6 Варіаційний метод в задачі оптимального керування

6.1 Алгоритми

Задача. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналу $\mathcal{J} = \int f(u)\,\mathrm{d}s$.

Алгоритм 6.1. 1. Записуємо $\mathcal{J}(u+\alpha h)$.

2. Знаходимо $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathcal{J}(u+\alpha h)$.

3. Знаходимо першу варіацію $\delta\mathcal{J}(u,h)$ за Лагранжем за формулою

$$\delta\mathcal{J}(u,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left.\mathcal{J}(u+\alpha h)\right|_{\alpha=0}.$$

4. Якщо

$$\delta\mathcal{J}(u,h) = \int h(s)\cdot g(s)\,\mathrm{d}s,$$

то $g(s)$ - похідна за Фреше.

Задача. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування $\dot{x} = Ax + Bu$.

Алгоритм 6.2. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t),u(t),t)}{\partial x}\cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t),u(t),t)}{\partial u}\cdot h(t), \quad z(0)=0.$$

Задача. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачі оптимального керування варіаційним методом

$$\mathcal{J} = \int f\,\mathrm{d}s + \Phi(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = f_0(x,u),$$

і розв'язати цю задачу.

Алгоритм 6.3. 1. Позначимо $\phi(\alpha) = \mathcal{J}(u+\alpha h)$.

2. Знайдемо $\phi'(\alpha)$.

3. Підставляючи $\alpha = 0$, знаходимо

$$\phi'(0) = \int ... \,\mathrm{d}s + \underbrace{\Phi_1(T)}_{=-\psi(T)} \cdot z(T).$$

4. Запишемо рівняння у варіаціях на функцію $z(t)$.

5. Введемо додаткові, спряжені змінні ψ такі, що

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}.$$

6. Тоді

$$\left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle = -\langle \psi(T), z(T) \rangle.$$

7. Враховуючи рівняння у варіаціях, маємо

$$\psi(T) \cdot z(T) = \psi(T) \cdot z(T) - \psi(t_0) \cdot z(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{T} (\psi(s) \cdot z'(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \,\mathrm{d}s = ...$$

8. Підставимо це у вигляд $\phi'(0)$:

$$\phi'(0) = -\int (\psi' + ...) \cdot z \,\mathrm{d}s + \int (...) \cdot h(s)) \,\mathrm{d}s.$$

9. Накладаємо на функцію $\psi(t)$ умову (спряжену систему)

$$\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot \psi(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} = 0,$$

10. Завдяки цьому у $\delta\mathcal{J}(u, h) = \phi'(0)$ перший інтеграл зануляється.

11. Знаходимо $\mathcal{J}'(u)$

12. З необхідної умову екстремуму функціоналу, $\mathcal{J}'(u_*) = 0$, знаходимо u_*.

13. Далі

$$x_*(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), u_*(s), s) \,\mathrm{d}s.$$

14. Покладаючи $t = T$ знаходимо $x(T)$.

15. Остаточно знаходимо u_*, x_*.

6.2 Аудиторне заняття

Задача 6.1. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналів:

1. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^3(s)\,\mathrm{d}s$;
2. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T (\sin^2 u_1(s) + u_2^2(s))\,\mathrm{d}s$, $u = (u_1, u_2)^*$.

Розв'язок. Першою варіацією (за Лагранжем) функціоналу $\mathcal{J}(u)$ в точці u називається

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathcal{J}(u+\alpha\psi) - \mathcal{J}(u)}{\alpha}$$

(якщо, звичайно, вона існує для довільного напрямку ψ). Також можна записати

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\big|_{\alpha=0}\,.$$

1. Перша варіація за Лагранжем:

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\big|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^T (u+\alpha\psi)^3(s)\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T 3\psi(s)\cdot(u+\alpha\psi)^2(s)\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} = \int_0^T 3\psi(s)\cdot u^2(s)\,\mathrm{d}s$$

   Як наслідок, похідна за Фреше $\mathcal{J}'(u) = 3u^2(\cdot)$.

