

### 3 Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування

#### 3.1 Алгоритми

*Задача.* Перевести систему  $\dot{x} = Ax + Bu$  з точки  $x_0$  в точку  $x_T \in \mathbb{R}^1$  за допомогою керування з класу  $K$  (керування, залежні від вектору параметрів  $c$ ).

**Алгоритм 3.1.** 1. Знаходимо траєкторію системи при заданому керуванні (залежну від параметра  $c$ ).

2. Знаходимо з отриманого алгебраїчного рівняння параметр  $c$ .

*Задача.* 1. Знайти грамміан керованості системи  $\dot{x} = Ax + Bu$  за визначенням.

2. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження грамміана керованості.

3. Використовуючи грамміан керованості, знайти інтервал повної керованості системи.

4. Для цього інтервалу записати керування яке переводить систему з точки  $x_0$  в точку  $x_T$  (або розв'язати задачу оптимального керування).

**Алгоритм 3.2.** Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. (а) Знаходимо  $\Theta(T, s)$ .

(б) Використовуємо формулу

$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^T \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) ds.$$

2. Записуємо систему

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0) \cdot A^*(t) + B(t) \cdot B^*(t), \Phi(t_0, t_0) = 0.$$

3. Це інтервал на якому  $\Phi(t, t_0) \neq 0$ .

4. Використовуємо формулу

$$u(t) = B^*(t) \cdot \Theta(T, t) \cdot \Phi^{-1}(T, t_0)(x_T - \Theta(T, t_0) \cdot x_0).$$

*Задача.* Дослідити стаціонарну систему  $\dot{x} = Ax + Bu$  на керованість використовуючи другий критерій керованості.

**Алгоритм 3.3.** 1. Знаходимо  $D = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ .

2. Якщо  $\text{rang} D = n$  то стаціонарна системи цілком керована, інакше ні.

### 3.2 Задачі з розв'язками

*Задача 3.1.* Перевести систему

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad t \in [0, T],$$

з точки  $x(0) = x_0$  в точку  $x(T) = y_0$  за допомогою керування з класу:

1. постійних функцій  $u(t) = c$ ,  $c$  – константа;
2. кусково-постійних функцій

$$u(t) = \begin{cases} c_1, & t \in [0, t_1], \\ c_2, & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

Тут  $c_1, c_2$  – константи,  $c_1 \neq c_2$ ,  $0 < t_1 < T$ ;

3. програмних керувань  $u(t) = ct$ ,  $c$  – константа;
4. керувань з оберненим зв'язком  $u(x) = cx$ ,  $c$  – константа.

**Розв'язок.** Скористаємося формулою  $x(T) = x(0) + \int_0^T \frac{dx}{dt} dt$ :

1.

$$x(T) = x(0) + \int_0^T c dt = x(0) + cT,$$

звідки

$$c = \frac{x(T) - x(0)}{T} = \frac{y_0 - x_0}{T};$$

2.

$$x(T) = x(0) + \int_0^{t_1} c_1 dt + \int_{t_1}^T c_2 dt = x(0) + c_1 t_1 + c_2 (T - t_1).$$

Розв'язок не єдиний,

$$c_2 = \frac{x(T) - x(0) - c_1 t_1}{T - t_1},$$

де  $c_1$  – довільна стала, наприклад  $c_1 = 0$ , тоді

$$c_2 = \frac{x(T) - x(0)}{T - t_1} = \frac{y_0 - x_0}{T - t_1}.$$

3.

$$x(T) = x(0) + \int_0^T ct dt = x(0) + \frac{cT^2}{2},$$

звідки

$$c = \frac{2(x(T) - x(0))}{T^2} = \frac{2(y_0 - x_0)}{T^2}.$$

4. У цьому випадку проінтегрувати не можна, бо  $u$  залежить від  $x$ , тому просто запишемо за формулою Коші

$$x(T) = x(0) \cdot e^{cT},$$

звідки

$$c = \frac{\ln(x(T)/x(0))}{T} = \frac{\ln(y_0) - \ln(x_0)}{T}.$$

Варто зауважити, не для всіх пар  $x_0$  і  $y_0$  коректно визначається значення  $c$ . А саме, необхідно щоб  $y_0$  було того ж знаку, що і  $x_0$ .

