ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Скибицький Нікіта

2 березня 2019 р.

У ваших руках конспект лекцій з нормативного курсу "Диференціальні рівняння" прочитаного проф., д.ф.-м.н. Хусаїновим Денисом Ях'євичем на другому курсі спеціальності "прикладна математика" факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка восени 2017-го та навесні 2018-го року.

Конспект у компактній формі відображає матеріал курсу, допомагає сформувати загальне уявлення про предмет вивчення, правильно зорієнтуватися в даній галузі знань. Конспект лекцій з названої дисципліни сприятиме більш успішному вивченню дисципліни, причому більшою мірою для студентів заочної форми, екстернату, дистанційного та індивідуального навчання.

Комп'ютерний набір та верстка – Скибицький Нікіта Максимович.

Зміст

Вступ

Наведемо декілька основних визначень теорії диференціальних рівнянь, що будуть використовуватися надалі.

Визначення. Рівняння, що містять похідні від шуканої функції та можуть містити шукану функцію та незалежну змінну, називаються диференціальними рівняннями.

Визначення. Якщо в диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається звичайним.

Визначення. Якщо невідома функція, що входить в диференціальне рівняння, є функцією двох або більшої кількості незалежних змінних

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial x^\ell \partial y^{k-\ell}}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0$$

то диференціальне рівняння називається рівнянням в частинних похідних.

Визначення. Порядком диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної від невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння.

Визначення. Розв'язком диференціального рівняння називається функція, що має необхідну ступінь гладкості, і яка при підстановці в диференціальне рівняння обертає його в тотожність.

Визначення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.

1 Диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння першого порядку, що розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y).$$

Диференціальне рівняння становить зв'язок між координатами точки та кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ до графіку розв'язку в цій же точці. Якщо знати x та y, то можна обчислити $f(x,y)$ тобто $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Таким чином, диференціальне рівняння визначає поле напрямків, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, що звуться інтегральними кривими, напрям дотичних до яких в кожній точці співпадає з напрямом поля.

1.1 Рівняння зі змінними, що розділяються

1.1.1 Загальна теорія

Рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y),$$

або більш загального вигляду

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot \mathrm{d}x + g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot \mathrm{d}y = 0$$

називаються рівняннями зі змінними, що розділяються. Розділимо його на $f_2(y) \cdot g_1(x)$ і одержимо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \mathrm{d}x + \frac{g_2(y)}{f_2(y)} \cdot \mathrm{d}y = 0.$$

Взявши інтеграли, отримаємо

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \mathrm{d}x + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)} \cdot \mathrm{d}y = C,$$

або

$$\Phi(x,y) = C.$$

Визначення. Це кінцеве рівняння, що визначає розв'язок диференціального рівняння як неявну функцію від x, називається інтегралом розглянутого рівняння.

Визначення. Це ж рівняння, що визначає всі без винятку розв'язки даного диференціального рівняння, називається загальним інтегралом.

Бувають випадки (в основному), що невизначені інтеграли з (1.1.1) не можна записати в елементарних функціях. Незважаючи на це, задача інтегрування вважається виконаною. Кажуть, що диференціальне рівняння розв'язане в квадратурах.

Можливо, що інтеграл рівняння розв'язується відносно y:

$$y = y(x, C).$$

Тоді, завдяки вибору C, можна одержати всі розв'язки.

Визначення. Ця залежність, що тотожно задовольняє вихідному диференціальному рівнянню, де C – довільна стала, називається загальним розв'язком диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок являє собою сім'ю кривих, що не перетинаються, які заповнюють деяку область. Іноді треба виділити одну криву сім'ї, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.

Визначення. Знаходження розв'язку $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$, називається розв'язком задачі Коші.

Визначення. Розв'язок, який записаний у вигляді $y = y(x, x_0, y_0)$ і задовольняє умові $y(x, x_0, y_0) = y_0$, називається розв'язком у формі Коші.

1.1.2 Рівняння, що зводяться до рівнянь зі змінними, що розділяються

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$$

де a, b, c – сталі.

Зробимо заміну $ax + by + c = z$. Тоді

$$a \cdot \mathrm{d}x + b \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}z, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a \right).$$

Підставивши в початкове рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a \right) = f(z),$$

або

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + b \cdot f(z),$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{\mathrm{d}z}{a+b\cdot f(z)}-\mathrm{d}x=0$$

і

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{a+b\cdot f(z)}-x=C.$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(ax+by+c,x)=C$.

1.1.3 Вправи для самостійної роботи

Рівняння зі змінними, що розділяються могуть бути записані у вигляді

$$y'=f(x)\cdot g(y)$$

або

$$f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot\mathrm{d}x+g_1(x)\cdot g_2(y)\cdot\mathrm{d}y.$$

Для розв'язків такого рівняння необхідно обидві частини помножити або розділити на такий вираз, щоб в одну частину входило тільки x, а в другу – тільки y. Тоді обидві частини рівняння можна проінтегрувати.

Якщо ділити на вираз, що містить x та y, може бути загублений розв'язок, що обертає цей вираз в нуль.

Приклад 1.1.1. Розв'язати рівняння

$$x^2y^2y'+y=1.$$

Розв'язок. Підставивши $y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ в рівняння, отримаємо

$$x^2y^2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=1.$$

Помножимо обидві частини рівняння на $\mathrm{d}x$ і розділимо на $x^2\cdot(y-1)$. Перевіримо, що $y=1$ при цьому є розв'язком, а $x=0$ цим розв'язком не є:

$$\frac{y^2}{y-1}\cdot\mathrm{d}y=-\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{y^2}{y-1}\cdot\mathrm{d}y=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

$$\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=\frac{1}{x}+C$$

Приклад 1.1.2. Розв'язати рівняння

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

Розв'язок. Введемо заміну змінних $z = 4x + 2y - 1$. Тоді $x' = 4 + 2y'$. Рівняння перетвориться до вигляду

$$\begin{aligned} z' - 4 &= 2\sqrt{z} \\ z' &= 4 + 2\sqrt{z} \\ \frac{\mathrm{d}z}{2 + \sqrt{z}} &= 2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{2 + \sqrt{z}} = \int 2\,\mathrm{d}x$$

Обчислимо інтеграл, що стоїть зліва. При обчисленні будемо використовувати таку заміну:

$$\sqrt{z} = t, \quad \mathrm{d}z = 2t\,\mathrm{d}t, \quad 2 + \sqrt{z} = 2 + t,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{2 + \sqrt{z}} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{2 + t} = 2\int \frac{t + 2 - 2}{t + 2} \cdot \mathrm{d}t = \\ = 2t - 4\ln|2 + t| = 2\sqrt{z} - 4\ln\left(2 + \sqrt{z}\right).$$

Після інтегрування отримаємо

$$2\sqrt{z} - 4\ln\left(2 + \sqrt{z}\right) = 2x + 2C.$$

Зробимо обернену заміну, $z = 4x + 2y - 1$:

$$\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(2 + \sqrt{4x + 2y - 1}\right) = x + C.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 1.1.3.

$$xy \cdot \mathrm{d}x + (x + 1) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.1.4.

$$x \cdot (1 + y) \cdot \mathrm{d}x = y \cdot (1 + x^2) \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.1.5.

$$y' = 10^{x+y};$$

Задача 1.1.6.

$$y' - xy^2 = 2xy;$$

Задача 1.1.7.

$$\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}x = xy\cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.1.8.

$$y' = x\tan(y);$$

Задача 1.1.9.

$$yy' + x = 1;$$

Задача 1.1.10.

$$3y^2y' + 15x = 2xy^3;$$

Задача 1.1.11.

$$y' = \cos(y-x);$$

Задача 1.1.12.

$$y' - y = 2x - 3;$$

Задача 1.1.13.

$$xy' + y = y^2;$$

Задача 1.1.14.

$$e^{-y}\cdot(1+y') = 1;$$

Задача 1.1.15.

$$2x^2yy' + y^2 = 2;$$

Задача 1.1.16.

$$y' - xy^3 = 2xy^2.$$

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють заданим початковим умовам:

Задача 1.1.17.

$$(x^2-1)\cdot y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.1.18.

$$y'\cdot\cot(x) + y = 2, \quad y(0) = -1;$$

Задача 1.1.19.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0.$$

1.2 Однорідні рівняння

1.2.1 Загальна теорія

Нехай рівняння має вигляд

$$M(x,y)\cdot \mathrm{d}x + N(x,y)\cdot \mathrm{d}y = 0.$$

Якщо функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні одного ступеня, то рівняння називається однорідним. Нехай функції $M(x,y)$ та $N(x,y)$ однорідні ступеня k, тобто

$$M(t\cdot x, t\cdot y) = t^k\cdot M(x,y), \qquad N(t\cdot x, t\cdot y) = t^k\cdot N(x,y).$$

Робимо заміну
$$y = ux, \quad \mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u.$$
Після підстановки одержуємо
$$M(x, ux) \cdot \mathrm{d}x + N(x, ux) \cdot (u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) = 0,$$
або
$$x^k M(1, u) \cdot \mathrm{d}x + x^k N(1, u) \cdot (u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u) = 0.$$
Скоротивши на x^k і розкривши дужки, запишемо
$$M(1, u) \cdot \mathrm{d}x + N(1, u) \cdot u\,\mathrm{d}x + N(1, u) \cdot x\,\mathrm{d}u = 0.$$
Згрупувавши, одержимо рівняння зі змінними, що розділяються
$$(M(1, u) + N(1, u) \cdot u)\,\mathrm{d}x + N(1, u) \cdot x\,\mathrm{d}u = 0,$$
або
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{N(1, u) \cdot \mathrm{d}u}{M(1, u) + N(1, u) \cdot u} = C.$$
Взявши інтеграли та замінивши $u = y/x$, отримаємо загальний інтеграл $\Phi(x, y/x) = C$.

1.2.2 Рівняння, що зводяться до однорідних

Нехай маємо рівняння вигляду
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$
Розглянемо два випадки

1. $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

   Тоді система алгебраїчних рівнянь
   $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$
   має єдиний розв'язок (x_0, y_0). Проведемо заміну
   $$\begin{cases} x = x_1 + x_0, \\ y = y_1 + y_0 \end{cases}$$

та отримаємо

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = f\left(\frac{a_1 \cdot (x_1 + x_0) + b_1 \cdot (y_1 + y_0) + c_1}{a_2 \cdot (x_1 + x_0) + b_2 \cdot (y_1 + y_0) + c_2}\right) =$$
$$= f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1)}{a_2x_1 + b_2y_1 + (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)}\right)$$

Оскільки (x_0, y_0) – розв'язок алгебраїчної системи, то диференціальне рівняння набуде вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1y_1}{a_2x_1 + b_2y_1}\right)$$

і є однорідним нульового ступеня. Робимо заміну

$$y_1 = ux_1, \quad \mathrm{d}y_1 = u \cdot \mathrm{d}x_1 + x_1 \cdot \mathrm{d}u.$$

Підставимо в рівняння

$$u + x_1 \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_1} = f\left(\frac{a_1x_1 + b_1ux_1}{a_2x_1 + b_2ux_1}\right).$$

Одержимо

$$x_1 \cdot \mathrm{d}u + \left(u - f\left(\frac{a_1x_1 + b_1ux_1}{a_2x_1 + b_2ux_1}\right)\right)\mathrm{d}x_1 = 0.$$

Розділивши змінні, маємо

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u - f\left(\frac{a_1x_1 + b_1ux_1}{a_2x_1 + b_2ux_1}\right)} + \ln(x_1) = C.$$

І загальний інтеграл рівняння має вигляд $\Phi(u, x_1) = C$. Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, x - x_0\right) = C.$$

2. Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто коефіцієнти рядків лінійно залежні і

$$a_1x + b_1y = \alpha \cdot (a_2x + b_2y).$$

Робимо заміну $a_2x + b_2y = z$. Звідси $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b_2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a_2\right)$.

Підставивши в диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a_2\right) = f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right),$$

або

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_2 + b_2 \cdot f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right),$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{a_2 + b_2 \cdot f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right)} - x = C,$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(a_2x + b_2y, x) = C$

1.2.3 Вправи для самостійної роботи

Однорідні рівняння можуть бути записані у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

або

$$M(x, y) \cdot \mathrm{d}y + N(x, y) \cdot \mathrm{d}y = 0,$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні функції одного й того ж ступеня. Для того, щоб розв'язати однорідне рівняння, необхідно провести заміну

$$y = ux, \quad \mathrm{d}y = u \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}u,$$

в результаті якої отримаємо рівняння зі змінними, що розділяються.

Приклад 1.2.1. Розв'язати рівняння $x \cdot \mathrm{d}y = (x + y) \cdot \mathrm{d}y$.

Розв'язок. Дане рівняння однорідне, оскільки x та $x + y$ є однорідними функціями першого ступеня.

Проведемо заміну: $y = ux$. Тоді $\mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. Підставивши y та $\mathrm{d}y$ в задане рівняння, отримаємо

$$x \cdot (x\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}x) = (x + xu)\,\mathrm{d}x,$$
$$x^2\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$$

Розв'яжемо це рівняння зі змінними, що розділяються:

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$
$$u = \ln|x| + C.$$

Повернувшись до вихідних змінних $u = y/x$, отримаємо

$$y = x \cdot (\ln|x| + C).$$

Крім того розв'язком є $x = 0$, що було загублене при поділенні рівняння на x.

Розв'язати рівняння:

Задача 1.2.2.

$$(x + 2y) \cdot \mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.3.

$$(x - y) \cdot \mathrm{d}x + (x + y) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.4.

$$y^2 + x^2 y' = xyy';$$

Задача 1.2.5.

$$(x^2 + y^2) \cdot y' = 2xy;$$

Задача 1.2.6.

$$xy' - y = x \cdot \tan\left(\frac{y}{x}\right);$$

Задача 1.2.7.

$$xy' = y - xe^{y/x};$$

Задача 1.2.8.

$$xy' - y = (x + y) \cdot \ln\left(\frac{x + y}{x}\right);$$

Задача 1.2.9.

$$(3x + y) \cdot \mathrm{d}x - (2x + 3y) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.10.

$$xy' = y \cos\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right);$$

Задача 1.2.11.

$$(y + \sqrt{xy}) \cdot \mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.12.

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$$

Задача 1.2.13.

$$x^2 y' = y \cdot (x + y);$$

Задача 1.2.14.

$$y \cdot (-y + xy') = \sqrt{x^4 + y^4};$$

Задача 1.2.15.

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x;$$

Задача 1.2.16.

$$(y^2 - 2xy) \cdot \mathrm{d}x + x^2 \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.17.

$$2x^3 y' = y \cdot (2x^2 - y^2);$$

Задача 1.2.18.

$$(x - y\cos({}^{y}\!/_{x}))\,\mathrm{d}x = -x\cos({}^{y}\!/_{x})\,\mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.19.

$$y'(xy - x^2) = y^2;$$

Задача 1.2.20.

$$2xyy' = x^2 + y^2;$$

Задача 1.2.21.

$$(6x + 3y) \cdot \mathrm{d}x = (7x - 2y) \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.22.

$$y^2 x\,\mathrm{d}x = y \cdot (xy - 2y^2) \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.23.

$$x^2 y\,\mathrm{d}x = y \cdot (xy - 2y^2) \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.2.24.

$$2y^3 = xy' \cdot (2y^2 - x^2);$$

Задача 1.2.25.

$$(x + \sqrt{xy}) \cdot \mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x;$$

Задача 1.2.26.

$$y = \left(\sqrt{y^2 - x^2} + x\right) y';$$

Задача 1.2.27.

$$(3x - 2y) \cdot \mathrm{d}x - (2x + y) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.28.

$$(7x + 6y) \cdot \mathrm{d}x - (x + 3y) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.2.29.

$$xy' = y + x \cdot \cot\left(\frac{y}{x}\right).$$

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють задані початкові умови:

Задача 1.2.30.

$$xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 2;$$

Задача 1.2.31.

$$(2y^2 + 3x^2) \cdot xy' = 3y^3 + 6yx^2, \quad y(2) = 1;$$

Задача 1.2.32.

$$y'(x^2 - 2xy) = x^2 + xy - y^2, \quad y(3) = 0;$$

Задача 1.2.33.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8 \cdot \frac{y}{x} + 8, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.34.

$$y'(x^2 - 4xy) = x^2 + xy - 3y^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.35.

$$xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.36.

$$(2y^2 + 7x^2) \cdot xy' = 3y^3 + 14yx^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.37.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \cdot \frac{y}{x} + 3, \quad y(3) = 1;$$

Задача 1.2.38.

$$x^2y' = y^2 + 4xy + 2x^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.39.

$$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.40.

$$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(3) = 4;$$

Задача 1.2.41.

$$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(4) = 3;$$

Задача 1.2.42.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8 \cdot \frac{y}{x} + 8, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.43.

$$y' = \frac{x + 2y}{2x - y}, \quad y(3) = 8.$$

1.3 Лінійні рівняння першого порядку

1.3.1 Загальна теорія

Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається лінійним диференціальним рівнянням. Його загальний вигляд такий:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y = q(x).$$

Якщо $q(x) \equiv 0$, тобто рівняння має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y = 0,$$

то воно зветься однорідним. Однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються і розв'язується таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -p(x) \cdot \mathrm{d}x, \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int p(x) \cdot \mathrm{d}x, \\ \ln y &= -\int p(x) \cdot \mathrm{d}x + \ln C. \end{aligned}$$

Нарешті

$$y = C \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\}$$

Розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих (методом невизначених множників Лагранжа). Він складається в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але C вважається невідомою функцією від x, тобто $C = C(x)$ і

$$y = C(x) \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\}$$

Для знаходження $C(x)$ підставимо y у рівняння

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} = -C(x) \cdot p(x) \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} + \\ + p(x) \cdot C(x) \cdot \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} = q(x).$$

Звідси

$$\mathrm{d}C(x) = q(x) \cdot \exp\left\{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} \cdot \mathrm{d}x.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$C(x) = \int q(x) \cdot \exp\left\{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} \cdot \mathrm{d}x + C.$$

І загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \exp\left\{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} \cdot \\ \cdot \left(\int q(x) \cdot \exp\left\{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x\right\} \cdot \mathrm{d}x + C\right).$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0) = y_0$, то розв'язок можна записати у формі Коші:

$$y(x, x_0, y_0) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(t) \cdot \mathrm{d}t\right\} \cdot \\ \cdot \left(\int_{x_0}^{x} q(t) \cdot \exp\left\{\int_{t}^{x} p(\xi) \cdot \mathrm{d}\xi\right\} \cdot \mathrm{d}t + y_0\right).$$

1.3.2 Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^m, \quad m \neq 1$$

називається рівнянням Бернуллі. Розділимо на y^m і одержимо

$$y^{-m} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot y^{1-m} = q(x).$$

Зробимо заміну:

$$y^{1-m} = z, \quad (1-m) \cdot y^{-m} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}z.$$

Підставивши в рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{1-m} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x) \cdot z = q(x).$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок має вигляд

$$z = \exp\left\{-(1-m)\cdot\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\}\cdot$$
$$\cdot\left((1-m)\cdot\int q(x)\cdot\exp\left\{(1-m)\cdot\int p(x)\,\mathrm{d}x\right\}+C\right).$$

1.3.3 Рівняння Рікатті

Рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)\cdot y + r(x)\cdot y^2 = q(x)$$

називається рівнянням Рікатті. В загальному випадку рівняння Рікатті не інтегрується. Відомі лише деякі частинні випадки рівнянь Рікатті, що інтегруються в квадратурах. Розглянемо один з них. Нехай відомий один частинний розв'язок $y = y_1(x)$. Робимо заміну $y = y_1(x) + z$ і одержуємо

$$\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)\cdot(y_1(x)+z) + r(x)\cdot(y_1(x)+z)^2 = q(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ – частинний розв'язок, то

$$\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x} + p(x)\cdot y_1 + r(x)\cdot y_1^2 = q(x).$$

Розкривши в попередній рівності дужки і використовуючи останнє зауваження, одержуємо

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(x)\cdot z + 2r(x)\cdot y_1(x)\cdot z + r(x)\cdot z^2 = 0.$$

Перепишемо одержане рівняння у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (p(x) + 2r(x)\cdot y_1(x))\cdot z = -r(x)\cdot z^2,$$

це рівняння Бернуллі з $m = 2$.

