2 Елементи багатозначного аналізу. Множина досяжності

2.1 Алгоритми

Задача. Знайти

1. $A + B$;
2. λA;
3. $\alpha(A, B)$;
4. MA,

де множини $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^m$, скаляр $\lambda \in \mathbb{R}^1$, матриця $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Алгоритм 2.1. Розглянемо всі пункти задачі описані вище.

1. Знаходимо за визначенням, $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$.
2. Знаходимо за визначенням, $\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}$.
3. (а) Знаходимо відхилення $\beta(A, B)$ і $\beta(B, A)$ за визначенням,

$$\beta(A, B) = \max_{a \in A} \rho(a, B), \tag{2.1}$$

   де

$$\rho(a, B) = \min_{b \in B} \rho(a, b). \tag{2.2}$$

   (б) Знаходимо $\alpha(A, B)$ за визначенням,

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A). \tag{2.3}$$

4. Знаходимо за визначенням, $MA = \{Ma | a \in A\}$.

Задача. Знайти опорну функцію множини $A \subset \mathbb{R}^n$.

Алгоритм 2.2.

1. Намагаємося знайти за визначенням,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle. \tag{2.4}$$

2. Якщо не вийшло, то намагаємося знайти за геометричною властивістю: $c(A, \psi)$ – (орієнтована) відстань від початку координат до опорної площини множини A, для якої напрямок-вектор ψ є вектором нормалі.

Задача. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int F(x)\,\mathrm{d}x$, де $F(x) \subset \mathbb{R}^n$.

Алгоритм 2.3.

1. Знаходимо опорну функцію від інтегралу:

$$c(\mathcal{J}, \psi) = \int c(F(x), \psi)\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

2. Знаходимо $\mathcal{J}$ як опуклий компакт з відомою опорною функцією $c(\mathcal{J}, \psi)$.

Задача. Знайти множину досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

Алгоритм 2.4.

1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s.

2. Знаходимо інтеграл Аумана

$$\int_{t_0}^{t} \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.6}$$

за алгоритмом 2.3.

3. Використовуємо теорему про вигляд множини досяжності лінійної системи керування:

$$\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = \Theta(t, t_0)\mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.7}$$

Задача. Знайти опорну функцію множини досяжності системи $\dot{x} = Ax + Bu$, де $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$, $u \in \mathcal{U}$.

Алгоритм 2.5.

1. Знаходимо фундаментальну матрицю $\Theta(t, s)$ системи нормовану за моментом s.

2. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi)$ за алгоритмом 2.2.

3. Знаходимо опорну функцію $c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)$ за алгоритмом 2.2.

4. Використовуємо теорему про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:
$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)\,\mathrm{d}s. \tag{2.8}$$

2.2 Задачі з розв'язками

Задача 2.1. Знайти $A + B$ і λA, а також метрику Хаусдорфа $\alpha(A, B)$, якщо:

1. $A = \{-3, 2, -1\}, B = \{-2, 5, 1\}, \lambda = 3$;

2. $A = \{4, 2, -4\}, B = [-2, 3], \lambda = -1$;

3. $A = [-1, 2], B = [3, 7], \lambda = -2$;

Розв'язок. Скористаємося пунктами 1-3 алгоритму 2.1:

1.
$$\begin{aligned} A + B &= \{-3-2, -3+5, -3+1\} \cup \{2-2, 2+5, 2+1\} \cup \\ &\cup \{-1-2, -1+5, -1+1\} = \\ &= \{-5, 2, -2, 0, 7, 3, -3, 4, 0\} = \{-5, -3-2, 0, 2, 3, 4, 7\}, \\ \lambda A &= \{3 \cdot -3, 3 \cdot 2, 3 \cdot -1\} = \{-9, 6, -3\} = \{-9, -3, 6\}. \end{aligned}$$

   У нашому випадку
$$\begin{aligned} \beta(A, B) &= \max\left\{\min_{b \in B} \rho(-3, b), \min_{b \in B} \rho(2, b), \min_{b \in B} \rho(-1, b)\right\} = \\ &= \max\{1, 1, 1\} = 1, \\ \beta(B, A) &= \max\left\{\min_{a \in A} \rho(-2, a), \min_{a \in A} \rho(5, a), \min_{a \in A} \rho(1, a)\right\} = \\ &= \max\{1, 3, 1\} = 3, \end{aligned}$$
   тому $\alpha(A, B) = \max\{1, 3\} = 3$.

