# Чисельні методи математичної фізики

Риженко А. I.*

15 жовтня 2019 р.

## Зміст

**1 Проекційні методи. Метод моментів. Метод Бубнова-Гальоркіна** **2**
1.1 Постановка задачі і допоміжні твердження . . . 2
1.2 Метод моментів . . . 2
1.3 Метод Бубнова-Гальоркіна . . . 4

**2 Виділення самоспряженого оператору. Узагальнений розв'язок** **4**
2.1 Основні визначення . . . 4
2.2 Збіжність методу Бубнова-Гальоркіна . . . 5
2.3 Приклади . . . 6
2.4 Прямий метод . . . 7
2.5 Метод колокацій . . . 8

**3 Варіаційні методи розв'язування крайових задач** **10**
3.1 Загальні положення задачі мінімізації функціоналів . . . 10
3.1.1 Процес Рітца побудови мінімізаційної послідовності . . . 14
3.2 Метод Рітца . . . 14
3.2.1 Мінімізаційна послідовність . . . 15
3.2.2 Метод Рітца в $H_A$ . . . 17
3.2.3 Приклади . . . 18
3.3 Метод найменших квадратів . . . 20
3.3.1 Мінімізаційна послідовність . . . 21

**4 Сіткові (дискретні/різницеві) методи** **22**
4.1 Загальні поняття методу сіток . . . 22
4.2 Сітки і сіткові функції . . . 24
4.2.1 Сітки . . . 24
4.2.2 Сіткові функції . . . 25
4.3 Апроксимація диференціальних операторів . . . 26

*Риженко Андрій Іванович, `rai-ku@ukr.net`

# 1 Проекційні методи. Метод моментів. Метод Бубнова-Гальоркіна

## 1.1 Постановка задачі і допоміжні твердження

Розгялнемо рівняння

$$Au = f, \tag{1.1.1}$$

де $A : E \to F$ — лінійний, діє на парі лінійниї нормованих просторів, $D(A) \subseteq E$, $R(A) \subseteq F$.

Розглянемо послідовність підпросторів $E_n \subseteq D(A)$, $F_n \subseteq F$. Введемо лінійні *оператори проектування* $P_n : F \to F_n$ такі, що $P_n^2 = P_n$. Тоді можна розглянути послідовність рівнянь

$$P_n(Au_n - f) = 0, \tag{1.1.2}$$

із розв'язками $u_n \in E_n$. Враховуючи лінійність операторів проектування маємо $P_n(Au_n) = P_n f$. Зрозуміло, що у залежності від вибору $E_n, F_n, P_n$ отримаємо різні *проекційні розв'язки* $u_n$.

Нехай надалі $E, F$ — гільбертові простори.

**Означення 1.1.** Розглянемо лінійно незалежні системи функцій $\{\varphi_i\} \in D(A)$ і $\{\psi_i\} \in F$. Система $\{\varphi_i\}$ називається *координатною*, а система $\{\psi_i\}$ — *проекційною*.

У якості $E_n$ візьмемо $\mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а в якості $F_n$ — $\mathcal{L}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$.

**Твердження 1.2**

Тоді для виконання умови $P_n^2 = P_n$ достатньо, аби $P_n|_{F_n}$ був тотожнім оператором.

*Доведення.* Справді, тоді $P_n f = f_n \in F_n$ і $P_n^2 f = P_n f_n = f_n$. □

## 1.2 Метод моментів

Розв'язок задачі (1.1.2) будемо шукати у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i. \tag{1.2.1}$$

**Лема 1.3**
Для довільного елементу $\psi \in F$ рівність

$$P_n\psi = 0 \tag{1.2.2}$$

та система рівностей

$$(\psi, \psi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \tag{1.2.3}$$

рівносильні.

*Доведення.* Нехай виконується (1.2.2), тоді маємо

$$(\psi, \psi_j) = (\psi, P_n\psi_j) = (P_n\psi, \psi_j) \overset{(1.2.2)}{=} (0, \psi_j) = 0,$$

тому виконується (1.2.3).

В інший бік: нехай виконується (1.2.3), тоді

$$(P_n\psi, P_n\psi) = \left(P_n\psi, \sum_{j=1}^{n} a_j\psi_j\right) = \left(\psi, \sum_{j=1}^{n} a_j P_n\psi_j\right) = \\ = \left(\psi, \sum_{j=1}^{n} a_j\psi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j}(\psi, \psi_j) \overset{(1.2.3)}{=} 0.$$

□

**Зауваження 1.4** — Тут ми скористалися самоспряженістю оператора проектування, хоча і не довели її.

**Вправа 1.5.** Доведіть, що $P_n$ — самоспряжений оператор.

**Розв'язання.** Нехай $x = \psi_x + f_x$, $y = \psi_y + f_y$ де $\psi_x, \psi_y \in F_n$ а $f_x, f_y \in F_n^\perp$, тоді

$$(P_n x, y) = (\psi_x, \psi_y + f_y) = (\psi_x, \psi_y) = (\psi_x + f_x, \psi_y) = (x, P_n y).$$

**Зауваження 1.6** — Тут ми скористалися тим, що $F = F_n \oplus F_n^\perp$. Це, взагалі кажучи, не так, якщо $F_n$ нескінченновимірний, але ми не оперуємо з такими просторами, тому все законно.

Таким чином, ми можемо знайти розв'язок

$$(Au_n - f, \psi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.2.4}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді (1.2.1) і підставляємо в (1.2.4):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(A\varphi_i, \psi_i) = (f, \psi_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.2.5}$$

Це і є **метод моментів**.

**Алгоритм 1.7.**

1) Обираємо повну систему лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_i\} \in D(A)$;
2) Обираємо замкнену систему лінійно-незалежних функцій $\{\psi_i\} \in F$;
3) Шукаємо розв'язки у вигляді $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$, отримуємо СЛАР (1.2.5).

### 1.3 Метод Бубнова-Гальоркіна

**Зауваження 1.8** — Якщо $\psi_j = \varphi_j$, то отримуємо метод Бубнова-Гальоркіна. Для нього система має вигляд

$$(Au_n - f, \psi_j) = 0,$$

або, у розгорнутому вигляді,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.3.1}$$

**Зауваження 1.9** — У книжці Ляшка, Макарова, і Скоробагатько "Методы вычис..." наведена загальна теорема про збіжність.

## 2 Виділення самоспряженого оператору. Узагальнений розв'язок

### 2.1 Основні визначення

Для ситуації, коли

$$A = A_0 + B, \tag{2.1.1}$$

де $A_0$ — самоспряжений додатновизначений оператор введемо розглянемо рівняння

$$[u, v] + (Bu, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_{A_0}, \tag{2.1.2}$$

де

**Означення 2.1.** $H_{A_0}$ — *енергетичний простір* зі скалярним добутком

$$[u, v] = (A_0 u, v)$$

і породженю ним нормою

$$\|u\|_{A_0} = |[u]| = \sqrt{[u, u]}.$$

**Зауваження 2.2** — Енергетичний простір у чомусь ідеологічно схожий на слабкий топологічний простір.

## 2.2 Збіжність методу Бубнова-Гальоркіна

Тоді алгоритм Бубнова-Гальоркіна набуває вигляду

**Алгоритм 2.3** (Бубнова-Гальоркіна)**.**

1) Обираємо повну систему лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_i\} \in H_{A_0}$;
2) $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$;
3) Шукаємо розв'язки у вигляді $u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$.

