1 Системи керування. Постановка задачі оптимального керування

1.1 Алгоритми розв'язування задач

Задача. Розглянемо лінійну систему керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \tag{1.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазових координат, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор керування, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – матриці з неперервними компонентами, $t \in [t_0, T]$. Задана початкова умова $x(t_0) = x_0$, де $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Керування системою є відомим і розглядається в класі програмних керувань, або керувань з оберненим зв'язком. Необхідно відповісти на такі запитання:

1. визначити клас, до якого належить керування (програмне чи з оберненим зв'язком);

2. знайти траєкторію системи, що відповідає заданому керуванню;

3. якщо керування задане у класі керувань з оберненим зв'язком, то знайти керування у класі програмних керувань, яке відповідає заданому керуванню;

4. визначити, до якого простору функцій належить траєкторія системи (неперервно диференційованих, кусково гладких, абсолютно неперервних);

5. порівняти задане керування з іншим керуванням відносно критерію якості

   $$\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t + \Phi(x(T)) \to \inf. \tag{1.2}$$

   Тут $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$ – неперервні скалярні функції;

6. знайти лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь, одержану з системи (1.1) при підстановці керування $u(x, t) = C(t) \cdot x$, де $C(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – матриця з неперервними компонентами, $t \in [t_0, T]$. Обчислити нормовану за моментом s фундаментальну матрицю знайденої системи,

7. записати спряжену систему до знайденої в попередньому пункті системи. Обчислити нормовану за моментом s фундаментальну матрицю спряженої системи, $s \in [t_0, T]$.

`Алгоритм 1.1.` Розглянемо підходи до розв'язування задачі.

1. Якщо керування має вигляд $u = u(t)$ і не залежить від вектора стану x, то керування є програмним. Інакше, якщо керування має вигляд $u = u(x, t)$, то керування є керуванням з оберненим зв'язком.

2. Для знаходження траєкторії $x(t)$, яка відповідає заданому керуванню u, підставляємо керування u в систему (1.1) і розв'язуємо її, враховуючи початкову умову.

3. У керування $u = u(x, t)$ підставляємо знайдену у попередньому пункті траєкторію $x = x(t)$ і одержуємо програмне керування $u(t) = u(x(t), t)$.

4. Якщо керування неперервне, то траєкторія системи є неперервно диференційованою. Якщо керування є кусково неперервним, то траєкторія системи стає кусково гладкою. Щоб у цьому переконатись, у всіх точках розриву розглядаємо односторонні похідні (зліва і справа) відповідного розв'язку системи і порівнюємо їх.

5. Значення критерію якості (1.2) обчислюється на кожному з керувань і порівнюється.

6. Підставляємо керування $u(x, t) = C(t) \cdot x$ в систему (1.1). Одержуємо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = D(t) \cdot x(t),\ D(t) = A(t) + B(t) \cdot C(t). \tag{1.3}$$

   Фундаментальною матрицею системи (1.3), нормованою за моментом s, називається $n \times n$ -матриця $\Theta(t, s)$, яка є розв'язком матричного рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t, s)}{\mathrm{d}t} = D(t) \cdot \Theta(t, s), \quad \Theta(s, s) = I. \tag{1.4}$$

   Тому для знаходження $\Theta(t, s)$ ми спочатку знаходимо загальний розв'язок системи (1.3). Потім, використовуючи загальний розв'язок, знаходимо n частинних розв'язків $x^{(k)}(t)$ системи (1.3), які відповідають умовам Коші $x(s) = e^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тут $e^{(k)}$ – k-й орт (вектор, який складається з усіх нулів, крім k-го елементу, на місці якого стоїть 1). З (1.4) випливає, що вектори $x^{(k)}(t)$ є стовпчиками матриці $\Theta(t, s)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

7. Спряженою системою до системи (1.3) називається система вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -D^*(t) \cdot y(t), \tag{1.5}$$

де $y = (y_1, \dots, y_n)^*$. Фундаментальна матриця спряженої системи шукається з фундаментальної матриці системи (1.3) за правилом $\Psi(t, s) = \Theta^*(s, t)$.

