ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

У ваших руках конспект семінарських занять з нормативного курсу "Теорія керування", прочитаного доц., к.ф.-м.н. Пічкуром Володимиром Володимировичем на третьому курсі спеціальності прикладна математика факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка восени 2018-го року.

Конспект у компактній формі відображає матеріал курсу, допомагає сформувати загальне уявлення про предмет вивчення, правильно зорієнтуватися в даній галузі знань. Конспект лекцій з названої дисципліни сприятиме більш успішному вивченню дисципліни, причому більшою мірою для студентів заочної форми, екстернату, дистанційного та індивідуального навчання.

Упорядник безмежно вдячний Живолович Олександрі за безцінні конспекти, які лягли в основу цього збірника, та Антиповій Алісі за розв'язання і верстку частини задач.

Комп'ютерний набір та верстка – Скибицький Нікіта Максимович.

Зміст

1 Системи керування. Постановка задачі оптимального керування

1.1 Аудиторне заняття

Задача 1.1. Задана скалярна система керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0) = 1. \tag{1.1}$$

Тут x – стан системи, $t \in [0, 1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x) = ax. \tag{1.2}$$

Тут a – скалярний параметр.

1. Знайти траєкторію системи (1.1) при керуванні (1.2).
2. Знайти програмне керування $u(t) = ax(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.
3. Оцінити, при якому значення параметра $a \in \{2, 4, -3\}$ критерій якості

   $$\mathcal{J}(u) = x^2(1)$$

   буде мати менше значення.

Розв'язок.

1. Підставляючи керування (1.2) у систему (1.1), отримаємо систему

   $$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t), \quad x(0) = 1.$$

   Її розв'язок має вигляд

   $$x(t) = x(0) \cdot e^{at} = e^{at}.$$

2. Просто підставляємо знайдену у попередньому пункті траєкторію у вигляд (1.2) керування:

   $$u(t) = ax(t) = a \cdot e^{at}.$$

3. Множина $\{2, 4, -3\}$ скінченна, тому можна просто перебрати всі її елементи та обчислити значення критерію якості на кожному з них:

$$\mathcal{J}(u)|_{a=2} = x^2(1) = e^{2at}\big|_{t=1} = e^4,$$
$$\mathcal{J}(u)|_{a=4} = x^2(1) = e^{2at}\big|_{t=1} = e^8,$$
$$\mathcal{J}(u)|_{a=-3} = x^2(1) = e^{2at}\big|_{t=1} = e^{-6}.$$

Найменшим з цих значень є e^{-6} яке досягається при $a = -3$.

Задача 1.2. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1. \tag{1.3}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2. \tag{1.4}$$

1. Знайти траєкторію системи (1.3) при керуванні (1.4).
2. Знайти програмне керування $u(t) = 2x_1(t)+x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.
3. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом s, системи. що одержана при підстановці керування (1.4) у систему (1.3)?
4. Побудувати спряжену систему до системи, одержаної при підстановці керування (1.4) у систему (1.3), та її фундаментальну матрицю.

Розв'язок. 1. Підставляючи керування (1.4) у систему (1.3), отримаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = 3x_1(t) + 2x_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + 2x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1.$$

Її розв'язок

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^{4t}, \\ x_2(t) = e^{4t}. \end{cases}$$

2. Просто підставляємо знайдену у попередньому пункті траєкторію у вигляд (1.4) керування:

$$u(t) = 2x_1(t) + x_2 = 2 \cdot \left(2e^{4t}\right) + e^{4t} = 5e^{4t}.$$

3. Враховуючи, що загальним розв'язком системи (1.3) з підставленим керуванням (1.4) є

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t}, \\ x_2(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Це означає, що фундаментальна матриця цієї системи матиме вигляд

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} c_{11}e^t + 2c_{12}e^{4t} & c_{21}e^t + 2c_{22}e^{4t} \\ -c_{11}e^t + c_{12}e^{4t} & -c_{21}e^t + c_{22}e^{4t} \end{pmatrix}$$

Залишається пронормувати її за моментом s, тобто знайти такі $c_{11}(s)$, $c_{12}(s)$, $c_{21}(s)$, $c_{22}(s)$, що $\Theta(s,s) = E$. Коли це зробити, то отримаємо

$$\Theta(t,s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} & -2e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} \\ e^{t-s} - e^{4(t-s)} & 2e^{t-s} + e^{4(t-s)} \end{pmatrix}$$

4. Спряжена система буде

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t} = -3z_1(t) - z_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t} = -2z_1(t) - 2z_2(t), \end{cases}$$

а відповідна фундаментальна матриця

$$\Psi(t,s) = \Theta^*(s,t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{s-t} + 2e^{4(s-t)} & e^{s-t} - e^{4(s-t)} \\ -2e^{s-t} + 2e^{4(s-t)} & 2e^{s-t} + e^{4(s-t)} \end{pmatrix}$$

Задача 1.3. Розглядається задача Больца

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 u^2(s)\,\mathrm{d}s + (x(1) - 2)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x^2(t) + u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0,1]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ задана. Звести цю задачу до задачі Майєра.

Розв'язок. Введемо нову змінну

$$x_2 = \int_0^t u^2(s)\,\mathrm{d}s,$$

тоді

$$\mathcal{J}(u) = x_2(1) + (x_1(1) - 2)^2 \to \inf,$$

за умов, що

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1^2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = u^2(t). \end{cases} \qquad x_1(0) = x_0, x_2(0) = 0.$$

Задача 1.4. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, x_2(0) = -1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ 1, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.
2. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційовною?
3. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням

$$u(t) = 0, t \in [0, 2]$$

за умови, що критерій якості має вигляд

$$\mathcal{J}(u) = x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min.$$

Розв'язок. 1. При $t \in [0, 1]$ маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

З курсу диференційних рівнянь відомо, що тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t},$$

де v_1, v_2 – власні вектори, що відповідають λ_1 та λ_2 відповідно.

Нескладно бачити, що

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Підставляючи $t = 0$ отримуємо $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.

При $t \in (1, 2]$ маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

де c_3, c_4 задовольняють систему

$$\begin{cases} 2c_3 + c_4 + 1 & = 0 \\ 3c_3 + 4c_4 & = 0 \end{cases},$$

звідки $c_3 = -4/5$, $c_4 = 3/5$ і

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix},$$

Підставляючи $t = 1$ отримуємо $c_1 = \left(1 + \dfrac{3}{4e}\right)$, $c_2 = \dfrac{1}{20e^5}$.

Остаточно маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, & t \in [0, 1] \\ \left(1 + \dfrac{3}{4e}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \dfrac{1}{20e^5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, & t \in (1, 2] \end{cases}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(1-) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1-) \\ x_2(1-) \end{pmatrix}$$

З неперервності x_1, x_2 маємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1-) \\ x_2(1-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix}$$

З іншого боку,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(1+) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1+) \\ x_2(1+) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нескладно бачити, що

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(1-) \neq \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(1+),$$

тобто траєкторія не є неперервно диференційовною в точці 1.

3. Просто підставимо $t = 2$ в розв'язки для обох керувань (попутно зауваживши, що для нового керування розв'язок ми вже знаємо, це просто продовження вже знайденого розв'язку для $t \in [0, 1]$):

$$\left(e^2 + \frac{3}{4}e + \frac{e^5}{20} - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(-e^2 - \frac{3}{4}e + \frac{3e^5}{20} + \frac{3}{5}\right)^2 \vee (e^2)^2 + (-e^2)^2$$

Після марудних обчислень знаходимо, що права частина менше, тобто нове керування є кращим за початкове.

1.2 Домашнє завдання

Задача 1.5. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -8x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = -2, x_2(0) = 1. \tag{1.5}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 4x_1 - x_2. \tag{1.6}$$

1. До якого класу керувань належить керування (1.6): програмних керувань, чи керувань з оберненим зв'язком?

2. Знайти траєкторію системи при керуванні (1.6).

3. Знайти програмне керування $u(t) = 4x_1(t) - x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.

4. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом s, системи, що одержана при підстановці керування (1.6) в систему (1.5)?

5. Побудувати спряжену систему до системи, одержаної при підстановці керування (1.6) в систему (1.5), та її фундаментальну матрицю.

Розв'язок. 1. З оберненим зв'язком.

2.
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = (\lambda+1)\lambda = 0,$$

звідки $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$.

З курсу диференційних рівнянь відомо, що тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{-t} + c_2 v_2,$$

де v_1, v_2 – власні вектори, що відповідають λ_1 та λ_2 відповідно.

Нескладно бачити, що

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Підставляючи $t = 0$ отримуємо $c_1 = 4$, $c_2 = -3$.

Остаточно маємо:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3. Просто підставляємо знайдені $x_1(t)$, $x_2(t)$ в $u(x_1, x_2)$:

$$u(t) = 4 \left(4 \cdot (1) - 3 \cdot (2) \cdot e^{-t}\right) - \left(4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) \cdot e^{-t}\right) = 24 - 33e^{-t}.$$

4. З вигляду загального розв'язку бачимо, що вищезгадана фундаментальна матриця матиме вигляд

$$\Theta(t, s) = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 e^{s-t} & c_3 + 2c_4 e^{s-t} \\ -2c_1 - 3c_2 e^{s-t} & -2c_3 - 3c_4 e^{s-t} \end{pmatrix},$$

причому

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 &= 1 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 0 \end{cases}$$

(і аналогічна система для c_3, c_4).

Знаходимо $c_1 = -3$, $c_2 = 2$, $c_3 = -2$, $c_4 = 1$ і підставляємо у матрицю:

$$\Theta(t, s) = \begin{pmatrix} -3 + 4e^{s-t} & -2 + 2e^{s-t} \\ 6 - 6e^{s-t} & 4 - 3e^{s-t} \end{pmatrix},$$

5. Спряжена система буде

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

а відповідна фундаметальна матриця

$$\Psi(t, s) = \Theta^*(s, t) = \begin{pmatrix} -3 + 4e^{t-s} & 6 - 6e^{t-s} \\ -2 + 2e^{t-s} & 4 - 3e^{t-s} \end{pmatrix},$$

Задача 1.6. Розглядається задача Лагранжа

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t)x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Звести цю задачу до задачі Майєра.

Розв'язок. Введемо нову фазову координату $x_3(t) = \int_0^t u^2(s)\,\mathrm{d}s$, тоді до системи додається початкова умова $x_3(0) = 0$, рівняння $\dot{x}_3 = u^2$, а функціонал якості переписується у вигляді $x_3(T) \to \inf$.

Задача 1.7. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) - 5x_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ t, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. До якого класу керувань належить таке керування: програмних керувань чи з оберненим зв'язком?

2. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.

3. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційованою?

4. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням

   $$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ t^2, & \text{якщо } t \in (1, 2], \end{cases}$$

   за умови, що критерій якості має вигляд

   $$\mathcal{J}(u) = \int_0^2 u^2(s)\,\mathrm{d}s + x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min.$$

Розв'язок. 1. Керування програмне бо не залежить від x.

2. При $t \in [0, 1]$ маємо
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння
$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0,$$

звідки $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$.

З курсу диференційних рівнянь відомо, що тоді загальний розв'язок має вигляд
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 (\cos(2t) - i \sin(2t)) + c_2 v_2 (\cos(2t) + i \sin(2t)),$$

де v_1, v_2 – власні вектори, що відповідають λ_1 та λ_2 відповідно.

Нескладно бачити, що
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5\sin(2t) \\ \sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Підставляючи $t = 0$ отримуємо $c_1 = 0$, $c_2 = 1/2$.

При $t \in (1, 2]$ маємо

...

3.

4.

2 Елементи багатозначного аналізу. Множина досяжності

2.1 Аудиторне заняття

Задача 2.1. Знайти $A + B$ і λA, а також метрику Хаусдорфа $\alpha(A, B)$, якщо:

1. $A = \{-3, 2, -1\}, B = \{-2, 5, 1\}, \lambda = 3$;
2. $A = \{4, 2, -4\}, B = [-2, 3], \lambda = -1$;
3. $A = [-1, 2], B = [3, 7], \lambda = -2$;

Розв'язок. 1. За визначенням операції $A + B = \{-5, 2, -2, 0, 7, 3, -3, 4, 0\}$, $\lambda A = \{-9, 6, -3\}$.

Метрика Хаусдорфа визначатиметься як

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\},$$

в свою чергу $\beta(A, B)$ визначається як максимум з мінімумів відхилень множини, тобто, у нашому випадку, $\beta(A, B) = \max\{1, 1, 1\}; \beta(B, A) = \max\{1, 3, 1\}$, тоді $\alpha(A, B) = 3$.

2. За визначенням операції $A + B = [-6, 7]$, $\lambda A = \{-4, -2, 4\}$.

