

## 2 Елементи багатозначного аналізу. Множина досяжності

### 2.1 Алгоритми

*Задача.* Знайти

1.  $A + B$ ;
2.  $\lambda A$ ;
3.  $\alpha(A, B)$ ;
4.  $MA$ ,

де множини  $A \subset \mathbb{R}^m$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$ , скаляр  $\lambda \in \mathbb{R}^1$ , матриця  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

**Алгоритм 2.1.** Розглянемо всі пункти задачі описані вище.

1. Знаходимо за визначенням,  $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ .
2. Знаходимо за визначенням,  $\lambda A = \{\lambda a | a \in A\}$ .
3. (а) Знаходимо відхилення  $\beta(A, B)$  і  $\beta(B, A)$  за визначенням,

$$\beta(A, B) = \max_{a \in A} \rho(a, B), \quad (2.1)$$

де

$$\rho(a, B) = \min_{b \in B} \rho(a, b). \quad (2.2)$$

- (б) Знаходимо  $\alpha(A, B)$  за визначенням,

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}. \quad (2.3)$$

4. Знаходимо за визначенням,  $MA = \{Ma | a \in A\}$ .

*Задача.* Знайти опорну функцію множини  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

**Алгоритм 2.2.**

1. Намагаємося знайти за визначенням,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle. \quad (2.4)$$

2. Якщо не вийшло, то намагаємося знайти за геометричною властивістю:  $c(A, \psi)$  – (орієнтована) відстань від початку координат до опорної площини множини  $A$ , для якої напрямок-вектор  $\psi$  є вектором нормалі.

*Задача.* Знайти інтеграл Аумана  $\mathcal{J} = \int F(x) dx$ , де  $F(x) \in \mathbb{R}^n$ .

### Алгоритм 2.3.

1. Знаходимо опорну функцію від інтегралу:

$$c(\mathcal{J}, \psi) = \int c(F(x), \psi) dx. \quad (2.5)$$

2. Знаходимо  $\mathcal{J}$  як опуклий компакт з відомою опорною функцією  $c(\mathcal{J}, \psi)$ .

*Задача.* Знайти множину досяжності системи  $\dot{x} = Ax + Bu$ , де  $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$ ,  $u \in \mathcal{U}$ .

### Алгоритм 2.4.

1. Знаходимо фундаментальну матрицю  $\Theta(t, s)$  системи нормовану за моментом  $s$ .
2. Знаходимо інтеграл Аумана

$$\int_{t_0}^t \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s) ds \quad (2.6)$$

за алгоритмом 2.3.

3. Використовуємо теорему про вигляд множини досяжності лінійної системи керування:

$$\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = \Theta(t, t_0) \mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^t \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s) ds. \quad (2.7)$$

*Задача.* Знайти опорну функцію множини досяжності системи  $\dot{x} = Ax + Bu$ , де  $x(t_0) \in \mathcal{M}_0$ ,  $u \in \mathcal{U}$ .

### Алгоритм 2.5.

1. Знаходимо фундаментальну матрицю  $\Theta(t, s)$  системи нормовану за моментом  $s$ .
2. Знаходимо опорну функцію  $c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi)$  за алгоритмом 2.2.
3. Знаходимо опорну функцію  $c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)$  за алгоритмом 2.2.
4. Використовуємо теорему про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^t c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi) ds. \quad (2.8)$$

## 2.2 Задачі з розв'язками

*Задача 2.1.* Знайти  $A + B$  і  $\lambda A$ , а також метрику Хаусдорфа  $\alpha(A, B)$ , якщо:

1.  $A = \{-3, 2, -1\}, B = \{-2, 5, 1\}, \lambda = 3$ ;
2.  $A = \{4, 2, -4\}, B = [-2, 3], \lambda = -1$ ;
3.  $A = [-1, 2], B = [3, 7], \lambda = -2$ ;

**Розв'язок.** Скористаємося пунктами 1-3 алгоритму 2.1:

1.