1.3.4 Вправи для самостійної роботи

Приклад 1.3.1. Розв'язати рівняння

$$y' - y\cdot\tan x = \cos x.$$

Розв'язок. Використовуючи вигляд загального розв'язку, отримаємо

$$y = \exp\left\{\int \tan x \,\mathrm{d}x\right\} \cdot \left(\int \exp\left\{-\int \tan x \,\mathrm{d}x\right\} \cdot \cos x \,\mathrm{d}x + C\right).$$

Оскільки

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|,$$

то отримаємо

$$\begin{aligned} y &= e^{-\ln|\cos x|} \cdot \left(\int e^{\ln|\cos x|} \cdot \cos x \,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\right). \end{aligned}$$

Або

$$y = \frac{C}{\cos x} + \frac{x}{2\cos x} + \frac{\sin x}{2}.$$

Приклад 1.3.2. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = x^2,$$

що задовольняє початковій умові $y(2) = 2$.

Розв'язок. Використовуючи вигляд загального розв'язку, отримаємо

$$\begin{aligned} y &= \exp\left\{\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\right\} \cdot \left(\int \exp\left\{-\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\right\} \cdot x^2 \,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= e^{\ln|x|} \cdot \left(\int e^{-\ln|x|} \cdot x^2 \,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= x \cdot \left(\int x \,\mathrm{d}x + C\right) = \\ &= x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C\right). \end{aligned}$$

Таким чином

$$y = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Підставивши початкові умови $y(2) = 2$, одержимо $2 = 2C + 4$. Звідси $C = -1$ і частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{част.}} = \frac{x^3}{2} - x.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 1.3.3.

$$xy' + (x+1) \cdot y = 3x^2 e^{-x};$$

Задача 1.3.4.

$$(2x+1) \cdot y' = 4x + 2y;$$

Задача 1.3.5.

$$y' = 2x \cdot (x^2 + y);$$

Задача 1.3.6.

$$x^2 y' + xy + 1 = 0;$$

Задача 1.3.7.

$$y' + y \cdot \tan x = \sec x;$$

Задача 1.3.8.

$$x \cdot (y' - y) = e^x;$$

Задача 1.3.9.

$$(xy' - 1) \cdot \ln x = 2y;$$

Задача 1.3.10.

$$(y + x^2) \cdot \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.3.11.

$$(2e^x - y) \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}y;$$

Задача 1.3.12.

$$\sin^2 y + x \cdot \cot y = \frac{1}{y^2};$$

Задача 1.3.13.

$$(x + y^2) \cdot y' = y;$$

Задача 1.3.14.

$$(3e^y - x) \cdot y' = 1;$$

Задача 1.3.15.

$$y = x \cdot (y' - x \cdot \cos x).$$

Знайти частинні розв'язки рівняння з заданими початковими умовами:

Задача 1.3.16.

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.3.17.

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3;$$

Задача 1.3.18.

$$y' - \frac{2y}{x+1} = e^x \cdot (x+1)^2, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.3.19.

$$xy' + 2y = x64, \quad y(1) = -\frac{5}{8};$$

Задача 1.3.20.

$$y' - \frac{y}{x} = x \cdot \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

Задача 1.3.21.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi};$$

Задача 1.3.22.

$$(13y^3 - x) \cdot y' = 4y, \quad y(5) = 1;$$

Задача 1.3.23.

$$2 \cdot (x + \ln^2 y - \ln y) \cdot y' = y, \quad y(2) = 1.$$

Розв'язати рівняння Бернуллі:

Задача 1.3.24.

$$y' + xy = (1 + x) \cdot e^{-x} \cdot y^2;$$

Задача 1.3.25.

$$xy' + y = 2y^2 \cdot \ln x;$$

Задача 1.3.26.

$$2 \cdot (2xy' + y) = xy^2;$$

Задача 1.3.27.

$$3 \cdot (xy' + y) = y^2 \cdot \ln x;$$

Задача 1.3.28.

$$2 \cdot (y' + y) = xy^2.$$

Розв'язати рівняння Рікатті:

Задача 1.3.29.

$$x^2 \cdot y' + xy + x^2y^2 = 4;$$

Задача 1.3.30.

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x} = 0;$$

Задача 1.3.31.

$$xy' - (2x + 1) \cdot y + y^2 = 5 - x^2;$$

Задача 1.3.32.

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2;$$

Задача 1.3.33.

$$y' + 2y \cdot e^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$

1.4 Рівняння в повних диференціалах

1.4.1 Загальна теорія

Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$M(x, y) \cdot \mathrm{d}x + N(x, y) \cdot \mathrm{d}y = 0,$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$\mathrm{d}u(x, y) = M(x, y) \cdot \mathrm{d}x + N(x, y) \cdot \mathrm{d}y,$$

і, таким чином, рівняння набуває вигляду $\mathrm{d}u(x, y) = 0$ то рівняння називається рівнянням в повних диференціалах. Звідси вираз

$$u(x, y) = C$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння.

Критерієм того, що рівняння є рівнянням в повних диференціалах, тобто необхідною та достатньою умовою, є виконання рівності

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Нехай маємо рівняння в повних диференціалах. Тоді

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Звідси $u(x, y) = \int M(x, y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y)$ де $\varphi(y)$ – невідома функція. Для її визначення продиференціюємо співвідношення по y і прирівняємо $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,\mathrm{d}x\right) + \frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y} = N(x, y).$$

Звідси

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y.$$

Остаточно, загальний інтеграл має вигляд

$$\int M(x, y)\,\mathrm{d}x + \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}y = C.$$

Як відомо з математичного аналізу, якщо відомий повний диференціал, то $u(x, y)$ можна визначити, взявши криволінійний інтеграл по довільному контуру, що з'єднує фіксовану точку (x_0, y_0) і точку із змінними координатами (x, y).

Більш зручно брати криву, що складається із двох відрізків прямих. В цьому випадку криволінійний інтеграл розпадається на два простих інтеграла

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)\cdot\mathrm{d}x + N(x, y)\cdot\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} M(x,y)\cdot \mathrm{d}x + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} N(x,y)\cdot \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)\cdot \mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)\cdot \mathrm{d}\eta. \quad (1.4.1)$$

В цьому випадку одразу одержуємо розв'язок задачі Коші.

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi,y_0)\cdot \mathrm{d}\xi + \int_{y_0}^{y} N(x,\eta)\cdot \mathrm{d}\eta = 0.$$

1.4.2 Множник, що інтегрує

В деяких випадках рівняння

$$M(x,y)\cdot \mathrm{d}x + N(x,y)\cdot \mathrm{d}y = 0,$$

не є рівнянням в повних диференціалах, але існує функція $\mu = \mu(x,y)$ така, що рівняння

$$\mu(x,y)\cdot M(x,y)\cdot \mathrm{d}x + \mu(x,y)\cdot N(x,y)\cdot \mathrm{d}y = 0,$$

вже буде рівнянням в повних диференціалах. Необхідною та достатньою умовою цього є рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)\cdot M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)\cdot N(x,y)),$$

або

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Таким чином замість звичайного диференціального рівняння відносно функції $y(x)$ одержимо диференціальне рівняння в частинних похідних відносно функції $\mu(x,y)$.

Задача інтегрування його значно спрощується, якщо відомо в якому вигляді шукати функцію $\mu(x,y)$, наприклад $\mu = \mu(\omega(x,y))$ де $\omega(x,y)$ – відома функція. В цьому випадку одержуємо

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

Після підстановки в попереднє рівняння маємо

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial x}\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x}.$$

або
$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot N-\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot M\right)=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right).$$
Розділимо змінні
$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot N-\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot M}\cdot\mathrm{d}\omega.$$
Проінтегрувавши і поклавши сталу інтегрування одиницею, одержимо:
$$\mu(\omega(x,y))=\exp\left\{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot N-\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot M}\cdot\mathrm{d}\omega\right\}.$$

Розглянемо частинні випадки.

1. Нехай $\omega(x,y)=x$. Тоді $\frac{\partial\omega}{\partial x}=1$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}=0$, $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}x$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y))=\exp\left\{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\cdot\mathrm{d}x\right\}.$$

2. Нехай $\omega(x,y)=y$. Тоді $\frac{\partial\omega}{\partial x}=0$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}=1$, $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}y$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y))=\exp\left\{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\cdot\mathrm{d}y\right\}.$$

3. Нехай $\omega(x,y)=x^2\pm y^2$. Тоді $\frac{\partial\omega}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}=\pm2y$, $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}(x^2\pm y^2)$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y))=\exp\left\{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{2xN\mp2yM}\cdot\mathrm{d}(x^2\pm y^2)\right\}.$$

4. Нехай $\omega(x,y)=xy$. Тоді $\frac{\partial\omega}{\partial x}=y$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}=x$, $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}(xy)$ і формула має вигляд
$$\mu(\omega(x,y))=\exp\left\{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}\cdot\mathrm{d}(xy)\right\}.$$

1.4.3 Вправи для самостійної роботи

Як вже було сказано, рівняння
$$M(x,y)\cdot\mathrm{d}x+N(x,y)\cdot\mathrm{d}y=0$$

буде рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції. Це має місце при

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Приклад 1.4.1. Розв'язати рівняння

$$(2x + 3x^2 y) \cdot \mathrm{d}x + (x^3 - 3y^2) \cdot \mathrm{d}y = 0.$$

Розв'язок. Перевіримо, що це рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Обчислимо

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2 y) = 3x^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

Таким чином існує функція $u(x,y)$, що

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x + 3x^2 y.$$

Проінтегруємо по x. Отримаємо

$$u(x,y) = \int (2x + 3x^2 y) \cdot \mathrm{d}x + \Phi(y) = x^2 + x^3 y + \Phi(y).$$

Для знаходження функції $\Phi(y)$ візьмемо похідну від $u(x,y)$ по y і прирівняємо до $x^3 - 3y^2$. Отримаємо

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = x^3 + \Phi'(y) = x^3 - 3y^2.$$

Звідси $\Phi'(y) = -3y^2$ і $\Phi(y) = -y^3$. Таким чином,

$$u(x,y) = x^2 + x^3 y - y^3$$

і загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

Перевірити, що дані рівняння є рівняннями в повних диференціалах, і розв'язати їх:

Задача 1.4.2.

$$2xy \cdot \mathrm{d}x + (x^2 - y^2) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.3.

$$(2-9xy^2)\cdot x\cdot \mathrm{d}x+(4y^2-6x^3)\cdot y\cdot \mathrm{d}y=0;$$

Задача 1.4.4.

$$e^{-y}\cdot \mathrm{d}x-(2y+x\cdot e^{-y})\cdot \mathrm{d}y=0;$$

Задача 1.4.5.

$$\frac{y}{x}\cdot \mathrm{d}x+(y^3+\ln x)\cdot \mathrm{d}y=0;$$

Задача 1.4.6.

$$\frac{3x^2+y^2}{y^2}\cdot \mathrm{d}x-\frac{2x^3+5y}{y^3}\cdot \mathrm{d}y=0;$$

Задача 1.4.7.

$$2x\cdot\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\cdot \mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\cdot \mathrm{d}y=0;$$

Задача 1.4.8.

$$(1+y^2\cdot\sin 2x)\cdot \mathrm{d}x-2y\cdot\cos^2 x\cdot \mathrm{d}y=0;$$

Задача 1.4.9.

$$3x^2\cdot(1+\ln y)\cdot \mathrm{d}x=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)\cdot \mathrm{d}y;$$

Задача 1.4.10.

$$\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)\cdot \mathrm{d}x+\frac{(x^2+1)\cdot\cos y}{\cos 2y-1}\cdot \mathrm{d}y=0;$$

Задача 1.4.11.

$$(2x+y\cdot e^{xy})\cdot \mathrm{d}x+(x\cdot e^{xy}+3y^2)\cdot \mathrm{d}y=0;$$

Задача 1.4.12.

$$\left(2+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot x\cdot \mathrm{d}x+\frac{y}{x^2+y^2}\cdot \mathrm{d}y=0;$$

Задача 1.4.13.

$$\left(3y^2-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\cdot \mathrm{d}x+\left(6xy+\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot \mathrm{d}y=0.$$

Розв'язати, використовуючи множник, що інтегрує:

Задача 1.4.14. $\mu = \mu(x-y)$,

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3) \cdot \mathrm{d}x + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3) \cdot \mathrm{d}x = 0;$$

Задача 1.4.15.

$$\left(y - \frac{ay}{x} + x\right) \cdot \mathrm{d}x + a \cdot \mathrm{d}y = 0, \quad \mu = \mu(x+y);$$

Задача 1.4.16.

$$(x^2 + y) \cdot \mathrm{d}y + x \cdot (1-y) \cdot \mathrm{d}x = 0, \quad \mu = \mu(xy);$$

Задача 1.4.17.

$$(x^2 - y^2 + y) \cdot \mathrm{d}x + x \cdot (2y-1) \cdot \mathrm{d}y = 0;$$

Задача 1.4.18.

$$(2x^2y^2 + y) \cdot \mathrm{d}x + (x^3y - x) \cdot \mathrm{d}y = 0.$$

1.5 Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має такий вигляд

$$F(x, y, y') = 0.$$

1.5.1 Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо ряд диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1. Рівняння вигляду
$$F(y') = 0.$$
Нехай алгебраїчне рівняння $F(k) = 0$ має принаймні один дійсний корінь $k = k_0$. Тоді, інтегруючи $y' = k_0$, одержимо $y = k_0 \cdot x + C$. Звідси $k_0 = (y - C)/x$ і вираз
$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$$
містить всі розв'язки вихідного диференціального рівняння.

2. Рівняння вигляду

$$F(x, y') = 0.$$

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x$, одержимо

$$\mathrm{d}y = \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot \mathrm{d}t.$$

Проінтегрувавши, запишемо

$$y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot \mathrm{d}t + C.$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \displaystyle\int \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot \mathrm{d}t + C. \end{cases}$$

3. Рівняння вигляду

$$F(y, y') = 0.$$

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x$, одержимо

$$\varphi'(t) \cdot \mathrm{d}t = \psi(t) \cdot \mathrm{d}x$$

і

$$\mathrm{d}x = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot \mathrm{d}t$$

Проінтегрувавши, запишемо

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot \mathrm{d}t + C.$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot \mathrm{d}t + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

4. Рівняння Лагранжа

$$y = \varphi(y') \cdot x + \psi(y').$$

Введемо параметр $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$ і отримаємо

$$y = \varphi(p) \cdot x + \psi(p).$$

Продиференціювавши, запишемо

$$\mathrm{d}y = \varphi'(p) \cdot x \cdot \mathrm{d}p + \varphi(p) \cdot \mathrm{d}x + \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p.$$

Замінивши $\mathrm{d}y = p \cdot \mathrm{d}x$ одержимо

$$p \cdot \mathrm{d}x = \varphi'(p) \cdot x \cdot \mathrm{d}p + \varphi(p) \cdot \mathrm{d}x + \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p.$$

Звідси

$$(p - \varphi(p)) \cdot \mathrm{d}x - \varphi'(p) \cdot x \cdot \mathrm{d}p = \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p.$$

І отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot x = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Його розв'язок

$$x = \exp\left\{\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot \mathrm{d}p\right\} \cdot \\ \cdot \left(\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot \exp\left\{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot \mathrm{d}p\right\} \mathrm{d}p + C\right) = \Psi(p, C).$$

І остаточний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x = \Psi(p, C), \\ y = \varphi(p) \cdot \Phi(p, C) + \psi(p). \end{cases}$$

5. Рівняння Клеро.

Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y') = y'$ є рівняння Клеро

$$y = y'x + \psi(y').$$

Поклавши $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, отримаємо $y = px + \psi(p)$. Продиференціюємо

$$\mathrm{d}y = p \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}p + \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p.$$

Оскільки $\mathrm{d}y = p \cdot \mathrm{d}x$, то

$$p \cdot \mathrm{d}x = p \cdot \mathrm{d}x + x \cdot \mathrm{d}p + \psi'(p) \cdot \mathrm{d}p.$$

Скоротивши, одержимо

$$(x + \psi'(p)) \cdot \mathrm{d}p = 0.$$

Можливі два випадки.

(а) $x + \psi'(p) - 0$ і розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p \cdot \psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$

(б) $\mathrm{d}p = 0$, $p = C$ і розв'язок має вигляд

$$y = Cx + \psi(C).$$

Загальним розв'язком рівняння Клеро буде сім'я "прямих". Її огинає особлива крива.

6. Параметризація загального вигляду. Нехай диференціальне рівняння $F(x, y, y') = 0$ вдалося записати у вигляді системи рівнянь з двома параметрами

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \theta(u, v).$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x$, одержимо

$$\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} \cdot \mathrm{d}u + \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v} \cdot \mathrm{d}v = \\ = \theta(u,v) \cdot \left(\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} \cdot \mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} \cdot \mathrm{d}v\right)$$

Перегрупувавши члени, одержимо

$$\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v) \cdot \frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\right) \mathrm{d}u =$$

$$= \left(\theta(u,v) \cdot \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial v}\right) \mathrm{d}v.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{\theta(u,v) \cdot \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial \psi(u,v)}{\partial v}}{\frac{\partial \psi(u,v)}{\partial u} - \theta(u,v) \cdot \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u}}.$$

Або отримали рівняння вигляду

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = f(u,v).$$

Параметризація загального вигляду не дає інтеграл диференціального рівняння. Вона дозволяє звести диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної, до диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної.

