

Чисельні методи математичної фізики

Риженко А. І.*

8 жовтня 2019 р.

Зміст

1	Проекційні методи. Метод моментів.	
	Метод Бубнова-Гальоркіна	2
1.1	Постановка задачі і допоміжні твердження	2
1.2	Метод моментів	2
1.3	Метод Бубнова-Гальоркіна	4
2	Виділення самоспряженого оператора.	
	Узагальнений розв'язок	4
2.1	Основні визначення	4
2.2	Збіжність методу Бубнова-Гальоркіна	5
2.3	Приклади	6
2.4	Прямий метод	7
2.5	Метод колокацій	8
3	Варіаційні методи розв'язування крайових задач	10
3.1	Загальні положення задачі мінімізації функціоналів	10
3.1.1	Процес Рітца побудови мінімізаційної послідовності	14
3.2	Метод Рітца	14
3.2.1	Мінімізаційна послідовність	15
3.2.2	Метод Рітца в H_A	17
3.2.3	Приклади	18

*Риженко Андрій Іванович, rai-ku@ukr.net

1 Проекційні методи. Метод моментів. Метод Бубнова-Гальоркіна

1.1 Постановка задачі і допоміжні твердження

Розглянемо рівняння

$$Au = f, \quad (1.1.1)$$

де $A : E \rightarrow F$ — лінійний, діє на парі лінійних нормованих просторів, $D(A) \subseteq E$, $R(A) \subseteq F$.

Розглянемо послідовність підпросторів $E_n \subseteq D(A)$, $F_n \subseteq F$. Введемо лінійні *оператори проектування* $P_n : F \rightarrow F_n$ такі, що $P_n^2 = P_n$. Тоді можна розглянути послідовність рівнянь

$$P_n(Au_n - f) = 0, \quad (1.1.2)$$

із розв'язками $u_n \in E_n$. Враховуючи лінійність операторів проектування маємо $P_n(Au_n) = P_nf$. Зрозуміло, що у залежності від вибору E_n, F_n, P_n отримаємо різні *проекційні розв'язки* u_n .

Нехай надалі E, F — гільбертові простори.

Означення 1.1. Розглянемо лінійно незалежні системи функцій $\{\varphi_i\} \in D(A)$ і $\{\psi_i\} \in F$. Система $\{\varphi_i\}$ називається *координатною*, а система $\{\psi_i\}$ — *проекційною*.

У якості E_n візьмемо $\mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, а в якості F_n — $\mathcal{L}(\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Твердження 1.2

Тоді для виконання умови $P_n^2 = P_n$ достатньо, аби $P_n|_{F_n}$ був тотожним оператором.

Доведення. Справді, тоді $P_nf = f_n \in F_n$ і $P_n^2f = P_nf_n = f_n$. □

1.2 Метод моментів

Розв'язок задачі (1.1.2) будемо шукати у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i. \quad (1.2.1)$$

Лема 1.3

Для довільного елементу $\psi \in F$ рівність

$$P_n \psi = 0 \quad (1.2.2)$$

та система рівностей

$$(\psi, \psi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.2.3)$$

рівносильні.

Доведення. Нехай виконується (1.2.2), тоді маємо

$$(\psi, \psi_j) = (\psi, P_n \psi_j) = (P_n \psi, \psi_j) \stackrel{(1.2.2)}{=} (0, \psi_j) = 0,$$

тому виконується (1.2.3).

В інший бік: нехай виконується (1.2.3), тоді

$$\begin{aligned} (P_n \psi, P_n \psi) &= \left(P_n \psi, \sum_{j=1}^n a_j \psi_j \right) = \left(\psi, \sum_{j=1}^n a_j P_n \psi_j \right) = \\ &= \left(\psi, \sum_{j=1}^n a_j \psi_j \right) = \sum_{j=1}^n \overline{a_j} (\psi, \psi_j) \stackrel{(1.2.3)}{=} 0. \end{aligned}$$

□

Зауваження 1.4 — Тут ми скористалися самоспряженістю оператора проектування, хоча і не довели її.

Вправа 1.5. Доведіть, що P_n — самоспряжений оператор.

