3 Задача про переведення системи з точки в точку. Критерії керованості лінійної системи керування

3.1 Алгоритми

Задача. Перевести систему $\dot{x} = Ax + Bu$ з точки x_0 в точку $x_T \in \mathbb{R}^1$ за допомогою керування з класу K (керування, залежні від вектору параметрів c).

Алгоритм 3.1.
1. Знаходимо траєкторію системи при заданому керуванні (залежну від параметра c).
2. Знаходимо з отриманого алгебраїчного рівняння параметр c.

Задача.
1. Знайти грамміан керованості системи $\dot{x} = Ax + Bu$ за визначенням.
2. Записати систему диференційних рівнянь для знаходження грамміана керованості.
3. Використовуючи грамміан керованості, знайти інтервал повної керованості системи.
4. Для цього інтервалу записати керування яке пеаеродить систему з точки x_0 в точку x_T (або розв'язати задачу оптимального керування).

Алгоритм 3.2. Розглянемо всі пункти задачі вище.

1. (а) Знаходимо $\Theta(T, s)$.

   (б) Використовуємо формулу

$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} \Theta(T, s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T, s)\,\mathrm{d}s.$$

2. Записуємо систему

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t) \cdot \Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0) \cdot A^*(t) + B(t) \cdot B^*(t), \Phi(t_0, t_0) = 0.$$

3. Це інтервал на якому $\Phi(t, t_0) \neq 0$.

4. Використовуємо формулу

$$u(t) = B^*(t) \cdot \Theta(T,t) \cdot \Phi^{-1}(T,t_0)(x_T - \Theta(T,t_0) \cdot x_0).$$

Задача. Дослідити стаціонарну систему $\dot{x} = Ax + Bu$ на керованість використовуючи другий критерій керованості.

Алгоритм 3.3. 1. Знаходимо $D = \left(B \vdots AB \vdots A^n B \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B \right)$.

2. Якщо $rangD = n$ то стаціонарна системи цілком керована, інакше ні.

3.2 Задачі із розв'язками

Задача 3.1. Перевести систему

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad t \in [0,T],$$

з точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = y_0$ за допомогою керування з класу:

1. постійних функцій $u(t) = c$, c – константа;

2. кусково-постійних функцій

$$u(t) = \begin{cases} c_1, & t \in [0,t_1], \\ c_2, & t \in [t_1,T]. \end{cases}$$

   Тут c_1, c_2 – константи, $c_1 \neq c_2$, $0 < t_1 < T$;

3. програмних керувань $u(t) = ct$, c – константа;

4. керувань з оберненим зв'язком $u(x) = cx$, c – константа.

Розв'язок. Скористаємося формулою $x(T) = x(0) + \int_0^T \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$:

1. $$x(T) = x(0) + \int_0^T c\,\mathrm{d}t = x(0) + cT,$$

   звідки

$$c = \frac{x(T) - x(0)}{T} = \frac{y_0 - x_0}{T};$$

2.

$$x(T) = x(0) + \int_0^{t_1} c_1 \,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{T} c_2 \,\mathrm{d}t = x(0) + c_1 t_1 + c_2 (T - t_1).$$

Розв'язок не єдиний,

$$c_2 = \frac{x(T) - x(0) - c_1 t_1}{T - t_1},$$

де c_1 – довільна стала, наприклад $c_1 = 0$, тоді

$$c_2 = \frac{x(T) - x(0)}{T - t_1} = \frac{y_0 - x_0}{T - t_1}.$$

3.

$$x(T) = x(0) + \int_0^{T} ct \,\mathrm{d}t = x(0) + \frac{cT^2}{2},$$

звідки

$$c = \frac{2(x(T) - x(0))}{T^2} = \frac{2(y_0 - x_0)}{T^2}.$$

4. У цьому випадку проінтегрувати не можна, бо u залежить від x, тому просто запишемо за формулою Коші

$$x(T) = x(0) \cdot e^{cT},$$

звідки

$$c = \frac{\ln(x(T)/x(0))}{T} = \frac{\ln(y_0) - \ln(x_0)}{T}.$$

Варто зауважити, не для всіх пар x_0 і y_0 коректно визначається значення c. А саме, необхідно щоб y_0 було того ж знаку, що і x_0.

