1 Системи керування. Постановка задачі оптимального керування

1.1 Алгоритми розв'язування задач

Задача. Розглянемо лінійну систему керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \tag{1.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазових координат, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор керування, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – матриці з неперервними компонентами, $t \in [t_0, T]$. Задана початкова умова $x(t_0) = x_0$, де $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Керування системою є відомим і розглядається в класі програмних керувань, або керувань з оберненим зв'язком. Необхідно відповісти на такі запитання:

1. визначити клас, до якого належить керування (програмне чи з оберненим зв'язком);

2. знайти траєкторію системи, що відповідає заданому керуванню;

3. якщо керування задане у класі керувань з оберненим зв'язком, то знайти керування у класі програмних керувань, яке відповідає заданому керуванню;

4. визначити, до якого простору функцій належить траєкторія системи (неперервно диференційованих, кусково гладких, абсолютно неперервних);

5. порівняти задане керування з іншим керуванням відносно критерію якості
$$\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t + \Phi(x(T)) \to \inf. \tag{1.2}$$
Тут $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$ – неперервні скалярні функції;

6. знайти лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь, одержану з системи (1.1) при підстановці керування $u(x, t) = C(t) \cdot x$, де $C(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – матриця з неперервними компонентами, $t \in [t_0, T]$. Обчислити нормовану за моментом s фундаментальну матрицю знайденої системи,

7. записати спряжену систему до знайденої в попередньому пункті системи. Обчислити нормовану за моментом s фундаментальну матрицю спряженої системи, $s \in [t_0, T]$.

Алгоритм 1.1. Розглянемо підходи до розв'язування задачі.

1. Якщо керування має вигляд $u = u(t)$ і не залежить від вектора стану x, то керування є програмним. Інакше, якщо керування має вигляд $u = u(x, t)$, то керування є керуванням з оберненим зв'язком.

2. Для знаходження траєкторії $x(t)$, яка відповідає заданому керуванню u, підставляємо керування u в систему (1.1) і розв'язуємо її, враховуючи початкову умову.

3. У керування $u = u(x, t)$ підставляємо знайдену у попередньому пункті траєкторію $x = x(t)$ і одержуємо програмне керування $u(t) = u(x(t), t)$.

4. Якщо керування неперервне, то траєкторія системи є неперервно диференційованою. Якщо керування є кусково неперервним, то траєкторія системи стає кусково гладкою. Щоб у цьому переконатись, у всіх точках розриву розглядаємо односторонні похідні (зліва і справа) відповідного розв'язку системи і порівнюємо їх.

5. Значення критерію якості (1.2) обчислюється на кожному з керувань і порівнюється.

6. Підставляємо керування $u(x, t) = C(t) \cdot x$ в систему (1.1). Одержуємо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = D(t) \cdot x(t), \;\; D(t) = A(t) + B(t) \cdot C(t). \tag{1.3}$$

   Фундаментальною матрицею системи (1.3), нормованою за моментом s, називається $n \times n$ -матриця $\Theta(t, s)$, яка є розв'язком матричного рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t, s)}{\mathrm{d}t} = D(t) \cdot \Theta(t, s), \quad \Theta(s, s) = I. \tag{1.4}$$

   Тому для знаходження $\Theta(t, s)$ ми спочатку знаходимо загальний розв'язок системи (1.3). Потім, використовуючи загальний розв'язок, знаходимо n частинних розв'язків $x^{(k)}(t)$ системи (1.3), які відповідають умовам Коші $x(s) = e^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тут $e^{(k)}$ – k-й орт (вектор, який складається з усіх нулів, крім k-го елементу, на місці якого стоїть 1). З (1.4) випливає, що вектори $x^{(k)}(t)$ є стовпчиками матриці $\Theta(t, s)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

7. Спряженою системою до системи (1.3) називається система вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -D^*(t) \cdot y(t), \tag{1.5}$$

де $y = (y_1, \ldots, y_n)^*$. Фундаментальна матриця спряженої системи шукається з фундаментальної матриці системи (1.3) за правилом $\Psi(t, s) = \Theta^*(s, t)$.