$$\begin{aligned} A + B &= \{-3 - 2, -3 + 5, -3 + 1\} \cup \{2 - 2, 2 + 5, 2 + 1\} \cup \\ &\cup \{-1 - 2, -1 + 5, -1 + 1\} = \\ &= \{-5, 2, -2, 0, 7, 3, -3, 4, 0\} = \{-5, -3 - 2, 0, 2, 3, 4, 7\}, \\ \lambda A &= \{3 \cdot -3, 3 \cdot 2, 3 \cdot -1\} = \{-9, 6, -3\} = \{-9, -3, 6\}. \end{aligned}$$

У нашому випадку

$$\begin{aligned} \beta(A, B) &= \max \left\{ \min_{b \in B} \rho(-3, b), \min_{b \in B} \rho(2, b), \min_{b \in B} \rho(-1, b) \right\} = \\ &= \max\{1, 1, 1\} = 1, \\ \beta(B, A) &= \max \left\{ \min_{a \in A} \rho(-2, a), \min_{a \in A} \rho(5, a), \min_{a \in A} \rho(1, a) \right\} = \\ &= \max\{1, 3, 1\} = 3, \end{aligned}$$

тому  $\alpha(A, B) = \max\{1, 3\} = 3$ .

2.

$$\begin{aligned} A + B &= [4 - 2, 4 + 3] \cup [2 - 2, 2 + 3] \cup [-4 - 2, -4 + 3] = \\ &= [2, 7] \cup [0, 5] \cup [-6, -1] = [-6, 7]. \end{aligned}$$

$$\lambda A = \{-1 \cdot 4, -1 \cdot 2, -1 \cdot -4\} = \{-4, -2, 4\}.$$

У нашому випадку

$$\begin{aligned} \beta(A, B) &= \max \left\{ \min_{b \in B} \rho(4, b), \min_{b \in B} \rho(2, b), \min_{b \in B} \rho(-4, b) \right\} = \\ &= \max\{1, 0, 2\} = 2, \\ \beta(B, A) &= \max_{b \in B} \min \{\rho(b, 4), \rho(b, 2), \rho(b, -4)\} = 3, \end{aligned}$$

$$\text{тому } \alpha(A, B) = \max\{2, 3\} = 3.$$

3.  $A + B = [2, 9]$ ,  $\lambda A = [-4, 2]$ ,  $\beta(A, B) = 4$ ,  $\beta(B, A) = 5$ , оскільки відповідні краї відхиляються на 4 та 5 відповідно ( $-1$  від 3 та 7 від 2), тому  $\alpha(A, B) = 5$ .

*Задача 2.2.* Знайти  $MA$ , якщо

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Розв'язок.** Скористаємося пунктом 4 алгоритму 2.1:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -22 \\ -11 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, отримаємо

$$MA = \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -22 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \end{pmatrix} \right\}.$$

*Задача 2.3.* Знайти опорні функції таких множин:

1.  $A = [0, r]$ ;
2.  $A = [-r, r]$ ;

3.  $A = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2\}$ ;
4.  $A = \mathcal{K}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$ ;
5.  $A = \mathcal{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ .

**Розв’язок.** У пунктах 1-3 скористаємося пунктом 1 алгоритму 2.2, а у пунктах 4-5 – пунктом 2 того ж алгоритму.

1. За означенням опорної функції,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \begin{cases} 0, & \psi < 0 \\ r\psi, & 0 \leq \psi \end{cases} = \max\{0, r\psi\}.$$

2. За означенням опорної функції,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \begin{cases} -r\psi, & \psi < 0 \\ r\psi, & 0 \leq \psi \end{cases} = r|\psi|.$$

3. За означенням опорної функції,

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle = \max_{a \in A} (\psi_1 x_1 + \psi_2 x_2) = |\psi_1| + 2|\psi_2|.$$

4. За властивістю опорної функції,  $c(\mathcal{K}_r(0), \psi) = r\|\psi\|$ .
5. За властивістю опорної функції,  $c(\mathcal{S}^n, \psi) = \|\psi\|$ .

