4 Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі

Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі. Методи дослідження. Особливості подання початкових умов. Зведення їх до одношарових.

§4.1 Багатошарові чисельні моделі

Нехай крайова задача

$$\frac{\partial \vec{u}(t)}{\partial t} = A\vec{u}, \quad t > 0 \tag{4.1}$$

апроксимується за допомогою $(q+1)$-шарової різницевої схеми

$$B_q \vec{u}^{\,n+q} + B_{q-1}\vec{u}^{\,n+q-1} + \ldots + B_0 \vec{u}^{\,n} = 0, \tag{4.2}$$

де $B_q, \ldots, B_0$ — скінченно—різницеві оператори, а $\vec{u}^{\,n}$ — деяка апроксимація $\vec{u}(n\Delta t)$. Припустимо, що рівняння (4.2) разом з відповідними граничними умовами має єдиний розв'язок відносно $\vec{u}^{\,n+q}$, залежний від $\vec{u}^{\,n+q-1}, \ldots, \vec{u}^{\,n}$. Запишемо еквівалентне до (4.2) рівняння

$$\vec{u}^{\,n+q} = C_{q-1}\vec{u}^{\,n+q-1} + \ldots + C_0 \vec{u}^{\,n} \tag{4.3}$$

де $C_i = C_i(\Delta t) = B_q^{-1} B_i$ — лінійні обмежені оператори, а Δx_j є заданими функціями від Δt.

Уведемо нові залежні змінні: $\vec{v}^{\,n} = \vec{u}^{\,n-1}$, $\vec{w}^{\,n} = \vec{v}^{\,n-1}$ і так далі, тоді рівняння (4.3) замінено системою

$$\vec{u}^{\,n+1} = C_{q-1}\vec{u}^{\,n} + C_{q-2}\vec{v}^{\,n} + C_{q-3}\vec{w}^{\,n} + \ldots, \quad \vec{v}^{\,n+1} = \vec{u}^{\,n}, \vec{w}^{\,n+1} = \vec{v}^{\,n}, \ldots \tag{4.4}$$

Якщо $\tilde{B}$ це простір, елементами якого є q-вимірні вектор-стовпчики

$$\vec{\tilde{\varphi}} = \begin{pmatrix} \vec{u}^{\,n+q-1} & \cdots & \vec{u}^{\,n} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

з нормою введеною, наприклад, так:

$$\left\| \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \cdots & \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \right\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \ldots}$$

і якщо покласти

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{q-1} & C_{q-2} & \cdots & \cdots & C_1 & C_0 \\ E & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & E & 0 \end{pmatrix},$$

де E — тотожний оператор, то рівняння (4.4) можна записати так:

$$\vec{\tilde{\varphi}}^{\,n+1} = \tilde{C}(\Delta t)\vec{\tilde{\varphi}}^{\,n}, \tag{4.5}$$

де

$$\tilde{\vec{\varphi}}^{\,n} = \begin{pmatrix} \vec{u}^{\,n+q} & \cdots & \vec{u}^{\,n} \end{pmatrix}^\intercal. \tag{4.6}$$

Тут $\tilde{C}$ — матриця, яка відповідає системі (4.4).

Тобто $(q+1)$-шарова різницева задача (4.3) зводиться до системи двошарових схем.

§4.2 Проблема постановки початкових умов для багатошарових різницевих схем

Початкові дані для диференціальної задачі задаються в момент часу t_0, а дані для різницевої задачі в точках сітки повинні бути визначені через початкові дані за допомогою апроксимації, яка дозволяє починати обчислення розв'язку за рівнянням (4.3). Припустимо, що значення $\tilde{\vec{\varphi}}$ обчислені точно, тобто

$$\tilde{\vec{\varphi}} = \begin{pmatrix} E((q-1)\Delta t)\vec{u}^{\,0} & E((q-2)\Delta t)\vec{u}^{\,0} & \cdots & \vec{u}^{\,0} \end{pmatrix}^\intercal, \tag{4.7}$$

де $\vec{u}^{\,0} \in B$, а $E(t)$ — розв'язуючий оператор для (4.1). Тоді

$$\tilde{\vec{u}}^0 = \begin{pmatrix} \vec{u}^{\,0} & \cdots & \vec{u}^{\,0} \end{pmatrix}^\intercal, \tag{4.8}$$

а

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} E((q-1)\Delta t) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & E((q-2)\Delta t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & E \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

— діагональна матриця.