2.

$$A+B=[4-2,4+3]\cup[2-2,2+3]\cup[-4-2,-4+3]=$$
$$=[2,7]\cup[0,5]\cup[-6,-1]=[-6,7].$$

$$\lambda A=\{-1\cdot 4,-1\cdot 2,-1\cdot -4\}=\{-4,-2,4\}.$$

У нашому випадку

$$\beta(A,B)=\max\left\{\min_{b\in B}\rho(4,b),\min_{b\in B}\rho(2,b),\min_{b\in B}\rho(-4,b)\right\}=$$
$$=\max\{1,0,2\}=2,$$
$$\beta(B,A)=\max_{b\in B}\min\{\rho(b,4),\rho(b,2),\rho(b,-4)\}=3,$$

тому $\alpha(A,B)=\max\{2,3\}=3$.

3. $A+B=[2,9]$, $\lambda A=[-4,2]$, $\beta(A,B)=4$, $\beta(B,A)=5$, оскільки відповідні краї відхиляються на 4 та 5 відповідно (-1 від 3 та 7 від 2), тому $\alpha(A,B)=5$.

Задача 2.2. Знайти MA, якщо

$$M=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}, A=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}\right\}.$$

Розв'язок. Скористаємося пунктом 4 алгоритму 2.1:

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 7\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22\\ -11\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\ -10\end{pmatrix}.$$

Отже, отримаємо

$$MA=\left\{\begin{pmatrix}10\\ 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-22\\ -11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-8\\ -10\end{pmatrix}\right\}.$$

Задача 2.3. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A=[0,r]$;

2. $A=[-r,r]$;

3. $A = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2\}$;

4. $A = \mathcal{K}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$;

5. $A = \mathcal{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Розв'язок. У пунктах 1-3 скористаємося пунктом 1 алгоритму 2.2, а у пунктах 4-5 – пунктом 2 того ж алгоритму.

1. За означенням опорної функції,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \begin{cases} 0, & \psi < 0 \\ r\psi, & 0 \leq \psi \end{cases} = \max\{0, r\psi\}.$$

2. За означенням опорної функції,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \begin{cases} -r\psi, & \psi < 0 \\ r\psi, & 0 \leq \psi \end{cases} = r|\psi|.$$

3. За означенням опорної функції,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \max_{a \in A} (\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2) = |\psi_1| + 2|\psi_2|.$$

4. За властивістю опорної функції, $c(\mathcal{K}_r(0), \psi) = r\|\psi\|$.

5. За властивістю опорної функції, $c(\mathcal{S}^n, \psi) = \|\psi\|$.

Задача 2.4. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int_0^1 F(x)\, \mathrm{d}x$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, x]$, $x \in [0, 1]$;

2. $F(x) = \mathcal{K}_x(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq x\}$, $x \in [0, 1]$.

Розв'язок. Скористаємося алгоритмом 2.3:

1. $$c(\mathcal{J}) = \int_0^1 c([0, x], \psi)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \psi/2, & 0 \leq \psi \\ 0, & \psi < 0 \end{cases}.$$

   Далі знання опорних функцій підказують, що $\mathcal{J} = [0, 1/2]$.

2.
$$c(\mathcal{J}) = \int_0^1 c(\mathcal{K}_x(0), \psi)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\|\psi\|\,\mathrm{d}x = \|\psi\|/2.$$

Далі знання опорних функцій підказують, що $\mathcal{J} = \mathcal{K}_{1/2}(0)$.

Задача 2.5. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + u,$$

де $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \leq 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 1\}.$$

Розв'язок. Скористаємося алгоритмом 2.4.

Перш за все знаходимо $\Theta(t,s)$. Нескладно бачити, що $\Theta(t,s) = e^{t-s}$.

Далі
$$\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = \Theta(t, t_0)\mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^t \Theta(t,s)B(s)\mathcal{U}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Підставимо вже відомі значення:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(t, [-1,1]) &= \Theta(t,0)\cdot[-1,1] + \int_0^t (\Theta(t,s)\cdot 1\cdot[-1,1])\,\mathrm{d}s = \\ &= [-e^t, e^t] + \int_0^t [-e^{t-s}, e^{t-s}]\,\mathrm{d}s = \\ &= [-e^t, e^t] + [1-e^t, e^t - 1] = [1-2e^t, 2e^t - 1].\end{aligned}$$

Задача 2.6. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 2x_1 + x_2 + u_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 3x_1 + 4x_2 + u_2,\end{cases}$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{M}_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : |x_{01}| \leq 1, |x_{02}| \leq 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}.$$

Розв'язок. Скористаємося алгоритмом 2.5.

