

# Заняття 1: Побудова диференціальних рівнянь за заданим параметричним сімейством кривих

## Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти диференціальні рівняння сімейств кривих та дати геометричне тлумачення результатів

**Задача 1.**  $x + y^2 = C$ .

**Задача 2.**  $y = e^{Cx}$ .

**Задача 3.**  $y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$ .

**Задача 4.** Написати диференціальні рівняння всіх кіл на площині.

**Задача 5.**  $(x - C)^2 + y^2 = r^2$ .

**Задача 6.**  $y - C = e^{x/C}$ .

**Задача 7.**  $y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3$ .

**Задача 8.** Знайти диференціальні рівняння всіх кіл на площині, які проходять через початок координат:

$$x^2 + y^2 - 2C_1x - 2C_2y = 0.$$

## Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти диференціальні рівняння сімейств кривих та дати геометричне тлумачення результатів

**Задача 9.**  $x^2 + y^2 - Cx = 0$ .

**Задача 10.**  $y = C/x$ .

**Задача 11.**  $y = \sin(x + C)$ .

**Задача 12.**  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ .

**Задача 13.**  $y = \tan Cx$ .

**Задача 14.**  $\tan(x + C) - y = 0$ .

**Задача 15.** Знайти диференціальне рівняння всіх прямих на площині.

**Задача 16.** Утворити диференціальне рівняння прямих, що проходять через задану точку з координатами  $(a, b)$ .

## Заняття 2: Поле напрямів. Інтегральні криві

Побудувати поле напрямів та накреслити схематично поведінку інтегральних кривих наступних диференціальних рівнянь.

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Задача 17.  $dy/dx = 2x + 1$ .

Задача 18.  $dy/dx = y/x$ .

Задача 19.  $dy/dx = y - x^2$ .

Задача 20.  $dy/dx = 2y - x$ .

Задача 21.  $dy/dx = x^2 + 2x - y$ .

Задача 22.  $dy/dx = x^2 + y^2$ . Побудувати ізокліни  $y' = 0$ ,  $y' = 1/\sqrt{3}$ ,  $y' = \sqrt{3}$ .

Задача 23.  $dy/dx = y/(x + y)$ .

Задача 24.  $dy/dx = -2xy$ .

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 25.  $dy/dx = y + x$ .

Задача 26.  $dy/dx = -x/y$ .

Задача 27.  $dy/dx = y + x^2$ .

Задача 28.  $dy/dx = y - 3x$ .

Задача 29.  $dy/dx = (y - 1)^2$ .

Задача 30.  $dy/dx = x^2 - y^2$ . Побудувати ізокліни  $y' = 0$ ,  $y' = \pm 1$ ,  $y' = \pm 2$ ,  $y' = \pm 3$ .

Задача 31.  $dy/dx = (y - 3x)/(x + 3y)$ .

Задача 32.  $y \cdot (dy/dx + x) = 1$ .

## Заняття 3: Диференціальні рівняння 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Рівняння з відокремлюваними змінними

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Задача 33.  $(y^2 - 1) \cdot (x + 2) \cdot dx - x^2 \cdot y \cdot dy = 0.$

Задача 34.  $\sec^2(x) \cdot \tan(y) \cdot dy + \sec^2(y) \cdot \tan(x) \cdot dx = 0.$

Задача 35.  $x \cdot y - (x^2 + 1) \cdot y' = 0. M(0, 1).$

Задача 36.  $\frac{dy}{dx} + \frac{x^3 \cdot (y - 1)^3}{(x + 1) \cdot y} = 0.$

Задача 37.  $x^2 \cdot dx + y^3 \cdot e^{x+y} \cdot dy = 0.$

Задача 38.  $y^{-3} \cdot \ln(\ln(x)) \cdot dx + x \cdot e^{y^2} \cdot dy = 0.$

Задача 39.  $(e^x - 1)/e^y = e^{e^y} \cdot (1 + e^x) \cdot y'.$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 40.  $2x \cdot (1 + y^2) \cdot dx + y \cdot (1 + x^2) \cdot dy = 0. M(1, 0).$

Задача 41.  $dy/dx = e^{x+y}. M(0, 0).$

Задача 42.  $y \cdot dx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) \cdot dy = 0. M(1, 1).$

Задача 43.  $y' = \sin(\ln(x))/\cos(\ln(y)).$

Задача 44.  $(\cos(x)/\ln(y)^2) \cdot dx + y/x^2 \cdot dy = 0.$

Задача 45.  $\frac{1 - \ln^2(y)}{x \cdot \ln(y)} \cdot dx + \frac{\sqrt{3 - \ln^2(x)}}{y} \cdot dy = 0.$