У такій ситуації маємо

$$[u_n, \varphi_j] + (Bu_n, \varphi_j) = (f \varphi_j), \tag{2.2.1}$$

тобто

$$L\vec{c} = \vec{f}, \tag{2.2.2}$$

де

$$L_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] + (B\varphi_i, \varphi_j), \quad \vec{f} = (f, \varphi_j), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

**Означення 2.4.** Послідовність просторів $E_n$ називається *гранично щільною* в $E$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\varphi, u_n) = \lim_{n\to\infty} \inf_{u_n \in E_n} \|\varphi - u_n\| = 0, \quad \forall f \in E. \tag{2.2.3}$$

**Означення 2.5.** Оператор $A$ називається *майже всюди неперервним*, якщо $A = A_1 + A_2$, де $\|A_2\| \leq \varepsilon$, а

$$A_1 u = \sum_{i=1}^n (u, \varphi_i) \psi_i.$$

**Теорема 2.6**

Нехай (1.1.1) має єдиний розв'язок, $A_0^{-1}B$ є майже всюди неперервним, а $H_n$ — гранично щільною в $H_{A_0}$, тоді алгоритм Бубнова-Гальоркіна генерує єдиний розв'язок задачі (2.2.2), причому послідовність цих розв'язків збігається до розв'язку задачі (1.1.1) у просторі $H_{A_0}$.

## 2.3 Приклади

**Приклад 2.7**

Розглянемо найпростіше диференціальне рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b \tag{2.3.1}$$

з крайовими умовами першого роду

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{2.3.2}$$

Його класичний двічі неперервно диференційовний (з $C^2([a,b])$) розв'язок існує за умов $k(x) \geq k_0 > 0$, $k \in C^1((a,b))$, $p, q, f \in C(a,b)$.

Розглянемо тепер системи функцій $\varphi_i, \psi_i$:

1) $\varphi_i = (x-a)^i(b-x)$;

2) $\varphi_i = \sin\left(\dfrac{x-a}{b-a} i\pi\right)$;

і $\psi_i = x^{i-1}$, $i = \overline{1,n}$.

Тоді у класичному методі моментів будемо мати

$$(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

і

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (-(k\varphi_i')' - p\varphi_i' + q\varphi_i)\psi_j\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\psi_j\,\mathrm{d}x, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.3.3}$$

**Зауваження 2.8** — У методі Бубнова-Гальоркіна матимемо

$$\sum_{i=1}^n c_i \int_a^b (-(k\varphi_i')' - p\varphi_i' + q\varphi_i)\varphi_j\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\varphi_j\,\mathrm{d}x, \quad j = \overline{1,n}.$$

**Приклад 2.9**

Нехай $f \in L_2$ $(p, q, k' \in L_2)$, тоді отримуємо $W_2^2((a,b))$.

**Приклад 2.10**

Нехай $f \in W_2^{-1}$, тоді $u \in W_2^1((a,b))$, а $D(A) = \{u \in W_2^1([a,b]), u(a) = u(b) = 0\}$.

**Зауваження 2.11** — Оскільки тепер функція має лише першу похідну, то необхідно переписати (2.3.3):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_a^b (k\varphi_i'\varphi_j' - p\varphi_i'\varphi_j + q\varphi_i\varphi_j)\,\mathrm{d}x - k\varphi_i'\varphi_j|_{x=a} + k\varphi_i'\varphi_j|_{x=b} = \int_a^b f\varphi_j\,\mathrm{d}x.$$

**Зауваження 2.12** — Якщо $f \in W_2^{-1}$, то $f = f_0 - \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}$, де $f_0, f_1 \in L_2$, тому базисними функціями для цієї ситуації можна взяти "штафетини":

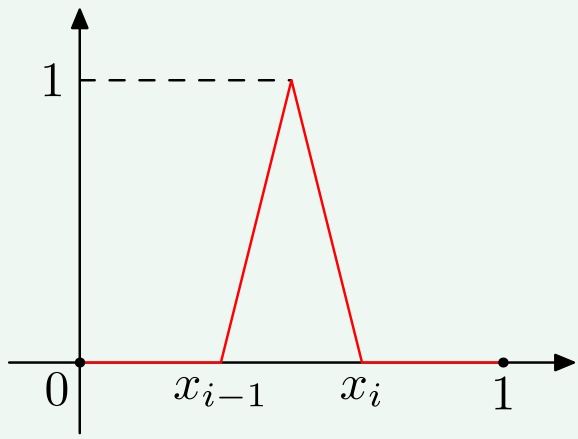



Рис. 1: "штафетина" від $x_{i-1}$ до $x_i$.

## 2.4 Прямий метод

Нагадаємо попередню лекцію: задано рівняння

$$Au = f, \tag{2.4.1}$$

з пераметром $f \in W_2^{-1}$. Нагадаємо також, що такі умови на праву частину означають, що розв'язок $u \in W_2^1$.

**Приклад 2.13**
Розглянемо рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b, \tag{2.4.2}$$

з крайовими умовами

$$-ku' + \alpha_1 u = \mu_1, \quad x = a, \tag{2.4.3}$$

і

$$ku' + \alpha_2 u = \mu_2, \quad x = b. \tag{2.4.4}$$

**Розв'язання.** Запишемо

$$(Au, v) = (f, v).$$

У явному вигляді маємо

$$\int_a^b (ku'v' - pu'v + quv)\,\mathrm{d}x + \alpha_1 u(a)v(a) + \alpha_2 u(b)v(b) - \mu_1 v(a) - \mu_2 v(b) = \int_a^b fv\,\mathrm{d}x. \quad (2.4.5)$$

Тут ми скористалися формулою інтегрування за частинами:

$$\int_a^b -(ku')'\,\mathrm{d}x = -\left. ku'v\right|_a^b + \int_a^b ku'v'\,\mathrm{d}x,$$

звідки (а саме з $ku'v|_{x=a}$ і $ku'v|_{x=b}$) і виникли доданки з $\alpha_{1,2}$ та $\mu_{1,2}$.

## 2.5 Метод колокацій

Розглянемо рівняння

$$Au = f, \tag{2.5.1}$$

де $A : E \to F$, замінюємо на рівняння

$$P_n(Au_n) = P_n f, \tag{2.5.2}$$

або на

$$P_n(Au_n - f) = 0. \tag{2.5.3}$$

Координатну систему візьмемо $\{\varphi_i\} \in D(A) \subseteq E$, а проекційну — $\{\psi_i\} \in F^\star$. Тоді можемо (2.5.3) переписати у вигляді

$$\psi_j(Au_n - f) = 0,$$

або

$$\psi_j A u_n = \psi_j f.$$

Шукачи розв'язок у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i,$$

матимемо

$$\psi_j \left( A \left( \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) \right) = \psi_j f,$$

або ж, враховучи лінійність,

$$\sum_{i=1}^n c_i \psi_j \left( A \varphi_i \right) = \psi_j f, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.5.4}$$

Матриця системи вище має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} \psi_1(A\varphi_1) & \psi_1(A\varphi_2) & \cdots & \psi_1(A\varphi_n) \\ \psi_2(A\varphi_1) & \psi_2(A\varphi_2) & \cdots & \psi_2(A\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n(A\varphi_1) & \psi_n(A\varphi_2) & \cdots & \psi_n(A\varphi_n) \end{pmatrix} \tag{2.5.5}$$

Якщо взяти у якості $\{\psi_j\}$ систему функцій Чебишова, то отримаємо $|D| \neq 0$.