Розв’язання. Нехай $x = \psi_x + f_x$, $y = \psi_y + f_y$ де $\psi_x, \psi_y \in F_n$ а $f_x, f_y \in F_n^\perp$, тоді

$$(P_n x, y) = (\psi_x, \psi_y + f_y) = (\psi_x, \psi_y) = (\psi_x + f_x, \psi_y) = (x, P_n y).$$

Зауваження 1.6 — Тут ми скористалися тим, що $F = F_n \oplus F_n^\perp$. Це, взагалі кажучи, не так, якщо F_n нескінченновимірний, але ми не оперуємо з такими просторами, тому все законно.

Таким чином, ми можемо знайти розв’язок

$$(A u_n - f, \psi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.2.4)$$

Розв’язок шукаємо у вигляді (1.2.1) і підставляємо в (1.2.4):

$$\sum_{i=1}^n c_i (A \varphi_i, \psi_j) = (f, \psi_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.2.5)$$

Це і є метод моментів.

Алгоритм 1.7.

- 1) Обираємо повну систему лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_i\} \in D(A)$;
- 2) Обираємо замкнену систему лінійно-незалежних функцій $\{\psi_i\} \in F$;
- 3) Шукаємо розв'язки у вигляді $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, отримуємо СЛАР (1.2.5).

1.3 Метод Бубнова-Гальоркіна

Зауваження 1.8 — Якщо $\psi_j = \varphi_j$, то отримуємо метод Бубнова-Гальоркіна. Для нього система має вигляд

$$(Au_n - f, \psi_j) = 0,$$

або, у розгорнутому вигляді,

$$\sum_{i=1}^n c_i (A\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.3.1)$$

Зауваження 1.9 — У книжці Ляшка, Макарова, і Скоробагатько “Методы вычис. . .” наведена загальна теорема про збіжність.

2 Виділення самоспряженого оператора. Узагальнений розв'язок

2.1 Основні визначення

Для ситуації, коли

$$A = A_0 + B, \quad (2.1.1)$$

де A_0 — самоспряжений додатновизначений оператор введемо розглянемо рівняння

$$[u, v] + (Bu, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_{A_0}, \quad (2.1.2)$$

де

Означення 2.1. H_{A_0} — енергетичний простір зі скалярним добутком

$$[u, v] = (A_0 u, v)$$

і породжену ним нормою

$$\|u\|_{A_0} = |[u]| = \sqrt{[u, u]}.$$

Зауваження 2.2 — Енергетичний простір у чомусь ідеологічно схожий на слабкий топологічний простір.

2.2 Збіжність методу Бубнова-Гальоркіна

Тоді алгоритм Бубнова-Гальоркіна набуває вигляду

Алгоритм 2.3 (Бубнова-Гальоркіна).

- 1) Обираємо повну систему лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_i\} \in H_{A_0}$;
- 2) $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$;
- 3) Шукаємо розв'язки у вигляді $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$.

У такій ситуації маємо

$$[u_n, \varphi_j] + (Bu_n, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad (2.2.1)$$

тобто

$$L\vec{c} = \vec{f}, \quad (2.2.2)$$

де

$$L_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] + (B\varphi_i, \varphi_j), \quad \vec{f} = (f, \varphi_j), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Означення 2.4. Послідовність просторів E_n називається *гранично щільною* в E , якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\varphi, u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{u_n \in E_n} \|\varphi - u_n\| = 0, \quad \forall \varphi \in E. \quad (2.2.3)$$

Означення 2.5. Оператор A називається *майже всюди неперервним*, якщо $A = A_1 + A_2$, де $\|A_2\| \leq \varepsilon$, а

$$A_1 u = \sum_{i=1}^n (u, \varphi_i) \psi_i.$$

Теорема 2.6

Нехай (1.1.1) має єдиний розв'язок, $A_0^{-1}B$ є майже всюди неперервним, а H_n — гранично щільною в H_{A_0} , тоді алгоритм Бубнова-Гальоркіна генерує єдиний розв'язок задачі (2.2.2), причому послідовність цих розв'язків збігається до розв'язку задачі (1.1.1) у просторі H_{A_0} .

2.3 Приклади

Приклад 2.7

Розглянемо найпростіше диференціальне рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b \quad (2.3.1)$$

з крайовими умовами першого роду

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (2.3.2)$$

Його класичний двічі неперервно диференційовний (з $C^2([a, b])$) розв'язок існує за умов $k(x) \geq k_0 > 0$, $k \in C^1((a, b))$, $p, q, f \in C(a, b)$.