Задача 3.2. 1. Використовуючи означення, знайти грамміан керованості для системи керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = tx(t) + \cos(t) \cdot u(t), \quad t \geq 0.$$

2. Записати диференціальне рівняння для грамміана керованості і за його допомогою знайти грамміан керованості.

3. Використовуючи критерій керованості, вказати інтервал повної керованості вказаної системи керування. Для цього інтервала записати керування, яке розв'язує задачу про переведення системи з точки x_0 у стан x_T.

Розв'язок. 1. Скористаємося формулою

$$\Phi(T,t_0)=\int_{t_0}^{T}\Theta(T,s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T,s)\,\mathrm{d}s.$$

$\Theta(T,s)$ знаходимо з системи

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t,s)}{\mathrm{d}t}=A(t)\cdot\Theta(t,s)=t\cdot\Theta(t,s),$$

а саме $\Theta(t,s)=\exp\left\{\frac{t^2-s^2}{2}\right\}$. Підставляючи всі знайдені значення, отримаємо

$$\Phi(T,t_0)=\cos^2(T)\cdot e^{T^2}\int_{t_0}^{T}e^{-s^2}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\cos^2(T)\cdot e^{T^2}\cdot\mathrm{erf}(T).$$

2. Запишемо систему

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t,t_0)}{\mathrm{d}t}=A(t)\cdot\Phi(t,t_0)+\Phi(t,t_0)\cdot A^*(t)+B(t)\cdot B^*(t),\quad \Phi(t_0,t_0)=0.$$

І підставимо відомі значення:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t,0)}{\mathrm{d}t}=2t\Phi(t,0)+\cos^2(t),\quad \Phi(0,0)=0.$$

Звідси

$$\Phi(t,0)=\frac{1}{8}\sqrt{\pi}e^{t^2-1}(-2e\,\mathrm{erf}(t)+i(\mathrm{erfi}(1+it)-i\,\mathrm{erfi}(1-it)),$$

а

$$\Phi(T,0)=\frac{1}{8}\sqrt{\pi}e^{T^2-1}(-2e\,\mathrm{erf}(T)+i(\mathrm{erfi}(1+iT)-i\,\mathrm{erfi}(1-iT)),$$

3. З вигляду грамміану керованості отриманого у першому пункті очевидно, що система цілком керована на півінтервалі $[0,\pi/2)$, зокрема на інтервалі $[0,1]$.

Підставимо тепер граміан у формулу для керування що розв'язує задачу про переведення системи із стану x_0 у стан x_T:

$$\begin{aligned}u(t)&=B^*(t)\Theta^*(T,t)\Phi^{-1}(T,t_0)(x_T-\Theta(T,t_0)x_0)=\\&=\cos(t)\cdot\exp\left\{\frac{T^2-t^2}{2}\right\}\Phi^{-1}(T,0)\left(x_T-\exp\left\{\frac{T^2}{2}\right\}x_0\right)\end{aligned}$$

Задача 3.3. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s$$

за умов, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sin(t) \cdot x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, x(T) = x_T.$$

Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, x_0, X_T – задані точки, $t \in [t_0, T]$.

Розв'язок. Знайдемо шукане керування за формулою

$$u(t) = B^*(t)\Theta^*(T,t)\Phi^{-1}(T,t_0)(x_T - \Theta(T,t_0)x_0).$$

У цій задачі $\Theta(t,s) = e^{\cos(s)-\cos(t)}$, знайдене з системи $\dot{\Theta} = A\Theta$, $\Phi(T,t_0) = e^{-2\cos(T)} \int_0^T e^{2\cos(s)}\,\mathrm{d}s$, підставляючи знаходимо

$$u(t) = \frac{e^{\cos(t)+\cos(T)} \cdot (x_T - e^{1-\cos(T)}x_0)}{\int_0^T e^{2\cos(s)}\,\mathrm{d}s}.$$

Задача 3.4. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)dx$$

за умов, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = u(t),$$
$$x(0) = x_0, x'(0) = y_0, x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут x – стан системми, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0,T]$.

