

# Узагальнене оптимальне керування

Гуляницький А. Л.\*

8 жовтня 2019 р.

## Зміст

<b>1</b>	<b>Дробові диференціальні рівняння</b>	<b>1</b>
1.1	Основи дробового числення	1
1.2	Властивості дробових похідних	7
1.2.1	Властивості похідних Рімана-Ліувілля	8
1.2.2	Властивості похідних за Капуто	12
1.3	Початкові значення	13
1.3.1	Початкові значення інтегралу	13
1.3.2	Початкові значення похідних	15
1.4	Перетворення Лапласа дробових інтегралів і похідних	16
<b>2</b>	<b>Моделі аномальної дифузії</b>	<b>19</b>

## 1 Дробові диференціальні рівняння

Перш за все наведемо мінімальну мотивацію вивчення дробових диференціальних рівнянь. Нагадаємо, що класичне рівняння дифузії має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x, t), \quad (1.1)$$

де функція  $f(x, t)$  відповідає джерелам речовини, що дифузує.

Втім, у реальному житті зустрічаються процеси, у яких дифузія відбувається повільніше/швидше, ніж передбачає рівняння (1.1). Для постановки відповідних рівнянь необхідно вводити дробові похідні (похідні дробових порядків).

### 1.1 Основи дробового числення

Розглянемо  $f(t) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Позначимо

$$(I_0^1 f)(t) = \int_0^t f(s) ds. \quad (1.2)$$

---

\*Гуляницький Андрій Леонідович, andriy.hul@gmail.com

Також визначимо рекурсивно

$$(I_0^n f)(t) = I_0^1(I_0^{n-1} f)(t) = \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \dots ds_1. \quad (1.3)$$

Подібне визначення не дуже зручне з обчислювальної точки зору, тому наступна теорема стане нам у пригоді.

### Теорема 1.1 (формула Коші-Діріхле)

Для  $f \in L_1([0, T])$ ,  $t \in [0, T]$  має місце

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds. \quad (1.4)$$

*Доведення.* Доведення проведемо за методом математичної індукції по  $n$ . **База**  $n = 1$  виконується безпосередньо за визначенням  $I_0^1$ . **Перехід:** нехай

$$(I_0^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds. \quad (1.5)$$

Тоді

$$\begin{aligned} (I_0^{n+1} f)(t) &= I_0^1(I_0^n f)(t) = \int_0^t (I_0^n f)(s) ds = \\ &= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \left( \int_0^s (s-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi \right) ds = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t \int_\xi^s f(\xi) (s-\xi)^{n-1} ds d\xi = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\xi) \left. \frac{(s-\xi)^n}{n} \right|_{s=\xi}^{s=t} d\xi = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^t f(\xi) \frac{(t-\xi)^n}{1} d\xi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

З точністю до назв змінних отримали що хотіли. □

**Зауваження 1.2** — Перехід від другого рядка до третього тут відбувається за теоремою Фубіні. Наступна картинка може допомогти у розумінні:

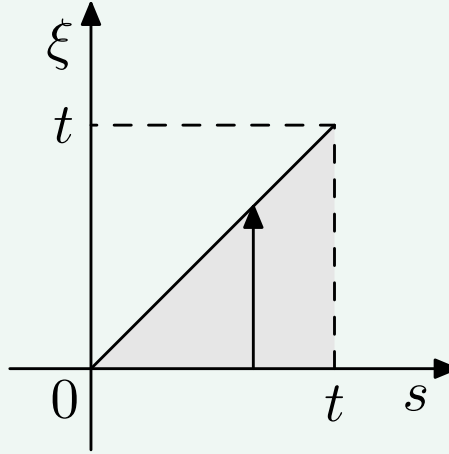


Рис. 1: При  $s : 0 \rightarrow t$  маємо  $\xi : 0 \rightarrow s$ .

Формула Коші-Діріхле мотивує введення інтегральних операторів нецілого порядку.

**Означення 1.3.** Інтегралом Рімана-Ліувілья порядку  $\alpha > 0$  з нижньою межею 0 функції  $f$  називається оператор

$$(I_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (1.7)$$

Також окремо зауважимо, що  $I_0^0 f = f$ .

#### Приклад 1.4

Справді, для  $\alpha \in \mathbb{N}$  маємо  $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ , тобто власне формулу Коші-Діріхле.