   Метрика Хаусдорфа визначатиметься як

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\},$$

   в свою чергу $\beta(A, B)$ визначається як максимум з мінімумів відхилень множини, тобто, у нашому випадку, $\beta(A, B) = \max\{1, 0, 2\}; \beta(B, A) = \max[0, 3]$, оскільки -1 відхиляється від найближчих елементів на 3 і це є максимумом, тоді $\alpha(A, B) = 3$.

3. За визначенням операції $A + B = [2, 9]$, $\lambda A = [-4, 2]$.

   Метрика Хаусдорфа визначатиметься як

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\},$$

   в свою чергу $\beta(A, B)$ визначається як максимум з мінімумів відхилень множини, тобто, у нашому випадку, $\beta(A, B) = \max[1, 4]; \beta(B, A) = \max[1, 5]$, оскільки відповідні краї відхиляються на 4 та 5 відповідно (-1 від 3 та 7 від 2), тоді $\alpha(A, B) = 5$.

Задача 2.2. Знайти MA, якщо

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розв'язок. За означенням $MA = \{Ma \in \mathbb{R}^m, a \in A\}$, тому

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ -11 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix};$$

Отже, отримаємо

$$MA = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -22 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 2.3. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A = [0, r]$;
2. $A = [-r, r]$;
3. $A = \{(x_1, x_2) : |x_1| \le 1, |x_2| \le 2\}$;
4. $A = \mathcal{K}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le r\}$;
5. $A = \mathcal{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Розв'язок. 1. За означення опорної функції,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \begin{cases} 0, & \psi < 0 \\ r\psi, & 0 \le \psi \end{cases} = \max\{0, r\psi\}.$$

2. За означення опорної функції,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \begin{cases} -r\psi, & \psi < 0 \\ r\psi, & 0 \le \psi \end{cases} = r|\psi|.$$

3. За означення опорної функції,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \max_{a \in A} (\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2) = |\psi_1| + 2|\psi_2|.$$

4. За властивістю опорної функції (вона дорівнює орієнтованій відстані від початку координат до опорної площини множини A яка відповідає напрямку ψ), маємо $c(\mathcal{K}_r(0), \psi) = r\|\psi\|$.

5. За тією ж властивістю опорної функції маємо $c(\mathcal{S}^n, \psi) = \|\psi\|$.

Задача 2.4. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, x]$, $x \in [0, 1]$;
2. $F(x) = \mathcal{K}_x(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le x\}$, $x \in [0, 1]$.

Розв'язок. Скористаємося рівністю

$$c\left(\int_0^1 F(x), \psi\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 c(F(x), \psi)\,\mathrm{d}x,$$

яка виконується в умовах теореми Ляпунова про опуклість інтегралу Аумана.

1.
$$c(\mathcal{J}) = \int_0^1 c([0, x], \psi)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \psi/2, & 0 \le \psi \\ 0, & \psi < 0 \end{cases}.$$

   А далі наші знання опорних функцій підказують, що $\mathcal{J} = [0, 1/2]$.

2.
$$c(\mathcal{J}) = \int_0^1 c(\mathcal{K}_x(0), \psi)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\|\psi\|\,\mathrm{d}x = \|\psi\|/2.$$

   А далі наші знання опорних функцій підказують, що $\mathcal{J} = \mathcal{K}_{1/2}(0)$.

Задача 2.5. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + u,$$

де $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \ge 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \le 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \le 1\}.$$

Розв'язок. Скористаємося теоремою про вигляд множини досяжності лінійної системи керування:

$$\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = \Theta(t, t_0)\mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^t \Theta(t, s)B(s)\mathcal{U}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Підставимо вже відомі значення:

$$\mathcal{X}(t, [-1, 1]) = \Theta(t, 0) \cdot [-1, 1] + \int_0^t (\Theta(t, s) \cdot 1 \cdot [-1, 1]) \, \mathrm{d}s,$$

тобто залишилося знайти Θ. Знайдемо її з системи

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t, s)}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot \Theta(t, s) = \Theta(t, s).$$

Нескладно бачити, що $\Theta(t, s) = e^{t-s}$, тому

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(t, [-1, 1]) = [-e^t, e^t] + \int_0^t [-e^{t-s}, e^{t-s}] \, \mathrm{d}s = \\ = [-e^t, e^t] + [1 - e^t, e^t - 1] = [1 - 2e^t, 2e^t - 1].\end{aligned}$$

Задача 2.6. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 2x_1 + x_2 + u_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 3x_1 + 4x_2 + u_2, \end{cases}$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{M}_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : |x_{01}| \leq 1, |x_{02}| \leq 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}.$$

Розв'язок. Скористаємося теоремою про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^t c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi) \, \mathrm{d}s.$$

Підставимо вже відомі значення:

$$c(\mathcal{X}(t, [-1, 1]^2), \psi) = c([-1, 1]^2, \Theta^*(t, 0)\psi) + \int_0^t c([-1, 1]^2, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \Theta^*(t, s)\psi) \, \mathrm{d}s,$$

тобто залишилося знайти Θ. Знайдемо її з системи

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t, s)}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot \Theta(t, s) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Theta(t, s).$$

Нескладно бачити, що

$$\Theta(t,s) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{t-s} + e^{5(t-s)} & -e^{t-s} + e^{5(t-s)} \\ -3e^{t-s} + 3e^{5(t-s)} & e^{t-s} + 3e^{5(t-s)} \end{pmatrix}$$

Тому

$$\begin{aligned}
c\left(\mathcal{X}(t,[-1,1]^2), \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right) &= c\left([-1,1]^2, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{t} + e^{5t} & -3e^{t} + 3e^{5t} \\ -e^{t} + e^{5t} & e^{t} + 3e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right) + \\
&+ \int_0^t c\left([-1,1]^2, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{t-s} + e^{5(t-s)} & -3e^{t-s} + 3e^{5(t-s)} \\ -e^{t-s} + e^{5(t-s)} & e^{t-s} + 3e^{5(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right) \mathrm{d}s = \\
&= c\left([-1,1]^2, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (3e^{t} + e^{5t})\psi_1 + (-3e^{t} + 3e^{5t})\psi_2 \\ (-e^{t} + e^{5t})\psi_1 + (e^{t} + 3e^{5t})\psi_2 \end{pmatrix}\right) + \\
&+ \int_0^t c\left([-1,1]^2, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (3e^{t-s} + e^{5(t-s)})\psi_1 + (-3e^{t-s} + 3e^{5(t-s)})\psi_2 \\ (-e^{t-s} + e^{5(t-s)})\psi_1 + (e^{t-s} + 3e^{5(t-s)})\psi_2 \end{pmatrix}\right) \mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{4}\left(\left|(3e^{t} + e^{5t})\psi_1 + (-3e^{t} + 3e^{5t})\psi_2\right| + \left|(-e^{t} + e^{5t})\psi_1 + (e^{t} + 3e^{5t})\psi_2\right|\right) + \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^t \left|(3e^{t-s} + e^{5(t-s)})\psi_1 + (-3e^{t-s} + 3e^{5(t-s)})\psi_2\right| \mathrm{d}s + \\
&+ \frac{1}{4}\int_0^t \left|(-e^{t-s} + e^{5(t-s)})\psi_1 + (e^{t-s} + 3e^{5(t-s)})\psi_2\right| \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

2.2 Домашнє завдання

Задача 2.7. Знайти $A+B$ і λA, а також метрику Хаусдорфа $\alpha(A,B)$, якщо

1. $A = \{4, -2, 3\}$, $B = \{7, -1, 1\}$, $\lambda = 2$;
2. $A = \{5, -5, 2\}$, $B = [1, 3]$, $\lambda = -1$;
3. $A = [-4, -2]$, $B = [-1, 5]$, $\lambda = 3$;

Розв'язок. 1. $A = \{4, -2, 3\}$, $B = \{7, -1, 1\}$, $\lambda = 2$;

$$A + B = \{4+7, 4-1, 4+1, -2+7, -2-1, -2+1, 3+7, 3-1, 3+1\} = \\ = \{11, 3, 5, 5, -3, -1, 10, 2, 4\} = \{-3, -1, 2, 3, 4, 5, 10, 11\}.$$

$$\lambda A = \{2 \cdot 4, 2 \cdot -2, 2 \cdot 3\} = \{8, -4, 6\}.$$

$$\alpha(A,B) = \max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\} = \\ = \max\{\max\{3,1,2\}, \max\{3,1,2\}\} = \max\{3,3\} = 3.$$

2. $A = \{5, -5, 2\}$, $B = [1, 3]$, $\lambda = -1$;

$$A + B = (5 + [1,3]) \cup (-5 + [1,3]) \cup (2 + [1,3]) = \\ = [6,8] \cup [-4,-1] \cup [3,5] = [-4,-1] \cup [3,5] \cup [6,8].$$

$$\lambda A = \{-1 \cdot 5, -1 \cdot -5, -1 \cdot 2\} = \{-5, 5, -2\}.$$

$$\alpha(A,B) = \max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\} = \\ = \max\{\max\{2,6,0\}, \max_{b \in [1,3]}\{|b-2|\}\} = \max\{6,1\} = 6.$$

3. $A = [-4, -2]$, $B = [-1, 5]$, $\lambda = 3$;

$$A + B = [-4-1, -2+5] = [-5, 3].$$

$$\lambda A = [3 \cdot -4, 3 \cdot -2] = [-12, -6].$$

$$\alpha(A,B) = \max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\} = \\ = \max\{\max\{|-4+1|, |-2+1|\}, \max\{|-1+2|, |5+2|\}\} = \max\{3,7\} = 7.$$

Задача 2.8. Знайти MA, якщо

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розв'язок.

$$MA = \left\{ M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 2.9. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A = \{-1, 1\}$;
2. $A = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \le 2, |x_2| \le 4, |x_3| \le 1\}$;
3. $A = \{a\}$;
4. $A = \mathcal{K}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le r\}$.

Розв'язок.

1. За визначенням, $c(A, \psi) = \max\limits_{x \in \{-1,1\}} \langle x, \psi \rangle = \max(-\psi, \psi) = |\psi|$.
2. За визначенням, $c(A, \psi) = \max\limits_{\substack{x_1 : |x_1| \le 2 \\ x_2 : |x_2| \le 4 \\ x_3 : |x_3| \le 1}} x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = 2|\psi_1| + 4|\psi_2| + |\psi_3|$.
3. За визначенням, $c(A, \psi) = \max\limits_{x \in \{a\}} \langle x, \psi \rangle = \langle a, \psi \rangle$.
4. За визначенням,

$$c(A, \psi) = \max_{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le r} \langle x, \psi \rangle = \max_{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le r} \langle a + y, \psi \rangle =$$
$$= \langle a, \psi \rangle + \max_{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le r} \langle y, \psi \rangle = \langle a, \psi \rangle + c(\mathcal{K}_r(0), \psi) = \langle a, \psi \rangle + r\|\psi\|.$$

Задача 2.10. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int_0^{\pi/2} F(x)dx$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, \sin x]$, $x \in [0, \pi/2]$.
2. $F(x) = [-\sin x, \sin x]$, $x \in [0, \pi/2]$.
3. $F(x) = \mathcal{K}_{\sin x}(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le \sin x\}$, $x \in [0, \pi/2]$.

Розв'язок. Скористаємося теоремою про зміну порядку інтегрування і взяття опорної функції:

1. $c(\mathcal{J}, \psi) = \int_0^{\pi/2} c([0, \sin x], \psi) dx = \int_0^{\pi/2} \max(0, \psi) \sin x dx = \max(0, \psi)$, звідки $\mathcal{J} = [0, 1]$.
2. $c(\mathcal{J}, \psi) = \int_0^{\pi/2} c([-\sin x, \sin x], \psi) dx = \int_0^{\pi/2} |\psi| \sin x dx = |\psi|$, звідки $\mathcal{J} = [-1, 1]$.
3. $c(\mathcal{J}, \psi) = \int_0^{\pi/2} c(\mathcal{K}_{\sin x}(0), \psi) dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \|\psi\| dx = \|\psi\|$, звідки $\mathcal{J} = \mathcal{K}_1(0)$.

Задача 2.11. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + bu,$$

де $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$, b – деяке ненульове число,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \leq 2\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 3\}.$$

Розв'язок. Множину досяжності знайдемо через її опорну функцію:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}(s), C^\star(s)\Theta^*(t, s)\psi) \, \mathrm{d}s.$$

Для цього послідовно знаходимо:

$\Theta(t, s) = e^{t-s}$, знайдено із рівності $\dfrac{d\Theta(t, s)}{dt} = A(t)\Theta(t, s) = \Theta(t, s)$ у нашому випадку.

$c(\mathcal{M}_0, \psi) = c([-2, 2], \psi) = 2|\psi|$, вже достатньо відома нам опорна функція.

$c(\mathcal{U}(s), \psi) = c([-3, 3], \psi) = 3|\psi|$, ще одна вже достатньо відома нам опорна функція.