Перш за все знаходимо $\Theta(t,s)$ з системи

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t,s)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot\Theta(t,s) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\Theta(t,s).$$

Нескладно бачити, що

$$\Theta(t,s) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{t-s}+e^{5(t-s)} & -e^{t-s}+e^{5(t-s)} \\ -3e^{t-s}+3e^{5(t-s)} & e^{t-s}+3e^{5(t-s)} \end{pmatrix}$$

Скористаємося теоремою про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:

$$c(\mathcal{X}(t,\mathcal{M}_0),\psi) = c(\mathcal{M}_0,\Theta^*(t,t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}(s),B^*(s)\Theta^*(t,s)\psi)\,\mathrm{d}s.$$

Підставимо вже відомі значення:

$$c(\mathcal{X}(t,[-1,1]^2),\psi) = c([-1,1]^2,\Theta^*(t,0)\psi) + \\ + \int_0^t c\left([-1,1]^2,\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Theta^*(t,s)\psi\right)\mathrm{d}s,$$

і підставляємо Θ:

$$c\left(\mathcal{X}(t,[-1,1]^2),\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right) = \\ = c\left([-1,1]^2,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^t+e^{5t} & -3e^t+3e^{5t} \\ -e^t+e^{5t} & e^t+3e^{5t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right) + \\ + \int_0^t c\left([-1,1]^2,\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{t-s}+e^{5(t-s)} & -3e^{t-s}+3e^{5(t-s)} \\ -e^{t-s}+e^{5(t-s)} & e^{t-s}+3e^{5(t-s)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}s = \\ = c\left([-1,1]^2,\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(3e^t+e^{5t})\psi_1+(-3e^t+3e^{5t})\psi_2 \\ (-e^t+e^{5t})\psi_1+(e^t+3e^{5t})\psi_2\end{pmatrix}\right) + \\ + \int_0^t c\left([-1,1]^2,\frac{1}{4}\begin{pmatrix}(3e^{t-s}+e^{5(t-s)})\psi_1+(-3e^{t-s}+3e^{5(t-s)})\psi_2 \\ (-e^{t-s}+e^{5(t-s)})\psi_1+(e^{t-s}+3e^{5(t-s)})\psi_2\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}s = \\ = \frac{1}{4}\left(\left|(3e^t+e^{5t})\psi_1+(-3e^t+3e^{5t})\psi_2\right| + \left|(-e^t+e^{5t})\psi_1+(e^t+3e^{5t})\psi_2\right|\right) + \\ + \frac{1}{4}\int_0^t \left|(3e^{t-s}+e^{5(t-s)})\psi_1+(-3e^{t-s}+3e^{5(t-s)})\psi_2\right|\mathrm{d}s + \\ + \frac{1}{4}\int_0^t \left|(-e^{t-s}+e^{5(t-s)})\psi_1+(e^{t-s}+3e^{5(t-s)})\psi_2\right|\mathrm{d}s.$$

Задача 2.7. Знайти $A + B$ і λA, а також метрику Хаусдорфа $\alpha(A, B)$, якщо

1. $A = \{4, -2, 3\}$, $B = \{7, -1, 1\}$, $\lambda = 2$;
2. $A = \{5, -5, 2\}$, $B = [1, 3]$, $\lambda = -1$;
3. $A = [-4, -2]$, $B = [-1, 5]$, $\lambda = 3$;

Розв'язок. 1. $A = \{4, -2, 3\}$, $B = \{7, -1, 1\}$, $\lambda = 2$;

$$A+B = \{4+7, 4-1, 4+1, -2+7, -2-1, -2+1, 3+7, 3-1, 3+1\} = \\ = \{11, 3, 5, 5, -3, -1, 10, 2, 4\} = \{-3, -1, 2, 3, 4, 5, 10, 11\}.$$

$$\lambda A = \{2 \cdot 4, 2 \cdot -2, 2 \cdot 3\} = \{8, -4, 6\}.$$

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \\ = \max\{\max\{3, 1, 2\}, \max\{3, 1, 2\}\} = \max\{3, 3\} = 3.$$

2. $A = \{5, -5, 2\}$, $B = [1, 3]$, $\lambda = -1$;

$$A + B = (5 + [1, 3]) \cup (-5 + [1, 3]) \cup (2 + [1, 3]) = \\ = [6, 8] \cup [-4, -1] \cup [3, 5] = [-4, -1] \cup [3, 5] \cup [6, 8].$$

$$\lambda A = \{-1 \cdot 5, -1 \cdot -5, -1 \cdot 2\} = \{-5, 5, -2\}.$$

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \\ = \max\{\max\{2, 6, 0\}, \max_{b \in [1,3]}\{|b - 2|\}\} = \max\{6, 1\} = 6.$$

3. $A = [-4, -2]$, $B = [-1, 5]$, $\lambda = 3$;

$$A + B = [-4 - 1, -2 + 5] = [-5, 3].$$

$$\lambda A = [3 \cdot -4, 3 \cdot -2] = [-12, -6].$$

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \\ = \max\{\max\{|-4+1|, |-2+1|\}, \max\{|-1+2|, |5+2|\}\} = \max\{3, 7\} = 7.$$

Задача 2.8. Знайти MA, якщо

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Розв'язок.

$$MA = \left\{ M\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, M\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}, M\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-22\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\9\end{pmatrix} \right\}.$$

Задача 2.9. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A = \{-1, 1\}$;
2. $A = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \le 2, |x_2| \le 4, |x_3| \le 1\}$;
3. $A = \{a\}$;
4. $A = \mathcal{K}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le r\}$.

Розв'язок. 1. За визначенням, $c(A, \psi) = \max\limits_{x \in \{-1,1\}} \langle x, \psi \rangle = \max(-\psi, \psi) = |\psi|$.

2. За визначенням, $c(A, \psi) = \max\limits_{\substack{x_1:|x_1|\le 2\\ x_2:|x_2|\le 4\\ x_3:|x_3|\le 1}} x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = 2|\psi_1| + 4|\psi_2| + |\psi_3|$.

3. За визначенням, $c(A, \psi) = \max\limits_{x \in \{a\}} \langle x, \psi \rangle = \langle a, \psi \rangle$.

4. За визначенням,

$$c(A, \psi) = \max_{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \le r} \langle x, \psi \rangle = \max_{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le r} \langle a + y, \psi \rangle =$$
$$= \langle a, \psi \rangle + \max_{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le r} \langle y, \psi \rangle = \langle a, \psi \rangle + c(\mathcal{K}_r(0), \psi) = \langle a, \psi \rangle + r\|\psi\|.$$

Задача 2.10. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{J} = \int_0^{\pi/2} F(x)dx$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, \sin x]$, $x \in [0, \pi/2]$.
2. $F(x) = [-\sin x, \sin x]$, $x \in [0, \pi/2]$.
3. $F(x) = \mathcal{K}_{\sin x}(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le \sin x\}$, $x \in [0, \pi/2]$.

Розв'язок. Скористаємося теоремою про зміну порядку інтегрування і взяття опорної функції:

1. $c(\mathcal{J},\psi) = \int_0^{\pi/2} c([0,\sin x],\psi)dx = \int_0^{\pi/2} \max(0,\psi)\sin x dx = \max(0,\psi)$, звідки $\mathcal{J} = [0,1]$.

2. $c(\mathcal{J},\psi) = \int_0^{\pi/2} c([-\sin x,\sin x],\psi)dx = \int_0^{\pi/2} |\psi|\sin x dx = |\psi|$, звідки $\mathcal{J} = [-1,1]$.

3. $c(\mathcal{J},\psi) = \int_0^{\pi/2} c(\mathcal{K}_{\sin x}(0),\psi)dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\|\psi\|dx = \|\psi\|$, звідки $\mathcal{J} = \mathcal{K}_1(0)$.

Задача 2.11. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + bu,$$

де $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$, b – деяке ненульове число,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \leq 2\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 3\}.$$

Розв'язок. Множину досяжності знайдемо через її опорну функцію:

$$c(\mathcal{X}(t,\mathcal{M}_0),\psi) = c(\mathcal{M}_0,\Theta^*(t,t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}(s),C^\star(s)\Theta^*(t,s)\psi)\,\mathrm{d}s.$$

Для цього послідовно знаходимо:

$\Theta(t,s) = e^{t-s}$, знайдено із рівності $\dfrac{d\Theta(t,s)}{dt} = A(t)\Theta(t,s) = \Theta(t,s)$ у нашому випадку.