**Зауваження 1.5** — Нагадаємо, що  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ .

Взагалі кажучи, подібний вираз нагадує функцію згортки зі степеневою функцією порядку  $\alpha$ :

$$I_0^\alpha f = f \star y_\alpha, \quad (1.8)$$

де  $y_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ , а операція  $\star : (\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  визначається наступним чином:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds. \quad (1.9)$$

Давайте тепер поміркуємо, як можна визначити диференціальний оператор дробового порядку, маючи відповідні інтегральні оператори. Взагалі кажучи, єдиної відповіді на це питання немає, як показує наступна картинка:

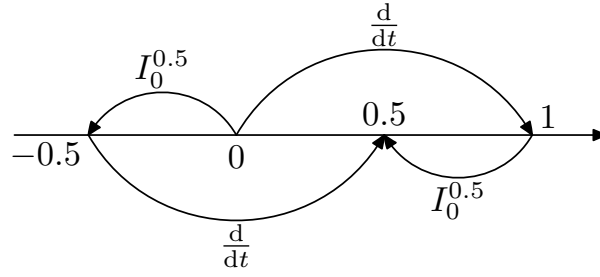


Рис. 2: Різні способи визначення диференціального оператора нецілого порядку

Введемо наступне допоміжне поняття для спрощення подальших позначень і формулювань:

**Означення 1.6.** Нехай  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тоді *стеля*  $\lceil \alpha \rceil$  — найменше ціле число, що не менше за  $\alpha$ . Також інколи кажуть *верхня ціла частина*  $\alpha$ .

Нехай  $\alpha > 0$ ,  $n = \lceil \alpha \rceil$ .

**Означення 1.7.** *Похідною за Капуто* функції  $f$  порядку  $\alpha$  з нижньою межею 0 називається оператор

$$({}^*D_0^\alpha f)(t) = I_0^{n-\alpha} \left( \frac{d^n f}{dt^n} \right). \quad (1.10)$$

**Означення 1.8.** *Похідною Рімана-Ліувілья* функції  $f$  порядку  $\alpha$  з нижньою межею 0 називається оператор

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_0^{n-\alpha} f). \quad (1.11)$$

### Приклад 1.9

На рисунку вище  $D_0^{0.5} = \frac{d}{dt} I_0^{0.5}$ , а  ${}^*D_0^{0.5} = I_0^{0.5} \left( \frac{d}{dt} \right)$ .

Взагалі кажучи виникає питання коли введені вище похідні існують. Для відповіді на це питання нам знадобиться наступне:

**Означення 1.10.** Функція  $f$  називається *абсолютно неперервною* (eng. AC, absolutely continuous) на проміжку  $I$  якщо  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \dots \leq x_n < y_n$ :

$$\sum_{k=1}^n (y_k - x_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon. \quad (1.12)$$

Так от для АС функцій їхні похідні інтегровні (з нецілим порядком), тобто похідні (з нецілим порядком) існують.

Поняття абсолютної неперервності має нагадувати поняття рівномірної неперервності (*eng.* UC, uniformly continuous). Зрозуміло, що з абсолютної неперервності випливає ( $n = 1$ ) рівномірна неперервність, але зворотнє не виконується.

**Вправа 1.11.** Наведіть приклад рівномірно неперервної але не абсолютно неперервної функції.

**Розв’язання.** Функція Кантора є класичним прикладом такої функції. нагадаємо, що функція Кантора визначається як

$$c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}, & x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n} \in \mathcal{C}, \\ \sup_{y \leq x, y \in \mathcal{C}} c(y), & x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}, \end{cases} \quad (1.13)$$

де  $\mathcal{C}$  — множина Кантора, а  $b_n$  — тернарні “біти” числа  $x$ , тобто  $b_n \in \{0, 2\}$ .

Для наглядності наведемо графік функції Кантора:

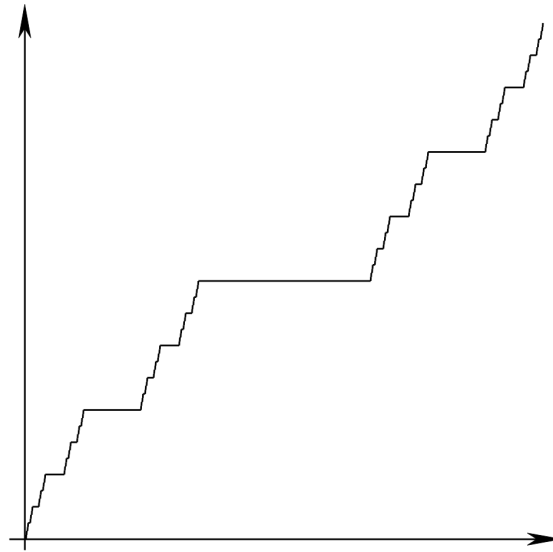


Рис. 3: функція Кантора

Як і кожна неперервна функція на компактї  $([0, 1])$ , вона є рівномірно неперервною на ньому. Втім, вона не є абсолютно неперервною, адже  $\mu(\mathcal{C}) = 0$ , тобто  $\forall \delta > 0$  знайдуться інтервали сумарною довжиною  $< \delta$  що покривають  $\mathcal{C}$ , а тому зміна значення  $c(\cdot)$  на них складатиме  $1 > \varepsilon$ .