## Заняття 4: Інтегровані типи диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Однорідні рівняння та зведені до них. Лінійні рівняння

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Задача 46.  $(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot dx - x \cdot dy = 0.$

Задача 47.  $2xy \cdot dx + (y^2 - x^2) \cdot dy = 0. M(1, 1).$

Задача 48.  $(2x + 3y) \cdot dx + (x + 2y) \cdot dy = 0.$

Задача 49.  $x \cdot y' - x \cdot \cos(y/x) - y = 0.$

Задача 50.  $(y^3 + 2x^2y) \cdot dx - (2x^3 + 2xy^2) \cdot dy = 0.$

Задача 51.  $(6x + y - 1) \cdot dx + (4x + y - 2) \cdot dy = 0.$

Задача 52.  $(x + y + 1) \cdot dx + (2x + 2y - 1) \cdot dy = 0.$

Задача 53.  $y \cdot (x^2 \cdot y^2 + 1) \cdot dx + (x^2 \cdot y^2 - 1) \cdot x \cdot dy = 0.$

Задача 54.  $x \cdot y \cdot dx + (y^4 - x^2) \cdot dy = 0.$

Задача 55.  $dy/dx - y = 2x - x^2.$

Задача 56.  $dy/dx + y \cdot \cos(x) = \sin(x) \cdot \cos(x).$

Задача 57.  $y' \cdot (x + \cot(y)) = 1.$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 58.  $x \cdot y' = y \cdot (1 + \ln(y) - \ln(x)).$

Задача 59.  $x \cdot dy - (\sqrt{x^2 + y^2} + y) \cdot dx = 0.$

Задача 60.  $(xy \cdot e^{x/y} + y^2) \cdot dx - x^2 e^{x/y} \cdot dy = 0.$

Задача 61.  $(6xy + 5y^2) \cdot dx + (3x^2 + 10xy - y^2) \cdot dy = 0.$

Задача 62.  $(x^3 + 3xy^2) \cdot (2y^3 + 3x^2y) \cdot dy = 0.$

Задача 63.  $(x - 2) \cdot dx + (y - 2x + 1) \cdot dy = 0.$

Задача 64.  $(x + 2y - 1) \cdot dx + (2x + 4y + 3) \cdot dy = 0.$

Задача 65.  $y^3 \cdot dx + 2 \cdot (x^2 - xy^2) \cdot dy = 0.$

Задача 66.  $(xy^2 - y) \cdot dx - (x^3y^2 - 3x^2y + 3x) \cdot dy = 0.$

Задача 67.  $dy/dx - y = x - 1. M(0, 1).$

Задача 68.  $y' + y = \sin(x) + \cos(x).$

Задача 69.  $y' \cdot (x + \ln(y)) = 1.$

## Заняття 5: Інтегровані типи диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Лінійні неоднорідні рівняння. Метод варіації довільної сталої. Рівняння типу Бернуллі

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Задача 70.  $dy/dx - 2xy = 1$ .

Задача 71.  $dy/dx + y/x = \sin(x)/x^2$ .

Задача 72.  $x \cdot y' + y = x \cdot \cos(x)$ .  $M(\pi/2, 1)$ .

Задача 73.  $y' \cdot \sin(x) - y = 2 \sin^2(x/2)$ .

Задача 74.  $x \cdot \cos(x) \cdot dy/dx + y \cdot (x \cdot \sin(x) + \cos(x)) = 1$ .

Задача 75.  $1/y \cdot dy/dx + (2 - x) \cdot \ln y = x \cdot (e^{2x} - e^{-x^2/2})$ .

Задача 76.  $y' + 2y/x = 2\sqrt{y}/\cos^2(x)$ .

Задача 77.  $\cos(x) \cdot dy/dx - y \cdot \sin(x) = y^4$ .

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 78.  $x \cdot \ln x \cdot dy/dx - y = x \cdot (\ln(x) - 1)$ .

Задача 79.  $y' + y \cdot \tan(x) = x \cdot \cos^2(x)$ .  $M(0, 1)$ .

Задача 80.  $(y^2 - 6x) \cdot y' + 2y = 0$ .  $M(0, -1)$ .

Задача 81.  $(y - y^2) \cdot dx + (2xy^2 - x - y^2) \cdot dy = 0$ .

Задача 82.  $dx + (x - e^{-y} \cdot \sec^2(y)) \cdot dy = 0$ .  $M(2, 0)$ .

Задача 83.  $\sec^2(y) \cdot dy/dx + a \cdot \tan(y) = x$ .

Задача 84.  $y' + xy/(1 - x^2) = x \cdot \sqrt{y}$ .

