9 Метод динамічного програмування

9.1 Алгоритми

Задача. Розглядається задача оптимального керування

$$\mathcal{J}(u,x) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x(k),u(k)) + \Phi(x(N)) \to \min$$

при умовах

$$x(k+1) = f_k(x(k),u(k)), \quad k = 0,1,\dots,N-1,$$

$$x(k) \in \mathcal{X}_k, \quad k = 0,1,\dots,N,$$

$$u(k) \in \mathcal{U}_k, \quad k = 0,1,\dots,N-1.$$

Знайти оптимальне керування, оптимальну траєкторію, функцію Белмана і оптимальне значення критерію якості.

Алгоритм 9.1. 1. $\mathcal{B}_N(z) = \Phi(z)$.

2. Для $s = \overline{N-1..0}$ записуємо і розв'язуємо дискретне рівняння Белмана:

$$\mathcal{B}_s(z) = \min_{u\in\mathcal{U}_s}(g_s(z,u) + \mathcal{B}_{s+1}(f_s(z,u)))$$

для всіх $z \in \mathcal{X}_s$, запам'ятовуючи $\{u_*(s)\}$.

3. Знаходимо $x_*(0)$ як

$$x_*(0) = \arg\min_{z\in\mathcal{X}_0} \mathcal{B}_0(z).$$

4. Знаходимо $\mathcal{J}_*$ як $\mathcal{J}_* = \mathcal{B}_0(x_*(0))$.

5. Для $s = \overline{0..N-1}$ відновлюємо $x_*(s+1)$ за відомим керуванням:

$$x_*(s+1) = f_s(x_*(s),u_*(s)).$$

9.2 Аудиторне заняття

Задача 9.1. Знайти оптимальне керування, оптимальну траєкторію, функцію Белмана і оптимальне значення критерія якості задачі оптимального керування

$$\mathcal{J}(\{u(k)\},\{x(k)\}) = \sum_{k=0}^{2} u^2(k) + x^2(3) \to \inf$$

за умов
$$x(k+1) = 2x(k) + u(k), \quad x(0) = 1, k = 0, 1, 2.$$
Тут $x, u \in \mathbb{R}^1$.

Розв'язок. Випишемо функції що фігурують в задачі:

$$g_k(x(k), u(k)) = u^2(k), \quad \Phi(x(N)) = x^2(3), \quad f_k(x(k), u(k)) = 2x(k) + u(k).$$

$$\mathcal{B}_3(z) = \Phi(z) = z^2.$$

Послідовно знаходимо u_*:

1. Запишемо визначення $u_*(2)$:

$$u_*(2) = \arg\min_{u(2)}(g_2(z, u(2)) + \mathcal{B}_3(f_2(z, u(2)))) =$$
$$= \arg\min_{u(2)}(u^2(2) + f_2^2(z, u(2))) =$$
$$= \arg\min_{u(2)}(u^2(2) + (2z + u(2))^2).$$

Знайдемо $u_*(2)$ з умови

$$0 = \frac{\partial}{\partial u(2)}\left(u_*^2(2) + (2z + u_*(2))^2\right) = 2u_*(2) + 2(2z + u_*(2)) = 4u_*(2) + 4z,$$

звідки $u_*(2) = -z$.

Знайдемо

$$\mathcal{B}_2(z) = (g_2(z, u_*(2)) + \mathcal{B}_3(f_2(z, u_*(2)))) =$$
$$= u_*^2(2) + (2z + u_*(2))^2 = z^2 + (2z - z)^2 = 2z^2.$$

2. Запишемо визначення $u_*(1)$:

$$u_*(1) = \arg\min_{u(1)}(g_1(z, u(1)) + \mathcal{B}_2(f_1(z, u(1)))) =$$
$$= \arg\min_{u(1)}(u^2(1) + 2f_1^2(z, u(1))) =$$
$$= \arg\min_{u(1)}(u^2(1) + 2(2z + u(1))^2).$$

Знайдемо $u_*(1)$ з умови

$$0 = \frac{\partial}{\partial u(1)} \left(u_*^2(1) + 2(2z + u_*(1))^2\right) = 2u_*(1) + 4(2z + u_*(1)) = 6u_*(1) + 8z,$$

звідки $u_*(1) = -\frac{4}{3}z$.

Знайдемо

$$\mathcal{B}_1(z) = (g_1(z, u_*(1)) + \mathcal{B}_2(f_1(z, u_*(1)))) =$$
$$= u_*^2(1) + 2(2z + u_*(1))^2 = \frac{16}{9}z^2 + 2\left(2z - \frac{4}{3}z\right)^2 = \frac{8}{3}z^2.$$

3. Запишемо визначення $u_*(0)$:

$$u_*(0) = \arg\min_{u(0)}(g_0(z, u(0)) + \mathcal{B}_1(f_0(z, u(0)))) =$$
$$= \arg\min_{u(0)}(u^2(0) + \frac{8}{3}f_0^2(z, u(0))) =$$
$$= \arg\min_{u(0)}(u^2(0) + \frac{8}{3}(2z + u(0))^2).$$

Знайдемо $u_*(0)$ з умови

$$0 = \frac{\partial}{\partial u(0)} \left(u_*^2(0) + \frac{8}{3}(2z + u_*(0))^2\right) =$$
$$= 2u_*(0) + \frac{16}{3}(2z + u_*(0)) = \frac{22}{3}u_*(0) + \frac{32}{3}z,$$

звідки $u_*(0) = -\frac{16}{11}z$.

