Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

*Пічкур В. В.*

# Збірник задач
# з курсу
# „ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ"

для студентів факультету
комп'ютерних наук та кібернетики
спеціальність – Прикладна математика

2018

# Зміст

# Частина I

# Задачі до практичних занять

# Тема 1

# Системи керування. Постановка задачі оптимального керування

## Аудиторне заняття

*Задача* 1.1. Задана скалярна система керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 1. \tag{1.1}$$

Тут $x$ – стан системи, $t \in [0, 1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x) = ax. \tag{1.2}$$

Тут $a$ – скалярний параметр.

1. Знайти траєкторію системи (1.1) при керуванні (1.2).
2. Знайти програмне керування $u(t) = ax(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.
3. Оцінити, при якому значенні параметра $a \in \{2, 4, -3\}$ критерій якості

   $$\mathcal{I}(u) = x^2(1)$$

   буде мати менше значення.

*Задача* 1.2. Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 1. \tag{1.3}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2. \tag{1.4}$$

1. Знайти траєкторію системи при керуванні (1.4).
2. Знайти програмне керування $u(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.
3. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом $s$, системи, що одержана при підстановці керування (1.4) в систему (1.3)?
4. Побудувати спряжену систему до системи, одержаної при підстановці керування (1.4) в систему (1.3), та її фундаментальну матрицю.

*Задача* 1.3. Розглядається задача Больца

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^1 u^2(s)ds + (x(1) - 2)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x^2(t) + u(t), \; x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ задана. Звести цю задачу до задачі Майєра.

*Задача* 1.4. Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 1, \; x_2(0) = -1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ 1, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.
2. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційованою?
3. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням

   $$u(t) = 0, \; t \in [0, 2]$$

   за умови, що критерій якості має вигляд

   $$\mathcal{I}(u) = x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min.$$

# Домашнє завдання

*Задача* 1.5. Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -8x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} , x_1(0) = -2, \; x_2(0) = 1. \tag{1.5}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 4x_1 - x_2. \tag{1.6}$$

1. До якого класу керувань належить керування (1.6): програмних керувань чи з оберненим зв'язком?
2. Знайти траєкторію системи при керуванні (1.6).
3. Знайти програмне керування $u(t) = 4x_1(t) - x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.
4. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом $s$, системи, що одержана при підстановці керування (1.6) в систему (1.5)?
5. Побудувати спряжену систему до системи, одержаної при підстановці керування (1.6) в систему (1.5), та її фундаментальну матрицю.

*Задача* 1.6. Розглядається задача Лагранжа

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t)x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 0, \; x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Звести цю задачу до задачі Майєра.

*Задача* 1.7. Задана система керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) - 5x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 0, \; x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1]\,, \\ t, & \text{якщо } t \in (1, 2]\,. \end{cases}$$

1. До якого класу керувань належить таке керування: програмних керувань чи з оберненим зв'язком?
2. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.
3. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційованою?
4. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням

   $$u(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, 1]\,, \\ t^2 & t \in [1, 2]\,. \end{cases}$$

   за умови, що критерій якості має вигляд

   $$\mathfrak{I}(u) = \int_0^2 u^2(s)ds + x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min\,.$$

## Основні поняття

1. Система керування.
2. Програмне керування, керування з оберненим зв'язком.
3. Функціонали Лагранжа, Майєра, Больца.
4. Постановка задачі оптимального керування.
5. Означення спряженої системи
6. Означення абсолютно неперервної функції.
7. Система Каратеодорі.
8. Фундаментальна матриця, нормована за моментом.

Література: [4]

# Тема 2

# Елементи багатозначного аналізу. Множина досяжності

## Аудиторне заняття

*Задача* 2.1. Знайти $A + B$ і $\lambda A$, а також метрику Хаусдорфа $\alpha(A, B)$, якщо:

1. $A = \{-3, 2, -1\}$, $B = \{-2, 5, 1\}$, $\lambda = 3$;
2. $A = \{4, 2, -4\}$, $A = [-2, 3]$, $\lambda = -1$;
3. $A = [-1, 2]$, $B = [3, 7]$, $\lambda = -2$.

*Задача* 2.2. Знайти $MA$, якщо

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \ A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

*Задача* 2.3. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A = [0, r]$;
2. $A = [-r, r]$;
3. $A = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2\}$;
4. $A = \mathcal{K}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$;
5. $A = \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

*Задача* 2.4. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{I} = \int_0^1 F(x)dx$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, x]\,, x \in [0, 1]\,;$
2. $F(x) = \mathcal{K}_x(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq x\}\,, x \in [0, 1]\,.$

*Задача* 2.5. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{dx}{dt} = x + u,$$

де $x(0) = x_0 \in [-1, 1]$, $u(t) \in [-1, 1]$, $t \geq 0$.

