1 Системи керування. Постановка задачі оптимального керування

1.1 Алгоритми

Задача. Задана лінійна система керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot x(t) + B(t)\cdot u(t), \tag{1.1}$$

де $x(t)\in\mathbb{R}^n$ – вектор фазових координат, $A(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $u\in\mathbb{R}^m$ – відоме керування, $B(t)\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $t\in[t_0,T]$, з початковими умовами $x(t_0)=x_0$, де $x_0\in\mathbb{R}^n$. Необхідно:

1. Визначити клас керування (програмне чи з оберненим зв'язком).
2. Знайти траєкторію системи, що відповідає заданому керуванню.
3. Звести задане керування до програмного.
4. Перевірити траєкторію на неперервну диференційованість.
5. Порівняти задане керування з іншим керуванням відносно заданого критерію якості

$$\mathcal{J}(u) = \int_{t_0}^{T} f(x(t),u(t),t)\,\mathrm{d}t + \Phi(x(T)) \to \min \tag{1.2}$$

6. Знайти фундаментальну матрицю системи, нормовану за моментом s.
7. Побудувати спряжену систему диференціальних рівнянь.

Алгоритм 1.1. Розглянемо всі пункти задачі описані вище.

1. Якщо $u=u(t)$ не залежить від x, то керування програмне, інакше ($u=u(x,t)$) керування з оберненим зв'язком.
2. Для знаходження траєкторії розв'язується система (1.1) з підставленим u.
3. У визначенні $u=u(x,t)$ x замінюється на знайдену у попередньому пункті траєкторію $x=x(t)$.

4. Це питання має сенс якщо керування кусково-неперервне, тоді у всіх точках розриву необхідно розглянути односторонні похідні і перевірити їх на рівність. Якщо похідні рівні то траєкторія неперервно диференційовна, інакше ні.

5. Значення критерію якості (1.2) обчислюється на обох керуваннях і порівнюється.

6. Розв'язується система диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(t,s)}{\mathrm{d}t} = A(t)\cdot\Theta(t,s), \quad \Theta(s,s) = I. \tag{1.3}$$

7. Спряженою системою до системи (1.1) називається система вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = -A^*(t)\cdot y(t), \tag{1.4}$$

   де $y = (y_1, \dots, y_n)^*$.

Задача. Звести задачу Лагранжа (або Больца) з функціоналом вигляду (1.2) за умов (1.1) до задачі Майєра.

Алгоритм 1.2. Зведення відбувається у кілька кроків:

1. Вводиться змінна

$$x_{n+1}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t} f(x(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Тоді

$$\mathcal{J}(u) = x_{n+1}(T) + \Phi(T) \to \inf.$$

3. До системи додається умова

$$\frac{\mathrm{d}x_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t), u(t), t).$$

1.2 Аудиторне заняття

Задача 1.1. Задана скалярна система керування

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t), \quad x(0) = 1. \tag{1.5}$$

Тут x – стан системи, $t \in [0, 1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x) = ax. \tag{1.6}$$

Тут a – скалярний параметр.

1. Знайти траєкторію системи (1.5) при керуванні (1.6).
2. Знайти програмне керування $u(t) = ax(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.
3. Оцінити, при якому значення параметра $a \in \{2, 4, -3\}$ критерій якості $\mathcal{J}(u) = x^2(1)$ буде мати менше значення.

Розв'язок. Скористаємося пунктами 2, 3, 5 алгоритму 1.1:

1. Підставляючи керування (1.6) у систему (1.5), отримаємо систему

   $$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = ax(t), \quad x(0) = 1.$$

   Її розв'язок має вигляд

   $$x(t) = x(0) \cdot e^{at} = e^{at}.$$

2. Знайдемо керування з траекторією, що була знайдена на попередньому кроці за формулою (1.6):

   $$u(t) = ax(t) = a \cdot e^{at}.$$

3. Множина $\{2, 4, -3\}$ скінченна, тому можна просто перебрати всі її елементи та обчислити значення критерію якості на кожному з них:

   $$\begin{aligned} \mathcal{J}(u)\big|_{a=2} &= x^2(1) = e^{2at}\big|_{t=1} = e^4, \\ \mathcal{J}(u)\big|_{a=4} &= x^2(1) = e^{2at}\big|_{t=1} = e^8, \\ \mathcal{J}(u)\big|_{a=-3} &= x^2(1) = e^{2at}\big|_{t=1} = e^{-6}. \end{aligned}$$

   Найменшим з цих значень є e^{-6} яке досягається при $a = -3$.