Розв'язок. Почнемо з того що зведемо рівняння другого порядку до системи рівнянь заміною $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}_1$, тоді маємо систему

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t).$$

Знайдемо власні числа матриці $A - \lambda E$: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -6 & 5-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$, звідки $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Знайдемо власні вектори, вони будуть $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ відповідно. Звідси знаходимо загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}(t) = c_1\begin{pmatrix}e^{2t}\\2e^{2t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}e^{3t}\\3e^{3t}\end{pmatrix}.$$

З рівняння

$$c_1\begin{pmatrix}e^{2s}\\2e^{2s}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}e^{3s}\\3e^{3s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

знаходимо $c_1 = 3e^{-2s}$, $c_2 = -2e^{-3s}$, а з рівняння

$$c_1\begin{pmatrix}e^{2s}\\2e^{2s}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}e^{3s}\\3e^{3s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

знаходимо $c_1 = -e^{-2s}$, $c_2 = e^{-3s}$, тобто

$$\Theta(t,s) = \begin{pmatrix}3e^{2(t-s)} - 2e^{3(t-s)} & -e^{2(t-s)} + e^{3(t-s)}\\ 6e^{2(t-s)} - 6e^{3(t-s)} & -2e^{2(t-s)} + 3e^{3(t-s)}\end{pmatrix}.$$

Знайдемо граммiан за формулою

$$\Phi(T,0) = \int_0^T \Theta(T,s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T,s)ds.$$

$$\Theta(T,s)B(s) = \begin{pmatrix}-e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)}\\ -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)}\end{pmatrix}.$$

$$B^*(s)\Theta^*(T,s) = (\Theta(T,s)B(s))^\star = \begin{pmatrix}-e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} & -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\Phi(T,0) &= \int_0^T \begin{pmatrix}-e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)}\\ -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-e^{2(T-s)} + e^{3(T-s)} & -2e^{2(T-s)} + 3e^{3(T-s)}\end{pmatrix} ds =\\ &= \int_0^T \begin{pmatrix}e^{4(T-s)} - 2e^{5(T-s)} + e^{6(T-s)} & 2e^{4(T-s)} - 5e^{5(T-s)} + 3e^{6(T-s)}\\ 2e^{4(T-s)} - 5e^{5(T-s)} + 3e^{6(T-s)} & 4e^{4(T-s)} - 12e^{5(T-s)} + 9e^{6(T-s)}\end{pmatrix} ds =\\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{e^{4T}-1}{4} - \dfrac{2(e^{5T}-1)}{5} + \dfrac{e^{6T}-1}{6} & \dfrac{e^{4T}-1}{2} - (e^{5T}-1) + \dfrac{e^{6T}-1}{2}\\[2ex] \dfrac{e^{4T}-1}{2} - (e^{5T}-1) + \dfrac{e^{6T}-1}{2} & (e^{4T}-1) - \dfrac{12(e^{5T}-1)}{5} + \dfrac{3(e^{6T}-1)}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Обчислення визначника граммiану є громiздкою обчислювальною задачею, ми залишаємо її як вправу для читача.

Задача 3.5. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

1. $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = tx_1(t) + x_2(t) + u_1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + 2x_2(t) + t^2 u_2(t). \end{cases}$$

   Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор стану, $u = (u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $t \in [0, T]$.

2. $$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \sin(t) \cdot x(t) = u(t).$$

   Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Розв'язок. 1. $A = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{11} = 2t\phi_{11} + 2\phi_{12} + 1, \\ \dot{\phi}_{12} = -\phi_{11} + (t+2)\phi_{12} + \phi_{22}, \\ \dot{\phi}_{21} = \ldots \end{cases}$$

2. Введемо нову змінну $x_2 = \dot{x}$, тоді $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sin(t) & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{11} = 2\phi_{12}, \\ \dot{\phi}_{12} = (1 - \sin(t))\phi_{11}, \\ \ldots \end{cases}$$

Задача 3.6. Дослідити системи на керованість використовуючи другий критерій керованості:

1. $$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u;$$

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + au \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 + u \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + u_2 \end{cases}$$

Розв'язок. 1. Почнемо з того що зведемо рівняння другого порядку до системи рівнянь заміною $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}_1$, тоді маємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_2 - bx_1 + u \end{cases}$$

Тоді
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Її ранг дорівнює 2 якщо за будь-яких a і b, тобто система завжди цілком керована.

2.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$$
$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+1 \\ 1 & a+4 \end{pmatrix}.$$

Її визначник $a^2 + 4a - 2a - 1 = a^2 + 2a - 1 = 0$ якщо $a = -1 \pm \sqrt{2}$, тоді система не є цілком керованою, а інакше є.