Розглянемо тепер системи функцій φ_i, ψ_i :

$$1) \quad \varphi_i = (x - a)^i(b - x);$$

$$2) \quad \varphi_i = \sin\left(\frac{x - a}{b - a}i\pi\right);$$

і $\psi_i = x^{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Тоді у класичному методі моментів будемо мати

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x) dx,$$

і

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (-(k\varphi'_i)' - p\varphi'_i + q\varphi_i)\psi_j dx = \int_a^b f\psi_j dx, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.3.3)$$

Зауваження 2.8 — У методі Бубнова-Гальоркіна матимемо

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (-(k\varphi'_i)' - p\varphi'_i + q\varphi_i)\varphi_j dx = \int_a^b f\varphi_j dx, \quad j = \overline{1, n}.$$

Приклад 2.9

Нехай $f \in L_2$ ($p, q, k' \in L_2$), тоді отримуємо $W_2^2((a, b))$.

Приклад 2.10

Нехай $f \in W_2^{-1}$, тоді $u \in W_2^1((a, b))$, а $D(A) = \{u \in W_2^1([a, b]), u(a) = u(b) = 0\}$.

Зауваження 2.11 — Оскільки тепер функція має лише першу похідну, то необхідно переписати (2.3.3):

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (k\varphi'_i\varphi'_j - p\varphi'_i\varphi_j + q\varphi_i\varphi_j) dx - k\varphi'_i\varphi_j|_{x=a} + k\varphi'_i\varphi_j|_{x=b} = \int_a^b f\varphi_j dx.$$

Зауваження 2.12 — Якщо $f \in W_2^{-1}$, то $f = f_0 - \frac{df_1}{dx}$, де $f_0, f_1 \in L_2$, тому базисними функціями для цієї ситуації можна взяти “штафетини”:

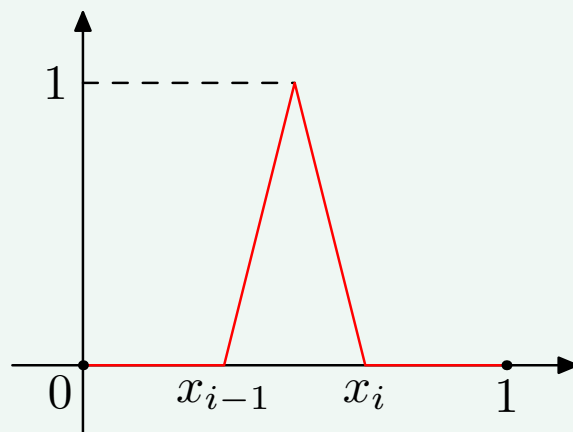


Рис. 1: “штафетина” від x_{i-1} до x_i .

2.4 Прямий метод

Нагадаємо попередню лекцію: задано рівняння

$$Au = f, \quad (2.4.1)$$

з параметром $f \in W_2^{-1}$. Нагадаємо також, що такі умови на праву частину означають, що розв’язок $u \in W_2^1$.

Приклад 2.13

Розглянемо рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b, \quad (2.4.2)$$

з крайовими умовами

$$-ku' + \alpha_1 u = \mu_1, \quad x = a, \quad (2.4.3)$$

і

$$ku' + \alpha_2 u = \mu_2, \quad x = b. \quad (2.4.4)$$

Розв’язання. Запишемо

$$(Au, v) = (f, v).$$

У явному вигляді маємо

$$\int_a^b (ku'v' - pu'v + quv) dx + \alpha_1 u(a)v(a) + \alpha_2 u(b)v(b) - \mu_1 v(a) - \mu_2 v(b) = \int_a^b f v dx. \quad (2.4.5)$$

Тут ми скористалися формулою інтегрування за частинами:

$$\int_a^b -(ku')' dx = -ku'v|_a^b + \int_a^b ku'v' dx,$$

звідки (а саме з $ku'v|_{x=a}$ і $ku'v|_{x=b}$) і виникли доданки з $\alpha_{1,2}$ та $\mu_{1,2}$.

