2 Елементи багатозначного аналізу. Множина досяжності

2.1 Алгоритми

Задача. Знайти

1. $A + B$;
2. λA;
3. $\alpha(A, B)$;
4. MA,

де множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$, скаляр $\lambda \in \mathbb{R}^1$, матриця $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

Алгоритм 2.1. Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. Знаходимо за визначенням, $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.
2. Знаходимо за визначенням, $\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}$.
3. (а) Знаходимо відхилення $\beta(A, B)$ і $\beta(B, A)$ за визначенням,

$$\beta(A, B) = \max_{a\in A} \rho(a, B), \tag{2.1}$$

   де

$$\rho(a, B) = \min_{b\in B} \rho(a, b). \tag{2.2}$$

   (б) Знаходимо $\alpha(A, B)$ за визначенням,

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A). \tag{2.3}$$

4. Знаходимо за визначенням, $MA = \{Ma | a \in A\}$.

Задача. Знайти опорну функцію множини $A \subset \mathbb{R}^n$.

Алгоритм 2.2. 1. Намагаємося знайти за визначенням,

$$c(A, \psi) = \max_{a\in A} \langle a, \psi\rangle. \tag{2.4}$$

2. Якщо не вийшло, то намагаємося знайти за геометричною властивістю: $c(A, \psi)$ – (орієнтована) відстань від початку координат до опорної площини множини A, для якої напрямок-вектор ψ є вектором нормалі.

Задача. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int F(x)\,\mathrm{d}x$, де $F(x) \subset \mathbb{R}^n$.

Алгоритм 2.3. 1. Знаходимо опорну функцію від інтегралу:

$$c(\mathcal{J}, \psi) = \int c(F(x), \psi)\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

2. Знаходимо $\mathcal{J}$ як опуклий компакт з відомою опорною функцією $c(\mathcal{J}, \psi)$.

Задача. Знайти множину досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

Алгоритм 2.4. 1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s.

2. Знаходимо інтеграл Аумана

$$\int_{t_0}^{t} \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.6}$$

за алгоритмом 2.3.

3. Використовуємо теорему про вигляд множини досяжності лінійної системи керування:

$$\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = \Theta(t, t_0)\mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.7}$$

Задача. Знайти опорну функцію множини досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

Алгоритм 2.5. 1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s.

2. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi)$ за алгоритмом 2.2.

3. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)$ за алгоритмом 2.2.

4. Використовуємо теорему про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)\, \mathrm{d}s. \tag{2.8}$$

2.2 Аудиторне заняття

Задача 2.1. Знайти $A + B$ і λA, а також метрику Хаусдорфа $\alpha(A, B)$, якщо:

1. $A = \{-3, 2, -1\}, B = \{-2, 5, 1\}, \lambda = 3;$
2. $A = \{4, 2, -4\}, B = [-2, 3], \lambda = -1;$
3. $A = [-1, 2], B = [3, 7], \lambda = -2;$

Розв'язок. Скористаємося пунктами 1-3 алгоритму 2.1:

1.

$$\begin{aligned} A + B = \{&-3 - 2, -3 + 5, -3 + 1, 2 - 2, 2 + 5, 2 + 1, -1 - 2, -1 + 5, -1 + 1\} = \\ &= \{-5, 2, -2, 0, 7, 3, -3, 4, 0\} = \{-5, -3 - 2, 0, 2, 3, 4, 7\}, \end{aligned}$$

$$\lambda A = \{3 \cdot -3, 3 \cdot 2, 3 \cdot -1\} = \{-9, 6, -3\} = \{-9, -3, 6\}.$$

У нашому випадку

$$\begin{aligned} \beta(A, B) &= \max\left\{\min_{b \in B} \rho(-3, b), \min_{b \in B} \rho(2, b), \min_{b \in B} \rho(-1, b)\right\} = \\ &= \max\{1, 1, 1\} = 1, \\ \beta(B, A) &= \max\left\{\min_{a \in A} \rho(-2, a), \min_{a \in A} \rho(5, a), \min_{a \in A} \rho(1, a)\right\} = \\ &= \max\{1, 3, 1\} = 3, \end{aligned}$$

тому $\alpha(A, B) = \max\{1, 3\} = 3$.

2. $A+B=[-6,7]$, $\lambda A=\{-4,-2,4\}$.