**Задача 2.4.** Знайти інтеграл Аумана  $\mathcal{J} = \int_0^1 F(x) dx$  таких багатозначних відображень:

1.  $F(x) = [0, x], x \in [0, 1]$ ;
2.  $F(x) = \mathcal{K}_x(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq x\}, x \in [0, 1]$ .

**Розв’язок.** Скористаємося алгоритмом 2.3:

- 1.

$$c(\mathcal{J}) = \int_0^1 c([0, x], \psi) dx = \begin{cases} \psi/2, & 0 \leq \psi \\ 0, & \psi < 0 \end{cases}.$$

Далі знання опорних функцій підказують, що  $\mathcal{J} = [0, 1/2]$ .

2.

$$c(\mathcal{J}) = \int_0^1 c(\mathcal{K}_x(0), \psi) dx = \int_0^1 x \|\psi\| dx = \|\psi\|/2.$$

Далі знання опорних функцій підказують, що  $\mathcal{J} = \mathcal{K}_{1/2}(0)$ .

**Задача 2.5.** Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{dx}{dt} = x + u,$$

де  $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$ ,  $u(t) \in \mathcal{U}$ ,  $t \geq 0$ ,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \leq 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 1\}.$$

**Розв'язок.** Скористаємося алгоритмом 2.4.

Перш за все знаходимо  $\Theta(t, s)$ . Нескладно бачити, що  $\Theta(t, s) = e^{t-s}$ .

Далі

$$\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = \Theta(t, t_0) \mathcal{M}_0 + \int_{t_0}^t \Theta(t, s) B(s) \mathcal{U}(s) ds.$$

Підставимо вже відомі значення:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t, [-1, 1]) &= \Theta(t, 0) \cdot [-1, 1] + \int_0^t (\Theta(t, s) \cdot 1 \cdot [-1, 1]) ds = \\ &= [-e^t, e^t] + \int_0^t [-e^{t-s}, e^{t-s}] ds = \\ &= [-e^t, e^t] + [1 - e^t, e^t - 1] = [1 - 2e^t, 2e^t - 1]. \end{aligned}$$

**Задача 2.6.** Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 + u_2, \end{cases}$$

де  $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{M}_0$ ,  $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$ ,  $t \geq 0$ ,

$$\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : |x_{01}| \leq 1, |x_{02}| \leq 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}.$$

**Розв'язок.** Скористаємося алгоритмом 2.5.

Перш за все знаходимо  $\Theta(t, s)$  з системи

$$\frac{d\Theta(t, s)}{dt} = A(t) \cdot \Theta(t, s) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Theta(t, s).$$

Нескладно бачити, що

$$\Theta(t, s) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{t-s} + e^{5(t-s)} & -e^{t-s} + e^{5(t-s)} \\ -3e^{t-s} + 3e^{5(t-s)} & e^{t-s} + 3e^{5(t-s)} \end{pmatrix}$$

Скористаємося теоремою про вигляд опорної функції множини досяжності лінійної системи керування:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^t c(\mathcal{U}(s), B^*(s)\Theta^*(t, s)\psi) ds.$$

Підставимо вже відомі значення:

$$c(\mathcal{X}(t, [-1, 1]^2), \psi) = c([-1, 1]^2, \Theta^*(t, 0)\psi) + \int_0^t c\left([-1, 1]^2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Theta^*(t, s)\psi\right) ds,$$