2.5 Метод колокацій

Розглянемо рівняння

$$Au = f, \quad (2.5.1)$$

де $A : E \rightarrow F$, замінюємо на рівняння

$$P_n(Au_n) = P_n f, \quad (2.5.2)$$

або на

$$P_n(Au_n - f) = 0. \quad (2.5.3)$$

Координатну систему візьмемо $\{\varphi_i\} \in D(A) \subseteq E$, а проєкційну — $\{\psi_i\} \in F^*$. Тоді можемо (2.5.3) переписати у вигляді

$$\psi_j(Au_n - f) = 0,$$

або

$$\psi_j Au_n = \psi_j f.$$

Шукачи розв'язок у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i,$$

матимемо

$$\psi_j \left(A \left(\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) \right) = \psi_j f,$$

або ж, враховучи лінійність,

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_j (A\varphi_i) = \psi_j f, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5.4)$$

Матриця системи вище має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} \psi_1(A\varphi_1) & \psi_1(A\varphi_2) & \cdots & \psi_1(A\varphi_n) \\ \psi_2(A\varphi_1) & \psi_2(A\varphi_2) & \cdots & \psi_2(A\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(A\varphi_1) & \psi_n(A\varphi_2) & \cdots & \psi_n(A\varphi_n) \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

Якщо взяти у якості $\{\psi_j\}$ систему функцій Чебишова, то отримаємо $|D| \neq 0$.

Приклад 2.14

Нехай $F = C([a, b])$, і візьмемо $\psi_j(f) = f(x_j)$, де x_j — множина попарно різних вузлів на $[a, b]$.

Приклад 2.15

Розглянемо рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b,$$

з крайовими умовами

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Розв'язання. Візьмемо

$$\omega_n = \{x_j = jh, h = 1/n\},$$

тоді шукачи розв'язок у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i,$$

отримаємо систему

$$\sum_{i=1}^n c_i ((-k(x_j)\varphi'_i(x_j)) - p(x_j)\varphi'_i(x_j) + q(x_j)\varphi_i(x_j)) = f(x_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5.6)$$

Зауваження 2.16 — На практиці метод колокацій збігається ще повільніше ніж метод Бубнова-Гальоркіна, але він зручний в випадках, коли розв'язки мають різні градієнти:

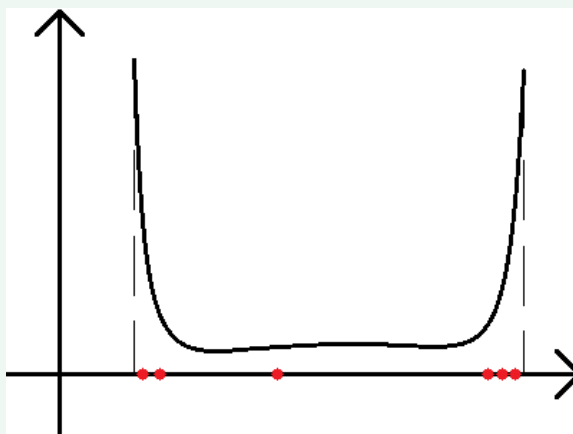


Рис. 2: Покращуємо точність за рахунок скупчення точок x_j у регіонах де розв'язок має великий градієнт.

Приклад 2.17

Нехай задано неоднорідну задачу

$$Au \equiv (-ku')' - pu' + qu = f \quad (2.5.7)$$

з умовами

$$u(0) = C, \quad u(1) = D. \quad (2.5.8)$$

Розв'язання. Тоді розв'язок шукаємо у вигляді

$$u = v + \varphi_0, \quad (2.5.9)$$

де φ_0 — відома функція що задовольняє неоднорідним крайовим умовами, наприклад $\varphi_0(x) = C + x(D - C)$. Тоді матимемо

$$Av + A\varphi_0 = f,$$

або ж

$$Av = f - A\varphi_0 = f_1, \quad (2.5.10)$$

з умовами

$$v(0) = v(1) = 0. \quad (2.5.11)$$

За розв'язком цього рівняння відновлюється розв'язок початкового за формулою $u_n = v_n + \varphi_0$.

3 Варіаційні методи розв'язування крайових задач

Розглянемо рівняння

$$Au = f, \quad (3.0.1)$$

де $A : E \rightarrow F$, E, F — пара гільбертових просторів. Припустимо також, що існує і єдиний розв'язок задачі (3.0.1).