Виникає закономірне запитання: чи існує аналог формули Коші-Діріхле для диференціальних операторів? Виявляється, що так, хоча він і не зовсім такий, як можна було б очікувати.

**Теорема 1.12**

Нехай  $f \in AC^n([0, T])$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $n = \lceil \alpha \rceil$ . Тоді

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t - s)^{\alpha+1-n}} ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1 + k - \alpha) t^{\alpha-k}}. \quad (1.14)$$

**Приклад 1.13**

Зокрема, при  $0 < \alpha < 1$  маємо  $f \in AC([0, T])$  і

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t - s)^\alpha} ds + \frac{f(0)}{\Gamma(1 - \alpha) t^\alpha}. \quad (1.15)$$

**Зауваження 1.14** — Як показує формула,  ${}^*D_0^\alpha, D_0^\alpha$  — нелокальні оператори.

*Доведення.* Доведемо частинний випадок  $0 < \alpha < 1$ :

$$\begin{aligned} (D_0^\alpha f)(t) &= \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} f = \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} f(s) ds = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t f(s) \frac{d(-(t - s)^{1-\alpha})}{1 - \alpha} ds = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left( \frac{-f(s)(t - s)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t f'(s) \frac{(t - s)^{1-\alpha}}{1 - \alpha} ds \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left( \frac{f(0)t^{1-\alpha}}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^t f'(s)(t - s)^{1-\alpha} ds \right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left( \frac{f(0)}{t^\alpha} + \int_0^t f'(s)(t - s)^{-\alpha} ds \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

□

**Зауваження 1.15** — Тут при переході від другого рядочка до третього ми скористалися інтегруванням за частинами, а в останньому переході — формулою Лейбніца:

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt. \quad (1.17)$$

На завершення визначимо ще кілька корисних для подальшого дослідження об'єктів:

**Означення 1.16.** *Інтегралом Рімана-Ліувілья з нижньою межею  $a$  називається*

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds. \quad (1.18)$$

**Означення 1.17.** *Інтегралом Рімана-Ліувілья з правою межею для  $t < T$  називається*

$$(I_a^\alpha f)(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds. \quad (1.19)$$

## 1.2 Властивості дробових похідних

### Приклад 1.18

Знайдемо похідні степеневих функцій.

**Розв'язання.** Нехай  $\beta > -1$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Тоді

$$D_0^\alpha t^\beta = \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} t^\beta. \quad (1.20)$$

У свою чергу

$$I_0^{1-\alpha} t^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha} ds. \quad (1.21)$$

Нагадаємо

**Означення 1.19** (бета-функції).

$$B(a, b) = \int_0^1 \xi^{a-1} (1-\xi)^{b-1} d\xi. \quad (1.22)$$

а також наступну властивість бета-функції:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.23)$$

Проведемо заміну  $\xi = s/t$ , тоді  $ds = t d\xi$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t\xi)^\beta t^{-\alpha} (1-\xi) t d\xi &= \\ &= \frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\Gamma(1-\alpha)} B(\beta+1, 1-\alpha) = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha+1}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Лишилося продиференціювати цей інтеграл:

$$\begin{aligned}
 D_0^\alpha \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha+1} &= \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\alpha)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} = \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} t^{\beta-\alpha},
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

де ми скористалися властивістю  $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ .

**Зауваження 1.20** — Ця формула справедлива і для  $\alpha \geq 1$ , але умова  $\beta > -1$  важлива для збіжності кількох інтегралів, зокрема  $\int_0^t s^\beta (t-s)^{-\alpha} ds$ .

### Приклад 1.21

Зокрема, якщо  $\alpha \leq \beta \in \mathbb{N}$ , то маємо формулу

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} t^\beta = \frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} t^{\beta-\alpha}. \tag{1.26}$$

Наприклад,

$$\frac{d^2}{dt^2} t^4 = \frac{4!}{2!} t^2. \tag{1.27}$$

**Зауваження 1.22** — Зрозуміло також що всі введені нами оператори лінійні.

## 1.2.1 Властивості похідних Рімана-Ліувілля

### Твердження 1.23

На жаль, не виконується наступна властивість

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{\lambda t} = \lambda^n e^{\lambda t}. \tag{1.28}$$