і підставляємо  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} c\left(\mathcal{X}(t, [-1, 1]^2), \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}\right) &= \\ &= c\left([-1, 1]^2, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^t + e^{5t} & -3e^t + 3e^{5t} \\ -e^t + e^{5t} & e^t + 3e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}\right) + \\ &+ \int_0^t c\left([-1, 1]^2, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{t-s} + e^{5(t-s)} & -3e^{t-s} + 3e^{5(t-s)} \\ -e^{t-s} + e^{5(t-s)} & e^{t-s} + 3e^{5(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}\right) ds = \\ &= c\left([-1, 1]^2, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (3e^t + e^{5t})\psi_1 + (-3e^t + 3e^{5t})\psi_2 \\ (-e^t + e^{5t})\psi_1 + (e^t + 3e^{5t})\psi_2 \end{pmatrix}\right) + \\ &+ \int_0^t c\left([-1, 1]^2, \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (3e^{t-s} + e^{5(t-s)})\psi_1 + (-3e^{t-s} + 3e^{5(t-s)})\psi_2 \\ (-e^{t-s} + e^{5(t-s)})\psi_1 + (e^{t-s} + 3e^{5(t-s)})\psi_2 \end{pmatrix}\right) ds = \\ &= \frac{1}{4} (|(3e^t + e^{5t})\psi_1 + (-3e^t + 3e^{5t})\psi_2| + |(-e^t + e^{5t})\psi_1 + (e^t + 3e^{5t})\psi_2|) + \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^t |(3e^{t-s} + e^{5(t-s)})\psi_1 + (-3e^{t-s} + 3e^{5(t-s)})\psi_2| ds + \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^t |(-e^{t-s} + e^{5(t-s)})\psi_1 + (e^{t-s} + 3e^{5(t-s)})\psi_2| ds. \end{aligned}$$

*Задача 2.7.* Знайти  $A + B$  і  $\lambda A$ , а також метрику Хаусдорфа  $\alpha(A, B)$ , якщо

1.  $A = \{4, -2, 3\}$ ,  $B = \{7, -1, 1\}$ ,  $\lambda = 2$ ;
2.  $A = \{5, -5, 2\}$ ,  $B = [1, 3]$ ,  $\lambda = -1$ ;
3.  $A = [-4, -2]$ ,  $B = [-1, 5]$ ,  $\lambda = 3$ ;

**Розв'язок.** 1.  $A = \{4, -2, 3\}$ ,  $B = \{7, -1, 1\}$ ,  $\lambda = 2$ ;

$$\begin{aligned} A + B &= \{4+7, 4-1, 4+1, -2+7, -2-1, -2+1, 3+7, 3-1, 3+1\} = \\ &= \{11, 3, 5, 5, -3, -1, 10, 2, 4\} = \{-3, -1, 2, 3, 4, 5, 10, 11\}. \end{aligned}$$

$$\lambda A = \{2 \cdot 4, 2 \cdot -2, 2 \cdot 3\} = \{8, -4, 6\}.$$

$$\begin{aligned} \alpha(A, B) &= \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \\ &= \max\{\max\{3, 1, 2\}, \max\{3, 1, 2\}\} = \max\{3, 3\} = 3. \end{aligned}$$

2.  $A = \{5, -5, 2\}$ ,  $B = [1, 3]$ ,  $\lambda = -1$ ;

$$\begin{aligned} A + B &= (5 + [1, 3]) \cup (-5 + [1, 3]) \cup (2 + [1, 3]) = \\ &= [6, 8] \cup [-4, -1] \cup [3, 5] = [-4, -1] \cup [3, 5] \cup [6, 8]. \end{aligned}$$

$$\lambda A = \{-1 \cdot 5, -1 \cdot -5, -1 \cdot 2\} = \{-5, 5, -2\}.$$

$$\begin{aligned} \alpha(A, B) &= \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \\ &= \max\{\max\{2, 6, 0\}, \max_{b \in [1, 3]} \{|b - 2|\}\} = \max\{6, 1\} = 6. \end{aligned}$$

3.  $A = [-4, -2]$ ,  $B = [-1, 5]$ ,  $\lambda = 3$ ;

$$A + B = [-4 - 1, -2 + 5] = [-5, 3].$$

$$\lambda A = [3 \cdot -4, 3 \cdot -2] = [-12, -6].$$

$$\begin{aligned} \alpha(A, B) &= \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \\ &= \max\{\max\{|-4+1|, |-2+1|\}, \max\{|-1+2|, |5+2|\}\} = \max\{3, 7\} = 7. \end{aligned}$$

*Задача 2.8.* Знайти  $MA$ , якщо

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, A = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$



**Розв'язок.**

$$MA = \left\{ M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \\ = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Задача 2.9.** Знайти опорні функції таких множин:

1.  $A = \{-1, 1\}$ ;
2.  $A = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leq 2, |x_2| \leq 4, |x_3| \leq 1\}$ ;
3.  $A = \{a\}$ ;
4.  $A = \mathcal{K}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ .

**Розв'язок.** 1. За визначенням,  $c(A, \psi) = \max_{x \in \{-1, 1\}} \langle x, \psi \rangle = \max(-\psi, \psi) = |\psi|$ .

2. За визначенням,  $c(A, \psi) = \max_{\substack{x_1: |x_1| \leq 2 \\ x_2: |x_2| \leq 4 \\ x_3: |x_3| \leq 1}} x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 = 2|\psi_1| + 4|\psi_2| + |\psi_3|$ .

3. За визначенням,  $c(A, \psi) = \max_{x \in \{a\}} \langle x, \psi \rangle = \langle a, \psi \rangle$ .

4. За визначенням,

$$c(A, \psi) = \max_{x \in \mathbb{R}^n: \|x-a\| \leq r} \langle x, \psi \rangle = \max_{y \in \mathbb{R}^n: \|y\| \leq r} \langle a + y, \psi \rangle = \\ = \langle a, \psi \rangle + \max_{y \in \mathbb{R}^n: \|y\| \leq r} \langle y, \psi \rangle = \langle a, \psi \rangle + c(\mathcal{K}_r(0), \psi) = \langle a, \psi \rangle + r\|\psi\|.$$

**Задача 2.10.** Знайти інтеграл Аумана  $\mathcal{J} = \int_0^{\pi/2} F(x)dx$  таких багатозначних відображень:

1.  $F(x) = [0, \sin x], x \in [0, \pi/2]$ .
2.  $F(x) = [-\sin x, \sin x], x \in [0, \pi/2]$ .
3.  $F(x) = \mathcal{K}_{\sin x}(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq \sin x\}, x \in [0, \pi/2]$ .

**Розв'язок.** Скористаємося теоремою про зміну порядку інтегрування і взяття опорної функції:

1.  $c(\mathcal{J}, \psi) = \int_0^{\pi/2} c([0, \sin x], \psi) dx = \int_0^{\pi/2} \max(0, \psi) \sin x dx = \max(0, \psi)$ , звідки  $\mathcal{J} = [0, 1]$ .
2.  $c(\mathcal{J}, \psi) = \int_0^{\pi/2} c([- \sin x, \sin x], \psi) dx = \int_0^{\pi/2} |\psi| \sin x dx = |\psi|$ , звідки  $\mathcal{J} = [-1, 1]$ .
3.  $c(\mathcal{J}, \psi) = \int_0^{\pi/2} c(\mathcal{K}_{\sin x}(0), \psi) dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \|\psi\| dx = \|\psi\|$ , звідки  $\mathcal{J} = \mathcal{K}_1(0)$ .

**Задача 2.11.** Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{dx}{dt} = x + bu,$$

де  $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$ ,  $u(t) \in \mathcal{U}$ ,  $t \geq 0$ ,  $b$  – деяке ненульове число,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \leq 2\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 3\}.$$

**Розв’язок.** Множину досяжності знайдемо через її опорну функцію:

$$c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) = c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0)\psi) + \int_{t_0}^t c(\mathcal{U}(s), C^*(s)\Theta^*(t, s)\psi) ds.$$

Для цього послідовно знаходимо:

$\Theta(t, s) = e^{t-s}$ , знайдено із рівності  $\frac{d\Theta(t, s)}{dt} = A(t)\Theta(t, s) = \Theta(t, s)$  у нашому випадку.

$c(\mathcal{M}_0, \psi) = c([-2, 2], \psi) = 2|\psi|$ , вже достатньо відома нам опорна функція.

$c(\mathcal{U}(s), \psi) = c([-3, 3], \psi) = 3|\psi|$ , ще одна вже достатньо відома нам опорна функція.