Ідея варіаційних методів полягає у тому, що ми будемо зводити задачу (3.0.1) до знаходження мінімуму деякого функціоналу, що відповідає цій задачі, а саме $\Phi(u) : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\inf_{u \in E} \Phi(u) = \Phi_0. \quad (3.0.2)$$

3.1 Загальні положення задачі мінімізації функціоналів

Нехай $G(u, v)$ — білінійна симетрична функція (функціонал) у дійсному гільбертовому просторі.

Означення 3.1. Функціонал G називається *додатним*, якщо $G(u, u) > 0$, $\forall u \in D(G) \setminus \{0\}$.

Означення 3.2. Функціонал G називається *додатно визначеним*, якщо

$$G(u, u) > \mu \|u\|^2, \quad \forall u \in D(G) \setminus \{0\}, \quad (3.1.1)$$

де $\mu > 0$.

Визначимо функціонал Φ наступним чином:

$$\Phi(u) = G(u, u) - 2\ell(u) + C, \quad (3.1.2)$$

де $\ell(u)$ — лінійний функціонал з не вужчою областю визначення ніж G , тобто $D(G) \subseteq D(\ell)$, а C — довільна (можливо навіть від’ємна) константа.

Лема 3.3

Нехай $G(u, u)$ — додатно визначений, а $\ell(u)$ — обмежений, тоді $\Phi(u)$ — обмежений знизу.

Зауваження 3.4 — Тут *обмеженість* ℓ розуміється у тому сенсі, що $\exists a > 0$: $\|\ell(u)\| \leq a\|u\|$.

Доведення. Безпосередньо з (3.1.2) і (3.1.1) маємо

$$\|\Phi(u)\| \geq \mu \|u\|^2 - 2a\|u\| + C, \quad (3.1.3)$$

Роблячи заміну змінної $x = \|u\|$ і перепозначаючи праву частину за $f(x)$ отримаємо

$$f(x) = \mu x^2 - 2ax + C,$$

а це парабола з гілками вгору, у якій існує мінімум, який досягається в $x_0 = \frac{a}{\mu}$, і дорівнює $C - \frac{a^2}{\mu}$. \square

Наслідок 3.5

$\exists u^*: \inf_{u \in D(G)} \Phi(u) = \Phi_0 = \Phi(u^*)$.

Доведення. Див. книгу Ляшка, Макарова і Скоробагатька, або ж Ліонса. \square

Теорема 3.6

Нехай

$$\exists u^* \in D(G), \quad (3.1.4)$$

тоді виконуються наступні умови

1)

$$G(u^*, v) = \ell(v), \quad \forall v \in D(G) \quad (3.1.5)$$

2)

$$\Phi(u^* + v) = \Phi(u^*) + G(v, v). \quad (3.1.6)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \Phi(u^* + v) &= G(u^* + v, u^* + v) - 2\ell(u^* + v) + C = \\ &= G(u^*, u^*) + G(v, v) + G(u^*, v) - 2\ell(u^*) - 2\ell(v) + C = \\ &= \Phi(u^*) + \left(2(G(u^*, v) - \ell(v)) + G(v, v)\right) \geq \\ &\geq \Phi(u^*). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Тоді

$$2(G(u^*, v) - \ell(v)) + G(v, v) \geq 0. \quad (3.1.8)$$

Тоді це виконується і для $v := tv$, тобто

$$2t(G(u^*, v) - \ell(v)) + t^2 G(v, v) \geq 0, \quad (3.1.9)$$

причому можемо взяти t таким, аби перший доданок переважав другий за модулем, і був від'ємний за знаком. Тоді нерівність можлива якщо і тільки якщо

$$G(u^*, v) = \ell(v), \quad (3.1.10)$$

а це ніщо янше як (3.1.5). Підставляючи (3.1.10) в (3.1.7) отримуємо (3.1.6) \square

Означення 3.7. Послідовність $\{u_n\}$ називається *мінімізуючою* для Φ , якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \Phi(u^*) = \inf \Phi(u) = \Phi_0.$$

Теорема 3.8

Нехай $\{u_n\}$ мінімізуюча для Φ , тоді вона фундаментальна і збігається до u^* у розумінні відстані

$$\rho_G(u, v) = \sqrt{G(u - v, u - v)}. \quad (3.1.11)$$

Доведення. Наступні дві нерівності справджуються (як наслідок з визначення інфімуму) для достатньо великого N і $n, m > N$:

