

# 1 Системи керування. Постановка задачі оптимального керування

## 1.1 Алгоритми розв'язування задач

*Задача.* Розглянемо лінійну систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \quad (1.1)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор фазових координат,  $u \in \mathbb{R}^m$  – вектор керування,  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – матриці з неперервними компонентами,  $t \in [t_0, T]$ . Задана початкова умова  $x(t_0) = x_0$ , де  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Керування системою є відомим і розглядається в класі програмних керувань, або керувань з оберненим зв'язком. Необхідно відповісти на такі запитання:

1. визначити клас, до якого належить керування (програмне чи з оберненим зв'язком);
2. знайти траєкторію системи, що відповідає заданому керуванню;
3. якщо керування задане у класі керувань з оберненим зв'язком, то знайти керування у класі програмних керувань, яке відповідає заданому керуванню;
4. визначити, до якого простору функцій належить траєкторія системи (неперервно диференційованих, кусково гладких, абсолютно неперервних);
5. порівняти задане керування з іншим керуванням відносно критерію якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(T)) \rightarrow \inf. \quad (1.2)$$

Тут  $f_0(x, u, t)$ ,  $\Phi(x)$  – неперервні скалярні функції;

6. знайти лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь, одержану з системи (1.1) при підстановці керування  $u(x, t) = C(t) \cdot x$ , де  $C(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – матриця з неперервними компонентами,  $t \in [t_0, T]$ . Обчислити нормовану за моментом  $s$  фундаментальну матрицю знайденої системи,
7. записати спряжену систему до знайденої в попередньому пункті системи. Обчислити нормовану за моментом  $s$  фундаментальну матрицю спряженої системи,  $s \in [t_0, T]$ .

**Алгоритм 1.1.** Розглянемо підходи до розв'язування задачі.

1. Якщо керування має вигляд  $u = u(t)$  і не залежить від вектора стану  $x$ , то керування є програмним. Інакше, якщо керування має вигляд  $u = u(x, t)$ , то керування є керуванням з оберненим зв'язком.
2. Для знаходження траєкторії  $x(t)$ , яка відповідає заданому керуванню  $u$ , підставляємо керування  $u$  в систему (1.1) і розв'язуємо її, враховуючи початкову умову.
3. У керування  $u = u(x, t)$  підставляємо знайдену у попередньому пункті траєкторію  $x = x(t)$  і одержуємо програмне керування  $u(t) = u(x(t), t)$ .
4. Якщо керування неперервне, то траєкторія системи є неперервно диференційованою. Якщо керування є кусково неперервним, то траєкторія системи стає кусково гладкою. Щоб у цьому перекона-тись, у всіх точках розриву розглядаємо односторонні похідні (зліва і справа) відповідного розв'язку системи і порівнюємо їх.
5. Значення критерію якості (1.2) обчислюється на кожному з керувань і порівнюється.
6. Підставляємо керування  $u(x, t) = C(t) \cdot x$  в систему (1.1). Одержуємо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(t) \cdot x(t), \quad D(t) = A(t) + B(t) \cdot C(t). \quad (1.3)$$

Фундаментальною матрицею системи (1.3), нормованою за момен-том  $s$ , називається  $n \times n$ -матриця  $\Theta(t, s)$ , яка є розв'язком матри-чного рівняння

$$\frac{d\Theta(t, s)}{dt} = D(t) \cdot \Theta(t, s), \quad \Theta(s, s) = I. \quad (1.4)$$

Тому для знаходження  $\Theta(t, s)$  ми спочатку знаходимо загальний розв'язок системи (1.3). Потім, використовуючи загальний розв'язок, знаходимо  $n$  частинних розв'язків  $x^{(k)}(t)$  системи (1.3), які відпо-відають умовам Коші  $x(s) = e^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тут  $e^{(k)}$  –  $k$ -й орт (вектор, який складається з усіх нулів, крім  $k$ -го елементу, на місці якого стоїть 1). З (1.4) випливає, що вектори  $x^{(k)}(t)$  є стовпчиками матриці  $\Theta(t, s)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

7. Спряженою системою до системи (1.3) називається система вигляду

$$\frac{dy(t)}{dt} = -D^*(t) \cdot y(t), \quad (1.5)$$

де  $y = (y_1, \dots, y_n)^*$ . Фундаментальна матриця спряженої системи шукається з фундаментальної матриці системи (1.3) за правилом  $\Psi(t, s) = \Theta^*(s, t)$ .

