Математичне моделювання динаміки просторово розподілених процесів з неперервно заданим початково-крайовим станом

Сергієнко Тетяна Олександрівна, Скибицький Нікіта Максимович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

16 жовтня 2019 р.

Рівняння стану

Зупинимося на проблемах дослідження функції стану $u(x,t)$, що розподілена в області $V = X \times [0,T]$ динамічної системи, логіка функціонування якої визначена рівнянням

$$L(\partial_{x,t})u(x,t) = f(x,t). \tag{1}$$

Позначення

Тут:

- $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ — просторова змінна;
- $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}_+$ — часова змінна;
- $\partial_{x,t} = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n}, \partial_t)$ — вектор частинних похідних за просторовими змінними $x_1, \ldots, x_n$ та часом t;
- L — лінійний диференціальний оператор;
- $f(x, t) : V \to \mathbb{R}$ — функція, що розподілена у просторі-часі V зовнішньодинамічних збурень.

Будемо виходити з того, що для розглядуваного динамічного процесу (1) мають місце початкові (при $t = 0$) і крайові (на контурі/границі $\Gamma = \partial X$ просторової області X) спостереження вигляду

$$L_i^0(\partial_t)u(x,0) = U_i^0(x), \qquad (i = \overline{1, n_0}, x \in X), \tag{2}$$

$$L_j^\Gamma(\partial_x)u(x,t) = U_j^\Gamma(x,t), \quad (j = \overline{1, n_\Gamma}, x \in \Gamma). \tag{3}$$

Некоректність

На відміну від прийнятих у класичних розділах диференціальних рівнянь математичної фізики та обчислювальної математики, не будемо накладати жодних обмежень на кількості n_0 та n_Γ початково-крайових співвідношень (2), (3) (вони можуть бути й відсутніми) і на властивості функцій $U_i^0(x)$ ($i = \overline{1, n_0}$) та $U_j^\Gamma(x, t)$ ($j = \overline{1, n_\Gamma}$).

Це робить задачі (1)–(3) некоректними й нерозв'язними методами аналітичної та обчислювальної математики.

З урахуванням сказаного поставимо задачу побудови функції стану $u(x,t)$, яка є розв'язком рівняння (1), і узгоджується зі спостереженнями (2), (3) за середньоквадратичним критерієм:

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{n_0} \int\limits_X \Big(L_i^0(\partial_t) u(x,0) - U_i^0(x) \Big)^2 \mathrm{d}x + \\ + \sum_{j=1}^{n_\Gamma} \int\limits_0^T \int\limits_\Gamma \Big(L_j^\Gamma(\partial_x) u(x,t) - U_j^\Gamma(x,t) \Big)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \to \min_{u(x,t)} . \quad (4)$$

Складові розв'язку

Зважаючи на обмеженість області V функціонування системи (1) і наявність трьох факторів зовнішньодинамічного впливу на стан системи $u(x,t)$, визначення останнього зобразимо співвідношенням

$$u(x,t) = u_\infty(x,t) + u_0(x,t) + u_\Gamma(x,t), \tag{5}$$

складові якого відповідають просторово розподіленим, початковим, і крайовим збуренням, відповідно.

Передатна функція

Для побудови функцій $u_\infty(x,t)$, $u_0(x,t)$, $u_\Gamma(x,t)$ уведемо до розгляду передатну функцію $G(x-\xi, t-\tau)$ досліджуваного процесу — функцію Гріна системи (1), що розглядається в необмеженій просторово-часовій області, співвідношенням

$$L(\partial_{x,t})G(x-\xi, t-\tau) = \delta(x-\xi, t-\tau), \tag{6}$$

де $\delta(x-\xi, t-\tau)$ — δ-функція Дірака.

Представлення складових розв'язку

Позначимо також $V_0 = X \times (-\infty, 0]$, $V_\Gamma = (\mathbb{R}^n \setminus X) \times [0, T]$, тоді:

$$u_\infty(x,t) = \int\limits_V G(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

$$u_0(x,t) = \int\limits_{V_0} G(x-\xi, t-\tau) f_0(\xi,\tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

$$u_\Gamma(x,t) = \int\limits_{V_\Gamma} G(x-\xi, t-\tau) f_\Gamma(\xi,\tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau, \tag{9}$$

де $f_0(x,t)$, $f_\Gamma(x,t)$ — функції, дія яких в областях інтегрування V_0 та V_Γ згідно з (4) моделюватиме вплив визначених у (2), (3) початково-крайових зовнішньодинамічних збурень.

