ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Скибицький Нікіта

5 січня 2019 р.

У ваших руках конспект лекцій з нормативного курсу "Диференціальні рівняння" прочитаного проф., д.ф.-м.н. Хусаїновим Денисом Ях'євичем на другому курсі спеціальності "прикладна математика" факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка восени 2017-го та навесні 2018-го року.

Конспект у компактній формі відображає матеріал курсу, допомагає сформувати загальне уявлення про предмет вивчення, правильно зорієнтуватися в даній галузі знань. Конспект лекцій з названої дисципліни сприятиме більш успішному вивченню дисципліни, причому більшою мірою для студентів заочної форми, екстернату, дистанційного та індивідуального навчання.

Комп'ютерний набір та верстка – Скибицький Нікіта Максимович.

Зміст

Вступ

Наведемо декілька основних визначень теорії диференціальних рівнянь, що будуть використовуватися надалі.

Визначення. Рівняння, що містять похідні від шуканої функції та можуть містити шукану функцію та незалежну змінну, називаються диференціальними рівняннями.

Визначення. Якщо в диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{0.1}$$

то диференціальне рівняння називається звичайним.

Визначення. Якщо невідома функція, що входить в диференціальне рівняння, є функцією двох або більшої кількості незалежних змінних

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial x^\ell \partial y^{k-\ell}}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0 \tag{0.2}$$

то диференціальне рівняння називається рівнянням в частинних похідних.

Визначення. Порядком диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної від невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння.

Визначення. Розв'язком диференціального рівняння називається функція, що має необхідну ступінь гладкості, і яка при підстановці в диференціальне рівняння обертає його в тотожність.

Визначення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.

1 Диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння першого порядку, що розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y). \tag{1.1}$$

Диференціальне рівняння становить зв'язок між координатами точки та кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ до графіку розв'язку в цій же точці. Якщо знати x та y, то можна обчислити $f(x, y)$ тобто $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Таким чином, диференціальне рівняння визначає поле напрямків, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, що звуться інтегральними кривими, напрям дотичних до яких в кожній точці співпадає з напрямом поля.

1.1 Рівняння зі змінними, що розділяються

1.1.1 Загальна теорія

Рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y), \tag{1.1.1}$$

або більш загального вигляду

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot \mathrm{d}x + g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot \mathrm{d}y = 0 \tag{1.1.2}$$

називаються рівняннями зі змінними, що розділяються. Розділимо його на $f_2(y) \cdot g_1(x)$ і одержимо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \mathrm{d}x + \frac{g_2(y)}{f_2(y)} \cdot \mathrm{d}y = 0. \tag{1.1.3}$$

Взявши інтеграли, отримаємо

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \mathrm{d}x + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)} \cdot \mathrm{d}y = C, \tag{1.1.4}$$

або

$$\Phi(x, y) = C. \tag{1.1.5}$$

Визначення. Кінцеве рівняння (1.1.5), що визначає розв'язок диференціального рівняння як неявну функцію від x, називається інтегралом розглянутого рівняння.

Визначення. Рівняння (1.1.5), що визначає всі без винятку розв'язки даного диференціального рівняння, називається загальним інтегралом.

Бувають випадки (в основному), що невизначені інтеграли з (1.1.3) не можна записати в елементарних функціях. Незважаючи на це, задача інтегрування вважається виконаною. Кажуть, що диференціальне рівняння розв'язане в квадратурах.

Можливо, що (1.1.5) розв'язується відносно y:

$$y = y(x, C). \tag{1.1.6}$$

Тоді, завдяки вибору C, можна одержати всі розв'язки.

Визначення. Залежність (1.1.6), що тотожньо задовольняє вихідному диференціальному рівнянню, де C – довільна стала, називається загальним розв'язком диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок являє собою сім'ю кривих, що не перетинаються, які заповнюють деяку область. Іноді треба виділити одну криву сім'ї, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.

Визначення. Знаходження розв'язку $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$, називається розв'язком задачі Коші.

Визначення. Розв'язок, який записаний у вигляді $y = y(x, x_0, y_0)$ і задовольняє умові $y(x, x_0, y_0) = y_0$, називається розв'язком у формі Коші.

1.1.2 Рівняння, що зводяться до рівнянь зі змінними, що розділяються

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c) \tag{1.1.7}$$

де a, b, c – сталі.

Зробимо заміну $ax + by + c = z$. Тоді

$$a \cdot \mathrm{d}x + b \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}z, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a\right). \tag{1.1.8}$$

Підставивши в (1.1.7), одержимо

$$\frac{1}{b} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a\right) = f(z), \tag{1.1.9}$$

або

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + b \cdot f(z), \tag{1.1.10}$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{\mathrm{d}z}{a + b \cdot f(z)} - \mathrm{d}x = 0 \tag{1.1.11}$$

і

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{a + b \cdot f(z)} - x = C. \tag{1.1.12}$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(ax + by + c, x) = C$.