Задача 85.  $3 dy/dx - y \cdot \sin(x) + 3y^4 \cdot \sin(x) = 0$ .

Задача 86.  $x \cdot y' + y = x \cdot y^2 \cdot \ln(x)$ .

## Заняття 6: Рівняння Рікатті

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти розв'язки рівнянь, підібравши спочатку частинні розв'язки:

**Задача 87.**  $x^2 \cdot dy/dx - x^2y^2 + 5xy - 3 = 0$ .

**Задача 88.**  $dy/dx + xy^2 + y/x - x^3 - 2 = 0$ .

Знайти загальні розв'язки рівнянь:

**Задача 89.**  $(x - x^4) \cdot y' - x^2 - y + 2xy^2 = 0$ ,  $y_1(x) = x^2$ .

**Задача 90.**  $dy/dx = 2y^2/x^2 + y/x + x \cdot \cos(x) - 1 + \cos(2x)$ ,  $y_1(x) = x \cdot \sin(x)$ .

**Задача 91.**  $dy/dx = y^2/x^2 + (2 + 1/x) \cdot y - e^{4x}$ ,  $y_1(x) = x \cdot e^{2x}$ .

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

**Задача 92.**  $x^3 \cdot dy/dx - y^2 - x^2y + x^2 = 0$ .

**Задача 93.**  $dy/dx = y^2 - x^2 + 1$ .

**Задача 94.**  $y' = y^2 + y/x + 1/x^2$ ,  $y_1(x) = -1/x$ .

**Задача 95.**  $dy/dx = y^2/x^2 + y/x - x \cdot \sin(x) - \cos^2(x)$ ,  $y_1(x) = x \cdot \cos(x)$ .

**Задача 96.**  $dy/dx = e^{-x}/\sin(x) \cdot y^2 + y + e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x))$ ,  $y_1(x) = e^x \cdot \sin(x)$ .

## Заняття 7: Рівняння в повних диференціалах

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти розв'язки рівнянь в повних диференціалах:

**Задача 97.**  $(e^t \cdot \cos(x) + e^x \cdot \cos(y)) \cdot dx + (e^y \cdot \sin(x) - e^x \cdot \sin(y)) \cdot dy = 0.$

**Задача 98.**  $\left(2x \cdot \ln(x+y) + \frac{x^2+y}{x+y}\right) \cdot dx + \left(\ln(x+y) + \frac{x^2+y}{x+y}\right) \cdot dy = 0.$

**Задача 99.**  $(2x + x^2 - y^2x) \cdot dx - (2y + x^2y - y^2) \cdot dy = 0.$

**Задача 100.**  $(2x \cdot \sin y - y^2 \cdot \sin x) \cdot dx + (x^2 \cdot \cos(y) + 2y \cdot \cos(x) + 1) \cdot dy = 0.$

**Задача 101.**  $(6xy + x^2 + 3) \cdot y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0.$

**Задача 102.**  $(1 + y^2/x^2) \cdot dx - 2y/x \cdot dy = 0.$

**Задача 103.**  $(1 + e^{x/y}) \cdot dx + e^{x/y} \cdot (1 - x/y) \cdot dy = 0.$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти розв'язки рівнянь в повних диференціалах:

**Задача 104.**  $e^{-y} \cdot dx - (2y + x \cdot e^{-y}) \cdot dy = 0.$

**Задача 105.**  $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} \cdot dx - \frac{2x^3 + xy}{y^3} \cdot dy = 0.$

**Задача 106.**  $\left(\frac{x}{\sin(y)} + 2\right) \cdot dx + \frac{(x^2 + 1) \cdot \cos(y)}{\cos(2y) - 1} \cdot dy = 0.$

**Задача 107.**  $(x \cdot \ln(y) - x^2 + \cos(y)) \cdot dy + (x^2 + y \cdot \ln(y) - y - 2xy) \cdot dx = 0.$

**Задача 108.**  $\frac{2x - y}{x^2 + y^2} \cdot dx + \frac{2y + x}{x^2 + y^2} \cdot dy = 0.$

**Задача 109.**  $(2x \cdot \cos(y) - y^2 \cdot \sin(x)) \cdot dx + (2y \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(y)) \cdot dy = 0.$

**Задача 110.**  $(x \cdot e^y + e^x) \cdot dy + (e^y + y \cdot e^x) \cdot dx = 0.$

## Заняття 8: Інтегровальний множник. Випадки знаходження інтегровального множника

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегровального множника, знаючи, що вони мають вигляд  $\mu = f(x)$  або  $\mu = f(y)$ :