Задача. Звести задачу керування системою (1.1) з функціоналом Больца вигляду (1.2) до задачі з функціоналом, що залежить лише від кінцевого стану системи (функціонал Майєра).

`Алгоритм 1.2.` Перехід між задачами відбувається у кілька кроків:

1. Вводиться змінна
$$x_{n+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t} f_0(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Тоді
$$\mathcal{J}(u) = x_{n+1}(T) + \Phi(T).$$
Такий критерій якості є функціоналом типу Майєра.

3. До системи (1.2) додається рівняння
$$\frac{\mathrm{d}x_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t} = f_0(x(t), u(t), t).$$
Цим самим збільшується порядок системи на одиницю.

2 Елементи багатозначного аналізу. Множина досяжності

2.1 Алгоритми

Задача. Знайти

1. $A + B$;
2. λA;
3. $\alpha(A, B)$;
4. MA,

де множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$, скаляр $\lambda \in \mathbb{R}^1$, матриця $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

`Алгоритм 2.1.` Розглянемо всі пункти задачі описані вище.

1. Знаходимо за визначенням, $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.
2. Знаходимо за визначенням, $\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}$.
3. (а) Знаходимо відхилення $\beta(A, B)$ і $\beta(B, A)$ за визначенням,

$$\beta(A, B) = \max_{a \in A} \rho(a, B), \tag{2.1}$$

   де

$$\rho(a, B) = \min_{b \in B} \rho(a, b). \tag{2.2}$$

   (б) Знаходимо $\alpha(A, B)$ за визначенням,

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A). \tag{2.3}$$

4. Знаходимо за визначенням, $MA = \{Ma | a \in A\}$.

Задача. Знайти опорну функцію множини $A \subset \mathbb{R}^n$.

`Алгоритм 2.2.`

1. Намагаємося знайти за визначенням,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle. \tag{2.4}$$

2. Якщо не вийшло, то намагаємося знайти за геометричною властивістю: $c(A, \psi)$ – (орієнтована) відстань від початку координат до опорної площини множини A, для якої напрямок-вектор ψ є вектором нормалі.

Задача. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int F(x) \,\mathrm{d}x$, де $F(x) \subset \mathbb{R}^n$.

`Алгоритм 2.3.`

1. Знаходимо опорну функцію від інтегралу:
$$c(\mathcal{J}, \psi) = \int c(F(x), \psi) \,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

2. Знаходимо $\mathcal{J}$ як опуклий компакт з відомою опорною функцією $c(\mathcal{J}, \psi)$.

Задача. Знайти множину досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

`Алгоритм 2.4.`

1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s.

2. Знаходимо інтеграл Аумана
$$\int_{t_0}^{t} \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s) \,\mathrm{d}s \tag{2.6}$$
за алгоритмом 2.3.

3. Використовуємо теорему про вигляд множини досяжності лінійної системи керування:
$$\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = \Theta(t, t_0)\mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s) \,\mathrm{d}s. \tag{2.7}$$

Задача. Знайти опорну функцію множини досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

`Алгоритм 2.5.`

1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s.

2. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi)$ за алгоритмом 2.2.

3. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)$ за алгоритмом 2.2.

4. Використовуємо теорему про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)\, \mathrm{d}s. \quad (2.8)$$

3 Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування

3.1 Алгоритми

Задача. Перевести систему $\dot{x} = Ax + Bu$ з точки x_0 в точку $x_T \in \mathbb{R}^1$ за допомогою керування з класу K (керування, залежні від вектору параметрів c).

`Алгоритм 3.1.` 1. Знаходимо траєкторію системи при заданому керуванні (залежну від параметра c).

2. Знаходимо з отриманого алгебраїчного рівняння параметр c.