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) &\leq \Phi_0 + \varepsilon, \\ \Phi(u_m) &\leq \Phi_0 + \varepsilon.\end{aligned}$$

У сумі маємо

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) + \Phi(u_m) &\leq 2\Phi_0 + 2\varepsilon \leq \\ &\leq 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Тоді шляхом нескладних арифметичних перетворень маємо

$$2\varepsilon \geq \Phi(u_n) + \Phi(u_m) - 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) = \frac{1}{2}G(u_m - u_n, u_m - u_n). \quad (3.1.12)$$

Підставляючи сюди (3.1.11) маємо

$$\rho^2(u_n, u_m) \leq 4\varepsilon, \quad (3.1.14)$$

тобто

$$\rho(u_n, u_m) \leq 2\sqrt{\varepsilon},$$

що говорить про фундаментальність $\{u_n\}$. □

Вправа 3.9. Переконатися в істинності рівності в (3.1.12).

Розв'язання. Нескладні арифметичні перетворення:

$$\begin{aligned}\Phi(u_n) + \Phi(u_m) - 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) &= \\ &= G(u_n, u_n) - 2\ell(u_n) + C + G(u_m, u_m) - 2\ell(u_m) + C - \\ &\quad - 2\left(G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) - 2\ell\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + C\right) = \\ &= G(u_n, u_n) + G(u_m, u_m) - 2G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) - \\ &\quad - 2\left(\ell(u_n) + \ell(u_m) - 2\ell\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Другий доданок скорочується за лінійністю ℓ , а для першого можемо записати:

$$\begin{aligned}G(u_n, u_n) + G(u_m, u_m) - 2G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) &= \\ &= \frac{1}{2}G(u_n, u_n) + \frac{1}{2}G(u_m, u_m) - G(u_n, u_m) = \\ &= \frac{1}{2}G(u_m - u_n, u_m - u_n),\end{aligned}$$

що і показує істинність (3.1.12).

3.1.1 Процес Рітца побудови мінімізаційної послідовності

- 1) Вибираємо повну лінійно незалежну систему функцій $\{\varphi_i\} \in D(G)$.
- 2) Будуємо простори $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, тоді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i. \quad (3.1.15)$$

- 3) Будемо шукати розв'язок задачі

$$\inf_{u \in H_n} \Phi(u) = \Phi(u_n). \quad (3.1.16)$$

Тоді з (3.1.5) маємо

$$G(u_n, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_n. \quad (3.1.17)$$

Підставляючи сюди u_n з (3.1.15) будемо мати

$$\sum_{i=1}^n c_i G(\varphi_i, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_n, \quad (3.1.18)$$

або ж

$$\sum_{i=1}^n c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = \ell(\varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.1.19)$$

отримали систему лінійних рівнянь з матрицею Грама на коефіцієнти c_i . Якщо система лінійно незалежна то розв'язок існує і єдиний.

3.2 Метод Рітца

Нехай, як і раніше, ми розв'язуємо рівняння

$$Au = f, \quad (3.2.1)$$

де $A : H \rightarrow H$, H — дійсний гільбертовий простір. Нагадаємо, що ми ставимо цій задачі й відповідність задачу мінімізації

$$\inf_{u \in D(A)} \Phi(u) = \Phi(u^*) = u_0. \quad (3.2.2)$$

Нехай також виконуються певні припущення, необхідні для збіжності, а саме:

- 1) A — симетричний (самоспряжений), тобто

$$(Au, v) = (u, Av). \quad (3.2.3)$$

- 2) A — додатно визначений, тобто

$$(\exists \mu > 0)(\forall u \in D(A)) \quad (Au, u) \geq \mu \|u\|^2 (u, Av). \quad (3.2.4)$$

- 3) $f \in R(A)$ — область значень оператора A .

Теорема 3.10

Якщо A задовольняє умовам 1–3 (формули (3.2.3)–(3.2.4)), то

- 1) задача (3.2.2) має не більш ніж один розв’язок;
- 2) A^{-1} обмежений.

Доведення.

