

# Теорія різницевих схем. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки

Оноцький В. В.

12 жовтня 2019 р.

## Зміст

<b>1</b>	<b>Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки</b>	<b>3</b>
1.0.1	Мета чисельного моделювання . . . . .	3
1.0.2	Класифікація задач чисельного моделювання . . . . .	4
1.1	Використання обчислювальної гідродинаміки . . . . .	6
1.1.1	Приклади використання . . . . .	7
1.2	Короткий історичний огляд . . . . .	8
1.2.1	Гіперболічні рівняння . . . . .	9
1.2.2	Двокрокові методи . . . . .	9
1.2.3	Гриценко Олександр Юхимович (1946–2016) . . . . .	10
1.3	Апроксимація, збіжність і стійкість розв’язків . . . . .	11
1.3.1	Апроксимація . . . . .	11
1.3.2	Стійкість . . . . .	11
1.4	Рівняння руху нестисливої рідини в декартовій системі координат . . . . .	12
1.4.1	Рівняння руху для фізичних змінних . . . . .	12
1.4.2	Рівняння переносу вихору й рівняння для функції струму у випадку плоских течій . . . . .	13
1.4.3	Консервативна форма рівнянь . . . . .	13
1.4.4	Рівняння в безрозмірних змінних . . . . .	14
1.4.5	Одновимірні модельні рівняння переносу . . . . .	15
1.5	Завдання для самостійної роботи . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Методи апроксимації диференціальних операторів. Основні властивості різницевих схем</b>	<b>16</b>
2.1	Деякі основні скінченно-різницеві формули . . . . .	16
2.1.1	Розкладання в ряди Тейлора . . . . .	16
2.1.2	Поліноміальна апроксимація . . . . .	20
2.1.3	Інтегральний метод . . . . .	22
2.1.4	Метод контрольного об’єму . . . . .	24
2.2	Властивість консервативності . . . . .	28

<b>3</b>	<b>Точні та узагальнені розв'язки диференціальних та різницевих рівнянь у банахових просторах</b>	<b>33</b>
3.1	Скінченно-різницеві задачі в абстрактних просторах Банаха . . . . .	33
3.2	Узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь . . . . .	34
3.3	Скінченно-різницеві задачі . . . . .	35
3.4	Теорема Лакса . . . . .	37

# 1 Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання.

## Чисельне моделювання процесів гідродинаміки

*Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки. Основні закони та рівняння. Дивергентна і недивергентна форми запису системи рівнянь Нав'є-Стокса. Системи безрозмірювання рівнянь. [1–3]*



Рис. 1: місце чисельного моделювання у моделюванні

Традиційно при **моделюванні** реальних фізичних процесів і проектуванні конкретних пристроїв одночасно використовувались **теоретичні** та **експериментальні** методи дослідження, за допомогою яких визначались основні характеристики процесів. З появою потужних ЕОМ з'явилась можливість використати третій підхід — **обчислювальний експеримент**.

### 1.0.1 Мета чисельного моделювання

Обчислювальний підхід у моделюванні знайшов своє місце на межі між теоретичним і експериментальним, узявши на себе певну частину функцій як теоретичних, так і експериментальних методів. Іноді він дає змогу замінити високовартісні й довгострокові натурні експерименти чисельним моделюванням процесів на ЕОМ. Інколи такий підхід є єдиним можливим для визначення тих чи інших характеристик процесу. За допомогою чисельного моделювання можна прогнозувати поведінку, а варіюючи параметри — встановлювати нові якості та закономірності протікання досліджуваного процесу, що здебільшого не під силу ані теоретичним, ані експериментальним методам.

#### Приклад 1.1

Чисельне моделювання доцільно застосовувати у тих випадках, коли досліджувані процеси важко або навіть неможливо моделювати на макетах через їх велику швидкоплинність, надзвичайно малі геометричні розміри досліджуваного об'єкту, багатокомпонентність, надвисокі чи наднизькі тиски та температури середовища, а також в інших складних реальних ситуаціях.

При чисельному моделюванні реальних процесів множина **задач** як об'єкт математичного дослідження, вивчена недостатньо. Задача, в самому загальному розумінні, є ситуацією, яка визначає дії деякої розв'язуючої системи.

**Означення 1.2.** Розв'язуюча система є основним інструментом чисельного моделювання і класифікується як біологічна, технічна і комбінована система, до складу якої входять люди і автомати (машини).

Ця система повинна мати технічні засоби розв'язування і теоретичні методи побудови розв'язку.

### 1.0.2 Класифікація задач чисельного моделювання

згідно із системою «людина — автомат» залежно від можливої ситуації така:

- 1) існує один або кілька алгоритмів розв'язування задачі, оформлених у вигляді програми, яка може бути реалізована на ЕОМ;
- 2) не існує програми для ЕОМ, але людина знає, як її побудувати;
- 3) не існує програми і невідомий метод розв'язування задачі.

У першому випадку задача зводиться або до вибору з множини алгоритмів найбільш придатного, або використання єдиного придатного алгоритму. У другому додається процес програмування відомого алгоритму (клас програмування). У третьому виникає задача розробки алгоритму і програми (клас задач синтезу алгоритмів).

**Означення 1.3.** Якщо, починаючи розв'язувати задачу, людина не знає шляхів розв'язування даного класу задач, то таку задачу називають *проблемною*.

Розв'язування проблемних задач передбачає використання людиною додаткових евристичних засобів, відмінних від алгоритмів і алгоритмічних вказівок.

**Означення 1.4.** Задачу назвемо *добре визначеною*, якщо для неї існує алгоритм перевірки, який можна застосувати до запропонованого розв'язку.

**Означення 1.5.** Якщо інформації, що міститься в постановці задачі й самій розв'язуючій системі, достатньо для отримання розв'язку, то така задача є *безпошуковою*.

У пошукових задачах система повинна дістати додаткову інформацію із зовнішнього середовища. Вхідні дані задач поділяються на компоненти, які в умові описані досить повно (те, що дано в задачі), і компоненти, перелічені в умові задачі, але їх повний опис можна дістати лише після розв'язування задачі (те, що треба знайти).

Відповідно до процесу розв'язування задачі поділяються на такі типи:

- 1) задачі *виконання* (задано вхідні об'єкти, процедури; потрібно знайти продукти процесу);
- 2) задачі *відновлення* (задано продукти процесу, процедури; потрібно знайти вхідні об'єкти);
- 3) задачі *перетворення* (задано вхідні об'єкти, продукти процесу; потрібно знайти процедури);
- 4) задачі *конструювання* (відомо продукти із заданими властивостями; потрібно знайти відповідні вхідні дані та процедури).

**Зауваження 1.6** — Типовою дією, яку виконує розв'язуюча система, є виділення допоміжних задач або послідовності підзадач, розв'язати які вона може значно простіше, ніж задачу в цілому. Часто такими підзадачами є суттєві задачі, без розв'язування яких неможливо розв'язати основну задачу. Процес виділення підзадач і розгалуження розв'язку в чисельному моделюванні потребує ґрунтовного аналізу і додаткових досліджень впливу похибок розв'язку кожної з підзадач на кінцевий результат.

**Означення 1.7.** Похибка розв'язку задачі, спричинена впливом похибки розв'язку підзадачі, є *спадковою*.

З позицій обчислювальної математики задачі можна класифікувати як задачі:

- 1) розв'язування рівнянь і систем: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних, функціональних;
- 2) дослідження властивостей розв'язків рівнянь і систем: асимптотична поведінка розв'язків; критерії стійкості; знаходження величин, залежних від розв'язків;
- 3) екстремальні задачі з додатковими умовами і без них;
- 4) задачі на відновлення (визначення коефіцієнтів): аналіз Фур'є, інтерполювання, лінійна і нелінійна апроксимація, конформні відображення;
- 5) задачі оцінки значень: обчислення та оцінка значень точних і наближених формул, залишків рядів.

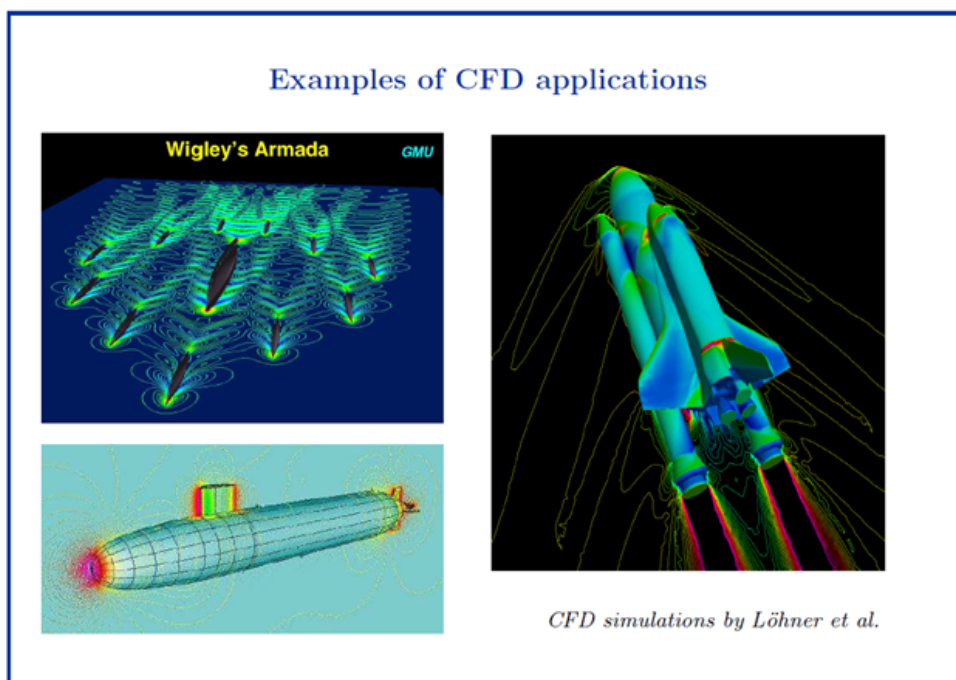
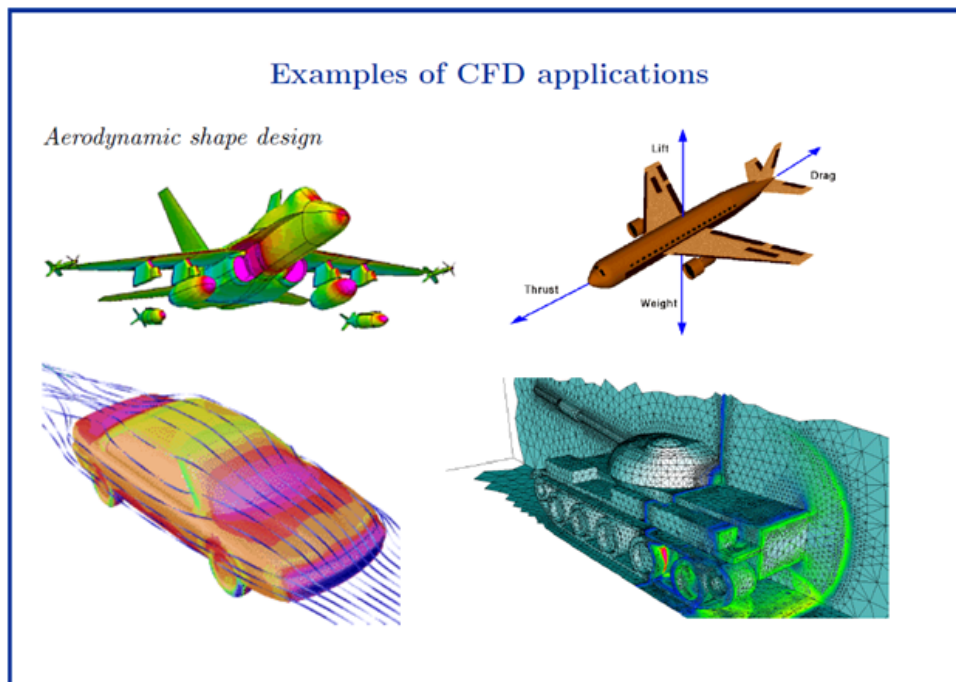
Для ефективного чисельного моделювання складних фізичних процесів система основних рівнянь, яка описує фізичний процес, повинна насамперед досить адекватно його описувати і мати ефективні обґрунтовані чисельні методи розв'язування. Обґрунтування чисельних методів полягає у встановленні існування розв'язку, оцінки його похибки, обчислювальної стійкості алгоритму, його збіжності до точного розв'язку, консервативності, дисипативності, дисперсності та ін.

