8 Принцип максимуму Понтрягіна: загальний випадок

9 Принцип максимуму Понтрягіна: загальний випадок

9.1 Алгоритми

Задача. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \,\mathrm{d}s + \Phi_0 \to \inf$$

за умов, що

$$\dot{x} = f,$$

а також

$$\int f_i \,\mathrm{d}s + \Phi_i = 0, \quad i = \overline{1..k}.$$

Алгоритм 9.1. 1. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle.$$

2. Запишемо термінант:

$$F = \sum_i \lambda_i f_i, \quad \ell = \sum_i \lambda_i \Phi_i.$$

3. Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

   (а) оптимальність:

   $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0;$$

   (б) стаціонарність (спряжена система):

   $$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H};$$

   (в) трансверсальність:

   $$\psi(t_0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T};$$

(г) стаціонарність за кінцями: відсутня, бо час фіксований;

(д) доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу;

(е) невід'ємність: $\lambda_i \geq 0$.

4. Методом від супротивного показуємо, що $\lambda_i \neq 0$.

5. З умов принципу максимуму визначаємо $u = u(\psi)$.

6. Записуємо крайову задачу - систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

7. Знаходимо її розв'язок x_*.

8. Відновлюємо $u_* = u_*(\psi)$.

Задача. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \, \mathrm{d}s + \Phi_0 \to \inf$$

за умов, що

$$\dot{x} = f,$$

а також

$$\int f_i \, \mathrm{d}s + \Phi_i = 0, \quad i = \overline{1..k}.$$

Алгоритм 9.2. 1. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle.$$

2. Запишемо термінант:

$$F = \sum_i \lambda_i f_i, \quad \ell = \sum_i \lambda_i \Phi_i.$$

3. Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

(а) оптимальність:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0;$$

(б) стаціонарність (спряжена система):

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H};$$

(в) трансверсальність:

$$\psi(t_0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T};$$

(г) стаціонарність за кінцями:

$$\mathcal{H}(T) = \frac{\partial \ell}{\partial T};$$

(д) доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу;

(е) невід'ємність: $\lambda_i \geq 0$.

4. Методом від супротивного показуємо, що $\lambda_i \neq 0$.

5. З умов принципу максимуму визначаємо $u = u(\psi)$.

6. Записуємо крайову задачу - систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

7. З умов принципу максимуму і крайової задачі визначаємо T.

8. Знаходимо розв'язок крайової задачі x_*.

9. Відновлюємо $u_* = u_*(\psi)$.

9.2 Аудиторне заняття

Задача 9.1. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 (u^2(s) + x^2(s))\, \mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0) = 0, x(1) = \frac{1}{2}.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Розв'язок. Нагадаємо загальну постановку задачі принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}_0 \to \min, \dot{x} = f, \mathcal{J}_i \leq 0\, (i = \overline{1..k}), \mathcal{J}_i = 0\, (i = \overline{k+1..k+r}), \mathcal{J}_i = \int f_i + \Phi_i.$$

У нашій задачі
$$f_0 = u^2 + x^2, f = u,$$
і треба щось зробити з $x(0) = 0$ і $x(1) = \frac{1}{2}$. Насправді це інтегральні обмеження вигляду
$$\mathcal{J}_1 = 0, f_1 = 0, \Phi_1 = x_0, \quad \mathcal{J}_2 = 0, f_2 = 0, \Phi_2 = x_T - \frac{1}{2}.$$

Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна і термінант:
$$F = \lambda_0(u^2 + x^2), \quad \ell = \lambda_1 x_0 + \lambda_2 \left(x_T - \frac{1}{2} \right),$$
$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle = -\lambda_0(u^2 + x^2) + \psi u.$$

Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

1. оптимальність: $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -2\lambda_0 u + \psi = 0$;
2. стаціонарність (спряжена система): $\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = 2\lambda_0 x$;
3. трансверсальність: $\psi(t_0) = \psi(0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0} = \lambda_1$, $\psi(T) = \psi(1) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T} = -\lambda_2$;
4. стаціонарність за кінцями: відсутня, бо час фіксований, $[t_0, T] = [0, 1]$;
5. доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу, $k = 0$;
6. невід'ємність: $\lambda_0 \geq 0$.

