4 Критерії спостережуваності. Критерій двоїстості

4.1 Алгоритми

Задача. Побудувати систему для знаходження грамміана спостережуваності для системи $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$.

Алгоритм 4.1. Записуємо систему

$$\dot{\mathcal{N}}(t, t_0) = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t).$$

Задача. Чи буде стаціонарна система $\dot{x} = Ax + Bu$ цілком спостережуваною?

Алгоритм 4.2. 1. Знаходимо

$$\mathcal{R} = \left(H^* \vdots A^* H^* \vdots (A^*)^2 H^* \vdots \ldots \vdots (A^*)^{n-1} H^* \right).$$

2. Якщо $rang\mathcal{R} = n$ то система цілком спостережувана інакше ні.

Задача. Дослідити на спостережуваність систему $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$, використовуючи критерій двоїстості і відповідний критерій керованості.

Алгоритм 4.3. 1. Будуємо спряжену систему

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -A^*(t) \cdot z(t) + H^*(t) \cdot u(t).$$

2. Досліджуємо її на керованість, якщо вона керована, то початкова система спостережувана, інакше ні.

Задача. Побудувати спостерігач для системи $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$.

Алгоритм 4.4. 1. Записуємо систему (спостерігач)

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A(t) - K(t)H(t)) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot y(t).$$

2. Або систему (спостерігач)

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot \hat{x}(t)).$$

Вибір вільний, це різні форми запису одного і того ж.

Задача. Задана динамічна система $\dot{x} = Ax$, $y = Hx$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використання грамміана спостержуваності.

Алгоритм 4.5. 1. Знаходимо грамміан спостережуваності $\mathcal{N}(t, t_0)$ з системи

$$\dot{\mathcal{N}}(t, t_0) = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t).$$

2. Знаходимо $R(t) = \mathcal{N}^{-1}(t, t_0)$.

3. Розв'язуємо рівняння

$$\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + R(t) \cdot H^*(t) \cdot (y(t) - H(t) \cdot x(t)).$$

4.2 Аудиторне заняття

Задача 4.1. Побудувати систему для знаходження грамміана спостережуваності і записати умову спостережуваності на інтервалі для системи:

$$\begin{cases} \quad \dot{x}_1 = \cos(t) \cdot x_1 + \sin(t) \cdot x_2, \\ \quad \dot{x}_2 = -\sin(t) \cdot x_1 + \cos(t) \cdot x_2, \\ y(t) = kx_1 + x_2, \end{cases}$$

$k > 0$.

Розв'язок. Диференціальне рівняння для знаходження грамміана спостережуваності має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}(t, t_0)}{\mathrm{d}t} = -A(t) \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot A^*(t) + H^*(t) \cdot H(t),$$

а після підстановки відомих значень вона набує вигляду

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}(t, t_0)}{\mathrm{d}t} = -\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \mathcal{N}(t, t_0) - \\ - \mathcal{N}(t, t_0) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 1 \end{pmatrix},$$

або, у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{n}_{11}(t) = -2\cos(t) \cdot n_{11}(t) - 2\sin(t) \cdot n_{12}(t) + k^2, \\ \dot{n}_{12}(t) = \sin(t) \cdot n_{11}(t) - 2\cos(t) \cdot n_{12}(t) - \sin(t) \cdot n_{22}(t) + k, \\ \dot{n}_{22}(t) = 2\sin(t) \cdot n_{12}(t) - 2\cos(t) \cdot n_{22}(t) + 1. \end{cases}$$

Умова спостережуваності цієї системи на $[t_0, T]$ має вигляд $n_{11}(t) \cdot n_{22}(t) - n_{12}^2(t) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$.

Задача 4.2. Чи буде система цілком спостережуваною?

