Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.*

15 жовтня 2019 р.

Зміст

2.1 Рівняння субдифузії

Розглянемо випадкове блукання із щільностями

$$\psi(t) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}}, \tag{2.8}$$

при $t \to +\infty$, де $\alpha \in (0,1)$, $\tau > 0$, та

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\sigma^2}\right\} \tag{2.9}$$

Згадуємо наслідок з теореми Таубера для $A = \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$:

$$\mathscr{L}[\psi](\eta) \sim 1 - \tau^\alpha\eta^\alpha + o(\eta^\alpha) \tag{2.10}$$

Крім того

$$\mathcal{F}[\lambda](\eta) \sim 1 - \sigma^2\omega^2 + O(\omega^4). \tag{2.11}$$

Застосовуємо формулу Монтрола-Вайса

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega) = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{\tau^\alpha\eta^\alpha + o(\eta^\alpha)}{1-(1-\tau^\alpha\eta^\alpha + o(\eta^\alpha))(1-\sigma^2\omega^2+O(\omega^4))} \tag{2.12}$$

Якщо $\eta \to 0$, $\omega \to 0$, $\eta^\alpha\omega^2 = o(\eta^\alpha + \omega^2)$, то

$$\sim \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{\tau^\alpha\eta^\alpha}{\tau^\alpha\eta^\alpha + \sigma^2\omega^2} = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{\tau^\alpha}\eta^{-\alpha}\omega^2 = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta}\frac{1}{1+K_\alpha\eta^{-\alpha}\omega^2}}. \tag{2.13}$$

*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Отже, з точністю до малих доданків,

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega)\cdot(1+K_\alpha\eta^{-\alpha}\omega^2)=\frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta}, \tag{2.14}$$

або ж,

$$\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega)-\frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta}=-K_\alpha\eta^{-\alpha}\omega^2\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega). \tag{2.15}$$

Оскільки

$$\mathcal{F}[g'](\omega)=(-i\omega)\mathcal{F}[g](\omega), \tag{2.16}$$

і, відповідно,

$$\mathcal{F}[g^{(k)}](\omega)=(-i\omega)^k\mathcal{F}[g](\omega), \tag{2.17}$$

то

$$-\omega^2\mathcal{F}\text{-}\mathscr{L}[u](\eta,\omega)=\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2\mathscr{L}[u(x,\eta)]}{\partial x^2}\right] \tag{2.18}$$

Тому маємо

$$\mathscr{L}[u](x,\eta)-\frac{u_0(x)}{\eta}=-K_\alpha\eta^{-\alpha}\frac{\partial^2\mathscr{L}[u(x,\eta)]}{\partial x^2}, \tag{2.19}$$

звідки %пропущене_інтегральне_рівняння%, або

$$\frac{\partial u}{\partial t}=K_\alpha D_0^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.20}$$

з початковою умовою $u(x,0)=u_0(x)$, або ж

$$^\star D_0^\alpha u=K_\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.21}$$

з початковою умовою $u(x,0)=u_0(x)$.

Означення 2.7. Останні три рівняння відомі під спільною назвою *рівняння субдифузії.*

Зауваження 2.8 — Випадкове блукання з неперервним часом із $\psi(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$ (показниковій розподіл) і $\lambda\sim N(0,2\sigma^2)$ призвело б до параболічного рівняння.

2.2 Аналіз рівняння

Означення 2.9. $\mathsf{E}[(x(t)-x(0))^2]=\langle(x(t)-x(0))^2\rangle$ — середньо-квадратичне зміщення (якщо $x(0)=0$, то $\langle x(t)^2\rangle$).

Лема 2.10

Якщо

$$\psi(t) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}}, \quad t \to +\infty, \tag{2.22}$$

то

$$\langle n(t) \rangle \sim \frac{t^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)}. \tag{2.23}$$

Доведення.

$$\begin{aligned}\langle n(t) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathsf{P}\{n(t) = k\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\int_0^t \left(\psi^{\star k}(s) - \psi^{\star(k+1)}(s) \right) \mathrm{d}s \right).\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\langle n(\eta) \rangle] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\eta} \Big(\mathscr{L}[\psi]^k(\eta) - \mathscr{L}[\psi]^{k+1}(\eta) \Big) = \\ &= \frac{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} k \mathscr{L}[\psi]^k(\eta) = \\ &= \frac{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\mathscr{L}[\psi]'(\eta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \mathscr{L}[\psi]^k(\eta) = \\ &= \frac{1 - \mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta} \frac{\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\mathscr{L}[\psi]'(\eta)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \mathscr{L}[\psi]^k(\eta) = \\ &= \frac{\mathscr{L}[\psi](\eta)}{\eta(1 - \mathscr{L}[\psi](\eta))}.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Оскільки

$$\mathscr{L}[\psi](\eta) = 1 - \tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha), \tag{2.26}$$

то

$$\mathscr{L}[\langle n(\eta) \rangle] = \frac{1 - \tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha)}{\eta(\tau^\alpha \eta^\alpha + o(\eta^\alpha))} \underset{n \to 0}{\sim} \frac{1}{\tau^\alpha \eta^{\alpha+1}}. \tag{2.27}$$

Застосовуємо зворотню теорему Таубера для $\beta = -\alpha$ отримуємо

$$\langle n(t) \rangle \sim \frac{t^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)}. \tag{2.28}$$

□

Наслідок 2.11

Якщо $x(0) = 0$, то

$$\langle x(t)^2 \rangle = 2\sigma^2 \langle n(t) \rangle \sim \frac{2\sigma^2 t^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(1+\alpha)} = \frac{2K_\alpha t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{2.29}$$

Означення 2.12. Якщо у випадкового (дифузійного) процесу середньоквадратичне зміщення зростає повільніше ніж лінійна функція ($\langle x(t)^2 \rangle = o(t)$), то процес називається *суб-дифузійним*.

Означення 2.13. Якщо у випадкового (дифузійного) процесу середньоквадратичне зміщення зростає швидше ніж лінійна функція ($t = o(\langle x(t)^2 \rangle)$), то процес називається *супер-дифузійним*.

Означення 2.14. Якщо ж у випадкового (дифузійного) процесу середньоквадратичне зміщення зростає так само як ніж лінійна функція, то процес називається *нормально-дифузійним*.

Зауваження 2.15 — $\langle (x(t))^2 \rangle$ — середньоквадратичне зміщення, усереднене за сукупністю частинок (eng. *ensemble-averaged*).

Інший підхід — усереднення за часом:

$$\overline{d^2(t,T)} = \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} (x(s+t) - x(s))^2 \, \mathrm{d}s, \tag{2.30}$$

де t — часове вікно, T — загальна тривалість спостереження.