Задача. 1. Знайти грамміан керованості системи $\dot{x} = Ax + Bu$ за визначенням.

2. Записати систему диференційних рівнянь для знаходження грамміана керованості.

3. Використовуючи грамміан керованості, знайти інтервал повної керованості системи.

4. Для цього інтервалу записати керування яке певеродить систему з точки x_0 в точку x_T (або розв'язати задачу оптимального керування).

`Алгоритм 3.2.` Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. (а) Знаходимо $\Theta(T, s)$.

   (б) Використовуємо формулу

$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) \, \mathrm{d}s.$$

2. Записуємо систему

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0) \cdot A^*(t) + B(t) \cdot B^*(t), \Phi(t_0, t_0) = 0.$$

3. Це інтервал на якому $\Phi(t, t_0) \neq 0$.

4. Використовуємо формулу

$$u(t) = B^*(t) \cdot \Theta(T, t) \cdot \Phi^{-1}(T, t_0)(x_T - \Theta(T, t_0) \cdot x_0).$$

Задача. Дослідити стаціонарну систему $\dot{x} = Ax + Bu$ на керованість використовуючи другий критерій керованості.

Алгоритм 3.3.

1. Знаходимо $D = \left(B \vdots AB \vdots A^n B \vdots \ldots \vdots A^{n-1} B \right)$.
2. Якщо $rang D = n$ то стаціонарна системи цілком керована, інакше ні.

4 Критерії спостережуваності. Критерій двоїстості

4.1 Алгоритми

Задача. Побудувати систему для знаходження грамміана спостережуваності для системи $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$.

Алгоритм 4.1. Записуємо систему

$$\dot{\mathcal{N}}(t, t_0) = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t).$$

Задача. Чи буде стаціонарна система $\dot{x} = Ax + Bu$ цілком спостережуваною?

Алгоритм 4.2.

1. Знаходимо

$$\mathcal{R} = \left(H^* \vdots A^* H^* \vdots (A^*)^2 H^* \vdots \ldots \vdots (A^*)^{n-1} H^* \right).$$

2. Якщо $rang \mathcal{R} = n$ то система цілком спостережувана інакше ні.

Задача. Дослідити на спостережуваність систему $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$, використовуючи критерій двоїстості і відповідний критерій керованості.

Алгоритм 4.3.

1. Будуємо спряжену систему

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -A^*(t) \cdot z(t) + H^*(t) \cdot u(t).$$

2. Досліджуємо її на керованість, якщо вона керована, то початкова система спостережувана, інакше ні.

Задача. Побудувати спостерігач для системи $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$.

Алгоритм 4.4.

1. Записуємо систему (спостерігач)

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A(t) - K(t)H(t)) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot y(t).$$

2. Або систему (спостерігач)

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot \hat{x}(t)).$$

Вибір вільний, це різні форми запису одного і того ж.

Задача. Задана динамічна система $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використання грамміана спостержуваності.

`Алгоритм 4.5.` 1. `Знаходимо грамміан спостережуваності` $\mathcal{N}(t, t_0)$ `з системи`

$$\dot{\mathcal{N}}(t, t_0) = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t).$$

2. `Знаходимо` $R(t) = \mathcal{N}^{-1}(t, t_0)$.

3. `Розв'язуємо рівняння`

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + R(t) \cdot H^*(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot x(t)).$$

5 Задача фільтрації. Множинний підхід

5.1 Алгоритми

Задача. Задана динамічна система $\dot{x} = Ax + v$, $y = Gx + w$, де $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження.

1. Побудувати інформаційну множину такої системи в момент $\tau \in [0, T]$ за умови, що
$$\int_0^\tau \left(Mv^2(s) + Nw^2(s)\right) \mathrm{d}s + p_0 x^2(0) \le \mu^2.$$

2. Знайти похибку оцінювання.