1.1.3 Вправи для самостійної роботи

Рівняння зі змінними, що розділяються могуть бути записані у вигляді

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

або

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot \mathrm{d}x + g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot \mathrm{d}y.$$

Для розв'язків такого рівняння необхідно обидві частини помножити або розділити на такий вираз, щоб в одну частину входило тільки x, а в другу – тільки y. Тоді обидві частини рівняння можна проінтегрувати.

Якщо ділити на вираз, що містить x та y, може бути загублений розв'язок, що обертає цей вираз в нуль.

Приклад 1.1.1. Розв'язати рівняння

$$x^2 y^2 y' + y = 1.$$

Розв'язок. Підставивши $y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ в рівняння, отримаємо

$$x^2 y^2 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 1.$$

Помножимо обидві частини рівняння на $\mathrm{d}x$ і розділимо на $x^2 \cdot (y - 1)$. Перевіримо, що $y = 1$ при цьому є розв'язком, а $x = 0$ цим розв'язком не є:

$$\frac{y^2}{y - 1} \cdot \mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{y^2}{y - 1} \cdot \mathrm{d}y = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| = \frac{1}{x} + C$$

Приклад 1.1.2. Розв'язати рівняння

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

Розв'язок. Введемо заміну змінних $z = 4x + 2y - 1$. Тоді $x' = 4 + 2y'$. Рівняння перетвориться до вигляду

$$\begin{aligned} z' - 4 &= 2\sqrt{z} \\ z' &= 4 + 2\sqrt{z} \\ \frac{\mathrm{d}z}{2 + \sqrt{z}} &= 2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{2 + \sqrt{z}} = \int 2\,\mathrm{d}x$$

Обчислимо інтеграл, що стоїть зліва. При обчисленні будемо використовувати таку заміну:

$$\sqrt{z} = t, \quad \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t, \quad 2 + \sqrt{z} = 2 + t,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{2 + \sqrt{z}} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{2 + t} = 2\int \frac{t + 2 - 2}{t + 2} \cdot \mathrm{d}t = \\ = 2t - 4\ln|2 + t| = 2\sqrt{z} - 4\ln\left(2 + \sqrt{z}\right).$$

Після інтегрування отримаємо

$$2\sqrt{z} - 4\ln\left(2 + \sqrt{z}\right) = 2x + 2C.$$

Зробимо обернену заміну, $z = 4x + 2y - 1$:

$$\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(2 + \sqrt{4x + 2y - 1}\right) = x + C.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 1.1.1.

$$xy \cdot \mathrm{d}x + (x + 1) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.1.2.

$$x \cdot (1 + y) \cdot \mathrm{d}x = y \cdot (1 + x^2) \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.1.3.

$$y' = 10^{x+y};$$

Задача 1.1.4.

$$y' - xy^2 = 2xy;$$

Задача 1.1.5.

$$\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}x = xy \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.1.6.

$$y' = x\tan(y);$$

Задача 1.1.7.

$$yy' + x = 1;$$

Задача 1.1.8.

$$3y^2y' + 15x = 2xy^3;$$

Задача 1.1.9.

$$y' = \cos(y - x);$$

Задача 1.1.10.

$$y' - y = 2x - 3;$$

Задача 1.1.11.

$$xy' + y = y^2;$$

Задача 1.1.12.

$$e^{-y} \cdot (1 + y') = 1;$$

Задача 1.1.13.

$$2x^2yy' + y^2 = 2;$$

Задача 1.1.14.

$$y' - xy^3 = 2xy^2.$$

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють заданим початковим умовам:

Задача 1.1.15.

$$(x^2-1) \cdot y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.1.16.

$$y' \cdot \cot(x) + y = 2, \quad y(0) = -1;$$

Задача 1.1.17.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0.$$

1.2 Однорідні рівняння

1.2.1 Загальна теорія

Нехай рівняння має вигляд

$$M(x,y) \cdot \mathrm{d}x + N(x,y) \cdot \mathrm{d}y = 0. \tag{1.2.1}$$

Якщо функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні одного ступеня, то рівняння називається однорідним. Нехай функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні ступеня k, тобто

$$M(t\cdot x, t\cdot y) = t^k \cdot M(x,y), \qquad N(t\cdot x, t\cdot y) = t^k \cdot N(x,y). \tag{1.2.2}$$

Робимо заміну
$$y = ux, \quad \mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u. \tag{1.2.3}$$
Після підстановки одержуємо
$$M(x, ux) \cdot \mathrm{d}x + N(x, ux) \cdot (u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) = 0, \tag{1.2.4}$$
або
$$x^k M(1, u) \cdot \mathrm{d}x + x^k N(1, u) \cdot (u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) = 0. \tag{1.2.5}$$
Скоротивши на x^k і розкривши дужки, запишемо
$$M(1, u) \cdot \mathrm{d}x + N(1, u) \cdot u\,\mathrm{d}x + N(1, u) \cdot x\,\mathrm{d}u = 0. \tag{1.2.6}$$
Згрупувавши, одержимо рівняння зі змінними, що розділяються
$$(M(1, u) + N(1, u) \cdot u)\,\mathrm{d}x + N(1, u) \cdot x\,\mathrm{d}u = 0, \tag{1.2.7}$$
або
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{N(1, u) \cdot \mathrm{d}u}{M(1, u) + N(1, u) \cdot u} = C. \tag{1.2.8}$$
Взявши інтеграли та замінивши $u = y/x$, отримаємо загальний інтеграл $\Phi(x, y/x) = C$.

