Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

13 жовтня 2019 р.

Зміст

Лема 1.64
$\mathscr{L}[c](\eta) = c/\eta$.

Лема 1.65
$\mathscr{L}[e^{pt} f(t)](\eta) = \mathscr{L}[f(t)](\eta - p)$.

Нагадаємо, що раніше ми з'ясували, що $\mathscr{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1-\beta)\eta^{\beta-1}$.

Теорема 1.66 (Таубера)
Нехай $-\beta > -1$, f монотонна при великих t (тобто вона монотонна на деякому проміжку вигляду $[t_0, +\infty)$). Тоді $f(t) \sim t^{-\beta}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}[f](\eta) = \Gamma(1-\beta)\eta^{\beta-1}$ при $\eta \to 0$.

Зауваження 1.67 — Тут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$ означає, що $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Наслідок 1.68
Нехай $0 < \alpha < 1$ і f монотонна при великих t, $f \geq 0$ на $[0, +\infty)$ і $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Тоді $\forall A > 0$: $f(t) \sim \alpha A t^{-\alpha-1}$ при $t \to +\infty \iff \mathscr{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1-\alpha)\eta^\alpha + o(n^\alpha)$ при $\eta \to 0+$.

---

*Гуляницький Андрій Леонідович, `andriy.hul@gmail.com`

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.71}$$

Зауважимо, що $F'(t) = -f(t)$.

Вправа 1.69. Доведіть, що за наших припущень

$$f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1} \iff F(t) \sim At^{-\alpha}. \tag{1.72}$$

Доведення. ($\Longrightarrow$) Якщо $f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1}$, то, за визначенням асимптотики,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad \left|\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} - 1\right| < \varepsilon, \tag{1.73}$$

або ж, що те саме,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad (A-\varepsilon)\alpha t^{-\alpha-1} < f(t) < (A+\varepsilon)\alpha t^{-\alpha-1}, \tag{1.74}$$

щоправде вже з іншим $t_0(\varepsilon)$, але не суть.

Інтегруємо:

$$\begin{aligned}&(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0)\\ &\qquad\int_t^{\infty} (A-\varepsilon)\alpha s^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}s < \int_t^{\infty} f(s)\,\mathrm{d}s < \int_t^{\infty} (A+\varepsilon)\alpha s^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{1.75}$$

звідки

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists t_0(\varepsilon))(\forall t > t_0) \quad (A-\varepsilon)t^{-\alpha} < F(t) < (A+\varepsilon)t^{-\alpha}, \tag{1.76}$$

отримали що хотіли.

($\Longleftarrow$) Припустимо, що $F(t) \sim At^{-\alpha}$, але $f(t) \not\sim A\alpha t^{-\alpha-1}$. За визначенням, це означає, що

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall t_0)(\exists t > t_0) \quad \left|\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} - 1\right| > \varepsilon. \tag{1.77}$$

Зрозуміло, що для деякого $C > 0$ нескінченно часто відбувається або

$$\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} > 1 + C, \tag{1.78}$$

або

$$\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} < 1 - C, \tag{1.79}$$

а також нескінченно часто відбувається

$$\frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} = 1. \tag{1.80}$$

Без обмеження загальності, перше, розглянемо тоді зростаючу $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ таку, що $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ і

$$\frac{f(t_n)}{A\alpha t_n^{-\alpha-1}} = 1. \tag{1.81}$$

Позначимо

$$T_n = \min_{t \geq t_n} \left\{ t : \frac{f(t)}{A\alpha t^{-\alpha-1}} = 1 + C \right\}. \tag{1.82}$$

Для зручності запишемо це як

$$f(T_n) = (1+C)A\alpha T_n^{-\alpha-1}. \tag{1.83}$$

Без обмеження загальності вважаємо, що f монотонна починаючи з деякого $t_0 < t_1$, а тому $f(T_n) \leq f(t_n)$. Тоді

$$(1+C)A\alpha T_n^{-\alpha-1} \leq A\alpha t_n^{-\alpha-1}. \tag{1.84}$$

Логарифмуючи маємо

$$\ln(1+C) + \ln A + \ln\alpha - (\alpha+1)\ln T_n \leq \ln A + \ln\alpha - (\alpha+1)\ln t_n, \tag{1.85}$$

або ж

$$(\alpha+1)\ln T_n \geq (\alpha+1)\ln t_n + \ln(1+C). \tag{1.86}$$

Звідси

$$\ln T_n \geq \ln t_n + k, \tag{1.87}$$

або ж

$$T_n \geq K t_n, \tag{1.88}$$

де $k = \frac{\ln(1+C)}{\alpha+1}$ — додатнє, $K = e^k$. Аналогічним чином можна показати, що $f(t) \geq (1+C')A\alpha t^{-\alpha-1}$ на $[T_n/K', T_n]$ для певних сталих $C' < C$ і $1 < K' < K$.