2. Перша варіація за Лагранжем:

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\big|_{\alpha=0} =$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^T (\sin^2(u_1+\alpha\psi_1) + (u_2+\alpha\psi_2)^2)\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T (2\psi_1\sin(u_1+\alpha\psi_1)\cos(u_1+\alpha\psi_1) + 2\psi_2\cdot(u_2+\alpha\psi_2))\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T (2\psi_1(s)\sin(u(s))\cos(u(s)) + 2\psi_2(s)\cdot u_2(s))\,\mathrm{d}s.$$

Задача 6.2. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = (x(t)+u(t))^3, \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t)\in\mathbb{R}^1$, $u(t)\in\mathbb{R}^1$, $t\in[0,T]$. Точки $x_0\in\mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

У нашій задачі

$$f(x(t), u(t), t) = (x(t) + u(t))^3,$$

тому маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = 3(x(t) + u(t))^2 \cdot z(t) + 3(x(t) + u(t))^2 \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

Задача 6.3. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) - x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = -3.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^*$, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

У нашій задачі

$$f(x(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + u_1 \\ x_1 - x_2 + u_2 \end{pmatrix},$$

тому маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot z(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot h(t), \quad z(0) = 0,$$

або, у розгорнутому вигляді,

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 2x_1 z_1 + 2x_2 z_2 + h_1, \\ \dot{z}_2 = z_1 - z_2 + h_2, \\ z_1(0) = z_2(0) = 0. \end{cases}$$

Задача 6.4. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачи оптимального керування варіаційним методом

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sin(x(t)) + u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Перш за все запишемо

$$\phi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h) = \int_0^T (u(s) + \alpha h(s))^2\,\mathrm{d}s + x^2(T, \alpha).$$

Далі,

$$\phi'(\alpha) = \int_0^T 2h(s)\cdot(u(s) + \alpha h(s))\,\mathrm{d}s + 2x(T,\alpha)\frac{\partial x(T,\alpha)}{\partial \alpha}.$$

Підставимо $\alpha = 0$:

$$\delta\mathcal{J}(u, h) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \underbrace{2x(T)}_{=-\psi(T)}\cdot z(T).$$

Тоді рівняння у варіаціях

$$\begin{cases} z' = \cos(x)\cdot z + 1\cdot h, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\psi(T)\cdot z(T) = \psi(T)\cdot z(T) - \psi(0)\cdot z(0) = \int_0^T (\psi(s)\cdot z(s))'\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T (\psi'(s)\cdot z(s) + \psi(s)\cdot z'(s))\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T \psi'(s)\cdot z(s) + \psi(s)(\cos(x(s))\cdot z(s) + h(s))\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T \psi'(s)\cdot z(s) + \psi(s)\cos(x(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^T h(s)\cdot\psi(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

$$\delta\mathcal{J}(u,h) = \int_0^T 2h(s)\cdot u(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T z(s)\cdot(\psi'(s)+\psi(s)\cos(x(s)))\,\mathrm{d}s + \\ + \int_0^T h(s)\cdot(2u(s)-\psi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Тоді спряжена система

$$\begin{cases} \quad 0 = \psi'(s) + \psi(s)\cdot\cos(x(s)), \\ \psi(T) = -2x(T). \end{cases}$$

Остаточно, $\mathcal{J}'(u) = 2u(\cdot) - \psi(\cdot)$.

Задача 6.5. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + (x(T)-1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t)\in\mathbb{R}^1$, $u(t)\in\mathbb{R}^1$, $t\in[0,T]$. Точки $x_0\in\mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. $\delta\mathcal{J}(u,h) = \phi'(0)$.

$\phi(\alpha) = \mathcal{J}(u+\alpha h) = \int_0^T (u(s)+\alpha h(s))^2\,\mathrm{d}s + (x(T,\alpha)-1)^2$.

$\phi'(\alpha) = \int_0^T 2h(s)(u(s)+\alpha h(s))\,\mathrm{d}s + 2(x(T,\alpha)-1)x'_\alpha(T,\alpha)$.

$\phi'(0) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \underbrace{2(x(T)-1)}_{=-\psi(T)}\cdot z(T)$.

$z' = h$, $z(0) = 0$.

$$\psi(T)\cdot z(T) = \psi(T)\cdot z(T) - \psi(0)\cdot z(0) = \int_0^T (\psi(s)\cdot z(s))'\,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T (\psi'(s)\cdot z(s) + \psi(s)\cdot z'(s))\,\mathrm{d}s.$$

$\phi'(0) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T (\psi'(s)z(1) + \psi(s)h)\,\mathrm{d}s$.