1. $$\ddot{x} = a^2 x, y(t) = x(t);$$

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \alpha x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_2, \\ y(t) = \beta x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1, \\ \dot{x}_2 = b x_2, \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

Розв'язок. Всі системи є стаціонарними, тому будемо застосовувати другий критерій спостережуваності:

$$rang\mathcal{R} = rang\left(H^* \vdots A^* H^* \vdots (A^*)^2 H^* \vdots \ldots \vdots (A^*)^{n-1} H^*\right) = n.$$

1. Введемо нову змінну $x_2 = \dot{x}_1$, тоді $\dot{x}_2 = a^2 x_1$, $y = x_1$, тому

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Підставляючи у критерій, знаходимо:

   $$\mathcal{R} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   її ранг 2, тому система цілком спостережувана.

2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

   Підставляючи у критерій, знаходимо:

   $$\mathcal{R} = \left(\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \beta & \alpha + \beta \\ 1 & \alpha\beta + 1 \end{pmatrix},$$

   її ранг 2 тоді і тільки тоді, коли її визначник $det\mathcal{R} = \alpha(\beta^2 - 1) \neq 0$, тому система цілком спостережувана тоді і тільки тоді, коли $\alpha \neq 0$, $\beta \neq \pm 1$.

3.
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у критерій, знаходимо:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

її ранг 2 тоді і тільки тоді, коли її визначник $det\mathcal{R} = b - a \neq 0$, тому система цілком спостережувана тоді і тільки тоді, коли $a \neq b$.

Задача 4.3. Дослідити на спостережуваність, використовуючи критерій двоїстості і відповідний критерій керованості:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \\ y(t) = -x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Розв'язок. За принципом двоїстості Калмана, ця система є цілком спостережуваною на $[t_0, T]$ тоді і тільки тоді, коли система

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -A^*(t) \cdot z(t) + H^*(t) \cdot u(t)$$

є цілком керованою на $[t_0, T]$.

Підставляючи відомі значення, отримуємо систему

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot z(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot u(t),$$

або, у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_2 - u, \\ \dot{z}_2 = -z_1 + u, \\ \dot{z}_3 = 2z_1 + z_2 + 2z_3 - u. \end{cases}$$

Система стаціонарна, тому використаємо другий критерій керованості:

$$rang\mathcal{D} = rang \left(B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ldots \vdots A^{n-1}B \right) = n.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи у критерій, знаходимо:

$$\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix},$$

її ранг 2, тому система не цілком керована, а початкова – не цілком спостережувана.

Задача 4.4. Побудувати спостерігач такої системи у загальному вигляді:

1.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = tx_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ y(t) = x_1(t) + bx_2(t). \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -kx, \\ y(t) = x(t) + \beta \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}. \end{cases}$$

Розв'язок. 1. За теоремою про структуру спостерігача, він має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} = (A(t) - K(t)H(t)) \cdot \hat{x}(t) + K(t) \cdot y(t).$$

Підставляючи відомі значення, знаходимо

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix} \right) \cdot \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix} \cdot y(t),$$

або, у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = (t - k_1(t)) \cdot \hat{x}_1 + (1 - bk_1(t)) \cdot \hat{x}_2 + k_1(t) \cdot y(t), \\ \dot{\hat{x}}_2 = (1 - k_2(t)) \cdot \hat{x}_1 - (1 + bk_2(t)) \cdot \hat{x}_2 + k_2(t) \cdot y(t). \end{cases}$$

2. Введемо нову змінну $x_2 = \dot{x}_1$, тоді $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -kx_1$, $y = x_1 + \beta x_2$.

   За теоремою про структуру спостерігача, він має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot\hat{x}(t) + K(t)\cdot(y(t) - H(t)\cdot\hat{x}(t)).$$

   Підставляючи відомі значення, знаходимо

$$\frac{\mathrm{d}\hat{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}\hat{x}(t) + \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}\cdot\left(y(t) - \hat{x}_1 - \beta\hat{x}_2\right),$$

   або, у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1(t)\cdot\left(y(t) - \hat{x}_1 - \beta\hat{x}_2\right), \\ \dot{\hat{x}}_2 = -k\hat{x}_1 + k_2(t)\cdot\left(y(t) - \hat{x}_1 - \beta\hat{x}_2\right). \end{cases}$$

Задача 4.5. Задана динамічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 2x(t), \\ y(t) = \sin(t)\cdot x(t), \end{cases}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0,3]$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використанням грамміана спростережуваності.