Нескладно пересвідчитися, що якщо $\lambda_0 = 0$, то $\psi \equiv 0$, вироджений випадок, тобто виконується умова нерівності нулеві множників Лагранжа. Покладемо тоді без обмеження загальності $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, тоді $u = \psi$.

Запишемо тепер крайову задачу принципу максимуму:
$$\begin{cases} \dot{\psi} = x, \\ \dot{x} = \psi, \\ x(0) = 0, x(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Її загальний розв'язок
$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t, \\ \psi(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t. \end{cases}$$

З крайових умов

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 0, \\ x(1) = c_1/e + c_2 e = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

знаходимо

$$c_1 = -\frac{1}{2(e - e^{-1})}, \quad c_2 = \frac{1}{2(e - e^{-1})}.$$

Остаточно,

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2(e - e^{-1})}, \\ u(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2(e - e^{-1})}. \end{cases}$$

Задача 9.2. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^2(s) - 12 s x(s)) \, \mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0) = 0, x(1) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Розв'язок. Зауважимо, що на множник $\frac{1}{2}$ можна заплющити очі, адже від нього $\arg\inf \mathcal{J}$ явно не зміниться.

Функція Гамільтона-Понтрягіна і термінант записують так:

$$\mathcal{H} = -\lambda_0 (u^2 - 12tx), \quad \ell = \lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_T.$$

Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

1. оптимальність: $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -2\lambda_0 u + \psi = 0$;

2. стаціонарність (спряжена система): $\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -12\lambda_0 t$;

3. трансверсальність: $\psi(t_0) = \psi(0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0} = \lambda_1$, $\psi(T) = \psi(1) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T} = -\lambda_2$;

4. стаціонарність за кінцями: відсутня, бо час фіксований, $[t_0, T] = [0, 1]$;

5. доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу, $k = 0$;

6. невід'ємність: $\lambda_0 \geq 0$.

Перевіряємо умову нерівності нулеві множників Лагранжа. Від супротивного, якщо $\lambda_0 = 0$, то $\psi \equiv 0$, а тоді і $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, вироджений випадок. Покладемо тоді без обмеження загальності $\lambda_0 = 1$, тоді $u = \psi/2$.

Запишемо тепер крайову задачу принципу максимуму:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -12t, \\ \dot{x} = \psi/2, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

З рівняння на $\dot{\psi}$, $\psi = -6t^2 + C_1$. Підставляючи в рівняння на $\dot{x}$ і розв'язуючи його, знаходимо $x = -t^3 + C_1 t/2 + C_2$.

З крайових умов

$$\begin{cases} x(0) = C_2 = 0, \\ x(1) = -1 + C_1/2 + C_2 = 0, \end{cases}$$

знаходимо

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 0.$$

Отже керування

$$u_*(t) = \frac{\psi(t)}{2} = -3t^2 + 1,$$

і відповідна йому траєкторія

$$x_*(t) = -t^3 + t$$

є оптимальними.

Задача 9.3. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(s) \, \mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = u(t), \quad x(0) = -1, \dot{x}(0) = 2, x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Розв'язок. Позначимо $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, тоді $f_0 = u^2/2$, $\Phi_0 = 0$, $f_1 = 0$, $\Phi_1 = x_{10} + 1$, $f_2 = 0$, $\Phi_2 = x_{20} - 2$, $f_3 = 0$, $\Phi_3 = x_{1T}$, $f_4 = 0$, $\Phi_4 = x_{2T} - 1$, $f = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}$.

Запишемо тепер функцію Гамільтона-Понтрягіна і термінант:

$$F = \lambda_0 u^2/2, \quad \ell = \lambda_1(x_{10} + 1) + \lambda_2(x_{20} - 2) + \lambda_3 x_{1T} + \lambda_4(x_{2T} - 1),$$

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle = -\lambda_0 u^2/2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

1. оптимальність: $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -\lambda_0 u + \psi_2 = 0$;

2. стаціонарність (спряжена система): $\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$;

3. трансверсальність:

$$\psi(t_0) = \psi(0) = \nabla_{x_0} \ell = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \psi(T) = \psi(1) = -\nabla_{x_T} \ell = \begin{pmatrix} -\lambda_3 \\ -\lambda_4 \end{pmatrix};$$

4. стаціонарність за кінцями: відсутня, бо час фіксований, $[t_0, T] = [0, 1]$;

5. доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу, $k = 0$;

6. невід'ємність: $\lambda_0 \geq 0$.