Отже, обчислювальна гідродинаміка є окремою дисципліною, відмінною від експериментальної й теоретичної гідродинаміки, що й доповнює їх. Вона має власні методи, специфічні труднощі й окрему сферу застосування, відкриваючи нові перспективи для вивчення фізичних процесів.

## 1.1 Використання обчислювальної гідродинаміки

- Аерокосмічна промисловість: аеродинаміка, дизайн крив і лопат, реактивних снарядів і ракет, пасажирських кабін;
- Автомобілебудування: внутрішнє згоряння, збільшення комфорту пасажирів;
- Біологія: дослідження польоту птахів і комах, переміщення риб;
- Біомедицина: серцеві клапани, гідродинаміка кровоносних судин, фільтри й респіратори;
- Будівельна індустрія: проектування мостів, надбудов будинків, великих конструкцій, очищення повітря в приміщеннях, вентиляція, кондиціонування;
- Хімічні технології: перемішування, поділ, хімічне реагування;
- Електроніка: охолодження електронних обладнань;
- Екологія й безпека: контроль промислових відходів і забруднень, протипожежна безпека, захист річкових і морських берегів;
- Кораблебудування: вітрове й хвильове навантаження, силові установки;
- Машинобудування: насоси, вентилятори, теплообмінники;
- Метеорологія: прогноз погоди;
- Океанографія: плину в ріках і океанах;
- Енергетика: бойлери, казани, топлення, посудини тиску, гідравлічні тракти ядерних реакторів;
- Спортивна промисловість: дизайн гоночних автомобілів, яхт і байдарок, велосипедних шоломів, плавальних окулярів, м'ячів для тенісу й гольфа й т.п.
- Турбомашинобудування: турбіни, гідротрансформатори.

### 1.1.1 Приклади використання



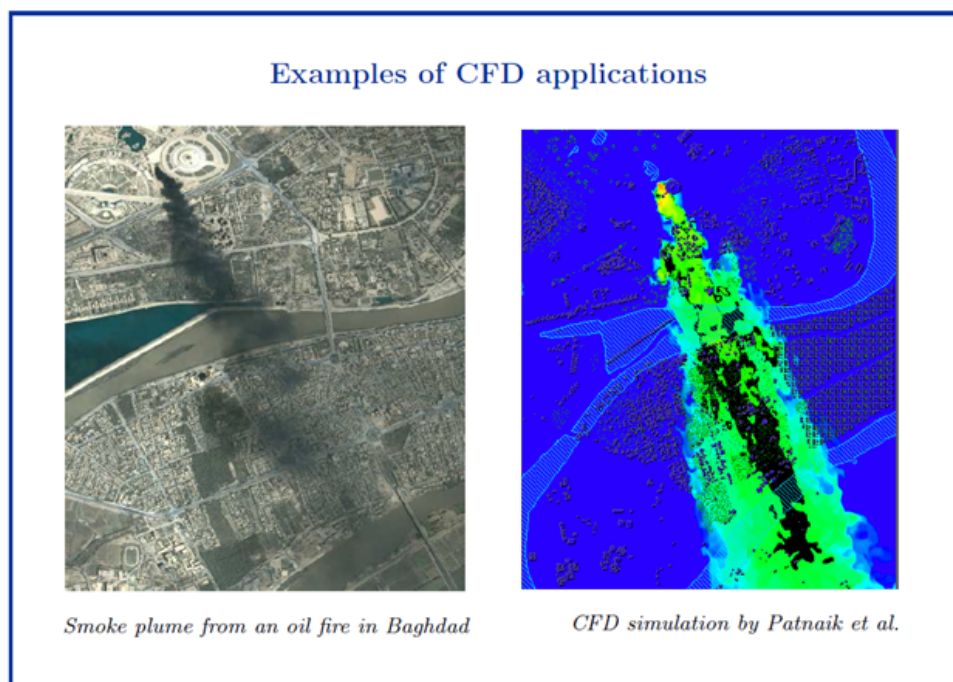


Рис. 2: приклади використання обчислювальної гідродинаміки

## 1.2 Короткий історичний огляд

- 1910 р. Л. Річардсон — ітераційні методи розв'язку рівняння Лапласа, бігармонічного рівняння й інших рівнянь, уперше застосував чисельні методи до такої практичної задачі великого масштабу, як визначення напруг у кам'яній дамбі.
- 1918 р. Лібман вдосконалив метод за рахунок використання “нових” значень у вузлах, як тільки вони обчислені.
- 1928 р. Чисельний розрахунок гіперболічних рівнянь; метод характеристик; необхідна умова стійкості Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ) (число Куранта повинне бути менше одиниці) справедливо для рівнянь гідродинаміки як у лагранжевих, так і в ейлерових змінних; з'явилася класична робота Куранта, Фрідрікса й Леві, що визначила напрямок практичного одержання скінченно-різницевого розв'язків у наступні роки.
- 1933 р. Перший чисельний розв'язок рівнянь у частинних похідних для задач гідродинаміки в'язкої рідини було дано Томом в 1933 р.
- 1938 р. Шортлі й Уеллер розробили вдосконалений варіант методу Лібмана, а також уперше точно визначили й досліджували швидкість збіжності.
- 1946–1948 рр. Саусвелл і Фокс розробили схеми верхньої й нижньої релаксації.
- 1955 р. Аллен і Саусвелл застосували метод релаксації Саусвелла для розрахунків вручну обтікання циліндра в'язкою нестислою рідиною. Були отримані чисельно стійкі розв'язки при числі Рейнольдса, рівному 1000, що перевищує фізичну межу стійкості.



- 1950 р. Франкел (і в 1954 р. незалежно від нього Янг) розробили метод, який згодом став називатися методом послідовної верхньої релаксації (назву запропонував Янг у 1954) або методом оптимальної верхньої релаксації. Франкел помітив також аналогію між ітеративним розв'язком еліптичних рівнянь і розв'язком кроками за часом параболічних рівнянь, що мало важливі наслідки.
- 1953 р. Дюфорт і Франкел — схема “чехарда” для параболічних рівнянь, яка, як і неявні схеми методу напрямків, що чергуються.
- 1955–1956 рр. схеми методу змінних напрямків (Пісмен, Дуглас й Решфорд),
- 1957 р. У першій монографії Ріхтмайєра, що була вагомим внеском у розвиток одно-мірної нестационарної гідродинаміки, було наведено понад 10 чисельних схем. У багатомірному випадку першим неявним методом був метод Кранка-Ніклсона, опублікований в 1947 р., що й вимагав ітерацій на кожному часовому шарі.
- фон Нейман (Лос-Аламос під час II світової війни) — критерій стійкості параболічних скінченно-різницевого рівнянь; метод дослідження лінеаризованої системи.

### 1.2.1 Гіперболічні рівняння

- 1960 р. схема Лакса-Вендроффа.
- 1963 р. схема Ріхтмайєра.
- 1964 р. методи PIC (метод часток в комірках), EIC (метод вибуху в гніздах), розроблені Мадером, розмазування стрибків досягається за рахунок уведення кінцевого числа часток, що розраховуються.

### 1.2.2 Двокрокові методи

- Саульєв В. К. запропонував двокроковий безумовно стійкий алгоритм, в якому в усіх просторових точках сітки на часовому кроці використовується явна схема, а на наступному кроці неявна.
- Ідею двокрокового явно-неявного чисельного “hopscotch” методу, в якому, крім того, тип схем чергується і в просторових точках сітки, запропоновано Шелдоном для ітераційного розв'язування рівняння Пуассона.
- Скала і Гордон використали цю ідею для розв'язування задачі нестационарного обтікання кругового циліндра.
- Гурлі узагальнив її для нестационарного рівняння теплопровідності, довів стійкість.
- В 1987 р. Грищенко О. Ю розробив двокрокові-симетризовані алгоритми (ДС-алгоритми), поширивши ідею “hopscotch” методу на параболізовані лінійні і нелінійні задачі течії в'язкої рідини, переносу; для систем рівнянь першого порядку та систем газової динаміки, а також системи рівнянь Нав'є-Стокса. Ці алгоритми не потребують обернення матриці системи сіткових рівнянь.

### 1.2.3 Грищенко Олександр Юхимович (1946–2016)

- з 1971 р. працював на кафедрі обчислювальної математики, проф., д.ф.-м.н.
- Опублікував понад 200 наукових та науково-методичних праць
- Був членом спеціалізованої вченої ради із захисту докторських дисертацій КНУ імені Тараса Шевченка, членом редакційної колегії “Журналу обчислювальної та прикладної математики” та головним редактором серії “Прикладна математика” цього ж журналу.
- Основні напрямки теоретичних досліджень пов’язані з
  - проблемами побудови чисельних методів розв’язування крайових задач,
  - чисельного моделювання процесів динаміки та кінетики рідини, газу та плазми,
  - питаннями конструювання різницевих схем та чисельних алгоритмів із заданими властивостями,
  - розробкою чисельних методів, ефективних при розв’язуванні великих задач на багатопроцесорних комп’ютерних системах.
- Результати цих досліджень впроваджувалися:
  - при розрахунку та проектуванні фрагменту підземної частини насосної станції каналу Дніпро-Донбас
  - моделюванні процесів очищення промислових стоків,
  - моделюванні робочих середовищ газодинамічних лазерів високої потужності та в інших прикладних проблемах.
- Нагороди:
  - У 1976 році за цикл робіт став лауреатом Премії імені М. Островського ЦК ЛКСМ України в галузі науки, техніки та виробництва.
  - У 1978 році нагороджений дипломом третього ступеня МВССО України.
  - У 2013 році премією Імені Тараса Шевченка Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
  - У 2015 році Почесною Грамотою Президії академії педагогічних наук України. Також нагороджений медаллю на честь 1500 річчя міста Києва.

## 1.3 Апроксимація, збіжність і стійкість розв'язків

### 1.3.1 Апроксимація

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df}{dx}. \quad (1.1)$$

**Означення 1.8.** Збіжна скінченно-різницева схема математично визначається як схема, що дає скінченно-різницевий розв'язок, який збігається до розв'язку диференціального рівняння при прямуванні розміру комірки сітки ( $\Delta x$ ) до нуля.

**Зауваження 1.9** — Під границею тут розуміється границя всього розв'язку диференціального рівняння, а не просто його окремих членів (похідних).