*Задача.* Звести задачу керування системою (1.1) з функціоналом Больца вигляду (1.2) до задачі з функціоналом, що залежить лише від кінцевого стану системи (функціонал Майєра).

**Алгоритм 1.2.** Перехід між задачами відбувається у кілька кроків:

1. Вводиться змінна

$$x_{n+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^t f_0(x(t), u(t), t) dt.$$

2. Тоді

$$\mathcal{J}(u) = x_{n+1}(T) + \Phi(T).$$

Такий критерій якості є функціоналом типу Майєра.

3. До системи (1.2) додається рівняння

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = f_0(x(t), u(t), t).$$

Цим самим збільшується порядок системи на одиницю.

## 1.2 Задачі з розв'язками

*Задача 1.1.* Задана скалярна система керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \quad x(0) = 1. \quad (1.6)$$

Тут  $x$  – стан системи,  $t \in [0, 1]$ . Керування задане у вигляді

$$u(x) = ax, \quad (1.7)$$

де  $a$  – скалярний параметр.

1. Знайти траєкторію системи (1.6) при керуванні (1.7).
2. Знайти програмне керування  $u(t) = ax(t)$ , яке відповідає знайденій траєкторії.
3. Оцінити, при якому значенні параметра  $a \in \{2, 4, -3\}$  критерій якості  $\mathcal{J}(u) = x^2(1)$  буде мати менше значення.

**Розв’язок.** Скористаємося алгоритмом 1.1.

1. Керування (1.7) є керуванням з оберненим зв’язком, оскільки залежить від стану системи  $x$ . Підставляючи керування (1.7) у систему (1.6), отримаємо систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t), \quad x(0) = 1.$$

Її розв’язок має вигляд

$$x(t) = x(0) \cdot e^{at} = e^{at}.$$

2. Знайдемо програмне керування, яке відповідає керуванню з оберненим зв’язком (1.7). Для цього траєкторію, що була знайдена на попередньому кроці, підставляємо в (1.7)

$$u(t) = ax(t) = a \cdot e^{at}.$$

3. З того, що,  $x(1) = e^a$  випливає, що

$$\mathcal{J}(u) = x^2(1) = e^{2a}.$$

Множина  $\{2, 4, -3\}$  скінченна, тому можна перебрати всі її елементи та обчислити значення критерію якості на кожному з них. Одержуємо

$$\mathcal{J}(u)|_{a=2} = e^4, \quad \mathcal{J}(u)|_{a=4} = e^8, \quad \mathcal{J}(u)|_{a=-3} = e^{-6}.$$

Найменшим з цих значень є  $e^{-6}$ , яке досягається при  $a = -3$ .

*Задача 1.2.* Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1. \quad (1.8)$$

Тут  $x = (x_1, x_2)^*$  – вектор фазових координат з  $\mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, T]$ . Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2. \quad (1.9)$$

1. Знайти траєкторію системи (1.8) при керуванні (1.9).
2. Знайти програмне керування  $u(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$ , яке відповідає знайденій траєкторії.
3. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом  $s$ , системи, що одержана при підстановці керування (1.9) у систему (1.8)?
4. Побудувати спряжену систему до системи, одержаної при підстановці керування (1.9) у систему (1.8), та її фундаментальну матрицю.

**Розв’язок.** Скористаємося пунктами 2, 3, 5-7 алгоритму 1.1:

1. Підставляючи керування (1.9) у систему (1.8), отримаємо систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 2x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + 2x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1.$$

Її розв’язок

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^{4t}, \\ x_2(t) = e^{4t}. \end{cases}$$

2. Підставляємо знайдену у попередньому пункті траєкторію у вигляд (1.9) керування:

$$u(t) = 2x_1(t) + x_2 = 2 \cdot (2e^{4t}) + e^{4t} = 5e^{4t}.$$

3. Загальним розв’язком системи (1.8) з підставленим керуванням (1.9) є

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{4t}, \\ x_2(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Це означає, що фундаментальна матриця цієї системи матиме вигляд

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} c_{11}e^t + 2c_{12}e^{4t} & c_{21}e^t + 2c_{22}e^{4t} \\ -c_{11}e^t + c_{12}e^{4t} & -c_{21}e^t + c_{22}e^{4t} \end{pmatrix}$$