Зауважимо, що моделюючі функції $f_0(x,t)$, $f_\Gamma(x,t)$, як і функція $f(x,t)$, можуть бути визначені дискретно, тобто векторами-стовпчиками своїх значень у точках:

$$f = \left(f(x_i, t_i), i = \overline{1, m}\right)^\mathsf{T}, \qquad (x_i, t_i) \in V, \tag{10}$$

$$f_0 = \left(f_0(x_i^0, t_i^0), i = \overline{1, m_0}\right)^\mathsf{T}, \quad (x_i^0, t_i^0) \in V_0, \tag{11}$$

$$f_\Gamma = \left(f_\Gamma(x_i^\Gamma, t_i^\Gamma), i = \overline{1, m_\Gamma}\right)^\mathsf{T}, \quad (x_i^\Gamma, t_i^\Gamma) \in V_\Gamma. \tag{12}$$

Позначимо $f_i = f(x_i, t_i)$ $(i = \overline{1, m})$; $f_{0,i} = f_0(x_i^0, t_i^0)$ $(i = \overline{1, m_0})$; $f_{\Gamma,i} = f_\Gamma(x_i^\Gamma, t_i^\Gamma)$ $(i = \overline{1, m_\Gamma})$.

Представлення складових розв'язку

У випадку дискретних моделюючих функцій співвідношення (7)–(9) набувають вигляду

$$u_\infty(x,t) = \sum_{i=1}^{m} G(x - x_i, t - t_i) f_i, \tag{13}$$

$$u_0(x,t) = \sum_{i=1}^{m_0} G(x - x_0^i, t - t_i^0) f_{0,i}, \tag{14}$$

$$u_\Gamma(x,t) = \sum_{i=1}^{m_\Gamma} G(x - x_i^\Gamma, t - t_i^\Gamma) f_{\Gamma,i}, \tag{15}$$

і задача побудови функції $u(x,t)$ зведеться до знаходження векторів f_0, f_Γ згідно з критерієм (4).

Кінець загальної теорії

Визначення функції $G(x-\xi, t-\tau)$ згідно з (6) дозволяє стверджувати, що функція стану $u(x,t)$, зображена співвідношеннями (5), (7)–(9), за будь-яких f_0, f_Γ з моделлю (1) узгоджуватиметься точно.

Це означає, що задача побудови функції $u(x,t)$ визначеного згідно з (1) і спостережуваного згідно з (2), (3) процесу зводиться до знаходження векторів f_0, f_Γ, моделюючих згідно з (4) початково-крайові збурення (2), (3).

Саме на розрахункових алгоритмах розв'язання задач побудови моделюючих факторів, визначених векторами f_0, f_Γ зупинимося далі.

Теорія пошуку f_0, f_Γ

Розглянемо задачу знаходження моделюючих векторів f_0 та f_Γ, що згідно з (4) дозволяють виконати початково-крайові умови (2), (3).

З урахуванням зображення (5), (13)–(15) функції $u(x,t)$ стану розглядуваної системи із (2), (3) отримаємо систему рівнянь для знаходження компонент $f_{0,i}$ $(i=\overline{1,m_0})$ та $f_{\Gamma,i}$ $(i=\overline{1,m_\Gamma})$ векторів f_0 та f_Γ.

Позначимо

$$\overline{U}_i^0(x) = U_i^0(x) - L_i^0(\partial_t)u_\infty(x,0),$$
$$\overline{U}_i^\Gamma(x,t) = U_i^\Gamma(x,t) - L_i^\Gamma(\partial_x)u_\infty(x,t), \quad x \in \Gamma.$$

Система на f_0, f_Γ

Тоді вищезгадана система має вигляд

$$\sum_{k=1}^{m_0} L_i^0(\partial_t) G(x - x_k^0, -t_k^0) f_{0,k} + \sum_{k=1}^{m_\Gamma} L_i^0(\partial_t) G(x - x_k^\Gamma, -t_k^\Gamma) f_{\Gamma,k} =$$

$$= \overline{U}_i^0(x), \quad (i = \overline{1, n_0}), \quad (16)$$

а також, для $x \in \Gamma$:

$$\sum_{k=1}^{m_0} L_j^\Gamma(\partial_x) G(x - x_k^0, t - t_k^0) f_{0,k} + \sum_{k=1}^{m_\Gamma} L_j^\Gamma(\partial_t) G(x - x_k^\Gamma, t - t_k^\Gamma) f_{\Gamma,k} =$$

$$= \overline{U}_j^\Gamma(x, t), \quad (j = \overline{1, n_\Gamma}). \quad (17)$$

Інший вигляд системи

Для розв'язання системи (16), (17) згідно із критерієм (4) зведемо її до вигляду

$$B(x,t)f = U(x,t), \tag{18}$$

де $f = \left(f_0, f_\Gamma\right)^\top$, а $U(x,t) = \left(U_0(x,t), U_\Gamma(x,t)\right)^\top$, у відповідних областях визначення. У свою чергу,

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} B_{1,1}(x) & B_{1,2}(x) \\ B_{2,1}(x,t) & B_{2,2}(x,t) \end{pmatrix} \tag{19}$$

у відповідних областях визначення.