Послідовно підставляючи знайдені вирази в формулу вище знаходимо:

$$\begin{aligned} c(X(t,\mathcal{M}_0),\psi) &= c(\mathcal{M}_0, \Theta^\star(t,t_0),\psi) + \int_{t_0}^t c(\mathcal{U}(s), C^\star(s)\Theta^\star(t,s)\psi)ds = \\ &= c([-2,2], \Theta^\star(t,0),\psi) + \int_0^t c([-3,3], b\Theta^\star(t,s)\psi)ds = \\ &= 2\left|\Theta^\star(t,0)\psi\right| + \int_0^t 3\left|b\Theta^\star(t,s)\psi\right|ds = \\ &= 2\left|e^t\psi\right| + \int_0^t 3\left|be^{t-s}\psi\right|ds = 2e^t|\psi| + 3|b\psi|\int_0^t e^{t-s}ds = \\ &= 2e^t|\psi| + 3|b\psi|\left(e^t-1\right) = \left(2e^t + 3|b|\left(e^t-1\right)\right)|\psi|, \end{aligned}$$

звідки $\mathcal{X}(t,\mathcal{M}_0) = [-2e^t - 3|b|\left(e^t-1\right), 2e^t + 3|b|\left(e^t-1\right)]$.

Задача 2.12. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2u_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 + u_2, \end{cases}$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{M}_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \ge 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : x_{01}^2 + x_{02}^2 \le 4\},$$
$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \le 1\}.$$

Розв'язок. Одразу помітимо, що $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\Theta(t,s)$ знайдемо розв'язавши однорідну систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2, \end{cases}$$

Її визначник $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$, звідки $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Підставляючи знайдені числа у систему, знаходимо власні вектори: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ відповідно.

Отже загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}(t) = c_1\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}e^{3t}\\-2e^{3t}\end{pmatrix}$$

Розв'язуючи рівняння

$$c_1\begin{pmatrix}e^{-s}\\2e^{-s}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}e^{3s}\\-2e^{3s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

і

$$c_1\begin{pmatrix}e^{-s}\\2e^{-s}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}e^{3s}\\-2e^{3s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

знаходимо фундаментальну матрицю системи, нормовану за моментом s, а саме

$$\Theta(t,s) = \begin{pmatrix}\dfrac{e^{s-t}+e^{3(t-s)}}{2} & \dfrac{e^{s-t}-e^{3(t-s)}}{4}\\ e^{s-t}-e^{3(t-s)} & \dfrac{e^{s-t}+e^{3(t-s)}}{2}\end{pmatrix}$$

Далі знаходимо $c(\mathcal{M}_0,\psi) = c(\mathcal{K}_2(0),\psi) = 2\|\psi\|$, та $c(\mathcal{U},\psi) = c(\mathcal{K}_1(0),\psi) = \|\psi\|$, вже достатньо відомі нам опорні функції.

Нарешті, можемо зібрати це все докупи:

$$c(\mathcal{X}(t,\mathcal{M}_0),\psi) = c(\mathcal{M}_0,\Theta^\star(t,0)\psi) + \int_0^t c(\mathcal{U}(s),C^\star(s)\Theta^\star(t,s)\psi)ds =$$

$$= 2\|\Theta^\star(t,0)\psi\| + \int_0^t \|C^\star(s)\Theta^\star(t,s)\psi\|\,ds =$$

$$= 2\left\|\begin{pmatrix}\dfrac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & e^{3t}-e^{-t}\\ \dfrac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & \dfrac{e^{-t}+e^{3t}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{pmatrix}\right\| +$$

$$+\int_0^t \left\| \begin{pmatrix} e^{s-t} + e^{3(t-s)} & 2(e^{3(t-s)} - e^{s-t}) \\ \dfrac{e^{3(t-s)} - e^{s-t}}{4} & \dfrac{e^{s-t} + e^{3(t-s)}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\| ds =$$

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \cdot \psi_1 + (e^{3t} - e^{-t}) \cdot \psi_2 \\ \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{4} \cdot \psi_1 + \dfrac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \cdot \psi_2 \end{pmatrix} \right\| + ...$$

3 Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування

3.1 Аудиторне заняття

Задача 3.1. Перевести систему

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad t \in [0, T],$$

з точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = y_0$ за допомогою керування з класу:

1. постійних функцій $u(t) = c$, c – константа;
2. кусково-постійних функцій

   $$u(t) = \begin{cases} c_1, & t \in [0, t_1], \\ c_2, & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

   Тут c_1, c_2 – константи, $c_1 \neq c_2$, $0 < t_1 < T$;
3. програмних керувань $u(t) = ct$, c – константа;
4. керувань з оберненим зв'язком $u(x) = cx$, c – константа.

Розв'язок. Скористаємося формулою $x(T) = x(0) + \int_0^T \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$:

1. $$x(T) = x(0) + \int_0^T c\,\mathrm{d}t = x(0) + cT,$$

   звідки

   $$c = \frac{x(T) - x(0)}{T} = \frac{y_0 - x_0}{T};$$

2. $$x(T) = x(0) + \int_0^{t_1} c_1\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^T c_2\,\mathrm{d}t = x(0) + c_1 t_1 + c_2(T - t_1).$$

   Розв'язок не єдиний,

   $$c_2 = \frac{x(T) - x(0) - c_1 t_1}{T - t_1},$$

   де c_1 – довільна стала, наприклад $c_1 = 0$, тоді

   $$c_2 = \frac{x(T) - x(0)}{T - t_1} = \frac{y_0 - x_0}{T - t_1}.$$

3.
$$x(T) = x(0) + \int_0^T ct \, \mathrm{d}t = x(0) + \frac{cT^2}{2},$$
звідки
$$c = \frac{2(x(T) - x(0))}{T^2} = \frac{2(y_0 - x_0)}{T^2}.$$

4. У цьому випадку проінтегрувати не можна, бо u залежить від x, тому просто запишемо за формулою Коші
$$x(T) = x(0) \cdot e^{cT},$$
звідки
$$c = \frac{\ln(x(T)/x(0))}{T} = \frac{\ln(y_0) - \ln(x_0)}{T}.$$
Варто зауважити, не для всіх пар x_0 і y_0 коректно визначається значення c. А саме, необхідно щоб y_0 було того ж знаку, що і x_0.

Задача 3.2. 1. Використовуючи означення, знайти грамміан керованості для системи керування
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = tx(t) + \cos(t) \cdot u(t), \quad t \geq 0.$$

2. Записати диференціальне рівняння для грамміана керованості і за його допомогою знайти грамміан керованості.

3. Використовуючи критерій керованості, вказати інтервал повної керованості вказаної системи керування. Для цього інтервала записати керування, яке розв'язує задачу про переведення системи з точки x_0 у стан x_T.

Розв'язок. 1. Скористаємося формулою
$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^T \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) \, \mathrm{d}s.$$
$\Theta(T, s)$ знаходимо з системи
$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t, s)}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot \Theta(t, s) = t \cdot \Theta(t, s),$$
а саме $\Theta(t, s) = \exp\left\{\frac{t^2 - s^2}{2}\right\}$. Підставляючи всі знайдені значення, отримаємо
$$\Phi(T, t_0) = \cos^2(T) \cdot e^{T^2} \int_{t_0}^T e^{-s^2} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \cos^2(T) \cdot e^{T^2} \cdot \mathrm{erf}(T).$$

2. Запишемо систему

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t,t_0)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot\Phi(t,t_0) + \Phi(t,t_0)\cdot A^*(t) + B(t)\cdot B^*(t), \quad \Phi(t_0,t_0) = 0.$$

І підставимо відомі значення:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t,0)}{\mathrm{d}t} = 2t\Phi(t,0) + \cos^2(t), \quad \Phi(0,0) = 0.$$

Звідси

$$\Phi(t,0) = \frac{1}{8}\sqrt{\pi}e^{t^2-1}(-2e\,\mathrm{erf}(t) + i(\mathrm{erfi}(1+it) - i\,\mathrm{erfi}(1-it)),$$

а

$$\Phi(T,0) = \frac{1}{8}\sqrt{\pi}e^{T^2-1}(-2e\,\mathrm{erf}(T) + i(\mathrm{erfi}(1+iT) - i\,\mathrm{erfi}(1-iT)),$$

3. З вигляду грамміану керованості отриманого у першому пункті очевидно, що система цілком керована на півінтервалі $[0,\pi/2)$, зокрема на інтервалі $[0,1]$.

   Підставимо тепер граміан у формулу для керування що розв'язує задачу про переведення системи із стану x_0 у стан x_T:

$$\begin{aligned} u(t) &= B^*(t)\Theta^*(T,t)\Phi^{-1}(T,t_0)(x_T - \Theta(T,t_0)x_0) = \\ &= \cos(t)\cdot\exp\left\{\frac{T^2-t^2}{2}\right\}\Phi^{-1}(T,0)\left(x_T - \exp\left\{\frac{T^2}{2}\right\}x_0\right) \end{aligned}$$

Задача 3.3. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s$$

за умов, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sin(t)\cdot x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, x(T) = x_T.$$

Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, x_0, X_T – задані точки, $t \in [t_0, T]$.

Розв'язок. Знайдемо шукане керування за формулою

$$u(t) = B^*(t)\Theta^*(T,t)\Phi^{-1}(T,t_0)(x_T - \Theta(T,t_0)x_0).$$

У цій задачі $\Theta(t,s) = e^{\cos(s)-\cos(t)}$, знайдене з системи $\dot{\Theta} = A\Theta$, $\Phi(T,t_0) = e^{-2\cos(T)}\int_0^T e^{2\cos(s)}\,\mathrm{d}s$, підставляючи знаходимо

$$u(t) = \frac{e^{\cos(t)+\cos(T)} \cdot (x_T - e^{1-\cos(T)}x_0)}{\int_0^T e^{2\cos(s)}\,\mathrm{d}s}.$$

Задача 3.4. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)dx$$

за умов, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = u(t),$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = y_0, x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут x – стан системми, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0,T]$.

Розв'язок. Почнемо з того що зведемо рівняння другого порядку до системи рівнянь заміною $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}_1$, тоді маємо систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u(t).$$

Знайдемо власні числа матриці $A-\lambda E$: $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$, звідки $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Знайдемо власні вектори, вони будуть $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ відповідно. Звідси знаходимо загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = c_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

З рівняння

$$c_1\begin{pmatrix} e^{2s} \\ 2e^{2s} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{3s} \\ 3e^{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

знаходимо $c_1 = 3e^{-2s}$, $c_2 = -2e^{-3s}$, а з рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{2s} \\ 2e^{2s} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3s} \\ 3e^{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

знаходимо $c_1 = -e^{-2s}$, $c_2 = e^{-3s}$, тобто

$$\Theta(t,s) = \begin{pmatrix} 3e^{2(t-s)} - 2e^{3(t-s)} & -e^{2(t-s)} + e^{3(t-s)} \\ 6e^{2(t-s)} - 6e^{3(t-s)} & -2e^{2(t-s)} + 3e^{3(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо грамміан за формулою

$$\Phi(T,0) = \int_0^T \Theta(T,s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T,s)ds.$$

$$\Theta(T,s)B(s) = \begin{pmatrix} -e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} \\ -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)} \end{pmatrix}.$$

$$B^*(s)\Theta^*(T,s) = (\Theta(T,s)B(s))^\star = \begin{pmatrix} -e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} & -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\Phi(T,0) &= \int_0^T \begin{pmatrix} -e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} \\ -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} & -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)} \end{pmatrix} ds = \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} e^{4(T-s)} - 2e^{5(T-s)} + e^{6(T-s)} & 2e^{4(T-s)} - 5e^{5(T-s)} + 3e^{6(T-s)} \\ 2e^{4(T-s)} - 5e^{5(T-s)} + 3e^{6(T-s)} & 4e^{4(T-s)} - 12e^{5(T-s)} + 9e^{6(T-s)} \end{pmatrix} ds = \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{4T}-1}{4} - \dfrac{2(e^{5T}-1)}{5} + \dfrac{e^{6T}-1}{6} & \dfrac{e^{4T}-1}{2} - (e^{5T}-1) + \dfrac{e^{6T}-1}{2} \\ \dfrac{e^{4T}-1}{2} - (e^{5T}-1) + \dfrac{e^{6T}-1}{2} & (e^{4T}-1) - \dfrac{12(e^{5T}-1)}{5} + \dfrac{3(e^{6T}-1)}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Чесно кажучи вже обчислення визначника грамміану є надто складною обчислювальною задачею, не бачу сенсу її робити вручну.

Задача 3.5. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

1.
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = tx_1(t) + x_2(t) + u_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + 2x_2(t) + t^2u_2(t). \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор стану, $u = (u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $t \in [0, T]$.