3.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
$$D = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Її ранг дорівнює 3, тобто система цілком керована.

Задача 3.7. Перевести систему
$$\frac{dx}{dt} = 2tx + u, t \in [0, T],$$
з точки $x(0) = x_0$ в точку $x(T) = y_0$ за допомогою керування з класу:

1. постійних функцій $u(t) = c$, c – константа;

2. кусково-постійних функцій

$$u(t) = \begin{cases} c_1 & t \in [0, t_1), \\ c_2 & t \in (t_1, T]. \end{cases}$$

   Тут c_1, c_2 – константи, $c_1 \neq c_2$, $0 < t_1 < T$;

3. програмних керувань $u(t) = ct$, c – константа;

4. керувань з оберненим зв'язок $u(x) = cx$, c – константа.

Розв'язок. Будемо просто підставляти керування у диференційне рівняння і розв'язувати його:

1. Зводимо до канонічного вигляду лінійного рівняння:

$$\frac{dx}{dt} - 2t \cdot x(t) = c.$$

   Домножаємо на множник що інтегрує:

$$\exp\{-t^2\} \cdot \frac{dx}{dt} - 2t \cdot \exp\{-t^2\} \cdot x(t) = c \cdot \exp\{-t^2\}$$

$$\exp\{-t^2\} \cdot \frac{dx}{dt} + x(t) \cdot \frac{d\exp\{-t^2\}}{dt} = c \cdot \exp\{-t^2\}.$$

   Згортаємо похідну добутку:

$$\frac{d(\exp\{-t^2\} \cdot x(t))}{dt} = c \cdot \exp\{-t^2\}.$$

   Інтегруємо:

$$\left(\exp\{-t^2\} \cdot x(t)\right)\Big|_0^T = \int_0^T c \cdot \exp\{-t^2\} dt$$

$$\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - x_0 = c \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \operatorname{erf}(T),$$

   і виражаємо звідси c:

$$c = 2 \cdot \frac{\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - x_0}{\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(T)},$$

де erf позначає функцію помилок, тобто $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x \exp\{-t^2\} dt$.

Зауважимо, що задача має розв'язок завжди.

2. Нескладно зрозуміти, що нас задовольнить довільне керування вигляду
$$c_2 = 2 \cdot \frac{\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - \exp\{-t_1^2\} \cdot x_1}{\sqrt{\pi} \cdot (\operatorname{erf}(T) - \operatorname{erf}(t_1))},$$
де
$$x_1 = \frac{2x_0 + c_1\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erf}(T)}{2 \cdot \exp\{-t_1^2\}},$$
тобто ми просто дозволили c_1 бути довільною сталою, обчислили $x(t_1)$, а потім розв'язали задачу переведення системи з точки (t_1, x_1) у точку (T, y_0) як у першому пункті, з мінімальними поправками на межі інтегрування.

Зокрема, якщо $c_1 = 0$, то $x_1 = \dfrac{x_0}{\exp\{-t_1^2\}}$, тому $c_2 = 2 \cdot \dfrac{\exp\{-T^2\} \cdot y_0 - x_0}{\sqrt{\pi} \cdot (\operatorname{erf}(T) - \operatorname{erf}(t_1))}$.

Зауважимо, що задача має розв'язок завжди.

3.
$$\frac{dx}{2x(t) + c} = t dt$$

$$\int_0^T \frac{dx}{2x(t) + c} = \int_0^T t dt$$

$$\left(\frac{1}{2} \ln(2x(t) + c) \right) \Bigg|_0^T = \frac{T^2}{2}$$

$$\ln(2y_0 + c) - \ln(2x_0 + c) = T^2$$

$$\ln \left(\frac{2y_0 + c}{2x_0 + c} \right) = T^2$$

$$\frac{2y_0 + c}{2x_0 + c} = \exp\{T^2\}$$

$$2y_0 + c = (2x_0 + c) \cdot \exp\{T^2\}$$

$$2(y_0 - x_0 \cdot \exp\{T^2\}) = c \cdot (\exp\{T^2\} - 1)$$

звідки

$$c = 2 \cdot \frac{y_0 - x_0 \cdot \exp\{T^2\}}{\exp\{T^2\} - 1}.$$

Зауважимо, що задача має розв'язок завжди.