**Означення 1.10.** Остання властивість називається *апроксимацією* (Лакс й Ріхтмайер [1956]).

### 1.3.2 Стійкість

о'Браян, Хаймен і Каплан [1950], а також Едді [1949] визначають стійкість виходячи з росту або загасання помилок округлення. Лакс й Ріхтмайер [1956] дають більш загальне визначення стійкості, установлюючи границю, до якої може зростати будь-який компонент початкових даних у процесі чисельного розрахунків.

#### Теорема 1.11 (Лакса)

Для системи лінійних рівнянь наявність стійкості є необхідною й достатньою умовою збіжності скінченно-різницевої схеми, що апроксимує систему диференціальних рівнянь.

#### Теорема 1.12 (критерій стійкості фон Неймана)

Вимагає, щоб найбільше власне значення матриці переходу ітераційної схеми було менше, чим одиниця мінус члени порядку помилки апроксимації.

Лакс й Ріхтмайер [1956] показали, що ця умова є достатньою для стійкості лінійної системи з постійними коефіцієнтами й що у випадку, коли матриця переходу задовольняє одному із трьох наборів властивостей, виконання цього критерію є достатнім також для збіжності.

**Зауваження 1.13** — Дослідження лінійних рівнянь і рівнянь із постійними коефіцієнтами недостатньо для встановлення нестійкості. Визначення стійкості є неадекватним, оскільки для достатньо великого числа Рейнольдса при застосуванні стійких схем можуть виникати осциляції, що не мають нічого спільного із

точним розв'язком.

## 1.4 Рівняння руху нестисливої рідини в декартовій системі координат

### 1.4.1 Рівняння руху для фізичних змінних

**Означення 1.14.** Рівняння Нав'є-Стокса, що описують рух нестислої ньютонівської в'язкої рідини:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}, \nabla \vec{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{U} + \vec{F}, \quad (1.2)$$

або, у 2-вимірному випадку:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + f_x, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + f_y, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (1.5)$$

**Зауваження 1.15** — Риски над буквами означають, що відповідні величини є розмірними. Рівняння записані для фізичних змінних — складових швидкості  $u$ ,  $v$  і тиску  $p$ ; властивості рідини характеризуються щільністю  $\rho$  і кінематичним коефіцієнтом в'язкості  $\nu$ .

Ці рівняння засновані на наступних фізичних законах: рівняння 1.3 і 1.4 є проєкціями векторного рівняння кількості руху  $F = ma$  (другого закону Ньютона), причому сили в'язкості пов'язані зі швидкістю деформацій лінійним ньютонівським законом для дотичних напружень. Так, з другого закону Ньютона до елементарного об'єму рідини  $\delta V$  масою  $\delta m$  маємо:

$$\delta m \frac{d\vec{U}}{dt} = \delta m \nu \Delta \vec{U} - \delta V \nabla P + \vec{F} \delta m. \quad (1.6)$$

У лівій частині формули — добуток маси  $\delta m$  елементарного об'єму рідини і її прискорення ( $\vec{U}$  — швидкість,  $t$  — час). У правій частині — діючі на цей обсяг сили: сила в'язкого тертя ( $\nu$  — кінематична в'язкість), сила, що виникає через різницю тисків  $P$ , та інші сили  $\vec{F} \delta m$ .

**Зауваження 1.16** — Рівняння 1.5 виражає закон збереження маси.

**Означення 1.17.** Наведені рівняння записані в *ейлеровій* системі координат, тобто в нерухливій системі, щодо якої рухається рідина.

#### 1.4.2 Рівняння переносу вихору й рівняння для функції струму у випадку плоских течій

З рівнянь 1.3 і 1.4 можна виключити тиск, продиференціювавши перше з них по  $y$ , а друге по  $x$ . Визначаючи *вихор* як

$$\bar{\zeta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}, \quad (1.7)$$

одержуємо *рівняння переносу вихору*, що має параболічний тип:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{t}} &= -\bar{u} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}} - \bar{v} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}^2} \right) = \\ &= -\vec{U} \cdot (\nabla \bar{\zeta}) + \bar{\nu} \Delta \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Використовуючи *субстанціональну похідну* (Лагранжа)

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \varphi, \quad (1.9)$$

це рівняння можна представити так:

$$\frac{D\bar{\zeta}}{Dt} = \vec{U} \Delta \bar{\zeta} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} = \bar{u}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} = -\bar{v}, \quad (1.11)$$

рівняння 1.7 можна записати як рівняння Пуассона, що має еліптичний тип:

$$\Delta \bar{\varphi} = \bar{\zeta}. \quad (1.12)$$

#### 1.4.3 Консервативна форма рівнянь

Рівняння нерозривності 1.5

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (1.13)$$

можна записати через вектор повної швидкості  $\vec{V}$  в наступному виді:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (1.14)$$

Використовуючи відому тотожність векторної алгебри

$$\nabla \cdot (\vec{V} \bar{\zeta}) = \vec{V} \cdot (\nabla \bar{\zeta}) + \bar{\zeta} (\nabla \cdot \vec{V}) = \vec{V} \cdot (\nabla \bar{\zeta}) \quad (1.15)$$

одержуємо з 1.8 консервативну форму рівняння переносу вихору або *дивергентну форму*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{t}} &= -\nabla \cdot (\vec{V} \bar{\zeta}) + \bar{\nu} \Delta \bar{\zeta} = \\ &= -\frac{\partial (\bar{u} \bar{\zeta})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial (\bar{v} \bar{\zeta})}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

#### 1.4.4 Рівняння в безрозмірних змінних

Нехай  $\bar{L}$  — характерна довжина, а  $\bar{U}_0$  — характерна швидкість задачі.

##### Приклад 1.18

Якщо  $\bar{L}$  — довжина хорди профілю крила й  $\bar{U}_0$  — швидкість потоку, що набігає, то  $\bar{L}/\bar{U}_0$  — час, за який частка потоку, що набігає, проходить увесь профіль.

Уведемо наступні безрозмірні величини:

$$u = \frac{\bar{u}}{\bar{U}_0}, \quad v = \frac{\bar{v}}{\bar{U}_0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{L}}, \quad y = \frac{\bar{y}}{\bar{L}}, \quad \zeta = \frac{\bar{\zeta}}{\bar{U}_0/\bar{L}}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{L}/\bar{U}_0}. \quad (1.17)$$

Тоді рівняння 1.16 і 1.12 приймуть вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{V}\zeta) + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \zeta, \quad (1.18)$$

$$\Delta \varphi = \zeta, \quad (1.19)$$

де  $\text{Re}$  — безрозмірний параметр, *число Рейнольдса*,

$$\text{Re} = \bar{U}_0 \bar{L} / \bar{\nu}. \quad (1.20)$$

Таким чином, для будь-якого заданого набору граничних умов течія характеризується одним безрозмірним параметром — числом Рейнольдса.

Для течій з більшими числами Рейнольдса ( $\text{Re} \gg 1$ ) конвективний член у рівнянні (1.18) превалює над членом в'язкої дифузії, і в цьому випадку величина  $\bar{L}/\bar{U}_0$  буде являти собою інтервал часу, що фактично характеризує течію. Тоді, наприклад, умова для безрозмірного часу  $t = \bar{t}/(\bar{L}/\bar{U}_0)$  буде підходящим критерієм для досягнення стаціонарного стану плинину. Однак течія з малими числами Рейнольдса ( $\text{Re} \ll 1$ ) краще характеризуються безрозмірним “дифузійним” часом. Визначаючи такий безрозмірний час як

$$t' = \bar{t} \bar{\nu} / \bar{L}^2, \quad (1.21)$$

а інші безрозмірні величини так само, як в 1.17, одержуємо для функції струму те ж саме рівняння Пуассона 1.19, але рівняння переносу вихору при цьому набуває вигляду

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t'} = -\text{Re} \nabla \cdot (\vec{V}\zeta) + \Delta \zeta. \quad (1.22)$$

Величина  $\bar{\nu}/\bar{L}^2$  має розмірність часу. Для того щоб оцінити її фізичну значимість як масштабу часу в завданнях з переважною дифузією, досить помітити, що в межах при  $\text{Re} \rightarrow 0$  рівняння 1.18 стає сингулярним, тоді як рівняння 1.22 поводить ся при цьому добре, а конвективний член зникає. Аналогічно, рівняння 1.18 не має особливості при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ , але при цьому зникає дифузійний член 1.22.

### 1.4.5 Одновимірні модельні рівняння переносу

Рівняння переносу вихору як у неконсервативній, так і в консервативній формі 1.18 є параболічним за часом, містять дві незалежні просторові змінні й пов'язані з еліптичним рівнянням Пуассона для функції гока 1.19 через нелінійні конвективні члени.

- 1) Лінеаризоване одновимірне рівняння з конвективним і дифузійним членами (Аллен [1968], У. Кроулі [1968]), записане або в консервативній формі

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (1.23)$$

або в неконсервативній формі

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \quad (1.24)$$

У цих рівняннях  $\zeta$  моделює вихор або яку-небудь іншу конвективну й дифузійну величину,  $\alpha$  — узагальнений коефіцієнт дифузії, відповідний до величини  $1/\text{Re}$  у рівнянні переносу вихору,  $u$  — лінеаризована швидкість конвекції, що не залежить від  $x$ , хоча рівняння 1.23 може бути використане й для вивчення ефектів стійкості у випадку, коли  $u = u(x)$ .

- 2) Рівняння Бюргерса (Бюргерс [1948], Хопф [1950], Родін [1970]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.25)$$

де  $u$  розглядається як узагальнена швидкість. Це рівняння зберігає нелінійність рівняння переносу вихору й рівнянь Нав'є-Стокса. Завдяки своїй нелінійності воно може служити модельним рівнянням для вивчення як турбулентності, так і ударних хвиль.

Еквівалентна консервативна форма цього рівняння така:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.26)$$

Оскільки відомі деякі аналітичні розв'язки рівняння Бюргерса, воно може служити для демонстрації переваг консервативної форми скінченно-різницевого рівнянь,

## 1.5 Завдання для самостійної роботи

*Встановити дивергентність системи рівнянь Нав'є-Стокса, записаних у змінних функція току-вихор. Побудувати систему безрозмірювання для рівняння теплопровідності. Вказати умови, при яких дифузійне розповсюдження тепла переважає конвективне.*

## 2 Методи апроксимації диференціальних операторів. Основні властивості різницевих схем

Методи апроксимації диференціальних операторів: використання формули Тейлора, застосування інтерполяційних многочленів, інтегро-інтерполяційний метод та метод контролю об'єму. Основні властивості різницевих схем: консервативність. [1, 3]

### 2.1 Деякі основні скінченно-різницеві формули

#### 2.1.1 Розкладання в ряди Тейлора

Основні скінченно-різницеві формули для частинних похідних можуть бути отримані за допомогою розкладання в ряди Тейлора. Використана прямокутна сітка показана на малюнку:

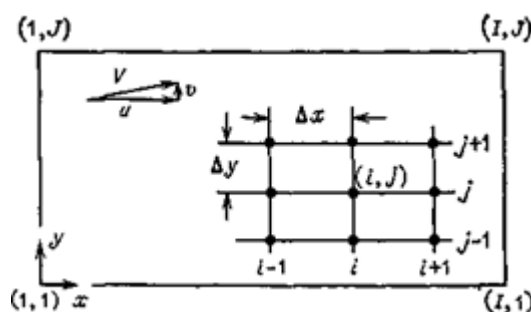


Рис. 3: Прямокутна скінченно-різницева сітка

Нижні індекси  $i$  й  $j$  ставляться до  $x$  та  $y$ , а верхній індекс  $n$  відповідає часовому шару. Кроки сітки в напрямках  $i$  і  $j$  позначаються через  $\Delta x$  і  $\Delta y$  відповідно. (Для простоти  $\Delta x$  й  $\Delta y$  вважаються постійними.)  $f$  — деяка функція.