2.
$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \sin(t) \cdot x(t) = u(t).$$

Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Розв'язок. 1. $A = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{11} = 2t\varphi_{11} + 2\varphi_{12} + 1, \\ \dot{\varphi}_{12} = -\varphi_{11} + (t+2)\varphi_{12} + \varphi_{22}, \\ \dot{\varphi}_{21} = \ldots \end{cases}$$

2. Введемо нову змінну $x_2 = \dot{x}$, тоді $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(t) & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{11} = 2\varphi_{12}, \\ \dot{\varphi}_{12} = (1 - \sin(t))\varphi_{11}, \\ \ldots \end{cases}$$

Задача 3.6. Знайти диференціальне рівняння грамміана керованості для системи керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = \cos(t) \cdot x_1(t) - \sin(t) \cdot x_2(t) + u_1(t) - 2u_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = \sin(t) \cdot x_1(t) + \cos(t) \cdot x_2(t) - 3u_1(t) + 4u_2(t). \end{cases}$$

Розв'язок.

Задача 3.7. Дослідити системи на керованість. використовуючи другий критерій керованості:

1.
$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u;$$

2.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + au \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 + u \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u_2 \end{cases}$$

Розв'язок. 1. Почнемо з того що зведемо рівняння другого порядку до системи рівнянь заміною $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}_1$, тоді маємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_2 - bx_1 + u \end{cases}$$

Тоді

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Її ранг дорівнює 2 якщо за будь-яких a і b, тобто система завжди цілком керована.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+1 \\ 1 & a+4 \end{pmatrix}.$$

Її визначник $a^2 + 4a - 2a - 1 = a^2 + 2a - 1 = 0$ якщо $a = -1 \pm \sqrt{2}$, тоді система не є цілком керованою, а інакше є.

3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Її ранг дорівнює 3, тобто система цілком керована.

3.2 Домашнє завдання

Задача 3.8. Перевести систему

$$\frac{dx}{dt} = 2tx + u, t \in [0, T],$$

з точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = y_0$ за допомогою керування з класу:

1. постійних функцій $u(t) = c$, c – константа;
2. кусково-постійних функцій
$$u(t) = \begin{cases} c_1 & t \in [0, t_1), \\ c_2 & t \in (t_1, T]. \end{cases}$$
Тут c_1, c_2 – константи, $c_1 \neq c_2$, $0 < t_1 < T$;
3. програмних керувань $u(t) = ct$, c – константа;
4. керувань з оберненим зв'язок $u(x) = cx$, c – константа.

Розв'язок. Будемо просто підставляти керування у диференційне рівняння і розв'язувати його:

1. Зводимо до канонічного вигляду лінійного рівняння:
$$\frac{dx}{dt} - 2t \cdot x(t) = c.$$
Домножаємо на множник що інтегрує:
$$\exp\{-t^2\} \cdot \frac{dx}{dt} - 2t \cdot \exp\{-t^2\} \cdot x(t) = c \cdot \exp\{-t^2\}$$
$$\exp\{-t^2\} \cdot \frac{dx}{dt} + x(t) \cdot \frac{d\exp\{-t^2\}}{dt} = c \cdot \exp\{-t^2\}.$$
Згортаємо похідну добутку:
$$\frac{d(\exp\{-t^2\} \cdot x(t))}{dt} = c \cdot \exp\{-t^2\}.$$
Інтегруємо:
$$\left(\exp\{-t^2\} \cdot x(t)\right)\Big|_0^T = \int_0^T c \cdot \exp\{-t^2\} dt$$

$$\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - x_0 = c \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \mathrm{erf}(T),$$

і виражаємо звідси c:

$$c = 2 \cdot \frac{\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - x_0}{\sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(T)},$$

де erf позначає функцію помилок, тобто $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x \exp\{-t^2\}dt.$

Зауважимо, що задача має розв'язок завжди.

2. Нескладно зрозуміти, що нас задовольнить довільне керування вигляду

$$c_2 = 2 \cdot \frac{\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - \exp\{-t_1^2\} \cdot x_1}{\sqrt{\pi} \cdot (\mathrm{erf}(T) - \mathrm{erf}(t_1))},$$

де

$$x_1 = \frac{2x_0 + c_1\sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(T)}{2 \cdot \exp\{-t_1^2\}},$$

тобто ми просто дозволили c_1 бути довільною сталою, обчислили $x(t_1)$, а потім розв'язали задачу переведення системи з точки (t_1, x_1) у точку (T, y_0) як у першому пункті, з мінімальними поправками на межі інтегрування.

Зокрема, якщо $c_1 = 0$, то $x_1 = \dfrac{x_0}{\exp\{-t_1^2\}}$, тому $c_2 = 2 \cdot \dfrac{\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - x_0}{\sqrt{\pi} \cdot (\mathrm{erf}(T) - \mathrm{erf}(t_1))}$.

Зауважимо, що задача має розв'язок завжди.

3.

$$\frac{dx}{2x(t) + c} = tdt$$

$$\int_0^T \frac{dx}{2x(t) + c} = \int_0^T tdt$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln(2x(t) + c)\right)\Bigg|_0^T = \frac{T^2}{2}$$

$$\ln(2y_0 + c) - \ln(2x_0 + c) = T^2$$

$$\ln\left(\frac{2y_0 + c}{2x_0 + c}\right) = T^2$$

$$\frac{2y_0 + c}{2x_0 + c} = \exp\{T^2\}$$

$$2y_0 + c = (2x_0 + c) \cdot \exp\{T^2\}$$

$$2(y_0 - x_0 \cdot \exp\{T^2\}) = c \cdot (\exp\{T^2\} - 1)$$

звідки

$$c = 2 \cdot \frac{y_0 - x_0 \cdot \exp\{T^2\}}{\exp\{T^2\} - 1}.$$

Зауважимо, що задача має розв'язок завжди.

4.

$$\frac{dx}{dt} = 2t \cdot x(t) + c \cdot x(t)$$

$$\frac{dx}{x(t)} = (2t + c)dt$$

$$\int_0^T \frac{dx}{x(t)} = \int_0^T (2t + c)dt$$

$$(\ln(x(t))|_0^T = T^2 + cT$$

$$\ln(y_0) - \ln(x_0) = T^2 + cT$$

$$\ln(y_0/x_0) = T^2 + cT$$

звідки

$$c = \frac{\ln{(y_0/x_0)} - T^2}{T}.$$

Зауважимо, що задача має розв'язок тільки якщо $\operatorname{sgn}(x_0) = \operatorname{sgn}(y_0)$.

Задача 3.9. 1. Знайти грамміан керованості для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t)$$

і дослідити її на керованість, використовуючи перший критерій керованості.

2. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds \to \min$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t), x(0) = x_0, x(T) = x_T.$$

Тут x – стан системи. $u(t)$ – скалярне керування, x_0, x_T – задані точки, $t \in [0, T]$.

Розв'язок. 1. Одразу помітимо, що $A(t) = (t)$, $B(t) = (1)$. Далі, з рівняння $\dfrac{d\Theta(t,s)}{dt} = A(t) \cdot \Theta(t,s)$ знаходимо $\Theta(t,s) = \exp\{t^2/2 - s^2/2\}$. Залишилося всього нічого, знайти власне грамміан:

$$\Phi(T,0) = \int_0^T \Theta(T,s)B(s)B^*(s), \Theta^*(T,s)ds =$$

$$= \int_0^T (\exp\{T^2 - s^2\})ds = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \exp\{T^2\} \cdot \operatorname{erf}(T)\right),$$

і $\det \Phi(T,0) \neq 0$, тобто система цілком керована на $[0,T]$.

2. Пригадаємо наступний результат: розв'язком вищезгаданої задачі про оптимальне керування є функція

$$u(t) = B^*(t)\Theta^*(T,t)\Phi^{-1}(T,0)(x_T - \Theta(T,0)x_0) =$$

$$= \exp\{T^2/2 - t^2/2\} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\{-T^2\} \cdot \frac{1}{\operatorname{erf}(T)}\right)(x_T - \exp\{T^2/2\}x_0) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(T)} \cdot \left(x_T \cdot \exp\left\{ -\frac{T^2 + t^2}{2} \right\} - x_0 \cdot \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \right).$$

Задача 3.10. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s$$

за умов, що

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} - 5\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 6x(t) = u(t),$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = y_0, x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Розв'язок.

Задача 3.11. Мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u_1^1(s) + u_2^2(s))ds$$

за умов

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 6x_1(t) - 2x_2(t) + u_1(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 5x_1(t) - x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20},$$

$$x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^\star$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^\star$ – вектор керування, $x = (x_{10}, x_{20})^\star$ – відома точка, $t \in [0, T]$.

Розв'язок. Запишемо систему у людському вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(t)$$

Знайдемо власні числа матриці $A - \lambda E$: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -2 \\ 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$, звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Знайдемо власні вектори, вони будуть $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ відповідно. Звідси знаходимо загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ 5e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

З рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} 2e^s \\ 5e^s \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4s} \\ e^{4s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

знаходимо $c_1 = -\dfrac{1}{3}e^{-s}$, $c_2 = \dfrac{5}{3}e^{-4s}$, а з рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} 2e^s \\ 5e^s \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4s} \\ e^{4s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

знаходимо $c_1 = \dfrac{1}{3}e^{-s}$, $c_2 = -\dfrac{2}{3}e^{-4s}$, тобто

$$\Theta(t,s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 2e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \\ -5e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 5e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо грамміан за формулою

$$\Phi(T,0) = \int_0^T \Theta(T,s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T,s)ds.$$

$$\Theta(T,s)B(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 2e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \\ -5e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 5e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \end{pmatrix}.$$

$$B^*(s)\Theta^*(T,s) = (\Theta(T,s)B(s))^\star = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 5e^{t-s} - 5e^{4(t-s)} \\ -2e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} & 5e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Чесно кажучи вже обчислення грамміану є надто складною обчислювальною задачею, не бачу сенсу її робити вручну.

Задача 3.12. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0,T]$ у випадку, якщо системи керування має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = tx_1(t) + t^2x_2(t) + u_1(t) - u_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_2(t), \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^\star$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^\star$ – вектор керування, $t \in [0,T]$.

Розв'язок.

Задача 3.13. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + tx(t) = u(t).$$

Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Розв'язок. Зробимо заміну $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, тоді маємо систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(u)(t).$$

Звідси можемо записати систему диференціальних рівнянь для знаходження грамміана керованості:

$$\frac{\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0)A^\star(t) + B(t)B^*(t).$$

$$\frac{\Phi(t, 0)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix} \Phi(t, 0) + \Phi(t, 0) \begin{pmatrix} 0 & t \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окрім цього, не забуваємо про умову $\Phi(0, 0) = 0$.

Щодо критерію керованості, то тут все просто (чи радше стандартно), для того щоб система була цілком керованою на $[0, T]$ необхідно і достатньо, щоб грамміан керованості $\Phi(T, 0)$ був невиродженим, тобто щоб $\det \Phi(T, 0) \neq 0$ або (що те саме у випадку невід'ємно-визначеної матриці) щоб $\det \Phi(T, 0) > 0$.

Задача 3.14. Дослідити на керованість, використовуючи другий критерій керованості:

1. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + au, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + \dfrac{u}{a}; \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + au, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + \dfrac{u}{a}; \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + au, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + a^2 u; \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - au, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + au; \end{cases}$$

5.
$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = u(t).$$

6.
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3 + u_1 - u_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + 3x_3 + u_1 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_2 + x_3 + 2u_2 \end{cases}$$

Розв'язок. 1.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1/a - a \\ 1/a & a \end{pmatrix}$$
$$\det D = a^2 + 1 - 1/a^2 \neq 0,$$

тобто система цілком керована якщо тільки $a \neq \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a - 1/a \\ 1/a & a \end{pmatrix}$$
$$\det D = a^2 - 1 + 1/a^2 \neq 0,$$

тобто система цілком керована для будь-яких a (навіть $\det D \geq 1$ за нерівністю Коші).

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a + a^2 \\ a^2 & a^2 - a \end{pmatrix}$$

$$\det D = a^3 - a^2 - a^4 - a^3 = -a^4 - a^2 \neq 0,$$

тобто система цілком керована якщо тільки $a \neq 0$.

4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -a \\ a & a \end{pmatrix}$$

$$\det D = 0,$$

тобто система не є цілком керованою для будь-яких a.

5. Зробимо заміну $x_0 = x$, $x_1 = x'$, …, $x_n = x^{(n)}$, тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = u - a_n x_0 - a_{n-1} x_1 - \ldots - a_1 x_{n-1} \end{cases}$$

тобто

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^nB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & -a_1 & \cdots \\ 1 & 0 & -a_1 & -a_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\det D = -1 \neq 0,$$

тобто система цілком керована для довільних a_1, a_2, …, a_n.

6.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Її ранг дорівнює 3, тобто система цілком керована.