Алгоритм 5.1. 1. (а) Знайдемо $R(t)$ з рівняння Бернуллі

$$\dot{R}(t) = A(t) \cdot R(t) + R(t) \cdot A^*(t) - R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t) \cdot G(t) \cdot R(t), \quad R(t_0) = p_0^{-1}.$$

(б) Знайдемо $K(t)$ за формулою

$$K(t) = R(t) \cdot G^*(t) \cdot N(t).$$

(в) Знайдемо фільтр (спостерігач) за формулою

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - G(t) \cdot \hat{x}(t)).$$

(г) Знайдемо $k(s)$ з системи

$$\dot{k}(s) = \langle N(s)(y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s)), y(s) - G(s) \cdot \hat{x}(s) \rangle, \quad k(t_0) = 0.$$

(д) Знайдемо $\mathcal{X}(\tau)$ за формулою

$$\mathcal{X}(\tau) = \mathcal{E}(\hat{x}(\tau), (\mu^2 - k(\tau)) \cdot R(\tau)).$$

2. Похибка $e(\tau)$ оцінювання задовольняє оцінці

$$|e(\tau)| \le \sqrt{\mu^2 - k(\tau)} \cdot \sqrt{\lambda_*(R(\tau))}.$$

6 Варіаційний метод в задачі оптимального керування

6.1 Алгоритми

Задача. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для функціоналу $\mathcal{J} = \int f(u) \, \mathrm{d}s$.

`Алгоритм 6.1.`

1. Записуємо $\mathcal{J}(u + \alpha h)$.
2. Знаходимо $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathcal{J}(u + \alpha h)$.
3. Знаходимо першу варіацію $\delta\mathcal{J}(u, h)$ за Лагранжем за формулою
$$\delta\mathcal{J}(u,h) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \left. \mathcal{J}(u + \alpha h)\right|_{\alpha=0}.$$
4. Якщо
$$\delta\mathcal{J}(u,h) = \int h(s) \cdot g(s) \, \mathrm{d}s,$$
то $g(s)$ - похідна за Фреше.

Задача. Побудувати рівняння у варіаціях для системи керування $\dot{x} = Ax + Bu$.

`Алгоритм 6.2.` Рівняння у варіаціях має загальний вигляд

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot z(t) + \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial u} \cdot h(t), \quad z(0) = 0.$$

Задача. Знайти першу варіацію за Лагранжем і похідну Фреше в просторі інтегрованих з квадратом функцій для задачи оптимального керування варіаційним методом
$$\mathcal{J} = \int f \, \mathrm{d}s + \Phi(T) \to \inf$$
за умови, що
$$\dot{x} = f_0(x, u),$$
і розв'язати цю задачу.

`Алгоритм 6.3.`

1. Позначимо $\varphi(\alpha) = \mathcal{J}(u + \alpha h)$.
2. Знайдемо $\varphi'(\alpha)$.

3. Підставляючи $\alpha = 0$, знаходимо
$$\varphi'(0) = \int \ldots \,\mathrm{d}s + \underbrace{\Phi_1(T)}_{=-\psi(T)} \cdot z(T).$$
4. Запишемо рівняння у варіаціях на функцію $z(t)$.
5. Введемо додаткові, спряжені змінні ψ такі, що
$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}.$$
6. Тоді
$$\left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle = -\langle \psi(T), z(T) \rangle.$$
7. Враховуючи рівняння у варіаціях, маємо
$$\psi(T) \cdot z(T) = \psi(T) \cdot z(T) - \psi(t_0) \cdot z(t_0) = \\ = \int_{t_0}^{T} (\psi(s) \cdot z'(s) + \psi'(s) \cdot z(s)) \,\mathrm{d}s = \ldots$$
8. Підставимо це у вигляд $\varphi'(0)$:
$$\varphi'(0) = -\int (\psi' + \ldots) \cdot z \,\mathrm{d}s + \int (\ldots) \cdot h(s)) \,\mathrm{d}s.$$
9. Накладаємо на функцію $\psi(t)$ умову (спряжену систему)
$$\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot \psi(t) + \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} = 0,$$
10. Завдяки цьому у $\delta \mathcal{J}(u, h) = \varphi'(0)$ перший інтеграл зануляється.