1.2.2 Рівняння, що зводяться до однорідних

Нехай маємо рівняння вигляду
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{1.2.9}$$
Розглянемо два випадки

1. $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.2.10}$$

   Тоді система алгебраїчних рівнянь
   $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \tag{1.2.11}$$
   має єдиний розв'язок (x_0, y_0). Проведемо заміну
   $$\begin{cases} x = x_1 + x_0, \\ y = y_1 + y_0 \end{cases} \tag{1.2.12}$$

та отримаємо

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = f\left(\frac{a_1\cdot(x_1+x_0)+b_1\cdot(y_1+y_0)+c_1}{a_2\cdot(x_1+x_0)+b_2\cdot(y_1+y_0)+c_2}\right) = \\ = f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1+(a_1x_0+b_1y_0+c_1)}{a_2x_1+b_2y_1+(a_2x_0+b_2y_0+c_2)}\right) \quad (1.2.13)$$

Оскільки (x_0, y_0) – розв'язок (1.2.11), то (1.2.9) набуде вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_1+b_2y_1}\right) \quad (1.2.14)$$

і є однорідним нульового ступеня. Робимо заміну

$$y_1 = ux_1, \quad \mathrm{d}y_1 = u\cdot\mathrm{d}x_1 + x_1\cdot\mathrm{d}u. \quad (1.2.15)$$

Підставимо в (1.2.14)

$$u + x_1\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_1} = f\left(\frac{a_1x_1+b_1ux_1}{a_2x_1+b_2ux_1}\right). \quad (1.2.16)$$

Одержимо

$$x_1\cdot\mathrm{d}u + \left(u - f\left(\frac{a_1x_1+b_1ux_1}{a_2x_1+b_2ux_1}\right)\right)\mathrm{d}x_1 = 0. \quad (1.2.17)$$

Розділивши змінні, маємо

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u - f\left(\frac{a_1x_1+b_1ux_1}{a_2x_1+b_2ux_1}\right)} + \ln(x_1) = C. \quad (1.2.18)$$

І загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд $\Phi(u, x_1) = C$. Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}, x-x_0\right) = C. \quad (1.2.19)$$

2. Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.2.20)$$

тобто коефіцієнти рядків лінійно залежні і

$$a_1x + b_1y = \alpha\cdot(a_2x+b_2y). \quad (1.2.21)$$

Робимо заміну $a_2x + b_2y = z$. Звідси $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b_2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a_2\right)$.

Підставивши в диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a_2\right) = f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right), \tag{1.2.22}$$

або

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_2 + b_2 \cdot f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right), \tag{1.2.23}$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{a_2 + b_2 \cdot f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right)} - x = C, \tag{1.2.24}$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(a_2x + b_2y, x) = C$

1.2.3 Вправи для самостійної роботи

Однорідні рівняння можуть бути записані у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

або

$$M(x, y) \cdot \mathrm{d}y + N(x, y) \cdot \mathrm{d}y = 0,$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні функції одного й того ж ступеня. Для того, щоб розв'язати однорідне рівняння, необхідно провести заміну

$$y = ux, \quad \mathrm{d}y = u \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}u,$$

в результаті якої отримаємо рівняння зі змінними, що розділяються.

Приклад 1.2.1. Розв'язати рівняння $x \cdot \mathrm{d}y = (x + y) \cdot \mathrm{d}y$.

Розв'язок. Дане рівняння однорідне, оскільки x та $x + y$ є однорідними функціями першого ступеня.

Проведемо заміну: $y = ux$. Тоді $\mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. Підставивши y та $\mathrm{d}y$ в задане рівняння, отримаємо

$$x \cdot (x\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}x) = (x + xu)\,\mathrm{d}x,$$
$$x^2\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$$

Розв'яжемо це рівняння зі змінними, що розділяються:

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$
$$u = \ln|x| + C.$$

Повернувшись до вихідних змінних $u = y/x$, отримаємо

$$y = x \cdot (\ln|x| + C).$$

Крім того розв'язком є $x = 0$, що було загублене при поділенні рівняння на x.

Розв'язати рівняння:

Задача 1.2.1.

$$(x + 2y) \cdot \mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.2.

$$(x - y) \cdot \mathrm{d}x + (x + y) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.3.

$$y^2 + x^2 y' = xyy';$$

Задача 1.2.4.

$$(x^2 + y^2) \cdot y' = 2xy;$$

Задача 1.2.5.

$$xy' - y = x \cdot \tan\left(\frac{y}{x}\right);$$

Задача 1.2.6.

$$xy' = y - xe^{y/x};$$

Задача 1.2.7.

$$xy' - y = (x + y) \cdot \ln\left(\frac{x + y}{x}\right);$$

Задача 1.2.8.

$$(3x + y) \cdot \mathrm{d}x - (2x + 3y) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.9.

$$xy' = y \cos\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right);$$

Задача 1.2.10.

$$(y + \sqrt{xy}) \cdot \mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.11.