7. Нехай рівняння $F(x,y,y') = 0$ можна розв'язати відносно y' і воно має n коренів, тобто його можна записати у вигляді

$$\prod_{i=1}^{n} (y' - f_i(x,y)) = 0.$$

Розв'язавши кожне з рівнянь $y' = f_i(x,y)$, $i = \overline{1,n}$, отримаємо n загальних розв'язків (або інтервалів) $y = \varphi_i(x,C)$, $i = \overline{1,n}$ (або $\varphi_u(x,y) = C$, $i = \overline{1,n}$). І загальний розв'язок вихідного рівняння, не розв'язаного відносно похідної має вигляд

$$\prod_{i=1}^{n} (y - \varphi_i(x,C)) = 0,$$

або

$$\prod_{i=1}^{n} (\varphi_i(x,y) - C) = 0.$$

1.5.2 Вправи для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння вигляду $F(y') = 0$:

Приклад 1.5.1. $(y')^3 - 1 = 0$;

Розв'язок. Рівняння має дійсний розв'язок, тобто воно поставлене коректно. Тому його розв'язком буде $\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - 1 = 0$.

Задача 1.5.2.

$$(y')^2 - 2y' + 1 = 0;$$

Задача 1.5.3.

$$(y')^4 - 16 = 0.$$

2. Розв'язати рівняння вигляду $F(x, y') = 0$:

Приклад 1.5.4. $x = (y')^3 + y'$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $x = t^3 + t$. Використовуючи основну форму запису $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x$ одержимо

$$\mathrm{d}y = t \cdot (3t^2 + 1) \cdot \mathrm{d}t.$$

Звідси

$$y = \int t \cdot (3t^2 + 1) \cdot \mathrm{d}t = \frac{3t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C.$$

Остаточний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 + t, \quad y = \frac{3t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C.$$

Задача 1.5.5.

$$x \cdot ((y')^2 - 1) = 2y';$$

Задача 1.5.6.

$$x = y' \cdot \sqrt{(y')^2 - 1};$$

Задача 1.5.7.

$$y' \cdot (x - \ln y') - 1.$$

3. Розв'язати рівняння вигляду $F(y, y') = 0$:

Приклад 1.5.8. $y = (y')^2 + 2(y')^3$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $y = t^2 + 2t^3$. Використовуючи основну форму запису $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x$, одержуємо

$$(2t + 6t^2) \cdot \mathrm{d}t = t \cdot \mathrm{d}x.$$

Звідси

$$\mathrm{d}x = (2 + 6t) \cdot \mathrm{d}t, \quad x = \int (2 + 6t) \cdot \mathrm{d}t = 2t + 3t^2 + C.$$

Остаточний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$x = 2t + 3t^2, \quad y = t^2 + 2t^{\cdot}$$

Крім того за рахунок скорочення втрачено $y \equiv 0$.

Задача 1.5.9.

$$y = \ln(1 + (y')^2);$$

Задача 1.5.10.

$$y = (y' - 1) \cdot e^{y'};$$

Задача 1.5.11.

$$(y')^4 - (y')^2 = y^2.$$

4. Розв'язати рівняння Лагранжа

Приклад 1.5.12. $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $y = -xt + 4\sqrt{t}$. Диференціюємо друге рівняння.

$$\mathrm{d}y = -x \cdot \mathrm{d}t - t \cdot \mathrm{d}x + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{d}t.$$

Оскільки зроблено заміну $\mathrm{d}y = t \cdot \mathrm{d}x$, то одержимо

$$t \cdot \mathrm{d}x = -x \cdot \mathrm{d}t - t \cdot \mathrm{d}x + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{d}t,$$

або

$$2t \cdot \mathrm{d}x = -x \cdot \mathrm{d}t + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{d}t.$$

Звідси

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{2t} = \frac{1}{t \cdot \sqrt{t}}.$$

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння може бути представлений у вигляді

$$x = \exp\left\{-\int \frac{\mathrm{d}t}{2t}\right\} \cdot \left(\int \exp\left\{\int \frac{\mathrm{d}t}{2t}\right\} \cdot \frac{1}{t \cdot \sqrt{t}} + C\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left(\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + C\right) = \frac{\ln|t| + C}{\sqrt{t}}.$$

Остаточно маємо

$$x = \frac{\ln|t| + C}{\sqrt{t}}, \quad y = -\sqrt{t} \cdot (\ln|t| + C) + 4\sqrt{t}.$$

Крім того при діленні на t втратили $y \equiv 0$.

Задача 1.5.13.

$$y = 2xy' - 4 \cdot (y')^3;$$

Задача 1.5.14.

$$y = x \cdot (y')^2 - 2 \cdot (y')^3;$$

Задача 1.5.15.

$$xy' \cdot (y' + 2) = y;$$

Задача 1.5.16.

$$2xy' - y = \ln y'.$$

5. Розв'язати рівняння Клеро

Приклад 1.5.17. $y = xy' - (y')^2$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $y = xt - t^2$. Диференціюємо друге рівняння:

$$\mathrm{d}y = x \cdot \mathrm{d}t + t \cdot \mathrm{d}x - 2t \cdot \mathrm{d}t.$$

Оскільки зроблено заміну $\mathrm{d}y = t \cdot \mathrm{d}x$, то одержимо

$$t \cdot \mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{d}t + t \cdot \mathrm{d}x - 2t \cdot \mathrm{d}t.$$

Звідси $(x - 2t) \cdot \mathrm{d}t = 0$. І маємо дві гілки

(а) Особливий розв'язок $x = 2t$, $y = t^2$, або $y = \frac{x^2}{4}$.

(б) Загальний розвозок $y = Cx - C^2$.

Задача 1.5.18.

$$y = xy' + 4\sqrt{y'};$$

Задача 1.5.19.

$$y = xy' + 2 - y';$$

Задача 1.5.20.

$$y = xy' - \ln y';$$

Задача 1.5.21.

$$y = xy' + \sin y';$$

Задача 1.5.22.

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2};$$

Задача 1.5.23.

$$y = xy' + (y')^3;$$

Задача 1.5.24.

$$y = xy' + \cos(2 + y');$$

Задача 1.5.25.

$$y = xy' - \ln \sqrt{1 + (y')^2};$$

Задача 1.5.26.

$$y = xy' - y' - (y')^3;$$

Задача 1.5.27.

$$y = xy' - \sqrt{2 - (y')^2};$$

Задача 1.5.28.

$$y = xy' + \sqrt{2y'+2};$$

Задача 1.5.29.

$$y = xy' - e^{y'};$$

Задача 1.5.30.

$$y = xy' - \tan y';$$

Задача 1.5.31.

$$(y')^3 = 3(xy' - y).$$

6. Розв'язати рівняння параметризацією загального виду

Приклад 1.5.32. $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y$;

Розв'язок. Введемо параметризацію рівняння

$$x = u, \quad y' = v, \quad y = \frac{u^2 + 2uv - v^2}{4}.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x$, одержимо рівняння

$$\frac{1}{u}(2u \cdot \mathrm{d}u + 2u \cdot \mathrm{d}v + 2v \cdot \mathrm{d}u - 2v \cdot \mathrm{d}v) = v \cdot \mathrm{d}u.$$

Перепишемо його у вигляді

$$(u+v) \cdot \mathrm{d}u + (u-v) \cdot \mathrm{d}v = 2v \cdot \mathrm{d}u,$$

або

$$(u-v) \cdot \mathrm{d}u + (u-v) \cdot \mathrm{d}v = 0,$$

Воно розділяється на два

(а) $\mathrm{d}u + \mathrm{d}v = 0 \implies v = -u + C.$

Підставивши в параметризовану систему, одержуємо

$$x = u, \quad y = \frac{u^2 + 2u \cdot (-u+C) - (-u+C)^2}{4},$$

або

$$y = \frac{x^2 + 2x \cdot (-x+C) - (-x+C)^2}{4} = \frac{-2x^2 + 4Cx - C^2}{4}.$$

(б) $u - v = 0 \implies v = u$. І розв'язок має вигляд $y = \frac{x^2}{2}$.

Задача 1.5.33.

$$5y + (y')^2 = x \cdot (x + y');$$

Задача 1.5.34.

$$x^2 \cdot (y')^2 = xyy' + 1;$$

Задача 1.5.35.

$$(y')^3 + y^2 = xyy';$$

Задача 1.5.36.

$$y = x \cdot (y')^2 - 2 \cdot (y')^3;$$

Задача 1.5.37.

$$2xy' - y = y' \cdot \ln(yy');$$

Задача 1.5.38.

$$y' = e^{xy'/y}.$$

7. Розв'язати рівняння

Приклад 1.5.39. $(y')^2 - y^2 = 0$;

Розв'язок. Це рівняння розв'язується відносно y'. Маємо

$$y' = y, \quad y' = -y.$$

Розв'язок першого має вигляд $y = ce^x$, другого Ce^{-x}. Загальний розв'язок має вигляд

$$(y - ce^x) \cdot (y - Ce^{-x}) = 0.$$

Задача 1.5.40.

$$y^2 \cdot ((y')^2 + 1) = 1;$$

Задача 1.5.41.

$$(y')^2 - 4y^3 = 0;$$

Задача 1.5.42.

$$x \cdot (y')^2 = y;$$

Задача 1.5.43.

$$(y')^2 + xy = y^2 + xy';$$

Задача 1.5.44.

$$xy' \cdot (xy' + y) = 2y^2.$$

1.6 Існування та єдиність розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Неперервна залежність та диференційованість

Клас диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах, досить невеликий, тому мають велике значення наближені методи розв'язку диференціальних рівнянь. Але, щоб використовувати ці методи, треба бути впевненим в існуванні розв'язку шуканого рівняння та в його єдиності.

Зараз значна частина теорем існування та єдиності розв'язків не тільки диференціальних, але й рівнянь інших видів доводиться методом стискаючих відображень.

Визначення. Простір M називається метричним, якщо для довільних двох точок $x, y \in M$ визначена функція $\rho(x, y)$, що задовольняє аксіомам:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, причому $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (комутативність);
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (нерівність трикутника).

Функція $\rho(x, y)$ називається відстанню (метрикою) в просторі M.

Приклад. Векторний n-вимірний простір $\mathbb{R}^n$.

Нехай $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. За метрику можна взяти:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2},$$

або

$$\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|.$$

Приклад. Простір неперервних функцій на відрізку $[a, b]$ позначається $C([a, b])$. За метрику можна взяти

$$\rho(x(t), y(t)) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2},$$

або

$$\rho(x(t), y(t)) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Визначення. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається фундаментальною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n \geq N(\varepsilon)$ таке, що при $n \geq N(\varepsilon)$ і довільному $m \in \mathbb{N}$ буде $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$.

Визначення. Метричний простір M називається повним, якщо довільна фундаментальна послідовність точок $\{x_n\}$ простору M збігається до деякої точки x_0 простору M.

Теорема 1.1 (принцип стискаючих відображень)**.** *Нехай в повному метричному просторі M задано оператор A, що задовольняє умовам.*

1. *Оператор A переводить точки простору M в точки цього ж простору, тобто якщо $x \in M$, то і $Ax \in M$.*

2. *Оператор A є оператором стиску, тобто $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$, де $0 < \alpha < 1$, x, y – довільні точки M.*

Тоді існує єдина нерухома точка $\bar{x} \in M$, яка є розв'язком операторного рівняння $A\bar{x} = \bar{x}$ і вона може бути знайдена методом послідовних відображень, тобто $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, де $x_{n+1} = Ax_n$, причому x_0 вибирається довільно.

Доведення. Візьмемо довільну точку $x_0 \in M$ і побудуємо послідовність $A^n x_0$. Покажемо, що побудована послідовність є фундаментальною. Дійсно

$$\begin{aligned}
\rho(x_2, x_1) &= \rho(Ax_1, Ax_0) \leq \alpha\rho(x_1, x_0),\\
\rho(x_3, x_2) &= \rho(Ax_2, Ax_1) \leq \alpha\rho(x_2, x_1) \leq \alpha^2\rho(x_1, x_0),\\
\rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leq \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n\rho(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Оцінимо $\rho(x_n, x_{n+m})$. Застосувавши $m - 1$ раз нерівність трикутника, отримуємо

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+m}) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leq\\
\leq \alpha^n\rho(x_1, x_0) + \alpha^{n+1}\rho(x_1, x_0) + \alpha^{n+m-1}\rho(x_1, x_0) =\\
= (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+m}) \cdot \rho(x_1, x_0) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \rho(x_1, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Тобто послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною і, в силу повноти простору M, збігається до деякого елемента цього ж простора x.

Покажемо, що x є нерухомою точкою A, тобто $Ax = x$.

Нехай від супротивного $Ax = \bar{x}$ і $x \neq \bar{x}$. Застосувавши нерівність трикутника, одержимо $\rho(x, \bar{x}) < \rho(x, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, \bar{x})$. Оцінимо кожний з доданків.

1. $\rho(x, x_{n+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

2. $\rho(x_{n+1}, \bar{x}) = \rho(Ax_n, Ax) \leq \alpha\rho(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Таким чином $\rho(x, \bar{x}) \le 0$, а в силу невід'ємності метрики це значить, що $x = \bar{x}$.

Покажемо, що нерухома точка єдина. Нехай, від супротивного, існують дві точки x і y: $Ax = x$ і $Ay = y$. Але тоді

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y) < \rho(x, y),$$

що суперечить припущенню про стислість оператора. Таким чином, припущення про неєдиність нерухомої точки помилкове. □

З використанням теореми про нерухому точку доведемо теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної.

Теорема 1.2 (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші)**.** *Нехай у диференціальному рівнянні* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ *функція* $f(x, y)$ *визначена в прямокутнику*

$$D = \{(x, y) : x_0 - a \le x \le x_0 + a, y_0 - b \le y \le y_0 + b\},$$

і задовольняє умовам:

1. $f(x, y)$ *неперервна по* x *та* y *у* D*;*
2. $f(x, y)$ *задовольняє умові Ліпшиця по змінній* y*, тобто*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N \cdot |y_1 - y_2|, \quad N = const.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ *диференціального рівняння, який визначений при* $x_0 - h \le x \le x_0 + h$*, і задовольняє умові* $y(x_0) = y_0$*, де* $h < \min\{a, b/M, 1/N\}$*,* $M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$.

Доведення. Розглянемо простір, елементами якого є функції $y(x)$, неперервні на відрізку $[x_0 - h, x_0 + h]$ й обмежені $|y(x) - y_0| \le b$. Введемо метрику $\rho(y(x), z(x))$. Одержимо повний метричний простір $C([x_0 - h, x_0 + h])$. Замінимо диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

еквівалентним інтегральним рівнянням

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t + y_0 = Ay.$$

Розглянемо оператор A. Через те, що

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\,\mathrm{d}t \leq M \cdot |x - x_0| \leq Mh \leq b,$$

то оператор A ставить у відповідність кожній неперервній функції $y(x)$, визначеній при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ й обмеженій $|y(x) - y_0| \leq b$ також неперервну функцію Ay, визначену при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ й обмежену $|y(x) - y_0| \leq b$.

Перевіримо, чи є оператор A оператором стиску:

$$\begin{aligned}
\rho(Ay, Az) = \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} &\left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}y - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\,\mathrm{d}t \right| \leq \\
&\leq \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\,\mathrm{d}t \leq \\
&\leq N \cdot \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|\,\mathrm{d}t \leq \\
&\leq N \cdot \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |y(t) - z(t)| \cdot \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \leq N \cdot \rho(y, z) \cdot h.
\end{aligned}$$

І оскільки $Nh < 1$, то оператор A є оператором стиску. Відповідно до принципу стискаючих відображень операторне рівняння $Ay = y$ має єдиний розв'язок, тобто інтегральне рівняння чи початкова задача Коші також має єдиний розв'язок. □

Зауваження. Умову Ліпшиця можна замінити іншою, більш грубою, але легше перевіряємою умовою існування обмеженої по модулю частинної похідної $f'_y(x, y)$ в області D. Дійсно,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f'_y(x, \xi)| \cdot |y_1 - y_2| \leq N \cdot |y_1 - y_2|,$$

де $N = \max_{(x,y) \in D} |f'_y(x, y)|$.

Використовуючи доведену теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші розглянемо ряд теорем, що описують якісну поведінку розв'язків.

Теорема 1.3 (про неперервну залежність розв'язків від параметру). *Якщо права частина диференціального рівняння*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y, \mu)$$

неперервна по μ при $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ і при кожному фіксованому μ задовольняє умовам теореми існування й єдиності, причому стала Ліпшиця N не залежить від μ, то розв'язок $y = y(x, \mu)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, неперервно залежить від μ.

Доведення. Оскільки члени послідовності

$$y_n(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t, \mu))\,\mathrm{d}t$$

є неперервними функціями змінних x і μ, а стала N не залежить від μ, то послідовність $\{y_n\}$ збігається до y рівномірно по μ. І, як випливає з математичного аналізу, якщо послідовність неперервних функцій збігається рівномірно, то вона збігається до неперервної функції, тобто $y = y(x, \mu)$ – функція, неперервна по μ. □

Теорема 1.4 (про неперервну залежність від початкових умов)**.** *Нехай виконані умови теореми про існування та єдиність розв'язків рівняння*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

з початковими умовами $y(x_0) = y_0$. Тоді, розв'язки $y = y(x_0, y_0, x)$, що записані у формі Коші, неперервно залежать від початкових умов.

Доведення. Роблячи заміну $x = y(x_0, y_0, x) - y_0$, $t = x - x_0$ одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f(t + x_0, z + y_0)$$

з нульовими початковими умовами. На підставі попередньої теореми маємо неперервну залежність розв'язків від x_0, y_0 як від параметрів. □

Теорема 1.5 (про диференційованість розв'язків)**.** *Якщо в околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні змішані похідні до k-го порядку, то розв'язок $y(x)$ рівняння*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$

з початковими умовами $y(x_0) = y_0$ в деякому околі точки (x_0, y_0) буде k разів неперервно диференційований.

Доведення. Підставивши $y(x)$ в рівняння, одержимо тотожність

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv f(x, y(x)),$$

яку можна диференціювати

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f.$$

Якщо $k > 1$, то праворуч функція неперервно диференційована. Продиференціюємо її ще раз

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right) \cdot f + \\ + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right),$$

або

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot F \right),$$

Проробивши це k разів, отримаємо твердження теореми. □

Розглянемо диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної

$$F(x, y, y') = 0.$$

Нехай (x_0, y_0) – точка на площині. Підставивши її в рівняння, одержимо відносно y' алгебраїчне рівняння

$$F(x_0, y_0, y') = 0.$$

Це рівняння має корені $y'_0, y'_1, \ldots, y'_n$. Задача Коші для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної, ставиться в такий спосіб.

Потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ диференціального, що задовольняє умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_i$, де x_0, y_0 – довільні значення, а y'_i – один з вибраних наперед коренів алгебраїчного рівняння.

Теорема 1.6 (існування й єдиність розв'язку задачі Коші рівняння, не розв'язаного відносно похідної)**.** *Нехай у замкненому околі точки* (x_0, y_0, y'_i) *функція* $F(x, y, y')$ *задовольняє умовам:*

1. $F(x, y, y')$ – неперервна по всіх аргументах;

2. $\frac{\partial F}{\partial y'}$ існує і відмінна від нуля;

3. $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq N_0$.

Тоді при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, де h – досить мал е, існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $F(x, y, y') = 0$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_i$.

Доведення. Як випливає з математичного аналізу відповідно до теореми про неявну функцію можна стверджувати, що умови 1) і 2) гарантують існування єдиної неперервної в околі точки (x_0, y_0, y'_i) функції $y' = f(x, y)$, обумовленої рівнянням $F(x, y, y') = 0$, для якої $y'(x_0) = y'_i$. Перевіримо, чи задовольняє $f(x, y)$ умові Ліпшиця чи більш грубій $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq N$. Диференціюємо $F(x, y, y') = 0$ по y. Оскільки $y' = f(x, y)$, то одержуємо

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Звідси

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$$

З огляду на умови 2), 3), одержимо, що в деякому околі точки (x_0, y_0) буде $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq N$ і для рівняння $y' = f(x, y)$ виконані умови теореми існування й єдиності розв'язку задачі Коші. □

1.6.1 Особливі розв'язки

Визначення. Розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння, в кожній точці якого $M(x, y)$ порушена єдиність розв'язку задачі Коші, називається особливим розв'язком.

Очевидно, особливі розв'язки треба шукати в тих точках області D, де порушені умови теореми про існування й єдиність розв'язку задачі Коші. Але, оскільки умови теореми носять достатній характер, то їхнє не виконання для існування особливих розв'язків, носить необхідний характер. І точки $N(x, y)$ області D, у яких порушені умови теореми про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння, є лише "підозрілими"на особливі розв'язки.

Розглянемо рівняння

$$y' = f(x, y).$$

Неперервність $f(x, y)$ в області D зазвичай виконується, і особливі розв'язки варто шукати там, де $\frac{\partial f}{\partial y} = + \pm \infty$.

Для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної

$$F(x, y, y') = 0,$$

умови неперервності $F(x, y, y')$ й обмеженості $\frac{\partial F}{\partial y}$ зазвичай виконуються. І особливі розв'язки варто шукати там, де задовольняється остання рівність і

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

Вилучаючи із системи y', одержимо $\Phi(x, y) = 0$. Однак не в кожній точці $M(x, y)$, у якій $\Phi(x, y)$, порушується єдиність розв'язку, тому що умови теореми мають лише достатній характер і не є необхідними. Якщо ж яка-небудь гілка $y = \varphi(x)$ кривої $\Phi(x, y)$ є інтегральною кривою, то $y = \varphi(x)$ називається особливим розв'язком.

Таким чином, для знаходження особливого розв'язку $F(x, y, y') = 0$ треба

1. знайти p-дискримінантну криву з $F(x, y, y') = 0$ та $\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0$.
2. з'ясувати шляхом підстановки чи є серед гілок p-дискримінантної кривої інтегральні криві;
3. з'ясувати чи порушена умова одиничності в точках цих кривих.

1.6.2 Вправи для самостійної роботи

Приклад 1.6.1. Побудувати послідовні наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ для рівняння $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$.

Розв'язок. Візьмемо початкову функцію $y_0(0) \equiv 0$. Підставивши в ітераційну залежність

$$y_{n+1}(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\,\mathrm{d}s$$

отримаємо

$$y_1(x) = \int_0^x s\,\mathrm{d}s = \frac{x^2}{2},$$
$$y_2(x) = \int_0^x (s - y_1^2(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^x \left(s - \frac{s^4}{4}\right)\mathrm{d}s = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}.$$

Побудувати послідовні наближення $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ для рівнянь

Задача 1.6.2.
$$y' = y^2 + 3x^2 - 1, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.6.3.
$$y' = y + e^{y-1}, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.6.4.
$$y' = 1 + x \cdot \sin y, \quad y(\pi) = 2\pi.$$

Приклад 1.6.5. Вказати на проміжок з $a = 1$, $b = 1$, на якому гарантується існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння $y' = y^3 + x$, $y(0) = 1$.

Розв'язок. Як випливає з теореми про існування та єдиність розв'язку, проміжок, на якому гарантується існування та єдиність розв'язку задачі Коші дорівнює $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$, де

$$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|, \quad L = \max_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|.$$

Для цієї задачі отримаємо $D = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, $M = 2$, $L = 3$. Тому $h = 1/3$.

Вказати проміжки, де гарантується існування та єдиність розв'язку задачі Коші рівняння

Задача 1.6.6.

$$y' = y + e^y, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad a = 1, \quad b = 2;$$

Задача 1.6.7.

$$y' = 2xy + y^3, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad a = 2, \quad b = 1;$$

Задача 1.6.8.

$$y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad a = 1, \quad b = 1.$$

Приклад 1.6.9. Знайти особливий розв'язок рівняння $y' - \sqrt{y}$.

Розв'язок. Особливий розв'язок слід шукати там, де $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \pm\infty$. Оскільки $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, то отримаємо $\bar{y}(x) = 0$ – крива, що підозріла на особливу. Перевірка показує, що це дійсно інтегральна крива. Щоб до кінця переконатися, що ця крива особлива, розв'язуємо рівняння

$$y' = \sqrt{y} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \mathrm{d}x \implies 2\sqrt{y} = x + C \implies y(x) = \frac{(x+c)^2}{4}.$$

Легко переконатися, що $\bar{y}(x) = 0$ є кривою, що огинає сім'ю інтегральних кривих $y(x) = \frac{(x+c)^2}{4}$.

Приклад 1.6.10. Знайти особливий розв'язок рівняння $y = x + y' - \ln y'$.

Розв'язок. Складаємо рівняння p-дискриминантної кривої

$$y = x + p - \ln p, \quad 0 = 1 - \frac{1}{p}.$$

Із другого рівняння $p = 1$. Підставивши в перше, отримаємо, що крива, що є підозрілою як особлива, має вигляд $\bar{y}(x) = x + 1$.

Підставивши у рівняння, отримаємо $x+1 = x+1-\ln 1$, тобто впевнились, що $\bar{y}(x) = x + 1$ є інтегральною кривою.

Розв'яжемо рівняння методом введення параметру. Його загальний розв'язок має вигляд

$$y = Ce^x - \ln C.$$

Можна переконатися, що $\bar{y}(x) = x + 1$ є кривою, що огинає сім'ю інтегральних кривих.

Щоб перевірити це аналітично, запишемо умову дотику кривої $y = x + 1$ та $y = Ce^x - \ln C$ в точці (x_0, y_0). Вона має вигляд:

$$\bar{y}(x_0) = y(x_0, C), \quad \bar{y}'(x_0) = y'(x_0, C).$$

Тобто

$$x_0 + 1 = Ce^{x_0} - \ln C, \quad 1 = Ce^{x_0}.$$

З другого рівняння отримаємо $C = e^{-x_0}$. Підставивши у перше рівняння, маємо $x_0+1 = 1-\ln e^{-x_0}$, тобто $x_0+1 = x_0+1$ – тотожність. Таким чином при кожному x_0 відбувається дотик інтегральних кривих та $\bar{y}(x) = x+1$, що огинає сім'ю інтегральних кривих.

Знайти особливі розв'язки та зробити рисунок.

Задача 1.6.11.

$$8 \cdot (y')^3 - 27y = 0;$$

Задача 1.6.12.

$$(y'+1)^3 - 27 \cdot (x+y)^2 = 0;$$

Задача 1.6.13.

$$y^2 \cdot ((y')^2 + 1) = 1;$$

Задача 1.6.14.

$$(y')^2 - 4y^3 = 0.$$

2 Нелінійні диференціальні рівняння вищих порядків

2.1 Загальні визначення. Існування та єдиність розв'язків рівнянь

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Якщо диференціальне рівняння розв'язане відносно старшої похідної, то воно має вигляд

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = 0.$$

Іноді його називають диференціальним рівнянням у нормальній формі. Для диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної, задача Коші ставиться таким чином. Потрібно знайти функцію $y = y(x)$, n разів неперервно диференційовану і таку, що при підстановці в останнє рівняння обертає його в тотожність і задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної, задача Коші полягає в знаходженні розв'язку $y = y(x)$, що задовольняє початковим даним

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)},$$

де значення $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ довільні, а $y_0^{(n)}$ один з коренів алгебраїчного рівняння

$$F\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}\right) = 0.$$

Теорема 2.1 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші рівняння, розв'язаного відносно похідної)**.** *Нехай у деякому замкненому околі точки* $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ *функція* $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ *задовольняє умовам:*

1. *вона визначена і неперервна по всім змінним;*

2. *задовольняє умові Ліпшиця по всім змінним, починаючи з другої.*

Тоді при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, де h – досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = 0,$$

що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Теорема 2.2 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші рівняння, не розв'язаного відносно похідної)**.** *Нехай у деяком замкненому околі точки $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)}\right)$ функція $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)$ задовольняє умовам:*

1. *вона визначена і неперервна по всім змінним;*

2. *її частинні похідні по всім змінним з другої пердеостанньої обмежені:*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M_0, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y'}\right| < M_1, \quad \ldots, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}\right| < M_{n-1}.$$

3. *її частинна похідна по останній змінній не обертаєтсья на нуль:*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right| \neq 0.$$

Тоді при $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, де h – досить мала величина, існує і єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}.$$

Визначення. Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається n разів неперервно диференційована функція $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, що обертає при підстановці рівняння в тотожність, у якій вибором сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можна одержати розв'язок довільної задачі Коші в області існування та єдиності розв'язків.

2.2 Диференціальні рівняння вищих порядків, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1. Рівняння вигляду
$$y^{(n)} = f(x).$$
Проінтегрувавши його n разів одержимо загальний розв'язок у вигляді
$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n} f(x) \underbrace{\mathrm{d}x \cdots \mathrm{d}x}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$
Якщо задані умови Коші
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
то розв'язок має вигляд
$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x}}_{n} f(t) \underbrace{\mathrm{d}t \cdots \mathrm{d}t}_{n} + \frac{y_0}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^{n-1} +$$
$$+ \frac{y_0'}{(n-2)!} \cdot (x - x_0)^{n-2} + \ldots + y_0^{(n-2)} \cdot (x - x_0) + y_0^{(n-1)}.$$

2. Рівняння вигляду
$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0.$$
Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$
Використовуючи основне співвідношення $\mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)} \cdot \mathrm{d}x$, одержимо
$$\mathrm{d}y^{(n-1)} = \psi(t) \cdot \varphi(t) \cdot \mathrm{d}t$$
Проінтегрувавши його, маємо
$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \cdot \varphi(t) \cdot \mathrm{d}t + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

І одержимо параметричний запис рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n-1)} = \psi_1(t, C_1). \end{cases}$$

Проробивши зазначений процес ще $(n-1)$ раз, одержимо загальний розв'язок рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t, C_1, \dots, C_n). \end{cases}$$

3. Рівняння вигляду
$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0.$$
Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді
$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$
Використовуючи основне співвідношення $\mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)} \cdot \mathrm{d}x$, одержуємо
$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot \mathrm{d}t.$$
Проінтегрувавши, маємо
$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot \mathrm{d}t + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$
І одержали параметричний запис майже з попереднього пункту.

Використовуючи попередній пункт, запишемо загальний розв'язок у параметричному вигляді:
$$\begin{cases} x = \psi(t, C_1), \\ y = \varphi_n(t, C_2, \dots, C_n). \end{cases}$$

4. Нехай рівняння вигляду
$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0$$
можна розв'язати відносно старшої похідної
$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right).$$

Домножимо його на $2y^{(n-1)} \cdot \mathrm{d}x$ й одержимо

$$2y^{(n-1)} \cdot y^{(n)} \cdot \mathrm{d}x = 2f\left(y^{(n-2)}\right) \cdot y^{(n-1)} \cdot \mathrm{d}x.$$

Перепишемо його у вигляді

$$\mathrm{d}\left(y^{(n-1)}\right)^2 = 2f\left(y^{(n-2)}\right) \cdot \mathrm{d}y^{(n-2)}.$$

Проінтегрувавши, маємо

$$\left(y^{(n-1)}\right)^2 = 2\int f\left(y^{(n-2)}\right) \cdot \mathrm{d}y^{(n-2)} + C_1,$$

тобто

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int f\left(y^{(n-2)}\right) \cdot \mathrm{d}y^{(n-2)} + C_1},$$

або

$$y^{(n-1)} = \pm\psi_1\left(y^{(n-2)}, C_1\right).$$

Таким чином одержали повернулися до третього випадку.

2.3 Найпростіші випадки зниження порядку в диференціальних рівняннях вищих порядків

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку.

1. Рівняння не містить шуканої функції і її похідних до $(k-1)$-го порядку включно:

   $$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

   Зробивши заміну:

   $$y^{(k)} = z, \quad y^{(k+1)} = z', \quad \ldots, \quad y^{(n)} = z^{(n-k)},$$

   одержимо рівняння $(n-k)$-го порядку

   $$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

2. Рівняння не містить явно незалежної змінної

   $$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Будемо вважати, що y – нова незалежна змінна, а $y', \ldots, y^{(n)}$ – функції від y. Тоді

$$
\begin{aligned}
& y'_x = p(y), \\
& y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot y'_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot p(y) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p'_y \cdot p(y), \\
& y'''_{x^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot (p'_y p) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(p''_{y^2} \cdot p + \left(p'_y\right)^2\right) \cdot p,
\end{aligned}
$$

і так далі до $y^{(n)}_{x^n}$. Після підстановки одержимо

$$
F\left(y, p, p'_y \cdot p(y), \left(p''_{y^2} \cdot p + \left(p'_y\right)^2\right) \cdot p, \ldots, p^{(n-1)}\right) = 0,
$$

диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку.

3. Нехай функція F диференціального рівняння

$$
F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.
$$

є однорідної щодо аргументів $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Робимо заміну $y = e^{\int u \,\mathrm{d}x}$, де $u = u(x)$ – нова невідома функція. Одержимо

$$
\begin{aligned}
y' &= e^{\int u \,\mathrm{d}x} u, \\
y'' &= e^{\int u \,\mathrm{d}x} u^2 + e^{\int u \,\mathrm{d}x} u' = e^{\int u \,\mathrm{d}x}\left(u^2 + u'\right), \\
y''' &= e^{\int u \,\mathrm{d}x} u\left(u^2 + u'\right) + e^{\int u \,\mathrm{d}x}\left(2uu' + u''\right) = \\
&= e^{\int u \,\mathrm{d}x}\left(u^3 + 3uu' + u''\right),
\end{aligned}
$$

і так далі до $y^{(n)}$. Після підстановки одержимо

$$
F\left(x, e^{\int u \,\mathrm{d}x}, e^{\int u \,\mathrm{d}x} u, e^{\int u \,\mathrm{d}x}\left(u^2 + u'\right), e^{\int u \,\mathrm{d}x}\left(u^3 + 3uu' + u''\right), \ldots\right) = 0.
$$

Оскільки наше початкове (а отже і останнє) рівняння однорідне відносно $e^{\int u \,\mathrm{d}x}$, то цей член можна винести і на нього скоротити. Одержимо

$$
F\left(x, 1, u, u^2 + u', u^3 + 3uu' + u'', \ldots\right) = 0,
$$

диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку.

4. Нехай ліва частина рівняння
$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$
є похідної деякого диференціального виразу ступеня $(n-1)$, тобто
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right).$$
У цьому випадку легко обчислюється так званий перший інтеграл
$$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C.$$

5. Нехай диференціальне рівняння
$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$
розписано у вигляді диференціалів
$$F\left(x, y, \mathrm{d}y, \mathrm{d}^2 y, \ldots, \mathrm{d}^n y\right) = 0,$$
і F – функція однорідна по всім змінним. Зробимо заміну $x = e^t$, $y = u \cdot e^t$, де u, t – нові змінні. Тоді одержуємо
$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t,\\
&y'_x = \frac{y'_t}{x'_y} = \frac{u'_t e^t + u e^t}{e^t} = u'_t + u,\\
&y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot y'_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u'_t + u\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{u''_{t^2} + u'_t}{e^t},\\
&y'''_{x^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u''_{t^2} + u'_t}{e^t}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} =\\
&\qquad = \frac{\left(u'''_{t^3} + u''_{t^2}\right) e^t - \left(u''_{t^2} + u'_t\right) e^t}{e^{3t}} = \frac{u'''_{t^3} - u'_t}{e^{2t}},
\end{aligned}$$
і так далі до $y^{(n)}$. Підставивши, одержимо
$$\begin{aligned}
&\Phi\left(x, y, \mathrm{d}y, \mathrm{d}^2 y, \ldots, \mathrm{d}^n y\right) =\\
&\qquad = \Phi\left(e^t, u e^t, e^t\,\mathrm{d}t, (u'_t + u) e^t\,\mathrm{d}t, \left(u''_{t^2} + u'_t\right) e^t\,\mathrm{d}t, \ldots\right) = 0.
\end{aligned}$$
Скоротивши на e^t одержимо
$$\Phi\left(1, u, \mathrm{d}t, u'_t + u, u''_{t^2} + u'_t, \ldots\right) = 0.$$
Тобто повертаємося до другого випадку.

2.4 Вправи для самостійної роботи

Розглянемо приклади.

Приклад 2.4.1. Розв'язати рівняння: $y'' = x + \sin x$.

Розв'язок. Інтегруємо два рази

$$y' = \int (x + \sin x)\,\mathrm{d}x + C_1 = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1;$$
$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

Приклад 2.4.2. Розв'язати рівняння $(y'')^3 - 2y'' - x = 0$.

Розв'язок. Запишемо рівняння у параметричній формі

$$y'' = y, \quad x = t^3 - 2t.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x$, одержуємо

$$\mathrm{d}y' = t(3t^2 - 2)\,\mathrm{d}t,$$

або

$$\mathrm{d}y' = (3t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t.$$

Звідси понижуємо порядок рівняння на одиницю

$$y' = \frac{3t^3}{4} - t^2 + C_1, \quad x = t^3 - 2t.$$

Знов використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$, одержуємо

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{3t^3}{4} - t^2 + C_1\right) \cdot (3t^2 - 2)\,\mathrm{d}t,$$

або

$$\mathrm{d}y = \left(\frac{9t^5}{4} - 3t^4 - \frac{3t^3}{2} + (2 + 3C_1)t^2 - 2C_1\right) \mathrm{d}t.$$

Звідси загальний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 - 2t, \quad y = \frac{3t^6}{8} - \frac{3t^5}{5} - \frac{3t^4}{8} + \frac{(2 + 3C_1)t^3}{3} - 2C_1 t + C_2.$$

Приклад 2.4.3. Розв'язати рівняння: $(y'')^3 + xy'' = y'$.

