# 7 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільними правим кінцем

## 7.1 Лекція

### 7.1.1 Постановка задачі і формулювання принципу максимуму

Розглянемо задачу Больца з вільним правим кінцем

$$\mathcal{J}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(s), u(s), s)\,\mathrm{d}s + \Phi(x(T)) \tag{7.1}$$

за умов

$$\dot{x} = f(x, u, t), t \in [t_0, T], \tag{7.2}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{7.3}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^*$ – фазові координати, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^*$ – кусково-неперервне керування таке. що $u(t) \in \mathcal{U}, t \in [t_0, T]$, де $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, не залежить від часу.

$f_0(x, u, t) \to \mathbb{R}$, $f(x, u, t) \to \mathbb{R}^n$ є неперервними за сукупністю змінних, разом зі своїми градієнтами за $x$, $\Phi(x)$ – неперервно диференційовна, $(x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times [t_0, T]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

За цих умов справджується теорема про існування та єдиність (кусково-гладкого) розв'язку задачі Коші для системи (7.2) для довільного керування.

Моменти часу $t_0$ і $T$ фіксовані, а обмеження на фазові координати відсутні.

Якщо існує оптимальне керування задачі (7.1)-(7.3), тобто допустиме $u_* = u_*(\cdot)$ і відповідний йому розв'язок $x_* = x_*(\cdot)$ задачі Коші (7.2)-(7.3) такі, що

$$\inf \mathcal{J}(u, x) = \mathcal{J}(u_*, x_*),$$

то будемо говорити про розв'язок задачі як про пару $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$.

Функція вигляду

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle, \tag{7.4}$$

де $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)^*$ – нові, спряжені змінні, називається функцією Гамільтона-Понтрягіна.

Для кожної пари $(u(\cdot), x(\cdot))$, де $u(\cdot)$ – допустиме керування, а $x(\cdot)$ – відповідний йому розв'язок задачі Коші (7.2)-(7.3), розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H}(x, u, \psi, t), t \in [t_0, T], \tag{7.5}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)). \tag{7.6}$$

Ця система називається спряженою системою, яка відповідає парі $(u(\cdot), x(\cdot))$.

**Теорема 7.1** (принцип максимуму Понтрягіна)**.** Для розв'язку $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ задачі Больца (7.1), (7.3) існує $\psi_*(\cdot)$ яка задовольняє спряженій системі яка відповідає парі $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$, причому майже для кожного $t \in [t_0, T]$ функція Гамільтона-Понтрягіна досягає свого максимуму при $u(t) = u_*(t)$, а саме

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x_*, u, \psi, t) = \mathcal{H}(x_*, u_*, \psi_*, t)$$

**Приклад 7.1.** Розглянемо задачу

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T u^2(s)\mathrm{d}s + \frac{x^2(T)}{2}$$

за умови

$$\dot{x} = ax + y, x(t_0) = x_0,$$

де $x(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a$ – сталий параметр, $x_0$ – фіксована точка.

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -\frac{u^2}{2} + \psi(ax + u).$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -a\psi, \psi(T) = -x(T).$$

Її розв'язок

$$\psi(t) = -x(T) \cdot e^{a(T-t)}.$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = 0.$$

Звідси $-u_* + \psi = 0$ і $u_*(t) = \psi(t) = -x(T) \cdot e^{a(T-t)}$.