**Задача 111.**  $(2y + xy^3) \cdot dx + (x + x^2y^2) \cdot dy = 0.$

**Задача 112.**  $y^2 \cdot (x - 3y) \cdot dx + (1 - 3xy^2) \cdot dy = 0.$

**Задача 113.**  $2y \cdot dx + (y^2 - 6x) \cdot dy = 0.$

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників  $\mu(x + y)$ ,  $\mu(xy)$ , або  $\mu(x - y)$

**Задача 114.**  $(y - ay/x + x) \cdot dx + a \cdot dy = 0.$

**Задача 115.**  $y^2 \cdot dx + (xy - 1) \cdot dy = 0.$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегровального множника, знаючи, що вони мають вигляд  $\mu = f(x)$  або  $\mu = f(y)$ :

**Задача 116.**  $(1 + x^2y) \cdot dx + x^2 \cdot (x + y) \cdot dy = 0.$

**Задача 117.**  $(2xy + ax) \cdot dx + dy = 0.$

**Задача 118.**  $dx + (x + e^{-y} \cdot y^2) \cdot dy = 0.$

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників  $\mu(x + y)$ ,  $\mu(xy)$ , або  $\mu(x - y)$

**Задача 119.**  $dx + x \cdot \cot(x + y) \cdot (dx + dy) = 0.$

**Задача 120.**  $(2x^2y + x) \cdot dy + (y + 2xy^2 - x^2y^3) \cdot dx = 0.$



## Заняття 9: Диференціальні рівняння 1-го порядку, не розв'язані відносно похідної. Метод параметризації

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти загальні розв'язки і загальні інтеграли рівнянь

Задача 121.  $x^3 \cdot (y')^2 + x^2 \cdot y \cdot y' + a = 0$ .

Задача 122.  $x \cdot (y')^2 - 2y' - y = 0$ .

Задача 123.  $y = 2x \cdot y' + \sqrt{1 + (y')^2}$ .

Задача 124.  $x \cdot \sqrt{1 + (y')^2} - y' = 0$ .

Задача 125.  $x = y' \cdot \sin(y')$ .

Задача 126.  $3(y')^5 - y \cdot y' + 1 = 0$ .

Задача 127.  $x^3 + (y')^3 - 3x \cdot y' = 0$ .

Задача 128.  $(y')^3 - 1 = 0$ .

Задача 129.  $x \cdot (2 + (y')^2) = 1$ .

Задача 130.  $y = y' \cdot \ln(y')$ .

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти загальні розв'язки і загальні інтеграли рівнянь

Задача 131.  $9y \cdot (y')^2 + 4x^3 \cdot y' - 4x^2 \cdot y = 0$ .

Задача 132.  $x \cdot (y')^2 + y \cdot y' + a = 0$ .

Задача 133.  $y = x \cdot y' + \sin(y')$ .

Задача 134.  $x \cdot (1 + (y')^2) = 1$ .

Задача 135.  $y = y' \cdot \sin(y') + \cos(y')$ .

Задача 136.  $y - y' = \sqrt{1 + (y')^2}$ .

Задача 137.  $(y')^2 + x \cdot y' - x^2 = 0$ .

Задача 138.  $(y')^2 + 2y' + 1 = 0$ .

Задача 139.  $x = a \cdot y' + b \cdot \sqrt{1 + (y')^2}$ .

Задача 140.  $x = y \cdot (1/\sqrt{y'} - 1/y')$ .

## Заняття 10: Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними

Зінтегрувати диференціальні рівняння та відшукати частинні розв'язки там, де задані початкові умови:

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Задача 141.  $y''' = 0$  при  $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0, y''_0 = 2$ .

Задача 142.  $y''' = x + \cos(x)$ .

Задача 143.  $xy^{IV} + y''' = e^{2x}$ .

Задача 144.  $y''' - (y'')^2 = 1$ .

Задача 145.  $x \cdot y'' = y' \cdot \ln(y'/x)$ .

Задача 146.  $2y \cdot y'' - (y')^2 = 1$ .

Задача 147.  $x^2 \cdot y''' - (y'')^2 = 0$ .

Задача 148.  $y'' = x \cdot e^x$  при  $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0$ .

Задача 149.  $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ .

Задача 150.  $x^2 \cdot y \cdot y'' = (y - x \cdot y')^2$ .

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 151.  $y^V = x - 1$ .

Задача 152.  $y''' = \ln(x)/x^2$ .

Задача 153.  $y'' + \ln(y'') - x = 0$ .

Задача 154.  $2y \cdot y'' - 3(y')^2 = 4y^2$ .

Задача 155.  $x \cdot y'' + y' - x^2 - 1 = 0$ .

