Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

Пічкур В. В.

Лекції з теорії керування

2017

Зміст

I Вступ **5**

1 Основні поняття теорії керування **6**

II Керованість і спостережуваність в лінійних системах **13**

2 Множина досяжності **14**
2.1 Множина досяжності лінійної системи керування 14
2.2 Множина керованості лінійної системи керування 19

3 Керованість в лінійних системах **22**
3.1 Критерій керованості в лінійних нестаціонарних системах . 22
3.2 Грамміан керованості 25
3.3 Задача про переведення лінійної системи керування з точки в точку 26
3.4 Критерій керованості для лінійної стаціонарної системи . . 28
3.5 Загальна задача керованості 34

4 Спостережуваність в лінійних неперервних системах **37**
4.1 Вступ 37
4.2 Постановка задачі спостереження 37
4.3 Лінійна задача спостереження 38
4.4 Грамміан спостережуваності 39
4.5 Принцип двоїстості 41
4.6 Оцінка стану системи на основі грамміана спостережуваності 43

III Варіаційний метод **48**

5 Варіаційний метод в задачах оптимального керування **49**
5.1 Варіаційний метод і задача оптимального керування 49

5.2 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним функціоналом . . . 52

IV Принцип максимуму Понтрягіна 56

6 Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільним правим кінцем 57
6.1 Постановка задачі і формулювання принципу максимуму . 57
6.2 Голчата варіація керування . . . 61
6.3 Варіація функціоналу і принцип максимуму Понтрягіна . . 65
6.4 Достатні умови оптимальності . . . 69
6.5 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості . . . 71
6.6 Побудова множини досяжності за допомогою принципу максимуму Понтрягіна . . . 72

7 Принцип максимуму Понтрягіна при загальних обмеженнях 75
7.1 Принцип Лагранжа для задачі оптимального керування . . 75
7.2 Принцип максимуму Понтрягіна . . . 78

8 Принцип максимуму і лінійна задача швидкодії 86
8.1 Властивості лінійної задачі швидкодії . . . 86
8.2 Екстремальне керування і принцип максимуму Понтрягіна 87
8.3 Умова спільності положення. . . . 90

9 Числові методи розв'язання задач оптимального керування на основі варіаційного методу і принципу максимуму Понтрягіна 93
9.1 Метод найшвидшого спуску . . . 94
9.2 Метод зведення до крайової задачі принципу максимуму . 96
9.3 Метод гольчатої лінеаризації . . . 100

V Синтез систем керування 101

10 Метод динамічного програмування: дискретний варіант 105
10.1 Принцип оптимальності і дискретне рівняння Белмана . . . 105
10.2 Оптимальне керування лінійною дискретною системою . . 112

11 Метод динамічного програмування для неперервних систем **115**
11.1 Принцип оптимальності Белмана . . . 115
11.2 Функція Белмана . . . 118
11.3 Алгоритм методу динамічного програмування для неперервних систем . . . 119
11.4 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана . . . 121
11.5 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для задачі керування з вільним часом . . . 128
11.6 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним функціоналом . . . 130
11.7 Оптимальне за швидкодією гасіння кутових швидкостей мікросупутника . . . 133

12 Множина досяжності і функція Белмана **136**
12.1 Принцип оптимальності для задачі оптимального керування з вільним лівим кінцем . . . 136
12.2 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана . . . 137
12.3 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості . . . 139
12.4 Зв'язок між функцією Белмана і множиною досяжності . . 140
12.5 Множина досяжності лінійної системи керування при квадратичних обмеженнях . . . 142
12.5.1 Побудова функції Белмана . . . 143
12.5.2 Знаходження еліпсоїда, що описує множину досяжності . . . 145

13 Стабілізація системи керування **152**
13.1 Постановка задачі стабілізації . . . 152
13.2 Стабілізація стаціонарних систем . . . 153
13.3 Стабілізація і метод функцій Ляпунова . . . 155
13.4 Гасіння кутових швидкостей твердого тіла . . . 156
13.5 Задача оптимальної стабілізації . . . 159

VI Оцінка стану системи керування **162**

14 Оцінка стану системи в задачі спостереження **163**
14.1 Оцінка стану системи . . . 163

15 Фільтрація. Множинний підхід **170**
15.1 Постановка задачі фільтрації. Інформаційна область 170
15.2 Задача лінійної фільтрації 171

VII Додаток **175**

16 Системи диференціальних рівнянь Каратеодорі **176**
16.1 Простір неперервних функцій 176
16.2 Абсолютно неперервні функції 176
16.3 Теорема Каратеодорі 179
16.4 Лінійна система диференціальних рівнянь. Фундаментальна матриця 182
16.5 Спряжена система 184

17 Операції над множинами. Опуклі множини **188**
17.1 Алгебраїчні операції над множинами 188
17.1.1 Сума двох множин 188
17.1.2 Добуток множини на скаляр 189
17.1.3 Добуток матриці на множину 190
17.1.4 Окіл множини 190
17.2 Опуклі множини 191

18 Опорні функції **194**

19 Чебишевський центр **201**

20 Елементи теорії багатозначних відображень **206**
20.1 Метрика Хаусдорфа 206
20.2 Багатозначні відображення 211
20.3 Інтеграл від багатозначного відображення 215

21 Необхідні умови екстремуму **217**
21.1 Перша варіація функціонала. Похідна Фреше 217
21.2 Принцип Лагранжа для скінченновимірної екстремальної задачі 220

Позначення **222**

Література **224**

Частина I

Вступ

Лекція 1

Основні поняття теорії керування

Теорія керування почала інтенсивно формуватись в 50-70 роки минулого століття завдяки актуальним задачам автоматичного регулювання технічних систем, керування літальними апаратами та іншим прикладним проблемам. *Системою керування* називається сукупність об'єктів, на поведінку яких можна впливати вибором зовнішніх параметрів, які називаються *керуваннями*. Для задач керування характерні такі ознаки.

Динаміка об'єкту

Для задачі керування є характерним наявність деякого динамічного об'єкту, тобто об'єкту, що змінюється з часом. Нехай положення об'єкту в кожен момент часу t характеризується набором параметрів $x_1, ..., x_n$. Це можуть бути координати об'єкту, координати його швидкості тощо. Вектор $x = (x_1, ..., x_n)^*$ називається *вектором фазових координат* або *вектором стану*. Процес переходу системи з одного стану в інший називають *перехідним процесом.* Час t може змінюватись як неперервно, так і дискретно.

Керування

Для систем керування передбачається існування деяких рулів, від положення яких залежить поведінка системи. Нехай положення рулів характеризується в кожний момент часу t набором параметрів $u = (u_1, ..., u_m)^*$. Вектор $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))^*$ називається *керуючим параметром або керуванням.* Передбачається, що стан $x(t)$ об'єкту в кожен момент часу t залежить від значень керування u до моменту t і не залежить від майбутніх значень керування. Схематично це зображено на рисунку 1.1.

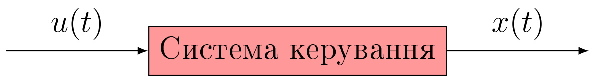

Рис. 1.1. Система керування

Математична модель

Для формулювання задачі керування важливо записати математичні залежності між функціями $x(\cdot)$ і $u(\cdot)$. Для цього потрібно записати математичну модель процесу, в якій певні параметри грають роль функції керування. Розповсюдженим видом співвідношень, які застосовуються при формулюванні задачі керування, є дискретні системи вигляду

$$x(t+1) = f\left(x(t), u(t), t\right), \ t = 0, 1, 2, \dots . \tag{1.1}$$

У цьому випадку, знаючи значення керування $u(t)$ і початковий стан, можна визначити динаміку систем як розв'язок рівняння (1.1).

Залежність між керуванням і станом системи часто записується за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t), u(t), t\right), \ t \geq t_0. \tag{1.2}$$

Тоді система (1.2) задає вигляд залежності між функцією керування і фазовою змінною. Зрозуміло, що типовою є ситуації, при якій зміна керування призводить до зміни значення вектора стану системи.

Разом з тим, системи вигляду (1.1), (1.2) не вичерпують всіх видів співвідношень, які зустрічаються в математичній теорії керування. Так, розповсюдженими класами математичних моделей є системи лінійних алгебраїчних рівнянь, системи з розподіленими параметрами, гібридні системи тощо.

Початковий і кінцевий стан об'єкту. Фазові обмеження

В задачі керування можуть бути задані множини, з яких вибираються початкові умови. Тобто, якщо початковій момент часу є t_0, тоді задається множина допустимих початкових станів $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ і

$$x(t_0) \in M_0.$$

Крім того, бажано керувати системою так, щоб в кінцевий момент часу T об'єкт попав на множину $M_T \subset \mathbb{R}^n$, яка називається *множиною кінцевих станів*. Ця умова записується так

$$x(T) \in M_T.$$

Якщо $M_0 = \{x_0\}$, тобто $x(t_0) = x_0$, то задача називається *з закріпленим лівим кінцем*, якщо $M_T = \{x_T\}$, тобто $x(T) = x_T$, то задача називається *з закріпленим правим кінцем*.

У загальному випадку на фазові змінні можуть задаватись обмеження на всьому проміжку $t \in [t_0, T]$. Тоді це записують таким способом

$$x(t) \in M(t),$$

де $M(t) \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, T]$. Наприклад,

$$|x_i(t)| \leq 1,\ i = 1, 2, ..., n,\ t \in [t_0, T] .$$

Такі обмеження називаються *обмеженнями на фазові координати системи*. Фазові змінні характеризують можливість функціонування системи в заданих межах.

Клас допустимих керувань

Завдяки технічним характеристикам керованого процесу, а також математичним особливостям співвідношень, за допомогою яких формується математична модель, в постановку задачі керування включаються обмеження на функцію керування. Є два основних види обмежень на керування – геометричні і функціональні.

Обмеження на керування вигляду

$$u\,(t) \in \mathfrak{U},$$

які задаються в кожний момент часу, називаються *геометричними*. Тут $\mathfrak{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ – задана і, як правило, замкнена множина. Наприклад, якщо $u\,(t)$ – тяга двигуна, то ~~обмеження~~ геометричні обмеження на керування такі

$$u_{\min} \leq u\,(t) \leq u_{\max}.$$

Якщо математична модель задана у вигляді (1.2), то для існування розв'язку задачі Коші такої системи потрібно вказати функціональний клас, з якого вибираються функції керування. Як правило, функція керування належить до класу кусково неперервних функцій. Разом з тим, часто функція керування належить класу вимірних функцій, інтегрованих за Лебегом, або кусково постійних функцій. Такі обмеження називаються *функціональними*.

Вибір класу обмежень на функціональний клас залежить не тільки від виду математичної моделі, але і від способу керування системою. Так, в сучасних системах автоматичного керування типовою є ситуація, при якій керування здійснюється за допомогою кусково-постійної функції, що приймає два значення [1]. Це означає, що в системі існує тільки два положення керування, умовно кажучи „увімкнене" керування та „вимкнене", а час переходу між ними малий і ним нехтують [2]. Саме з подібних причин, клас неперервних функцій рідко вибирається в постановках задач керування.

Отже, *допустимим* називається керування, яке задовольняє функціональним і геометричним обмеженням на керування, при цьому відповідні йому розв'язки математичної моделі, яка описує поведінку системи керування, задовольняють обмеженням на фазові координати. Сукупність допустимих керувань складає *клас допустимих керувань*.

Принципи керування

Для кожного керування $u(\cdot)$ об'єкт керування породжує функцію $x(\cdot)$. Тому керування $u(\cdot)$ називають також *сигналом на вході*, а $x(\cdot)$ – сигналом на виході об'єкту. На систему, як правило, діють неконтрольовані зовнішні впливи,випадкові шуми, які ми позначимо $r(\cdot)$.

Припустимо, що ми вважаємо, що в процесі функціонування системи керування u вибирається виключно в залежності від моменту часу, в який воно подається на вхід (рисунок 1.2). [3] Таке керування називається *програмним*.

Втім, в прикладних задачах особливий інтерес викликають керування, що побудовані в залежності як від часової змінної, так і від стану системи в момент t (рисунок 1.3). У цьому випадку керування вибираються у вигляді

$$u = g(x, t),$$

де $g(x, t)$ – функція аргументів x і t. Таке керування називається *керуванням з оберненим зв'язком*. Так, керування вигляду, $u = B(t)x$, де $B(t)$ – $m \times n$ матриця, є керуванням з оберненим зв'язком.

[1] Якщо пристрій керування працює без участі людини, то система керування називається *автоматичною*.

[2] релейне керування

[3] Тобто, керування $u(t)$ є функцією тільки від змінної t.

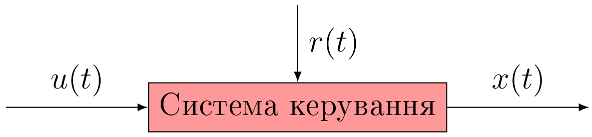

Рис. 1.2. Розімкнена система керування

Система керування, побудована за принципом оберненого зв'язку, називається *замкненою*, а за допомогою програмного керування – *розімкненою*.

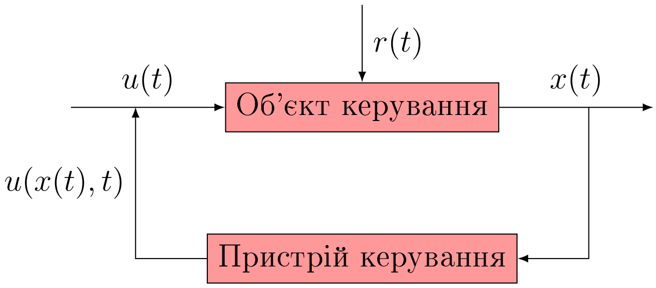

Рис. 1.3. Замкнена система керування

Спостереження

Система керування може містити пристрій, що здійснює спостереження за станом системи. Це необхідно за умови, якщо немає достовірної інформації про всі компоненти вектора фазових координат. Тоді потрібно оцінювати стан системи за вимірами. У такому разі до математичної моделі системи додають співвідношення, які називають *рівняннями спостереження*. Вони описують особливості вимірювальних пристроїв і процесу вимірювання. Як правило, рівняння спостереження мають вигляд

$$y(t) = G(x(t), t), \ t \in [t_0, T], \tag{1.3}$$

де $G(x,t)$ – неперервна функція розмірності r. Вважається, що значення вектора спостереження $y(t) = (y_1(t), ..., y_r(t))^*$ є відомим в кожний момент часу $t \in [t_0, T]$.

Критерій якості

Може бути, що існує багато керувань і траєкторій систем що задовольняють фазовим обмеженням і обмеженням на керування. Потрібно вибрати серед всіх можливих керувань найкраще. Тоді до системи керування і обмежень додають критерій якості, визначений на допустимих керуваннях і траєкторіях. Отже, серед керувань і траєкторій системи знаходять такі, на яких обраний критерій досягає екстремуму [4].

Важливим прикладом критерію якості є *функціонал Майєра*

$$\mathcal{J}(u, x) = \Phi(x(T)),$$

який називається також *термінальним функціоналом.* Функціонал Майєра вказує на те, що метою керування є найкраще положення системи у кінцевий момент часу.

В багатьох задачах керування вибирається за допомогою функціоналу

$$\mathcal{J}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt. \tag{1.4}$$

Критерій якості (1.4) називається *функціоналом Лагранжа.* Він характеризує систему протягом всього періоду її функціонування. Комбінацією функціоналу Майєра і функціоналу Лагранжа є функціонал вигляду

$$\mathcal{J}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T)). \tag{1.5}$$

Критерій якості (1.5) називається *функціоналом Больца.* Також в прикладних задачах часто зустрічається складний для застосування функціонал максимум вигляду

$$\mathcal{J}(u, x) = \max_{t\in[t_0,T]} \Phi(x(t)).$$

Тут $\Phi(x)$, $f_0(x, u, t)$ є неперервними функціями своїх аргументів.

Таким способом, приходимо до *задачі оптимального керування*, яка полягає у тому, щоб знайти допустиме керування $u_*(\cdot)$ і відповідну йому траєкторію $x_*(\cdot)$, що задовольняє умові на правому і лівому кінцях і фазовим обмеженням і мінімізують критерій якості.

Приклад 1.1. Розглянемо задачу оптимального керування фізичним маятником в околі стану рівноваги. Нехай x – відхилення маятника у випадку малих коливань. Тоді математична модель має вигляд

$$\frac{d^2x(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = u(t), \tag{1.6}$$

[4] мінімуму, для визначеності

де $u(t)$ – зовнішня сила, яка вибирається за параметр керування. Керування належить класу програмних керувань і є кусково неперервною функцією, яке задовольняє обмеженням

$$|u(t)| \leq \tilde{u},$$

де $\tilde{u}$ – відоме число. Рівняння (1.6) можна подати у вигляді

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\omega^2 x_1(t) + u(t),$$

при цьому початковий стан задається рівностями $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$. Задача оптимального керування полягає в мінімізації критерію якості

$$\mathcal{I}(u, x) = (x_1(T) - x^{(1)})^2 + (x_2(T) - x^{(2)})^2$$

на розв'язках системи (1.6). Тут $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ – задані. Така задача є задачею програмного керування з закріпленим правим кінцем, критерій якості є функціоналом типу Майєра. Керування може вибиратися також у формі оберненого зв'язку. Наприклад,

$$u(x, t) = a(t) + b(t)x,$$

де $a(t)$, $b(t)$ – кусково неперервні функції.

Рекомендована література: [2, 3, 10, 14, 20, 24, 33, 41, 44, 53, 55]

Частина II

Керованість і спостережуваність в лінійних системах

Лекція 2

Множина досяжності

2.1 Множина досяжності лінійної системи керування

Розглянемо систему керування у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + B(t)u(t), \tag{2.1}$$

де $x = (x_1, \ \ldots, x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, \ \ldots, u_m)^*$ – вектор керувань, $A(t)$, $B(t)$ – матриці з інтегрованими компонентами розмірності $n \times n$ та $n \times m$ відповідно. Клас допустимих керувань складається з усіх функцій $u(t) \in \mathcal{U}(t)$, що інтегровані за Лебегом, при цьому відображення $\mathcal{U} : [t_0, T] \to comp(\mathbb{R}^n)$ є вимірним і інтегрально обмеженим, $t \in [t_0, T]$. Інтегральна обмеженість $\mathcal{U}$ означає, що знайдеться така інтегрована на $[t_0, T]$ функція $k(t) > 0$, що $\|\mathcal{U}(t)\| \leq k(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Нехай $M_0 \in comp(\mathbb{R}^n)$, $t \in [t_0, T]$.

Означення 2.1. Множиною досяжності $\mathcal{X}(t, M_0)$ системи (2.1) з множини M_0 в момент часу $t \in [t_0, T]$ назвемо множину всіх точок $z \in \mathbb{R}^n$ фазового простору, в які можна перевести систему (2.1) на відрізку часу $[t_0, t]$ із усіх можливих початкових умов $x_0 \in M_0$ і при всіх можливих допустимих керуваннях $u(\cdot)$.

Іншими словами,

$$\mathcal{X}(t, M_0) = \cup_{x_0 \in M_0} \cup_{u(\cdot)} x\,(t, u, x_0)\,, \tag{2.2}$$

де $x\,(t, u, x_0)$ – значення розв'язку системи (2.1) в момент $t \in [t_0, T]$ при допустимому керуванні $u(\cdot)$ і за умови $x\,(t_0) = x_0$. Об'єднання в формулі (2.2) береться за всіма допустимими керуваннями і за всіма початковими умовами з множини M_0.

Теорема 2.1. *Множина досяжності* $\mathfrak{X}(t, M_0)$ *має вигляд*

$$\mathfrak{X}\left(t, M_0\right)=\Theta\left(t, t_0\right) M_0+\int_{t_0}^t \Theta\left(t, s\right) B(s) \mathfrak{U}(s) ds.$$

Доведення. За формулою Коші

$$x\left(t, u, x_0\right)=\Theta\left(t, t_0\right) x_0+\int_{t_0}^t \Theta\left(t, s\right) B(s) u(s) ds,$$

де $u(t) \in \mathfrak{U}(t)$ – допустиме керування. За означенням інтегралу Аумана і означенням добутку матриці на множину маємо

$$\mathfrak{X}(t, M_0)=\bigcup_{x_0 \in M_0} \bigcup_{u(\cdot)} x\left(t, u, x_0\right)=$$

$$=\bigcup_{x_0 \in M_0} \bigcup_{u(t) \in \mathfrak{U}(t)}\left\{\Theta\left(t, t_0\right) x_0+\int_{t_0}^t \Theta\left(t, s\right) B(s) u(s) ds\right\}=$$

$$=\Theta\left(t, t_0\right) M_0+\int_{t_0}^t \Theta\left(t, s\right) B(s) \mathfrak{U}(s) ds.$$

□

Наслідок. Має місце співвідношення

$$\mathfrak{X}\left(t, 0\right)=\int_{t_0}^t \Theta\left(t, s\right) B(s) \mathfrak{U}(s) ds.$$

Тому

$$\mathfrak{X}\left(t, M_0\right)=\Theta\left(t, t_0\right) M_0+\mathfrak{X}\left(t, 0\right).$$

Приклад 2.1. Якщо матриця $A(t)=0$, $\mathfrak{U}(t)=\mathfrak{U} \in comp(\mathbb{R}^n)$ – постійне відображення, $t \in [t_0, T]$, тоді

$$\mathfrak{X}(t, M_0)=M_0+\int_{t_0}^t \mathfrak{U} ds=M_0+(t-t_0) co \mathfrak{U}.$$

Теорема 2.2. *Якщо* $M_0 \in comp(\mathbb{R}^n)$, *то множина досяжності* $\mathfrak{X}(t, M_0)$ *є непорожньою компактною множиною, тобто* $\mathfrak{X}(t, M_0)$ *належить сукупності* $comp(\mathbb{R}^n)$. *Якщо* $M_0 \in conv(\mathbb{R}^n)$, *то* $\mathfrak{X}(t, M_0) \in conv(\mathbb{R}^n)$.

Доведення. З умови $M_0 \in comp(\mathbb{R}^n)$ випливає, що $\Theta\left(t, t_0\right) M_0$ належить $comp(\mathbb{R}^n)$, як добуток невиродженої матриці на компакт,

$$\int_{t_0}^t \Theta\left(t, s\right) B(s) \mathfrak{U}(s) ds \in conv(\mathbb{R}^n)$$

за властивостями інтегралу від багатозначного відображення (теорема 20.3, стор. 215), а також з того факту, що сума двох компактів є компакт. Якщо $M_0 \in conv(\mathbb{R}^n)$, то, оскільки добуток матриці на опуклу множину є опуклою множиною і сума двох опуклих множин є опуклою, то $\mathfrak{X}(t, M_0) \in conv(\mathbb{R}^n)$. □

Теорема 2.3. *Опорний функціонал множини досяжності має вигляд*

$$c(\mathfrak{X}(t, M_0), \psi) = c(M_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^{t} c(\mathfrak{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)ds, \quad (2.3)$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Доведення. Доведення теореми випливає з теореми 2.2 та з елементарних властивостей опорних функцій (стор. 194). □

Теорема 2.4. *Має місце співвідношення*

$$c(\mathfrak{X}(T, M_0), \psi) = c(M_0, z(t_0)) + \int_{t_0}^{T} c(\mathfrak{U}(s), B^*(s)z(s))ds, \quad (2.4)$$

де $z(t)$ *є розв'язком спряженої системи*

$$\frac{dz(t)}{dt} = -A^*(t)z(t), \ \ z(T) = \psi, \ \ t \in [t_0, T]. \quad (2.5)$$

Доведення. За наслідком з леми 16.1 (стор. 184) матриця $\Psi(s, t) = \Theta^*(t, s)$ є фундаментальною матрицею спряженої системи (2.5). За формулою Коші $z(s) = \Psi(s, t)z(t)$. Тому при $t = T$ маємо

$$z(s) = \Psi(s, T)z(T) = \Theta^*(T, s)\psi.$$

Звідси при $s = t_0$

$$z(t_0) = \Theta^*(T, t_0)\psi.$$

Підстановка одержаних співвідношень в (2.3) дає (2.4) □

Теорема 2.5. *Багатозначне відображення* $F : [t_0, T] \to conv(\mathbb{R}^n)$, *яке кожній точці* $t \in [t_0, T]$ *ставить у відповідність множину досяжності* $\mathfrak{X}(t, M_0)$ *системи* (2.1), $M_0 \in conv(\mathbb{R}^n)$, *є неперервним.*

Доведення. Опорна функція множини досяжності має вигляд (2.3) і вона є неперервною, оскільки опорна функція є неперервною за $\psi \in \mathbb{R}^n$, фундаментальна матриця є неперервною за $t \in [t_0, T]$, а інтеграл є неперервною функцією від верхньої границі. У цьому випадку $c(\mathfrak{X}(t, M_0), \psi)$ є неперервною функцією за $t \in [t_0, T]$, при кожному фіксованому $\psi \in \mathbb{R}^n$. Тоді за теоремою про необхідну і достатню умову неперервності багатозначного відображення з опуклими значеннями (теорема 20.1, стор 213) , маємо неперервність відображення F. □

Теорема 2.6. *Якщо $M_0, M_1 \in conv(\mathbb{R}^n)$, то знайдеться неперервна функція $L(t) > 0$ така, що*

$$\alpha(\mathcal{X}(t, M_1), \mathcal{X}(t, M_0)) \leq L(t)\alpha(M_1, M_0).$$

Доведення. За (2.3) і за лемою 20.4 маємо

$$|c\left(\mathcal{X}(t, M_1), \psi\right) - c\left(\mathcal{X}(t, M_0), \psi\right)| =$$

$$= |c\left(M_1, \Theta^*\left(t, t_0\right)\psi\right) - c\left(M_0, \Theta^*\left(t, t_0\right)\psi\right)| \leq \|\Theta^*\left(t, t_0\right)\psi\|\alpha(M_1, M_0),$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$. За лемою 20.5

$$\alpha(\mathcal{X}(t, M_1), \mathcal{X}(t, M_0)) = \max_{\psi \in \mathcal{S}} |c\left(\mathcal{X}(t, M_1), \psi\right) - c\left(\mathcal{X}(t, M_0), \psi\right)| \leq$$

$$\leq L(t)\alpha(M_1, M_0),$$

де $L(t) = \max_{\psi \in \mathcal{S}} \|\Theta^*\left(t, t_0\right)\psi\| > 0$. Звідси випливає твердження теореми. □

Теорема 2.6 показує, що має місце умова Ліпшиця для множини досяжності за початковою множиною. З теореми 2.5 випливає, що якщо $M_k \in conv(\mathbb{R}^n)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, $\lim_{k\to\infty} \alpha(M_k, M_0) = 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(\mathcal{X}(t, M_k), \mathcal{X}(t, M_0)) = 0.$$

Теорема 2.7. *Якщо $M_0, M_1 \in conv(\mathbb{R}^n)$, $M_0 \subset int M_1$, то*

$$\mathcal{X}(t, M_0) \subset int\mathcal{X}(t, M_1).$$

Доведення. За наслідком з теореми 2.1 мають місце рівності

$$\mathcal{X}(t, M_i) = \Theta\left(t, t_0\right) M_i + \mathcal{X}(t, 0), \ i = 0, 1.$$

Як наслідок теореми 2.3

$$c\left(\mathcal{X}(t, M_i), \psi\right) = c\left(M_i, \Theta^*\left(t, t_0\right)\psi\right) + c\left(\mathcal{X}(t, x_0), \psi\right),$$

де $\psi \in \mathcal{S}$, $i = 0, 1$. Тоді

$$c\left(\mathcal{X}(t, M_0), \psi\right) - c\left(\mathcal{X}(t, M_1), \psi\right) = c\left(M_0, \Theta^*\left(t, t_0\right)\psi\right) - c\left(M_1, \Theta^*\left(t, t_0\right)\psi\right),$$

$\psi \in \mathcal{S}$. Так як $M_0 \subset int M_1$, то

$$c\left(M_0, \Theta^*\left(t, t_0\right)\psi\right) < c\left(M_1, \Theta^*\left(t, t_0\right)\psi\right), \ \psi \in \mathcal{S}$$

згідно з наслідком 7 леми 18.3. З останніх двох нерівностей випливає, що

$$c\left(\mathcal{X}(t, M_0), \psi\right) < c\left(\mathcal{X}(t, M_1), \psi\right), \ \psi \in \mathcal{S}.$$

Застосовуючи знову наслідок 7 леми 18.3, одержуємо

$$\mathcal{X}(t, M_0) \subset int\mathcal{X}(t, M_1).$$

Звідси випливає твердження теореми. □

Наслідок. Якщо $M_0 \in conv(\mathbb{R}^n)$, $x_0 \in intM_0$, то

$$\mathcal{X}(t, x_0) \subset int\mathcal{X}(t, M_0).$$

Приклад 2.2. Розглянемо скалярну систему керування

$$\frac{dx}{dt} = ax + u,$$

за умови, що $a > 0$, $u(t) \in [-1, 1]$, $x_0 \in [-1, 1]$, $t \in [0, 1]$. Формула Коші має вигляд

$$x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}u(s)ds.$$

Тоді множина досяжності

$$\mathcal{X}(t) = e^{at}\left[-1, 1\right] + \int_0^t e^{a(t-s)}\left[-1, 1\right] ds.$$

Опорна функція множини досяжності має вигляд

$$c(\mathcal{X}(t), \psi) = c(e^{at}\left[-1, 1\right], \psi) + \int_0^t c(e^{a(t-s)}\left[-1, 1\right], \psi)ds =$$
$$= \left|e^{at}\psi\right| + \int_0^t \left|e^{a(t-s)}\psi\right| ds.$$

Оскільки

$$\int_0^t \left|e^{a(t-s)}\psi\right| ds = \frac{|\psi|}{a}\left(e^{at} - 1\right),$$

то

$$c(\mathcal{X}(t), \psi) = \left(e^{at} + \frac{e^{at} - 1}{a}\right)|\psi|, \ t \in [0, 1], \ \psi \in \mathbb{R}^1.$$

Звідси

$$\mathcal{X}(t) = \left[-h(t), h(t)\right], \ h(t) = \frac{(a+1)e^{at} - 1}{a}.$$

2.2 Множина керованості лінійної системи керування

Розглянемо систему керування (2.1). Нехай $M_T \in comp(\mathbb{R}^n)$, $t \in [t_0, T]$. Має місце таке означення.

Означення 2.2. Множиною керованості $\mathcal{Z}(t, M_T)$ системи (2.1) в момент часу $t \in [t_0, T]$ на множину M_T назвемо сукупність всіх точок $z \in \mathbb{R}^n$ фазового простору, з яких можна перевести систему (2.1) на відрізку часу $[t, T]$ зі стану $x(t) = z$ на множину M_T при деякому допустимому керуванні $u(\cdot)$.

Теорема 2.8. *Множина керованості $\mathcal{Z}(t, M_T)$ має вигляд*

$$\mathcal{Z}\left(t, M_T\right) = \Theta\left(t, T\right) M_T + \int_t^T \Theta\left(t, s\right) B(s)((-1) \cdot \mathcal{U}(s))ds.$$

Доведення. Нехай $z \in \mathcal{Z}(t, M_T)$. За формулою Коші

$$x\left(T\right) = \Theta\left(T, t\right) z + \int_t^T \Theta\left(T, s\right) B(s)u(s)ds \in M_T,$$

де $u(t) \in \mathcal{U}(t)$ – допустиме керування. Звідси

$$\Theta\left(T, t\right) z = x\left(T\right) - \int_t^T \Theta\left(T, s\right) B(s)u(s)ds.$$

З останнього співвідношення знаходимо

$$z = \Theta\left(t, T\right) x\left(T\right) - \Theta\left(t, T\right) \int_t^T \Theta\left(T, s\right) B(s)u(s)ds =$$

$$= \Theta\left(t, T\right) x\left(T\right) - \int_t^T \Theta\left(t, s\right) B(s)u(s)ds,$$

де $x\left(T\right) \in M_T$. За означенням інтегралу Аумана і означенням добутку матриці на множину маємо

$$\mathcal{Z}\left(t, M_T\right) = \Theta\left(t, T\right) M_T + \int_t^T \Theta\left(t, s\right) B(s)((-1) \cdot \mathcal{U}(s))ds.$$

□

Теорема 2.9. *Якщо $M_T \in comp(\mathbb{R}^n)$, то множина керованості $\mathcal{Z}(t, M_T)$ належить сукупності $comp(\mathbb{R}^n)$. Якщо $M_T \in conv(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{Z}(t, M_T) \in conv(\mathbb{R}^n)$.*

Доведення. Теорема обгрунтовується аналогічно до доведення теореми 2.2. □

Теорема 2.10. *Опорний функціонал множини керованості* $\mathcal{Z}(t, M_T)$ *має вигляд*

$$c(\mathcal{Z}(t, M_T), \psi) = c(M_T, \Theta^*(t,T)\psi) + \int_t^T c(\mathcal{U}(s), -B^*(s)\Theta^*(t,s)\psi)ds, \tag{2.6}$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2.11. *Багатозначне відображення* $F : [t_0, T] \to comp(\mathbb{R}^n)$, *яке кожній точці* $t \in [t_0, T]$ *ставить у відповідність множину керованості* $\mathcal{Z}(t, M_T)$ *системи* (2.1), *є неперервним.*

Доведення. Доведення проведемо за умови, що $M_0 \in conv(\mathbb{R}^n)$. У цьому випадку опорна функція має вигляд (2.3) і вона є неперервною, оскільки опорна функція є неперервною за $\psi \in \mathbb{R}^n$, фундаментальна матриця є неперервною за $t \in [t_0, T]$, а інтеграл є неперервною функцією від верхньою границі. У цьому випадку $c(\mathcal{X}(t, M_0), \psi)$ є неперервною функцією за $t \in [t_0, T]$, при кожному фіксованому $\psi \in \mathbb{R}^n$. Тоді за теоремою про необхідну і достатню умову неперервності багатозначного відображення з опуклими значеннями (теорема 20.1, стор 213) , маємо неперервність відображення F. □

Теорема 2.12. *Якщо* $M_T, N_T \in conv(\mathbb{R}^n)$, *то знайдеться* $L(t) > 0$ *таке, що*

$$\alpha(\mathcal{Z}(t, M_T), \mathcal{X}(t, N_T)) \le L(t)\alpha(M_T, N_T).$$

Доведення. З формули (2.6) і за лемою 20.4 маємо

$$|c(\mathcal{Z}(t, M_T), \psi) - c(\mathcal{Z}(t, N_T), \psi)| =$$

$$= |c(M_T, \Theta^*(t,T)\psi) - c(N_T, \Theta^*(t,T)\psi)| \le \|\Theta^*(t,T)\psi\|\alpha(M_T, N_T),$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$. За лемою 20.5

$$\alpha(\mathcal{Z}(t, M_T), \mathcal{Z}(t, N_T)) = \max_{\psi \in \mathcal{S}} |c(\mathcal{Z}(t, M_T), \psi) - c(\mathcal{Z}(t, N_T), \psi)| \le$$

$$\le L(t)\alpha(M_T, N_T),$$

де $L(t) = \max_{\psi \in \mathcal{S}} \|\Theta^*(t,T)\psi\| > 0$. □

Теорема 2.12 показує, що має місце умова Ліпшиця для множини керованості за початковою множиною. З теореми 2.12 випливає, що якщо $M_T \in conv(\mathbb{R}^n)$, $M_k \in conv(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2 \ldots$, $\lim_{k\to\infty} \alpha(M_k, M_T) = 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(\mathcal{Z}(t, M_k), \mathcal{Z}(t, M_T)) = 0.$$

Приклад 2.3. Розглянемо скалярну систему керування

$$\frac{dx}{dt} = ax + u,$$

за умови, що $a > 0$, $u(t) \in [-1, 1]$, $M_T = [-1, 1]$, $t \in [0, 1]$. Множина керованості

$$\mathcal{Z}(t) = e^{a(t-1)} [-1, 1] + \int_t^1 e^{a(t-s)} [-1, 1] \, ds.$$

Опорна функція множини керованості має вигляд

$$c(\mathcal{Z}(t), \psi) = c(e^{a(t-1)} [-1, 1], \psi) + \int_t^1 c(e^{a(t-s)} [-1, 1], \psi) ds =$$
$$= \left| e^{a(t-1)} \psi \right| + \int_t^1 \left| e^{a(t-s)} \psi \right| ds.$$

Оскільки

$$\int_t^1 \left| e^{a(t-s)} \psi \right| ds = \frac{|\psi|}{a} e^{at} \left(e^{at} - e^a \right),$$

то

$$c(\mathcal{Z}(t), \psi) = \left(e^{a(t-1)} + \frac{e^{at} \left(e^{at} - e^a \right)}{a} \right) |\psi|, \ t \in [0, 1], \ \psi \in \mathbb{R}^1.$$

Звідси

$$\mathcal{Z}(t) = [-h(t), h(t)], \ h(t) = e^{a(t-1)} + \frac{e^{at} \left(e^{at} - e^a \right)}{a}.$$

Лекція 3

Керованість в лінійних системах

3.1 Критерій керованості в лінійних нестаціонарних системах

Розглянемо систему керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{3.1}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $A(t), B(t)$ – інтегровані матриці розмірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно, $u(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))^*$ – інтегроване з квадратом керування.

Означення 3.1. Система (3.1) називається цілком керованою на інтервалі $[t_0, T]$, якщо для довільного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ і довільного $x_T \in \mathbb{R}^n$ існує на $[t_0, T]$ допустиме керування $u(\cdot)$ таке, що переводить систему (3.1) зі стану $x(t_0) = x_0$ в стан $x(T) = x_T$.

Означення 3.2. Система (3.1) називається цілком керованою, якщо для довільного t_0 знайдеться T таке, що (3.1) є цілком керованою на інтервалі $[t_0, T]$.

Іншими словами, для довільного моменту часу t_0 знайдеться T таке, що для будь-яких $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ можна вказати допустиме керування $u(\cdot)$, що переводить систему (3.1) зі стану $x(t_0) = x_0$ в стан $x(T) = x_T$. Геометрично це означає, що у випадку, коли геометричні обмеження на керування співпадають з $\mathbb{R}^m$, множина досяжності $\mathcal{X}(T, x_0)$ містить довільну точку x_T, а тому $\mathcal{X}(T, x_0) = \mathbb{R}^n$. Так як $\mathcal{X}(T, x_0) = \Theta\,(T, t_0)\, x_0 + \mathcal{X}(T, 0)$, то для визначення повної керованість достатньо аналізувати керованість нульового положення.

Будемо досліджувати задачу керованості для лінійної системи (3.1). Зауважимо, що дослідження на керованість системи полягає не в тому, щоб знайти керування, яке здійснює перевід системи з точки в точку, а в тому, щоб з'ясувати, чи існує таке керування.

Представимо загальній розв'язок системи (3.1) у формі Коші.

$$x(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)B(s)u(s)ds,$$

де $\Theta(t, s)$ – фундаментальна матриця системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, нормована за моментом s. Для того, щоб розв'язок задовольняв умові $x(T) = x_T$ необхідно і достатньо, щоб

$$\int_{t_0}^{T} \Theta(T, s)B(s)u(s)ds = c, \tag{3.2}$$

де $c = x_T - \Theta(T, s)x_0$. Отже система (3.1) є цілком керованою тоді і тільки тоді, коли для довільного вектора $c \in \mathbb{R}^n$ існує керування $u(\cdot)$, що задовольняє умову (3.2).

Нехай $c = (c_1, ..., c_n)^*$, а $h_1(t), ..., h_n(t)$ – вектор-стовпчики матриці $(\Theta(T, t)B(t))^*$, тобто

$$\Theta(T, t)B(t) = \begin{pmatrix} h_1^*(t) \\ \vdots \\ h_n^*(t) \end{pmatrix}.$$

Тоді рівність (3.2) можна переписати так

$$\int_{t_0}^{T} \langle h_i(s), u(s) \rangle \, ds = c_i, \;\; i = 1, 2, ..., n. \tag{3.3}$$

Співвідношення (3.3) будемо називати *моментними рівностями*, при цьому числа c_i називаються *моментами*, $i = 1, 2, ..., n$.

Теорема 3.1. *Для того, щоб система* (3.1) *була цілком керованою на відрізку* $[t_0, T]$ *необхідно і достатньо, щоб вектор-функції* $h_1(t), \ldots, h_n(t)$ *були лінійно незалежними на* $[t_0, T]$.

Доведення. Необхідність. Нехай система (3.1) є цілком керованою на $[t_0, T]$, тобто для довільного $c = (c_1, ..., c_n)^*$ існує допустиме керування $u(\cdot)$, що задовольняє (3.3). Позначимо

$$H = Lin\{h_1, h_2, \ldots h_n\} \subset \mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R}^m),$$

де Lin позначає лінійну оболонку множини. Отже, якщо $h \in H$, то

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i(t),$$

де α_i – постійні величини, $i = 1, \ldots, n$. Оскільки $\mathcal{L}_2([t_0, T]; \mathbb{R}^n)$ – гільбертів простір, то керування $u(\cdot)$ в цьому просторі можна представити у вигляді

$$u(\cdot) = v(\cdot) + w(\cdot),$$

де $v(\cdot) \in H$, $w(\cdot) \in H^{\perp}$, де $H^{\perp}$ – ортогональне доповнення до H. З $w(\cdot) \perp H$ випливає, що

$$\int_{t_0}^{T} \langle h_i(s), w(s) \rangle \, ds = 0, \;\; i = 1, 2, ..., n.$$

Так як $v(\cdot) \in H$, то $v(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h_j(t)$ і з (3.3) слідує

$$\int_{t_0}^{T} \langle h_i(s), u(s) \rangle \, ds = \int_{t_0}^{T} \langle h_i(s), v(s) + w(s) \rangle \, ds =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \langle h_i(s), v(s) \rangle \, ds = \int_{t_0}^{T} \left\langle h_i(s), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j h_j(s) \right\rangle ds =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{t_0}^{T} \langle h_i(s), h_j(s) \rangle \, ds = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle h_i(\cdot), h_j(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}_2} = c_i,$$

де $i, j = 1, 2, ..., n$. Система

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle h_i(\cdot), h_j(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}_2} = c_i, \;\; i = 1, 2, ..., n \tag{3.4}$$

має розв'язок при довільних c_i, оскільки система керування (3.1) цілком керована. Це означає, що визначник системи (3.4) $\Delta \neq 0$. Матриця системи (3.4) є матрицею Грамма, побудованою за системою функцій $\{h_1, h_2, \ldots h_n\}$, тобто

$$G = \left(\langle h_i(\cdot), h_j(\cdot) \rangle_{\mathcal{L}_2} \right)_{i,j=1}^{n},$$

при цьому $\Delta = \det G$ не дорівнює нулеві. Отже, матриця Грамма є невиродженою, тому $\{h_i(\cdot)\}_{i=1}^{n}$ – лінійно незалежна система функцій.

Достатність. Припустимо, що $\{h_i(\cdot)\}_{i=1}^{n}$ – лінійно незалежні функції. Виберемо довільним способом точки $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$. Це означає, що ми довільним способом вибрали вектор $c = x_T - \Theta(T, s)x_0$, $c = (c_1, ..., c_n)^*$.

Тоді керування, що задовольняє моментні співвідношення (3.3), будемо шукати у вигляді

$$u(\cdot) = v(\cdot) + w(\cdot),$$

де $v(\cdot) \in H$, $w(\cdot) \in H^{\perp}$. Підставляючи $u(\cdot)$ в (3.3) одержимо систему рівнянь (3.4) для визначення $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Так як $\Delta \neq 0$, то система (3.4) однозначно розв'язна, тому можна знайти $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ з (3.4) і керування

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i(t) + w(t),$$

яке розв'язує задачу про переведення системи керування (3.1) зі стану $x(t_0) = x_0$ в положення $x(T) = x_T$. Тут $w(\cdot)$ – довільна функція з $H^{\perp}$. $\square$

3.2 Граммiан керованостi

З теореми 3.1 та її доведення випливає, що для повної керованості системи (3.1) на інтервалі $[t_0, T]$ необхідно і достатньо, щоб матриця Грамма

$$G = \left(\langle h_i(\cdot), h_j(\cdot)\rangle_{\mathcal{L}_2}\right)_{i,j=1}^{n}$$

була невиродженою. З (3.2) і (3.3) випливає, що вектор-функції $h_1(t)$, $h_2(t)$, ..., $h_n(t)$ є стовпчиками матриці $Z^*(t)$, де $Z(t) = \Theta(T,t)B(t)$. Враховуючи, що

$$\langle h_i(\cdot), h_j(\cdot)\rangle_{\mathcal{L}_2} = \int_{t_0}^{T} h_i^*(s) h_j(s) ds,$$

$i, j = 1, 2, \cdots n$, одержуємо, що матриця Грамма

$$G = \int_{t_0}^{T} Z(s)Z^*(s)ds = \int_{t_0}^{T} \Theta(T,s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T,s)ds.$$

Означення 3.3. Матриця

$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} \Theta(T,s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T,s)ds$$

називається *грамміаном керованості* системи (3.1).

З умови (3.3) випливає така теорема.

Теорема 3.2. *Для того, щоб система (3.1) була цілком керованою на $[t_0, T]$, необхідно і достатньо, щоб грамміан керованості був невиродженим.*

Грамміан керованості називається також *матрицею керованості першого роду.* З означення випливає, що $\Phi(T, t_0) = \Phi^*(T, t_0)$, тобто, грамміан керованості є симетричним. Крім того, матриця $\Phi(T, t_0)$ невід'ємновизначена. Дійсно, для довільного $z \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$\langle \Phi(T, t_0)z, z\rangle = \left\langle \int_{t_0}^{T} Z(s)Z^*(s)ds z, z \right\rangle = \int_{t_0}^{T} \langle Z(s)Z^*(s)z, z\rangle\, ds =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle Z^*(s)z, Z^*(s)z\rangle\, ds = \int_{t_0}^{T} \|Z^*(s)z\|^2 ds \geq 0.$$

Тому якщо грамміан керованості є невиродженим, то він додатновизначений. З теореми 3.2 випливає, що умова повної керованості системи (3.1) на $[t_0, T]$ еквівалентна додатній визначеності грамміана керованості $\Phi(T, t_0)$. В силу симетричності грамміана керованості ця умова може бути записана так $det\Phi(T, t_0) > 0$.

Знайдемо диференціальне рівняння для знаходження грамміана керованості. Для цього запишемо

$$\Phi(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)B(s)B^*(s)\Theta^*(t, s)ds$$

і продиференціюємо цю матрицю за t. Одержимо

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{t_0}^{t} \frac{d\Theta(t, s)}{dt} B(s)B^*(s)\Theta^*(t, s)ds + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)B(s)B^*(s)\frac{d\Theta^*(t, s)}{dt} ds +$$

$$+\Theta(t, t)B(t)B^*(t)\Theta^*(t, t) = \int_{t_0}^{t} A(t)\Theta(t, s)B(s)B^*(s)\Theta^*(t, s)ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)B(s)B^*(s)\Theta^*(t, s)A^*(t)ds + B(t)B^*(t) =$$

$$= A(t)\Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0)A^*(t) + B(t)B^*(t).$$

З означення грамміана керованості випливає $\Phi(t_0, t_0) = 0$. Отже, отримуємо матричне диференціальне рівняння для знаходження матриці керованості

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0)A^*(t) + B(t)B^*(t),\ \ \Phi(t_0, t_0) = 0.$$

3.3 Задача про переведення лінійної системи керування з точки в точку

Задача про переведення лінійної нестаціонарної системи (3.1) з початкового стану $x(t_0) = x_0$ точки в в кінцевий стан $x(T) = x_T$ на інтервалі $[t_0, T]$ полягає у тому, щоб знайти таке допустиме керування, при підстановці якого в систему її розв'язок з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ задовольняв на правому кінці рівність $x(T) = x_T$. Аналізуючи доведення теореми 3.1, ми приходимо до висновку, що задача про перевід системи (3.1) з точки в точку має безліч розв'язків.

З (3.2) випливає, що, оскільки

$$\int_{t_0}^{T} \Theta(T,s)B(s)u(s)ds = c, \;\; c = x_T - \Theta(T,t_0)x_0,$$

то розв'язок задачі керування щодо переведення системи (3.1) зі стану x_0 у стан x_T має вигляд

$$u(s) = B^*(s)\Theta^*(T,s)\Phi^{-1}(T,t_0)c. \tag{3.5}$$

Справді, підставляючи це керування в (3.2), одержимо

$$\int_{t_0}^{T} \Theta(T,s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T,s)\Phi^{-1}(T,t_0)cds =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \Theta(T,s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T,s)ds\Phi^{-1}(T,t_0)c = \Phi(T,t_0)\Phi^{-1}(T,t_0)c = c.$$

Отже, керування, що розв'язує задачу про перевід системи (3.1) зі стану x_0 у стан x_T має вигляд

$$u(t) = B^*(t)\Theta^*(T,t)\Phi^{-1}(T,t_0)\left(x_T - \Theta(T,t_0)x_0\right). \tag{3.6}$$

Має місце таке твердження.

Теорема 3.3. *Керування (3.6) є розв'язком задачі оптимального керування, яка полягає в мінімізації критерію якості*

$$\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} \|u(s)\|^2 ds$$

за умов (3.1), $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$.

Доведення. Припустимо, що керування v розв'язує задачу про переведення системи (3.1) зі стану $x(t_0) = x_0$ в точку $x(T) = x_T$. Це означає, що для керування v виконується (3.2). Покажемо, що $\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(v)$, де керування u задовольняє (3.6). Для цього розглянемо

$$\|v(s) - u(s)\|^2 = \|v(s)\|^2 + \|u(s)\|^2 - 2\langle v(s), u(s)\rangle =$$

$$= \|v(s)\|^2 + \|u(s)\|^2 - 2\langle v(s) - u(s) + u(s), u(s)\rangle =$$
$$= \|v(s)\|^2 - \|u(s)\|^2 - 2\langle v(s) - u(s), u(s)\rangle.$$

Але з (3.6), (3.2) випливає

$$\int_{t_0}^{T} \langle v(s) - u(s), B^*(s)\Theta^*(T,s)p_0\rangle ds =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle \Theta(T,s)B(s)v(s) - \Theta(T,s)B(s)u(s), p_0\rangle ds =$$

$$= \langle \int_{t_0}^{T} \Theta(T,s)B(s)v(s)ds - \int_{t_0}^{T} \Theta(T,s)B(s)u(s)ds, p_0\rangle = \langle c - c, p_0\rangle = 0,$$

де $p_0 = \Phi^{-1}(T,t_0)\left(x_T - \Theta(T,t_0)x_0\right)$. Тому

$$\int_{t_0}^{T} \|v(s) - u(s)\|^2 ds = \int_{t_0}^{T} \|v(s)\|^2 ds - \int_{t_0}^{T} \|u(s)\|^2 ds \geq 0.$$

Звідси $\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(v)$. □

Зауважимо, що керування (3.3) можна подати як керування з оберненим зв'язком. Для цього в (3.3) підставимо t замість t_0. Тоді керування матиме вигляд

$$u(x(t),t) = B^*(t)\Theta^*(T,t)\Phi^{-1}(T,t)\left(x_T - \Theta(T,t)x(t)\right).$$

Якщо ставиться задача про переведення системи у нульове положення, тобто $x_T = 0$, то керування з оберненим зв'язком має вигляд

$$u(x(t),t) = K(t)x(t),$$

де $K(t) = -B^*(t)\Theta^*(T,t)\Phi^{-1}(T,t)\Theta(T,t)$.

3.4 Критерій керованості для лінійної стаціонарної системи

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \tag{3.7}$$

де A, B – постійні матриці розмірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно, керування вибирається з класу $\mathcal{L}_\infty([t_0, T]; \mathbb{R}^m)$ вимірних майже скрізь обмежених на $[t_0, T]$ функцій. Фундаментальна матриця системи (3.7) має вигляд

$$\Theta(t, s) = e^{A(t-s)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i (t-s)^i}{i!}.$$

Наша мета полягає у тому, щоб довести таке твердження: система (3.7) є цілком керованою тоді і тільки тоді, коли ранг $n \times (n \cdot m)$ – матриці

$$\mathcal{D} = \left(B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \ ... \ \vdots A^{n-1} B \right)$$

рівний n. Матриця $\mathcal{D}$ називається *матрицею керованості другого роду.* Для подальшого нам потрібно довести такі твердження.

Лема 3.1 (про внутрішню точку)**.** *Для того, щоб*

$$0 \in int \int_{t_0}^{T} e^{A(T-s)} B \mathcal{K}_1(0) ds$$

необхідно і достатньо, щоб ранг матриці

$$\mathcal{D} = \left(B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \ ... \ \vdots A^{n-1} B \right)$$

був рівний n.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що умова

$$0 \in int \int_{t_0}^{T} e^{A(T-s)} B \mathcal{K}_1(0) ds$$

виконана, але $rang \mathcal{D} < n$. Це означає, що знайдуться числа $\nu_1, ..., \nu_n$, не всі рівні нулю і такі, що

$$d_1 \nu_1 + d_2 \nu_2 + ... + d_n \nu_n = 0, \tag{3.8}$$

де $d_i \in \mathbb{R}^n$ – стрічки матриці $\mathcal{D}$, $i = 1, 2, ..., n$. Рівність (3.8) можна записати так

$$\nu^* \mathcal{D} = 0^*,$$

де $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)^*$. Звідси $\nu^* \left(B, AB, A^2 B, ..., A^{n-1} B\right) = 0^*$. Далі отримуємо

$$\nu^* B = \nu^* AB = \nu^* A^2 B = ... = \nu^* A^{n-1} B = 0^*.$$

За теоремою Гамільтона-Келлі матриця A задовольняє своєму характеристичному рівнянню. Отже, якщо $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, то $P(A) = 0$. Нехай

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

де $c_1, c_2, ..., c_n-$ дійсні числа. За теоремою Гамільтона-Келлі

$$P(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + ... + c_{n-1}A + c_n I = 0.$$

Виразимо з останньої рівності A^n. Одержимо

$$A^n = -c_1 A^{n-1} - c_2 A^{n-2} - ... - c_{n-1}A - c_n I,$$

звідси

$$\begin{aligned} v^* A^n B &= -v^* \left(c_1 A^{n-1}B + c_{n-1}A^{n-2}B + ... + c_n B\right) = \\ &= -\left(c_1 v^* A^{n-1}B + c_{n-1}v^* A^{n-2}B + ... + c_n v^* B\right) = 0^*. \end{aligned}$$

Далі, домножуємо рівність

$$A^n = -c_1 A^{n-1} - c_2 A^{n-2} - ... - c_{n-1}A + c_n I$$

на A. Маємо

$$A^{n+1} = -c_1 A^n - c_2 A^{n-1} - ... - c_{n-1}A^2 + c_n A.$$

Звідси

$$v^* A^{n+1}B = -v^* \left(c_1 A^n B + c_{n-1}A^{n-1}B ... + c_n AB\right) = 0^*.$$

Отже, за індукцією

$$v^* A^{n+k} B = 0^*, \; k = 0, 1, ...$$

і тому

$$v^* e^{A(T-s)}B = v^* \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i (T-s)^i}{i!} B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^* A^i B (T-s)^i}{i!} = 0^*, \; s \in [t_0, T]\,.$$

Позначимо

$$\mathcal{I} = \int_{t_0}^{T} e^{A(T-s)} B \mathcal{K}_1(0) ds \in conv(\mathbb{R}^n).$$

Знайдемо

$$c(\mathcal{I}, \psi) = \int_{t_0}^{T} \left\| (e^{A(T-s)}B)^* \psi \right\| ds = 0$$

при $\psi = v \neq 0$. Це означає, що $0 \in \partial\mathcal{I}$. Одержали протиріччя. Отже, $rang\mathcal{D} = n$.

Достатність. Припустимо, що $rang\mathcal{D} = n$, але $0 \in \partial\mathcal{I}$. Оскільки $\mathcal{I} \in conv(\mathbb{R}^n)$, то це означає, що знайдеться $\psi_0 \neq 0$ таке, що $c(\mathcal{I}, \psi_0) = 0$. Звідси одержуємо

$$\int_{t_0}^{T} f_0(s)ds = 0,$$

де $f_0(s) = \left\|(e^{A(T-s)}B)^*\psi_0\right\|$.

Оскільки $f_0(s)$ – неперервна невід'ємна функція, то $\int_{t_0}^{T} f_0(s)ds = 0$ означає, що $f_0(s) = 0 \ \forall s \in [t_0, T]$. Дійсно, припустимо, що $\exists s' \in [t_0, T]$ таке, що $f_0(s') > 0$. Тоді $\exists \delta > 0$ таке, що $f_0(s') > 0$, $s \in (s' - \delta, s' + \delta)$, звідси

$$\int_{t_0}^{T} f_0(s)ds \geq \int_{[t_0,T]\bigcap(s'-\delta,s'+\delta)} f_0(s)ds > 0.$$

Отже, ми одержали протиріччя, з якого випливає рівність

$$f_0(s) = 0 \ \forall s \in [t_0, T] .$$

Це означає, що

$$(e^{A(T-s)}B)^*\psi_0 = 0. \tag{3.9}$$

При $s = T$ одержуємо $B^*\psi_0 = 0$. Диференціюємо (3.9) за s і отримуємо

$$\frac{d}{ds}(e^{A(T-s)}B)^*\psi_0 = -(Ae^{A(T-s)}B)^*\psi_0 = 0. \tag{3.10}$$

При $s = T$ маємо $(AB)^*\psi_0 = 0$. Знову диференціюємо (3.10) за s. Маємо

$$-\frac{d}{ds}(Ae^{A(T-s)}B)^*\psi_0 = (A^2e^{A(T-s)}B)^*\psi_0 = 0$$

і при $s = T$ одержуємо рівність $(A^2B)^*\psi_0 = 0$. Продовжуємо диференціювати послідовно (3.10). Остаточно одержимо

$$B^*\psi_0 = (AB)^*\psi_0 = ... = (A^{n-1}B)^*\psi_0 = 0,$$

або

$$\psi_0^*B = \psi_0^*AB = ... = \psi_0^*A^{n-1}B = 0^*.$$

Оскільки $\psi_0 \neq 0$, то ця рівність еквівалентна тому, що рядки матриці $\mathcal{D}$ лінійно залежні. Звідси одержуємо, що $rang\mathcal{D} < n$. Одержали протиріччя. $\square$

Наслідок. Якщо ранг матриці $\mathcal{D}$ рівний n, то розмірність множини

$$\mathcal{I} = \int_{t_0}^{T} e^{A(T-s)} B\mathcal{K}_1(0) ds$$

є рівною n.