11. Знаходимо $\mathcal{J}'(u)$
12. З необхідної умову екстремуму функціоналу, $\mathcal{J}'(u_*) = 0$, знаходимо u_*.
13. Далі
$$x_*(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s), u_*(s), s) \,\mathrm{d}s.$$
14. Покладаючи $t = T$ знаходимо $x(T)$.
15. Остаточно знаходимо u_*, x_*.

7 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільним правим кінцем

7.1 Алгоритми

Задача. Записати крайову задачу принципу максимуму для задачі оптимального керування:

$$\mathcal{J} = \int f \, \mathrm{d}s + \Phi(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = f_0.$$

Розв'язати задачу оптимального керування.

Алгоритм 7.1.

1. Записуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle.$$

2. Записуємо спряжену систему:

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H}, \quad \psi(T) = -\nabla \Phi(x(T)).$$

3. Знаходимо $u(\psi)$ з умови оптимальності:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial u} = 0.$$

4. Підставляємо знайдене керування у початкову систему, отримали крайову задачу, систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

5. Розв'язуємо крайову задачу і знаходимо x.

6. Відновлюємо $u = u(\psi)$ за знайденим ψ.

8 Принцип максимуму Понтрягіна: загальний випадок

8.1 Алгоритми

Задача. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \, \mathrm{d}s + \Phi_0 \to \inf$$

за умов, що

$$\dot{x} = f,$$

а також

$$\int f_i \, \mathrm{d}s + \Phi_i = 0, \quad i = \overline{1..k}.$$

Алгоритм 8.1.

1. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle.$$

2. Запишемо термінант:

$$F = \sum_i \lambda_i f_i, \quad \ell = \sum_i \lambda_i \Phi_i.$$

3. Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

   (а) оптимальність:

   $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0;$$

   (б) стаціонарність (спряжена система):

   $$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H};$$

   (в) трансверсальність:

   $$\psi(t_0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T};$$

   (г) стаціонарність за кінцями: відсутня, бо час фіксований;

   (д) доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу;

(е) невід'ємність: $\lambda_i \geq 0$.

4. Методом від супротивного показуємо, що $\lambda_i \neq 0$.

5. З умов принципу максимуму визначаємо $u = u(\psi)$.

6. Записуємо крайову задачу - систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

7. Знаходимо її розв'язок x_*.

8. Відновлюємо $u_* = u_*(\psi)$.

Задача. Розв'язати задачу оптимальної швидкодії за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \,\mathrm{d}s + \Phi_0 \to \inf$$

за умов, що

$$\dot{x} = f,$$

а також

$$\int f_i \,\mathrm{d}s + \Phi_i = 0, \quad i = \overline{1..k}.$$

Алгоритм 8.2. 1. Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна:

$$\mathcal{H} = -F + \langle \psi, f \rangle.$$

2. Запишемо термінант:

$$F = \sum_i \lambda_i f_i, \quad \ell = \sum_i \lambda_i \Phi_i.$$

3. Випишемо тепер всі (необхідні) умови принципу максимуму:

(а) оптимальність:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0;$$

(б) стаціонарність (спряжена система):

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H};$$

(в) трансверсальність:

$$\psi(t_0) = \frac{\partial \ell}{\partial x_0}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \ell}{\partial x_T};$$

(г) стаціонарність за кінцями:

$$\mathcal{H}(T) = \frac{\partial \ell}{\partial T};$$

(д) доповнююча нежорсткість: відсутня, бо немає інтегральних обмежень виду нерівність на задачу;

(е) невід'ємність: $\lambda_i \geq 0$.