Задача 156.  $y''' \cdot y - 3(y'')^2 = 0$ .

Задача 157.  $y \cdot (x \cdot y'' + y') = x \cdot (y')^2 \cdot (1 - x)$ .

Задача 158.  $y \cdot y'' - (y')^2 = y'$ .

Задача 159.  $x \cdot y \cdot y'' + x \cdot y' = 2y \cdot y'$ .

Задача 160.  $y''' - 3y \cdot y' = 0$ .

# Заняття 11: Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

## Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь, а також частинні там, де задані початкові умови:

Задача 161.  $y'' + 5y' + 4y = 0$ .

Задача 162.  $y'' - a^2 \cdot y = 0$ .

Задача 163.  $y''' + 8y = 0$ .

Задача 164.  $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ .

Задача 165.  $y^V - 10y''' + 9y' = 0$ .

Задача 166.  $y^{(6)} + 64y = 0$ .

Задача 167.  $y'' - 5y' + 4y = 0$  при  $x_0 = 0, y_0 = 1, y'_0 = 0$ .

Задача 168.  $y'' + y = 0$  при  $y(-\pi/2) = 1, y'(-\pi/2) = 0$ .

Задача 169.  $y^{IV} + a^4 \cdot y = 0$ .

## Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 170.  $y'' - 7y' + 10y = 0$ .

Задача 171.  $y'' + 9y = 0$ .

Задача 172.  $y'' + 3y' = 0$ .

Задача 173.  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

Задача 174.  $2y'' + y' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0$ .

Задача 175.  $y^{IV} - a^4 \cdot y = 0$ .

Задача 176.  $y^V - 4y^{IV} = 0$ .

Задача 177.  $y^{VI} + 2y^V = 0$ .

Задача 178.  $y'' - 4y' + 29y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 7$ .

## Заняття 12: Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними коефіцієнтами. Рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

**Задача 179.** Функції  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  задовольняють деяке однорідне лінійне диференціальне рівняння. Переконайтеся, що вони утворюють фундаментальну систему, та скласти згадане рівняння.

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами:

**Задача 180.**  $(1 + x^2) \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = 0$ ,  $y_1(x) = x$ .

**Задача 181.**  $y'' - (x^2 + 1) \cdot y = 0$ ,  $y_1(x) = e^{x^2/2}$ .

**Задача 182.**  $x \cdot y'' + 2y' + xy = 0$ ,  $y_1(x) = \sin(x)/x$  ( $x \neq 0$ ).

Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння (найменшого можливого порядку), яке має такі частинні розв'язки:

**Задача 183.**  $y_1(x) = 1$ ,  $y_2(x) = \cos(x)$ .

**Задача 184.**  $y_1(x) = x \cdot e^{-x}$ ,  $y_2(x) = e^{-x}$ .

Розв'язати рівняння:

**Задача 185.**  $y''' - 3y''/x + 6y'/x^2 - 6y/x^3 = \sqrt{x}$ .

**Задача 186.**  $x^3 \cdot y''' + x \cdot y' - y = 0$ .

**Задача 187.**  $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' - 3y = 0$ .

**Задача 188.**  $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0$ .

**Задача 189.**  $(2x + 3)^2 \cdot y'' + (2x + 3) \cdot y' - y = 0$ .

**Задача 190.**  $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + 4y = 10x$ .

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

**Задача 191.** Побудувати диференціальне рівняння, що має таку фундаментальну систему функцій: 1 та  $\cos(2x)$ .

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами:

**Задача 192.**  $(1 - x) \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0$ ,  $y_1(x) = e^x$ .

**Задача 193.**  $(1 + x^2) \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0$ ,  $y_1(x) = \sqrt{1 + x^2}$ .

**Задача 194.**  $y'' - x \cdot y' + 2y = 0$ ,  $y_1(x) = x^2 - 1$ .

**Задача 195.**  $x^2 \cdot y'' + 2x \cdot y' - 6y = 0$ .

**Задача 196.**  $x^2 \cdot y''' - 2y' = 0$ .

**Задача 197.**  $(x + 1)^3 \cdot y''' - 3(x + 1)^2 \cdot y'' + 4(x + 1) \cdot y' - 4y = 0$ .

**Задача 198.**  $x^3 \cdot y''' - x \cdot y' - 3y = 0$ .

**Задача 199.**  $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' - 3y = 5x^4$ .

**Задача 200.**  $x^2 \cdot y'' - 4x \cdot y' + 6y = 0$ .

**Задача 201.**  $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + y = 8x^3$ .

**Задача 202.**  $x^2 \cdot y'' - 3x \cdot y' + 5y = 3x^2$ .

## Заняття 13–14: Методи Лагранжа, Коші і невизначених коефіцієнтів для розв’язування неоднорідних рівнянь вищих порядків

*НК — метод невизначених коефіцієнтів, Л — Лагранжа, К — Коші.*

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Задача 203.  $y'' - y = x^2 + 1$  (НК).