Теорема 3.4. *Система* (3.7) *цілком керована тоді і тільки тоді, коли матриця*

$$\mathcal{D} = \left(B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \ \dots \ \vdots A^{n-1}B\right)$$

має ранг рівний n.

Доведення. Запишемо множину досяжності системи (3.7)

$$\mathcal{X}_r(t) = \mathcal{X}(t, x_0)$$

для точки $x_0 = 0$ при фіксованому $t \geq t_0$, за умови, що геометричні обмеження на керування вибираються у вигляді кулі $\mathcal{K}_r(0)$. Отримаємо

$$\mathcal{X}_r(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B\mathcal{K}_r(0)\, ds \in conv\left(\mathbb{R}^n\right)$$

Опорний функціонал

$$c\left(\mathcal{X}_r(t), \psi\right) = r \int_{t_0}^{t} \left\| \left(e^{A(t-s)}B\right)^* \psi \right\| ds = rc\left(\mathcal{X}_1(t), \psi\right) = c\left(r\mathcal{X}_1(t), \psi\right),$$

де $\mathcal{X}_1(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B\mathcal{K}_1(0)\, ds$, $\psi \in \mathbb{R}^n$. Отже,

$$\mathcal{X}_r(t) = r\mathcal{X}_1(t).$$

Не складно переконатись, що

$$\mathcal{X}_r(t) = (-1)\,\mathcal{X}_r(t),$$

тобто $\mathcal{X}_r(t)$ – симетрична відносно нуля множина. Справді

$$(-1)\,\mathcal{X}_r(t) = (-1)\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B\mathcal{K}_r(0)\, ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B\left((-1)\mathcal{K}_r(0)\right) ds = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B\mathcal{K}_r(0)\, ds = \mathcal{X}_r(t)$$

оскільки $(-1)\mathcal{K}_r(0) = \mathcal{K}_r(0)$.

Покажемо необхідність. Нехай система (3.7) є цілком керованою, але $rang\mathcal{D} < n$. Тоді за попередньою лемою $0 \in \partial\mathcal{X}_1(t)$. Це означає, що знайдеться $\psi_0 \neq 0$, для якого

$$c(\mathcal{X}_1(t), \psi_0) = 0.$$

Звідси $c(\mathcal{X}_r(t), \psi_0) = 0$ [1]. Отже,

$$\langle x(t), \psi_0 \rangle = 0$$

для всіх $x(t) \in \mathcal{X}_r(t)$, де $r > 0$ – довільне. [2].

Виберемо $t = T$. В силу повної керованості (3.7) знайдеться таке допустиме керування, що переводить систему (3.7) з нульового положення в точку $x(T) = x_T = \psi_0$. При цьому таке керування належить кулі $\mathcal{K}_r(0)$ при деякому $r > 0$ майже скрізь. Але

$$\langle x_T, \psi_0 \rangle = \|\psi_0\|^2 \neq 0.$$

Одержали протиріччя. Отже, $rang\mathcal{D} = n$.

Достатність. Припустимо, що $rang\mathcal{D} = n$. Зафіксуємо довільне T. Це означає, що $0 \in int\mathcal{X}_1(T)$, а значить і $0 \in int\mathcal{X}_r(T)$. Оскільки $0 \in int\mathcal{X}_1(T)$, то за означенням внутрішньої точки $\exists p > 0$ таке, що $\mathcal{K}_p(0) \subset \mathcal{X}_1(T)$. Тому

$$\mathcal{K}_{rp}(0) \subset \mathcal{X}_r(T).$$

Це означає, що якщо ми виберемо довільне $x(T) = x_T$ та зафіксуємо $r > 0$ з умови [3]

$$r = \frac{\|x_T\|}{p}.$$

Тоді

$$x_T \in \mathcal{K}_{rp}(0) \subset \mathcal{X}_r(T).$$

Отже, для довільної точки x_T можна вибрати $r > 0$ таке, що існує керування, яке майже скрізь належить $\mathcal{K}_r(0)$, при якому система переводить (3.7) $x_0 = 0$ в x_T. Звідси робимо висновок, що положення $x_0 = 0$ цілком кероване.

Тепер візьмемо довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, яка задає початковий стан системи і виберемо довільний кінцевий стан $x_T \in \mathbb{R}^n$. Розглянемо точку

$$z_T = x_T - e^{A(T-t_0)}x_0.$$

[1] За властивостями опорної функції це означає $0 \in \partial\mathcal{X}_r(t)$ для довільного $r > 0$

[2] Це означає, що яким би ми не взяли керування для відповідного розв'язку (3.7) при $x_0 = 0$ маємо $\langle x(t), \psi_0 \rangle = 0$

[3] $rp = \|x_T\|$

Вище ми показали, що існує майже скрізь обмежене вимірне керування u, яке переводить систему (3.7) з нульового положення в точку z_T. За формулою Коші

$$z_T = \int_{t_0}^{T} e^{A(T-s)} Bu(s) ds.$$

Звідси випливає, що

$$x_T = e^{A(T-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{T} e^{A(T-s)} Bu(s) ds.$$

Отже, система (3.7) цілком керована. $\square$

Приклад 3.1. Дослідити на керованість систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + u, \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 + au.$$

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 2-a \end{pmatrix}.$$

Матриця керованості $\mathcal{D}$ має вигляд

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1+a \\ a & 2-a \end{pmatrix}.$$

Знайдемо детермінант матриці керованості

$$\det \mathcal{D} = 2 - a - a(1+a) = 2 - 2a - a^2.$$

При $a = -1+\sqrt{2}$, $a = -1-\sqrt{2}$ визначник матриці керованості рівний нулеві. Звідси одержуємо, що при довільних значеннях параметра a, окрім $a = -1 + \sqrt{2}$, $a = -1 - \sqrt{2}$, система є цілком керованою.

3.5 Загальна задача керованості

Розглянемо лінійну систему керування (3.1), де $u(t) \in \mathcal{U}$ – керування з класу інтегрованих функцій, $t \in [t_0, T]$, $\mathcal{U} \in comp(\mathbb{R}^m)$. Нехай задана множина початкових станів $M_0 \in comp(\mathbb{R}^n)$ і кінцевих станів $M_T \in comp(\mathbb{R}^n)$.

Означення 3.4. Будемо говорити, що система (3.1) є керованою на відрізку $[t_0, T]$ з множини M_0 в множину M_T, якщо знайдеться $x_0 \in M_0$ та існує хоч би одне допустиме керування $u(\cdot)$, яке переводить систему (3.1) зі стану $x(t_0) = x_0 \in M_0$ в деяку точку множини M_T.

Зауважимо, що в задачі керованості не оцінюється якість переходу з M_0 в M_T, а лише можливість такого переходу. Слід зазначити, що для того, щоб система (3.1) була керованою на відрізку $[t_0, T]$ з множини M_0 в множину M_T, необхідно і достатньо, щоб множина керованості $\mathcal{Z}(t_0, M_T)$ перетиналась з M_0.

Доведемо таке твердження.

Теорема 3.5 (про керованість)**.** *Нехай $M_0 \in conv(\mathbb{R}^n)$, $M_T \in conv(\mathbb{R}^n)$. Тоді система (3.1) керована на відрізку $[t_0, T]$ з множини M_0 на M_T, тоді і тільки тоді, коли функція керованості*

$$\begin{aligned} \varphi(\psi) = c(M_0, \Theta^*(T, t_0)\psi) + c(M_T, -\psi) + \\ + \int_{t_0}^{T} c(\mathcal{U}, B^*(s)\Theta^*(T, s)\psi)ds \geq 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

для всіх $\psi \in \mathcal{S}$.

Доведення. Система є керованою на відрізку $[t_0, T]$, якщо

$$\mathcal{X}(T, M_0) \cap M_T \neq \emptyset.$$

За лемою 17.1 (стор. 16)

$$0 \in \mathcal{X}(T, M_0) + (-1) \cdot M_T.$$

За властивостями опорних функцій, враховуючи опуклість і компактність множини досяжності, одержуємо [4]

$$\begin{aligned} 0 \leq c(\mathcal{X}(T, M_0) + (-1) \cdot M_T, \psi) = c(\mathcal{X}(T, M_0), \psi) + c((-1) \cdot M_T, \psi) = \\ = c(\mathcal{X}(T, M_0), \psi) + c(M_T, -\psi), \ \forall \psi \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Опорна функцію множини досяжності має вигляд [5]

$$c(\mathcal{X}(T, M_0), \psi) = c(M_0, \Theta^*(T, t_0)\psi) + \int_{t_0}^{T} c(\mathcal{U}, B^*(s)\Theta^*(T, s)\psi)ds$$

[4] лекція 18, стор. 194
[5] теорема 2.3, стор. 16

і для всіх $\psi \in \mathcal{S}$ одержуємо

$$\varphi(\psi) = c(M_0, \Theta^*(T, t_0)\psi) + c(M_T, -\psi) + \int_{t_0}^{T} c(\mathcal{U}, B^*(s)\Theta^*(T, s)\psi)ds \geq 0.$$

□

Наслідок 1. Умову (3.10) можна записати так

$$\min_{\psi \in \mathcal{S}} \varphi(\psi) \geq 0.$$

Наслідок 2. Функцію керованості (3.10) можна знайти за формулою

$$\varphi(\psi) = c(M_0, z(t_0)) + c(M_T, -z(T)) + \int_{t_0}^{T} c(\mathcal{U}, B^*(s)z(s))ds,$$

де функція $z(t)$ є розв'язком спряженої системи

$$\frac{dz(t)}{dt} = -A^*(t)z(t), \;\; z(T) = \psi, \;\; t \in [t_0, T].$$

Для того, щоб обґрунтувати наслідок 2, необхідно застосувати наслідок з леми 16.1 і представити загальний розв'язок спряженої системи у вигляді $z(s) = \Theta^*(T, s)z(T)$, $s \in [t_0, T]$.

Приклад 3.2. Запишимо критерій керованості на відрізку $[0, T]$, що дається теоремою 3.5, для системи

$$\frac{dx}{dt} = ax + u,$$

де x – фазові координати розмірності 1, керування u належить класу інтегрованих функцій при геометричних обмеженнях $\mathcal{U} = [-b, b]$, множина початкових станів $M_0 = [-c, c]$, множина кінцевих станів $M_T = [-d, d]$, a, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ – числові параметри.

Тоді функція керованості (3.10) має вигляд

$$\varphi(\psi) = ce^{aT}|\psi| + d|\psi| + b\int_0^T e^{a(T-s)}ds|\psi| =$$
$$= ce^{aT} + d + b\frac{e^{aT} - 1}{a} \geq 0,$$

де $\psi \in \{-1, 1\}$.

Лекція 4

Спостережуваність в лінійних неперервних системах

4.1 Вступ

В системах керування, що побудовані за принципом оберненого зв'язку, необхідно визначати всі компоненти вектора стану x. Втім, як правило, вимірювальні пристрої дають інформацію лише про частину компонентів вектора фазових координат. Крім того, на систему керування і пристрій, що здійснює виміри, діють постійні збурення, які змінюють результат вимірювання. Тоді ставиться задача про знаходження оцінки вектора стану за вимірами. Причому оцінка знаходиться у такий спосіб, щоб вона задовольняла певним оптимальних характеристикам. Одержана оцінка подається на вхід системи керування.

Ми будемо говорити про *задачу спостереження*, якщо збуреннями і похибками вимірювання можна знехтувати. Якщо цими величинами знехтувати не можна, то маємо *задачу фільтрації*. У цьому розділі ми будемо розглядаємо задачу спостереження.

4.2 Постановка задачі спостереження

Розглянемо систему керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t),\ t \in [t_0, T], \tag{4.1}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)^*$– вектор стану, який є невідомим, $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – відомий вектор керування, $f(x, u, t)$ – n - вимірна вектор-функція, яка є неперервною за змінними u, t і локально ліпшицевою за x. Спостерігається вектор $y = (y_1, ..., y_r)^*$. Це означає, що всі компоненти вектора $y(t)$ в кожен момент $t \in [t_0, T]$ відомі, а також відомо як пов'язані вектор спостереження $y(t)$ і вектор стану $x(t)$. Це означає, що задається співвідношення

$$y(t) = G(x(t), t), \ t \in [t_0, T], \tag{4.2}$$

де $G(x,t)$ – неперервна функція розмірності r. Рівняння (4.2) називається *рівнянням спостереження*.

Задача спостереження полягає у тому, щоб за відомими вимірами $y(t)$ відновити значення вектора стану $x(t)$ або, якщо це неможливо, оцінити ці значення при $t \in [t_0, T]$.

Зрозуміло, що досить знати $x(t_0)$, або $x(T)$, щоб відновити повністю $x(t)$ для всіх $t \in [t_0, T]$. Пристрій, а також математичні співвідношення, які забезпечують отримання оцінок вектору стану за вимірами (4.2) і відомим керуванням, називається *спостерігачем*.

4.3 Лінійна задача спостереження

Розглянемо лінійну систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{4.3}$$

$$y(t) = H(t)x(t) + g(t), \tag{4.4}$$

де $A(t)$, $B(t)$, $H(t)$ –матриці з неперервними компонентами розмірностей $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ відповідно, $g(t)$ – відома неперервна функція.

Не обмежуючи загальності, в рівняннях (4.3),(4.4) можна вважати функції $u(t)$, $g(t)$ тотожно рівні нулеві. Дійсно. В (4.3) керування є відомим і загальний розв'язок (4.3) може бути записаний за формулою Коші

$$x(t) = \Theta(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)B(s)u(s)ds = \Theta(t, t_0)x(t_0) + a(t).$$

Тут $a(t) = \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)B(s)u(s)ds$ – частинний розв'язок системи (4.3), який відповідає нульовій початковій умові і його можна визначити. Введемо позначення

$$x_1(t) = x(t) - a(t).$$

Тоді $x_1(t) = \Theta(t, t_0)x(t_0)$, $y(t) = H(t)x(t) + g(t) = H(t)(x_1(t) + a(t)) + g(t)$ і

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = A(t)x_1(t).$$

Отже, звели систему (4.3) до однорідної. Розглянемо рівняння спостереження

$$y(t) = H(t)x(t) + g(t) = H(t)x_1(t) + H(t)a(t) + g(t) = H(t)x_1(t) + g_1(t).$$

Позначимо $g_1(t) = H(t)a(t) + g(t)$, $y_1(t) = y(t) - g_1(t)$. Вектор $y_1(t)$ є відомий і може бути однозначно визначений через вектор спостережень $y(t)$. Одержуємо

$$y_1(t) = H(t)x_1(t).$$

У такий спосіб систему керування (4.3), (4.4) без обмеження загальності можна записати у вигляді

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \tag{4.5}$$

$$y(t) = H(t)x(t). \tag{4.6}$$

Якщо матриця $H(t)$ є квадратною і невиродженою, то з (4.6) отримуємо

$$x(t) = H^{-1}(t)y(t).$$

Ця ситуація відповідає тому, що є можливість розмістити достатньо вимірювальних приладів, щоб одержати інформацію про всі компоненти вектору стану. Втім, така ситуація рідкісна і, як правило, не виконується.

Означення 4.1. Якщо будь-який стан $x(T)$ системи (4.5), (4.6) можна однозначно визначити за результатами вимірів $y(t)$ на інтервалі $[t_0, T]$, то система (4.5), (4.6) називається *цілком спостережуваною на інтервалі* $[t_0, T]$.

Означення 4.2. Якщо для кожного T знайдеться t_0 таке, що система (4.5), (4.6) є цілком спостережуваною на $[t_0, T]$, то система (4.5), (4.6) називається *цілком спостережуваною.*

4.4 Грамміан спостережуваності

Загальний розв'язок системи (4.5) може бути поданий за формулою Коші

$$x\left(t\right) = \Theta(t, T)x\left(T\right),$$

де $\Theta(t, s)$ – фундаментальна матриця системи (4.5), нормована за моментом s. Підставляємо останню рівність в (4.6) і одержуємо

$$y\left(t\right) = H\left(t\right)x\left(t\right) = H\left(t\right)\Theta\left(t, T\right)x\left(T\right). \tag{4.7}$$

В (4.7) домножуємо праву і ліву частину на $\Theta^*(t,T)\,H^*(t)$. Отримуємо рівність

$$\Theta^*(t,T)\,H^*(t)\,y(t) = \Theta^*(t,T)\,H^*(t)\,H(t)\,\Theta(t,T)\,x(T). \tag{4.8}$$

Інтегруємо (4.8) від t_0 до T за змінною t.

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{T} \Theta^*(s,T)\,H^*(s)\,y(s)\,ds = \\ &= \int_{t_0}^{T} \Theta^*(s,T)\,H^*(s)\,H(s)\,\Theta(s,T)\,ds x(T). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Означення 4.3. Матриця

$$\mathcal{N}(T,t_0) = \int_{t_0}^{T} \Theta^*(s,T)\,H^*(s)\,H(s)\,\Theta(s,T)\,ds. \tag{4.10}$$

називається *грамміаном спостережуваності* або *матрицею спостережуваності першого роду.*

Отже, з (4.9) випливає

$$\mathcal{N}(T,t_0)\,x(T) = \int_{t_0}^{T} \Theta^*(s,T)\,H^*(s)\,y(s)\,ds. \tag{4.11}$$

З означення 4.3 випливає, що $\mathcal{N}^*(T,t_0) = \mathcal{N}(T,t_0)$. Покажемо, що грамміан спостережуваності є невід'ємновизначеною матрицею. Позначивши $Z(s) = H(s)\,\Theta(s,T)$, для довільного $z \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$\langle \mathcal{N}(T,t_0)z, z\rangle = \left\langle \int_{t_0}^{T} Z^*(s)Z(s)ds z, z \right\rangle = \int_{t_0}^{T} \langle Z^*(s)Z(s)z, z\rangle\,ds =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle Z(s)z, Z(s)z\rangle\,ds = \int_{t_0}^{T} \|Z(s)z\|^2 ds \geq 0.$$

Отже, $\mathcal{N}(T,t_0)$ є невід'ємновизначеною матрицею.

Має місце така теорема.

Теорема 4.1 (перший критерій спостережуваності). *Для повної спостережуваності системи* (4.5), (4.6) *на інтервалі* $[t_0,T]$ *необхідно і достатньо, щоб матриця* $\mathcal{N}(T,t_0)$ *була невиродженою.*

Доведення. Необхідність. Від супротивного. Припустимо, що матриця $\mathcal{N}(T, t_0)$ є виродженою. Тоді знайдеться стан $z = x(T) \neq 0$ такий, що

$$\mathcal{N}(T, t_0)\, x(T) = 0.$$

Тоді з (4.11) випливає

$$\langle \mathcal{N}(T, t_0) x(T), x(T) \rangle = \left\langle \int_{t_0}^{T} \Theta^*(s, T)\, H^*(s)\, y(s)\, ds, x(T) \right\rangle =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle \Theta^*(s, T)\, H^*(s)\, y(s), x(T) \rangle\, ds =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle y(s), H(s)\, \Theta(s, T)\, x(T) \rangle\, ds = \int_{t_0}^{T} \langle y(s), H(s)\, x(s) \rangle\, ds =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \langle y(s), y(s) \rangle\, ds = \int_{t_0}^{T} \|y(s)\|^2\, ds = 0.$$

Звідси $y(s) \equiv 0$, $s \in [t_0, T]$. Але для $x(T) = 0$ також $y(s) \equiv 0$, $s \in [t_0, T]$. Це означає, що стан z і нульовий стан не можуть бути визначені зі спостереження $y(s) \equiv 0$. Одержали протиріччя.

Достатність. Якщо $\mathcal{N}(T, t_0)$ є невиродженою, то з (4.11) отримуємо

$$x(T) = \mathcal{N}^{-1}(T, t_0) \int_{t_0}^{T} \Theta^*(s, T)\, H^*(s) y(s) ds.$$

□

Наслідок. Система (4.5), (4.6) є цілком спостережуваною на інтервалі $[t_0, T]$ тоді і тільки тоді, коли матриця $\mathcal{N}(T, t_0)$ – додатновизначена і $det\mathcal{N}(T, t_0) > 0$.

4.5 Принцип двоїстості

Має місце наступне твердження провзаємозв'язок між задачами керованості і спостережуваності.

Теорема 4.2 (принцип двоїстості Калмана)**.** *Система* (4.3),(4.4) *є цілком спостережуваною на* $[t_0, T]$ *тоді і тільки тоді, коли спряжена до неї система*

$$\frac{dz(t)}{dt} = -A^*(t) z(t) + H^*(t) u(t) \tag{4.12}$$

є цілком керованою на $[t_0, T]$*. Тут* $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^*$ *– вектор стану спряженої системи,* $u = (u_1, ..., u_r)^*$ *– вектор керування.*

Доведення. Побудуємо грамміан керованості для системи (4.12). Згідно означення 3.3 (стор. 25) він має вигляд

$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} \Psi(T, t) H^*(t) H(t) \Psi(T, t) dt,$$

де $\Psi(T, t)$ – фундаментальна матриця спряженої системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A^*(t)x(t),$$

нормована за другим аргументом. Для фундаментальної матриці спряженої системи справджується рівність $\Psi(T, t) = \Theta^*(t, T)$ [1]. Звідси

$$\Phi(T, t_0) = \int_{t_0}^{T} \Theta^*(t, T) H^*(t) H(t) \Theta(t, T) dt = \mathcal{N}(T, t_0).$$

Отже, грамміан керованості системи (4.12) співпадає з грамміаном спостережуваності системи (4.3), (4.4). Це означає, що цілком керованість (4.12) еквівалентна повній спостережуваності (4.3), (4.4) на $[t_0, T]$. □

Наслідок. Для цілком спостережуваності системи (4.3), (4.4) необхідно і достатньо, щоб спряжена система (4.12) була цілком керованою.

Наслідком з принципу двоїстості Калмана є також таке твердження.

Теорема 4.3 (критерій спостережуваності для стаціонарних систем)**.** *Нехай матриця $A(t) = A$, $H(t) = H$ є в (4.3), (4.4) постійними. Тоді система (4.3), (4.4) є цілком спостережуваною тоді і тільки тоді коли ранг матриці*

$$\mathcal{R} = (H^* \vdots A^* H^* \vdots (A^*)^2 H^* \vdots \ \dots \ \vdots (A^*)^{n-1} H^*)$$

рівний n.

Доведення. Запишемо другу матрицю керованості для системи

$$\frac{dz(t)}{dt} = -A^*(t)z(t) + H^*(t)u(t).$$

Вона має вигляд

$$\mathcal{D} = (H^* \vdots - A^* H^* \vdots (A^*)^2 H^* \vdots \ \dots \ \vdots (-1)^{n-1} (A^*)^{n-1} H^*).$$

Ранг матриці $\mathcal{D}$ співпадає з рангом матриці $\mathcal{R}$, оскільки стовпчики цих матриць або співпадають, або відрізняються з точністю до множення на -1. Справедливість наслідку далі випливає з теореми 3.4 (стор. 32). □

Матриця $\mathcal{R}$ з теореми (4.3) називається другою матрицею спостережуваності.

[1] лекція 16, стор. 176, лема 16.1, наслідок

4.6 Оцінка стану системи на основі граммiана спостережуваностi

Розглянемо лiнiйну задачу спостереження

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \tag{4.13}$$

i спостерiгається вектор

$$y(t) = H(t)x(t). \tag{4.14}$$

Тут $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $y = (y_1, ..., y_m)^*$ – вектор вимiрiв, $A(t)$ – $n \times n$ - матриця з неперервними компонентами, $H(t)$ – $m \times n$ - матриця з неперервними компонентами. Оцiнкою за вимiрами називається вимiрна функцiя вiд вимiрiв. Пристрiй, який забезпечує отримання оцiнок вектору стану за вимiрами називається *спостерiгачем. Спостерiгачем* також називають динамiчну систему, яка описує оцiнку стану системи за вимiрами.

Означення 4.4. Система n-го порядку вигляду

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + G(t)y(t)$$

називається *спостерiгачем* (повного порядку) для системи (4.13), (4.14), якщо з рiвностi початкових умов $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ випливає рiвнiсть розв'язкiв $\hat{x}(t) = x(t)$, $t \geq t_0$.

Тут $F(t)$ – $n \times n$ - матриця з неперервними компонентами, $G(t)$ – $n \times m$ - матриця з неперервними компонентами. Говорять, що спостерiгач має повний порядок у випадку, якщо його розмiрнiсть рiвна n.

Теорема 4.4 (про структуру спостерiгача)**.** *Система*

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + G(t)y(t)$$

є спостерiгачем для системи (4.13), (4.14) *тодi i тiльки тодi, коли*

$$F(t) = A(t) - K(t)H(t), \ G(t) = K(t),$$

де $K(t)$ – довiльна $n \times m$ - матриця з неперервними компонентами. У такий спосiб спостерiгачi повного порядку мають структуру

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + K(t)\left[y(t) - H(t)\hat{x}(t)\right].$$

Доведення. Необхідність. Розглянемо різницю

$$\frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)x(t) - F(t)\hat{x}(t) - G(t)y(t) =$$
$$= A(t)x(t) - F(t)\hat{x}(t) - G(t)H(t)x(t) = (A(t) - G(t)H(t))\, x(t) - F(t)\hat{x}(t).$$

З рівності $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ випливає рівність $\hat{x}(t) = x(t)$, $t \geq t_0$. Тоді

$$(A(t) - G(t)H(t))\, x(t) = F(t)x(t),\ t \geq t_0.$$

Виберемо довільну матрицю $K(t)$ і з умови $G(t) = K(t)$ маємо

$$(A(t) - K(t)H(t))\, \Theta(t, t_0)x(t_0) = F(t)\Theta(t, t_0)x(t_0).$$

Тут $\Theta(t, t_0)$ – фундаментальна матриця системи $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$, нормована за моментом t_0. В силу довільності $x(t_0)$ маємо рівність $F(t) = A(t) - K(t)H(t)$.

Достатність. Якщо має місце умова

$$F(t) = A(t) - K(t)H(t),\ G(t) = K(t),$$

де $K(t)$ – довільна $n \times m$ - матриця, то

$$\frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t) - \hat{x}(t)\right) =$$
$$= A(t)x(t) - (A(t) - K(t)H(t))\hat{x}(t) - K(t)y(t).$$

Підставляємо в останню рівність співвідношення (4.14). Отримуємо

$$\frac{dx(t)}{dt} - \frac{d\hat{x}(t)}{dt} =$$
$$= A(t)x(t) - (A(t) - K(t)H(t))\hat{x}(t) - K(t)H(t)x(t) =$$
$$= (A(t) - K(t)H(t))\left(x(t) - \hat{x}(t)\right).$$

Отже, отримали однорідну систему

$$\frac{dz(t)}{dt} = (A(t) - K(t)H(t))\, z(t)$$

відносно $z(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Якщо $z(t_0) = x(t_0) - \hat{x}(t_0) = 0$, то

$$z(t) = x(t) - \hat{x}(t) = 0,\ t \geq t_0.$$

□

Матрицю $K(t)$ називають *матрицею коефіцієнтів підсилення спостерігача.* Величина $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ називається *помилкою відтворення.*

Побудуємо диференціальне рівняння для знаходження грамміана спостережуваності. Для цього продиференціюємо грамміан спостережуваності

$$\mathcal{N}(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \Theta^*(s, t) H^*(s) H(s) \Theta(s, t) \, ds$$

за змінною $t \in [t_0, T]$. Одержуємо

$$\frac{d\mathcal{N}(t, t_0)}{dt} = \int_{t_0}^{t} \frac{d\Theta^*(s,t)}{dt} H^*(s)H(s)\Theta(s,t)ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \Theta^*(s, t) H^*(s) H(s) \frac{d\Theta(s,t)}{dt} ds + \Theta^*(t,t)H^*(t)H(t)\Theta(t,t) =$$
$$= -\int_{t_0}^{t} A^*(t)\Theta^*(s,t)H^*(s)H(s)\Theta(s,t)ds -$$
$$- \int_{t_0}^{t} \Theta^*(s,t)H^*(s)H(s)\Theta(s,t)A(t)ds + H^*(t)H(t) =$$
$$= -A^*(t)\mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) A(t) + H^*(t)H(t).$$

Тут ми використали те, що $\Psi(t, s) = \Theta^*(s, t)$ є фундаментальною матрицею спряженої системи (лекція 16, стор. 176, лема 16.1, наслідок), а саме

$$\frac{d\Theta^*(s,t)}{dt} = -A^*(t)\Theta^*(s,t), \quad \frac{d\Theta(s,t)}{dt} = -\Theta(s,t)A(t).$$

Таким способом, одержали матричне диференціальне рівняння для знаходження грамміана спостережуваності

$$\frac{d\mathcal{N}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\mathcal{N}(t, t_0) - \mathcal{N}(t, t_0) A(t) + H^*(t)H(t), \ \mathcal{N}(t_0, t_0) = 0. \tag{4.15}$$

де $t \in [t_0, T]$.

Побудуємо спостерігач для знаходження оцінки стану системи (4.13), (4.14) у випадку, якщо грамміан спостережуваності $\mathcal{N}(t, t_0)$ цієї системи є невиродженим, $t \in (t_0, T]$. З рівності (4.11) випливає

$$\mathcal{N}(t, t_0) x(t) = \int_{t_0}^{t} \Theta^*(s, t) H^*(s) y(s) \, ds.$$

Позначимо $p(t) = \mathcal{N}(t, t_0) x(t)$, звідки $x(t) = \mathcal{N}^{-1}(t, t_0) p(t)$. Отже,

$$p(t) = \int_{t_0}^{t} \Theta^*(s, t) H^*(s) y(s) \, ds.$$

Диференціюючи останню рівність, одержуємо

$$\frac{dp(t)}{dt} = \int_{t_0}^{t} \frac{d\Theta^*(s,t)}{dt} H^*(s)\, y(s)\, ds + H^*(t)\, y(t) =$$

$$= -A^*(t) \int_{t_0}^{t} \Theta^*(s,t)\, H^*(s)\, y(s)\, ds + H^*(t)\, y(t) = -A^*(t)p(t) + H^*(t)\, y(t)\,.$$

Таким чином,

$$\frac{dp(t)}{dt} = -A^*(t)p(t) + H^*(t)\, y(t)\,, \tag{4.16}$$

$p(t_0) = 0$, $t \in [t_0, T]$. Але $p(t) = \mathcal{N}(t, t_0)\, x(t)$. Тому

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{N}(t,t_0)}{dt} x(t) + \mathcal{N}(t,t_0)\, \frac{dx(t)}{dt}.$$

Звідси

$$\mathcal{N}(t,t_0)\, \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dp(t)}{dt} - \frac{d\mathcal{N}(t,t_0)}{dt} x(t).$$

Підставляючи в останню рівність (4.15), (4.16), одержуємо

$$\begin{gathered}
\mathcal{N}(t,t_0)\, \frac{dx(t)}{dt} = -A^*(t)p(t) + H^*(t)\, y(t) + \\
+ \left(A^*(t)\mathcal{N}(t,t_0) + \mathcal{N}(t,t_0)\, A(t) - H^*(t)H(t)\right) x(t) = \\
= -A^*(t)\mathcal{N}(t,t_0)\, x(t) + H^*(t)\, y(t) + \\
+ \left(A^*(t)\mathcal{N}(t,t_0) + \mathcal{N}(t,t_0)\, A(t) - H^*(t)H(t)\right) x(t) = \\
= \mathcal{N}(t,t_0)\, A(t)x(t) + H^*(t)\left(y(t) - H(t)x(t)\right).
\end{gathered}$$

Позначимо $R(t) = \mathcal{N}^{-1}(t,t_0)$. Тоді

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + R(t)H^*(t)\left(y(t) - H(t)x(t)\right), \tag{4.17}$$

де $t \in [t_0, T]$. Початкову умову для (4.17) можна вибрати $x(t_0) = 0$. Система (4.17) є спостерігачем для знаходження оцінки стану системи (4.13), (4.14). Матриця коефіцієнтів підсилення в цьому випадку має вигляд $K(t) = R(t)H^*(t) = \mathcal{N}^{-1}(t,t_0)\, H^*(t)$. Якщо матриця $\mathcal{N}^{-1}(t,t_0)$ вироджена, її заміняють псевдоoберненою матрицею ([1, 8]).

Побудуємо диференціальне рівняння для знаходження матриці $R(t)$. Для цього продиференціюємо ліву і праву частини рівності

$$R(t)\mathcal{N}(t,t_0) = I.$$

Звідси одержимо

$$\frac{dR(t)}{dt}\mathcal{N}(t,t_0)+R(t)\frac{d\mathcal{N}(t,t_0)}{dt}=0.$$

Домножуючи останню рівність справа на $R(t)$, одержимо

$$\frac{dR(t)}{dt}=-R(t)\frac{d\mathcal{N}(t,t_0)}{dt}R(t).$$

Підставимо в останню рівність (4.15). Маємо

$$\frac{dR(t)}{dt}=R(t)\left(A^*(t)\mathcal{N}(t,t_0)+\mathcal{N}(t,t_0)A(t)-H^*(t)H(t)\right)R(t).$$

Звідси

$$\frac{dR(t)}{dt}=R(t)A^*(t)+A(t)R(t)-R(t)H^*(t)H(t)R(t). \tag{4.18}$$

Одержали матричне диференціальне рівняння Ріккаті для знаходження матриці $R(t)$. Систему (4.18) інтегруємо при $t\in[t_0,T]$ за умови $R(T)=\mathcal{N}^{-1}(T,t_0)$, де матрицю $\mathcal{N}(T,t_0)$ знаходимо з рівняння (4.15).

Приклад 4.1. Дослідити на спостережуваність систему

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1+ax_2,\ \frac{dx_2}{dt}=-ax_1+x_2,$$
$$y(t)=(1-a)x_1+x_2.$$

Позначимо

$$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix},\ H=(1-a,1).$$

Тоді

$$A^*H^*=(1-2a,a(1-a)+1)^*.$$

Матриця спостережуваності $\mathcal{R}$ має вигляд

$$\mathcal{R}=\begin{pmatrix}1-a & 1-2a\\ 1 & a(1-a)+1\end{pmatrix}.$$

Знайдемо детермінант матриці спостережуваності

$$\det\mathcal{R}=(1-a)^2+a.$$

При $a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ визначник матриці $\mathcal{R}$ рівний нулеві. Звідси одержуємо, що при довільних значеннях параметра a, окрім $a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ за теоремою 4.3 дана система є повністю спостережуваною.

Рекомендована література: [2, 10, 11, 14, 24, 30, 46]

Частина III

Варіаційний метод

Лекція 5

Варіаційний метод в задачах оптимального керування

5.1 Варіаційний метод і задача оптимального керування

Розглянемо задачу оптимального керування

$$\mathcal{I}(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T)) \to \inf \tag{5.1}$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t),\ t \in [t_0, T]\,, \tag{5.2}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{5.3}$$

де $f_0(x, u, t)$ – неперервно диференційована функція за x і u, $f(x, u, t) = (f_1(x, u, t), ..., f_n(x, u, t))^*$ – неперервно диференційована функція за x та u. Припустимо, що керування $u_*(\cdot)$ доставляє мінімум функціоналу (5.1) в класі $\mathcal{L}_2\left([t_0, T]\,; \mathbb{R}^m\right)$. Нехай $h \in \mathcal{L}_2\left([t_0, T]\,; \mathbb{R}^m\right)$. Позначимо

$$\varphi\left(\alpha\right) = \mathcal{I}\left(u_* + \alpha h\right)$$

і запишемо необхідну умову екстремуму через першу варіацію функціоналу

$$\delta\mathcal{I}\left(u_*, h\right) = \varphi'\left(0\right) = 0.$$

Керуванню $u(t) = u_*(t) + \alpha h(t)$ відповідає траєкторія $x(t, \alpha)$ системи (5.2), $x(t) = x(t, 0)$. Тоді

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x}, \frac{\partial x(t)}{\partial \alpha} \right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left\langle \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial u}, h(t) \right\rangle \right\} dt + \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, \frac{\partial x(T)}{\partial \alpha} \right\rangle.$$

Тут похідна $\frac{\partial x(t)}{\partial \alpha}$ є похідною $\frac{\partial x(t,\alpha)}{\partial \alpha}$ в точці $\alpha = 0$. З (5.2), (5.3) отримуємо еквівалентне інтегральне рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), u(s), s)\, ds.$$

Диференціюємо останнє співвідношення за параметром α при $u(t) = u_*(t) + \alpha h(t)$ і підставляємо $\alpha = 0$. В результаті знаходимо співвідношення для $\frac{\partial x(t)}{\partial \alpha}$. Одержуємо

$$\frac{\partial x(t)}{\partial \alpha} = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial f(x(s), u_*(s), s)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(s)}{\partial \alpha} + \frac{\partial f(x(s), u_*(s), s)}{\partial u} h(s) \right\} ds.$$

Позначимо $\frac{\partial x(t)}{\partial \alpha} = z(t)$. Звідси

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} z(t) + \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial u} h(t), \tag{5.4}$$

$$z(t_0) = 0. \tag{5.5}$$

Система співвідношень (5.4), (5.5) називається *рівнянням в варіаціях.* Тоді

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle \frac{\partial f_0(x(t), u_*(t), t)}{\partial x}, z(t) \right\rangle + \right. \\ \left. + \left\langle \frac{\partial f_0(x(t), u_*(t), t)}{\partial u}, h(t) \right\rangle \right\} dt + \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Введемо додаткові змінні $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)^*$, які ми назвемо *спряженими.* Нехай

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}.$$

Тоді $\left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z\left(T\right) \right\rangle = -\left\langle \psi\left(T\right), z\left(T\right)\right\rangle$. Враховуючи рівність (5.5), маємо

$$\begin{aligned}\left\langle \psi\left(T\right), z\left(T\right)\right\rangle &= \left\langle \psi\left(T\right), z\left(T\right)\right\rangle - \left\langle \psi\left(t_0\right), z\left(t_0\right)\right\rangle = \\ &= \int_{t_0}^{T} d\left\langle z\left(t\right), \psi\left(t\right)\right\rangle = \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\left\langle z\left(t\right), \psi\left(t\right)\right\rangle dt = \\ &= \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle \frac{dz\left(t\right)}{dt}, \psi\left(t\right)\right\rangle + \left\langle \frac{d\psi\left(t\right)}{dt}, z\left(t\right)\right\rangle \right\} dt.\end{aligned}$$

Розглянемо співвідношення

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dz\left(t\right)}{dt}, \psi\left(t\right)\right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} z(t) + \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial u} h(t), \psi\left(t\right)\right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} z(t), \psi\left(t\right)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f(x(t), u_*(t), t)}{\partial u} h(t), \psi\left(t\right)\right\rangle = \\ &= \left\langle z(t), \frac{\partial f^*(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} \psi\left(t\right)\right\rangle + \left\langle h(t), \frac{\partial f^*(x(t), u_*(t), t)}{\partial u} \psi\left(t\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

Підставляємо одержані співвідношення в (5.6). Маємо

$$\begin{aligned}\varphi'\left(0\right) &= \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle \frac{\partial f_0(x(t), u_*(t), t)}{\partial x}, z(t)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_0(x(t), u_*(t), t)}{\partial u}, h(t)\right\rangle \right\} dt - \\ &\quad - \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle \frac{dz\left(t\right)}{dt}, \psi\left(t\right)\right\rangle + \left\langle \frac{d\psi\left(t\right)}{dt}, z\left(t\right)\right\rangle \right\} dt = \\ &= \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle \frac{\partial f_0(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial f^*(x(t), u_*(t), t)}{\partial x}\psi\left(t\right) - \frac{d\psi(t)}{dt}, z\left(t\right)\right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle -\frac{\partial f^*(x(t), u_*(t), t)}{\partial u}\psi\left(t\right) + \frac{\partial f_0(x(t), u_*(t), t)}{\partial u}, h\left(t\right)\right\rangle \right\} dt.\end{aligned}$$

Тоді накладаємо на функцію $\psi\left(t\right)$ умову

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial f^*(x(t), u_*(t), t)}{\partial x}\psi\left(t\right) + \frac{\partial f_0(x(t), u_*(t), t)}{\partial x} \tag{5.7}$$

У такий спосіб

$$\begin{aligned}&\delta \mathfrak{I}\left(u_*, h\right) = \varphi'\left(0\right) = \\ &= \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle -\frac{\partial f^*(x(t), u_*(t), t)}{\partial u}\psi\left(t\right) + \frac{\partial f_0(x(t), u_*(t), t)}{\partial u}, h\left(t\right)\right\rangle \right\} dt.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Введемо функцію

$$\mathcal{H}\left(x, u, \psi, t\right) = -f_0\left(x, u, t\right) + \left\langle \psi, f\left(x, u, t\right)\right\rangle,$$

яка називається *функцією Гамільтона-Понтрягіна*. Оскільки

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x,u,\psi,t)}{\partial x} = -\frac{\partial f_0(x,u,t)}{\partial x} + \frac{\partial f^*(x,u,t)}{\partial x}\psi,$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}(x,u,\psi,t)}{\partial u} = -\frac{\partial f_0(x,u,t)}{\partial u} + \frac{\partial f^*(x,u,t)}{\partial u}\psi,$$

то з умови (5.7) випливає, що спряжена функція $\psi(\cdot)$ задовольняє спряженій системі

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(t),u_*(t),\psi(t),t)}{\partial x},\ \ \psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}.$$

З (5.8) знаходимо варіацію функціоналу

$$\delta \mathcal{J}(u_*,h) = \varphi'(0) = \int_{t_0}^{T} \left\langle -\frac{\partial \mathcal{H}(x(t),u_*(t),\psi(t),t)}{\partial u}, h(t) \right\rangle dt.$$

Отже,

$$\mathcal{J}'(u_*) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(\cdot),u_*(\cdot),\psi(\cdot),\cdot)}{\partial u}$$

– похідна Фреше функціонала (5.1) в точці $u(\cdot) = u_*(\cdot)$. Умова для визначення оптимального керування є такою

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x(t),u(t),\psi(t),t)}{\partial u} = 0.$$

Якщо на керування задано геометричні обмеження у вигляді $u(t) \in \mathcal{U}$, де $\mathcal{U} \in conv(\mathbb{R}^m)$, тоді за теоремою 21.3 (стор. 220) одержуємо варіаційну нерівність

$$\int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}(x(t),u(t),\psi(t),t)}{\partial u}, u(t) - u_*(t) \right\rangle dt \le 0,$$

де $u(\cdot)$ вибирається з класу допустимих керувань, таких, що $u(t) \in \mathcal{U}$.

5.2 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним функціоналом

Як приклад, розглянемо задачу оптимального керування з квадратичним функціоналом

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \{\langle N(t)\,x(t), x(t)\rangle + \langle M(t)\,u(t), u(t)\rangle\}\,dt + \\ + \frac{1}{2}\langle P_0 x(T), x(T)\rangle \to \inf, \end{aligned} \tag{5.9}$$

за умови, що система має вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\,(t)\,x(t) + C\,(t)\,u(t),\;\; x\,(t_0) = x_0. \tag{5.10}$$

Тут $N\,(t)$, P_0 – невід'ємновизначені симетричні матриці розмірності $n\times n$, $M\,(t)$ – додатновизначена симетрична матриця розмірності $m \times m$, $A\,(t)$ – $n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $C\,(t)$ – $n \times m$-матриця з неперервними компонентами, $t \in [t_0, T]$.

Теорема 5.1. *Розв'язок задачі оптимального керування* (5.9)*,* (5.10) *існує і він єдиний.*

З обґрунтуванням теореми можна познайомитись в [30] (теорема 2, стор. 192; теорема 10, стор. 235).

Для знаходження оптимального керування застосуємо необхідні умови оптимальності і варіаційний метод. Припустимо, що керування $u_*(\cdot)$ доставляє мінімум квадратичному функціоналу (5.9) в класі $\mathcal{L}_2\,([t_0, T]\,;\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathcal{L}_2\,([t_0, T]\,;\mathbb{R}^m)$ і

$$\varphi\,(\alpha) = \mathfrak{I}\,(u_* + \alpha h)\,.$$

Необхідна умова екстремуму через першу варіацію функціоналу

$$\varphi'\,(0) = \delta\mathfrak{I}\,(u_*, h) = 0.$$

Тоді, позначивши $\frac{\partial x(t)}{\partial \alpha} = z(t)$, $u = u_*$ отримуємо

$$\begin{aligned}\varphi'\,(0) = \int_{t_0}^{T} \{\langle N(t)x(t), z(t)\rangle + \langle M(t)u(t), h(t)\rangle\}\,dt+\\ + \langle P_0x(T), z(T)\rangle\,.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Рівняння в варіаціях має вигляд

$$\frac{dz(t)}{dt} = A\,(t)\,z(t) + C\,(t)\,h(t),\;\; z\,(t_0) = 0. \tag{5.12}$$

Введемо спряжені змінні $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)^*$ з умовою

$$\psi\,(T) = -P_0x(T).$$

Оскільки $z\,(t_0) = 0$, то

$$\begin{gathered}\langle P_0x(T), z\,(T)\rangle = -\,\langle \psi\,(T)\,, z\,(T)\rangle = \\ = -\int_{t_0}^{T} \left\{\left\langle \frac{dz\,(t)}{dt}, \psi\,(t)\right\rangle + \left\langle \frac{d\psi\,(t)}{dt}, z\,(t)\right\rangle\right\} dt.\end{gathered}$$

Підставляємо в (5.11) останню формулу, а також замість $\frac{dz(t)}{dt}$ праву частину рівняння у варіаціях (5.12). Маємо таку рівність

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{T} \left\langle N(t)x(t) - \frac{d\psi(t)}{dt}, z(t) \right\rangle dt -$$
$$- \int_{t_0}^{T} \langle A(t)\, z(t) + C(t)\, h(t), \psi(t) \rangle\, dt + \int_{t_0}^{T} \langle M(t)u(t), h(t) \rangle\, dt.$$

Звідси

$$\varphi'(0) = \int_{t_0}^{T} \left\langle N(t)x(t) - A^*(t)\,\psi(t) - \frac{d\psi(t)}{dt}, z(t) \right\rangle dt +$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \langle M(t)u(t) - C^*(t)\,\psi(t), h(t) \rangle\, dt.$$

Припускаємо, що спряжені змінні задовольняють такій системі

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*(t)\,\psi(t) + N(t)\,x(t), \;\; \psi(T) = -P_0 x(T).$$

Тоді варіація функціоналу

$$\delta\Im(u, h) = \varphi'(0) = \int_{t_0}^{T} \langle M(t)u(t) - C^*(t)\,\psi(t), h(t) \rangle\, dt.$$

Оптимальне керування шукаємо з рівності $M(t)u(t) - C^*(t)\,\psi(t) = 0$, звідки

$$u_*(t) = M^{-1}(t)\, C^*(t)\, \psi(t). \tag{5.13}$$

Будемо шукати вектор спряжених змінних у вигляді

$$\psi(t) = P(t)\, x(t). \tag{5.14}$$

Тут $P(t)$ – матриця розмірності $n \times n$. Диференціюючи (5.14) і підставляючи праву частину системи керування та (5.13), одержуємо

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} x(t) + P(t)\, \frac{dx(t)}{dt} =$$
$$= \frac{dP(t)}{dt} x(t) + P(t) \left[A(t)\, x(t) + C(t)\, u_*(t) \right] =$$
$$= \left[\frac{dP(t)}{dt} + P(t)\, A(t) + P(t)\, C(t)\, M^{-1}(t)\, C^*(t)\, P(t) \right] x(t).$$

З іншого боку, підстановка (5.14) в праву частину спряженої системи дає

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*(t)\,\psi(t) + N(t)\,x(t) =$$
$$= -A^*(t)\,P(t)\,x(t) + N(t)\,x(t) = [-A^*(t)\,P(t) + N(t)]\,x(t).$$

Порівнюючи праві частини останніх двох рівностей, маємо

$$\left[\frac{dP(t)}{dt} + P(t)\,A(t) + P(t)\,C(t)\,M^{-1}(t)\,C^*(t)\,P(t)\right] x(t) =$$
$$= [-A^*(t)\,P(t) + N(t)]\,x(t).$$

Крім того, з (5.14) та з умови на правому кінці для спряжених змінних випливає рівність

$$\psi(T) = -P_0 x(T) = P(T)\,x(T)\,.$$

Звідси одержуємо

$$\frac{dP(t)}{dt} + P(t)A(t) + A^*(t)P(t) + P(t)C(t)M^{-1}(t)C^*(t)P(t) = N(t), \quad (5.15)$$

при цьому має місце умова на правому кінці

$$P(T) = -P_0.$$

Диференціальне рівняння (5.15) для знаходження матриці $P(t)$ називається *матричним диференціальним рівнянням Ріккаті.* При цьому з рівняння (5.13) і рівності (5.14) одержуємо вираз для оптимального керування, яке є керуванням з оберненим зв'язком

$$u_*(x(t), t) = M^{-1}(t)\,C^*(t)\,P(t)\,x(t)\,. \quad (5.16)$$

Алгоритм 5.1. *Задаємо початкові данні: матриці $N(t)$, $M(t)$, P_0, $A(t)$, $C(t)$, точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ і часовий інтервал $t \in [t_0, T]$.*

Крок 1. Розв'язуємо матричне рівняння (5.15). Знаходимо матрицю $P(t)$ за умови, що $P(T) = -P_0$.

Крок 2. Розв'язуємо задачу Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = \big(A(t) + C(t)\,M^{-1}(t)\,C^*(t)\,P(t)\big)\,x(t)\,, x(t_0) = x_0,$$

яка одержана підстановкою у систему (5.10) оптимального керування (5.16). Знаходимо оптимальну траєкторію $x_*(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Крок 3. Знаходимо оптимальне керування

$$u_*(t) = M^{-1}(t)\,C^*(t)\,P(t)\,x_*(t)\,,$$

де $t \in [t_0, T]$.

Частина IV

Принцип максимуму Понтрягіна

Лекція 6

Принцип максимуму Понтрягіна для задачі з вільним правим кінцем

6.1 Постановка задачі і формулювання принципу максимуму

Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в тому, щоб мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(s), u(s), s) ds + \Phi(x(T)) \tag{6.1}$$

за таких умов

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \ t \in [t_0, T], \tag{6.2}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{6.3}$$

Тут $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$– вектор фазових координат, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^*$ – вектор керування. Функція керування $u(\cdot)$ вибирається з класу кусково-неперервних функцій, таких що $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \in [t_0, T]$, де $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U}$ не залежить від часу.

Функція $f_0(x, u, t)$ і n-вимірна вектор-функція $f(x, u, t)$ є неперервними за сукупністю змінних розом зі своїми частинними похідними за компонентами вектора x, функція $\Phi(x)$ – неперервно диференційована, $(x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times [t_0, T]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. За наведених умов справджується теорема про існування та єдність розв'язку задачі Коші для системи (6.2) при довільному допустимому керуванні (теорема 16.2, стор.180, теорема

16.3, стор.180). Розв'язки системи (6.2) належать класу кусково гладких функцій. Моменти часу t_0 і T є зафіксованими, а обмеження на фазові координати відсутні. Така задача оптимального керування називається *задачею Больца з вільним правим кінцем.*

Припустимо, що існує оптимальне керування задачі (6.1)-(6.3), тобто, знайдеться таке допустиме керування $u_* = u_*(\cdot)$ і відповідний розв'язок $x_* = x_*(\cdot)$ задачі Коші (6.2),(6.3), що

$$\inf \mathcal{I}(u, x) = \mathcal{I}(u_*, x_*).$$

Відповідність між $u_*(\cdot)$ і $x_*(\cdot)$ означає, що

$$\frac{dx_*(t)}{dt} = f(x_*(t), u_*(t), t), \ t \in [t_0, T],$$

$$x_*(t_0) = x_0.$$

Будемо говорити про розв'язок задачі оптимального керування як про пару функцій $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$. Введемо нові змінні $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)^*$, які називатимемо *спряженими.*

Означення 6.1. Функція вигляду

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle \tag{6.4}$$

називається функцією *Гамільтона-Понтрягіна.*

Для кожної пари $(u(\cdot), x(\cdot))$, де $u(\cdot)$ – допустиме керування, $x(\cdot)$– відповідний йому розв'язок задачі Коші (6.1),(6.2), розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)}{\partial x}, \ t \in [t_0, T], \tag{6.5}$$

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}. \tag{6.6}$$

Тут введені такі позначення

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial x} = grad_x \mathcal{H}(x, u, \psi, t) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \psi, t)}{\partial x_n} \right)^*,$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = grad \Phi(x) = \left(\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_n} \right)^*.$$

Система (6.5),(6.6) називається *спряженою системою*, що відповідає парі $(u(\cdot), x(\cdot))$. Має місце таке твердження.

Теорема 6.1 (принцип максимуму Понтрягіна)**.** *Нехай пара* $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$ *є розв'язком задачі оптимального керування* (6.1),(6.3)*,* $t \in [t_0, T]$*. Тоді існує функція* $\psi_*(\cdot)$*, що задовольняє спряженій системі, яка відповідає парі* $(u_*(\cdot), x_*(\cdot))$*, тобто*

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)}{\partial x}, \ t \in [t_0, T],$$
$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x_*(T))}{\partial x}.$$

При цьому майже для кожного $t \in [t_0, T]$ *функція Гамільтона-Понтрягіна досягає свого максимуму при* $u = u_*(t)$*, а саме*

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x_*(t), u, \psi(t), t) = \mathcal{H}(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t),$$

де $t \in [t_0, T]$*.*

Зауваження. Принцип максимуму Понтрягіна справджується для керувань, для яких задаються обмеження в кожний момент часу, тобто обмеження вигляду $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \in [t_0, T]$. Для обмежень функціонального вигляду, наприклад, таких

$$u(\cdot) \in \left\{ h \in \mathcal{L}_2\left([t_0, T], \mathbb{R}^m\right) : \int_{t_0}^{T} \langle h(s), h(s) \rangle \, ds \leq r^2 \right\}$$

принцип максимуму у вигляді теореми 6.1 не може бути застосованим. Для цього потрібно застосовувати більш загальне твердження (теорема 7.2, стор. 78).

Приклад 6.1. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s) ds + \frac{1}{2} x^2(T)$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + u(t), \ x(t_0) = x_0,$$

де $x(\cdot)$ – скалярна функція, $u(\cdot)$ – скалярне керування, a – сталий параметр, x_0 – фіксована точка. Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -\frac{1}{2} u^2 + \psi(ax + u).$$

Спряжена система записується так

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)}{\partial x} = -a\psi(t), \ \ \psi(T) = -x(T).$$

Згідно принципу максимуму функція Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні досягає свого максимуму. Це означає, що за відсутності обмежень на керування

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)}{\partial u} = 0.$$

Звідси $-u_*(t) + \psi(t) = 0$ і $u_*(t) = \psi(t)$. Розв'язок спряженої системи

$$\psi(t) = \psi(T)e^{a(T-t)}.$$

Звідси $u_*(t) = \psi(T)e^{a(T-t)}$. Підставляємо знайдене керування $u_*(t)$ в рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + u(t), x(t_0) = x_0.$$

Формула Коші для загального розв'язку лінійного рівняння першого порядку має вигляд

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}u(s)ds = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}\psi\left(T\right)e^{a(T-s)}ds = \\ &= e^{at}x_0 + \psi\left(T\right)e^{aT}e^{at}\int_0^t e^{-2as}ds = \\ &= e^{at}x_0 + \frac{1}{2a}\psi\left(T\right)e^{aT}\left(e^{at} - e^{-at}\right). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Звідси

$$x\left(T\right) = e^{aT}\left(x_0 + \frac{1}{2a}\psi\left(T\right)\left(e^{aT} - e^{-aT}\right)\right).$$

Оскільки $\psi\left(T\right) = -x\left(T\right)$, то

$$\psi\left(T\right) = -\frac{e^{aT}x_0}{1 - \frac{e^{aT}}{2a}\left(e^{aT} - e^{-aT}\right)} \tag{6.8}$$

Отже, оптимальне керування має вигляд

$$u_*\left(t\right) = \psi\left(T\right)e^{a(T-t)},$$

де $\psi\left(T\right)$ знаходиться за формулою (6.8). При цьому оптимальна траєкторія згідно (6.7) має вигляд

$$x_*\left(t\right) = e^{at}x_0 + \frac{1}{2a}\psi\left(T\right)e^{aT}\left(e^{at} - e^{-at}\right).$$

6.2 Голчата варіація керування

Розглянемо задачу оптимального керування з вільним правим кінцем і фіксованим часом

$$\mathcal{I}(u,x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(T)) \to \inf \tag{6.9}$$

за умов

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t), t \in [t_0,T], \tag{6.10}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{6.11}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^*$ – вектор керування, функція $f_0(x,u,t)$ є неперервною разом з $\frac{\partial f_0(x,u,t)}{\partial x}$ за сукупністю змінних, функція $\Phi(x)$ – неперервно диференційована, n-вимірна вектор-функція $f(x,u,t)$ є неперервною разом з $\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}$ за сукупністю аргументів, $(x,u,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times [t_0,T]$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Крім цього, керування $u(\cdot)$ вибираються з класу кусково неперервних на $[t_0,T]$ функцій, таких, що $u(t) \in \mathcal{U}$. Часовий проміжок $[t_0,T]$ є фіксованим.