Розв'язок. Запишемо рівняння у параметричній формі

$$y'' = t, \quad y''' = e^{-t}.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x$, одержуємо

$$\mathrm{d}t = e^{-t}\,\mathrm{d}x.$$

Звідси $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$ і $x = e^t + C_1$. Запишемо рівняння другого порядку

$$x = e^r + C_1, \quad y'' = t.$$

Запишемо рівняння у параметричній формі

$$y'' = t, \quad x = t^3 - 2t.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x$, одержуємо

$$\mathrm{d}y' = te^t\,\mathrm{d}t.$$

Звідси

$$y' = \int te^t\,\mathrm{d}t = e^t(t-1) + C_2.$$

Одержали диференціальне рівняння першого порядку

$$x = e^t + C_1, \quad y' = e^t(t-1) + C_2.$$

Використовуючи співвідношення $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$, запишемо

$$\mathrm{d}y = (e^t(t-1) + C_2)e^t\,\mathrm{d}t.$$

Звідси

$$y = \frac{e^{2t}(t-1)}{2} - \frac{e^{2t}}{4} + C_2e^t + C_3.$$

Остаточно загальний розв'язок має вигляд

$$x = e^t + C_1, \quad y = \frac{e^{2t}(2t-3)}{4} + C_2e^t + C_3.$$

Якщо вилучити параметр t, то одержимо загальний розв'язок

$$y = \frac{(x-C_1)^2}{4} \cdot (2\ln|x-C_1| - 3) + C_2(x-C_1) + C_3.$$

Приклад 2.4.4. Розв'язати рівняння: $3\sqrt[3]{y}y'' = 1$.

Розв'язок. Запишемо рівняння у вигляді

$$y'' = \frac{1}{3\sqrt[3]{y}}.$$

Помножимо обидві частини на $2y'\,\mathrm{d}x$. Одержимо

$$2y''y'\,\mathrm{d}x = \frac{2y'\,\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{y}},$$

або

$$\mathrm{d}(y')^2 = \frac{2\,\mathrm{d}y}{3\sqrt[3]{y}}.$$

Проінтегруємо і одержимо

$$(y')^2 = \sqrt[3]{y^2} + C_1.$$

Звідси $y' = \pm\sqrt{y^{2/3} + C_1}$. Нехай початкові умови такі, що $C_1 = \bar{C}_1^2 > 0$. Тобто рівняння має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2}.$$

Розділимо змінні

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2}} = \pm\int \mathrm{d}x + C_2.$$

Робимо заміну $\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2} = t$. Тоді

$$y = \left(t^2 - \bar{C}_1^2\right)^{3/2}, \quad \mathrm{d}y = 3\left(t^2 - \bar{C}_1^2\right)^{1/2} t\,\mathrm{d}t,$$

і інтеграл має вигляд

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^{2/3} + \bar{C}_1^2}} = 3\int \sqrt{t^2 - \bar{C}_1^2}\,\mathrm{d}t = 3.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 2.4.5.

$$y'' \cdot x \cdot \ln x = y';$$

Задача 2.4.6.

$$y''' = x + \cos x;$$

Задача 2.4.7. $2xy'' = y'$ при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_0' = 0$, $y_0'' = 0$;

Задача 2.4.8. $xy'' + y' = x + 1$ при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_0' = 0$, $y_0'' = 0$;

Задача 2.4.9. $\tan x \cdot y'' = y' + \frac{1}{\sin x} = 0$ при $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $y_0' = 1$, $y_0'' = 1$;

Задача 2.4.10.

$$(y'')^4 + y'' - x = 0;$$

Задача 2.4.11.

$$y'' + \ln y'' - x = 0;$$

Задача 2.4.12.

$$y'' - a \cdot (1 + (y')^2)^{3/2} = 0;$$

Задача 2.4.13.

$$y''' - (y'')^3;$$

Задача 2.4.14.

$$y''' - y'' = 0;$$

Задача 2.4.15.

$$y'' + 2y'' \cdot \ln y' - 1 = 0;$$

Задача 2.4.16.

$$(y''')^2 + (y'')^2 - 1 = 0;$$

Задача 2.4.17.

$$y'' \cdot y^3 - 1 = 0;$$

Задача 2.4.18.

$$y^3 \cdot y'' - y^4 + 0;$$

Задача 2.4.19.

$$4\sqrt{y} \cdot y'' = 1;$$

Задача 2.4.20.

$$3y'' = y^{-5/3};$$

Задача 2.4.21.

$$(y'')^2 + (y')^2 - (y')^4 = 0;$$

Приклад 2.4.22. Розв'язати рівняння: $(y'')^3 + x \cdot y'' = y'$.

Розв'язок. Позначимо $y' = z$, $y'' = z'$. Одержимо рівняння $(z')^3 + xz' = z$, тобто рівняння Клеро, що легко інтегрується введенням параметра.

Нехай $z' = p$. Тоді $z = xp + p^3$. Продиференцюємо це співвідношення:

$$\mathrm{d}z + x\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}x + 3p^2\,\mathrm{d}p.$$

Підставивши $\mathrm{d}z = p\,\mathrm{d}z$, отримаємо $(x + 3p^2)\,\mathrm{d}p = 0$. Це рівняння розділяється на два:

1. $x + 3p^2 = 0$. Звідси маємо $x = -3p^2$, $z = -2p^2$. Повертаємось до вихідних змінних $x = -3p^2$, $y' = -2p^3$. Використовуємо основне співвідношення $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$. Одержуємо

$$\mathrm{d}y = 12p^4\,\mathrm{d}p \implies y = \frac{12p^5}{5} + C_1.$$

Таким чином перша гілка дає розв'язок

$$x = -3p^2, \quad y = \frac{12p^5}{5} + C_1.$$

2. $\mathrm{d}p = 0$. Звідси маємо $z = C_1x + C_1^3$. Повертаємось до вихідних змінних $y' = C_1x + C_1^3$. Проінтегруємо і отримаємо другу гілку розв'язків
$$y = \frac{C_1x^2}{2} + C_1^3x + C_2.$$

Приклад 2.4.23. Розв'язати рівняння: $y^4 - y^3 \cdot y'' = 1$.

Розв'язок. Відсутній аргумент x, отже, його порядок знижується заміною:
$$y' = p, \quad y'' = p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$
Звідси одержуємо
$$y^4 - y^3 \cdot p \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 1.$$
Розділимо змінні:
$$\frac{y^4 - 1}{y^3} \cdot \mathrm{d}y = p \cdot \mathrm{d}p.$$
Проінтегруємо
$$\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} = \frac{p^2}{2} - \frac{C_1}{2}.$$
Звідси одержали
$$p^2 = y^2 + C_1 + y^{-2}.$$
Повертаємось до вихідних змінних
$$(y')^2 = y^2 + C_1 + y^{-2}.$$
Розв'яжемо рівняння відносно похідної
$$y' = \pm\sqrt{y^2 + C_1 + y^{-2}}.$$
Розділимо змінні
$$\pm\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 + C_1 + y^{-2}}} = \mathrm{d}x.$$
Візьмемо інтеграл
$$\pm\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 + C_1 + y^{-2}}} = \pm\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^4 + C_1y^2 + 1}} =$$
$$= \pm\int \frac{\mathrm{d}\left(y^2 + \frac{C_1}{2}\right)}{\sqrt{\left(y^2 + \frac{C_1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{C_1}{4}\right)}} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|y^2 + \frac{C_1}{2} + \sqrt{y^4 + C_1y^2 + 1}\right|.$$
Таким чином загальний розв'язок має вигляд:
$$x = \pm\frac{1}{2}\ln\left|y^2 + C_1/2 + \sqrt{y^4 + C_1y^2 + 1}\right|.$$

Приклад 2.4.24. Розв'язати рівняння: $y \cdot y'' = (y')^2$.

Розв'язок. Оскільки рівняння однорідне по змінним y, y', y'', то робимо заміну
$$y = e^{\int u\,\mathrm{d}x}, \quad y' = e^{\int u\,\mathrm{d}x}u, \quad y'' = e^{\int u\,\mathrm{d}x}(u^2 + u).$$
Рівняння буде мати вигляд
$$e^{\int u\,\mathrm{d}x} \cdot e^{\int u\,\mathrm{d}x}(u^2 + u) = \left(e^{\int u\,\mathrm{d}x}u\right)^2.$$

Скоротимо на $e^{\int u\,\mathrm{d}x}$. Маємо $u^2 + u' = u^2$, або $u' = 0$. Звідси $u' = C_1$ і одержимо загальний розв'язок
$$y = e^{\int C_1 x\,\mathrm{d}x} = e^{c_1 x^2 + \ln|c_2|} = c_2 e^{c_1 x^2}.$$

Приклад 2.4.25. Розв'язати рівняння: $y \cdot y'' - (y')^2 = y^2$.

Розв'язок. Розділимо рівняння на y^2:
$$\frac{y \cdot y'' - (y')^2}{y^2} = 1,$$
і перепишемо у вигляді:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{y}\right) = 1.$$
Проінтегрувавши, одержимо загальний розв'зок
$$\frac{y'}{y} = x + C_1 \implies \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1 x + \ln|C_2| \implies y = C_2 e^{x^2/2 + C_1 x}.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 2.4.26.
$$x \cdot y'' = y' \cdot \ln(y'/x);$$

Задача 2.4.27.
$$2y \cdot y'' - 3(y')^2 = 4y^2;$$

Задача 2.4.28.
$$2x \cdot y'' = y';$$

Задача 2.4.29.
$$x \cdot y'' + y' = x + 1;$$

Задача 2.4.30.
$$\tan x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0;$$

Задача 2.4.31.
$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' = 1;$$

Задача 2.4.32.
$$y'' \cdot \cot(2x) + 2y' = 0;$$

Задача 2.4.33.

$$x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y = 0;$$

Задача 2.4.34.

$$\tan x \cdot y'' = 2y';$$

Задача 2.4.35.

$$y \cdot y'' - (y')^2 - y^2 \cdot \ln y = 0;$$

Задача 2.4.36.

$$x^4 \cdot y'' + x^3 \cdot y' = 1;$$

Задача 2.4.37.

$$x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 - 2y \cdot y' = 0;$$

Задача 2.4.38.

$$x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 = y \cdot y' + \frac{x \cdot (y')^2}{\sqrt{1-x^2}};$$

Задача 2.4.39.

$$x^2 \cdot y''' - x \cdot (y'')^2 = 0;$$

Задача 2.4.40.

$$x^5 \cdot y'' + x^4 \cdot y' = 1.$$

3 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Рівняння вигляду

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = b(x)$$

називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Рівняння вигляду

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = 0$$

називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Якщо при $x \in [a, b]$, $a_0(x) \neq 0$ коефіцієнти $b(x)$, $a_i(x)$, $i = \overline{0, n}$ неперервні, то для рівняння

$$y^{(n)} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \cdot y^{(n-1)} - \ldots - \frac{a_n(x)}{a_0(x)} \cdot y + \frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

виконуються умови теореми існування та єдиності і існує єдиний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

3.1 Лінійні однорідні рівняння

3.1.1 Властивості лінійних однорідних рівнянь

Теорема 3.1. *Лінійність і однорідність зберігаються при довільному перетворенні незалежної змінної $x = \varphi(t)$.*

Доведення. Справді, після заміни $x = \varphi(t)$, одержимо

$$\begin{aligned}
y'_x &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \\
y''_{x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot y'_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \\
&= -\frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(\varphi'(t))^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},
\end{aligned}$$

і так далі до n-го порядку. Після підстановки і приведення подібних, знову отримуємо лінійне однорідне рівняння

$$A_0(t) \cdot \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + A_1(t) \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + A_n(t) \cdot y = 0.$$

□

Теорема 3.2. *Лінійність і однорідність зберігаються при лінійному перетворенні невідомої функції $y = \alpha(x) \cdot z$.*

Доведення. Справді, після заміни $y = \alpha(x) \cdot z$, одержимо

$$\begin{aligned}
y'_x &= \alpha'(x) \cdot z + \alpha(x) \cdot z', \\
y''_{x^2} &= \alpha''(x) \cdot z + 2\alpha'(x) \cdot z' + \alpha(x) \cdot z'',
\end{aligned}$$

і так далі до n-го порядку. Після підстановки знову отримаємо лінійне однорідне рівняння

$$\bar{A}_0(x) \cdot z^{(n)} + \bar{A}_1(x) \cdot z^{(n-1)} + \ldots + \bar{A}_n(x) \cdot z = 0.$$

□

3.1.2 Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь

Теорема 3.3. *Якщо $y = y_1(x)$ є розв'язком однорідного лінійного рівняння, то і $y = Cy_1(x)$, де C – довільна стала, теж буде розв'язком однорідного лінійного рівняння.*

Доведення. Справді, нехай $y = y_1(x)$ – розв'язок лінійного однорідного рівняння, тобто

$$a_0(x) \cdot y_1^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_1(x) \equiv 0.$$

Тоді і

$$a_0(x) \cdot (Cy_1)^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot (Cy_1)^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot (Cy_1)(x) =$$
$$= C \left(a_0(x) \cdot y_1^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_1(x) \right) \equiv 0,$$

оскільки вираз в дужках дорівнює нулю. □

Теорема 3.4. *Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння, то і $y = y_1(x) + y_2(x)$ теж буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.*

Доведення. Справді, нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язки лінійного рівняння, тобто

$$a_0(x) \cdot y_1^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_1(x) \equiv 0,$$
$$a_0(x) \cdot y_2^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_2(x) \equiv 0.$$

Тоді і

$$a_0(x) \cdot (y_1 + y_2)^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot (y_1 + y_2)^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot (y_1 + y_2)(x) =$$
$$= \left(a_0(x) \cdot y_1^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_1(x) \right) +$$
$$+ \left(a_0(x) \cdot y_2^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_2(x) \right) \equiv 0,$$

оскільки обидві дужки дорівнюють нулю. □

Теорема 3.5. *Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – розв'язки однорідного лінійного рівняння, то і $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, де C_i – довільні сталі, також буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.*

Доведення. Справді, нехай $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – розв'язки лінійного однорідного рівняння, тобто

$$a_0(x) \cdot y_i^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_i(x) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді і

$$a_0(x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}C_iy_i\right)^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}C_iy_i\right)^{(n-1)}(x)+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}C_iy_i\right)'(x)+a_n(x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}C_iy_i\right)(x)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}C_i\left(a_0(x)\cdot y_i^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot y_i^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot y_i(x)\right)\equiv 0,$$

оскільки кожна дужка дорівнює нулю. □

Теорема 3.6. *Якщо комплексна функція дійсного аргументу $y=u(x)+iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то окремо дійсна частина $u(x)$ і уявна $v(x)$ будуть також розв'язками цього рівняння.*

Доведення. Справді, нехай $y=u(x)+iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, тобто

$$a_0(x)\cdot(u)+iv)^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot(u+iv)^{(n-1)}(x)+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(x)\cdot(u+iv)'(x)+a_n(x)\cdot(u+iv)(x)\equiv 0.$$

Розкривши дужки і перегрупувавши члени, одержимо

$$\left(a_0(x)\cdot u^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot u^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot u(x)\right)+$$
$$+i\left(a_0(x)\cdot v^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot v^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot v(x)\right)\equiv 0.$$

Комплексний вираз дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли дорівнюють нулю дійсна і уявна частини, тобто

$$a_0(x)\cdot u^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot u^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot u(x)\equiv 0,$$
$$a_0(x)\cdot v^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot v^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot v(x)\equiv 0,$$

або функції $u(x)$, $v(x)$ є розв'язками рівняння, що і було потрібно довести. □

3.1.3 Лінійна залежність і незалежність розв'язків. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння вищого порядку

Визначення. Функції $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ називаються лінійно залежними на відрізку $[a,b]$ якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_0,\ldots,C_n$ такі, що при всіх $x\in[a,b]$:

$$C_0\cdot y_0(x)+C_1\cdot y_1(x)+\ldots+C_n\cdot y_n(x)=0.$$

Якщо ж тотожність справедлива лише коли $C_0 = C_1 = \ldots = C_n = 0$, то функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називаються лінійно незалежними.

Приклади:

1. Функції $1, x, x^2, \ldots, x^n$ – лінійно незалежні на будь-якому відрізку $[a, b]$, тому що вираз $C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n$ є многочленом ступеню n і має не більш, ніж n дійсних коренів.

2. Функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, де всі λ_i – дійсні різні числа – лінійно незалежні.

3. Функції $1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx$ – лінійно незалежні.

Теорема 3.7 (необхідна умова лінійної незалежності функцій)**.** *Якщо функції $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – лінійно залежні, то визначник Вронського $W[y_0, y_1, \ldots, y_n](x)$ тотожно дорівнює нулю при всіх $x \in [a, b]$:*

$$W[y_0, y_1, \ldots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_0(x) & y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_0'(x) & y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_0^{(n)}(x) & y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – лінійно залежні. Тоді існують не всі рівні нулю сталі $C_0, \ldots, C_n$ такі, що при $x \in [a, b]$ буде тотожно виконуватися

$$C_0 \cdot y_0(x) + C_1 \cdot y_1(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x) = 0.$$

Продиференціювавши n разів, одержимо

$$\begin{cases} C_0 \cdot y_0(x) + C_1 \cdot y_1(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x) = 0, \\ C_0 \cdot y_0'(x) + C_1 \cdot y_1'(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_0 \cdot y_0^{(n)}(x) + C_1 \cdot y_1^{(n)}(x) + \ldots + C_n \cdot y_n^{(n)}(x) = 0. \end{cases}$$

Для кожного фіксованого $x \in [a, b]$ одержимо лінійну однорідну систему алгебраїчних рівнянь, що має ненульовий розв'язок $C_0, \ldots, C_n$. А це можливо тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто $W[y_0, y_1, \ldots, y_n](x) = 0$ при всіх $x \in [a, b]$. □

Теорема 3.8 (достатня умова лінійної незалежності розв'язків)**.** *Якщо розв'язки лінійного однорідного рівняння $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – лінійно незалежні, то визначник Вронського $W[y_0, y_1, \ldots, y_n](x)$ не дорівнює нулю в жодній точці $x \in [a, b]$.*

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує $x_0 \in [a, b]$, при якому $W[y_0, y_1, \ldots, y_n](x_0) = 0$. Оскільки визначник дорівнює нулю, то існує ненульовий розв'язок $C_0^0, C_1^0, \ldots, C_n^0$ лінійної однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_0 \cdot y_0(x) + C_1 \cdot y_1(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x) = 0, \\ C_0 \cdot y_0'(x) + C_1 \cdot y_1'(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_0 \cdot y_0^{(n)}(x) + C_1 \cdot y_1^{(n)}(x) + \ldots + C_n \cdot y_n^{(n)}(x) = 0. \end{cases}$$

Розглянемо лінійну комбінацію

$$y(x) = C_0^0 y_0(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

з отриманими коефіцієнтами.

