

УДК 517.9

Грищенко О. Ю., . канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Оноцький В. В., аспірант

ДИСИПАТИВНІСТЬ ДВОКРОКОВИХ СИМЕТРИЗОВАНИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ПЕРЕНОСУ

У статті досліджено двокрокові симетризовані схеми для задач $\frac{\partial u}{\partial t} = -k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(k(x,t)u)$ на відріzkу $x \in [0,1]$ при $t \geq 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u(0,t) = \psi(t)$ при $k > 0$ або $u(1,t) = \psi(t)$ при $k < 0$. За допомогою першого диференціального наближення встановлено умови дисипативності, а, отже, і необхідні умови стійкості. Теоретичні результати перевірено на тестових прикладах.

Grischenko Oleksander, Ph.D., docent,
Onotsky Vyacheslav, a post-graduate st.

DISSIPATION OF DS-FINITE DIFFERENCE ALGORITHMS FOR SOLVING HYPERBOLIC EQUATIONS OF TRANSFER

DS-finite difference algorithms for solving tasks: $\frac{\partial u}{\partial t} = -k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}$ and $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(k(x,t)u)$ on $x \in [0,1]$ $t \geq 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$ if $k > 0$ or $u(1,t) = \psi(t)$ if $k < 0$ are discussed in this article. Conditions of dissipation and requirements of stability are obtained with using the method of the first differential approximation. The theoretical results were verified with the computational experiments on the model tasks.

Постановка задач. ДС-алгоритм.

В області $G = \{(x,t) | 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$ розглянемо дві початково-крайові одновимірні задачі:

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

при початковій

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (2)$$

та граничній

$$\begin{cases} u(0,t) = \psi(t), & k > 0; \\ u(1,t) = \psi(t), & k < 0; \end{cases} \quad (3)$$

умовах;

$$2. \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(k(x,t)u) \quad (4)$$

при початковій (2) та граничній (3) умовах.

Область G покриваємо сіткою $\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_n) | x_i = ih, t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots; h = 1/M\}$, яку розбиваємо на дві підобласті: $\Omega_h^{(1,n)} = \{(x_i, t_n) | (i+n) - \text{непарне}\}$ та $\Omega_h^{(2,n)} = \{(x_i, t_n) | (i+n) - \text{парне}\}$. Для визначеності покладемо M - парне. Вводимо простір сіткових функцій $H_{h,\tau} = \{f_i^n = f(x_i, t_n); i = \overline{0, M}, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

I. Для задачі (1)-(3) спочатку розглянемо ДС-алгоритм з центральними різницями (нехай для визначеності $k > 0$).

З початкової умови (2) маємо $u_i^0 = \varphi(ih, 0); i = \overline{0, M}$.

Враховуючи крайову умову (3), для кожного $n = 0, 1, 2, \dots$ покладемо $u_0^{2n+1} = \psi(0, (2n+1)\tau); u_0^{2n+2} = \psi(0, (2n+2)\tau)$.

Значення розв'язку в усіх точках множини $\Omega_h^{(1, 2n+1)}$ знаходимо за явною схемою:

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - \frac{\tau}{2h} k_i^{2n} (u_{i+1}^{2n} - u_{i-1}^{2n}), \quad i = 2, 4, \dots, M-2. \quad (5a)$$

Після чого знаходимо значення шуканої функції в точках множини $\Omega_h^{(1, 2n+2)}$ за неявною схемою ($\sigma \geq 0$ - ваговий коефіцієнт):

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \frac{\tau}{2h} (\sigma k_i^{2n} (u_{i+1}^{2n} - u_{i-1}^{2n}) - (1 + \sigma) k_i^{2n+1} (u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1})),$$

$$i = 1, 3, \dots, M-3. \quad (6a)$$

Для знаходження значень функції u_i^{2n+1} в приграничному $i = M-1$ та в граничному $i = M$ вузлах потрібно задати додаткові не природні для диференціального рівняння умови. Ці умови не повинні