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$$

Задача 1.2.12.

$$x^2 y' = y \cdot (x + y);$$

Задача 1.2.13.

$$y \cdot (-y + xy') = \sqrt{x^4 + y^4};$$

Задача 1.2.14.

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x;$$

Задача 1.2.15.

$$(y^2 - 2xy) \cdot \mathrm{d}x + x^2 \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.16.

$$2x^3y' = y \cdot (2x^2 - y^2);$$

Задача 1.2.17.

$$(x - y\cos({}^{y}\!/_{x}))\,\mathrm{d}x + x\cos({}^{y}\!/_{x})\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.18.

$$y'(xy - x^2) = y^2;$$

Задача 1.2.19.

$$2xyy' = x^2 + y^2;$$

Задача 1.2.20.

$$(6x + 3y) \cdot \mathrm{d}x = (7x - 2y) \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.21.

$$y^2x\,\mathrm{d}x = y \cdot (xy - 2y^2) \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.22.

$$x^2y\,\mathrm{d}x = y \cdot (xy - 2y^2) \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.23.

$$2y^3 = xy' \cdot (2y^2 - x^2);$$

Задача 1.2.24.

$$(x + \sqrt{xy}) \cdot \mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x;$$

Задача 1.2.25.

$$y = \left(\sqrt{y^2 - x^2} + x\right) y';$$

Задача 1.2.26.

$$(3x - 2y) \cdot \mathrm{d}x - (2x + y) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.27.

$$(7x + 6y) \cdot \mathrm{d}x - (x + 3y) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.28.

$$xy' = y + x \cdot \cot\left(\frac{y}{x}\right).$$

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють задані початкові умови:

Задача 1.2.29.

$$xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 2;$$

Задача 1.2.30.

$$(2y^2 + 3x^2) \cdot xy' = 3y^3 + 6yx^2, \quad y(2) = 1;$$

Задача 1.2.31.

$$y'(x^2 - 2xy) = x^2 + xy - y^2, \quad y(3) = 0;$$

Задача 1.2.32.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8 \cdot \frac{y}{x} + 8, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.33.

$$y'(x^2 - 4xy) = x^2 + xy - 3y^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.34.

$$xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.35.

$$(2y^2 + 7x^2) \cdot xy' = 3y^3 + 14yx^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.36.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \cdot \frac{y}{x} + 3, \quad y(3) = 1;$$

Задача 1.2.37.

$$x^2y' = y^2 + 4xy + 2x^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.38.

$$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.39.

$$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(3) = 4;$$

Задача 1.2.40.

$$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(4) = 3;$$

Задача 1.2.41.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8 \cdot \frac{y}{x} + 8, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.42.

$$y' = \frac{x + 2y}{2x - y}, \quad y(3) = 8.$$

1.3 Лінійні рівняння першого порядку

1.3.1 Загальна теорія

Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається лінійним диференціальним рівнянням. Його загальний вигляд такий:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y = q(x). \tag{1.3.1}$$

Якщо $q(x) \equiv 0$, тобто рівняння має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y = 0, \tag{1.3.2}$$

то воно зветься однорідним. Однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються і розв'язується таким чином:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x) \cdot \mathrm{d}x, \tag{1.3.3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int p(x) \cdot \mathrm{d}x, \tag{1.3.4}$$

$$\ln y = -\int p(x) \cdot \mathrm{d}x + \ln C. \tag{1.3.5}$$

Нарешті

$$y = C \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} \tag{1.3.6}$$

Розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих (методом невизначених множників Лагранжа). Він складається в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але C вважається невідомою функцією від x, тобто $C = C(x)$ і

$$y = C(x) \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} \tag{1.3.7}$$

Для знаходження $C(x)$ підставимо y у рівняння

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} = -C(x) \cdot p(x) \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} + \\ + p(x) \cdot C(x) \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} = q(x). \tag{1.3.8}$$

Звідси

$$\mathrm{d}C(x) = q(x) \cdot \exp\left\{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} \cdot \mathrm{d}x. \tag{1.3.9}$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$C(x) = \int q(x) \cdot \exp\left\{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} \cdot \mathrm{d}x + C. \tag{1.3.10}$$

І загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} \cdot$$

$$\cdot \left(\int q(x) \cdot \exp\left\{ \int p(x) \cdot \mathrm{d}x \right\} \cdot \mathrm{d}x + C \right). \quad (1.3.11)$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0) = y_0$, то розв'язок можна записати у формі Коші:

$$y(x, x_0, y_0) = \exp\left\{ -\int_{x_0}^{x} p(t) \cdot \mathrm{d}t \right\} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_{x_0}^{x} q(t) \cdot \exp\left\{ \int_{t}^{x} p(\xi) \cdot \mathrm{d}\xi \right\} \cdot \mathrm{d}t + y_0 \right). \quad (1.3.12)$$

1.3.2 Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^m, \quad m \neq 1 \quad (1.3.13)$$

називається рівнянням Бернуллі. Розділимо на y^m і одержимо

$$y^{-m} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y^{1-m} = q(x). \quad (1.3.14)$$