У силу третьої властивості ця комбінація буде розв'язком. У силу вибору сталих $C_0^0, C_1^0, \ldots, C_n^0$, розв'язок буде задовольняти умовам

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n)}(x_0) = 0.$$

Але цим же умовам, як неважко перевірити простою підстановкою, задовольняє і тотожний нуль, тобто $y \equiv 0$. І в силу теореми існування та єдиності ці два розв'язки співпадають, тобто

$$y(x) = C_0^0 y_0(x) + C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0$$

при $x \in [a, b]$, або система функцій $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ лінійно залежна, що суперечить припущенню. Таким чином $W[y_0, y_1, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$ у жодній точці $x_0 \in [a, b]$, що і було потрібно довести . □

На підставі попередніх двох теорем сформулюємо необхідні і достатні умови лінійної незалежності розв'язків лінійного однорідного рівняння.

Теорема 3.9. *Для того щоб розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю в жодній точці $x \in [a, b]$, тобто $W[y_0, y_1, \ldots, y_n](x) \neq 0$.*

Теорема 3.10. *Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння*

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n \cdot y = 0$$

є лінійна комбінація n лінійно незалежних розв'язків $y = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i(x)$.

Доведення. Оскільки $y_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ є розв'язками, то в силу третьої властивості їхня лінійна комбінація також буде розв'язком.

Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто вибором сталих $C_1, \ldots, C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Дійсно, оскільки система розв'язків лінійно незалежна, то визначник Вронського відмінний від нуля й алгебраїчна система неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1(x_0) + C_2 \cdot y_2(x_0) + \ldots + C_n \cdot y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 \cdot y_1'(x_0) + C_2 \cdot y_2'(x_0) + \ldots + C_n \cdot y_n(x_0) = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 \cdot y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 \cdot y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n \cdot y_n^{(n)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$. І лінійна комбінація $y = \sum_{i=1}^n C_i^0 \cdot y_i(x)$ є розв'язком, причому, як видно із системи алгебраїчних рівнянь, буде задовольняти довільно обраним умовам Коші. □

Зауважимо, що максимальне число лінійно незалежних розв'язків дорівнює порядку рівняння. Це випливає з попередньої теореми, тому що будь-який розв'язок виражається через лінійну комбінацію n лінійно незалежних розв'язків.

Визначення. Будь-які n лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку називаються фундаментальною системою розв'язків.

3.1.4 Формула Остроградського-Ліувіля

Оскільки максимальне число лінійно незалежних розв'язків дорівнює n, то система $y_1(x), \ldots, y_n(x), y(x)$ буде залежною і $W[y_1, \ldots, y_n, y] \equiv 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Розкладаючи визначник по елементах останнього стовпця, одержимо

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y' + (-1)^n \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y \equiv 0.$$

Порівнюючи з рівнянням

$$a_0(x) \cdot y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = 0$$

одержимо, що

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = -\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)}.$$

Але оскільки

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W[y_1, y_2, \ldots, y_n] =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y\_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 + 0 + \ldots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

то, підставивши в попередній вираз, одержимо

$$-\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)}.$$

Розділимо змінні

$$-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)}.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$\ln W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) - \ln W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = -\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,\mathrm{d}x$$

або

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \cdot \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Отримана формула називається формулою Остроградського-Ліувілля. Зокрема, якщо рівняння має вид

$$y^{(n)} + p_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) \cdot y = 0,$$

то формула запишеться у вигляді

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \cdot \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,\mathrm{d}x\right\}.$$

3.1.5 Формула Абеля

Розглянемо застосування формули Остроградського-Ліувіля до рівняння 2-го порядку

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0.$$

Нехай $y_1(x)$ – один з розв'язків. Тоді

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = C_2 \cdot \exp\left\{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Розкривши визначник, одержимо

$$y_1(x) \cdot y'(x) - y(x) \cdot y_1'(x) = C_2 \cdot \exp\left\{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Розділивши на $y_1^2(x)$, запишемо

$$\frac{y_1(x) \cdot y'(x) - y(x) \cdot y_1'(x)}{y_1^2(x)} = \frac{C_2}{y_1^2(x)} \cdot \exp\left\{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x\right\},$$

або
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{C_2}{y_1^2(x)} \cdot \exp\left\{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x\right\},$$
Проінтегрувавши, одержимо
$$\frac{y(x)}{y_1(x)} = C_2 \cdot \int \left(\frac{1}{y_1^2(x)} \cdot \exp\left\{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x\right\}\right)\mathrm{d}x + C_1,$$
Остаточно
$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_1(x) \cdot \int \left(\frac{1}{y_1^2(x)} \cdot \exp\left\{-\int p_1(x)\,\mathrm{d}x\right\}\right)\mathrm{d}x,$$
Отримана формула називається формулою Абеля. Вона дозволяє по одному відомому розв'язку знайти загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння другого порядку.

3.1.6 Вправи для самостійної роботи

Розв'язати лінійне однорядне диференціальне рівняння другого порядку, якщо відомий один розв'язок

Приклад 3.1.1. $(x^2+1) \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = 0$, $y_1(x) = x$.

Розв'язок. За формулою Абеля маємо
$$y_2(x) = x \cdot \int \left(\frac{1}{x}\exp\left\{\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}\right\}\right)\mathrm{d}x = x \cdot \int \left(\frac{1}{x}e^{\ln|x^2+1|}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= x \cdot \int \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\mathrm{d}x = x \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1.$$
Загальний розв'язок має вигляд
$$y(x) = C_1 \cdot x + C_2 \cdot (x^2 - 1).$$
Розв'язати рівняння:

Задача 3.1.2.
$$x^2 \cdot (x+1) \cdot y'' - 2y = 0, \quad y_1(x) = 1 + \frac{1}{x};$$

Задача 3.1.3.
$$x \cdot y'' + 2y' - x \cdot y = 0, \quad y_1(x) = \frac{e^x}{x};$$

Задача 3.1.4.

$$y'' - 2 \cdot (1 + \tan^2(x)) \cdot y = 0, \quad y_1(x) = \tan x;$$

Задача 3.1.5.

$$(e^x + 1) \cdot y'' - 2y' + e^x \cdot y = 0, \quad y_1(x) = e^x - 1;$$

Задача 3.1.6.

$$y'' - y' \cdot \tan x + 2y = 0, \quad y_1(x) = \sin x;$$

Задача 3.1.7.

$$y'' + 4x \cdot y' + (4x^2 + 2) \cdot y = 0, \quad y_1(x) = e^{ax^2}.$$

Знайти загальний розв'язок підібравши один частинний

Задача 3.1.8.

$$(2x + 1) \cdot y'' + 4x \cdot y' - 4y = 0;$$

Задача 3.1.9.

$$x \cdot y'' - (2x + 1) \cdot y' + (x + 1) \cdot y = 0;$$

Задача 3.1.10.

$$x \cdot (x - 1) \cdot y'' - x \cdot y' + y = 0.$$

3.2 Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

3.2.1 Загальна теорія

Розглянемо лінійні однорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Продиференціювавши, одержимо

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \quad \ldots \quad y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}.$$

Підставивши $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в диференціальне рівняння, отримаємо

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \ldots + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0.$$

Скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержимо характеристичне рівняння

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів. У залежності від їхнього вигляду будемо мати різні розв'язки.

1. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – дійсні і різні. Тоді функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ є розв'язками й оскільки всі λ_i різні, то $e^{\lambda_i x}$ – розв'язки лінійно незалежні, тобто $\left\{e^{\lambda_i x}\right\}_{i=1}^{n}$ фундаментальна система розв'язків. Загальним розв'язком буде лінійна комбінація $y = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{\lambda_i x}$.

2. Нехай маємо комплексно спряжені корені $\lambda = p + iq$, $\bar{\lambda} = p - iq$. Їм відповідають розв'язки $e^{(p+iq)x}$, $e^{(p-iq)x}$. Розкладаючи їх по формулі Ейлера, одержимо:

$$e^{(p+iq)x} = e^{px} \cdot e^{iqx} = e^{px} \cdot (\cos qx + i \sin qx) = u(x) + iv(x),$$
$$e^{(p-iq)x} = e^{px} \cdot e^{-iqx} = e^{px} \cdot (\cos qx - i \sin qx) = u(x) - iv(x).$$

   І, як випливає з властивості 4, функції $u(x)$ й $v(x)$ будуть окремими розв'язками. Таким чином, кореням $\lambda = p + iq$, $\bar{\lambda} = p - iq$ відповідають два лінійно незалежних розв'язки $u = e^{px} \cdot \cos qx$, $v = e^{px} \cdot \sin qx$. Загальним розв'язком, що відповідає цим двом кореням, буде $y = C_1 \cdot e^{px} \cdot \cos qx + C_2 \cdot e^{px} \cdot \sin x$.

3. Нехай λ – кратний корінь, кратності k, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$, $k \leq n$.

   (а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$. Тоді характеристичне рівняння вироджується в рівняння

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-k} \lambda^k = 0.$$

   Диференціальне рівняння, що відповідає цьому характеристичному, запишеться у вигляді

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-k} \cdot y^{(k)} = 0$$

   Неважко бачити, що частковими, лінійно незалежними розв'язками цього рівняння, будуть функції $1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}$. Загальним розв'язком, що відповідає кореню $\lambda = 0$ кратності k, буде лінійна комбінація цих функцій $y = C_1 + C_2 \cdot x + \ldots + C_k \cdot x^{k-1}$.

   (б) Нехай $\lambda = \nu \neq 0$ – корінь дійсний. Зробивши заміну $y = e^{\nu x} \cdot z$, на підставі властивості 2 лінійних рівнянь після підстановки знову одержимо лінійне однорідне диференціальне рівняння

$$z^{(k)} + b_1 \cdot z^{(k-1)} + \ldots + b_k z = 0.$$

   Причому, оскільки $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ а $x_i(x) = e^{\mu_i x}$, то показники λ_i, μ_i зв'язані співвідношенням $\lambda_i = \nu + \mu_i$. Звідси кореню $\lambda = \nu$

кратності k відповідає корінь $\mu = 0$ кратності k. Як випливає з попереднього пункту, кореню $\mu = 0$ кратності k відповідає загальний розв'язок вигляду $z = C_1 + C_2 \cdot x + \ldots + C_k \cdot x^{k-1}$.

З огляду на те, що $y = e^{\nu x} \cdot z$, одержимо, що кореню $\lambda = \nu$ кратності k відповідає розв'язок

$$y = \left(C_1 + C_2 \cdot x + \ldots + C_k \cdot x^{k-1}\right) \cdot e^{\nu x}.$$

(в) Нехай характеристичне рівняння має корені $\lambda = p + iq$, $\bar{\lambda} = p - iq$ кратності k. Проводячи аналогічні викладки одержимо, що їм відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$e^{px} \cdot \cos qx, \quad x \cdot e^{px} \cdot \cos qx, \quad \ldots, \quad x^{k-1} \cdot e^{px} \cdot \cos qx,$$

$$e^{px} \cdot \sin qx, \quad x \cdot e^{px} \cdot \sin qx, \quad \ldots, \quad x^{k-1} \cdot e^{px} \cdot \sin qx.$$

І загальним розв'язком, що відповідає цим кореням буде

$$y = C_1 e^{px} \cos qx + C_2 x e^{px} \cos qx + C_k x^{k-1} e^{px} \cos qx +$$
$$+ C_{k+1} e^{px} \sin qx + C_{k+2} x e^{px} \sin qx + \ldots + C_{2k} x^{k-1} e^{px} \sin qx.$$

3.2.2 Вправи для самостійної роботи

Приклад 3.2.1. Розв'язати рівняння $y'' + y' - 2y = 0$.

Розв'язок. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Тоді

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Підставивши в диференціальне рівняння, одержуємо

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0.$$

Скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Їм відповідають два лінійно незалежні розв'язки e^{-x}, e^{2x}. І загальним розв'язком диференціального рівняння буде

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{2x}.$$

Приклад 3.2.2. Розв'язати рівняння $y'' + y' + 2y = 0$.

Розв'язок. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Тоді

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Підставивши в диференціальне рівняння, одержуємо

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0.$$

Скоротимо на $e^{\lambda x}$:

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння будуть $\lambda_1 = -1 \pm i$. Їм відповідають два лінійно незалежні розв'язки

$$y_1(x) = e^{-x} \cdot \cos x, \quad y_2(x) = e^{-x} \cdot \sin x.$$

І загальним розв'язком рівняння буде

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x} \cdot \cos x + C_2 \cdot e^{-x} \cdot \sin x.$$

Приклад 3.2.3. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Розв'язок. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Тоді

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Підставляємо в диференціальне рівняння, одержуємо

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0.$$

Скоротимо на $e^{\lambda x}$:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння будуть $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Оскільки вони кратні їм відповідають два лінійно незалежні розв'язки

$$y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = x \cdot e^{-2x}.$$

І загальним розв'язком рівняння буде

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 3.2.4.

$$y'' - 5y' + 6y = 0;$$

Задача 3.2.5.

$$y'' - 9y = 0;$$

Задача 3.2.6.

$$y'' - y' = 0;$$

Задача 3.2.7.

$$y'' + 2y' + y = 0;$$

Задача 3.2.8.

$$2y'' + 5y' + 2y = 0;$$

Задача 3.2.9.

$$y'' - 4y = 0;$$

Задача 3.2.10.

$$y'' + 3y' = 0;$$

Задача 3.2.11.

$$y'' - y' - 2y = 0;$$

Задача 3.2.12.

$$y'' - 4y' + 2y = 0;$$

Задача 3.2.13.

$$y'' + 6y' + 13y = 0;$$

Задача 3.2.14.

$$y'' - 4y' + 15y = 0;$$

Задача 3.2.15.

$$y'' - 6y' + 34y = 0;$$

Задача 3.2.16.

$$y'' + 4y = 0;$$

Задача 3.2.17.

$$y'' + 2y' + 10y = 0;$$

Задача 3.2.18.

$$y'' + y = 0.$$

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють зазначеним початковим умовам при $x = 0$:

Задача 3.2.19.

$$y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y = 5, \quad y' = 8;$$

Задача 3.2.20.

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y = 1, \quad y' = -1;$$

Задача 3.2.21.

$$y'' + 4y = 0, \quad y = 0, \quad y' = 2;$$

Задача 3.2.22.

$$y'' + 2y' = 0, \quad y = 1, \quad y' = 0;$$

Задача 3.2.23.

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y = 3, \quad y' = -1;$$

Задача 3.2.24.

$$y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y = 0, \quad y' = 15;$$

Задача 3.2.25.

$$y'' + 3y = 0, \quad y = 0, \quad y' = 1;$$

Задача 3.2.26.

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y = 4, \quad y' = 2;$$

Розв'язати рівняння:

Задача 3.2.27.

$$y''' - 13y'' + 12y' = 0;$$

Задача 3.2.28.

$$y'' - y' = 0;$$

Задача 3.2.29.

$$y^{(4)} - 2y'' = 0;$$

Задача 3.2.30.

$$y''' - 3y'' + 3y - y = 0;$$

Задача 3.2.31.

$$y^{(4)} + 4y = 0;$$

Задача 3.2.32.

$$y''' + y = 0;$$

Задача 3.2.33.

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0;$$

Задача 3.2.34.

$$y^{(4)} + y' = 0;$$

Задача 3.2.35.

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0;$$

Задача 3.2.36.

$$y^{(4)} - a^4 y = 0;$$

Задача 3.2.37.

$$y^{(4)} - 6y'' + 9y = 0;$$

Задача 3.2.38.

$$y^{(4)} + a^2 y'' = 0;$$

Задача 3.2.39.

$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0;$$

Задача 3.2.40.

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0;$$

Задача 3.2.41.

$$y''' + 9y' = 0;$$

Задача 3.2.42.

$$y''' - 3y' - 2y = 0;$$

Задача 3.2.43.

$$y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0.$$

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

Задача 3.2.44.

$$y''' + y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1;$$

Задача 3.2.45.

$$y^{(5)} - y' = 0, \quad y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'''(0) = 1, \quad y^{(4)} = 2;$$

Задача 3.2.46.

$$y''' + 2y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = y''(0) = 1;$$

Задача 3.2.47.

$$y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1;$$

Задача 3.2.48.

$$y''' + y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1.$$

3.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Загальний вигляд лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь наступний

$$a_0(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y(x) = b(x).$$

3.3.1 Властивості розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

Властивість 1. Якщо $y_0(x)$ – розв'язок лінійного однорідного рівняння, $y_1(x)$ – розв'язок неоднорідного рівняння, то $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$ буде розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Доведення. Дійсно, нехай $y_0(x)$ і $y_1(x)$ – розв'язки відповідно однорідного і неоднорідного рівнянь, тобто

$$a_0(x) \cdot y_0^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_0^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_0(x) = 0,$$
$$a_0(x) \cdot y_1^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_1(x) = b(x).$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
a_0(x)(y_0+y_1)^{(n)}(x) + a_1(x)(y_0+y_1)^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)(y_0+y_1)(x) = \\
= \Big(a_0(x)\cdot y_0^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y_0^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\cdot y_0(x)\Big) + \\
+ \Big(a_0(x)\cdot y_1^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\cdot y_1(x)\Big) = \\
= 0 + b(x) = b(x),
\end{aligned}
$$

тобто $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$ – розв'язок неоднорідного диференціального рівняння. □

Властивість 2 (Принцип суперпозиції)**.** Якщо $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$
a_0(x)\cdot y^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\cdot y(x) = b_i(x), \quad i = \overline{1,n}
$$

то $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i(x)$ з довільними сталими C_i буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$
a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i b_i(x)
$$

Доведення. Дійсно, нехай $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – розв'язки відповідних неоднорідних рівнянь, тобто

$$
a_0(x)\cdot y_i^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\cdot y_i(x) = b_i(x), \quad i = \overline{1,n}
$$

Склавши лінійну комбінацію з рівнянь і їхніх правих частин з коефіцієнтами C_i одержимо

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \Big(a_0(x)\cdot y_i^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\cdot y_i(x)\Big) = \\
= \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot b_i(x),
\end{aligned}
$$

або, перегрупувавши, запишемо

$$
\begin{aligned}
a_0(x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\cdot y_i^{(n)}(x)\right) + a_1(x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\cdot y_i^{(n-1)}(x)\right) + \ldots \\
\ldots + a_n(x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\cdot y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i\cdot b_i(x),
\end{aligned}
$$

що і було потрібно довести. □

Властивість 3. Якщо комплексна функція $y(x) = u(x) + iv(x)$ з дійсними елементами є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння з комплексною правою частиною $b(x) = f(x) + ip(x)$, то дійсна частина $u(x)$ є розв'язком рівняння з правою частиною $f(x)$, а уявна $v(x)$ є розв'язком рівняння з правою частиною $p(x)$.