$x'_\alpha(T,\alpha) = \int_0^T h(s)(2u(s) - \psi(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^T \psi'(s)z(s)\,\mathrm{d}s.$

$\mathcal{J}'(u) = 2u(\cdot) - \psi(\cdot).$

$\mathcal{J}'(u) = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\psi(\cdot)}{2}, \\ \psi' = 0, \\ x(0) = x_0, \\ \phi(T) = 2(x(T) - 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi = const, \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{const}{2}, x(t) \quad = (const/2)t + u. \end{cases}$$

$c_1 = -2\left(\frac{c_1}{2}T + x_0 - 1\right) = -c_1 T - 2x_0 + 2$, $c_1 = \frac{-2x_0+2}{1+T}$.

$u(t) = \frac{\psi(t)}{2} = \frac{-x_0+1}{1+T}$.

Задача 6.6. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + (x(T) + 2)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0,T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Застосовуємо вже добре відомий алгоритм:

1. $\phi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h) = \int_0^T (u + \alpha h)^2(s)\,\mathrm{d}s + (x(T,\alpha) + 2)^2$.

2. $\phi'(\alpha) = \int_0^T 2h(s)(u + \alpha h)(s)\,\mathrm{d}s + 2(x(T,\alpha) + 2)\frac{\partial x(T,\alpha)}{\partial \alpha}$.

3. $\phi'(0) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \underbrace{2(x(T) + 2)}_{=-\psi(T)}z(T)$.

4. (рівняння у варіаціях): $z' = z + h$, $z(0) = 0$;

5.

$$\psi(T)z(T) = ... = \int_0^T \psi'(s)z(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^T \psi(s)(z(s)+h(s))\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_0^T z(s)(\psi'(s)+\psi(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^T h(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

6.

$$\delta\mathcal{J}(u,\alpha) = \int_0^T 2h(s)u(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T z(s)(\psi'(s)+\psi(s))\,\mathrm{d}s -$$
$$- \int_0^T h(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s = ... + \int_0^T (2u(s)-\psi(s))h(s)\,\mathrm{d}s.$$

7. $\phi'(0) = \int_0^T (2u(s)-\psi(s))h(s)\,\mathrm{d}s$.

8. $\mathcal{J}'(u) = 2u(\cdot) - \psi(\cdot)$;

9. ...

Задача 6.7.

Розв'язок.

6.3 Домашнє завдання

Задача 6.8. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованмх з квадратом функцій для функціоналів:

1. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T \cos(u(s))\,\mathrm{d}s$;

2. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T (s^2u_1^4(s) + u_2^2(s))\,\mathrm{d}s$, $u = (u_1, u_2)^*$.

Розв'язок. 1. Перша варіація за Лагранжем:

$$\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\big|_{\alpha=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^T \cos(u(s)+\alpha\psi(s))\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_0^T -\psi(s)\sin(u(s)+\alpha\psi(s))\,\mathrm{d}s\bigg|_{\alpha=0} = -\int_0^T \psi(s)\sin(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

Як наслідок, похідна за Фреше $\mathcal{J}'(u) = -\sin u(\cdot)$.

2.

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{J}(u,\psi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathcal{J}(u+\alpha\psi)\big|_{\alpha=0} = \\
= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\int_0^T (s^2(u_1+\alpha\psi_1)^4(s) + (u_2+\alpha\psi_2)^2(s))\,\mathrm{d}s\Big|_{\alpha=0} = \\
= \int_0^T (4s^2\psi_1(s)(u_1+\alpha\psi_1)^3(s) + 2\psi_2(s)(u_2+\alpha\psi_2)(s))\,\mathrm{d}s\Big|_{\alpha=0} = \\
= \int_0^T (4s^2\psi_1(s)u_1^3(s) + 2\psi_2(s)u_2(s))\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Задача 6.9. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \cos(x(t)+u(t)), \quad x(0)=x_0.$$

Тут $x(t)\in\mathbb{R}^1$, $u(t)\in\mathbb{R}^1$, $t\in[0,T]$. Точки $x_0\in\mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t),u_*(t),t)}{\partial x}\cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t),u_*(t),t)}{\partial u}\cdot h(t), \quad z(0)=0.$$

