1 Системи керування. Постановка задачі оптимального керування

1.1 Алгоритми

Задача. Задана лінійна система керування

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t),$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазових координат, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $u \in \mathbb{R}^m$ – **відоме** керування, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, з початковими умовами

$$x(t_0) = x_0,$$

де $t_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Необхідно:

1. Визначити клас керування: програмне чи з оберненим зв'язком.
2. Знайти траєкторію системи що відповідає заданому керуванню.
3. Звести задане керування до програмного.
4. Перевірити траєкторію на неперервну диференційованість.
5. Порівняти задане керування з іншим керуванням відносно заданого критерію якості
$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{T} f \, \mathrm{d}t + \Phi(T) \to \min,$$
де $\mathcal{J} = \mathcal{J}(u) \in \mathbb{R}^1$, $f = f(x, u, t) \in \mathbb{R}^1$, $\Phi(T) = \Phi(x(T)) \in \mathbb{R}^1$, $T \in \mathbb{R}^1$.
6. Знайти фундаментальну матрицю системи, нормовану за моментом s, де $s \in \mathbb{R}^1$.
7. Побудувати спряжену систему.

`Алгоритм 1.1.` Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. Якщо u не залежить від x то керування програмне, інакше з оберненим зв'язком.
2. Розв'язується система з підставленим u.
3. Замінюється x у визначенні u на знайдену у попередньому пункті траєкторію.

4. Задача математичного аналізу.

5. Обчислюється значення критерію якості на обох керуваннях і порівнюється.

6. (а) Пошук матриці - задача диференційних рівнянь, або знаходимо з системи $\dot{\Theta}(t,s) = A(t) \cdot \Theta(t,s)$.

   (б) Нормування за моментом s полягає у підборі констант як функцій від s так, щоб $\Theta(s,s) = E$.

Задача. Звести задачу Лагранжа/Больца вигляду

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{T} f \, \mathrm{d}t + \Phi(T) \to \inf$$

за умов

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t)$$

до задачі Майєра.

Алгоритм 1.2. 1. Вводиться змінна

$$x_{n+1}(t) \overset{\mathtt{def}}{=} \int_{t_0}^{t} f \, \mathrm{d}t.$$

2. Тоді

$$\mathcal{J} = x_{n+1}(T) + \Phi(T) \to \inf .$$

3. До системи додається умова

$$\dot{x}_{n+1} = f.$$

2 Елементи багатозначного аналізу. Множина досяжності

2.1 Алгоритми

Задача. Знайти

1. $A + B$;

2. λA;

3. $\alpha(A, B)$;
4. MA,

де множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$, скаляр $\lambda \in \mathbb{R}^1$, матриця $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Алгоритм 2.1. Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. Знаходимо за визначенням,
$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}.$$
2. Знаходимо за визначенням,
$$\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}.$$
3. (а) Знаходимо $\beta(A, B)$ і $\beta(B, A)$ за визначенням,
$$\beta(A, B) = \max_{a\in A} \rho(a, B),$$
де
$$\rho(a, B) = \min_{b\in B} \rho(a, b).$$
   (б) Знаходимо $\alpha(A, B)$ за визначенням,
$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A).$$
4. Знаходимо за визначенням,
$$MA = \{Ma | a \in A\}.$$

Задача. Знайти опорну функцію множини $A \subset \mathbb{R}^n$.

Алгоритм 2.2. 1. Намагаємося знайти за визначенням,
$$c(A, \psi) = \max_{a\in A} \langle a, \psi\rangle.$$
2. Якщо не вийшло, то намагаємося знайти за геометричною властивістю: $c(A, \psi)$ - (орієнтована) відстань від початку координат до опорної площини множини A, для якої напрямок-вектор ψ є вектором нормалі.

Задача. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int F \,\mathrm{d}x$, де $F = F(x) \subset \mathbb{R}^n$.

Алгоритм 2.3. 1. Знаходимо опорну функцію від інтегралу:

$$c(\mathcal{J}, \psi) = \int c(F, \psi)\,\mathrm{d}x.$$

2. Знаходимо $\mathcal{J}$ як опуклий компакт з відомою опорною функцією $c(\mathcal{J}, \psi)$.

Задача. Знайти множину досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

Алгоритм 2.4. 1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s.

2. Знаходимо інтеграл Аумана

$$\int_{t_0}^{t} \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s)\,\mathrm{d}s.$$

3. Використовуємо теорему про вигляд множини досяжності лінійної системи керування:

$$\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = \Theta(t, t_0)\mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Задача. Знайти опорну функцію множини досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

Алгоритм 2.5. 1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s.

2. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi)$.

3. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)$.