Отже, наближений розв'язок крайової задачі (4.1) визначається формулою

$$\tilde{\vec{\varphi}} = \tilde{C}(\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0, \tag{4.10}$$

яка є апроксимацією виразу

$$\begin{pmatrix} \vec{u}((n+q-1)\Delta t) & \vec{u}((n+q-2)\Delta t) & \cdots & \vec{u}(n\Delta t) \end{pmatrix}^\intercal = E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0. \tag{4.11}$$

Порівняємо $\tilde{C}(\Delta t)^n\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$ з $E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$. При $\Delta t \to 0$ приходимо до підпростору $\tilde{B}^0$ простору $\tilde{B}$, елементами якого є вектори, всі q компонент яких рівні між собою. Тоді

$$\begin{pmatrix} \vec{u}(t) & \cdots & \vec{u}(t) \end{pmatrix}^\intercal = E(t)\begin{pmatrix} \vec{u}^{\,0} & \cdots & \vec{u}^{\,0} \end{pmatrix}^\intercal \tag{4.12}$$

До цієї ж границі прямує і $E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$ при $\Delta t \to 0$ ($\tilde{S} \to E$). Елементи $\vec{u}(t)$ і $\vec{u}^{\,0}$ належать простору B^0, але їх апроксимації — ні, вони лежать поза цим простором. При практичних обчисленнях, початкові значення отримуємо не з допомогою обчислення $\tilde{\vec{\varphi}}^{\,0} = \tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$, а з допомогою апроксимації $\tilde{\vec{\varphi}}^{\,0} = \vec{\psi}$. Для того, щоб наближене значення розв'язку $\tilde{\vec{u}}^n$ збігалось до точного розв'язку, необхідно, щоб $\vec{u}^{\,n} \to \vec{u}(t)$, а $\tilde{\vec{\varphi}}^{\,0} = \vec{\psi} \to \vec{u}(0)$ при $\Delta t \to 0$ незалежно одне від одного.

§4.3 Властивості багатошарових різницевих схем

Означення 4.1. Багатошарову різницеву схему (4.5) називають *стійкою*, якщо для деяко-го додатного τ при $0 < \Delta t < \tau$ і $0 \le n\Delta t \le T$ сім'я операторів $\tilde{C}^n(\Delta t)$ з (4.5) рівномірно обмежена $\forall n$.

Означення 4.2. Важливу роль відіграють *умови узгодженості*, які полягають в тому, що існує щільна в просторі B множина U^0 можливих початкових елементів для точних розв'язків така, що якщо $\vec{u}^{\,0} \in U^0$ та існує $\varepsilon > 0$, таке що, якщо покласти

$$\tilde{\vec{u}}^0 = \left(E(t)\vec{u}^{\,0} \quad \cdots E(t)\vec{u}^{\,0}\right) \tag{4.13}$$

то

$$\|(\tilde{C}(\Delta t) - E(\Delta t)\tilde{S})\tilde{\vec{u}}(t)\| < \varepsilon\Delta t \tag{4.14}$$

для достатньо малих Δt і $0 \le t \le T$.

Означення 4.3. Апроксимація є *збіжною*, якщо для довільних послідовностей $\Delta_j t$ і n_j, таких що $\Delta_j t > 0$ і $n_j\Delta_j t \to t$ при $j \to \infty$, $(0 \le t \le T)$ та $\forall\tilde{\vec{u}} \in \tilde{B}^0$ буде

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ \vec{\psi}\to\vec{u}^{\,0}}} \left\|\tilde{C}(\Delta_j t)^{n_j}\vec{\psi} - E(t)\tilde{\vec{u}}(t)\right\| = 0. \tag{4.15}$$

Порядок і похибка апроксимації багатошарових різницевих схем визначається звичайним чином.

У [??] доводиться, що істинні такі твердження:

Твердження 4.1

Якщо різницева схема стійка і її похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta t \to 0$, то умова узгодженості для цієї різницевої схеми виконується.

Твердження 4.2

Для коректно поставленої крайової задачі і її багатошарової апроксимації, яка задовольняє умови узгодженості, стійкість є необхідною і достатньою умовою збіжності.

§4.4 Узгодженість і порядок точності

При дослідженні узгодженості і точності різницевих схем бажано різницеві рівняння подати їх у формі

$$B_q\vec{u}^{\,n+q} + B_{q-1}\vec{u}^{\,n+q-1} + \ldots + B_0\vec{u}^{\,n} = 0, \tag{4.16}$$

де рівняння не розв'язане відносно $\vec{u}^{\,n+q}$ Невизначеність внаслідок множення зліва на довільну не вироджену матрицю знімається тим припущенням, що для довільної достатньо гладкої функції $u(t)$ різницевий оператор в лівій частині апроксимує оператор $\frac{\partial}{\partial t} - A$, тобто

$$B_q u(t + q\Delta t) + \ldots + B_0 u(t) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right) u(t) = o(1) \tag{4.17}$$

при $\Delta t \to 0$.