■ змінювати фізичної сутності задачі;

■ погіршувати апроксимацію диференціального рівняння та стійкість алгоритму,

а також повинні давати змогу однозначно визначити невідомі значення u_M^{2n+1} і u_{M-1}^{2n+1} . Як допоміжні умови для знаходження u_M^{2n+1} і u_{M-1}^{2n+1} використаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{u_M^{2n+1} - u_M^{2n}}{\tau} = -k_M^{2n+1} \frac{3u_M^{2n+1} - 4u_{M-1}^{2n+1} + u_{M-2}^{2n+1}}{2h} \\ \frac{u_{M-1}^{2n+1} - u_{M-1}^{2n}}{\tau} = \sigma k_{M-1}^{2n} \frac{u_M^{2n} - u_{M-2}^{2n}}{2h} - (1 + \sigma) k_{M-1}^{2n+1} \frac{u_M^{2n+1} - u_{M-2}^{2n+1}}{2h} \end{cases} \quad (9)$$

в якій перше рівняння є односторонньою апроксимацією диференціального рівняння (1) з похибкою $O(\tau + h^2)$, а друге - це рівняння (6a) при $i = M - 1$. Оскільки ця система має трикутну матрицю з ненульовими діагональними елементами, то розв'язок її існує і єдиний. Оскільки в точці $(x_M, t_{2n+1}) \in \Omega^{(1,2n+1)}$ записано явну схему, а в точці $(x_{M-1}, t_{2n+1}) \in \Omega^{(2,2n+1)}$ - неявну, то загальна схема чергування явних і неявних різницьових схем в алгоритмі не порушена.

Значення функції u_i^{2n+1} ($i = \overline{0, M}$) приймаємо за допоміжні значення.

Значення розв'язку в точках множини $\Omega_h^{(1,2n+2)}$ обчислюємо за явною схемою:

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} - \frac{\tau}{2h} k_i^{2n+1} (u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}), \quad i = 1, 3, \dots, M - 1. \quad (7a)$$

Після чого значення розв'язку в точках множини $\Omega_h^{(2,2n+2)}$ явно визначаються з неявної схеми:

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \frac{\tau}{2h} (\sigma k_i^{2n+1} (u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}) - (1 + \sigma) k_i^{2n+2} (u_{i+1}^{2n+2} - u_{i-1}^{2n+2})), \\ i = 2, 4, \dots, M - 2; \quad (8a)$$

Для знаходження граничного значення u_M^{2n+2} як допоміжну граничну умову використовуємо різницеий аналог (за неявною схемою) рівняння (1) в крайній правій точці з лівосторонніми різницеєвими похідними другого порядку апроксимації:

$$\frac{u_M^{2n+2} - u_M^{2n+1}}{\tau} = -(1 + \sigma) k_M^{2n+2} \frac{3u_M^{2n+2} - 4u_{M-1}^{2n+2} + u_{M-2}^{2n+2}}{2h} + \\ + \sigma k_M^{2n+1} \frac{3u_M^{2n+1} - 4u_{M-1}^{2n+1} + u_{M-2}^{2n+1}}{2h} \quad (10)$$

Аналогічно будуємо алгоритм для $k < 0$.

Далі розглянемо схеми з односторонніми різницями проти потоку: для точок $\Omega_h^{(1,2n+1)}$:

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - 0.5 k_i^{2n} \tau L u_i^{2n}, \quad i = l, (l + 2), \dots, M - 2 + l; \quad (5b)$$

для точок $\Omega_h^{(2,2n+1)}$:

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + 0.5 \tau (\sigma k_i^{2n} L u_i^{2n} - (1 + \sigma) k_i^{2n+1} L u_i^{2n+1}), \quad i = 1, 3, \dots, M - 1; \quad (6b)$$

для точок $\Omega_h^{(1,2n+2)}$:

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} - 0.5 k_i^{2n+1} \tau L u_i^{2n+1}, \quad i = 1, 3, \dots, M - 1; \quad (7b)$$

