Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №3 на тему:
«Чисельне розв'язування рівняння теплопровідності»

Виконав студент групи ОМ-4
Скибицький Нікіта

Київ, 2019

Зміст

1 Постановка задачі

1.1 Фізична постановка задачі

Грудочку алюмінію сферичної форми діаметром 20 мм, що має температуру $0°C$ вміщено в середовище з температурою $300°C$. Визначити час, який потрібен для підвищення температури в середині цієї грудочки до $100°C$.

Фізичні характеристики алюмінію: $\lambda = 220 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{K}}$, $c = 890 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{K}}$, $\rho = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\gamma = 300 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{K}}$.

1.2 Математична постановка задачі

1.3 Загальна математична постановка задачі

В області $\overline{Q}_T = \{a \le x \le b, 0 \le t \le T\}$ знайти розв'язок одновимірного нестаціонарного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t), \quad x \in (a,b), \quad t > 0, \tag{1}$$

яке задовольняє початкові умови

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [a,b] \tag{2}$$

і крайові умови

$$\begin{aligned} \alpha_1 k(a,t) \frac{\partial u(a,t)}{\partial x} &= \beta_1 u(a,t) - \mu_1(t); \\ -\alpha_2 k(b,t) \frac{\partial u(b,t)}{\partial x} &= \beta_2 u(b,t) - \mu_2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

де $k(x,t)$, $q(x,t)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ — задані функції; α_k, β_k $(k = 1,2)$ — задані невід'ємні сталі, причому виконуються нерівності $0 < k_0 \le k(x,t)$ (k_0 — деяка стала), $q(x,t) \ge 0$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \ne 0$ $(k = 1,2)$.

1.4 Математична постановка задачі варіанту

В області $\overline{Q}_T = \{0 \le x \le R, 0 \le t \le T\}$ знайти розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in (0, R), \quad t > 0, \tag{4}$$

яке задовольняє початкові умови

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, R] \tag{5}$$

і крайові умови

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= 0; \\ -\lambda \frac{\partial u(R,t)}{\partial x} &= \gamma(u(R,t) - u_{\text{env}}). \end{aligned} \tag{6}$$

2 Аналітичні маніпуляції

2.1 Перехід до системи СІ

$R = 0.01$м, $u_0 = 273°$K, $u_{\text{env}} = 573°$K, $\lambda = 220 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{K}}$, $c = 890 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{K}}$, $\rho = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\gamma = 300 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{K}}$.

2.2 Безрозмірні змінні

Ведемо безрозмірні змінні

$$v(x,t) = \frac{u(x,t) - u_0}{u_{\text{env}} - u_0}, \qquad t_1 = \frac{a^2 t}{R^2}, \qquad x_1 = \frac{x}{R}, \tag{7}$$

де $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$. Отримаємо наступну задачу: в області $\overline{Q}_T = \{0 \le x_1 \le 1, 0 \le t_1 \le T_1\}$ знайти розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} = \frac{1}{x_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 \frac{\partial v}{\partial x_1}\right), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \tag{8}$$

яке задовольняє початкові умови

$$v(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in [0, 1] \tag{9}$$

і крайові умови

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(0,t_1)}{\partial x_1} &= 0; \\ -\frac{\partial v(1,t_1)}{\partial x_1} &= \gamma_1 v(1,t) - \gamma_1, \end{aligned} \tag{10}$$

де $\gamma_1 = \frac{\gamma R}{\lambda}$.

2.3 Зауваження

Формули переходу назад до розмірних змінних (використовуються для побудови графіків):

$$u(x,t) = v(x,t) \cdot (u_{\text{env}} - u_0) + u_0, \qquad t = \frac{R^2 t_1}{a^2}, \qquad x = x_1 \cdot R. \tag{11}$$

Перша крайова умова випливає з міркувань симетрії і введена для забезпечення умови регулярності розв'язку:

$$x_1^2 \cdot \left|\frac{\partial v(0,t_1)}{\partial x_1}\right| < \infty. \tag{12}$$

3 Теоретичні відомості

3.1 Власне різницева схема

Розглянемо різницеві методи розв'язування останньої задачі. В області $\overline{Q}_T$ введемо сітку $\overline{\omega}_{h,\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, де $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, h = 1/N, i = \overline{0..N}\}$; $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \tau = T/M, j = \overline{0..M}\}$. Позначимо $y_i^j = y(x_i, t_j)$.

