5 Задача фільтрації. Множинний підхід

5.1 Алгоритми

Задача. Задана динамічна система $\dot{x} = Ax + v$, $y = Gx + w$, де $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження.

1. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови, що

$$\int_0^\tau \left(Mv^2(s) + Nw^2(s)\right) \mathrm{d}s + p_0 x^2(0) \le \mu^2.$$

2. Знайти похибку оцінювання.

Алгоритм 5.1. 1. (а) Знайдемо $R(t)$ з рівняння Бернуллі

$$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

(б) Знайдемо $K(t)$ за формулою

$$K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t).$$

(в) Знайдемо фільтр (спостерігач) за формулою

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)).$$

(г) Знайдемо $k(s)$ з системи

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s) \rangle, \quad k(t_0) = 0.$$

(д) Знайдемо $\mathcal{X}(\tau)$ за формулою

$$\mathcal{X}(\tau) = \mathcal{E}(\hat{x}(\tau), (\mu^2 - k(\tau)) \cdot R(\tau)).$$

2. Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \le \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))}.$$

5.2 Аудиторне заняття

Задача 5.1. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = tx(t) + v(t), \\ \quad y(t) = px(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови, що

$$\int_0^\tau (v^2(s) + w^2(s))\,\mathrm{d}s + x^2(0) \leq 1, \quad \tau \in [0, T].$$

Розв'язок. Загальна постановка задачі фільтрації має вигляд

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + v(t), \quad y(t) = G(t) \cdot x(t) + w(t),$$

$$\int_{t_0}^{t} (\langle M(t) \cdot v(t), v(t)\rangle + \langle N(t) \cdot w(t), w(t)\rangle) + \langle p_0 x(t_0), x(t_0)\rangle \leq \mu^2.$$

У нашій задачі $A(t) = \big(t\big)$, $G(t) = \big(p\big)$, $M(t) = \big(1\big)$, $N(t) = \big(1\big)$, $p_0 = 1$, $\mu = 1$.

Знайдемо фільтр (спостерігач) цієї задачі у вигляді

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)),$$

де $K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t)$, де у свою чергу

$$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

Підставляючи відомі функції знаходимо

$$\dot{R}(t) = 2t \cdot R(t) - p^2 \cdot R^2(t), \quad R(t_0) = 1.$$

Це рівняння Бернуллі, його розв'язок

$$R(t) = \frac{2e^{t^2}}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\mathrm{erfi}(t) - \mathrm{erfi}(t_0))}.$$

Далі,

$$K(t) = \frac{2pe^{t^2}}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\mathrm{erfi}(t) - \mathrm{erfi}(t_0))},$$

і

$$\dot{\hat{x}}(t) = t \cdot \hat{x}(t) + \frac{2pe^{t^2} \cdot (y(t) - p \cdot \hat{x}(t))}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\mathrm{erfi}(t) - \mathrm{erfi}(t_0))}.$$

Нарешті,

$$\mathcal{X}(\tau) = \mathcal{E}(\hat{x}(\tau), (\mu^2 - k(\tau)) \cdot R(\tau)),$$

де

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)\rangle, \quad k(t_0) = 0,$$

тобто

$$\dot{k}(s) = \langle (y(s) - p\hat{x}(s)), y(s) - p\hat{x}(s)\rangle = |y(s) - p\hat{x}(s)|^2, \quad k(t_0) = 0.$$

Задача 5.2. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + v(t), \\ \quad y(t) = 2x(t) + w(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова. Побудувати оцінку стану заданої системи (фільтр) за заданими спостереженнями $y(t) \in \mathbb{R}^1$ за умови, що

$$\int_0^\tau (v^2(s) + w^2(s))\,\mathrm{d}s + x^2(0) \le 2,$$

$\tau \in [0, T]$. Знайти похибку оцінювання.

Розв'язок. Загальна постановка задачі фільтрації має вигляд

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + v(t), \quad y(t) = G(t) \cdot x(t) + w(t),$$

$$\int_{t_0}^{t} (\langle M(t) \cdot v(t), v(t)\rangle + \langle N(t) \cdot w(t), w(t)\rangle) + \langle p_0 x(t_0), x(t_0)\rangle \le \mu^2.$$

У нашій задачі $A(t) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $G(t) = \begin{pmatrix}2\end{pmatrix}$, $M(t) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $N(t) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $p_0 = 1$, $\mu = \sqrt{2}$.

Знайдемо фільтр (спостерігач) цієї задачі у вигляді

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)),$$

де $K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t)$, де у свою чергу

$$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

Підставляючи відомі функції знаходимо

$$\dot{R}(t) = 2 \cdot R(t) - 4 \cdot R^2(t), \quad R(t_0) = 1.$$

Це рівняння зі змінними що розділяються, його розв'язок

$$R(t) = \frac{e^{2t}}{2e^{2t} - e^{2t_0}}.$$

Далі,

$$K(t) = \frac{2e^{2t}}{2e^{2t} - e^{2t_0}},$$

і

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + \frac{2e^{2t} \cdot (y(t) - 2 \cdot \hat{x}(t))}{2e^{2t} - e^{2t_0}}.$$

Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \leq \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))} = \frac{\sqrt{2 - k(\tau)} \cdot e^{2\tau}}{2e^{2\tau} - e^{2t_0}},$$

де

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s) \rangle, \quad k(t_0) = 0,$$

тобто

$$\dot{k}(s) = \langle (y(s) - 2\hat{x}(s)), y(s) - 2\hat{x}(s) \rangle = |y(s) - 2\hat{x}(s)|^2, \quad k(t_0) = 0.$$

Задача 5.3. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = 2x_1(t) + x_2(t) + v_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + x_2(t) + v_2(t), \\ \quad y(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + w(t), \end{cases}$$