4 Критерії спостережуваності. Критерій двоїстості

4.1 Аудиторне заняття

Задача 4.1. Побудувати систему для знаходження грамміана спостережуваності і записати умову спостережуваності на інтервалі для системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(t) \cdot x_1 + \sin(t) \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(t) \cdot x_1 + \cos(t) \cdot x_2, \\ y(t) = kx_1 + x_2, \end{cases}$$

$k > 0$.

Розв'язок. Диференціальне рівняння для знаходження грамміана спостережуваності має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}(t, t_0)}{\mathrm{d}t} = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t),$$

а після підстановки відомих значень вона набує вигляду

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}(t, t_0)}{\mathrm{d}t} = -\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \\ - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 1 \end{pmatrix},$$

або, у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{n}_{11}(t) = -2\cos(t) \cdot n_{11}(t) - 2\sin(t) \cdot n_{12}(t) + k^2, \\ \dot{n}_{12}(t) = \sin(t) \cdot n_{11}(t) - 2\cos(t) \cdot n_{12}(t) - \sin(t) \cdot n_{22}(t) + k, \\ \dot{n}_{22}(t) = 2\sin(t) \cdot n_{12}(t) - 2\cos(t) \cdot n_{22}(t) + 1. \end{cases}$$

Умова спостережуваності цієї системи на $[t_0, T]$ має вигляд $n_{11}(t) \cdot n_{22}(t) - n_{12}^2(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$.

Задача 4.2. Чи буде система цілком спостережуваною?

1. $$\ddot{x} = a^2 x, y(t) = x(t);$$

2.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_2, \\ y(t) = \beta x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1, \\ \dot{x}_2 = b x_2, \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

Розв'язок. Всі системи є стаціонарними, тому будемо застосовувати другий критерій спостережуваності:

$$rang\mathcal{R} = rang\left(H^* \vdots A^* H^* \vdots (A^*)^2 H^* \vdots \ldots \vdots (A^*)^{n-1} H^*\right) = n.$$

1. Введемо нову змінну $x_2 = \dot{x}_1$, тоді $\dot{x}_2 = a^2 x_1$, $y = x_1$, тому

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у критерій, знаходимо:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

її ранг 2, тому система цілком спостережувана.

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у критерій, знаходимо:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha + \beta \\ 1 & \alpha\beta + 1 \end{pmatrix},$$

її ранг 2 тоді і тільки тоді, коли її визначник $det\mathcal{R} = \alpha(\beta^2 - 1) \neq 0$, тому система цілком спостережувана тоді і тільки тоді, коли $\alpha \neq 0$, $\beta \neq \pm 1$.

3.
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у критерій, знаходимо:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

її ранг 2 тоді і тільки тоді, коли її визначник $det\mathcal{R} = b - a \neq 0$, тому система цілком спостережувана тоді і тільки тоді, коли $a \neq b$.

Задача 4.3. Дослідити на спостережуваність, використовуючи критерій двоїстості і відповідний критерій керованості:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \\ y(t) = -x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Розв'язок. За принципом двоїстості Калмана, ця система є цілком спостережуваною на $[t_0, T]$ тоді і тільки тоді, коли система

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -A^*(t) \cdot z(t) + H^*(t) \cdot u(t)$$

є цілком керованою на $[t_0, T]$.

Підставляючи відомі значення, отримуємо систему

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot z(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot u(t),$$

або, у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_2 - u, \\ \dot{z}_2 = -z_1 + u, \\ \dot{z}_3 = 2z_1 + z_2 + 2z_3 - u. \end{cases}$$

Система стаціонарна, тому використаємо другий критерій керованості:

$$rang\mathcal{D} = rang \left(B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B \right) = n.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у критерій, знаходимо:

$$\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix},$$

її ранг 2, тому система не цілком керована, а початкова – не цілком спостережувана.

Задача 4.4. Побудувати спостерігач такої системи у загальному вигляді:

1.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tx_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ y(t) = x_1(t) + bx_2(t). \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \\ y(t) = x(t) + \beta \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Розв'язок. 1. За теоремою про структуру спостерігача, він має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} = (A(t) - K(t)H(t)) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot y(t).$$

Підставляючи відомі значення, знаходимо

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix} \right) \cdot \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} \cdot y(t),$$

або, у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = (t - k_1(t)) \cdot \hat{x}_1 + (1 - bk_1(t)) \cdot \hat{x}_2 + k_1(t) \cdot y(t), \\ \dot{\hat{x}}_2 = (1 - k_2(t)) \cdot \hat{x}_1 - (1 + bk_2(t)) \cdot \hat{x}_2 + k_2(t) \cdot y(t). \end{cases}$$

2. Введемо нову змінну $x_2 = \dot{x}_1$, тоді $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -kx_1$, $y = x_1 + \beta x_2$.

За теоремою про структуру спостерігача, він має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot \hat{x}(t)).$$

Підставляючи відомі значення, знаходимо

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} \cdot \left(y(t) - \hat{x}_1 - \beta\hat{x}_2\right),$$

або, у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1(t) \cdot \left(y(t) - \hat{x}_1 - \beta\hat{x}_2\right), \\ \dot{\hat{x}}_2 = -k\hat{x}_1 + k_2(t) \cdot \left(y(t) - \hat{x}_1 - \beta\hat{x}_2\right). \end{cases}$$

Задача 4.5. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 2x(t), \\ y(t) = \sin(t) \cdot x(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0, 3]$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використанням грамміана спростережуваності.

Розв'язок. Розв'язок задачі спостереження задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot x(t) + R(t) \cdot H^*(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot x(t)),$$

де $R(t) = \mathcal{N}^{-1](t,0)}$.

Знайдемо $\mathcal{N}(t, 0)$: з рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t,s)}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot \Theta(t,s) = 2\Theta(t,s)$$

знаходимо $\Theta(t,s) = e^{2(t-s)}$, тому

$$\mathcal{N}(t,0) = \int_0^t e^{4(s-t)} \cdot \sin^2(s)\,\mathrm{d}s = e^{-4t} \int_0^t e^{4s} \cdot \sin^2(s)\,\mathrm{d}s = \\ = \frac{-2\sin(2t) - 4\cos(2t) + 5 - e^{-4t}}{40}.$$

Звідси
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot x(t) + \frac{40\cdot H^*(t)\cdot(y(t) - H(t)\cdot x(t))}{-2\sin(2t) - 4\cos(2t) + 5) - e^{-4t}},$$
або, у розгорнутому вигляді,
$$\dot{x} = 2x + \frac{40\cdot\sin(t)\cdot(y(t) - \sin(t)\cdot x(t))}{-2\sin(2t) - 4\cos(2t) + 5 - e^{-4t}}.$$

Задача 4.6. Задана динамічна система
$$\ddot{x} = x, y(t) = x(t),$$
де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0, T]$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використанням грамміана спростережуваності.

Розв'язок.

4.2 Домашнє завдання

Задача 4.7.

Розв'язок.

Задача 4.8. Записати диференціальне рівняння для знаходження грамміана спостережуваності системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -t^2 x_2(t), \\ \quad y(t) = \sin(t) \cdot x_1(t) + \cos(t) \cdot x_2(t). \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^\star$ – вектор фазових координат, y – скалярне спостереження.

Розв'язок. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, $A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t^2 \end{pmatrix}$, $H^\star = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

Тоді диференціальне рівняння для знаходження грамміана спостережуваності набуває вигляду

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}(t, t_0)}{dt} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t^2 \end{pmatrix} \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Або, що те саме,

$$\begin{pmatrix} \dot n_{11} & \dot n_{12} \\ \dot n_{12} & \dot n_{22} \end{pmatrix}(t, t_0) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix}(t, t_0) - \\ - \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix}(t, t_0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2(t) & \sin(t) \cdot \cos(t) \\ \sin(t) \cdot \cos(t) & \cos^2(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \dot n_{11} & \dot n_{12} \\ \dot n_{12} & \dot n_{22} \end{pmatrix}(t, t_0) = -\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{11} - t^2 n_{12} & n_{12} - t^2 n_{22} \end{pmatrix}(t, t_0) - \\ - \begin{pmatrix} n_{11} & n_{11} - t^2 n_{12} \\ n_{12} & n_{12} - t^2 n_{22} \end{pmatrix}(t, t_0) + \begin{pmatrix} \sin^2(t) & \sin(t) \cdot \cos(t) \\ \sin(t) \cdot \cos(t) & \cos^2(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \dot n_{11}(t, t_0) = -2n_{11}(t, t_0) + \sin^2(t) \\ \dot n_{12}(t, t_0) = -n_{11}(t, t_0) + (t^2 - 1)n_{12}(t, t_0) + \sin(t) \cdot \cos(t) \\ \dot n_{22}(t, t_0) = -2n_{12}(t, t_0) + 2t^2 n_{22}(t, t_0) + \cos^2(t) \end{cases}$$

Задача 4.9. Чи буде система цілком спостережуваною?

1. $$\ddot{x} = a^2 x, \quad y(t) = p\dot{x}(t);$$

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \alpha x_2, \\ y(t) = x_1 + \beta x_2. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \\ y(t) = -x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Розв'язок. 1. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & p \end{pmatrix}$. Матриці стаціонарні, тому застосуємо другий критерій спостережуваності:

$$R = \begin{pmatrix} H^\star & A^\star H^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, ранг 2, тобто система є цілком спостережуваною, якщо тільки $a \neq 0$ і $p \neq 0$.

2. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & \beta \end{pmatrix}$. Матриці стаціонарні, тому застосуємо другий критерій спостережуваності:

$$R = \begin{pmatrix} H^\star & A^\star H^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 - \alpha\beta \\ \beta & \alpha - \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

$\det R = \alpha - 2\beta - \alpha\beta + \alpha\beta^2 \neq 0$ (тобто система є спостережуваною), якщо тільки $\alpha \neq \dfrac{2\beta}{1 - \beta + \beta^2}$.

3. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Матриці стаціонарні, тому застосуємо другий критерій спостережуваності:

$$R = \begin{pmatrix} H^\star & A^\star H^\star & (A^\star)^2 H^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, ранг 2 а не 3, тому система не є цілком спостережуваною.

Задача 4.10. Для яких параметрів a, b система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = bx_2(t), \\ \quad y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

є цілком спостережуваною? Тут $x = (x_1, x_2)^\star$ – вектор фазових координат, y – скалярне спостереження.

Розв'язок. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матриці стаціонарні, тому застосуємо другий критерій спостережуваності:

$$R = \begin{pmatrix} H^\star & A^\star H^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

$\det R = b - a$, тобто система є цілком керованою якщо тільки $a \neq b$.

Задача 4.11. Побудувати спостерігач у загальному вигляді для такої системи:

1.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + t^2 x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, \\ y(t) = bx_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + k_1 \dfrac{dx}{dt} + k_2 x = 0, \\ y(t) = x(t) + \beta \dfrac{dx(t)}{dt}. \end{cases}$$

Розв'язок. 1. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} b & 1 \end{pmatrix}$. Далі пишемо

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}' (t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (t) \left(y(t) - \begin{pmatrix} b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} (t) \right).$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1'(t) = \hat{x}_1(t) + t^2 \hat{x}_2(t) + k_1(t)(y(t) - b\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)) \\ \hat{x}_2'(t) = 2\hat{x}_1(t) - 3\hat{x}_2(t) + k_2(t)(y(t) - b\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)) \end{cases}$$

2. Введемо заміну $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, тоді маємо $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix}$. Далі пишемо

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}(t) \left(y(t) - \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}(t) \right).$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1'(t) = \hat{x}_2(t) + K_1(t)(y(t) - \hat{x}_1(t) - b\hat{x}_2(t)) \\ \hat{x}_2'(t) = -k_2\hat{x}_1(t) - k_1\hat{x}_2(t) + K_2(t)(y(t) - \hat{x}_1(t) - b\hat{x}_2(t)) \end{cases}$$

Задача 4.12.

Розв'язок.

Задача 4.13.

Розв'язок.

5 Задача фільтрації. Множинний підхід

5.1 Аудиторне заняття

Задача 5.1. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = tx(t) + v(t), \\ y(t) = px(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови, що

$$\int_0^\tau (v^2(s) + w^2(s))\,\mathrm{d}s + x^2(0) \le 1, \quad \tau \in [0, T].$$

Розв'язок. Загальна постановка задачі фільтрації має вигляд

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + v(t), \quad y(t) = G(t) \cdot x(t) + w(t),$$

$$\int_{t_0}^t (\langle M(t) \cdot v(t), v(t)\rangle + \langle N(t) \cdot w(t), w(t)\rangle) + \langle p_0 x(t_0), x(t_0)\rangle \le \mu^2.$$

У нашій задачі $A(t) = \big(t\big)$, $G(t) = \big(p\big)$, $M(t) = \big(1\big)$, $N(t) = \big(1\big)$, $p_0 = 1$, $\mu = 1$.