Підставляємо знайдене керування у рівняння

$$\dot{x} = ax + u, x(t_0) = x_0.$$

Формула Коші для загального розв'язку лінійного рівняння першого порядку має вигляд

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int\limits_0^t e^{a(t-s)} \cdot u(s)\mathrm{d}s = e^{at}x_0 - \int\limits_0^t e^{a(t-s)} \cdot x(T) \cdot e^{a(T-s)}\mathrm{d}s =$$

$$= e^{at}x_0 - e^{at+aT}x(T)\int\limits_0^t e^{-2as}\mathrm{d}s = e^{at}x_0 - \frac{e^{aT} \cdot x(T) \cdot (e^{at} - e^{-at})}{2a},$$

звідки, при $t = T$:

$$x(T) = e^{aT}\left(x_0 - \frac{x(T) \cdot \left(e^{aT} - e^{-aT}\right)}{2a}\right),$$

звідки

$$x(T) = \frac{e^{aT}x_0}{1 - \frac{e^{aT}}{2a} \cdot \left(e^{aT} - e^{-aT}\right)}.$$

Підсумовуючи все вищесказане,

$$u_*(t) = -\frac{e^{a(2T-t)}x_0}{1 - \frac{e^{aT}}{2a} \cdot \left(e^{aT} - e^{-aT}\right)},$$

причому

$$x_*(t) = e^{at}x_0 - \frac{e^{2aT}x_0 \cdot (e^{at} - e^{-at})}{2a - e^{2aT} - 1}.$$

## 7.2 Аудиторне заняття

*Задача* 7.1. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u^2(s) + x_1^4(s))\,\mathrm{d}s + x_2^4(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1 - x_2) + u, \\ \dot{x}_2 = \cos(-4x_1 + x_2), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

**Розв'язок.** Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = u^2(t) + x_1^4(t), \quad f(x(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} \sin(x_1(t) - x_2(t)) + u(t) \\ \cos(-4x_1(t) + x_2(t)) \end{pmatrix}, \quad \Phi(x(T)) = x_2^4(T). \tag{7.7}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, u, \psi, t) &= -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \left\langle \psi, \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) + u \\ \cos(-4x_1 + x_2) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \left\langle \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) + u \\ \cos(-4x_1 + x_2) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -u^2 - x_1^4 + \psi_1 \cdot \sin(x_1 - x_2) + \psi_1 \cdot u + \psi_2 \cdot \cos(-4x_1 + x_2). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - \psi_1 \cdot \cos(x_1 - x_2) - 4\psi_2 \cdot \sin(-4x_1 + x_2) \\ \psi_1 \cdot \cos(x_1 - x_2) + \psi_2 \cdot \sin(-4x_1 + x_2) \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4x_2^3(T) \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -2u + \psi_1 = 0, \tag{7.11}$$

звідки $u = \psi_1/2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1 - x_2) + \psi_1/2, \\ \dot{x}_2 = \cos(-4x_1 + x_2), \end{cases} \tag{7.12}$$

*Задача* 7.2. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T x^2(s)\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \leq \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

**Розв'язок.** Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = \gamma^2 x^2(t), \quad f(x(t), u(t), t) = u(t), \quad \Phi(x(T)) = 0, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(t) = [-\rho, \rho]. \tag{7.13}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\gamma^2 x^2 + \psi u. \tag{7.14}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -2\gamma^2 x, \tag{7.15}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = 0, \tag{7.16}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто

$$u = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \tag{7.17}$$

Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\dot{x} = \rho \cdot \operatorname{sgn} \psi. \tag{7.18}$$

*Задача* 7.3. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int\limits_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + \frac{x^2(T)}{2} \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, x(0) = x_0$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

**Розв'язок.** Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\frac{u^2}{2} + \psi u. \tag{7.19}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = 0, \tag{7.20}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = -x(T), \tag{7.21}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -u + \psi = 0, \tag{7.22}$$

звідки $u = \psi$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\dot{x} = \psi. \tag{7.23}$$

З рівнянь на $\psi$ знаходимо $\psi(t) = -x(T)$.

Підставляючи це у рівняння на $x$ знаходимо $x(t) = x_0 - x(T) \cdot t$.

Звідси, при $t = T$ маємо $x(T) = x_0 - T \cdot x(T)$, тобто $x(T) = \dfrac{x_0}{1+T}$.

Остаточно, $(u_*(t), x_*(t)) = \left( -\dfrac{x_0}{1+T}, -\dfrac{x_0 \cdot t}{1+T} \right)$.