$c(\mathcal{M}_0,\psi) = c([-2,2],\psi) = 2|\psi|$, вже достатньо відома нам опорна функція.

$c(\mathcal{U}(s),\psi) = c([-3,3],\psi) = 3|\psi|$, ще одна вже достатньо відома нам опорна функція.

Послідовно підставляючи знайдені вирази в формулу вище знаходимо:

$$
\begin{aligned}
c(X(t,\mathcal{M}_0),\psi) &= c(\mathcal{M}_0,\Theta^\star(t,t_0),\psi)+\int_{t_0}^{t} c(\mathcal{U}(s),C^\star(s)\Theta^\star(t,s)\psi)ds = \\
&= c([-2,2],\Theta^\star(t,0),\psi)+\int_0^t c([-3,3],b\Theta^\star(t,s)\psi)ds = \\
&= 2\left|\Theta^\star(t,0)\psi\right| + \int_0^t 3\left|b\Theta^\star(t,s)\psi\right|ds = \\
&= 2\left|e^t\psi\right| + \int_0^t 3\left|be^{t-s}\psi\right|ds = 2e^t|\psi| + 3|b\psi|\int_0^t e^{t-s}ds = \\
&= 2e^t|\psi| + 3|b\psi|\left(e^t-1\right) = \left(2e^t+3|b|\left(e^t-1\right)\right)|\psi|,
\end{aligned}
$$

звідки $\mathcal{X}(t,\mathcal{M}_0) = \left[-2e^t-3|b|\left(e^t-1\right), 2e^t+3|b|\left(e^t-1\right)\right]$.

Задача 2.12. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2u_1,\\
\dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 + u_2,
\end{cases}
$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{M}_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$
\begin{gathered}
\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : x_{01}^2 + x_{02}^2 \leq 4\},\\
\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}.
\end{gathered}
$$

Розв'язок. Одразу помітимо, що $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\Theta(t,s)$ знайдемо розв'язавши однорідну систему:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2,\\
\dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2,
\end{cases}
$$

Її визначник $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$, звідки $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Підставляючи знайдені числа у систему, знаходимо власні вектори: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ відповідно.

Отже загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -2e^{3t} \end{pmatrix}$$

Розв'язуючи рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 2e^{-s} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3s} \\ -2e^{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

і

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 2e^{-s} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3s} \\ -2e^{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

знаходимо фундаментальну матрицю системи, нормовану за моментом s, а саме

$$\Theta(t,s) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{s-t} + e^{3(t-s)}}{2} & \dfrac{e^{s-t} - e^{3(t-s)}}{4} \\ e^{s-t} - e^{3(t-s)} & \dfrac{e^{s-t} + e^{3(t-s)}}{2} \end{pmatrix}$$

Далі знаходимо $c(\mathcal{M}_0, \psi) = c(\mathcal{K}_2(0), \psi) = 2\|\psi\|$, та $c(\mathcal{U}, \psi) = c(\mathcal{K}_1(0), \psi) = \|\psi\|$, вже достатньо відомі нам опорні функції.

Нарешті, можемо зібрати це все докупи:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^\star(t,0)\psi) + \int_0^t c(\mathcal{U}(s), C^\star(s)\Theta^\star(t,s)\psi) ds =$$

$$= 2\|\Theta^\star(t,0)\psi\| + \int_0^t \|C^\star(s)\Theta^\star(t,s)\psi\|\, ds =$$

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-t} + e^{3t}}{2} & e^{3t} - e^{-t} \\ \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{4} & \dfrac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\| +$$

$$+ \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} e^{s-t} + e^{3(t-s)} & 2(e^{3(t-s)} - e^{s-t}) \\ \dfrac{e^{3(t-s)} - e^{s-t}}{4} & \dfrac{e^{s-t} + e^{3(t-s)}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\| ds =$$

$$= 2 \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \cdot \psi_1 + (e^{3t} - e^{-t}) \cdot \psi_2 \\ \dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{4} \cdot \psi_1 + \dfrac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \cdot \psi_2 \end{pmatrix} \right\| + \ldots$$

2.3 Задачі для самостійного розв'язування