для точок $\Omega_h^{(2,2n+2)}$:

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + 0.5 \tau (\sigma k_i^{2n+1} L u_i^{2n+1} - (1 + \sigma) k_i^{2n+2} L u_i^{2n+2}), \\ i = l, (l + 2), \dots, M - 2 + l, \quad (8b)$$

$$\text{де } Lu_i^n = \begin{cases} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}, & k > 0; \\ \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, & k < 0; \end{cases} \quad l = \begin{cases} 0, & k > 0; \\ 2, & k < 0. \end{cases}$$

II. Для початково-крайової задачі (4),(2),(3) розглянемо алгоритм з центральними різницями (нехай $k > 0$).

Згідно (2) покладаємо $u_i^0 = \varphi(ih, 0); i = \overline{0, M}$;

з умови (3) маємо $u_0^{2n+1} = \psi(0, (2n+1)\tau); u_0^{2n+2} = \psi(0, (2n+2)\tau); n = 0, 1, 2, \dots$

для знаходження розв'язку у внутрішніх вузлах використаємо різниці схеми:

для $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_h^{(1, 2n+1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - 0.5\tau(k_{i+1}^{2n}u_{i+1}^{2n} - k_{i-1}^{2n}u_{i-1}^{2n})/h, \quad i = 2, 4, \dots, M-2; \quad (11a)$$

для $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_h^{(2, 2n+1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + 0.5\tau(\sigma(k_{i+1}^{2n}u_{i+1}^{2n} - k_{i-1}^{2n}u_{i-1}^{2n}) - (1+\sigma)(k_{i+1}^{2n+1}u_{i+1}^{2n+1} - k_{i-1}^{2n+1}u_{i-1}^{2n+1}))/h, \quad i = 1, 3, \dots, M-3; \quad (12a)$$

для $(x_i, t_{2n+2}) \in \Omega_h^{(1, 2n+2)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} - 0.5\tau(k_{i+1}^{2n+1}u_{i+1}^{2n+1} - k_{i-1}^{2n+1}u_{i-1}^{2n+1})/h, \quad i = 1, 3, \dots, M-1; \quad (13a)$$

для $(x_i, t_{2n+2}) \in \Omega_h^{(2, 2n+2)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + 0.5\tau(\sigma(k_{i+1}^{2n+1}u_{i+1}^{2n+1} - k_{i-1}^{2n+1}u_{i-1}^{2n+1}) - (1+\sigma)(k_{i+1}^{2n+2}u_{i+1}^{2n+2} - k_{i-1}^{2n+2}u_{i-1}^{2n+2}))/h, \quad i = 2, 4, \dots, M-2. \quad (14a)$$

Невідомі значення u_M^{2n+1} та u_{M-1}^{2n+1} знаходимо із системи

$$\begin{cases} \frac{u_M^{2n+1} - u_M^{2n}}{\tau} = -\frac{3k_M^{2n+1}u_M^{2n+1} - 4k_{M-1}^{2n+1}u_{M-1}^{2n+1} + k_{M-2}^{2n+1}u_{M-2}^{2n+1}}{2h}, \\ \frac{u_{M-1}^{2n+1} - u_{M-1}^{2n}}{\tau} = \sigma \frac{k_M^{2n}u_M^{2n} - k_{M-2}^{2n}u_{M-2}^{2n}}{2h} - (1+\sigma) \frac{k_M^{2n+1}u_M^{2n+1} - k_{M-2}^{2n+1}u_{M-2}^{2n+1}}{2h} \end{cases} \quad (15)$$

а значення u_M^{2n+2} знаходимо з умови

$$\begin{aligned} \frac{u_M^{2n+2} - u_M^{2n+1}}{\tau} &= \sigma \frac{3k_M^{2n+1}u_M^{2n+1} - 4k_{M-1}^{2n+1}u_{M-1}^{2n+1} + k_{M-2}^{2n+1}u_{M-2}^{2n+1}}{2h} - \\ &- (1+\sigma) \frac{3k_M^{2n+2}u_M^{2n+2} - 4k_{M-1}^{2n+2}u_{M-1}^{2n+2} + k_{M-2}^{2n+2}u_{M-2}^{2n+2}}{2h}. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогічно будуємо алгоритм для $k < 0$.