Знайдемо фільтр (спостерігач) цієї задачі у вигляді

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)),$$

де $K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t)$, де у свою чергу

$$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

Підставляючи відомі функції знаходимо

$$\dot{R}(t) = 2t \cdot R(t) - p^2 \cdot R^2(t), \quad R(t_0) = 1.$$

Це рівняння Бернуллі, його розв'язок

$$R(t) = \frac{2e^{t^2}}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\mathrm{erfi}(t) - \mathrm{erfi}(t_0))}.$$

Далі,

$$K(t) = \frac{2pe^{t^2}}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\operatorname{erfi}(t) - \operatorname{erfi}(t_0))},$$

і

$$\dot{\hat{x}}(t) = t \cdot \hat{x}(t) + \frac{2pe^{t^2} \cdot (y(t) - p \cdot \hat{x}(t))}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\operatorname{erfi}(t) - \operatorname{erfi}(t_0))}.$$

Нарешті,

$$\mathcal{X}(\tau) = \mathcal{E}(\hat{x}(\tau), (\mu^2 - k(\tau)) \cdot R(\tau)),$$

де

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)\rangle, \quad k(t_0) = 0,$$

тобто

$$\dot{k}(s) = \langle (y(s) - p\hat{x}(s)), y(s) - p\hat{x}(s)\rangle = |y(s) - p\hat{x}(s)|^2, \quad k(t_0) = 0.$$

Задача 5.2. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + v(t), \\ y(t) = 2x(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова. Побудувати оцінку стану заданої системи (фільтр) за заданими спостереженнями $y(t) \in \mathbb{R}^1$ за умови, що

$$\int_0^\tau (v^2(s) + w^2(s))\,\mathrm{d}s + x^2(0) \le 2,$$

$\tau \in [0, T]$. Знайти похибку оцінювання.

Розв'язок. Загальна постановка задачі фільтрації має вигляд

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + v(t), \quad y(t) = G(t) \cdot x(t) + w(t),$$

$$\int_{t_0}^t (\langle M(t) \cdot v(t), v(t)\rangle + \langle N(t) \cdot w(t), w(t)\rangle) + \langle p_0 x(t_0), x(t_0)\rangle \le \mu^2.$$

У нашій задачі $A(t) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $G(t) = \begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$, $M(t) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $N(t) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $p_0 = 1$, $\mu = \sqrt{2}$.

Знайдемо фільтр (спостерігач) цієї задачі у вигляді

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)),$$

де $K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t)$, де у свою чергу

$$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

Підставляючи відомі функції знаходимо

$$\dot{R}(t) = 2 \cdot R(t) - 4 \cdot R^2(t), \quad R(t_0) = 1.$$

Це рівняння зі змінними що розділяються, його розв'язок

$$R(t) = \frac{e^{2t}}{2e^{2t} - e^{2t_0}}.$$

Далі,

$$K(t) = \frac{2e^{2t}}{2e^{2t} - e^{2t_0}},$$

і

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + \frac{2e^{2t} \cdot (y(t) - 2 \cdot \hat{x}(t))}{2e^{2t} - e^{2t_0}}.$$

Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \le \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))} = \frac{\sqrt{2 - k(\tau)} \cdot e^{2\tau}}{2e^{2\tau} - e^{2t_0}},$$

де

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s) \rangle, \quad k(t_0) = 0,$$

тобто

$$\dot{k}(s) = \langle (y(s) - 2\hat{x}(s)), y(s) - 2\hat{x}(s) \rangle = |y(s) - 2\hat{x}(s)|^2, \quad k(t_0) = 0.$$

Задача 5.3. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = 2x_1(t) + x_2(t) + v_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + x_2(t) + v_2(t), \\ y(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + w(t), \end{cases}$$

і відомі спостереження за цією системою $y(t) \in \mathbb{R}^1$. Побудувати оцінку стану (фільтр) і знайти похибку оцінювання. Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $v_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $v_2(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми,

$$\int_0^\tau (v_1^2(s) + v_2^2(s) + w^2(s))\, \mathrm{d}s + x_1^2(0) + 2x_2^2(0) \le 1,$$

$\tau \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Загальна постановка задачі фільтрації має вигляд

$$\dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t) + v(t), \quad y(t) = G(t)\cdot x(t) + w(t),$$

$$\int_{t_0}^{t} (\langle M(t)\cdot v(t), v(t)\rangle + \langle N(t)\cdot w(t), w(t)\rangle) + \langle p_0 x(t_0), x(t_0)\rangle \le \mu^2.$$

У нашій задачі $A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N(t) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mu = 1$.

Знайдемо фільтр (спостерігач) цієї задачі у вигляді

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\cdot \hat{x}(t) + K(t)\cdot (y(t) - G(t)\cdot \hat{x}(t)),$$

де $K(t) = R(t)\cdot G^*(t)\cdot N(t)$, де у свою чергу

$$\dot{R}(t) = A(t)\cdot R(t) + R(t)\cdot A^*(t) - R(t)\cdot G^*(t)\cdot N(t)\cdot G(t)\cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

Підставляючи відомі функції знаходимо

$$\dot{R}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot R(t) + R(t)\cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - R(t)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot R(t),$$

або, у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \quad \dot{r}_{11} = 4r_{11} + 2r_{12} + r_{11}^2 + 4r_{11}r_{12} + 4r_{12}^2, \\ \quad \dot{r}_{12} = -r_{11} + 3r_{12} + r_{22} + r_{11}r_{12} + 2r_{12}^2 + 2r_{11}r_{22} + 4r_{12}r_{22}, \\ \quad \dot{r}_{22} = -2r_{12} + 2r_{22} + r_{12}^2 + 4r_{12}r_{22} + r_{22}^2, \\ r_{11}(0) = 1, \\ r_{12}(0) = 0, \\ r_{22}(0) = 1/2. \end{cases}$$

Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \le \sqrt{\mu^2 - k(\tau)}\cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))},$$

де

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s)\cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s)\cdot \hat{x}(s)\rangle, \quad k(t_0) = 0,$$

тобто

$$\dot{k}(s) = \langle (y(s) - \hat{x}_1(s) - 2\hat{x}_2(s)), y(s) - \hat{x}_1(s) - 2\hat{x}_2(s)\rangle = |y(s) - \hat{x}_1(s) - 2\hat{x}_2(s)|^2.$$

5.2 Домашнє завдання

Задача 5.4. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dot{x} = x + v + t^2, \\ y = -x + w, \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови. що

$$\int_0^\tau (v^2(s) + w^2(s))\,\mathrm{d}s + (x(0) - 1)^2 \le 1, \quad \tau \in [0, T].$$

Розв'язок.

Задача 5.5. Побудувати оцінку стану системи

$$\begin{cases} \dot{x} = tx + v, \\ y = px + w, \end{cases}$$

у формі фільтра, де $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, x_0 – невідома початкова умова, при цьому

$$\int_0^\tau (v^2(s) + w^2(s))\,\mathrm{d}s + (x(0) - 1)^2 \le 4,$$

$\tau \in [0, T]$. Знайти похибку оцінювання.

Розв'язок. Загальна постановка задачі фільтрації має вигляд

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + v(t), \quad y(t) = G(t) \cdot x(t) + w(t),$$

$$\int_{t_0}^t (\langle M(t) \cdot v(t), v(t) \rangle + \langle N(t) \cdot w(t), w(t) \rangle) + \langle p_0 x(t_0), x(t_0) \rangle \le \mu^2.$$

У нашій задачі $A(t) = \big(t\big)$, $G(t) = \big(p\big)$, $M(t) = \big(1\big)$, $N(t) = \big(1\big)$, $p_0 = 1$, $\mu = 2$.

Знайдемо фільтр (спостерігач) цієї задачі у вигляді

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = 1,$$

де $K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t)$, де у свою чергу

$$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

Підставляючи відомі функції знаходимо

$$\dot{R}(t) = 2t \cdot R(t) - p^2 \cdot R^2(t), \quad R(t_0) = 1.$$

Це рівняння Бернуллі, його розв'язок

$$R(t) = \frac{2e^{t^2}}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\mathrm{erfi}(t) - \mathrm{erfi}(t_0))}.$$

Далі,

$$K(t) = \frac{2pe^{t^2}}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\mathrm{erfi}(t) - \mathrm{erfi}(t_0))},$$

і

$$\dot{\hat{x}}(t) = t \cdot \hat{x}(t) + \frac{2pe^{t^2} \cdot (y(t) - p \cdot \hat{x}(t))}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\mathrm{erfi}(t) - \mathrm{erfi}(t_0))}, \quad \hat{x}(0) = 1.$$

Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \le \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))} = \frac{\sqrt{4 - k(\tau)} \cdot e^{2\tau}}{2e^{2\tau} - e^{2t_0}},$$

де

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)\rangle, \quad k(t_0) = 0,$$

тобто

$$\dot{k}(s) = \langle (y(s) - p\hat{x}(s)), y(s) - p\hat{x}(s)\rangle = |y(s) - p\hat{x}(s)|^2, \quad k(t_0) = 0.$$

Задача 5.6.

Розв'язок.

6 Варіаційний метод в задачі оптимального керування

6.1 Аудиторне заняття

Задача 6.1. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналів:

1. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^3(s)\,\mathrm{d}s$;

2. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T (\sin^2 u_1(s) + u_2^2(s))\,\mathrm{d}s$, $u = (u_1, u_2)^*$.

Розв'язок. Першою варіацією (за Лагранжем) функціоналу $\mathcal{J}(u)$ в точці u називається

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathcal{J}(u+\alpha\psi) - \mathcal{J}(u)}{\alpha}$$

(якщо, звичайно, вона існує для довільного напрямку ψ). Також можна записати

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\Big|_{\alpha=0}.$$

1. Перша варіація за Лагранжем:

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\Big|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^T (u+\alpha\psi)^3(s)\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T 3\psi(s)\cdot(u+\alpha\psi)^2(s)\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} = \int_0^T 3\psi(s)\cdot u^2(s)\,\mathrm{d}s$$

Як наслідок, похідна за Фреше $\mathcal{J}'(u) = 3u^2(\cdot)$.

2. Перша варіація за Лагранжем:

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^T (\sin^2(u_1+\alpha\psi_1) + (u_2+\alpha\psi_2)^2)\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T (2\psi_1\sin(u_1+\alpha\psi_1)\cos(u_1+\alpha\psi_1) + 2\psi_2\cdot(u_2+\alpha\psi_2))\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T (2\psi_1(s)\sin(u(s))\cos(u(s)) + 2\psi_2(s)\cdot u_2(s))\,\mathrm{d}s.$$

Задача 6.2. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = (x(t) + u(t))^3, \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

У нашій задачі

$$f(x(t), u(t), t) = (x(t) + u(t))^3,$$

тому маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = 3(x(t) + u(t))^2 \cdot z(t) + 3(x(t) + u(t))^2 \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

Задача 6.3. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) - x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = -3.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^*$, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

У нашій задачі

$$f(x(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + u_1 \\ x_1 - x_2 + u_2 \end{pmatrix},$$

тому маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot z(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot h(t), \quad z(0) = 0,$$

або, у розгорнутому вигляді,

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2x_1 z_1 + 2x_2 z_2 + h_1, \\ \dot{z}_2 = z_1 - z_2 + h_2, \\ z_1(0) = z_2(0) = 0. \end{cases}$$

Задача 6.4. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачи оптимального керування варіаційним методом

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sin(x(t)) + u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Перш за все запишемо

$$\varphi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h) = \int_0^T (u(s) + \alpha h(s))^2\,\mathrm{d}s + x^2(T, \alpha).$$

Далі,

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^T 2h(s) \cdot (u(s) + \alpha h(s))\,\mathrm{d}s + 2x(T, \alpha)\frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Підставимо $\alpha = 0$:

$$\delta\mathcal{J}(u, h) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \underbrace{2x(T)}_{=-\psi(T)} \cdot z(T).$$

Тоді рівняння у варіаціях

$$\begin{cases} z' = \cos(x) \cdot z + 1 \cdot h, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

$$\psi(T) \cdot z(T) = \psi(T) \cdot z(T) - \psi(0) \cdot z(0) = \int_0^T (\psi(s) \cdot z(s))'\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^T (\psi'(s) \cdot z(s) + \psi(s) \cdot z'(s))\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^T \psi'(s) \cdot z(s) + \psi(s)(\cos(x(s)) \cdot z(s) + h(s))\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^T \psi'(s) \cdot z(s) + \psi(s)\cos(x(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^T h(s) \cdot \psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

$$\delta\mathcal{J}(u,h) = \int_0^T 2h(s)\cdot u(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T z(s)\cdot(\psi'(s)+\psi(s)\cos(x(s)))\,\mathrm{d}s + \\ + \int_0^T h(s)\cdot(2u(s)-\psi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Тоді спряжена система

$$\begin{cases} 0 = \psi'(s)+\psi(s)\cdot\cos(x(s)), \\ \psi(T) = -2x(T). \end{cases}$$

Остаточно, $\mathcal{J}'(u) = 2u(\cdot)-\psi(\cdot)$.