**Приклад 2.14**

Нехай $F = C([a,b])$, і візьмемо $\psi_j(f) = f(x_j)$, де $x_j$ — множина попарно різних вузлів на $[a,b]$.

**Приклад 2.15**

Розглянемо рівняння

$$-(ku')' - pu' + qu = f, \quad a < x < b,$$

з крайовими умовами

$$u(0) = u(1) = 0.$$

**Розв'язання.** Візьмемо

$$\omega_n = \{x_j = jh, h = 1/n\},$$

тоді шукачи розв'язок у вигляді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i,$$

отримаємо систему

$$\sum_{i=1}^{n} c_i((-k(x_j)\varphi_i'(x_j)) - p(x_j)\varphi_i'(x_j) + q(x_j)\varphi_i(x_j)) = f(x_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.5.6}$$

**Зауваження 2.16** — На практиці метод колокацій збігається ще повільніше ніж метод Бубнова-Гальоркіна, але він зручний в випадках, коли розв'язки мають різні градієнти:

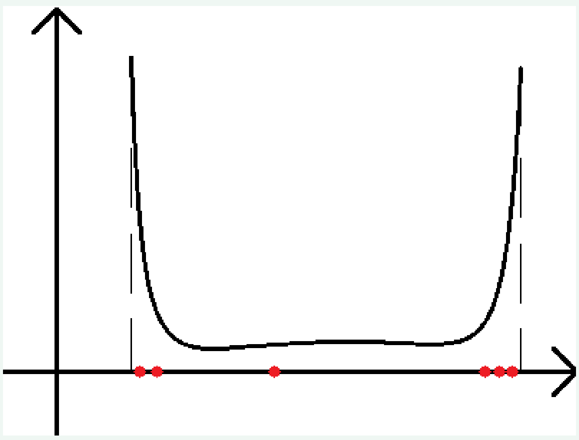


Рис. 2: Покращуємо точність за рахунок скупчення точок $x_j$ у регіонах де розв'язок має великий градієнт.

**Приклад 2.17**
Нехай задано неоднорідну задачу

$$Au \equiv (-ku')' - pu' + qu = f \tag{2.5.7}$$

з умовами

$$u(0) = C, \quad u(1) = D. \tag{2.5.8}$$

**Розв'язання.** Тоді розв'язок шукаємо у вигляді

$$u = v + \varphi_0, \tag{2.5.9}$$

де $\varphi_0$ — відома функція що задовольняє неоднорідним крайовим умовами, наприклад $\varphi_0(x) = C + x(D - C)$. Тоді матимето

$$Av + A\varphi_0 = f,$$

або ж

$$Av = f - A\varphi_0 = f_1, \tag{2.5.10}$$

з умовами

$$v(0) = v(1) = 0. \tag{2.5.11}$$

За розв'язком цього рівняння відновлюється розв'язок початкового за формулою $u_n = v_n + \varphi_0$.

# 3 Варіаційні методи розв'язування крайових задач

Розглянемо рівняння

$$Au = f, \tag{3.0.1}$$

де $A : E \to F$, $E, F$ — пара гільбертових просторів. Припустимо також, що існує і єдиний розв'язок задачі (3.0.1).

Ідея варіаційних методів полягає у тому, що ми будемо зводити задачу (3.0.1) до знаходження мінімуму деякого функціоналу, що відповідає цій задачі, а саме $\Phi(u) : E \to \mathbb{R}$,

$$\inf_{u \in E} \Phi(u) = \Phi_0. \tag{3.0.2}$$

## 3.1 Загальні положення задачі мінімізації функціоналів

Нехай $G(u, v)$ — білінійна симетрична функція (функціонал) у дійсному гільбертовому просторі.

> **Означення 3.1.** Функціонал $G$ називається *додатним*, якщо $G(u, u) > 0$, $\forall u \in D(G) \setminus \{0\}$.

**Означення 3.2.** Функціонал $G$ називається *додатно визначеним*, якщо

$$G(u,u) > \mu\|u\|^2, \quad \forall u \in D(G) \setminus \{0\}, \tag{3.1.1}$$

де $\mu > 0$.

Визначимо функціонал $\Phi$ наступним чином:

$$\Phi(u) = G(u,u) - 2\ell(u) + C, \tag{3.1.2}$$

де $\ell(u)$ — лінійний функціонал з не вужчою областю визначення ніж $G$, тобто $D(G) \subseteq D(\ell)$, а $C$ — довільна (можливо навіть від'ємна) константа.

**Лема 3.3**

Нехай $G(u,u)$ — додатно визначений, а $\ell(u)$ — обмежений, тоді $\Phi(u)$ — обмежений знизу.

**Зауваження 3.4** — Тут *обмеженість* $\ell$ розуміється у тому сенсі, що $\exists a > 0$: $\|\ell(u)\| \le a\|u\|$.

*Доведення.* Безпосередньо з (3.1.2) і (3.1.1) маємо

$$\|\Phi(u)\| \ge \mu\|u\|^2 - 2a\|u\| + C, \tag{3.1.3}$$

Роблячи заміну змінної $x = \|u\|$ і перепозначаючи праву частину за $f(x)$ отримаємо

$$f(x) = \mu x^2 - 2ax + C,$$

а це парабола з гілками вгору, у якої існує мінімум, який досягається в $x_0 = \frac{a}{\mu}$, і дорівнює $C - \frac{a^2}{\mu}$. □

**Наслідок 3.5**

$\exists u^\star$: $\inf_{u \in D(G)} \Phi(u) = \Phi_0 = \Phi(u^\star)$.