*Задача* 2.6. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 + u_2, \end{cases}$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in M_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : |x_{01}| \leq 1, |x_{02}| \leq 1\}\,,$$

$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}\,.$$

# Домашнє завдання

*Задача* 2.7. Знайти $A + B$ і $\lambda A$, а також метрику Хаусдорфа $\alpha(A, B)$, якщо:

1. $A = \{4, -2, 3\}$, $B = \{7, -1, 1\}$, $\lambda = 2$;
2. $A = \{5, -5, 2\}$, $A = [1, 3]$, $\lambda = -1$;
3. $A = [-4, -2]$, $B = [-1, 5]$, $\lambda = 3$.

*Задача* 2.8. Знайти $MA$, якщо

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \; A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

*Задача* 2.9. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A = \{-1, 1\}\,;$

2. $A = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \le 2, |x_2| \le 4, |x_3| \le 1\}$;

3. $A = \{a\}$;

4. $A = \mathcal{K}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le r\}$.

*Задача* 2.10. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, \sin x]$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

2. $F(x) = [-\sin x, \sin x]$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

3. $F(x) = \mathcal{K}_{\sin x}(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le \sin x\}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

*Задача* 2.11. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{dx}{dt} = x + bu,$$

де $x(0) = x_0 \in [-2, 2]$, $u(t) \in [-3, 3]$, $t \ge 0$, $b$ – деяке ненульове число.

*Задача* 2.12. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 + u_2, \end{cases}$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in M_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \ge 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \left\{(x_{01}, x_{02}) : x_{01}^2 + x_{02}^2 \le 4\right\},$$

$$\mathcal{U} = \left\{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \le 1\right\}.$$

# Основні поняття

1. Опорна функція.
2. Багатозначне відображення.
3. Інтеграл від багатозначного відображення (інтеграл Аумана).
4. Чому дорівнює опорна функція від інтеграла багатозначного відображення?
5. Множина досяжності системи керування?
6. Як знайти множину досяжності лінійної системи керування?

Література: [3]

# Тема 3

# Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування

## Аудиторне заняття

*Задача* 3.1. Перевести систему

$$\frac{dx}{dt} = u, \ t \in [0, T],$$

з точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = y_0$ за допомогою керування з класу:

1. постійних функцій $u(t) = c$, $c$ –константа;
2. кусково-постійних функцій

   $$u(t) = \begin{cases} c_1 & t \in [0, t_1], \\ c_2 & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

   Тут $c_1$, $c_2$ –константи, $c_1 \neq c_2$, $0 < t_1 < T$;
3. програмних керувань $u(t) = ct$, $c$ –константа;
4. керувань з оберненим зв'язком $u(x) = cx$, $c$ –константа.

*Задача* 3.2. 1. Використовуючи означення, знайти грамміан керованості для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + \cos(t)u(t), \ t \geq 0.$$

2. Записати диференціальне рівняння для грамміана для керованості і за його допомогою знайти грамміан керованості.

3. Використовуючи критерій керованості, вказати інтервал повної керованості вказаної системи керування. Для цього інтервала записати керування, яке розв'язує задачу про переведення системи з точки $x_0$ у стан $x_T$.

*Задача* 3.3. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sin(t)x(t) + u(t),\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T.$$

Тут $x$ – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $x_0$, $x_T$ – задані точки, $t \in [0, T]$.

*Задача* 3.4. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds$$

за умов, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = u(t),$$

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = y_0,\ x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут $x$ – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

*Задача* 3.5. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

1.
$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = tx_1(t) + x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t) + t^2u_2(t). \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор стану, $u = (u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $t \in [0, T]$.

2.
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \sin(t)x(t) = u(t).$$

Тут $x$ – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

*Задача* 3.6. Знайти диференціальне рівняння грамміана керованості для системи керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \cos(t)x_1(t) - \sin(t)x_2(t) + u_1(t) - 2u_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \sin(t)x_1(t) + \cos(t)x_2(t) - 3u_1(t) + 4u_2(t). \end{cases}$$

*Задача* 3.7. Дослідити системи на керованість, використовуючи другий критерій керованості:

1. $$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u;$$

2. $$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 4x_2 + u; \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_3 + u_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 + x_3 + u_2. \end{cases}$$

## Домашнє завдання

*Задача* 3.8. Перевести систему

$$\frac{dx}{dt} = 2tx + u, \ t \in [0, T],$$

з точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = y_0$ за допомогою керування з класу:

1. постійних функцій $u(t) = c$, $c$ –константа;
2. кусково-постійних функцій

   $$u(t) = \begin{cases} c_1 & t \in [0, t_1], \\ c_2 & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

   Тут $c_1$, $c_2$ –константи, $c_1 \neq c_2$, $0 < t_1 < T$;
3. програмних керувань $u(t) = ct$, $c$ –константа;
4. керувань з оберненим зв'язком $u(x) = cx$, $c$ –константа.