Зробимо заміну:

$$y^{1-m} = z, \quad (1-m) \cdot y^{-m} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}z. \quad (1.3.15)$$

Підставивши в рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{1-m} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot z = q(x). \quad (1.3.16)$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок має вигляд

$$z = \exp\left\{ -(1-m) \cdot \int p(x)\,\mathrm{d}x \right\} \cdot$$
$$\cdot \left((1-m) \cdot \int q(x) \cdot \exp\left\{ (1-m) \cdot \int p(x)\,\mathrm{d}x \right\} + C \right). \quad (1.3.17)$$

1.3.3 Рівняння Рікатті

Рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^2 = q(x) \quad (1.3.18)$$

називається рівнянням Рікатті. В загальному випадку рівняння Рікатті не інтегрується. Відомі лише деякі частинні випадки рівнянь Рікатті, що інтегруються в квадратурах. Розглянемо один з них. Нехай відомий один частинний розв'язок $y = y_1(x)$. Робимо заміну $y = y_1(x) + z$ і одержуємо

$$\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot (y_1(x) + z) + r(x) \cdot (y_1(x) + z)^2 = q(x). \tag{1.3.19}$$

Оскільки $y_1(x)$ – частинний розв'язок, то

$$\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y_1 + r(x) \cdot y_1^2 = q(x). \tag{1.3.20}$$

Розкривши в (1.3.19) скобки і використовуючи (1.3.20), одержуємо

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot z + 2r(x) \cdot y_1(x) \cdot z + r(x) \cdot z^2 = 0. \tag{1.3.21}$$

Перепишемо одержане рівняння у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (p(x) + 2r(x) \cdot y_1(x)) \cdot z = -r(x) \cdot z^2, \tag{1.3.22}$$

це рівняння Бернуллі з $m = 2$.

1.3.4 Вправи для самостійної роботи

Приклад 1.3.1. Розв'язати рівняння

$$y' - y \cdot \tan x = \cos x.$$

Розв'язок. Використовуючи вигляд загального розв'язку, отримаємо

$$y = \exp\left\{\int \tan x \, \mathrm{d}x\right\} \cdot \left(\int \exp\left\{-\int \tan x \, \mathrm{d}x\right\} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x + C\right).$$

Оскільки

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x|,$$

то отримаємо

$$\begin{aligned} y &= e^{-\ln|\cos x|} \cdot \left(\int e^{\ln|\cos x|} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x + C\right) = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x + C\right) = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\right). \end{aligned}$$

Або

$$y = \frac{C}{\cos x} + \frac{x}{2\cos x} + \frac{\sin x}{2}.$$

Приклад 1.3.2. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = x^2,$$

що задовольняє початковій умові $y(2) = 2$.

Розв'язок. Використовуючи вигляд загального розв'язку, отримаємо

$$\begin{aligned} y &= \exp\left\{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right\} \cdot \left(\int \exp\left\{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right\} \cdot x^2\,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= e^{\ln|x|} \cdot \left(\int e^{-\ln|x|} \cdot x^2\,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= x \cdot \left(\int x\,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C\right). \end{aligned}$$

Таким чином

$$y = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Підставивши початкові умови $y(2) = 2$, одержимо $2 = 2C + 4$. Звідси $C = -1$ і частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{част.}} = \frac{x^3}{2} - x.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 1.3.1.

$$xy' + (x+1) \cdot y = 3x^2 e^{-x};$$

Задача 1.3.2.

$$(2x+1) \cdot y' = 4x + 2y;$$

Задача 1.3.3.

$$y' = 2x \cdot (x^2 + y);$$

Задача 1.3.4.

$$x^2 y' + xy + 1 = 0;$$

Задача 1.3.5.

$$y' + y \cdot \tan x = \sec x;$$

Задача 1.3.6.

$$x \cdot (y' - y) = e^x;$$

Задача 1.3.7.

$$(xy' - 1) \cdot \ln x = 2y;$$

Задача 1.3.8.

$$(y + x^2) \cdot \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.3.9.

$$(2e^x - y) \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}y;$$

Задача 1.3.10.

$$\sin^2 y + x \cdot \cot y = \frac{1}{y^2};$$

Задача 1.3.11.

$$(x + y^2) \cdot y' = y;$$

Задача 1.3.12.

$$(3e^y - x) \cdot y' = 1;$$

Задача 1.3.13.

$$y = x \cdot (y' - x \cdot \cos x).$$

Знайти частинні розв'язки рівняння з заданими початковими умовами:

Задача 1.3.14.

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.3.15.

$$y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3;$$

Задача 1.3.16.

$$y' - \frac{2y}{x + 1} = e^x \cdot (x + 1)^2, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.3.17.

$$xy' + 2y = x64, \quad y(1) = -\frac{5}{8};$$

Задача 1.3.18.

$$y' - \frac{y}{x} = x \cdot \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

Задача 1.3.19.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi};$$

Задача 1.3.20.

$$(13y^3 - x) \cdot y' = 4y, \quad y(5) = 1;$$

Задача 1.3.21.

$$2 \cdot (x + \ln^2 y - \ln y) \cdot y' = y, \quad y(2) = 1.$$

Розв'язати рівняння Бернуллі:

Задача 1.3.22.

$$y' + xy = (1 + x) \cdot e^{-x} \cdot y^2;$$

Задача 1.3.23.

$$xy' + y = 2y^2 \cdot \ln x;$$

Задача 1.3.24.

$$2 \cdot (2xy' + y) = xy^2;$$

Задача 1.3.25.

$$3 \cdot (xy' + y) = y^2 \cdot \ln x;$$

Задача 1.3.26.

$$2 \cdot (y' + y) = xy^2.$$

Розв'язати рівняння Рікатті:

Задача 1.3.27.

$$x^2 \cdot y' + xy + x^2y^2 = 4;$$

Задача 1.3.28.