Форми односторонніх різницевих виразів для першої похідної  $\frac{\partial f}{\partial x}$  можна вивести в такий спосіб: припускаємо неперервність похідних і розкладаємо  $f$  в ряд Тейлора в околі точки  $(i, j)$ . Верхній індекс (часовий) для простоти опускаємо. Тоді

$$\begin{aligned} f_{i+1,j} &= f_{i,j} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} (x_{i+1,j} - x_{i,j}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} (x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + \dots = \\ &= f_{i,j} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + o(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , одержуємо

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} - \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x + o(\Delta x),$$

або

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (2.2)$$



**Формула 2.1 (різницева апроксимація вперед)**

Позначимо скінченно-різницевий аналог  $\frac{\partial f}{\partial x}$  через  $\frac{\delta f}{\delta x}$ . Тоді для  $\frac{\delta f}{\delta x}$  при різницевій апроксимації вперед одержуємо вираз

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}, \quad (2.3)$$

з похибкою апроксимації порядку  $\Delta x$ , тобто з першим порядком точності.

**Формула 2.2 (різницева апроксимація назад)**

Аналогічно, розкладаючи  $f_{i-1,j}$  в околі точки  $(i, j)$ , одержуємо для  $\frac{\delta f}{\delta x}$  вираз при різницевій апроксимації назад:

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad (2.4)$$

який також має перший порядок точності.

Центральна (симетрична) різницева апроксимація  $\frac{\delta f}{\delta x}$  виходить як різниця розкладів

$$\begin{aligned} f_{i+1,j} = f_{i,j} &+ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \\ &+ \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^4 + o(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (2.5)$$

та

$$\begin{aligned} f_{i-1,j} = f_{i,j} &- \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 - \\ &- \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^4 - o(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Справді, віднімаючи (2.6) від (2.5), одержуємо

$$f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = 2 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{3} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + o(\Delta x^4).$$

Розв'язуючи відносно  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , маємо

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^2 + o(\Delta x^4) = \\ &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Формула 2.3** (центральна різницева апроксимація)

Таким чином, центральна різницева апроксимація дає вираз

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}. \quad (2.8)$$

з похибкою апроксимації порядку  $\Delta x^2$ , тобто із другим порядком точності.

**Зауваження 2.4** — Аналогічно можна одержати вирази для похідних по  $y$  і  $t$ . Наприклад, центрально-різницевий аналог  $\frac{\partial f}{\partial t}$  має вигляд

$$\left. \frac{\delta f}{\delta t} \right|_{i,j}^n = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (2.9)$$

Виведемо тепер центрально-різницевий аналог  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ . Додаючи (2.5) і (2.6), маємо

$$f_{i+1,j} + f_{i-1,j} = 2f_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{12} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^4 + o(x^4). \quad (2.10)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ , одержуємо

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{1}{12} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^2 + o(x^2). \quad (2.11)$$

**Формула 2.5** (центральна різницева апроксимація другої похідної)

Звідси для  $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$  маємо

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}. \quad (2.12)$$

із другим порядком точності.

Також виконуються наступні формули:

$$\left. \frac{\delta g}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{\Delta x} \quad (2.13)$$

та

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}. \quad (2.14)$$

**Вправа 2.1.** Доведіть ці формули.

**Зауваження 2.6** — Мішана похідна  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  визначена формулою (2.14) задовольняє відомій тотожності  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  яка справджується для усіх двічі неперервно диференційовних функцій. Завжди бажано, щоб скінченно-різницеві рівняння добре моделювали якісну поведінку диференціальних рівнянь.

Комбінації отриманих скінченно-різницевих виразів для частинних похідних можна використовувати для написання скінченно-різницевих формул диференціальних рівнянь у частинних похідних. Наприклад, рівняння Лапласа

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

буде мати різницевий аналог

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0,$$

або

$$f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2(1 + \beta^2)f_{i,j} + \beta^2(f_{i,j+1} + f_{i,j-1}) = 0, \quad (2.15)$$

де  $\beta$  — відношення розмірів кроків,  $\beta = \Delta x / \Delta y$ . Це так званий п'ятиточковий аналог рівняння Лапласа. При  $\beta = 1$  виходить відоме рівняння

$$f_{i,j} = \frac{1}{4}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}), \quad (2.16)$$

яке означає, що  $f_{i,j}$  є середнім значенням  $f$  у чотирьох сусідніх точках. Ці формули схематично зображені на наступному малюнку:

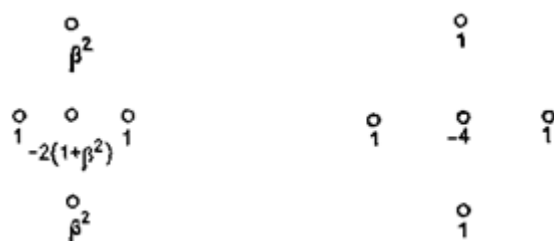


Рис. 4: Схематичне зображення п'ятиточкового аналога рівняння Лапласа

**Зауваження 2.7** — Схема ліворуч відповідає довільному значенню  $\beta$ , праворуч —  $\beta = 1$ .

Використовуючи для апроксимації просторових похідних і похідної за часом різницеві вирази другого порядку точності, лінійне модельне рівняння (1.24) можна записати у вигляді

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (2.17)$$

що дозволяє явно виразити  $\zeta_i^{n+1}$  через значення змінних на попередніх часових шарах. Однак така схема в дійсності виявляється неприйнятною. Для всіх  $\alpha > 0$  і всіх можливих  $\Delta t > 0$  ця схема чисельно нестійка, тобто приводить до виникнення хаотичних розв'язків, що не мають відношення до істинного розв'язку диференціального рівняння. Така поведінка підкреслює відмінність між точними скінченно-різницевиими аналогами для похідних і точним аналогом диференціального рівняння.

Якщо замість центральних різниць у нестационарному члені використовувати різниці вперед за часом, то вийде різницевий аналог лінійного модельного рівняння, що має другий порядок точності по просторовій змінній і лише перший за часом

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n}{\Delta x^2}, \quad (2.18)$$

**Означення 2.8.** Цю схему з однобічними різницями вперед за часом і центральними (симетричними) різницями по просторовій змінній іноді називають схемою FTCS (від *eng.* Forward-Time Central-Space).

Надалі буде показано, що ця схема стійка (принаймні при деяких умовах, накладених на  $\Delta t$ ,  $u$ ,  $\alpha$  і  $\Delta x$ ). Але перш ніж приступити до дослідження стійкості, розглянемо деякі інші питання, пов'язані з скінченно-різницевиими рівняннями.

### 2.1.2 Поліноміальна апроксимація

Інший метод одержання скінченно-різницевих виразів заснований на застосуванні апроксимуючої аналітичної функції з вільними параметрами, яка будується за значеннями у вузлах сітки й потім аналітично диференціюється. Це звичайний метод знаходження похідних за експериментальними даними. В ідеалі вигляд апроксимуючої функції повинен визначатися наближеним аналітичним розв'язком, однак звичайно в якості апроксимуючих функцій використовуються поліноми. Ми продемонструємо даний метод на прикладі параболічної апроксимації.

Припустимо, що значення функції  $f$  задані в точках  $i-1$ ,  $i$  та  $i+1$ , і проведемо параболічну апроксимацію функції:

$$f(x) = a + bx + cx^2, \quad (2.19)$$

причому для зручності за початок координат ( $x = 0$ ) приймемо точку  $i$ . Тоді рівняння (2.19), записане в точках  $i-1$ ,  $i$  та  $i+1$  відповідно, дасть

$$f_{i-1} = a - b\Delta x + c\Delta x^2, \quad f_i = a, \quad f_{i+1} = a + b\Delta x + c\Delta x^2. \quad (2.20)$$

Додаючи першу та третю рівності, одержуємо

$$c = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2\Delta x^2}, \quad (2.21)$$

а розв'язуючи їх відносно  $b$ , знаходимо

$$c = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (2.22)$$

У точці  $i$  значення першої похідної (2.19) буде

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i = [b + 2cx]_{x=0} = b, \quad (2.23)$$

а значення другої похідної

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_i = 2c. \quad (2.24)$$

Формули (2.23) і (2.24) з врахуванням (2.21) і (2.22) у точності збігаються з формулами (2.8) і (2.12) другого порядку із центральними різницями, отриманими розкладанням у ряд Тейлора. Якщо припустити, що  $f$  — поліном першого ступеня, тобто  $f = a + bx$ , то залежно від того, які значення використовуються для визначення  $a$  й  $b$ : значення  $f_i$  й  $f_{i+1}$  або  $f_i$  й  $f_{i-1}$  для  $\frac{\delta f}{\delta x}$  виходять формули з різницями вперед або назад відповідно. Очевидно, що при лінійній апроксимації  $f$  не можна одержати вирази для  $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ . Однак якщо використовувати поліном першого ступеня для побудови різницевого аналога перших похідних  $\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i+1/2}$  і  $\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i-1/2}$ , які відповідно представляються різницями вперед та назад, то для  $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$  вийде вираз, що збігається з виразом (2.12) із центральними різницями.

Різницеві формули для похідних більш високого порядку виводяться з використанням поліномів вищих порядків. Вирази, отримані за допомогою поліномів порядків вище другого, вже не ідентичні виразам, отриманим розкладаннями в ряди Тейлора, і в кожному випадку похибка апроксимації повинна перевірятися за допомогою розкладання в ряд Тейлора. В обчислювальній гідродинаміці метод поліноміальної апроксимації, як правило, застосовується тільки для обчислень значень похідних поблизу границь.

Тепер відзначимо недоліки поліноміальних апроксимацій вищого порядку, добре відомі фахівцям, що обробляють дані вимірів. Зі збільшенням порядку апроксимації вони стають чутливими до “шумів”, тобто до більш-менш випадково розподілених малих помилок у даних.

### Приклад 2.9

Так, поліном шостого ступеня, графік якого проходить через сім точок, точно розташованих на одній прямій, приводить до апроксимації у вигляді прямої, зображеної на мал. 5.а. Однак при додаванні до значень, що апроксимуються, шумових збурювань коефіцієнти полінома будуть уже визначатися цими перекрученими даними, і тоді аналітичне обчислення похідних у точці  $i$  може привести до абсурдних результатів, що можна побачити на мал. 5.б:

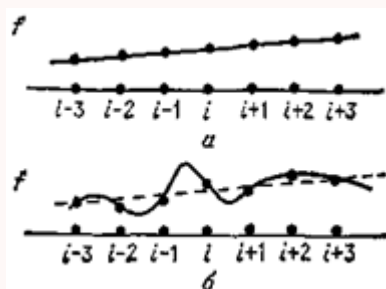


Рис. 5: Поліноміальна апроксимація шостого порядку

**Зауваження 2.10** — Квадратична апроксимація не може відобразити наявність точки перегину в розглянутих даних, тобто точки, де  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ . Із цієї причини для аналізу наявних даних може бути виправдане використання поліноміальних апроксимацій третього порядку. (Часто використовуються сплайн-функції, що гарантують неперервність похідних при переході від однієї вузлової точки до іншої.) У нашому випадку рівняння, що описують розглянуте фізичне явище, не залежать від наявності точки перегину або від третьої похідної, тому немає необхідності зупинятися на цьому питанні.