Задача 6.5. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + (x(T)-1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0)=x_0.$$

Тут $x(t)\in\mathbb{R}^1$, $u(t)\in\mathbb{R}^1$, $t\in[0,T]$. Точки $x_0\in\mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. $\delta\mathcal{J}(u,h)=\varphi'(0)$.

$\varphi(\alpha) = \mathcal{J}(u+\alpha h) = \int_0^T (u(s)+\alpha h(s))^2\,\mathrm{d}s + (x(T,\alpha)-1)^2$.

$\varphi'(\alpha) = \int_0^T 2h(s)(u(s)+\alpha h(s))\,\mathrm{d}s + 2(x(T,\alpha)-1)x'_\alpha(T,\alpha)$.

$\varphi'(0) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \underbrace{2(x(T)-1)}_{=-\psi(T)}\cdot z(T)$.

$z'=h$, $z(0)=0$.

$$\psi(T)\cdot z(T) = \psi(T)\cdot z(T)-\psi(0)\cdot z(0) = \int_0^T (\psi(s)\cdot z(s))'\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T (\psi'(s)\cdot z(s)+\psi(s)\cdot z'(s))\,\mathrm{d}s.$$

$\varphi'(0) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T (\psi'(s)z(1) + \psi(s)h)\,\mathrm{d}s.$

$x'_\alpha(T,\alpha) = \int_0^T h(s)(2u(s) - \psi(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^T \psi'(s)z(s)\,\mathrm{d}s.$

$\mathcal{J}'(u) = 2u(\cdot) - \psi(\cdot).$

$\mathcal{J}'(u) = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\psi(\cdot)}{2}, \\ \psi' = 0, \\ x(0) = x_0, \\ \varphi(T) = 2(x(T) - 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi = const, \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{const}{2}, x(t) \quad = (const/2)t + u. \end{cases}$$

$c_1 = -2\left(\frac{c_1}{2}T + x_0 - 1\right) = -c_1T - 2x_0 + 2$, $c_1 = \frac{-2x_0+2}{1+T}$.

$u(t) = \frac{\psi(t)}{2} = \frac{-x_0+1}{1+T}$.

Задача 6.6. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + (x(T) + 2)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0,T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Застосовуємо вже добре відомий алгоритм:

1. $\varphi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h) = \int_0^T (u + \alpha h)^2(s)\,\mathrm{d}s + (x(T,\alpha) + 2)^2.$

2. $\varphi'(\alpha) = \int_0^T 2h(s)(u + \alpha h)(s)\,\mathrm{d}s + 2(x(T,\alpha) + 2)\frac{\partial x(T,\alpha)}{\partial \alpha}.$

3. $\varphi'(0) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \underbrace{2(x(T) + 2)}_{=-\psi(T)}z(T).$

4. (рівняння у варіаціях): $z' = z + h$, $z(0) = 0$;

5.

$$\begin{aligned}\psi(T)z(T) = ... = \int_0^T \psi'(s)z(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^T \psi(s)(z(s)+h(s))\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T z(s)(\psi'(s)+\psi(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^T h(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}(u,\alpha) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T z(s)(\psi'(s)+\psi(s))\,\mathrm{d}s- \\ - \int_0^T h(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s = ... + \int_0^T (2u(s)-\psi(s))h(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

7. $\varphi'(0) = \int_0^T (2u(s)-\psi(s))h(s)\,\mathrm{d}s$.
8. $\mathcal{J}'(u) = 2u(\cdot) - \psi(\cdot)$;
9. ...

Задача 6.7.

Розв'язок.

6.2 Домашнє завдання

Задача 6.8. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованмх з квадратом функцій для функціоналів:

1. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T \cos(u(s))\,\mathrm{d}s$;
2. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T (s^2 u_1^4(s) + u_2^2(s))\,\mathrm{d}s$, $u = (u_1, u_2)^*$.

Розв'язок. 1. Перша варіація за Лагранжем:

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\Big|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^T \cos(u(s)+\alpha\psi(s))\,\mathrm{d}s\Bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T -\psi(s)\sin(u(s)+\alpha\psi(s))\,\mathrm{d}s\Bigg|_{\alpha=0} = -\int_0^T \psi(s)\sin(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

Як наслідок, похідна за Фреше $\mathcal{J}'(u) = -\sin u(\cdot)$.

2.

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^T (s^2(u_1+\alpha\psi_1)^4(s) + (u_2+\alpha\psi_2)^2(s))\,\mathrm{d}s\Bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T (4s^2\psi_1(s)(u_1+\alpha\psi_1)^3(s) + 2\psi_2(s)(u_2+\alpha\psi_2)(s))\,\mathrm{d}s\Bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T (4s^2\psi_1(s)u_1^3(s) + 2\psi_2(s)u_2(s))\,\mathrm{d}s.$$

Задача 6.9. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \cos(x(t)+u(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0,T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t),u_*(t),t)}{\partial x}\cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t),u_*(t),t)}{\partial u}\cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

У нашій задачі

$$f(x(t),u(t),t) = \cos(x(t)+u(t)),$$

тому маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -\sin(x(t)+u(t))\cdot z(t) - \sin(x(t)+u(t))\cdot h(t), \quad z(0)=0.$$

Задача 6.10. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t)\cdot x_2(t) + u_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) - x_2(t)\cdot u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = -1, x_2(0) = 4.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^*$, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t),u_*(t),t)}{\partial x}\cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t),u_*(t),t)}{\partial u}\cdot h(t), \quad z(0)=0.$$

У нашій задачі

$$f(x(t),u(t),t) = \begin{pmatrix} x_1\cdot x_2 + u_1 \\ x_1 - x_2\cdot u_2 \end{pmatrix},$$

тому маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & -u_2 \end{pmatrix}\cdot z(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix}\cdot h(t), \quad z(0)=0,$$

або, у розгорнутому вигляді,

$$\begin{cases} \dot z_1 = x_2 z_1 + x_1 z_2 + h_1, \\ \dot z_2 = z_1 - u_2 z_2 - x_2 h_2, \\ 0 = z_1(0) = z_2(0). \end{cases}$$

Задача 6.11. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачі оптимального керування варіаційним методом

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u^2(s) + x^4(s))\,\mathrm{d}s + x^4(T) \to \inf$$

за умови, що
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) \cdot u(t), \quad x(0) = x_0.$$
Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Перш за все запишемо
$$\varphi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h) = \int_0^T ((u + \alpha h)^2(s) + x^4(s, \alpha))\,\mathrm{d}s + x^4(T, \alpha).$$
Далі,
$$\varphi'(\alpha) = \int_0^T (2h(s) \cdot (u(s) + \alpha h(s)) + 4x^3(s, \alpha)x'_\alpha(s, \alpha))\,\mathrm{d}s + 4x^3(T, \alpha)x'_\alpha(T, \alpha).$$
Підставимо $\alpha = 0$:
$$\delta\mathcal{J}(u, h) = \int_0^T (2h(s)u(s) + 4x^3(s)z(s))\,\mathrm{d}s + \underbrace{4x^3(T)}_{=-\psi(T)} \cdot z(T).$$
Тоді рівняння у варіаціях
$$\begin{cases} z' = u \cdot z + x \cdot h, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi(T) \cdot z(T) = \psi(T) \cdot z(T) - \psi(0) \cdot z(0) = \int_0^T (\psi(s) \cdot z(s))'\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T (\psi'(s) \cdot z(s) + \psi(s) \cdot z'(s))\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T \varphi'(s)z(s) + \varphi(s)(u(s)z(s) + x(s)h(s)) = \\ = \int_0^T \varphi'(s)z(s)u(s)z(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^T \psi(s)x(s)h(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

$$\delta\mathcal{J}(u, h) = \int_0^T 2h(s)u(s) + 4x^3(s)z(s)\,\mathrm{d}s -$$

$$- \int_0^T \psi'(s)z(s)u(s)z(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T \psi(s)x(s)h(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^T (\psi'(s)z(s) + \psi(s)x(s)h(s) + u(s)z(s))\,\mathrm{d}s.$$

$$\int_0^T z(s)(\psi'(s) + \psi(s)u(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^T h(s)\psi(s)x(s(\mathrm{d}s + \int))$$

...???...

Задача 6.12. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u(s) - v(s))^2\,\mathrm{d}s + (x(T) - 3)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, момент часу T і функція $v(t) \in \mathbb{R}^1$ є заданими.

Розв'язок. Нагадаємо постановку задачі варіаційного методу:

$$\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t + \Phi(x(T)) \to \inf,$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Спочатку випишемо всі функції з теоретичної частини які фігурують в задачі:

$$\begin{aligned} f_0(x(t), u(t), t) &= (u(t) - v(t))^2, \\ \Phi(x(T)) &= (x(T) - 3)^2, \\ f(x(t), u(t), t) &= u(t). \end{aligned}$$

Позначимо

$$\varphi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h) = \int_0^T ((u + \alpha h)(s) - v(s))^2\,\mathrm{d}s + (x(T, \alpha) - 3)^2.$$

Необхідна умова екстремуму через першу варіацію функціоналу має вигляд $\delta\mathcal{J}(u_*, h) = \varphi'(0) = 0$, тому знайдемо

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^T (2h(s) \cdot ((u + \alpha h)(s) - v(s)))\,\mathrm{d}s + 2(x(T, \alpha) - 3) \cdot \underbrace{\frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha}}_{=z(T)}.$$

Підставляючи $\alpha = 0$, знаходимо

$$\varphi'(0) = \int_0^T (2h(s) \cdot (u(s) - v(s)))\,\mathrm{d}s + \underbrace{2(x(T) - 3)}_{=-\psi(T)} \cdot z(T).$$

Запишемо рівняння у варіаціях на функцію $z(t)$. Його загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(t_0) = 0.$$

У контексті нашої задачі маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \cdot z(t) + 1 \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

Введемо додаткові, спряжені змінні ψ такі, що

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}.$$

Тоді $\left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle = -\langle \psi(T), z(T) \rangle$ (у контексті нашої задачі "скалярний" добуток зайвий бо функції і так скалярні). Враховуючи рівняння у варіаціях, маємо

$$\begin{aligned}\psi(T) \cdot z(T) = \psi(T) \cdot z(T) - \psi(t_0) \cdot z(t_0) = \\ = \int_{t_0}^T (\psi(s) \cdot z'(s) + \psi'(s) \cdot z(s))\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T (\psi(s) \cdot h(s) + \psi'(s) \cdot z(s))\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Підставимо це у вигляд $\varphi'(0)$:

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial u} \cdot h(t) \right) +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x} \cdot z(T) = \\
&= \int_{t_0}^{T} \left(\frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial u} \cdot h(t) \right) - \\
&- \int_0^T (\psi(s) \cdot h(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \, \mathrm{d}s = \\
&= \int_0^T (2h(s) \cdot (u(s) - v(s))) \, \mathrm{d}s - \\
&- \int_0^T (\psi(s) \cdot h(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \, \mathrm{d}s = \\
&= \int_0^T -\psi'(s) \cdot z(s) \, \mathrm{d}s + \int_0^T (2(u(s) - v(s)) - \psi(s)) \cdot h(s) \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Накладаємо на функцію $\psi(t)$ умову (спряжену систему)

$$
\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot \psi(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} = 0,
$$

$$
\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x} = 2(x(T) - 3),
$$

звідки $\psi(t) = 2(x(T) - 3)$.

Завдяки цьому

$$
\delta \mathcal{J}(u, h) = \varphi'(0) = \int_0^T (2(u(s) - v(s)) - \psi(s)) \cdot h(s) \, \mathrm{d}s.
$$

Як наслідок,

$$
\mathcal{J}'(u) = 2(u(\cdot) - v(\cdot)) - \psi(\cdot)).
$$

Пригадуючи необхідну умову екстремуму функціоналу, знаходимо

$$
u_*(t) = v(t) + \psi(t)/2 = v(t) + x(T) - 3.
$$

Далі

$$
\begin{aligned}
x_*(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), u_*(s), s) \, \mathrm{d}s = \\
= x_0 + \int_0^t (v(s) + x(T) - 3) \, \mathrm{d}s = tx(T) - 3t + \int_0^t v(s) \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

покладаючи $t = T$ знаходимо

$$x(T) = Tx(T) - 3T + \int_0^T v(s)\,\mathrm{d}s,$$

звідки

$$x(T) = \frac{\int_0^T v(s)\,\mathrm{d}s - 3T}{1 - T},$$

і остаточно

$$u_*(t) = v(t) + \frac{\int_0^T v(s)\,\mathrm{d}s - 3T}{1 - T} - 3,$$

$$x_*(t) = \frac{t \cdot \left(\int_0^T v(s)\,\mathrm{d}s - 3T\right)}{1 - T} - 3t + \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Задача 6.13.