За допомогою інтегро-інтерполяційного методу апроксимуємо нашу задачу різницевою схемою з ваговими коефіцієнтами:

$$\overline{x}_i^2 y_{t,i}^j = \sigma \left(\overline{p} y_x^{j+1}\right)_{x,i} + (1-\sigma)\left(\overline{p} y_x^j\right)_{x,i}, \quad i = \overline{1..N-1}, \quad j = \overline{1..M}, \tag{13}$$

з початковими умовами

$$y_i^0 = \nu_0(x_i), \quad i = \overline{0..N},$$

та крайовими умовами

$$\sigma \overline{p}_1 y_{\overline{x},0}^{j+1} + (1-\sigma)\overline{p}_1 y_{\overline{x},0}^j = \frac{h}{2}\overline{x}_0^2 y_0^j; \tag{14}$$

$$-\sigma \overline{p}_N y_{\overline{x},N}^{j+1} - (1-\sigma)\overline{p}_N y_{\overline{x},N}^j = \sigma x_N^2 \gamma_1 y_N^{j+1} + (1-\sigma)\gamma_1 x_N^2 y_N^j - x_N^2 \overline{\gamma}_1 + \frac{h}{2}\overline{x}_N^2 y_N^j, \tag{15}$$

де

$$\overline{x}_0^2 = \frac{1}{h}\int_0^{x_1} x^2\,dx; \qquad \overline{x}_i^2 = \frac{1}{2h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} x^2\,dx, \quad i = \overline{1..N-1}; \qquad \overline{x}_N^2 = \frac{1}{h}\int_{x_{N-1}}^{x_N} x^2\,dx;$$

$$\overline{p}_i = a \cdot x_{i-1/2}^2, \quad i = \overline{1..N}.$$

3.2 Результати щодо збіжності

Покладаючи $\sigma = 0$, дістаємо явну схему; при $\sigma = 1$ — схему з випередженням (повністю неявну схему); при $\sigma = 0.5$ — симетричну схему Кранка—Ніколсона, яка записується на шаблоні з шести вузлів.

У разі досить гладких вхідних даних отримана різницева схема стійка при $\sigma \geq 0.5$ і має місце рівномірна збіжність її зі швидкістю $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$, де

$$m_\sigma = \begin{cases} 2, & \text{при} \quad \sigma = 0.5; \\ 1, & \text{при} \quad \sigma \neq 0.5. \end{cases}$$

3.3 Тридіагональна СЛАР

Різницева схема при $\sigma \neq 0$ буде неявною, тому y^{j+1} знаходиться як розв'язок СЛАР з тридіагональною матрицею, а саме:

$$\begin{aligned} b_0\nu_0 + c_0\nu_1 &= d_0, \\ a_i\nu_{i-1} + b_i\nu_i + c_i\nu_{i+1} &= d_i, \quad i = \overline{1..N-1}, \\ a_N\nu_{N-1} + b_N\nu_N &= d_N, \end{aligned} \tag{16}$$

де

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\sigma\tau}{h^2}\overline{p}_1; \quad b_0 = -\frac{1}{2}\overline{x}_0^2 - c_0; \\ d_0 &= -\frac{1}{2}\overline{x}_0^2 y_0^j - \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\overline{p}_1\left(y_1^j - y_0^j\right); \end{aligned} \tag{17}$$

а також

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\sigma\tau}{h^2}\overline{p}_i; \quad c_i = \frac{\sigma\tau}{h^2}\overline{p}_{i+1}; \quad b_i = -\overline{x}_i^2 - (a_i + c_i); \\ d_i &= -\overline{x}_i^2 y_i^j - \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\left(\overline{p}_{i+1}\left(y_{i+1}^j - y_i^j\right) - \overline{p}_i\left(y_i^j - y_{i-1}^j\right)\right), \quad i = \overline{1..N-1}; \end{aligned} \tag{18}$$

і нарешті

$$a_N = \frac{\sigma\tau}{h^2}\overline{p}_N; \quad b_N = -\frac{\sigma\tau}{h}\gamma_1 x_N^2 - \frac{1}{2}\overline{x}_N^2 - a_N;$$
$$d_N = \frac{(1-\sigma)\tau}{h}\gamma_1 x_N^2 y_N^j - \frac{\tau}{h}\gamma_1 x_N^2 - \frac{1}{2}\overline{x}_N^m y_N^j + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\overline{p}_N\left(y_N^j - y_{N-1}^j\right). \tag{19}$$