Задача 204.  $y''' - 4y' = x^2$  (Л).

Задача 205.  $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$  (НК).

Задача 206.  $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot \cos(x) + x \cdot e^{-x}$  (НК).

Задача 207.  $y'' + y = \cot(x)$  (К).

Задача 208.  $y'' - 6y' + 9y = (9x^2 + 6x + 2)/x^2$  (Л).

Задача 209.  $y'' - y = x^2 - x + 1$  (НК).

Задача 210.  $y'' + 4y = 4x \cdot \cos(2x)$  (Л).

Задача 211.  $y'' + 2y' - 3y = 2x - e^{3x}$  (НК).

Задача 212.  $y'' - 2y' + y = e^x/x$  (К).

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 213.  $y'' + y = \tan(x)$  (К).

Задача 214.  $y'' + 3y' + 2y = 1/(e^x + 1)$  (Л).

Задача 215.  $y'' - y = 1/x$  (К).

Задача 216.  $y'' + 4y = 1/\cos(2x)$  (Л).

Задача 217.  $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$  (НК).

Задача 218.  $y''' - 3y' + 2y = e^{-x} \cdot (4x^2 + 4x - 10)$  (НК).

Задача 219.  $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos(x)$  (НК).

Задача 220.  $y^V + y''' = x^2 - 1$  (НК).

Задача 221.  $y^{IV} - y = x \cdot e^x + \cos(x)$  (НК).

Задача 222.  $y'' + \omega^2 \cdot y = 1/(x + 1)$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = -3$  (Л).

# Заняття 15: Крайові задачі. Задача Штурма-Ліувілля. Побудова функції Гріна

## Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Яка з крайових задач має розв'язки:

**Задача 223.**  $y'' - y = 0, y(0) = 0, y'(\pi/2) = 1.$

**Задача 224.**  $y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(2\pi) = 1.$

Знайти власні значення і власні функції:

**Задача 225.**  $y'' = \lambda y, y(0) = y(b) = 0.$

**Задача 226.**  $y'' = \lambda y, y(0) = y'(b) = 0.$

Побудувати функції Гріна для крайових задач:

**Задача 227.**  $y'' = f(x), y(0) = y(1) = 0.$

**Задача 228.**  $y'' + y = f(x), y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi).$

## Рекомендовані приклади для домашнього завдання

**Задача 229.**  $y'' + y = 1, y'(0) = 0, y(1) = 1.$

**Задача 230.**  $y'' + y = 1, y(0) = y(\pi/2) = 0.$

**Задача 231.**  $y'' + y = f(x), y'(0) = y(\pi) = 0.$

**Задача 232.**  $y'' = \lambda y, y'(0) = y'(\ell) = 0.$

**Задача 233.**  $x^2 \cdot y'' = \lambda y, y(1) = y(a) = 0.$

## Заняття 16: Розв'язування однорідних лінійних систем з постійними коефіцієнтами

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Задача 234.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

Задача 235.

$$\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$$

Задача 236.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

Задача 237.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y - z, & \lambda_2 = 2, \\ \dot{z} = 2x - y, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

Задача 238.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y, & \lambda_2 = 1 + 2i, \\ \dot{z} = 3x + z, & \lambda_3 = 1 - 2i. \end{cases}$$

Задача 239.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, & \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 2y - z, & \lambda_2 = 3, \\ \dot{z} = x - y + 2z, & \lambda_3 = 3. \end{cases}$$

Задача 240.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y - z, & \lambda_2 = 1, \\ \dot{z} = -y + 2z, & \lambda_3 = 2. \end{cases}$$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 241.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$$

Задача 242.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

Задача 243.

$$\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$$

Задача 244.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, & \lambda_1 = 0, \\ \dot{y} = -x + y + z, & \lambda_2 = 2, \\ \dot{z} = x - z, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

**Задача 245.**

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, & \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 3y - z, & \lambda_2 = 3 + i, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z, & \lambda_3 = 3 - i. \end{cases}$$

**Задача 246.**

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, & \lambda_1 = 0, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, & \lambda_2 = 1, \\ \dot{z} = -x + y + 2z, & \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

**Задача 247.**

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2z, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = 4x + y, & \lambda_2 = -1, \\ \dot{z} = 2x + y - z, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$$



## Заняття 17–18: Методи розв’язування неоднорідних систем з постійним коефіцієнтами. Застосування методу невизначених коефіцієнтів