*Задача* 3.9. 1. Знайти грамміан керованості для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t)$$

і дослідити її на керованість, використовуючи перший критерій керованості.

2. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathfrak{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t),\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T.$$

Тут $x$ – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $x_0$, $x_T$ – задані точки, $t \in [0, T]$.

*Задача* 3.10. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathfrak{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds$$

за умов, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = u(t),$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = y_0,\ x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут $x$ – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

*Задача* 3.11. Мінімізувати критерій якості

$$\mathfrak{I}(u) = \int_0^T \left(u_1^2(s) + u_2^2(s)\right) ds$$

за умов

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 6x_1(t) - 2x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 5x_1(t) - x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$
$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},$$
$$x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $x = (x_{10}, x_{20})^*$ – відома точка, $t \in [0, T]$.

*Задача* 3.12. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = tx_1(t) + t^2 x_2 + u_1(t) - u_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_2(t). \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор стану, $u = (u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $t \in [0, T]$.

*Задача* 3.13. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + tx(t) = u(t).$$

Тут $x$ – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

*Задача* 3.14. Дослідити системи на керованість, використовуючи другий критерій керованості:

1.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{u}{a}; \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{u}{a}; \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + a^2u; \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - au, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + au; \end{cases}$$

5.
$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = u(t);$$

6.
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3 + u_1 - u_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + 3x_3 + u_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 + x_3 + 2u_2. \end{cases}$$

## Основні поняття

1. Означення повної керованості на інтервалі і повної керованості системи керування.
2. Грамміан керованості.
3. Перший критерій керованості.
4. Матриця керованості другого роду.
5. Другий критерій керованості.

Література: [1, 4]

# Тема 4

# Критерії спостережуваності. Критерій двоїстості

## Аудиторне заняття

*Задача* 4.1. Побудувати систему для знаходження грамміана спостережуваності і записати умову спостережуваності на інтервалі для системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos(t)x_1 + \sin(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2, \\ y(t) = kx_1 + x_2, \end{cases}$$

$k > 0$.

*Задача* 4.2. Чи буде система цілком спостережуваною?

1. $$\ddot{x} = a^2 x, \ y(t) = x(t);$$

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_2, \\ y(t) = \beta x_1 + x_2. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1, \\ \dot{x}_2 = b x_2, \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

*Задача* 4.3. Дослідити на спостережуваність, використовуючи критерій двоїстості і відповідний критерій керованості:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \\ y(t) = -x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

*Задача* 4.4. Побудувати спостерігач такої системи у загальному вигляді:

1.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tx_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ y(t) = x_1(t) + bx_2(t). \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \\ y(t) = x(t) + \beta\frac{dx(t)}{dt} \end{cases}$$

*Задача* 4.5. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 2x(t), \\ y(t) = \sin tx(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0, 3]$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використанням грамміана спостережуваності.

*Задача* 4.6. Задана динамічна система

$$\ddot{x} = x, \ y(t) = x(t)$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0, T]$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використанням грамміана спостережуваності.

# Домашнє завдання

*Задача* 4.7. Побудувати систему для знаходження грамміана спостережуваності і записати умову спостережуваності на інтервалі для системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = kx_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2, \\ y(t) = \cos(t)x_1 + \sin(t)x_2. \end{cases}$$

*Задача* 4.8. Записати диференціальне рівняння для знаходження грамміана спостережуваності системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -t^2 x_2(t), \\ y(t) = \sin(t)x_1(t) + \cos(t)x_2(t). \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат, $y$ – скалярне спостереження.

*Задача* 4.9. Чи буде система цілком спостережуваною?

1.
$$\ddot{x} = a^2 x, \; y(t) = p\dot{x}(t);$$

2.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \alpha x_2, \\ y(t) = x_1 + \beta x_2. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \\ y(t) = -x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

*Задача* 4.10. Для яких параметрів $a$, $b$ система

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = bx_2(t), \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

є цілком спостережуваною? Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат, $y$ – скалярне спостереження.

*Задача* 4.11. Побудувати спостерігач у загальному вигляді для такої системи:

1.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + t^2 x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, \\ y(t) = bx_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + k_1\frac{dx}{dt} + k_2 x = 0, \\ y(t) = x(t) + \beta\frac{dx(t)}{dt}. \end{cases}$$

*Задача* 4.12. Задана динамічна система
$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = tx(t), \\ y(t) = 2x(t), \end{cases}$$
де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0, T]$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використанням грамміана спостережуваності.

*Задача* 4.13. Задана динамічна система
$$\ddot{x} = x, \ y(t) = \dot{x}(t),$$
де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0, T]$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використанням грамміана спостережуваності.