   $\beta(A,B)=\max\{1,0,2\}$, $\beta(B,A)=\max[0,3]$, тому $\alpha(A,B)=3$.

3. $A+B=[2,9]$, $\lambda A=[-4,2]$.

   $\beta(A,B)=\max[1,4]$, $\beta(B,A)=\max[1,5]$, оскільки відповідні краї відхиляються на 4 та 5 відповідно (-1 від 3 та 7 від 2), тому $\alpha(A,B)=5$.

Задача 2.2. Знайти MA, якщо

$$M=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}, A=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}\right\}.$$

Розв'язок. Скористаємося пунктом 4 алгоритму 2.1:

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 7\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22\\ -11\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\ -10\end{pmatrix}.$$

Отже, отримаємо

$$MA=\left\{\begin{pmatrix}10\\ 7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-22\\ -11\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\ -10\end{pmatrix}\right\}.$$

Задача 2.3. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A=[0,r]$;
2. $A=[-r,r]$;
3. $A=\{(x_1,x_2):|x_1|\leq 1, |x_2|\leq 2\}$;
4. $A=\mathcal{K}_r(0)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\leq r\}$;
5. $A=\mathcal{S}^n=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$.

Розв'язок. У пунктах 1-3 скористаємося пунктом 1 алгоритму 2.2, а у пунктах 4-5 – пунктом 2 того ж алгоритму.

1. За означенням опорної функції,

$$c(A,\psi) = \max_{a\in A}\langle a,\psi\rangle = \begin{cases} 0, & \psi < 0 \\ r\psi, & 0 \le \psi \end{cases} = \max\{0, r\psi\}.$$

2. За означенням опорної функції,

$$c(A,\psi) = \max_{a\in A}\langle a,\psi\rangle = \begin{cases} -r\psi, & \psi < 0 \\ r\psi, & 0 \le \psi \end{cases} = r|\psi|.$$

3. За означенням опорної функції,

$$c(A,\psi) = \max_{a\in A}\langle a,\psi\rangle = \max_{a\in A}(\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2) = |\psi_1| + 2|\psi_2|.$$

4. За властивістю опорної функції, $c(\mathcal{K}_r(0),\psi) = r\|\psi\|$.

5. За властивістю опорної функції, $c(\mathcal{S}^n,\psi) = \|\psi\|$.

Задача 2.4. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0,x]$, $x\in[0,1]$;

2. $F(x) = \mathcal{K}_x(0) = \{y\in\mathbb{R}^n : \|y\| \le x\}$, $x\in[0,1]$.

Розв'язок. Скористаємося алгоритмом 2.3:

1. $$c(\mathcal{J}) = \int_0^1 c([0,x],\psi)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \psi/2, & 0 \le \psi \\ 0, & \psi < 0 \end{cases}.$$

   Далі знання опорних функцій підказують, що $\mathcal{J} = [0, 1/2]$.

2. $$c(\mathcal{J}) = \int_0^1 c(\mathcal{K}_x(0),\psi)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\|\psi\|\,\mathrm{d}x = \|\psi\|/2.$$

   Далі знання опорних функцій підказують, що $\mathcal{J} = \mathcal{K}_{1/2}(0)$.

Задача 2.5. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + u,$$

де $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$, $u(t)\in\mathcal{U}$, $t\ge 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \le 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \le 1\}.$$

Розв'язок. Скористаємося алгоритмом 2.4.

Перш за все знаходимо $\Theta(t,s)$. Нескладно бачити, що $\Theta(t,s) = e^{t-s}$.

Далі
$$\mathcal{X}(t,\mathcal{M}_0) = \Theta(t,t_0)\mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t,s)B(s)\mathcal{U}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Підставимо вже відомі значення:
$$\begin{aligned}\mathcal{X}(t,[-1,1]) &= \Theta(t,0)\cdot[-1,1] + \int_0^t (\Theta(t,s)\cdot 1\cdot[-1,1])\,\mathrm{d}s = \\ &= [-e^t, e^t] + \int_0^t [-e^{t-s}, e^{t-s}]\,\mathrm{d}s = \\ &= [-e^t, e^t] + [1-e^t, e^t-1] = [1-2e^t, 2e^t-1].\end{aligned}$$

Задача 2.6. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 2x_1 + x_2 + u_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 3x_1 + 4x_2 + u_2,\end{cases}$$
де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{M}_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,
$$\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : |x_{01}| \leq 1, |x_{02}| \leq 1\},$$
$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}.$$

Розв'язок. Скористаємося алгоритмом 2.5.