Далі розглянемо схеми з односторонніми різницями проти потоку для задачі (4),(2),(3).

Для точок $\Omega_h^{(1, 2n+1)}$:

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - 0.5\tau Lu_i^{2n}, \quad i = l, (l+2), \dots, M-2+l; \quad (116)$$

для точок $\Omega_h^{(2,2n+1)}$:

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + 0.5\tau(\sigma Lu_i^{2n} - (1+\sigma)Lu_i^{2n+1}), \quad i = 1, 3, \dots, M-1; \quad (126)$$

для точок $\Omega_h^{(1,2n+2)}$:

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} - 0.5\tau Lu_i^{2n+1}, \quad i = 1, 3, \dots, M-1; \quad (136)$$

для точок $\Omega_h^{(2,2n+2)}$:

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + 0.5\tau(\sigma Lu_i^{2n+1} - (1+\sigma)Lu_i^{2n+2}), \quad i = l, (l+2), \dots, M-2+l, \quad (146)$$

$$\text{де } Lu_i^n = \begin{cases} \frac{k_i^n u_i^n - k_{i-1}^n u_{i-1}^n}{h}, & k > 0; \\ \frac{k_{i+1}^n u_{i+1}^n - k_i^n u_i^n}{h}, & k < 0; \end{cases} \quad l = \begin{cases} 0, & k > 0; \\ 2, & k < 0. \end{cases}$$

III. Для встановлення умов дисипативності та стійкості використовуємо метод першого диференціального наближення [1]. Позначимо через $(\bullet)_i^n$ оператор (\bullet) в точці (x_i, t_n) . Розглянемо різницьевий алгоритм (5а)-(8а). Спочатку просумуємо (5а) і (8а), отримаємо

$$u_i^{2n+2} - u_i^{2n} = 0.5\tau[-k_i^{2n}(u_{i+1}^{2n} - u_{i-1}^{2n}) + \sigma k_i^{2n+1}(u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}) - (1+\sigma)k_i^{2n+2}(u_{i+1}^{2n+2} - u_{i-1}^{2n+2})]/h. \quad (15)$$

Розкладаючи в ряд Тейлора кожен з функцій k і u в точці (x_i, t_{2n+2}) , виділяючи у лівій частині оператор $(\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x})|_i^{2n+2}$, а в правій - записуючи всі вирази при похідних функції u по x і збираючи коефіцієнти при похідних u в точках $(x_i, t_{2n+2}) \in \Omega^{(1,2n+2)}$, отримаємо

$$(u'_i + ku'_i)|_i^{2n+2} = u'_x \{O(\tau + h)\} + + u''_{xx} \left\{ \frac{\sigma \tau k^2}{2} + (1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - k k'_x) + o(h^2 + h\tau + \tau^2) \right\} + \dots \quad (16)$$

Просумуємо (6а) та (7а) для точок $(x_i, t_{2n+2}) \in \Omega^{(2,2n+2)}$, отримаємо

$$u_i^{2n+2} - u_i^{2n} = 0.5\tau[\sigma k_i^{2n}(u_{i+1}^{2n} - u_{i-1}^{2n}) - (2+\sigma)k_i^{2n+1}(u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1})]. \quad (17)$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
& (u'_t + ku'_x)|_i^{2n+2} = u'_x \{O(\tau, h)\} + \\
& + u''_{xx} \left\{ \frac{\sigma \tau k^2}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4} \right) \tau^2 k (kk'_x - k'_t) + o(h^2, h\tau, \tau^2) \right\} + \dots; \\
& (u'_t + ku'_x)|_M^{2n+2} = u'_x \{ (kk'_x - k'_t) \frac{\sigma \tau}{2} + o(h + \tau) \} + \\
& + u''_{xx} \left\{ (\sigma - 1)hk + \frac{\sigma \tau k^2}{2} + (2 - \sigma)h\tau k'_t + \left(1 - \frac{\sigma}{4}\right) \tau^2 k (k'_t - kk'_x) \right\}
\end{aligned} \tag{18}$$

