

7 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільними правим кінцем

7.1 Лекція

7.1.1 Постановка задачі і формулювання принципу максимуму

Розглянемо задачу Больца з вільним правим кінцем

$$\mathcal{J}(u, x) = \int_{t_0}^T f_0(x(s), u(s), s) ds + \Phi(x(T)) \quad (7.1)$$

за умов

$$\dot{x} = f(x, u, t), t \in [t_0, T], \quad (7.2)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (7.3)$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$ – фазові координати, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^*$ – кусково-неперервне керування таке, що $u(t) \in \mathcal{U}, t \in [t_0, T]$, де $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, не залежить від часу.

$f_0(x, u, t) \rightarrow \mathbb{R}, f(x, u, t) \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервними за сукупністю змінних, разом зі своїми градієнтами за x , $\Phi(x)$ – неперервно диференційовна, $(x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times [t_0, T], x_0 \in \mathbb{R}^n$.

За цих умов справджується теорема про існування та єдиність (кусово-гладкого) розв’язку задачі Коші для системи (7.2) для довільного керування.

Моменти часу t_0 і T фіксовані, а обмеження на фазові координати відсутні.

Якщо існує оптимальне керування задачі (7.1)-(7.3), тобто допустиме $u_* = u_*(\cdot)$ і відповідний йому розв’язок $x_* = x_*(\cdot)$ задачі Коші (7.2)-(7.3) такі, що

$$\inf \mathcal{J}(u, x) = \mathcal{J}(u_*, x_*),$$

то будемо говорити про розв’язок задачі як про пару $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$.

Функція вигляду

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle, \quad (7.4)$$

де $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^*$ – нові, спряжені змінні, називається функцією Гамільтона-Понтрягіна.

Для кожної пари $(u(\cdot), x(\cdot))$, де $u(\cdot)$ – допустиме керування, а $x(\cdot)$ – відповідний йому розв’язок задачі Коші (7.2)-(7.3), розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H}(x, u, \psi, t), t \in [t_0, T], \quad (7.5)$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)). \quad (7.6)$$

Ця система називається спряженою системою, яка відповідає парі $(u(\cdot), x(\cdot))$.

Теорема 7.1 (принцип максимуму Понтрягіна). Для розв’язку $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ задачі Больца (7.1), (7.3) існує $\psi_*(\cdot)$ яка задовольняє спряженій системі яка відповідає парі $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$, причому майже для кожного $t \in [t_0, T]$ функція Гамільтона-Понтрягіна досягає свого максимуму при $u(t) = u_*(t)$, а саме

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x_*, u, \psi, t) = \mathcal{H}(x_*, u_*, \psi_*, t)$$

Приклад 7.1. Розглянемо задачу

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) ds + \frac{x^2(T)}{2}$$

за умови

$$\dot{x} = ax + u, x(t_0) = x_0,$$

де $x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a – сталий параметр, x_0 – фіксована точка.

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -\frac{u^2}{2} + \psi(ax + u).$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -a\psi, \psi(T) = -x(T).$$

Її розв'язок

$$\psi(t) = -x(T) \cdot e^{a(T-t)}.$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = 0.$$

Звідси $-u_* + \psi = 0$ і $u_*(t) = \psi(t) = -x(T) \cdot e^{a(T-t)}.$

Підставляємо знайдене керування у рівняння

$$\dot{x} = ax + u, x(t_0) = x_0.$$

Формула Коші для загального розв'язку лінійного рівняння першого порядку має вигляд

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} \cdot u(s) ds = e^{at} x_0 - \int_0^t e^{a(t-s)} \cdot x(T) \cdot e^{a(T-s)} ds = \\ &= e^{at} x_0 - e^{at+aT} x(T) \int_0^t e^{-2as} ds = e^{at} x_0 - \frac{e^{aT} \cdot x(T) \cdot (e^{at} - e^{-at})}{2a}, \end{aligned}$$

звідки, при $t = T$:

$$x(T) = e^{aT} \left(x_0 - \frac{x(T) \cdot (e^{aT} - e^{-aT})}{2a} \right),$$

звідки

$$x(T) = \frac{e^{aT} x_0}{1 - \frac{e^{aT}}{2a} \cdot (e^{aT} - e^{-aT})}.$$

Підсумовуючи все вищесказане,

$$u_*(t) = -\frac{e^{a(2T-t)} x_0}{1 - \frac{e^{aT}}{2a} \cdot (e^{aT} - e^{-aT})},$$

причому

$$x_*(t) = e^{at} x_0 - \frac{e^{2aT} x_0 \cdot (e^{at} - e^{-at})}{2a - e^{2aT} - 1}.$$