Послідовно підставляючи знайдені вирази в формулу вище знаходи-

мо:

$$\begin{aligned}
c(X(t, \mathcal{M}_0), \psi) &= c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, t_0), \psi) + \int_{t_0}^t c(\mathcal{U}(s), C^*(s) \Theta^*(t, s) \psi) ds = \\
&= c([-2, 2], \Theta^*(t, 0), \psi) + \int_0^t c([-3, 3], b \Theta^*(t, s) \psi) ds = \\
&= 2 |\Theta^*(t, 0) \psi| + \int_0^t 3 |b \Theta^*(t, s) \psi| ds = \\
&= 2 |e^t \psi| + \int_0^t 3 |b e^{t-s} \psi| ds = 2e^t |\psi| + 3|b\psi| \int_0^t e^{t-s} ds = \\
&= 2e^t |\psi| + 3|b\psi| (e^t - 1) = (2e^t + 3|b| (e^t - 1)) |\psi|,
\end{aligned}$$

звідки  $\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0) = [-2e^t - 3|b| (e^t - 1), 2e^t + 3|b| (e^t - 1)]$ .

**Задача 2.12.** Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 + u_2, \end{cases}$$

де  $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{M}_0$ ,  $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$ ,  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_0 &= \{(x_{01}, x_{02}) : x_{01}^2 + x_{02}^2 \leq 4\}, \\
\mathcal{U} &= \{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}.
\end{aligned}$$

**Розв'язок.** Одразу помітимо, що  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$\Theta(t, s)$  знайдемо розв'язавши однорідну систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2, \end{cases}$$

Її визначник  $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$ , звідки  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 3$ .

Підставляючи знайдені числа у систему, знаходимо власні вектори:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  та  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  відповідно.

Отже загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -2e^{3t} \end{pmatrix}$$

Розв'язуючи рівняння

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 2e^{-s} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3s} \\ -2e^{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

і

$$c_1 \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 2e^{-s} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3s} \\ -2e^{3s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

знаходимо фундаментальну матрицю системи, нормовану за моментом  $s$ , а саме

$$\Theta(t, s) = \begin{pmatrix} \frac{e^{s-t} + e^{3(t-s)}}{2} & \frac{e^{s-t} - e^{3(t-s)}}{2} \\ e^{s-t} - e^{3(t-s)} & \frac{e^{s-t} + e^{3(t-s)}}{2} \end{pmatrix}$$

Далі знаходимо  $c(\mathcal{M}_0, \psi) = c(\mathcal{K}_2(0), \psi) = 2\|\psi\|$ , та  $c(\mathcal{U}, \psi) = c(\mathcal{K}_1(0), \psi) = \|\psi\|$ , вже достатньо відомі нам опорні функції.

Нарешті, можемо зібрати це все до купи:

$$\begin{aligned} c(\mathcal{X}(t, \mathcal{M}_0), \psi) &= c(\mathcal{M}_0, \Theta^*(t, 0)\psi) + \int_0^t c(\mathcal{U}(s), C^*(s)\Theta^*(t, s)\psi)ds = \\ &= 2\|\Theta^*(t, 0)\psi\| + \int_0^t \|C^*(s)\Theta^*(t, s)\psi\| ds = \\ &= 2\left\| \begin{pmatrix} \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2} & e^{3t} - e^{-t} \\ \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4} & \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\| + \\ &+ \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} \frac{e^{s-t} + e^{3(t-s)}}{2} & \frac{e^{s-t} - e^{3(t-s)}}{2} \\ \frac{e^{s-t} - e^{3(t-s)}}{4} & \frac{e^{s-t} + e^{3(t-s)}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\| ds = \\ &= 2\left\| \begin{pmatrix} \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \cdot \psi_1 + (e^{3t} - e^{-t}) \cdot \psi_2 \\ \frac{e^{3t} - e^{-t}}{4} \cdot \psi_1 + \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2} \cdot \psi_2 \end{pmatrix} \right\| + \dots \end{aligned}$$

### **2.3    Задачі для самостійного розв'язування**