*Доведення.* Див. книгу Ляшка, Макарова і Скоробагатька, або ж Ліонса. □

**Теорема 3.6**

Нехай

$$\exists u^\star \in D(G), \tag{3.1.4}$$

тоді виконуються наступні умови

1)
$$G(u^\star, v) = \ell(v), \quad \forall v \in D(G) \tag{3.1.5}$$

2)
$$\Phi(u^\star + v) = \Phi(u^\star) + G(v, v). \tag{3.1.6}$$

*Доведення.*

$$\begin{aligned}\Phi(u^\star + v) &= G(u^\star + v, u^\star + v) - 2\ell(u^\star + v) + C = \\ &= G(u^\star, u^\star) + G(v, v) + G(u^\star, v) - 2\ell(u^\star) - 2\ell(v) + C = \\ &= \Phi(u^\star) + \Big(2(G(u^\star, v) - \ell(v)) + G(v, v)\Big) \geq \\ &\geq \Phi(u^\star).\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Тоді
$$2(G(u^\star, v) - \ell(v)) + G(v, v) \geq 0. \tag{3.1.8}$$

Тоді це виконується і для $v := tv$, тобто

$$2t(G(u^\star, v) - \ell(v)) + t^2 G(v, v) \geq 0, \tag{3.1.9}$$

причому можемо взяти $t$ таким, аби перший доданок переважав другий за модулем, і був від'ємний за знаком. Тоді нерівність можлива якщо і тільки якщо

$$G(u^\star, v) = \ell(v), \tag{3.1.10}$$

а це ніщо янше як (3.1.5). Підставляючи (3.1.10) в (3.1.7) отримуємо (3.1.6) □

**Означення 3.7.** Послідовність $\{u_n\}$ називається *мінімізуючою* для $\Phi$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \Phi(u^\star) = \inf \Phi(u) = \Phi_0.$$

**Теорема 3.8**

Нехай $\{u_n\}$ мінімізуюча для $\Phi$, тоді вона фундаментальна і збігається до $u^\star$ у розумінні відстані
$$\rho_G(u, v) = \sqrt{G(u - v, u - v)}. \tag{3.1.11}$$

*Доведення.* Наступні дві нерівності справджуються (як наслідок з визначення інфімума) для достатньо великого $N$ і $n, m > N$:

$$\Phi(u_n) \le \Phi_0 + \varepsilon,$$
$$\Phi(u_m) \le \Phi_0 + \varepsilon.$$

У сумі маємо

$$\Phi(u_n) + \Phi(u_m) \le 2\Phi_0 + 2\varepsilon \le \le 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + 2\varepsilon.$$

Тоді шляхом нескладних арифметичних перетворень маємо

$$2\varepsilon \ge \Phi(u_n) + \Phi(u_m) - 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) = \frac{1}{2}G(u_m - u_n, u_m - u_n). \tag{3.1.12}$$

Підставляючи сюди (3.1.11) маємо

$$\rho^2(u_n, u_m) \le 4\varepsilon, \tag{3.1.14}$$

тобто

$$\rho(u_n, u_m) \le 2\sqrt{\varepsilon},$$

що говорить про фундаментальність $\{u_n\}$. □

**Вправа 3.9.** Переконатися в істинності рівності в (3.1.12).

**Розв'язання.** Нескладні арифметичні перетворення:

$$\begin{aligned}
&\Phi(u_n) + \Phi(u_m) - 2\Phi\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) = \\
&\quad = G(u_n, u_n) - 2\ell(u_n) + C + G(u_m, u_m) - 2\ell(u_m) + C - \\
&\quad\quad - 2\left(G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) - 2\ell\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + C\right) = \\
&\quad = G(u_n, u_n) + G(u_m, u_m) - 2G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) - \\
&\quad\quad - 2\left(\ell(u_n) + \ell(u_m) - 2\ell\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Другий доданок скорочується за лінійністю $\ell$, а для першого можемо записати:

$$\begin{aligned}
&G(u_n, u_n) + G(u_m, u_m) - 2G\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{2}G(u_n, u_n) + \frac{1}{2}G(u_m, u_m) - G(u_n, u_m) = \\
&\quad = \frac{1}{2}G(u_m - u_n, u_m - u_n),
\end{aligned}$$

що і показує істинність (3.1.12).

### 3.1.1 Процес Рітца побудови мінімізаційної послідовності

1) Вибираємо повну лінійно незалежну систему функцій $\{\varphi_i\} \in D(G)$.

2) Будуємо простори $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, тоді

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i. \tag{3.1.15}$$

3) Будемо шукати розв'язок задачі

$$\inf_{u \in H_n} \Phi(u) = \Phi(u_n). \tag{3.1.16}$$

Тоді з (3.1.5) маємо

$$G(u_n, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_n. \tag{3.1.17}$$

Підставляючи сюди $u_n$ з (3.1.15) будемо мати

$$\sum_{i=1}^{n} c_i G(\varphi_i, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_n, \tag{3.1.18}$$

або ж

$$\sum_{i=1}^{n} c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = \ell(\varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{3.1.19}$$

отримали систему систему лінійних рівнянь з матрицею Грама на коефіцієнти $c_i$. Якщо система лінійно незалежна то розв'язок існує і єдиний.

## 3.2 Метод Рітца

Нехай, як і раніше, ми розв'язуємо рівняння

$$Au = f, \tag{3.2.1}$$

де $A : H \to H$, $H$ — дійсний гільбертовий простір. Нагадаємо, що ми ставимо цій задачі й відповідність задачу мінімізації

$$\inf_{u \in D(A)} \Phi(u) = \Phi(u^\star) = u_0. \tag{3.2.2}$$

Нехай також виконуються певні припущення, необхідні для збіжності, а саме:

1) $A$ — симетричний (самоспряжений), тобто

$$(Au, v) = (u, Av). \tag{3.2.3}$$

2) $A$ — додатно визначений, тобто

$$(\exists \mu > 0)(\forall u \in D(A)) \quad (Au, u) \geq \mu \|u\|^2 (u, Av). \tag{3.2.4}$$

3) $f \in R(A)$ — область значень оператора $A$.

**Теорема 3.10**

Якщо $A$ задовольняє умовам 1–3 (формули (3.2.3)– (3.2.4)), то

1) задача (3.2.2) має не більш ніж один розв'язок;

2) $A^{-1}$ обмежений.

*Доведення.*

1) Розглянемо спочатку однорідну задачу, тобто $f \equiv 0$, тоді задача (3.2.1) зводиться до $Au = 0$. Тоді з (3.2.4) маємо $\mu\|u\|^2 \le (Au, u) = 0$, звідки $u = 0$. Отже однорідна задача має тільки один розв'язок, а тому неоднорідна задача має не більше ніж один розв'язок.

   **Зауваження 3.11** — Справді, загальний розв'язок неоднорідної є сумою загального розв'язку однорідної (який у нас один) і частинного розв'язку неоднорідної (один або нуль)

2) Скористаємося постановкою задачі і нерівністю Коші-Буняковського:

$$\mu\|u\|^2 \le (Au, u) = (f, u) < \|f\| \cdot \|u\|.$$

   Можемо переписати це як

$$\|u\| \le \frac{1}{\mu}\|f\|,$$

   або ж

$$\|A^{-1}f\| \le \frac{1}{\mu}\|f\|,$$

   а це ніщо інше як

$$\|A^{-1}\| \le \frac{1}{\mu}.$$

□

### 3.2.1 Мінімізаційна послідовність

**Алгоритм 3.12.**

1) $\{\varphi_i\} \in D(A)$ — повна;

2) $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$;

3) $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$;

Де наш загальний функціонал Рітца

$$\inf_{u \in H_n} \Phi(u) = \Phi(u_n) \tag{3.2.5}$$

з функцією $G$ вигляду

$$G(u_n, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_n, \tag{3.2.6}$$

або, що те саме в наших умовах,

$$G(u_n, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{3.2.7}$$

можна буде записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} c_i G(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{3.2.8}$$

або, що те саме в наших умовах,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (A\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.2.9}$$

**Теорема 3.13** 1) Якщо $u^\star$ — розв'язок (3.2.1), а оператор $A$ задовольняє умовам (3.2.3) і (3.2.4), то мінімум функціонала Рітца (3.2.5) буде досягатися на $u^\star$, причому тільки на ньому.