## Основні поняття

1. Повна спостережуваність.
2. Принцип двоїстості Калмана.
3. Грамміан спостережуваності.
4. Матриця спостережуваності другого роду.
5. Перший і другий критерії спостережуваності.
6. Задача про оцінку стану системи.
7. Означення спостерігача.
8. Теорема про структуру спостерігача

Література: [1, 4]

# Тема 5

# Задача фільтрації. Множинний підхід

*Задача* 5.1. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + v(t), \\ y(t) = px(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови, що

$$\int_0^\tau \big(v^2(s) + w^2(s)\big)\, ds + x^2(0) \le 1, \ \tau \in [0, T]\,.$$

*Задача* 5.2. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) + v(t), \\ y(t) = 2x(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x(0) \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова. Побудувати оцінку стану заданої системи (фільтр) за заданими спостереженнями $y(t) \in \mathbb{R}^1$ за умови, що

$$\int_0^\tau \big(v^2(s) + w^2(s)\big)\, ds + x^2(0) \le 2,$$

$\tau \in [0, T]$. Знайти оцінку похибки оцінювання.

*Задача* 5.3. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + v_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + v_2(t), \\ y(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + w(t) \end{cases}$$

і відомі спостереження за цією системою $y(t) \in \mathbb{R}^1$. Побудувати оцінку стану (фільтр) і знайти оцінку похибки оцінювання. Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $v_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $v_2(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми,

$$\int_0^\tau \left(v_1^2(s) + v_2^2(s) + w^2(s)\right) ds + x_1^2(0) + 2x_2^2(0) \le 1,$$

$\tau \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

# Домашнє завдання

*Задача* 5.4. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) + v(t) + t^2, \\ y(t) = -x(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови, що

$$\int_0^\tau \left(v^2(s) + w^2(s)\right) ds + (x(0) - 1)^2 \le 1, \ \tau \in [0, T]\,.$$

*Задача* 5.5. Побудувати оцінку стану системи

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + v(t), \\ y(t) = px(t) + w(t), \end{cases}$$

у формі фільтра, де $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, при цьому

$$\int_0^\tau \left(v^2(s) + w^2(s)\right) ds + (x(0) - 1)^2 \le 4,$$

$\tau \in [0, T]$. Знайти оцінку похибки оцінювання.

*Задача* 5.6. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t) + v_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t) + v_2(t), \\ y_1(t) = x_1(t) + w_1(t), \\ y_2(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + w_2(t). \end{cases}$$

Побудувати оцінку стану системи за заданими спостереженнями $y_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^1$ у формі фільтра. Знайти оцінку похибки оцінювання. Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $v_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $v_2(t) \in \mathbb{R}^1$, $w_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $w_2(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми,

$$\int_0^\tau \left(\gamma^2(v_1^2(s) + v_2^2(s)) + \mu^2(w_1^2(s) + w_2^2(s))\right) ds + x_1^2(0) + x_2^2(0) \leq 4,$$

$\tau \in [0, T]$, $\gamma > 0$, $\mu > 0$, момент часу $T$ є заданим.

## Основні поняття

1. Означення спостерігача.
2. Постановка задачі фільтрації.
3. Інформаційна множина.
4. Побудова фільтра в задачі лінійної фільтрації на основі множинного підходу.

Література: [2]

# Тема 6

# Варіаційний метод в задачі оптимального керування

## Аудиторне заняття

*Задача* 6.1. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналів:

1. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^3(s)ds$;

2. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T (\sin^2 u_1(s) + u_2^2(s))ds$, $u = (u_1, u_2)^*$.

*Задача* 6.2. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = (x(t) + u(t))^3, \ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 6.3. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1^2(t) + x_2^2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, \ x_2(0) = -3.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^*$, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

*Задача* 6.4. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачі оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sin x(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 6.5. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + (x(T) - 1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 6.6. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + (x(T) + 2)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 6.7. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + x_2^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

# Домашнє завдання

*Задача* 6.8. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналів:

1. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T \cos u(s) ds$;
2. $\mathcal{J}(u) = \int_0^T (s^2 u_1^4(s) + u_2^2(s)) ds$, $u = (u_1, u_2)^*$.

*Задача* 6.9. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = \cos(x(t) + u(t)), \ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 6.10. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t)u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = -1, \ x_2(0) = 4.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^*$, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

*Задача* 6.11. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачі оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u^2(s) + x^4(s)) ds + x^4(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)u(t), \ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 6.12. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u(s) - v(s))^2 \, ds + (x(T) - 3)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, момент часу $T$ і функція $v(t) \in \mathbb{R}^1$ є заданими.

*Задача* 6.13. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T \left(u^2(s) + x^2(s)\right) ds + (x(T) - 1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t), \;\; x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 6.14. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + x_2^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + x_2(t) + 2u(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = -1, \;\; x_2(0) = 2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

*Задача* 6.15. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(u_1^2(s) + u_2^2(s)\right) ds + \frac{1}{2} x_1^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, \;\; x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^1$ – вектор керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

# Основні поняття

1. Перша варіація функціоналу (варіація за Лагранжем).
2. Похідні Фреше.
3. Необхідні умови оптимальності функціонала за допомогою першої варіації.