*Задача 3.2.* 1. Використовуючи означення, знайти грамміан керованості для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + \cos(t) \cdot u(t), \quad t \geq 0.$$

2. Записати диференціальне рівняння для грамміана керованості і за його допомогою знайти грамміан керованості.

3. Використовуючи критерій керованості, вказати інтервал повної керованості вказаної системи керування. Для цього інтервала записати керування, яке розв'язує задачу про переведення системи з точки  $x_0$  у стан  $x_T$ .

**Розв'язок.** 1. Скористаємося формулою

$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^T \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) ds.$$

$\Theta(T, s)$  знаходимо з системи

$$\frac{d\Theta(t, s)}{dt} = A(t) \cdot \Theta(t, s) = t \cdot \Theta(t, s),$$

а саме  $\Theta(t, s) = \exp \left\{ \frac{t^2 - s^2}{2} \right\}$ . Підставляючи всі знайдені значення, отримуємо

$$\Phi(T, t_0) = \cos^2(T) \cdot e^{T^2} \int_{t_0}^T e^{-s^2} ds = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \cos^2(T) \cdot e^{T^2} \cdot \operatorname{erf}(T).$$

2. Запишемо систему

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0) \cdot A^*(t) + B(t) \cdot B^*(t), \quad \Phi(t_0, t_0) = 0.$$

І підставимо відомі значення:

$$\frac{d\Phi(t, 0)}{dt} = 2t\Phi(t, 0) + \cos^2(t), \quad \Phi(0, 0) = 0.$$

Звідси

$$\Phi(t, 0) = \frac{1}{8} \sqrt{\pi} e^{t^2-1} (-2e \operatorname{erf}(t) + i(\operatorname{erfi}(1+it) - i \operatorname{erfi}(1-it))),$$

а

$$\Phi(T, 0) = \frac{1}{8} \sqrt{\pi} e^{T^2-1} (-2e \operatorname{erf}(T) + i(\operatorname{erfi}(1+iT) - i \operatorname{erfi}(1-iT))),$$

3. З вигляду граміану керованості отриманого у першому пункті очевидно, що система цілком керована на півінтервалі  $[0, \pi/2)$ , зокрема на інтервалі  $[0, 1]$ .

Підставимо тепер граміан у формулу для керування що розв'язує задачу про переведення системи із стану  $x_0$  у стан  $x_T$ :

$$\begin{aligned} u(t) &= B^*(t) \Theta^*(T, t) \Phi^{-1}(T, t_0) (x_T - \Theta(T, t_0) x_0) = \\ &= \cos(t) \cdot \exp \left\{ \frac{T^2 - t^2}{2} \right\} \Phi^{-1}(T, 0) \left( x_T - \exp \left\{ \frac{T^2}{2} \right\} x_0 \right) \end{aligned}$$

**Задача 3.3.** За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s) ds$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sin(t) \cdot x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, x(T) = x_T.$$

Тут  $x$  – стан системи,  $u(t)$  – скалярне керування,  $x_0, x_T$  – задані точки,  $t \in [t_0, T]$ .

**Розв'язок.** Знайдемо шукане керування за формулою

$$u(t) = B^*(t)\Theta^*(T, t)\Phi^{-1}(T, t_0)(x_T - \Theta(T, t_0)x_0).$$

У цій задачі  $\Theta(t, s) = e^{\cos(s) - \cos(t)}$ , знайдене з системи  $\dot{\Theta} = A\Theta$ ,  $\Phi(T, t_0) = e^{-2\cos(T)} \int_0^T e^{2\cos(s)} ds$ , підставляючи знаходимо

$$u(t) = \frac{e^{\cos(t) + \cos(T)} \cdot (x_T - e^{1 - \cos(T)} x_0)}{\int_0^T e^{2\cos(s)} ds}.$$

**Задача 3.4.** За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s) dx$$

за умов, що

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 5 \frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) &= u(t), \\ x(0) = x_0, x'(0) &= y_0, x(T) = x'(T) = 0. \end{aligned}$$

Тут  $x$  – стан системи,  $u(t)$  – скалярне керування,  $t \in [0, T]$ .