2) Якщо мінімум функціонала Рітца (3.2.5) досягається на елементі $u^\star \in D(A)$, то $u^\star$ — розв'язок (3.2.1).

*Доведення.*

1) Якщо $u^\star$ — розв'язок (3.2.1), то

$$\begin{aligned}\Phi(u) = (Au, u) - 2(Au^\star, u) = \\ = (Au, u) - (Au^\star, u) + (Au^\star, u^\star) - (Au^\star, u) - (Au^\star, u^\star) = \\ = (A(u - u^\star), (u - u^\star)) - (Au^\star, u^\star).\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Оскільки $A > 0$ то з (3.2.10) маємо

$$\Phi(u) \geq \Phi(u^\star), \tag{3.2.11}$$

оскільки

$$(A(u - u^\star), (u - u^\star)) \geq \mu \|u - u^\star\|^2,$$

причому рівність досягається лише коли $u = u^\star$.

2) Нехай на $u^\star \in D(A)$ досягається мінімум функціонала (3.2.5), тоді

$$(Au^\star, v) = (f, v), \quad \forall v \in D(G), \tag{3.2.12}$$

1 аьо

$$(Au^\star - f, v) = 0, \quad \forall v \in D(G),$$

а, оскільки $D(G)$ щільна в $H$, то

$$Au^\star = f. \tag{3.2.14}$$

□

**Зауваження 3.14** — Мінімізаційна послідовність звелася до тієї ж системи що й у методі Бубнова-Гальоркіна, то які ж його переваги?

### 3.2.2 Метод Рітца в $H_A$

Справа в тому, що якщо оператор $A$ задовольняє умовам (3.2.3) і (3.2.4), то можна ввести енергетичний простір $H_A$ у якому скалярний добуток введено за формулою

$$(u, v)_A = (Au, u), \tag{3.2.15}$$

а норма за формулою

$$\|u\|_A^2 = (u, u)_A. \tag{3.2.16}$$

Можна перевірити, що ці функції задовольняють аксіомам скалярного добутку та норми. Таким чином $H_A$ — гільбертовий простір, ширший за $D(A)$.

Тоді задачі (3.2.1) ставимо у відповідність задачу

$$\inf_{u \in H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n), \tag{3.2.17}$$

для якої мають місце аналогічні результати:

**Теорема 3.15**

Мають місце наступні співвідношення:

1)
$$\Phi(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \|u - u^\star\|_A^2 - \|u^\star\|_A^2, \tag{3.2.18}$$

2)
$$\inf_{u \in H_n \subset H_A} \Phi(u) = \Phi(u_n) = \Phi_0. \tag{3.2.19}$$

З (3.2.19) бачимо

$$(Au_n, v) = (f, v), \quad v \in H_n,$$

тоді

$$(Au_n - Au^\star, v) = 0, \quad v \in H_n,$$

або

$$(u_n - u^\star, v)_A = 0, \quad v \in H_n. \tag{3.2.20}$$

Це означає, що

$$u = P_{H_n} u^\star \tag{3.2.21}$$

**Теорема 3.16**

Нехай координатна система $\{\varphi_i\}$ є повною в $H_A$, тоді при $n \to \infty$ мінімізуюча послідовність $\{u_n\}$ метода Рітца збігається до розв'язку задачі (3.2.1) в нормі простору $H_A$.

### 3.2.3 Приклади

**Приклад 3.17**

Задано рівняння

$$-(ku')' + qu = f, \quad 0 < x < 1$$

з крайовими умовами

$$u(0) = u(1) = 0,$$

і функціями

$$k(x) \geq c_0 > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

**Зауваження 3.18 —** Взагалі кажучи, перед тим як будь-що робити, ми маємо показати симетричність $A$:

$$\begin{aligned}(Au, v) &= \int_0^1 \Big( -(ku')'v + quv \Big) \, \mathrm{d}x = \\ &= -ku'v\big|_0^1 + \int_0^1 (-ku'v' + quv) \, \mathrm{d}x = \\ &= (u, Av).\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

а також додатну визначеність: з $u(0) = 0$ маємо

$$u(x) = \int_0^x u'(\xi) \, \mathrm{d}\xi,$$

звідки

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^2(x) \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left( \int_0^x u'(\xi) \, \mathrm{d}\xi \right)^2 \mathrm{d}x \leq \\ &\leq \int_0^1 \int_0^x \xi \, \mathrm{d}\xi \int_0^x (u'(\xi))^2 \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}x \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u'\|^2,\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

або ж

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u'\|^2, \quad u \in D(A) \tag{3.2.24}$$

Тоді, підставляючи в (3.2.22) $u$ замість $v$ маємо

$$\begin{aligned}(Au,u) &= \int_0^1 \Big( -(ku')'u + qu^2 \Big)\,\mathrm{d}x \geq \\ &\geq c_0 \int_0^1 (u'(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(u(x))^2 \geq \\ &\geq c_0 \int_0^1 (u'(x))^2\,\mathrm{d}x \geq \\ &\geq c_1 \|u\|^2,\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

де $c_1 = 2c_0$. Розгялдаючи ліву і праву частини цієї рівності маємо додатновизначеність $A$.

**Розв'язання.**

1) Класичний розв'язок: функціонал:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (-(ku')'u + qu^2 - 2f(u))\,\mathrm{d}x,$$

з множиною

$$F(A) = \{u \in C^2([0,1]), u(0) = u(1) = 0\}.$$

У якості $\{\varphi_i\}$ можна взяти $\varphi_i(x) = x^i(1-x)$, $i = \overline{1,n}$. Тоді

$$\sum_{i=1}^n c_i \left( \int_0^1 (k\varphi_i')'\varphi_j + q\varphi_i\varphi_j \right)\mathrm{d}x = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1,n}.$$

2) Узагальнений розв'язок: функціонал:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (k(u')^2 u + qu^2 - 2f(u))\,\mathrm{d}x,$$

Енергетичний простір $H_A$ зі скалярним добутком

$$(u,v)_A = \int_0^1 (ku'v' + quv)\,\mathrm{d}x, \tag{3.2.27}$$

елементи якого

$$H_A = \{u : \|u\|_A < \infty, u(0) = u(1) = 0\}.$$

Це по суті є $\overset{\circ}{W}{}_2^1((0,1))$ (2 — інтегровні з квадратом, 1 — до першої похідної, $\circ$ — нуль на краях).