Нехай $I \subset [t_0,T]$ – множина, де керування $u(\cdot)$ є неперервним, $v \in \mathcal{U}$ – фіксований вектор, точка $\tau \in I$ і $\varepsilon > 0$ – таке мале число, що $[\tau, \tau+\varepsilon] \subset I$. Нехай керуванню $u(\cdot)$ відповідає розв'язок $x(\cdot)$ системи (6.10) з умовою Коші (6.11). Керування

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u(t), & \text{якщо } t \notin [\tau, \tau+\varepsilon), \\ v, & \text{якщо } t \in [\tau, \tau+\varepsilon) \end{cases} \tag{6.12}$$

називається *елементарною голчатою варіацією* керування $u(\cdot)$ (рис. 6.1). Нехай $x_\varepsilon(\cdot)$ – розв'язок системи (6.10) з умовами (6.11), що відповідає керуванню $u_\varepsilon(\cdot)$. Такий розв'язок називається *елементарною голчатою варіацією* траєкторії $x(\cdot)$. Трійка (τ, v, ε), що визначає голчату варіацію (6.12) називається *елементарною голкою.*

Лема 6.1 (про властивості голчатої варіації). *Нехай (τ, v, ε) – елементарна голка, $\tau \in I$, $v \in \mathcal{U}$. Тоді $x_\varepsilon(\cdot) \to x(\cdot)$ при $\varepsilon \to +0$ в просторі $C([t_0,T];\mathbb{R}^n)$, тобто*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \max_{t \in [t_0,T]} \|x_\varepsilon(t) - x(t)\| = 0.$$

Крім того, функція

$$z(\cdot) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{x_\varepsilon(\cdot) - x(\cdot)}{\varepsilon},$$

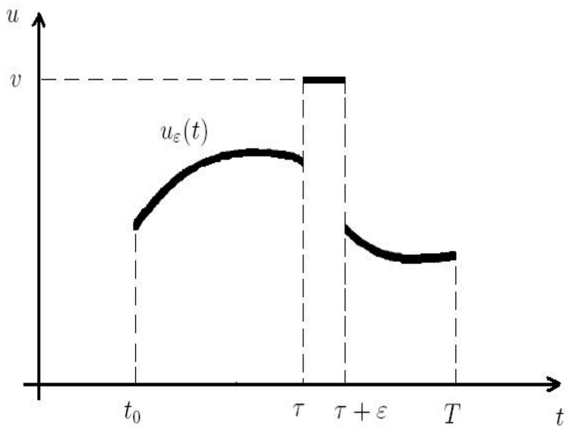

Рис. 6.1. Голчата варіація керування

задовольняє [1] *диференціальне рівняння у варіаціях*

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} z(t), \;\; t \in [\tau, T],$$

з початковою умовою

$$z(\tau) = f(x(\tau), v, \tau) - f(x(\tau), u(\tau), \tau).$$

Доведення. За означенням голчатої варіації керування $u(t) = u_\varepsilon(t)$ при $t < \tau$ і тому $x(t) = x_\varepsilon(t)$, $t < \tau$. З (6.10) випливає

$$x_\varepsilon(\tau + \varepsilon) = x(\tau) + \int_\tau^{\tau+\varepsilon} f(x_\varepsilon(s), v, s) ds.$$

Оскільки за властивостями інтеграла Лебега

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\tau^{\tau+\varepsilon} f(x_\varepsilon(s), v, s) ds = 0,$$

то в точці $t = \tau$ маємо $x(\tau) = \lim_{\varepsilon \to +0} x_\varepsilon(\tau + \varepsilon)$. Тому за теоремою 16.5 (стор.181) про неперервну залежність системи Каратеодорі від початкових умов, маємо

$$\lim_{\varepsilon \to +0} x_\varepsilon(t) = x(t)$$

[1] границя розглядається в метриці простору $C\left([t_0, T]; \mathbb{R}^n\right)$

рівномірно за $t \in [\tau, T]$. Отже,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \max_{t \in [t_0, T]} \|x_\varepsilon(t) - x(t)\| = 0.$$

Першу частину леми доведено.

Для доведення другої частини теореми з (6.10), (6.11) запишемо інтегральні рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), u(s), s)ds,$$
$$x_\varepsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s), s)ds.$$

Звідси

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) - x(t) &= \int_{\tau}^{t} \{f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s), s) - f(x(s), u(s), s)\} ds = \\ &= \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \{f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s), s) - f(x(s), u(s), s)\} ds + \\ &+ \int_{\tau+\varepsilon}^{t} \{f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s), s) - f(x(s), u(s), s)\} ds. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Далі поділимо рівність (6.13) на $\varepsilon > 0$. Отримуємо

$$\begin{aligned} &\frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \{f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s), s) - f(x(s), u(s), s)\} ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau+\varepsilon}^{t} \{f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s), s) - f(x(s), u(s), s)\} ds. \end{aligned} \tag{6.14}$$

У першому інтегралі у (6.14) враховуємо, що $u_\varepsilon(t) = v$ при $t \in [\tau, \tau + \varepsilon)$, а тому

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \{f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s), s) - f(x(s), u(s), s)\} ds = \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \{f(x_\varepsilon(s), v, s) - f(x(s), u(s), s)\} ds = \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \{f(x_\varepsilon(s), v, s) - f(x(s), v, s)\} ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \{f(x(s), v, s) - f(x(s), u(s), s)\} ds. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Позначимо

$$F(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} \{f(x(s), v, s) - f(x(s), u(s), s)\}\, ds,$$

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \{f(x_\varepsilon(s), v, s) - f(x(s), v, s)\}\, ds.$$

Тоді з (6.15) випливає

$$I_1(\varepsilon) = J(\varepsilon) + \frac{F(\tau+\varepsilon) - F(\tau)}{\varepsilon}.$$

Інтеграл $J(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, так як за теоремою про середнє

$$\|J(\varepsilon)\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} \|f(x_\varepsilon(s), v, s) - f(x(s), v, s)\|\, ds =$$
$$= \|f(x_\varepsilon(\theta), v, \theta) - f(x(\theta), v, \theta)\| \to 0, \;\; \varepsilon \to +0,$$

де $\theta \in (\tau, \tau+\varepsilon)$. Крім цього

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{F(\tau+\varepsilon) - F(\tau)}{\varepsilon} = F'(\tau),$$

причому

$$F'(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{t_0}^{\tau} \{f(x(s), v, s) - f(x(s), u(s), s)\}\, ds =$$
$$= f(x(\tau), v, \tau) - f(x(\tau), u(\tau), \tau).$$

Тому

$$\lim_{\varepsilon \to +0} I_1(\varepsilon) = f(x(\tau), v, \tau) - f(x(\tau), u(\tau), \tau).$$

Другий інтеграл в формулі (6.14)

$$I_2(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau+\varepsilon}^{t} \{f(x_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s), s) - f(x(s), u(s), s)\}\, ds =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau+\varepsilon}^{t} \{f(x_\varepsilon(s), u(s), s) - f(x(s), u(s), s)\}\, ds.$$

Застосовуючи розклад за першим наближенням, отримуємо

$$f(x_\varepsilon(t), u(t), t) = f(x(t), u(t), t) +$$
$$+ \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} (x_\varepsilon(t) - x(t)) + \omega\,(x_\varepsilon, x)\,,$$

де $\omega\left(x_\varepsilon, x\right) = o\left\|x_\varepsilon - x\right\|$ при

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\max_{t\in[t_0,T]}\left\|x_\varepsilon(t) - x(t)\right\| = 0.$$

Позначимо $\omega\left(x_\varepsilon, x\right) = \omega(\varepsilon)$, де $\frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Отже,

$$I_2(\varepsilon) = \int_{\tau+\varepsilon}^{t}\left\{\frac{\partial f(x(s), u(s), s)}{\partial x}\left(\frac{x_\varepsilon(s) - x(s)}{\varepsilon}\right) + \frac{\omega\left(\varepsilon\right)}{\varepsilon}\right\}ds,$$

звідки отримуємо

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_2(\varepsilon) = \int_{\tau}^{t}\frac{\partial f(x(s), u(s), s)}{\partial x}z(s)ds.$$

З (6.14) випливає

$$z(t) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{x_\varepsilon(t) - x(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} I_1(\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to+0} I_2(\varepsilon) =$$
$$= f(x(\tau), v, \tau) - f(x(\tau), u(\tau), \tau) + \int_{\tau}^{t}\frac{\partial f(x(s), u(s), s)}{\partial x}z(s)ds.$$

Це означає, що $z(\tau) = f(x(\tau), v, \tau) - f(x(\tau), u(\tau), \tau)$ і

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x}z(t),\ \ t \in \left[\tau, T\right].$$

$\square$

6.3 Варіація функціоналу і принцип максимуму Понтрягіна

Лема 6.2 (про варіацію функціоналу)**.** *Нехай* (τ, v, ε) *– елементарна голка, точка* $\tau \in I$ *і* $v \in \mathcal{U}$ *– фіксовані. Тоді*

$$\delta\mathcal{J}(u(\cdot), x(\cdot)) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\mathcal{J}(u_\varepsilon(\cdot), x_\varepsilon(\cdot)) - \mathcal{J}(u(\cdot), x(\cdot))}{\varepsilon} =$$
$$= \mathcal{H}\left(x\left(\tau\right), u(\tau), \psi(\tau), \tau\right) - \mathcal{H}\left(x\left(\tau\right), v, \psi(\tau), \tau\right),$$

де

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle\psi, f(x, u, t)\rangle$$

– функція Гамільтона-Понтрягіна. При цьому

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)}{\partial x},\ \ t \in \left[t_0, T\right],\ \ \psi(T) = -\frac{\partial\Phi(x(T))}{\partial x}.$$

Доведення. З (6.9) випливає

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{I}(u(\cdot),x(\cdot)) &= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{T}(f_0(x_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t),t)-f_0(x(t),u(t),t))dt+\\ &+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\Phi(x_\varepsilon(T))-\Phi(x(T))}{\varepsilon}=\\ &=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}(f_0(x_\varepsilon(t),v,t)-f_0(x(t),u(t),t))dt+\\ &+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau+\varepsilon}^{T}(f_0(x_\varepsilon(t),u(t),t)-f_0(x(t),u(t),t))dt+\\ &+\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\left\langle\frac{\partial\Phi(x(T))}{\partial x},\frac{x_\varepsilon(T)-x(T)}{\varepsilon}\right\rangle+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right).\end{aligned}\tag{6.16}$$

Аналогічно до того, як було показано при доведенні леми про голчату варіацію в (6.15) границя

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon}(f_0(x_\varepsilon(t),v,t)-f_0(x(t),u(t),t))dt = \\ = f_0(x(\tau),v,\tau)-f_0(x(\tau),u(\tau),\tau).$$

Другий доданок в (6.16) має вигляд

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau+\varepsilon}^{T}(f_0(x_\varepsilon(t),u(t),t)-f_0(x(t),u(t),t))dt =\\ =\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\tau+\varepsilon}^{T}\left\{\left\langle\frac{\partial f_0(x(t),u(t),t)}{\partial x},\frac{x_\varepsilon(t)-x(t)}{\varepsilon}\right\rangle+\frac{o\,(\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}dt =\\ =\int_{\tau}^{T}\left\langle\frac{\partial f_0(x(t),u(t),t)}{\partial x},z(t)\right\rangle dt.$$

Третій доданок в (6.16) записується у такий спосіб

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\left\langle\frac{\partial\Phi(x(T))}{\partial x},\frac{x_\varepsilon(T)-x(T)}{\varepsilon}\right\rangle+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)=\left\langle\frac{\partial\Phi(x(T))}{\partial x},z(T)\right\rangle.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{I}(u(\cdot),x(\cdot)) &= f_0(x(\tau),v,\tau)-f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)+\\ &+\int_{\tau}^{T}\left\langle\frac{\partial f_0(x(t),u(t),t)}{\partial x},z(t)\right\rangle dt+\left\langle\frac{\partial\Phi(x(T))}{\partial x},z(T)\right\rangle.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Оскільки $\psi(T) = -\frac{\partial\Phi(x(T))}{\partial x}$, то

$$\left\langle \frac{\partial\Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle = -\left\langle \psi(T), z(T) \right\rangle.$$

Розглянемо

$$\langle\psi(T), z(T)\rangle = \int_\tau^T d\left\langle z\left(t\right), \psi\left(t\right)\right\rangle + \left\langle \psi\left(\tau\right), z\left(\tau\right)\right\rangle =$$
$$= \int_\tau^T \left\{ \left\langle \frac{dz\left(t\right)}{dt}, \psi\left(t\right) \right\rangle + \left\langle \frac{d\psi\left(t\right)}{dt}, z\left(t\right) \right\rangle \right\} dt + \left\langle z\left(\tau\right), \psi\left(\tau\right)\right\rangle =$$
$$= \int_\tau^T \left\{ \left\langle \frac{dz\left(t\right)}{dt}, \psi\left(t\right) \right\rangle + \left\langle \frac{d\psi\left(t\right)}{dt}, z\left(t\right) \right\rangle \right\} dt + \langle\psi(\tau), z(\tau)\rangle.$$

Застосовуємо лему 6.1 і підставляємо рівняння у варіаціях. Одержуємо

$$\langle\psi(T), z(T)\rangle = \int_\tau^T \left\{ \left\langle \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} z(t), \psi\left(t\right) \right\rangle + \left\langle \frac{d\psi\left(t\right)}{dt}, z\left(t\right) \right\rangle \right\} dt +$$
$$+ \langle\psi(\tau), z(\tau)\rangle =$$
$$= \int_\tau^T \left\langle \left(\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \right)^* \psi\left(t\right) + \frac{d\psi(t)}{dt}, z(t) \right\rangle dt + \langle\psi(\tau), z(\tau)\rangle.$$

Оскільки

$$\left\langle \frac{\partial\Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle = -\left\langle \psi(T), z(T) \right\rangle,$$

то з (6.17) отримуємо

$$\delta\mathfrak{I}(u(\cdot), x(\cdot)) = f_0(x(\tau), v, \tau) - f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) +$$
$$+ \int_\tau^T \left\langle \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x}, z(t) \right\rangle dt - \langle\psi(T), z(T)\rangle =$$
$$= f_0(x(\tau), v, \tau) - f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) - \langle\psi(\tau), z(\tau)\rangle +$$
$$+ \int_\tau^T \left\langle \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x} - \left(\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \right)^* \psi\left(t\right) - \frac{d\psi(t)}{dt}, z(t) \right\rangle dt.$$

Останній доданок одержаного виразу дорівнює нулеві, оскільки

$$\frac{\partial\mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \right)^* \psi\left(t\right) - \frac{\partial f_0(x(t), u(t), t)}{\partial x}$$

і $\psi(t)$ задовольняє спряженій системі

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)}{\partial x}.$$

Тому

$$\delta\mathcal{I}(u(\cdot),x(\cdot)) = f_0(x(\tau),v,\tau) - f_0(x(\tau),u(\tau),\tau) - \langle\psi(\tau),z(\tau)\rangle\,.$$

Підставляємо в останній вираз з леми 6.1

$$z(\tau) = f(x(\tau),v,\tau) - f(x(\tau),u(\tau),\tau).$$

Одержуємо

$$\begin{gathered}\delta\mathcal{I}(u(\cdot),x(\cdot)) = \\ = f_0(x(\tau),v,\tau) - f_0(x(\tau),u(\tau),\tau) - \langle\psi(\tau),f(x,v,\tau)-f(x,u,\tau)\rangle = \\ = \mathcal{H}\left(x\left(\tau\right),u(\tau),\psi(\tau),\tau\right) - \mathcal{H}\left(x\left(\tau\right),v,\psi(\tau),\tau\right).\end{gathered}$$

□

Теорема 6.2 (принцип максимуму Понтрягіна)**.** *Нехай $u_*(\cdot)$ – оптимальне керування, $x_*(\cdot)$ – оптимальна траєкторія задачі (6.9)-(6.11). Тоді майже для всіх $t\in[t_0,T]$*

$$\max_{v\in\mathcal{U}}\mathcal{H}\left(x_*\left(t\right),v,\psi_*(t),t\right) = \mathcal{H}\left(x_*\left(t\right),u_*(t),\psi_*(t),t\right),$$

де $\psi_*\left(t\right)$ – розв'язок спряженої системи

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}(x_*(t),u_*(t),\psi(t),t)}{\partial x},\;\;\psi(T) = -\frac{\partial\Phi(x_*(T))}{\partial x},\;\;t\in[t_0,T]\,.$$

Доведення. Нехай $I\subset[t_0,T]$ – множина, де керування $u_*(\cdot)$ є неперервним, $v\in\mathcal{U}$ – фіксований вектор, точка $\tau\in I$ і $\varepsilon>0$ – мале число, (τ,v,ε) – елементарна голка, $u_\varepsilon(\cdot)$ – голчата варіація керування $u_*(\cdot)$, $x_\varepsilon(\cdot)$ – голчата варіація траєкторії системи (6.10). Оскільки $u_*(\cdot)$ – оптимальне керування, то

$$\mathcal{I}(u_\varepsilon(\cdot),x_\varepsilon(\cdot)) \ge \mathcal{I}(u_*(\cdot),x_*(\cdot)).$$

Тому варіація функціоналу

$$\delta\mathcal{I}(u_*(\cdot),x_*(\cdot)) = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\mathcal{I}(u_\varepsilon(\cdot),x_\varepsilon(\cdot)) - \mathcal{I}(u_*(\cdot),x_*(\cdot))}{\varepsilon} \ge 0.$$

За лемою 6.2 про варіацію функціоналу

$$\mathcal{H}\left(x_*\left(\tau\right),u_*(\tau),\psi_*(\tau),\tau\right) - \mathcal{H}\left(x_*\left(\tau\right),v,\psi_*(\tau),\tau\right) \ge 0,\;\;\tau\in I.$$

Тобто,

$$\mathcal{H}\left(x_*\left(\tau\right),u_*(\tau),\psi_*(\tau),\tau\right) \ge \mathcal{H}\left(x_*\left(\tau\right),v,\psi_*(\tau),\tau\right),\;\;\tau\in I.$$

Оскільки керування розглядаються у класі кусково-неперервних функцій, то множина $[t_0, T]/I$ складається зі скінченної кількості точок і

$$\max_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x_*(t), v, \psi_*(t), t) = \mathcal{H}(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)$$

майже для всіх $t \in [t_0, T]$. □

Умова максимуму функції Гамільтона - Понтрягіна дозволяє знайти підозріле на оптимальність керування як функцію від фазових координат і спряженої змінної

$$u(t) = u(x(t), \psi_*(t), t).$$

Підставивши цю функцію в систему (6.1), (6.2) і в спряжену систему (6.5),(6.6), одержуємо в сукупності крайову задачу для системи розмірності $2n$. Така крайова задача називається *крайовою задачею принципу максимуму.*

6.4 Достатні умови оптимальності

Розглянемо задачу оптимального керування вигляду

$$\mathcal{I}(u, x) = \Phi(x(T)) \to \inf \tag{6.18}$$

за умов

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(u(t), t), \ t \in [t_0, T], \tag{6.19}$$

де $x(t_0) = x_0$, $A(t)$ – $n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $C(u, t)$ – функція розмірності n з неперервними компонентами, функція $\Phi(x)$ – неперервно диференційована. Інші умови відповідають умовам задачі (6.9)-(6.11). Має місце така теорема.

Теорема 6.3 (достатні умови оптимальності)**.** *Нехай $\Phi(x)$ – опукла функція. Тоді з умови максимуму функції Гамільтона-Понтрягіна*

$$\max_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x_*(t), v, \psi_*(t), t) = \mathcal{H}(x_*(t), u_*(t), \psi_*(t), t)$$

майже для всіх $t \in [t_0, T]$ випливає, що керування $u_*(\cdot)$ є оптимальним. Тут $\psi_*(t)$ – розв'язок спряженої системи

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*(t)\psi(t), \ \psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x_*(T))}{\partial x}, \ t \in [t_0, T].$$

Доведення. Виберемо допустиме керування $u(\cdot)$, $u(t) \in \mathcal{U}$ і відповідну йому траєкторію $x(\cdot)$ системи (6.19), $x(t_0) = x_0$. Приріст траєкторії $\Delta x(t) = x(t) - x_*(t)$ системи (6.19) задовольняє системі диференціальних рівнянь

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t)\Delta x(t) + C(u(t),t) - C(u_*(t),t),\ \ \Delta x(t_0) = 0.$$

За формулою Коші

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^{t} \Theta(t,s)(C(u(s),s) - C(u_*(s),s))ds.$$

Тут $\Theta(t,s)$ – фундаментальна матриця системи $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$, нормована за моментом s. Тоді приріст функціоналу

$$\mathcal{I}(u,x) - \mathcal{I}(u_*,x_*) = \Phi(x(T)) - \Phi(x_*(T)) \geq$$
$$\geq \left\langle \frac{\partial\Phi(x_*(T))}{\partial x}, x(T) - x_*(T) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\Phi(x_*(T))}{\partial x}, \Delta x(T) \right\rangle,$$

оскільки $\Phi(x)$ – опукла функція. Далі

$$\mathcal{I}(u,x) - \mathcal{I}(u_*,x_*) \geq \left\langle \frac{\partial\Phi(x_*(T))}{\partial x}, \int_{t_0}^{T} \Theta(T,s)(C(u(s),s) - C(u_*(s),s))ds \right\rangle =$$
$$= -\int_{t_0}^{T} \langle \psi(T), \Theta(T,s)(C(u(s),s) - C(u_*(s),s))\rangle\, ds =$$
$$= -\int_{t_0}^{T} \langle \Theta^*(T,s)\psi(T), C(u(s),s) - C(u_*(s),s)\rangle\, ds.$$

Оскільки функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x,u,\psi,t) = \langle \psi, A(t)x + C(u,t)\rangle\,,$$

а функція $\psi(t) = \Theta^*(T,t)\psi(T)$ – розв'язок спряженої системи

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*(t)\psi(t),$$

то з умови максимуму функції Гамільтона-Понтрягіна на оптимальному керуванні

$$\mathcal{I}(u,x) - \mathcal{I}(u_*,x_*) \geq -\int_{t_0}^{T} \langle \psi(s), C(u(s),s) - C(u_*(s),s)\rangle\, ds =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \{\mathcal{H}(x_*(s),u_*(s),\psi(s),s) - \mathcal{H}(x_*(s),u(s),\psi(s),s)\}ds \geq 0.$$

Звідси $\mathcal{I}(u,x) \geq \mathcal{I}(u_*,x_*)$. $\square$

6.5 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості

Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \{\langle N(t)\,x(t)\,, x(t)\rangle + \langle M(t)\,u(t)\,, u(t)\rangle\}\,dt + \\ + \frac{1}{2}\langle P_0 x(T)\,, x(T)\rangle \tag{6.20}$$

на розв'язках лінійної системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x + C(t)\,u(t)\,,\ t \in [t_0, T]\,, \tag{6.21}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{6.22}$$

Тут $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, ..., u_n)^*$ – вектор керування, матриці $N(t)$, P_0 є невід'ємновизначеними симетричними матрицями розмірності $n \times n$, матриця $M(t)$ є додатновизначеною і симетричною розмірності $m \times m$, $t \in [t_0, T]$, матриці $A(t)$, $C(t)$ є матрицями з неперервними компонентами розмірностей $n \times n$ і $n \times m$ відповідно, $t \in [t_0, T]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – фіксована точка, T – фіксований час. Функція Гамільтона-Понтрягіна записується так

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -\frac{1}{2}\langle N(t)\,x, x\rangle - \frac{1}{2}\langle M(t)\,u, u\rangle + \langle \psi, A(t)\,x + C(t)\,u\rangle\,,$$

де $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)^*$. Спряжена система, що відповідає парі $(u(\cdot)\,, x(\cdot))$, має вигляд

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*(t)\,\psi + N(t)\,x(t)\,,\ \psi(T) = -P_0 x(T) \tag{6.23}$$

Згідно принципу максимуму оптимальне керування вибираємо з умови

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)}{\partial u} = 0.$$

Тоді

$$-M(t)\,u(t) + C^*(t)\,\psi(t) = 0.$$

Звідси оптимальне керування задовольняє рівності

$$u_*(t) = M^{-1}(t)\,C^*(t)\,\psi(t)\,. \tag{6.24}$$

Спряжену функцію шукаємо у вигляді

$$\psi(t) = P(t)\,x(t)\,,$$

де $P(t)$ – матриця розмірності $n \times n$. Підставляємо в (6.23) і отримуємо

$$\frac{dP(t)}{dt}x(t) + P(t)\frac{dx(t)}{dt} = -A^*(t)\,P(t)\,x(t) + N(t)\,x(t)\,.$$

Звідси

$$\frac{dP(t)}{dt}x(t) = -A^*(t)\,P(t)\,x(t) + N(t)\,x(t) - P(t)\frac{dx(t)}{dt}.$$

Підставляємо в останнє співвідношення (6.21) і (6.24). Маємо

$$\begin{gathered}\frac{dP(t)}{dt}x(t) = -A^*(t)\,P(t)\,x(t) + N(t)\,x(t) - \\ -P(t)\left[A(t)\,x(t) + C(t)\,u_*(t)\right] = -A^*(t)\,P(t)\,x(t) + N(t)\,x(t) - \\ -P(t)\,A(t)\,x(t) - P(t)\,C(t)\,M^{-1}(t)\,C^*(t)\,\psi(t) = \\ = -A^*(t)\,P(t)\,x(t) + N(t)\,x(t) - \\ -P(t)\,A(t)\,x(t) - P(t)\,C(t)\,M^{-1}(t)\,C^*(t)\,P(t)\,x(t)\,.\end{gathered}$$

Отримуємо таку рівність

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} &+ P(t)\,A(t) + A^*(t)\,P(t) + \\ &+ P(t)\,C(t)\,M^{-1}(t)\,C^*(t)\,P(t) = N(t)\,.\end{aligned} \tag{6.25}$$

Оскільки $\psi(T) = P(T)\,x(T) = -P_0 x(T)$, то $P(T) = -P_0$. Отже, оптимальне керування шукаємо із співвідношення

$$u_*(x(t), t) = M^{-1}(t)\,C^*(t)\,P(t)\,x(t)\,, \tag{6.26}$$

де матриця $P(t)$ задовольняє рівняння Ріккаті (6.25) з умовою на правому кінці

$$P(T) = -P_0.$$

Матриця $P(t)$ симетрична, $t \in [t_0, T]$.

6.6 Побудова множини досяжності за допомогою принципу максимуму Понтрягіна

Розглянемо лінійну систему керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\,,\ \ t \in [t_0,\ T]\,, \tag{6.27}$$

за умови
$$x\left(t_0\right)=x_0. \tag{6.28}$$
Тут $x=\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right)^*$ – вектор фазових координат, $u=\left(u_1,\ \ldots,\ u_m\right)^*$ – вектор керування, $A(t)$ – неперервна $n\times n$ - матриця, $B(t)$ – неперервна $n\times m$- матриця, $t\in[t_0,\ T]$, $x_0\in\mathbb{R}^n$. Керування вибирається з класу інтегрованих на $[t_0,\ T]$ функцій так, що $u\left(t\right)\in\mathcal{U}$, де $\mathcal{U}\in conv\left(\mathbb{R}^m\right)$.

Розглянемо задачу оптимального керування: знайти керування u_*, що мінімізує критерій якості
$$\mathcal{I}\left(u\right)=\left\langle p,\ x(T)\right\rangle, \tag{6.29}$$
де $p\ \in\mathcal{S}$. Припускаємо, що x_* – оптимальна траєкторія системи (6.27). Тоді оптимальне значення функціоналу (6.29)
$$\mathcal{I}_*=\ \left\langle p,\ x_*(T)\right\rangle=\min_{z\in\mathcal{X}(T,x_0)}\left\langle p,\ z\right\rangle,$$
де $\mathcal{X}\left(T,x_0\right)$ – множина досяжності системи (6.27) в момент T з точки $x\left(t_0\right)=x_0$. Значення
$$\mathcal{I}_*=-\max_{z\in\mathcal{X}(T,x_0)}\left\langle -p,z\right\rangle=-c\left(\mathcal{X}\left(T,x_0\right),-p\right).$$
Отже, розв'язуючи задачу (6.27)-(6.29) для всіх $p\in\mathcal{S}$, ми можемо побудувати опорну функцію множини досяжності. Оскільки множина досяжності є опуклим компактом, то $\mathcal{X}\left(T,x_0\right)$ можна відновити за відомою опорною функцією.

Запишемо функцію Гамільтона-Понтрягіна
$$\mathcal{H}\left(x,u,\psi,t\right)=\left\langle\psi,\ A\left(t\right)x+B\left(t\right)u\right\rangle. \tag{6.30}$$
Спряжена система має вигляд
$$\frac{d\psi(t)}{dt}=-A^*\left(t\right)\psi\left(t\right),\quad \psi\left(T\right)=-p. \tag{6.31}$$
При цьому керування u_* шукається з умови максимуму функції (6.30).

Приклад 6.2. Розглянемо систему керування (6.27), (6.28) за умови $\mathcal{U}=\mathcal{K}_r\left(0\right)$. Тоді згідно принципу максимуму Понтрягіна керування u_* шукається з умови
$$\max_{\|u\|\le r}\mathcal{H}\left(x,u,\psi,t\right)=\max_{\|u\|\le r}\left\langle\psi,\ A\left(t\right)x+B\left(t\right)u\right\rangle$$

Звідси
$$u_*(t) = r\frac{B^*(t)\psi(t)}{\|B^*(t)\psi(t)\|}.$$
Нехай $\Theta(t,s)$ – фундаментальна матриця системи (6.27), нормована за моментом s. Тоді з (6.31) випливає
$$\psi(t) = -\Theta^*(T,t)\,p.$$
Отже, за формулую Коші
$$x_*(T) = \Theta(T,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{T} \Theta(T,s)B(s)\,u_*(s)\,ds =$$
$$= \Theta(T,t_0)\,x_0 + r\int_{t_0}^{T} \frac{\Theta(T,s)\,B(s)B^*(s)\Theta^*(T,s)\,p}{\|B^*(s)\Theta^*(T,s)\,p\|}ds.$$
Тоді
$$c(\mathfrak{X}(T,x_0),-p) = -\mathfrak{I}_* = -\langle x_*(T),p\rangle =$$
$$= -\langle\Theta(T,t_0)\,x_0,p\rangle + r\int_{t_0}^{T} \|B^*(s)\Theta^*(T,s)\,p\|\,ds.$$
Звідси
$$c(\mathfrak{X}(T,x_0),p) = \langle\Theta(T,t_0)\,x_0,\ p\rangle + r\int_{t_0}^{T} \|B^*(s)\Theta^*(T,s)\,p\|\,ds.$$

Лекція 7

Принцип максимуму Понтрягіна при загальних обмеженнях

7.1 Принцип Лагранжа для задачі оптимального керування

Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}_0\left(u(\cdot), x(\cdot), t_0, T\right) \to \min \tag{7.1}$$

за умов, що

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt} = f\left(x(t), u(t), t\right), \ t \in [t_0, T], \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_i\left(u(\cdot), x(\cdot), t_0, T\right) \le 0, \ i = 1, 2, \ldots, k, \\ &\mathcal{I}_i\left(u(\cdot), x(\cdot), t_0, T\right) = 0, \ i = k+1, k+2, \ldots, r. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Тут $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, функція керування $u(\cdot)$ належить класу кусково неперервних функцій таких, що $u\left(t\right) \in \mathcal{U}$, де $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{I}_i\left(u(\cdot), x(\cdot), t_0, T\right) = \int_{t_0}^{T} f_i\left(x(t), u(t), t\right) dt + \Phi_i\left(x(t_0), t_0, x(T), T\right),$$

початкові і кінцеві моменти часу t_0, T невідомі, належать обмеженому інтервалу $I \subset \mathbb{R}^1$ і є параметрами оптимізації, функції $f_i\left(x, u, t\right)$, $i = 0, 1, \ldots, r$, $f\left(x, u, t\right)$ є неперервними за сукупністю змінних разом зі своїми похідними за компонентами вектора x на множині $(x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times I$, функції $\Phi_i(x, t, y, s)$, $i = 0, 1, \ldots, r$ є неперервно диференційованими на множині $(x, t, y, s) \in \mathbb{R}^n \times I \times \mathbb{R}^n \times I$, отже, мають неперервні похідні за компонентами векторів x, y і неперервні похідні за часовими змінними t, s. Співвідношення (7.3) задають обмеження на керування і фазову змінну.

Введемо функцію Лагранжа задачі (7.1)-(7.3). Вона має вигляд

$$\Lambda\left(x(\cdot), u(\cdot), \lambda, \psi(\cdot), t_0, T\right) = \int_{t_0}^{T} \mathcal{L}\left(x(t), x'(t), u(t), \lambda, \psi(t), t\right) dt +$$

$$+\ell\left(x(t_0), t_0, x(T), T\right),$$

де

$$\mathcal{L}\left(x, x', u, \lambda, \psi, t\right) = F\left(x, u, \lambda, t\right) + \langle \psi, x' - f(x, u, t)\rangle$$

– лагранжиан задачі (7.1)-(7.3), $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$,

$$F\left(x, u, \lambda, t\right) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i f_i\left(x, u, t\right),$$

$$\ell\left(x(t_0), t_0, x(T), T\right) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \Phi_i\left(x(t_0), t_0, x(T), T\right)$$

– термінант задачі (7.1)-(7.3), де $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)^*$ – вектор спряжених координат, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)^*$. Вектор спряжених координат і вектор λ грають роль множників Лагранжа задачі (7.1)-(7.3) за аналогією з множниками Лагранжа задачі (21.5), (21.6).

Вважаємо, що існує оптимальне керування $u_*\left(\cdot\right)$, відповідна йому в силу системи (7.2) оптимальна траєкторія $x_*\left(\cdot\right)$ і оптимальний початковий і кінцевий моменти часу t_{0*}, T_*. Отже,

$$\min \mathcal{J}_0\left(u(\cdot), x(\cdot), t_0, T\right) = \mathcal{J}\left(u_*(\cdot), x_*(\cdot), t_{0*}, T_*\right)$$

при обмеженнях (7.2)-(7.3). Таким способом, розв'язок задачі (7.1)-(7.3) представляється у вигляді четвірки $(u_*(\cdot), x_*(\cdot), t_{0*}, T_*)$, яка називається *оптимальним процесом* задачі (7.2)-(7.3).

Нижче будемо використовувати таке позначення: якщо задана функція g, то її значення на оптимальному процесі в момент t будемо позначати $g_*(t)$. Сформулюємо для задачі (7.1)-(7.3) принцип Лагранжа.

Теорема 7.1 (принцип Лагранжа)**.** *Нехай* $(u_*(\cdot), x_*(\cdot), t_{0*}, T_*)$ *– розв'язок задачі оптимального керування* (7.1)-(7.3)*. Тоді знайдуться множники Лагранжа* $(\lambda, \psi(\cdot)) \neq 0$*, для яких виконуються такі умови*

1.

$$\min_{v\in\mathcal{U}} \mathcal{L}\left(x_*(t), x'_*(t), v, \lambda, \psi(t), t\right) = \mathcal{L}\left(x_*(t), x'_*(t), u_*(t), \lambda, \psi(t), t\right) \tag{7.4}$$

майже для всіх $t \in [t_0, T]$ *(умова оптимальності);*

2.

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_*(t)}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_*(t)}{\partial x'} = 0 \tag{7.5}$$

– рівняння Ейлера - Лагранжа для лагранжиана (умова стаціонарності);

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_*(t_{0*})}{\partial x'} &= \frac{\partial \ell_*}{\partial x(t_0)}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}_*(T_*)}{\partial x'} &= -\frac{\partial \ell_*}{\partial x(T)} \end{aligned} \tag{7.6}$$

(умова трансверсальності);

4.

$$\frac{d\Lambda_*(t_{0*})}{dt_0} = \frac{d\Lambda_*(T_*)}{dT} = 0 \tag{7.7}$$

(умова стаціонарності за рухомими кінцями);

5.

$$\lambda_i \mathcal{J}_i\left(u_*(\cdot), x_*(\cdot), t_{0*}, T_*\right) = 0, \tag{7.8}$$

$i = 1, 2, \ldots, k$ *(умова доповнюючої нежорсткості);*

6.

$$\lambda_i \geq 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, k \tag{7.9}$$

(умова невід'ємності).

Тут використані такі позначення:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_*(t)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}\left(x_*(t), x'_*(t), u_*(t), \lambda, \psi(t), t\right)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_*(t)}{\partial x'} = \frac{\partial \mathcal{L}\left(x_*(t), x'_*(t), u_*(t), \lambda, \psi(t), t\right)}{\partial x'};$$

$$\frac{\partial \ell_*}{\partial x(t_0)} = \frac{\partial \ell\left(x(t_{0*}), t_{0*}, x(T_*), T_*\right)}{\partial x(t_0)};$$

$$\frac{\partial \ell_*}{\partial x(T)} = \frac{\partial \ell\left(x(t_{0*}), t_{0*}, x(T_*), T_*\right)}{\partial x(T)};$$

похідна $\frac{d\Lambda_*(t_{0*})}{dt_0}$ означає похідну від функції Лагранжа за змінною t_0, в яку підставили значення оптимального режиму в момент t_{0*}. Аналогічно похідна від функції Лагранжа $\Lambda\left(x(\cdot), u(\cdot), \lambda, \psi(\cdot), t_0, T\right)$ за змінною T, в яку підставили значення оптимального режиму в момент T_*, позначається $\frac{d\Lambda_*(T_*)}{dT}$.

Зауваження.

1. В задачі на мінімум значення $\lambda_0 \geq 0$. Якщо в (7.1) мінімум замінити на максимум, то слід вибирати $\lambda_0 \leq 0$.

2. У формулюванні теореми 7.1 умова $(\lambda, \psi(\cdot)) \neq 0$ означає, що вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)^*$ і вектор- функція $\psi(t)$ не рівні одночасно нулеві в жодній точці $t \in [t_{0*}, T_*]$.

3. Умова стаціонарності за рухомими кінцями (7.5) застосовується лише до задач з незафіксованим часом, наприклад, до задачі на швидкодію.

7.2 Принцип максимуму Понтрягіна

Функція вигляду

$$\mathcal{H}\left(x, u, \lambda, \psi, t\right) = -F\left(x, u, \lambda, t\right) + \left\langle \psi, f\left(x, u, t\right)\right\rangle \tag{7.10}$$

називається *функцією Гамільтона-Понтрягіна* задачі (7.1)-(7.3). Не складно помітити, що

$$\mathcal{L}\left(x, x', u, \lambda, \psi, t\right) = \langle \psi, x' \rangle - \mathcal{H}\left(x, u, \lambda, \psi, t\right). \tag{7.11}$$

Тоді теорему 7.1 можна сформулювати у формі Понтрягіна.

Теорема 7.2 (принцип максимуму Понтрягіна)**.** *Нехай розв'язком задачі оптимального керування (7.1)-(7.3) є $(u_*(\cdot), x(\cdot), t_{0*}, T_*)$. Тоді знайдуться множники Лагранжа $(\lambda, \psi(\cdot)) \neq 0$, для яких виконуються такі умови:*

1.
$$\max_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}\left(x_*(t), v, \lambda, \psi(t), t\right) = \mathcal{H}\left(x_*(t), u_*(t), \lambda, \psi(t), t\right) \tag{7.12}$$
майже для всіх $t \in [t_0, T]$ (умова оптимальності);

2.
$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}\left(x_*\left(t\right), u_*\left(t\right), \lambda, \psi\left(t\right), t\right)}{\partial x}, \tag{7.13}$$
– спряжена система, $t \in [t_{0*}, T_*]$ (умова стаціонарності);

3.

$$\begin{aligned} \psi(t_{0*}) &= \frac{\partial \ell_*}{\partial x(t_0)}, \\ \psi(T_*) &= -\frac{\partial \ell_*}{\partial x(T)} \end{aligned} \tag{7.14}$$

(умова трансверсальності);

4.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_*(t_{0*}) &= -\frac{\partial \ell_*}{\partial t_0}, \\ \mathcal{H}_*(T_*) &= \frac{\partial \ell_*}{\partial T} \end{aligned} \tag{7.15}$$

(умова стаціонарності за рухомими кінцями);

5.

$$\lambda_i \mathcal{J}_i \left(u_*(\cdot), x_*(\cdot), t_{0*}, T_*\right) = 0, \tag{7.16}$$

$i = 1, 2, \ldots, k$ *(умова доповнюючої нежорсткості);*

6.

$$\lambda_i \geq 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, k \tag{7.17}$$

(умова невід'ємності).

Тут використано введені вище позначення, а також

$$\mathcal{H}_*(t) = \mathcal{H}\left(x_*(t), u_*(t), \lambda, \psi(t), t\right).$$

Умова (7.12) дає співвідношення для знаходження оптимального керування $u_*(t) = u\left(x(t), \lambda, \psi(t), t\right)$ як функції від фазових координат і множників Лагранжа. При цьому система (7.2) з умовами (7.3) і спряжена система (7.13) з умовами трансверсальності (7.14) з врахуванням $u_*(t) = u\left(x(t), \lambda, \psi(t), t\right)$ в сукупності приводять до *крайової задачі принципу максимуму Понтрягіна.*

Умови теорем 7.1, 7.2 еквівалентні. Так, умова (7.4) еквівалентна умові (7.12), оскільки з (7.11)

$$\min_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{L}\left(x(t), x'(t), v, \lambda, \psi(t), t\right) = \min_{v \in \mathcal{U}} \left(\langle \psi(t), x'(t) \rangle - \mathcal{H}\left(x, u, \lambda, \psi, t\right)\right) =$$

$$= \langle \psi(t), x'(t) \rangle - \max_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}\left(x(t), v, \lambda, \psi(t), t\right).$$

Умова (7.5) еквівалентна умові (7.13), оскільки за означенням функції Гамільтона-Понтрягіна і лагранжиана, або з (7.11) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = \psi$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$. Звідси випливає також еквівалентність (7.6) і (7.14).

Покажемо еквівалентність (7.7) і (7.15). Умова $\frac{d\Lambda_*(t_{0*})}{dt_0} = 0$ еквівалентна

$$-\mathcal{L}_*(t_{0*}) + \frac{d\ell_*}{dt_0} = 0.$$

Але

$$\frac{d\ell_*}{dt_0} = \frac{\partial \ell_*}{\partial t_0} + \left\langle \frac{\partial \ell_*}{\partial x(t_0)}, x'_*(t_0) \right\rangle.$$

Підставляємо (7.14) в останню рівність і маємо

$$\frac{d\ell_*}{dt_0} = \frac{\partial \ell_*}{\partial t_0} + \langle \psi(t_{0*}), x'_*(t_0) \rangle.$$

Отже,

$$-\mathcal{L}_*(t_{0*}) + \frac{\partial \ell_*}{\partial t_0} + \langle \psi(t_{0*}), x'_*(t_0) \rangle = 0.$$

Використовуючи (7.11), одержуємо

$$\mathcal{H}_*(t_{0*}) - \langle \psi(t_{0*}), x'_*(t_0) \rangle + \frac{\partial \ell_*}{\partial t_0} + \langle \psi(t_{0*}, x'_*(t_0) \rangle = 0.$$

Таким способом,

$$\mathcal{H}_*(t_{0*}) = -\frac{\partial \ell_*}{\partial t_0}.$$

Аналогічно, з $\frac{d\Lambda_*(T_*)}{dT} = 0$ маємо

$$\mathcal{L}_*(T_*) + \frac{d\ell_*}{dT} = 0.$$

Але

$$\frac{d\ell_*}{dT} = \frac{\partial \ell_*}{\partial T} + \left\langle \frac{\partial \ell_*}{\partial x(T)}, x'_*(T_*) \right\rangle.$$

Підставляємо (7.14) в останню рівність і маємо

$$\frac{d\ell_*}{dT} = \frac{\partial \ell_*}{\partial T} - \langle \psi(T_*), x'_*(T_*) \rangle.$$

Таким чином,

$$\mathcal{L}_*(T_*) + \frac{\partial \ell_*}{\partial T} - \langle \psi(T_*), x'_*(T_*) \rangle = 0.$$

Застосовуючи (7.11), одержуємо

$$-\mathcal{H}_*(T_*) + \langle \psi(T_*), x'_*(T_*) \rangle + \frac{\partial \ell_*}{\partial T} - \langle \psi(t_{0*}, x'_*(t_0) \rangle = 0.$$

Остаточно

$$\mathcal{H}_*(T_*) = \frac{\partial \ell_*}{\partial T}.$$

Оскільки ми використовували еквівалентні перетворення, то цим самим обґрунтована еквівалентність (7.7) і (7.15). Решта умов теорем 7.1, 7.2 співпадають.

Схема доведення теорем 7.1, 7.2 така:

1. Пакет голок. Нехай $(u_*(\cdot), x(\cdot), t_{0*}, T_*)$ є розв'язком задачі оптимального керування (7.1)-(7.3). Для обґрунтування принципу максимуму задачі (7.1)-(7.3) вже недостатньо голчатої варіації керування, потрібно збільшити кількість параметрів.

Для того, щоб ввести пакет голок, потрібно задати такі параметри:

- набір $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_N)$, де параметр $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$;
- набір моментів часу $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_N)$, де $t_{0*} < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_N < T_*$ містять також всі точки розриву оптимального керування $u_*(\cdot)$, при цьому деякі точки τ_i з цього набору можуть співпадати;
- набір $v = (v_1, v_2, \ldots v_N)$, де $v_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

В пакет включають довільну скінченну кількість елементарних голок з параметрами $(\tau_i, v_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Деякі голки можуть відрізнятись лише значенням v_i при однакових τ_i. Для того, щоб голки не накладались одна на другу, зсуваємо інтервал дії i - ї голки на величину $i|\varepsilon| = i \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j$.

Отже, варіація керування $u_*(\cdot)$ вводиться таким способом:

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u_*(t), & t \in (t_{0*} - \delta, T_* + \delta) \setminus \cup_{i=1}^{N} \Delta_i, \\ v_i, & t \in \Delta_i, \end{cases} \tag{7.18}$$

де $\Delta_i = [\tau_i + i|\varepsilon|, \tau_i + i|\varepsilon| + \varepsilon_i)$, $|\varepsilon| = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j$.

2. За допомогою пакету голок переходимо до скінченновимірної задачі математичного програмування і застосовуємо принцип Лагранжа. Для цього фіксуємо N, $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_N)$, $v = (v_1, v_2, \ldots v_N)$. Позначимо $z = (T, t_0, x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_N)$,

$$\mathcal{J}_i(z) = \mathfrak{I}_i\left(u_\varepsilon(\cdot), x(\cdot, x_0, t_0, \varepsilon), t_0, T\right) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} f_i\left(x(t,x_0,t_0,\varepsilon),u_\varepsilon(t),t\right)dt + \Phi_i\left(x_0,t_0,x(T,x_0,t_0,\varepsilon),T\right),$$

$i = 0,1,\ldots,r$, $x(\cdot,x_0,t_0,\varepsilon)$ – розв'язок системи (7.2) при умові $x(t_0) = x_0$, який відповідає керуванню $u_\varepsilon(\cdot)$. В результаті одержуємо скінченновимірну оптимізаційну задачу з обмеженнями

$$\mathcal{J}_0\left(z\right) \to \min$$

за умов, що

$$\mathcal{J}_i\left(z\right) \leq 0,\ i = 1,2,\ldots,k,$$

$$\mathcal{J}_i\left(z\right) = 0,\ i = k+1,k+2,\ldots,r,$$

$$\varepsilon_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,N.$$

До цієї задачі застосовуємо теорему 21.4.

3. Обґрунтовуємо існування універсальних множників Лагранжа, тобто, таких множників, які не залежать від наборів v, τ.

З детальним обґрунтуванням теорем 7.1, 7.2 можна ознайомитись в [3, 4]. Принцип максимуму може бути обгрунтований також в класі керувань з простору $\mathcal{L}_\infty\left([t_0,T];\mathbb{R}^m\right)$ [4].

Для розв'язування задач оптимального керування з використанням теореми 7.2 застосовуємо таку схему:

1. записуємо функцію Гамільтона-Понтрягіна і термінант;
2. застосовуємо умову оптимальності (7.12) для знаходження оптимального керування як функції від множників Лагранжа $(\lambda,\psi(\cdot))$;
3. з умови стаціонарності (7.13) одержуємо спряжену систему;
4. умова трансверсальності (7.14) дає умови на лівому і правому кінцях для функції $\psi(\cdot)$;
5. умова стаціонарності за рухомими кінцями (7.15) записується у випадку, якщо в задачі час нефіксований;
6. умова доповнюючої нежорсткості (7.16) записується за наявності обмежень типу нерівностей;
7. записуємо умову невід'ємності (7.17);
8. перевіряємо чи виконується **умова нерівності нулеві множників Лагранжа** $(\lambda,\psi(\cdot)) \neq 0$. Для цього, від супротивного, покладаємо умову $\lambda_0 = 0$ і застосовуємо одержані на попередніх етапах умови;

9. записуємо крайову задачу принципу максимуму, розв'язуючи яку, знаходимо керування, підозріле на оптимальність;

10. обґрунтовуємо оптимальність знайденого керування.

Приклад 7.1. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації функціоналу

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 (u^2(t) - 12tx(t))dt \tag{7.19}$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ x(0) = 0, \ x(1) = 0, \tag{7.20}$$

де $x(\cdot)$ – скалярна функція, $u(\cdot)$ – скалярне керування, $t \in [0, 1]$.

Отже, функція Гамільтона-Понтрягіна і термінант записуються так

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda, \psi, t) = -\lambda_0 \left(u^2 - 12tx\right) + \psi u,$$

$$\ell(x(0), x(1)) = \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(1).$$

З умови оптимальності (7.12) випливає

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x, u, \lambda, \psi, t)}{\partial u} = -2\lambda_0 u + \psi = 0. \tag{7.21}$$

Умова (7.13) дає спряжену систему у вигляді

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\lambda_0 12t. \tag{7.22}$$

Знайдемо

$$\frac{\partial \ell(x(0), x(1))}{\partial x(0)} = \lambda_1, \ \frac{\partial \ell(x(0), x(1))}{\partial x(1)} = \lambda_2.$$

Тому умови трансверсальності (7.14) мають вигляд

$$\psi(0) = \lambda_1, \ \psi(1) = -\lambda_2. \tag{7.23}$$

Умови стаціонарності за часом та доповнюючої нежорсткості для даної задачі відсутні. Умова невід'ємності $\lambda_0 \geq 0$.

Перевіряємо умову нерівності нулеві множників Лагранжа. Від супротивного, якщо $\lambda_0 = 0$, то з (7.21) маємо $\psi(t) = 0$. Звідси (7.23) дає $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Отже, $\lambda_0 > 0$.

Вибираємо $\lambda_0 = 1$. З (7.21) одержуємо

$$u_*(t) = \frac{\psi(t)}{2}.$$

Підставляємо останнє співвідношення в (7.20) і, беручи до уваги (7.23), записуємо крайову задачу принципу максимуму

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\psi(t)}{2}, \quad \frac{d\psi(t)}{dt} = -12t, \tag{7.24}$$

$$x(0) = 0, \ x(1) = 0, \ \psi(0) = \lambda_1, \ \psi(1) = -\lambda_2. \tag{7.25}$$

З другого рівняння (7.24) $\psi(t) = -6t^2 + C_1$. Підставляємо одержане в перше рівняння $\frac{dx}{dt} = -3t^2 + \frac{C_1}{2}$, звідки $x(t) = -t^3 + \frac{C_1 t}{2} + C_2$. Тут C_1, C_2 – довільні константи. З (7.25) знаходимо

$$C_1 = 2, \ C_2 = 0, \ \lambda_1 = C_1 = 2, \ \lambda_2 = 6 - \lambda_1 = 4.$$

Отже, керування

$$u_*(t) = \frac{\psi(t)}{2} = -3t^2 + 1 \tag{7.26}$$

і відповідна йому траєкторія

$$x_*(t) = -t^3 + t \tag{7.27}$$

є підозрілими на оптимальність.

Для обґрунтування оптимальності слід послатись на те, що дана задача є задачею квадратичного програмування. Для таких задач принцип Лагранжа, відповідно до теореми Куна - Таккера, дає необхідні і достатні умови оптимальності ([3], стор. 45). Втім, можна обґрунтувати оптимальність (7.26), (7.27) безпосередньо.

Візьмемо довільну функцію $v(t)$ і керування $u(t) = u_*(t) + v(t)$. Покажемо, що

$$\mathfrak{I}(u) \geq \mathfrak{I}(u_*).$$

Керуванню $u(t)$ відповідає траєкторія $x(t) = x_*(t) + z(t)$, причому з (7.20)

$$\frac{dz(t)}{dt} = v(t), \ z(0) = z(1) = 0.$$

З (7.19)

$$\mathfrak{I}(u) = \mathfrak{I}(u_* + v) = \int_0^1 ((u_*(t) + v(t))^2 - 12t(x_*(t) + z(t)))dt =$$

$$= \int_0^1 (u_*^2(t) - 12tx_*(t))dt + \int_0^1 (2u_*(t)v(t) + v^2(t) - 12tz(t))dt =$$

$$= \mathfrak{I}(u_*) + \int_0^1 v^2(t)dt + \int_0^1 (2u_*(t)v(t) - 12tz(t))dt \geq$$

$$\geq \mathcal{I}(u_*) + 2\int_0^1 (u_*(t)v(t) - 6tz(t))dt.$$

Якщо ми покажемо, що

$$\int_0^1 (u_*(t)v(t) - 6tz(t))dt \geq 0,$$

то обґрунтуємо оптимальність (7.26), (7.27). Підставимо $v(t) = \frac{dz(t)}{dt}$ і одержимо

$$\int_0^1 (u_*(t)z'(t) - 6tz(t))dt = \int_0^1 ((-3t^2 + 1)z'(t) - 6tz(t))dt.$$

Використовуючи інтегрування за частинами, матимемо

$$\int_0^1 (-3t^2 + 1)z'(t)dt = \int_0^1 (-3t^2 + 1)dz(t) = 6\int_0^1 z(t)tdt.$$

Отже,

$$\int_0^1 (u_*(t)v(t) - 6tz(t))dt = \int_0^1 (u_*(t)z'(t) - 6tz(t))dt = 0.$$

Так, обґрунтували оптимальність (7.26), (7.27).

Лекція 8

Принцип максимуму і лінійна задача швидкодії

8.1 Властивості лінійної задачі швидкодії

Розглянемо лінійну систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{8.1}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $A(t)$ – матриця розмірності $n \times n$ з неперервними компонентами, $B(t)$ – матриця $n \times m$ з неперервними компонентами, $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \in [0, T]$, $\mathcal{U} \in comp(\mathbb{R}^m)$.

Припустимо, що $x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$, де $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_T \in \mathbb{R}^n$ – задані точки. Задача на швидкодію полягає у знаходженні такого допустимого керування, яке переводить систему (8.1) з положення $x(0) = x_0$ у положення $x(T) = x_T$ за найменший час.

Розглянемо допоміжне твердження.

Лема 8.1. *Сукупність*

$$\mathcal{H} = \{t \geq 0 : x_T \in \mathcal{X}(t, x_0)\}$$

є замкненою. Тут $\mathcal{X}(t, x_0)$ – множина досяжності системи (8.1) в момент t.

Доведення. Нехай $t_i \in \mathcal{H}$, $\lim_{i\to\infty} t_i = \tau$. Тоді

$$\langle x_T, \psi \rangle \leq c(\mathcal{X}(t_i, x_0), \psi), \;\; \psi \in \mathcal{S}.$$

За теоремою 2.5 (стор. 16) множина досяжності $\mathcal{X}(t, x_0)$ неперервно залежить від t. З теореми 20.1(стор. 213) про неперервність опорної функції за першим аргументом маємо

$$c(\mathcal{X}(t_i, x_0), \psi) = c(\mathcal{X}(\tau, x_0), \psi) + w_i(\tau),$$

де $w_i(\tau) \to 0$ при $t_i \to \tau$, $i \to \infty$. Звідси при $i \to \infty$ маємо

$$\langle x_T, \psi \rangle \leq c(\mathcal{X}(\tau, x_0), \psi) \ \psi \in \mathcal{S}.$$

З останньої нерівності випливає $x_T \in \mathcal{X}(\tau, x_0)$. Отже, $\tau \in \mathcal{H}$. □

Має місце така теорема.

Теорема 8.1 (про існування оптимального за швидкодією керування)**.** *Нехай існує керування, що переводить систему* (8.1) *зі стану* x_0 *у стан* x_T. *Тоді існує оптимальне за швидкодією керування.*

Доведення. Припустимо, що $x_0 \neq x_T$, тому що в іншому випадку оптимальний час $T_* = 0$. За означенням оптимальної задачі швидкодії мінімальний час $T_* = \inf \mathcal{H}$, де

$$\mathcal{H} = \{t \geq 0 : x_T \in \mathcal{X}(t, x_0)\},$$

$\mathcal{X}(t, x_0)$ – множина досяжності системи (8.1) в момент t. За лемою 8.1 множина $\mathcal{H}$ замкнена, тому

$$x_T \in \mathcal{X}(T_*, x_0).$$

З означення множини досяжності випливає, що існує керування, для якого $x(0) = x_0$, $x(T_*) = x_T$ [1]. □

8.2 Екстремальне керування і принцип максимуму Понтрягіна

Геометрична інтерпритація оптимальних за швидкодією керувань лінійної системи грунтується на такому означенні.

Означення 8.1. Нехай $\mathcal{X}(t, x_0)$ множина досяжності системи (8.1) в момент t. Якщо точка $x(T) \in \partial\mathcal{X}(T, x_0)$, то допустиме керування $u(\cdot)$ таке, що $x(T) = x(T, u, x_0)$ називається *екстремальним керуванням*. При цьому $x(\cdot) = x(\cdot, u, x_0)$ називається *екстремальним розв'язком* системи (8.1) на відрізку $t \in [0, T]$.

[1] означення 2.1, стор.14

Має місце така теорема.