**Розв'язок.** Почнемо з того що зведемо рівняння другого порядку до системи рівнянь заміною  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$ , тоді маємо систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

Знайдемо власні числа матриці  $A - \lambda E$ :  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ , звідки  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Знайдемо власні

вектори, вони будуть  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  відповідно. Звідси знаходимо загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

З рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{2s} \\ 2e^{2s} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3s} \\ 3e^{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

знаходимо  $c_1 = 3e^{-2s}$ ,  $c_2 = -2e^{-3s}$ , а з рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{2s} \\ 2e^{2s} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3s} \\ 3e^{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

знаходимо  $c_1 = -e^{-2s}$ ,  $c_2 = e^{-3s}$ , тобто

$$\Theta(t, s) = \begin{pmatrix} 3e^{2(t-s)} - 2e^{3(t-s)} & -e^{2(t-s)} + e^{3(t-s)} \\ 6e^{2(t-s)} - 6e^{3(t-s)} & -2e^{2(t-s)} + 3e^{3(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо грамміан за формулою

$$\Phi(T, 0) = \int_0^T \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) ds.$$

$$\Theta(T, s) B(s) = \begin{pmatrix} -e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} \\ -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)} \end{pmatrix}.$$

$$B^*(s) \Theta^*(T, s) = (\Theta(T, s) B(s))^* = \begin{pmatrix} -e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} & -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \Phi(T, 0) &= \int_0^T \begin{pmatrix} -e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} \\ -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} & -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)} \end{pmatrix} ds = \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} e^{4(T-s)} - 2e^{5(T-s)} + e^{6(T-s)} & 2e^{4(T-s)} - 5e^{5(T-s)} + 3e^{6(T-s)} \\ 2e^{4(T-s)} - 5e^{5(T-s)} + 3e^{6(T-s)} & 4e^{4(T-s)} - 12e^{5(T-s)} + 9e^{6(T-s)} \end{pmatrix} ds = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{4T} - 1}{4} - \frac{2(e^{5T} - 1)}{5} + \frac{e^{6T} - 1}{6} & \frac{e^{4T} - 1}{2} - (e^{5T} - 1) + \frac{e^{6T} - 1}{2} \\ \frac{e^{4T} - 1}{2} - (e^{5T} - 1) + \frac{e^{6T} - 1}{2} & (e^{4T} - 1) - \frac{12(e^{5T} - 1)}{5} + \frac{3(e^{6T} - 1)}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Обчислення визначника грамміану є громіздкою обчислювальною задачею, ми залишаємо її як вправу для читача.

**Задача 3.5.** Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі  $[0, T]$  у випадку, якщо система керування має вигляд:

1.

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = tx_1(t) + x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t) + t^2u_2(t). \end{cases}$$

Тут  $x = (x_1, x_2)^*$  – вектор стану,  $u = (u_1, u_2)^*$  – вектор керування,  $t \in [0, T]$ .

2.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \sin(t) \cdot x(t) = u(t).$$

Тут  $x$  – стан системи,  $u(t)$  – скалярне керування,  $t \in [0, T]$ .

**Розв’язок.** 1.  $A = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{11} = 2t\phi_{11} + 2\phi_{12} + 1, \\ \dot{\phi}_{12} = -\phi_{11} + (t+2)\phi_{12} + \phi_{22}, \\ \dot{\phi}_{21} = \dots \end{cases}$$

2. Введемо нову змінну  $x_2 = \dot{x}$ , тоді  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(t) & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{11} = 2\phi_{12}, \\ \dot{\phi}_{12} = (1 - \sin(t))\phi_{11}, \\ \dots \end{cases}$$

**Задача 3.6.** Дослідити системи на керованість використовуючи другий критерій керованості:

1.

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u;$$

2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + au \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 + u \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u_2 \end{cases}$$

**Розв'язок.** 1. Почнемо з того що зведемо рівняння другого порядку до системи рівнянь заміною  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$ , тоді маємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_2 - bx_1 + u \end{cases}$$

Тоді

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Її ранг дорівнює 2 якщо за будь-яких  $a$  і  $b$ , тобто система завжди цілком керована.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} a & 2a+1 \\ 1 & a+4 \end{pmatrix}.$$

Її визначник  $a^2 + 4a - 2a - 1 = a^2 + 2a - 1 = 0$  якщо  $a = -1 \pm \sqrt{2}$ , тоді система не є цілком керованою, а інакше є.

3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = (B \quad AB \quad A^2B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Її ранг дорівнює 3, тобто система цілком керована.

