# Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

24 вересня 2019 р.

## Зміст



## 1.2 Властивості дробових похідних

### 1.2.1 Похідні степеневих функцій

Знайдемо похідні степеневих функцій. Нехай $\beta > -1$, $0 < \alpha < 1$. Тоді, безпосередньо за визначення дробової похідної Рімана-Ліувілля

$$D_0^\alpha t^\beta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} t^\beta. \tag{1.2.1}$$

У свою чергу, безпосередньо за визначенням дробового інтеграла

$$I_0^{1-\alpha} t^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha} \,\mathrm{d}s. \tag{1.2.2}$$

**Нагадування 1.2.1 —**

**Означення 1.2.2** (бета-функції)**.**

$$B(a,b) = \int_0^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1} \,\mathrm{d}\xi, \tag{1.2.3}$$

**Властивість 1.2.3** (бета-функції)

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.2.4}$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Проведемо заміну $\xi = s/t$, тоді $\mathrm{d}s = t\,\mathrm{d}\xi$, отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (t\xi)^\beta t^{-\alpha}(1-\xi)^{-\alpha} t\,\mathrm{d}\xi &= \\ = \frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot B(\beta+1, 1-\alpha) &= \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)}\cdot t^{\beta-\alpha+1}&.\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Лишилося продиференціювати цей інтеграл:

$$\begin{aligned}D_0^\alpha\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)}\cdot t^{\beta-\alpha+1}\right) &= \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha+1)t^{\beta-\alpha} &= \\ = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\cdot t^{\beta-\alpha}&,\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

де в останньому переході ми скористалися властивістю $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.

**Зауваження 1.2.4** — Ця формула справедлива і для $\alpha \geqslant 1$, але умова $\beta > -1$ важлива для збіжності кількох інтегралів, зокрема

$$\int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha}\,\mathrm{d}s. \tag{1.2.7}$$

**Приклад 1.2.5**

Зокрема, якщо $\mathbb{N} \ni \alpha \leqslant \beta \in \mathbb{N}$, то маємо формулу

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} t^\beta = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}\cdot t^{\beta-\alpha}. \tag{1.2.8}$$

Наприклад,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} t^4 = \frac{4!}{2!}\cdot t^2. \tag{1.2.9}$$

**Зауваження 1.2.6** — Зрозуміло також, що всі введені нами оператори лінійні.

### 1.2.2 Властивості похідних Рімана-Ліувілля

**Твердження 1.2.7**

На жаль, не виконується наступна властивість

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}. \tag{1.2.10}$$

*Доведення.*

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \tag{1.2.11}$$

Почленно диференціюємо:

$$\begin{aligned} D_0^\alpha e^{\lambda t} &= D_0^\alpha \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_0^\alpha (t^k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} \cdot t^{k-\alpha} \neq \\ &\neq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^\alpha \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

□

Нагадаємо основні співвідношення між похідними та інтегралами із класичного аналізу:

**Формула 1.2.8** ((не) Ньютона-Лейбніца)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s = f(t), \tag{1.2.13}$$

а також

**Формула 1.2.9** (Ньютона-Лейбніца)

$$\int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s = f(t) - f(0). \tag{1.2.14}$$

Важливою для подальшого аналізу є

**Властивість 1.2.10** (дробових інтегралів, напівгрупова)
Нехай $\alpha > 0$, $\beta > 0$, тоді $I_0^{\alpha+\beta} \equiv I_0^\alpha I_0^\beta$.

**Вправа 1.2.11.** Доведіть цю властивість. **Підказка**: за означеннями,

$$I_0^{\alpha+\beta} f \equiv f \star y_{\alpha+\beta} \stackrel{?}{\equiv} f \star (y_\alpha \star y_\beta) \stackrel{?}{\equiv} (f \star y_\alpha) \star y_\beta \equiv I_0^\beta I_0^\alpha f, \tag{1.2.15}$$

тому достатньо перевірити асоціативність згортки і рівність $y_{\alpha+\beta} \equiv y_\alpha \star y_\beta$.