Теорема 8.2. *Керування $u(\cdot)$ є екстремальним тоді і тільки тоді, коли існує нетривіальний розв'язок $\psi(\cdot)$ спряженої системи*

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*(t)\psi(t) \tag{8.2}$$

такий, що майже для всіх $t \in [0,T]$ має місце рівність

$$\langle B^*(t)\,\psi(t), u(t)\rangle = c(\mathcal{U}, B^*(t)\,\psi(t)). \tag{8.3}$$

Доведення. Необхідність. Нехай керування $u(\cdot)$ є екстремальним, тобто переводить систему (8.1) зі стану x_0 у стан $x(T) \in \partial\mathcal{X}(T,x_0)$. Оскільки $\mathcal{X}(T,x_0) \in conv(\mathbb{R}^n)$, то

$$\langle x(T), \xi\rangle \leq c(\mathcal{X}(T,x_0),\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

при цьому існує $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, таке що має місце рівність.

$$\langle x(T), \xi_0\rangle = c(\mathcal{X}(T,x_0),\xi_0).$$

Позначимо

$$f(\xi) = c(\mathcal{X}(T,x_0),\xi) - \langle x(T), \xi\rangle\,.$$

Оскільки $\mathcal{X}(T,x_0) = \Theta(T,0)x_0 + \int_0^T \Theta(T,s)B^*(s)\mathcal{U}ds$, то

$$\begin{gathered}
f(\xi) = \langle \Theta(T,0)x_0, \xi\rangle + \int_0^T c(\mathcal{U}, B^*(s)\Theta^*(T,s)\xi)ds - \\
- \langle \Theta(T,0)x_0, \xi\rangle - \int_0^T \langle u_*(s), B^*(s)\Theta^*(T,s)\xi)\rangle\,ds = \\
= \int_0^T \left(c(\mathcal{U}, B^*(s)\Theta^*(T,s)\xi) - \langle u_*(s), B^*(s)\Theta^*(T,s)\xi)\rangle\right)ds.
\end{gathered}$$

Тут $\Theta(t,s)$ – фундаментальна матриця системи $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$, нормована за моментом s. Позначимо $\psi(s) = \Theta^*(T,s)\xi$. Оскільки $\Psi(s,T) = \Theta^*(T,s)$ – фундаментальна матриця, спряженої до $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$ системи, то $\psi(s)$ задовольняє системі

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = -A^*(s)\psi(s),\ \ \psi(T) = \xi.$$

Тому

$$f(\xi) = \int_0^T \left(c(\mathcal{U}, B^*(s)\psi(s)) - \langle u_*(s), B^*(s)\psi(s)\rangle\right)ds.$$

Отже $f(\xi) \geq 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, але знайдеться $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ таке, що $f(\xi_0) = 0$. Звідси існує розв'язок спряженої системи з умовою $\psi(T) = \xi$ так, що

$$c(\mathcal{U}, B^*(s)\psi(s)) = \langle u_*(s), B^*(s)\psi(s)\rangle$$

майже скрізь.

Достатність. Припустимо, що виконується умова (8.3). Покажемо, що $x(T, u_*, x_0) \in \partial\mathcal{X}(T, x_0)$. Припустимо, від супротивного, що $x(T, u_*) \in int\mathcal{X}(T, x_0)$, тоді

$$\langle x(T, u_*, x_0), \xi\rangle < c(\mathcal{X}(T, x_0), \xi) \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Звідси, застосовуючи формулу Коші, отримаємо

$$\langle \Theta(T,0)x_0, \xi\rangle + \int_0^T \langle \Theta(T,s)B^*(s)u_*(s), \xi)\rangle \, ds <$$
$$< \langle \Theta(T,0)x_0, \xi\rangle + \int_0^T c\,(\mathcal{U}, (\Theta(T,s)B(s))^*\xi)\, ds.$$

Для довільного розв'язку спряженої системи

$$\int_0^T \langle u_*(s), B^*(s)\psi(s)\rangle\, ds < \int_0^T c\,(\mathcal{U}, B^*(s)\psi(s))\, ds,$$

але це протиріччя припущенню. □

Наслідок. Нехай $u(\cdot)$ – екстремальне керування, $x_*(\cdot)$ – відповідний розв'язок системи (8.1) і $\psi_*(\cdot)$ – розв'язок спряженої системи (8.2). При цьому виконується умова (8.3). Тоді $x(\tau) \in \partial\mathcal{X}(\tau, x_0)$ для всіх $\tau \in [0, T]$.

Теорема 8.3 (принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії)**.** *Нехай $u_*(\cdot)$ є оптимальним за швидкодією керуванням, T_* – оптимальний час. Тоді $u_*(\cdot)$ є екстремальним керуванням, тобто, існує розв'язок спряженої системи $\psi(t)$ такий, що*

$$\langle u_*(t), B^*(t)\psi(t)\rangle = c(\mathcal{U}, B^*(t)\psi(t)) \tag{8.4}$$

майже скрізь при $t \in [0, T_*]$. При цьому

$$M(T_*) = \langle \psi(T_*), Ax_*(T_*) + B(T_*)u_*(T_*)\rangle \geq 0. \tag{8.5}$$

Доведення. Згідно принципу оптимальності при загальних обмеженнях (теорема 7.2, стор. 78) майже скрізь при $t \in [0, T_*]$ маємо

$$\sup_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x_*(t), v, \lambda, \psi(t), t) = \mathcal{H}(x_*(t), u_*(t), \lambda, \psi(t), t).$$

Тут
$$\mathcal{H}(x,u,\lambda,\psi,t) = -\lambda_0 + \langle \psi, A(t)x + B(t)u \rangle$$
– функція Гамільтона-Понтрягіна. Звідси випливає умова (8.4). Оскільки за умовою стаціонарності (7.15)
$$\mathcal{H}(x_*(T_*), u(T_*), \lambda, \psi(T_*), T_*) = 0$$
і $\lambda_0 \geq 0$, то $M(T_*) \geq 0$. □

8.3 Умова спільності положення.

Припустимо, що матриці $A(t) = A$, $B(t) = B = (b_{ij})_{i=1,2,...,n}^{j=1,2,...,m}$ є стаціонарними, обмеження на керування мають вигляд
$$\mathcal{U} = \{(u_1, ..., u_m) : h_i \leq u_i \leq r_i, \ i = 1, 2, ..., m\} = \\ = \prod_{i=1}^{m} [h_i, r_i], \tag{8.6}$$
де $h_i < 0$, $r_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$. Опорна функція множини (8.6) записується так
$$c(\mathcal{U}, B^*\psi(t)) = \max_{h_i \leq u_i \leq r_i} \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_j.$$
Звідси
$$c(\mathcal{U}, B^*\psi(t)) = \max_{h_i \leq u_i \leq r_i} \sum_{j=1}^{m} u_j \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \psi_i(t).$$
Використовуючи умову (8.4), отримаємо, що
$$u_{*j}(t) = \begin{cases} h_j, \ \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\psi_i(t) < 0, \\ r_j, \ \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\psi_i(t) > 0, \end{cases}$$
де $j = 1, 2, ..., m$. Якщо $-h_j = r_j$, $j = 1, 2, ..., m$, тобто
$$\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{m} [-r_i, r_i],$$
то
$$u_{*j}(t) = r_j sign \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\psi_i(t) \right).$$

Точка t така, що $u_{*j}(t-0) \neq u_{*j}(t+0)$, називається *точкою перемикання*.

Множина (8.6) є багатогранником, при цьому будь-який вектор, паралельний ребру багатогранника (8.6), є колінеарним до одного з векторів стандартного базису в $\mathbb{R}^m$, тобто, до векторів $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^*$, де 1 знаходиться на i-й позиції, $i = 1, 2, ..., m$.

Означення 8.2. Говорять, що для системи (8.1) має місце *умова нормальності* (або *умова спільності положення*), якщо система векторів

$$\left\{Bw, ABw, ..., A^{n-1}Bw\right\}$$

є лінійно незалежною для довільного вектора $w \in \mathbb{R}^m$, паралельного до одного з ребер багатогранника (8.6).

Для випадку множини (8.6) умова нормальності еквівалентна лінійній незалежності системі векторів

$$\left\{Be_i, ABe_i, ..., A^{n-1}Be_i\right\} = \left\{B^{(i)}, (AB)^{(i)}, ..., (A^{n-1}B)^{(i)}\right\},\ i = 1, 2, ..., m.$$

Тут $M^{(i)} = Me_i$ – i-тий стовпчик матриці M.

Розглянемо матриці $n \times n$ вигляду

$$N(i) = \left(B^{(i)}, (AB)^{(i)}, ..., (A^{n-1}B)^{(i)}\right),\ j = 1, 2, ..., m.$$

Тоді для системи (8.1) має місце умова нормальності, тоді і тільки тоді, коли матриці $N(i)$ є невиродженими, $j = 1, 2, ..., m$.

Приклад 8.1. Розглянемо систему керування

$$x_1' = x_2 + u_1,\ x_2' = u_1 + u_2. \tag{8.7}$$

Тут матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ N(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці $N(1)$ та $N(2)$ є невиродженими. Отже, для системи (8.7) має місце умова нормальності.

Теорема 8.4 (достатність принципу максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії)**.** *Якщо система* (8.1) *зі стаціонарними матрицями* $A(t) = A$, $B(t) = B$ *з обмеженнями* (8.6) *є нормальною і задовольняє умовам* (8.4)-(8.5)*, тобто умовам принципу максимуму, то керування* $u_{*j}(t)$*,* $j = 1, 2, ..., m$*, є оптимальним.*

Має місце також така теорема.

Теорема 8.5 (Фельдбаума)**.** *Якщо власні значення матриці* A *є дійсними, система* (8.1) *при* $A(t) = A$, $B(t) = B$ *є нормальною, то компоненти оптимального керування* $u_{*j}(\cdot)$, $j = 1, 2, ..., m$ *є кусково постійними, причому мають не більше* $n - 1$ *точок перемикання.*

Лекція 9

Числові методи розв'язання задач оптимального керування на основі варіаційного методу і принципу максимуму Понтрягіна

На теперішній момент не існує універсальних методів розв'язання задач оптимального керування. Це пояснюється різноманітністю постановок задач оптимального керування, зокрема такими обставинами:

1. критерій якості може бути недиференційованим;
2. існують обмеження на фазові координати;
3. існують різні типи обмежень на керування;
4. велика розмірність системи керування;
5. задача має багато локальних екстремумів.

Для задач оптимального керування на основі варіаційного методу і принципу максимуму Понтрягіна можна виділити два основних підходи до побудови числових методів.

1. Застосування методів типу градієнтного спуску.
2. Зведення задачі оптимального керування до крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується методом стрільби.

Коротко розглянемо кожний з цих підходів.

9.1 Метод найшвидшого спуску

Розглянемо один з підходів до розробки числових методів для розв'язування задачі оптимального керування (6.1) - (6.3). Він базується на розробці ітераційних процедур типу градієнтного спуску

$$u_{k+1}(\cdot) = u_k(\cdot) - \rho_k \mathcal{J}'(u_k),$$

де $\rho_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$. Тут

$$\mathcal{J}'(u) = -\frac{\partial \mathcal{H}\left(x\left(\cdot\right), u\left(\cdot\right), \psi\left(\cdot\right), \cdot\right)}{\partial u}$$

– похідна Фреше, де

$$\mathcal{H}\left(x, u, \psi, t\right) = -f_0\left(x, u, t\right) + \langle \psi, f\left(x, u, t\right)\rangle$$

– функція Гамільтона-Понтрягіна, спряжена функція $\psi(\cdot)$ задовольняє спряженій системі

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}\left(x(t), u_(t), \psi(t), t\right)}{\partial x},\ \psi\left(T\right) = -\frac{\partial \Phi\left(x\left(T\right)\right)}{\partial x}.$$

Параметр $\rho_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$ може вибиратись різними способами. Один з них базується на умовах збіжності методу градієнтного спуску:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty,\ \sum_{k=1}^{s} \rho_k \to \infty,\ s \to \infty.$$

Такий спосіб дозволяє заздалегідь підібрати $\rho_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$. Метод найшвидшого спуску полягає у тому, що $\rho_k > 0$ підбирається згідно правила

$$\min_{\rho > 0} \mathcal{J}\left(u_k\left(\cdot\right) - \rho \mathcal{J}'\left(u_k\right)\right) = \mathcal{J}\left(u_k\left(\cdot\right) - \rho_k \mathcal{J}'\left(u_k\right)\right).$$

Такий метод забезпечує вибір оптимального параметра $\rho_k > 0$, а також виконання умови релаксації $\mathcal{J}\left(u_{k+1}\right) \leq \mathcal{J}\left(u_k\right)$. Складність таких методів полягає у тому, що процедура здійснюється у функціональному просторі. Крім того, такий підхід суттєво залежить від вдалого вибору початкового наближення. Наведемо схему методу.

Алгоритм 9.1. *Задаємо вхідні дані задачі* (5.1) - (5.3), *а також параметр методу* $\varepsilon > 0$.

Крок 1. Вибираємо початкове наближення $u_0\left(t\right)$, $t \in [t_0, T]$. *Підставляємо це керування в систему* (5.2) - (5.3) *і знаходимо відповідний розв'язок* $x_0\left(t\right)$, $t \in [t_0, T]$. *В загальному випадку він шукається* *з використанням одного з числових методів розв'язування задачі Коші системи звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, добре зарекомендував себе метод Рунге-Кутти 4 порядку. Підставляємо* $u_0(t)$, $x_0(t)$, $t \in [t_0, T]$ *в спряжену систему*

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x_0(t), u_0(t), \psi(t), t)}{\partial x}, \ \psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x_0(T))}{\partial x}$$

і знаходимо її розв'язок $\psi_0(t)$, $t \in [t_0, T]$. *Знаходимо напрямок спуску*

$$h_0(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x_0(t), u_0(t), \psi_0(t), t)}{\partial u},$$

$t \in [t_0, T]$.

Крок 2. Знаходимо параметр $\rho_0 > 0$ *з умови*

$$\min_{\rho>0} \mathcal{I}(u_0(\cdot) - \rho h_0(\cdot)) = \mathcal{I}(u_0(\cdot) - \rho_0 h_0(\cdot)).$$

Доцільно цю задачу замінити на таку:

$$\min_{\rho\in[0,R]} \mathcal{I}(u_0(\cdot) - \rho h_0(\cdot)) = \mathcal{I}(u_0(\cdot) - \rho_0 h_0(\cdot)),$$

де $R > 0$ – *параметр алгоритму. Таким чином, можна застосувати один з методів одновимірної оптимізації, наприклад, метод дихотомії.*

Зрозуміло, що для знаходження значення $\mathcal{I}(u_0(\cdot) - \rho h_0(\cdot))$ *для будь-якого* $\rho > 0$ *потрібно знайти розв'язок системи* (5.2) - (5.3), *який відповідає керуванню* $u_0(\cdot) - \rho h_0(\cdot)$ *і підставити його в критерій якості* (5.1). *Тому процедура знаходження* ρ_0 *є, як правило, ітераційною процедурою, на кожному кроці якої розв'язується задача Коші. Отже, знаходимо керування* $u_1(t) = u_0(t) - \rho_0 h_0(t)$, $t \in [t_0, T]$

Крок 3. Припустимо, що нам відома функція керування $u_k(t)$, $t \in [t_0, T]$, $k = 1, 2, \ldots$. *Підставляємо це керування в систему* (5.2) - (5.3) *і знаходимо відповідний розв'язок* $x_k(t)$, $t \in [t_0, T]$. *Підставляємо* $u_k(t)$, $x_k(t)$, $t \in [t_0, T]$ *в спряжену систему*

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x_k(t), u_k(t), \psi(t), t)}{\partial x}, \ \psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x_k(T))}{\partial x}$$

і знаходимо її розв'язок $\psi_k(t)$, $t \in [t_0, T]$. *Знаходимо напрямок спуску*

$$h_k(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x_k(t), u_k(t), \psi_k(t), t)}{\partial u},$$

$t \in [t_0, T]$. *Знаходимо параметр* $\rho_k > 0$ *з умови*

$$\min_{\rho\in[0,R]} \mathcal{I}(u_k(\cdot) - \rho h_k(\cdot)) = \mathcal{I}(u_k(\cdot) - \rho_k h_k(\cdot)),$$

де $R > 0$ – *параметр алгоритму. Знаходимо наступне наближення* $u_k(t) = u_k(t) - \rho_k h_k(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Умова зупинки методу може бути вибрана однією з таких: достатня кількість кроків; $\rho_k < \varepsilon$; $\mathcal{I}(u_{k+1}) - \mathcal{I}(u_k) < \varepsilon$. Керування u_{k+1} приймаємо за наближення оптимального керування. Зауважимо, що при числовій реалізації функція керування, як правило, знаходиться у класі кусково постійних функцій

$$u_k(t) = u_k^{(i)}, \ t \in [t_i, t_{i+1}),$$

де $u_k^{(i)}$ – вектор розмірності m, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$, $|t_{i+1} - t_i| < h$, $h > 0$ – досить мале число.

9.2 Метод зведення до крайової задачі принципу максимуму

Розглянемо задачу оптимального керування (6.1) - (6.3). Введемо спряжені змінні $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)^*$ і функцію Гамільтона-Понтрягіна

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = -f_0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle .$$

Згідно принципу максимуму Понтрягіна оптимальне керування $u(t)$ вибирається з умови максимуму функції Гамільтона-Понтрягіна, тобто

$$\max_{v \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x(t), v, \psi(t), t) = \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t), \tag{9.1}$$

де $t \in [t_0, \ T]$. Зокрема, якщо $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, то ми можемо шукати оптимальне керування $u(t)$ з умови

$$\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), u(t), \psi(t), t)}{\partial u} = 0, \ t \in [t_0, \ T].$$

Отже, розв'язуючи задачу (9.1), знаходимо керування у вигляді

$$u(t) = u(t, x(t), \psi(t)). \tag{9.2}$$

Підставляємо керування (9.2) в систему керування (6.2), (6.3), а також в спряжену систему (6.5), (6.6), одержуємо крайову задачу принципу максимуму

$$\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t), \psi(t), t), \tag{9.3}$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = h(x(t), \psi(t), t), \tag{9.4}$$

$$x(t_0) = x_0, \ \psi(T) = h_0(x(T)). \tag{9.5}$$

Тут ми ввели такі позначення

$$g(x(t),\psi(t),t)=f(x(t),u(t,x(t),\psi(t)),t),$$

$$h(x(t),\psi(t),t)=-\frac{\partial\mathcal{H}(x(t),u(t,x(t),\psi(t)),\psi(t),t)}{\partial x},$$

$$h_0(x(T))=-\frac{\partial\Phi(x(T))}{\partial x}.$$

Застосуємо для розв'язування цієї задачі метод стрільби. Для цього виберемо параметр $\alpha\in\mathbb{R}^n$ і для системи (9.3), (9.4) замість умови (9.5) покладемо умову Коші

$$x\left(T\right)=\alpha,\ \ \psi\left(T\right)=h_0(\alpha). \tag{9.6}$$

Задача (9.3), (9.4),(9.6) є параметричною задачею Коші системи $2n$-нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язком задачі (9.3), (9.4),(9.6) є пара функцій $x\left(t,\alpha\right)$, $\psi\left(t,\alpha\right)$, $t\in[t_0,T]$.

Введемо вектор розбіжності

$$z\left(\alpha\right)=x\left(t_0,\alpha\right)-x_0,$$

$z\left(\alpha\right)=\left(z_1\left(\alpha\right),z_2\left(\alpha\right),\ldots,z_n\left(\alpha\right)\right)^*$. Тоді одержуємо задачу знаходження такого $\alpha\in\mathbb{R}^n$, що є розв'язком системи нелінійних рівнянь

$$z\left(\alpha\right)=0.$$

До розв'язання такої задачі може бути застосований метод Ньютона

$$\alpha^{(k+1)}=\alpha^{(k)}-\left(\frac{\partial z(\alpha^{(k)})}{\partial\alpha}\right)^{-1}z\left(\alpha^{(k)}\right),\ k=0,1,\ldots. \tag{9.7}$$

Тут $\alpha^{(k)}=(\alpha_{1k},\alpha_{2k},\ldots,\alpha_{nk})^*$. Одна з можливих модифікацій методу (9.7) така

$$\alpha^{(k+1)}=\alpha^{(k)}-\rho_k\left(\frac{\partial z\left(\alpha^{(k)}\right)}{\partial\alpha}\right)^{-1}z\left(\alpha^{(k)}\right),$$

де $\rho_k\in(0,1]$ – параметр, який вибирають так, щоб прискорити збіжність методу. Наприклад, це можна робити за умовою

$$\phi\left(\rho_k\right)=\min_{\rho\in(0,1]}\phi(\rho),$$

$$\phi(\rho)=\left\|z\left(\alpha^{(k)}-\rho\left(\frac{\partial z\left(\alpha^{(k)}\right)}{\partial\alpha}\right)^{-1}z\left(\alpha^{(k)}\right)\right)\right\|.$$

Один з способів знаходження матриці $\frac{\partial z\left(\alpha^{(k)}\right)}{\partial\alpha}$ полягає в тому, що ми цю матрицю заміняємо матрицею скінченних різниць

$$H^{(k)} = \left(H_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1,2,\ldots,n},$$

$$H_{ij}^{(k)} = \frac{z_i\left(\alpha^{(k)} + \Delta\ell_j\right) - z_i\left(\alpha^{(k)}\right)}{\Delta},$$

де ℓ_j – j-та орта, $\Delta > 0$ – мале число, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. В результаті одержуємо такий метод

Алгоритм 9.2. *Задаємо такі данні: точність методу $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$, початкове наближення $\alpha^{(0)}$.*

Крок 1. Розв'язуємо задачу Коші (9.3), (9.4),(9.6) при $\alpha = \alpha^{(0)}$. Знаходимо $z\left(\alpha^{(0)}\right) = x\left(t_0,\ \alpha^{(0)}\right) - x_0$, матрицю $H^{(0)}$ за допомогою скінченних різниць і обернену до неї матрицю. Шукаємо

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} - \left(H^{(0)}\right)^{-1} z\left(\alpha^{(0)}\right).$$

Крок 2. На $k+1$-му кроці розв'язуємо задачу Коші (9.3), (9.4),(9.6) при $\alpha = \alpha^{(k)}$. Знаходимо $z\left(\alpha^{(k)}\right) = x\left(t_0,\ \alpha^{(k)}\right) - x_0$, матрицю $H^{(k)}$ і обернену до неї матрицю. Шукаємо

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - \left(H^{(k)}\right)^{-1} z\left(\alpha^{(k)}\right).$$

Крок 3. Якщо умова $\left\|z(\alpha^{(k+1)})\right\| < \varepsilon$ виконана, то алгоритм зупиняється, $\alpha^{(k+1)}$ є наближенням до шуканого значенням параметра α. Тоді з (9.2) знаходимо наближення до оптимального керування у вигляді

$$\bar{u}(t) = u(t, x(t, \alpha^{(k+1)}), \psi(t, \alpha^{(k+1)})).$$

Запропонуємо ще один метод знаходження матриці $\frac{\partial z(\alpha)}{\partial\alpha}$. Для цього помітимо, що $\frac{\partial z(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\partial x(t_0,\alpha)}{\partial\alpha}$. Задача (9.3), (9.4),(9.6) еквівалентна до системи інтегральних рівнянь

$$x(t, \alpha) = \int_T^t g(x(s, \alpha), \psi(s, \alpha), s)ds + \alpha, \tag{9.8}$$

$$\psi(t, \alpha) = \int_T^t h(x(s, \alpha), \psi(s, \alpha), s)ds + h_0(x(T)). \tag{9.9}$$

В цьому можна пересвідчитись, якщо взяти похідні за змінною t від лівої і правої сторони (9.8), (9.9). В результаті цього одержуємо (9.3), (9.4). Умова (9.6) випливає з (9.8), (9.9) підстановкою $t = T$.

Припустимо, що функції $g(x,\psi,t)$, $h(x,\psi,t)$ є неперервно диференційовними за змінними x, ψ, $h_0(x)$ – неперервно диференційована функція. Позначимо $P(t,\alpha)=\frac{\partial x(t,\alpha)}{\partial\alpha}$, $Q(t,\alpha)=\frac{\partial\psi(t,\alpha)}{\partial\alpha}$. Тоді $P(t_0,\alpha)=\frac{\partial z(\alpha)}{\partial\alpha}$. Диференціюючи (9.8), (9.9) за α, одержимо

$$P(t,\alpha)=\int_T^t\left(\frac{\partial g\left(s,\alpha\right)}{\partial x}P(s,\alpha)+\frac{\partial g\left(s,\alpha\right)}{\partial\psi}Q(s,\alpha)\right)ds+I, \tag{9.10}$$

$$Q(t,\alpha)=\int_T^t\left(\frac{\partial h\left(s,\alpha\right)}{\partial x}P(s,\alpha)+\frac{\partial h\left(s,\alpha\right)}{\partial\psi}Q(s,\alpha)\right)ds+\frac{\partial h_0\left(\alpha\right)}{\partial\alpha}. \tag{9.11}$$

Тут $g\left(s,\alpha\right)=g\left(x(s,\alpha),\psi(s,\alpha),s\right)$, $h\left(s,\alpha\right)=h\left(x(s,\alpha),\psi(s,\alpha),s\right)$. Диференціюючи (9.10), (9.11) за змінною t, одержуємо

$$\frac{dP(t,\alpha)}{dt}=\frac{\partial g\left(t,\alpha\right)}{\partial x}P(t,\alpha)+\frac{\partial g\left(t,\alpha\right)}{\partial\psi}Q(t,\alpha), \tag{9.12}$$

$$\frac{dQ(t,\alpha)}{dt}=\frac{\partial h\left(t,\alpha\right)}{\partial x}P(t,\alpha)+\frac{\partial h\left(t,\alpha\right)}{\partial\psi}Q(t,\alpha). \tag{9.13}$$

$$P(T,\alpha)=I,\ Q(T,\alpha)=\frac{\partial h_0\left(\alpha\right)}{\partial\alpha}. \tag{9.14}$$

Отже, для знаходження $\frac{\partial z(\alpha)}{\partial\alpha}$ потрібно розв'язати задачу Коші (9.12)-(9.14). Тоді $\frac{\partial z(\alpha)}{\partial\alpha}=P(t_0,\alpha)$.

Алгоритм 9.3. *Задаємо $\varepsilon>0$, $\Delta>0$, початкове наближення $\alpha^{(0)}$.*

Крок 1. Розв'язуємо задачу Коші (9.3), (9.4),(9.6) при $\alpha=\alpha^{(0)}$ і знаходимо $x^{(0)}(t)=x\left(t,\alpha^{(0)}\right)$, $\psi^{(0)}(t)=\psi\left(t,\alpha^{(0)}\right)$, $z\left(\alpha^{(0)}\right)=x\left(t_0,\ \alpha^{(0)}\right)-x_0$. Підставляємо $x^{(0)}(t)$, $\psi^{(0)}(t)$, $\alpha=\alpha^{(0)}$ в праву частину системи (9.12), (9.13). Розв'язуємо задачу Коші (9.12)-(9.14) і знаходимо $P(t_0,\alpha^{(0)})$. Шукаємо

$$\alpha^{(1)}=\alpha^{(0)}-P^{-1}(t_0,\alpha^{(0)})z\left(\alpha^{(0)}\right).$$

Крок 2. На $k+1$-му кроці розв'язуємо задачу Коші (9.3), (9.4),(9.6) при $\alpha=\alpha^{(k)}$. Знаходимо $x^{(k)}(t)=x\left(t,\alpha^{(k)}\right)$, $\psi^{(k)}(t)=\psi\left(t,\alpha^{(k)}\right)$, $z\left(\alpha^{(k)}\right)=x\left(t_0,\ \alpha^{(k)}\right)-x_0$. Підставляємо $x^{(k)}(t)$, $\psi^{(k)}(t)$, $\alpha=\alpha^{(k)}$ в праву частину системи (9.12), (9.13). Розв'язуємо задачу Коші (9.12)-(9.14) і знаходимо $P(t_0,\alpha^{(k)})$. Шукаємо

$$\alpha^{(k+1)}=\alpha^{(k)}-P^{-1}(t_0,\alpha^{(k)})z\left(\alpha^{(k)}\right).$$

Крок 3. Умовою зупинки алгоритму є $\left\|z(\alpha^{(k+1)})\right\|<\varepsilon$. Тоді $\alpha^{(k+1)}$ є наближенням до шуканого значенням параметра α, апроксимацією оптимального керування є функція

$$\bar{u}(t)=u(t,x(t,\alpha^{(k+1)}),\psi(t,\alpha^{(k+1)})).$$

9.3 Метод гольчатої лінеаризації

Розглянемо задачу оптимального керування (6.1) - (6.3). Метод гольчатої лінеаризації є ітераційним методом. Припустимо, що на k-му кроці ми одержали керування $u^{(k)}(t)$, відповідну йому траєкторію $x^{(k)}(t)$ системи (6.2), (6.3) та розв'язок $\psi^{(k)}(t)$ спряженої системи (6.5), який відповідає парі $(u^{(k)}(t), x^{(k)}(t))$.

На $k+1$-му кроці розглядається функція

$$W_k(v,t) = \mathcal{H}\left(x^{(k)}(t), v, \psi^{(k)}(t), t\right) - \mathcal{H}\left(x^{(k)}(t), u^{(k)}(t), \psi^{(k)}(t), t\right),\ t \in [t_0, T],$$

$v \in \mathcal{U}$. Визначимо функцію керування $\bar{u}^{(k)}(t)$ з умови

$$\overline{W}_k(t) = W_k(\bar{u}^{(k)}(t), t) = \max_{v \in \mathcal{U}} W_k(v,t),\ t \in [t_0, T].$$

Якщо $\overline{W}_k(t) = 0$ для всіх $t \in [t_0, T]$, то керування $u^{(k)}(\cdot)$ задовольняє принцип максимуму і алгоритм зупиняється. В іншому випадку існують точки $t \in [t_0, T]$, в яких $\overline{W}_k(t) > 0$. Визначимо таке $\tau_k \in [t_0, T]$, для якого справджується умова

$$\overline{W}_k(\tau_k) = \max_{t \in [t_0, T]} \overline{W}_k(t).$$

Отже, $\overline{W}_k(\tau_k) > 0$. Побудуємо варіацію керування

$$u_\varepsilon^{(k)}(t) = \begin{cases} \bar{u}^{(k)}(t), & \text{якщо } t \in \Delta(\varepsilon), \\ u^{(k)}(t), & \text{якщо } t \in [t_0, T]/\Delta(\varepsilon). \end{cases}$$

Тут

$$\Delta(\varepsilon) = \left[\tau_k - \varepsilon(\tau_k - \tau_0^k), \tau_k + \varepsilon(\tau_1^k - \tau_k)\right],\ \varepsilon \in [0,1],$$

τ_0^k, τ_1^k є точками розриву функції $\overline{W}_k(t)$, які найближче лежать до точки τ_k, $\tau_0^k < \tau_k < \tau_1^k$. Позначимо

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \mathcal{I}\left(u_\varepsilon^{(k)}(\cdot)\right).$$

Шукаємо $\varepsilon_k \in [0,1]$ з умови

$$\mathcal{L}(\varepsilon_k) = \min_{\varepsilon \in [0,1]} \mathcal{L}(\varepsilon).$$

Тоді наступне наближення для функції керування визначається умовою

$$u^{(k+1)}(t) = u_{\varepsilon_k}^{(k)}(t),\ t \in [t_0, T].$$

На цьому $k+1$-а ітерація алгоритму голчатої лінеаризації завершена. Умова зупинки алгоритму є аналогічною до умови зупинки інших ітераційних методів.

Рекомендована література: [3, 4, 10, 15, 16, 19, 23, 30, 33, 34, 40, 42, 44, 53, 55]

Частина V

Синтез систем керування

Вступ

При розв'язуванні задач керування складними технічними системами за умов невизначеності виникає необхідність в побудові керування, яке б дозволяло досягти поставленої мети для довільного можливого положення об'єкту керування. Подібні постановки виникають при створенні автоматичних систем керування літальними апаратами, в задачах оптимального керування пучками заряджених частинок, при проектуванні автоматизованих систем керування виробничими процесами тощо. Вони є надзвичайно складними, їх розв'язання базується на застосуванні підходів з різних областей математики.

Як приклад, розглянемо задачу гасіння кутових швидкостей при обертанні твердого тіла навколо центру мас. Така постановка виникає при побудові автоматизованих систем керування літальними апаратами. Математична модель записується за допомогою системи диференціальних рівнянь Ейлера і має вигляд [37]

$$\mathcal{J}\frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) \times \mathcal{J}\omega(t) = u(t). \tag{9.15}$$

Тут $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор кутових швидкостей, $\mathcal{J}$ – тензор інерції, який є додатновизначеною симетричною матрицею розмірності 3×3, $u = (u_1, u_2, u_3)^*$ – вектор керуючих параметрів, що відповідає моментам зовнішніх сил, які діють на тіло, $u \in \mathcal{U}$, де $\mathcal{U}$ – множина допустимих керувань з $\mathbb{R}^3$, $t \geq 0$. В багатьох випадках початковий стан системи (9.15) відомий з деякою точністю, або взагалі не відомий. Тому постає задача про знаходження допустимого керування, що забезпечує перевід системи (9.15) з **довільного** положення $\omega(0)$ в окіл початку координат.

Оскільки початкове положення системи (9.15) заздалегідь невідоме, то функція керування залежить від фазових змінних. Це означає, що керування системою (9.15) здійснюється в класі керувань з оберненим зв'язком. Одержана постановка є прикладом задачі **синтезу керування** системи (9.15). Разом з тим, якщо потрібно перевести систему (9.15) з довільного положення на термінальну множину у найшвидший спосіб, то виникає задача синтезу оптимального за швидкодією керування.

Достатньо загальна постановка задачі синтезу може бути сформульованою так. Розглянемо систему керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(x,t), t), \tag{9.16}$$

де x – n-вимірний вектор стану, u – m-вимірний вектор керування, функція керування $u(x,t)$ є вимірною за t і неперервною за x та належить компакту $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0$, $f(x,u,t)$ – n-вимірна неперервна функція, при цьому при допустимому керуванні $u = u(x,t)$ мають місце умови існування, єдиності і продовжуваності розв'язку задачі Коші для системи (9.16)[1].

Нехай $M \subset \mathbb{R}^n$ – множина кінцевих станів системи (9.16), яка називається також термінальною множиною. Приклад, що розглядався вище, показує, що початкове положення системи керування може бути невідомим. Має місце таке означення.

Означення 9.1. Задача *синтезу керування* системи (9.16) полягає у знаходженні допустимого керування з оберненим зв'язком $u = u(x,t)$, такого, що розв'язки системи диференціальних рівнянь (9.16) в деякий момент часу T попадають на термінальну множину M, тобто

$$x(T) \in M.$$

Керування $u(x,t)$, яке розв'язує задачу синтезу, називається синтезуючим.

В загальному випадку система (9.16) може не бути повністю керованою. У цьому випадку наведене означення набуває такого вигляду [57].

Означення 9.2. Задача *синтезу керування* для системи (9.16) полягає у визначені множини $\mathcal{W}(\tau,T,M) \subset \mathbb{R}^n$ та керування з оберненим зв'язком $u = \tilde{u}(x,t)$, такого, що є допустимим і всі розв'язки системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), \tilde{u}(x(t),t), t)$$

такі, що $x(\tau) \in \mathcal{W}(\tau,T,M)$, в певний момент $t = T$ попадають на термінальну множину M, тобто $x(T) \in M$.

Тут $\tau < T$. Час, за який здійснюється перевід на множину M називається *часом перехідного процесу.* Якщо при цьому необхідно оптимізувати деякий критерій якості $\mathcal{I}(u,x,T)$, то така постановка називається *задачею синтезу оптимального керування.*

Найбільш розповсюдженим підходом до розв'язування задачі синтезу є метод динамічного програмування, запропонований Р. Белманом [51, 52]. Методики, що розвиваються на основі методу Белмана, можна умовно розбити на дві групи. До першої входять методи розв'язування диференціального рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана з метою знаходження функції Белмана [28, 39, 49, 54, 56]. Другу групу складають апроксимації оптимального керування, які базуються на принципі оптимальності [6, 14, 32, 33].

[1] Наприклад, умови Каратеодорі і умови квазілінійності [43]

Один з розповсюджених підходів до розв'язування задачі синтезу керування полягає у зведенні цієї задачі до проблеми побудови стабілізуючого керування. Це означає, що в структуру системи керування вводиться додаткова ланка оберненого зв'язку. Вибір цієї ланки здійснюється, наприклад, з застосуванням другого методу Ляпунова. Якщо потрібно забезпечити стійкість програмного руху і на класі стабілізуючих регуляторів оптимізувати критерій якості, то така постановка є задачею оптимальної стабілізації [5, 6, 14, 24, 25, 27, 29]. Між функціями Ляпунова, Белмана і Кротова існує тісний зв'язок. Слід зауважити, що для ряду задач синтезу керування може бути застосований принцип максимуму Понтрягіна [10].

Лекція 10

Метод динамічного програмування: дискретний варіант

10.1 Принцип оптимальності і дискретне рівняння Белмана

Розглянемо наступну задачу оптимального керування: мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}(u,x) = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)) \tag{10.1}$$

при умовах

$$x(k+1) = f_k(x(k), u(k)), \ k = 0, 1, ..., N-1, \tag{10.2}$$

$$x(k) \in X_k, \ k = 0, 1, ..., N, \tag{10.3}$$

$$u(k) \in \mathcal{U}_k, \ k = 0, 1, ..., N-1. \tag{10.4}$$

Тут $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ – замкнена множина фазових обмежень в момент $k = 0, 1, ..., N$, $\mathcal{U}_k \subseteq \mathbb{R}^m$ – замкнена множина обмежень на керування в момент $k = 0, 1, ..., N-1$, $g_k(x,u)$, $\Phi(x)$ – неперервні функції, $k = 0, 1, ..., N-1$, $f_k(x,u)$ – неперервна вектор-функція розмірності n. Розв'язком задачі (10.1) - (10.4) називається пара послідовностей $(\{u_*(k)\}, \{x_*(k)\})$, яка забезпечує мінімум функціоналу (10.1), при умовах (10.2) - (10.4).

Задача (10.1) - (10.4) має зміст, якщо множина X_N є досяжною з точок множини X_0.

Означення 10.1. Множина X_N називається досяжною з точки $z \in X_k$, якщо існує таке допустиме керування $\{u(j)\}_{j=k}^{N-1}$ та відповідна йому траєкторія системи (10.2) $\{x(j)\}_{j=k}^{N-1}$ з початковою умовою $x(k) = z$ такі, що $x(N) \in X_N$.

Розглянемо *допоміжну задачу* до задачі (10.1) - (10.4). Зафіксуємо $s \in \{1, 2, ..., N-1\}$. Задача полягає в тому. щоб мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}_s\left(u, x\right) = \sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(x\left(k\right), u\left(k\right)\right) + \Phi\left(x\left(N\right)\right) \tag{10.5}$$

при умовах

$$x\left(k+1\right) = f_k\left(x\left(k\right), u\left(k\right)\right), \ k = s, s+1, ..., N-1, \tag{10.6}$$

$$x\left(k\right) \in X_k, k = s, s+1, ..., N, \tag{10.7}$$

$$x(s) = x_*(s), \tag{10.8}$$

$$u\left(k\right) \in \mathcal{U}_k, \ k = s, s+1, ..., N-1. \tag{10.9}$$

Має місце теорема.

Теорема 10.1 (принцип оптимальності Белмана)**.** *Якщо* $(\{\tilde{u}(k)\}, \{\tilde{x}(k)\})$ *є розв'язок задачі* (10.5) - (10.9)*, то він співпадає з розв'язком задачі* (10.1) - (10.4) *для* $k = s, s+1, ..., N$*.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що твердження теореми не вірне і $\mathcal{I}_s(u_*, x_*) > \mathcal{I}_s(\tilde{u}, \tilde{x})$. Побудуємо керування

$$v(k) = \begin{cases} u_*(k), & k = 0, 1, ..., s-1; \\ \tilde{u}(k), & k = s, s+1, ..., N. \end{cases}$$

Тоді відповідна йому траєкторія має вигляд

$$y(k) = \begin{cases} x_*(k), & k = 0, 1, ..., s-1; \\ \tilde{x}(k), & k = s, s+1, ..., N. \end{cases}$$

Таким способом,

$$\mathcal{I}(v,y)=\sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(y\left(k\right),v\left(k\right)\right)+\Phi\left(y\left(N\right)\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{s-1} g_k\left(x_*\left(k\right),u_*\left(k\right)\right)+\sum_{k=s}^{N-1} g_k\left(\tilde{x}\left(k\right),\tilde{u}\left(k\right)\right)+\Phi\left(\tilde{x}\left(N\right)\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{s-1} g_k\left(x_*\left(k\right),u_*\left(k\right)\right)+\mathcal{I}_s(\tilde{u},\tilde{x})<$$
$$<\sum_{k=0}^{s-1} g_k\left(x_*\left(k\right),u_*\left(k\right)\right)+\mathcal{I}_s(u_*,x_*)=\mathcal{I}(u_*,x_*).$$

Отже, керування u_* не є оптимальним. Протиріччя доводить теорему. $\square$

Позначимо

$$\mathcal{B}_s(z)=\min_{\{u(k)\}_{k=s}^{N-1}}\left\{\sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k),u(k))+\Phi(x(N))\right\}, \tag{10.10}$$

за умови, що

$$x\left(k+1\right)=f_k\left(x\left(k\right),u\left(k\right)\right),\ \ k=s,s+1,...,N-1,\ \ x(s)=z \tag{10.11}$$

і мають місце включення $x\left(k\right)\in X_k$, $k=s,s+1,...,N$, $u\left(k\right)\in\mathcal{U}_k$, $k=s,s+1,...,N-1$. Функція $\mathcal{B}_s(z)$ називається *функцією Белмана* задачі (10.1)-(10.4).

Використовуючи позначення (10.5), можна записати

$$\mathcal{B}_s(z)=\min_{\{u(k)\}_{k=s}^{N-1}}\mathcal{I}_s\left(u,x\right).$$

Нехай пара $(\{u_*(k)\},\{x_*(k)\})$ доставляє мінімум правій частині рівності (10.10). Тоді

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_s(z)&=\min_{\{u(k)\}_{k=s}^{N-1}}\left\{\sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k),u(k))+\Phi(x(N))\right\}=\\&=\sum_{k=s}^{N-1} g_k(x_*(k),u_*(k))+\Phi(x_*(N))=\\&=g_s(z,u_*(s))+\sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(x_*(k),u_*(k))+\Phi(x_*(N)).\end{aligned} \tag{10.12}$$

За принципом оптимальності Белмана

$$\sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(x_*(k), u_*(k)) + \Phi(x_*(N)) =$$
$$= \min_{\{u(k)\}_{k=s+1}^{N-1}} \left\{ \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)) \right\},$$

а за означенням функції Белмана

$$\min_{\{u(k)\}_{k=s+1}^{N-1}} \left\{ \sum_{k=s+1}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)) \right\} = \mathcal{B}_{s+1}(x(s+1, z)).$$

Тут $\{x(k, z)\}$ – розв'язок задачі Коші (10.11) за умови $\{u(k)\} = \{u_*(k)\}$. Отже,

$$\mathcal{B}_s(z) = g_s(z, u_*(s)) + B_{s+1}(x(s+1, z)).$$

Враховуючи, що

$$x\,(s+1, z) = f_s\,(z, u_*\,(s))\,,$$

отримаємо

$$\mathcal{B}_s(z) = g_s(z, u_*(s)) + \mathcal{B}_{s+1}\,(f_s\,(z, u_*\,(s)))\,. \tag{10.13}$$

Якщо замість $(\{u_*(k)\}, \{x_*(k)\})$ в (10.12) поставити іншу допустиму пару $(\{u(k)\}, \{x(k)\})$, то права частина рівності (10.12) може тільки збільшитись. Тобто,

$$\mathcal{B}_s(z) = \min_{\{u(k)\}_{k=s}^{N-1}} \left\{ \sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)) \right\} \leq$$
$$\leq \sum_{k=s}^{N-1} g_k(x(k), u(k)) + \Phi(x(N)).$$

Тому в (10.13) ми маємо $\mathcal{B}_s(z) \leq g_s(z, u(s)) + \mathcal{B}_{s+1}\,(f_s\,(z, u\,(s)))$. Виходячи з (10.13), для пари $(\{u_*(k)\}, \{x_*(k)\})$ в останній нерівності ми отримуємо рівність, тому

$$\mathcal{B}_s(z) = \min_{u \in \mathcal{U}_s} \left\{ g_s(z, u) + \mathcal{B}_{s+1}\,(f_s\,(z, u)) \right\}. \tag{10.14}$$

Співвідношення (10.14) називається *дискретним рівнянням Белмана.*

Приклад 10.1. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}\left(u,x\right)=\sum_{k=0}^{N-1}u^{2}\left(k\right)+x^{2}\left(N\right)$$

при умовах

$$x\left(k+1\right)=a(k)x(k)+u(k),\ k=0,1,...,N-1.$$

Тут $u(k)$ – скалярне керування, $k=0,1,...,N-1$, $x(k)$ – скалярна траєкторія заданої системи керування, $a(k)\in\mathbb{R}^{1}$, $k=0,1,...,N-1$, $x(0)=x_0$ – відоме початкове положення.

Дискретне рівняння Белмана 10.14 для цієї задачі має вигляд

$$\mathcal{B}_{s}(z)=\min_{u}\left\{u^{2}+\mathcal{B}_{s+1}\left(a(s)z+u\right)\right\}.$$

При цьому $\mathcal{B}_{N}(z)=z^{2}$. Функцію Белмана шукаємо у вигляді

$$\mathcal{B}_{s}(z)=b(s)z^{2},$$

де значення $b(s)\in\mathbb{R}^{1}$, $s=0,1,...,N$ потрібно знайти. Підставляємо функцію Белмана в дискретне рівняння Белмана і одержуємо

$$b(s)z^{2}=\min_{u}\left\{u^{2}+b(s+1)\left(a(s)z+u\right)^{2}\right\}.$$

Розв'яжемо естремальну задачу

$$\min_{u}\left\{u^{2}+b(s+1)\left(a(s)z+u\right)^{2}\right\}.$$

Прирівнюючи похідну від $u^{2}+b(s+1)\left(a(s)z+u\right)^{2}$ за змінною u до нуля, отримуємо

$$u(s)=-\frac{b(s+1)a(s)z}{1+b(s+1)}.$$

Підставляючи останнє співвідношення в дискретне рівняння Белмана і скорочуючи на z^{2}, одержуємо дискретне рівняння для знаходження $b(s)\in\mathbb{R}^{1}$, $s=0,1,...,N$, а саме

$$b(s)=\frac{b(s+1)a^{2}(s)}{1+b(s+1)},\ s=0,1,\ldots,N-1.$$

З умови $\mathcal{B}_{N}(z)=z^{2}$ випливає $b(N)=1$. Оптимальне керування має вигляд

$$u_{*}(k,x(k))=-\frac{b(k+1)a(k)x(k)}{1+b(k+1)},\ k=0,1,\ldots,N-1.$$

З означення функції Белмана випливає, що оптимальне значення критерію якості рівне
$$\mathcal{I}_* = \mathcal{B}_0(x_0) = b(0)x_0^2.$$

Отже, задачу (10.2) - (10.4) можна розбити на дві.

1). Для кожної точки $x_0 \in X_0$ мінімізувати функціонал (10.2) при обмеженнях (10.2) - (10.4). Таким способом оптимальне значення функціоналу буде залежати від точки x_0:

$$p(x_0) = \min_{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}} \mathcal{I}(u, x).$$

2). Знайти оптимальне значення функціоналу $\mathcal{I}_* = \min\limits_{x_0 \in X_0} p(x_0)$.

На основі рівняння Белмана будується алгоритм розв'язування задачі (10.1) - (10.4).

Алгоритм 10.1 (алгоритм методу динамічного програмування для дискретних систем). *Зворотній хід методу.*

Крок 1. Покладемо в рівняння (10.14) $s = N - 1$ *і розв'яжемо екстремальну задачу*

$$\min_{u(N-1) \in \mathcal{U}_{N-1}} \left\{ g_{N-1}(z, u(N-1)) + \Phi\left(f_{N-1}\left(z, u\left(N-1\right)\right)\right) \right\}.$$

для всіх $z \in X_{N-1}$*, з яких досяжна множина* X_N*, тобто, для яких* $x(N) = g_{N-1}(z, u(N-1)) \in X_N$ *для деякого допустимого керування* $u(N-1) \in \mathcal{U}_{N-1}$*. Запам'ятовуємо для кожної точки* $z \in X_{N-1}$ *розв'язок цієї задачі* $u^*(N-1, z)$ *та*

$$\mathcal{B}_{N-1}(z) = g_{N-1}(z, u_*(N-1)) + \Phi\left(f_{N-1}\left(z, u_*\left(N-1\right)\right)\right).$$

Крок 2. В рівняння Белмана (10.14) *покладемо* $s = N - 2$ *і для всіх* $z \in X_{N-2}$*, для яких досяжна множина* X_N*, розв'яжемо задачу*

$$\min_{u(N-2) \in \mathcal{U}_{N-2}} \left\{ g_{N-2}(z, u(N-2)) + \mathcal{B}_{N-1}\left(f_{N-2}\left(z, u\left(N-2\right)\right)\right) \right\}.$$

Отримуємо оптимальне керування $u_*(N-2, z)$ *і*

$$\mathcal{B}_{N-2}(z) = g_{N-2}(z, u_*(N-2)) + \mathcal{B}_{N-1}\left(f_{N-2}\left(z, u_*\left(N-2\right)\right)\right)$$

як функцію від $z \in X_{N-2}$*.*

Крок 3. Продовжуючи аналогічно процес обчислень, при $s = 0$ *приходимо до задачі*

$$\mathcal{B}_0(z) = \min_{u(0) \in \mathcal{U}_s} \left\{ g_0(z, u(0)) + \mathcal{B}_1\left(f_0\left(z, u\left(0\right)\right)\right) \right\}.$$

Для всіх $z \in X_0$ розв'язуємо цю задачу і отримуємо оптимальне керування $u_*(0,z)$, а також значення функції Белмана $\mathcal{B}_0(z)$.

Прямий хід алгоритму.

Крок 4. Якщо $x(0)$ не є фіксованим, то знаходимо

$$x_*(0) = \arg\min_{z\in X_0} \mathcal{B}_0(z).$$

Якщо $x(0) = x_0$ є заданим в задачі (10.1) - (10.4), то $x_*(0) = x_0$.

Крок 5. Знаходимо $u_*(0) = u_*(0, x_*(0))$. Далі

$$x_*(1) = f_0(x_*(0), u_*(0))$$

згідно рівняння (10.7). Знаходимо $u_*(1) = u_*(1, x_*(1))$, підставляючи точку $x_*(1) = f_0(x_*(0), u_*(0))$ у знайдену на прямому ході методу функцію керування $u_* = u_*(1,z)$ і так далі, знаходячи

$$x_*(k+1) = f_0(x_*(k), u_*(k))$$

і підставляючи це значення оптимальної траєкторії в $u_*(k+1,z)$, так що $u_*(k+1) = u_*(k+1, x_*(k+1))$, $k = 0, 1, ..., N-1$.

Розглянемо особливості алгоритму методу динамічного програмування.

- Алгоритм може бути застосований для задачі з нефіксованим інтервалом, у тому числі і до задачі швидкодії. Для цього потрібно вказати максимально можливий час, і застосовувати метод, збільшуючи поступово часову змінну.

- За умови повної дискретизації, метод дає абсолютний мінімум з врахуванням обмежень.

- Метод розв'язує задачу *синтезу оптимального керування.*

- На кожному кроці прямого ходу методу запам'ятовується лише оптимальне керування. Це значно економить час обчислень порівняно з перебором. Але разом з тим при зростанні розмірності векторів x та u суттєво збільшуються об'єми пам'яті, необхідної для запам'ятовування векторів $u_*(k,z)$, $x_*(k)$ на оберненому ході методу.

10.2 Оптимальне керування лінійною дискретною системою

Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \{\langle D(k)x(k), x(k)\rangle + \langle M(k)u(k), u(k)\rangle\} + \langle P_0 x(N), x(N)\rangle$$

на розв'язках дискретної системи

$$x(k+1) = A(k)x(k) + C(k)u(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1..., N-1,$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $A(k)$ – матриця розмірності $n \times n$, $C(k)$ – матриця розмірності $n \times m$, $D(k)$ – невід'ємновизначена симетрична $n \times n$-матриця, $M(k)$ – додатновизначена симетрична $m \times m$-матриця, $k = 0, 1...N-1$, P_0 – невід'ємновизначена симетрична $n \times n$-матриця.

Запишемо дискретне рівняння Белмана

$$\mathcal{B}_s(z) = \min_u \{\ \langle D(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle + \mathcal{B}_{s+1}(A(s)z + C(s)u)\ \},$$

де $s = 0, 1..., N-1$. При цьому $\mathcal{B}_N(z) = \langle P_0 z, z\rangle$. Функцію Белмана будемо шукати у вигляді

$$\mathcal{B}_s(z) = \langle P(s)z, z\rangle, \tag{10.15}$$

де $P(s)$ – матриця розмірності $n \times n$, $s = 0, 1..., N$. Підставимо цю функцію в рівняння Белмана. Розглянемо функцію

$$\begin{gathered}
\mathcal{H}_s(z, u) = \langle D(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle + \mathcal{B}_{s+1}(A(s)z + C(s)u) = \\
= \langle D(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle + \langle P(s+1)(A(s)z + C(s)u), A(s)z + C(s)u\rangle = \\
= \langle D(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle + \langle P(s+1)A(s)z, A(s)z\rangle + \\
+ \langle u, C^*(s)P^*(s+1)A(s)z\rangle + \\
+ \langle C^*(s)P(s+1)A(s)z, u\rangle + \langle C^*(s)P(s+1)C(s)u, u\rangle.
\end{gathered}$$

Отже, рівняння Белмана має вигляд

$$B_s(z) = \min_u \mathcal{H}_s(z, u).$$

Розв'яжемо задачу

$$\mathcal{H}_s(z, u) \to \min_u.$$

Для цього випишемо умову екстремуму

$$\frac{\partial \mathcal{H}_s(x,u)}{\partial u} = 0.$$

Маємо

$$\frac{\partial \mathcal{H}_s(x,u)}{\partial u} = 2M(s)u + C^*(s)P(s+1)A(s)z + C^*(s)P^*(s+1)A(s)z + \\ + C^*(s)P(s+1)C(s)u + C^*(s)P*(s+1)C(s)u = 0.$$

Звідси

$$(2M(s) + C^*(s)P(s+1)C(s) + C^*(s)P^*(s+1)C(s))u = \\ = -(C^*(s)P(s+1)A(s) + C^*(s)P^*(s+1)A(s))z.$$

Позначимо

$$L(s+1) = 2M(s) + C^*(s)P(s+1)C(s) + C^*(s)P^*(s+1)C(s).$$

Ця матриця є симетричною і додатновизначеною. Розглянемо також матрицю

$$M(s+1) = -(C^*(s)P(s+1)A(s) + C^*(s)P^*(s+1)A(s)).$$

Тоді

$$u_* = L^{-1}(s+1)M(s+1)z = W(s+1)z,$$

де $W(s+1) = L^{-1}(s+1)M(s+1)$. Підставляємо u_* в рівняння Белмана

$$\langle P(s)z, z\rangle = \langle D(s)z, z\rangle + \langle M(s)W(s+1)z, W(s+1)z\rangle + \\ + \langle M(s)A(s)z, A(s)z\rangle + \langle C^*(s)P(s+1)A(s)z, W(s+1)z\rangle + \\ + \langle C^*(s)P(s+1)C(s)W(s+1)z, W(s+1)z\rangle + \\ + \langle W(s+1)z, C^*(s)P^*(s+1)A(s)z\rangle .$$

Далі отримуємо

$$\langle P(s)z, z\rangle = \langle D(s)z, z\rangle + \langle W^*(s+1)M(s)W(s+1)z, z\rangle + \\ + \langle A^*(s)M(s)A(s)z, z\rangle + \langle W^*(s+1)C^*(s)P(s+1)A(s)z, z\rangle + \\ + \langle W^*(s+1)C^*(s)P(s+1)C(s)W(s+1)z, z\rangle + \\ + \langle W^*(s+1)C^*(s)P^*(s+1)A(s)z, z\rangle .$$

Останній вираз можна подати у вигляді $\langle K(s)z, z\rangle = 0$, де $K(s)$ – матриця розмірності $n \times n$. Оскільки $z \in \mathbb{R}^n$ – довільне, то покладемо $C(s) = 0$, тобто

$$\begin{aligned} P(s) = D(s) + W^*(s+1)M(s)W(s+1) + A^*(s)M(s)A(s)+ \\ + W^*(s+1)C^*(s)P(s+1)A(s) + A^*(s)P^*(s+1)C(s)W(s+1)+ \\ + W^*(s+1)C^*(s)P(s+1)C(s)W(s+1), \end{aligned} \tag{10.16}$$

де $s = N-1, N-2..., 0$. При цьому з умови $\mathcal{B}_N(z) = \langle P_0 z, z\rangle$ маємо

$$P(N) = P_0.$$

З рівняння (10.16) і $P(N) = P_0$ випливає, що $P(s) = P^*(s)$. У цьому можна переконатись транспонуванням рівності (10.16). В результаті транспонування (10.16) ми одержимо для знаходження матриці $P^*(s)$ рівність, аналогічну до (10.16). Тоді випишемо матриці

$$\begin{aligned} W(s+1) = L^{-1}(s+1)M(s+1) = \\ = -(M(s) + C^*(s)P(s+1)C(s))^{-1}C^*(s)P^*(s+1)A(s). \end{aligned} \tag{10.17}$$

Враховуючи, що $z = x(s)$, оптимальне керування має вигляд

$$u_*(x(s), s) = W(s+1)x(s). \tag{10.18}$$

При цьому, виходячи з означення функції Белмана, одержуємо, що оптимальне значення критерію якості

$$\mathcal{I}_* = \langle P(0)x_0, x_0\rangle .$$

Отже, знаходження оптимального керування відбувається за таким алгоритмом.

Алгоритм 10.2. *Задаємо N, матриці $A(k)$, $C(k)$, $D(k)$, $M(k)$, P_0, де $k = 0, 1...N-1$.*

Крок 1. Розв'язуємо матричне дискретне рівняння (10.16) з умовою $P(N) = P_0$, де матриця $W(s+1)$ шукається за формулою (10.17).