Означення 4.4. *Порядок точності* різницевої схеми визначимо як найбільше дійсне число ρ, для якого

$$\|B_q u(t+q\Delta t)+\ldots+B_0 u(t)\| = o((\Delta t)^\rho) \tag{4.18}$$

при $\Delta t \to 0$ для всіх достатньо гладких точних розв'язків диференціального рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$.

Означення 4.5. Вираз у лівій частині (4.18) є *похибкою апроксимації* багатошарової різницевої схеми.

Встановимо зв'язок між узгодженістю та порядком точності різницевих схем. Для цього повернемось до рівняння (4.2) зі сталими коефіцієнтами і умови періодичності розв'язку. Розв'язок задачі виразимо через оператори $C_j = -B_q^{-1}B_j$.

Виходячи з обмеженості операторів $C_1, \ldots, C_{q-1}$ та з того, що виконується умова (4.18), можна показати, що $B_q^{-1} = O(\Delta t)$.

Отже у вектора $\tilde{C}(\Delta t)\tilde{S}\tilde{u}(t)$ відмінною від нуля є тільки перша компонента і нам потрібно показати, що при довільному $\varepsilon > 0$:

$$\|(C_{q-1}E((q-1)\Delta t)+\ldots+C_0 - E(q\Delta t))u_0(t)\| < \varepsilon\Delta t \tag{4.19}$$

для довільного елемента $u(0)$ з деякої щільної в B множини U^0 і для всіх достатньо малих Δt.

Нехай B_m — підпростір тригонометричних поліномів степеня m з гільбертового простору B періодичних функцій, а u_0 презентує деяку функцію $u_0(\vec{x})$ з B_m. Якщо в рівності (4.18) покласти $u(t) = tu_0$, то

$$Lu_0 = o(1), \quad \Delta t \to 0, \tag{4.20}$$

де

$$L = \Delta t(qB_q + (q-1)B_{q-1}+\ldots+B_1) - E. \tag{4.21}$$

Оскільки B_m має скінчений базис, кожен елемент якого задовольняє співвідношення (4.20), то для норми оператора L в просторі B_m маємо $\|L\|_m < \varepsilon_1$ для достатньо малих Δt, де ε_1 — довільне додатне число. Тому оператор $E+L$ має обернений в цьому просторі, а саме

$$(E+L)^{-1} = E+M,$$

де

$$\|M\|_m < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}.$$

Таким чином

$$(qB_q+\ldots+B_1)^{-1} = \Delta t(E+M).$$

За визначенням $C_j = -B_q^{-1}B_j$, тому

$$B_q^{-1} = (qE-(q-1)C_{q-1}-\ldots-C_1)\Delta t(E+M). \tag{4.22}$$

Якщо $u_0 \in B_m$, а A — диференціальний оператор рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \tag{4.23}$$

із сталими коефіцієнтами, то $u(t) \in B_m$. Крім того, для цього розв'язку буде $\frac{\partial u}{\partial t} - Au = 0$, оскільки в силу (4.18)

$$\|(B_q E(q\Delta t) + B_{q-1}E((q-1)\Delta t) + \ldots + B_0)u(t)\| < \varepsilon_0 \tag{4.24}$$

для довільного $\varepsilon_0 > 0$ та для всіх достатньо малих Δt.

Помноживши (4.22) на (4.24), одержимо

$$\|(E(q\Delta t) + C_{q-1}E((q-1)\Delta t) + \ldots + C_0)u(t)\| < \varepsilon_3 \Delta t, \tag{4.25}$$

де

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_0 \|I + M\|_m \max_{0<\Delta t<\tau} \|qE - (q-1)C_{q-1} - \ldots - C_0\|.$$

Максимум, який входить в останню рівність існує, оскільки ми припустили, що різницеві рівняння стійкі. Звідси випливає, що оператори $C_{q-1}(\Delta t), \ldots, C_1(\Delta t)$ рівномірно обмежені при $0 < \Delta t < \tau$.

Нерівність вигляду (4.25) має місце для довільного розв'язку, який належить B_m. Якщо розглянути всі можливі підпростори B_m з простору B, то можливі початкові елементи $u(0)$ для цих розв'язків утворять щільну множину в B.

Отже, доведено:

Теорема 4.3

Якщо різницева схема стійка і похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta t \to 0$, то умова узгодженості (4.4) виконується.

§4.5 Завдання для самостійної роботи

Побудувати та дослідити тришарові явні та неявні різницеві схеми для рівнянь параболічного та гіперболічного типів другого порядку