Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

29 жовтня 2019 р.

Зміст

2.2 Рівняння розподіленого порядку

Розглянемо випадок коли α — випадкова величина, розподілена на $(0, 1)$ зі щільністю $p(\alpha)$. Припустимо, що час очікування стрибка задається умовною щільністю

$$\psi(t|\alpha) \sim A \cdot \alpha \cdot \frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}}, \tag{2.2.1}$$

де $A = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\sigma)}$.

Тоді

$$\psi(t) = \int_0^1 \psi(t|\alpha) \cdot p(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha. \tag{2.2.2}$$

Звідси

$$\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} \int_0^1 \psi(t|\alpha) \cdot p(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}t. \tag{2.2.3}$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\int_0^1 p(\alpha) \int_0^\infty e^{-\eta t} \psi(t|\alpha)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\alpha. \tag{2.2.4}$$

Далі,

$$\psi(t) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}}, \tag{2.2.5}$$

а тому, за теоремою Таубера,

$$\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta) \sim 1 - (\eta\tau)^\alpha + o(\eta^\alpha). \tag{2.2.6}$$

Замінюючи таким чином внутрішній інтеграл отримуємо

$$\int_0^1 (1 - (\eta\tau)^\alpha + o(\eta^\alpha))\, \mathrm{d}\alpha \underset{\eta\downarrow 0}{\sim} 1 - \int_0^1 p(\alpha) \cdot (\eta\tau)^\alpha\, \mathrm{d}\alpha. \tag{2.2.7}$$

Позначимо

$$I(\eta, \tau) = \int_0^1 p(\alpha) \cdot (\eta\tau)^\alpha\, \mathrm{d}\alpha. \tag{2.2.8}$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, `andriy.hul@gmail.com`

За формулою Монтрола-Вайса

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta) &= \mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\frac{1-\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta)}{1-\mathscr{L}\left[\psi\right](\eta)\cdot\mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega)} = \\ &= \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta}\cdot\frac{I(\eta,\tau)}{1-(1-I(\eta,\tau))\mathscr{F}\left[\lambda\right](\omega)}.\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Також припустимо, що $\lambda\sim\mathcal{N}(0,2\sigma^2) \implies \mathscr{F}[\lambda]\sim 1-\sigma^2\omega^2$. Тоді

$$\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta) = \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta}\cdot\frac{I(\eta,\tau)}{I(\eta,\tau)+\sigma^2\omega^2}. \tag{2.2.10}$$

Отже, з точністю до малих доданків,

$$\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta)\cdot\left(I(\eta,\tau)+\sigma^2\omega^2\right) = \frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta}\cdot I(\eta,\tau), \tag{2.2.11}$$

або ж

$$I(\eta,\tau)\cdot\left(\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta)-\frac{\mathscr{F}\left[u_0\right](\omega)}{\eta}\right) = \sigma^2\omega^2\cdot\mathscr{F}\text{-}\mathscr{L}\left[u\right](\omega,\eta). \tag{2.2.12}$$

Діємо на це співвідношення оберненим перетворенням Фур'є, отримаємо

$$I(\eta,\tau)\cdot\left(\mathscr{L}\left[u\right](x,\eta)-\frac{u_0}{\eta}\right) = -\sigma^2\cdot\frac{\partial^2\mathscr{L}\left[u\right](x,\eta)}{\partial x^2}. \tag{2.2.13}$$

Розпишемо інтеграл у явному вигляді:

$$\begin{aligned}I(\eta,\tau)\cdot\left(\mathscr{L}\left[u\right](x,\eta)-\frac{u_0}{\eta}\right) &= \int_0^1 p(\alpha)\cdot(\eta\tau)^\alpha\cdot\left(\mathscr{L}\left[u\right](x,\eta)-\frac{u_0}{\eta}\right)\mathrm{d}\alpha = \\ &= \int_0^1 p(\alpha)\cdot\tau^\alpha\cdot\left(\eta^\alpha\mathscr{L}\left[u\right](x,\eta)-\eta^{\alpha-1}u_0\right)\mathrm{d}\alpha.\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

У виразі в дужках під інтегралом не складно впізнати $\mathscr{L}\left[{}^\star\!D_0^\alpha u\right](\eta)$. Підставляючи, отримуємо

$$\int_0^1 p(\alpha)\cdot\tau^\alpha\int_0^\infty e^{-\eta t}\cdot({}^\star\!D_0^\alpha u)(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha. \tag{2.2.15}$$

Знову змінюємо порядок інтегрування:

$$\int_0^\infty e^{-\eta t}\int_0^1 p(\alpha)\cdot\tau^\alpha\cdot({}^\star\!D_0^\alpha u)(x,t)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}t. \tag{2.2.16}$$

А у цьому, у свою чергу, можна впізнати

$$\mathscr{L}\left[\int_0^1 p(\alpha)\cdot\tau^\alpha\cdot({}^\star\!D_0^\alpha u)(x,t)\,\mathrm{d}\alpha\right](\eta). \tag{2.2.17}$$

Тому, діючи оберненим перетворенням Лапласа на останнє рівняння, отримаємо

Рівняння 2.2.1 (розподіленого порядку)

$$\int_0^1 p(\alpha)\cdot\tau^\alpha\cdot({}^\star\!D_0^\alpha u)(x,t)\,\mathrm{d}\alpha = \sigma^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.2.18}$$

Приклад 2.2.2

Якщо $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$, то $p(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_0)$ — так звана *густина матеріальної точки*:

- $\delta(\alpha - \alpha_0) = 0$, $\forall \alpha \neq \alpha_0$;
- $\delta(\alpha_0 - \alpha_0) = \infty$;
- $\int_0^1 \delta(\alpha - \alpha_0)\,\mathrm{d}\alpha = 1$ $(\alpha_0 \in (0, 1)$.

Тоді отримаємо рівняння

$$\tau^{\alpha_0} \cdot ({}^{\star}D_0^{\alpha_0} u)(x, t) = \sigma^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.2.19}$$

тобто

$$({}^{\star}D_0^{\alpha_0} u)(x, t) = K_{\alpha_0} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.2.20}$$

Приклад 2.2.3

Якщо ж $p(\alpha) \sim \nu\alpha^{\nu-1}$ при $\alpha \to 0$ і $x(0) = 0$ (блукання починається з початку координат), то $\langle x^2(t) \rangle \sim \text{const} \cdot \ln^{\nu} t$, так звана *ультраповільна дифузія*.