4.

$$\frac{dx}{dt} = 2t \cdot x(t) + c \cdot x(t)$$

$$\frac{dx}{x(t)} = (2t + c)dt$$

$$\int_0^T \frac{dx}{x(t)} = \int_0^T (2t + c)dt$$

$$(\ln(x(t))|_0^T = T^2 + cT$$

$$\ln(y_0) - \ln(x_0) = T^2 + cT$$

$$\ln(y_0/x_0) = T^2 + cT$$

звідки

$$c = \frac{\ln(y_0/x_0) - T^2}{T}.$$

Зауважимо, що задача має розв'язок тільки якщо $\operatorname{sign}(x_0) = \operatorname{sign}(y_0)$.

Задача 3.8. 1. Знайти грамміан керованості для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t)$$

і дослідити її на керованість, використовуючи перший критерій керованості.

2. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)ds \to \min$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + u(t), x(0) = x_0, x(T) = x_T.$$

Тут x – стан системи. $u(t)$ – скалярне керування, x_0, x_T – задані точки, $t \in [0, T]$.

Розв'язок. 1. Одразу помітимо, що $A(t) = (t)$, $B(t) = (1)$. Далі, з рівняння $\dfrac{d\Theta(t,s)}{dt} = A(t) \cdot \Theta(t,s)$ знаходимо $\Theta(t,s) = \exp\{t^2/2 - s^2/2\}$. Залишилося всього нічого, знайти власне грамміан:

$$\Phi(T,0) = \int_0^T \Theta(T,s)B(s)B^*(s), \Theta^*(T,s)ds =$$
$$= \int_0^T (\exp\{T^2 - s^2\})ds = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \exp\{T^2\} \cdot \mathrm{erf}(T)\right),$$

і $\det \Phi(T,0) \neq 0$, тобто система цілком керована на $[0, T]$.

2. Пригадаємо наступний результат: розв'язком вищезгаданої задачі про оптимальне керування є функція

$$u(t) = B^*(t)\Theta^*(T,t)\Phi^{-1}(T,0)(x_T - \Theta(T,0)x_0) =$$

$$= \exp\{T^2/2 - t^2/2\} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\{-T^2\} \cdot \frac{1}{\mathrm{erf}(T)}\right) (x_T - \exp\{T^2/2\}x_0) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot \mathrm{erf}(T)} \cdot \left(x_T \cdot \exp\left\{-\frac{T^2 + t^2}{2}\right\} - x_0 \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\right).$$

Задача 3.9. Мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T (u_1^1(s) + u_2^2(s))ds$$

за умов

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 6x_1(t) - 2x_2(t) + u_1(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 5x_1(t) - x_2(t) + u_2(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20},$$

$$x_1(T) = x_2(T) = 0.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^\star$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^\star$ – вектор керування, $x = (x_{10}, x_{20})^\star$ – відома точка, $t \in [0, T]$.

Розв'язок. Запишемо систему у людському вигляді:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(t)$$

Знайдемо власні числа матриці $A - \lambda E$: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$, звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Знайдемо власні вектори, вони будуть $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ відповідно. Звідси знаходимо загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ 5e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

З рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} 2e^s \\ 5e^s \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4s} \\ e^{4s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

знаходимо $c_1 = -\dfrac{1}{3}e^{-s}$, $c_2 = \dfrac{5}{3}e^{-4s}$, а з рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} 2e^s \\ 5e^s \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4s} \\ e^{4s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

знаходимо $c_1 = \dfrac{1}{3}e^{-s}$, $c_2 = -\dfrac{2}{3}e^{-4s}$, тобто

$$\Theta(t, s) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 2e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \\ -5e^{t-s} + 5e^{4(t-s)} & 5e^{t-s} - 2e^{4(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо грамміан за формулою

$$\Phi(T, 0) = \int_0^T \Theta(T, s) B(s) B^*(s) \Theta^*(T, s) ds.$$

$$\Theta(T,s)B(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2e^{t-s}+5e^{4(t-s)} & 2e^{t-s}-2e^{4(t-s)} \\ -5e^{t-s}+5e^{4(t-s)} & 5e^{t-s}-2e^{4(t-s)} \end{pmatrix}.$$

$$B^*(s)\Theta^*(T,s) = (\Theta(T,s)B(s))^\star = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2e^{t-s}+5e^{4(t-s)} & 5e^{t-s}-5e^{4(t-s)} \\ -2e^{t-s}+2e^{4(t-s)} & 5e^{t-s}-2e^{4(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Обчислення грамміану є громіздкою обчислювальною задачею, ми залишаємо її як вправу для читача.