Крок 2. Знаходимо оптимальну траекторію $\{x_*(k)\}$ з рівняння

$$x(k+1) = (A(k) + C(k)W(k))x(k),\ \ x(0) = x_0,\ \ k = 0, 1, ..., N-1.$$

Крок 3. Знаходимо оптимальне керування

$$u_*(k) = W(k+1)x_*(k),\ \ k = 0, 1..., N-1.$$

Крок 4. Обчислюємо оптимальне значення критерію якості

$$\mathcal{I}_* = \langle P_0 x_0, x_0\rangle .$$

Література: [14, 50–52]

Лекція 11

Метод динамічного програмування для неперервних систем

11.1 Принцип оптимальності Белмана

Нехай $X(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ – фазові обмеження, $\mathcal{U}(t) \subseteq \mathbb{R}^m$ – геометричні обмеження на керування, при цьому множини $X(t)$, $\mathcal{U}(t)$ є замкненими, $t \in [t_0, T]$. Задача оптимального керування полягає в знаходженні нижньої точної грані функціоналу

$$\mathcal{I}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T)) \tag{11.1}$$

за умов

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{11.2}$$

$$x(t) \in X(t),\ u(t) \in \mathcal{U}(t),\ t \in [t_0, T]. \tag{11.3}$$

Тут $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – функція керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $f(x, u, t)$ – n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умови існування, єдиності і продовжуваності розв'язку задачі Коші, $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$– неперервні функції. Розв'язком задачі (11.1) - (11.3) називають пару (u_*, x_*), яка доставляє значення точної нижньої грані функціоналу (11.1). Керування u вибирають, як правило, з класу кусково-неперервних функцій, або з класу вимірних за часовою змінною функцій.

Метод динамічного програмування базується на принципі оптимальності Белмана. Геометричний зміст принципу Белмана є таким: якщо

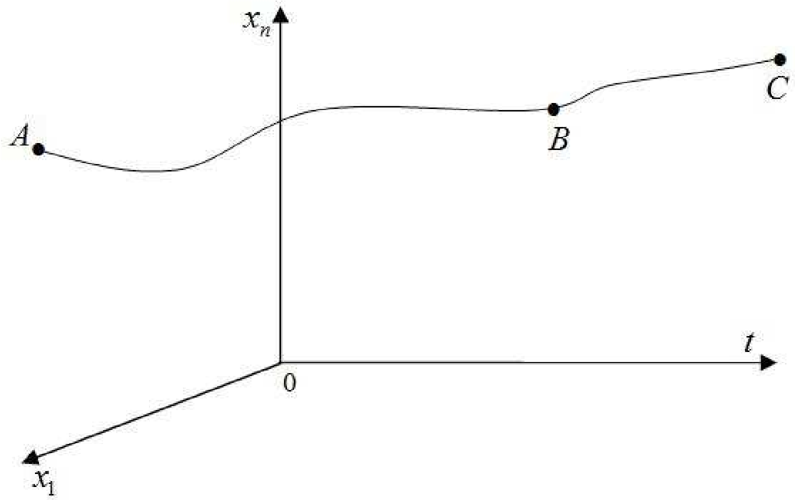

Рис. 11.1. Геометричний зміст принципу Белмана

траєкторія системи (11.2) з'єднує точки AC і є оптимальною траєкторією задачі (11.1) - (11.3), то траєкторія BC також буде оптимальною для деякої задачі оптимального керування при довільному виборі точки B на траєкторії AC (рис. 11.1).

Розглянемо *допоміжну задачу* до задачі (11.1) - (11.3). Зафіксуємо $s \in (t_0, T)$. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати функціонал

$$\mathfrak{I}_s(u, x) = \int_s^T f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T)) \tag{11.4}$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t),\ x(s) = x_*(s), \tag{11.5}$$

$$x(t) \in X(t),\ u(t) \in \mathfrak{U}(t),\ t \in [s, T]. \tag{11.6}$$

Має місце така теорема.

Теорема 11.1 (принцип оптимальності Белмана)**.** *Якщо пара* $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$ *є розв'язком допоміжної задачі* (11.4) - (11.6)*, то вона співпадає з розв'язком задачі* (11.1) - (11.3) *на відрізку* $t \in [s, T]$.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що $\mathfrak{I}_s(u_*, x_*) > \mathfrak{I}_s(\tilde{u}, \tilde{x})$. Побудуємо керування

$$u(t) = \begin{cases} u_*(t), & t \in [t_0, s]; \\ \tilde{u}(t), & t \in [s, T]. \end{cases}$$

Тоді відповідна йому траєкторія має вигляд

$$x(t) = \begin{cases} x_*(t), & t \in [t_0, s]; \\ \tilde{x}(t), & t \in [s, T]. \end{cases}$$

Таким способом,

$$\begin{gathered} \mathcal{I}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(T)) = \\ = \int_{t_0}^{s} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt + \int_{s}^{T} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)dt + \Phi(\tilde{x}(T)) < \\ < \int_{t_0}^{s} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt + \mathcal{I}_s(u_*, x_*) = \mathcal{I}(u_*, x_*). \end{gathered}$$

Отже, керування u_* не є оптимальним. Протиріччя доводить теорему. □

Зауваження. Принцип оптимальності Белмана справджується також для задачі з нефіксованим часом.

Приклад 11.1. Принцип Белмана виконується не для всіх задач оптимального керування. Так, розглянемо задачу мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}(u, x) = \alpha^2 \int_0^{2\pi} (x(t) - \sin t)^2 dt + \left(\int_0^{2\pi} x(t)dt \right)^2, \tag{11.7}$$

де

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ t \in [0, 2\pi]. \tag{11.8}$$

Очевидно, що $\mathcal{I}(u, x) \geq 0$. Тому пара

$$u_*(t) = \cos t, \ x_*(t) = \sin t, \ t \in [0, 2\pi]$$

є розв'язком цієї задачі, причому оптимальне значення функціоналу

$$\mathcal{I}_* = \mathcal{I}(u_*, x_*) = 0.$$

Побудуємо для задачі (11.7), (11.8) допоміжну задачу. Зафіксуємо $s \in [0, 2\pi]$. Потрібно мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}_s(u, x) = \alpha^2 \int_s^{2\pi} (x(t) - \sin t)^2 dt + \left(\int_s^{2\pi} x(t)dt \right)^2$$

за умови
$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ \ x(s) = x_*(s) = \sin s,\ \ t \in [s, T].$$
Візьмемо $s = \pi$. Тоді $x_*(\pi) = 0$ і
$$\mathcal{J}_s(u_*, x_*) = \left(\int_\pi^{2\pi} \sin t dt \right)^2 = 4.$$
Розглянемо керування $\tilde{u}(t) = 0$. Йому відповідає траєкторія $\tilde{x}(t) = 0$ в силу допоміжної задачі. Так,
$$\mathcal{J}_s(\tilde{u}, \tilde{x}) = \alpha^2 \int_\pi^{2\pi} \sin^2 t dt = \alpha^2 \frac{\pi}{2}.$$
Знайдемо α, при яких $\mathcal{J}_s(u_*, x_*) > \mathcal{J}_s(\tilde{u}, \tilde{x})$. Для цих α виконується $\alpha^2 \frac{\pi}{2} < 4$. Отже, керування u_* не є оптимальним для допоміжної задачі при $\alpha^2 < \frac{8}{\pi}$.

11.2 Функція Белмана

Розглянемо задачу оптимального керування (11.1)-(11.3). Функція
$$\mathcal{B}(z, s) = \inf_u \left\{ \int_s^T f_0(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(T)) \right\}, \tag{11.9}$$
що визначена на розв'язках системи (11.2) при початковій умові $x(s) = z$, називається *функцією Белмана* задачі (11.1)-(11.3). Тут $z \in X(s)$, $x(\cdot)$ – розв'язок системи (11.2) при допустимому керуванні $u(t) \in \mathcal{U}(t)$, $x(t) \in X(t)$, $t \in [s, T]$, інфінум в правій частині співвідношення (11.9) береться за допустимими керуваннями при $t \in [s, T]$.

За означенням функції Белмана $\mathcal{B}(x_0, t_0)$ дорівнює оптимальному значенню функціоналу (11.1) для задачі (11.1)-(11.3) з фіксованим лівим кінцем $x(t_0) = x_0$.

Виходячи з означення функції Белмана (11.9) та властивостей інтеграла, отримуємо
$$\mathcal{B}(z, t) = \inf_u \left\{ \int_t^T f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(T)) \right\} =$$
$$= \int_t^T f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x_*(T)) =$$
$$= \int_t^{t+\Delta t} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^T f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x_*(T)).$$

Тут Δt – довільне число, таке, що $t + \Delta t < T$, $(x_*(t), u_*(t))$ – розв'язок задачі (11.1)-(11.3). Згідно принципу оптимальності Белмана маємо рівність

$$\int_{t+\Delta t}^{T} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x_*(T)) = \mathcal{B}(x_*(t+\Delta t), t+\Delta t).$$

На довільній допустимій парі $(x(t), u(t))$ має місце нерівність

$$\mathcal{B}(z,t) \leq \int_{t}^{T} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi(x(T)).$$

У такий спосіб

$$\mathcal{B}(z,t) = \inf_u \left\{ \int_{t}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \mathcal{B}(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\}. \quad (11.10)$$

Точна нижня межа в правій частині (11.10) береться за допустимими на відрізку $t \in [t, t+\Delta t]$ керуваннями. Рівняння (11.10) називається *рівнянням Белмана в інтегральній формі.* За його допомогою будуються методи, аналогічні алгоритму динамічного програмування для дискретних систем.

11.3 Алгоритм методу динамічного програмування для неперервних систем

Алгоритм складається з двох частин: прямого ходу і зворотного ходу методу. Спочатку виконується зворотній хід методу. Він полягає у тому, що на часовій сітці у напрямку від T до t_0 для кожної допустимої точки z розв'язується рівняння (11.10). Цим самим знаходиться синтезуюча функція керування. На прямому ході оптимальне керування „збирається" у напрямку від t_0 до T за допомогою системи (11.2), умови Коші $x(t_0) = x_0$ з використанням побудованої на першому етапі алгоритму синтезуючої функції керування.

Алгоритм 11.1. *Розіб'ємо відрізок $[t_0, T]$ сіткою $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$ з деяким кроком h. Позначимо $X_i = X(t_i)$, $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}(t_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., N$.*

Зворотній хід методу.

Крок 1. Для будь-якого $z \in X_{N-1}$ розв'язуємо задачу

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{N-1}} \left\{ \int_{t_{N-1}}^{T} f_0(x(\tau), v, \tau) d\tau + \Phi(x(T)) \right\}, \ x(t_N) \in X_N.$$

Тут $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), v, t)$, $x(t_{N-1}) = z$, $t \in [t_{N-1}, T]$. *Знаходимо оптимальну функцію керування*
$$u_* = u_*(z, t_{N-1}),$$
відповідний розв'язок $x_*(t)$ *системи* (11.2), $t \in [t_{N-1}, T]$ *та*

$$\mathcal{B}(z, t_{N-1}) = \int_{t_{N-1}}^{T} f_0(x_*(\tau), u_*, \tau) d\tau + \Phi(x_*(T)).$$

Крок 2. Розв'язуємо для $z \in X_{N-2}$ *задачу*

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{N-2}} \left\{ \int_{t_{N-2}}^{t_{N-1}} f_0(x(\tau), v, \tau) d\tau + \mathcal{B}(x(t_{N-1}), t_{N-1}) \right\},$$

$x(t_{N-1}) \in X_{N-1}$. *Тут* $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), v, t)$, $x(t_{N-2}) = z$, $t \in [t_{N-2}, t_{N-1}]$. *Знаходимо*
$$u_* = u_*(z, t_{N-2}),$$
відповідний розв'язок $x_*(t)$ *системи* (11.2), $t \in [t_{N-2}, t_{N-1}]$ *та*

$$\mathcal{B}(z, t_{N-2}) = \int_{t_{N-2}}^{t_{N-1}} f_0(x_*(\tau), u_*, \tau) d\tau + \mathcal{B}(x_*(t_{N-1}), t_{N-1}).$$

Продовжуємо аналогічно процедуру обчислень, доки не прийдемо до наступної задачі.

Крок 3. Для $z \in X_0$ *розв'язуємо аналогічно до попередніх кроків задачу*
$$\mathcal{B}(z, t_0) = \inf_{v \in \mathcal{U}_0} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), v, \tau) d\tau + \mathcal{B}(x(t_1), t_1) \right\}$$
$$x(t_1) \in X_1,$$
$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), v, t), \; x(t_0) = z, \; t \in [t_0, t_1]. \tag{11.11}$$
Якщо початкова умова задачі (11.1)-(11.3) *є фіксованою, а саме* $x(t_0) = x_0$, *то в* (11.6) $z = x_0$. *Знаходимо*

$$u_* = u_*(z, t_0)$$

та запам'ятовуємо $\mathcal{B}(z, t_0)$ *для кожного* $z \in X_0$.

Прямий хід методу.

Крок 4. Якщо точка $x(t_0)$ *не є фіксованою, то знаходимо*

$$x_0 = \arg \min_{x \in X_0} \mathcal{B}(z, t_0).$$

Обчислюємо $u_* = u_*(x_0, t_0)$, *підставивши* x_0 *в знайдену на зворотному ході функцію* $u_*(x, t_0)$. *Далі, розв'язуючи задачу Коші*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u_*, t), x(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, t_1],$$

визначаємо $x_*(t_1)$. *Підставляємо* $x_*(t_1)$ *у функцію керування* $u_*(x, t_1)$ *і знаходимо* $u_* = u_*(x_*(t_1), t_0)$. *Далі знову розв'язуємо задачу Коші*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u_*, t), x(t_1) = x_*(t_1),\ t \in [t_1, t_2]$$

і отримуємо $x_*(t_2)$ *і т.д. поки не визначимо* $x_*(t_N)$. *Так, знаходимо дві послідовності* $x_*(t_k)$, $u_* = u_*(x_*(t_k), t_k)$, $k = 0, 1, 2, ..., N$, *що апроксимують оптимальний розв'язок задачі* (11.1)-(11.3) *на часовій сітці* $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$. *Опис алгоритму методу динамічного програмування закінчено.*

11.4 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана

Припустимо, що функція Белмана (11.9) є неперервно диференційованою, $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$, $f(x, u, t)$ є неперервними за своїми змінними функціями. Розглянемо інтегральне рівняння Белмана (11.10). При зроблених припущеннях, враховуючи, що $x(t) = z$ і має місце неперервна залежність розв'язку системи (11.2) від часової змінної, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x(t+\Delta t), t+\Delta t) = \mathcal{B}(z, t) + \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t}\Delta t + \\ + \langle grad_z \mathcal{B}(z,t), x(t+\Delta t) - z\rangle + o(\Delta t). \end{aligned} \tag{11.12}$$

З (11.10) і (11.12) випливає

$$\mathcal{B}(z, t) = \inf_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \right.$$
$$\left. + \mathcal{B}(z,t) + \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t}\Delta t + \langle grad_z \mathcal{B}(z,t), x(t+\Delta t) - z\rangle + o(\Delta t) \right\}.$$

Звідси, скоротивши $\mathcal{B}(z, t)$ і поділивши останній вираз на $\Delta t > 0$, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + \inf_u \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \left\langle grad_z \mathcal{B}(z,t), \frac{x(t+\Delta t) - z}{\Delta t} \right\rangle + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right\} = 0. \end{aligned} \tag{11.13}$$

Враховуємо, що $\frac{x(t+\Delta t)-z}{\Delta t} \to \frac{dx(t)}{dt}$, $x(t) = z$, $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Позначимо

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau.$$

Так як

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{t_0}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[G(t+\Delta t) - G(t)\right] \to \frac{d}{dt}G(t)$$

при $\Delta t \to 0$ і $\frac{dG(t)}{dt} = f_0(z, u(t), t)$, то

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau \to f_0(z, u(t), t), \Delta t \to 0.$$

Таким способом, з (11.13) отримаємо

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + \inf_{u\in\mathcal{U}(t)}\left\{\left\langle grad_z\mathcal{B}(z,t), \frac{dx(t)}{dt}\right\rangle + f_0(z,u,t)\right\} = 0.$$

Так як

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u, t),\ \ x(t) = z,$$

то

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + \inf_{u\in\mathcal{U}(t)}\left\{\langle grad_z\mathcal{B}(z,t), f(z,u,t)\rangle + f_0(z,u,t)\right\} = 0. \tag{11.14}$$

З означення функції Белмана випливає, що при $t = T$ виконується

$$\mathcal{B}(z, T) = \Phi(z). \tag{11.15}$$

Рівняння (11.14) називається *диференціальним рівнянням Гамільтона-Якобі-Белмана* задачі оптимального керування (11.1)-(11.3).

Приклад 11.2. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації функціоналу

$$\mathcal{I}(u, x) = \int_0^T u^2(t)dt + x^2(T),$$

де
$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t) + u(t), \ x(0) = x_0.$$
Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$ – функція керування, $a : [0,T] \to \mathbb{R}^1$ – неперервна функція, $t \in [0,T]$, точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ є заданою. Рівняння (11.14) має вигляд
$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + \inf_u \left\{ \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} (a(t)z + u) + u^2 \right\} = 0. \tag{11.16}$$
Позначимо
$$\mathcal{H}(z,u,t) = \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} (a(t)z + u) + u^2.$$
Запишемо необхідну умову екстремуму
$$\frac{\partial \mathcal{H}(z,u,t)}{\partial u} = 0,$$
з якої випливає
$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z}. \tag{11.17}$$
Підставляючи (11.17) в (11.16), отримумуємо нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних для знаходження функції Белмана
$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} + a(t)z \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} \right)^2 = 0. \tag{11.18}$$
При цьому умова (11.15) дає $\mathcal{B}(z,T) = z^2$. Розв'язок (11.18) шукаємо у вигляді
$$\mathcal{B}(z,t) = b(t)z^2,$$
де $b(\cdot)$ – абсолютно неперервна скалярна функція. Оскільки
$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial t} = b'(t)z^2, \ \frac{\partial \mathcal{B}(z,t)}{\partial z} = 2b(t)z,$$
то для знаходження $b(\cdot)$ з (11.18) одержуємо диференціальне рівняння Бернуллі
$$b'(t) + 2a(t)b(t) - b^2(t) = 0, \ b(T) = 1.$$
З (11.17) випливає, що оптимальне керування має вигляд
$$u_*(x(t),t) = -b(t)x(t),$$
при цьому оптимальне значення критерію якості
$$\mathcal{I}_* = b(0)x_0^2.$$

Втім, диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана не завжди вдається розв'язати подібним способом.

Приклад 11.3. Розглянемо задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації критерію якості

$$\mathcal{I}(u, x_1, x_2) = \int_0^T \left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right) dt,$$

де

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)u_1(t) + x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = u_2(t). \end{cases}$$

Тут $(x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат, $(u_1, u_2)^*$ – вектор керування, $|u_1(t)| \leq 1$, $|u_2(t)| \leq 1$, $t \in [0, T]$, $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, де точка $(x_1^0, x_2^0)^*$ задана. Рівняння (11.14) має вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial t} + \\ &+ \inf_{|u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1} \left\{ \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1} (z_1 u_1 + z_2) + \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_2} u_2 \right\} = 0, \\ &\mathcal{B}(z_1, z_2, T) = 0. \end{aligned} \tag{11.19}$$

Позначимо

$$\mathcal{H}(z_1, z_2, u_1, u_2, t) = \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1} (z_1 u_1 + z_2) + \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_2} u_2.$$

Мінімум функції $\mathcal{H}(z_1, z_2, u_1, u_2, t)$ за умов $|u_1| \leq 1$, $|u_2| \leq 1$ досягається в точках

$$\begin{aligned} u_1 &= -sign\left(z_1 \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1}\right), \\ u_2 &= -sign\left(\frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_2}\right). \end{aligned} \tag{11.20}$$

Підставляючи (11.20) в (11.19), отримуємо нелінійне диференціальне рівняння вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial t} + z_2 \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1} - \left| z_1 \frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_1} \right| - \left(\frac{\partial \mathcal{B}(z_1, z_2, t)}{\partial z_2} \right)^2 = 0, \\ &\mathcal{B}(z_1, z_2, T) = 0. \end{aligned} \tag{11.21}$$

Рівняння (11.21) потребує додаткових досліджень з використанням апарату в'язкісних або мінімаксних розв'язків [39, 49].

Приклад 11.4. Умова неперервної диференційованості функції Белмана не виконується в загальному. Розглянемо задачу оптимального керування

$$\mathcal{I}(u, x) = \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf,$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),$$

де $|u(t)| \le 1$, $t \in [0, T]$, $x(0) = x_0$. За означенням функції Белмана

$$\mathcal{B}(z, s) = \frac{1}{2}\inf_u x^2(T),$$

де

$$\frac{dx}{dt} = u,\ t \in [s, T]\,,\ x(s) = z.$$

Знайдемо функцію Белмана за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Функція Гамільтона-Понтрягіна має вигляд

$$\mathcal{H}(x, u, \psi, t) = \psi u.$$

З принципу максимуму виплиє, що $u_*(t) = sign\psi(t)$, $t \in [s, T]$. Спряжена система має вигляд

$$\frac{d\psi}{dt} = 0,\ \psi(T) = -x(T).$$

Звідси $\psi(t) = -x(T)$ і $u_*(t) = -sign\,(x(T))$, $t \in [s, T]$. Отже, оптимальне керування є постійною величиною і $u_* = u_*(t) = 1$ або $u_* = u_*(t) = -1$. З

$$\frac{dx}{dt} = u,\ x(s) = z$$

випливає, що $x(T, u_*) = z + u_*(T - s)$. При $u_* = 1$ маємо $x(T, 1) = z + (T - s)$, а при $u_* = -1$ одержуємо $x(T, -1) = z - (T - s)$. Тоді

$$x^2(T, 1) - x^2(T, -1) = 4z(T - s).$$

Це означає, що якщо $z > 0$, то

$$\frac{1}{2}x^2(T, 1) - \frac{1}{2}x^2(T, -1) > 0$$

і тому $u_* = -1$. У випадку $z < 0$ одержуємо

$$\frac{1}{2}x^2(T, 1) - \frac{1}{2}x^2(T, -1) < 0,$$

а тому $u_* = 1$.

У такий спосіб, при $z > 0$ функція Белмана має вигляд

$$\mathcal{B}(z,s) = \frac{1}{2}\left(z - (T-s)\right)^2 = \frac{z^2}{2} + \frac{(T-s)^2}{2} + z(s-T).$$

Якщо $z < 0$, то

$$\mathcal{B}(z,s) = \frac{1}{2}\left(z + (T-s)\right)^2 = \frac{z^2}{2} + \frac{(T-s)^2}{2} - z(s-T).$$

Отже, функція Белмана має вигляд

$$\mathcal{B}(z,s) = \frac{z^2}{2} + \frac{(T-s)^2}{2} + |z|\,(s-T) = \frac{1}{2}\left(|z| + s - T\right)^2.$$

Вона є недиференційованою в точці $z = 0$.

Має місце така теорема.

Теорема 11.2 (достатні умови оптимальності)**.** *Нехай $\mathcal{B}(z,t)$ є неперервно диференційованим розв'язком рівняння (11.14) з граничною умовою (11.15), при цьому керування $u_*(z,t)$, яке знайдене з умови*

$$\begin{aligned} &\langle grad_z \mathcal{B}(z,t), f(z, u_*(z,t), t)\rangle + f_0(z, u_*(z,t), t) = \\ &= \inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \left\{ \langle grad_z \mathcal{B}(z,t), f(z,u,t)\rangle + f_0(z,u,t) \right\}, \end{aligned} \tag{11.22}$$

породжує при $z = x$ єдиний розв'язок $x_*(\cdot)$ системи (11.2) і керування $u_*(t) = u_*(x_*(t), t)$ є допустимим. Тоді $u_*(x,t)$ є оптимальним керуванням задачі (11.1)-(11.3) з фіксованим лівим кінцем $x(t_0) = x_0$.

Доведення. Оскільки при $x = z$ функція $u_*(x,t)$ є розв'язком задачі (11.22) і для $\mathcal{B}(z,t)$ має місце (11.14), то

$$\frac{\partial \mathcal{B}(x,t)}{\partial t} + \langle grad_x \mathcal{B}(x,t), f(x, u_*(x,t), t)\rangle + f_0(x, u_*(x,t), t) = 0.$$

Оскільки

$$\frac{\partial \mathcal{B}(x,t)}{\partial t} + \langle grad_x \mathcal{B}(x,t), f(x, u_*(x,t), t)\rangle = \frac{d\mathcal{B}(x,t)}{dt}$$

є похідною від функції Белмана в силу системи (11.2), то

$$\frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt} + f_0(x_*(t), u_*(t), t) = 0.$$

Інтегруємо останню рівність від t_0 до T. Одержуємо

$$\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt}dt = -\int_{t_0}^{T} f_0(x_*(t),u_*(t),t)dt.$$

Оскільки $x_*(t_0) = x_0$, то

$$\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt}dt = \mathcal{B}(x_*(T),T) - \mathcal{B}(x_*(t_0),t_0) =$$
$$= \Phi(x_*(T)) - \mathcal{B}(x_*(t_0),t_0) = \Phi(x_*(T)) - \mathcal{B}(x_0,t_0).$$

З останніх двох рівностей маємо

$$\mathcal{B}(x_0,t_0) = \int_{t_0}^{T} f_0(x_*(t),u_*(t),t)dt + \Phi(x_*(T)).$$

Отже, $\mathcal{B}(x_0,t_0) = \mathcal{I}(u_*,x_*)$.

Візьмемо тепер довільну допустиму пару $(u(\cdot),x(\cdot))$. В силу означення керування $u_*(x,t)$ ми маємо

$$\frac{d\mathcal{B}(x(t),t)}{dt} + f_0(x(t),u(t),t) \geq \frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt} + f_0(x_*(t),u_*(t),t) = 0.$$

Інтегруючи нерівність

$$\frac{d\mathcal{B}(x(t),t)}{dt} + f_0(x(t),u(t),t) \geq 0$$

від t_0 до T, одержуємо

$$\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{B}(x(t),t)}{dt}dt \geq -\int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt.$$

Звідси, враховуючи, що

$$\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{B}(x_*(t),t)}{dt}dt = \Phi(x(T)) - \mathcal{B}(x(t_0),t_0),$$

отримуємо

$$\int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(T)) \geq \mathcal{B}(x(t_0),t_0) = \mathcal{B}(x_0,t_0).$$

Отже, $\mathcal{I}(u,x) \geq \mathcal{B}(x_0,t_0) = \mathcal{I}(u_*,x_*)$. $\square$

11.5 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для задачі керування з вільним часом

Припустимо, що задана система керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \tag{11.23}$$

де $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $f(x, u)$ – n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умови існування, єдиності і продовжуваності розв'язку задачі Коші. Керування розглядається в класі кусково неперервних функцій, що належать в кожен момент часу t замкненій обмеженій множині $\mathcal{U}(t) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Задача полягає у тому, щоб перевести систему (11.23) з заданої точки $x(0) = x_0$ в фіксоване положення $x(T) = x_T$ і мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}(u, x, T) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t))dt. \tag{11.24}$$

Тут $f_0(x, u)$ – неперервна обмежена функція, T – невідомий момент часу, який є параметром оптимізації. Для функції Белмана справджується рівність

$$\mathcal{B}(x_0) = \inf_u \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t))dt,$$

де мінімум береться за допустимими керуваннями. Згідно принципу оптимальності Белмана

$$\mathcal{B}(x_0) = \inf_u \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_0(x(t), u(t))dt + \mathcal{B}(x(t_0 + \Delta t)) \right\}. \tag{11.25}$$

Тут Δt – довільне додатне число, таке, що $t_0 + \Delta t < T$. Оскільки для системи (11.23) має місце неперервна залежність розв'язку за часовою змінною, то

$$x(t_0 + \Delta t) - x_0 = f(x_0, u(t_0))\Delta t + o(\Delta t), \ \ \Delta t \to 0.$$

Припускаючи, що функція Белмана є неперервно диференційованою, одержуємо

$$\mathcal{B}(x(t_0 + \Delta t), t) = \mathcal{B}(x_0) +$$
$$+ \langle grad_x \mathcal{B}(x_0), x(t_0 + \Delta t) - x_0 \rangle + o(\Delta t).$$

Підставляючи останні два вирази в (11.25) і ділячи отримане на Δt, маємо

$$\inf_u \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f_0(x(t), u(t))dt + \right.$$

$$\left. + \langle grad_x \mathcal{B}(x_0), f(x_0, u(t_0)) \rangle + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right\} = 0, \ \Delta t \to 0.$$

Переходячи до границі в останньому співвідношенні, отримуємо рівність

$$\inf_u \{ f_0(x_0, u(t_0)) + \langle grad_x \mathcal{B}(x_0), f(x_0, u(t_0)) \rangle \} = 0.$$

Підставляючи замість x_0 довільну точку z, а замість t_0 довільне значення часової змінної t, одержуємо

$$\begin{aligned} &\inf_{u \in U(t)} \{ f_0(z, u) + \langle grad_z \mathcal{B}(z), f(z, u) \rangle \} = 0, \\ &\mathcal{B}(z) = 0, \ t = T, \ z = x_T. \end{aligned} \tag{11.26}$$

Співвідношення (11.26) називається диференціальним рівнянням Гамільтона-Якобі-Белмана задачі (11.23)-(11.24).

Якщо ставиться задача про переведення системи (11.23) з заданої точки $x(0) = x_0$ в фіксоване положення $x(T) = x_T$ за мінімально можливий час, то тоді диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для задачі швидкодії має вигляд

$$\begin{aligned} &\inf_{u \in \mathcal{U}(t)} \langle grad_z \mathcal{B}(z), f(z, u) \rangle = -1, \\ &\mathcal{B}(z) = 0, \ t = T, \ z = x_T. \end{aligned} \tag{11.27}$$

Рівняння (11.27) випливає з рівняння (11.26) при $f_0(z, u) = 1$.

11.6 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним функціоналом

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t) \tag{11.28}$$

за умови

$$x(t_0) = x_0. \tag{11.29}$$

Тут $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $A(t)$ – $n \times n$ – матриця з неперервними компонентами, $C(t)$ – $n \times m$-матриця з неперервними компонентами.

Задача оптимального керування системою (11.28) з умовою Коші (11.29) полягає у знаходженні керування $u_*(\cdot)$, яке б мінімізувало квадратичний функціонал

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u, x) = \int_{t_0}^{T} \{\langle N(t)x(t), x(t)\rangle + \langle M(t)u(t), u(t)\rangle\} \, dt + \\ + \langle P_0 x(T), x(T)\rangle . \end{aligned} \tag{11.30}$$

Тут $M(t)$ є додатновизначеною симетричною матрицею, $N(t)$, P_0 є невід'ємновизначеними симетричними матрицями, причому $N(t)$, P_0 – матриці розмірності $n \times n$, $M(t)$ – матриця розмірності $m \times m$ і матриці $N(t)$, $M(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Позначимо за $\mathcal{B}(z, s)$ функцію Белмана і запишемо для задачі (11.28)-(11.30) рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана у диференціальній формі

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}(z, s)}{\partial s} + \min_u \{\langle grad_z \mathcal{B}(z, s), A(s)z + C(s)u\rangle + \\ + \langle N(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle\} = 0, \end{aligned} \tag{11.31}$$

$$\mathcal{B}(z, T) = \langle P_0 z, z\rangle . \tag{11.32}$$

Виходячи з теореми 11.2, розв'яжемо екстремальну задачу

$$\min_u \mathcal{H}(z, u, s), \tag{11.33}$$

де

$$\mathcal{H}(z, u, s) = \langle grad_z \mathcal{B}(z, s), A(s)z + C(s)u\rangle + \langle N(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle .$$

Запишемо необхідну умову екстремуму

$$\frac{\partial \mathcal{H}(z, u, s)}{\partial u} = 0$$

і отримаємо

$$C^*(s)grad_z\mathcal{B}(z,s)+2M(s)u=0.$$

Звідси

$$u_*(s)=-\frac{1}{2}M^{-1}(s)C^*(s)grad_z\mathcal{B}(z,s). \tag{11.34}$$

Підстановка (11.34) у (11.31) дає

$$\frac{\partial\mathcal{B}(z,s)}{\partial s}+\langle A(s)z,grad_z\mathcal{B}(z,s)\rangle-$$
$$-\frac{1}{2}\left\langle C(s)M^{-1}(s)C^*(s)grad_z\mathcal{B}(z,s),grad_z\mathcal{B}(z,s)\right\rangle+\langle N(s)z,z\rangle+$$
$$+\frac{1}{4}\left\langle C(s)(M^{-1}(s))^*M(s)M^{-1}(s)C^*(s)grad_z\mathcal{B}(z,s),grad_z\mathcal{B}(z,s)\right\rangle=0.$$

Зводячи подібні доданки, отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathcal{B}(z,s)}{\partial s}+\langle A(s)z,grad_z\mathcal{B}(z,s)\rangle+\langle N(s)z,z\rangle-\\&-\frac{1}{4}\left\langle C(s)M^{-1}(s)C^*(s)grad_z\mathcal{B}(z,s),grad_z\mathcal{B}(z,s)\right\rangle=0.\end{aligned} \tag{11.35}$$

Функцію Белмана будемо шукати у вигляді квадратичної функції

$$\mathcal{B}(z,s)=\langle P(s)z,z\rangle\,, \tag{11.36}$$

де $P(t)$– $n\times n$ - абсолютно неперервна матриця, яку необхідно визначити. Тоді, враховуючи, що

$$\frac{\partial\mathcal{B}(z,s)}{\partial s}=\left\langle\frac{dP(s)}{ds}z,z\right\rangle,\ grad_z\mathcal{B}(z,s)=(P(s)+P^*(s))z,$$

з (11.35) отримуємо

$$\left\langle\frac{dP(s)}{ds}z,z\right\rangle+\langle P^*(s)A(s)z,z\rangle+\langle P(s)A(s)z,z\rangle+\langle N(s)z,z\rangle-$$
$$-\frac{1}{4}\left\langle (P(s)+P^*(s))z,C(s)M^{-1}(s)C^*(s)(P(s)+P^*(s))z\right\rangle=0.$$

Звідси, враховуючи, що

$$\langle P^*(s)A(s)z,z\rangle=\langle A^*(s)P(s)z,z\rangle\,,$$

маємо

$$\begin{aligned}&\left\langle\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^*(s)P(s)+N(s)-\right.\\&\left.-\frac{1}{4}(P(s)+P^*(s))C(s)M^{-1}(s)C^*(s)(P(s)+P^*(s))z,z\right\rangle=0.\end{aligned} \tag{11.37}$$

Для того, щоб мала місце рівність (11.37), покладаємо

$$\begin{aligned}&\frac{dP(s)}{ds}+P(s)A(s)+A^*(s)P(s)+N(s)-\\&-\frac{1}{4}(P(s)+P^*(s))C(s)M^{-1}(s)C^*(s)(P(s)+P^*(s))=0.\end{aligned} \tag{11.38}$$

З умови (11.32) випливає

$$P(T)=P_0. \tag{11.39}$$

Транспонуючи (11.38) та (11.39), врахувавши, що матриця P_0 є симетрична, маємо

$$\frac{dP^*(s)}{ds}+P^*(s)A(s)+A^*(s)P^*(s)+N(s)-$$
$$-\frac{1}{4}(P(s)+P^*(s))C(s)M^{-1}(s)C^*(s)(P(s)+P^*(s))=0,\ \ P^*(T)=P_0.$$

Порівнявши останні два співвідношення з (11.38) та (11.39), помічаємо, що матриці $P(s)$ і $P^*(s)$ задовольняють одному і тому ж диференціальному рівнянню з однаковими умовами Коші. Тому $P(s)=P^*(s)$. Формули (11.38), (11.39) записуються так

$$\begin{aligned}\frac{dP(s)}{ds}&+P(s)A(s)+A^*(s)P(s)+N(s)-\\&-P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)=0,\end{aligned} \tag{11.40}$$

$$P(T)=P_0. \tag{11.41}$$

Співвідношення (11.40) є *матричним диференціальним рівнянням Ріккаті.* Знайшовши з (11.40), (11.41) матрицю $P(s)$, отримуємо функцію Белмана

$$\mathcal{B}(z,s)=\langle P(s)z,z\rangle\,.$$

При цьому з (11.34) знаходимо оптимальне керування

$$u_*(x(t),t)=-M^{-1}(t)C^*(t)P(t)x(t), \tag{11.42}$$

яке є керуванням з оберненим зв'язком. Використовуючи властивості функції Белмана, отримуємо оптимальне значення функціоналу (11.30)

$$\mathcal{I}_*=\mathcal{I}(u_*,x_*)=\langle P(t_0)x_0,x_0\rangle\,.$$

Алгоритм 11.2. *Задаємо матриці $M(t)$, $N(t)$, P_0, $A(t)$, $C(t)$, $t\in[t_0,T]$, точку x_0.*

Крок 1. Розв'язуємо матричне диференціальне рівняння (11.40), (11.41). Знаходимо матрицю $P(s)$.

Крок 2. Розв'язуємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A(t) - C(t)M^{-1}(t)C^*(t)P(t)]x(t)$$

за умови $x(t_0) = x_0$, яка отримана при підстановці (11.42) в (11.28). Будуємо оптимальну траєкторію $x_*(t)$, оптимальне керування (11.42) і оптимальне значення критерію якості $\mathfrak{I}_* = \langle P(t_0)x_0, x_0\rangle$.

11.7 Оптимальне за швидкодією гасіння кутових швидкостей мікросупутника

Розглянемо динамічну систему вигляду

$$\mathcal{J}\frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) \times \mathcal{J}\omega(t) = u(t), \tag{11.43}$$

де $\times$–знак векторного добутку, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор кутової швидкості мікросупутника, $u = (u_1, u_2, u_3)^*$ – вектор керуючих параметрів, $\mathcal{J} = \mathcal{J}^*$ – додатновизначена матриця розмірності 3×3, яка називається тензором інерції. Задача полягає в тому, щоб мінімізувати час переходу мікросупутника з довільного положення $\omega(0) = \omega_0$ на термінальну множину, що задається нерівністю

$$\|\mathcal{J}\omega\| \le \varepsilon. \tag{11.44}$$

Робимо заміну змінних $p = \mathcal{J}\omega$. Тоді система (11.43) матиме вигляд

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\left(\mathcal{J}^{-1}p(t)\right) \times p(t) + u(t).$$

При цьому $p(0) = p_0$, $p_0 = \mathcal{J}\omega_0$, а обмеження (11.44) зведуться до таких, що задаються нерівністю $\|p\| \le \varepsilon$.

Нехай $T \ge 0$ - перший момент, для якого $p_1^2(T) + p_2^2(T) + p_3^2(T) = \varepsilon^2$. Позначимо функцію Белмана

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(p_1, p_2, p_3),$$

яка вибирається залежною тільки від фазових координат (p_1, p_2, p_3).

Згідно (11.27), рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана запишеться так

$$\inf_{\|u\|\le\rho}\left\{-\left\langle\left(J^{-1}p\right) \times p, grad\mathcal{B}(p)\right\rangle + \langle grad\mathcal{B}(p), u\rangle\right\} = -1, \tag{11.45}$$

при цьому
$$\mathcal{B}(p) = 0 \tag{11.46}$$
в момент $t = T$. Знайдемо
$$\min_{\|u\|\leq\rho} \langle grad\mathcal{B}(p), u\rangle = -\max_{\|u\|\leq\rho} \langle -grad\mathcal{B}(p), u\rangle =$$
$$= -c\left(K_\rho(0), -grad\mathcal{B}(p)\right) = -\rho\left\|grad\mathcal{B}(p)\right\|,$$
причому мінімум досягається в точці
$$u_* = -\rho\frac{grad\mathcal{B}(p)}{\|grad\mathcal{B}(p)\|}. \tag{11.47}$$
Тут $c\left(A,\psi\right) = \sup_{x\in A}\langle x,\psi\rangle$ – опорна функція множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ [10, 35]. Підстановка (11.47) в (11.45) приводить до співвідношення
$$-\left\langle grad\mathcal{B}(p), \left(\mathcal{J}^{-1}p\right) \times p\right\rangle - \rho\left\langle grad\mathcal{B}(p), \frac{grad\mathcal{B}(p)}{\|grad\mathcal{B}(p)\|}\right\rangle = -1.$$
Звідси отримуємо рівняння в частинних похідних
$$\left\langle grad\mathcal{B}(p), \left(\mathcal{J}^{-1}p\right) \times p\right\rangle + \rho\left\|grad\mathcal{B}(p)\right\| = 1. \tag{11.48}$$
Розв'яжемо рівняння (11.48), знайшовши функцію $\mathcal{B}(p)$, яка задовольняє таким умовам
$$\begin{cases}\langle grad\mathcal{B}(p), (\mathcal{J}^{-1}p) \times p\rangle = 0;\\ \rho\left\|grad\mathcal{B}(p)\right\| = 1.\end{cases} \tag{11.49}$$
Перше рівняння системи (11.49) можна записати так
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial p_1} & \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial p_2} & \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial p_3} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{11.50}$$
де $(q_1, q_2, q_3)^* = \mathcal{J}^{-1}p$. Вибираємо функцію Белмана так, щоб
$$grad\mathcal{B}(p) = h(p)p. \tag{11.51}$$
Тут $h(p)$ – деяка скалярна функція, яка підлягає визначенню. Тоді співвідношення (11.50) буде мати місце. Підставляючи (11.51) в друге рівняння системи (11.49), отримаємо
$$h(p) = \frac{1}{\rho\left\|p\right\|}.$$

Звідси
$$grad\mathcal{B}(p) = \frac{p}{\rho \|p\|}. \tag{11.52}$$
З (11.52) випливає
$$\mathcal{B}(p) = \frac{1}{\rho}\left(\|p\| + c\right),$$
де c – довільна стала. Використовуючи умову $p_1^2(T) + p_2^2(T) + p_3^2(T) = \varepsilon^2$ та співвідношення (11.46), знаходимо $c = -\varepsilon$. Отже, функція Белмана має вигляд
$$\mathcal{B}(p) = \frac{1}{\rho}\left(\|p\| - \varepsilon\right). \tag{11.53}$$
Враховуючи (11.47), (11.52) та заміну $p = J\omega$, отримуємо оптимальну функцію керування
$$u_*(\omega) = -\rho\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}. \tag{11.54}$$

Алгоритм 11.3. *Задаємо $\varepsilon > 0$, початкові умови $\omega(0) = \omega_0$, тензор інерції $\mathcal{J}$.*

Крок 1. Якщо $\|\mathcal{J}\omega_0\| < \varepsilon$, то переходимо на кінець алгоритму.

Крок 2. Оцінюємо час перехідного процесу
$$T = \mathcal{B}(p_0) = \frac{1}{\rho}\left(\|p_0\| - \varepsilon\right),$$
де $p_0 = J\omega_0$.

Крок 3. Інтегруємо систему
$$\mathcal{J}\frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) \times \mathcal{J}\omega(t) = u_*(\omega(t)),\ \omega(0) = \omega_0,\ t \in [0, T]$$
де керування
$$u_*(\omega) = -\rho\frac{\mathcal{J}\omega}{\|\mathcal{J}\omega\|}.$$
Знаходимо оптимальний режим $\omega_*(t)$ і оптимальне керування $u_*(t) = u_*(\omega_*(t))$.

Лекція 12

Множина досяжності і функція Белмана

12.1 Принцип оптимальності для задачі оптимального керування з вільним лівим кінцем

Нехай $X(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ – фазові обмеження, $\mathcal{U}(t) \subseteq \mathbb{R}^m$ – обмеження на керування, при цьому множини $X(t)$, $\mathcal{U}(t)$ є замкненими, $t \in [t_0, T]$. Задача оптимального керування полягає в знаходженні точної нижньої грані функціоналу

$$\mathcal{I}(u, x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_0)) \tag{12.1}$$

за умов

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{12.2}$$

$$x(t) \in X(t),\ u(t) \in \mathcal{U}(t),\ t \in [t_0, T]. \tag{12.3}$$

Тут $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – функція керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $f(x, u, t)$ – n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умови існування, єдиності і продовжуваності розв'язку задачі Коші [1], $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$ – неперервні функції. Розв'язком задачі (12.1)-(12.3) є допустима пара (u_*, x_*), яка доставляє значення точної нижньої грані функціоналу (12.1) за умов (12.2)-(12.3). Керування u вибирають, як

[1] наприклад, задовольняє умови теореми Каратеодорі, умову Ліпшиця за фазовою змінною і є квазілінійною [43]

правило, з класу кусково-неперервних функцій, або з класу вимірних функцій.

Розглянемо *допоміжну задачу* до задачі (12.1) -(12.3). Зафіксуємо $s \in (t_0, T)$. Задача полягає в тому. щоб мінімізувати функціонал

$$\mathcal{I}_s(u,x) = \int_{t_0}^{s} f_0(x,u,t)dt + \Phi(x(t_0)) \tag{12.4}$$

при умовах

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t),\;\; x(s) = x_*(s), \tag{12.5}$$

$$x(t) \in X(t),\;\; u(t) \in \mathcal{U}(t),\;\; t \in [t_0, s]. \tag{12.6}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 12.1 (принцип оптимальності Белмана)**.** *Якщо пара* $(\tilde{u}(t), \tilde{x}(t))$ *є розв'язком задачі* (12.4) - (12.6)*, то вона співпадає з розв'язком задачі* (12.1) -(12.3) *на відрізку* $t \in [t_0, s]$*.*

Доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 11.1, стор. 116.

Функція

$$\mathcal{B}(z,s) = \inf_u \left\{ \int_{t_0}^{s} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(t_0)) \right\}, \tag{12.7}$$

що визначена на розв'язках системи (12.2) при початковій умові $x(s) = z$, називається *функцією Белмана* задачі (12.1)-(12.3). Тут $z \in X(s)$, $x(\cdot)$ – розв'язок системи (12.2) при допустимому керуванні $u(t) \in \mathcal{U}(t)$, $x(t) \in X(t)$, $x(s) = z$, $t \in [t_0, s]$, інфінум в правій частині співвідношення (12.7) береться за допустимими керуваннями при $t \in [t_0, s]$.

12.2 Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана

Виходячи з означення функції Белмана (12.4), принципу оптимальності Белмана та властивостей інтеграла, отримуємо

$$\mathcal{B}(x_*(s+\Delta s), s+\Delta s) = \int_{t_0}^{s+\Delta s} f_0(x_*(\tau),u_*(\tau),\tau)d\tau + \Phi(x_*(t_0)) =$$

$$= \int_{t_0}^{s} f_0(x_*(\tau),u_*(\tau),\tau)d\tau + \Phi(x_*(t_0)) + \int_{s}^{s+\Delta s} f_0(x_*(\tau),u_*(\tau),\tau)d\tau =$$

$$= \mathcal{B}(z,s) + \int_{s}^{s+\Delta s} f_0(x_*(\tau),u_*(\tau),\tau)d\tau.$$

Тут Δs – довільне додатне число, таке, що $t_0 < s < s + \Delta s < T$, $(x_*(t), u_*(t))$ – розв'язок задачі (12.1)-(12.3), $x_*(s) = z$. Тому

$$\mathcal{B}(x_*(s + \Delta s), s + \Delta s) - \mathcal{B}(z, s) - \int_s^{s+\Delta s} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau)d\tau = 0. \quad (12.8)$$

За означенням функції Белмана на довільній допустимій парі $(x(t), u(t))$ такій, що $x(s) = z$ маємо

$$\mathcal{B}(x(s + \Delta s), s + \Delta s) \leq \int_{t_0}^{s} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau + \Phi(x(t_0))+$$

$$+\int_s^{s+\Delta s} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau.$$

Тому

$$\mathcal{B}(x(s + \Delta s), s + \Delta s) - \mathcal{B}(z, s) - \int_s^{s+\Delta s} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau \leq 0. \quad (12.9)$$

У такий спосіб

$$\sup_u \left\{ \mathcal{B}(x(s + \Delta s), s + \Delta s) - \mathcal{B}(z, s) - \int_s^{s+\Delta s} f_0(x(\tau), u(\tau), \tau)d\tau \right\} = 0. \quad (12.10)$$

Тут точна верхня межа береться за допустимими керуваннями задачі (12.1)-(12.3) за умови $x(s) = z$. Рівняння (12.10) називається *рівнянням Белмана задачі* (12.1)-(12.3) *в інтегральній формі.*

Припустимо, що функція Белмана (12.4) є диференційованою, $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$, $f(x, u, t)$ є неперервними за своїми змінними функціями. Оскільки

$$\mathcal{B}(x(s + \Delta s), s + \Delta s) = \mathcal{B}(z, s) + \frac{\partial \mathcal{B}(z, s)}{\partial s}\Delta s+$$

$$+\langle grad_z \mathcal{B}(z, s), x(s + \Delta s) - z\rangle + o(\Delta s),$$

$\Delta s \to 0$, то з співвідношення (12.8) випливає

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z, s)}{\partial s}\Delta s + \langle grad_z \mathcal{B}(z, s), x_*(s + \Delta s) - z\rangle -$$

$$-\int_s^{s+\Delta s} f_0(x_*(\tau), u_*(\tau), \tau)d\tau + o(\Delta s) = 0.$$

Поділивши останній вираз на додатне Δs, при $\Delta s \to 0$ отримуємо

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z, s)}{\partial s} + \left\langle grad_z \mathcal{B}(z, s), \frac{dx_*(s)}{ds} \right\rangle - f_0(x_*(s), u_*(s), s) = 0.$$

Так як $\frac{dx_*(s)}{ds} = f(x_*(s), u_*(s), s)$, $x_*(s) = z$, то

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \langle grad_z \mathcal{B}(z,s), f(z, u_*(s), s)\rangle - f_0(z, u_*(s), s) = 0.$$

З (12.9) випливає, що на довільній допустимій парі $(x(t), u(t))$ такій, що $x(s) = z$ маємо

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \langle grad_z \mathcal{B}(z,s), f(z, u(s), s)\rangle - f_0(z, u(s), s) \leq 0.$$

Тому

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \sup_{u \in \mathcal{U}(s)} \left\{\langle grad_z \mathcal{B}(z,s), f(z, u, s)\rangle - f_0(z, u, s)\right\} = 0. \tag{12.11}$$

З означення функції Белмана випливає, що при $t = t_0$ справджується рівність

$$\mathcal{B}(z, t_0) = \Phi(z). \tag{12.12}$$

Співвідношення вигляду (12.11)-(12.12) називається *диференціальним рівнянням Гамільтона-Якобі-Белмана* задачі оптимального керування (12.1)-(12.3).

12.3 Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t), \; t \in [t_0, T], \tag{12.13}$$

за умови

$$x(T) = x_T. \tag{12.14}$$

Тут $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $A(t)$ – $n \times n$ - матриця з неперервними компонентами, $C(t)$ – $n \times m$-матриця з неперервними компонентами.

Задача полягає у знаходженні керування $u_*(\cdot)$, яке б мінімізувало квадратичний функціонал

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(u, x) = &\int_{t_0}^{T} \left\{\langle N(t)x(t), x(t)\rangle + \langle M(t)u(t), u(t)\rangle\right\} dt + \\ &+ \langle P_0 x(t_0), x(t_0)\rangle . \end{aligned} \tag{12.15}$$

Тут $M(t)$ є додатновизначеною симетричною матрицею, $N(t)$, P_0 є невід'ємновизначеними симетричними матрицями, причому $N(t)$, P_0– матриці розмірності $n \times n$, $M(t)$ – матриця розмірності $m \times m$ і матриці $N(t)$, $M(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Позначимо за $\mathcal{B}(z, s)$ функцію Белмана і запишемо для задачі (12.13)-(12.15) рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана у диференціальній формі

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \max_u \{\langle grad_z \mathcal{B}(z,s), A(s)z + C(s)u\rangle - \\ - \{\langle N(s)z, z\rangle + \langle M(s)u, u\rangle\}\} = 0, \tag{12.16}$$

$$\mathcal{B}(z, t_0) = \langle P_0 z, z\rangle \,. \tag{12.17}$$

Задача (12.16), (12.17) розв'язується аналогічно до знаходження розв'язку рівняння (11.31), (11.32) (стор. 130). У такий спосіб функція Белмана має вигляд

$$\mathcal{B}(z, s) = \langle P(s)z, z\rangle \,,$$

де $P(s)$ – $n \times n$ - неперервно диференційована матриця, яка задовольняє *матричне диференціальне рівняння Ріккаті*

$$\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) + \\ + P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = N(s), \tag{12.18}$$

$$P(t_0) = P_0, \tag{12.19}$$

оптимальне керування

$$u_*(x(t), t) = M^{-1}(t)C^*(t)P(t)x(t),$$

оптимальне значення функціоналу (12.15) $\mathcal{I}_* = \langle P(T)x_T, x_T\rangle$.

12.4 Зв'язок між функцією Белмана і множиною досяжності

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{12.20}$$

за обмежень

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \Phi(x(t_0)) \le r^2, \\ x(t)\in X(t),\ u(t)\in \mathcal{U}(t),\ t\in[t_0,T],\end{gathered} \tag{12.21}$$

за аналогічних умов до тих, що накладались на відповідні функції задачі (12.1)-(12.3) (стор. 136). Крім того, вважаємо, що функції $f_0(x,u,t)$, $\Phi(x)$ є невід'ємними, $r > 0$.

Означення 12.1. *Множиною досяжності* системи (12.20) за обмежень (12.21) називають сукупність точок $z \in \mathbb{R}^n$, для яких існує точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, допустиме керування $u(\cdot)$ і відповідний розв'язок $x(\cdot) = x(\cdot,u,x_0,t_0)$ системи (12.20) такі, що виконуються обмеження (12.21) і точка

$$z = x(t,u,x_0,t_0).$$

Множину досяжності позначимо $\mathcal{X}(t)$, $t\in[t_0,T]$.

Припустимо, що має розв'язок задача оптимального керування

$$\mathcal{I}(u,x) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(t_0)) \to \inf \tag{12.22}$$

за обмежень

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t), \tag{12.23}$$

$$x(t)\in X(t),\ u(t)\in\mathcal{U}(t),\ t\in[t_0,T]. \tag{12.24}$$

Має місце таке твердження.

Теорема 12.2 (про множину досяжності)**.** *Множина досяжності*

$$\mathcal{X}(s) = \left\{z\in\mathbb{R}^n : \mathcal{B}(z,s)\le r^2\right\},$$

де $\mathcal{B}(z,s)$ *– функція Белмана задачі* (12.22)-(12.24).

Доведення. Необхідність. Нехай $z\in\mathcal{X}(s)$, де $s\in[t_0,T]$. Тоді існує допустиме керування і траєкторія системи (12.20), для яких має місце (12.21) для $t\in[t_0,s]$. Отже, $\mathcal{I}_s(u,x)\le r^2$ при $x(s)=z$, де

$$\mathcal{I}_s(u,x) = \int_{t_0}^{s} f_0(x(t),u(t),t)dt + \Phi(x(t_0)).$$

Тому

$$\mathcal{B}(z,s) = \inf_{(u,x)} \mathcal{I}_s(u,x) \le r^2,$$

де точна нижня грань береться за допустимими керуваннями і траєкторіями системи (12.20).

Достатність. Нехай $\mathcal{B}(z,s) \leq r^2$. Оскільки існує розв'язок (u_*, x_*) задачі (12.22)-(12.24), то за умов (12.24) і при $x_*(s) = z$ маємо

$$\mathcal{B}(z,s) = \inf_{(u,x)} \mathcal{I}_s(u,x) = \int_{t_0}^{s} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt + \Phi(x_*(t_0)) \leq r^2.$$

За означенням множини досяжності системи (12.20) за обмежень (12.21) маємо $z \in \mathcal{X}(s)$. □

Приклад 12.1. Розглянемо лінійну систему вигляду (12.13)

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t),$$

з обмеженням

$$\int_{t_0}^{t} \left\{ \langle N(s)x(s), x(s)\rangle + \langle M(s)u(s), u(s)\rangle \right\} ds + \langle P_0 x(t_0), x(t_0)\rangle \leq r^2,$$

де $A(t)$, $C(t)$, $M(t)$, $N(t)$, P_0 – матриці, що задовільняють умови, аналогічні до умов задачі (12.13)-(12.15) (стор. 139), $t \in [t_0, T]$. За теоремою 12.2 множина досяжності системи має форму еліпсоїда

$$\mathcal{X}(t) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle P(t)z, z\rangle \leq r^2 \right\},$$

де матриця $P(t)$ задовольняє матричне рівняння Ріккаті (12.18), (12.19).

12.5 Множина досяжності лінійної системи керування при квадратичних обмеженнях

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t), \ t \in [t_0, T], \tag{12.25}$$

Тут $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $x = (x_1, ..., x_n)^*$– вектор фазових координат, $A(t)$ – $n \times n$ - матриця з неперервними компонентами, $C(t)$– $n \times m$-матриця з неперервними компонентами.

Припустимо, що задані обмеження вигляду

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} \{\langle N(\tau)\left(G(\tau)x(t)-y(\tau)\right), G(\tau)x(\tau)-y(\tau)\rangle + \\
&+\langle M(\tau)\left(u(\tau)-v(\tau)\right), u(\tau)-v(\tau)\rangle\} \, d\tau + \\
&+\langle P_0\left(x(t_0)-x_0\right), x(t_0)-x_0\rangle \le r^2.
\end{aligned} \tag{12.26}$$

Тут $M(t)$ є додатновизначеною симетричною матрицею розмірності $m \times m$, $N(t)$, P_0 є невід'ємновизначеними симетричними матрицями розмірностей $k \times k$ і $n \times n$ відповідно. Матриця $G(t)$ має розмірність $k \times n$. Матриці $N(t)$, $M(t)$ і $G(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Функції $v(t) = (v_1(t), ..., v_m(t))^*$, $y(t) = (y_1(t), ..., y_k(t))^*$ є інтегрованими з квадратом на $[t_0, T]$, точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ є заданою.

Задача полягає у побудові множини досяжності $\mathcal{X}(t)$ системи (12.25) за обмежень (12.26) при $t \in [t_0, T]$. Роз'язування цієї задачі грунтується на теоремі 12.2.