#### 2.1.3 Інтегральний метод

В інтегральному методі потрібно приблизно задовольнити основним рівнянням, записаним в інтегральній, а не в диференціальній формі. Тут зручніше використовувати для просторової координати нижній індекс  $x$ , а для часу верхній індекс  $t$  замість  $i$  та  $n$  відповідно. Запишемо лінійне модельне рівняння в консервативній формі:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

Проінтегруємо це рівняння за часом від  $t$  до  $t + \Delta t$  і по просторовій області  $R$  від  $x - \Delta x/2$  до  $x + \Delta x/2$ , як показано на малюнку:

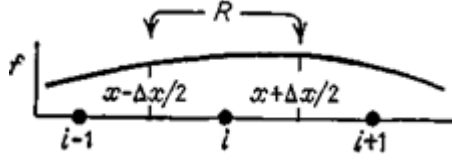


Рис. 6: Область інтегрування  $R$  для інтегрального методу.

Оскільки порядок інтегрування по  $t$  і  $x$  неістотний (теорема Фубіні), виберемо його так, щоб можна було провести одне точне інтегрування, а саме

$$\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt \right] dx = - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} dx \right] dt + \\ + \alpha \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx \right] dt. \quad (2.26)$$

Виконаємо інтегрування виразів, записаних у квадратних дужках:

$$\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [\zeta^{t+\Delta t} - \zeta^t] dx = - \int_t^{t+\Delta t} [(u\zeta)_{x+\Delta x/2} - (u\zeta)_{x-\Delta x/2}] dt + \\ + \alpha \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \right] dt. \quad (2.27)$$

Інтеграли, що залишилися, визначимо чисельно. За теоремою про середнє можна записати

$$\int_{z_1}^{z_1+\Delta z} f(z) dz \approx f(\bar{z})\Delta z,$$

де  $\bar{z} \in [z_1, z_1 + \Delta z]$ . Збіжність гарантується при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Взявши при наближеному обчисленні інтегралів у лівій частині рівняння (2.27) середню точку  $x$ , а в правій частині значення підінтегральних функцій при нижній межі, тобто при  $t$  (формула прямокутників), одержимо

$$[\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t] \Delta x = - [(u\zeta)_{x+\Delta x/2}^t - (u\zeta)_{x-\Delta x/2}^t] \Delta t + \\ + \alpha \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2}^t - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2}^t \right] \Delta t. \quad (2.28)$$

Похідні  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  можна знайти зі співвідношення

$$\zeta_{x+\Delta x}^t = \zeta_x^t + \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_x^t dx.$$

Звідси використовуючи теорему про середнє, одержуємо

$$\zeta_{x+\Delta x}^t = \zeta_x^t + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2}^t \Delta x.$$

або

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x+\Delta x/2}^t = \frac{\zeta_{x+\Delta x}^t - \zeta_x^t}{\Delta x}. \quad (2.29)$$

Значення  $(u\zeta)_{x+\Delta x/2}^t$  можна обчислити як середнє арифметичне:

$$(u\zeta)_{x+\Delta x/2}^t = \frac{1}{2} \left( (u\zeta)_x^t + (u\zeta)_{x+\Delta x}^t \right). \quad (2.30)$$

Аналогічний вираз має місце й для  $(u\zeta)_{x-\Delta x/2}^t$ .

Підставляючи (2.29) і (2.30) в (2.28), знаходимо

$$\begin{aligned} [\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t] \Delta x = & - \left[ \frac{1}{2}(u\zeta)_x^t + \frac{1}{2}(u\zeta)_{x+\Delta x}^t - \frac{1}{2}(u\zeta)_x^t - \frac{1}{2}(u\zeta)_{x-\Delta x}^t \right] \Delta t + \\ & + \alpha \left[ \frac{\zeta_{x+\Delta x}^t - \zeta_x^t}{\Delta x} - \frac{\zeta_x^t - \zeta_{x-\Delta x}^t}{\Delta x} \right] \Delta t. \end{aligned}$$

Розділивши останнє рівняння на  $\Delta x \Delta t$ , одержимо

$$\frac{\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t}{\Delta t} = - \frac{(u\zeta)_{x+\Delta x}^t - (u\zeta)_{x-\Delta x}^t}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{x+\Delta x}^t - 2\zeta_x^t + \zeta_{x-\Delta x}^t}{\Delta x^2}. \quad (2.31)$$

Переходячи до індексів  $i$  та  $n$ , бачимо, що рівняння (2.31) співпадає з рівнянням (2.18), виведеним за допомогою розкладань у ряди Тейлора.

**Зауваження 2.11** — У будь-якому методі існує велика довільність при виводі скінченно-різницевих рівнянь.

### Приклад 2.12

Якщо інтегрувати за часом не від  $t$  до  $t + \Delta t$ , а від  $t - \Delta t$  до  $\Delta t$ , а в якості середньої точки обрати  $t$ , то вийде рівняння (2.17). (Як уже було відзначено вище, це рівняння безумовне нестійке.)

**Зауваження 2.13** — Переваги інтегрального методу можна буде оцінити після того, як буде вивчена властивість консервативності. Відмінність між інтегральним методом і методом розкладання в ряди Тейлора найбільш чітко проявляється при використанні непрямокутних систем координат.

## 2.1.4 Метод контрольного об'єму

Метод контрольного об'єму для виводу скінченно-різницевих рівнянь дуже схожий на інтегральний метод, але більш фізичний по суті. Цей метод найбільше яскраво висвітлює процес “чисельного моделювання”. Найкращими прикладами такого підходу можуть служити широко відомий метод часток у гніздах (*eng. PIC*) і метод рідини в



гніздах (*eng.* FLIC), розвинені в Лос-Аламосській лабораторії (Еванс і Харлоу [1947]; Джентрі, Мартін і Далі [1966]).

Виберемо в просторі контрольний об'єм із центром у точці  $x$ , як показано на малюнку:

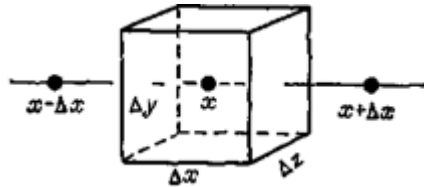


Рис. 7: Контрольний об'єм (КО) в точці  $x$

У якості значення  $\zeta$  у вузловій точці сітки будемо брати середнє значення цієї функції по контрольному об'єму (КО). Для питомої (тобто усередненої за об'ємом) величини  $\zeta$ , де  $\zeta$  можна тепер розглядати як будь-яку змінну величину, запишемо  $\zeta = \Gamma / \text{об'єм}$ .

Наприклад, якщо  $\zeta$  — щільність  $\rho$ , то  $\Gamma$  — повна маса, укладена в розглянутому контрольному обсязі із центром у точці  $x$ . Якщо  $\zeta$  — вихор, то  $\Gamma$  — циркуляція. Тепер запишемо словесне формулювання наступного закону збереження:

#### Закон 2.14

Повне збільшення величини  $\Gamma$  у КО = чистий приплив  $\Gamma$  у КО за рахунок конвекції + чистий приплив  $\Gamma$  у КО за рахунок дифузії.

Повне збільшення величини  $\Gamma = \xi \times (\text{об'єм})$  у КО за проміжок часу  $\Delta t$  рівно

$$\zeta|_x^{t+\Delta t} \times (\Delta x \Delta y \Delta z) - \zeta|_x^t \times (\Delta x \Delta y \Delta z).$$

Конвективний потік величини  $\Gamma$ , що втікає в КО через ліву грань за одиницю часу, становить

$$(u\zeta)_{x-\Delta x/2} \times (\text{площа лівої грані}) = (u\zeta)_{x-\Delta x/2} \times (\Delta y \Delta z),$$

де  $u$  може бути змінною, а значення функцій на грані  $x - \Delta x/2$ , які ще треба визначити, повинні бути деякими середніми за  $\Delta t$ . Виходячи із цієї величини вхідного конвективного потоку за одиницю часу, повний конвективний потік величини  $\Gamma$  у КО за проміжок часу  $\Delta t$  через грань  $x - \Delta x/2$  можна записати так:

$$(u\zeta)_{x-\Delta x/2} \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Аналогічно, повний конвективний потік  $\Gamma$ , що виходить з КО через  $x + \Delta x/2$ , буде рівний

$$(u\zeta)_{x+\Delta x/2} \Delta y \Delta z \Delta t,$$

а чистий приріст  $\Gamma$  у КО виходить як різниця сумарного потоку, що втікає, і сумарного потоку, що витікає, тобто

$$\left[ (u\zeta)_{x-\Delta x/2} - (u\zeta)_{x+\Delta x/2} \right] \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Щоб обчислити потік у КО за рахунок дифузії, необхідно мати закон для швидкості дифузії. Найпростіший такий закон (що узгодиться з рівнянням переносу вихору) є лінійним і говорить, що дифузійний потік величини  $\zeta$  за одиницю часу, який ми назвемо  $q$ , пропорційний градієнту  $\zeta$  (закон Фіка):

$$q = -\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Тут мінус указує на те, що збільшення  $\zeta$  в напрямку  $x$  викликає дифузію в протилежному напрямку.

Дифузійний потік, що втікає в КО через ліву грань за одиницю часу, рівний

$$q|_{x-\Delta x/2} \Delta y \Delta z = -\alpha \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x-\Delta x/2} \Delta y \Delta z,$$

а потік, що впливає з КО через праву грань за одиницю часу становить

$$q|_{x+\Delta x/2} \Delta y \Delta z = -\alpha \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x+\Delta x/2} \Delta y \Delta z,$$

Тут знову значення на гранях  $x \pm \Delta x/2$  становить собою деякі середні за час  $\Delta t$ , які ще повинні бути визначені. Величина потоку в КО за рахунок дифузії за проміжок часу  $\Delta t$  рівна

$$\alpha \Delta y \Delta z \Delta t \left[ \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x+\Delta x/2} - \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x-\Delta x/2} \right].$$

Тоді закон 2.14 можна переписати наступним чином:

$$\begin{aligned} \zeta|_x^{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z - \zeta|_x^t \Delta x \Delta y \Delta z &= \left[ (u\zeta)_{x-\Delta x/2} - (u\zeta)_{x+\Delta x/2} \right] \Delta y \Delta z \Delta t + \\ &+ \alpha \Delta y \Delta z \Delta t \left[ \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x+\Delta x/2} - \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x-\Delta x/2} \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Розділивши на  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ , одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[ \zeta|_x^{t+\Delta t} - \zeta|_x^t \right] &= \frac{1}{\Delta x} \left[ (u\zeta)_{x-\Delta x/2} - (u\zeta)_{x+\Delta x/2} \right] + \\ &+ \frac{\alpha}{\Delta x} \left[ \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x+\Delta x/2} - \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x-\Delta x/2} \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Як і в інтегральному методі, при подальшому виводі скінченно-різницевого виразу з'являється деяка свобода дій при визначенні значень функцій на границях

об'єму. У якості значень на границі об'єму можна обрати середнє арифметичне значення в сусідніх вузлах у момент часу  $n$ ; тоді

$$(u\zeta)_{x\pm\Delta x} = \frac{1}{2} \left[ (u\zeta)_{x+\Delta x}^n + (u\zeta)_x^n \right]$$

і градієнти

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x\pm\Delta x/2} = \left. \frac{\delta \zeta}{\delta x} \right|_{x\pm\Delta x/2}^n$$

можна обчислити за допомогою центральних різниць:

$$\left. \frac{\delta \zeta}{\delta x} \right|_{x\pm\Delta x/2}^n = \frac{\zeta_{x\pm\Delta x}^n - \zeta_x^n}{\Delta x}.$$

У результаті рівняння (2.33) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[ \zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t \right] = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{2} \left[ (u\zeta)_{x+\Delta x}^n + (u\zeta)_x^n \right] - \frac{1}{2} \left[ (u\zeta)_{x-\Delta x}^n + (u\zeta)_x^n \right] \right) + \\ + \frac{\alpha}{\Delta x} \left[ \frac{\zeta_{x+\Delta x}^n - \zeta_x^n}{\Delta x} - \frac{\zeta_{x-\Delta x}^n - \zeta_x^n}{\Delta x} \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

або

$$\frac{\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t}{\Delta t} = \frac{(u\zeta)_{x+\Delta x}^n - (u\zeta)_{x-\Delta x}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{x+\Delta x}^n - 2\zeta_x^n + \zeta_{x-\Delta x}^n}{\Delta x^2}. \quad (2.35)$$

Якщо повернутися до індексів  $i$  та  $n$ , то це рівняння збіжиться з отриманим раніше рівнянням (2.18).