*Задача 3.7.* Перевести систему

$$\frac{dx}{dt} = 2tx + u, t \in [0, T],$$

з точки  $x(0) = x_0$  в точку  $x(T) = y_0$  за допомогою керування з класу:



1. постійних функцій  $u(t) = c$ ,  $c$  – константа;

2. кусково-постійних функцій

$$u(t) = \begin{cases} c_1 & t \in [0, t_1), \\ c_2 & t \in (t_1, T]. \end{cases}$$

Тут  $c_1, c_2$  – константи,  $c_1 \neq c_2$ ,  $0 < t_1 < T$ ;

3. програмних керувань  $u(t) = ct$ ,  $c$  – константа;

4. керувань з оберненим зв'язок  $u(x) = cx$ ,  $c$  – константа.

**Розв'язок.** Будемо просто підставляти керування у диференціальне рівняння і розв'язувати його:

1. Зводимо до канонічного вигляду лінійного рівняння:

$$\frac{dx}{dt} - 2t \cdot x(t) = c.$$

Домножаємо на множник що інтегрує:

$$\exp\{-t^2\} \cdot \frac{dx}{dt} - 2t \cdot \exp\{-t^2\} \cdot x(t) = c \cdot \exp\{-t^2\}$$

$$\exp\{-t^2\} \cdot \frac{dx}{dt} + x(t) \cdot \frac{d \exp\{-t^2\}}{dt} = c \cdot \exp\{-t^2\}.$$

Згортаємо похідну добутку:

$$\frac{d(\exp\{-t^2\} \cdot x(t))}{dt} = c \cdot \exp\{-t^2\}.$$

Інтегруємо:

$$(\exp\{-t^2\} \cdot x(t)) \Big|_0^T = \int_0^T c \cdot \exp\{-t^2\} dt$$

$$\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - x_0 = c \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf}(T),$$

і виражаємо звідси  $c$ :

$$c = 2 \cdot \frac{\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - x_0}{\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(T)},$$

де  $\operatorname{erf}$  позначає функцію помилок, тобто  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x \exp\{-t^2\} dt$ .

Зауважимо, що задача має розв'язок завжди.

2. Нескладно зрозуміти, що нас задовольнить довільне керування вигляду

$$c_2 = 2 \cdot \frac{\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - \exp\{-t_1^2\} \cdot x_1}{\sqrt{\pi} \cdot (\operatorname{erf}(T) - \operatorname{erf}(t_1))},$$

де

$$x_1 = \frac{2x_0 + c_1 \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(T)}{2 \cdot \exp\{-t_1^2\}},$$

тобто ми просто дозволили  $c_1$  бути довільною сталою, обчислили  $x(t_1)$ , а потім розв'язали задачу переведення системи з точки  $(t_1, x_1)$  у точку  $(T, y_0)$  як у першому пункті, з мінімальними поправками на межі інтегрування.

Зокрема, якщо  $c_1 = 0$ , то  $x_1 = \frac{x_0}{\exp\{-t_1^2\}}$ , тому  $c_2 = 2 \cdot \frac{\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - x_0}{\sqrt{\pi} \cdot (\operatorname{erf}(T) - \operatorname{erf}(t_1))}$ .

Зауважимо, що задача має розв'язок завжди.

- 3.

$$\frac{dx}{2x(t) + c} = t dt$$

$$\int_0^T \frac{dx}{2x(t) + c} = \int_0^T t dt$$

$$\left( \frac{1}{2} \ln(2x(t) + c) \right) \Big|_0^T = \frac{T^2}{2}$$

$$\ln(2y_0 + c) - \ln(2x_0 + c) = T^2$$

$$\ln \left( \frac{2y_0 + c}{2x_0 + c} \right) = T^2$$

$$\frac{2y_0 + c}{2x_0 + c} = \exp\{T^2\}$$

$$2y_0 + c = (2x_0 + c) \cdot \exp\{T^2\}$$

$$2(y_0 - x_0 \cdot \exp\{T^2\}) = c \cdot (\exp\{T^2\} - 1)$$

звідки

$$c = 2 \cdot \frac{y_0 - x_0 \cdot \exp\{T^2\}}{\exp\{T^2\} - 1}.$$

Зауважимо, що задача має розв'язок завжди.