*Задача* 7.4. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int\limits_0^T (u_1^2(s) + u_2^2(s) \,\mathrm{d}s + \frac{x_1^2(T)}{2} \to \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^2$ – вектор керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

**Розв'язок.** Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle = -\frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \psi_1(x_2 + u_1) + \psi_2(x_1 + u_2). \tag{7.24}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \tag{7.25}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.26}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = \begin{pmatrix} -u_1 + \psi_1 \\ -u_2 + \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.27}$$

звідки $u_1 = \psi_1$, $u_2 = \psi_2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \psi_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 = -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases} \tag{7.28}$$

Розв'язуємо систему на $\psi_1$ і $\psi_2$:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{7.29}$$

Підставляємо це у систему на $x_1$, $x_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \end{cases} \tag{7.30}$$

Знаходимо загальний розв'язок однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{7.31}$$

Шукаємо тепер частинний розв'язок неоднорідної системи методом невизначених коефіцієнтів у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(A_{11}t + B_{11}) + e^{-t}(A_{12}t + B_{12}) \\ e^t(A_{21}t + B_{21}) + e^{-t}(A_{22}t + B_{22}) \end{pmatrix} \tag{7.32}$$

Підставляючи це у системи, знаходимо

$$\begin{cases} A_{11} = A_{21}, \\ B_{11} + A_{11} = B_{21} - c_1, \\ -A_{12} = A_{22}, \\ -B_{12} + A_{12} = B_{22} + c_2, \\ A_{21} = A_{11}, \\ B_{21} + A_{21} = B_{11} + c_1, \\ -A_{22} = A_{12}, \\ -B_{22} + A_{22} = B_{12} + c_2. \end{cases} \tag{7.33}$$

Беремо розв'язок $A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = 0$, $B_{11} = B_{12} = 0$, $B_{21} = c_1$, $B_{22} = c_2$, тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t \end{pmatrix}. \tag{7.34}$$

Пригадаємо, що $x_1(0) = x_2(0) = 1$, це дає систему

$$\begin{cases} c_3 + c_4 - c_2 = 1, \\ c_3 - c_4 + c_1 = 1, \end{cases} \tag{7.35}$$

з якої $c_3 = 1 - \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2}$, $c_4 = \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2}$.

І далі це якось (як ??) розв'язується.

## 7.3 Домашнє завдання

*Задача* 7.7. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \left(4u_1^2(s) + u_2^2(s) + \cos^2(x_1(s))\right) \mathrm{d}s + \sin^2(x_2(T)) \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 4, x_2(0) = -2.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u_1(t), u_2(t)$ – функції керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

**Розв'язок.** Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$\begin{aligned} f_0(x,u,t) &= 4u_1^2(s) + u_2^2(s) + \cos^2(x_1(s)), \\ f(x(t),u(t),t) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2 \end{pmatrix}, \\ \Phi(x(T)) &= \sin^2(x_2(T)). \end{aligned} \tag{7.36}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x,u,\psi,t) &= -f_0(x,u,t) + \langle \psi, f(x,u,t) \rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \langle \psi, f(x,u,t) \rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \left\langle \psi, \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \left\langle \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= -4u_1^2(t) - u_2^2(t) - \cos^2(x_1(t)) + \psi_1(x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + 2u_1) + \psi_2(-x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + u_2). \end{aligned} \tag{7.37}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \sin(2x_1) + \psi_1 + 3\psi_1x_2 - \psi_2 - 3\psi_2x_2 \\ \psi_1 + 3\psi_1x_1 + 6\psi_2 - 3\psi_2x_1 \end{pmatrix}, \tag{7.38}$$

$$\psi(T) = -\nabla\Phi(x(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2x_2) \end{pmatrix}. \tag{7.39}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x,u,\psi,t)}{\partial u} = \begin{pmatrix} -8u_1 + 2\psi_1 \\ -2u_2 + \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.40}$$