У такий спосіб видно, що всі чотири методи виводу скінченно-різницевого аналога диференціальних рівнянь у частинних похідних — розкладання в ряд Тейлора, метод поліноміальної апроксимації, інтегральний метод і метод контрольного об'єму — можуть привести до однакових різницевого виразів. Це обнадіює й зміцнює довіру до всіх цих методів. Але в кожному з них є деяка свобода дій, так що вибір методу для виводу скінченно-різницевого аналога диференціального рівняння визначає цей аналог не єдиним способом. Насправді, існує багато аналогів. Незважаючи на те що більшість із них різняться у незначних деталях, вони можуть сильно відрізнятися по своїй поведінці. Одним з дивних аспектів обчислювальної гідродинаміки є наявність великої кількості правдоподібних схем, які, однак, не працюють, як, наприклад, було зазначено для рівняння (2.17). Це справедливо як для основних (тобто призначених для розрахунків внутрішніх точок) різницевого схем, так і для схем, призначених для розрахунків граничних точок.

Перевага цього методу полягає в тому, що він заснований на макроскопічних фізичних законах, а не на використанні математичного апарата неперервних функцій. Особливо важливим це виявляється в тих випадках, коли мають справу з розрідженими газами або із динамікою нев'язкого газу з ударними хвилями. У цих випадках диференціальні рівняння не мають усюди неперервних розв'язків, які можна було б у кожній крапці представити рядами Тейлора. Однак маса, наприклад, все-таки

зберігається, і конвективна частина рівняння (2.35) як і раніше залишається справедливою. Але навіть і в тих випадках, коли неперервні розв'язки існують, у методі контрольного об'єму увага зосереджується на фактичному виконанні фізичних законів макроскопічно, а не тільки при  $\Delta x$  і  $\Delta t$ , що прямують до нуля. Це лежить в основі поняття консервативності скінченно-різницевого методу, до обговорення якого ми переходимо.

## 2.2 Властивість консервативності

**Означення 2.15.** Скінченно-різницевий метод є *консервативним*, якщо він забезпечує виконання певних інтегральних законів збереження, справедливих для вихідних диференціальних рівнянь.

Розглянемо рівняння переносу вихору (1.18):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (V\zeta) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \zeta,$$

поклавши  $\frac{1}{\text{Re}} = \alpha$ ,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (V\zeta) + \alpha \nabla^2 \zeta, \quad (2.36)$$

Проінтегруємо це рівняння по деякій просторовій області  $R$ :

$$\int_R \frac{\partial \zeta}{\partial t} dR = - \int_R \nabla \cdot (V\zeta) dR + \int_R \alpha \nabla^2 \zeta dR. \quad (2.37)$$

Оскільки  $t$  не залежить від просторових змінних, маємо

$$\int_R \frac{\partial \zeta}{\partial t} dR = \frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dR. \quad (2.38)$$

Використовуючи формулу Гауса-Остроградського, одержуємо

$$\int_R \nabla \cdot (V\zeta) dR = \int_{\partial R} (V\zeta) \cdot \vec{n} ds, \quad (2.39)$$

де  $\partial R$  — границя  $R$ ,  $\vec{n}$  — одиничний вектор нормалі до поверхні (додатний напрямок відповідає зовнішній нормалі) і  $ds$  — диференціал довжини дуги границі  $\partial R$ . Аналогічно, за тією ж формулою

$$\int_R \alpha \nabla^2 \zeta dR = \alpha \int_{\partial R} (\nabla \zeta) \cdot \vec{n} ds, \quad (2.40)$$

Тоді рівняння (2.37) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dR = - \int_{\partial R} (V\zeta) \cdot \vec{n} ds + \alpha \int_{\partial R} (\nabla \zeta) \cdot \vec{n} ds. \quad (2.41)$$

Це рівняння констатує, що швидкість накопичення величини  $\zeta$  в області  $R$  дорівнює сумі конвективного й дифузійного притоків величини  $\zeta$  в  $R$  через  $\partial R$  за одиницю часу).

**Означення 2.16.** Вимога консервативності полягає у тотожному збереженні у скінченно-різницевій схемі цього інтегрального співвідношення.

Розглянемо одновимірне модельне рівняння для граничного випадку нев'язкої рідини ( $\alpha = 0$ ), яке випливає з рівняння (2.36) і має вигляд

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x}. \quad (2.42)$$

**Зауваження 2.17** — Якщо величину  $\zeta$  трактувати як масову густину, то рівняння (2.42) буде рівнянням нерозривності для стисливого середовища.

Використовуючи різниці вперед за часом і центральні різниці по просторовій змінній, можна записати скінченно-різницевий аналог рівняння (2.42) у вигляді

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u_{i+1}\zeta_{i+1} - u_{i-1}\zeta_{i-1}}{2\Delta x}$$

**Зауваження 2.18** — У правій частині тут і надалі опущено верхній індекс  $n$  оскільки він усюди однаковий.

Розглянемо тепер одновимірну область  $R$  (причому  $i$  змінюється від  $I_1$  до  $I_2$ ) і обчислимо суму  $\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i \Delta x$ , відповідну до інтеграла  $\frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta \, dR$  в рівнянні (2.41):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^n \Delta x \right] &= \sum_{i=I_1}^{I_2} \left( -\frac{u_{i+1}\zeta_{i+1} - u_{i-1}\zeta_{i-1}}{2\Delta x} \right) \Delta x = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=I_1}^{I_2} [(u\zeta)_{i-1} - (u\zeta)_{i+1}] = \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left( (u\zeta)_{I_1-1} + (u\zeta)_{I_1} \right) - \frac{1}{2} \left( (u\zeta)_{I_2} + (u\zeta)_{I_2+1} \right) = \\ &= (u\zeta)_{I_1-1/2} - (u\zeta)_{I_2+1/2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

**Зауваження 2.19** — Сумування в (2.43) відбулося за допомогою телескопічного методу.

Отримане рівняння показує, що швидкість накопичення величини  $\zeta$  в області  $R$  в точності рівна потоку величини  $\zeta$  в область  $R$  через границі  $I_1 - 1/2$  й  $I_2 + 1/2$  (це впливає також з рівняння (2.41) при  $\alpha = 0$ ). Таким чином, отриманий скінченно-різницевий аналог зберігає інтегральну властивість, яку виражає формула Остроградського-Гауса для диференціального рівняння, і ми будемо говорити, що цей аналог має властивість консервативності.

Властивість консервативності залежить як від використаної форми диференціального рівняння, так і від прийнятої скінченно-різницевої схеми.

### Приклад 2.20

Неконсервативна форма одновимірного модельного рівняння (1.24) при  $\alpha = 0$  така:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (2.45)$$

*Доведення.* Використовуючи ту ж схему, що й у попередньому прикладі, тобто різниці вперед за часом і центральні різниці по просторовій змінній, одержуємо

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -u_i^n \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (2.46)$$

Тоді суми, що відповідають (2.43)–(2.44), мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^n \Delta x \right] &= \sum_{i=I_1}^{I_2} \left( -u_i \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2\Delta x} \right) \Delta x = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=I_1}^{I_2} u_i (\zeta_{i-1} - \zeta_{i+1}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Але ця сума не може бути згорнута телескопічним методом! (за винятком частинного випадку, коли  $u_i = \text{const}$ ). Виходить, у цьому випадку скінченно-різницевий аналог виявляється не в змозі забезпечити виконання формули Остроградського-Гауса для диференціального рівняння.  $\square$

**Зауваження 2.21** — Тепер стає ясним зміст термінів “консервативна” і “дивергентна” форма рівняння (1.16).

У першому випадку консервативність забезпечується застосуванням методу контрольного об’єму при виводі скінченно-різницевих виразів. При використанні консервативної форми конвективний потік величини  $\zeta$ , що впливає через грань  $I_1 + 1/2$  із контрольного об’єму із центром у точці  $i$  за одиницю часу, становить  $(u_i \zeta_i + u_{i+1} \zeta_{i+1})/2$  і в точності рівний конвективному потоку, що втікає через ту ж грань у контрольний об’єм із центром у точці за одиницю часу. Як показано вище, у випадку неконсервативної форми це не мало б місця.

**Вправа 2.2.** Показати, що використання для  $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$  виразу (2.12) із центральними різницями при  $\alpha > 0$  забезпечує консервативність для дифузійних членів.

Ясно, що при  $\alpha > 0$  єдиний шлях забезпечити збереження сумарного потоку в загальному випадку (коли  $u$  є функцією просторової змінної) полягає в незалежному збереженні конвективних і дифузійних членів; у неодновимірному випадку необхідно забезпечити консервативність цих членів окремо по кожній просторовій змінній.

Важливість властивості консервативності легко зрозуміти на прикладі рівняння нерозривності для стисливого середовища. Розглянемо задачу про природну конвекцію в повністю замкненому сосуді з непроникними стінками. У початковий момент

часу вважаємо, що в повному обсязі  $V = 0$ . До нижньої стінки посудини підводить тепло, і відбувається природня конвекція, що можливо досягає стаціонарного стану. Якщо для розрахунків застосовується яка-небудь неконсервативна схема, то повна маса в досліджуваному об'ємі буде мінятися. Якщо ж використовується консервативна схема, то повна маса не буде мінятися (без врахування машинних помилок округлення). Слід зауважити, що помилки, викликані порушенням збереження маси, зменшуються при  $\Delta x \rightarrow 0$ , але в практичних обчисленнях зі скінченною величиною  $\Delta x$  ці помилки є суттєвими.

Ці міркування ми вважаємо істотними й переконливо рекомендуємо застосовувати консервативні схеми. Однак тут є доводи й за й проти, причому приклади чисельних контрольних розрахунків, опубліковані в літературі, не дають можливості зробити однозначний вибір. Звернемося до цих доводів і до результатів контрольних розрахунків.

Властивість консервативності не обов'язково пов'язане з підвищенням точності схеми. Наприклад, нестійкі розв'язки консервативних рівнянь зберігають властивість консервативності. Більше того, неконсервативний метод може бути в деякому змісті точніше консервативного. Наприклад, для виразу функцій за значеннями у вузлах сітки можна було б застосовувати одновимірні апроксимації поліномами високого порядку й при цьому похідні по просторових змінних будуть, імовірно, визначатися з помилкою більш високого. Однак побудована в такий спосіб схема може бути неконсервативною, а якщо критерій точності включає умова консервативності, то неконсервативна схема виявиться менш точною.