Приклад $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n-1}$ — так звані штафетини:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x_i}{h}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{3.2.28}$$

Це все, що стосується першої граничної задачі. Тепер про задачу третього роду:

**Приклад 3.19**

Задано рівняння

$$-(ku')' + qu = f, \quad 0 < x < 1$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} -ku' + \alpha_1 u = \beta_1, &\quad x = 0, \\ -ku' + \alpha_1 u = \beta_1, &\quad x = 1. \end{aligned}$$

**Розв'язання.** Розглянемо тут узагальнений розв'язок

$$\Phi(u) = \int_0^1 (k(u')^2 u + qu^2 - 2f(u))\, \mathrm{d}x + \alpha_1 u^2(0) + \alpha_2 u^2(1) - 2\beta_1 u(0) - 2\beta_2 u(1),$$

Енергетичний простір $H_A$ з нормою

$$\|u\| = \int_0^1 (k(u')^2 + qu^2)\, \mathrm{d}x + \alpha_1 u^2(0) + \alpha_2 u^2(1), \tag{3.2.29}$$

елементи якого

$$H_A = \{u : \|u\|_A < \infty\}.$$

Приклад $\{\varphi\}$ — $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$.

Коли граничні умови були першого роду то до визначення простору $H_A$ додавалися граничні умови $u(0) = u(1) = 0$. Коли ж граничні умови стали третього роду, то до визначення простору вже нічого не додавалося.

**Зауваження 3.20** — Справа у тому, що крайові умови діляться на *головні* та *природні* граничні умови.

$\varphi_i$ повинні задовольняти головним похідним, а природні умови "входять" до $H_A$. Для диференціального оператору порядку $2m$: якщо до умови входять лише похідні порядку $< m$ то такі умови головні, а інакше — природні.

**Приклад 3.21**

Якщо наш оператор другого порядку, то $m = 1$, і умови першого роду є головними, а умови третього роду

## 3.3 Метод найменших квадратів

$$Au = f \tag{3.3.1}$$

Нехай існує єдиний розв'язок (3.3.1), $A^{-1}$ обмежений, $A : H \to H$ — лінійний. Для цього методу

$$\Phi(u) = \|Au - f\|^2 \tag{3.3.2}$$

Зрозуміло, що
$$\inf_{u\in D(A)} \Phi(u) = 0 = \Phi(u^\star).$$

У нашому випадку
$$\Phi(u) = (Au - f, Au - f) = (Au, Au) - 2(f, Au) + \|f\|^2 \tag{3.3.3}$$

Згідно загальної теорії маємо
$$\begin{aligned} G(u,v) &= (Au, Av),\\ \ell(u) &= (f, Au),\\ c &= (Au, Av). \end{aligned}$$

### 3.3.1 Мінімізаційна послідовність

1) $\{\varphi_i\} \subset D(A)$ — лінійно незалежна, $H$ – повний;
2) $H_n = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$;
3) Розв'язок шукаємо у вигляді
$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \tag{3.3.4}$$
4) Отримуємо СЛАР вигляду
$$\sum_{i=1}^{n} c_i(A\varphi_i, A\varphi_j) = (f, A\varphi_j). \tag{3.3.5}$$

Зі СЛАР (3.3.5) бачимо, що СЛАР методу найменших квадратів є СЛАР методу моментів з проекційною системою функцій $\psi_j = A\varphi_j$.

**Теорема 3.22**

Якщо $\{\varphi_i\}$ є $A$-повною (це означає, що $A\varphi_i$ повна в $H$) та існує $M$: $\|u\| \le M\|Au\|$ ($A^{-1}$ обмежений) то мінізаційна послідовність $u_n$ буде збігатися до $u$ в нормі простору $H$: $\{u_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} u$.

**Зауваження 3.23** — Варто вибирати $\{\varphi_i\}$ ортогональними, щоб СЛАР мала мале число обумовленості.

# 4 Сіткові (дискретні/різницеві) методи

## 4.1 Загальні поняття методу сіток

Розгялдаємо рівняння

$$Au = f, \tag{4.1.1}$$

де $A : B_1 \to B_2$ ($B_1$, $B_2$ — банахові простори, $D(A) \subseteq B_1$, $D(A) \subseteq B_2$.

Головна ідея методу сіток полягає у введенні просторів $B_{1,h}$ та $B_{2,h}$, які залежать від певного $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$. Далі замінюємо $A$ оператором $A_h : B_{1,h} \to B_{2,h}$. Задачу (4.1.1) замінюємо задачею

$$A_h y_h = \varphi_h. \tag{4.1.2}$$

Суть у тому, що $B_{1,h}$ та $B_{2,h}$ — простори скінченновимірні, наприклад сіткові.

**Означення 4.1.** Задача (4.1.1) *коректно поставлена*, якщо:

1) $\exists!$ розв'язок (4.1.1) $\forall f \in R(A)$;

2) цей розв'язок стійки, тобто $\|\tilde{u} - u\|_1 \leq M\|\tilde{f} - f\|_2$, де $M$ стала;

**Означення 4.2.** Задача (4.1.2) *коректно поставлена*, якщо:

1) $\exists!$ розв'язок (4.1.2) $\forall f \in R(A)$;

2) цей розв'язок стійки, тобто $\|\tilde{y}_h - y_h\|_{1,h} \leq M_1\|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_{2,h}$, де $M_1 > 0$ — (можливо інша) стала;

Розглянемо оператори проектування $P_{1,h} : B_1 \to B_{1,h} : P_{1,h}u = u_h$ та $P_{2,h} : B_2 \to B_{2,h} : P_{2,h}f = f_h$. Окрім цього, хочеться мати узгоджені норми в цих просторах, тобто $\lim_{|h|\to 0} \|P_{1,h}u\|_{1,h} = \|u\|_1$ і $\lim_{|h|\to 0} \|P_{2,h}f\|_{2,h} = \|f\|_2$

**Означення 4.3.** Функція

$$z_h = y_h - P_{1,h}u = y_h - u_h \tag{4.1.3}$$

— похибка різницевої задачі (4.1.2), визначена на просторі $B_{1,h}$.

**Означення 4.4.** Будемо говорити, що розв'язок задачі (4.1.2) *збігається* до розв'язку задачі (4.1.1) (або ж, що різницева схема збіжна), якщо $\lim_{|h|\to 0} \|z_n\|_{1,h} \to 0$.

**Означення 4.5.** Будемо говорити, що розв'язок задачі (4.1.2) *збігається* до розв'язку задачі (4.1.1) *з порядком* $m$, якщо

$$\|z_n\|_{1,h} = O(|h|^m). \tag{4.1.4}$$

**Зауваження 4.6** — Тут $O(|h|^m) = C \cdot |h|^m$, де $C > 0$ — незалежна від $|h|$ константа.

З формули (4.1.3) маємо

$$y_h = z_h + u_n.$$

Позначимо

$$A_h z_h = \psi_h, \tag{4.1.5}$$

тоді, підставляючи в (4.1.2) маємо

$$\psi_h = \varphi_h - A_h u_h. \tag{4.1.6}$$

**Означення 4.7.** Величина $\psi_h$ визначена є *похибкою апроксимації* (нев'язкою) різницевої схеми (4.1.2) на розв'язку $y$.

$$\psi_h = \varphi_h - A_h u_h - P_{2,h}(f - Au) = (\varphi_h - P_{2,h} f) - (A_h u_h - P_{2,h} Au) = \psi_h^f - \psi_h^A. \tag{4.1.7}$$

Звідси бачимо, що похибка апроксимації схеми складається з похибки апроксимації правих частин:

$$\psi_h^f = \varphi_h + P_{2,h} f = \varphi_h - f_h, \tag{4.1.8}$$

та похибки апроксимації диференціального оператору $A$ різницеми оператором $A_h$:

$$\psi_h^A = A_h u_n - P_{2,h} Au. \tag{4.1.9}$$

**Лема 4.8** (Лакса-Філіпова)
Нехай різницева задача (4.1.2) апроксимує задачу (4.1.1) та є коректно поставленою. Тоді розв'язок задачі (4.1.2) буде збігатися до розв'язку задачі (4.1.1), причому порядок збіжності буде таким же, як і порядок апроксимації.