Задача 3.10. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0,T]$ у випадку, якщо система керування має вигляд:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + tx(t) = u(t).$$

Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0,T]$.

Розв'язок. Зробимо заміну $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, тоді маємо систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(u)(t).$$

Звідси можемо записати систему диференціальних рівнянь для знаходження грамміана керованості:

$$\frac{\Phi(t,t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t,t_0) + \Phi(t,t_0)A^\star(t) + B(t)B^*(t).$$

$$\frac{\Phi(t,0)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix}\Phi(t,0) + \Phi(t,0)\begin{pmatrix} 0 & t \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окрім цього, не забуваємо про умову $\Phi(0,0) = 0$.

Щодо критерію керованості, то тут все просто (чи радше стандартно), для того щоб система була цілком керованою на $[0,T]$ необхідно і достатньо, щоб грамміан керованості $\Phi(T,0)$ був невиродженим, тобто щоб $\det \Phi(T,0) \neq 0$ або (що те саме у випадку невід'ємно-визначеної матриці) щоб $\det \Phi(T,0) > 0$.

Задача 3.11. Дослідити на керованість, використовуючи другий критерій керованості:

1.
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + au, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + \dfrac{u}{a}; \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + au, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + \dfrac{u}{a}; \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + au, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + a^2u; \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - au, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + au; \end{cases}$$

5.

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = u(t).$$

6.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3 + u_1 - u_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + 3x_3 + u_1 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_2 + x_3 + 2u_2 \end{cases}$$

Розв'язок. 1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1/a - a \\ 1/a & a \end{pmatrix}$$

$$\det D = a^2 + 1 - 1/a^2 \neq 0,$$

тобто система цілком керована якщо тільки $a \neq \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a - 1/a \\ 1/a & a \end{pmatrix}$$

$$\det D = a^2 - 1 + 1/a^2 \neq 0,$$

тобто система цілком керована для будь-яких a (навіть $\det D \geq 1$ за нерівністю Коші).

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a + a^2 \\ a^2 & a^2 - a \end{pmatrix}$$

$$\det D = a^3 - a^2 - a^4 - a^3 = -a^4 - a^2 \neq 0,$$

тобто система цілком керована якщо тільки $a \neq 0$.

4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -a \\ a & a \end{pmatrix}$$

$$\det D = 0,$$

тобто система не є цілком керованою для будь-яких a.

5. Зробимо заміну $x_0 = x$, $x_1 = x'$, …, $x_n = x^{(n)}$, тоді отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = u - a_n x_0 - a_{n-1} x_1 - \ldots - a_1 x_{n-1} \end{cases}$$

тобто

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^nB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & -a_1 & \cdots \\ 1 & 0 & -a_1 & -a_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\det D = -1 \neq 0,$$

тобто система цілком керована для довільних a_1, a_2, ..., a_n.

6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Її ранг дорівнює 3, тобто система цілком керована.

3.3 Задачі для самостійного розв'язування

Задача 3.12. Знайти диференціальне рівняння грамміана керованості для системи керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = \cos(t) \cdot x_1(t) - \sin(t) \cdot x_2(t) + u_1(t) - 2u_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = \sin(t) \cdot x_1(t) + \cos(t) \cdot x_2(t) - 3u_1(t) + 4u_2(t). \end{cases}$$

Задача 3.13. За допомогою грамміана керованості розв'язати таку задачу оптимального керування: мінімізувати критерій якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s$$

за умов, що

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} - 5\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 6x(t) = u(t),$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = y_0, x(T) = x'(T) = 0.$$

Тут x – стан системи, $u(t)$ – скалярне керування, $t \in [0, T]$.

Задача 3.14. Записати систему диференціальних рівнянь для знаходження першої матриці керованості (грамміана керованості) і сформулювати критерій керованості на інтервалі $[0, T]$ у випадку, якщо системи керування має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = tx_1(t) + t^2 x_2(t) + u_1(t) - u_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_2(t), \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^\star$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)^\star$ – вектор керування, $t \in [0, T]$.