У нашій задачі

$$f(x(t),u(t),t) = \cos(x(t)+u(t)),$$

тому маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -\sin(x(t)+u(t))\cdot z(t) - \sin(x(t)+u(t))\cdot h(t), \quad z(0)=0.$$

Задача 6.10. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t)\cdot x_2(t) + u_1(t),\\
\dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) - x_2(t)\cdot u_2(t),
\end{cases}$$

$$x_1(0)=-1, x_2(0)=4.$$

Тут $x=(x_1,x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u=(u_1,u_2)^*$, $t\in[0,T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

У нашій задачі

$$f(x(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 + u_1 \\ x_1 - x_2 \cdot u_2 \end{pmatrix},$$

тому маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & -u_2 \end{pmatrix} \cdot z(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -x_2 \end{pmatrix} \cdot h(t), \quad z(0) = 0,$$

або, у розгорнутому вигляді,

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = x_2 z_1 + x_1 z_2 + h_1, \\ \dot{z}_2 = z_1 - u_2 z_2 - x_2 h_2, \\ 0 = z_1(0) = z_2(0). \end{cases}$$

Задача 6.11. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачи оптимального керування варіаційним методом

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u^2(s) + x^4(s))\,\mathrm{d}s + x^4(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) \cdot u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Перш за все запишемо

$$\phi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h) = \int_0^T ((u + \alpha h)^2(s) + x^4(s, \alpha))\,\mathrm{d}s + x^4(T, \alpha).$$

Далі,

$$\phi'(\alpha) = \int_0^T (2h(s) \cdot (u(s) + \alpha h(s)) + 4x^3(s, \alpha) x'_\alpha(s, \alpha))\,\mathrm{d}s + 4x^3(T, \alpha) x'_\alpha(T, \alpha).$$

Підставимо $\alpha = 0$:

$$\delta\mathcal{J}(u, h) = \int_0^T (2h(s)u(s) + 4x^3(s)z(s))\,\mathrm{d}s + \underbrace{4x^3(T)}_{=-\psi(T)} \cdot z(T).$$

Тоді рівняння у варіаціях

$$\begin{cases} z' = u \cdot z + x \cdot h, \\ z(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\psi(T) \cdot z(T) = \psi(T) \cdot z(T) - \psi(0) \cdot z(0) = \int_0^T (\psi(s) \cdot z(s))' \,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T (\psi'(s) \cdot z(s) + \psi(s) \cdot z'(s)) \,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T \phi'(s)z(s) + \phi(s)(u(s)z(s) + x(s)h(s)) = \\ = \int_0^T \phi'(s)z(s)u(s)z(s) \,\mathrm{d}s + \int_0^T \psi(s)x(s)h(s) \,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J}(u,h) = \int_0^T 2h(s)u(s) + 4x^3(s)z(s) \,\mathrm{d}s - \\ - \int_0^T \psi'(s)z(s)u(s)z(s) \,\mathrm{d}s - \int_0^T \psi(s)x(s)h(s) \,\mathrm{d}s = \\ = \int_0^T (\psi'(s)z(s) + \psi(s)x(s)h(s) + u(s)z(s)) \,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

$$\int_0^T z(s)(\psi'(s) + \psi(s)u(s)) \,\mathrm{d}s + \int_0^T h(s)\psi(s)x(s(\mathrm{d}s + \int))$$

...???...

Задача 6.12. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u(s) - v(s))^2 \,\mathrm{d}s + (x(T) - 3)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, момент часу T і функція $v(t) \in \mathbb{R}^1$ є заданими.