і відомі спостереження за цією системою $y(t) \in \mathbb{R}^1$. Побудувати оцінку стану (фільтр) і знайти похибку оцінювання. Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $v_1(t) \in \mathbb{R}^1$, $v_2(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми,

$$\int_0^\tau (v_1^2(s) + v_2^2(s) + w^2(s))\,\mathrm{d}s + x_1^2(0) + 2x_2^2(0) \leq 1,$$

$\tau \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Розв'язок. Загальна постановка задачі фільтрації має вигляд

$$\dot{x}(t) = A(t)\cdot x(t) + v(t), \quad y(t) = G(t)\cdot x(t) + w(t),$$

$$\int_{t_0}^{t} (\langle M(t)\cdot v(t), v(t)\rangle + \langle N(t)\cdot w(t), w(t)\rangle) + \langle p_0 x(t_0), x(t_0)\rangle \le \mu^2.$$

У нашій задачі $A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N(t) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mu = 1$.

Знайдемо фільтр (спостерігач) цієї задачі у вигляді

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\cdot \hat{x}(t) + K(t)\cdot (y(t) - G(t)\cdot \hat{x}(t)),$$

де $K(t) = R(t)\cdot G^*(t)\cdot N(t)$, де у свою чергу

$$\dot{R}(t) = A(t)\cdot R(t) + R(t)\cdot A^*(t) - R(t)\cdot G^*(t)\cdot N(t)\cdot G(t)\cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

Підставляючи відомі функції знаходимо

$$\dot{R}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot R(t) + R(t)\cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - R(t)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot R(t),$$

або, у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \quad \dot{r}_{11} = 4r_{11} + 2r_{12} + r_{11}^2 + 4r_{11}r_{12} + 4r_{12}^2, \\ \quad \dot{r}_{12} = -r_{11} + 3r_{12} + r_{22} + r_{11}r_{12} + 2r_{12}^2 + 2r_{11}r_{22} + 4r_{12}r_{22}, \\ \quad \dot{r}_{22} = -2r_{12} + 2r_{22} + r_{12}^2 + 4r_{12}r_{22} + r_{22}^2, \\ r_{11}(0) = 1, \\ r_{12}(0) = 0, \\ r_{22}(0) = 1/2. \end{cases}$$

Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \le \sqrt{\mu^2 - k(\tau)}\cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))},$$

де

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s)\cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s)\cdot \hat{x}(s)\rangle, \quad k(t_0) = 0,$$

тобто

$$\dot{k}(s) = \langle (y(s) - \hat{x}_1(s) - 2\hat{x}_2(s)), y(s) - \hat{x}_1(s) - 2\hat{x}_2(s)\rangle = |y(s) - \hat{x}_1(s) - 2\hat{x}_2(s)|^2.$$

5.3 Домашнє завдання

Задача 5.4. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dot{x} = x + v + t^2, \\ y = -x + w, \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови. що

$$\int_0^\tau (v^2(s) + w^2(s))\,\mathrm{d}s + (x(0) - 1)^2 \le 1, \quad \tau \in [0, T].$$

Розв'язок.

Задача 5.5. Побудувати оцінку стану системи

$$\begin{cases} \dot{x} = tx + v, \\ y = px + w, \end{cases}$$

у формі фільтра, де $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження. Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, x_0 – невідома початкова умова, при цьому

$$\int_0^\tau (v^2(s) + w^2(s))\,\mathrm{d}s + (x(0) - 1)^2 \le 4,$$

$\tau \in [0, T]$. Знайти похибку оцінювання.

Розв'язок. Загальна постановка задачі фільтрації має вигляд

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + v(t), \quad y(t) = G(t) \cdot x(t) + w(t),$$

$$\int_{t_0}^{t} (\langle M(t) \cdot v(t), v(t)\rangle + \langle N(t) \cdot w(t), w(t)\rangle) + \langle p_0 x(t_0), x(t_0)\rangle \le \mu^2.$$

У нашій задачі $A(t) = \big(t\big)$, $G(t) = \big(p\big)$, $M(t) = \big(1\big)$, $N(t) = \big(1\big)$, $p_0 = 1$, $\mu = 2$.

Знайдемо фільтр (спостерігач) цієї задачі у вигляді

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(0) = 1,$$

де $K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t)$, де у свою чергу

$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$

Підставляючи відомі функції знаходимо

$$\dot{R}(t) = 2t \cdot R(t) - p^2 \cdot R^2(t), \quad R(t_0) = 1.$$

Це рівняння Бернуллі, його розв'язок

$$R(t) = \frac{2e^{t^2}}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\operatorname{erfi}(t) - \operatorname{erfi}(t_0))}.$$

Далі,

$$K(t) = \frac{2pe^{t^2}}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\operatorname{erfi}(t) - \operatorname{erfi}(t_0))},$$

і

$$\dot{\hat{x}}(t) = t \cdot \hat{x}(t) + \frac{2pe^{t^2} \cdot (y(t) - p \cdot \hat{x}(t))}{2e^{t_0^2} + p^2\sqrt{\pi}(\operatorname{erfi}(t) - \operatorname{erfi}(t_0))}, \quad \hat{x}(0) = 1.$$

Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \leq \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))} = \frac{\sqrt{4 - k(\tau)} \cdot e^{2\tau}}{2e^{2\tau} - e^{2t_0}},$$

де

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)\rangle, \quad k(t_0) = 0,$$

тобто

$$\dot{k}(s) = \langle (y(s) - p\hat{x}(s)), y(s) - p\hat{x}(s)\rangle = |y(s) - p\hat{x}(s)|^2, \quad k(t_0) = 0.$$

Задача 5.6.

Розв'язок.