Література: [7]

# Тема 7

# Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільним правим кінцем

## Аудиторне заняття

*Задача* 7.1. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T (u^2(s) + x_1^4(s))ds + x_2^4(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \sin(x_1(t)) - x_2^2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t)x_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

*Задача* 7.2. Записати крайову задачу принципу максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}(u) = \gamma^2 \int_0^T x^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \leq \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 7.3. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 7.4. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(u_1^2(s) + u_2^2(s)\right) ds + \frac{1}{2}x_1^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, \ x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^1$ – вектор керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

*Задача* 7.5. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 7.6. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \sin(x(1)) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 1,$$
$$|u(t)| \leq 1, t \in [0,1]\,.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$.

## Домашнє завдання

*Задача* 7.7. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathfrak{I}(u) = \int_0^T (4u_1^2(s) + u_1^2(s) + \cos^2(x_1(s)))ds + \sin^2(x_2(T)) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + 3x_1(t)x_2(t) + 2u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 6x_2(t) - 3x_1(t)x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 4,\ x_2(0) = -2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ – функції керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

*Задача* 7.8. Записати крайову задачу принципу максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування

$$\mathfrak{I}(u) = \gamma^2 \int_0^T (x(s) - z(s))^2\, ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), x(0) = x_0,$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \leq \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$, неперервна функція $z(t) \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 7.9. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathfrak{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}\,(x(T) - x_1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 7.10. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(u^2(s) + x^2(s)\right) ds + \frac{1}{2}\left(\dot{x}(T) - x_1\right)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 7.11. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + x_2^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + x_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 4.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

*Задача* 7.12. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \cos(x(1)) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,$$

$$0 \le u(t) \le \pi,\ t \in [0, 1]\,.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$.

## Основні поняття

1. Функція Гамільтона - Понтрягіна.
2. Крайова задача принципу максимуму Понтрягіна.
3. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільним правим кінцем.

## Додаткові завдання

Прочитати самостійно лекцію з побудови множини досяжності за допомогою принципу максимуму Понтрягіна (лекція з електронного підручника).

Література: [1, 4, 6, 7]

# Тема 8

# Принцип максимуму Понтрягіна: загальний випадок

## Аудиторне заняття

*Задача* 8.1. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 (u^2(s) + x^2(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = \frac{1}{2}.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

*Задача* 8.2. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2(s) - 12sx(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

*Задача* 8.3. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),\ x(0) = -1,\ \dot{x}(0) = 2,\ x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

*Задача* 8.4. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = T = \int_0^T ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,\ x(T) = 1,$$

$$\int_0^T u^2(s)ds = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$.

# Домашнє завдання

*Задача* 8.5. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (u^2(s) + x^2(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(-1) = x(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [-1, 1]$.

*Задача* 8.6. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2(s) + x^2(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -2,\ x(1) = 0, \dot{x}(1) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

*Задача* 8.7. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(s) + u^2(s))ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t),\ x(1) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

*Задача* 8.8. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \int_{-\pi}^{\pi} x(s)\sin s ds \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u,\ x(-\pi) = x(\pi) = 0,\ u(t) \in [-1, 1],$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [-\pi, \pi]$.

## Основні поняття

1. Функція Лагранжа для загальної постановки задачі оптимального керування.

2. Функція Гамільтона - Понтрягіна для загальної постановки задачі оптимального керування.

3. Принцип максимуму Понтрягіна для загальної задачі оптимального керування.

4. Зміст умов трансверсальності.

5. Постановка задачі оптимальної швидкодії.

6. Принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії.

## Додаткові завдання

*Задача* 8.9. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = T \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x(T) = 0,$$

$$3\int_0^T (u^2(s) - 4x(s))ds \le -1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$.

*Задача* 8.10. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^2 x(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = x(2) = 0,$$

$$u(t) \in [-2, 2]\,.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 2]$.

Прочитати самостійно:

- Принцип максимуму і лінійна задача швидкодії (лекція 11 електронного підручника);
- Розв'язування класичних прикладів лінійної задачі швидкодії (приклади 1, 2 з [4], стор. 216-222).

Література: [1, 4, 6, 7]

# Тема 9

# Метод динамічного програмування. Дискретне рівняння Белмана

## Аудиторне заняття

*Задача* 9.1. Знайти оптимальне керування, оптимальну траєкторію, функцію Белмана і оптимальне значення критерія якості задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right)=\sum_{k=0}^{2}u^2(k)+x^2(3)\to\inf$$

за умов

$$x(k+1)=2x(k)+u(k), x(0)=1, k=0,1,2.$$

Тут $x$, $u\in\mathbb{R}^1$.