*Доведення.* Підставимо

$$z_h = y_h - u_h \tag{4.1.10}$$

в (4.1.2). Тоді для похибки отримуємо задачу (4.1.6). За умовою лемми задача є коректно поставленою, а тому і стійкої. З умови стійкості випливає, що

$$\|z_h\|_{1,h} \le M \|\psi_h\|_{2,h}. \tag{4.1.11}$$

Звідси і випливає, що

$$\lim_{|h|\to 0} \|z_h\|_{1,h} \leq M \lim_{|h|\to 0} \|\psi_h\|_{2,h} = 0. \tag{4.1.12}$$

Причому,

$$\lim_{|h|\to 0} \|z_h\|_{1,h} \leq M \cdot O(|h|^m) = O(|h|^m). \tag{4.1.13}$$

□

**Зауваження 4.9** — $z_h$ — стійкість і $\psi_h$. $\psi_h$ — $\varphi_h \sim f_h$ і $A_h \sim A$. Тому лему ще називають "апроксимація + стійкість = збіжність".

**Означення 4.10.** Будемо говорити, що $A_h$ *наближає* $A$ якщо

$$\lim_{|h|\to 0} \|A_h u_h - P_{2,h} A u\|_{2,h} = 0. \tag{4.1.15}$$

**Означення 4.11.** Будемо говорити, що $A_h$ *наближає* $A$ *з порядком* $m$ якщо

$$\|A_h u_h - P_{2,h} A u\|_{2,h} = O(|h|^m). \tag{4.1.16}$$

**Означення 4.12.** Будемо говорити, що $\varphi_h$ *наближає* $f$ якщо

$$\lim_{|h|\to 0} \|\varphi_h - P_{2,h} f\|_{2,h} = 0. \tag{4.1.17}$$

**Означення 4.13.** Будемо говорити, що $\varphi_h$ *наближає* $f$ *з порядком* $m$ якщо

$$\|\varphi_h - P_{2,h} f\|_{2,h} = O(|h|^m). \tag{4.1.18}$$

## 4.2 Сітки і сіткові функції

### 4.2.1 Сітки

1) Одновимірна рівномірна сітка: задана область $\bar\Omega = [a, b]$, її границя $\partial\bar\Omega = \Gamma$. Власне сітки:

$$\bar\omega_h = \{x_i = a + ih, h = (b-a)/N, i = \overline{0, N}\}, \tag{4.2.1}$$
$$\omega_h = \{x_i = a + ih, h = (b-a)/N, i = \overline{1, N-1}\}, \tag{4.2.2}$$

де $\gamma_h = \bar\omega_h \setminus \omega_h = \{a, b\}$ — вузли на границі.

2) Нерівномірна сітка: там сама область, але

$$\bar{\omega} = \{x_i = x_{i-1} + h_i, \sum_{i=1}^{n} h_i = b - a\}, \tag{4.2.3}$$

де $\gamma_h = \{x_0 = a, x_n = b\}$ — вузли на границі.

3) Просторово-часова сітка: задана область $\bar{Q}_T = \Omega \times [0, T]$, її границя $\partial Q_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Власне сітка:

$$\bar{\omega}_{h,\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \tag{4.2.4}$$

де

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = a + ih, i = \overline{0, N}, h = (b - a)/N\}, \tag{4.2.5}$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_i = j\tau, j = \overline{0, M}, \tau = T/M\}. \tag{4.2.6}$$

4) Двовимірна сітка: задана область $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2$, де $\Omega_1 = [a, b]$, і $\Omega_2 = [c, d]$. Власне сітка:

$$\bar{\omega}_{h_1,h_2} = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2}, \tag{4.2.7}$$

де

$$\bar{\omega}_{h_1} = \{x_i = a + ih_1, i = \overline{0, N}, h_1 = (b - a)/N\}, \tag{4.2.8}$$

$$\bar{\omega}_{h_2} = \{y_j = c + jh_2, i = \overline{0, M}, h_2 = (d - c)/M\}. \tag{4.2.9}$$

5) $\Omega$ — довільна область у двовимірній площині. Власне сітка:

$$R_{h_\alpha} = \{x_{\alpha_i} = ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \alpha = 1, 2\}, \tag{4.2.10}$$

де

$$R_h = R_{h_1} \times R_{h_2}, \quad \omega_h = R_h \cap \Omega. \tag{4.2.11}$$

### 4.2.2 Сіткові функції

1) Розглянемо простір $B_1 = C([a, b])$, норма у якому визначається як $\|u\|_C = \max_{a \le x \le b} |u(x)|$. Тоді простір $B_{1,h} = C(\bar{\omega}_h)$, і у ньому норма вже $\|y\|_{C(\omega_h)} = \max_{\omega_h} |y_i|$.

2) Розглянемо (гільбертів) простір $B_1 = H = L_2([a, b])$, норма у якому визначається як $\|u\|^2 = \int_a^b u^2 \,\mathrm{d}x$. Тоді простір $B_{1,h} = L_2(\omega_h)$, і у ньому норма вже

$$\|y\|_{L_2(\omega_h)} = h \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 + \frac{h}{2}(y_0^2 + y_N^2). \tag{4.2.12}$$

По суті нова норма — початковий інтеграл, записаний через формулу трапецій. До речі, проектування для цієї пари просторів матиме вигляд

$$P_{1,h}(u) = \begin{cases} \dfrac{2}{h} \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x_0+h/2} u(x)\,\mathrm{d}x, & x = x_0, \\ \dfrac{1}{h} \displaystyle\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x)\,\mathrm{d}x, & x = x_i, \\ \dfrac{2}{h} \displaystyle\int\limits_{x_N-h/2}^{x_N} u(x)\,\mathrm{d}x, & x = x_N. \end{cases} \tag{4.2.14}$$

3) Розглянемо простір $B_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$, норма у якому визначається як $\|u\|^2 = \int_0^1 (u^2 + u')^2\,\mathrm{d}x$. Тоді простір $B_{1,h} = W_2^1(\omega_h)$, і у ньому норма вже

$$\|y\|^2 = h\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 + h\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right)^2. \tag{4.2.15}$$

## 4.3 Апроксимація диференціальних операторів

Диференціальний оператор $Au$ будемо наближати оператором

$$A_h y_h(x) = \sum_{\xi \in Ш(x)} A(x,\xi) y(\xi), \quad x \in \omega_h, \xi \in \omega_h \tag{4.3.1}$$

де $Ш(x)$ — шаблон (множина точок).

**Приклад 4.14**

Проапроксимємо оператор $Au = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

**Розв'язання.**

1) Введемо позначення (права різницева похідна, різницева похідна вперед)

$$A_h y_h = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} =: y_{x,i}. \tag{4.3.2}$$

Тоді $Ш(x) = \{x_i, x_{i+1}\}$.