звідки $u_1 = \psi_1/4$, $u_2 = \psi_2/2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 3x_1x_2 + \psi_1/2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 6x_2 - 3x_1x_2 + \psi_2/2. \end{cases} \tag{7.41}$$

*Задача* 7.8. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T (x(s) - z(s))^2 \, \mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \le \rho,$$

$t \in [0,T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$, неперервна функція $z(t) \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

**Розв'язок.** Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x,u,t) = \gamma^2(x-z)^2, \quad f(x(t),u(t),t) = u(t), \quad \Phi(x(T)) = 0, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(t) = [-\rho, \rho]. \tag{7.42}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x,u,\psi,t) = -f_0(x,u,t) + \langle \psi, f(x,u,t)\rangle = -\gamma^2(x-z)^2 + \psi u. \tag{7.43}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -2\gamma^2 x + 2\gamma^2 z, \tag{7.44}$$

$$\psi(T) = -\nabla\Phi(x(T)) = 0, \tag{7.45}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто

$$u = \rho \cdot \operatorname{sgn}\psi. \tag{7.46}$$

Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\dot{x} = \rho \cdot \operatorname{sgn}\psi. \tag{7.47}$$

*Задача* 7.9. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + \frac{(x(T)-x_1)^2}{2} \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = ax + u, x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0,T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

**Розв'язок.** Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x,u,t) = \frac{u^2}{2}, \quad f(x(t),u(t),t) = ax(t) + u(t), \quad \Phi(x(T)) = \frac{(x(T)-x_1)^2}{2}. \tag{7.48}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд:

$$\mathcal{H}(x,u,\psi,t) = -f_0(x,u,t) + \langle \psi, f(x,u,t)\rangle = -\frac{u^2}{2} + a\psi x + \psi u. \tag{7.49}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -a\psi, \tag{7.50}$$

$$\psi(T) = -\nabla\Phi(x(T)) = x(T) - x_1. \tag{7.51}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування,

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x,u,\psi,t)}{\partial u} = -u + \psi = 0, \tag{7.52}$$

звідки $u = \psi$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + \psi, \\ x(0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -a\psi, \\ \psi(T) = x(T) - x_1. \end{cases} \tag{7.53}$$

З рівнянь на $\psi$ знаходимо, що $\psi(t) = C_1 \cdot e^{-at}$, де $C_1$ визначається з рівності $\psi(T) = x(T) - x_1$, тобто $C_1 = (x(T) - x_1) \cdot e^{aT}$.

Підставляючи це у рівняння на $x$ знаходимо, що

$$x(t) = C_2 e^{at} - \frac{C_1 e^{-at}}{2a} = C_2 e^{at} - \frac{(x(T) - x_1) \cdot e^{a(T-t)}}{2a}, \tag{7.54}$$

де $C_2$ визначається з рівності $x(0) = x_0$, тобто $C_2 = x_0 + \dfrac{(x(T) - x_1) \cdot e^{aT}}{2a}$.

Залишається знайти $x(T)$ з рівності

$$x(T) = x_0 e^{aT} + \frac{(x(T) - x_1) \cdot (e^{2aT} - 1)}{2a}. \tag{7.55}$$

Зробивши це, отримаємо

$$x(T) = \frac{x_1(e^{2aT} - 1) - 2ax_0 e^{aT}}{e^{2aT} - 2a - 1}. \tag{7.56}$$

Остаточно,

$$x(t) = x_0 e^{at} + \frac{\left( \dfrac{x_1(e^{2aT} - 1) - 2ax_0 e^{aT}}{e^{2aT} - 2a - 1} - x_1 \right) \cdot \left( e^{a(T+t)} - e^{a(T-t)} \right)}{2a}, \tag{7.57}$$

$$u(t) = \left( \frac{x_1(e^{2aT} - 1) - 2ax_0 e^{aT}}{e^{2aT} - 2a - 1} - x_1 \right) \cdot e^{a(T-t)}. \tag{7.58}$$

*Задача* 7.10. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int\limits_0^T (u^2(s) + x^2(s)) \, \mathrm{d}s + \frac{(\dot{x}(T) - x_1)^2}{2} \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу $T$ є заданими.