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Задача 248.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

Задача 249.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

Задача 250.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$$

Задача 251.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18. \end{cases}$$

Задача 252.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$$

Задача 253.

$$\begin{cases} \dot{x} = t + \tan^2(t) - 1, \\ \dot{y} = -x + \tan(t). \end{cases}$$

Задача 254.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + 2/(e^t - 1), \\ \dot{y} = 6x + 3y - 3/(e^t - 1). \end{cases}$$

Задача 255.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1/\cos(t), \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 256.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos(t), \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

Задача 257.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Задача 258.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$$

Задача 259.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16t \cdot e^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

**Задача 260.**

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \cdot \sin(t). \end{cases}$$

**Задача 261.**

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x - e^{3t}/(e^{2t} + 1). \end{cases}$$

## Заняття 19–20: Системи в симетричній формі. Розв’язування лінійних рівнянь першого порядку з частинними похідними. Метод характеристик. Задача Коші

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Задача 262.  $\frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$

Задача 263.  $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}.$

Задача 264.  $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Задача 265.  $x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Задача 266.  $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$

Задача 267.  $(z-y)^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xz \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$

Знайти розв’язки рівняння, яке задовольняє вказаним умовам:

Задача 268.  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z = 2x$  при  $y = 1.$

Знайти поверхню, яка задовольняє даному рівнянню і проходить через задану лінію:

Задача 269.  $y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x, z = y^2$  при  $x = 0.$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Задача 270.  $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}.$

Задача 271.  $\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$

Задача 272.  $(x+2y) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Задача 273.  $(x-z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (y-z) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

Задача 274.  $e^x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot e^x.$

Задача 275.  $xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (x-2z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$

Знайти розв’язки рівняння, яке задовольняє вказаним умовам:

Задача 276.  $\frac{\partial z}{\partial x} - (2e^x - y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z = y$  при  $x = 0.$

Знайти поверхню, яка задовольняє даному рівнянню і проходить через задану лінію:

Задача 277.  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, z = x^2$  при  $y = 1.$

## Заняття 21: Особливі точки диференціальних рівнянь на площині

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем. Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині  $(x, y)$ :

Задача 278.  $y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}$ .

Задача 279.  $y' = \frac{y - 2x}{2y - 3x}$ .

Задача 280.  $y' = \frac{y}{x}$ .

Задача 281.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$$

Задача 282.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$$

Знайти та дослідити особливі точки систем:

Задача 283.  $y' = \frac{2y - x}{3x + 6}$ .

Задача 284.  $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4 - 8}$ .

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем. Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині  $(x, y)$ :

Задача 285.  $y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}$ .

Задача 286.  $y' = \frac{4y - 2x}{x + y}$ .

Задача 287.  $y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}$ .

Задача 288.

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases}$$

Задача 289.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

Знайти та дослідити особливі точки систем:

Задача 290.  $y' = \frac{2x + y}{x - 2y - 5}$ .

Задача 291.  $y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$ .

## Заняття 22–23: Методи Ляпунова. Побудова функцій Ляпунова для лінійних стаціонарних систем. Критерій Гурвіца

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

**Задача 292.** Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами  $\dot{x} = 4x - t^2x$ ,  $x(0) = 0$ .

**Задача 293.** Дослідити стійкість нульового розв'язку, якщо відомо загальний розв'язок системи  $x = C_1 \cdot \cos^2(t) - C_2 \cdot e^{-t}$ .

**Задача 294.** За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок:

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos(3x), \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$$

**Задача 295.** При яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin(x), \\ \dot{y} = a \cdot x + b \cdot y. \end{cases}$$

**Задача 296.** Дослідити, при яких значеннях параметра  $a$  буде асимптотично стійким нульовий розв'язок:

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot x - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

**Задача 297.** Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

Дослідити стійкість користуючись відомими критеріями:

**Задача 298.**  $y''' + y'' + y' + 2y = 0$ .

**Задача 299.**  $y^{IV} + 3.1y''' + 5.2y'' + 9.8y' + 5.8y = 0$ .

**Задача 300.** Дослідити, при яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  нульовий розв'язок буде асимптотично стійким:  $y''' + a \cdot y'' + b \cdot y' + 2y = 0$ .

**Задача 301.** Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T B x, \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, \end{cases}$$

таким чином, що її похідна в силу системи дорівнює  $-x_1^2 - x_2^2$ .

**Задача 302.** При яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + a \cdot x) - e^y, \\ \dot{y} = b \cdot x + \tan(y). \end{cases}$$

**Задача 303.** Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$$

## Рекомендовані приклади для домашнього завдання

**Задача 304.** Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами  $3 \cdot (t - 1) \cdot \dot{x} = x$ ,  $x(2) = 0$ .