2) Введемо позначення (ліва різницева похідна, різницева похідна назад)

$$A_h y_h = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} =: y_{\bar{x},i}. \tag{4.3.3}$$

Тоді $Ш(x) = \{x_{i-1}, x_i\}$.

3) Введемо позначення (центральна різницева похідна)

$$A_h y_h = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} =: y_{\overset{\circ}{x},i}. \tag{4.3.4}$$

Тоді $\text{Ш}(x) = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$.

**Зауваження 4.15** — Нагадаємо ряди Тейлора:

$$u_{i+1} = u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(\text{IV})} + O(h^5),$$
$$u_{i-1} = u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(\text{IV})} + O(h^5),$$

де $u_{i\pm 1} = u(x_i \pm h)$.

Обчислимо похибки:

1)

$$\begin{aligned}
\psi_h^A &= A_h u_h - (Au)_h = \\
&= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u_i' = \\
&= \frac{u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + O(h^3) - u_i}{h} - u_i' = \\
&= \frac{hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + O(h^3)}{h} - u_i' = \\
&= u_i' + \frac{h}{2}u_i'' + O(h^2) - u_i' = \\
&= \frac{h}{2}u_i'' + O(h^2).
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\psi_h^A &= A_h u_h - (Au)_h = \\
&= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - u_i' = \\
&= \frac{u_i - \left(u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + O(h^3)\right)}{h} - u_i' = \\
&= \frac{hu_i' - \frac{h^2}{2}u_i'' + O(h^3)}{h} - u_i' = \\
&= u_i' - \frac{h}{2}u_i'' + O(h^2) - u_i' = \\
&= -\frac{h}{2}u_i'' + O(h^2).
\end{aligned}$$

3)
$$
\begin{aligned}
\psi_h^A &= A_h u_h - (Au)_h = \\
&= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h} - u_i' = \\
&= \frac{u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(\mathrm{IV})} + O(h^5)}{2h} - \\
&\quad - \frac{u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(\mathrm{IV})} + O(h^5)}{2h} - u_i' = \\
&= \frac{2hu_i' + \frac{2h^3}{6}u_i''' + O(h^5)}{2h} - u_i' = \\
&= u_i' + \frac{h^2}{6}u_i''' + O(h^4) - u_i' = \\
&= \frac{h^2}{6}u_i''' + O(h^4).
\end{aligned}
\tag{4.3.5}
$$

Тут ми розплачуємося необхідністю $u \in C^3([a, b])$

**Приклад 4.16**

Проапроксимємо оператор $Au = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$.

**Розв'язання.**
$$
\begin{aligned}
A_h y_h &= (y_{\bar{x}})_{x,i} = \\
&= y_{\bar{x}x,i} = \\
&= \frac{y_{\bar{x},i+1} - y_{\bar{x},i}}{h} = \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = \\
&= \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.
\end{aligned}
\tag{4.3.6}
$$

Похибка:
$$
\psi_h^A = A_h u_h - (Au)_h = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - u_i'' = \ldots = \frac{h^2}{12}u_i^{((IV)} + O(h^4). \tag{4.3.7}
$$

Тут ми розплачуємося необхідністю $u \in C^4([a, b])$

**Приклад 4.17**

Проапроксимємо оператор
$$
Au = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right). \tag{4.3.8}
$$

оператором
$$
A_h y_h = (a y_{\bar{x}})_{x,i} \tag{4.3.9}
$$

так, щоб похибка мала другий порядок.

**Розв'язання.** Розглянемо одразу похибку апроксимації:

$$\begin{aligned}
\varphi_h^A &= A_h y_h - (Au)_h = \\
&= (a u_{\bar{x}})_{x,i} - (ku')' = \\
&= \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right) - (ku')'_i = \\
&= \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\left(u'_i + \frac{h}{2}u''_i + \frac{h^2}{6}u'''_i\right) - a_i\left(u'_i - \frac{h}{2}u''_i + \frac{h^2}{6}u'''_i\right)\right) + O(h^2) - k'_i u_i - k_i u''_i = \\
&= \left(\frac{a_{i+1}-a_i}{h} - k'_i\right)u'_i + \left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2} - k_i\right)u''_i + \left(\frac{a_{i+1}-a_i}{6}\right)h u'''_i + O(h^2).
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Бачимо, що похибка буде $O(h^2)$ якщо

$$\begin{cases} \dfrac{a_{i+1}-a_i}{h} = k'_i + O(h^2), \\ \dfrac{a_{i+1}+a_i}{2} = k_i + O(h^2). \end{cases} \tag{4.3.11}$$

Зрозуміло, що існує не єдине $a_i$ для яких похибка буде $O(h^2)$. Далі

$$2a_i = 2\cdot(4.3.11)(2) - h\cdot(4.3.11)(1) = 2k_i - hk'_i + O(h^2),$$

звідки

$$a_i = k_i - \frac{h}{2}k'_i + O(h^2),$$

отримали розвинення в ряд Тейлора. Можемо також записати будь-яким зручним нам способом із наступних:

$$\begin{aligned}
a_i &= k_{i-1/2} = k\left(x_i - \frac{h}{2}\right), \\
a_i &= \frac{k_i + k_{i-1}}{2}, \\
a_i &= \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

**Приклад 4.18**

Проапроксимуємо оператор

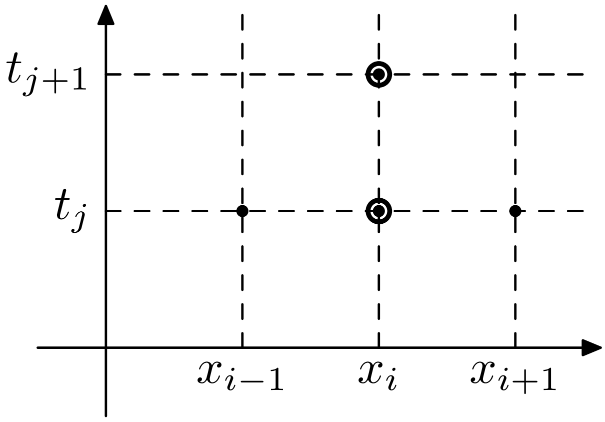
$$Au = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.3.12}$$

**Розв'язання.** Пригадаємо, що для просторово-часових областей сітки мають вигляд $\bar{\omega}_{h,\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$.

1) Один з варіантів — взяти наступну апроксимацію:

$$A_h y_h = y_{t,i}^j + y_{\bar{x}x,i}^j. \tag{4.3.14}$$

Тоді $Ш(x) = \{(x_{i-1}, t_j), (x_i, t_j), (x_{i+1}, t_j), (x_i, t_{j+1})\}$:




2) Інший варіант – взяти апроксимацію

$$A_h y_h = y_{t,i}^j + y_{\bar{x}x,i}^{j+1} \tag{4.3.15}$$

Тоді $Ш(x) = \{(x_{i-1}, t_{j+1}), (x_i, t_{j+1}), (x_{i+1}, t_{j+1}), (x_i, t_j)\}$: