

Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

1 жовтня 2019 р.

Зміст

1.3	Початкові значення	1
1.3.1	Початкові значення інтегралу	1
1.3.2	Початкові значення похідних	3
1.4	Перетворення Лапласа дробових інтегралів і похідних	5

1.3 Початкові значення

1.3.1 Початкові значення інтегралу

Дослідимо, за яких умов початкове значення інтегралу $((I_0^\alpha f)(t) = o(1))$ дорівнює нулю.

Теорема 1.40

Нехай $\alpha > 0$, $p > 1/\alpha$, $p \geq 1$, $f \in L_p((0, T))$. Тоді $(I_0^\alpha f)(t) = o(t^{\alpha-1/p})$ при $t \rightarrow 0$.

Доведення.

$$\begin{aligned} |(I_0^\alpha f)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |f(s)(t-s)^{\alpha-1}| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)q} ds \right)^{1/q} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \left(\frac{t^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right)^{1/q} = \\ &= \left(\int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1+1/q}}{c(\alpha, p)} = \end{aligned}$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1/p}}{c(\alpha, p)} = \\
&= o(t^{\alpha-1/p}),
\end{aligned}$$

де останній перехід справджується адже $\int_0^t |f(s)|^p ds = o(1)$ при $t \rightarrow 0$ □

Зауваження 1.41 (абсолютна неперервність інтеграла Лебега) — Якщо $f \in L_1$ то

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall A : \mu(A) < \delta(\varepsilon)) \quad \int_A f d\mu \leq \varepsilon. \quad (1.48)$$

Зауваження 1.42 (інтегральна нерівність Коші-Буняковського) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2}. \quad (1.49)$$

Зауваження 1.43 (інтегральна нерівність Гельдера) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}, \quad (1.50)$$

де $1/p + 1/q = 1$.

Зауваження 1.44 — Умова $p > 1/\alpha$ необхідна для збіжності усіх інтегралів з доведення

Наслідок 1.45

При $\alpha > 1/p$ маємо $(I_0^\alpha f)(t) = o(1)$, тобто $(I_0^\alpha f)(0) = 0$.

Вправа 1.46. Наведіть приклад f для якої $(I_0^\alpha f)(0) \neq 0$ (але і не ∞).

Приклад 1.47

Розглянемо $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на $[0, 1]$. Можна показати, що

$$\int_0^1 |f(x)| dx = 2, \quad (1.51)$$

тому $f \in L_1((0, 1))$. З іншого боку,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty, \quad (1.52)$$

тому $f \notin L_2((0, 1))$. Це означає, що $1 < p < 2$. Тоді нерівність $p > 1/\alpha$ з умов теореми не буде виконуватися, для $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Зокрема, виникають певні сподівання на $\alpha = \frac{1}{2}$. Розглянемо $(I_0^{1/2}f)(t)$:

$$(I_0^{1/2}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}} = \frac{\pi}{\Gamma(1/2)} = \sqrt{\pi}. \quad (1.53)$$

Як бачимо, отриманий вираз не просто не прямує до нуля при $t \rightarrow 0$, а взагалі не залежить від t , тобто наші сподівання не були марні і $(I_0^{1/2}f)(0) = \sqrt{\pi} \neq 0$ (але і не ∞).

1.3.2 Початкові значення похідних

Теорема 1.48

Нехай $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha]$, $f \in C^{n-1}([0, T])$, $p > \frac{1}{n-\alpha}$, $f^{(n)} \in L_p([0, T])$. Тоді $(D_0^\alpha)(0) = 0 \iff f^{(k)}(0) = 0$ при $k = \overline{0, n-1}$.

Розв'язання. Доведення. За умов теореми

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (1.54)$$

(\Leftarrow) У формулі вище інтеграл дорівнює нулю за першою сьогоденішньою теоремою, а уся сума зануляється за умовою теореми.

(\Rightarrow) Домножатимемо (1.54) на $t^{\alpha-k}$ для $k = \overline{0, n-1}$. Наприклад, для $k = 0$ матимемо

$$t^\alpha (D_0^\alpha f)(t) = t^\alpha ({}^*D_0^\alpha f)(t) + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)t^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (1.55)$$

Бачимо, що $t^\alpha ({}^*D_0^\alpha f)(t) = o(1)$, всі доданки суми нескінченно малі, тому $f(0) = 0$. Далі за індукцією по k отримуємо рівність нулів усіх похідних до $(n-1)$ -ої. \square

Зауваження 1.49 — При $0 < \alpha < 1$ маємо $(D_0^\alpha 1)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \neq 0$.

Зауваження 1.50 — Але $(^*D_0^\alpha 1)(t) = 0$.

Теорема 1.51

Нехай $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in C^n([0, T])$, тоді $D_0^\alpha f \equiv 0 \iff f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}$ — дробовий многочлен.

Доведення.