4.

$$\frac{dx}{dt} = 2t \cdot x(t) + c \cdot x(t)$$

$$\frac{dx}{x(t)} = (2t + c)dt$$

$$\int_0^T \frac{dx}{x(t)} = \int_0^T (2t + c)dt$$

$$(\ln(x(t)))|_0^T = T^2 + cT$$

$$\ln(y_0) - \ln(x_0) = T^2 + cT$$

$$\ln(y_0/x_0) = T^2 + cT$$

звідки

$$c = \frac{\ln(y_0/x_0) - T^2}{T}.$$

Зауважимо, що задача має розв'язок тільки якщо  $\text{sign}(x_0) = \text{sign}(y_0)$ .

*Задача 3.8.* 1. Знайти грамміан керованості для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t)$$

і дослідити її на керованість, використовуючи перший критерій керованості.

2. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s) ds \rightarrow \min$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t), x(0) = x_0, x(T) = x_T.$$

Тут  $x$  – стан системи.  $u(t)$  – скалярне керування,  $x_0, x_T$  – задані точки,  $t \in [0, T]$ .

**Розв'язок.** 1. Одразу помітимо, що  $A(t) = (t)$ ,  $B(t) = (1)$ . Далі, з рівняння  $\frac{d\Theta(t, s)}{dt} = A(t) \cdot \Theta(t, s)$  знаходимо  $\Theta(t, s) = \exp\{t^2/2 - s^2/2\}$ . Залишилося всього нічого, знайти власне грамміан:

$$\begin{aligned} \Phi(T, 0) &= \int_0^T \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) ds = \\ &= \int_0^T (\exp\{T^2 - s^2\}) ds = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \exp\{T^2\} \cdot \operatorname{erf}(T) \right), \end{aligned}$$

і  $\det \Phi(T, 0) \neq 0$ , тобто система цілком керована на  $[0, T]$ .

2. Пригадаємо наступний результат: розв'язком вищезгаданої задачі про оптимальне керування є функція

$$\begin{aligned} u(t) &= B^*(t) \Theta^*(T, t) \Phi^{-1}(T, 0) (x_T - \Theta(T, 0) x_0) = \\ &= \exp\{T^2/2 - t^2/2\} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\{-T^2\} \cdot \frac{1}{\operatorname{erf}(T)} \right) (x_T - \exp\{T^2/2\} x_0) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(T)} \cdot \left( x_T \cdot \exp\left\{-\frac{T^2 + t^2}{2}\right\} - x_0 \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \right). \end{aligned}$$

*Задача 3.9.* Мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u_1^1(s) + u_2^2(s)) ds$$

за умов

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 6x_1(t) - 2x_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 5x_1(t) - x_2(t) + u_2(t), \\ x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, \\ x_1(T) = x_2(T) = 0. \end{cases}$$

Тут  $x = (x_1, x_2)^*$  – вектор фазових координат з  $\mathbb{R}^2$ ,  $u = (u_1, u_2)^*$  – вектор керування,  $x = (x_{10}, x_{20})^*$  – відома точка,  $t \in [0, T]$ .

**Розв’язок.** Запишемо систему у людському вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (t)$$

Знайдемо власні числа матриці  $A - \lambda E$ :  $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -2 \\ 5 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$ , звідки  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 4$ . Знайдемо власні вектори, вони будуть  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  відповідно. Звідси знаходимо загальний розв’язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} (t) = c_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ 5e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

З рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} 2e^s \\ 5e^s \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4s} \\ e^{4s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

знаходимо  $c_1 = -\frac{1}{3}e^{-s}$ ,  $c_2 = \frac{5}{3}e^{-4s}$ , а з рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} 2e^s \\ 5e^s \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4s} \\ e^{4s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

знаходимо  $c_1 = \frac{1}{3}e^{-s}$ ,  $c_2 = -\frac{2}{3}e^{-4s}$ , тобто

$$\Theta(t, s) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 2e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \\ -5e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 5e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо грамміан за формулою

$$\Phi(T, 0) = \int_0^T \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) ds.$$

$$\Theta(T, s)B(s) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 2e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \\ -5e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 5e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \end{pmatrix}.$$

$$B^*(s)\Theta^*(T, s) = (\Theta(T, s)B(s))^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 5e^{t-s} - 5e^{4(t-s)} \\ -2e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} & 5e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Обчислення грамміану є громіздкою обчислювальною задачею, ми залишаємо її як вправу для читача.