Без обмеження загальності покладемо $\lambda_0 = 1$, тоді $u = \psi_2$.

Запишемо тепер крайову задачу принципу максимуму:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \psi_2, \\ x_{10} = -1, x_{20} = 2, \\ x_{1T} = 0, x_{2T} = 1. \end{cases}$$

З першого рівняння $\psi_1 = C_1$, тоді з другого $\psi_2 = -C_1 t + C_2$, далі з четвертого $x_2 = -C_1 t^2/2 + C_2 t + C_3$, і нарешті з третього $x_1 =$

$-C_1 t^3/6 + C_2 t^2/2 + C_3 t + C_4$.

З крайових умов

$$\begin{cases} x_1(0) = C_4 = -1, \\ x_2(0) = C_3 = 2, \\ x_1(1) = -C_1/6 + C_2/2 + C_3 + C_4 = 0, \\ x_2(1) = -C_1/2 + C_2 + C_3 = 1. \end{cases}$$

знаходимо

$$C_1 = -6, \quad C_2 = -4, \quad C_3 = 2, \quad C_4 = -1.$$

Отже

$$u_*(t) = \psi_2(t) = 6t - 4,$$

$$x_*(t) = x_1(t) = t^3 - 2t^2 + 2t - 1.$$

Задача 9.4. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = T = \int_0^T \mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0) = 0, x(T) = 1,$$

$$\int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Розв'язок. У нашій задачі $f_0 = 1$, $\Phi_0 = T$, $f_1 = 0$, $\Phi_1 = x_0$, $f_2 = 0$, $\Phi_2 = x_T - 1$, $f_3 = u^2$, $\Phi_3 = -1$, $f = u$.

Запишемо тепер функцію Гамільтона-Понтрягіна і термінант:

$$F = \lambda_0 + \lambda_3 u^2, \quad \ell = \lambda_0 T + \lambda_1 x_0 + \lambda_2 (x_T - 1) - \lambda_3,$$

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle = -\lambda_0 - \lambda_3 u^2 + \psi u.$$

Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

1. оптимальність: $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -2\lambda_3 u + \psi = 0$;

2. стаціонарність (спряжена система): $\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H} = -0$;

3. трансверсальність:

$$\psi(t_0) = \psi(0) = \nabla_{x_0}\ell = \lambda_1, \quad \psi(T) = -\nabla_{x_T}\ell = -\lambda_2;$$

4. стаціонарність за кінцями: $\mathcal{H}(T) = \frac{\partial \ell}{\partial T} = \lambda_0$;

5. доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу, $k = 0$;

6. невід'ємність: $\lambda_0 \geq 0$.

$u = \frac{\psi}{2\lambda_3}$.

Запишемо тепер крайову задачу принципу максимуму:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = 0, \\ \dot{x} = \dfrac{\psi}{2\lambda_3}, \\ x(0) = 0, x(T) = 1. \end{cases}$$

З першого рівняння $\psi = C_1$, підставляючи в друге і розв'язуючи його знаходимо $x = \frac{C_1 t + C_2}{2\lambda_3}$.

З крайових умов

$$\begin{cases} x(0) = C_2/2\lambda_3 = 0, \\ x(T) = \dfrac{C_1 T + C_2}{2\lambda_3} = 1, \end{cases}$$

знаходимо

$$C_1 = \frac{2\lambda_3}{T}, \quad C_2 = 0.$$

Отже

$$u(t) = \frac{\psi(t)}{2\lambda_3} = \frac{1}{T}.$$

Підставляючи це в умову $\int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s = 1$, знаходимо $1/T = 1$, звідки $T = 1$.

9.3 Домашнє завдання

Задача 9.5. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (u^2(s) + x^2(s))\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(-1) = x(1) = 1.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [-1, 1]$.

Розв'язок.

Задача 9.6. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (u^2(s) + x^2(s))\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = u(t), \quad x(0) = 1, \dot{x}(0) = -2, x(1) = 0, \dot{x}(1) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Розв'язок.

Задача 9.7. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (x(s) + u^2(s))\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + u(t), \quad x(1) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$.

Розв'язок.

Задача 9.8. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \int_{-\pi}^{\pi} x(s)\sin(s)\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u, \quad x(-\pi) = x(\pi) = 0, u(t) \in [-1, 1],$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Розв'язок.