Розглянемо тепер $\int_{t_n}^{T_n} f(s)\,\mathrm{d}s$. Доволі просто показати, що

$$\begin{aligned}\int_{T_n/K'}^{T_n} f(s)\,\mathrm{d}s &< (A-\varepsilon)(T_n/K')^{-\alpha} - (A+\varepsilon)T_n^{-\alpha} = \\ &= A\Big((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\Big) - \varepsilon\Big((T_n/K')^{-\alpha} + T_n^{-\alpha}\Big).\end{aligned} \tag{1.89}$$

для довільного $\varepsilon > 0$, починаючи з деякого $n_0(\varepsilon)$, звичайно. Але ж $f(t) \geq (1+C')A\alpha t^{-\alpha-1}$ на $[T_n/K', T_n]$, а тому

$$\begin{aligned}\int_{T_n/K'}^{T_n} f(s)\,\mathrm{d}s &\geq \int_{T_n/K'}^{T_n} (1+C')A\alpha t^{-\alpha-1} = \\ &= (1+C')A(T_n/K')^{-\alpha} - (1+C')AT_n^{-\alpha} = \\ &= A\Big((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\Big) + C'A\Big((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\Big).\end{aligned} \tag{1.90}$$

Лишилося порівняти (якщо права частина більше то ми отримали протиріччя)

$$\varepsilon\Big((T_n/K')^{-\alpha} + T_n^{-\alpha}\Big) \vee C'A\Big((T_n/K')^{-\alpha} - T_n^{-\alpha}\Big), \tag{1.91}$$

або ж

$$\varepsilon T_n^{-\alpha} K_2 \vee C' A T_n^{-\alpha} K_3, \tag{1.92}$$

де $K_2 = (K')^\alpha + 1$, $K_3 = (K')^\alpha - 1$ — додатні константи.

Помітимо, що тепер $T_n^{-\alpha}$ можна скоротити, отримаємо

$$\varepsilon K_2 \vee C' A K_3. \tag{1.93}$$

Цілком очевидно, що при $\varepsilon \to 0$ права частина переважає, а тому отримали протиріччя. □

Розглянемо

$$\mathscr{L}[F](\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta t} \int_t^{+\infty} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \tag{1.94}$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(s) \int_0^s e^{-\eta t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s &= \int_0^{+\infty} f(s) \frac{1 - e^{-\eta s}}{\eta}\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{\eta}\left(1 - \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\eta s}\,\mathrm{d}s\right) = \\ &= \frac{1 - \mathscr{L}[f](\eta)}{\eta}.\end{aligned} \tag{1.95}$$

Звідси

$$\mathscr{L}[f](\eta) = 1 - \eta \mathscr{L}[F](\eta). \tag{1.96}$$

Тепер можемо записати

$$\begin{aligned} f(t) \underset{t\to\infty}{\sim} A\alpha t^{-\alpha-1} &\iff F(t) \underset{t\to\infty}{\sim} A t^{-\alpha} \iff \\ &\iff \mathscr{L}[F](\eta) \underset{\eta\to 0+}{\sim} A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} \iff \\ &\iff \mathscr{L}[F](\eta) = \Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} + o(\eta^{\alpha-1}) \iff \\ &\iff \mathscr{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha} + o(\eta^{\alpha}). \end{aligned} \tag{1.97}$$

□

2 Моделі аномальної дифузії

Нагадаємо, що класичні рівняння дифузії та теплопровідності зумовлені наступними чинниками:

1) закон збереження кількості речовини/тепла;

2) джерела і стоки;

3) "закон" Фіка/Фур'є — емпірично встановлене для широкого класу процесів твердження про те, що інтенсивність потоку речовини/тепла пропорційна мінус градієнту концентрації речовини/кількості тепла на границі.

Розглянемо тепер інший підхід, який грунтується на випадкових блуканнях з неперервним часом (eng. *CTRW, continuous time random walk*). А саме, нехай $x(t)$ — випадкова величина (координата частинки в момент часу t), а $u(x,t)$ (gпри фіксованому t — щільність координати частинки).

Параметри моделі:

1) $u_0(x)$ — щільність початкового (при $t = 0$) розподілу;

2) $\psi(t)$ — щільність часу очікування наступного стрибка;

3) $\lambda(x)$ — щільність зміщення.

Означення 2.1. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є* називається

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Твердження 2.2

Для перетворення Фур'є справедлива теоерма згортки:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[f](\omega), \tag{2.2}$$

де

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.3}$$

Означення 2.3. Нехай $u(x,t) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тоді її *перетворенням Фур'є-Лапласа* називається

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta) = \tilde{\tilde{u}}(\omega,\eta) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta t + i\omega x} u(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

Формула 2.4 (Монтрола-Вайса)

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta) = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta)}{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}, \tag{2.5}$$

як тільки $|\mathscr{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)| < 1$.

Доведення. Введемо додаткове позначення: $n(t)$ — кількість стрибків до моменту t. $\psi_k(t)$ — щільність часу k-го стрибка. І нарешті, $\lambda_k(x)$ — щільність координати після k-го стрибка.

Запишемо формулу повної ймовірності:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{n(t)=k\}\lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\mathsf{P}\{n(t)\ge k\} - \mathsf{P}\{n(t)\ge k+1\}\Big)\lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi_k(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \psi_{k+1}(s)\,\mathrm{d}s\right)\lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t \psi^{\star k}(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \psi^{\star(k+1)}(s)\,\mathrm{d}s\right)\cdot (u_0 * \lambda^{*k})(x).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Зауваження 2.5 — Тут ми скористалися тим, що $\psi_k(x) = \psi^{\star k} = \underbrace{\psi \star \psi \star \ldots \star \psi}_{k}$ і $\lambda_k(x) = u_0 * \lambda^{*k} = u_0 * \underbrace{\lambda * \lambda * \ldots * \lambda}_{k}$.

Вправа 2.6. Поновити у конспекті формальне доведення цих фактів.

З урахуванням %перелік_нагадувань%, маємо

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\omega,\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta}\Big((\mathscr{L}[\psi](\eta)^k - \mathscr{L}[\psi](\eta)^{k+1})\mathcal{F}[u_0](\omega)\mathcal{F}[\lambda](\omega)^k\Big) = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1-\mathscr{L}[\psi](\eta))}{\eta}\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}[\psi](\eta)^k\mathcal{F}[\lambda](\omega)^k = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1-\mathscr{L}[\psi](\eta))}{\eta(1-\mathscr{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

□