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x} = 0;$$

Задача 1.3.29.

$$xy' - (2x+1) \cdot y + y^2 = 5 - x^2;$$

Задача 1.3.30.

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2;$$

Задача 1.3.31.

$$y' + 2y \cdot e^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$

1.4 Рівняння в повних диференціалах

1.4.1 Загальна теорія

Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$M(x,y) \cdot \mathrm{d}x + N(x,y) \cdot \mathrm{d}y = 0, \tag{1.4.1}$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$\mathrm{d}u(x,y) = M(x,y) \cdot \mathrm{d}x + N(x,y) \cdot \mathrm{d}y, \tag{1.4.2}$$

і, таким чином, (1.4.1) набуває вигляду $\mathrm{d}u(x,y) = 0$ то рівняння називається рівнянням в повних диференціалах. Звідси вираз

$$u(x,y) = C \tag{1.4.3}$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння.

Критерієм того, що рівняння є рівнянням в повних диференціалах, тобто необхідною та достатньою умовою, є виконання рівності

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{1.4.4}$$

Нехай маємо рівняння в повних диференціалах. Тоді

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{1.4.5}$$

Звідси $u(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y)$ де $\varphi(y)$ – невідома функція. Для її визначення продиференціюємо співвідношення по y і прирівняємо $N(x,y)$:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right) + \frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = N(x,y). \tag{1.4.6}$$

Звідси

$$\varphi(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y. \tag{1.4.7}$$

Остаточно, загальний інтеграл має вигляд

$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y = C. \tag{1.4.8}$$

Як відомо з математичного аналізу, якщо відомий повний диференціал (1.4.2), то $u(x,y)$ можна визначити, взявши криволінійний інтеграл по довільному контуру, що з'єднує фіксовану точку (x_0, y_0) і точку із змінними координатами (x,y).

Більш зручно брати криву, що складається із двох відрізків прямих. В цьому випадку криволінійний інтеграл розпадається на два простих інтеграла

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\cdot\mathrm{d}x + N(x,y)\cdot\mathrm{d}y = \\ &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} M(x,y)\cdot\mathrm{d}x + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} N(x,y)\cdot\mathrm{d}y = \\ &= \int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)\cdot\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)\cdot\mathrm{d}\eta. \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

В цьому випадку одразу одержуємо розв'язок задачі Коші.

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)\cdot\mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)\cdot\mathrm{d}\eta = 0. \tag{1.4.10}$$

1.4.2 Множник, що інтегрує

В деяких випадках рівняння (1.4.1) не є рівнянням в повних диференціалах, але існує функція $\mu = \mu(x, y)$ така, що рівняння

$$\mu(x,y) \cdot M(x,y) \cdot \mathrm{d}x + \mu(x,y) \cdot N(x,y) \cdot \mathrm{d}y = 0, \tag{1.4.11}$$

вже буде рівнянням в повних диференціалах. Необхідною та достатньою умовою цього є рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y) \cdot M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y) \cdot N(x,y)), \tag{1.4.12}$$

або

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.4.13}$$

Таким чином замість звичайного диференціального рівняння відносно функції $y(x)$ одержимо диференціальне рівняння в частинних похідних відносно функції $\mu(x, y)$.

Задача інтегрування його значно спрощується, якщо відомо в якому вигляді шукати функцію $\mu(x, y)$, наприклад $\mu = \mu(\omega(x, y))$ де $\omega(x, y)$ – відома функція. В цьому випадку одержуємо

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \tag{1.4.14}$$

Після підстановки в (1.4.13) маємо

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.4.15}$$

або

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot N - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot M \right) = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right). \tag{1.4.16}$$

Розділимо змінні

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot N - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot M} \cdot \mathrm{d}\omega. \tag{1.4.17}$$

Проінтегрувавши і поклавши сталу інтегрування одиницею, одержимо:

$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{ \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot N - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot M} \cdot \mathrm{d}\omega \right\}. \tag{1.4.18}$$

Розглянемо частинні випадки.