7.2 Аудиторне заняття

Задача 7.1. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u^2(s) + x_1^4(s)) ds + x_2^4(T) \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1 - x_2) + u, \\ \dot{x}_2 = \cos(-4x_1 + x_2), \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 2. \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з \mathbb{R}^2 , $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв’язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = u^2(t) + x_1^4(t), \quad f(x(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} \sin(x_1(t) - x_2(t)) + u(t) \\ \cos(-4x_1(t) + x_2(t)) \end{pmatrix}, \quad \Phi(x(T)) = x_2^4(T). \quad (7.7)$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, \psi, t) &= -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \left\langle \psi, \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) + u \\ \cos(-4x_1 + x_2) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \left\langle \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) + u \\ \cos(-4x_1 + x_2) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \psi_1 \cdot \sin(x_1 - x_2) + \psi_1 \cdot u + \psi_2 \cdot \cos(-4x_1 + x_2). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - \psi_1 \cdot \cos(x_1 - x_2) - 4\psi_2 \cdot \sin(-4x_1 + x_2) \\ \psi_1 \cdot \cos(x_1 - x_2) + \psi_2 \cdot \sin(-4x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4x_2^3(T) \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -2u + \psi_1 = 0, \quad (7.11)$$

звідки $u = \psi_1/2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1 - x_2) + \psi_1/2, \\ \dot{x}_2 = \cos(-4x_1 + x_2), \end{cases} \quad (7.12)$$

Задача 7.2. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T x^2(s) ds \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \leq \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T \in \mathbb{R}$ заданими.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = \gamma^2 x^2(t), \quad f(x(t), u(t), t) = u(t), \quad \Phi(x(T)) = 0, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(t) = [-\rho, \rho]. \quad (7.13)$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\gamma^2 x^2 + \psi u. \quad (7.14)$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -2\gamma^2 x, \quad (7.15)$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = 0, \quad (7.16)$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто

$$u = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \quad (7.17)$$

Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\dot{x} = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \quad (7.18)$$

Задача 7.3. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) ds + \frac{x^2(T)}{2} \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T \in \mathbb{R}$ заданими.

Розв'язок. Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\frac{u^2}{2} + \psi u. \quad (7.19)$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = 0, \quad (7.20)$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = -x(T), \quad (7.21)$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -u + \psi = 0, \quad (7.22)$$

звідки $u = \psi$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\dot{x} = \psi. \quad (7.23)$$

З рівнянь на ψ знаходимо $\psi(t) = -x(T)$.

Підставляючи це у рівняння на x знаходимо $x(t) = x_0 - x(T) \cdot t$.

Звідси, при $t = T$ маємо $x(T) = x_0 - T \cdot x(T)$, тобто $x(T) = \frac{x_0}{1+T}$.

Остаточно, $(u_*(t), x_*(t)) = \left(-\frac{x_0}{1+T}, -\frac{x_0 \cdot t}{1+T}\right)$.

Задача 7.4. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (u_1^2(s) + u_2^2(s)) \, ds + \frac{x_1^2(T)}{2} \rightarrow \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з \mathbb{R}^2 , $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^2$ – вектор керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T \in \mathbb{R}$ заданим.

Розв'язок. Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \psi_1(x_2 + u_1) + \psi_2(x_1 + u_2). \quad (7.24)$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \quad (7.25)$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = \begin{pmatrix} -u_1 + \psi_1 \\ -u_2 + \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.27)$$

звідки $u_1 = \psi_1$, $u_2 = \psi_2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \psi_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \quad (7.28)$$

Розв'язуємо систему на ψ_1 і ψ_2 :

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (7.29)$$

Підставляємо це у систему на x_1, x_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \end{cases} \quad (7.30)$$

Знаходимо загальний розв'язок однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (7.31)$$

Шукаємо тепер частинний розв'язок неоднорідної системи методом невизначених коефіцієнтів у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(A_{11}t + B_{11}) + e^{-t}(A_{12}t + B_{12}) \\ e^t(A_{21}t + B_{21}) + e^{-t}(A_{22}t + B_{22}) \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

Підставляючи це у системи, знаходимо

$$\begin{cases} A_{11} = A_{21}, \\ B_{11} + A_{11} = B_{21} - c_1, \\ -A_{12} = A_{22}, \\ -B_{12} + A_{12} = B_{22} + c_2, \\ A_{21} = A_{11}, \\ B_{21} + A_{21} = B_{11} + c_1, \\ -A_{22} = A_{12}, \\ -B_{22} + A_{22} = B_{12} + c_2. \end{cases} \quad (7.33)$$

Беремо розв'язок $A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = 0$, $B_{11} = B_{12} = 0$, $B_{21} = c_1$, $B_{22} = c_2$, тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t \end{pmatrix}. \quad (7.34)$$

Пригадаємо, що $x_1(0) = x_2(0) = 1$, це дає систему

$$\begin{cases} c_3 + c_4 - c_2 = 1, \\ c_3 - c_4 + c_1 = 1, \end{cases} \quad (7.35)$$

з якої $c_3 = 1 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2}$, $c_4 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2}$.

І далі це якось (як ??) розв'язується.