*Доведення.*

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \tag{1.29}$$



Почленно диференціюємо:

$$\begin{aligned}
 D_0^\alpha e^{\lambda t} &= D_0^\alpha \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} D_0^\alpha (t^k) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+1-\alpha)} t^{k-\alpha} \neq \\
 &\neq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^\alpha \frac{(\lambda t)^k}{k!}.
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

□

**Твердження 1.24** (формула (не) Ньютона-Лейбніца)

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(s) ds = f(t). \tag{1.31}$$

**Твердження 1.25** (формула Ньютона-Лейбніца)

$$\int_0^t f'(s) ds = f(t) - f(0). \tag{1.32}$$

**Твердження 1.26** (напівгрупова властивість дробових інтегралів)

Нехай  $\alpha, \beta > 0$ , тоді  $I_0^{\alpha+\beta} = I_0^\alpha I_0^\beta$ .

**Вправа 1.27.** Доведіть цю властивість. **Підказка:** за означеннями,

$$I_0^{\alpha+\beta} f = f \star y_{\alpha+\beta} \stackrel{?}{=} f \star (y_\alpha \star y_\beta) \stackrel{?}{=} (f \star y_\alpha) \star y_\beta = I_0^\beta I_0^\alpha f, \tag{1.33}$$

тому достатньо перевірити асоціативність згортки і рівність  $y_{\alpha+\beta} = y_\alpha \star y_\beta$ .

*Доведення.* Перевіримо два вищезгаданих твердження:

1) Асоціативність  $\star$  отримується “в лоб”:

$$\begin{aligned}
((f \star g) \star h)(t) &= \int_0^t (f \star g)(s) h(t-s) \, ds = \\
&= \int_0^t \left( \int_0^s f(\xi) g(s-\xi) \, d\xi \right) h(t-s) \, ds = \\
&= \int_0^t \int_0^s f(\xi) g(s-\xi) h(t-s) \, d\xi \, ds = \\
&= \int_0^t \int_\xi^t f(\xi) g(s-\xi) h(t-s) \, ds \, d\xi = \\
&= \int_0^t \int_0^{t-\xi} f(\xi) g(s) h(t-s-\xi) \, ds \, d\xi = \\
&= \int_0^t f(\xi) \left( \int_0^{t-\xi} g(s) h(t-s-\xi) \, ds \right) \, d\xi = \\
&= \int_0^t f(\xi) (g \star h)(t-\xi) \, d\xi = \\
&= (f \star (g \star h))(t).
\end{aligned} \tag{1.34}$$

2) Далі

$$\begin{aligned}
y_\alpha(t) \star y_\beta(t) &= \int_0^t y_\alpha(s) y_\beta(t-s) \, ds = \\
&= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} (t-s)^{\beta-1} \, ds = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} \, ds.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Проведемо заміну  $\xi = s/t$ , тоді  $ds = t \, d\xi$ , отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} \, ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (\xi t)^{\alpha-1} (1-\xi)^{\beta-1} t^{\beta-1} t \, d\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{(\alpha-1)+(\beta-1)+1} \int_0^1 \xi^{\alpha-1} (1-\xi)^{\beta-1} \, d\xi = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1} = \\
&= y_{\alpha+\beta}(t).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

□

**Теорема 1.28** (аналог формули (не) Ньютона-Лейбніца)Для  $\alpha > 0$ 

$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = f. \quad (1.37)$$

*Доведення.* Нехай  $n = \lceil \alpha \rceil$ , тоді

$$D_0^\alpha I_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_0^{n-\alpha} I_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_0^n f = f. \quad (1.38)$$

□

**Зауваження 1.29** — Тут ми скористалися напівгруповою властивістю.

**Твердження 1.30** (аналог формули Ньютона-Лейбніца)Нехай  $f, D_0^\alpha f \in L_1([0, T])$ ,  $n = \lceil \alpha \rceil$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , тоді для  $0 < t < T$  маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \cdot \frac{t^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}. \quad (1.39)$$

**Зауваження 1.31** — Тут під  $D_0^{-|\beta|}$  маємо на увазі  $I_0^{|\beta|}$ .

**Приклад 1.32**Для  $0 < \alpha < 1$  маємо

$$(I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) = f(t) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.40)$$

**Зауваження 1.33** — Тут  $(I_0^{1-\alpha} f)(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (I_0^{1-\alpha} f)(\varepsilon)$ .