Розв'язок. Розв'язок задачі спостереження задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot x(t) + R(t)\cdot H^*(t)\cdot(y(t) - H(t)\cdot x(t)),$$

де $R(t) = \mathcal{N}^{-1](t,0)}$.

Знайдемо $\mathcal{N}(t,0)$: з рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t,s)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot\Theta(t,s) = 2\Theta(t,s)$$

знаходимо $\Theta(t,s) = e^{2(t-s)}$, тому

$$\mathcal{N}(t,0) = \int_0^t e^{4(s-t)}\cdot\sin^2(s)\,\mathrm{d}s = e^{-4t}\int_0^t e^{4s}\cdot\sin^2(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{-2\sin(2t) - 4\cos(2t) + 5 - e^{-4t}}{40}.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot x(t) + \frac{40\cdot H^*(t)\cdot (y(t) - H(t)\cdot x(t))}{-2\sin(2t) - 4\cos(2t) + 5) - e^{-4t}},$$

або, у розгорнутому вигляді,

$$\dot{x} = 2x + \frac{40\cdot \sin(t)\cdot (y(t) - \sin(t)\cdot x(t))}{-2\sin(2t) - 4\cos(2t) + 5 - e^{-4t}}.$$

Задача 4.6. Задана динамічна система

$$\ddot{x} = x, y(t) = x(t),$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ – відомі спостереження, $t \in [0, T]$. Знайти розв'язок задачі спостереження з використанням грамміана спростережуваності.

Розв'язок.

4.3 Домашнє завдання

Задача 4.7.

Розв'язок.

Задача 4.8. Записати диференціальне рівняння для знаходження грамміана спостережуваності системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -t^2 x_2(t), \\ \quad y(t) = \sin(t)\cdot x_1(t) + \cos(t)\cdot x_2(t). \end{cases}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^\star$ – вектор фазових координат, y – скалярне спостереження.

Розв'язок. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, $A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t^2 \end{pmatrix}$, $H^\star = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

Тоді диференціальне рівняння для знаходження грамміана спостережуваності набуває вигляду

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{N}(t,t_0)}{dt} = -\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -t^2\end{pmatrix}\mathcal{N}(t,t_0) - \mathcal{N}(t,t_0)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -t^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}.$$

Або, що те саме,

$$\begin{pmatrix}\dot n_{11} & \dot n_{12}\\ \dot n_{12} & \dot n_{22}\end{pmatrix}(t,t_0) = -\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_{11} & n_{12}\\ n_{12} & n_{22}\end{pmatrix}(t,t_0) - \\ -\begin{pmatrix}n_{11} & n_{12}\\ n_{12} & n_{22}\end{pmatrix}(t,t_0)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -t^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin^2(t) & \sin(t)\cdot\cos(t)\\ \sin(t)\cdot\cos(t) & \cos^2(t)\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\dot n_{11} & \dot n_{12}\\ \dot n_{12} & \dot n_{22}\end{pmatrix}(t,t_0) = -\begin{pmatrix}n_{11} & n_{12}\\ n_{11}-t^2n_{12} & n_{12}-t^2n_{22}\end{pmatrix}(t,t_0) - \\ -\begin{pmatrix}n_{11} & n_{11}-t^2n_{12}\\ n_{12} & n_{12}-t^2n_{22}\end{pmatrix}(t,t_0) + \begin{pmatrix}\sin^2(t) & \sin(t)\cdot\cos(t)\\ \sin(t)\cdot\cos(t) & \cos^2(t)\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}\dot n_{11}(t,t_0) = -2n_{11}(t,t_0) + \sin^2(t)\\ \dot n_{12}(t,t_0) = -n_{11}(t,t_0) + (t^2-1)n_{12}(t,t_0) + \sin(t)\cdot\cos(t)\\ \dot n_{22}(t,t_0) = -2n_{12}(t,t_0) + 2t^2n_{22}(t,t_0) + \cos^2(t)\end{cases}$$

Задача 4.9. Чи буде система цілком спостережуваною?