Залишається нормувати її за моментом  $s$ , тобто знайти такі  $c_{11}(s)$ ,  $c_{12}(s)$ ,  $c_{21}(s)$ ,  $c_{22}(s)$ , що  $\Theta(s, s) = I$ . Отримаємо

$$\Theta(t, s) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} & -2e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} \\ e^{t-s} - e^{4(t-s)} & 2e^{t-s} + e^{4(t-s)} \end{pmatrix}$$

4. Спряжена система

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -3z_1(t) - z_2(t), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = -2z_1(t) - 2z_2(t), \end{cases}$$

а відповідна фундаментальна матриця

$$\Psi(t, s) = \Theta^*(s, t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{s-t} + 2e^{4(s-t)} & e^{s-t} - e^{4(s-t)} \\ -2e^{s-t} + 2e^{4(s-t)} & 2e^{s-t} + e^{4(s-t)} \end{pmatrix}$$

*Задача 1.3.* Розглядається задача Больца

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 u^2(s) ds + (x(1) - 2)^2 \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x^2(t) + u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут  $x(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^1$ ,  $t \in [0, 1]$ . Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^1$  задана. Звести цю задачу до задачі Майєра.

**Розв'язок.** Скористаємося алгоритмом 1.2:

Введемо нову змінну

$$x_2 = \int_0^t u^2(s) ds,$$

тоді

$$\mathcal{J}(u) = x_2(1) + (x_1(1) - 2)^2 \rightarrow \inf,$$

за умов, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1^2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = u^2(t). \end{cases} \quad x_1(0) = x_0, x_2(0) = 0.$$

Задача 1.4. Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = -1.$$

Тут  $x = (x_1, x_2)^*$  – вектор фазових координат з  $\mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, 2]$ . Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ 1, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.
2. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційовною?
3. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням  $u(t) = 0$ ,  $t \in [0, 2]$  за умови, що критерій якості має вигляд

$$\mathcal{J}(u) = x_1^2(2) + x_2^2(2) \rightarrow \min.$$

**Розв’язок.** Скористаємося пунктами 2-5 алгоритму 1.1:

1. При  $t \in [0, 1]$  маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,$$

звідки  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 5$ .

З курсу диференціальних рівнянь відомо, що загальний розв’язок має вигляд

$$x = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t},$$

де  $v_1$ ,  $v_2$  – власні вектори, що відповідають  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  відповідно. Підставляючи  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , знаходимо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Підставляючи  $t = 0$  отримуємо  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ . При  $t \in (1, 2]$  маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

де  $c_3, c_4$  задовольняють систему

$$\begin{cases} 2c_3 + c_4 + 1 = 0, \\ 3c_3 + 4c_4 = 0, \end{cases}$$

звідки  $c_3 = -4/5$ ,  $c_4 = 3/5$  і

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix},$$

Підставляючи  $t = 1$  отримуємо  $c_1 = \left(1 + \frac{3}{4e}\right)$ ,  $c_2 = \frac{1}{20e^5}$ . Остаточно маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, & t \in [0, 1], \\ \left(1 + \frac{3}{4e}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \frac{1}{20e^5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

2.

$$\dot{x}(1-) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1-).$$

З неперервності  $x_1, x_2$  маємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1-) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1).$$

З іншого боку,

$$\dot{x}(1+) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1+) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нескладно бачити, що

$$\dot{x}(1-) \neq \dot{x}(1+),$$

тобто траєкторія не є неперервно диференційовною в точці 1.



3. Підставимо  $t = 2$  в розв'язки для обох керувань (зауважимо, що для нового керування розв'язок ми вже знаємо, це просто продовження вже знайденого розв'язку для  $t \in [0, 1]$ ). Значення критерію якості на першому керуванні буде

$$\left(e^2 + \frac{3}{4}e + \frac{e^5}{20} - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(-e^2 - \frac{3}{4}e + \frac{3e^5}{20} + \frac{3}{5}\right)^2,$$

а на другому  $(e^2)^2 + (-e^2)^2$ .

Виконавши обчислення знаходимо, що другий вираз менше, тобто нове керування є кращим за початкове.