12.5.1 Побудова функції Белмана

Знайдемо функцію Белмана $\mathcal{B}(z, s)$ такої задачі оптимального керування: мінімізувати квадратичний функціонал

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(u, x) = &\int_{t_0}^{T} \{\langle N(\tau)\left(G(\tau)x(\tau)-y(\tau)\right), G(\tau)x(\tau)-y(\tau)\rangle + \\
&+\langle M(\tau)\left(u(\tau)-v(\tau)\right), u(\tau)-v(\tau)\rangle\} \, d\tau + \\
&+\langle P_0\left(x(t_0)-x_0\right), x(t_0)-x_0\rangle .
\end{aligned} \tag{12.27}$$

на розв'язках системи керування (12.25), $x(T) = x_T$, $x_T \in \mathbb{R}^n$.

Запишемо для задачі (12.25), (12.27) рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана у диференціальній формі

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{B}(z, s)}{\partial s} &+ \max_u \{\langle grad_z \mathcal{B}(z, s), A(s)z + C(s)u\rangle - \\
&-\langle N(s)\left(G(s)z-y(s)\right), G(s)z-y(s)\rangle + \\
&+\langle M(s)\left(u-v(s)\right), u-v(s)\rangle\} = 0,
\end{aligned} \tag{12.28}$$

$$\mathcal{B}(z, t_0) = \langle P_0\left(z-x_0\right), z-x_0\rangle . \tag{12.29}$$

Розв'яжемо екстремальну задачу

$$\max_u \mathcal{H}(z, u, s) \tag{12.30}$$

де

$$\mathcal{H}(z,u,s) = \langle grad_z \mathcal{B}(z,s), A(s)z + C(s)u\rangle -$$
$$- \langle N(s)\left(G(s)z - y(s)\right), G(s)z - y(s)\rangle + \langle M(s)\left(u - v(s)\right), u - v(s)\rangle .$$

Запишемо необхідні умови екстремуму

$$\frac{\partial \mathcal{H}(z,u,s)}{\partial u} = 0$$

і отримаємо

$$C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s) - 2M(s)(u - v(s)) = 0.$$

Звідси

$$u_* = v(s) + \frac{1}{2} M^{-1}(s) C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s). \qquad (12.31)$$

Підставимо (12.31) у (12.28) і матимемо

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} + \langle A(s)z, grad_z \mathcal{B}(z,s)\rangle + \langle C(s)v(s), grad_z \mathcal{B}(z,s)\rangle +$$
$$+ \frac{1}{4}\left\langle C(s)M^{-1}(s)C^*(s) grad_z \mathcal{B}(z,s), grad_z \mathcal{B}(z,s)\right\rangle -$$
$$- \langle N(s)\left(G(s)z - y(s)\right), G(s)z - y(s)\rangle = 0.$$

Функцію Белмана будемо шукати у вигляді

$$\mathcal{B}(z,s) = \langle P(s)z, z\rangle + \langle q(s), z\rangle + r(s), \qquad (12.32)$$

де $P(s)$– симетрична $n \times n$-матриця, $q(s) = (q_1(s), ..., q_n(s))^*$, $r(s)$ – функції з класу абсолютно неперервних, які необхідно визначити, $s \in [t_0, T]$. Тоді, враховуючи, що

$$\frac{\partial \mathcal{B}(z,s)}{\partial s} = \left\langle \frac{dP(s)}{ds} z, z\right\rangle + \left\langle \frac{dq(s)}{ds}, z\right\rangle + \frac{dr(s)}{ds},$$
$$grad_z \mathcal{B}(z,s) = (P(s) + P^*(s))z + q(s) = 2P(s)z + q(s),$$

з (12.28) отримуємо

$$\left\langle \frac{dP(s)}{ds} z, z\right\rangle + \left\langle \frac{dq(s)}{ds}, z\right\rangle + \frac{dr(s)}{ds} +$$
$$+ \langle P^*(s)z, A(s)z\rangle + \langle P(s)z, A(s)z\rangle + \langle q(s), A(s)z\rangle +$$
$$+2\langle P(s)z, C(s)v(s)\rangle + \langle q(s), C(s)v(s)\rangle +$$
$$+ \left\langle P(s)z, C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)z\right\rangle + \left\langle P(s)z, C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s)\right\rangle +$$
$$+ \frac{1}{4}\left\langle q(s), C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s)\right\rangle - \langle N(s)G(s)z, G(s)z\rangle +$$
$$+2\langle N(s)G(s)z, y(s)\rangle - \langle N(s)y(s), y(s)\rangle = 0.$$

Групуючи відповідні доданки, одержуємо

$$\Big\langle \Big(\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) +$$
$$+ P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) - G^*(s)N(s)G(s) \Big) z, z \Big\rangle +$$
$$+ \Big\langle \frac{dq(s)}{ds} + A^*(s)q(s) + 2P^*(s)C(s)v(s) +$$
$$+ P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s) + 2G^*(s)N(s)y(s), z \Big\rangle +$$
$$+ \frac{dr(s)}{ds} + \langle q(s), C(s)v(s) \rangle +$$
$$+ \frac{1}{4} \left\langle q(s), C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s) \right\rangle - \langle N(s)y(s), y(s) \rangle = 0.$$

Оскільки вектор z є довільним, то маємо таку систему для знаходження $P(s)$, $q(s)$, $r(s)$

$$\begin{aligned} &\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) + \\ &\qquad + P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = G^*(s)N(s)G(s), \end{aligned} \tag{12.33}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dq(s)}{ds} + \left(A^*(s) + P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s) \right) q(s) + \\ &\qquad + 2 \left(P^*(s)C(s)v(s) + G^*(s)N(s)y(s) \right) = 0, \end{aligned} \tag{12.34}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dr(s)}{ds} + \langle q(s), C(s)v(s) \rangle + \\ &+ \frac{1}{4} \left\langle q(s), C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s) \right\rangle - \langle N(s)y(s), y(s) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{12.35}$$

Отже, функція (12.32) є функцією Белмана задачі (12.25), (12.27), де матриця $P(s)$ і функції $q(s)$, $r(s)$ задовольняють (12.33) - (12.35).

12.5.2 Знаходження еліпсоїда, що описує множину досяжності

Представимо функцію Белмана (12.32) вигляду $\mathcal{B}(z,s) = \langle P(s)z, z \rangle + \langle q(s), z \rangle + r(s)$ у такій формі

$$\mathcal{B}(z,s) = \langle Q(s) \left(z - h(s) \right), z - h(s) \rangle + k(s), \tag{12.36}$$

де $Q(s)$– симетрична $n\times n$-матриця, $h(s)=(h_1(s),...,h_n(s))^*$, $k(s)$ – скалярна функція. Тоді

$$\begin{gathered}\mathcal{B}(z,s)=\langle Q(s)\left(z-h(s)\right),z-h(s)\rangle+k(s)=\\ =\langle Q(s)z,z\rangle-2\left\langle Q(s)z,h(s)\right\rangle+\langle Q(s)h(s),h(s)\rangle+k(s)=\\ =\langle P(s)z,z\rangle+\langle q(s),z\rangle+r(s).\end{gathered}$$

Порівнюючи в останній рівності відповідні доданки, одержуємо

$$Q(s)=P(s),q(s)=-2P(s)h(s),r(s)=\langle P(s)h(s),h(s)\rangle+k(s).$$

Знайдемо рівняння для знаходження $h(s)$ і $k(s)$. З $q(s)=-2P(s)h(s)$ випливає

$$h(s)=-\frac{1}{2}P^{-1}(s)q(s).$$

Позначимо $R(s)=P^{-1}(s)$. Оскільки $R(s)P(s)=I$, то

$$\frac{d\left(R(s)P(s)\right)}{ds}=0.$$

Звідси

$$\frac{dR(s)}{ds}P(s)+R(s)\frac{dP(s)}{ds}=0.$$

Далі

$$\frac{dR(s)}{ds}=-R(s)\frac{dP(s)}{ds}P^{-1}(s)=-R(s)\frac{dP(s)}{ds}R(s).$$

Підставляємо в останній вираз (12.33). Одержуємо

$$\begin{gathered}\frac{dR(s)}{ds}=-R(s)\left[G^*(s)N(s)G(s)-P(s)A(s)-\right.\\ \left.-A^*(s)P(s)-P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\right]R(s).\end{gathered}$$

Звідси

$$\begin{aligned}\frac{dR(s)}{ds}&=A(s)R(s)+R(s)A^*(s)+\\ &+C(s)M^{-1}(s)C^*(s)-R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s).\end{aligned}\tag{12.37}$$

Отже, $h(s)=-\frac{1}{2}R(s)q(s)$ і, підставляючи (12.33) і (12.37), отримуємо

$$\begin{gathered}\frac{dh(s)}{ds}=-\frac{1}{2}\frac{dR(s)}{ds}q(s)-\frac{1}{2}R(s)\frac{dq(s)}{ds}=\\ =-\frac{1}{2}\left[A(s)R(s)+R(s)A^*(s)+C(s)M^{-1}(s)C^*(s)-\right.\\ \left.-R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s)\right]q(s)+\\ +\frac{1}{2}R(s)\left[\left(A^*(s)+P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)\right)q(s)+\right.\\ \left.+2\left(P^*(s)C(s)v(s)+G^*(s)N(s)y(s)\right)\right].\end{gathered}$$

Оскільки $q(s) = -2P(s)h(s)$, то з останнього співвідношення випливає

$$\frac{dh(s)}{ds} = \left[A(s)R(s) + R(s)A^*(s) + C(s)M^{-1}(s)C^*(s) - \right.$$
$$\left. - R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s)\right] P(s)h(s) -$$
$$- R(s)\left(A^*(s) + P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)\right) P(s)h(s) +$$
$$+ C(s)v(s) + R(s)G^*(s)N(s)y(s) =$$
$$= A(s)h(s) + R(s)A^*(s)P(s)h(s) +$$
$$+ C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)h(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)h(s) -$$
$$- R(s)A^*(s)P(s)h(s) + P^*(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)h(s) +$$
$$+ C(s)v(s) + R(s)G^*(s)N(s)y(s).$$

Зводячи в останній рівності подібні доданки, отримуємо

$$\frac{dh(s)}{ds} = A(s)h(s) + R(s)G^*(s)N(s)\left(y(s) - G(s)h(s)\right) + C(s)v(s). \quad (12.38)$$

Для $k(s)$ диференціальне рівняння шукаємо з співвідношення

$$k(s) = r(s) - \langle P(s)h(s), h(s)\rangle .$$

Звідси

$$\frac{dk(s)}{ds} = \frac{dr(s)}{ds} - \left\langle \frac{dP(s)}{ds}h(s), h(s)\right\rangle - \left\langle P(s)\frac{dh(s)}{ds}, h(s)\right\rangle -$$
$$- \left\langle P(s)h(s), \frac{dh(s)}{ds}\right\rangle = \frac{dr(s)}{ds} - \left\langle \frac{dP(s)}{ds}h(s), h(s)\right\rangle -$$
$$- \left\langle \frac{dh(s)}{ds}, P^*(s)h(s)\right\rangle - \left\langle P(s)h(s), \frac{dh(s)}{ds}\right\rangle =$$
$$= \frac{dr(s)}{ds} - \left\langle \frac{dP(s)}{ds}h(s), h(s)\right\rangle - 2\left\langle P(s)h(s), \frac{dh(s)}{ds}\right\rangle .$$

Підставляємо (12.35), (12.33) і (12.38) в останню формулу

$$\frac{dk(s)}{ds} = -\langle q(s), C(s)v(s)\rangle -$$
$$-\frac{1}{4}\left\langle q(s), C(s)M^{-1}(s)C^*(s)q(s)\right\rangle + \langle N(s)y(s), y(s)\rangle -$$
$$- \left\langle \left(G^*(s)N(s)G(s) - P(s)A(s) - A^*(s)P(s) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\right) h(s), h(s)\right\rangle -$$
$$-2\left\langle P(s)h(s), A(s)h(s) + R(s)G^*(s)N(s)\left(y(s) - G(s)h(s)\right) + C(s)v(s)\right\rangle .$$

Підставляємо далі $q(s) = -2P(s)h(s)$. Маємо

$$\frac{dk(s)}{ds} = 2\left\langle P(s)h(s), C(s)v(s)\right\rangle - \left\langle P(s)h(s), C(s)M^{-1}(s)C^{*}(s)P(s)h(s)\right\rangle + \\ + \left\langle N(s)y(s), y(s)\right\rangle - \left\langle \left(G^{*}(s)N(s)G(s) - P(s)A(s) - \right.\right. \\ \left.\left. -A^{*}(s)P(s) - P(s)C(s)M^{-1}(s)C^{*}(s)P(s)\right) h(s), h(s)\right\rangle - \\ -2\left\langle P(s)h(s), \left(A(s) - R(s)G^{*}(s)N(s)G(s)\right) h(s)\right\rangle - \\ -2\left\langle P(s)h(s), R(s)G^{*}(s)N(s)y(s) + C(s)v(s)\right\rangle.$$

Групуємо подібні доданки. Отримуємо

$$\frac{dk(s)}{ds} = -\left\langle P^{*}(s)C(s)M^{-1}(s)C^{*}(s)P(s)h(s), h(s)\right\rangle - \\ - \left\langle \left(G^{*}(s)N(s)G(s) - P(s)A(s) - A^{*}(s)P(s) - \right.\right. \\ \left.\left. -P(s)C(s)M^{-1}(s)C^{*}(s)P(s)\right) h(s), h(s)\right\rangle - \\ - \left\langle 2P^{*}(s)\left(A(s) - R(s)G^{*}(s)N(s)G(s)\right) h(s), h(s)\right\rangle + \\ +2\left\langle P^{*}(s)C(s)v(s), h(s)\right\rangle - \\ -2\left\langle P^{*}(s)R(s)G^{*}(s)N(s)y(s) + P^{*}(s)C(s)v(s), h(s)\right\rangle + \left\langle N(s)y(s), y(s)\right\rangle.$$

Враховуємо, що

$$\left\langle \left(P(s)A(s) + A^{*}(s)P(s)\right) h(s), h(s)\right\rangle = \\ = \left\langle P(s)A(s)h(s), h(s)\right\rangle + \left\langle A^{*}(s)P(s)h(s), h(s)\right\rangle = \\ = \left\langle P(s)A(s)h(s), h(s)\right\rangle + \left\langle h(s), P^{*}(s)A(s)h(s)\right\rangle = 2\left\langle P(s)A(s)h(s), h(s)\right\rangle.$$

Таким способом

$$\frac{dk(s)}{ds} = -\left\langle P^{*}(s)C(s)M^{-1}(s)C^{*}(s)P(s)h(s), h(s)\right\rangle - \\ - \left\langle \left(G^{*}(s)N(s)G(s) - 2P(s)A(s) - \right.\right. \\ \left.\left. -P(s)C(s)M^{-1}(s)C^{*}(s)P(s)\right) h(s), h(s)\right\rangle - \\ - \left\langle 2P^{*}(s)\left(A(s) - R(s)G^{*}(s)N(s)G(s)\right) h(s), h(s)\right\rangle + \\ +2\left\langle P^{*}(s)C(s)v(s), h(s)\right\rangle - \\ -2\left\langle P^{*}(s)R(s)G^{*}(s)N(s)y(s) + P^{*}(s)C(s)v(s), h(s)\right\rangle + \left\langle N(s)y(s), y(s)\right\rangle.$$

В перших трьох доданках врахуємо, що

$$-P^{*}(s)C(s)M^{-1}(s)C^{*}(s)P(s) - \\ - \left(G^{*}(s)N(s)G(s) - 2P(s)A(s) - P(s)C(s)M^{-1}(s)C^{*}(s)P(s)\right) - \\ -2P^{*}(s)\left(A(s) - R(s)G^{*}(s)N(s)G(s)\right) = -G^{*}(s)N(s)G(s) + 2P(s)A(s) - \\ -2P^{*}(s)A(s) + 2G^{*}(s)N(s)G(s) = G^{*}(s)N(s)G(s).$$

В четвертому і п'ятому доданках

$$
\begin{gathered}
2\langle P^*(s)C(s)v(s), h(s)\rangle - \\
-2\langle P^*(s)R(s)G^*(s)N(s)y(s) + P^*(s)C(s)v(s), h(s)\rangle = \\
= -2\langle G^*(s)N(s)y(s), h(s)\rangle .
\end{gathered}
$$

Отже,

$$
\begin{gathered}
\frac{dk(s)}{ds} = \langle G^*(s)N(s)G(s)h(s), h(s)\rangle - 2\langle G^*(s)N(s)y(s), h(s)\rangle + \\
+ \langle N(s)y(s), y(s)\rangle = \langle N(s)\left(y(s) - G(s)h(s)\right), y(s) - G(s)h(s)\rangle .
\end{gathered}
$$

Так, для $k(s)$ отримуємо диференціальне рівняння.

$$
\frac{dk(s)}{ds} = \langle N(s)\left(y(s) - G(s)h(s)\right), y(s) - G(s)h(s)\rangle .
$$

Оскільки

$$
\mathcal{B}(z, t_0) = \langle P(t_0)\left(z - h(t_0)\right), z - h(t_0)\rangle + k(t_0) = \langle P_0\left(z - x_0\right), z - x_0\rangle ,
$$

то $P(t_0) = P_0$, $R(t_0) = P_0^{-1}$, $h(t_0) = x_0$, $k(t_0) = 0$.

Таким способом, одержуємо функцію Белмана у вигляді

$$
\mathcal{B}(z, s) = \langle P(s)\left(z - h(s)\right), z - h(s)\rangle + k(s),
$$

де

$$
\begin{aligned}
&\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) + \\
&+ P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = G^*(s)N(s)G(s),\ \ P(t_0) = P_0,
\end{aligned} \tag{12.39}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dh(s)}{ds} = A(s)h(s) + \\
&+ R(s)G^*(s)N(s)\left(y(s) - G(s)h(s)\right) + C(s)v(s),\ \ h(t_0) = x_0,
\end{aligned} \tag{12.40}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dk(s)}{ds} = \langle N(s)\left(y(s) - G(s)h(s)\right), y(s) - G(s)h(s)\rangle , \\
&k(t_0) = 0,\ \ s \in [t_0, T].
\end{aligned} \tag{12.41}
$$

При цьому матрицю $R(s) = P^{-1}(s)$ можна знайти з *матричного рівняння Ріккаті*

$$
\begin{aligned}
&\frac{dR(s)}{ds} = A(s)R(s) + R(s)A^*(s) + \\
&+ C(s)M^{-1}(s)C^*(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s), \\
&R(t_0) = P_0^{-1},\ \ s \in [t_0, T].
\end{aligned} \tag{12.42}
$$

Тоді множина досяжності системи (12.25) за обмежень (12.26) при $t \in [t_0, T]$ має вигляд

$$\mathcal{X}(t) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle P(t)\left(z - h(t)\right), z - h(t)\rangle \leq r^2 - k(t) \right\}. \tag{12.43}$$

Оскільки $R(s) = P^{-1}(s)$, то її можна подати у формі еліпсоїда

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{E}\left(h(t), r^2(t)R(t)\right), \ t \in [t_0, T], \tag{12.44}$$

де $r(t) = \sqrt{r^2 - k(t)}$, $P(t)$, $h(t)$, $k(t)$ задовольняють (12.39)-(12.42). [2]

Зауваження. Ми розв'язали також задачу оптимального керування (12.25), (12.27). Згідно (12.31)

$$u_* = v(s) + \frac{1}{2}M^{-1}(s)C^*(s)grad_z\mathcal{B}(z, s) =$$
$$= v(s) + \frac{1}{2}M^{-1}(s)C^*(s)\left(2P(s)z + q(s)\right).$$

Оскільки $q(s) = -2P(s)h(s)$, то

$$u_* = v(s) + M^{-1}(s)C^*(s)P(s)\left(z - h(s)\right). \tag{12.45}$$

Оскільки в означенні функції Белмана $z = x(s)$, то з (12.45) випливає, що оптимальна функція керування має вигляд

$$u_*(x(s), s) = M^{-1}(s)C^*(s)P(s)x(s) + v(s) + M^{-1}(s)C^*(s)P(s)h(s).$$

Оптимальне значення критерію якості (12.27)

$$\mathcal{I}_* = \mathcal{B}(x_T, T) = \langle P(T)\left(x_T - h(T)\right), x_T - h(T)\rangle + k(T).$$

Приклад 12.2. Побудуємо множину досяжності скалярної системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2}x(t) + u(t), \ t \in [0, 5]$$

за обмежень

$$\int_0^t \left(0.04(x(s) - 1)^2 + 0.25(u(s) - 1)^2\right) ds + x^2(0) \leq 4.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$ – функція керування. Множина досяжності має вигляд

$$\mathcal{X}(t) = \left[h(t) - \sqrt{R(t)(4 - k(t)}, h(t) + \sqrt{R(t)(4 - k(t)}\right],$$

[2] Означення еліпсоїда – в прикладі (17.5)

де

$$\frac{dR(t)}{dt} = R(t) - 0.04R^2(t) + 4,\ \ R(0) = 1,$$
$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{2}h(t) + 0.04R(t)\left(1 - h(t)\right) + 1,\ \ h(0) = 0,$$
$$\frac{dk(t)}{dt} = 0.04\left(1 - h(t)\right)^2,\ \ k(0) = 0,\ \ t \in [0, 5].$$

Лекція 13

Стабілізація системи керування

13.1 Постановка задачі стабілізації

Розглянемо систему керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(x(t), t), t), \tag{13.1}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, ..., u_m)^*$ – вектор керування, що приймає значення з множини $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $0 \in \mathcal{U}$, $f(x, u, t)$ – вектор-функція розмірності n, для якої виконується локальна умова Ліпшиця за x і u, справджується неперервність за t, при цьому $f(0, 0, t) = 0$. Керування системою (13.1) задається в класі керувань з оберненим зв'язком $u = u(x, t)$. Припускається, що $u(0, t) = 0$ і $u(x, t)$ є локально ліпшицевим за x і вимірним за t [1].

Режим $x(t) = 0$, $t \geq t_0$ називається *програмним*. Програмний режим реалізується системою (13.1) при керуванні $u(t) = u(0, t) = 0$. Керування $u(t) = 0$ також називається *програмним*.

Задача *стабілізації програмного режиму* $x(t) = 0$ полягає у тому, щоб знайти керування $u = u(x, t)$ з оберненим зв'язком таке, що забезпечує одну з видів стійкості програмного режиму системи (13.1). Такими видами стійкості програмного режиму є: стійкість, асимптотична стійкість, асимптотична стійкість в цілому, експоненціальна стійкість. При постановці задачі стабілізації потрібно вказувати який вид стійкості забезпечує відповідне керування.

[1] Вказані умови забезпечують виконання умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші (теорема 16.2, стор. 180, теорема 16.3, стор. 180) та існування нульового розв'язку системи 13.1

13.2 Стабілізація стаціонарних систем

Припустимо, що система керування (13.1) є лінійною, тобто має вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Cu(t). \tag{13.2}$$

Тут A – $n \times n$- матриця, C– $n \times m$- матриця, при цьому A, є матрицями з постійними коефіцієнтами, при цьому нульовий розв'язок $x(t) = 0$ є програмним. У цьому випадку розв'язок задачі стабілізації програмного руху може розглядатись у класі керувань з оберненим зв'язком вигляду

$$u(x) = Kx,$$

де K – матриця розмірності $m \times n$ з постійними коефіцієнтами, яку потрібно визначити. Підставимо керування $u(x) = Kx$ в систему (13.2) і отримаємо

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + CK)x(t). \tag{13.3}$$

Один з підходів до визначення матриці K грунтується на відомому критерії Гурвіца. Запишемо для (13.3) характеристичний многочлен

$$P(\lambda) = \det(A + CK - \lambda I)$$

і характеристичне рівняння $P(\lambda) = 0$. Корені цього рівняння позначимо λ_i, $i = 1, 2, ..., n$. Елементи матриці K потрібно вибрати з умови

$$Re\lambda_i < 0, \;\; i = 1, 2, ..., n.$$

Це забезпечить асимптотичну стійкість системи (13.3).

Нехай

$$P(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n, \;\; p_0 > 0.$$

Знайдемо матрицю Гурвіца

$$G(K) = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & \dots & p_n \end{bmatrix}, \;\; p_i = 0, \;\; i > n.$$

Критерій Гурвіца полягає у тому, що корені характеристичного рівняння $Re\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, ..., n$, тоді і тільки тоді, коли головні мінори $\Delta_i(K)$ матриці $G(K)$ є додатними, $i = 1, 2, ..., n$.

Таким способом, щоб побудувати керування, що розв'язує задачу стабілізації, потрібно розглянути матрицю Гурвіца $G(K)$ і підібрати елементи матриці K так, щоб $\Delta_i(K) > 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Приклад 13.1. Розглянемо систему керування вигляду

$$x'''(t) - 2x''(t) + 3x'(t) - 2x(t) = u. \tag{13.4}$$

Побудуємо керування u, який доставляє асимптотичну стійкість нульовому розв'язку цього рівняння. Регулятор виберемо у вигляді

$$u = ax'' + bx' + cx. \tag{13.5}$$

Тоді з (13.4) отримаємо

$$x''' - (2+a)x'' + (3-b)x' - (2+c)x = 0. \tag{13.6}$$

Запишемо для (13.6) матрицю Гурвіца

$$G(a,b,c) = \begin{pmatrix} -(2+a) & 1 & 0 \\ -(2+c) & (3-b) & -(2+a) \\ 0 & 0 & -(2+c) \end{pmatrix}.$$

Підберемо параметри a, b, c згідно критерію Гурвіца так, щоб

$$\Delta_1 = -(2+a) > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -(2+a) & 1 \\ -(2+c) & 3-b \end{vmatrix} > 0, \det G(a,b,c) > 0.$$

Отже, $a < -2$, $\Delta_3 = -\Delta_2(2+c) > 0$. Тому вибираємо $c < -2$. Мінор

$$\Delta_2 = -(2+a)(3-b) + (2+c) > 0,$$

якщо $3 - b > \frac{2+c}{2+a}$ при умові, що $a < -2$. Тому $b < -\frac{2+c}{2+a} + 3$. Отже, отримали такі умови

$$a < -2, \ b < -\frac{2+c}{2+a} + 3, c < -2.$$

Наприклад, можемо взяти $a = -3$, $b = 1$, $c = -3$. Так, керування (13.5) має вигляд

$$u = -3x'' + x' - 3x.$$

Слід зауважити, що при $u = 0$ нульовий розв'язок (13.4) не є стійким. Справді, характеристичний многочлен (13.4) має вигляд

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

і $\lambda = 1$ є коренем характеристичного рівняння.

Інший підхід ґрунтується на другому методі Ляпунова для лінійних стаціонарних систем. Вибираємо функцію Ляпунова

$$\mathcal{V}(x) = \langle Bx, x \rangle ,$$

де B – симетрична додатновизначена матриця розмірності $n \times n$. Зафіксуємо довільну симетричну додатновизначену матрицю H, що має розмірність $n \times n$. Таким чином, для того, щоб нульовий розв'язок системи (13.3) був асимптотично стійким, шукаємо матрицю K так, щоб виконувалось матричне рівняння Ляпунова

$$(A + CK)^* B + B(A + CK) = -H.$$

У такий спосіб підібрана матриця K дозволяє знайти керування $u(x) = Kx$, яке дає розв'язок задачі стабілізації програмного руху системи (13.2)

Припустимо, що $m = 1$ і $K = b \in \mathbb{R}^n$. Має місце теорема.

Теорема 13.1. *Якщо* $\det(b, Ab, ..., A^{n-1}b) \neq 0$, *то існує керування* $u = \langle c, x \rangle$, $c \in \mathbb{R}^n$ *при якому система*

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + bc^*)x(t)$$

має наперед задані корені характеристичного рівняння.

13.3 Стабілізація і метод функцій Ляпунова

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), t) + G(x(t), t)u. \tag{13.7}$$

Тут $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазових координат, $F(x, t)$ – n- вимірна вектор-функція, неперервна за t і локально ліпшицева за x, $G(x, t)$ – $n \times m$-матриця з компонентами, неперервними за t і локально ліпшицевими за x, u – m- вимірний вектор керування, $m \leq n$. Керування u вибирається у класі з оберненим зв'язком, $u = u(x, t)$, $u(0, t) = 0$, $F(0, t) = 0$, $t \geq 0$.

Згідно з прямим методом Ляпунова, будь-яке керування u з оберненим зв'язком, яке задовольняє умові

$$\frac{\partial \mathcal{V}(x, t)}{\partial t} + \langle grad_x \mathcal{V}(x, t), F(x, t) + G(x, t)u(x, t) \rangle = -\mathcal{W}(x, t) \tag{13.8}$$

є стабілізуючим законом керування. Тут $\mathcal{V}(x,t)$, $\mathcal{W}(x,t)$ – додатновизначені функції, при цьому $\mathcal{V}(x,t)$ допускає нескінченно малу вищу границю. Отже, в рамках метода функції Ляпунова розв'язок задачі стабілізації зводиться до побудови множини керувань з оберненим зв'язком, що забезпечують виконання співвідношення (13.8). Так,

$$\begin{aligned} &\langle G^*(x,t)grad_x\mathcal{V}(x,t), u(x,t)\rangle = \\ &= -\mathcal{W}(x,t) - \frac{\partial \mathcal{V}(x,t)}{\partial t} - \langle grad_x\mathcal{V}(x,t), F(x,t)\rangle \,. \end{aligned} \tag{13.9}$$

Подамо функцію керування у вигляді

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t) + u_2(x,t), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases} \tag{13.10}$$

Керування $u_2(x,t)$ вибираємо у вигляді

$$u_2(x,t) = P(x,t)G^*(x,t)grad_x\mathcal{V}(x,t). \tag{13.11}$$

Тут $P(x,t)$ є довільна антисиметрична $m\times m$ - матриця , тобто, $P^*(x,t) = -P(x,t)$. Оскільки $\langle z, P(x,t)z\rangle = 0$ для довільного вектора $z \in \mathbb{R}^m$, то

$$\begin{gathered} \langle G^*(x,t)grad_x\mathcal{V}(x,t), u_2(x,t)\rangle = \\ = \langle G^*(x,t)grad_x\mathcal{V}(x,t), P(x,t)G^*(x,t)grad_x\mathcal{V}(x,t)\rangle = 0. \end{gathered}$$

Керування $u_1(x,t)$ вибирається у вигляді

$$u_1(x,t) = -\lambda(x,t)G^*(x,t)grad_x\mathcal{V}(x,t), \tag{13.12}$$

де $\lambda(x,t)$ – скалярна функція, яку потрібно визначити. Підставимо (13.10)-(13.12) у (13.9). Отримуємо

$$\lambda(x,t) = \frac{\mathcal{W}(x,t) + \frac{\partial \mathcal{V}(x,t)}{\partial t} + \langle grad_x\mathcal{V}(x,t), F(x,t)\rangle}{\|G^*(x,t)grad_x\mathcal{V}(x,t)\|^2}. \tag{13.13}$$

Отже, отримали стабілізуюче керування у формі (13.10).

13.4 Гасіння кутових швидкостей твердого тіла

Математична модель має вигляд системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\omega}{dt} = -J^{-1}(\omega \times J\omega) + J^{-1}u \tag{13.14}$$

де $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^*$ – вектор кутових швидкостей, J – тензор інерції, який є додатно визначеною симетричною матрицею розмірності 3×3, $\times$ – знак векторного добутку, $u = (u_1, u_2, u_3)^*$ – вектор керування (вектор моментів) [37, 45]. Розв'яжемо задачу стабілізації системи (13.14). Для цього виберемо додатновизначену функцію Ляпунова у вигляді

$$\mathcal{V}(\omega) = \|J\omega\|^2 .$$

Розглянемо додатновизначену функцію

$$\mathcal{W}(\omega) = 2\lambda \|J\omega\|^2 ,$$

$\lambda > 0$. Функцію керування $u(\omega)$ підберемо так, що повна похідна функції $\mathcal{V}(\omega)$ в силу системи (13.14) дорівнює $-\mathcal{W}(\omega)$. Градієнт $grad\mathcal{V} = 2J^*J\omega$. Таким чином, повна похідна функції $\mathcal{V}(\omega)$ в силу системи (13.14) дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}(\omega)}{dt} &= \left\langle 2J^*J\omega, -J^{-1}\omega \times J\omega + J^{-1}u \right\rangle = \\ &= -2\left\langle J\omega, \omega \times J\omega \right\rangle + 2\left\langle J\omega, u \right\rangle . \end{aligned}$$

Згідно з властивостями векторного добутку $\langle J\omega, \omega \times J\omega \rangle = 0$. Виходячи з вигляду $\mathcal{W}(\omega)$, функцію керування $u(\omega)$ підбераємо з рівності

$$2\left\langle J\omega, u \right\rangle = -2\lambda \|J\omega\|^2 .$$

Представляємо $u(\omega)$ у вигляді

$$u(\omega) = u_1(\omega) + u_2(\omega),$$

де $u_1(\omega) = -\lambda J\omega$, $u_2(\omega) = P(\omega)J\omega$,

$$P(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ -p_{12} & 0 & p_{23} \\ -p_{13} & -p_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

– довільна кососиметрична матриця, $p_{ij} = p_{ij}(\omega)$ – довільні функції, $i, j = 1, 2, 3$. Отже, розв'язок задачі стабілізації дає керування

$$u(\omega) = (P(\omega) - \lambda I)J\omega. \tag{13.15}$$

Тут I – одинична матриця розмірності 3×3, $\lambda > 0$ – довільна константа. За теоремою Барбашина-Красовського керування (13.15) забезпечує асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (13.14) в цілому.

Але функцію Ляпунова можна будувати по різному, головне, щоб виконувались теореми про асимптотичну стійкість. Виберемо функцію Ляпунова у вигляді

$$\mathcal{V}(\omega) = \|J\omega\|. \tag{13.16}$$

Ця функція є додатновизначеною. Розглянемо додатнопостійну функцію $\mathcal{W}(\omega) = \lambda$, $\lambda > 0$. Градієнт

$$grad\mathcal{V}(\omega) = J^* \frac{J\omega}{\|J\omega\|}.$$

Таким чином, повна похідна функції $\mathcal{V}(\omega)$ в силу системи (13.14) дорівнює

$$\frac{d\mathcal{V}(\omega)}{dt} = \left\langle J^* \frac{J\omega}{\|J\omega\|}, -J^{-1}\omega \times J\omega + J^{-1}u \right\rangle =$$
$$= -\left\langle \frac{J\omega}{\|J\omega\|}, \omega \times J\omega \right\rangle + \left\langle \frac{J\omega}{\|J\omega\|}, u \right\rangle.$$

Згідно з властивостями векторного добутку $\langle J\omega, \omega \times J\omega \rangle = 0$. Отже, функцію керування $u(\omega)$ підбераємо з рівності

$$\left\langle \frac{J\omega}{\|J\omega\|}, u \right\rangle = -\lambda.$$

Представляємо $u(\omega)$ у вигляді

$$u(\omega) = u_1(\omega) + u_2(\omega),$$

де

$$u_1(\omega) = -\lambda \frac{J\omega}{\|J\omega\|},\ u_2(\omega) = P(\omega)\frac{J\omega}{\|J\omega\|},$$

$P(\omega)$ – кососиметрична матриця розмірності 3×3. Згідно першої теореми Ляпунова про стійкість керування

$$u(\omega) = (P(\omega) - \lambda I)\frac{J\omega}{\|J\omega\|} \tag{13.17}$$

забезпечує стійкість нульового розв'язку системи (13.14).

В лекції (стор. 133) було показано, що керування (13.17) при $P = 0$, $\lambda = 1$ є розв'язком задачі швидкодії щодо переводу системи (13.14) з довільної точки в початок координат. При цьому функція Ляпунова (13.16) співпадає з функцією Белмана (11.53) при $\rho = \lambda$, $\varepsilon = 0$ (стор. 135). Таким способом, між задачами стабілізації та оптимального керування існує тісний зв'язок. Для ряду задач функція Белмана може виступати у ролі функції Ляпунова, забезпечуючи стійкий режим для оптимальної траєкторії.

13.5 Задача оптимальної стабілізації

На розв'язках системи (13.1) розглядається функціонал

$$\mathcal{I}(u) = \int_{t_0}^{\infty} f_0(x(t), u(t), t)dt. \tag{13.18}$$

Тут функція $f_0(x, u, t)$ є інтегрованою на розв'язках системи (13.1). Задача про *оптимальну стабілізацію* полягає у такому.

1). Знайти допустиме керування $u_*(x, t)$ в класі керувань з оберненим зв'язком, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (13.1).

2). Яке б не було інше допусиме керування $\hat{u}(x, t)$, що розв'язує задачу 1), виконується нерівність

$$\mathcal{I}(u_*) \leq \mathcal{I}(\hat{u}),$$

для всіх початкових умов $x(t_0) = x_0$, $\|x_0\| \leq R$.

Функція u_* називається у цьому випадку *оптимальним керуванням*. Позначимо $x_*(\cdot)$ – розв'язок системи (13.1) при $u = u_*(x, t)$. Розглянемо функцію

$$b(\mathcal{V}, x, u, t) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \langle grad_x \mathcal{V}(x, t), f(x, u, t)\rangle + f_0(x, u, t),$$

де $\mathcal{V}(x, t)$ – функція Ляпунова, яка є додатновизначеною. Зрозуміло, що якщо $b(\mathcal{V}, x, u, t) = 0$ при деякому виборі функції $\mathcal{V}$ та u , то повна похідна у силу системи (13.1) записується так

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -f_0(x, u, t).$$

Має місце така теорема.

Теорема 13.2 (Красовського)**.** *Якщо для системи диференціальних рівнянь (13.1) можна побудувати додатновизначену функцію $\mathcal{V}_*(x, t)$, яка допускає нескінченно малу вищу границю, а також функцію керування $u_*(x, t)$, що задовольняють таким умовам:*

1) функція $f_0(x, t) = \omega(x, u_*(x, t), t)$ є додатно визначена;

2) має місце рівність

$$b(\mathcal{V}_*, x, u_*, t) = 0; \tag{13.19}$$

3) для довільного допустимого вектора u виконується нерівність

$$b(\mathcal{V}_*, x, u, t) \geq 0. \tag{13.20}$$

Тоді керування $u_*(x,t)$ розв'язує задачу про оптимальну стабілізацію (13.1), (13.18), *при цьому*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(u_*) &= \int_{t_0}^{\infty} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt = \\ &= \inf_{u(t)\in\mathcal{U}} \int_{t_0}^{\infty} f_0(x(t), u(t), t)dt = \mathcal{V}_*(x_0, t_0),\end{aligned} \tag{13.21}$$

де $u_*(t) = u_*(x_*(t), t)$.

Доведення. При $u = u_*(t)$ функція $\mathcal{V}_*(x,t)$ задовольняє умовам теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість [2]. Її похідна в силу системи (13.1) визначається згідно співвідношення (13.19) рівністю

$$\frac{d\mathcal{V}_*(x_*(t), t)}{dt} = -f_0(x_*(t), u_*(t), t) \tag{13.22}$$

і тому є від'ємновизначеною. Доведемо справедливість формули (13.21). Оскільки розв'язок системи (13.1) є асимптотично стійкий, то

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{V}_*(x_*(t), t) = 0. \tag{13.23}$$

Інтегруємо (13.22) від $t = t_0$ до $t = T$ і враховуємо (13.23). Так, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{T} \frac{d\mathcal{V}_*(x_*(t), t)}{dt}dt &= \mathcal{V}_*(x_*(T), T) - \mathcal{V}_*(x_*(t_0), t_0) = \\ &= -\int_{t_0}^{T} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt.\end{aligned}$$

Тепер при $T \to \infty$ маємо

$$\mathcal{V}_*(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} f_0(x_*(t), u_*(t), t)dt. \tag{13.24}$$

Нехай, з іншого боку, керування $\hat{u}(x,t)$ розв'язує задачу стабілізації незбуреного руху. З нерівності (13.20) випливає, що

$$\left(\frac{d\mathcal{V}_*}{dt}\right)_{(13.1)} \geq -f_0(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t), \tag{13.25}$$

[2] Одне з можливих джерел: [24], стор. 117

де $\hat{x}(t)$ – траєкторія системи (13.1) при керуванні $\hat{u}(t)$. Інтегруємо (13.25) від t_0 до T і отримуємо

$$\mathcal{V}_*(\hat{x}(T),T) - \mathcal{V}_*(\hat{x}(t_0),t_0) = \mathcal{V}_*(\hat{x}(T),T) - \mathcal{V}_*(x_0,t_0) \geq$$
$$\geq -\int_{t_0}^{T} f_0(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\, dt.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathcal{V}_*(\hat{x}(t),t) = 0$, з останньої нерівності отримуємо

$$\mathcal{V}_*(x_0,t_0) \leq \int_{t_0}^{\infty} f_0(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\, dt.$$

Це доводить справедливість формули (13.21).

$\square$

Функцію Ляпунова $\mathcal{V}_*(x,t)$, що задовольняє умовам теореми Красовського, називають *оптимальною.* Розглянемо умови (13.19), (13.20) і порівняємо їх з диференціальним рівнянням Гамільтона-Якобі-Белмана 11.15, стор. 122. Робимо висновок: на керуваннях, що забезпечують розв'язок задачі оптимальної стабілізації справджується диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана. У такий спосіб, для задачі оптимальної стабілізації функція Белмана і оптимальна функція Ляпунова співпадають.

Частина VI

Оцінка стану системи керування

Лекція 14

Оцінка стану системи в задачі спостереження

14.1 Оцінка стану системи

Для того, щоб оцінити вектор стану x в момент $t = T$, будемо фіксувати вектор $a \in \mathbb{R}^n$ і оцінювати скалярний добуток

$$\langle a, x(T) \rangle .$$

Так, якщо $a = e_i$, $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...0)^*$ – i-й орт, то

$$\langle a, x(T) \rangle = \langle e_i, x(T) \rangle = x_i(T).$$

З співвідношення (4.14) випливає, що залежність між станом $x(\cdot)$ і вимірами $y(\cdot)$ є лінійною. Дійсно, якщо $y_1(t) = H(t)x_1(t)$, $y_2(t) = H(t)x_2(t)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^1$, то

$$\lambda y_1(t) + \mu y_2(t) = H(t) \left(\lambda x_1(t) + \mu x_2(t) \right).$$

Скалярний добуток $\langle a, x(T) \rangle$ лінійно залежить від $x(\cdot)$, а значить, є лінійною формою також відносно вимірів $y(\cdot)$.

Припустимо, що $y \in \mathcal{L}_2 \left([t_0, T] ; \mathbb{R}^m \right)$ і будемо розглядати $\langle a, x(T) \rangle$ у класі лінійних неперервних функціоналів відносно вимірів $y(\cdot)$. За теоремою про представлення лінійного неперервного функціоналу в гільбертовому просторі [1] існує $u \in \mathcal{L}_2 \left([t_0, T] ; \mathbb{R}^m \right)$ таке, що

$$\langle a, x(T) \rangle = \langle y, u \rangle_{\mathcal{L}_2} = \int_{t_0}^{T} \langle u(s), y(s) \rangle \, ds.$$

[1] Теорема 14.1, стор. 168

Отже, знайдемо $u \in \mathcal{L}_2\left([t_0, T]\,; \mathbb{R}^m\right)$, для якого виконується остання рівність. Для цього розглянемо функціонал

$$\mathcal{F}(u) = \left(\langle a, x(T) \rangle - \int_{t_0}^{T} \langle u(s), y(s) \rangle \, ds \right)^2. \tag{14.1}$$

Введемо деяку вектор-функцію $z(s)$ розмірності n з класу абсолютно неперервних на $[t_0, T]$ і таку, що $z(T) = a$. Тоді, оскільки $y(t) = H(t)x(t)$ і

$$\langle a, x(T) \rangle = \langle z(T), x(T) \rangle = \int_{t_0}^{T} d \langle z(s), x(s) \rangle + \langle z(t_0), x(t_0) \rangle ,$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \left(\langle z(T), x(T) \rangle - \int_{t_0}^{T} \langle u(s), H(s)x(s) \rangle \, ds \right)^2 = \\ &= \left(\int_{t_0}^{T} d \langle z(s), x(s) \rangle + \langle z(t_0), x(t_0) \rangle - \int_{t_0}^{T} \langle H^*(s)u(s), x(s) \rangle \, ds \right)^2. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Далі, враховуючи (4.13), отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{T} d \langle z(s), x(s) \rangle &= \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle \frac{dz(s)}{ds}, x(s) \right\rangle + \left\langle \frac{dx(s)}{ds}, z(s) \right\rangle \right\} ds = \\ &= \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle \frac{dz(s)}{ds}, x(s) \right\rangle + \langle A(s)x(s), z(s) \rangle \right\} ds = \\ &= \int_{t_0}^{T} \left\{ \left\langle \frac{dz(s)}{ds}, x(s) \right\rangle + \langle A^*(s)z(s), x(s) \rangle \right\} ds = \\ &= \int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{dz(s)}{ds} + A^*(s)z(s), x(s) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Підставляємо останнє співвідношення в (14.2). Маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \left(\int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{dz(s)}{ds} + A^*(s)z(s), x(s) \right\rangle - \right. \\ &\left. - \int_{t_0}^{T} \langle H^*(s)u(s), x(s) \rangle \, ds + \langle z(t_0), x(t_0) \rangle \right)^2 = \\ &= \left(\int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{dz(s)}{ds} + A^*(s)z(s) - H^*(s)u(s), x(s) \right\rangle ds + \langle z(t_0), x(t_0) \rangle \right)^2. \end{aligned}$$

Нехай $z(s)$ задовольняє *спряженій системі*

$$\frac{dz(t)}{dt} = -A^*(t)z(t) + H^*(t)u(t), \tag{14.3}$$

$$z(T) = a. \tag{14.4}$$

Тоді функціонал $\mathcal{F}(u)$ має вигляд

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(u, x(t_0)) = \langle z(t_0), x(t_0)\rangle^2 . \tag{14.5}$$

Функціонал (14.5) описує *похибку оцінювання*. Якщо система (14.3) є керованою з положення $z(t_0) = 0$ в положення $z(T) = a$, то це означає, за принципом двоїстості, спостережуваність системи (4.13), (4.14). Якщо це не так, то потрібно мінімізувати (14.5) за рахунок вибору початкового стану $x(t_0)$ з множини $G \subset \mathbb{R}^n$, що містить у своїй внутрішності точку 0, тобто розв'язати задачу оптимального керування

$$\mathcal{M}(u) = \sup_{x(t_0)\in G} \mathcal{F}(u, x(t_0)) \to \inf_{u(\cdot)} \tag{14.6}$$

на розв'язках спряженої системи (14.3), (14.4). Нехай

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Bx, x\rangle \leq 1\},$$

де B – додатновизначена симетрична матриця розмірності $n \times n$. Знайдемо

$$\sup_{x\in G} |\langle x, z\rangle| .$$

Оскільки $B = B^*$ і B – додатновизначена матриця , то існує матриця R така, що $B = R^2$. При цьому $R^* = R$ і R – додатновизначена. Така матриця називається квадратним коренем з матриці B . Тоді

$$|\langle x, z\rangle| = \left\langle R^{-1}Rx, z\right\rangle = \left\langle Rx, R^{-1}z\right\rangle \leq \|Rx\| \left\|R^{-1}z\right\| .$$

Так як при $x \in G$

$$\langle Bx, x\rangle = \langle RRx, x\rangle = \langle Rx, Rx\rangle = \|Rx\|^2 \leq 1,$$

то звідси

$$\sup_{x\in G} |\langle x, z\rangle| \leq \left\|R^{-1}z\right\| . \tag{14.7}$$

Але, якщо взяти

$$Rx_* = \frac{R^{-1}z}{\|R^{-1}z\|},$$

тобто

$$x_* = \frac{R^{-1}R^{-1}z}{\|R^{-1}z\|} = \frac{B^{-1}z}{\|R^{-1}z\|},$$

підставити в $|\langle x,z\rangle|$, то одержимо

$$|\langle x_*,z\rangle| = \left|\left\langle \frac{B^{-1}z}{\|R^{-1}z\|}, z\right\rangle\right| =$$
$$= \frac{1}{\|R^{-1}z\|}\left|\left\langle B^{-1}z, z\right\rangle\right| = \frac{1}{\|R^{-1}z\|}\left|\left\langle R^{-1}R^{-1}z, z\right\rangle\right| =$$
$$= \frac{1}{\|R^{-1}z\|}\left\|R^{-1}z\right\|^2 = \left\|R^{-1}z\right\|.$$

При цьому $x_* \in G$, оскільки

$$\langle Bx_*, x_*\rangle = \left\langle \frac{BB^{-1}z}{\|R^{-1}z\|}, \frac{B^{-1}z}{\|R^{-1}z\|}\right\rangle = \frac{\langle B^{-1}z, z\rangle}{\|R^{-1}z\|^2} =$$
$$= \frac{\langle B^{-1}z, z\rangle}{\langle R^{-1}z, R^{-1}z\rangle} = \frac{\langle B^{-1}z, z\rangle}{\langle R^{-1}R^{-1}z, z\rangle} = 1.$$

Отже,

$$\mathcal{M}(u) = \left\|R^{-1}z(t_0)\right\|^2 = \left\langle R^{-1}z(t_0), R^{-1}z(t_0)\right\rangle = \left\langle B^{-1}z(t_0), z(t_0)\right\rangle. \quad (14.8)$$

Застосуємо регуляризацію функціоналу (14.8), додаючи до нього деяку малу величину, а саме

$$\mathcal{I}(u,\alpha) = \left\langle B^{-1}z(t_0), z(t_0)\right\rangle + \alpha\int_{t_0}^{T}\langle u(s), u(s)\rangle\, ds. \quad (14.9)$$

Тут $\alpha > 0$ – мале число. Потрібно мінімізувати функціонал (14.9) на розв'язках спряженої системи (14.3), (14.4). Застосовуючи метод динамічного програмування (лекція 13.4, стор. 158), одержуємо, що оптимальне значення функціоналу

$$\mathcal{I}_* = \langle P(T)a, a\rangle,$$

де

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^*(t) - \frac{1}{\alpha}P(t)H^*(t)H(t)P(t), \quad (14.10)$$
$$P(t_0) = B^{-1}, \quad (14.11)$$

при цьому оптимальне керування

$$u_*(z(t),t) = \frac{1}{\alpha}H(t)P(t)z(t) = K^*(t)z(t), \quad (14.12)$$

де $K^*(t) = \frac{1}{\alpha}H(t)P(t)$. Побудуємо оцінку стану системи так, щоб

$$\int_{t_0}^{T}\langle u_*(s), y(s)\rangle\, ds = \langle a, \hat{x}(T)\rangle,$$

де $\hat{x}(t)$– оцінка стану $x(t)$, $t \in [t_0, T]$. Припускаємо, що $\hat{x}(t_0) = 0$. Тоді

$$\langle a, \hat{x}(T)\rangle = \langle z(T), \hat{x}(T)\rangle - \langle z(t_0), \hat{x}(t_0)\rangle =$$
$$= \int_{t_0}^{T} d\,\langle z(t), \hat{x}(t)\rangle = \int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{dz}{dt}, \hat{x}(t)\right\rangle dt + \int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{d\hat{x}}{dt}, z(t)\right\rangle dt =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \langle -A^*(t)z(t) + H^*(t)u_*(t), \hat{x}(t)\rangle\, dt + \int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{d\hat{x}}{dt}, z(t)\right\rangle dt =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{d\hat{x}}{dt} - A(t)\hat{x}(t), z(t)\right\rangle dt + \int_{t_0}^{T} \langle H^*(t)u_*(t), \hat{x}(t)\rangle\, dt =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{d\hat{x}}{dt} - A(t)\hat{x}(t), z(t)\right\rangle dt + \int_{t_0}^{T} \langle H^*(t)K^*(t)z(t), \hat{x}(t)\rangle\, dt =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \left\langle \frac{d\hat{x}(t)}{dt} - A(t)\hat{x}(t) + K(t)H(t)\hat{x}(t), z(t)\right\rangle dt.$$

З іншого боку

$$\int_{t_0}^{T} \langle u_*(t), y(t)\rangle\, dt = \int_{t_0}^{T} \langle z(t), K(t)y(t)\rangle\, dt.$$

Отже, формула для оцінки така

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)x(t) + K(t)\left[y(t) - H(t)\hat{x}(t)\right], \tag{14.13}$$

$$\hat{x}(t_0) = 0. \tag{14.14}$$

Система (14.13), (14.14) разом з співвідношеннями (14.10), (14.11) є *спостерігачем повного порядку.* Вона має структуру оптимального фільтра Калмана. Матриця коефіцієнтів підсилення спостерігача знаходиться з формули

$$K(t) = \frac{1}{\alpha}\left(H(t)P(t)\right)^*.$$

Так як з (14.9) випливає

$$\mathcal{I}(u, \alpha) = \sup_{x(t_0) \in G} \langle z(t_0), x(t_0)\rangle^2 + \alpha \int_{t_0}^{T} \langle u(s), u(s)\rangle\, ds$$

і має місце нерівність

$$\sup_{x(t_0) \in G} \mathcal{F}(u_*, x(t_0)) \le \mathcal{I}(u_*, \alpha) = \mathcal{I}_*,$$

то похибка оцінювання

$$\Delta = \sup_{x(t_0)\in G} \left| \langle a, x(T)\rangle - \int_{t_0}^{T} \langle u_*(s), y(s)\rangle\, ds \right| = \sup_{x(t_0)\in G} \sqrt{\mathcal{F}(u_*, x(t_0))} =$$
$$= \sup_{x(t_0)\in G} |\langle a, x(T) - \hat{x}(T)\rangle| = \sup_{x(t_0)\in G} |\langle z(t_0), x(t_0)\rangle| \leq$$
$$\leq \sqrt{\mathcal{I}_*} = \sqrt{\langle P(T)a, a\rangle},$$

За умови $\|a\| = 1$ маємо

$$\Delta \leq \sqrt{\langle P(T)a, a\rangle} \leq \sqrt{\lambda_*(P(T))},$$

де $\lambda_*(P(T))$ – максимальне власне число матриці $P(T)$ [2]. Якщо $a = e_i$, $i = 1, 2, ..., n$, то

$$\Delta = \sup_{x(t_0)\in G} |x_i(T) - \hat{x}_i(T)|\,.$$

Отже, алгоритм оцінювання стану системи (4.13) за спостереженнями (4.14) такий.

Алгоритм 14.1. *Задаємо матриці $A(t)$, $H(t)$, B, число $\alpha > 0$.*

Крок 1. Розв'язуємо рівняння Ріккаті (14.10), (14.11).

Крок 2. Знаходимо матрицю коефіцієнтів підсилення спостерігача $K(t) = \frac{1}{\alpha}(H(t)P(t))^*$, $t \in [t_0, T]$.

Крок 3. Розв'язуємо рівняння спостерігача (14.13), (14.14). Знаходимо оцінку $\hat{x}(t)$.

Лінійний неперервний функціонал в гільбертовому просторі

Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Має місце таке твердження ([31], стор. 154).

Теорема 14.1. *Для довільного лінійного неперервного функціоналу $f : H \to \mathbb{R}^1$ існує $u \in H$ таке, що*

$$f(x) = \langle x, u\rangle_H\,, \ \forall x \in H.$$

Елемент $u \in H$ визначається за функціоналом f однозначно. При цьому $\|f\| = \|u\|_H$.

[2] Екстремальні властивості власних значень розглядаються в додатку до лекції, теорема 14.2.

Перетворення Релея

Нехай A – $n \times n$ матриця, $A = A^*$. *Перетворенням Релея* відображення A називається функція

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle},$$

яка визначена для всіх ненульових $x \in \mathbb{R}^n$. Має місце таке твердження ([8], стор. 23).

Теорема 14.2 (про екстремальні властивості власних значень)**.** *Максимальне значення співвідношення Релея співпадає з найбільшим власним значенням $\lambda_*(A)$ матриці A і досягається на власному векторі матриці A, що відповідає $\lambda_*(A)$. Аналогічно, мінімальне значення співвідношення Релея співпадає з найменшим власним значенням $\lambda_-(A)$ матриці A і досягається на власному векторі матриці A, що відповідає $\lambda_-(A)$. Зокрема,*

$$\max_{x \in S} \langle Ax, x\rangle = \lambda_*(A),$$
$$\min_{x \in S} \langle Ax, x\rangle = \lambda_-(A).$$

Лекція 15

Фільтрація. Множинний підхід

15.1 Постановка задачі фільтрації. Інформаційна область

Розглянемо систему керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),t) + c(x(t),t)v(t), \tag{15.1}$$

$$y(t) = g(x(t),t) + w(t), \tag{15.2}$$

де $x = (x_1, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $y = (y_1, ..., y_m)^*$ – вектор спостережень, $f(x,t)$ – n-вимірна вектор-функція, $c(x,t)$ – $n \times k$-матриця, $g(x,t)$ – m-вимірна вектор-функція. Зазначені функції є неперервними за сукупністю змінних, $v(t) = (v_1(t), ..., v_k(t))^*$, $w(t) = (w_1(t), ..., w_m(t))^*$ – невідомі шуми, які є інтегрованими функціями, $t \in [t_0, T]$, при цьому права частина системи (15.1) задовольняє умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші (теорема 16.2, стор. 180, теорема 16.3, стор. 180) та умови продовжуваності розв'язку [9], $x(\cdot) = x(\cdot, v, x_0, t_0)$ – розв'язок системи (15.1) за умови $x(t_0) = x_0$ при фіксованому $v = v(t)$. Крім невідомих шумів $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ є невідомими також початкові умови $x(t_0) = x_0$, вони є обмеженими за допомогою нерівності

$$\int_{t_0}^{\tau} \psi(v(t), w(t), t)dt + \varphi(x_0) \le \mu^2, \tag{15.3}$$

де $\psi(v,w,t)$, $\varphi(x)$ – невід'ємні неперервні функції, $\mu > 0$, $\tau \in [t_0, T]$.

Мета задачі фільтрації полягає у такому:

- визначити оцінку $\hat{x}(\tau)$ стану $x(\tau)$ системи (15.1), (15.2) на основі відомої інформації про виміри $y(t)$, $t \in [t_0, \tau]$ і обмеження (15.3);

- побудувати динамічну систему, що описує еволюцію оцінки $\hat{x}(\tau)$, яка називається фільтром, або спостерігачем;

- знайти похибку оцінювання оцінки $\hat{x}(\tau)$ і описати її динаміку.