*Задача* 9.2. Знайти оптимальне керування і функцію Белмана задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}u^2(k)+x^2(N)\to\inf$$

за умов

$$x(k+1)=x(k)+u(k),\ x(0)=x_0,\ k=0,1,\dots,N-1.$$

Тут $x$, $u\in\mathbb{R}^1$. Точка $x_0\in\mathbb{R}^1$ – відома.

*Задача* 9.3. Знайти оптимальне керування і функцію Белмана задачі оптимального керування

$$\mathfrak{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(u(k) - v(k)\right)^2 + x^2(N) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + u(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тут $x$, $u \in \mathbb{R}^1$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – відома, $v(k)$ – відомі, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

*Задача* 9.4. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathfrak{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) + x_1^2(N) + 2x_2^2(N) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) + u(k), \\ x_2(k+1) = -x_1(k) + x_2(k) + 2u(k), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(k) \in \mathbb{R}^1$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

*Задача* 9.5. Розв'язати задачу оптимального керування:

$$\mathfrak{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{2} \left(u(k) + x_2(k)\right) + x_1(3) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - u(k), \\ x_2(k+1) = x_1(k) + 2u(k), \end{cases}$$

$$x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(k) \in \mathbb{R}^1$, $k = 0, 1, 2$, $|u(0)| \le 1$, $|u(1)| \le 2$, $|u(2)| \le 1$.

# Домашнє завдання

*Задача* 9.6. Знайти оптимальне керування, оптимальну траєкторію, функцію Белмана і оптимальне значення критерія якості задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{3} u^2(k) + x^2(4) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = -x(k) + u(k),\ x(0) = 2,\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Тут $x$, $u \in \mathbb{R}^1$.

*Задача* 9.7. Знайти оптимальне керування і функцію Белмана задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) + x^2(N) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + b(k)u(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тут $x$, $u \in \mathbb{R}^1$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – відома, $b(k) \in \mathbb{R}^1$ – відомі, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

*Задача* 9.8. Розв'язати задачу оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) + \left(x(N) - x_1\right)^2 \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + u(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тут $x$, $u \in \mathbb{R}^1$. Точки $x_0$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ – відомі, $b(k) \in \mathbb{R}^1$ – відомі, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

*Задача* 9.9. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(u_1^2(k) + 4u_2(k)\right) + x_1^2(N) + 2x_2^2(N) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + 4x_2(k) + u_1(k), \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) - x_2(k) + u_2(k), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 4, \;\; x_2(0) = -1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u_1(k)$, $u_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

*Задача* 9.10. Розв'язати задачу оптимального керування:

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\}, \{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{2} \left(u(k) + x_1(k) + 2x_2(k)\right) + x_1(3) + x_2(3) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + u(k), \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - 2u(k), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 2, \;\; x_2(0) = 0. \tag{9.1}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(k) \in \mathbb{R}^1$, $k = 0, 1, 2$, $|u(0)| \le 3$, $|u(1)| \le 2$, $|u(2)| \le 1$. Як зміниться хід розв'язування задачі, якщо умову (9.1) замінити на таку

$$|x_1(0)| \le 2, \;\; |x_2(0)| \le 1 \; ?$$

Як зміниться при цьому оптимальне значення критерія якості?

## Основні поняття

1. Постановка задачі синтезу.

2. Керування з оберненим зв'язком.

3. Функція Белмана в дискретній задачі оптимального керування.

4. Принцип оптимальності Белмана для дискретної задачі оптимального керування.

5. Різницеве рівняння Белмана для дискретної задачі оптимального керування.

## Додаткові завдання

Прочитати самостійно:

- Дискретний варіант методу динамічного програмування (лекція з електронного підручника).

Література: [4, 6]

# Тема 10

# Метод динамічного програмування

## Аудиторне заняття

*Задача* 10.1. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0,T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 10.2. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0,T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 10.3. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u(s) - s)^2\,ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) + t^2,\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 10.4. Знайти функцію Белмана такої задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(s) ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

## Домашнє завдання

*Задача* 10.5. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) ds + \frac{1}{2} \left(x(T) - x_1\right)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 10.6. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \big(u^2(s) + x^2(s)\big) ds + \frac{1}{2} x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 10.7. Знайти функцію Белмана такої задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = a^2 \int_0^T (u(s) - u_0(s))^2 \, ds + x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \; x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Неперервна функція $u_0(t) \in \mathbb{R}^1$, точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими, $a > 0$.

*Задача* 10.8. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) ds + \frac{1}{2} \dot{x}^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u, \; x(0) = x_0, \; \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

*Задача* 10.9. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u_1^2(s) + u_2^2(s)) ds + x_2^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, \; x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

*Задача* 10.10. Знайти функцію Белмана такої задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^2(s) - 2sx(s)) ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \; x(0) = 0, \; x(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

## Основні поняття

1. Функція Белмана.