*Задача 1.5.* Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -8x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = -2, x_2(0) = 1. \quad (1.10)$$

Тут  $x = (x_1, x_2)^*$  – вектор фазових координат з  $\mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, 1]$ . Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 4x_1 - x_2. \quad (1.11)$$

1. До якого класу керувань належить керування (1.11): програмних, чи з оберненим зв'язком?
2. Знайти траєкторію системи при керуванні (1.11).
3. Знайти програмне керування  $u(t) = 4x_1(t) - x_2(t)$ , яке відповідає знайденій траєкторії.
4. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом  $s$ , системи, що одержана при підстановці керування (1.11) в систему (1.10)?
5. Побудувати спряжену систему до системи (1.11), одержаної при підстановці керування (1.11) в систему (1.10), та її фундаментальну матрицю.

**Розв'язок.** 1. З оберненим зв'язком.

2.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & -2 \\ 6 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = (\lambda + 1)\lambda = 0,$$

звідки  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$ .

З курсу диференціальних рівнянь відомо, що тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^{-t} + c_2 v_2,$$

де  $v_1, v_2$  – власні вектори, що відповідають  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  відповідно.

Нескладно бачити, що

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Підставляючи  $t = 0$  отримуємо  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = -3$ .

Остаточно маємо:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3. Просто підставляємо знайдені  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  в  $u(x_1, x_2)$ :

$$u(t) = 4(4 \cdot (1) - 3 \cdot (2) \cdot e^{-t}) - (4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) \cdot e^{-t}) = 24 - 33e^{-t}.$$

4. З вигляду загального розв'язку бачимо, що вищезгадана фундаментальна матриця матиме вигляд

$$\Theta(t, s) = \begin{pmatrix} c_1 + 2c_2 e^{s-t} & c_3 + 2c_4 e^{s-t} \\ -2c_1 - 3c_2 e^{s-t} & -2c_3 - 3c_4 e^{s-t} \end{pmatrix},$$

причому

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 &= 1 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 0 \end{cases}$$

(і аналогічна система для  $c_3, c_4$ ).

Знаходимо  $c_1 = -3$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = -2$ ,  $c_4 = 1$  і підставляємо у матрицю:

$$\Theta(t, s) = \begin{pmatrix} -3 + 4e^{s-t} & -2 + 2e^{s-t} \\ 6 - 6e^{s-t} & 4 - 3e^{s-t} \end{pmatrix},$$

5. Спряжена система буде

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

а відповідна фундаментальна матриця

$$\Psi(t, s) = \Theta^*(s, t) = \begin{pmatrix} -3 + 4e^{t-s} & 6 - 6e^{t-s} \\ -2 + 2e^{t-s} & 4 - 3e^{t-s} \end{pmatrix},$$

*Задача 1.6.* Розглядається задача Лагранжа

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s) \, ds \rightarrow \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) \cdot x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

Тут  $x = (x_1, x_2)^*$  – вектор фазових координат з  $\mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, T]$ . Звести цю задачу до задачі Майєра.

**Розв’язок.** Введемо нову фазову координату  $x_3(t) = \int_0^t u^2(s) \, ds$ , тоді до системи додається початкова умова  $x_3(0) = 0$ , рівняння  $\dot{x}_3 = u^2$ , а функціонал якості переписується у вигляді  $x_3(T) \rightarrow \inf$ .

*Задача 1.7.* Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) - 5x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

Тут  $x = (x_1, x_2)^*$  – вектор фазових координат з  $\mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, 2]$ . Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ t, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. До якого класу керувань належить таке керування: програмних чи з оберненим зв'язком?
2. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.
3. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційованою?
4. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ t^2, & \text{якщо } t \in (1, 2], \end{cases}$$

за умови, що критерій якості має вигляд

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^2 u^2(s) \, ds + x_1^2(2) + x_2^2(2) \rightarrow \min$$

**Розв'язок.** 1. Керування програмне бо не залежить від  $x$ .

2. При  $t \in [0, 1]$  маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -5 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0,$$

звідки  $\lambda_1 = -2i$ ,  $\lambda_2 = 2i$ .

З курсу диференціальних рівнянь відомо, що тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 (\cos(2t) - i \sin(2t)) + c_2 v_2 (\cos(2t) + i \sin(2t)),$$

де  $v_1, v_2$  – власні вектори, що відповідають  $\lambda_1$  та  $\lambda_2$  відповідно.

Нескладно бачити, що

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) - \sin(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \sin(2t) \\ \sin(2t) + 2 \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Підставляючи  $t = 0$  отримуємо  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1/2$ .

При  $t \in (1, 2]$  маємо

...

3.

4.

### **1.3    Задачі для самостійного розв'язування**