4. Використовуємо теорему про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)\,\mathrm{d}s.$$

3 Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування

3.1 Алгоритми

Задача. Перевести систему $\dot{x} = Ax + Bu$ з точки x_0 в точку $x_T \in \mathbb{R}^1$ за допомогою керування з класу K (керування, залежні від вектору параметрів c).

Алгоритм 3.1.
1. Знаходимо траєкторію системи при заданому керуванні (залежну від параметра c).
2. Знаходимо з отриманого алгебраїчного рівняння параметр c.

Задача.
1. Знайти грамміан керованості системи $\dot{x} = Ax + Bu$ за визначенням.
2. Записати систему диференційних рівнянь для знаходження грамміана керованості.
3. Використовуючи грамміан керованості, знайти інтервал повної керованості системи.
4. Для цього інтервалу записати керування яке певеродить систему з точки x_0 в точку x_T/розв'язати задачу оптимального керування.

Алгоритм 3.2. Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. (а) Знаходимо $\Theta(T, s)$.
   (б) Використовуємо формулу
$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) \, \mathrm{d}s.$$
2. Записуємо систему
$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0) \cdot A^*(t) + B(t) \cdot B^*(t), \Phi(t_0, t_0) = 0.$$
3. Це інтервал на якому $\Phi(t, t_0) \neq 0$.
4. Використовуємо формулу
$$u(t) = B^*(t) \cdot \Theta(T, t) \cdot \Phi^{-1}(T, t_0)(x_T - \Theta(T, t_0) \cdot x_0).$$

Задача. Дослідити стаціонарну систему $\dot{x} = Ax + Bu$ на керованість використовуючи другий критерій керованості.

Алгоритм 3.3. 1. Знаходимо $D = \left(B \vdots AB \vdots A^n B \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B\right)$.

2. Якщо $rangD = n$ то стаціонарна системи цілком керована, інакше ні.

4 Критерії спостережуваності. Критерій двоїстості

4.1 Алгоритми

Задача. Побудувати систему для знаходження грамміана спостережуваності для системи $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$.

Алгоритм 4.1. Записуємо систему

$$\dot{\mathcal{N}}(t, t_0) = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t).$$

Задача. Чи буде стаціонарна система $\dot{x} = Ax + Bu$ цілком спостережуваною?

Алгоритм 4.2. 1. Знаходимо

$$\mathcal{R} = \left(H^* \vdots A^* H^* \vdots (A^*)^2 H^* \vdots \ldots \vdots (A^*)^{n-1} H^*\right).$$

2. Якщо $rang\mathcal{R} = n$ то система цілком спостережувана інакше ні.

Задача. Дослідити на спостережуваність систему $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$, використовуючи критерій двоїстості і відповідний критерій керованості.

Алгоритм 4.3. 1. Будуємо спряжену систему

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -A^*(t) \cdot z(t) + H^*(t) \cdot u(t).$$

2. Досліджуємо її на керованість, якщо вона керована, то початкова система спостережувана, інакше ні.

Задача. Побудувати спостерігач для системи $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$.

Алгоритм 4.4. 1. Записуємо систему (спостерігач)

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A(t) - K(t)H(t)) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot y(t).$$

2. Або систему (спостерігач)

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot \hat{x}(t)).$$

Вибір вільний, це різні форми запису одного і того ж.

Задача. Задана динамічна система $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використання грамміана спостержуваності.

Алгоритм 4.5. 1. Знаходимо грамміан спостережуваності $\mathcal{N}(t, t_0)$ з системи

$$\dot{\mathcal{N}}(t, t_0) = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t).$$

2. Знаходимо $R(t) = \mathcal{N}^{-1}(t, t_0)$.

3. Розв'язуємо рівняння

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + R(t) \cdot H^*(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot x(t)).$$

5 Задача фільтрації. Множинний підхід

5.1 Алгоритми

Задача. Задана динамічна система $\dot{x} = Ax + v$, $y = Gx + w$, де $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження.

1. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови, що
$$\int_0^\tau (Mv^2(s) + Nw^2(s))\,\mathrm{d}s + p_0 x^2(0) \le \mu^2.$$

2. Знайти похибку оцінювання.

Алгоритм 5.1. 1. (а) Знайдемо $R(t)$ з рівняння Бернуллі

$$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

(б) Знайдемо $K(t)$ за формулою

$$K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t).$$

(в) Знайдемо фільтр (спостерігач) за формулою

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)).$$

(г) Знайдемо $k(s)$ з системи

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s) \rangle, \quad k(t_0) = 0.$$

(д) Знайдемо $\mathcal{X}(\tau)$ за формулою

$$\mathcal{X}(\tau) = \mathcal{E}(\hat{x}(\tau), (\mu^2 - k(\tau)) \cdot R(\tau)).$$

2. Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \le \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))}.$$

6 Варіаційний метод в задачі оптимального керування

6.1 Алгоритми

Задача. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналу $\mathcal{J} = \int f(u)\,\mathrm{d}s$.