4. Методом від супротивного показуємо, що $\lambda_i \neq 0$.

5. З умов принципу максимуму визначаємо $u = u(\psi)$.

6. Записуємо крайову задачу - систему диференціальних рівнянь на x і ψ з граничними умовами.

7. З умов принципу максимуму і крайової задачі визначаємо T.

8. Знаходимо розв'язок крайової задачі x_*.

9. Відновлюємо $u_* = u_*(\psi)$.

9 Дискретний варіант методу динамічного програмування

9.1 Алгоритми

Задача. Розглядається задача оптимального керування

$$\mathcal{J}(u,x) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x(k),u(k)) + \Phi(x(N)) \to \min$$

при умовах

$$x(k+1) = f_k(x(k),u(k)), \quad k = 0,1,\ldots,N-1,$$

$$x(k) \in \mathcal{X}_k, \quad k = 0,1,\ldots,N,$$

$$u(k) \in \mathcal{U}_k, \quad k = 0,1,\ldots,N-1.$$

Знайти оптимальне керування, оптимальну траєкторію, функцію Белмана і оптимальне значення критерію якості.

`Алгоритм 9.1.` 1. $\mathcal{B}_N(z) = \Phi(z)$.

2. Для $s = \overline{N-1..0}$ записуємо і розв'язуємо дискретне рівняння Белмана:

$$\mathcal{B}_s(z) = \min_{u\in\mathcal{U}_s}(g_s(z,u) + \mathcal{B}_{s+1}(f_s(z,u)))$$

   для всіх $z \in \mathcal{X}_s$, запам'ятовуючи $\{u_*(s)\}$.

3. Знаходимо $x_*(0)$ як
$$x_*(0) = \arg\min_{z\in\mathcal{X}_0} \mathcal{B}_0(z).$$

4. Знаходимо $\mathcal{J}_*$ як $\mathcal{J}_* = \mathcal{B}_0(x_*(0))$.

5. Для $s = \overline{0..N-1}$ відновлюємо $x_*(s+1)$ за відомим керуванням:

$$x_*(s+1) = f_s(x_*(s),u_*(s)).$$

10 Метод динамічного програмування

10.1 Алгоритми

Задача. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J} = \int f_0 \, \mathrm{d}s + \Phi(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = f.$$

Алгоритм 10.1. 1. Відрізок $[t_0, T]$ розбивається сіткою $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ з деяким кроком h.

2. Позначаємо $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}(t_i)$, $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

3. $\mathcal{B}_N(z) = \Phi(z)$.

4. Для $s = \overline{N-1..0}$ записуємо і розв'язуємо рівняння Белмана:

$$\mathcal{B}_s(z) = \inf_{u \in \mathcal{U}_s} \left(\int_{t_s}^{t_{s+1}} f_0(x(\tau, u(\tau), \tau) \, \mathrm{d}\tau + \right.$$
$$\left. + \mathcal{B}_{s+1} \left(z + \int_{t_s}^{t_{s+1}} f(x(\tau), u(\tau), \tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \right)$$

для всіх $z \in \mathcal{X}_s$, запам'ятовуючи $\{u_*(s)\}$.

Розв'язуємо ми його через рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана,

$$\dot{\mathcal{B}}(z) + \inf_u (\langle \nabla_z \mathcal{B}(z), f \rangle + f_0(z)) = 0.$$

5. Знаходимо $x_*(t_0)$ як

$$x_*(t_0) = \arg\min_{z \in \mathcal{X}_0} \mathcal{B}_0(z).$$

6. Знаходимо $\mathcal{J}_*$ як $\mathcal{J}_* = \mathcal{B}_0(x_*(t_0))$.

7. Для $s = \overline{0..N-1}$ відновлюємо $x_*(t_{s+1})$ за відомим керуванням:

$$x_*(t_{s+1}) = x_*(t_s) + \int_{t_s}^{t_{s+1}} f(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) \, \mathrm{d}\tau.$$