**Задача 3.10.** Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі  $[0, T]$  у випадку, якщо система керування має вигляд:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + tx(t) = u(t).$$

Тут  $x$  – стан системи,  $u(t)$  – скалярне керування,  $t \in [0, T]$ .

**Розв’язок.** Зробимо заміну  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ , тоді маємо систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u) (t).$$

Звідси можемо записати систему диференціальних рівнянь для знаходження грамміана керованості:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0)A^*(t) + B(t)B^*(t).$$

$$\frac{d\Phi(t, 0)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix} \Phi(t, 0) + \Phi(t, 0) \begin{pmatrix} 0 & t \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окрім цього, не забуваємо про умову  $\Phi(0, 0) = 0$ .

Щодо критерію керованості, то тут все просто (чи радше стандартно), для того щоб система була цілком керованою на  $[0, T]$  необхідно і достатньо, щоб грамміан керованості  $\Phi(T, 0)$  був невиродженим, тобто щоб  $\det \Phi(T, 0) \neq 0$  або (що те саме у випадку невід’ємно-визначеної матриці) щоб  $\det \Phi(T, 0) > 0$ .

**Задача 3.11.** Дослідити на керованість, використовуючи другий критерій керованості:

1.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{u}{a}; \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{u}{a}; \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + au, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + a^2u; \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - au, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + au; \end{cases}$$

5.

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = u(t).$$

6.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3 + u_1 - u_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + 3x_3 + u_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_2 + x_3 + 2u_2 \end{cases}$$

**Розв'язок.** 1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}$$

$$D = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} a & 1/a - a \\ 1/a & a \end{pmatrix}$$

$$\det D = a^2 + 1 - 1/a^2 \neq 0,$$

тобто система цілком керована якщо тільки  $a \neq \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ .

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}$$

$$D = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} a & a - 1/a \\ 1/a & a \end{pmatrix}$$

$$\det D = a^2 - 1 + 1/a^2 \neq 0,$$

тобто система цілком керована для будь-яких  $a$  (навіть  $\det D \geq 1$  за нерівністю Коші).

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

$$D = (B \ AB) = \begin{pmatrix} a & a + a^2 \\ a^2 & a^2 - a \end{pmatrix}$$

$$\det D = a^3 - a^2 - a^4 - a^3 = -a^4 - a^2 \neq 0,$$

тобто система цілком керована якщо тільки  $a \neq 0$ .

4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$$

$$D = (B \ AB) = \begin{pmatrix} -a & -a \\ a & a \end{pmatrix}$$

$$\det D = 0,$$

тобто система не є цілком керованою для будь-яких  $a$ .

5. Зробимо заміну  $x_0 = x$ ,  $x_1 = x'$ , ...,  $x_n = x^{(n)}$ , тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = u - a_n x_0 - a_{n-1} x_1 - \dots - a_1 x_{n-1} \end{cases}$$

тобто

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$D = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^nB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & -a_1 & \cdots \\ 1 & 0 & -a_1 & -a_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\det D = -1 \neq 0,$$

тобто система цілком керована для довільних  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Її ранг дорівнює 3, тобто система цілком керована.

### 3.3 Задачі для самостійного розв'язування

*Задача 3.12.* Знайти диференціальне рівняння грамміана керованості для системи керування

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \cos(t) \cdot x_1(t) - \sin(t) \cdot x_2(t) + u_1(t) - 2u_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \sin(t) \cdot x_1(t) + \cos(t) \cdot x_2(t) - 3u_1(t) + 4u_2(t). \end{cases}$$

*Задача 3.13.* За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s) \, ds$$

за умов, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = u(t),$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = y_0, x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут  $x$  – стан системи,  $u(t)$  – скалярне керування,  $t \in [0, T]$ .

*Задача 3.14.* Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі  $[0, T]$  у випадку, якщо системи керування має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = tx_1(t) + t^2x_2(t) + u_1(t) - u_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_2(t), \end{cases}$$

Тут  $x = (x_1, x_2)^*$  – вектор фазових координат з  $\mathbb{R}^2$ ,  $u = (u_1, u_2)^*$  – вектор керування,  $t \in [0, T]$ .