Доведення. Дійсно, як випливає з умови,

$$a_0(x) \cdot (u + iv)^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot (u + iv)^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot (u + iv)(x) = \\ = f(x) + ip(x).$$

Розкривши дужки, одержимо

$$\big(a_0(x) \cdot u^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot u(x)\big) + \\ + i\,\big(a_0(x) \cdot v^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot v^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot v(x)\big) = \\ = f(x) + ip(x).$$

А комплексні вирази рівні між собою тоді і тільки тоді, коли дорівнюють окремо дійсні та уявні частини, тобто

$$a_0(x) \cdot u^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot u(x) = f(x), \\ a_0(x) \cdot v^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot v^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot v(x) = p(x),$$

що і було потрібно довести. □

Теорема 3.11. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається з загального розв'язку лінійного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.*

Доведення. Нехай $y_{\text{homo}}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i(x)$ – загальний розв'язок однорідного[1] рівняння, а $y_{\text{hetero}}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного[2] рівняння.

Тоді, як випливає з властивості 1, $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot y_i(x) + y_{\text{hetero}}(x)$, буде розв'язком неоднорідного рівняння. Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто вибором коефіцієнтів C_i можна розв'язати довільну задачу Коші

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

[1] Homogeneous equation* – однорідне рівняння.
[2] Heterogeneous equation* – неоднорідне рівняння.

Дійсно, оскільки y_{homo} загальний розв'язок однорідного рівняння, то y_i, $i = \overline{1,n}$ лінійно незалежні, тому визначник Вронського $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$. Звідси, неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1(x_0) + C_2 \cdot y_2(x_0) + \ldots + C_n \cdot y_n(x_0) = y_0 - y_{\text{hetero}}(x_0), \\ C_1 \cdot y_1'(x_0) + C_2 \cdot y_2'(x_0) + \ldots + C_n \cdot y_n'(x_0) = y_0' - y_{\text{hetero}}'(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 \cdot y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 \cdot y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n \cdot y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0 - y_{\text{hetero}}^{(n-1)}(x_0), \end{cases}$$

має єдиний розв'язок для довільних наперед обраних $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$. Нехай розв'язком системи буде $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$. Тоді, як випливає з вигляду системи, функція $y(x) = \sum_{i=1}^n C_i^0 \cdot y_i(x) + y_{\text{hetero}}$ є розв'язком поставленої задачі Коші. $\square$

Як випливає з теореми для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння треба шукати загальний розв'язок однорідного рівняння, тобто будь-які n лінійно незалежні розв'язки і якийсь частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Розглянемо три методи побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

3.3.2 Метод варіації довільної сталої побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Метод варіації довільної сталої полягає в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але сталі C_i, $i = \overline{1,n}$ вважаються невідомими функціями. Нехай загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$a_0(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y(x) = 0.$$

записано у вигляді $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x)$.

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$a_0(x) \cdot y^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y(x) = b(x).$$

шукаємо у вигляді $y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) + \ldots + C_n(x) \cdot y_n(x)$, де $C_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – невідомі функції. Оскільки підбором n функцій необхідно задовольнити одному рівнянню, тобто одній умові, то $n-1$ умову можна накласти довільно. Розглянемо першу похідну від записаного розв'язку

$$y'(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) \cdot y_i'(x) + \sum_{i=1}^n C_i'(x) \cdot y_i(x).$$

і зажадаємо, щоб $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i(x) = 0$. Розглянемо другу похідну

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i'(x).$$

і зажадаємо, щоб $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i'(x) = 0$. Продовжимо процес взяття похідних до $(n-1)$-ої

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i^{(n-2)}(x).$$

і зажадаємо, щоб $\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i^{(n-2)}(x)$. На цьому $(n-1)$ умова вичерпалася. І для n-ої похідної справедливо

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x).$$

Підставимо взяту функцію та її похідні в неоднорідне диференціальне рівняння

$$a_0(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i^{(n)}(x) \right) + a_0(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x) \right) +$$
$$+ a_1(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x) \right) + \ldots + a_n(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i(x) \right) = b(x).$$

Оскільки $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \cdot y_i(x)$ – розв'язок однорідного диференціального рівняння, то після скорочення одержимо n-у умову

$$\left(\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x) \right) = \frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Додаючи перші $(n-1)$ умови, одержимо систему

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) + \ldots + C_n'(x) \cdot y_n(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) + \ldots + C_n'(x) \cdot y_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x) \cdot y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x) \cdot y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x) \cdot y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) \cdot y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{b(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Оскільки визначником системи є визначник Вронського і він відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок

$$C_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & y_n'(x) \\ 0 & y_2'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ \frac{b(x)}{a_0(x)} & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]} \,\mathrm{d}x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_n(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & 0 \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]} \,\mathrm{d}x.$$

І загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння запишеться у вигляді

$$y(x) = \bar{C}_1 \cdot y_1(x) + \bar{C}_2 \cdot y_2(x) + \ldots + \bar{C}_n \cdot y_n(x) + y_{\text{hetero}}(x),$$

де $\bar{C}_i$ – довільні сталі, а

$$y_{\text{hetero}}(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) + \ldots + C_n(x) \cdot y_n(x).$$

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x) \cdot y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_2(x) \cdot y(x) = b(x),$$

і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{homo}}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x),$$

то частинний розв'язок неоднорідного має вигляд

$$y_{\text{hetero}}(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x).$$

І для знаходження функцій $C_1(x), C_2(x)$ маємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2'(x) = \dfrac{b(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \frac{b(x)}{a_0(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} \, \mathrm{d}x, \quad C_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} \, \mathrm{d}x$$

І одержуємо $y_{\text{hetero}}(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x)$ з обчисленими функціями $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

3.3.3 Метод Коші

Нехай $y(x) = K(x, s)$ – розв'язок однорідного диференціального рівняння, що задовольняє умовам

$$K(s, s) = K_x'(s, s) = \ldots = K_{x^{n-2}}^{(n-2)}(s, s) = 0, \quad K_{x^{n-1}}^{(n-1)}(s, s) = 1.$$

Тоді функція

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)} \, \mathrm{d}s$$

буде розв'язком неоднорідного рівняння, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Дійсно, розглянемо похідні від функції $y(x)$:

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} K_x'(x, s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)} \, \mathrm{d}s + K(x, x) \cdot \frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

І, оскільки $K(x, x) = 0$, то

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} K_x'(x, s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)} \, \mathrm{d}s.$$

Аналогічно

$$y''(x) = \int_{x_0}^{x} K_{x^2}''(x, s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)} \, \mathrm{d}s + K_x'(x, x) \cdot \frac{b(x)}{a_0(x)} = \int_{x_0}^{x} K_{x^2}''(x, s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)} \, \mathrm{d}s,$$

і так далі до

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} K_{x^{n-1}}^{(n-1)}(x, s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)} \, \mathrm{d}s + K_{x^{n-2}}^{(n-2)}(x, x) \cdot \frac{b(x)}{a_0(x)} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} K_{x^{n-1}}^{(n-1)}(x,s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)}\,\mathrm{d}s,$$

$$y^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} K_{x^n}^{(n)}(x,s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)}\,\mathrm{d}s + K_{x^{n-1}}^{(n-1)}(x,x) \cdot \frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

І, оскільки $K_{x^{n-1}}^{(n-1)}(x,x) = 1$, то

$$y^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} K_{x^n}^{(n)}(x,s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)}\,\mathrm{d}s + \frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Підставивши функцію $y(x)$ і її похідні у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$a_0(x) \cdot \left(\int_{x_0}^{x} K_{x^n}^{(n)}(x,s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)}\,\mathrm{d}s + \frac{b(x)}{a_0(x)} \right) +$$
$$+ a_1(x) \cdot \left(\int_{x_0}^{x} K_{x^{n-1}}^{(n-1)}(x,s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)}\,\mathrm{d}s \right) + \ldots + a_n(x) \int_{x_0}^{x} K'_x(x,s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)}\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_{x_0}^{x} \left(a_0(x) \cdot K_{x^n}^{(n)}(x,s) + a_1(x) \cdot K_{x^{n-1}}^{(n-1)}(x,s) + \ldots + a_n(x) \cdot K(x,s) \right).$$

Оскільки $K(x,s)$ – є розв'язком лінійного однорідного рівняння і, отже,

$$a_0(x) \cdot K_{x^n}^{(n)}(x,s) + a_1(x) \cdot K_{x^{n-1}}^{(n-1)}(x,s) + \ldots + a_n(x) \cdot K(x,s) = 0.$$

У такий спосіб показано, що $y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,s) \cdot \frac{b(s)}{a_0(s)}\,\mathrm{d}s$ – є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.

Підставляючи $x = x_0$ в значення $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ одержимо, що

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Для знаходження функції $K(x,s)$ (інтегрального ядра) можна використати такий спосіб. Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{homo}}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \ldots + C_n \cdot y_n(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком однорідного рівняння, то його слід шукати у вигляді

$$K(x,s) = C_1(s) \cdot y_1(x) + C_2(s) \cdot y_2(x) + \ldots + C_n(s) \cdot y_n(x).$$

Відповідні початкові умови мають вигляд

$$K(s,s) = 0 \Rightarrow C_1(s) \cdot y_1(s) + C_2(s) \cdot y_2(s) + \ldots + C_n(s) \cdot y_n(s) = 0,$$
$$K'_x(s,s) = 0 \Rightarrow C_1(s) \cdot y'_1(s) + C_2(s) \cdot y'_2(s) + \ldots + C_n(s) \cdot y'_n(s) = 0,$$

і так далі до

$$K^{(n-2)}_{x^{n-2}}(s,s) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1(s) \cdot y_1^{(n-2)}(s) + C_2(s) \cdot y_2^{(n-2)}(s) + \ldots + C_n(s) \cdot y_n^{(n-2)}(s) = 0,$$

і

$$K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(s,s) = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1(s) \cdot y_1^{(n-1)}(s) + C_2(s) \cdot y_2^{(n-1)}(s) + \ldots + C_n(s) \cdot y_n^{(n-1)}(s) = 0.$$

Звідси

$$C_1(s) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(s) & \cdots & y_n(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y_2^{(n-2)}(s) & \cdots & y_n^{(n-2)}(s) \\ 1 & y_2^{(n-1)}(s) & \cdots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n](s)}\, \mathrm{d}s,$$

$$C_2(s) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & 0 & \cdots & y_n(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_2^{(n-2)} & 0 & \cdots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_2^{(n-1)}(s) & 1 & \cdots & y_n^{(n-1)}(s) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n](s)}\, \mathrm{d}s,$$

і так далі до

$$C_n(s) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \cdots & 0 \\ y_1^{(n-1)}(s) & y_2^{(n-1)}(s) & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n](s)}\, \mathrm{d}s.$$

І ядро $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s) = C_1(s) \cdot y_1(x) + C_2(s) \cdot y_2(x) + \ldots + C_n(s) \cdot y_n(x)$$

з одержаними функціями $C_1(s), C_2(s), \ldots, C_n(s)$.

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x) \cdot y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_2(x) \cdot y(x) = b(x),$$

то функція має вигляд

$$K(x, s) = C_1(s) \cdot y_1(x) + C_2(s) \cdot y_2(x),$$

де

$$C_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 y_2(s) \\ 1 y_2'(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s) y_2(s) \\ y_1'(s) y_2'(s) \end{vmatrix}}, \quad C_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) 0 \\ y_1'(s) 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s) y_2(s) \\ y_1'(s) y_2'(s) \end{vmatrix}}.$$

Звідси

$$K(x, s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 y_2(s) \\ 1 y_2'(s) \end{vmatrix} y_1(x) + \begin{vmatrix} y_1(s) 0 \\ y_1'(s) 1 \end{vmatrix} y_2(x)}{W[y_1, y_2](s)} = \frac{y_1(s) \cdot y_2(x) - y_1(x) \cdot y_2(s)}{W[y_1, y_2](s)}$$

3.3.4 Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо лінійне диференціальне рівняння є рівнянням з сталими коефіцієнтами, а функція $b(x)$ спеціального виду, то частинний розв'язок можна знайти за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

1. Нехай $b(x)$ має вид многочлена, тобто

   $$b(x) = A_0 \cdot x^s + A_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + A_{s-1} \cdot x + A_s.$$

   (a) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda \neq 0$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо вигляді:

   $$y_{\text{part}} = B_0 \cdot x^s + B_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + B_{s-1} + B_s,$$

   де $B_0, \ldots, B_s$ – невідомі сталі. Тоді

   $$\begin{aligned} y'_{\text{part}} &= s \cdot B_0 \cdot x^{s-1} + (s-1) \cdot B_1 \cdot x^{s-2} + \ldots + 1 \cdot B_{s-1}, \\ y''_{\text{part}} &= s \cdot (s-1) \cdot B_0 \cdot x^{s-2} + (s-1) \cdot (s-2) \cdot B_1 \cdot x^{s-3} + \ldots \\ &\quad \ldots + 2 \cdot 1 \cdot B_{s-2}, \end{aligned}$$

і так далі.

Підставляючи у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$
\begin{aligned}
&a_0\,(s!B_s)+\ldots\\
&+a_{n-2}\left(s(s-1)B_0x^{s-2}+(s-1)(s-2)B_1x^{s-3}+\ldots+2B_{s-1}\right)+\\
&\quad+a_{n-1}\left(sB_0x^{s-1}+(s-1)B_1x^{s-2}+\ldots+B_{s-1}\right)+\\
&\qquad+a_n\left(B_0x^s+B_1x^{s-1}+\ldots+B_{s-1}+B_s\right)=\\
&\qquad\qquad=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\ldots+A_{s-1}x+A_s.
\end{aligned}
$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x запишемо:

$$
\begin{array}{r|l}
x^s & a_n\cdot B_0=A_0\\
x^{s-1} & a_n\cdot B_1+s\cdot a_{n-1}\cdot B_0=A_1\\
x^{s-2} & a_n\cdot B_2+(s-1)\cdot a_{n-1}\cdot B_1+s\cdot(s-1)\cdot a_{n-2}\cdot B_0=A_2
\end{array}
$$

і так далі.

Оскільки характеристичне рівняння не має нульового кореня, то $a_n\neq 0$. Звідси одержимо $B_0=\frac{A_0}{a_n}$, $B_1=\frac{A_1-s\cdot a_{n-1}\cdot B_0}{a_n}$, і так далі.

(б) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності r. Тоді диференціальне рівняння має вигляд

$$a_0\cdot y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-r}\cdot y^{(r)}=A_0\cdot x^s+A_1\cdot x^{s-1}+\ldots+A_s.$$

Зробивши заміну $y^{(r)}=z$ одержимо диференціальне рівняння

$$a_0\cdot z^{(n-r)}+a_1\cdot z^{(n-r-1)}+\ldots+a_{n-r}\cdot z=A_0\cdot x^s+A_1\cdot x^{s-1}+\ldots+A_s,$$

характеристичне рівняння якого вже не має нульового кореня, тобто повернемося до попереднього випадку. Звідси частинний розв'язок шукається у вигляді

$$z_{\text{part}}=\bar{B}_0\cdot x^s+\bar{B}_1\cdot x^{s-1}+\ldots+\bar{B}_s.$$

Проінтегрувавши його r-разів, одержимо, що частиний розв'язок вихідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{part}}=\left(B_0\cdot x^s+B_1\cdot x^{s-1}+\ldots+B_s\right)\cdot x^r.$$

2. Нехай $b(x)$ має вигляд $b(x) = e^{px} \cdot (A_0 \cdot x^s + A_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + A_s)$.

   (а) Розглянемо випадок, коли p не є коренем характеристичного рівняння. Зробимо заміну

   $$\begin{aligned} y &= e^{px} \cdot z, \\ y' &= p \cdot e^{px} \cdot z + e^{px} \cdot z = e^{px} \cdot (pz + z'), \\ y'' &= p \cdot e^{px} \cdot (pz + z') + e^{px} \cdot (pz' + z'') = e^{px} \cdot (p^2 z + 2pz' + z''), \end{aligned}$$

   і так далі до

   $$y^{(n)} = e^{px} \cdot \left(p^n \cdot z + n \cdot p^{n-1} \cdot z' + \ldots + z^{(n)}\right).$$

   Підставивши отримані вирази у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

   $$\begin{aligned} e^{px} \cdot \left(B_0 \cdot z^{(n)} + B_1 \cdot z^{(n-1)} + \ldots B_n \cdot z\right) &= \\ = e^{pz} \cdot \left(A_0 \cdot x^s + A_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + A_s\right). \end{aligned}$$

   де B_i – сталі коефіцієнти, що виражаються через a_i і p. Скоротивши на e^{px}, одержимо рівняння

   $$B_0 \cdot z^{(n)} + B_1 \cdot z^{(n-1)} + \ldots B_n \cdot z = A_0 \cdot x^s + A_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + A_s.$$

   Причому, оскільки p не є коренем характеристичного рівняння, то після заміни $y = e^{px} \cdot z$, отримане диференціальне рівняння не буде мати коренем характеристичного рівняння $\mu = 0$. Таким чином, повернулися до випадку 1.а). Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

   $$z_{\text{part}} = B_0 \cdot x^s + B_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + B_{s-1} + B_s,$$

   А частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння у вигляді:

   $$y_{\text{part}} = e^{px} \cdot \left(B_0 \cdot x^s + B_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + B_{s-1} + B_s\right),$$

   (б) Розглянемо випадок, коли p – корінь характеристичного рівняння кратності r. Це значить, що після, заміни $y = e^{px} \cdot z$ і скорочення на e^{px}, вийде диференціальне рівняння, що має коренем характеристичного рівняння, число $\mu = 0$ кратності r, тобто

   $$B_0 \cdot z^{(n)} + B_1 \cdot z^{(n-1)} + \ldots B_{n-r} \cdot z^{(r)} = A_0 \cdot x^s + A_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + A_s.$$

Як випливає з пункту 1.б) частинний розв'язок шукається у вигляді

$$z_{\text{part}} = \big(B_0 \cdot x^s + B_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + B_s\big) \cdot x^r,$$

а частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння у вигляді

$$y_{\text{part}} = e^{px} \cdot \big(B_0 \cdot x^s + B_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + B_s\big) \cdot x^r,$$

3. Нехай $b(x)$ має вигляд:

$$b(x) = e^{px} \cdot \left(P_s(x) \cdot \cos(qx) + Q_\ell(x) \cdot \sin(qx)\right),$$

де $P_s(x)$, $Q_\ell(x)$ – многочлени степеня s і ℓ, відповідно, і, наприклад, $\ell \leq s$. Використовуючи формулу Ейлера, перетворимо вираз до вигляду:

$$b(x) = e^{(p+iq)\cdot x} \cdot R_s(x) + e^{(p-iq)\cdot x} \cdot T_s(x),$$

де $R_s(x)$, $T_s(x)$ – многочлени степеня не вище, ніж s. Використовуючи властивості 2, 3 розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь, а також випадки 2.а), 2.б) знаходження частинного розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь, одержимо, що частинний розв'язок шукається у виглядах:

(a)

$$y_{\text{part}} = e^{px} \cdot \Big(\big(A_0 \cdot x^s + A_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + A_s\big) \cdot \cos(qx) + \\ + \big(B_0 \cdot x^s + B_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + B_s\big) \cdot \sin(qx)\Big),$$

якщо $p \pm iq$ не є коренем характеристичного рівняння;

(б)

$$y_{\text{part}} = e^{px} \cdot \Big(\big(A_0 \cdot x^s + A_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + A_s\big) \cdot \cos(qx) + \\ + \big(B_0 \cdot x^s + B_1 \cdot x^{s-1} + \ldots + B_s\big) \cdot \sin(qx)\Big) \cdot x^r,$$

якщо $p \pm iq$ є коренем характеристичного рівняння кратності r.