*Доведення.* Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned} (I_0^\alpha D_0^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (D_0^\alpha f)(s) ds = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(s) ds \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Виконаємо наступні маніпуляції з виразом що стоїть під похідною:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha (D_0^\alpha f)(t) dt = \\
& = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left( (t-s)^\alpha I_0^{1-\alpha} f(s) \Big|_{s=0}^{s=t} + \alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} I_0^{1-\alpha} f(s) ds \right) = \\
& = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^\alpha I_0^{1-\alpha} f = \\
& = -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Лишилося всього лише продиференціювати:

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{t^\alpha (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} + I_0^1 f \right) = f(t) - \frac{t^{\alpha-1} (I_0^{1-\alpha} f)(0)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.43}$$

□

### 1.2.2 Властивості похідних за Капуто

#### Теорема 1.34

Нехай  $f \in L_\infty([0, T])$ , тобто  $\exists M \in \mathbb{R}$ :  $|f(t)| \stackrel{\text{a.e.}}{\leq} M$ , тоді, як і очікувалося,  $({}^*D_0^\alpha I_0^\alpha f)(0) = (I_0^{\alpha*} D_0^\alpha f)(0)$ .

а також

#### Теорема 1.35

Нехай  $n = \lceil \alpha \rceil$ ,  $f \in AC^n([0, T])$ , тоді

$$(I_0^{\alpha*} D_0^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k. \tag{1.44}$$

**Зауваження 1.36** — Ця формула справедлива і для цілих  $\alpha$

#### Твердження 1.37

Для похідних у загальному випадку не виконується напівгрупова властивість.

**Теорема 1.38**

Нехай  $f, D_0^\beta \in L_1([0, T])$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Тоді

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \sum_{k=0}^{[\beta]-1} (D_0^{\beta-k-1} f)(0) \frac{t^{-\alpha-k-1}}{\Gamma(-\alpha-k)} \quad (1.45)$$

**Приклад 1.39**

Зокрема, для  $0 < \alpha, \beta < 1$ :

$$(D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) = (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - (I_0^{1-\beta} f)(0) \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} \quad (1.46)$$

*Доведення.* Доведемо частинний випадок:

$$\begin{aligned} (D_0^\alpha D_0^\beta f)(t) &= \left( \frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} D_0^\beta f \right) (t) = \\ &= \left( \frac{d^2}{dt^2} I_0^{2-\alpha} D_0^\beta f \right) (t) = \\ &= \left( \frac{d^2}{dt^2} I_0^{2-\alpha-\beta} I_0^\beta D_0^\beta f \right) (t) = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} I_0^{2-\alpha-\beta} \left( f(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0) t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right) = \\ &= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} D_0^{\alpha+\beta} t^{\beta-1} = \\ &= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha} = \\ &= (D_0^{\alpha+\beta} f)(t) - \frac{(I_0^{1-\beta} f)(0)}{\Gamma(-\alpha)} t^{-1-\alpha}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

□

**1.3 Початкові значення****1.3.1 Початкові значення інтегралу**

Дослідимо, за яких умов початкове значення інтегралу  $((I_0^\alpha f)(t) = o(1))$  дорівнює нулю.

**Теорема 1.40**

Нехай  $\alpha > 0$ ,  $p > 1/\alpha$ ,  $p \geq 1$ ,  $f \in L_p((0, T))$ . Тоді  $(I_0^\alpha f)(t) = o(t^{\alpha-1/p})$  при  $t \rightarrow 0$ .

Доведення.

$$\begin{aligned}
|(I_0^\alpha)(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |f(s)(t-s)^{\alpha-1}| ds \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \left( \int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)q} ds \right)^{1/q} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \left( \frac{t^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right)^{1/q} = \\
&= \left( \int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1+1/q}}{c(\alpha, p)} = \\
&= \left( \int_0^t |f(s)|^p ds \right)^{1/p} \frac{t^{\alpha-1/p}}{c(\alpha, p)} = \\
&= o(t^{\alpha-1/p}),
\end{aligned}$$

де останній перехід справджується адже  $\int_0^t |f(s)|^p ds = o(1)$  при  $t \rightarrow 0$  □

**Зауваження 1.41** (абсолютна неперервність інтеграла Лебега) — Якщо  $f \in L_1$  то

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta(\varepsilon) > 0) \quad (\forall A : \mu(A) < \delta(\varepsilon)) \quad \int_A f d\mu \leq \varepsilon. \quad (1.48)$$

**Зауваження 1.42** (інтегральна нерівність Коші-Буняковського) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_2} \cdot \|g\|_{L_2}. \quad (1.49)$$

**Зауваження 1.43** (інтегральна нерівність Гельдера) — Якщо всі функції достатньо інтегровні (всі норми скінченні)

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}, \quad (1.50)$$

де  $1/p + 1/q = 1$ .