Алгоритм 6.1. 1. Записуємо $\mathcal{J}(u + \alpha h)$.

2. Знаходимо $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathcal{J}(u + \alpha h)$.

3. Знаходимо першу варіацію $\delta\mathcal{J}(u, h)$ за Лагранжем за формулою

$$\delta\mathcal{J}(u, h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left.\mathcal{J}(u + \alpha h)\right|_{\alpha=0}.$$

4. Якщо

$$\delta\mathcal{J}(u, h) = \int h(s) \cdot g(s)\,\mathrm{d}s,$$

то $g(s)$ - похідна за Фреше.

Задача. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування $\dot{x} = Ax + Bu$.

Алгоритм 6.2. Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

Задача. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачи оптимального керування варіаційним методом

$$\mathcal{J} = \int f \, \mathrm{d}s + \Phi(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = f_0(x, u),$$

і розв'язати цю задачу.

`Алгоритм 6.3.` 1. `Позначимо` $\varphi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h)$.

2. `Знайдемо` $\varphi'(\alpha)$.

3. `Підставляючи` $\alpha = 0$, `знаходимо`

$$\varphi'(0) = \int \ldots \mathrm{d}s + \underbrace{\Phi_1(T)}_{=-\psi(T)} \cdot z(T).$$

4. `Запишемо рівняння у варіаціях на функцію` $z(t)$.

5. `Введемо додаткові, спряжені змінні` ψ `такі, що`

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}.$$

6. `Тоді`

$$\left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle = -\langle \psi(T), z(T) \rangle.$$

7. `Враховуючи рівняння у варіаціях, маємо`

$$\psi(T) \cdot z(T) = \psi(T) \cdot z(T) - \psi(t_0) \cdot z(t_0) =$$
$$= \int_{t_0}^{T} (\psi(s) \cdot z'(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \, \mathrm{d}s = \ldots$$

8. `Підставимо це у вигляд` $\varphi'(0)$:

$$\varphi'(0) = -\int (\psi' + \ldots) \cdot z \, \mathrm{d}s + \int (\ldots) \cdot h(s)) \, \mathrm{d}s.$$

9. `Накладаємо на функцію` $\psi(t)$ `умову (спряжену систему)`

$$\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot \psi(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} = 0,$$

10. Завдяки цьому у $\delta\mathcal{J}(u,h)=\varphi'(0)$ перший інтеграл зануляється.

11. Знаходимо $\mathcal{J}'(u)$

12. З необхідної умову екстремуму функціоналу, $\mathcal{J}'(u_*)=0$, знаходимо u_*.

13. Далі
$$x_*(t)=x_0+\int_0^t f(x(s),u_*(s),s)\,\mathrm{d}s.$$

14. Покладаючи $t=T$ знаходимо $x(T)$.

15. Остаточно знаходимо u_*, x_*.

7 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільним правим кінцем

7.1 Алгоритми

Задача. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:
$$\mathcal{J}=\int f\,\mathrm{d}s+\Phi(T)\to\inf$$
за умови, що
$$\dot{x}=f_0.$$
Розв'язати задачу оптимального керування.

Алгоритм 7.1. 1. Записуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна:
$$\mathcal{H}(x,u,\psi,t)=-f_0(x,u,t)+\langle\psi,f(x,u,t)\rangle.$$

2. Записуємо спряжену систему:
$$\dot{\psi}=-\nabla_x\mathcal{H},\quad \psi(T)=-\nabla\Phi(x(T)).$$

3. Знаходимо $u(\psi)$ з умови оптимальності:
$$\frac{\partial\mathcal{H}(x,u,\psi,t)}{\partial u}=0.$$

4. Підставляємо знайдене керування у початкову систему, отримали крайову задачу, систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

5. Розв'язуємо крайову задачу і знаходимо x.

6. Відновлюємо $u = u(\psi)$ за знайденим ψ.

8 Принцип максимуму Понтрягіна: загальний випадок

8.1 Алгоритми

Задача. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \,\mathrm{d}s + \Phi_0 \to \inf$$

за умов, що

$$\dot{x} = f,$$

а також

$$\int f_i \,\mathrm{d}s + \Phi_i = 0, \quad i = \overline{1..k}.$$

Алгоритм 8.1. 1. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle.$$

2. Запишемо термінант:

$$F = \sum_i \lambda_i f_i, \quad \ell = \sum_i \lambda_i \Phi_i.$$

3. Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

   (а) оптимальність:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0;$$

   (б) стаціонарність (спряжена система):

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H};$$

(в) трансверсальність:

$$\psi(t_0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T};$$

(г) стаціонарність за кінцями: відсутня, бо час фіксований;

(д) доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу;

(е) невід'ємність: $\lambda_i \geq 0$.