Дотепер досвід показує, що консервативні схеми, загалом кажучи, дають більш точні результати. Чен [1968] і Аллен [1968] показали, що за допомогою консервативної схеми виходять суттєво більш точні результати для деяких розв'язків рівняння Бюргерса (1.25) і (1.26). Сайрус і Фолтон [1967] з'ясували, що для еліптичних рівнянь консервативна схема дає більш точні результати, ніж неконсервативна. На прикладі задачі про плин усередині замкненої прямокутної області з однієї рухливою границею Торранс зі співавторами [1972] переконалися в тому, що навіть схема першого порядку точності для рівнянь у консервативній формі дає більш точні результати, ніж схема другого порядку для рівнянь у неконсервативній формі. Переваги розрахунків ударних хвиль при консервативній формі рівнянь (Гері [1964]) добре відомі, однак слід помітити, що в роботі Гару хвилі розрідження трохи точніше розраховувалися за неконсервативною схемою. Крім того, дивергентна форма рівнянь більш осмислена фізично й полегшує постановку граничних умов для плинів стисливої рідини.

Піачек [1966] показав, як вивести консервативні рівняння в осесиметричному випадку. Робертс і Вейс [1966] обговорювали консервативність для векторних величин. Лаку [1954] першим використовував у скінченно-різницевих обчисленнях консервативну форму рівнянь руху стисливого газу, запропоновану Курантом і Фрідріхсом [1948], і детально досліджував властивість консервативності.

Метеорологи поширили ідею консервативності на величини, пов'язані з кількістю руху. Браян [1963, 1966] запропонував схеми, що забезпечують збереження не тільки вихру, але й кінетичної енергії. Схема Аракави [1966] зберігає вихор, квадрат

вихру, кількість руху й кінетичну енергію. Але такі додаткові ускладнення схем не завжди виправдані й вигідні. Бенгтсон [1964] показав, що подібні ускладнені схеми дають невеликі поліпшення, незначні стосовно дійсних даних, і в той же час можуть привести до більших помилок у швидкості хвиль. Однак у граничному нев'язкому випадку збереження кінетичної енергії дає можливість уникнути “нелінійної” нестійкості, розглянутої в роботах Філіпса [1959] і Сандквіста [1963]. Бенгтсон [1964] запропонував схему, що зберігає різницю між кінетичною енергією й (метеорологічною) повною статичною стійкістю, що корисно в задачах з більшими градієнтами сили тяжіння.

Звичайно схеми, що забезпечують збереження основних величин, таких, як вихор, маса, кількість руху або повна енергія, не вимагають великої роботи. У двовимірній задачі про перенос вихру додаткова робота полягає у виконанні двох зайвих скінченно-різницевоїх операцій для одержання складових швидкості з розв'язку для функції струму й двох зайвих множень. У задачах про рух стисливого середовища додаткової роботи більше, що в деяких випадках може виявитися причиною відмови від застосування консервативної схеми (метод Моретті). При розв'язку багатьох задач консервативні схеми не використовувалися, див., наприклад, роботи Аллена й Саусвела [1955], Хина й Макано [1966], Позначка й Лавана [1968], Бао й Догерті [1969]. Помітимо, що всі схеми методу характеристик є неконсервативними й що при скінченно-різницевому розв'язку рівнянь прикордонного шару консервативна схема звичайно також не використовується. У таких випадках властивість консервативності може служити для перевірки точності обчислень.

Помітимо на закінчення, що неконсервативна форма для члена  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)$  зі змінним коефіцієнтом дифузії може привести до більш точних результатів, ніж консервативна (див. задачі (2.3) і (2.4)).

**Вправа 2.3.** Показати, що перший момент рівняння переносу вихору в нев'язкій рідині ( $1/\text{Re} = 0$ ), отриманий множенням рівняння (1.18) на  $\zeta$ , можна записати в консервативній формі:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot (VE).$$

**Означення 2.22.** Величина  $E = \zeta^2$  називається *енстрофією*



### 3 Точні та узагальнені розв'язки диференціальних та різницевих рівнянь у банахових просторах

*Поняття точного та узагальненого розв'язків диференціальних та різницевих рівнянь у банахових просторах. Розв'язуючі оператори. Коректність постановок задач. Збіжність та стійкість. Теорема Лакса. [4, 5]*

Нехай  $B$  — нормований банаховий простір. Функції, які залежать від просторових змінних  $x$  і координати часу  $t$ , при фіксованому  $t$  будемо тлумачити як точки цього функціонального простору і позначати їх символом  $u$ . Стан фізичної системи зображатимемо точкою функціонального простору, а її положення в часі відображатиме рух цієї точки у функціональному просторі  $B$ . Через  $\tilde{\mathbb{R}}_n$  позначимо  $n$ -вимірний комплексний евклідів векторний простір зі скалярним добутком

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j$$

і нормою

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j \bar{a}_j}.$$

Введемо також допоміжний нормований простір  $B'$ , елементами якого є довільні неперервні криві, які при кожному  $t \in [0, T]$ , визначені як функції просторових змінних  $w(t) \in B$ . В  $B'$  введемо норму так:

$$\|w\|_{B'} = \max_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\|_B.$$

#### 3.1 Скінченно-різницеві задачі в абстрактних просторах Банаха

Розглянемо однопараметричне сімейство елементів  $u(t) \in B$  з дійсним параметром  $t$  таких, що

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = Au(t); \quad u(0) = u_0; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

де  $u_0$  — заданий елемент з  $B$ , який характеризує початковий стан системи;  $A$  — лінійний оператор.

**Означення 3.1.** Точний розв'язок задачі визначимо як однопараметричне сімейство  $u(t)$ , кожен елемент якого належить області визначення оператора  $A$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $u(0) = u_0$  і

$$\left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

Позначимо через  $D$  множину елементів  $u_0 \in B$ , для кожного з яких існує єдиний розв'язок задачі (3.1) при  $u(0) = u_0$ , а збіжність в (3.2) рівномірна за  $t$ . Нехай  $E_0(T)$  відображає  $D$  в  $B$  і при фіксованому  $t$  встановлює відповідність між  $u_0$  і  $u(t)$ . Тоді  $u(t) = E_0(T)u_0$  є розв'язком задачі для тих  $u_0 \in B$ , для яких існує точний розв'язок.

**Означення 3.2.** Задачі, визначені лінійним оператором  $A$ , назовемо *коректними за Адамаром*, якщо:

- 1) область визначення  $D$  перетворення  $E_0(t)$  щільна в  $B$ ;
- 2) сімейство перетворень  $E_0(t)$  рівномірно обмежене, тобто існує така додатна стала  $K \in \mathbb{R}$ , що  $\|E_0(t)\| \leq K$  при  $0 \leq t \leq T$ .

Перша умова стверджує, що якщо для деякого початкового значення  $u_0$  точний розв'язок не існує, то цей початковий елемент можна апроксимувати як завгодно точно з допомогою тих початкових елементів з  $D$ , для яких існує точний розв'язок. З другої умови випливає, що розв'язок задачі неперервно залежить від початкового значення.

## 3.2 Узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь

### Теорема 3.3 (теорема про розширення оператора)

Обмежений лінійний оператор  $T$ , область визначення якого щільна в  $B$ , має єдине лінійне обмежене розширення  $T'$ , область визначення якого співпадає з  $B$ , і таке, що  $\|T\| = \|T'\|$ .

**Означення 3.4.** Обмежений лінійний оператор  $E_0(t)$  з щільною в  $B$  областю визначення має єдине розширення  $E(t)$ , яке назовемо *узагальненим розв'язуючим оператором*.

Оператор  $E(t)$  визначений на всьому просторі  $B$ , обмежений за нормою тим же числом  $K$ , що і оператор  $E_0(t)$ .

**Означення 3.5.** Рівність

$$u(t) = E(t)u_0$$

є *узагальненим розв'язком задачі* для довільного початкового елемента  $u_0 \in B$ .

Якщо оператор  $A$  явним чином залежить від часу, то узагальнений розв'язуючий оператор стає функцією двох змінних. Дійсно, оскільки в момент часу  $t_0$  задано початковий стан  $u_0$ , то  $u(t) = E(t, t_0)u_0$  і в силу напівгрупової властивості  $E(t_2, t_0) = E(t_2, t_1)E(t_1, t_0)$  при  $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ .

Розглянемо неоднорідну крайову задачу

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - Au(t) = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad (3.3)$$

де  $u_0$  і  $g(t)$  задані, а  $g(t)$  рівномірно або кусково рівномірно неперервна (в нормі простору  $B$ ) за часом  $t$  функція на відрізку  $0 \leq t \leq T$ . Вважаємо, що оператор  $A$ , який визначає коректно поставлену однорідну задачу, замкнений, а області визначення всіх його степенів щільні в  $B$ .

Наступні твердження доводяться в [5]:

### Твердження 3.6

Якщо

- 1)  $u_0$  і  $g(t) \in D(A)$ ;
- 2)  $g(t) \in D(A^2)$ ;
- 3) функції  $Ag(t)$  і  $A^2g(t)$  неперервні,

то

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)g(s) ds \quad (3.4)$$

є точним розв'язком задачі (3.3).

### Твердження 3.7

Якщо на  $u_0$  і  $g(t)$  не накладено ніяких обмежень, крім неперервності  $g(t)$ , або ці умови зводяться тільки до умови існування інтегралу в (3.4), то (3.4) є узагальненим розв'язком задачі (3.3).

### Твердження 3.8

При вказаних вимогах відносно оператора  $A$  і функції  $g(t)$  узагальнений розв'язок існує.

**Зауваження 3.9** — Єдиність розв'язку впливає з єдиності однорідної задачі, яка за припущенням поставлена коректно.

## 3.3 Скінченно-різницеві задачі

Розглянемо однорідне скінченно-різницеве рівняння

$$B_1 u^{n+1} = B_0 u^n, \quad (3.5)$$

де  $B_0 = B_0(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots)$  і  $B_1 = B_1(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots)$  — лінійні скінченно-різницеві оператори, залежні від приростів  $\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots$  і можливо від просторових змінних. Обидві частини рівняння є лінійними функціями значень  $u$ , визначених в точках з деякої множини (шаблону).

Нехай існує обернений оператор  $B_1^{-1}$ ,  $B_1^{-1}B_0$  обмежений і вони визначені на всьому  $B$ , а  $\Delta x_i = q_i(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, d}$ , де  $d$  — розмірність простору. Позначимо

$$B_1^{-1}(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots) \cdot B_0(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots) = C(\Delta t)$$

тоді

$$u^{n+1} = C(\Delta t)u^n. \quad (3.6)$$

**Означення 3.10.** Сімейство операторів  $C(\Delta t)$  узгоджено апроксимує крайову задачу (3.1), якщо для довільного  $u(t)$  з деякого класу  $U$  точних розв'язків, початкові елементи яких утворюють в  $B$  щільну множину, справедлива умова узгодження:

$$\left\| \left( \frac{C(\Delta t) - I}{\Delta t} - A \right) u(t) \right\| \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Тут  $I$  — одиничний оператор.

**Означення 3.11.** Враховуючи (3.2), маємо

$$\left\| \frac{u(t + \Delta t) - C(\Delta t)u(t)}{\Delta t} \right\| \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , в якому вираз під знаком норми є похибкою апроксимації.

Якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  таке, що

$$\|(C(\Delta t) - E(\Delta t)) u(t)\| < \varepsilon \Delta t, \quad (3.9)$$

при  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 < \Delta t < \delta$ , то збіжність рівномірна за часом  $t$ .

**Означення 3.12.** Сімейство  $C(\Delta t)$  забезпечує збіжну апроксимацію задачі, якщо для будь-якого фіксованого  $t \in [0, T]$ , для кожного  $u_0 \in B$  і для кожної збіжної до нуля послідовності додатних приростів  $\{\Delta_j t\}_{j=1}^\infty$ , має місце граничне відношення

$$\|C(\Delta_j t)^{n_j} u_0 - E(t)u_0\| \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

при  $j \rightarrow \infty$ , де  $n_j \in \mathbb{N}$  такі, що  $n_j \Delta_j t \rightarrow t$  при  $j \rightarrow \infty$ .

**Означення 3.13.** Апроксимацію  $C(\Delta t)$  назвемо *стійкою*, якщо для деякого  $\tau > 0$  нескінченна множина операторів

$$C(\Delta t)^n, \quad 0 \leq n\Delta t \leq T, \quad 0 < \Delta t < \tau \quad (3.11)$$

рівномірно обмежена.

### 3.4 Теорема Лакса

#### Теорема 3.14 (Лакса, про еквівалентність)

Нехай задача (3.1)–(3.2) коректно поставлена та її скінченно-різницева апроксимація задовольняє умову узгодження. Тоді стійкість необхідна і достатня для збіжності.

**Доведення. Необхідність.** Спочатку ми покажемо, що збіжна схема необхідно є стійкою. Ми стверджуємо, що для всякої збіжної схеми й для довільного початкового фіксованого елемента  $u_0 \in B$  величини  $\|C(\Delta t)^n u_0\|$ , ( $0 < \Delta t < \tau$ ,  $0 \leq n\Delta t \leq T$ ), обмежені при деякому  $\tau > 0$ . Дійсно, якщо це не так, то знайдуться дві послідовності  $\Delta_1 t, \Delta_2 t, \dots, \Delta_j t, \dots$  і  $n_1, n_2, \dots, n_j, \dots$ , для яких норми елементів  $C(\Delta_1)^{n_1} t, C(\Delta_2)^{n_2} t, \dots, C(\Delta_j)^{n_j} t, \dots$  необмежено зростають (при цьому  $\Delta_j t$  повинні прямувати до нуля в силу припущення про неперервну залежність  $C(\Delta t)$  від додатних значень  $\Delta t$ ); із цих елементів ми можемо вибрати підпослідовність, для якої величини  $n_j \delta_j t$  збігаються до деякого  $t$  з відрізка  $0 \leq t \leq T$ ; але це суперечить припущенню про збіжність схеми, оскільки при наявності збіжності норми елементів цієї підпослідовності повинні були б прямувати до кінцевої границі  $\|E(t)u_0\|$ . Отже, існує така функція  $K_1(u)$ , що неперервність  $\|C(\Delta t)nu_0\| \leq K_1(u)$  виконується для всіх операторів з множини (3.11) і всіх  $u \in B$ , отже множина (3.11) рівномірно обмежена. Таким чином, апроксимація стійка.

**Достатність.** Щоб довести зворотне твердження, припустимо, що  $u(t) = E(t)u_0$  є точним розв'язком, що належать класу  $U$ , про який йшла мова при визначенні узгодженості. Нехай  $\varepsilon, \delta$  ті ж, що й в умові узгодженості у формі (3.9),  $n_j$  і  $\Delta_j t$  обрані так само, як і при визначенні збіжності, а  $\psi_j$  позначає різницю між обчисленим і точним значенням і в момент часу  $n_j \Delta_j t$ , тобто

$$\begin{aligned} \psi_j &= \left[ C(\Delta_j t)^{n_j} - E(n_j \Delta_j t) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{n_j} C(\Delta_j t)^k \left[ C(\Delta_j t) - E(\Delta_j t) \right] E((n_j - 1 - k)\Delta_j t) u_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Третя частина цієї рівності, співпадає з другою: після приведення подібних залишаються тільки перший і останній члени. Норму величини  $\psi_j$  можна оцінити за допомогою (3.9) і нерівності трикутника: якщо  $0 < \Delta_j t < \delta$ , то

$$\|\psi_j\| \leq K_2 \sum_{k=0}^{n_j-1} \varepsilon \Delta_j t = K_2 \varepsilon n_j \Delta_j t \leq K_2 \varepsilon T, \quad (3.13)$$

де  $K_2$  позначає рівномірну границю множини (3.11). Оскільки  $\varepsilon$  довільне, то  $\|\psi_j\| \rightarrow 0$  при  $\Delta_j t \rightarrow 0$ ,  $n_j \Delta_j t \rightarrow t$ . Для доведення збіжності покажемо, що в граничному переході при  $j \rightarrow \infty$  в (3.12) можна замінити  $E(n_j \Delta_j t)$  на  $E(t)$ . Якщо  $s = |t - n_j \Delta_j t|$ ,  $t' = \min\{t, n_j \Delta_j t\}$ , то в силу напівгрупової властивості сім'ї  $E(t)$  маємо  $E(s + t') = E(s)E(t)$ , тому  $E(n_j \Delta_j t) - E(t) = \pm(E(s) - I)E(t')$ , причому знак визначається знаком різниці  $t - n_j \Delta_j t$ . У будь-якому випадку

$$\|(E(n_j \Delta_j t) - E(t))u_0\| \leq K_E \|(E(s) - I)u_0\|, \quad (3.14)$$

де  $K_E$  позначає границю для  $\|E(t)\|$  при  $0 \leq t \leq T$ . Але права частина останньої нерівності прямує до нуля, якщо  $s \rightarrow 0$ , тобто якщо  $j \rightarrow \infty$ . Отже, величина

$$\|(E(s) - I)u_0\| \quad (3.15)$$

може бути зроблена як завгодно малою вибором достатньо малих  $\Delta_j t$  і  $|t - n_j \Delta_j t|$ . Це справедливо для довільного  $u_0$ , що є початковим елементом точного розв'язку із класу  $U$ : але такі елементи щільні в  $B$ , тому для довільного  $u \in B$  з них можна вибрати послідовність  $u_1, u_2, \dots$  збіжну до  $u$ . Тому

$$\left(C(\Delta_j t)^{n_j} - E(t)\right)u = \left(C(\Delta_j t)^{n_j} - E(t)\right)u_m + C(\Delta_j t)^{n_j}(u - u_m) - E(t)(u - u_m). \quad (3.16)$$

Тут два останні члени в правій частині можуть бути зроблені як завгодно малими за допомогою вибору досить великого  $m$ , оскільки клас (3.11) і множина операторів  $E(t)$  рівномірно обмежені, а малість першого члена може бути забезпечена за рахунок вибору достатньо малих  $\Delta_j t$  і  $|t - n_j \Delta_j t|$ . Оскільки  $u$  — довільний елемент із  $B$ , то збіжність встановлена й теорема про еквівалентність доведена.  $\square$

Відзначимо в якості природного наслідку цієї теореми, що для даного початкового елемента  $u_0$  збіжність рівномірна по  $t$  на відріжку  $[0, T]$  у тому розумінні, що обмеження, які потрібно накладати на  $\Delta_j t$  і  $|t - n_j \Delta_j t|$ , щоб зробити (3.16) нескінченно малим, не залежать ні від вибору  $t$ , ні від вибору послідовності  $\Delta_j t$ . Ця обставина має велике практичне значення, тому що дозволяє при чисельному інтегруванні знаходити такий крок  $\Delta t$ , при якому наближений розв'язок виявляється досить точним на всьому відріжку  $[0, T]$  одночасно. Часто для досягнення потрібної точності  $\Delta t$  варіюють у процесі обчислень, але існує таке граничне додатне значення  $\Delta t$ , нижче якого заходити нема рації.

Викладену теорему Лакса можна дуже просто застосувати до неявного різницевого рівняння для одномірного завдання дифузії

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.17)$$

Насамперед покажемо, що розв'язок цього рівняння задовольняє наступному принципу максимуму. Припустимо, що рівняння розглядається в прямокутнику  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq t \leq T$  і що  $\Delta x$  вибирається рівним  $a/J$ , де  $J$  — натуральне число. Тоді максимальне значення  $M_1$ , що досягається величиною  $u_j^n$  усередині цього прямокутника, не може перевищувати максимального значення  $M_2$ , що досягається початковими й граничними значеннями (тобто значеннями на відрізках прямих  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = a$ ). Дійсно, припустимо протилежне, а саме що  $M_1 > M_2$ , і нехай  $(n, j)$  — перша внутрішня точка сітки, у якій  $u_j^n = M_1$  (перша у тому розумінні, що індекси  $n$  і  $j$  мають найменші значення). Тоді в цій точці сітки ліва частина наведеного вище рівняння повинна бути додатна, а права від'ємна, тому що  $u_j^n$  за припущенням перевершує сусіднє значення  $u_{j-1}^n$  ліворуч і сусіднє значення  $u_{j+1}^{n-1}$  знизу й щонайменше дорівнює сусідньому значенню  $u_{j+1}^n$  праворуч. Отже, наше припущення неправильне, і принцип максимуму встановлений. Очевидно, що ці міркування можна застосувати й до  $-u_j^n$  і тим самим установити, що  $|u_j^n|$  обмежені при будь-якому виборі сітки, тобто що розглянуте різницеве рівняння стійке.

Система різницьових рівнянь для задачі (3.3) має вигляд

$$B_1 u^{n+1} - B_0 u^n = g^{n+1}, \quad u^0 = u_0, \quad (3.18)$$

де  $B_1$  і  $B_0$  — розглянуті раніше різницьові оператори, а  $g^n$  апроксимує  $g(n\Delta t)$ . Якщо величину  $\|g^n - g(n\Delta t)\|$  можна зробити як завгодно малою рівномірно за  $n$  при  $0 \leq n\Delta t \leq T$  за допомогою вибору  $\Delta t$ , то останнє різницьове рівняння можна подати у вигляді

$$u^{n+1} - C(\Delta t)u^n = D(\Delta t)g^{n+1}, \quad (3.19)$$

де  $C(\Delta t) = B_1^{-1}B_0$  і  $D(\Delta t) = B_1^{-1}$  обмежені і залежать тільки від  $\Delta t$  і, можливо, координат, а  $\Delta x_i$  можуть бути виражені через  $\Delta t$ .

З (3.19) випливає

$$u^n = C(\Delta t)^n u_0 + \Delta t \sum_{j=1}^n C(\Delta t)^{n-j} g^j. \quad (3.20)$$

Якщо виконуються умови теореми Лакса, то остання сума апроксимує інтеграл з (3.4), звідки випливає збіжність наближеного розв'язку до точного.

## Література

- [1] Роуч, *Вычислительная гидродинамика*. Мир, 1980.
- [2] Андерсон and Танненхилл, *Вычислительная гидродинамика и теплообмен*. Мир, 1990.
- [3] Самарский, *Теория разностных схем*. Наука, 1983.
- [4] Грищенко and Ляшко, *Методи Фур'є та першого диференціального наближення в теорії різницевих схем*. ВПЦ Київський університет, 2005.
- [5] Рихтмайер and Мортон, *Разностные методы решения краевых задач*. Мир, 1972.