Вправа 1.52. (\implies) За умов теореми

$$0 = (I_0^\alpha 0)(t) = (I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}, \quad (1.56)$$

звідки

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}, \quad (1.57)$$

і, перепозначаючи $c_k = \frac{D_0^{\alpha-k-1} f(0)}{\Gamma(\alpha-k)}$, отримуємо якраз ту форму для f , яку хотіли.

(\impliedby) Нехай

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}, \quad (1.58)$$

тоді

$$D_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_0^{n-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{\alpha-k-1} \right) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(n-k)} t^{n-k-1} = 0. \quad (1.59)$$

□

Теорема 1.53 (похідна добутку)

Нехай f, g — аналітичні в $(-h, h)$. Тоді для $t \in (0, h/2)$

$$D^\alpha(f \cdot g)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\alpha} D_0^k f(t) \cdot D_0^{\alpha-k} g(t), \quad (1.60)$$

де

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\alpha-k+1)}. \quad (1.61)$$

Теорема 1.54 (Тарасова)

Нехай $0 < \alpha < 1$, тоді D^α — лінійний оператор, що задовольняє умову

$$D^\alpha(f \cdot g) = D^\alpha f \cdot g + f \cdot D^\alpha g. \quad (1.62)$$

Тоді $\exists p(t): (D_0^\alpha f)(t) = p(t) \cdot \frac{df}{dt}$.

1.4 Перетворення Лапласа дробових інтегралів і похідних

Означення 1.55. Нехай $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, тоді

$$\mathcal{L}[f](\eta) = \bar{f}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} f(t) dt. \quad (1.63)$$

Лема 1.56 (перетворення Лапласа похідної)

$$\mathcal{L}[f'](\eta) = \eta \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - f(0). \quad (1.64)$$

Доведення. Інтегруємо частинами. □

Лема 1.57 (перетворення Лапласа згортки)

$$\mathcal{L}[f \star g](\eta) = \mathcal{L}[f](\eta) \cdot \mathcal{L}[g](\eta). \quad (1.65)$$

Доведення. Змінюємо порядок інтегрування. □

Лема 1.58 (перетворення Лапласа степеневі функції)

$$\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1 - \beta)\eta^{\beta-1}. \quad (1.66)$$

Доведення. За означенням

$$\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} dt. \quad (1.67)$$

Зробимо заміну змінних: $\eta t = \xi$, $dt = d\xi/\eta$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} dt &= \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta} \frac{1}{\eta} d\xi = \\ &= \eta^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{-\beta} d\xi = \\ &= \eta^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta). \end{aligned} \quad (1.68)$$

□

Лема 1.59 (перетворення Лапласа інтегралу дробового порядку)

$$\mathcal{L}[I_0^\alpha f](\eta) = \eta^{-\alpha} \mathcal{L}[f](\eta). \quad (1.69)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I_0^\alpha f](\eta) &= \mathcal{L}[f \star y_\alpha](\eta) = \\ &= \mathcal{L}[f](\eta) \cdot \mathcal{L}[y_\alpha](\eta) = \\ &= \mathcal{L}[f](\eta) \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(1 - (1 - \alpha)) \eta^{-\alpha} = \\ &= \eta^{-\alpha} \mathcal{L}[f](\eta). \end{aligned} \quad (1.70)$$

□

Лема 1.60 (перетворення Лапласа похідної Рімана-Ліувіля)

$$\mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathcal{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \eta^k. \quad (1.71)$$

Приклад 1.61

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathcal{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0). \quad (1.72)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} f\right](\eta) = \\ &= \eta \cdot \mathcal{L}[I_0^{1-\alpha} f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\ &= \eta \cdot \eta^{\alpha-1} \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\ &= \eta^\alpha \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0). \end{aligned} \quad (1.73)$$

□

Лема 1.62 (перетворення Лапласа похідної Катупо)

$$\mathcal{L}\left[{}^\star D_0^\alpha f\right](\eta) = \eta^\alpha \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \eta^{\alpha-k-1}. \quad (1.74)$$

Приклад 1.63

Зокрема, при $0 < \alpha < 1$ маємо

$$\mathcal{L}\left[{}^{\star}D_0^{\alpha}f\right](\eta) = \eta^{\alpha} \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - \eta^{\alpha-1} \cdot f(0). \quad (1.75)$$

Вправа 1.64. Довести.

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[{}^{\star}D_0^{\alpha}f\right](\eta) &= \mathcal{L}\left[I_0^{1-\alpha}\frac{df}{dt}\right](\eta) = \\ &= \eta^{\alpha-1} \cdot \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right](\eta) = \\ &= \eta^{\alpha-1} \cdot \left(\eta \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - f(0)\right) = \\ &= \eta^{\alpha} \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - \eta^{\alpha-1} \cdot f(0). \end{aligned} \quad (1.76)$$

□