Розв'язок. Нагадаємо постановку задачі варіаційного методу:

$$\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t + \Phi(x(T)) \to \inf,$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Спочатку випишемо всі функції з теоретичної частини які фігурують в задачі:

$$\begin{aligned} f_0(x(t), u(t), t) &= (u(t) - v(t))^2, \\ \Phi(x(T)) &= (x(T) - 3)^2, \\ f(x(t), u(t), t) &= u(t). \end{aligned}$$

Позначимо

$$\phi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h) = \int_0^T ((u + \alpha h)(s) - v(s))^2\,\mathrm{d}s + (x(T, \alpha) - 3)^2.$$

Необхідна умова екстремуму через першу варіацію функціоналу має вигляд $\delta\mathcal{J}(u_*, h) = \phi'(0) = 0$, тому знайдемо

$$\phi'(\alpha) = \int_0^T (2h(s) \cdot ((u + \alpha h)(s) - v(s)))\,\mathrm{d}s + 2(x(T, \alpha) - 3) \cdot \underbrace{\frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha}}_{=z(T)}.$$

Підставляючи $\alpha = 0$, знаходимо

$$\phi'(0) = \int_0^T (2h(s) \cdot (u(s) - v(s)))\,\mathrm{d}s + \underbrace{2(x(T) - 3)}_{=-\psi(T)} \cdot z(T).$$

Запишемо рівняння у варіаціях на функцію $z(t)$. Його загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(t_0) = 0.$$

У контексті нашої задачі маємо

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \cdot z(t) + 1 \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

Введемо додаткові, спряжені змінні ψ такі, що

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}.$$

Тоді $\left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle = -\langle \psi(T), z(T) \rangle$ (у контексті нашої задачі "скалярний" добуток зайвий бо функції і так скалярні). Враховуючи рівняння у варіаціях, маємо

$$\begin{aligned}\psi(T) \cdot z(T) = \psi(T) \cdot z(T) - \psi(t_0) \cdot z(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{T} (\psi(s) \cdot z'(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \, \mathrm{d}s = \\ = \int_{0}^{T} (\psi(s) \cdot h(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \, \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Підставимо це у вигляд $\phi'(0)$:

$$\begin{aligned}\phi'(0) &= \int_{t_0}^{T} \left(\frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial u} \cdot h(t) \right) + \\ &\quad + \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x} \cdot z(T) = \\ &= \int_{t_0}^{T} \left(\frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial u} \cdot h(t) \right) - \\ &\quad - \int_{0}^{T} (\psi(s) \cdot h(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \, \mathrm{d}s = \\ &= \int_{0}^{T} (2h(s) \cdot (u(s) - v(s))) \, \mathrm{d}s - \\ &\quad - \int_{0}^{T} (\psi(s) \cdot h(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \, \mathrm{d}s = \\ &= \int_{0}^{T} -\psi'(s) \cdot z(s) \, \mathrm{d}s + \int_{0}^{T} (2(u(s) - v(s)) - \psi(s)) \cdot h(s) \, \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Накладаємо на функцію $\psi(t)$ умову (спряжену систему)

$$\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot \psi(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} = 0,$$

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x} = 2(x(T) - 3),$$

звідки $\psi(t) = 2(x(T) - 3)$.

Завдяки цьому

$$\delta \mathcal{J}(u, h) = \phi'(0) = \int_{0}^{T} (2(u(s) - v(s)) - \psi(s)) \cdot h(s) \, \mathrm{d}s.$$

Як наслідок,
$$\mathcal{J}'(u) = 2(u(\cdot) - v(\cdot)) - \psi(\cdot)).$$

Пригадуючи необхідну умову екстремуму функціоналу, знаходимо

$$u_*(t) = v(t) + \psi(t)/2 = v(t) + x(T) - 3.$$

Далі

$$x_*(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), u_*(s), s)\,\mathrm{d}s = \\ = x_0 + \int_0^t (v(s) + x(T) - 3)\,\mathrm{d}s = tx(T) - 3t + \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s.$$

покладаючи $t = T$ знаходимо

$$x(T) = Tx(T) - 3T + \int_0^T v(s)\,\mathrm{d}s,$$

звідки
$$x(T) = \frac{\int_0^T v(s)\,\mathrm{d}s - 3T}{1 - T},$$

і остаточно
$$u_*(t) = v(t) + \frac{\int_0^T v(s)\,\mathrm{d}s - 3T}{1 - T} - 3,$$
$$x_*(t) = \frac{t \cdot \left(\int_0^T v(s)\,\mathrm{d}s - 3T\right)}{1 - T} - 3t + \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s.$$

Задача 6.13.

Розв'язок.

Задача 6.14.

Розв'язок.

Задача 6.15.

Розв'язок.