Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

24 вересня 2019 р.

Зміст

1.2 Властивості дробових похідних

Приклад 1.18

Знайдемо похідні степеневих функцій.

Розв'язання. Нехай $\beta > -1$, $0 < \alpha < 1$. Тоді

$$D_0^\alpha t^\beta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} t^\beta. \tag{1.20}$$

У свою чергу

$$I_0^{1-\alpha} t^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha} \,\mathrm{d}s. \tag{1.21}$$

Нагадаємо

Означення 1.19 (бета-функції).

$$B(a,b) = \int_0^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1}. \tag{1.22}$$

а також наступну властивість бета-функції:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.23}$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $\mathrm{d}s = t\,\mathrm{d}\xi$, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (t\xi)^\beta t^{-\alpha}(1-\xi)t\,\mathrm{d}\xi = \\ = \frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\Gamma(1-\alpha)}B(\beta+1, 1-\alpha) = \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)}t^{\beta-\alpha+1}.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Лишилося продиференційювати цей інтеграл:

$$\begin{aligned}D_0^\alpha \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)}t^{\beta-\alpha+1} = \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)}(\beta-\alpha+1)t^{\beta-\alpha} = \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}t^{\beta-\alpha},\end{aligned} \tag{1.25}$$

де ми скористалився властивістю $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$.

Зауваження 1.20 — Ця формула справедлива і для $\alpha \ge 1$, але умова $\beta > -1$ важлива для збіжності кількох інтегралів, зокрема $\int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha}\,\mathrm{d}s$.

Приклад 1.21

Зокрема, якщо $\alpha \le \beta \in \mathbb{N}$, то маємо формулу

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}t^\beta = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}t^{\beta-\alpha}. \tag{1.26}$$

Наприклад,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}t^4 = \frac{4!}{2!}t^2. \tag{1.27}$$

Зауваження 1.22 — Зрозуміло також що всі введені нами оператори лінійні.

1.2.1 Властивості похідних Рімана-Ліувілля

Твердження 1.23

На жаль, не виконується наступна властивість

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}. \tag{1.28}$$

Доведення.

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \tag{1.29}$$

Почленно диференціюємо:

$$\begin{aligned} D_0^\alpha e^{\lambda t} &= D_0^\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_0^\alpha \left(t^k\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha} \neq \\ &\neq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^\alpha \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

□

Твердження 1.24 (формула (не) Ньютона-Лейбніца)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = f(t). \tag{1.31}$$

Твердження 1.25 (формула Ньютона-Лейбніца)

$$\int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s = f(t) - f(0). \tag{1.32}$$

Твердження 1.26 (напівгрупова властивість дробових інтегралів)
Нехай $\alpha, \beta > 0$, тоді $I_0^{\alpha+\beta} = I_0^\alpha I_0^\beta$.

Вправа 1.27. Доведіть цю властивість. **Підказка**: за означеннями,

$$I_0^{\alpha+\beta} f = f \star y_{\alpha+\beta} \overset{?}{=} f \star (y_\alpha \star y_\beta) \overset{?}{=} (f \star y_\alpha) \star y_\beta = I_0^\beta I_0^\alpha f, \tag{1.33}$$

тому достатньо перевірити асоціативність згортки і рівність $y_{\alpha+\beta} = y_\alpha \star y_\beta$.

Доведення. Перевіримо два вищезгаданих твердження:

1) Асоціативність $\star$ отримується "в лоб":

$$\begin{aligned}
((f\star g)\star h)(t) &= \int_0^t (f\star g)(s)h(t-s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \left(\int_0^\xi f(\xi)g(s-\xi)\,\mathrm{d}u\right) h(t-s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \int_0^s f(\xi)g(s-\xi)h(t-s)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \int_\xi^t f(\xi)g(s-\xi)h(t-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^t \int_0^{t-\xi} f(\xi)g(s)h(t-s-\xi)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^t f(\xi)\left(\int_0^{t-\xi} g(s)h(t-\xi-s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u = \\
&= \int_0^t f(\xi)(g\star h)(t-\xi)\,\mathrm{d}u = \\
&= (f\star(g\star h))(t).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

