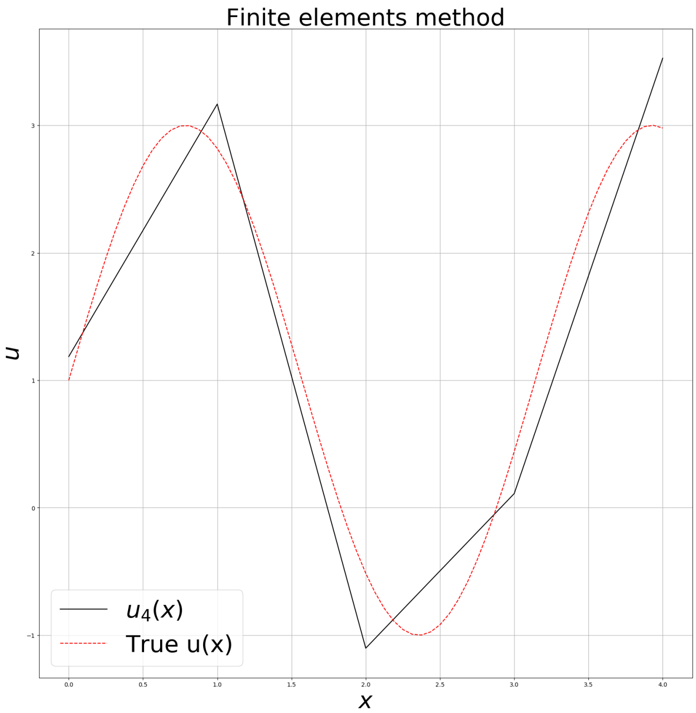
3.1 Похибки

Відхилення від точного розв'язку в нормі

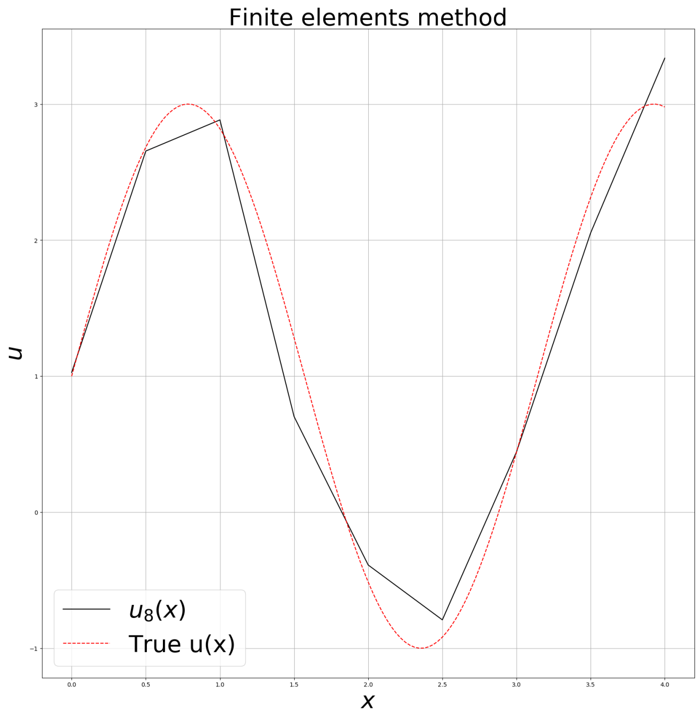
$$\|f\| = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x : \tag{3.1.1}$$

- 4 функції: `0.11072227505224305`;
- 8 функцій: `0.059055683092381954`;
- 16 функцій: `0.0022117026009372417`;
- 32 функції: `0.000455942368470552`.

3.2 Графіки

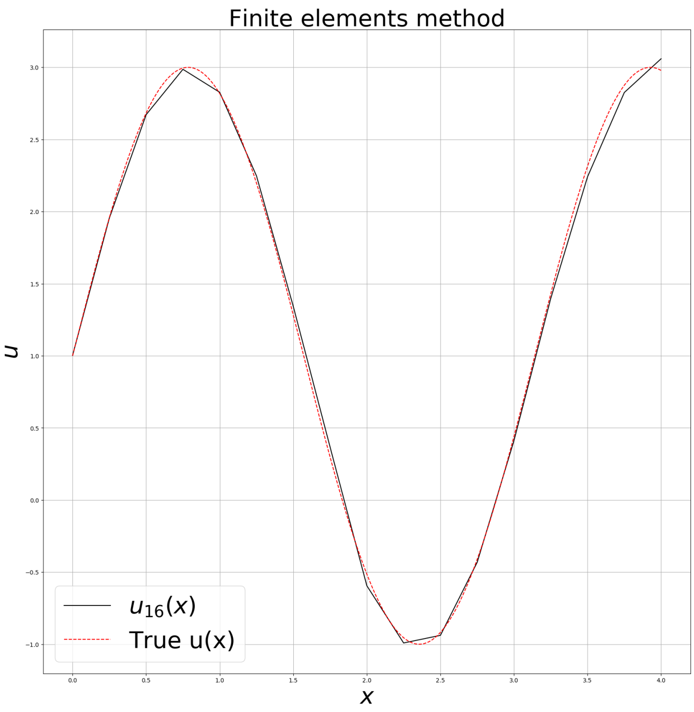


(а) 4 функції

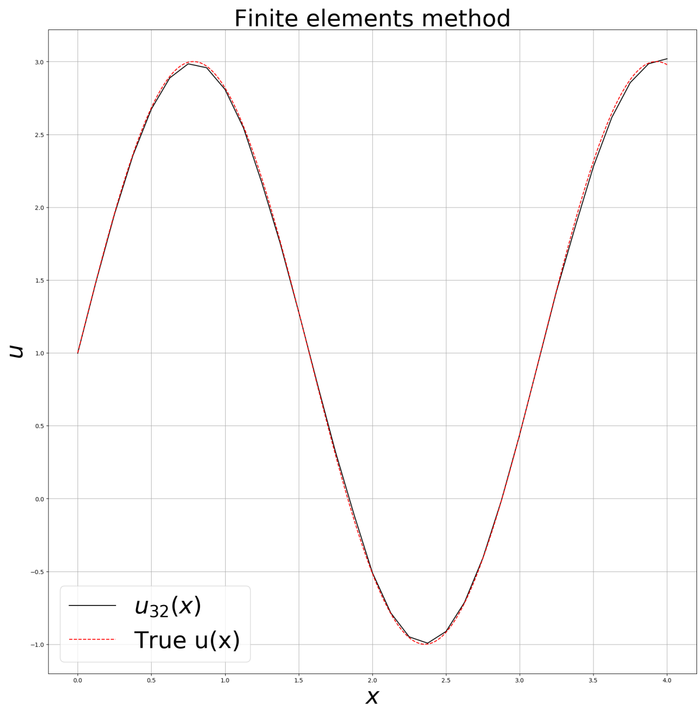


(б) 8 функцій

[H]



(а) 16 функцій



(б) 32 функції