Задача. Звести задачу керування системою (1.1) з функціоналом Больца вигляду (1.2) до задачі з функціоналом, що залежить лише від кінцевого стану системи (функціонал Майєра).

Алгоритм 1.2. Перехід між задачами відбувається у кілька кроків:

1. Вводиться змінна

$$x_{n+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t} f_0(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Тоді

$$\mathcal{J}(u) = x_{n+1}(T) + \Phi(T).$$

Такий критерій якості є функціоналом типу Майєра.

3. До системи (1.2) додається рівняння

$$\frac{\mathrm{d}x_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t} = f_0(x(t), u(t), t).$$

Цим самим збільшується порядок системи на одиницю.

1.2 Задачі з розв'язками

Задача 1.1. Задана скалярна система керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0) = 1. \tag{1.6}$$

Тут x – стан системи, $t \in [0, 1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x) = ax, \tag{1.7}$$

де a – скалярний параметр.

1. Знайти траєкторію системи (1.6) при керуванні (1.7).

2. Знайти програмне керування $u(t) = ax(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.

3. Оцінити, при якому значенні параметра $a \in \{2, 4, -3\}$ критерій якості $\mathcal{J}(u) = x^2(1)$ буде мати менше значення.

Розв'язок. Скористаємося алгоритмом 1.1.

1. Керування (1.7) є керуванням з оберненим зв'язком, оскільки залежить від стану системи x. Підставляючи керування (1.7) у систему (1.6), отримаємо систему

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t), \quad x(0) = 1.$$

Її розв'язок має вигляд

$$x(t) = x(0) \cdot e^{at} = e^{at}.$$

2. Знайдемо програмне керування, яке відповідає керуванню з оберненим зв'язком (1.7). Для цього траєкторію, що була знайдена на попередньому кроці, підставляємо в (1.7)

$$u(t) = ax(t) = a \cdot e^{at}.$$

3. З того, що, $x(1) = e^a$ випливає, що

$$\mathcal{J}(u) = x^2(1) = e^{2a}.$$

Множина $\{2, 4, -3\}$ скінченна, тому можна перебрати всі її елементи та обчислити значення критерію якості на кожному з них. Одержуємо

$$\mathcal{J}(u)|_{a=2} = e^4, \ \ \mathcal{J}(u)|_{a=4} = e^8, \ \ \mathcal{J}(u)|_{a=-3} = e^{-6}.$$

Найменшим з цих значень є e^{-6}, яке досягається при $a = -3$.

Задача 1.2. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1. \tag{1.8}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2. \tag{1.9}$$

1. Знайти траєкторію системи (1.8) при керуванні (1.9).

2. Знайти програмне керування $u(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.

3. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом s, системи. що одержана при підстановці керування (1.9) у систему (1.8)?

4. Побудувати спряжену систему до системи, одержаної при підстановці керування (1.9) у систему (1.8), та її фундаментальну матрицю.

Розв'язок. Скористаємося пунктами 2, 3, 5-7 алгоритму 1.1:

1. Підставляючи керування (1.9) у систему (1.8), отримаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = 3x_1(t) + 2x_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + 2x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1.$$

   Її розв'язок

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^{4t}, \\ x_2(t) = e^{4t}. \end{cases}$$

2. Підставляємо знайдену у попередньому пункті траєкторію у вигляд (1.9) керування:

$$u(t) = 2x_1(t) + x_2 = 2 \cdot \left(2e^{4t}\right) + e^{4t} = 5e^{4t}.$$

3. Загальним розв'язком системи (1.8) з підставленим керуванням (1.9) є

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{t} + 2c_2 e^{4t}, \\ x_2(t) = -c_1 e^{t} + c_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Це означає, що фундаментальна матриця цієї системи матиме вигляд

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} c_{11}e^t + 2c_{12}e^{4t} & c_{21}e^t + 2c_{22}e^{4t} \\ -c_{11}e^t + c_{12}e^{4t} & -c_{21}e^t + c_{22}e^{4t} \end{pmatrix}$$