За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок:

**Задача 305.**

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

**Задача 306.**

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$$

**Задача 307.** При яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = a \cdot x + y + x^2, \\ \dot{y} = x + a \cdot y + y^2. \end{cases}$$

**Задача 308.** Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - 1)(y - 1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

Дослідити стійкість користуючись відомими критеріями:

**Задача 309.**  $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$ .

**Задача 310.**  $y^V + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$ .

**Задача 311.** При яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  нульовий розв'язок буде асимптотично стійким:  $y^{IV} + y''' + a \cdot y'' + y' + b \cdot y = 0$ .

**Задача 312.** Дослідити, при яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  нульовий розв'язок буде асимптотично стійким:  $y''' + 3 \cdot y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ .

**Задача 313.** Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T B x, \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2, \end{cases}$$

таким чином, що її похідна в силу системи дорівнює  $-x_1^2 - x_2^2$ .

**Задача 314.** При яких значеннях параметрів  $a$  і  $b$  є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin(x), \\ \dot{y} = a \cdot x + b \cdot y. \end{cases}$$

**Задача 315.** Знайти всі положення рівноваги та дослідити їх на стійкість системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y). \end{cases}$$

## Заняття 24–25: Варіаційне числення

### Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти екстремалі таких функціоналів:

**Задача 316.**  $I[y(x)] = \int_{-1}^0 (12xy - (y')^2) dx, y(-1) = 1, y(0) = 0.$

**Задача 317.**  $I[y(x)] = \int_{-1}^1 ((y')^2 - 2xy) dx, y(-1) = -1, y(1) = 1.$

**Задача 318.**  $I[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2) dx, y(0) = 0, y(1) = 0, y'(0) = 1, y'(1) = -\sinh(1).$

**Задача 319.**  $I[y(x)] = \int_0^1 (y + y'') dx, y(0) = y_0, y(1) = y_1, y'(0) = y'_0, y'(1) = y'_1.$

**Задача 320.**  $I[y(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (y'')^2) dx, y(0) = 0, y(1) = \sinh(1), y'(0) = 1, y'(1) = \cosh(1).$

**Задача 321.**  $I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/4} (2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2) dx, y(0) = 0, y(\pi/4) = 1, z(0) = 0, z(\pi/4) = 1.$

**Задача 322.**  $I[y(x), z(x)] = \int_0^{\pi/2} ((y')^2 + (z')^2 - 2yz) dx, y(0) = 0, y(\pi/2) = 1, z(0) = 0, z(\pi/2) = 1.$

Дослідити на екстремум функціонали:

**Задача 323.**  $I[y(x)] = \int_0^1 ((y')^3 + y') dx, y(0) = 0, y(1) = 2.$

**Задача 324.**  $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2) dx, y(0) = 0, y(1) = 1, z(0) = 0, z(1) = 2.$

### Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти екстремалі таких функціоналів:

**Задача 325.**  $I[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{y \cdot (1 + (y')^2)} dx, y(0) = y(1) = 1/\sqrt{2}.$

**Задача 326.**  $I[y(x)] = \int_{-1}^1 ((y')^2 - 2xy) dx, y(-1) = -1, y(1) = 1.$

**Задача 327.**  $I[y(x)] = \int_{-1}^0 (240y - (y''')^2) dx, y(-1) = 1, y(0) = 0, y'(-1) = -4.5, y'(0) = 0, y''(-1) = 16, y''(0) = 0.$

**Задача 328.**  $I[y(x)] = \int_a^b ((y')^2 + y \cdot y'') \, dx, y(a) = A_1, y(b) = B_1, y'(a) = A_2, y'(b) = B_2.$

**Задача 329.**  $I[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y'')^2 \, dx, y(0) = 0, y(1) = 1, y'(0) = 0, y'(1) = 1.$

**Задача 330.**  $I[y(x), z(x)] = \int_{-1}^1 (2xy - (y')^2 + (z')^3/3) \, dx, y(1) = 0, y(-1) = 2, z(1) = 1, z(-1) = -1.$

**Задача 331.**  $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2 + 2y) \, dx, y(0) = 1, y(1) = 3/2, z(0) = 0, z(1) = 1.$

Дослідити на екстремум функціонали:

**Задача 332.**  $I[y(x)] = \int_0^1 (y + 2x + (y')^2/2) \, dx, y(0) = y'(0) = 0.$

**Задача 333.**  $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2 + 4z) \, dx, y(0) = 0, y(1) = 1, z(0) = 0, z(1) = 0.$