2) Далі

$$\begin{aligned}
y_\alpha(t)\star y_\beta(t) &= \int_0^t y_\alpha(s)y_\beta(t-s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)}s^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}(t-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $\mathrm{d}s = t\,\mathrm{d}\xi$, отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t s^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t (\xi t)^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}t^{\beta-1}t\,\mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}t^{(\alpha-1)+(\beta-1)+1}\int_0^t \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}t^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}t^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}t^{\alpha+\beta-1} = \\
&= y_{\alpha+\beta}(t).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

$\square$

Теорема 1.28 (аналог формули (не) Ньютона-Лейбніца)
Для $\alpha > 0$
$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = f. \tag{1.37}$$

Доведення. Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, тоді
$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^{n-\alpha} I_0^\alpha f = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^n f = f. \tag{1.38}$$
□

Зауваження 1.29 — Тут ми скористалися напівгруповою властивістю.

Твердження 1.30 (аналог формули Ньютона-Лейбніца)
Нехай $f, D_0^\alpha f \in L_1([0,T])$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, тоді для $0 < t < T$ маємо
$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k}. \tag{1.39}$$

Зауваження 1.31 — Тут під $D_0^{-|\beta|}$ маємо на увазі $I_0^{|\beta|}$.

Приклад 1.32
Для $0 < \alpha < 1$ маємо
$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.40}$$

Зауваження 1.33 — Тут $(I_0^{1-\alpha} f)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (I_0^{1-\alpha} f)(\varepsilon)$.

Доведення. Доведемо частинний випадок:
$$\begin{aligned}(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (D_0^\alpha f)(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(s)\,\mathrm{d}s \right).\end{aligned} \tag{1.41}$$

Виконаємо наступні маніпуляції з виразом що стоїть під похідною:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(t)\,\mathrm{d}t = \\
&\quad= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left((t-s)^\alpha I_0^{1-\alpha} f(s)\Big|_{s=0}^{s=t} + \alpha\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} I_0^{1-\alpha} f(s)\,\mathrm{d}s\right) = \\
&\quad= -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^\alpha I_0^{1-\alpha} f = \\
&\quad= -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Лишилося всього лише продиференціювати:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f\right) = f(t) - \frac{t^{\alpha-1}(I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.43}$$

□

1.2.2 Властивості похідних за Капуто

Теорема 1.34

Нехай $f \in L_\infty([0,T])$, тобто $\exists M \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \overset{\text{a.e.}}{\leq} M$, тоді, як і очікувалося, $({}^\star D_0^\alpha I_0^\alpha f)(0) = (I_0^{\alpha\star} D_0^\alpha f)(0)$.

а також

Теорема 1.35

Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in AC^n([0,T])$, тоді

$$(I_0^{\alpha\star} D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \tag{1.44}$$

Зауваження 1.36 — Ця формула справедлива і для цілих α

Твердження 1.37

Для похідних у загальному випадку не виконується напівгрупова властивість.

Теорема 1.38
Нехай $f, D_0^\beta \in L_1([0,T])$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Тоді

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta})f(t) - \sum_{k=0}^{\lceil\beta\rceil-1} (D_0^{\beta-k-1} f)(0)\frac{t^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(-\alpha-k)} \tag{1.45}$$

Приклад 1.39
Зокрема, для $0 < \alpha, \beta < 1$:

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta})f(t) - (I_0^{1-\beta} f)(0)\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \tag{1.46}$$

Доведення. Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned}
(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} D_0^\beta f\right)(t) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha} D_0^\beta f\right)(t) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha-\beta} I_0^\beta D_0^\beta f\right)(t) = \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha-\beta}\left(f(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0) t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right) = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} D_0^{\alpha+\beta} t^{\beta-1} = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha} = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha}.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

□