Знайдемо

$$\mathcal{B}_0(z) = (g_0(z, u_*(0)) + \mathcal{B}_1(f_0(z, u_*(0)))) =$$
$$= u_*^2(0) + \frac{8}{3}(2z + u_*(0))^2 = \frac{256}{121}z^2 + \frac{8}{3}\left(2z - \frac{16}{11}z\right)^2 = \frac{32}{11}z^2.$$

Оскільки $\mathcal{X}_0 = \{x_0\}$, то $x_*(0) = x_0$, $\mathcal{J}_* = \frac{32x_0^2}{11}$.

Відновимо тепер траєкторію:

1.

$$x_*(1) = f_0(x_*(0), u_*(0)) = 2x_0 + u_*(0) = 2x_0 - \frac{16}{11}x_0 = \frac{6x_0}{11}.$$

2.

$$x_*(2) = f_1(x_*(1), u_*(1)) = 2\frac{6x_0}{11} + u_*(1) = \frac{12x_0}{11} - \frac{4}{3}\frac{6x_0}{11} = \frac{4x_0}{11}.$$

3.

$$x_*(3) = f_2(x_*(2), u_*(2)) = 2\frac{4x_0}{11} + u_*(2) = \frac{8x_0}{11} - \frac{4x_0}{11} = \frac{4x_0}{11}.$$

Задача 9.2. Знайти оптимальне керування і функцію Белмана задачі оптимального керування

$$\mathcal{J}(\{u(k)\}, \{x(k)\}) = \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) + x^2(N) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + u(k), x(0) = x_0, k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Тут $x, u \in \mathbb{R}^1$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – відома.

Розв'язок. Будемо шукати функцію Белмана у вигляді

$$\mathcal{B}_s(z) = b(s) \cdot z^2.$$

Зауважимо, що $\mathcal{B}_N(z) = z^2$, тому $b(N) = 1$.

Далі записуємо дискретне рівняння Белмана

$$b(s) \cdot z^2 = \min_u (u^2 + b(s+1) \cdot (z+u)^2).$$

Знайдемо u_* з умови

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(u^2 + b(s+1) \cdot (z+u)^2\right) = 2u + 2b(s+1)(z+u),$$

звідки

$$u_*(s) = -\frac{b(s+1) \cdot x(s)}{1 + b(s+1)}.$$

Підставляючи це у дискретне рівняння Белмана отримаємо дискретне рівняння для знаходження $b(s)$:

$$b(s) = \frac{b(s+1)}{b(s+1) + 1}.$$

Звідси нескладно отримати $b(N-k) = \frac{1}{k+1}$, зокрема $b(0) = \frac{1}{N+1}$.

Далі нескладно отримати

$$u_*(s) = -\frac{x_0}{N+1},$$

а

$$x_*(s) = \frac{N-s}{N+1} \cdot x_0.$$

Воно й не дивно, бо задача має вигляд

$$u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2 + (x_0 - u_0 - u_1 - \ldots - u_{n-1})^2 \to \min$$

Тобто мінімізуємо суму квадратів чисел зі сталою (x_0) сумою.

За теоремою Штурма, мінімум суми квадратів досягається коли всі ці квадрати рівні (і дорівнюють $\frac{1}{(N+1)^2}$), це відповідає знайденому нами керуванню.

Задача 9.3. Знайти оптимальне керування і функцію Белмана задачі оптимального керування

$$\mathcal{J}(\{u(k)\}, \{x(k)\}) = \sum_{k=0}^{N-1} (u(k) - v(k))^2 + x^2(N) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + u(k), x(0) = x_0, k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тут $x, u \in \mathbb{R}^1$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – відома, $v(k)$ – відомі, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Розв'язок. Будемо шукати функцію Белмана у вигляді

$$\mathcal{B}_s(z) = p(s) \cdot z^2 + q(s) \cdot z + r(s).$$

Зауважимо, що $\mathcal{B}_N(z) = z^2$, тому $p(N) = 1$, $q(N) = r(N) = 0$.

Далі записуємо дискретне рівняння Белмана

$$\begin{aligned} &p(s) \cdot z^2 + q(s) \cdot z + r(s) = \\ &\quad = \min_u ((u-v)^2 + p(s+1) \cdot (z+u)^2 + q(s+1) \cdot (z+u) + r(s+1)). \end{aligned}$$

Знайдемо u_* з умови

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\big((u-v)^2 + p(s+1)\cdot(z+u)^2 + q(s+1)\cdot(z+u) + r(s+1)\big) = \\ = 2(u-v) + 2p(s+1)\cdot(z+u) + q(s+1),$$

звідки

$$u_*(s) = \frac{2v(s) - 2p(s+1)x(s) - q(s+1)}{2+2p(s+1)}.$$

Підставляючи це у дискретне рівняння Белмана отримаємо дискретне рівняння для знаходження $p(s)$, $q(s)$, $r(s)$:

$$p(s)\cdot z^2 + q(s)\cdot z + r(s) = \left(\frac{2v(s) - 2p(s+1)z - q(s+1)}{2+2p(s+1)} - v(s)\right) + \\ + p(s+1)\cdot(z + 2v(s) - 2p(s+1)z - q(s+1))^2 + \\ + q(s+1)\cdot(z + 2v(s) - 2p(s+1)z - q(s+1)) + r(s+1)$$

Збираючи коефіцієнти при відповідних степенях z знаходимо систему для знаходження $p(s)$, $q(s)$, $r(s)$.

Задача 9.4.

Розв'язок.

Задача 9.5.

Розв'язок.

9.3 Домашнє завдання

Задача 9.6.

Розв'язок.

Задача 9.7.

Розв'язок.

Задача 9.8.

Розв'язок.

Задача 9.9.

Розв'язок.

Задача 9.10.

Розв'язок.