Розв'язок.

Задача 6.14.

Розв'язок.

Задача 6.15.

Розв'язок.

7 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільним правим кінцем

7.1 Аудиторне заняття

Задача 7.1. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \left(u^2(s) + x_1^4(s)\right) \mathrm{d}s + x_2^4(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1 - x_2) + u, \\ \dot{x}_2 = \cos(-4x_1 + x_2), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = u^2(t) + x_1^4(t),$$

$$f(x(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} \sin(x_1(t) - x_2(t)) + u(t) \\ \cos(-4x_1(t) + x_2(t)) \end{pmatrix},$$

$$\Phi(x(T)) = x_2^4(T). \tag{7.1}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, \psi, t) &= -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \left\langle \psi, \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) + u \\ \cos(-4x_1 + x_2) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \left\langle \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) + u \\ \cos(-4x_1 + x_2) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \psi_1 \cdot \sin(x_1 - x_2) + \psi_1 \cdot u + \psi_2 \cdot \cos(-4x_1 + x_2). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - \psi_1 \cdot \cos(x_1 - x_2) - 4\psi_2 \cdot \sin(-4x_1 + x_2) \\ \psi_1 \cdot \cos(x_1 - x_2) + \psi_2 \cdot \sin(-4x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

$$\psi(T) = -\nabla\Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4x_2^3(T) \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -2u + \psi_1 = 0, \tag{7.5}$$

звідки $u = \psi_1/2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1 - x_2) + \psi_1/2, \\ \dot{x}_2 = \cos(-4x_1 + x_2), \end{cases}$$

Задача 7.2. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T x^2(s)\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \le \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = \gamma^2 x^2(t), \quad f(x(t), u(t), t) = u(t), \quad \Phi(x(T)) = 0, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(t) = [-\rho, \rho]. \tag{7.6}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\gamma^2 x^2 + \psi u. \tag{7.7}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -2\gamma^2 x, \tag{7.8}$$

$$\psi(T) = -\nabla\Phi(x(T)) = 0, \tag{7.9}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто

$$u = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \tag{7.10}$$

Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\dot{x} = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \tag{7.11}$$

Задача 7.3. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + \frac{x^2(T)}{2} \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, x(0) = x_0$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t)\rangle = -\frac{u^2}{2} + \psi u. \tag{7.12}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = 0, \tag{7.13}$$

$$\psi(T) = -\nabla\Phi(x(T)) = -x(T), \tag{7.14}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -u + \psi = 0, \tag{7.15}$$

звідки $u = \psi$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\dot{x} = \psi. \tag{7.16}$$

З рівнянь на ψ знаходимо $\psi(t) = -x(T)$.

Підставляючи це у рівняння на x знаходимо $x(t) = x_0 - x(T) \cdot t$.

Звідси, при $t = T$ маємо $x(T) = x_0 - T \cdot x(T)$, тобто $x(T) = \dfrac{x_0}{1+T}$.

Остаточно, $(u_*(t), x_*(t)) = \left(-\dfrac{x_0}{1+T}, -\dfrac{x_0 \cdot t}{1+T}\right)$.

Задача 7.4. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u_1^2(s) + u_2^2(s)\,\mathrm{d}s + \frac{x_1^2(T)}{2} \to \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^2$ – вектор керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \psi_1(x_2 + u_1) + \psi_2(x_1 + u_2). \tag{7.17}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \tag{7.18}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = \begin{pmatrix} -u_1 + \psi_1 \\ -u_2 + \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.20}$$

звідки $u_1 = \psi_1$, $u_2 = \psi_2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \psi_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему на ψ_1 і ψ_2:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{7.21}$$

Підставляємо це у систему на x_1, x_2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \end{cases}$$

Знаходимо загальний розв'язок однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{7.22}$$

Шукаємо тепер частинний розв'язок неоднорідної системи методом невизначених коефіцієнтів у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(A_{11}t + B_{11}) + e^{-t}(A_{12}t + B_{12}) \\ e^t(A_{21}t + B_{21}) + e^{-t}(A_{22}t + B_{22}) \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

Підставляючи це у системи, знаходимо

$$\begin{cases} A_{11} = A_{21}, \\ B_{11} + A_{11} = B_{21} - c_1, \\ -A_{12} = A_{22}, \\ -B_{12} + A_{12} = B_{22} + c_2, \\ A_{21} = A_{11}, \\ B_{21} + A_{21} = B_{11} + c_1, \\ -A_{22} = A_{12}, \\ -B_{22} + A_{22} = B_{12} + c_2. \end{cases}$$

Беремо розв'язок $A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = 0$, $B_{11} = B_{12} = 0$, $B_{21} = c_1$, $B_{22} = c_2$, тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t \end{pmatrix}. \tag{7.24}$$

Пригадаємо, що $x_1(0) = x_2(0) = 1$, це дає систему

$$\begin{cases} c_3 + c_4 - c_2 = 1, \\ c_3 - c_4 + c_1 = 1, \end{cases}$$

з якої $c_3 = 1 - \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2}$, $c_4 = \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2}$.

І далі це якось (як ??) розв'язується.

Задача 7.5.

Розв'язок.

Задача 7.6.

Розв'язок.

7.2 Домашнє завдання

Задача 7.7. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (4u_1^2(s) + u_2^2(s) + \cos^2(x_1(s)))\,\mathrm{d}s + \sin^2(x_2(T)) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 4, x_2(0) = -2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u_1(t), u_2(t)$ – функції керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$\begin{aligned} f_0(x, u, t) &= 4u_1^2(s) + u_2^2(s) + \cos^2(x_1(s)), \\ f(x(t), u(t), t) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2 \end{pmatrix}, \\ \Phi(x(T)) &= \sin^2(x_2(T)). \end{aligned} \tag{7.25}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, \psi, t) &= -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \\ &+ \left\langle \psi, \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \\ &+ \left\langle \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \\ &+ \psi_1(x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1) + \psi_2(-x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2). \end{aligned} \tag{7.26}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \sin(2x_1) + \psi_1 + 3\psi_1x_2 - \psi_2 - 3\psi_2x_2 \\ \psi_1 + 3\psi_1x_1 + 6\psi_2 - 3\psi_2x_1 \end{pmatrix}, \tag{7.27}$$

$$\psi(T) = -\nabla\Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2x_2) \end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = \begin{pmatrix} -8u_1 + 2\psi_1 \\ -2u_2 + \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.29}$$

звідки $u_1 = \psi_1/4$, $u_2 = \psi_2/2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + \psi_1/2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + \psi_2/2. \end{cases}$$

Задача 7.8. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T (x(s) - z(s))^2 \, \mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \le \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$, неперервна функція $z(t) \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = \gamma^2 (x - z)^2, \quad f(x(t), u(t), t) = u(t), \quad \Phi(x(T)) = 0, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(t) = [-\rho, \rho]. \tag{7.30}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\gamma^2 (x - z)^2 + \psi u. \tag{7.31}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -2\gamma^2 x + 2\gamma^2 z, \tag{7.32}$$

$$\psi(T) = -\nabla\Phi(x(T)) = 0, \tag{7.33}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто

$$u = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \tag{7.34}$$

Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\dot{x} = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \tag{7.35}$$

Задача 7.9. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) \, \mathrm{d}s + \frac{(x(T) - x_1)^2}{2} \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = ax + u, x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = \frac{u^2}{2}, \quad f(x(t), u(t), t) = ax(t) + u(t), \quad \Phi(x(T)) = \frac{(x(T) - x_1)^2}{2}. \tag{7.36}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд:

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\frac{u^2}{2} + a\psi x + \psi u. \tag{7.37}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -a\psi, \tag{7.38}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = x(T) - x_1. \tag{7.39}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування,

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -u + \psi = 0, \tag{7.40}$$

звідки $u = \psi$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + \psi, \\ x(0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -a\psi, \\ \psi(T) = x(T) - x_1. \end{cases}$$

З рівнянь на ψ знаходимо, що $\psi(t) = C_1 \cdot e^{-at}$, де C_1 визначається з рівності $\psi(T) = x(T) - x_1$, тобто $C_1 = (x(T) - x_1) \cdot e^{aT}$.

Підставляючи це у рівняння на x знаходимо, що

$$x(t) = C_2 e^{at} - \frac{C_1 e^{-at}}{2a} = C_2 e^{at} - \frac{(x(T) - x_1) \cdot e^{a(T-t)}}{2a}, \tag{7.41}$$

де C_2 визначається з рівності $x(0) = x_0$, тобто $C_2 = x_0 + \dfrac{(x(T) - x_1) \cdot e^{aT}}{2a}$.

Залишається знайти $x(T)$ з рівності

$$x(T) = x_0 e^{aT} + \frac{(x(T) - x_1) \cdot (e^{2aT} - 1)}{2a}. \tag{7.42}$$

Зробивши це, отримаємо

$$x(T) = \frac{x_1(e^{2aT} - 1) - 2ax_0 e^{aT}}{e^{2aT} - 2a - 1}. \tag{7.43}$$

Остаточно,

$$x(t) = x_0 e^{at} + \frac{\left(\dfrac{x_1(e^{2aT} - 1) - 2ax_0 e^{aT}}{e^{2aT} - 2a - 1} - x_1\right) \cdot \left(e^{a(T+t)} - e^{a(T-t)}\right)}{2a}, \tag{7.44}$$

$$u(t) = \left(\frac{x_1(e^{2aT} - 1) - 2ax_0 e^{aT}}{e^{2aT} - 2a - 1} - x_1\right) \cdot e^{a(T-t)}. \tag{7.45}$$

Задача 7.10. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (u^2(s) + x^2(s))\,\mathrm{d}s + \frac{(\dot{x}(T) - x_1)^2}{2} \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Позначимо $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x & \dot{x} \end{pmatrix}^*$.

Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(\mathbf{x}, u, t) = \frac{u^2 + \mathbf{x}_1^2}{2}, \quad f(\mathbf{x}(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{x}(T)) = \frac{(\mathbf{x}_2(T) - x_1)^2}{2}. \tag{7.46}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, u, \psi, t) = -f_0(\mathbf{x}, u, t) + \langle \psi, f(\mathbf{x}, u, t) \rangle = -\frac{u^2 + \mathbf{x}_1^2}{2} + \psi_1 \mathbf{x}_1 + \psi_2 u. \tag{7.47}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.48}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2(T) - x_1 \end{pmatrix}. \tag{7.49}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування,

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}, u, \psi, t)}{\partial u} = -u + \psi_2 \tag{7.50}$$

звідки $u = \psi_2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2. \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \psi_2. \end{cases}$$

Задача 7.11. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s)\, \mathrm{d}s + x_2^2(T) \to \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 4.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x,u,t) = \frac{u^2}{2}, \quad f(x(t),u(t),t) = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ -4x_1(t) + x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi(x(T)) = x_2(T))^2. \tag{7.51}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд:

$$\mathcal{H}(x,u,\psi,t) = -f_0(x,u,t) + \langle \psi, f(x,u,t) \rangle = -\frac{u^2}{2} + \psi_1 x_1 - \psi_1 x_2 + \psi_1 u - 4\psi_2 x_1 + \psi_2 x_2. \tag{7.52}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\psi_1 + 4\psi_2 \\ \psi_1 - \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{7.53}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = 2x_2(T). \tag{7.54}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування,

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x,u,\psi,t)}{\partial u} = -u + \psi_1 = 0, \tag{7.55}$$

звідки $u = \psi_1$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + \psi_1, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2. \end{cases}$$

З рівнянь на ψ знаходимо

$$\psi = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}, \tag{7.56}$$

де C_1 і C_2 визначаються з крайових умов.

Підставляючи це у рівняння на x знаходимо, що

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + 2C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{t}, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2. \end{cases}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$x = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}. \tag{7.57}$$

Частинний розв'язок неоднорідного знайдемо методом невизначених коефіцієнтів. Покладемо

$$x = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} xe^t, \tag{7.58}$$

тоді, при підстановці у систему, отримаємо:

$$\begin{cases} -3A_1 e^{-3t} + B_1 e^t = A_1 e^{-3t} + B_1 e^t - A_2 e^{-3t} - B_2 e^t + 2C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^t, \\ -3A_2 e^{-3t} + B_2 e^t = -4A_1 e^{-3t} - 4B_1 e^t + A_2 e^{-3t} + B_2 e^t. \end{cases}$$

Ця система рівносильна системі

$$\begin{cases} -3A_1 = A_1 - A_2 + 2C_1, \\ B_1 = B_1 - B_2 + 2C_2, \\ -3A_2 = -4A_1 + A_2, \\ B_2 = -4B_1 + B_2. \end{cases}$$

Задача 7.12.

Розв'язок.