Нехай $y = y_*(t)$ – відомий вектор спостережень на відрізку $t \in [t_0, \tau]$. Позначимо $\mathcal{X}(\cdot)$ множину розв'язків $x(\cdot) = x(\cdot, v, x_0, t_0)$ системи (15.1), таких, що задовольняють співвідношення (15.2) при $y(t) = y_*(t)$ і деякому $w = w(t)$, $t \in [t_0, \tau]$, причому виконуються обмеження (15.3). Тобто, якщо $x(\cdot) = x(\cdot, v, x_0, t_0) \in \mathcal{X}(\cdot)$, то знайдеться вимірний шум $w = w(t)$ такий, що $y_*(t) = g(x(t, v, x_0, t_0), t) + w(t)$, причому виконується нерівність (15.3). Тоді множина

$$\mathcal{X}(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^n : z = x(\tau), x(\cdot) \in \mathcal{X}(\cdot)\}$$

називається *інформаційною областю* в момент $t = \tau$, що узгоджена з вимірами $y = y_*(t)$, $t \in [t_0, \tau]$ при обмеженнях (15.3).

Отже, інформаційна область $\mathcal{X}(\tau)$ системи (15.1), (15.2) в момент $t = \tau$ складається з усіх станів системи (15.1) в момент $t = \tau$, що узгоджуються з заданими вимірами $y = y_*(\cdot)$ в силу (15.2), при цьому справджується обмеження (15.3) на початковий стан x_0 і шуми $v(\cdot)$, $w(\cdot)$.

Підхід полягає у тому, що оцінка $\hat{x}(\tau)$ стану системи (15.1), (15.2) вибирається як *чебишевський центр інформаційної області* $\mathcal{X}(\tau)$, тобто, як центр найменшої кулі, що містить $\mathcal{X}(\tau)$. Якщо область $\mathcal{X}(\tau)$ опукла, то $\hat{x}(\tau) \in \mathcal{X}(\tau)$.

15.2 Задача лінійної фільтрації

Нехай задана система

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)v(t), \tag{15.4}$$

$$y(t) = G(t)x(t) + w(t), \tag{15.5}$$

де $A(t)$, $C(t)$, $G(t)$ є матрицями з неперервними компонентами розмірностей $n \times n$, $n \times k$ і $m \times n$ відповідно. Початковий стан x_0 і шуми $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ задовольняють обмеженням вигляду

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{\tau} \{\langle M(t)\left(v(t) - v_0(t)\right), v(t) - v_0(t)\rangle + \\ + \langle N(t)\left(w(t) - w_0(t)\right), w(t) - w_0(t)\rangle\} \, dt + \\ + \langle P_0\left(x_0 - a\right), x_0 - a\rangle \leq \mu^2.\end{gathered} \tag{15.6}$$

Тут $M(t)$, P_0 є додатновизначеними симетричними матрицями розмірності $k \times k$ і $n \times n$ відповідно, $N(t)$ є невід'ємновизначеною симетричною матрицею розмірності $m \times m$. Матриці $N(t)$, $M(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ є заданою. Функції $v_0(\cdot)$, $w_0(\cdot)$ є заданими інтегрованими з квадратом на $[t_0, \tau]$ функціями, $v_0(t) \in \mathbb{R}^k$, $w_0(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [t_0, \tau]$. Шуми $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ належать класу інтегрованих з квадратом на $[t_0, \tau]$ функцій.

З співвідношення (15.5) виразимо $w(t) = y(t) - G(t)x(t)$ і підставимо в (15.6). Отримаємо

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{\tau} \{\langle M(t)\left(v(t) - v_0(t)\right), v(t) - v_0(t)\rangle + \\ &+ \langle N(t)\left(y(t) - w_0(t) - G(t)x(t)\right), y(t) - w_0(t) - G(t)x(t)\rangle\}\, dt + \\ &+ \langle P_0\left(x_0 - a\right), x_0 - a\rangle \le \mu^2.\end{aligned} \tag{15.7}$$

Тоді за означенням інформаційна область системи (15.4), (15.5) при обмеженнях (15.6) співпадає з множиною досяжності системи (15.4) при обмеженнях (15.7), де функція $v(\cdot)$ розглядається як керування системою (15.4) (означення 12.1, стор. 141). Тоді за теоремою про зв'язок між функцією Белмана і множиною досяжності (теорема 12.2, стор. 141) інформаційна область $\mathcal{X}(\tau)$ може бути записана як множина рівня функції Белмана $\mathcal{B}(z, \tau)$ задачі оптимального керування системою (15.4) з критерієм якості

$$\begin{gathered}\mathcal{I}(v, x) = \int_{t_0}^{T} \{\langle M(t)\left(v(t) - v_0(t)\right), v(t) - v_0(t)\rangle + \\ + \langle N(t)\left(y(t) - w_0(t) - G(t)x(t)\right), y(t) - w_0(t) - G(t)x(t)\rangle\}\, dt + \\ + \langle P_0\left(x_0 - a\right), x_0 - a\rangle \to \inf,\end{gathered}$$

де $t \in [t_0, T]$, $\tau \in [t_0, T]$. Тобто, має місце рівність

$$\mathcal{X}(\tau) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : \mathcal{B}(z, \tau) \le \mu^2\right\}. \tag{15.8}$$

Така функція Белмана $\mathcal{B}(z, \tau)$ називається *інформаційним станом* системи (15.4), (15.5) при обмеженнях (15.6) і при заданих спостереженнях $y = y_*(t)$, $t \in [t_0, \tau]$. Має місце така теорема.

Теорема 15.1. *Оцінка стану $\hat{x}(\tau)$ системи (15.4), (15.5) при обмеженнях (15.6) при заданих спостереженнях $y(t) = y_*(t)$, $t \in [t_0, \tau]$ задовольняє системі*

$$\begin{aligned}&\frac{d\hat{x}(s)}{ds} = A(s)\hat{x}(s) + R(s)G^*(s)N(s)\left(y(s) - w_0(t) - G(s)\hat{x}(s)\right) + \\ &+ C(s)v_0(s),\ \ \hat{x}(t_0) = a.\end{aligned} \tag{15.9}$$

Інформаційний стан системи виражається співвідношенням

$$\mathcal{B}(z,\tau) = \langle P(\tau)\left(z - \hat{x}(\tau)\right), z - \hat{x}(\tau)\rangle + k(\tau), \tag{15.10}$$

а інформаційна область записується у формі еліпсоїда

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}(\tau) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : \langle P(\tau)\left(z - \hat{x}(\tau)\right), z - \hat{x}(\tau)\rangle \leq \mu^2 - k(\tau)\right\} = \\ &= \mathcal{E}\left(\hat{x}(\tau), r^2(\tau)R(\tau)\right). \end{aligned} \tag{15.11}$$

Тут $r(\tau) = \sqrt{\mu^2 - k(\tau)}$,

$$\begin{aligned} &\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) + \\ &+ P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = G^*(s)N(s)G(s), \\ &P(t_0) = P_0, \end{aligned} \tag{15.12}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dR(s)}{ds} = A(s)R(s) + R(s)A^*(s) + \\ &+ C(s)M^{-1}(s)C^*(s) - R(s)G^*(s)N(s)G(s)R(s), \\ &R(t_0) = P_0^{-1},\ s \in [t_0, \tau], \end{aligned} \tag{15.13}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dk(s)}{ds} = \\ &= \langle N(s)\left(y(s) - w_0(t) - G(s)\hat{x}(s)\right), y(s) - w_0(t) - G(s)\hat{x}(s)\rangle, \\ &k(t_0) = 0,\ s \in [t_0, \tau], \end{aligned} \tag{15.14}$$

Доведення. Інформаційна множина $\mathcal{X}(\tau)$ є множиною досяжності системи (15.4) при обмеженнях (15.7). Згідно результатів пункту 12.5.2, а саме, з фомул (12.39)-(12.42), (12.43),(12.44) випливає, що інформаційна множина $\mathcal{X}(\tau)$ визначається за допомогою функції Белмана (15.10) і є еліпсоїдом вигляду (15.11).

Отже, оцінка стану вибирається як чебишевський центр інформаційної множини $\mathcal{X}(\tau)$, яка є еліпсоїдом вигляду (15.11). Так як чебишевський центр еліпсоїда співпадає з центром еліпсоїда, то оцінкою стану є $\hat{x}(\tau)$. Згідно (12.40) система (15.9), (15.13) описує динаміку оцінки стану і є фільтром. □

Вектор

$$e(\tau) = x(\tau) - \hat{x}(\tau)$$

називається *помилкою оцінювання.* Помилка оцінювання належить множині

$$\Omega(\tau) = \mathcal{X}(\tau) - \hat{x}(\tau).$$

Множина $\Omega(\tau)$ називається *множиною помилки оцінювання*. Для задачі лінійної фільтрації

$$\Omega(\tau) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle P(\tau)z, z\rangle \le \mu^2 - k(\tau) \right\} = \mathcal{E}\left(0, r^2(\tau)R(\tau)\right).$$

Чим ширшою у сенсі включення є множина $\Omega(\tau)$, тим гіршим є випадок вимірювання. І навпаки, чим меншою є множина $\Omega(\tau)$, тим краще. Оскільки з (15.14) випливає, що $k(t_0) = 0$, $\frac{dk(s)}{ds} \ge 0$, $s \in [t_0, \tau]$, то $k(\tau) \ge 0$. Це означає, що чим меншим є $k(\tau)$, тим більшою є множина $\Omega(\tau)$. Оцінимо норму похибки

$$\begin{aligned} \|e(\tau)\| = \|x(\tau) - \hat{x}(\tau)\| \le \sup\left\{\|z\| : z \in \Omega(\tau)\right\} = \|\Omega(\tau)\| = \\ = \sup_{\psi \in S} |c\left(\Omega(\tau), \psi\right)| = \sup_{\psi \in S} \left| c\left(\mathcal{E}\left(0, r^2(\tau)R(\tau)\right), \psi\right)\right| = \\ = r(\tau) \max_{\psi \in S} \sqrt{\langle R(\tau)\psi, \psi\rangle} = r(\tau)\sqrt{\lambda_*(R(\tau))}. \end{aligned}$$

Тут $S = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = 1\}$, $r(\tau) = \sqrt{\mu^2 - k(\tau)}$, $\lambda_*(R(\tau))$ – максимальне власне значення матриці $R(\tau)$ [1].

Величина

$$\Delta = \|\Omega(\tau)\| = \sqrt{\lambda_*(R(\tau))}\sqrt{\mu^2 - k(\tau)}$$

дає похибку оцінювання. Вона обчислюється за допомогою (15.13) і (15.14).

Найкращим випадком вимірів є $\Omega(\tau) = \{0\}$, тобто $\mathcal{X}(\tau) = \{\hat{x}(\tau)\}$, найгіршим випадком реалізації невідмих шумів і початкової точки є

$$\Omega(\tau) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle P(\tau)z, z\rangle \le \mu^2) \right\},$$

що відповідає $k(\tau) = 0$. Це відповідає такій реалізації початкової умови і шумів: $x_0 = a$, $v(t) = v_0(t)$, $w(t) = w_0(t)$, $t \in [t_0, \tau]$. Цей факт перевіряється безпосередньою підстановкою в рівняння (15.9)-(15.14).

Аналогічний фільтр одержано у випадку, коли $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ є випадковими шумами типу білого шуму. Такий фільтр називається *оптимальним фільтром Калмана-Б'юсі* [2, 11, 44].

Рекомендована література: [13, 14, 18, 26, 35, 44, 48, 57]

[1] Тут застосовані приклад 18.5, наслідок з леми 20.5 і теорема 14.2.

Частина VII

Додаток

Лекція 16

Системи диференціальних рівнянь Каратеодорі

16.1 Простір неперервних функцій

Нехай $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ – замкнена обмежена множина. Позначимо $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^m)$ сукупність неперервних функцій з $\mathcal{D}$ в $\mathbb{R}^m$. В множині $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^m)$ можна ввести метрику

$$\rho(f, g) = \max_{x \in \mathcal{D}} \|f(x) - g(x)\|,$$

яка перетворює $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^m)$ в метричний простір, $f, g \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^m)$. Простір $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R}^m)$ є також нормованим простором з нормою

$$\|f(x)\|_{\mathcal{C}} = \max_{x \in \mathcal{D}} \|f(x)\|.$$

При цьому збіжність за такою нормою еквівалентна рівномірній збіжності.

16.2 Абсолютно неперервні функції

Як зазначалось у першій лекції, в теорії керування, як правило, мають справу з системами диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \tag{16.1}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $f(x, u, t) = (f_1(x, u, t), ..., f_n(x, u, t))^*$, керування $u(\cdot)$ є функцією, яка не є неперервною. Керування, як правило, є кусково неперервним, або вимірним. Це означає, що порушуються умови теорем Пеано і Пікара, які встановлюють умови існування та існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Більш того, розв'язки таких систем диференціальних рівнянь вже не належать класу неперервно диференційованих функцій. Тому потрібно розширювати функціональний клас, у якому знаходяться розв'язки системи керування. Розглянемо приклад.

Приклад 16.1. Нехай задане скалярне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t)$$

з умовою Коші $x(0) = x_0$, де

$$u(t) = 1,\ t \in [0,1)\,,\ u(t) = -1,\ t \in (1,2]\,.$$

Зрозуміло, що $\frac{dx(t)}{dt}$ є розривною. Тоді

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds.$$

Якщо $t \in [0,1)$, то $x(t) = x_0 + t$. При $t \in (1,2]$ одержимо

$$x(t) = x_0 + \int_0^1 u(s)ds + \int_1^t u(s)ds = x_0 + 1 - (t-1) = x_0 - t + 2.$$

Отже, у такому випадку диференційне рівняння (16.1) разом з початковим умовами $x(t_0) = x_0$ зводять до еквівалентного інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), u(s), s)ds. \tag{16.2}$$

Для того, щоб (16.1) було еквівалентним до (16.2) потрібно, щоб розв'язок $x(\cdot)$ системи (16.1) задовольняв умови

$$x(t) - x(\tau) = \int_\tau^t \frac{dx(s)}{ds}ds.$$

Найширший клас функцій, для яких це виконується називаються класом абсолютно неперервних функцій.

Означення 16.1. Функція $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ називається *абсолютно неперервною*, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ таке, що для довільної скінченної системи відрізків (a_i, b_i), $i = 1, 2, ...N$, $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, що попарно не перетинаються і $\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) < \delta$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{N} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon.$$

Приклад 16.2. Розглянемо функцію

$$f(x) = |x|\,, \; x \in [0, 1]\,.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $\varepsilon = \delta$. Беремо довільну систему інтервалів (a_i, b_i), $i = 1, 2, ..., N$, $\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) < \delta$, що не перетинаються. Тоді

$$\sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| = \sum_{i=1}^{N} ||b_i| - |a_i|| \leq \sum_{i=1}^{N} |b_i - a_i| < \delta = \varepsilon.$$

Отже, функція $f(x)$– абсолютно неперервна.

Приклад 16.3. Нехай функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ задовольняє умові Ліпшиця

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \mathcal{L}\, |x_1 - x_2|\,, \; x_1, x_2 \in [a, b]\,.$$

Тоді така функція є абсолютно неперервною. Тут досить взяти $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathcal{L}}$.

Клас абсолютно неперервних функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ позначають $\mathcal{AC}([a, b]; \mathbb{R}^n)$. З означення випливає, що абсолютно неперервна функція є рівномірно неперервною. Для цього беремо $N = 1$ в означенні 16.1 абсолютної неперервності. Можна переконатись, що абсолютно неперервні функції мають обмежену варіацію.

Наведемо приклад функції, яка є неперервною, але не є абсолютно неперервною.

Приклад 16.4. Неперервна функція

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, x \neq 0; \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

має необмежену варіацію, і тому не є абсолютно неперервною. Таким способом, клас абсолютно неперервних функцій є вужчим за клас неперервних функцій.

Безпосередньо з означення випливає, що лінійна комбінація абсолютно неперервних функцій є абсолютно неперервною функцією, добуток двох абсолютно неперервних функцій є абсолютно неперервною функцією, суперпозиція $g \circ f$, де f– абсолютно неперервна функція, g – ліпшицева, є абсолютно неперервною функцією. Основний результат формулюється так.

Теорема 16.1 (Лебега)**.** *Нехай $f \in \mathcal{AC}([a,b];\mathbb{R}^n)$. Тоді функція f є диференційованою майже скрізь, її похідна $f' \in \mathcal{L}_1([a,b];\mathbb{R}^n)$ і має місце рівність*

$$f(t) - f(\tau) = \int_{\tau}^{t} f'(s)ds.$$

Якщо функція $\xi \in \mathcal{L}_1([a,b];\mathbb{R}^n)$,$t,\tau \in [a,b]$ і $f(t) = \int_{\tau}^{t} \xi(s)ds$, то $f \in \mathcal{AC}([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Отже, теорема Лебега говорить про те, що (16.1) еквівалентне (16.2) за умови, якщо розв'язок системи (16.1) вибирається в класі абсолютно неперервних функцій. Розв'язком системи (16.1) називається абсолютно неперервна функція $x(\cdot)$, для якої рівність

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

справджується майже скрізь.

16.3 Теорема Каратеодорі

Як було сказано в попередньому пункті, в теорії керування мають справу з системами диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{16.3}$$

де $(x,t) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{D}$ – область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $f(x,t) = (f_1(x,t), ..., f(x,t))^*$ – n-вимірна вектор-функція, яка є розривною за t і неперервною за x. У цьому випадку розв'язком (16.3) можна назвати функцію, що задовольняє інтегральному рівнянню

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds. \tag{16.4}$$

Тут інтеграл розглядається в розумінні Лебега. Для того, щоб такий інтеграл існував, на праву частину системи (16.3) накладаються додаткові умови.

Припустимо, що в області $\mathcal{D}$ для функції $f(x,t)$ справджуються *умови Каратеодорі:*

1) функція $f(x,t)$ неперервна за x і визначена майже при всіх t, де $(x,t) \in \mathcal{D}$;

2) при кожному x функція $f(x,t)$ вимірна за t, $(x,t) \in \mathcal{D}$;

3) має місце нерівність $\|f(x,t)\| \le m(t)$, де функція $m(\cdot)$ інтегрована, $(x,t) \in \mathcal{D}$.

У цьому випадку розв'язком системи (16.3) називається абсолютно неперервна функція, яка майже скрізь задовольняє (16.3). Має місце таке твердження.

Теорема 16.2 (Каратеодорі)**.** *Нехай при*

$$t_0 \le t \le t_0 + a, \;\; \|x - x_0\| \le b$$

функція $f(x,t)$ задовольняє умовам Каратеодорі. Тоді на відрізку $[t_0, t_0 + d]$ існує розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \;\; x(t_0) = x_0. \tag{16.5}$$

Тут $d > 0$, $d \le a$, $\varphi(t_0 + d) \le b$, $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds$.

Слід зауважити, що якщо умови Каратеодорі виконані при

$$t_0 - a \le t \le t_0, \;\; \|x - x_0\| \le b,$$

де $d \le a$, $|\varphi(t_0 - d)| \le b$, то розв'язок задачі Коші (16.5) існує при $t \in [t_0 - d, t_0]$.

Теорема 16.3. *Нехай $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}$ і існує така інтегрована функція $\ell(t)$, що для довільних $(x,t) \in \mathcal{D}$, $(y,t) \in \mathcal{D}$ має місце нерівність*

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| \le \ell(t) \, \|x - y\| \, . \tag{16.6}$$

Тоді в області $\mathcal{D}$ може існувати не більше одного розв'язку задачі (16.5). Тут єдність розв'язку означає таке: якщо існують два розв'язки, графіки яких проходять в $\mathcal{D}$, то ці розв'язки співпадають на спільній частині їх інтервалів існування.

Доведення. Нехай $x(\cdot)$ і $y(\cdot)$ – розв'язки задачі (16.5), $z(t) = x(t) - y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Знайдемо похідну від функції $\|z(t)\|^2 = \langle z(t), z(t) \rangle$. Маємо

$$\frac{d\,\|z(t)\|^2}{dt} = 2\left\langle z(t), \frac{dz(t)}{dt} \right\rangle = 2\left\langle f(x(t),t) - f(y(t),t), x(t) - y(t) \right\rangle.$$

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\langle f(x(t),t) - f(y(t),t), x(t) - y(t) \rangle \leq$$
$$\leq \ell(t) \|x(t) - y(t)\| \cdot \|x(t) - y(t)\| = \ell(t) \|x(t) - y(t)\|^2 .$$

Отже, $\frac{d\|z(t)\|^2}{dt} \leq \ell(t) \|z(t)\|^2$. Домножуємо останню нерівність на додатну функцію $e^{-\mathcal{L}(t)}$, де $\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^{t} \ell(s)ds$ і одержуємо

$$\frac{d \|z(t)\|^2}{dt} e^{-\mathcal{L}(t)} - \ell(t) \|z(t)\|^2 e^{-\mathcal{L}(t)} = \frac{d}{dt} \left(\|z(t)\|^2 e^{-\mathcal{L}(t)} \right) \leq 0.$$

Абсолютно неперервна функція $\eta(t) = \|z(t)\|^2 e^{-\mathcal{L}(t)}$ не зростає і так як $z(t_0) = 0$, то $z(t) = 0$, $t \geq t_0$. □

Теорема 16.4 (про продовження розв'язку)**.** *Нехай* (16.3) *є системою Каратеодорі в замкненій обмеженій області $\mathcal{D}$. Тоді кожний розв'язок цієї системи, що проходить всередині $\mathcal{D}$, можна продовжити в обидві сторони до виходу на границю області $\mathcal{D}$.*

Теорема доводиться аналогічно доведенню теореми про продовження розв'язку для системи звичайних диференціальних рівнянь, що задовольняють умови теореми Пеано [9].

Для систем Каратеодорі також справджуються теореми про неперервну залежність розв'язку від початкових умов, параметрів та правої частини. Зокрема має місце така теорема.

Теорема 16.5 (про неперервну залежність розв'язку від початкових умов)**.** *Припустимо, що:*

1) права частина системи (16.3) *задовольняє умови Каратеодорі в області $\mathcal{D}$;*

2) роз'язок $x = x(\cdot, x^0, t^0)$ задачі Коші (16.3)*, $x(t^0) = x^0$ визначений на $[a, b]$ і єдиний, $(x^0, t^0) \in \mathcal{D}$;*

3) роз'язки $x_k = x(\cdot, x_k^0, t_k^0)$ задач Коші (16.3)*, $x(t_k^0) = x_k^0$ визначені на $[a, b]$, $(x_k^0, t_k^0) \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$;*

4) послідовність точок $(x_k^0, t_k^0) \in \mathcal{D}$ збігається до точки (x^0, t^0), $k \to \infty$.

Тоді послідовність розв'язків $x_k = x(\cdot, x_k^0, t_k^0)$ системи (16.3) *збігається до розв'язку $x = x(\cdot, x^0, t^0)$ цієї системи рівномірно на $[a, b]$. Це означає, що $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ в просторі $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R}^n)$.*

Умова єдиності даються теоремою 16.3 через умову Ліпшиця (16.6).

16.4 Лінійна система диференціальних рівнянь. Фундаментальна матриця

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + u(t), \tag{16.7}$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $A(\cdot)$ – матриця розмірності $n \times n$ з інтегрованими компонентами, $u(\cdot)$ – інтегрована функція розмірності n.

Оцінимо праву частину системи в циліндрі

$$t_0 \leq t \leq t_0 + a, \ \ \|x - x_0\| \leq b.$$

Тут $x(t_0) = x_0$, x_0 – фіксована точка в $\mathbb{R}^n$. Одержуємо таку оцінку

$$\begin{aligned} \|f(x,t)\| = \|A(t)x + u(t)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x\| + \|u(t)\| \leq \\ \leq \|A(t)\| \cdot (\|x - x_0\| + \|x_0\|) + \|u(t)\| \leq \\ \leq \|A(t)\| \cdot (b + \|x_0\|) + \|u(t)\| = m(t). \end{aligned}$$

Функція $m(\cdot)$ є інтегрованою. Отже, для правої частини лінійної системи (16.7) справджуються умови теореми Каратеодорі. Крім того, має місце умова Ліпшиця

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x - y\|.$$

Розглянемо лінійну однорідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = A\,(t)\,x\,(t)\,. \tag{16.8}$$

Означення 16.2. Матриця $\Theta\,(t,s)$ розмірності $n \times n$, яка задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{d\Theta\,(t,s)}{dt} = A\,(t)\,\Theta\,(t,s)\,, \ \ \Theta\,(s,s) = I, \tag{16.9}$$

називається фундаментальною матрицею системи (16.8), нормованою за моментом s.

Розв'язок задачі Коші (16.8), $x\,(s) = x_0$ можна записати так

$$x\,(t) = \Theta\,(t,s)\,x_0.$$

Справді,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\Theta(t,s)}{dt}x_0 =$$
$$= A(t)\,\Theta(t,s)\,x_0 = A(t)\,x(t)\,.$$

Виберемо довільним способом точку x_0 і задамо умову Коші $x(s) = x_0$. Тоді з одного боку

$$x(t) = \Theta(t,\tau)\,x(\tau) =$$
$$= \Theta(t,\tau)\,\Theta(\tau,s)\,x(s) = \Theta(t,\tau)\,\Theta(\tau,s)\,x_0,$$

з іншого

$$x(t) = \Theta(t,s)\,x(s) = \Theta(t,s)\,x_0.$$

Оскільки розв'язок системи (16.8) задовольняє умовам існування та єдиності, то

$$\Theta(t,\tau)\,\Theta(\tau,s)\,x_0 = \Theta(t,s)\,x_0.$$

В силу довільності вибору точки x_0 маємо рівність

$$\Theta(t,s) = \Theta(t,\tau)\,\Theta(\tau,s)\,. \tag{16.10}$$

Звідси отримуємо, що обернена матриця $\Theta^{-1}(t,s)$ задовольняє співвідношення

$$\Theta^{-1}(t,s) = \Theta(s,t)\,, \tag{16.11}$$

так як з (16.9), (16.10) одержуємо $\Theta(s,t)\,\Theta(t,s) = I$.

Для представлення розв'язку системи (16.7) має місце *формула Коші*

$$x(t) = \Theta(t,t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t,s)\,u(s)ds, \tag{16.12}$$

де $x(t_0) = x_0$. З (16.10), (16.12) отримуємо

$$x(t) = \Theta(t,t_0)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t_0,s)\,u(s)ds\right). \tag{16.13}$$

В формулі (16.13) справа стоїть абсолютно неперервна функція. Далі безпосередньою підстановкою формули (16.13) в (16.7) отримуємо

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\Theta(t,t_0)}{dt}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t_0,s)\,u(s)ds\right) + \Theta(t,t_0)\,\Theta(t_0,t)\,u(t) =$$
$$= A(t)\Theta(t,t_0)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Theta(t_0,s)\,u(s)ds\right) + u(t) = A(t)x(t) + u(t).$$

Крім того, безпосередньою підстановкою пересвідчуємось, що $x\left(t_0\right) = x_0$. Це показує, що (16.12) є розв'язком задачі Коші (16.7), $x\left(t_0\right) = x_0$.

Зазначимо, що $\Theta\left(t, s\right) = e^{A(t-s)}$, якщо $A(t) = A$ – стаціонарна матриця. Тут

$$e^{A(t-s)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i (t-s)^i}{i!}$$

– матрична експонента. У цьому випадку формула Коші має вигляд

$$x\left(t\right) = e^{A(t-t_0)} x\left(t_0\right) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} u(s) ds.$$

16.5 Спряжена система

Система вигляду

$$\frac{dy\left(t\right)}{dt} = -A^*\left(t\right) y\left(t\right), \tag{16.14}$$

де $y = \left(y_{1,} \ldots, y_n\right)^*$, називається *спряженою* до системи (16.8). Має місце таке твердження.

Лема 16.1. *Якщо $x\left(t\right)$ – розв'язок системи (16.8), $y\left(t\right)$ – розв'язок системи (16.14), то $\left\langle x\left(t\right), y\left(t\right)\right\rangle = c$, де c – константа.*

Доведення. Візьмемо похідну від скалярного добутку $\left\langle x\left(t\right), y\left(t\right)\right\rangle$ розв'язків системи (16.8) і (16.14). Отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\langle x\left(t\right), y\left(t\right)\right\rangle = \left\langle \frac{dx\left(t\right)}{dt}, y\left(t\right)\right\rangle + \left\langle x\left(t\right), \frac{dy\left(t\right)}{dt}\right\rangle = \\ = \left\langle A\left(t\right) x\left(t\right), y\left(t\right)\right\rangle + \left\langle x\left(t\right), -A^*\left(t\right) y\left(t\right)\right\rangle = \\ = \left\langle A\left(t\right) x\left(t\right), y\left(t\right)\right\rangle - \left\langle A\left(t\right) x\left(t\right), y\left(t\right)\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

За теоремою Лебега

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left\langle x\left(\tau\right), y\left(\tau\right)\right\rangle d\tau = \\ = \left\langle x\left(t\right), y\left(t\right)\right\rangle - \left\langle x\left(t_0\right), y\left(t_0\right)\right\rangle = 0.\end{gathered}$$

Отже, одержуємо рівність

$$\left\langle x\left(t\right), y\left(t\right)\right\rangle = \left\langle x\left(t_0\right), y\left(t_0\right)\right\rangle = c.$$

□

Наслідок. Якщо $\Theta(t,s)$ – фундаментальна матриця системи (16.8), $\Psi(t,s)$ – фундаментальна матриця системи (16.14), то $\Psi^*(t,s)\Theta(t,s) = I$. Звідси

$$\Psi(t,s) = \Theta^*(s,t).$$

Доведення. Нехай $\Theta(t,s) = (x_1(t), \ \dots \ , x_n(t))$ – фундаментальна матриця системи (16.8), $\Psi(t,s) = (y_1(t), \ \dots \ , y_n(t))$ – фундаментальна матриця системи (16.14), де $x_i(t)$, $y_i(t)$ – стовпчики відповідних фундаментальних матриць, $i = 1, 2, \dots, n$. Функція $x_i(t)$ є розв'язком системи (16.8), а $y_i(t)$ – спряженої системи (16.14). За лемою 16.1 величини

$$c_{ij} = \langle y_i(t), x_j(t) \rangle$$

є константами, $i, j = 1, 2, \dots n$. Тоді, позначивши $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, отримаємо

$$\Psi^*(t,s)\Theta(t,s) = (\langle y_i(t), x_j(t) \rangle)_{i,j=1}^n = C,$$

Далі, підставивши $t = s$ в останню формулу, отримуємо

$$\Psi^*(s,s)\Theta(s,s) = C = I.$$

З (16.11) випливає

$$\Psi(t,s) = \left(\Theta^{-1}(t,s)\right)^* = \Theta^*(s,t).$$

□

Додаток 1

Означення 16.3. Нехай на $[a,b]$ задана скінченна функція $f(x)$, $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, $V = \sum_{k=0}^{n-1} \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\|$. Точна верхня границя множини усіх можливих сум V називається *повною варіацією* функції $f(x)$ на $[a,b]$ і позначається $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. Якщо $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty$, то говорять, що $f(x)$ має *обмежену варіацію.*

Теорема 16.6. *Абсолютно неперервна функція $f(x)$ має обмежену варіацію.*

Доведення. Виберемо $\varepsilon = 1$ і знайдемо $\delta > 0$ таке, що для довільної системи $\{(a_k, b_k)\}$ інтервалів, що не перетинаються і $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ виконується $\sum_{k=1}^n \|f(b_k) - f(a_k)\| < 1$. Нехай $c_0 = a < c_1 < c_2 < \dots < c_N = b$, $c_{k+1} - c_k < \delta$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Звідси $\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f) \le 1$ і тоді $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \le N$. □

В просторі $\mathcal{AC}[a,b] = \mathcal{AC}([a,b];\mathbb{R}^1)$ можна ввести норму

$$\|x\| = |x(a)| + \int_a^b |x'(s)|\,ds,$$

при цьому $\mathcal{AC}[a,b]$ буде повним відносно цієї норми. Можна показати, що $\mathcal{AC}[a,b] = \mathcal{W}_1^1(a,b)$, де $\mathcal{W}_p^l(a,b)$ – простір Соболєва на (a,b) з нормою

$$\|x\| = \left\{ \int_a^b |x(s)|^p\,ds + \sum_{i=1}^{l} \int_a^b \left|x^{(i)}(s)\right|^p ds \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогічна ситуація спостерігається в $\mathcal{AC}([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Додаток 2

Доведення теореми Каратеодорі. Для цілого $k \geq 1$ візьмемо $h = \frac{d}{k}$. Послідовно на відрізках $t_0 + ih \leq t_0 \leq t_0 + (i+1)h$, $i = 0, 1, ..., k-1$, побудуємо наближений розв'язок, покладаючи

$$x_k(t) = x_0,\ t \leq t_0,$$
$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x_k(s-h), s)ds,\ t_0 \leq t \leq t_0 + d.$$

Так як функція $f(x,t)$ задовольняє умовам Каратеодорі, а функція $x(\cdot)$ вимірна, $t \in [a,b]$, то складна функція $f(x(t),t)$ є інтегрована. Тому інтеграл має зміст і нерівність $\|x_k(t) - x_0\| \leq b$, так як $\|x_k(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} m(t)dt$. Для довільних $\alpha, \beta \in [t_0, t_0 + d]$ виконується

$$\|x_k(\beta) - x_k(\alpha)\| \leq \left| \int_\alpha^\beta m(t)dt \right| = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|,\ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} m(t)dt.$$

Функція $\varphi(t)$ є неперервною на $[t_0, t_0 + d]$ і тому є рівномірно неперервною. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, таке, що при $|\beta - \alpha| < \delta$ має місце $|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| < \varepsilon$. Тому функції $x_k(\cdot)$, $k = 1, 2, ...$ є рівностепенево неперервними і рівномірно обмеженими. За теоремою Арцела ([31], стор. 71) виберемо з цієї послідовності рівномірно збіжну підпослідовність. Її границю позначимо $x(\cdot)$. Так як

$$\|x_k(s-h) - x(s)\| \leq \|x_k(s-h) - x_k(s)\| + \|x_k(s) - x(s)\|$$

і $\|x_k(s-h) - x_k(s)\| < \varepsilon$ при $h = \frac{d}{k} < \varepsilon$, то $x_k(s-h) \to x(s)$. Так як $\|f(x,t)\| \leq m(t)$ і $f(x,t)$ неперервна за x, то

$$x(t) = \lim_{k\to+\infty} x_k(t) =$$
$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{k\to+\infty} f(x_k(s-h), s)ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds.$$

Теорему доведено.

Рекомендована література: [9, 10, 20, 36, 41, 43, 47]

Лекція 17

Операції над множинами. Опуклі множини

17.1 Алгебраїчні операції над множинами

Ми будемо розглядати такі операції над множинами з $\mathbb{R}^n$: сума, множення на скаляр, множення на матрицю, а також розглянемо поняття ε-околу (ε-розширення) множини. Множину всіх непорожніх компактів з $\mathbb{R}^n$ позначатимемо $comp\,(\mathbb{R}^n)$.

17.1.1 Сума двох множин

Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$. Тоді сума двох множин вводиться так:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^n : x = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

При цьому вважаємо, що $a + B = \{x \in \mathbb{R}^n : x = a + b, b \in B\}$, де $a \in \mathbb{R}^n$ – деяка точка.

Приклад 17.1. Покажемо, що

$$\mathcal{K}_r(a) = a + \mathcal{K}_r(0),$$

де $\mathcal{K}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le r\}$ – куля в $\mathbb{R}^n$ радіусу r з центром в точці $a \in \mathbb{R}^n$.

Доведення. Необхідність. Якщо $x \in \mathcal{K}_r(a)$, то за означенням кулі $\|x - a\| \le r$. Звідси маємо, що точка $u = x - a$ належить $\mathcal{K}_r(0)$ і тому $x \in a + \mathcal{K}_r(0)$.

Достатність. Якщо $x \in a + \mathcal{K}_r(0)$, то $x - a \in \mathcal{K}_r(0)$ і тому $\|x - a\| \le r$. Отже, $x \in \mathcal{K}_r(a)$. □

Приклад 17.2. Покажемо, що $\mathcal{K}_r(0) + \mathcal{K}_m(0) = \mathcal{K}_{r+m}(0)$.

Доведення. Необхідність. Якщо $x \in \mathcal{K}_r(0) + \mathcal{K}_m(0)$, то за означенням суми двох множин $x = u + v$, де $\|u\| \leq r$, $\|v\| \leq m$. Звідси

$$\|x\| = \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \leq r + m,$$

тобто $x \in \mathcal{K}_{r+m}(0)$.

Достатність. Якщо $x \in \mathcal{K}_{r+m}(0)$, то подамо x у вигляді

$$x = \frac{r}{r+m}x + \frac{m}{r+m}x = u + v.$$

Точка $u = \frac{r}{r+m}x$ належить $\mathcal{K}_r(0)$, оскільки

$$\|u\| = \frac{r}{r+m}\|x\| \leq \frac{r(r+m)}{r+m} \leq r.$$

Аналогічно $v = \frac{m}{r+m}x \in \mathcal{K}_m(0)$. Отже, за означенням суми множин

$$x \in \mathcal{K}_r(0) + \mathcal{K}_m(0).$$

□

17.1.2 Добуток множини на скаляр

Нехай $\lambda \in \mathbb{R}^1$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\lambda A = \{x = \lambda a : a \in A\}.$$

Приклад 17.3. Доведемо рівність $\lambda\mathcal{K}_1(0) = \mathcal{K}_{|\lambda|}(0)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Доведення. Необхідність. Якщо $x \in \lambda\mathcal{K}_1(0)$, то знайдеться $u \in \mathcal{K}_1(0)$ таке, що $x = \lambda u$. Звідси $\|x\| = \|\lambda u\| \leq |\lambda|\|u\| \leq \lambda$. Тому $x \in \mathcal{K}_{|\lambda|}(0)$.

Достатність. Нехай $x \in \mathcal{K}_{|\lambda|}(0)$. Тоді $\|x\| \leq |\lambda|$. Припустимо , що $\lambda = 0$. Тоді $x = 0$ і $x \in \lambda\mathcal{K}_1(0)$. Якщо $\lambda \neq 0$, то $\frac{\|x\|}{|\lambda|} = \left\|\frac{x}{\lambda}\right\| \leq 1$. Звідси $u = \frac{x}{\lambda} \in \mathcal{K}_1(0)$ і тому $x = \lambda u \in \lambda\mathcal{K}_1(0)$. □

Приклад 17.4. З попередніх прикладів випливає, що $\mathcal{K}_r(a) = a + r\mathcal{K}_1(0)$ і $\mathcal{K}_r(a) + \mathcal{K}_m(b) = \mathcal{K}_{r+m}(a+b)$.

За допомогою операції додавання і множення на скаляр можна запропонувати ознаку непорожнього перетину двох множин.

Лема 17.1. *Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$. Тоді умова $A \cap B \neq \emptyset$ еквівалентна включенню $0 \in A + (-1) \cdot B$.*

Доведення. Необхідність. Якщо $A \cap B \neq \emptyset$, то знайдеться $z \in A \cap B$. Отже, $z \in A$, $z \in B$. За означенням суми множин і добутку множини на скаляр

$$A + (-1) \cdot B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}\,.$$

Звідси $0 = z - z \in A + (-1) \cdot B$.

Достатність. Якщо $0 \in A + (-1) \cdot B$, то існують точки $a \in A$, $b \in B$ такі, що $0 = a - b$. Звідси $a = b$. Отже, $b \in A \cap B$ і тому $A \cap B \neq \emptyset$. $\square$

17.1.3 Добуток матриці на множину

Нехай множина A лежить в $\mathbb{R}^n$, M – $m \times n$ - матриця. Тоді добуток матриці M на множину A визначається так

$$MA = \{Ma \in \mathbb{R}^m : a \in A\}\,.$$

Приклад 17.5. Позначимо

$$\mathcal{E}\,(a, Q) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle Q^{-1}(x - a), x - a\right\rangle \leq 1\right\}$$

еліпсоїд з центром в точці $a \in \mathbb{R}^n$, де Q – $n \times n$ - симетрична додатно-визначена матриця еліпсоїда. Нехай M – $n \times n$ - невироджена матриця. Тоді

$$M\mathcal{K}_1\,(0) = \mathcal{E}\,(0, Q)\,,$$

де $Q = MM^*$.

17.1.4 Окіл множини

Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$.

Означення 17.1. ε-розширенням множини A називається множина

$$A^\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \mathcal{K}_\varepsilon\,(a)\,.$$

З означення випливає, що якщо точка x належить A^ε, то знайдуться точки множини A, відстань від яких до x не перевищує ε. ε-розширення позначається також $\mathcal{K}_\varepsilon\,(A)$ і називається ε-околом.

Лема 17.2. *Якщо* $A \subset \mathbb{R}^n$, *то* $A^\varepsilon = \mathcal{K}_\varepsilon\,(A) = A + \mathcal{K}_\varepsilon\,(0)$.

Доведення. Якщо $x \in \mathcal{K}_\varepsilon\,(A)$, то знайдеться $a \in A$ таке, що $x \in \mathcal{K}_\varepsilon\,(a)$. Звідси $x \in a + \mathcal{K}_\varepsilon\,(0)$ і тому $x \in A + \mathcal{K}_\varepsilon\,(0)$. І навпаки, якщо $x \in A + \mathcal{K}_\varepsilon\,(0)$, то знайдеться $a \in A$ таке, що $x \in a + \mathcal{K}_\varepsilon\,(0) = \mathcal{K}_\varepsilon\,(a)$. Звідси $x \in \mathcal{K}_\varepsilon\,(A)$. $\square$

17.2 Опуклі множини

Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$.

Означення 17.2. Множина A називається опуклою, якщо разом з довільними двома точками вона містить відрізок, що з'єднує ці точки. Це означає, що якщо $a, b \in A$, то $\lambda a + (1 - \lambda) b \in A$, де $\lambda \in [0, 1]$.

Означення 17.3. Опуклою комбінацією точок $\{x_1, ..., x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ називається точка $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, де $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., k$.

Означення 17.4. Опуклою оболонкою множини $A \subset \mathbb{R}^n$ називається найменша опукла множина з $\mathbb{R}^n$, що містить множину A.

Опукла оболонка множини A позначається coA. Замкненою опуклою оболонкою множини A називається замикання множини coA і позначається $\overline{co}A$. Відзначимо деякі властивості опуклих множин:

1) перетин довільного числа опуклих множин є опуклою множиною;

2) алгебраїчна сума двох опуклих множин є опуклою множиною;

3) добуток опуклої множини на скаляр є опуклою множиною;

4) опукла оболонка множини A є перетином всіх опуклих множин, що містять множину A.

Перелічені властивості доводяться за означенням опуклої множини і опуклої оболонки. Справджується така лема.

Лема 17.3. *Опукла оболонка множини $A \subset \mathbb{R}^n$ складається з усіх опуклих комбінацій точок, що належать A.*

Більш того, має місце таке твердження.

Лема 17.4 (Каратеодорі)**.** *В просторі $\mathbb{R}^n$ будь-яку точку з coA, $A \subset \mathbb{R}^n$, можна представляти як опуклу комбінацію не більше ніж $n + 1$ точки, що належать A. Тобто, $\forall x \in coA$ $\exists \{x_1, ..., x_r\} \subset A$ такі, що $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., r$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$, $r \leq n + 1$.*

Ще одна важлива властивість опуклих множин – віддільність. Зокрема, має місце така лема.

Лема 17.5 (про строгу віддільність)**.** *Якщо $A \subset \mathbb{R}^n$ є опукла замкнена множина і $x \notin A$, то знайдуться $\gamma \in \mathbb{R}^1$ і $\psi_0 \in \mathcal{S}$ такі, що для довільного $a \in A$*

$$\langle a, \psi_0 \rangle \leq \gamma, \ \langle x, \psi_0 \rangle > \gamma,$$

де $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Зауважимо, що опукла оболонка компакту в $\mathbb{R}^n$ є компакт.

Додаток

Обгрунтування леми 17.3.

Лема 17.6. *Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ – опукла множина. Якщо $\{x_1, ..., x_m\} \subset A$, то їхня опукла комбінація*

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m \in A,$$

де $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Доведення. За індукцією. Для випадку $m = 2$ ми маємо, що з $x_1, x_2 \in A$ випливає, що $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$ при $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, оскільки множина A – опукла.

Припустимо, що для $m = k$ твердження леми виконується, де k – довільне натуральне число, що більше 3. Для $m = k+1$ потрібно показати, що точка

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{k+1} x_{k+1}$$

належить A, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., k+1$.

Якщо $\lambda_{k+1} = 0$, то тоді $x \in A$ за припущенням індукції. Якщо $\lambda_{k+1} = 1$, то тоді $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$ і $x = x_{k+1} \in A$. Отже, припускаємо, що $\lambda_{k+1} \in (0, 1)$. Точка

$$y = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} x_1 + ... + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} x_k \in A$$

за припущенням індукції, оскільки $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} \geq 0$, $i = 1, 2, ..., k$,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = \frac{\lambda_1 + ... + \lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = \frac{1 - \lambda_{k+1}}{1 - \lambda_{k+1}} = 1.$$

Тоді $x = \lambda_{k+1} x_{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) y \in A$, оскільки A – опукла множина. □

З леми 17.6 випливає, що оскільки $A \subset coA$ та coA – опукла множина, то опукла комбінація точок з A міститься в coA. З іншого боку має місце така лема.

Лема 17.7. *Сукупність опуклих комбінацій точок з множини $A \subset \mathbb{R}^n$ є опуклою множиною, що містить A.*

Доведення. Нехай P – сукупність опуклих комбінацій точок з множини A. Це означає, що для точок $u \in P$, $v \in P$ існують точки $\{x_1, ..., x_k\} \subset A$, $\{y_1, ..., y_m\} \subset A$ такі, що

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, v = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j,$$

де $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., k$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., m$, $\sum_{j=1}^{m} \mu_j = 1$. Оскільки для $\sigma \in [0, 1]$ мають місце $\sigma\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., k$, $(1-\sigma)\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., m$ і

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\sigma)\mu_j = \sigma \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + (1-\sigma) \sum_{j=1}^{m} \mu_j = \sigma + 1 - \sigma = 1,$$

то

$$\sigma u + (1-\sigma)v = \sum_{i=1}^{k} \sigma\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (1-\sigma)\mu_j y_j \in P.$$

Всі точки з множини A містяться в P, оскільки $x = \lambda x + (1-\lambda)x$, $\lambda \in [0, 1]$. $\square$

Отже, з одного боку множина опуклих комбінацій з A міститься в множині coA, з іншого боку вона є опуклою множиною, що містить A, а тому містить і coA. Це обгрунтовує лему 17.3.

Лекція 18

Опорні функції

Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ – компакт.

Означення 18.1. Опорною функцією множини $A \subset \mathbb{R}^n$ називається функція

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle ,$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Приклад 18.1. Нехай $A = \{a\} \subset \mathbb{R}^n$. Тоді $c(A, \psi) = \langle a, \psi \rangle$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Приклад 18.2. Якщо $A = \{a_1, \dots a_k\} \subset \mathbb{R}^n$, то $c(A, \psi) = \max\limits_{i=1,2,\dots,k} \langle a_i, \psi \rangle$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Приклад 18.3. Нехай $A = \mathcal{K}_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Тоді $c(A, \psi) = \max\limits_{a \in \mathcal{K}_1(0)} \langle a, \psi \rangle$. Знайдемо максимум в правій частині рівності. З нерівності Шварца

$$\max_{a \in \mathcal{K}_1(0)} \langle a, \psi \rangle = \max_{\|a\| \le 1} \langle a, \psi \rangle \le \|\psi\| .$$

При цьому для $a_* = \frac{\psi}{\|\psi\|} \in \mathcal{K}_1(0)$ маємо $\langle a_*, \psi \rangle = \|\psi\|$. Отже $c(A, \psi) = \|\psi\|$.

Розглянемо елементарні властивості опорної функції. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ – компакти, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, M – матриця розмірності $n \times n$. Тоді $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ маємо

1. $c(\lambda A, \psi) = c(A, \lambda \psi)$;
2. $c(\lambda A, \psi) = \lambda c(A, \psi)$, де $\lambda > 0$;
3. $c(A + B, \psi) = c(A, \psi) + c(B, \psi)$;

4. $c(MA, \psi) = c(A, M^*\psi)$;

5. $c(A, \psi_1 + \psi_2) \le c(A, \psi_1) + c(A, \psi_2)$, де $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$.

Доведення перших двох властивостей випливає з означення 18.1, четверта властивість справджується оскільки $\langle Ma, \psi\rangle = \langle a, M^*\psi\rangle$. Доведемо третю та п'яту властивості.

За означенням опорних функцій

$$c(A+B, \psi) = \max_{x\in A+B} \langle x, \psi\rangle = \max_{a\in A, b\in B} \langle a+b, \psi\rangle =$$
$$= \max_{a\in A} \langle a, \psi\rangle + \max_{b\in B} \langle b, \psi\rangle = c(A, \psi) + c(B, \psi).$$

Остання нерівність випливає з того, що максимум суми двох функцій не перевищує суму максимумів цих функцій. Тому

$$c(A, \psi_1 + \psi_2) = \max_{a\in A} \langle a, \psi_1 + \psi_2\rangle \le \max_{a\in A} \langle a, \psi_1\rangle + \max_{a\in A} \langle a, \psi_2\rangle.$$

Приклад 18.4. Знайдемо опорну функцію довільної кулі. Одержуємо

$$c(\mathcal{K}_r(a), \psi) = c(a + \mathcal{K}_r(0), \psi) = \langle a, \psi\rangle + c(r\mathcal{K}_1(0), \psi) =$$
$$= \langle a, \psi\rangle + rc(\mathcal{K}_1(0), \psi) = \langle a, \psi\rangle + r\|\psi\|, \ \ \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Приклад 18.5. Знайдемо опорну функцію еліпсоїда

$$\mathcal{E}(a, Q) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle Q^{-1}(x-a), x-a\right\rangle \le 1\right\},$$

де $a \in \mathbb{R}^n$ – центр еліпсоїда, Q – $n \times n$ - симетрична додатновизначена матриця. Подамо матрицю Q у вигляді $Q = M^2 = MM^*$, M є $n\times n$ - симетрична додатновизначена матриця, яка називається коренем квадратним матриці Q. За означенням суми множин і з прикладу 17.5 випливає, що

$$\mathcal{E}(a, Q) = a + \mathcal{E}(0, Q) = a + M\mathcal{K}_1(0).$$

З елементарних властивостей опорної функції і прикладу 18.4 слідує

$$c(\mathcal{E}(a, Q), \psi) = \langle a, \psi\rangle + c(M\mathcal{K}_1(0), \psi) = \langle a, \psi\rangle + c(\mathcal{K}_1(0), M^*\psi) =$$
$$= \langle a, \psi\rangle + \|M\psi\| = \langle a, \psi\rangle + \sqrt{\langle M\psi, M\psi\rangle} = \langle a, \psi\rangle + \sqrt{\langle Q\psi, \psi\rangle}, \ \ \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Означення 18.2. Множина

$$\Gamma(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi\rangle = c(A, \psi)\}$$

називається опорною гіперплощиною, при цьому вектор $\psi \in \mathbb{R}^n$ називається опорним.

З'ясуємо геометричній зміст опорної функції. Для цього розв'яжемо задачу на умовній екстремум

$$\inf_{\langle x,\psi\rangle=b} \|x\|\,,$$

де $\psi \in \mathcal{S}$, $b \in \mathbb{R}^1$ – деяке число, $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$. Використаємо нерівність Шварца $\|x\|\|\psi\| = \|x\| \geq |\langle x,\psi\rangle|$, де $\psi \in \mathcal{S}$. Отже,

$$\min_{\langle x,\psi\rangle=b} \|x\| \geq |b|\,.$$

З іншого боку при $x_* = b\psi$ ми одержуємо $\|x_*\| = |b|\|\psi\| = |b|$. Оскільки $\langle x_*,\psi\rangle = b$, то $\min\limits_{\langle x,\psi\rangle=b} \|x\| = |b|$.

Геометричний зміст задачі на умовний екстремум $\min\limits_{\langle x,\psi\rangle=b} \|x\|$ полягає у знаходженні найменшої відстані від гіперплощини

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,\psi\rangle = b\}$$

до початку координат. Звідси одержуємо

$$\min_{x\in\Gamma(\psi)} \|x\| = |c\,(A,\psi)|\,, \psi \in \mathcal{S},$$

де $\Gamma\,(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,\psi\rangle = c\,(A,\psi)\}$ – опорна гіперплощина. Отже, геометричний зміст опорної функції є таким: *модуль опорної функції показує відстань від початку координат до опорної гіперплощини.* Має місце таке твердження.

Лема 18.1. *Нехай $A \in comp\,(\mathbb{R}^n)$. Тоді $c\,(A,\psi) = c\,(coA,\psi)$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.*

Доведення. Оскільки $A \subset coA$, то $\max\limits_{a\in A} \langle a,\psi\rangle \leq \max\limits_{a\in coA} \langle a,\psi\rangle$. Тобто, справджується $c\,(A,\psi) \leq c\,(coA,\psi)$.

Покажемо, що має місце зворотна нерівність. За лемою Каратеодорі (див. сторінку 191), якщо $x \in coA$, то $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, де $\{x_1,\ldots,x_{n+1}\} \subset A$, , $\lambda_i \geq 0$, , $i = 1,2,\ldots,n+1$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Тому

$$c(coA,\psi)=\max\nolimits_{x\in coA}\langle x,\psi\rangle=$$
$$\max\left\{\left\langle\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\ ,\psi\right\rangle : x_i\in A,\lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1\right\}=$$
$$=\max\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\left\langle\ x_i,\psi\right\rangle\ : x_i\in A,\lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1\right\}\leq$$
$$\leq\max\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\left\{\max\left(\left\langle\ x_i,\psi\right\rangle\ : x_i\in A\right) : \lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1\right\}=$$
$$=\max\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i c\left(A,\psi\right) : \lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1\right\}=c\left(A,\psi\right).$$

Отже, $c\left(coA,\psi\right)\leq c\left(A,\psi\right)$. □

Означення 18.3. Нормою множини $A\in comp(\mathbb{R}^n)$ називається число

$$\|A\|=\max\left\{\|a\| : a\in A\right\}.$$

Норма множини встановлює найменший радіус кулі з центром в точці 0, що містить множину A, тобто

$$\|A\|=\min\left\{r\geq 0 : A\subseteq\mathcal{K}_r(0)\right\}.$$

Для опорної функції $c(A,\psi)$ справджується умова Ліпшиця за другим аргументом з константою Ліпшиця $\|A\|$, а саме, має місце таке твердження.

Лема 18.2. *Якщо* $A\in comp(\mathbb{R}^n)$, $\psi,\xi\in\mathbb{R}^n$, *то*

$$|c(A,\psi)-c(A,\xi)|\leq\|A\|\cdot\|\psi-\xi\|.$$

Доведення. За властивостями опорної функції (лекція 18) маємо

$$c(A,\psi)=c(A,\psi-\xi+\xi)\leq c(A,\psi-\xi)+c(A,\xi).$$

Звідси

$$c(A,\psi)-c(A,\xi)\leq c(A,\psi-\xi). \qquad (18.1)$$

Міняючи місцями ψ і ξ в (18.1), отримуємо нерівність

$$c(A,\xi)-c(A,\psi)\leq c(A,\xi-\psi). \qquad (18.2)$$

Для довільної точки $\varphi \in \mathbb{R}^n$ з нерівності Шварца маємо

$$c\,(A, \varphi) = \max_{a \in A} \langle a, \varphi \rangle \le \max_{a \in A} \|a\| \|\varphi\| = \|A\| \cdot \|\varphi\|\,.$$

Враховуючи останню нерівність, з формул (18.1), (18.2) одержуємо

$$c(A, \psi) - c(A, \xi) \le \|A\| \cdot \|\psi - \xi\|\,,\; c(A, \xi) - c(A, \psi) \le \|A\| \cdot \|\psi - \xi\|\,.$$

□

З леми випливає неперервність опорної функції за другим аргументом.

Лема 18.3. *Нехай $A \in comp(\mathbb{R}^n)$. Тоді*

$$coA = \bigcap_{\psi \in \mathcal{S}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \le c(A, \psi)\}\,. \tag{18.3}$$

Доведення. Необхідність. Якщо $x \in coA$, то

$$\langle x, \psi \rangle \le \max_{a \in coA} \langle a, \psi \rangle \; = c\,(coA, \psi) = c\,(A, \psi)\,, \forall \psi \in \mathcal{S}.$$

Тому x належить правій частині рівності (18.3).

Достатність. Якщо $x \notin coA$, то за лемою про строгу віддільність (див. сторінку 191) знайдуться $\gamma \in \mathbb{R}^1$, $\psi_0 \in \mathcal{S}$ такі, що для довільного $a \in A$

$$\langle a, \psi_0 \rangle \le \gamma,\;\; \langle x, \psi_0 \rangle > \gamma.$$

Звідси $\max_{a \in coA} \langle a, \psi_0 \rangle \le \gamma < \langle x, \psi_0 \rangle$. Тому $c\,(coA, \psi_0) = c\,(A, \psi_0) < \langle x, \psi_0 \rangle$. Це означає, що x не належить правій частині рівності (18.3). □

Наслідок 1. Якщо $A \in conv\,(\mathbb{R}^n)$, то

$$A = \bigcap_{\psi \in \mathcal{S}} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \psi \rangle \le c(A, \psi)\}\,.$$

Наслідок 2. Нехай $A \in conv\,(\mathbb{R}^n)$. Тоді $a \in A$ тоді і тільки тоді, коли $\langle a, \psi \rangle \le c(A, \psi)$.

Це випливає з наслідку 1.

Наслідок 3. Нехай $A \in conv\,(\mathbb{R}^n)$, $B \in conv\,(\mathbb{R}^n)$. Тоді

$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow c\,(A, \psi) \le c\,(B, \psi)\, \forall \psi \in \mathcal{S}.$$

Доведення. Необхідність. Якщо $A \subseteq B$, тоді $\forall a \in A$ маємо $a \in B$. За наслідком 2

$$\langle a, \psi \rangle \leq c(B, \psi), \ \psi \in \mathcal{S}$$

і тому $c(A, \psi) = \max\limits_{a \in A} \langle a, \psi \rangle \leq c(B, \psi)$, $\psi \in \mathcal{S}$.