Позначення іншого вигляду системи

Тут

$$U_0(x) = \left(\overline{U}_i^0(x), i = \overline{1, n_0}\right)^\top,$$
$$U_\Gamma(x) = \left(\overline{U}_j^\Gamma(x), j = \overline{j, n_\Gamma}\right)^\top. \tag{20}$$

а також

$$B_{1,1}(x) = \left(L_i^0(\partial_t) G(x - x_k^0, -t_k^0)\right)_{k=\overline{1,m_0}}^{i=\overline{1,n_0}},$$
$$B_{1,2}(x) = \left(L_i^0(\partial_t) G(x - x_k^\Gamma, -t_k^\Gamma)\right)_{k=\overline{1,m_\Gamma}}^{i=\overline{1,n_0}},$$
$$B_{2,1}(x,t) = \left(L_j^\Gamma(\partial_x) G(x - x_k^0, t - t_k^0)\right)_{k=\overline{1,m_0}}^{j=\overline{1,n_\Gamma}},$$
$$B_{2,2}(x,t) = \left(L_j^\Gamma(\partial_x) G(x - x_k^\Gamma, t - t_k^\Gamma)\right)_{k=\overline{1,m_\Gamma}}^{j=\overline{1,n_\Gamma}}. \tag{21}$$

(i, j — індекси рядків, k — стовпчиків)

Розв'язання системи (16), (17) згідно з (4) еквівалентне знаходженню вектора $f_\star$ такого, щоб

$$f_\star = \operatorname*{arg\,min}_{f \in \mathbb{R}^{m_0 + m_\Gamma}} \int \|B(x,t)f - U(x,t)\|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \tag{22}$$

де інтегрування розуміється по області зміну аргументу (x,t) з (19). Задача (22) є задачею псевдообернення лінійних функціональних рівнянь, для якої маємо

$$f_\star \in \Omega = \left\{ P^+ B_u + v - P^+ P v \middle| v \in \mathbb{R}^{m_0 + m_\Gamma} \right\}, \tag{23}$$

де

$$P = \int B^\intercal(x,t) B(x,t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t, \quad B_u = \int B^\intercal(x,t) U(x,t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t. \tag{24}$$

Позначення для розв'язання системи

З урахуванням області визначення аргументів (x, t) можемо записати

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} B_{u,1} \\ B_{u,2} \end{pmatrix},$$

де

$$P_{i,j} = \int\limits_X B_{1,i}^{\mathsf{T}}(x) B_{1,j}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^T \int\limits_\Gamma B_{2,i}^{\mathsf{T}}(x,t) B_{2,j}(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

$$B_{u,i} = \int\limits_X B_{1,i}^{\mathsf{T}}(x) U_0(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^T \int\limits_\Gamma B_{2,i}^{\mathsf{T}}(x,t) U_\Gamma(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

для $i, j = \overline{1, 2}$.

Останні позначення для розв'язання системи

Вважаючи, що

$$P^+ = \begin{pmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{pmatrix},$$

де $Q_{1,1} \in \mathbb{R}^{m_0 \times m_0}$, $Q_{1,2} \in \mathbb{R}^{m_0 \times m_\Gamma}$, $Q_{2,1} \in \mathbb{R}^{m_\Gamma \times m_0}$, $Q_{2,2} \in \mathbb{R}^{m_\Gamma \times m_\Gamma}$, а $v = (v_0, v_\Gamma)^\mathsf{T}$, $v_0 \in \mathbb{R}^{m_0}$, $v_\Gamma \in \mathbb{R}^{m_\Gamma}$, із (23) знаходимо шукані згідно з (4) моделюючі вектори f_0 та f_Γ. При цьому

$$f_0 \in \Omega_0 = \left\{ (Q_{1,1}, Q_{1,2}) B_f + v_0 - (Q_{1,1}, Q_{1,2}) P v \middle| v_0 \in \mathbb{R}^{m_0} \right\}, \tag{25}$$

$$f_\Gamma \in \Omega_\Gamma = \left\{ (Q_{2,1}, Q_{2,2}) B_f + v_\Gamma - (Q_{2,1}, Q_{2,2}) P v \middle| v_\Gamma \in \mathbb{R}^{m_\Gamma} \right\}. \tag{26}$$

Розв'язання системи

Знайдені згідно (25), (26) вектори f_0, f_Γ з урахуванням (5), (13)–(15) дозволяють знайти функцію $u(x,t)$ стану розглядуваної системи, яка, задовольняючи (1) точно, початково-крайові умови (2), (3) моделює з точністю

$$\varepsilon_0^2 = \min_{\substack{f_0 \in \Omega_0 \\ f_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi = \min_{f \in \Omega_0 \times \Omega_\Gamma} \int \| B(x,t) f - U(x,t) \|^2 \, dx \, dt =$$

$$= \int_X U_0^\top(x) U_0(x) \, dx + \int_0^T \int_\Gamma U_\Gamma^\top(x,t) U_\Gamma(x,t) \, dx \, dt - B_f^\top P^+ B_f,$$

де Φ визначене співвідношенням (4).

Моделювання буде однозначним ($v \equiv 0$) при $\det P > 0$. За інших умов розв'язок задачі буде неоднозначним.

Дякуємо за увагу!