1. Нехай $\omega(x,y) = x$. Тоді $\frac{\partial\omega}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0$, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \cdot \mathrm{d}x\right\}. \tag{1.4.19}$$

2. Нехай $\omega(x,y) = y$. Тоді $\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\omega}{\partial y} = 1$, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}y$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \cdot \mathrm{d}y\right\}. \tag{1.4.20}$$

3. Нехай $\omega(x,y) = x^2 \pm y^2$. Тоді $\frac{\partial\omega}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial\omega}{\partial y} = \pm 2y$, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(x^2 \pm y^2)$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2xN \mp 2yM} \cdot \mathrm{d}(x^2 \pm y^2)\right\}. \tag{1.4.21}$$

4. Нехай $\omega(x,y) = xy$. Тоді $\frac{\partial\omega}{\partial x} = y$, $\frac{\partial\omega}{\partial y} = x$, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(xy)$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} \cdot \mathrm{d}(xy)\right\}. \tag{1.4.22}$$

1.4.3 Вправи для самостійної роботи

Як вже було сказано, рівняння
$$M(x,y) \cdot \mathrm{d}x + N(x,y) \cdot \mathrm{d}y = 0$$
буде рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції. Це має місце при
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Приклад 1.4.1. Розв'язати рівняння
$$(2x + 3x^2y) \cdot \mathrm{d}x + (x^3 - 3y^2) \cdot \mathrm{d}y = 0.$$

Розв'язок. Перевіримо, що це рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Обчислимо
$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

Таким чином існує функція $u(x,y)$, що

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x + 3x^2 y.$$

Проінтегруємо по x. Отримаємо

$$u(x,y) = \int (2x + 3x^2 y) \cdot \mathrm{d}x + \Phi(y) = x^2 + x^3 y + \Phi(y).$$

Для знаходження функції $\Phi(y)$ візьмемо похідну від $u(x,y)$ по y і прирівняємо до $x^3 - 3y^2$. Отримаємо

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^3 + \Phi'(y) = x^3 - 3y^2.$$

Звідси $\Phi'(y) = -3y^2$ і $\Phi(y) = -y^3$. Таким чином,

$$u(x,y) = x^2 + x^3 y - y^3$$

і загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

Перевірити, що дані рівняння є рівняннями в повних диференціалах, і розв'язати їх:

Задача 1.4.1.

$$2xy \cdot \mathrm{d}x + (x^2 - y^2) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.2.

$$(2 - 9xy^2) \cdot x \cdot \mathrm{d}x + (4y^2 - 6x^3) \cdot y \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.3.

$$e^{-y} \cdot \mathrm{d}x - (2y + x \cdot e^{-y}) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.4.

$$\frac{y}{x} \cdot \mathrm{d}x + (y^3 + \ln x) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.5.

$$\frac{3x^2 + y^2}{y^2} \cdot \mathrm{d}x - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.6.

$$2x \cdot \left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) \cdot \mathrm{d}x - \sqrt{x^2 - y} \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.7.

$$(1 + y^2 \cdot \sin 2x) \cdot \mathrm{d}x - 2y \cdot \cos^2 x \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.8.

$$3x^2 \cdot (1 + \ln y) \cdot \mathrm{d}x = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right) \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.4.9.

$$\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right) \cdot \mathrm{d}x + \frac{(x^2+1) \cdot \cos y}{\cos 2y - 1} \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.10.

$$(2x + y \cdot e^{xy}) \cdot \mathrm{d}x + (x \cdot e^{xy} + 3y^2) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.11.

$$\left(2 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot x \cdot \mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.12.

$$\left(3y^2 - \frac{y}{x^2+y^2}\right) \cdot \mathrm{d}x + \left(6xy + \frac{x}{x^2+y^2}\right) \cdot \mathrm{d}y = 0.$$

Розв'язати, використовуючи множник, що інтегрує:

Задача 1.4.13. $\mu = \mu(x - y)$,

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3) \cdot \mathrm{d}x + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3) \cdot \mathrm{d}x = 0;$$

Задача 1.4.14.

$$\left(y - \frac{ay}{x} + x\right) \cdot \mathrm{d}x + a \cdot \mathrm{d}y = 0, \quad \mu = \mu(x + y);$$

Задача 1.4.15.

$$(x^2 + y) \cdot \mathrm{d}y + x \cdot (1 - y) \cdot \mathrm{d}x = 0, \quad \mu = \mu(xy);$$

Задача 1.4.16.

$$(x^2 - y^2 + y) \cdot \mathrm{d}x + x \cdot (2y - 1) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.17.

$$(2x^2y^2 + y) \cdot \mathrm{d}x + (x^3y - x) \cdot \mathrm{d}y = 0.$$

1.5 Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має такий вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.5.1}$$

1.5.1 Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо ряд диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1. Рівняння вигляду

$$F(y') = 0. \tag{1.5.2}$$

Нехай алгебраїчне рівняння $F(k) = 0$ має принаймні один дійсний корінь $k = k_0$. Тоді, інтегруючи $y' = k_0$, одержимо $y = k_0 \cdot x + C$. Звідси $k_0 = (y - C)/x$ і вираз

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0 \tag{1.5.3}$$

містить всі розв'язки вихідного диференціального рівняння.