Залишається нормувати її за моментом s, тобто знайти такі $c_{11}(s)$, $c_{12}(s)$, $c_{21}(s)$, $c_{22}(s)$, що $\Theta(s,s) = I$. Отримаємо

$$\Theta(t,s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} & -2e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} \\ e^{t-s} - e^{4(t-s)} & 2e^{t-s} + e^{4(t-s)} \end{pmatrix}$$

4. Спряжена система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t} = -3z_1(t) - z_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t} = -2z_1(t) - 2z_2(t), \end{cases}$$

а відповідна фундаментальна матриця

$$\Psi(t,s) = \Theta^*(s,t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{s-t} + 2e^{4(s-t)} & e^{s-t} - e^{4(s-t)} \\ -2e^{s-t} + 2e^{4(s-t)} & 2e^{s-t} + e^{4(s-t)} \end{pmatrix}$$

Задача 1.3. Розглядається задача Больца

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 u^2(s)\,\mathrm{d}s + (x(1)-2)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x^2(t) + u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0,1]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ задана. Звести цю задачу до задачі Майєра.

Розв'язок. Скористаємося алгоритмом 1.2:

Введемо нову змінну

$$x_2 = \int_0^t u^2(s)\,\mathrm{d}s,$$

тоді

$$\mathcal{J}(u) = x_2(1) + (x_1(1)-2)^2 \to \inf,$$

за умов, що

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1^2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = u^2(t). \end{cases} \quad x_1(0) = x_0, x_2(0) = 0.$$

Задача 1.4. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = 3x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, x_2(0) = -1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ 1, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.
2. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційовною?
3. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням $u(t) = 0$, $t \in [0, 2]$ за умови, що критерій якості має вигляд

$$\mathcal{J}(u) = x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min.$$

Розв'язок. Скористаємося пунктами 2-5 алгоритму 1.1:

1. При $t \in [0, 1]$ маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

З курсу диференціальних рівнянь відомо, що загальний розв'язок має вигляд

$$x = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t},$$

де v_1, v_2 – власні вектори, що відповідають λ_1 та λ_2 відповідно. Підставляючи λ_i, $i = 1, 2$, знаходимо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Підставляючи $t = 0$ отримуємо $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. При $t \in (1, 2]$ маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

де c_3, c_4 задовольняють систему

$$\begin{cases} 2c_3 + c_4 + 1 & = 0, \\ 3c_3 + 4c_4 & = 0, \end{cases}$$

звідки $c_3 = -4/5$, $c_4 = 3/5$ і

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix},$$

Підставляючи $t = 1$ отримуємо $c_1 = \left(1 + \dfrac{3}{4e}\right)$, $c_2 = \dfrac{1}{20e^5}$. Остаточно маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, & t \in [0, 1], \\ \left(1 + \dfrac{3}{4e}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \dfrac{1}{20e^5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

2.

$$\dot{x}(1-) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1-).$$

З неперервності x_1, x_2 маємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1-) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1).$$

З іншого боку,

$$\dot{x}(1+) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1+) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нескладно бачити, що

$$\dot{x}(1-) \neq \dot{x}(1+),$$

тобто траєкторія не є неперервно диференційовною в точці 1.

3. Підставимо $t = 2$ в розв'язки для обох керувань (зауважимо, що для нового керування розв'язок ми вже знаємо, це просто продовження вже знайденого розв'язку для $t \in [0, 1]$). Значення критерію якості на першому керуванні буде

$$\left(e^2 + \frac{3}{4}e + \frac{e^5}{20} - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(-e^2 - \frac{3}{4}e + \frac{3e^5}{20} + \frac{3}{5}\right)^2,$$

а на другому $(e^2)^2 + (-e^2)^2$.

Виконавши обчислення знаходимо, що другий вираз менше, тобто нове керування є кращим за початкове.

Задача 1.5. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -8x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = 6x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = -2, x_2(0) = 1. \tag{1.10}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 4x_1 - x_2. \tag{1.11}$$

1. До якого класу керувань належить керування (1.11): програмних, чи з оберненим зв'язком?