1.
$$\ddot x = a^2x, \quad y(t) = p\dot x(t);$$

2.
$$\begin{cases}\dot x_1 = 2x_1 + \alpha x_2,\\ \dot x_2 = -\alpha x_1 - \alpha x_2,\\ y(t) = x_1 + \beta x_2.\end{cases}$$

3.
$$\begin{cases}\dot x_1 = x_2 - 2x_3,\\ \dot x_2 = x_1 - x_3,\\ \dot x_3 = -2x_3,\\ y(t) = -x_1 + x_2 - x_3.\end{cases}$$

Розв'язок. 1. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & p \end{pmatrix}$. Матриці стаціонарні, тому застосуємо другий критерій спостережуваності:

$$R = \begin{pmatrix} H^\star & A^\star H^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, ранг 2, тобто система є цілком спостережуваною, якщо тільки $a \neq 0$ і $p \neq 0$.

2. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & \beta \end{pmatrix}$. Матриці стаціонарні, тому застосуємо другий критерій спостережуваності:

$$R = \begin{pmatrix} H^\star & A^\star H^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 - \alpha\beta \\ \beta & \alpha - \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

$\det R = \alpha - 2\beta - \alpha\beta + \alpha\beta^2 \neq 0$ (тобто система є спостережуваною), якщо тільки $\alpha \neq \dfrac{2\beta}{1 - \beta + \beta^2}$.

3. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Матриці стаціонарні, тому застосуємо другий критерій спостережуваності:

$$R = \begin{pmatrix} H^\star & A^\star H^\star & (A^\star)^2 H^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, ранг 2 а не 3, тому система не є цілком спостережуваною.

Задача 4.10. Для яких параметрів a, b система

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = bx_2(t), \\ \quad y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

є цілком спостережуваною? Тут $x = (x_1, x_2)^\star$ – вектор фазових координат, y – скалярне спостереження.

Розв'язок. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матриці стаціонарні, тому застосуємо другий критерій спостережуваності:

$$R = \begin{pmatrix} H^\star & A^\star H^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

$\det R = b - a$, тобто система є цілком керованою якщо тільки $a \neq b$.

Задача 4.11. Побудувати спостерігач у загальному вигляді для такої системи:

1.
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + t^2 x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, \\ y(t) = bx_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + k_1 \dfrac{dx}{dt} + k_2 x = 0, \\ y(t) = x(t) + \beta \dfrac{dx(t)}{dt}. \end{cases}$$

Розв'язок. 1. Почнемо з того, що $A = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} b & 1 \end{pmatrix}$. Далі пишемо

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}' (t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (t) \left(y(t) - \begin{pmatrix} b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} (t) \right).$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1'(t) = \hat{x}_1(t) + t^2 \hat{x}_2(t) + k_1(t)(y(t) - b\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)) \\ \hat{x}_2'(t) = 2\hat{x}_1(t) - 3\hat{x}_2(t) + k_2(t)(y(t) - b\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)) \end{cases}$$

2. Введемо заміну $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, тоді маємо $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix}$. Далі пишемо

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}' (t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} (t) \left(y(t) - \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} (t) \right).$$

$$\begin{cases} \hat{x}_1'(t) = \hat{x}_2(t) + K_1(t)(y(t) - \hat{x}_1(t) - b\hat{x}_2(t)) \\ \hat{x}_2'(t) = -k_2\hat{x}_1(t) - k_1\hat{x}_2(t) + K_2(t)(y(t) - \hat{x}_1(t) - b\hat{x}_2(t)) \end{cases}$$

Задача 4.12.

Розв'язок.

Задача 4.13.

Розв'язок.