2. Принцип оптимальності Белмана.

3. Диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для неперервної задачі оптимального керування з вільним правим кінцем.

4. Достатні умови оптимальності.

Література: [2, 4]

# Тема 11

# Задача стабілізації

## Аудиторне заняття

*Задача* 11.1. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$x'''(t) - 2x''(t) + 3x'(t) - 2x(t) = u.$$

*Задача* 11.2. Побудувати керування $u$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$x^{(IV)}(t) + 2x''(t) + x(t) = u.$$

*Задача* 11.3. Побудувати керування $u$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t) - 2u. \end{cases}$$

*Задача* 11.4. Побудувати керування $u = (u_1, u_2)^*$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + 2u_1, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) + 3x_2(t) - u_1 + u_2. \end{cases}$$

*Задача* 11.5. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду

$$u = c_1x_1 + c_2x_2$$

так, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + 2u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u \end{cases}$$

мало наперед задані корені $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$.

*Задача* 11.6. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t)x_2(t) + u(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \sin(x_1(t) + x_2(t)). \end{cases}$$

## Домашнє завдання

*Задача* 11.7. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$x'''(t) + 6x''(t) - 2x'(t) - 5x(t) = u.$$

*Задача* 11.8. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = u.$$

*Задача* 11.9. Побудувати керування $u$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 5x_2(t) + u, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + 3u. \end{cases}$$

*Задача* 11.10. Побудувати керування $u = (u_1, u_2)^*$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 2x_2(t) + u_1 - u_2, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + 2x_2(t) + u_1 + 2u_2. \end{cases}$$

*Задача* 11.11. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1^3(t) - x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = (x_1(t) + x_2(t))^2 + u(t). \end{cases}$$

*Задача* 11.12. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду

$$u = c_1x_1 + c_2x_2$$

так, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2u. \end{cases}$$

мало наперед задані корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

*Задача* 11.13. Розв'язати задачу модального керування, тобто знайти керування вигляду

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

так, щоб характеристичне рівняння системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + u, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = x_3(t) + u. \end{cases}$$

мало наперед задані корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$.

## Основні поняття

1. Стійкість за Ляпуновим. Асимптотична стійкість. Стійкість у великому.
2. Критерій Гурвіца.
3. Постановка задачі стабілізації.
4. Задача модального керування.
5. Функція Ляпунова.
6. Теореми Ляпунова про стійкість. Теорема Барбашина-Красовського.

Література: [4, 9]

# Частина II

# Програма курсу „Теорія керування"

# Розділ 1

# План практичних занять

## Перший модуль

1. Системи керування. Постановка задачі оптимального керування.
2. Множина досяжності
3. Множина досяжності
4. Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування.
5. Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування.
6. Критерії спостережуваності. Критерій двоїстості. Задача фільтрації
7. Модульна контрольна робота 1

## Другий модуль

8. Варіаційний метод
9. Варіаційний метод
10. Принцип максимуму Понтрягіна
11. Принцип максимуму Понтрягіна – загальний варіант
12. Метод динамічного програмування

13. Задача стабілізації
14. Модульна контрольна робота 2

# Розділ 2

# Перелік запитань до іспиту

## Основні запитання

### Основні постановки задач

1. Система керування. Ознаки системи керування.
2. Принципи керування (програмне керування і керування з оберненим зв'язком).
3. Постановка задачі оптимального керування.
4. Постановка задачі стабілізації.

### Основні означення і теореми

1. Означення керованості на інтервалі і повної керованості лінійної системи керування.
2. Критерій керованості лінійної стаціонарної системи (другий критерій керованості). Матриця керованості другого роду.
3. Принцип двоїстості Калмана.
4. Означення спостережуваності на інтервалі і повної спостережуваності лінійної системи керування.
5. Другий критерій спостережуваності.
6. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі Больца з вільним правим кінцем. Функція Гамільтона-Понтрягіна. Спряжена система. Крайова задача принципу максимуму Понтрягіна.

7. Метод динамічного програмування для задачі оптимального керування неперервною системою з вільним правим кінцем. Принцип оптимальності Белмана. Функція Белмана.

8. Диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для задачі оптимального керування неперервною системою з вільним правим кінцем.

## Загальний перелік запитань

1. Система керування. Ознаки системи керування. Принципи керування (програмне керування і керування з оберненим зв'язком). Задача оптимального керування. Мета математичної теорії керування.

2. Алгебраїчні операції над множинами. Окіл множини.

3. Опуклі множини. Властивості опуклих множин. Опукла оболонка множини. Лема Каратеодорі. Лема про строгу віддільність.

4. Опорні функції. Властивості опорної функції.

5. Відстань від точки до множини. Відхилення від множини до множини. Властивості. Лема про відхилення для опуклих компактів.