Достатність. Якщо $c(A, \psi) \leq c(B, \psi)$, $\psi \in \mathcal{S}$, то $\forall a \in A$ маємо

$$\langle a, \psi \rangle \leq c(A, \psi) \leq c(B, \psi), \ \psi \in \mathcal{S}.$$

За наслідком 2 точка $a \in B$, тобто $A \subseteq B$. $\square$

Наслідок 4. Якщо $A, B \in conv(\mathbb{R}^n)$, то $A = B \Leftrightarrow c(A, \psi) = c(B, \psi)$, $\psi \in \mathcal{S}$.

Доведення. Оскільки $A = B$, то це означає, що $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ одночасно. Тому за наслідком 3 це еквівалентно $c(A, \psi) \leq c(B, \psi)$ і $c(B, \psi) \leq c(A, \psi)$, $\psi \in \mathcal{S}$. Тобто $c(A, \psi) = c(B, \psi)$, $\psi \in \mathcal{S}$. $\square$

Наслідок 5. Якщо $x \notin A$, $A \in conv(\mathbb{R}^n)$, то знайдеться $\psi \in \mathcal{S}$ таке, що $\langle x, \psi \rangle > c(A, \psi)$.

Наслідок 6. Якщо $A \in conv(\mathbb{R}^n)$, тоді

$$x \in intA \ \Leftrightarrow \langle x, \psi \rangle < c(A, \psi),$$

для всіх $\psi \in \mathcal{S}$.

Доведення. Точка $x \in intA \ \Leftrightarrow \ \exists \sigma > 0$ таке, що $\mathcal{K}_\sigma(x) \subseteq A$. За наслідком 3 це еквівалентно умові

$$c(\mathcal{K}_\sigma(x), \psi) \leq c(A, \psi)$$

$\forall \psi \in \mathcal{S}$, тобто

$$\langle x, \psi \rangle + \sigma \|\psi\| = \langle x.\psi \rangle + \sigma \leq c(A, \psi),$$

$\psi \in \mathcal{S}$. Звідси одержуємо справедливість наслідку. $\square$

Наслідок 7. Якщо $A, B \in conv(\mathbb{R}^n)$, тоді

$$B \subset intA \ \Leftrightarrow c(B, \psi) < c(A, \psi),$$

для всіх $\psi \in \mathcal{S}$.

Доведення. Дійсно, якщо $B \subset intA$, то згідно наслідку 6 $\langle x, \psi \rangle < c(A, \psi)$ для всіх $x \in B$, зокрема і для таких $x \in B$, для яких $\langle x, \psi \rangle$ досягає максимуму при кожному фіксованому $\psi \in \mathcal{S}$. Тому $c(B, \psi) < c(A, \psi)$, $\psi \in \mathcal{S}$.

І навпаки, з $c(B, \psi) < c(A, \psi)$, $\psi \in \mathcal{S}$ випливає, що $\langle x, \psi \rangle < c(A, \psi)$ для всіх $x \in B$, $\psi \in \mathcal{S}$. За наслідком 6 $x \in intA$. Тому $B \subset intA$. $\square$

Наслідок 8. Якщо $A \in conv\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, то $x \in \partial A \;\Leftrightarrow \langle x, \psi\rangle \leq c\left(A, \psi\right)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}$ та знайдеться $\psi_0 \in \mathcal{S}$, для якого $\langle x, \psi_0\rangle = c(A, \psi_0)$.

Цей наслідок випливає відразу з наслідку 6, оскільки $A = \partial A \bigcup intA$.

Наслідок 9. Якщо $A \in conv\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, то $0 \in A$ тоді і тільки тоді, коли $0 \leq c\left(A, \psi\right)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}$. При цьому, для того, щоб $0 \in intA$, необхідно і достатньо $c\left(A, \psi\right) > 0$, $\forall \psi \in \mathcal{S}$.

Приклад 18.6. Розглянемо кулю $\mathcal{K}_1\left(0\right)$. Для неї представлення (18.3) має вигляд

$$\mathcal{K}_1\left(0\right) = \bigcap_{\psi \in \mathcal{S}} \left\{x \in \mathbb{R}^{n} : \langle x, \psi\rangle \leq 1\right\}.$$

Приклад 18.7. Запишемо умову $\mathcal{K}_r\left(a\right) \subseteq \mathcal{K}_m\left(b\right)$ в термінах опорних функцій, $a \in \mathbb{R}^{n}$, $b \in \mathbb{R}^{n}$. Маємо

$$c\left(\mathcal{K}_r\left(a\right), \psi\right) \leq c\left(\mathcal{K}_m\left(b\right), \psi\right), \;\psi \in \mathcal{S},$$

звідки

$$\langle a, \psi\rangle + r\left\|\psi\right\| \leq \langle b, \psi\rangle + m\left\|\psi\right\|, \;\psi \in \mathcal{S}.$$

У такий спосіб

$$\langle a - b, \psi\rangle \leq m - r, \;\forall \psi \in \mathcal{S}$$

і тому $\max_{\psi \in \mathcal{S}} \langle\, a - b, \psi\rangle \;\leq m - r$. Остаточна умова має вигляд

$$\left\|a - b\right\| \leq m - r.$$

Лекція 19

Чебишевський центр

Для будь-якої непорожньої замкненої обмеженої множини A, що лежить в $\mathbb{R}^n$ визначимо число

$$\rho(A) = \inf\{r \geq 0 : \exists x \in \mathbb{R}^n \ A \subseteq K_r(x)\}.$$

Тобто, $\rho(A)$ дорівнює радіусу найменшої кулі, що містить множину A.

Означення 19.1. Чебишевським центром множини A називається точка $c(A) \in \mathbb{R}^n$, яка задовольняє включенню

$$A \subseteq K_{\rho(A)}(c(A)).$$

Отже, чебишевський центр множини A є точкою з простору $\mathbb{R}^n$ такою, що існує куля найменшого радіусу з центром в чебишевському центрі, яка містить цю множину.

Приклад 19.1. Чебишевським центром відрізка $A = [a, b]$, $a \neq b$ є середина цього відрізка $c(A) = \frac{a+b}{2}$. Зрозуміло, що $c(A) \in [a, b]$.

Точка $c = \frac{a+b}{2}$ є чебишевським центром двоточкової множини $\{a, b\}$, але $c \notin \{a, b\}$.

Приклад 19.2. Якщо $A = K_r(a)$, то за означенням чебишевського центру $c(A) = a$, $r = \rho(A)$.

Лема 19.1 (про існування та єдиність чебишевського центру)**.** *Для довільної замкненої обмеженої непорожньої опуклої множини $A \subset \mathbb{R}^n$ існує чебишевський центр $c(A) \in \mathbb{R}^n$ і він є единим.*

Доведення. Виберемо точки $x_i \in \mathbb{R}^n$ та $r_i > 0$ такі, що $r_i \to \rho(A)$, $i \to \infty$, при цьому $A \subset K_{r_i}(x_i)$. Звідси за властивостями опорних функцій (лема 18.3 і наслідки з неї, стор. 198)

$$c(A, \psi) \leq \langle x_i, \psi \rangle + r_i \|\psi\|, \ \psi \in \mathbb{R}^n, \ i = 1, 2, \ldots.$$

Оскільки множина A є обмеженою, то послідовність $\{x_i\}$ є обмеженою, інакше $r_i \to +\infty$. Тобто $\exists R > 0$ таке, що $\{x_i\} \subset K_R(0)$. Оскільки $K_R(0)$ – компакт, то виділимо з послідовності x_i збіжну підпослідовність $x_{ij} \to z_0, j \to +\infty$. Тоді при $j \to +\infty$ маємо

$$c(A, \psi) \leq \langle z_0, \psi \rangle + \rho(A) \|\psi\|, \ \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Отже, $A \subseteq K_{\rho(A)}(z_0)$. Тобто, $\exists z_0 \in \mathbb{R}^n$, яке є чебишевським центром. Припустимо, що існує інша точка z_1, яка є чебишевським центром для множини A. За означенням чебишевського центру

$$A \subseteq K_{\rho(A)}(z_1).$$

Тоді

$$A \subset K_{\rho(A)}(z_0) \cap K_{\rho(A)}(z_1) \subset K_{\rho_0}\left(\frac{z_0 + z_1}{2}\right),$$

де $\rho_0 = \sqrt{\rho^2(A) - \frac{\|z_0 - z_1\|^2}{4}} < \rho(A)$. Отже, одержали протиріччя з означенням чебишевського центру. Тобто, чебишевський центр єдиний.

$\square$

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – опукла множина.

Означення 19.2. Функція $f : X \to \mathbb{R}^1$ називається сильно опуклою на X, якщо знайдеться константа $\mathcal{K} > 0$ така, що для довільних x, y з X і будь-якого $\alpha \in [0, 1]$ має місце нерівність

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x) - \frac{1}{2}\mathcal{K}\alpha(1-\alpha)\|x - y\|^2.$$

Константу $\mathcal{K}$ називають *константою сильної опуклості* функції f на множині X. Можна показати, що у сильно опуклої напівнеперервної знизу функції існує на замкненій опуклій множині мінімум, який досягається в єдиній точці [17].

Приклад 19.3. Розглянемо в $\mathbb{R}^n$ функцію $f(x) = \|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Для довільних x, y з $\mathbb{R}^n$ і будь-якого $\alpha \in [0, 1]$ має місце рівність

$$\begin{gathered}
f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 = \langle \alpha x + (1-\alpha)y, \alpha x + (1-\alpha)y \rangle = \\
= \alpha^2 \langle x, x \rangle + (1-\alpha)^2 \langle y, y \rangle + 2\alpha(1-\alpha) \langle x, y \rangle = \\
= \alpha \langle x, x \rangle + (1-\alpha) \langle y, y \rangle + \left(\alpha^2 - 1\right) \langle x, x \rangle + \\
+ \left((1-\alpha)^2 - 1\right) \langle y, y \rangle + 2\alpha(1-\alpha) \langle x, y \rangle = \\
= \alpha \langle x, x \rangle + (1-\alpha) \langle y, y \rangle - \alpha(1-\alpha)\left(\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle\right) = \\
= \alpha \langle x, x \rangle + (1-\alpha) \langle y, y \rangle - \alpha(1-\alpha)\|x - y\|^2.
\end{gathered}$$

Отже,

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)=\alpha f\left(x\right)+(1-\alpha)f\left(y\right)-\alpha\left(1-\alpha\right)\left\|x-y\right\|^{2}.$$

За означенням 19.2 функція f є сильно опуклою на $\mathbb{R}^n$ з константою сильної опуклості $\mathcal{K}=2$.

Приклад 19.4. Розглянемо функцію

$$g\left(y\right)=\sup_{x\in A}\left\|x-y\right\|^{2},$$

де $A\subset\mathbb{R}^n$ – компакт, $y\in\mathbb{R}^n$. Функція g є сильно опуклою, тобто при $\mathcal{K}=2$ має місце означення 19.2. Справді, з прикладу 19.3 для $x\in A$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ випливає

$$\begin{aligned}\left\|x-\left(\alpha x_1+\left(1-\alpha\right)x_2\right)\right\|^{2}&=\left\|\alpha\left(x-x_1\right)+\left(1-\alpha\right)\left(x-x_2\right)\right\|^{2}=\\&=\alpha\left\|x-x_1\right\|^{2}+\left(1-\alpha\right)\left\|x-x_2\right\|^{2}-\alpha\left(1-\alpha\right)\left\|x_1-x_2\right\|^{2}.\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{gathered}\sup_{x\in A}\left\|x-\left(\alpha x_1+\left(1-\alpha\right)x_2\right)\right\|^{2}\leq\\\leq\alpha\sup_{x\in A}\left\|x-x_1\right\|^{2}+\left(1-\alpha\right)\sup_{x\in A}\left\|x-x_2\right\|^{2}-\alpha\left(1-\alpha\right)\left\|x_1-x_2\right\|^{2},\end{gathered}$$

Це означає, що

$$g\left(\alpha x_1+\left(1-\alpha\right)x_2\right)\leq\alpha g\left(x_1\right)+\left(1-\alpha\right)g\left(x_2\right)-\alpha\left(1-\alpha\right)\left\|x_1-x_2\right\|^{2},$$

де $\alpha\in[0,1]$.

Лема 19.2. *Чебишевський центр опуклої замкненої обмеженої множини $A\subset\mathbb{R}^n$ є розв'язком екстремальної задачі*

$$\min_{a\in A}g\left(a\right),$$

де $g\left(a\right)=\sup\limits_{x\in A}\left\|x-a\right\|^{2}$. Крім того, чебишевський центр є розв'язком такої екстремальної задачі $\min\limits_{a\in\mathbb{R}^n}g\left(a\right)$. Тобто,

$$g\left(c\left(A\right)\right)=\min_{a\in A}g\left(a\right)=\min_{a\in\mathbb{R}^n}g\left(a\right).$$

Доведення. З прикладу 19.4 випливає, що функція g є сильно опуклою. Сильно опукла функція на замкненій опуклій множині досягає мінімуму в єдиній точці. Позначимо точку a_0 з умови

$$g(a_0) = \min_{a \in A} g(a).$$

Визначимо $\rho = \sqrt{g(a_0)}$. Тоді $\forall x \in A$ маємо $\|x - a_0\| \le \rho$. Отже, $A \subset K_\rho(a_0)$, причому $\forall r < \rho$ $\exists x_r \in A$ такі, що $\|x_r - a_0\| > r$. Звідси $a_0 = c(A)$ та $\rho = \rho(A)$.

Покажемо, що

$$\min_{a \in \mathbb{R}^n} g(a) = \min_{a \in A} g(a) = g(c(A)).$$

Оскільки $\lim\limits_{\|a\| \to +\infty} g(a) = +\infty$ та функція g є сильно опуклою, то існує куля $K_r(0)$ така, що $\min\limits_{a \in K_r(0)} g(a) = g(u)$. Покажемо, що $u \in A$. Припустимо, що $u \notin A$. Розглянемо функцію $f(x) = \|x - u\|^2$, де $x \in A$. Оскільки $f(x)$ – опукла функція, то в точці $f(x_*) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ маємо

$$\langle f'(x_*), x - x_* \rangle \ge 0$$

для всіх $x \in A$ (теорема 21.3, стор. 220). Знаходимо похідну

$$f'(x_*) = 2(x_* - u).$$

Підставляючи знайдену похідну в передостаннє співвідношення, отримуємо

$$\langle x_* - u, x - x_* \rangle \ge 0 \ \forall x \in A.$$

При цьому $x_* \in A$. Отже, точка x_* є проекцією точки u на множину A. Звідси

$$\begin{gathered} \|x - u\|^2 = \|x - x_* - (u - x_*)\|^2 = \\ = \|x - x_*\|^2 + \|u - x_*\|^2 - 2\langle x - x_*, u - x_* \rangle \ge \\ \ge \|x - x_*\|^2 + \|u - x_*\|^2 - \langle x - x_*, u - x_* \rangle \end{gathered}$$

в силу останньої нерівності. Далі

$$\begin{gathered} \|x - x_*\|^2 + \|u - x_*\|^2 - \langle x - x_*, u - x_* \rangle = \\ = \|x - x_*\|^2 - 2\left\langle x - x_*, \frac{u - x_*}{2} \right\rangle + \frac{1}{4}\|u - x_*\|^2 + \frac{3}{4}\|u - x_*\|^2 = \\ = \left\| x - x_* - \frac{u - x_*}{2} \right\|^2 + \frac{3}{4}\|u - x_*\|^2 > \left\| x - \frac{u - x_*}{2} \right\|^2, \end{gathered}$$

оскільки $u \neq x_*$. Отже,

$$\|x-u\|^2 > \left\|x - \frac{u-x_*}{2}\right\|^2$$

і тому $g(u) > g\left(\frac{u-x_*}{2}\right)$. А це протирічить визначенню точки u. $\square$

Наслідок. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ – замкнена обмежена непорожня опукла множина. Тоді чебишевський центр $c(A) \in A$.

Приклад 19.5. Нехай

$$A = \mathcal{E}(x_0, Q) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle Q^{-1}(x-x_0), x-x_0\right\rangle \leq 1\right\},$$

Тут Q – додатновизначена симетрична матриця розмірності $n \times n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Точка $c(A) = x_0$ є чебишевським центром узагальненого еліпсоїда A, при цьому чебишевський радіус дорівнює

$$\rho(A) = \|\mathcal{E}(0, Q)\| = \sqrt{\lambda_*(Q)},$$

де $\lambda_*(Q)$ – максимальне власне число матриці Q.

Лекція 20

Елементи теорії багатозначних відображень

20.1 Метрика Хаусдорфа

Як і раніше, позначимо $comp(\mathbb{R}^n)$ – сукупність непорожніх компактів з $\mathbb{R}^n$. Якщо $B \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, то можемо визначити відстань від точки $a \in \mathbb{R}^n$ до множини $B \subset \mathbb{R}^n$ як найменша відстань від точок з множини B до точки a, а саме

$$\rho(a, B) = \min_{b \in B} \|a - b\| \tag{20.1}$$

З (20.1) і означення 17.1 випливає, що окіл множини

$$\mathcal{K}_\varepsilon(B) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, B) \leq \varepsilon\}.$$

За допомогою відстані (20.1) визначається функція, яка називається відхиленням. Нехай $A \in comp(\mathbb{R}^n)$, $B \in comp(\mathbb{R}^n)$. *Відхиленням* множини A від множини B називається

$$\beta(A, B) = \max_{a \in A} \rho(a, B).$$

Відхилення множини A від множини B показує яка є найбільша відстань точок з множини A до множини B. Властивості відхилення є такими:

1) $\beta(A, B) \geq 0$;

2) $A \subseteq B \Leftrightarrow \beta(A, B) = 0$;

3) не завжди $\beta(A, B) = \beta(B, A)$.

Перша властивість є наслідком невід'ємності норми в формулі (20.1). Друга властивість випливає з того, що якщо $A \subseteq B$, то $\rho(a, B) = 0$ для всіх точок a з A. І навпаки, якщо для $\forall a \in A$ має місце $\rho(a, B) = 0$, то це означає, що $a \in B$ і тому $A \subseteq B$.

Третя властивість доводиться за допомогою контрприкладу. Візмемо дві множини $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$. Тоді $\beta(A, B) = 0$, оскільки $A \subseteq B$. Але $\beta(B, A) \neq 0$, так як $\beta(B, A) = \|a - b\|$.

Приклад 20.1. Нехай $A = \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, $B = \mathcal{K}_1(0)$. Тоді $\beta(A, B) = 0$, а $\beta(B, A) = 1$, оскільки максимальна відстань від B до A рівна відстані від точки 0 до довільної точки з $\mathcal{S}$.

Має місце така лема.

Лема 20.1. *Відхилення від множини $A \in comp(\mathbb{R}^n)$ до множини $B \in comp(\mathbb{R}^n)$ можна подати у вигляді*

$$\beta(A, B) = \min \{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B^\varepsilon\},$$

де $B^\varepsilon = B + \mathcal{K}_\varepsilon(0)$ – ε-окіл множини B.

Доведення. Необхідність. Нехай $\beta(A, B) = \sigma$. Це означає,що

$$\max_{a \in A} \rho(a, B) = \sigma.$$

Тобто, $\forall a \in A$ маємо $\rho(a, B) \leq \sigma$. Отже $\min\limits_{b \in B} \|a - b\| \leq \sigma$, і оскільки $B \in comp(\mathbb{R}^n)$, то $\exists b \in B$ таке, що $\|a - b\| \leq \sigma$. Тобто, $a \in \mathcal{K}_\sigma(b)$ і тому

$$a \in b + \mathcal{K}_\sigma(0) \subseteq B + \mathcal{K}_\sigma(0).$$

Отже, в силу того, що точка $a \in A$ є довільною, маємо $A \subseteq B + \mathcal{K}_\sigma(0)$, тобто $A \subseteq B^\sigma$. Звідси маємо, що

$$\min \{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B^\varepsilon\} \leq \sigma = \beta(A, B). \tag{20.2}$$

Достатність. Нехай

$$\mu = \min \{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B^\varepsilon\}.$$

Тобто, $\forall a \in A$ маємо $a \in B^\varepsilon$ при $\varepsilon \geq \mu$. За означенням ε -околу

$$\max_{a \in A} \rho(a, B) \leq \varepsilon,$$

а тому $\beta(A, B) \leq \varepsilon$. Оскільки $\varepsilon \geq \mu$ – довільне, то нерівність $\beta(A, B) \leq \varepsilon$ виконується також і при $\varepsilon = \mu$, тобто

$$\beta(A, B) \leq \mu = \min \{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B^\varepsilon\}. \tag{20.3}$$

Звідси, з формул (20.2) і (20.3) одержуємо справедливість леми. □

Позначимо $conv(\mathbb{R}^n)$ – сукупність непорожніх опуклих компактів з $\mathbb{R}^n$.

Лема 20.2. *Нехай $A \in conv(\mathbb{R}^n)$, $B \in conv(\mathbb{R}^n)$. Тоді*

$$\beta(A,B) = \max_{\psi\in\mathcal{S}} \{c(A,\psi) - c(B,\psi)\},$$

за умови $\max_{\psi\in\mathcal{S}} \{c(A,\psi) - c(B,\psi)\} \geq 0$. Якщо $\max_{\psi\in\mathcal{S}} \{c(A,\psi) - c(B,\psi)\} < 0$, то $\beta(A,B) = 0$.

Доведення. Якщо

$$\max_{\psi\in\mathcal{S}} \{c(A,\psi) - c(B,\psi)\} < 0,$$

то $c(A,\psi) < c(B,\psi)$ для всіх $\psi \in \mathcal{S}$. За властивостями опорної функції $A \subset B$, звідси $\beta(A,B) = 0$.

Розглянемо випадок

$$\max_{\psi\in\mathcal{S}} \{c(A,\psi) - c(B,\psi)\} \geq 0.$$

З леми 20.1 випливає, що якщо $\varepsilon = \beta(A,B)$, то $A \subseteq B^\varepsilon$. Оскільки множини A, B^ε є опуклими компактами і $B^\varepsilon = B + \mathcal{K}_\varepsilon(0)$, то

$$c(A,\psi) \leq c(B^\varepsilon,\psi) = c(B + \mathcal{K}_\varepsilon(0),\psi) =$$
$$= c(B,\psi) + c(\mathcal{K}_\varepsilon(0),\psi) = c(B,\psi) + \varepsilon\,\|\psi\|\,, \ \forall\psi \in \mathcal{S}.$$

Оскільки $\|\psi\| = 1$, то $\forall\psi \in \mathcal{S}$ маємо $c(A,\psi) - c(B,\psi) \leq \varepsilon$. Звідси

$$\max_{\psi\in\mathcal{S}} \{c(A,\psi) - c(B,\psi)\} \leq \varepsilon = \beta(A,B). \tag{20.4}$$

І навпаки, якщо $\varepsilon = \max_{\psi\in\mathcal{S}} \{c(A,\psi) - c(B,\psi)\}$, то $\forall\psi \in \mathcal{S}$ маємо $\varepsilon \geq c(A,\psi) - c(B,\psi)$. Тоді

$$c(A,\psi) \leq c(B,\psi) + \varepsilon = c(B,\psi) + \varepsilon\,\|\psi\| =$$
$$= c(B,\psi) + c(\mathcal{K}_\varepsilon(0),\psi) = c(B + \mathcal{K}_\varepsilon(0),\psi) = c(B^\varepsilon,\psi), \forall\psi \in \mathcal{S}.$$

Звідси за властивостями опорних функцій $A \subseteq B^\varepsilon$. Тоді

$$\min\{\sigma \geq 0 : A \subseteq B^\sigma\} = \beta(A,B) \leq \varepsilon.$$

Це означає

$$\beta(A,B) \leq \max_{\psi\in\mathcal{S}} \{c(A,\psi) - c(B,\psi)\}. \tag{20.5}$$

З (20.4) і (20.5) випливає справедливість леми 20.2. $\square$

Приклад 20.2. Нехай $A = \mathcal{K}_1(a)$, $B = \mathcal{K}_1(b)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Знайдемо $\beta(A, B)$. За лемою 20.2

$$\beta(A, B) = \max_{\psi \in \mathcal{S}} \{c(A, \psi) - c(B, \psi)\}.$$

Опорні функції $c(A, \psi) = \langle a, \psi \rangle + \|\psi\|$, $c(B, \psi) = \langle b, \psi \rangle + \|\psi\|$. Звідси

$$c(A, \psi) - c(B, \psi) = \langle a - b, \psi \rangle.$$

Тоді $\max\limits_{\psi \in S} \langle a - b, \psi \rangle = \|a - b\|$. Отже, $\beta(A, B) = \|a - b\|$.

Означення 20.1. Метрика Хаусдорфа визначається у такий спосіб

$$\alpha(A, B) = \max \{\beta(A, B), \beta(B, A)\}.$$

Тут $A \in comp(\mathbb{R}^n)$, $B \in comp(\mathbb{R}^n)$.

Тобто, метрика Хаусдорфа між множинами співпадає з найбільшим їхнім відхиленням.

Властивості метрики Хаусдорфа такі:

1. $\alpha(A, B) \geq 0$;
2. $\alpha(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

Друга властивість випливає з того, що якщо $\alpha(A, B) = 0$, то $\beta(A, B) = 0$ і $\beta(B, A) = 0$, а тому за властивостями відхилення $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$. Тому $A = B$.

Приклад 20.3. Нехай $A = \mathcal{K}_1(0)$, $B = \mathcal{S}$. Тоді $\alpha(A, B) = 1$, так як $\beta(A, B) = 1$, $\beta(B, A) = 0$.

Лема 20.3. *Нехай $A \in comp(\mathbb{R}^n)$, $B \in comp(\mathbb{R}^n)$. Тоді*

$$\alpha(A, B) = \min \{\varepsilon \geq 0 : A \subseteq B^\varepsilon, B \subseteq A^\varepsilon\}.$$

Доведення випливає з леми 20.1 і означення 20.1.

Лема 20.4. *Нехай $A \in conv(\mathbb{R}^n)$, $B \in conv(\mathbb{R}^n)$. Тоді має місце така нерівність*

$$|c(A, \psi) - c(B, \psi)| \leq \|\psi\| \alpha(A, B),$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $r = \alpha(A, B)$. Тоді за лемою 20.3 $A \subseteq B^r$, $B \subseteq A^r$. За наслідками з леми 18.3

$$c(A, \psi) \leq c(B, \psi) + r\|\psi\|, \ c(B, \psi) \leq c(A, \psi) + r\|\psi\|.$$

Звідси

$$c(A, \psi) - c(B, \psi) \leq r\|\psi\|, \ c(B, \psi) - c(A, \psi) \leq r\|\psi\|.$$

Отже,

$$|c(A, \psi) - c(B, \psi)| \leq r\|\psi\| = \|\psi\|\alpha(A, B).$$

□

Лема 20.4 показує, що опорна функція задовольняє умові Ліпшиця за першим аргументом з константою Ліпшиця $L = \|\psi\|$. Звідси також випливає, що якщо $A_k \in conv(\mathbb{R}^n)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, $\lim_{k\to\infty} \alpha(A_k, A_0) = 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} c(A_k, \psi) = c(A_0, \psi), \ \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Лема 20.5. *Якщо $A \in conv(\mathbb{R}^n)$, $B \in conv(\mathbb{R}^n)$, то*

$$\alpha(A, B) = \max_{\psi\in\mathcal{S}} |c(A, \psi) - c(B, \psi)|\,.$$

Доведення. Доведення випливає з леми 20.2, оскільки

$$\alpha(A, B) = \max\left(\max_{\psi\in\mathcal{S}}(c(A, \psi) - c(B, \psi)), \max_{\psi\in\mathcal{S}}(c(B, \psi) - c(A, \psi))\right) =$$
$$= \max_{\psi\in\mathcal{S}} \max\{c(A, \psi) - c(B, \psi), c(B, \psi) - c(A, \psi)\} =$$
$$= \max_{\psi\in\mathcal{S}} |c(A, \psi) - c(B, \psi)|\,.$$

Тут використано властивість модуля $|x| = \max\{x, -x\}$. □

Наслідок. За означенням 18.3 норма множини

$$\|A\| = \max\{\|a\| : a \in A\}\,,$$

$A \in comp(\mathbb{R}^n)$. Можна показати, що $\|A\| = \alpha(A, 0)$. Тоді за лемою 20.5

$$\|A\| = \alpha(A, 0) = \max_{\psi\in\mathcal{S}} |c(A, \psi)|\,.$$

Приклад 20.4. Нехай $A = \mathcal{K}_r(a)$, $B = \mathcal{K}_m(b)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$c(A, \psi) = \langle a, \psi\rangle + r\,\|\psi\|\,, \ c(B, \psi) = \langle b, \psi\rangle + m\,\|\psi\|\,, \ \psi \in \mathcal{S}.$$

Далі

$$|c(A, \psi) - c(B, \psi)| = |\langle a - b, \psi\rangle + (r - m)\,\|\psi\||\,.$$

Оскільки $\|\psi\| = 1$, то

$$\max_{\psi\in\mathcal{S}} |c(A, \psi) - c(B, \psi)| = \max_{\psi\in\mathcal{S}} |\langle a - b, \psi\rangle| + |r - m| = \|a - b\| + |r - m|\,.$$

20.2 Багатозначні відображення

Нехай задано множину $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, яка є замиканням області.

Означення 20.2. Відображення F, яке кожній точці з множини $\mathcal{D}$ ставить у відповідність множину з $comp(\mathbb{R}^n)$ називається *багатозначним*. Це позначається так: $F : \mathcal{D} \to comp(\mathbb{R}^n)$.

Наприклад, відображення, яке кожному значенню $r \geq 0$ ставить у відповідність відрізок $[-r, r]$ є багатозначним.

Означення 20.3. Графіком багатозначного відображення F називається множина з декартового добутку $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^n$ вигляду

$$graphF = \{(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n : y \in F(x), x \in \mathcal{D}\}.$$

Приклад 20.5. Нехай $F(x) = [-x, x]$, $x \in [0, 1]$. Графік $graphF$ зображено на рисунку 20.1.

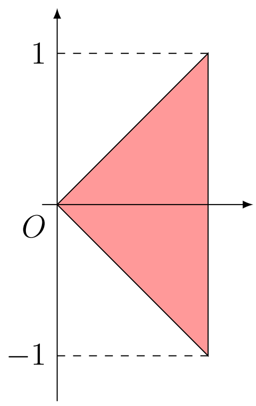

Рис. 20.1. Графік відображення з прикладу 20.5

Множина $F(x)$ називається *образом* або *значенням* точки x при відображенні F.

Означення 20.4. Багатозначне відображення $F : \mathcal{D} \to comp(\mathbb{R}^n)$ називається *неперервним* в точці $x_0 \in \mathcal{D}$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(F(x), F(x_0)) = 0.$$

Тут $x \in \mathcal{D}$.

Це означає, що одночасно $\beta(F(x), F(x_0)) \to 0$ і $\beta(F(x_0), F(x)) \to 0$ при $x \to x_0$.

Відображення $F : \mathcal{D} \to comp(\mathbb{R}^n)$ називається *неперервним* на D, якщо воно є неперервним в кожній точці x_0 з D. Неперервність можна розуміти так: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ таке, що

$$\alpha(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

як тільки $x \in \mathcal{K}_\delta(x_0) \bigcap \mathcal{D}$. Оскільки за лемою 20.3

$$\alpha(A, B) = \min \left\{ \sigma > 0 : A \subseteq B^\sigma, B \subseteq A^\sigma \right\},$$

то означення 20.4 можна подати і так $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ таке, що

$$F(x) \subseteq (F(x_0))^\varepsilon, \;\; F(x_0) \subseteq (F(x))^\varepsilon$$

як тільки $x \in \mathcal{K}_\delta(x_0) \bigcap \mathcal{D}$.

Приклад 20.6. Нехай $F(x) = \mathcal{K}_1(a(x))$, де $a(\cdot)$ - неперервна функція з $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Тоді, як було показано раніше,

$$\alpha(F(x), F(x_0)) = \alpha(\mathcal{K}_1(a(x)), \mathcal{K}_1(a(x_0))) = \|a(x) - a(x_0)\|$$

і $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(F(x), F(x_0)) = \lim\limits_{x \to x_0} \|a(x) - a(x_0)\| = 0$.

Проте не всі відображення є неперервні.

Приклад 20.7. Нехай $F(x) = [-1, 1]$, $x \in [0, 1]$ і $F(x) = [-2, 2]$, $x \in [-1, 0)$. Графік цього відображення зображено на рисунку 20.2.

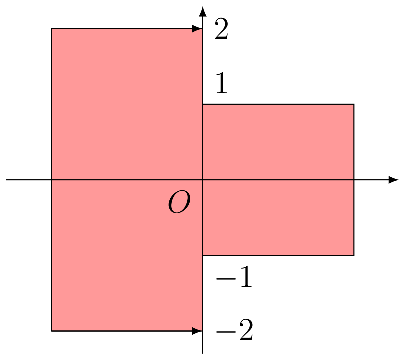

Рис. 20.2. Графік відображення з прикладу 20.7

В точці $x_0 = 0$ маємо $F(x) \subset (F(x_0))^\varepsilon$ при довільному $\varepsilon > 0$, але коли $x \in (0, 1]$. Коли ж $x \in [-1, 0]$, то для $\varepsilon < 1$ маємо, що $F(x) \not\subset (F(x_0))^\varepsilon$. Отже, порушується умова неперервності.

Розглянемо критерій неперервності для функцій, які мають опуклі значення.

Теорема 20.1. *Нехай* $F : \mathcal{D} \to conv(\mathbb{R}^n)$. *Для того, щоб відображення* F *було неперервним на* $\mathcal{D}$ *необхідно і достатньо, щоб функція* $c\left(F\left(x\right), \psi\right)$ *була неперервною за* x *на* $\mathcal{D}$ *при довільному* $\psi \in \mathcal{S}$.

Доведення. Необхідність. Візьмемо довільну точку $x_0 \in \mathcal{D}$. Оскільки має місце лема 20.5, то з неперервності відображення F в точці x_0 випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ таке, що

$$\max_{\psi \in \mathcal{S}} \left| c\left(F\left(x\right), \psi\right) - c\left(F\left(x_0\right), \psi\right) \right| = \alpha\left(F\left(x\right), F\left(x_0\right)\right) < \varepsilon$$

при $x \in \mathcal{K}_\delta\left(x_0\right) \bigcap \mathcal{D}$. Звідси

$$\left| c\left(F\left(x\right), \psi\right) - c\left(F\left(x_0\right), \psi\right) \right| < \varepsilon$$

для всіх $\psi \in \mathcal{S}$ і тому $c\left(F\left(x\right), \psi\right)$ є неперервною в точці $x_0 \in \mathcal{D}$.

Достатність. Якщо $c\left(F\left(x\right), \psi\right)$ є неперервною для кожного $\psi \in \mathcal{S}$, то оскільки $c\left(F\left(x\right), \psi\right)$ є неперервною функцією за ψ (лема 18.2) і $\mathcal{S}$ – компакт в $\mathbb{R}^n$, за теоремою про неперервність функції максимуму [1] ми маємо, що функція

$$f(x) = \max_{\psi \in \mathcal{S}} \left| c\left(F\left(x\right), \psi\right) - c\left(F\left(x_0\right), \psi\right) \right|$$

є неперервною і

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right) = 0.$$

Тому за лемою 20.5

$$\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = \lim_{x \to x_0} \alpha\left(F\left(x\right), F\left(x_0\right)\right) = 0.$$

□

Приклад 20.8. Покажемо, як застосовується теорема 20.1. Нехай $F\left(x\right) = \mathcal{K}_{r(x)}\left(0\right)$, де $x \in \mathbb{R}^n$, $r\left(x\right)$ – неперервна додатня функція на $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Тоді, оскільки

$$c\left(F\left(x\right), \psi\right) = r\left(x\right) \|\psi\| = r\left(x\right)$$

при $\psi \in \mathcal{S}$, то функція $c\left(F\left(x\right), \psi\right)$ є неперервною за x і з теореми 20.1 випливає, що F – неперервне відображення.

---

[1] Теорема 20.5, стор. 216, формулювання якої можна знайти у додатку до лекції.

Означення 20.5. Відображення $F : \mathcal{D} \to comp(\mathbb{R}^n)$ називається *вимірним*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ і довільного компакту $A \in comp(\mathbb{R}^n)$ множина

$$\{x \in \mathcal{D} : \alpha(F(x), A) \le \varepsilon\}$$

є вимірною за Лебегом.

Якщо $F : \mathcal{D} \to conv(\mathbb{R}^n)$, то умова $\alpha(F(x), A) \le \varepsilon$ рівносильна нерівності

$$\max_{\psi \in \mathcal{S}} |c(F(x), \psi) - c(A, \psi)| \le \varepsilon,$$

або

$$c(F(x), \psi) \le \varepsilon + c(A, \psi) = a, \ c(F(x), \psi) \ge \varepsilon - c(A, \psi) = b$$

для всіх $\psi \in \mathcal{S}$. А це рівносильно тому, що $c(F(x), \psi) \in [a, b]$ для довільних a, b. Тобто, множина

$$\{x \in \mathcal{D} : c(F(x), \psi) \in [a, b]\}$$

є вимірною для кожного $\psi \in \mathcal{S}$ для довільних a, b. Це означає, що вимірність опуклозначної функції $F : \mathcal{D} \to conv(\mathbb{R}^n)$ еквівалентна вимірності її опорної функції $c(F(x), \psi)$ за $x \in \mathcal{D}$.

Неперервне багатозначне відображення є вимірним.

Приклад 20.9. Розглянемо відображення $F(x) = [-1, 1]$, $x \neq 0$, $F(0) = 0$. Його опорна функція $c(F(x), \psi) = |\psi|$ при $x \neq 0$ і рівна 0 при $x = 0$. Отже, $c(F(x), \psi)$ кусково неперервна за x і тому вимірна при $x \in \mathbb{R}^1$.

Означення 20.6. Функція $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ називається *вимірним селектором* відображення $F : \mathcal{D} \to comp(\mathbb{R}^n)$ на D, якщо $f(x) \in F(x)$ майже скрізь на $\mathcal{D}$ і f – вимірна функція.

Селектор також називається *однозначною гілкою* відображення F на $\mathcal{D}$.

Приклад 20.10. Нехай $F(x) = [-x, x]$, $x \ge 0$. Тоді $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ є вимірним селектором F.

Має місце така теорема.

Теорема 20.2. *Якщо багатозначне відображення $F : \mathcal{D} \to comp(\mathbb{R}^n)$ є вимірним, то у нього існує вимірний селектор.*

20.3 Інтеграл від багатозначного відображення

Нехай на $[a, b]$ задане багатозначне відображення $F : [a, b] \to comp\,(\mathbb{R}^n)$.

Означення 20.7. Сукупність інтегралів $\int_a^b f\,(x)\,dx$ від всіх вимірних інтегрованих на $[a, b]$ селекторів f відображення $F : [a, b] \to comp\,(\mathbb{R}^n)$ називається *інтегралом від багатозначного відображення* F і позначається $\int_a^b F\,(x)\,dx$.

Інтеграл від багатозначного відображення також називають *інтегралом Аумана.*

Теорема 20.3 (Ляпунова)**.** *Нехай відображення* $F : [a, b] \to comp\,(\mathbb{R}^n)$ *є вимірним,* $\|F\,(x)\| \le k\,(x)$, *де* $k\,(x) > 0$ *– вимірна інтегрована на* $[a, b]$ *функція. Тоді* $\int_a^b F\,(x)\,dx \in conv\,(\mathbb{R}^n)$.

Це означає, що інтеграл від багатозначного відображення є непорожнім опуклим компактом в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 20.4. *В умовах теореми Ляпунова має місце рівність*

$$c\left(\int_a^b F\,(x)\,dx, \psi\right) = \int_a^b c\,(F\,(x)\,, \psi)\,dx,$$

де $\psi \in \mathcal{S}$.

Приклад 20.11. Нехай $F\,(x) = \mathcal{K}_{g(x)}\,(0)$, де $g\,(x) > 0$ – вимірна інтегрована на $[a, b]$ функція. Тоді

$$c\left(\int_a^b \mathcal{K}_{g(x)}\,(0)\,dx, \psi\right) = \int_a^b c(\mathcal{K}_{g(x)}\,(0)\,, \psi)dx = \int_a^b g\,(x)\,dx\,\|\psi\|\,.$$

Звідси випливає, що $\int_a^b \mathcal{K}_{g(x)}\,(0)\,dx = \mathcal{K}_r(0)$, де $r = \int_a^b g\,(x)\,dx$.

Приклад 20.12. Розглянемо відображення $F\,(x) = xA$, де $A \in comp\,(\mathbb{R}^n)$, $x \in [0, 1]$. Тоді

$$c\left(\int_0^1 F\,(x)\,dx, \psi\right) = \int_0^1 c\,(F\,(x)\,, \psi)\,dx =$$
$$= \int_0^1 c\,(xA, \psi)\,dx = \int_0^1 xc\,(A, \psi)\,dx =$$
$$= c\,(A, \psi) \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}c\,(A, \psi)\,.$$

Звідси $\int_0^1 F\,(x)\,dx = \frac{1}{2}coA$.

Приклад 20.13. Розглянемо відображення $F(x) = A$, $x \in [0,1]$, $t \in [0,1]$. Тоді

$$c\left(\int_0^t F(x)\,dx, \psi\right) = \int_0^t c(F(x), \psi)\,dx =$$
$$= \int_0^t c(A, \psi)\,dx = c(A,\psi)\int_0^t dx = c(A,\psi)\cdot t.$$

Звідси маємо $\int_0^t F(x)\,dx = coA \cdot t$. Наприклад, якщо $A = \{a, b\}$, то $\int_0^t F(x)\,dx = [a,b]\cdot t$.

Додаток

Теорема 20.5 (про неперервність функції максимуму)**.** *Нехай функція $g(\cdot,\cdot) : D \times K \to \mathbb{R}^1$ є неперервною за першим аргументом на множині $D \subseteq \mathbb{R}^m$ і за другим аргументом на множині $K \in comp(\mathbb{R}^n)$. Тоді функція*

$$f(x) = \max_{y\in K} g(x,y)$$

є неперервною на множині D.

Лекція 21

Необхідні умови екстремуму

21.1 Перша варіація функціонала. Похідна Фреше

Нехай X – банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, на якому заданий функціонал $f : X \to \mathbb{R}^1$. Розглянемо таке означення.

Означення 21.1. Якщо існує скінченна границя

$$f'(x,g) = \lim_{\alpha\to+0} \frac{f(x+\alpha g) - f(x)}{\alpha}, \tag{21.1}$$

то вона називається *похідною за напрямком* $g \in X$ функціонала f в точці $x \in X$.

Означення 21.2. Якщо для довільного $g \in X$ існує границя

$$\delta f(x,g) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x+\alpha g) - f(x)}{\alpha},$$

то така границя називається *першою варіацією функціонала* f в точці $x \in X$ (за Лагранжем).

Так, перша варіація функціонала f в точці $x \in X$ є відображенням, яке кожному $g \in X$ ставить у відповідність $\delta f(x,g)$. З означень 21.1, 21.2 випливає, що якщо функціонал має першу варіацію функціонала f в точці $x \in X$, то він є диференційованим за будь-яким напрямком $g \in X$, причому $\delta f(x,g) = f'(x,g) = -f'(x,-g)$.

Першу варіацію функціонала f в точці $x \in X$ можна записати так

$$\delta f(x,g) = \frac{d}{d\alpha} f(x+\alpha g)|_{\alpha=0}. \tag{21.2}$$

Дійсно, введемо таку функцію $\varphi(\alpha) = f(x + \alpha g)$. За означенням 21.2 маємо
$$\delta f(x,g) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha} = \varphi'(0).$$
Але $\varphi'(0) = \frac{d}{d\alpha} f(x + \alpha g)|_{\alpha=0}$ що і потрібно було довести.

Приклад 21.1. Якщо функціонал $f : X \to \mathbb{R}^1$ має похідну за довільним напрямком $g \in X$ в деякій точці x_0, то не обов'язково він буде мати першу варіацію за Лагранжем в цій точці. Дійсно, розглянемо $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ вигляду $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Тоді $f'(x_0, g) = |g|$ і $f'(x_0, g) \neq -f'(x_0, -g)$. Отже, $f(x) = |x|$ не є диференційованим за Лагранжем в точці $x_0 = 0$.

Означення 21.3. Функціонал $f : X \to \mathbb{R}^1$ називається *диференційованим за Фреше* в точці $x_0 \in X$, якщо знайдеться $p \in X^*$ таке, що
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle p, h\rangle + \omega(x_0, h)$$
при $\|h\| \to 0$.

Тут $\langle p, h\rangle = p(h)$ – лінійний обмежений функціонал, що визначений при $h \in X$, $\frac{|\omega(x_0,h)|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Тоді $p = f'(x_0)$ називається *похідною Фреше* функціонала f в точці x_0.

Якщо функціонал $f : X \to \mathbb{R}^1$ є диференційованим за Фреше в точці $x_0 \in X$, то він є неперервним в цій точці. Це випливає з означення 21.3. Крім того, якщо функціонал $f : X \to \mathbb{R}^1$ є диференційованим за Фреше в точці $x_0 \in X$, то він має першу варіацію в цій точці, а також похідну за довільним напрямком $g \in X$, причому
$$\delta f(x,g) = f'(x,g) = \langle p, g\rangle,$$
де $p = f'(x_0)$. Дійсно, з означень 21.2, 21.3 випливає
$$\delta f(x,g) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x+\alpha g) - f(x)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\langle p, \alpha g\rangle + \omega(x_0, \alpha g)}{\alpha} =$$
$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha\langle p, g\rangle}{\alpha} + \lim_{\alpha\to 0} \frac{\omega(x_0,\alpha g)}{\alpha} = \langle p, g\rangle.$$
Але з існування першої варіації, тим більше похідної за довільним напрямком не випливає існування похідної Фреше.

Приклад 21.2. Розглянемо $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ вигляду
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x_2 = x_1^2,\ x_1 > 0, \\ 0 & \text{інакше}, \end{cases}$$
де $x = (x_1, x_2)$. Цей функціонал є розривним в точці $x_0 = (0,0)$. Тому він в цій точці не є диференційованим за Фреше. Але за означенням 21.2 $\delta f(x_0, g) = f'(x_0, g) = 0$ для довільного напрямку g.

Приклад 21.3. Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – неперервно диференційована функція, тоді її похідна Фреше співпадає з градієнтом функції f.

Приклад 21.4. Розглянемо функціонал $f(x) = \int_0^1 G(x(s))ds$ де $x \in \mathcal{L}_2(0,1)$, $G : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – неперервно диференційована функція. Тоді за формулою (21.2) $\delta f(x,h) = \varphi'(0)$, де $\varphi(\alpha) = f(x+\alpha h)$, $h \in \mathcal{L}_2(0,1)$. Звідси

$$\varphi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_0^1 G(x(s)+\alpha h(s))ds = \int_0^1 \frac{dG(x(s)+\alpha h(s))}{dx}\cdot h(s)ds,$$
$$\delta f(x,h) = \varphi'(0) = \int_0^1 \frac{dG(x(s))}{dx}\cdot h(s)ds.$$

Отже, $f'(x) = \frac{dG(x(\cdot))}{dx}$.

Має місце така теорема.

Теорема 21.1. *Якщо функціонал f досягає в точці $x_* \in X$ локального екстремуму і має в цій точці першу варіацію, то $\delta f(x_*, g) = 0$ для всіх $g \in X$.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $g \in X$. Розглянемо функцію

$$\varphi(\alpha) = f(x_* + \alpha g).$$

Ця функція має в точці $\alpha = 0$ локальний екстремум і в силу означення першої варіації існує $\varphi'(0)$. Тоді за теоремою Ферма $\varphi'(0) = 0$. Оскільки $\varphi'(0) = \delta f(x_*, g)$, то цим самим теорему доведено. □

Наслідок. Якщо в умовах теореми 21.1 функціонал f є диференційованим за Фреше, то $f'(x_*) = 0$.

Доведення. Дійсно, $\delta f(x_*, g) = f'(x_*, g) = \langle p, g\rangle = p(g) = 0$ для всіх $g \in X$, де $p = f'(x_*)$. Це означає, що $p = f'(x_*) = 0$. □

Нехай $\Omega \subseteq X$ – непорожня множина і існує

$$f'_\Omega(x,g) = \lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ x+\alpha g \in \Omega}} \frac{f(x+\alpha g) - f(x)}{\alpha} \tag{21.3}$$

умовна похідна за напрямком $g \in X$ в точці $x \in X$.

Теорема 21.2. *Якщо $x_* \in \Omega$ є точкою локального мінімуму функціонала f, то $f'_\Omega(x_*, g) \geq 0$ для будь-якого $g \in X$.*

Доведення. Якщо x_* – точка локального мінімуму функціонала f на Ω, то існує окіл $U(x_*)$ точки x_*, на якому функція f досягає глобального мінімуму. Тоді для довільного $g \in X$ знайдеться $\bar{\alpha} > 0$ таке, що

$$x_* + \alpha g \in \Omega, \;\; f(x_* + \alpha g) \geq f(x_*), \;\; \alpha \in [0, \bar{\alpha}).$$

Звідси для $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ має місце

$$\frac{f(x_* + \alpha g) - f(x_*)}{\alpha} \geq 0.$$

Оскільки існує (21.3), то $f'_\Omega(x_*, g) \geq 0$. □

Наслідок. Якщо $x_* \in X$ є точкою локального мінімуму функціонала f, то $f'(x_*, g) \geq 0$ для будь-якого $g \in X$.

Теорема 21.3. *Нехай Ω – опукла множина банахового простору X, $x_* \in \Omega$ – точка локального мінімуму функціоналу $f : X \to \mathbb{R}^1$, що є диференційованим за Фреше. Тоді для довільної точки $x \in \Omega$ має місце нерівність*

$$\langle f'(x_*), x - x_* \rangle \geq 0. \tag{21.4}$$

Доведення. З теореми 21.2 випливає, що $f'_\Omega(x_*, g) \geq 0$ для всіх $g \in X$. Візьмемо довільну точку $x \in \Omega$, $g = x - x_*$. Тоді $x_* + \alpha(x - x_*) \in \Omega$ при $\alpha \in [0, 1]$. Далі

$$f'_\Omega(x_*, x - x_*) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(x_* + \alpha(x - x_*)) - f(x_*)}{\alpha} = \langle f'(x_*), x - x_* \rangle \geq 0.$$

□

Можна показати, що якщо функціонал f є опуклим в умовах теореми 21.3, то умова (21.4) є достатньою, для того, щоб точка x_* була точкою локального мінімуму.

21.2 Принцип Лагранжа для скінченновимірної екстремальної задачі

Принцип Лагранжа є основою обгрунтування принципа максимуму Понтрягіна в задачі Больца при загальних обмеженнях. Нехай $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ – неперервно диференційовані функції, $i = 0, 1, \ldots, m$. Розглянемо таку екстремальну задачу

$$f_0(x) \to \min, \tag{21.5}$$

$$f_i(x) \le 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, k,\ \ f_i(x) = 0,\ \ i = k+1, k+2, \ldots, m. \qquad (21.6)$$

Нехай $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)^* \in \mathbb{R}^{m+1}$ – вектор, компоненти якого називаються *множниками Лагранжа*. Функція

$$\Lambda(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x)$$

називається *функцією Лагранжа* задачі (21.5), (21.6). Має місце така теорема.

Теорема 21.4 (принцип Лагранжа)**.** *Нехай x_* – точка локального екстремуму задачі* (21.5), (21.6)*. Тоді знайдеться ненульовий вектор множників Лагранжа $\lambda \ne 0$ такий, що для функції Лагранжа $\Lambda(x, \lambda)$ задачі* (21.5), (21.6) *виконуються такі умови:*

1. $\frac{\partial \Lambda(x, \lambda)}{\partial x} = 0$ *(умова стаціонарності);*
2. $\lambda_i f_i(x_*) = 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, k$ *(умова доповнюючої нежорсткості);*
3. $\lambda_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$ *(умова невід'ємності).*

Якщо в (21.5) ставиться задача на максимум, то слід вибирати $\lambda_0 \le 0$.

Позначення

$\mathbb{R}^n$ – n-вимірний евклідів простір;

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^*$, $*$ – знак транспонування ;

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ – евклідова норма;

$comp(\mathbb{R}^n)$ – множина непорожніх компактів з $\mathbb{R}^n$;

$conv(\mathbb{R}^n)$ – множина непорожніх опуклих компактів з $\mathbb{R}^n$;

$intA$ – сукупність внутрішніх точок множини $A \subset \mathbb{R}^n$;

∂A – границя A;

$\overline{A}$ – замикання множини A;

$A^{\varepsilon}= \{x : \|x - a\| \le \varepsilon, a \in A\}$ – ε-розширення (ε-окіл) A;

coA – опукле замикання множини A;

$K_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \le r\}$ – замкнена куля, $a \in \mathbb{R}^n$;

$S = \{\, x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ – одинична сфера;

$\rho(x, A) = \inf\limits_{a\in A} \|a - x\|$ – відстань від точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множини A;

$\beta(A, B) = \sup\limits_{a\in A} \rho(a, B)$ – відхилення множини A від множини B;

$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$ – метрика Хаусдорфа;

$\|A\| = \sup \{\|a\| : a \in A\}$ – норма множини A;

$c(A, \psi) = \sup\limits_{a \in A} \langle a, \psi \rangle$ – опорна функція множини A, $\psi \in \mathbb{R}^n$;

$\mathcal{C}(X, Y)$ – простір неперервних функцій з X в Y, $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^1)$;

$\mathcal{AC}([a, b]; \mathbb{R}^n)$ – простір абсолютно неперервних функцій з $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$;

$\mathcal{L}_1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ – простір інтегрованих за Лебегом функцій з $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$;

$\mathcal{L}_2([a, b]; \mathbb{R}^n)$ – гільбертів простір інтегрованих з квадратом за Лебегом функцій з $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$ зі скалярним добутком $\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}_2} = \int_a^b \langle f(x), g(x) \rangle \, dx$;

$\mathcal{L}_\infty ([a, b] ; \mathbb{R}^n)$ – клас вимірних майже скрізь обмежених на $[a, b]$ функцій зі значеннями в $\mathbb{R}^n$.

Література

[1] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 224 с.

[2] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. – М.: Физматлит, 2005. – 276 с.

[3] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Физматлит, 2005. – 384 с.

[4] Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. – М.: Факториал Пресс, 2006. – 144 с.

[5] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.

[6] Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. -К.: Київський університет, 2008. – 383 с.

[7] Башняков О.М., Пічкур В.В. Задача синтезу в теорії керування: Навчальний посібник. - К.: Вид-во "Сталь", 2012. – 116 с.

[8] Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 336 с.

[9] Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.

[10] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

[11] Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. – М.: Наука, 1982. – 200 с.

[12] Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с.

[13] Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах. – К.: УМК ВО, 1988. – 191 с.

[14] Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К.: Вища школа, 1975. – 328 с.

[15] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. –М.: Наука, 1980. –520 с.

[16] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

[17] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

[18] Верес М.М., Наконечний О.Г. Мінімаксні методи оцінювання в лінійних задачах із параметром. – К.: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2007. – 115 с.

[19] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.

[20] Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Вступ до аналізу та оптимізації структурно заданих систем: Навчальний посібник. – К.: Київський університет, 2003. – 113 с.

[21] Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Прикладні задачі теорії стійкості. -К.: Київський університет, 2014. – 142 с.

[22] Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В., Харченко И.И. Оптимальное по быстродействию гашение угловых скоростей космического аппарата на основе метода динамического программирования // Кибернетика и вычислительная техника. – 2002. – Вып.134. –С.51-59.

[23] Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление: Учебное пособие для студ. высш. учеб. завед. - М.: Высшая школа, 2005. - 336с.

[24] Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.

[25] Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

[26] Калман Р., Фалб П., Абиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.

[27] Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – К.: Выща школа, 1978. – 184 с.

[28] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. -М.: Наука, 1973. – 446 с.

[29] Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

[30] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 576 с.

[31] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

[32] Михалевич В. С., Кукса А. И. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов. – М.:Наука, 1983. – 208 с.

[33] Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528 с.

[34] Моклярчук М.П. Варiацiйне числення. Екстремальнi задачi. – К.: Либiдь, 2003. – 380 с.

[35] Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.

[36] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. –М.: Наука, 1980. – 319 с.

[37] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. – М.: Наука, 1974. – 600 с.

[38] Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. – М.: Наука, 1981. – 464 с.

[39] Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. – Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.

[40] Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Физматлит, 2005. – 368 с.

[41] Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

[42] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. –М.: Наука, 1978. – 488 с.

[43] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. –М.: Наука, 1985. –224 с.

[44] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 316 с.

[45] Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. – М.: Наука, 1977. – 248 с.

[46] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 320 с.

[47] Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. – Boston: Birkhauser. – 1990. – 462p.

[48] Baras J.S., Kurzhanski A. Nonlinear filtering: the set-membership (bounding) and the H_∞ techniques // Technical Research Report.ISR.

[49] Bardi M., Capuzzo Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. – Boston: Birkhäuser, 1997. – 570 p.

[50] Bellman R. Dynamic Programming. – Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957. – 363 p.

[51] Bellman R. Introduction to the mathematical theory of control processes. Vol.1. – New York, London: Academic Press, 1967. – 263 p.

[52] Bellman R. Introduction to the mathematical theory of control processes. Vol.2. – New York, London: Academic Press, 1971. – 327 p.

[53] Craven B.D. Control and optimization – London: Chapman. – 1995. – 193 p.

[54] Evans L.C. Partial differential equations. – American Mathematical Society, 1998. – 662 p.

[55] Kirk D.E. Optinal control theory. An introduction. – Mineola, New York: Dover, 2004. – 452 p.

[56] Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. – New York: Marcel Dekker, 1996. – 408 p.

[57] Kurzhanski A., Vályi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. – Boston: IIASA and Birkhäuser, 1997. – 321 p.