4 Чисельне моделювання

4.1 Графіки

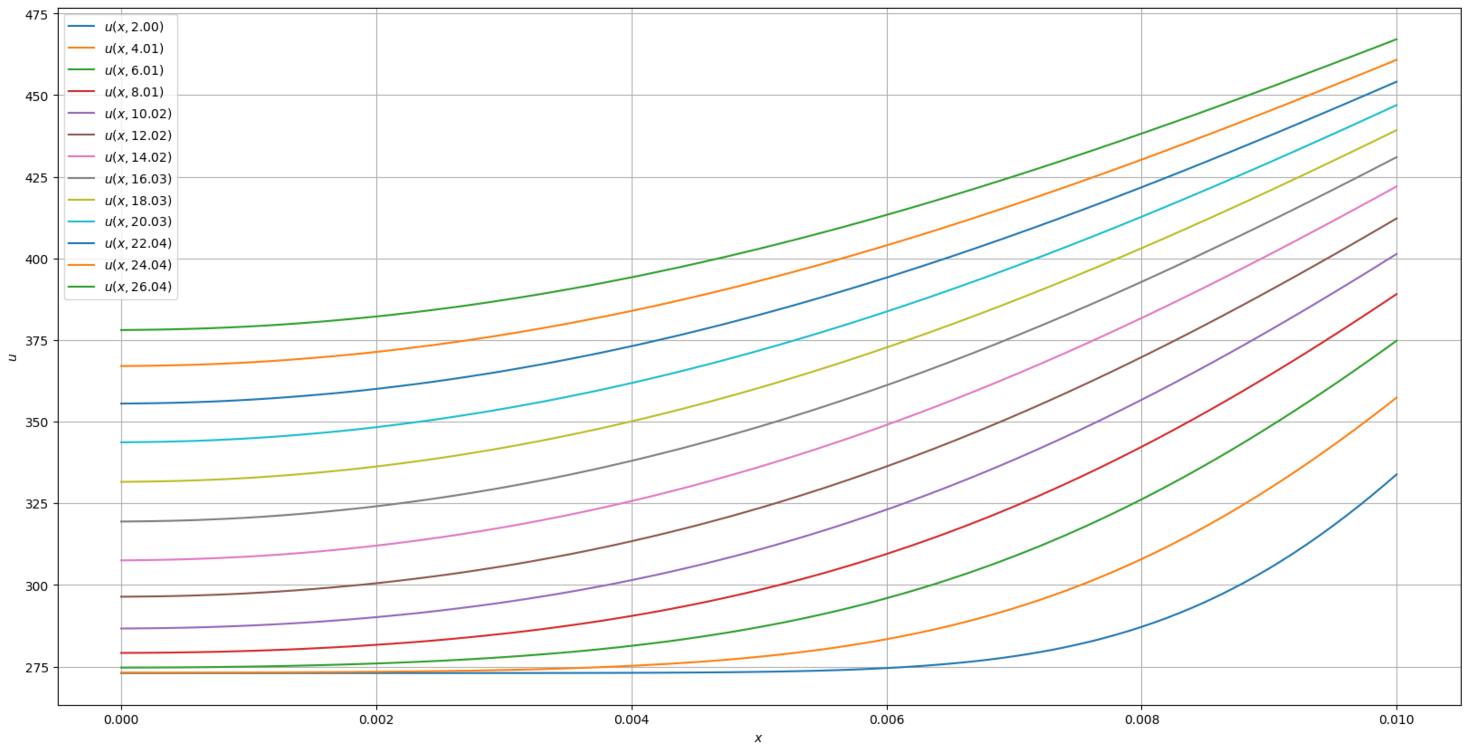

Рис. 1: Розподіл температури в залежності від відстані до центру кулі щодві секунди

4.2 Аналіз результатів

Результат узгоджується із дуже приблизним наближенням: якщо при нагріванні центру до 100 градусів куля у середньому нагріється до 150, то має (з точністю хоча б до порядку) виконуватися наступна рівність:

$$c \cdot m \cdot (u_{\text{final}} - u_0) = \gamma \cdot t \cdot A_{\text{surface}} \cdot (u_{\text{env}} - u_{\text{final}}), \tag{20}$$

де m — маса кулі, A_{surface} — площа (eng. *area*) її поверхі; у лівій частині рівності стоїть набута кулею енергія, а у правій — енергія, передана через границю за час t.

При підстановці $u_{\text{final}} = 150$ знаходимо $t \approx 26.606$.