**Формула 1.2.12** (аналог формули (не) Ньютона-Лейбніца)
Для $\alpha > 0$

$$D_0^\alpha I_0^\alpha f \equiv f. \tag{1.2.16}$$

*Доведення.* Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, тоді

$$D_0^\alpha I_0^\alpha f \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^{n-\alpha} I_0^\alpha f \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} I_0^n f = f. \tag{1.2.17}$$

□

**Зауваження 1.2.13** — Тут ми скористалися напівгруповою властивістю.

**Формула 1.2.14** (аналог формули Ньютона-Лейбніца)
Нехай $f, D_0^\alpha f \in L_1([0,T])$, $n = \lceil \alpha \rceil$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, тоді для $0 < t < T$ маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha - k)}. \tag{1.2.18}$$

**Зауваження 1.2.15** — Тут під $D_0^{-|\beta|}$ маємо на увазі $I_0^{|\beta|}$.

**Приклад 1.2.16**
Для $0 < \alpha < 1$ маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.2.19}$$

**Зауваження 1.2.17** — Тут $(I_0^{1-\alpha} f)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (I_0^{1-\alpha} f)(\varepsilon)$.

*Доведення.* Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned} (I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (D_0^\alpha f)(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(s)\,\mathrm{d}s \right). \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Виконаємо наступні маніпуляції з виразом що стоїть під похідною:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(t)\,\mathrm{d}t = \\ &\quad = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left( (t-s)^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(s)\Big|_{s=0}^{s=t} + \alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (I_0^{1-\alpha} f)(s)\,\mathrm{d}s \right) = \\ &\quad = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^\alpha I_0^{1-\alpha} f = \\ &\quad = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f. \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

Лишилося всього лише продиференціювати:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f \right) = f(t) - \frac{t^{\alpha-1} (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.2.22}$$

□

### 1.2.3 Властивості похідних за Капуто

**Теорема 1.2.18**
Нехай $f \in L_\infty([0,T])$, тобто $\exists M \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} M$, тоді, як і очікувалося,

$$({}^\star D_0^\alpha I_0^\alpha f)(t) = (I_0^\alpha {}^\star D_0^\alpha f)(t). \tag{1.2.23}$$

**Теорема 1.2.19**
Нехай $n = \lceil \alpha \rceil$, $f \in AC^n([0,T])$, тоді

$$(I_0^\alpha {}^\star D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot t^k. \tag{1.2.24}$$

**Зауваження 1.2.20** — Ця формула справедлива і для цілих $\alpha$.

**Твердження 1.2.21**
Для похідних у загальному випадку не виконується напівгрупова властивість.

**Теорема 1.2.22**
Нехай $f, D_0^\beta \in L_1([0,T])$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Тоді

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \sum_{k=0}^{\lceil \beta \rceil - 1} (D_0^{\beta-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(-\alpha-k)} \tag{1.2.25}$$

**Приклад 1.2.23**
Зокрема, для $0 < \alpha, \beta < 1$:

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - (I_0^{1-\beta} f)(0) \cdot \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}. \tag{1.2.26}$$

*Доведення.* Доведемо частинний випадок:

$$
\begin{aligned}
(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0^{1-\alpha} D_0^\beta f\right)(t) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha} D_0^\beta f\right)(t) = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha-\beta} I_0^\beta D_0^\beta f\right)(t) = \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} I_0^{2-\alpha-\beta} \left(f(t) - (I_0^{1-\beta} f)(0) \cdot \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right) = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} \cdot D_0^{\alpha+\beta} t^{\beta-1} = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha)} \cdot t^{-1-\alpha} = \\
&= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(-\alpha)} \cdot t^{-1-\alpha}.
\end{aligned}
\tag{1.2.27}
$$

□