П-форму першого диференціального наближення в граничній точці (x_M, t_{2n+2}) методу (5)-(10) для задачі (1)-(3) будуємо на основі першого рівняння (9) та рівняння (10):

$$\begin{aligned}
& (u'_t + ku'_x)|_M^{2n+2} = u'_x \{ (kk'_x - k'_t) \frac{\sigma \tau}{2} + o(h + \tau) \} + \\
& + u''_{xx} \left\{ \frac{\sigma \tau k^2}{2} + (2 - \sigma)h\tau k'_t + \left(1 - \frac{\sigma}{4}\right) \tau^2 k (k'_t - kk'_x) + o(h^2 + h\tau + \tau^2) \right\}
\end{aligned}$$

Аналогічно визначаємо коефіцієнти при другій похідній для різних алгоритмів (5)-(8), (11)-(14). Результати наведено в таблиці 1 (до другого порядку по h, τ).

Таблиця 1. Коефіцієнти при u''_{xx} для алгоритмів (5)-(8),(11)-(14).

	Недивергентна форма (1)		Дивергентна форма (4)	
	(5)+(8)	(6)+(7)	(11)+(14)	(12)+(13)
центрально-різницева схема	$\frac{\sigma \tau k^2}{2} +$ $+(1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k (k'_t - kk'_x)$	$\frac{\sigma \tau k^2}{2} -$ $-(\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k (k'_t - kk'_x)$	$\frac{\sigma \tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} +$ $+(1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k (k'_t - 2kk'_x)$	$\frac{\sigma \tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} -$ $-(\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k (k'_t - 2kk'_x)$
схема з лівосторонніми похідними ($k > 0$)	$\frac{hk}{2} + \frac{\sigma \tau k^2}{2} +$ $+(1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k (k'_t - kk'_x) -$ $-(\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau (k'_t - 2kk'_x)$	$\frac{hk}{2} + \frac{\sigma \tau k^2}{2} -$ $-(\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k (k'_t - kk'_x) -$ $-(\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau (k'_t - 2kk'_x)$	$\frac{hk}{2} + \frac{\sigma \tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} +$ $+(1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k (k'_t - 2kk'_x) -$ $-(\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau (k'_t - 5kk'_x)$	$\frac{hk}{2} + \frac{\sigma \tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} -$ $-(\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k (k'_t - 2kk'_x) -$ $-(\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau (k'_t - 5kk'_x)$

схема з правосто- ронніми похідними ($k < 0$)	$-\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} +$ $+(1-\frac{3\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - kk'_x) +$ $+(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 2kk'_x)$	$-\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} -$ $-(\frac{1}{2}+\frac{9\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - kk'_x) +$ $+(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 2kk'_x)$	$-\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} +$ $+(1-\frac{3\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - 2kk'_x) +$ $+(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 5kk'_x)$	$-\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} -$ $-(\frac{1}{2}+\frac{9\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - 2kk'_x) +$ $+(\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 5kk'_x)$
---	---	---	---	---

Зауважимо, що при $k = k(x, t) \neq const$ перше диференціальне наближення для усіх розглянутих схем містить ненульові доданки з непарними похідними функції u по x , а, отже, схеми дисперсійні.

З таблиці 1 випливає дисипативність розглянутих схем.

Враховуючи те, що в коефіцієнтах при u''_{xx} головні доданки по h, τ невід'ємні при $\sigma \geq 0$, а також початкові обмеження на знак функції $k(x, t)$ (для схем з односторонніми похідними), робимо висновок, що необхідна умова стійкості (невід'ємність коефіцієнту при u''_{xx}) для усіх розглянутих схем виконується при достатньо малих значеннях кроків h, τ .