6. Метрика Хаусдорфа. Властивості.

7. Багатозначні відображення. Графік. Неперервні багатозначні відображення. Критерій неперервності.

8. Вимірні багатозначні відображення. Вимірний селектор.

9. Інтеграл від багатозначного відображення(інтеграл Аумана). Теорема Ляпунова.

10. Абсолютно неперервні функції. Властивості. Теорема Лебега.

11. Система Каратеодорі. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші. Теорема про неперервну залежність розв'язку від початкових умов. Система керування як система Каратеодорі.

12. Лінійна система диференціальних рівнянь Каратеодорі. Фундаментальна матриця. Властивості фундаментальної матриці. Формула Коші.

13. Спряжена система. Її властивості.

14. Множина досяжності. Теорема про множину досяжності лінійної системи керування. Компактність і неперервність множини досяжності. Опорна функція множини досяжності.

15. Означення керованості на інтервалі і повної керованості. Моментні рівності. Критерій керованості в лінійних нестаціонарних системах (перший критерій керованості). Грамміан керованості (матриця керованості першого роду). Диференціальне рівняння для грамміана керованості.

16. Керування, яке розв'язує задачу про переведення лінійної нестаціонарної системи з точки в точку за допомогою грамміана керованості з мінімальною нормою.

17. Лема про внутрішню точку. Критерій керованості лінійної стаціонарної системи (другий критерій керованості). Матриця керованості другого роду.

18. Постановка задачі спостереження. Спостережуваність на інтервалі. Повна спостережуваність. Грамміан спостережуваності (матриця спостережуваності першого роду). Перший критерій спостережуваності.

19. Принцип двоїстості Калмана. Другий критерій спостережуваності.

20. Спостерігач. Теорема про структуру спостерігача.

21. Оцінка стану системи на основі грамміана спостережуваності. Матричне диференціальне рівняння для грамміана спостережуваності.

22. Постановка задачі фільтрації. Множинний підхід. Інформаційна область.

23. Задача лінійної фільтрації. Фільтр. Алгоритм побудови фільтра. Похибка оцінювання.

24. Похідна за напрямком. Перша варіація функціоналу. Похідна Фреше. Необхідні умови екстремуму функціоналу.

25. Задача оптимального керування з вільним правим кінцем на основі варіаційного методу. Похідна Фреше.

26. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості на основі варіаційного методу. Алгоритм.

27. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі Больца з вільним правим кінцем. Функція Гамільтона-Понтрягіна. Спряжена система. Крайова задача принципу максимуму Понтрягіна.

28. Голчата варіація керування. Лема про голчату варіацію. Лема про варіацію функціонала. Обгрунтування принципа максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування з вільним правим кінцем.

29. Достатні умови оптимальності у формі принципу максимуму.

30. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості на основі принципу максимуму Понтрягіна. Алгоритм.

31. Принцип максимуму Понтрягіна і множина досяжності.

32. Загальна постановка задачі оптимального керування.

33. Принцип максимуму Понтрягіна при загальних обмеженнях. Його зв'язок з принципом Лагранжа.

34. Пакет голок. Ідея обґрунтування принципу максимуму Понтрягіна в загальній постановці.

35. Постановка задачі синтезу. Оптимальний синтез.

36. Метод динамічного програмування. Дискретний варіант. Принцип оптимальності Белмана. Функція Белмана і дискретне рівняння Белмана.

37. Оптимальне керування лінійною дискретною системою з квадратичним критерієм якості.

38. Метод динамічного програмування для неперервних систем керування з вільним правим кінцем. Принцип оптимальності Белмана. Функція Белмана. Інтегральне рівняння Белмана.

39. Алгоритм методу динамічного програмування. Особливості алгоритму.

40. Диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана.

41. Теорема про достатні умови оптимальності у формі диференціального рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана.

42. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості на основі методу динамічного програмування. Алгоритм.

43. Постановка задачі стабілізації. Стабілізація стаціонарних систем.

44. Метод функцій Ляпунова і стабілізація систем керування.

45. Задача оптимальної стабілізації. Теорема Красовського.

# Література


[1] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. – М.: Физматлит, 2005. – 276 с.

[2] Башняков О.М., Пічкур В.В. Задача синтезу в теорії керування: Навчальний посібник. - К.: Вид-во „Сталь”, 2012. – 116 с.

[3] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

[4] Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К.: Вища школа, 1975. – 328 с.

[5] Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. -М.: ФИЗМАТЛИТ, 1999. – 208 с.

[6] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. –М.: Наука, 1980. – 520 с.

[7] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.

[8] Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Харченко І.І. Диференціальні рівняння для інформатиків. - К., ВПЦ „Київський університет”, 2008. – 352 с.

[9] Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Прикладні задачі теорії стійкості. -К.: Київський університет, 2014. – 142 с.