- 1) Розглянемо спочатку однорідну задачу, тобто $f \equiv 0$, тоді задача (3.2.1) зводиться до $Au = 0$. Тоді з (3.2.4) маємо $\mu\|u\|^2 \leq (Au, u) = 0$, звідки $u = 0$. Отже однорідна задача має тільки один розв’язок, а тому неоднорідна задача має не більше ніж один розв’язок.

Зауваження 3.11 — Справді, загальний розв’язок неоднорідної є сумою загального розв’язку однорідної (який у нас один) і частинного розв’язку неоднорідної (один або нуль)

- 2) Скористаємося постановкою задачі і нерівністю Коші-Буняковського:

$$\mu\|u\|^2 \leq (Au, u) = (f, u) < \|f\| \cdot \|u\|.$$

Можемо переписати це як

$$\|u\| \leq \frac{1}{\mu} \|f\|,$$

або ж

$$\|A^{-1}f\| \leq \frac{1}{\mu} \|f\|,$$

а це ніщо інше як

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}.$$

□

3.2.1 Мінімізаційна послідовність

Алгоритм 3.12.

- 1) $\{\varphi_i\} \in D(A)$ — повна;
- 2) $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$;
- 3) $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$;

Де наш загальний функціонал Рітца

$$\inf_{u \in H_n} \Phi(u) = \Phi(u_n) \tag{3.2.5}$$

з функцією G вигляду

$$G(u_n, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_n, \quad (3.2.6)$$

або, що те саме в наших умовах,

$$G(u_n, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.2.7)$$

можна буде записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^n c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.2.8)$$

або, що те саме в наших умовах,

$$\sum_{i=1}^n c_i (A\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.2.9)$$

Теорема 3.13 1) Якщо u^* — розв’язок (3.2.1), а оператор A задовольняє умовам (3.2.3) і (3.2.4), то мінімум функціонала Рітца (3.2.5) буде досягатися на u^* , причому тільки на ньому.

2) Якщо мінімум функціонала Рітца (3.2.5) досягається на елементі $u^* \in D(A)$, то u^* — розв’язок (3.2.1).

Доведення.

1) Якщо u^* — розв’язок (3.2.1), то

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= (Au, u) - 2(Au^*, u) = \\ &= (Au, u) - (Au^*, u) + (Au^*, u^*) - (Au^*, u) - (Au^*, u^*) = \\ &= (A(u - u^*), (u - u^*)) - (Au^*, u^*). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Оскільки $A > 0$ то з (3.2.10) маємо

$$\Phi(u) \geq \Phi(u^*), \quad (3.2.11)$$

оскільки

$$(A(u - u^*), (u - u^*)) \geq \mu \|u - u^*\|^2,$$

причому рівність досягається лише коли $u = u^*$.

2) Нехай на $u^* \in D(A)$ досягається мінімум функціонала (3.2.5), тоді

$$(Au^*, v) = (f, v), \quad \forall v \in D(G), \quad (3.2.12)$$

і аьо

$$(Au^* - f, v) = 0, \quad \forall v \in D(G),$$

а, оскільки $D(G)$ щільна в H , то

$$Au^* = f. \quad (3.2.14)$$

□

Зауваження 3.14 — Мінімізаційна послідовність зветься до тієї ж системи що й у методі Бубнова-Гальоркіна, то які ж його переваги?

3.2.2 Метод Рітца в H_A

Справа в тому, що якщо оператор A задовольняє умовам (3.2.3) і (3.2.4), то можна ввести енергетичний простір H_A у якому скалярний добуток введено за формулою

$$(u, v)_A = (Au, u), \quad (3.2.15)$$

а норма за формулою

$$\|u\|_A^2 = (u, u)_A. \quad (3.2.16)$$

Можна перевірити, що ці функції задовольняють аксіомам скалярного добутку та норми. Таким чином H_A — гільбертовий простір, ширший за $D(A)$.

Тоді задачі (3.2.1) ставимо у відповідність задачу

$$\inf_{u \in H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n), \quad (3.2.17)$$

для якої мають місце аналогічні результати:

Теорема 3.15

Мають місце наступні співвідношення:

$$1) \quad \Phi(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \|u - u^*\|_A^2 - \|u^*\|_A^2, \quad (3.2.18)$$

$$2) \quad \inf_{u \in H_n \subset H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n) = \Phi_0. \quad (3.2.19)$$

З (3.2.19) бачимо

$$(Au_n, v) = (f, v), \quad v \in H_n,$$

тоді

$$(Au_n - Au^*, v) = 0, \quad v \in H_n,$$

або

$$(u_n - u^*, v)_A = 0, \quad v \in H_n. \quad (3.2.20)$$

Це означає, що

$$u = P_{H_n} u^* \quad (3.2.21)$$

Теорема 3.16

Нехай координатна система $\{\varphi_i\}$ є повною в H_A , тоді при $n \rightarrow \infty$ мінімізуюча послідовність $\{u_n\}$ метода Рітца збігається до розв'язку задачі (3.2.1) в нормі простору H_A .