У коефіцієнтах при u''_{xx} похідні функції $k(x, t)$ присутні лише у доданках другого та вищих порядків за степенями кроків h, τ а отже вони не так істотно впливають на знак коефіцієнту при u''_{xx} .

Чисельна реалізація.

ДС-методи реалізовано для типових задач [3]:

1) задача про розповсюдження квадратної хвилі на відрізок $x \in [0, 100]$. В початковий момент часу $u_{\max} = 1$ в перших 10 комірках та $u_{\min} = 0$ - в решті комірках (рис.1) або $u_{\max} = 2$ та $u_{\min} = 0.5$ (рис.2 а);

2) задача про розповсюдження гаусівського профілю, що має напівширину, рівну $2h$ (рис. 2б). При цьому $u_{\max} = 1.6$ та $u_{\min} = 0.1$.

3) задача про розповсюдження профілю у вигляді напівкуполу (мал. 2в), що має ширину у 30 комірок. Тут $u_{\max} = 1.6$ та $u_{\min} = 0$.

В наведених задачах хвиля рухається вправо з постійною швидкістю $k = 1 = const$. Також враховуються умови періодичності: речовина, що витікає з останньої комірки через границю $x = 100$ знову втікає в розрахункову область з тією ж швидкістю через границю $x = 0$.



Рис.1 Розв'язок тестової задачі про розповсюдження квадратної хвилі через 120 кроків по часу: точний розв'язок та розв'язок, знайдений за допомогою ДС-методу (56)-(86) з параметрами $\sigma=0, h=1, \tau=1$.

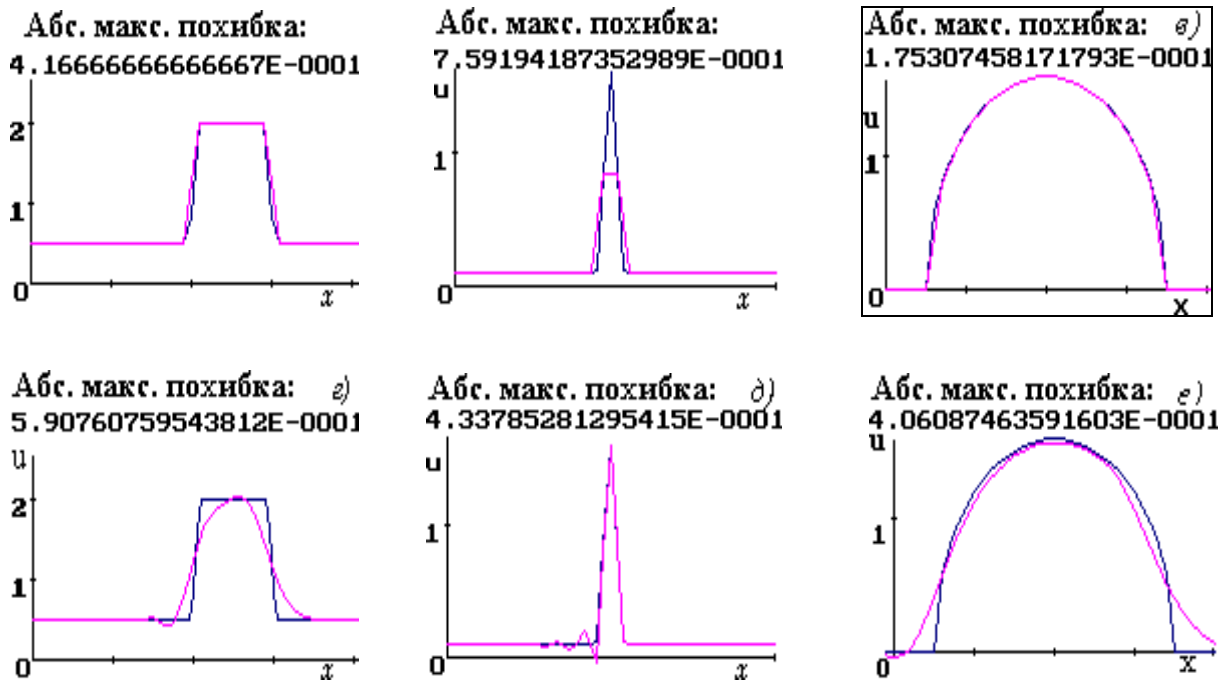


Рис2. Розрахунки для задач розповсюдження:

- а), з) - квадратної хвилі відповідно для ДС-методів (116)-(146) ($\sigma=0, h=1, \tau=1$) та (11а)-(14а), (15), (16) ($\sigma=1, h=0.5, \tau=0.1$) на 800 кроці по часу;
- б), д) – гаусівського профілю відповідно для ДС-методів (116)-(146) ($\sigma=0, h=0.2, \tau=0.2$) та (11а)-(14а), (15), (16) ($\sigma=0, h=0.2, \tau=0.2$) на 600 кроці по часу;
- в), е) – гаусівського профілю відповідно для ДС-методів (116)-(146) ($\sigma=0, h=1, \tau=1$) та (11а)-(14а), (15), (16) ($\sigma=1, h=1, \tau=0.2$) на 600 кроці по часу.

Висновки.

1. На відміну від методів, що потребують на кожному часовому кроці розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, розмір яких пропорційний розмірності просторової сітки та ітераційних методів, за допомогою ДС-методу розв'язок отримується швидко при низьких обчислювальних затратах.

2. Результати для першої тестової задачі показали, що
-ДС-метод не дає нефізичних осциляцій в області великих градієнтів;

-ДС-метод з односторонніми різницями (5б)-(7б) та (11б)-(13б) поводить себе краще, ніж ДС-метод з центральними похідними (5а)-(7а),(8), (9) та (11а)-(13а),(14),(15). Хоча останній дає дещо зглажений розв'язок, та він значно кращий, ніж у класичних різницевих методів. Так, дифузія значно менша, ніж у методах донорської комірки, HI-RES (Хартена) та ETVD ("суттєвий" метод найменшої повної варіації) та не більша, ніж у методі MUSCUL (Ван Леєра), ДС-метод зберігає амплітуду хвилі; досить добре зберігається фронт хвилі і не спостерігається фазового запізнення, характерного для методу Лакса-Вендрова. ДС-метод з односторонніми різницями проявив себе не гірше, ніж метод з корекцією потоків (FCT) [3].

3. Відносно задачі про розповсюдження гаусівського профілю можна зробити висновок, що ДС-метод (11б)-(13б) дає дещо зрізаний профіль, що є вадою більшості відомих методів. Зміщення фази не спостерігається. ДС-метод (11а)-(13а), (14), (15) дає невеликі осциляції, але при цьому зберігає висоту профіля.

4. У задачі про розповсюдження профілю у формі напівкуполу ДС-метод з односторонніми різницями теж дав дуже добрі результати: розв'язок апроксимується досить точно. При цьому в верхній частині профілю не спостерігається утворення плато, що характерно для FCT-методів з корекцією потоків 2 порядку, методів PPM (Коллела і Вудворда) та SUPERBEE (Рое).

5. У порівнянні з центральнорізницеви́ми схемами (5а)-(8а),(9),(10) для задачі (1)-(3) та (11а)-(14а),(15),(16) для задачі (4),(2),(3) відповідні схеми з односторонніми різницями (5б)-(8б) та (11б)-(14б) мають кращі стійкісні та апроксимаційні властивості.

Література:

1. Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск, Наука, 1985. -368с., стр. 88-101.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.- Москва, Наука, 1973, 415с.
3. Оран Элейн, Борис Джей. Численное моделирование реагирующих потоков. -М., Мир, 1990, 660с., стр. 136-142, 329-336.

Надійшла до редакції 6.11. 2000