2. Рівняння вигляду

$$F(x, y') = 0. \tag{1.5.4}$$

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases} \tag{1.5.5}$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x$, одержимо

$$\mathrm{d}y = \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot \mathrm{d}t. \tag{1.5.6}$$

Проінтегрувавши, запишемо

$$y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot \mathrm{d}t + C. \tag{1.5.7}$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \displaystyle\int \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot \mathrm{d}t + C. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

3. Рівняння вигляду
$$F(y, y') = 0. \tag{1.5.9}$$
Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді
$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases} \tag{1.5.10}$$
Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x$, одержимо
$$\varphi'(t) \cdot \mathrm{d}t = \psi(t) \cdot \mathrm{d}x \tag{1.5.11}$$
і
$$\mathrm{d}x = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot \mathrm{d}t \tag{1.5.12}$$
Проінтегрувавши, запишемо
$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot \mathrm{d}t + C. \tag{1.5.13}$$
І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд
$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot \mathrm{d}t + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases} \tag{1.5.14}$$

4. Рівняння Лагранжа
$$y = \varphi(y') \cdot x + \psi(y'). \tag{1.5.15}$$
Введемо параметр $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ і отримаємо
$$y = \varphi(p) \cdot x + \psi(p). \tag{1.5.16}$$
Продиференціювавши, запишемо
$$\mathrm{d}y = \varphi'(p) \cdot x \cdot \mathrm{d}p + \varphi(p) \cdot \mathrm{d}x + \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p. \tag{1.5.17}$$
Замінивши $\mathrm{d}y = p \cdot \mathrm{d}x$ одержимо
$$p \cdot \mathrm{d}x = \varphi'(p) \cdot x \cdot \mathrm{d}p + \varphi(p) \cdot \mathrm{d}x + \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p. \tag{1.5.18}$$
Звідси
$$(p - \varphi(p)) \cdot \mathrm{d}x - \varphi'(p) \cdot x \cdot \mathrm{d}p = \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p. \tag{1.5.19}$$

І отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot x = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}. \tag{1.5.20}$$

Його розв'язок

$$x = \exp\left\{\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot \mathrm{d}p\right\} \cdot \\ \cdot \left(\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot \exp\left\{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot \mathrm{d}p\right\} \mathrm{d}p + C\right) = \\ = \Psi(p, C). \tag{1.5.21}$$

І остаточний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x = \Psi(p, C), \\ y = \varphi(p) \cdot \Phi(p, C) + \psi(p). \end{cases} \tag{1.5.22}$$

5. Рівняння Клеро.

Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y') = y'$ є рівняння Клеро

$$y = y'x + \psi(y'). \tag{1.5.23}$$

Поклавши $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, отримаємо $y = px + \psi(p)$. Продиференціюємо

$$\mathrm{d}y = p \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}p + \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p. \tag{1.5.24}$$

Оскільки $\mathrm{d}y = p \cdot \mathrm{d}x$, то

$$p \cdot \mathrm{d}x = p \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}p + \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p. \tag{1.5.25}$$

Скоротивши, одержимо

$$(x + \psi'(p)) \cdot \mathrm{d}p = 0. \tag{1.5.26}$$

Можливі два випадки.

(a) $x + \psi'(p) - 0$ і розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p \cdot \psi'(p) + \psi(p). \end{cases} \tag{1.5.27}$$

(б) $\mathrm{d}p = 0$, $p = C$ і розв'язок має вигляд

$$y = Cx + \psi(C). \tag{1.5.28}$$

Загальним розв'язком рівняння Клеро буде сім'я "прямих" (1.5.28). Цю сім'ю огинає особа крива (1.5.27).

6. Параметризація загального вигляду. Нехай диференціальне рівняння $F(x, y, y') = 0$ вдалося записати у вигляді системи рівнянь з двома параметрами

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \theta(u, v). \tag{1.5.29}$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x$, одержимо

$$\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\cdot \mathrm{d}u + \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\cdot \mathrm{d}v = \theta(u,v)\cdot\left(\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\cdot \mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}\cdot \mathrm{d}v\right) \tag{1.5.30}$$

Перегрупувавши члени, одержимо

$$\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\right)\cdot \mathrm{d}u = \left(\theta(u,v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right)\cdot \mathrm{d}v. \tag{1.5.31}$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{\theta(u,v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}}{\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v)\cdot\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}}. \tag{1.5.32}$$

Або отримали рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = f(u, v). \tag{1.5.33}$$

Параметризація загального вигляду не дає інтеграл диференціального рівняння. Вона дозволяє звести диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної, до диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної.

7. Нехай рівняння $F(x, y, y') = 0$ можна розв'язати відносно y' і воно має n коренів, тобто його можна записати у вигляді

$$\prod_{i=1}^{n}(y' - f_i(x, y)) = 0. \tag{1.5.34}$$

Розв'язавши кожне з рівнянь $y' = f_i(x, y)$, $i = \overline{1, n}$, отримаємо n загальних розв'язків (або інтервалів) $y = \varphi_i(x, C)$, $i = \overline{1, n}$ (або

$\varphi_u(x,y) = C$, $i = \overline{1,n}$). І загальний розв'язок вихідного рівняння, не розв'язаного відносно похідної має вигляд

$$\prod_{i=1}^{n}(y - \varphi_i(x,C)) = 0, \tag{1.5.35}$$

або

$$\prod_{i=1}^{n}(\varphi_i(x,y) - C) = 0. \tag{1.5.36}$$