**Зауваження 1.44** — Умова  $p > 1/\alpha$  необхідна для збіжності усіх інтегралів з доведення

#### Наслідок 1.45

При  $\alpha > 1/p$  маємо  $(I_0^\alpha f)(t) = o(1)$ , тобто  $(I_0^\alpha f)(0) = 0$ .

**Вправа 1.46.** Наведіть приклад  $f$  для якої  $(I_0^\alpha f)(0) \neq 0$  (але і не  $\infty$ ).

### 1.3.2 Початкові значення похідних

#### Теорема 1.47

Нехай  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $n = \lceil \alpha \rceil$ ,  $f \in C^{n-1}([0, T])$ ,  $p > \frac{1}{n-\alpha}$ ,  $f^{(n)} \in L_P([0, T])$ . Тоді  $(D_0^\alpha)(0) = 0 \iff f^{(k)}(0) = 0$  при  $k = \overline{0, n-1}$ .

*Доведення.* За умов теореми

$$(D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (1.51)$$

( $\Leftarrow$ ) У формулі вище інтеграл дорівнює нулю за першою сьогодишньою теоремою, а уся сума зануляється за умовою теореми.

( $\Rightarrow$ ) Домножатимемо (1.51) на  $t^{\alpha-k}$  для  $k = \overline{0, n-1}$ . Наприклад, для  $k = 0$  матимемо

$$t^\alpha (D_0^\alpha f)(t) = t^\alpha (*D_0^\alpha f)(t) + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)t^k}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (1.52)$$

Бачимо, що  $t^\alpha (*D_0^\alpha f)(t) = o(1)$ , всі доданки суми нескінченно малі, тому  $f(0) = 0$ . Далі за індукцією по  $k$  отримуємо рівність нулів усіх похідних до  $(n-1)$ -ої.  $\square$

**Зауваження 1.48** — При  $0 < \alpha < 1$  маємо  $(D_0^\alpha 1)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} \neq 0$ .

**Зауваження 1.49** — Але  $(*D_0^\alpha 1)(t) = 0$ .

#### Теорема 1.50

Нехай  $\alpha > 0$ ,  $n = \lceil \alpha \rceil$ ,  $f \in C^n([0, T])$ , тоді  $D_0^\alpha f \equiv 0 \iff f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}$  — дробовий многочлен.

**Вправа 1.51.** ( $\Rightarrow$ ) Вправа.

( $\Leftarrow$ ) Нехай

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^{\alpha-k-1}, \quad (1.53)$$

тоді

$$D_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} I_0^{n-\alpha} \left( \sum_{k=0}^{n-1} t^{\alpha-k-1} \right) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(n-k)} t^{n-k-1} = 0. \quad (1.54)$$

$\square$

**Теорема 1.52 (похідна добутку)**

Нехай  $f, g$  — аналітичні в  $(-h, h)$ . Тоді для  $t \in (0, h/2)$

$$D^\alpha(f \cdot g)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\alpha} D_0^k f(t) \cdot D_0^{\alpha-k} g(t), \quad (1.55)$$

де

$$\binom{k}{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \cdot \Gamma(\alpha - k + 1)}. \quad (1.56)$$

**Теорема 1.53 (Тарасова)**

Нехай  $0 < \alpha < 1$ , тоді  $D^\alpha$  — лінійний оператор, що задовольняє умову

$$D^\alpha(f \cdot g) = D^\alpha f \cdot g + f \cdot D^\alpha g. \quad (1.57)$$

Тоді  $\exists p(t): (D_0^\alpha f)(t) = p(t) \cdot \frac{df}{dt}$ .

**1.4 Перетворення Лапласа дробових інтегралів і похідних**

**Означення 1.54.** Нехай  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , тоді

$$\mathcal{L}[f](\eta) = \bar{f}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} f(t) dt. \quad (1.58)$$

**Лема 1.55 (перетворення Лапласа похідної)**

$$\mathcal{L}[f'](\eta) = \eta \mathcal{L}[f](\eta) - f(0). \quad (1.59)$$

*Доведення.* Доведення. Інтегруємо частинами. □

**Лема 1.56 (перетворення Лапласа згортки)**

$$\mathcal{L}[f \star g](\eta) = \mathcal{L}[f](\eta) \cdot \mathcal{L}[g](\eta). \quad (1.60)$$

*Доведення.* Змінюємо порядок інтегрування. □

**Лема 1.57 (перетворення Лапласа степеневі функції)**

$$\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1 - \beta) \eta^{\beta-1}. \quad (1.61)$$