2. Знайти траєкторію системи при керуванні (1.11).

3. Знайти програмне керування $u(t) = 4x_1(t) - x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.

4. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом s, системи, що одержана при підстановці керування (1.11) в систему (1.10)?

5. Побудувати спряжену систему до системи (1.11), одержаної при підстановці керування (1.11) в систему (1.10), та її фундаментальну матрицю.

Розв'язок. 1. З оберненим зв'язком.

2.
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = (\lambda+1)\lambda = 0,$$

звідки $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$.

З курсу диференційних рівнянь відомо, що тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{-t} + c_2 v_2,$$

де v_1, v_2 – власні вектори, що відповідають λ_1 та λ_2 відповідно.

Нескладно бачити, що

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Підставляючи $t = 0$ отримуємо $c_1 = 4$, $c_2 = -3$.

Остаточно маємо:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3. Просто підставляємо знайдені $x_1(t)$, $x_2(t)$ в $u(x_1, x_2)$:

$u(t) = 4\left(4 \cdot (1) - 3 \cdot (2) \cdot e^{-t}\right) - \left(4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) \cdot e^{-t}\right) = 24 - 33e^{-t}$.

4. З вигляду загального розв'язку бачимо, що вищезгадана фундаментальна матриця матиме вигляд

$$\Theta(t,s) = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 e^{s-t} & c_3 + 2c_4 e^{s-t} \\ -2c_1 - 3c_2 e^{s-t} & -2c_3 - 3c_4 e^{s-t} \end{pmatrix},$$

причому

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 &= 1 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 0 \end{cases}$$

(і аналогічна система для c_3, c_4).

Знаходимо $c_1 = -3$, $c_2 = 2$, $c_3 = -2$, $c_4 = 1$ і підставляємо у матрицю:

$$\Theta(t,s) = \begin{pmatrix} -3 + 4e^{s-t} & -2 + 2e^{s-t} \\ 6 - 6e^{s-t} & 4 - 3e^{s-t} \end{pmatrix},$$

5. Спряжена система буде

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

а відповідна фундаметальна матриця

$$\Psi(t,s) = \Theta^*(s,t) = \begin{pmatrix} -3 + 4e^{t-s} & 6 - 6e^{t-s} \\ -2 + 2e^{t-s} & 4 - 3e^{t-s} \end{pmatrix},$$

Задача 1.6. Розглядається задача Лагранжа

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) \cdot x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Звести цю задачу до задачі Майєра.

Розв'язок. Введемо нову фазову координату $x_3(t) = \int_0^t u^2(s)\,\mathrm{d}s$, тоді до системи додається початкова умова $x_3(0) = 0$, рівняння $\dot{x}_3 = u^2$, а функціонал якості переписується у вигляді $x_3(T) \to \inf$.

Задача 1.7. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) - 5x_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ t, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. До якого класу керувань належить таке керування: програмних чи з оберненим зв'язком?

2. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.

3. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційованою?

4. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0,1], \\ t^2, & \text{якщо } t \in (1,2], \end{cases}$$

за умови, що критерій якості має вигляд

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^2 u^2(s)\,\mathrm{d}s + x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min$$

Розв'язок. 1. Керування програмне бо не залежить від x.

2. При $t \in [0,1]$ маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -5 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0,$$

звідки $\lambda_1 = -2i$, $\lambda_2 = 2i$.

З курсу диференційних рівнянь відомо, що тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1(\cos(2t) - i\sin(2t)) + c_2 v_2(\cos(2t) + i\sin(2t)),$$

де v_1, v_2 – власні вектори, що відповідають λ_1 та λ_2 відповідно.

Нескладно бачити, що

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - \sin(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5\sin(2t) \\ \sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Підставляючи $t = 0$ отримуємо $c_1 = 0$, $c_2 = 1/2$.

При $t \in (1,2]$ маємо

...

3.

4.

1.3 Задачі для самостійного розв'язування