**Розв'язок.** Позначимо $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} x & \dot{x} \end{pmatrix}^*$.

Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(\mathbf{x}, u, t) = \frac{u^2 + \mathbf{x}_1^2}{2}, \quad f(\mathbf{x}(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi(\mathbf{x}(T)) = \frac{(\mathbf{x}_2(T) - x_1)^2}{2}. \tag{7.59}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, u, \psi, t) = -f_0(\mathbf{x}, u, t) + \langle \psi, f(\mathbf{x}, u, t) \rangle = -\frac{u^2 + \mathbf{x}_1^2}{2} + \psi_1 \mathbf{x}_1 + \psi_2 u. \tag{7.60}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.61}$$

$$\psi(T) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}(T)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2(T) - x_1 \end{pmatrix}. \tag{7.62}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування,

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}, u, \psi, t)}{\partial u} = -u + \psi_2 \tag{7.63}$$

звідки $u = \psi_2$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2. \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \psi_2. \end{cases} \tag{7.64}$$

*Задача* 7.11. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + x_2^2(T) \to \inf$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 4.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t)$ – функція керування, $t \in [0, T]$, момент часу $T$ є заданим.

**Розв'язок.** Для початку випишемо всі функції з теоретичної частини:

$$f_0(x, u, t) = \frac{u^2}{2}, \quad f(x(t), u(t), t) = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ -4x_1(t) + x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi(x(T)) = x_2(T))^2. \tag{7.65}$$

Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд:

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t)\rangle = -\frac{u^2}{2} + \psi_1 x_1 - \psi_1 x_2 + \psi_1 u - 4\psi_2 x_1 + \psi_2 x_2. \tag{7.66}$$

Спряжена система записується так:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = \begin{pmatrix} -\psi_1 + 4\psi_2 \\ \psi_1 - \psi_2 \end{pmatrix}, \tag{7.67}$$

$$\psi(T) = -\nabla\Phi(x(T)) = 2x_2(T). \tag{7.68}$$

Згідно принципу максимуму, функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму, тобто, за відсутності обмежень на керування,

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = -u + \psi_1 = 0, \tag{7.69}$$

звідки $u = \psi_1$. Підставляємо знайдене керування у початкову систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + \psi_1, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2. \end{cases} \tag{7.70}$$

З рівнянь на $\psi$ знаходимо

$$\psi = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \tag{7.71}$$

де $C_1$ і $C_2$ визначаються з крайових умов.

Підставляючи це у рівняння на $x$ знаходимо, що

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + 2C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^t, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + x_2. \end{cases} \tag{7.72}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$x = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}. \tag{7.73}$$

Частинний розв'язок неоднорідного знайдемо методом невизначених коефіцієнтів. Покладемо

$$x = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} x e^t, \tag{7.74}$$

тоді, при підстановці у систему, отримаємо:

$$\begin{cases} -3A_1 e^{-3t} + B_1 e^t = A_1 e^{-3t} + B_1 e^t - A_2 e^{-3t} - B_2 e^t + 2C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^t, \\ -3A_2 e^{-3t} + B_2 e^t = -4A_1 e^{-3t} - 4B_1 e^t + A_2 e^{-3t} + B_2 e^t. \end{cases} \tag{7.75}$$

Ця система рівносильна системі

$$\begin{cases} -3A_1 = A_1 - A_2 + 2C_1, \\ \quad B_1 = B_1 - B_2 + 2C_2, \\ -3A_2 = -4A_1 + A_2, \\ \quad B_2 = -4B_1 + B_2. \end{cases} \tag{7.76}$$