Доведення. За означенням

$$\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} dt. \quad (1.62)$$

Зробимо заміну змінних:  $\eta t = \xi$ ,  $dt = d\xi/\eta$ . Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\eta t} t^{-\beta} dt &= \int_0^\infty e^{-\xi} \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{-\beta} \frac{1}{\eta} d\xi = \\ &= \eta^{\beta-1} \int_0^\infty e^{-\xi} \xi^{-\beta} d\xi = \\ &= \eta^{\beta-1} \Gamma(1-\beta). \end{aligned} \quad (1.63)$$

□

**Лема 1.58** (перетворення Лапласа інтегралу дробового порядку)

$$\mathcal{L}[I_0^\alpha f](\eta) = \eta^{-\alpha} \mathcal{L}[f](\eta). \quad (1.64)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[I_0^\alpha f](\eta) &= \mathcal{L}[f \star y_\alpha](\eta) = \\ &= \mathcal{L}[f](\eta) \cdot \mathcal{L}[y_\alpha](\eta) = \\ &= \mathcal{L}[f](\eta) \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(1-(1-\alpha)) \eta^{-\alpha} = \\ &= \eta^{-\alpha} \mathcal{L}[f](\eta). \end{aligned} \quad (1.65)$$

□

**Лема 1.59** (перетворення Лапласа похідної Рімана-Ліувіля)

$$\mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathcal{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} (D_0^{\alpha-k-1} f)(0) \eta^k. \quad (1.66)$$

**Приклад 1.60**

Зокрема, при  $0 < \alpha < 1$  маємо

$$\mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) = \eta^\alpha \mathcal{L}[f](\eta) - (I_0^{\alpha-1} f)(0). \quad (1.67)$$

Доведення.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D_0^\alpha f](\eta) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} I_0^{1-\alpha} f\right](\eta) = \\ &= \eta \cdot \mathcal{L}[I_0^{1-\alpha} f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\ &= \eta \cdot \eta^{\alpha-1} \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0) = \\ &= \eta^\alpha \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - (I_0^{1-\alpha} f)(0). \end{aligned} \quad (1.68)$$

□

**Лема 1.61** (перетворення Лапласа похідної Катупо)

$$\mathcal{L}\left[{}^{\star}D_0^{\alpha}f\right](\eta) = \eta^{\alpha} \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\eta^{\alpha-k-1}. \quad (1.69)$$

**Приклад 1.62**

Зокрема, при  $0 < \alpha < 1$  маємо

$$\mathcal{L}[D_0^{\alpha}f](\eta) = \eta^{\alpha} \cdot \mathcal{L}[f](\eta) - \eta^{\alpha-1}f(0). \quad (1.70)$$

**Вправа 1.63.** Довести.

*Доведення.*

□

**Лема 1.64**

$$\mathcal{L}[c](\eta) = c/\eta.$$

**Лема 1.65**

$$\mathcal{L}[e^{pt}f(t)](\eta) = \mathcal{L}[f(t)](\eta - p).$$

Нагадаємо, що раніше ми з'ясували, що  $\mathcal{L}[t^{-\beta}](\eta) = \Gamma(1 - \beta)\eta^{\beta-1}$ .

**Теорема 1.66** (Таубера)

Нехай  $-\beta > -1$ ,  $f$  монотонна при великих  $t$  (тобто вона монотонна на деякому проміжку вигляду  $[t_0, +\infty)$ ). Тоді  $f(t) \sim t^{-\beta}$  при  $t \rightarrow +\infty \iff \mathcal{L}[f](\eta) = \Gamma(1 - \beta)\eta^{\beta-1}$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

**Зауваження 1.67** — Тут  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  означає, що  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

**Наслідок 1.68**

Нехай  $0 < \alpha < 1$  і  $f$  монотонна при великих  $t$ ,  $f \geq 0$  на  $[0, +\infty)$  і  $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$ . Тоді  $\forall A > 0$ :  $f(t) \sim \alpha A t^{-\alpha-1}$  при  $t \rightarrow +\infty \iff \mathcal{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1 - \alpha)\eta^{\alpha} + o(\eta^{\alpha})$  при  $\eta \rightarrow 0+$ .

*Доведення.* Розглянемо функцію

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s) \, ds. \quad (1.71)$$

Зауважимо, що  $F'(t) = -f(t)$ .