3.2.3 Приклади

Приклад 3.17

Задано рівняння

$$-(ku')' + qu = f, \quad 0 < x < 1$$

з крайовими умовами

$$u(0) = u(1) = 0,$$

і функціями

$$k(x) \geq c_0 > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Зауваження 3.18 — Взагалі кажучи, перед тим як будь-що робити, ми маємо показати симетричність A :

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int_0^1 \left(-(ku')'v + quv \right) dx = \\ &= -ku'v|_0^1 + \int_0^1 (-ku'v' + quv) dx = \\ &= (u, Av). \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

а також додатну визначеність: з $u(0) = 0$ маємо

$$u(x) = \int_0^x u'(\xi) d\xi,$$

звідки

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^2(x) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x u'(\xi) d\xi \right)^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^x \xi d\xi \int_0^x (u'(\xi))^2 d\xi dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u'\|^2, \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

або ж

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u'\|^2, \quad u \in D(A) \tag{3.2.24}$$

Тоді, підставляючи в (3.2.22) u замість v маємо

$$\begin{aligned}
 (Au, u) &= \int_0^1 \left(-(ku')'u + qu^2 \right) dx \geq \\
 &\geq c_0 \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \int_0^1 q(u(x))^2 dx \geq \\
 &\geq c_0 \int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq \\
 &\geq c_1 \|u\|^2,
 \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

де $c_1 = 2c_0$. Розглядаючи ліву і праву частини цієї рівності маємо додатновизначеність A .

Розв'язання.

1) Класичний розв'язок: функціонал:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (-(ku')'u + qu^2 - 2f(u)) dx,$$

з множиною

$$F(A) = \{u \in C^2([0, 1]), u(0) = u(1) = 0\}.$$

У якості $\{\varphi_i\}$ можна взяти $\varphi_i(x) = x^i(1-x)$, $i = \overline{1, n}$. Тоді

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\int_0^1 (k\varphi_i')' \varphi_j + q\varphi_i \varphi_j \right) dx = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

2) Узагальнений розв'язок: функціонал:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (k(u')^2 u + qu^2 - 2f(u)) dx,$$

Енергетичний простір H_A зі скалярним добутком

$$(u, v)_A = \int_0^1 (ku'v' + quv) dx, \tag{3.2.27}$$

елементи якого

$$H_A = \{u : \|u\|_A < \infty, u(0) = u(1) = 0\}.$$

Це по суті є $\overset{\circ}{W}_2((0, 1))$ (2 — інтегровні з квадратом, 1 — до першої похідної, 0 — нуль на краях).

Приклад $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n-1}$ — так звані штафетини:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{3.2.28}$$

Це все, що стосується першої граничної задачі. Тепер про задачу третього роду:

Приклад 3.19

Задано рівняння

$$-(ku')' + qu = f, \quad 0 < x < 1$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} -ku' + \alpha_1 u &= \beta_1, & x = 0, \\ -ku' + \alpha_1 u &= \beta_1, & x = 1. \end{aligned}$$

Розв'язання. Розглянемо тут узагальнений розв'язок

$$\Phi(u) = \int_0^1 (k(u')^2 u + qu^2 - 2f(u)) \, dx + \alpha_1 u^2(0) + \alpha_2 u^2(1) - 2\beta_1 u(0) - 2\beta_2 u(1),$$

Енергетичний простір H_A з нормою

$$\|u\| = \int_0^1 (k(u')^2 + qu^2) \, dx + \alpha_1 u^2(0) + \alpha_2 u^2(1), \quad (3.2.29)$$

елементи якого

$$H_A = \{u : \|u\|_A < \infty\}.$$

Приклад $\{\varphi\} = \{\varphi_i\}_{i=0}^n$.