10 Дискретний варіант методу динамічного програмування

10.1 Алгоритми

Задача. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \,\mathrm{d}s + \Phi(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = f.$$

Алгоритм 10.1.

1. Відрізок $[t_0, T]$ розбивається сіткою $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ з деяким кроком h.
2. Позначаємо $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}(t_i)$, $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
3. $\mathcal{B}_N(z) = \Phi(z)$.
4. Для $s = \overline{N-1..0}$ записуємо і розв'язуємо рівняння Белмана:

$$\mathcal{B}_s(z) = \inf_{u \in \mathcal{U}_s} \left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} f_0(x(\tau, u(\tau), \tau) \,\mathrm{d}\tau + \right. \\ \left. + \mathcal{B}_{s+1}\left(z + \int_{t_s}^{t_{s+1}} f(x(\tau), u(\tau), \tau) \,\mathrm{d}\tau \right) \right)$$

для всіх $z \in \mathcal{X}_s$, запам'ятовуючи $\{u_*(s)\}$.

Розв'язуємо ми його через рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана,

$$\dot{\mathcal{B}}(z) + \inf_u (\langle \nabla_z \mathcal{B}(z), f \rangle + f_0(z)) = 0.$$

5. Знаходимо $x_*(t_0)$ як

$$x_*(t_0) = \arg\min_{z \in \mathcal{X}_0} \mathcal{B}_0(z).$$

6. Знаходимо $\mathcal{J}_*$ як $\mathcal{J}_* = \mathcal{B}_0(x_*(t_0))$.
7. Для $s = \overline{0..N-1}$ відновлюємо $x_*(t_{s+1})$ за відомим керуванням:

$$x_*(t_{s+1}) = x_*(t_s) + \int_{t_s}^{t_{s+1}} f(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) \,\mathrm{d}\tau.$$

10.2 Аудиторне заняття

Задача 10.1. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + \frac{x^2(T)}{2} \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок. Запишемо диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана:

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + \int_u \left(\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} \cdot u(t) + \frac{u^2(t)}{2} \right) = 0.$$

Задача 10.2. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s + \frac{x^2(T)}{2} \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок.

Задача 10.3. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u(s) - s)^2\,\mathrm{d}s + \frac{x^2(T)}{2} \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t) + t^2, x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок.

Задача 10.4. Знайти функцію Белмана такої задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), x(0) = x_0, x(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Розв'язок.

10.3 Домашнє завдання

Задача 10.5.

Розв'язок.

Задача 10.6.

Розв'язок.

Задача 10.7.

Розв'язок.

Задача 10.8.

Розв'язок.

Задача 10.9.

Розв'язок.

Задача 10.10.

Розв'язок.