7.3 Домашнє завдання

Задача 7.7. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (4u_1^2(s) + u_2^2(s) + \cos^2(x_1(s))) ds + \sin^2(x_2(T)) \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 4, x_2(0) = -2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з \mathbb{R}^2 , $u_1(t), u_2(t)$ – функції керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$\begin{aligned} f_0(x, u, t) &= 4u_1^2(s) + u_2^2(s) + \cos^2(x_1(s)), \\ f(x(t), u(t), t) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2 \end{pmatrix}, \\ \Phi(x(T)) &= \sin^2(x_2(T)). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, \psi, t) &= -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \left\langle \psi, \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \left\langle \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \psi_1(x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1) + \psi_2(-x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \sin(2x_1) + \psi_1 + 3\psi_1x_2 - \psi_2 - 3\psi_2x_2 \\ \psi_1 + 3\psi_1x_1 + 6\psi_2 - 3\psi_2x_1 \end{pmatrix}, \quad (7.38)$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2x_2) \end{pmatrix}. \quad (7.39)$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = \begin{pmatrix} -8u_1 + 2\psi_1 \\ -2u_2 + \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.40)$$

звідки $u_1 = \psi_1/4$, $u_2 = \psi_2/2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + \psi_1/2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + \psi_2/2. \end{cases} \quad (7.41)$$

Задача 7.8. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T (x(s) - z(s))^2 ds \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \leq \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$, неперервна функція $z(t) \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T \in \mathbb{R}$ є заданими.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = \gamma^2(x - z)^2, \quad f(x(t), u(t), t) = u(t), \quad \Phi(x(T)) = 0, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(t) = [-\rho, \rho]. \quad (7.42)$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\gamma^2(x - z)^2 + \psi u. \quad (7.43)$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -2\gamma^2 x + 2\gamma^2 z, \quad (7.44)$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = 0, \quad (7.45)$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто

$$u = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \quad (7.46)$$

Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\dot{x} = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \quad (7.47)$$

Задача 7.9. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) \, ds + \frac{(x(T) - x_1)^2}{2} \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = ax + u, x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = \frac{u^2}{2}, \quad f(x(t), u(t), t) = ax(t) + u(t), \quad \Phi(x(T)) = \frac{(x(T) - x_1)^2}{2}. \quad (7.48)$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд:

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\frac{u^2}{2} + a\psi x + \psi u. \quad (7.49)$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -a\psi, \quad (7.50)$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = x(T) - x_1. \quad (7.51)$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування,

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -u + \psi = 0, \quad (7.52)$$

звідки $u = \psi$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + \psi, \\ x(0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -a\psi, \\ \psi(T) = x(T) - x_1. \end{cases} \quad (7.53)$$

З рівнянь на ψ знаходимо, що $\psi(t) = C_1 \cdot e^{-at}$, де C_1 визначається з рівності $\psi(T) = x(T) - x_1$, тобто $C_1 = (x(T) - x_1) \cdot e^{aT}$.

Підставляючи це у рівняння на x знаходимо, що

$$x(t) = C_2 e^{at} - \frac{C_1 e^{-at}}{2a} = C_2 e^{at} - \frac{(x(T) - x_1) \cdot e^{a(T-t)}}{2a}, \quad (7.54)$$

де C_2 визначається з рівності $x(0) = x_0$, тобто $C_2 = x_0 + \frac{(x(T) - x_1) \cdot e^{aT}}{2a}$.

Залишається знайти $x(T)$ з рівності

$$x(T) = x_0 e^{aT} + \frac{(x(T) - x_1) \cdot (e^{2aT} - 1)}{2a}. \quad (7.55)$$

Зробивши це, отримаємо

$$x(T) = \frac{x_1(e^{2aT} - 1) - 2ax_0 e^{aT}}{e^{2aT} - 2a - 1}. \quad (7.56)$$

Остаточно,

$$x(t) = x_0 e^{at} + \frac{\left(\frac{x_1(e^{2aT} - 1) - 2ax_0 e^{aT}}{e^{2aT} - 2a - 1} - x_1 \right) \cdot (e^{a(T+t)} - e^{a(T-t)})}{2a}, \quad (7.57)$$

$$u(t) = \left(\frac{x_1(e^{2aT} - 1) - 2ax_0 e^{aT}}{e^{2aT} - 2a - 1} - x_1 \right) \cdot e^{a(T-t)}. \quad (7.58)$$

Задача 7.10. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(s) + x^2(s)) \, ds + \frac{(\dot{x}(T) - x_1)^2}{2} \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Позначимо $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2)^* = (x \quad \dot{x})^*$.

Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(\mathbf{x}, u, t) = \frac{u^2 + \mathbf{x}_1^2}{2}, \quad f(\mathbf{x}(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{x}(T)) = \frac{(\mathbf{x}_2(T) - x_1)^2}{2}. \quad (7.59)$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, u, \psi, t) = -f_0(\mathbf{x}, u, t) + \langle \psi, f(\mathbf{x}, u, t) \rangle = -\frac{u^2 + \mathbf{x}_1^2}{2} + \psi_1 \mathbf{x}_1 + \psi_2 u. \quad (7.60)$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.61)$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2(T) - x_1 \end{pmatrix}. \quad (7.62)$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування,

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -u + \psi_2 \quad (7.63)$$

звідки $u = \psi_2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \psi_2. \end{cases} \quad (7.64)$$

Задача 7.11. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) \, ds + x_2^2(T) \rightarrow \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 4.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з \mathbb{R}^2 , $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.