**Вправа 1.69.** Доведіть, що за наших припущень

$$f(t) \sim A\alpha t^{-\alpha-1} \iff F(t) \sim At^{-\alpha}. \quad (1.72)$$

Розглянемо

$$\mathcal{L}[F](\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta t} \int_t^{+\infty} f(s) \, ds \, dt, \quad (1.73)$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(s) \int_0^s e^{-\eta t} \, dt \, ds &= \int_0^{+\infty} f(s) \frac{1 - e^{-\eta s}}{\eta} \, ds = \\ &= \frac{1}{\eta} \left( 1 - \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\eta s} \, ds \right) = \\ &= \frac{1 - \mathcal{L}[f](\eta)}{\eta}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Звідси

$$\mathcal{L}[f](\eta) = 1 - \eta \mathcal{L}[F](\eta). \quad (1.75)$$

Тепер можемо записати

$$\begin{aligned} f(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} A\alpha t^{-\alpha-1} &\iff F(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} At^{-\alpha} \iff \\ &\iff \mathcal{L}[F](\eta) \underset{\eta \rightarrow 0+}{\sim} A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} \iff \\ &\iff \mathcal{L}[F](\eta) = \Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha-1} + o(\eta^{\alpha-1}) \iff \\ &\iff \mathcal{L}[f](\eta) = 1 - A\Gamma(1-\alpha)\eta^{\alpha} + o(\eta^{\alpha}). \end{aligned} \quad (1.76)$$

□

## 2 Моделі аномальної дифузії

Нагадаємо, що класичні рівняння дифузії та теплопровідності зумовлені наступними чинниками:

- 1) закон збереження кількості речовини/тепла;
- 2) джерела і стоки;
- 3) “закон” Фіка/Фур’є — емпірично встановлене для широкого класу процесів твердження про те, що інтенсивність потоку речовини/тепла пропорційна мінус градієнту концентрації речовини/кількості тепла на границі.

Розглянемо тепер інший підхід, який ґрунтується на випадкових блуканнях з неперервним часом (eng. *CTRW*, *continuous time random walk*). А саме, нехай  $x(t)$  — випадкова величина (координата частинки в момент часу  $t$ ), а  $u(x, t)$  (при фіксованому  $t$  — щільність координати частинки).

Параметри моделі:

- 1)  $u_0(x)$  — щільність початкового (при  $t = 0$ ) розподілу;
- 2)  $\psi(t)$  — щільність часу очікування наступного стрибка;
- 3)  $\lambda(x)$  — щільність зміщення.

**Означення 2.1.** Нехай  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , тоді її *перетворенням Фур'є* називається

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(x) dx. \quad (2.1)$$

### Твердження 2.2

Для перетворення Фур'є справедлива теорема згортки:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega), \quad (2.2)$$

де

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y) dy. \quad (2.3)$$

**Означення 2.3.** Нехай  $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , тоді її *перетворенням Фур'є-Лапласа* називається

$$\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) = \tilde{u}(\omega, \eta) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta t + i\omega x} u(x, t) dx dt. \quad (2.4)$$

### Формула 2.4 (Монтрола-Вайса)

$$\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) = \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)}{\eta} \frac{1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)}{1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)}, \quad (2.5)$$

як тільки  $|\mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega)| < 1$ .

*Доведення.* Введемо додаткове позначення:  $n(t)$  — кількість стрибків до моменту  $t$ .  $\psi_k(t)$  — щільність часу  $k$ -го стрибка. І нарешті,  $\lambda_k(x)$  — щільність координати після  $k$ -го стрибка.

Запишемо формулу повної ймовірності:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{n(t) = k\} \lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \mathbf{P}\{n(t) \geq k\} - \mathbf{P}\{n(t) \geq k+1\} \right) \lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^t \psi_k(s) \, ds - \int_0^t \psi_{k+1}(s) \, ds \right) \lambda_k(x) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^t \psi^{*k}(s) \, ds - \int_0^t \psi^{*(k+1)}(s) \, ds \right) \cdot (u_0 * \lambda^{*k})(x).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

**Зауваження 2.5** — Тут ми скористалися тим, що  $\psi_k(x) = \psi^{*k} = \underbrace{\psi * \psi * \dots * \psi}_k$  і  $\lambda_k(x) = u_0 * \lambda^{*k} = u_0 * \underbrace{\lambda * \lambda * \dots * \lambda}_k$ .

**Вправа 2.6.** Поновити у конспекті формальне доведення цих фактів.

З урахуванням %перелік\_нагадувань%, маємо

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\text{-}\mathcal{L}[u](\omega, \eta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\eta} \left( (\mathcal{L}[\psi](\eta)^k - \mathcal{L}[\psi](\eta)^{k+1}) \mathcal{F}[u_0](\omega) \mathcal{F}[\lambda](\omega)^k \right) = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta))}{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}[\psi](\eta)^k \mathcal{F}[\lambda](\omega)^k = \\
&= \frac{\mathcal{F}[u_0](\omega)(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta))}{\eta(1 - \mathcal{L}[\psi](\eta)\mathcal{F}[\lambda](\omega))}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

□