

1 Системи керування. Постановка задачі оптимального керування

1.1 Алгоритми

Задача. Задана лінійна система керування

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t),$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазових координат, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u \in \mathbb{R}^m$ – **відоме** керування, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, з початковими умовами

$$x(t_0) = x_0,$$

де $t_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Необхідно:

1. Визначити клас керування: програмне чи з оберненим зв'язком.
2. Знайти траєкторію системи що відповідає заданому керуванню.
3. Звести задане керування до програмного.
4. Перевірити траєкторію на неперервну диференційованість.
5. Порівняти задане керування з іншим керуванням відносно заданого критерію якості

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^T f dt + \Phi(T) \rightarrow \min,$$

де $\mathcal{J} = \mathcal{J}(u) \in \mathbb{R}^1$, $f = f(x, u, t) \in \mathbb{R}^1$, $\Phi(T) = \Phi(x(T)) \in \mathbb{R}^1$, $T \in \mathbb{R}^1$.

6. Знайти фундаментальну матрицю системи, нормовану за моментом s , де $s \in \mathbb{R}^1$.
7. Побудувати спряжену систему.

Алгоритм 1.1. Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. Якщо u не залежить від x то керування програмне, інакше з оберненим зв'язком.
2. Розв'язується система з підставленим u .
3. Замінюється x у визначенні u на знайдену у попередньому пункті траєкторію.

4. Задача математичного аналізу.
5. Обчислюється значення критерію якості на обох керуваннях і порівнюється.
6. (а) Пошук матриці - задача диференціальних рівнянь, або знаходимо з системи $\dot{\Theta}(t, s) = A(t) \cdot \Theta(t, s)$.
- (б) Нормування за моментом s полягає у підборі констант як функцій від s так, щоб $\Theta(s, s) = E$.

Задача. Звести задачу Лагранжа/Больца вигляду

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^T f \, dt + \Phi(T) \rightarrow \inf$$

за умов

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t)$$

до задачі Майера.

Алгоритм 1.2. 1. Вводиться змінна

$$x_{n+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^t f \, dt.$$

2. Тоді

$$\mathcal{J} = x_{n+1}(T) + \Phi(T) \rightarrow \inf.$$

3. До системи додається умова

$$\dot{x}_{n+1} = f.$$

2 Елементи багатозначного аналізу. Множина досяжності

2.1 Алгоритми

Задача. Знайти

1. $A + B$;
2. λA ;

3. $\alpha(A, B)$;

4. MA ,

де множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$, скаляр $\lambda \in \mathbb{R}^1$, матриця $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Алгоритм 2.1. Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. Знаходимо за визначенням,

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}.$$

2. Знаходимо за визначенням,

$$\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}.$$

3. (а) Знаходимо $\beta(A, B)$ і $\beta(B, A)$ за визначенням,

$$\beta(A, B) = \max_{a \in A} \rho(a, B),$$

де

$$\rho(a, B) = \min_{b \in B} \rho(a, b).$$

(б) Знаходимо $\alpha(A, B)$ за визначенням,

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}.$$

4. Знаходимо за визначенням,

$$MA = \{Ma | a \in A\}.$$

Задача. Знайти опорну функцію множини $A \subset \mathbb{R}^n$.

Алгоритм 2.2. 1. Намагаємося знайти за визначенням,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle.$$

2. Якщо не вийшло, то намагаємося знайти за геометричною властивістю:
 $c(A, \psi)$ - (орієнтована) відстань від початку координат до опорної
 площини множини A , для якої напрямок-вектор ψ є вектором нормалі.

Задача. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int F dx$, де $F = F(x) \subset \mathbb{R}^n$.

Алгоритм 2.3. 1. Знаходимо опорну функцію від інтегралу:

$$c(\mathcal{J}, \psi) = \int c(F, \psi) dx.$$

2. Знаходимо \mathcal{J} як опуклий компакт з відомою опорною функцією $c(\mathcal{J}, \psi)$.

Задача. Знайти множину досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

Алгоритм 2.4. 1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s .

2. Знаходимо інтеграл Аумана

$$\int_{t_0}^t \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s) ds.$$

3. Використовуємо теорему про вигляд множини досяжності лінійної системи керування:

$$\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = \Theta(t, t_0) \mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^t \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s) ds.$$

Задача. Знайти опорну функцію множини досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

Алгоритм 2.5. 1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s .

2. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi)$.

3. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)$.

4. Використовуємо теорему про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^t c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi) ds.$$

3 Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування

3.1 Алгоритми

Задача. Перевести систему $\dot{x} = Ax + Bu$ з точки x_0 в точку $x_T \in \mathbb{R}^1$ за допомогою керування з класу K (керування, залежні від вектору параметрів c).

Алгоритм 3.1. 1. Знаходимо траєкторію системи при заданому керуванні (залежну від параметра c).

2. Знаходимо з отриманого алгебраїчного рівняння параметр c .

Задача. 1. Знайти грамміан керованості системи $\dot{x} = Ax + Bu$ за визначенням.

2. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження грамміана керованості.

3. Використовуючи грамміан керованості, знайти інтервал повної керованості системи.

4. Для цього інтервалу записати керування яке переводить систему з точки x_0 в точку x_T /розв'язати задачу оптимального керування.

Алгоритм 3.2. Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. (а) Знаходимо $\Theta(T, s)$.

(б) Використовуємо формулу

$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^T \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) ds.$$

2. Записуємо систему

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0) \cdot A^*(t) + B(t) \cdot B^*(t), \Phi(t_0, t_0) = 0.$$

3. Це інтервал на якому $\Phi(t, t_0) \neq 0$.

4. Використовуємо формулу

$$u(t) = B^*(t) \cdot \Theta(T, t) \cdot \Phi^{-1}(T, t_0)(x_T - \Theta(T, t_0) \cdot x_0).$$

Задача. Дослідити стаціонарну систему $\dot{x} = Ax + Bu$ на керованість використовуючи другий критерій керованості.

Алгоритм 3.3. 1. Знаходимо $D = \begin{pmatrix} B \dot{A} B \dot{A}^n B \dot{\dots} \dot{A}^{n-1} B \end{pmatrix}$.

2. Якщо $\text{rang} D = n$ то стаціонарна системи цілком керована, інакше ні.

4 Критерії спостережуваності. Критерій двоїстості

4.1 Алгоритми

Задача. Побудувати систему для знаходження грамміана спостережуваності для системи $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$.

Алгоритм 4.1. Записуємо систему

$$\dot{\mathcal{N}}(t, t_0) = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t).$$

Задача. Чи буде стаціонарна система $\dot{x} = Ax + Bu$ цілком спостережуваною?

Алгоритм 4.2. 1. Знаходимо

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} H^* \dot{A}^* H^* \dot{(A^*)^2 H^* \dot{\dots} \dot{(A^*)^{n-1} H^*} \end{pmatrix}.$$

2. Якщо $\text{rang} \mathcal{R} = n$ то система цілком спостережувана інакше ні.

Задача. Дослідити на спостережуваність систему $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$, використовуючи критерій двоїстості і відповідний критерій керованості.

Алгоритм 4.3. 1. Будуємо спряжену систему

$$\frac{dz(t)}{dt} = -A^*(t) \cdot z(t) + H^*(t) \cdot u(t).$$

2. Досліджуємо її на керованість, якщо вона керована, то початкова система спостережувана, інакше ні.

Задача. Побудувати спостерігач для системи $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$.

Алгоритм 4.4. 1. Записуємо систему (спостерігач)

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A(t) - K(t)H(t)) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot y(t).$$

2. Або систему (спостерігач)

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot \hat{x}(t)).$$

Вибір вільний, це різні форми запису одного і того ж.

Задача. Задана динамічна система $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використання грамміана спостережуваності.

Алгоритм 4.5. 1. Знаходимо грамміан спостережуваності $\mathcal{N}(t, t_0)$ з системи

$$\dot{\mathcal{N}}(t, t_0) = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t).$$

2. Знаходимо $R(t) = \mathcal{N}^{-1}(t, t_0)$.

3. Розв'язуємо рівняння

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + R(t) \cdot H^*(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot x(t)).$$

5 Задача фільтрації. Множинний підхід

5.1 Алгоритми

Задача. Задана динамічна система $\dot{x} = Ax + v$, $y = Gx + w$, де $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження.

1. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови, що

$$\int_0^\tau (Mv^2(s) + Nw^2(s)) ds + p_0 x^2(0) \leq \mu^2.$$

2. Знайти похибку оцінювання.

Алгоритм 5.1. 1. (а) Знайдемо $R(t)$ з рівняння Бернуллі

$$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

(б) Знайдемо $K(t)$ за формулою

$$K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t).$$

(в) Знайдемо фільтр (спостерігач) за формулою

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)).$$

(г) Знайдемо $k(s)$ з системи

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s) \rangle, \quad k(t_0) = 0.$$

(д) Знайдемо $\mathcal{X}(\tau)$ за формулою

$$\mathcal{X}(\tau) = \mathcal{E}(\hat{x}(\tau), (\mu^2 - k(\tau)) \cdot R(\tau)).$$

2. Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \leq \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))}.$$

6 Варіаційний метод в задачі оптимального керування

6.1 Алгоритми

Задача. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналу $\mathcal{J} = \int f(u) \, ds$.

Алгоритм 6.1. 1. Записуємо $\mathcal{J}(u + \alpha h)$.

2. Знаходимо $\frac{d}{d\alpha} \mathcal{J}(u + \alpha h)$.

3. Знаходимо першу варіацію $\delta \mathcal{J}(u, h)$ за Лагранжем за формулою

$$\delta \mathcal{J}(u, h) = \frac{d}{d\alpha} \mathcal{J}(u + \alpha h)|_{\alpha=0}.$$

4. Якщо

$$\delta \mathcal{J}(u, h) = \int h(s) \cdot g(s) \, ds,$$

то $g(s)$ - похідна за Фреше.