4. Методом від супротивного показуємо, що $\lambda_i \neq 0$.

5. З умов принципу максимуму визначаємо $u = u(\psi)$.

6. Записуємо крайову задачу - систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

7. Знаходимо її розв'язок x_*.

8. Відновлюємо $u_* = u_*(\psi)$.

Задача. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \, \mathrm{d}s + \Phi_0 \to \inf$$

за умов, що

$$\dot{x} = f,$$

а також

$$\int f_i \, \mathrm{d}s + \Phi_i = 0, \quad i = \overline{1..k}.$$

Алгоритм 8.2. 1. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle.$$

2. Запишемо термінант:

$$F = \sum_i \lambda_i f_i, \quad \ell = \sum_i \lambda_i \Phi_i.$$

3. Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

(а) оптимальність:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0;$$

(б) стаціонарність (спряжена система):

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H};$$

(в) трансверсальність:

$$\psi(t_0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T};$$

(г) стаціонарність за кінцями:

$$\mathcal{H}(T) = \frac{\partial \ell}{\partial T};$$

(д) доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу;

(е) невід'ємність: $\lambda_i \geq 0$.

4. Методом від супротивного показуємо, що $\lambda_i \neq 0$.

5. З умов принципу максимуму визначаємо $u = u(\psi)$.

6. Записуємо крайову задачу - систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

7. З умов принципу максимуму і крайової задачі визначаємо T.

8. Знаходимо розв'язок крайової задачі x_*.

9. Відновлюємо $u_* = u_*(\psi)$.

9 Дискретний варіант методу динамічного програмування

9.1 Алгоритми

Задача. Розглядається задача оптимального керування

$$\mathcal{J}(u, x) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)) \to \min$$

при умовах

$$x(k+1) = f_k(x(k), u(k)), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$x(k) \in \mathcal{X}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

$$u(k) \in \mathcal{U}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Знайти оптимальне керування, оптимальну траєкторію, функцію Белмана і оптимальне значення критерію якості.

`Алгоритм 9.1.` 1. $\mathcal{B}_N(z) = \Phi(z)$.

2. Для $s = \overline{N-1..0}$ записуємо і розв'язуємо дискретне рівняння Белмана:

$$\mathcal{B}_s(z) = \min_{u \in \mathcal{U}_s} (g_s(z, u) + \mathcal{B}_{s+1}(f_s(z, u)))$$

   для всіх $z \in \mathcal{X}_s$, запам'ятовуючи $\{u_*(s)\}$.

3. Знаходимо $x_*(0)$ як

$$x_*(0) = \arg\min_{z \in \mathcal{X}_0} \mathcal{B}_0(z).$$

4. Знаходимо $\mathcal{J}_*$ як $\mathcal{J}_* = \mathcal{B}_0(x_*(0))$.

5. Для $s = \overline{0..N-1}$ відновлюємо $x_*(s+1)$ за відомим керуванням:

$$x_*(s+1) = f_s(x_*(s), u_*(s)).$$

10 Метод динамічного програмування

10.1 Алгоритми

Задача. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \, \mathrm{d}s + \Phi(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = f.$$

`Алгоритм 10.1.` 1. Відрізок $[t_0, T]$ розбивається сіткою $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ з деяким кроком h.

2. Позначаємо $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}(t_i)$, $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

3. $\mathcal{B}_N(z) = \Phi(z)$.

4. Для $s = \overline{N-1..0}$ записуємо і розв'язуємо рівняння Белмана:

$$\mathcal{B}_s(z) = \inf_{u \in \mathcal{U}_s} \left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} f_0(x(\tau, u(\tau), \tau) \,\mathrm{d}\tau + \right.$$
$$\left. + \mathcal{B}_{s+1} \left(z + \int_{t_s}^{t_{s+1}} f(x(\tau), u(\tau), \tau) \,\mathrm{d}\tau \right) \right)$$

   для всіх $z \in \mathcal{X}_s$, запам'ятовуючи $\{u_*(s)\}$.

5. Знаходимо $x_*(t_0)$ як
$$x_*(t_0) = \arg\min_{z \in \mathcal{X}_0} \mathcal{B}_0(z).$$

6. Знаходимо $\mathcal{J}_*$ як $\mathcal{J}_* = \mathcal{B}_0(x_*(t_0))$.

7. Для $s = \overline{0..N-1}$ відновлюємо $x_*(t_{s+1})$ за відомим керуванням:
$$x_*(t_{s+1}) = x_*(t_s) + \int_{t_s}^{t_{s+1}} f(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) \,\mathrm{d}\tau.$$