Задача 1.2. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1. \tag{1.7}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2. \tag{1.8}$$

1. Знайти траєкторію системи (1.7) при керуванні (1.8).

2. Знайти програмне керування $u(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.

3. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом s, системи. що одержана при підстановці керування (1.8) у систему (1.7)?

4. Побудувати спряжену систему до системи, одержаної при підстановці керування (1.8) у систему (1.7), та її фундаментальну матрицю.

Розв'язок. Скористаємося пунктами 2, 3, 5-7 алгоритму 1.1:

1. Підставляючи керування (1.8) у систему (1.7), отримаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = 3x_1(t) + 2x_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + 2x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = 2, x_2(0) = 1.$$

   Її розв'язок

$$\begin{cases} x_1(t) = 2e^{4t}, \\ x_2(t) = e^{4t}. \end{cases}$$

2. Підставляємо знайдену у попередньому пункті траєкторію у вигляд (1.8) керування:

$$u(t) = 2x_1(t) + x_2 = 2 \cdot \left(2e^{4t}\right) + e^{4t} = 5e^{4t}.$$

3. Загальним розв'язком системи (1.7) з підставленим керуванням (1.8) є

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1e^t + 2c_2e^{4t}, \\ x_2(t) = -c_1e^t + c_2e^{4t}. \end{cases}$$

Це означає, що фундаментальна матриця цієї системи матиме вигляд

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} c_{11}e^t + 2c_{12}e^{4t} & c_{21}e^t + 2c_{22}e^{4t} \\ -c_{11}e^t + c_{12}e^{4t} & -c_{21}e^t + c_{22}e^{4t} \end{pmatrix}$$

Залишається нормувати її за моментом s, тобто знайти такі $c_{11}(s)$, $c_{12}(s)$, $c_{21}(s)$, $c_{22}(s)$, що $\Theta(s, s) = I$. Отримаємо

$$\Theta(t, s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} & -2e^{t-s} + 2e^{4(t-s)} \\ e^{t-s} - e^{4(t-s)} & 2e^{t-s} + e^{4(t-s)} \end{pmatrix}$$

4. Спряжена система

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t} = -3z_1(t) - z_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t} = -2z_1(t) - 2z_2(t), \end{cases}$$

а відповідна фундаментальна матриця

$$\Psi(t, s) = \Theta^*(s, t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{s-t} + 2e^{4(s-t)} & e^{s-t} - e^{4(s-t)} \\ -2e^{s-t} + 2e^{4(s-t)} & 2e^{s-t} + e^{4(s-t)} \end{pmatrix}$$

Задача 1.3. Розглядається задача Больца

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^1 u^2(s)\,\mathrm{d}s + (x(1) - 2)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x^2(t) + u(t), \quad x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 1]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ задана. Звести цю задачу до задачі Майєра.

Розв'язок. Скористаємося алгоритмом 1.2:

Введемо нову змінну

$$x_2 = \int_0^t u^2(s)\,\mathrm{d}s,$$

тоді

$$\mathcal{J}(u) = x_2(1) + (x_1(1) - 2)^2 \to \inf,$$

за умов, що

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = x_1^2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = u^2(t). \end{cases} \qquad x_1(0) = x_0, x_2(0) = 0.$$

Задача 1.4. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = 3x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, x_2(0) = -1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ 1, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.

2. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційовною?

3. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням $u(t) = 0$, $t \in [0, 2]$ за умови, що критерій якості має вигляд

$$\mathcal{J}(u) = x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min.$$

Розв'язок. Скористаємося пунктами 2-5 алгоритму 1.1:

1. При $t \in [0, 1]$ маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,$$

звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

З курсу диференціальних рівнянь відомо, що загальний розв'язок має вигляд

$$x = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t},$$

де v_1, v_2 – власні вектори, що відповідають λ_1 та λ_2 відповідно. Підставляючи λ_i, $i = 1, 2$, знаходимо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Підставляючи $t = 0$ отримуємо $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. При $t \in (1, 2]$ маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

де c_3, c_4 задовольняють систему

$$\begin{cases} 2c_3 + c_4 + 1 &= 0, \\ 3c_3 + 4c_4 &= 0, \end{cases}$$

звідки $c_3 = -4/5$, $c_4 = 3/5$ і

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 v_1 e^t + c_2 v_2 e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix},$$

Підставляючи $t = 1$ отримуємо $c_1 = \left(1 + \dfrac{3}{4e}\right)$, $c_2 = \dfrac{1}{20e^5}$. Остаточно маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, & t \in [0, 1], \\ \left(1 + \dfrac{3}{4e}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \dfrac{1}{20e^5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

2.

$$\dot{x}(1-) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1-).$$

З неперервності x_1, x_2 маємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1-) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1).$$

З іншого боку,

$$\dot{x}(1+) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1+) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нескладно бачити, що

$$\dot{x}(1-) \neq \dot{x}(1+),$$

тобто траєкторія не є неперервно диференційовною в точці 1.

3. Підставимо $t = 2$ в розв'язки для обох керувань (зауважимо, що для нового керування розв'язок ми вже знаємо, це просто продовження вже знайденого розв'язку для $t \in [0,1]$). Значення критерію якості на першому керуванні буде

$$\left(e^2 + \frac{3}{4}e + \frac{e^5}{20} - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(-e^2 - \frac{3}{4}e + \frac{3e^5}{20} + \frac{3}{5}\right)^2,$$

а на другому $(e^2)^2 + (-e^2)^2$.

Виконавши обчислення знаходимо, що другий вираз менше, тобто нове керування є кращим за початкове.

1.3 Домашнє завдання

Задача 1.5. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -8x_1(t) - x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = 6x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \quad x_1(0) = -2, x_2(0) = 1. \tag{1.9}$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0,1]$. Керування задане у вигляді

$$u(x_1, x_2) = 4x_1 - x_2. \tag{1.10}$$

1. До якого класу керувань належить керування (1.10): програмних, чи з оберненим зв'язком?

2. Знайти траєкторію системи при керуванні (1.10).

3. Знайти програмне керування $u(t) = 4x_1(t) - x_2(t)$, яке відповідає знайденій траєкторії.

4. Якою буде фундаментальна матриця, нормована за моментом s, системи, що одержана при підстановці керування (1.10) в систему (1.9)?

5. Побудувати спряжену систему до системи (1.10), одержаної при підстановці керування (1.10) в систему (1.9), та її фундаментальну матрицю.

Задача 1.6. Розглядається задача Лагранжа

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T u^2(s)\,\mathrm{d}s \to \inf$$

за умови, що

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) \cdot x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, T]$. Звести цю задачу до задачі Майєра.

Задача 1.7. Задана система керування

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -x_1(t) - 5x_2(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = x_1(t) + x_2(t) + u(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $t \in [0, 2]$. Керування задане у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0, 1], \\ t, & \text{якщо } t \in (1, 2]. \end{cases}$$

1. До якого класу керувань належить таке керування: програмних чи з оберненим зв'язком?

2. Знайти траєкторію системи, яка відповідає цьому керуванню.

3. Чи буде ця траєкторія неперервно диференційованою?

4. Чи буде таке керування кращим в порівнянні з керуванням

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in [0,1], \\ t^2, & \text{якщо } t \in (1,2], \end{cases}$$

за умови, що критерій якості має вигляд

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^2 u^2(s)\,\mathrm{d}s + x_1^2(2) + x_2^2(2) \to \min$$