Перш за все знаходимо $\Theta(t,s)$ з системи
$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t,s)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot\Theta(t,s) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Theta(t,s).$$

Нескладно бачити, що
$$\Theta(t,s) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3e^{t-s} + e^{5(t-s)} & -e^{t-s} + e^{5(t-s)} \\ -3e^{t-s} + 3e^{5(t-s)} & e^{t-s} + 3e^{5(t-s)}\end{pmatrix}$$

Скористаємося теоремою про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:
$$c(\mathcal{X}(t,\mathcal{M}_0),\psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t,t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t,s)\psi)\,\mathrm{d}s.$$

Підставимо вже відомі значення:

$$c(\mathcal{X}(t,[-1,1]^2),\psi) = c([-1,1]^2, \Theta^*(t,0)\psi) + \int_0^t c([-1,1]^2, \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \Theta^*(t,s)\psi)\,\mathrm{d}s,$$

і підставляємо Θ:

$$c\left(\mathcal{X}(t,[-1,1]^2), \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right) = c\left([-1,1]^2, \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3e^t+e^{5t} & -3e^t+3e^{5t}\\ -e^t+e^{5t} & e^t+3e^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right) +$$
$$+\int_0^t c\left([-1,1]^2, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3e^{t-s}+e^{5(t-s)} & -3e^{t-s}+3e^{5(t-s)}\\ -e^{t-s}+e^{5(t-s)} & e^{t-s}+3e^{5(t-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}s =$$
$$= c\left([-1,1]^2, \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(3e^t+e^{5t})\psi_1+(-3e^t+3e^{5t})\psi_2\\ (-e^t+e^{5t})\psi_1+(e^t+3e^{5t})\psi_2\end{pmatrix}\right) +$$
$$+\int_0^t c\left([-1,1]^2, \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(3e^{t-s}+e^{5(t-s)})\psi_1+(-3e^{t-s}+3e^{5(t-s)})\psi_2\\ (-e^{t-s}+e^{5(t-s)})\psi_1+(e^{t-s}+3e^{5(t-s)})\psi_2\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\left|(3e^t+e^{5t})\psi_1+(-3e^t+3e^{5t})\psi_2\right| + \left|(-e^t+e^{5t})\psi_1+(e^t+3e^{5t})\psi_2\right|\right) +$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^t \left|(3e^{t-s}+e^{5(t-s)})\psi_1+(-3e^{t-s}+3e^{5(t-s)})\psi_2\right|\mathrm{d}s +$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^t \left|(-e^{t-s}+e^{5(t-s)})\psi_1+(e^{t-s}+3e^{5(t-s)})\psi_2\right|\mathrm{d}s.$$

2.3 Домашнє завдання

Задача 2.7. Знайти $A+B$ і λA, а також метрику Хаусдорфа $\alpha(A,B)$, якщо

1. $A=\{4,-2,3\}$, $B=\{7,-1,1\}$, $\lambda=2$;
2. $A=\{5,-5,2\}$, $B=[1,3]$, $\lambda=-1$;
3. $A=[-4,-2]$, $B=[-1,5]$, $\lambda=3$;

Задача 2.8. Знайти MA, якщо

$$M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}, A=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\ -2\end{pmatrix}\right\}.$$

Задача 2.9. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A=\{-1,1\}$;
2. $A=\{(x_1,x_2,x_3): |x_1|\le 2, |x_2|\le 4, |x_3|\le 1\}$;

3. $A = \{a\}$;

4. $A = \mathcal{K}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$.

Задача 2.10. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int_0^{\pi/2} F(x)dx$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, \sin x]$, $x \in [0, \pi/2]$.

2. $F(x) = [-\sin x, \sin x]$, $x \in [0, \pi/2]$.

3. $F(x) = \mathcal{K}_{\sin x}(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq \sin x\}$, $x \in [0, \pi/2]$.

Задача 2.11. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + bu,$$

де $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$, b – деяке ненульове число,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \leq 2\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 3\}.$$

Задача 2.12. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2u_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 + u_2, \end{cases}$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{M}_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : x_{01}^2 + x_{02}^2 \leq 4\},$$
$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}.$$