Задача. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування $\dot{x} = Ax + Bu$.

Алгоритм 6.2. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

Задача. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачі оптимального керування варіаційним методом

$$\mathcal{J} = \int f \, ds + \Phi(T) \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = f_0(x, u),$$

і розв'язати цю задачу.

Алгоритм 6.3. 1. Позначимо $\varphi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h)$.

2. Знайдемо $\varphi'(\alpha)$.

3. Підставляючи $\alpha = 0$, знаходимо

$$\varphi'(0) = \int \dots ds + \underbrace{\Phi_1(T)}_{=-\psi(T)} \cdot z(T).$$

4. Запишемо рівняння у варіаціях на функцію $z(t)$.

5. Введемо додаткові, спряжені змінні ψ такі, що

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}.$$

6. Тоді

$$\left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle = -\langle \psi(T), z(T) \rangle.$$

7. Враховуючи рівняння у варіаціях, маємо

$$\begin{aligned} \psi(T) \cdot z(T) &= \psi(T) \cdot z(T) - \psi(t_0) \cdot z(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^T (\psi(s) \cdot z'(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \, ds = \dots \end{aligned}$$

8. Підставимо це у вигляд $\varphi'(0)$:

$$\varphi'(0) = - \int (\psi' + \dots) \cdot z \, ds + \int (\dots) \cdot h(s) \, ds.$$

9. Накладаємо на функцію $\psi(t)$ умову (спряжену систему)

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot \psi(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} = 0,$$

10. Завдяки цьому у $\delta\mathcal{J}(u, h) = \varphi'(0)$ перший інтеграл зануляється.

11. Знаходимо $\mathcal{J}'(u)$

12. З необхідної умови екстремуму функціоналу, $\mathcal{J}'(u_*) = 0$, знаходимо u_* .

13. Далі

$$x_*(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), u_*(s), s) ds.$$

14. Покладаючи $t = T$ знаходимо $x(T)$.

15. Достатньо знаходимо u_* , x_* .

7 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільним правим кінцем

7.1 Алгоритми

Задача. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J} = \int f ds + \Phi(T) \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = f_0.$$

Розв'язати задачу оптимального керування.

Алгоритм 7.1. 1. Записуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle.$$

2. Записуємо спряжену систему:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H}, \quad \psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)).$$

3. Знаходимо $u(\psi)$ з умови оптимальності:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = 0.$$

4. Підставляємо знайдене керування у початкову систему, отримали крайову задачу, систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.
5. Розв'язуємо крайову задачу і знаходимо x .
6. Відновлюємо $u = u(\psi)$ за знайденим ψ .

8 Принцип максимуму Понтрягіна: загальний випадок

8.1 Алгоритми

Задача. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \, ds + \Phi_0 \rightarrow \inf$$

за умов, що

$$\dot{x} = f,$$

а також

$$\int f_i \, ds + \Phi_i = 0, \quad i = \overline{1..k}.$$

Алгоритм 8.1. 1. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle.$$

2. Запишемо термінант:

$$F = \sum_i \lambda_i f_i, \quad \ell = \sum_i \lambda_i \Phi_i.$$

3. Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

(а) оптимальність:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0;$$

(б) стаціонарність (спряжена система):

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H};$$

(в) трансверсальність:

$$\psi(t_0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T};$$

(г) стаціонарність за кінцями: відсутня, бо час фіксований;

(д) доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу;

(е) невід'ємність: $\lambda_i \geq 0$.

4. Методом від супротивного показуємо, що $\lambda_i \neq 0$.

5. З умов принципу максимуму визначаємо $u = u(\psi)$.

6. Записуємо крайову задачу - систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

7. Знаходимо її розв'язок x_* .

8. Відновлюємо $u_* = u_*(\psi)$.

Задача. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \, ds + \Phi_0 \rightarrow \inf$$

за умов, що

$$\dot{x} = f,$$

а також

$$\int f_i \, ds + \Phi_i = 0, \quad i = \overline{1..k}.$$

Алгоритм 8.2. 1. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle.$$

2. Запишемо термінант:

$$F = \sum_i \lambda_i f_i, \quad \ell = \sum_i \lambda_i \Phi_i.$$

3. Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

(а) оптимальність:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0;$$

(б) стаціонарність (спряжена система):

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H};$$

(в) трансверсальність:

$$\psi(t_0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T};$$

(г) стаціонарність за кінцями:

$$\mathcal{H}(T) = \frac{\partial \ell}{\partial T};$$

(д) доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу;

(е) невід’ємність: $\lambda_i \geq 0$.

4. Методом від супротивного показуємо, що $\lambda_i \neq 0$.

5. З умов принципу максимуму визначаємо $u = u(\psi)$.

6. Записуємо крайову задачу - систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

7. З умов принципу максимуму і крайової задачі визначаємо T .

8. Знаходимо розв’язок крайової задачі x_* .

9. Відновлюємо $u_* = u_*(\psi)$.