3.3.5 Вправи для самостійної роботи

Приклад 3.3.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Розв'язок. Загальний розв'язок складається з суми загального розв'язку однорідного та частинного розв'язку неоднорідного рівнянь.

Розглянемо однорідне рівняння

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. І загальний розв'язок однорідного має вигляд $y_{\text{homo}}(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо методом варіації довільної сталої у вигляді $y_{\text{part}}(x) = C_1(x) \cdot e^x + C_2(x) \cdot x \cdot e^x$. Для знаходження функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$ отримаємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot e^x + C_2'(x) \cdot x \cdot e^x = 0, \\ C_1'(x) \cdot e^x + C_2'(x) \cdot (x \cdot e^x + e^x) = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \cdot e^x \\ \frac{e^x}{x} & x \cdot e^x + e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & x \cdot e^x + e^x \end{vmatrix}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \,\mathrm{d}x = x + \bar{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & x \cdot e^x + e^x \end{vmatrix}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{2x}}{x \cdot e^{2x}} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + \bar{C}_2.$$

Поклавши (для зручності) $\bar{C}_1 = 0$, $\bar{C}_2 = 0$, одержимо

$$y_{\text{part}}(x) = x \cdot e^x + \ln|x| \cdot x \cdot e^x.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{hetero}}(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x + \ln|x| \cdot x \cdot e^x.$$

Приклад 3.3.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Розв'язок. Загальний розв'язок складається з суми загального розв'язку однорідного та частинного розв'язку неоднорідного. Розглянемо однорідне рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. І загальний розв'язок однорідного має вигляд $y_{\text{homo}}(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо методом Коші. Враховуючи вигляд загального розв'язку однорядного рівняння функцію $K(x, s)$ шукаємо у вигляді

$$K(x, s) = C_1(s) \cdot e^{-x} + C_2(s) \cdot e^{-2x}.$$

Початкові умови дають наступне

$$\begin{aligned} K(s, s) = 0 &\implies C_1(s) \cdot e^{-x} + C_2(s) \cdot e^{-2s} = 0, \\ K'_x(s, s) = 1 &\implies C_1(s) \cdot e^{-x} - 2C_2(s) \cdot e^{-2s} = 1, \end{aligned}$$

Звідси

$$C_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-s} & 0 \\ -e^{-s} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-s} & e^{-2s} \\ -e^{-s} & -2e^{-2s} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-s}}{-e^{-3s}} = -e^{2s}.$$

Таким чином $K(x, s) = e^{s-x} - e^{2(s-x)}$. І частинний розв'язок, що задовольняє нульовим початковим умовам, має вигляд

$$y_{\text{part}}(x) = \int \frac{e^{s-x} - e^{2(s-x)}}{e^s + 1}\,\mathrm{d}s = e^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{e^s}{e^s + 1}\,\mathrm{d}s - e^{-2x} \frac{e^{2s}}{e^s + 1}\,\mathrm{d}s =$$

$$= e^{-x} \cdot \ln|e^s + 1|\big|_{s=x_0}^{s=x} - e^{-2x} \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{e^s + 1 - 1}{e^s + 1}\,\mathrm{d}(e^s) =$$

$$= e^{-x} \cdot (\ln|e^x + 1| - \ln|e^{x_0} - 1|) +$$
$$+ e^{-2x} \cdot (e^x - e^{x_0} - \ln|e^x + 1| + \ln|e^{x_0} + 1|)\,.$$

Враховуючи, що початкові дані не задані, остаточно отримаємо

$$y_{\text{hetero}}(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-2x} + e^{-x} \cdot \ln|e^x + 1| + e^{-2x} \cdot \ln|e^x + 1|.$$

Розв'язати лінійні неоднорідні рівняння

Задача 3.3.3.

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x};$$

Задача 3.3.4.

$$y'' + 4y = 2\tan(x);$$

Задача 3.3.5.

$$y'' + 2y' + y = 3 \cdot e^{-x\cdot\sqrt{x+1}};$$

Задача 3.3.6.

$$y'' + y = 2\sec^3(x);$$

Задача 3.3.7.

$$y'' - y = \frac{x^2 - 2}{x^3}.$$

Якщо рівняння зі сталими коефіцієнтами, а функція $b(x)$ спеціального вигляду, то зручніше використовувати метод невизначених коефіцієнтів.

Приклад 3.3.8. Розв'язати лінійне неоднорідне рівняння

$$y'' + 2y' + y = x^2 + 1.$$

Розв'язок. Спочатку розв'язуємо однорідне рівняння

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$. І загальним розв'язком однорідного рівняння буде $y_{\text{homo}}(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x}$. Оскільки справа стоїть многочлени другого ступеня і характеристичне рівняння не містить нульових коренів, то частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{part}}(x) = ax^2 + bx + c.$$

Звідси

$$y'_{\text{part}}(x) = 2ax + b.$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння

$$2a + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$\begin{array}{c|l} x^2 & a = 1 \\ x & 4a + b = 0 \\ 1 & a + 2b + c = 1 \end{array}$$

Звідси $a = 1$, $b = -4$, $c = 7$.

Таким чином загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{hetero}}(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + x^2 - 4x + 7.$$

Приклад 3.3.9. Розв'язати лінійне неоднорідне рівняння

$$y''' + y'' = x + 1.$$

Розв'язок. Розв'язуємо однорідне рівняння

$$y''' + y'' = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. І загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{\text{homo}}(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot e^{-x}.$$

Оскільки справа стоїть многочлен другого порядку, а характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності два, то частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{part}}(x) = x^2 \cdot (ax + b),$$

або

$$y_{\text{part}}(x) = ax^3 + bx^2.$$

Звідси

$$y'_{\text{part}}(x) = 3ax^2 + 2bx,$$
$$y''_{\text{part}}(x) = 6ax + 2b.$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння

$$6a + (6ax + 2b) = x + 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях

$$\begin{array}{r|l} x & 6a = 1 \\ 1 & 6a + 2b = 1 \end{array}$$

Звідси $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$.

Таким чином загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{hetero}}(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot e^{-x} + \frac{x^3}{6}$$

Приклад 3.3.10. Розв'язати лінійне неоднорідне рівняння $y'' + y = e^x \cdot x$.

Розв'язок. Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння

$$y'' + y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_{1,2} = \pm i$. І загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{\text{homo}}(x) = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x).$$

Оскільки справа стоїть многочлен першого порядку, помножений на експоненту, то частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{part}}(x) = e^x \cdot (ax + b).$$

Звідси

$$y'_{\text{part}}(x) = e^x \cdot (ax + a + b),$$
$$y'_{\text{part}}(x) = e^x \cdot (ax + 2a + b).$$

Підставляємо одержані вирази у диференціальне рівняння

$$e^x \cdot (ax + 2a + b) + e^x \cdot (ax + b) = e^x \cdot x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах

$$
\begin{array}{c|l}
x \cdot e^x & 2a = 1 \\
e^x & 2a + 2b = 0
\end{array}
$$

Звідси $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

Таким чином загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{hetero}}(x) = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x) + \frac{e^x \cdot (x-1)}{2}.$$

Приклад 3.3.11. Розв'язати лінійне неоднорідне рівняння

$$y'' - 2y' + y = e^x \cdot x.$$

Розв'язок. Розв'язуємо однорідне рівняння

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$. І загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{\text{homo}}(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x.$$

Оскільки справа стоїть многочлен першого порядку, а показник при експоненті є двократним коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{part}}(x) = x^2 \cdot e^x \cdot (ax + b),$$

або

$$y_{\text{part}}(x) = e^x \cdot (ax^3 + bx^2),$$

Звідси

$$
\begin{aligned}
y'_{\text{part}}(x) &= e^x \cdot (ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx), \\
y''_{\text{part}}(x) &= e^x \cdot (ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b).
\end{aligned}
$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння

$$
\begin{aligned}
e^x \cdot (ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b) - 2e^x \cdot (ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx) + \\
+ e^x \cdot (ax^3 + bx^2) = e^x \cdot x.
\end{aligned}
$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах

$$\begin{array}{c|l} x \cdot e^x & 6a + 4b + 2b = 1 \\ e^x & 2b = 0 \end{array}$$

Звідси $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$.

Таким чином загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{hetero}}(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x + \frac{x^3 \cdot e^x}{6}. \tag{3.3.1}$$

Приклад 3.3.12. Розв'язати лінійне неоднорідне рівняння

$$y'' - y = x \cdot \cos(x) + \sin(x).$$

Розв'язок. Розв'язуємо однорідне рівняння

$$y'' - y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - 1 = 0.$$

Його коренями будуть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. І загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{\text{homo}}(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного має вигляд

$$y_{\text{part}}(x) = (ax + b) \cdot \cos(x) + (cx + d) \cdot \sin(x).$$

Звідси

$$\begin{aligned} y'_{\text{part}}(x) &= (cx + a + d) \cdot \cos(x) + (-ax - b + c) \cdot \sin(x), \\ y''_{\text{part}}(x) &= (-ax - b + 2c) \cdot \cos(x) + (-cx - 2a - d) \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} &(-ax - b + 2c) \cdot \cos(x) + (-cx - 2a - d) \cdot \sin(x) - \\ &\qquad - (ax + b) \cdot \cos(x) - (cx + d) \cdot \sin(x) = x \cdot \cos(x) + \sin(x). \end{aligned}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових виразах

$$\begin{array}{c|l} x \cdot \cos(x) & -2a = 1 \\ x \cdot \sin(x) & -2c = 0 \\ \cos(x) & -b + 2c - b = 0 \\ \sin(x) & -2a - d - d = 1 \end{array}$$

Звідси $a = -\frac{1}{2}$, $b = c = d = 0$.

Таким чином загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{hetero}}(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x - \frac{\cos(x)}{2}.$$

Приклад 3.3.13. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cdot \sin(x).$$

Розв'язок. Розв'язуємо однорідне рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ має корені $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. І загальним розв'язком однорідного рівняння буде

$$y_{\text{homo}}(x) = C_1 \cdot e^{-x} \cdot \cos(x) + C_2 \cdot e^{-x} \cdot \sin(x).$$

Оскільки $\lambda_1 = 1 + i$ корінь кратності один, то частинний розв'язок неоднорідного має вигляд

$$y_{\text{part}}(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)).$$

Звідси

$$\begin{aligned} y'_{\text{part}}(x) &= e^{-x} \cdot ((b - ax) \cdot \sin(x) + (a - (a - b) \cdot x) \cdot \cos(x)) \\ y'_{\text{part}}(x) &= -2e^{-x} \cdot ((a + b - ax) \cdot \sin(x) + ((a - b) + b \cdot x) \cdot \cos(x)) \end{aligned}$$

Підставляємо одержані вирази в диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} &- 2e^{-x} \cdot ((a + b - ax) \cdot \sin(x) + ((a - b) + b \cdot x) \cdot \cos(x)) + \\ &\qquad + 2e^{-x} \cdot ((b - ax) \cdot \sin(x) + (a - (a - b) \cdot x) \cdot \cos(x)) + \\ &\qquad\qquad + 2x \cdot e^{-x} \cdot (a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)) = e^{-x} \cdot \sin(x). \end{aligned}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах

$$\begin{array}{c|l} e^{-x}\cdot\cos(x) & 2a+2b=0 \\ e^{-x}\cdot\sin(x) & -2a-2b+c=1 \end{array}$$

Звідси $a=-1$, $b=1$.

Таким чином загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{hetero}}(x)=C_1\cdot e^{-x}\cdot\cos(x)+C_2\cdot e^{-x}\cdot\sin(x)+x\cdot e^{-x}\cdot(\sin(x)-\cos(x)).$$

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

Задача 3.3.14.

$$y'''-4y''+5y'-2y=2x+3;$$

Задача 3.3.15.

$$y'''-3y'+2y=e^{-x}(4x^2+4x-10);$$

Задача 3.3.16.

$$y^{(4)}+8y''+16y=\cos(x);$$

Задача 3.3.17.

$$y^{(5)}+y'''=x^2-1;$$

Задача 3.3.18.

$$y^{(4)}-y=x\cdot e^x+\cos(x);$$

Задача 3.3.19.

$$y^{(4)}+2y''+y=x^2\cdot\cos(x);$$

Задача 3.3.20.

$$y^{(4)}-y=5e^x\cdot\sin(x)+x^4;$$

Задача 3.3.21.

$$y^{(4)}+5y''+4y=\sin(x)\cdot\cos(2x);$$

Задача 3.3.22.

$$y'''-4y''+3y'=x^3\cdot e^{2x};$$

Задача 3.3.23.

$$y^{(4)}+y''=7x-3\cos(x);$$

Задача 3.3.24.

$$y'''-y''-y'+y=3e^x+5x\cdot\sin(x);$$

Задача 3.3.25.

$$y'''-2y''+4y'-8y=e^{2x}\sin(2x)+2x^2;$$

Задача 3.3.26.

$$y'''+y'=\sin(x)+x\cdot\cos(x);$$

Задача 3.3.27.

$$y'''-y=x^3-1;$$

Задача 3.3.28.

$$y'''+y''=x^2+1+3x\cdot e^x;$$

Задача 3.3.29.

$$y'''+y''+y'+y=x\cdot e^x;$$

Задача 3.3.30.

$$y'''-9y'=-9(e^{3x}-2\sin(3x)+\cos(3x));$$

Задача 3.3.31.

$$y'''-y'=10\sin(x)+6\cos(x)+4e^x;$$

Задача 3.3.32.

$$y''' - 6y'' + 9y' = 4x \cdot e^x;$$

Задача 3.3.33.

$$y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6) \cdot e^x;$$

Задача 3.3.34.

$$y^{(4)} + y'' = x^2 + x;$$

Задача 3.3.35.

$$y''' - 3y' + 2y = (2x^2 - x)e^x + \cos(x);$$

Задача 3.3.36.

$$y^{(4)} - y = 5e^x \cdot \cos(x) + 3;$$

Задача 3.3.37.

$$y^{(5)} - y''' = x^2 + \cos(x);$$

Задача 3.3.38.

$$y^{(4)} - 2y'' + y' = e^x;$$

Задача 3.3.39.

$$y^{(4)} - 2y''' + y'' = x^3;$$

Задача 3.3.40.

$$y^{(4)} + y''' = \cos(3x).$$

Знайти частинний розв'язок диференціальних рівнянь:

Задача 3.3.41.

$$y''' - 2y'' + y' = 4(\sin(x) + \cos(x)), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1;$$

Задача 3.3.42.

$$y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = y''(0) = 1;$$

Задача 3.3.43.

$$y''' - 3y' = 3(2 - x^2), \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1;$$

Задача 3.3.44.

$$y''' + 2y'' + y' = 5e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$$

Задача 3.3.45.

$$y''' - y' = 3(2 - x^2), \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1;$$

Задача 3.3.46.

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

4 Системи диференціальних рівнянь

4.1 Загальна теорія

Співвідношення вигляду

$$\begin{cases} F_1(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0, \\ F_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0 \end{cases}$$

називається системою n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Якщо система розв'язана відносно похідних і має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & = 0, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots. \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) & = 0 \end{cases}$$

то вона називається системою в нормальній формі.

Визначення. Розв'язком системи диференціальних рівнянь називається набір n неперервно диференційованих функцій $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ тотожно задовольняючих кожному з рівнянь системи.

У загальному випадку розв'язок системи залежить від n довільних сталих і має вигляд $x_1(t, C_1, \ldots, C_n), \ldots, x_n(t, C_1, \ldots, C_n)$ і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку ставиться в такий спосіб. Потрібно знайти розв'язок, що задовольняє початковим умовам (умовам Коші):

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0$$

Визначення. Розв'язок $x_1(t, C_1, \ldots, C_n), \ldots, x_n(t, C_1, \ldots, C_n)$ називається загальним, якщо за рахунок вибору сталих $C_1, \ldots, C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші.

Для систем звичайних диференціальних рівнянь досить важливим є поняття інтеграла системи. В залежності від гладкості (тобто диференційованості) можна розглядати два визначення інтеграла.

Визначення. 1. Функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ стала уздовж розв'язків системи, називається інтегралом системи.

2. Функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ повна похідна, якої в силу системи тотожно дорівнює нулю, називається інтегралом системи.

Для лінійних рівнянь існує поняття лінійної залежності і незалежності розв'язків. Для нелінійних рівнянь (систем рівнянь) аналогічним поняттям є функціональна незалежність.

Визначення. Інтеграли

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad \ldots, \quad F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$

називаються функціонально незалежними, якщо не існує функції n змінних $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ такої, що

$$\Phi(F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \ldots, F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)) = 0.$$

Теорема 4.1. *Для того щоб інтеграли*

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad \ldots, \quad F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$$

системи звичайних диференціальних рівнянь були функціонально незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Якобі був відмінний від тотожного нуля, тобто

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Визначення. Якщо $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ – інтеграл системи диференціальних рівнянь, то рівність $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = C$ називається першим інтегралом.

Визначення. Сукупність n функціонально незалежних інтегралів називається загальним інтегралом системи диференціальних рівнянь.

Власне кажучи загальний інтеграл – це загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у неявному вигляді.

Теорема 4.2 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші)**.** *Щоб система диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної, мала єдиний розв'язок, що задовольняє умовам Коші:*

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0$$

досить, щоб:

1. *функції* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *були неперервними по змінним* $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ *в околі точки* $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0)$*;*

2. *функції* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *задовольняли умові Ліпшиця по аргументах* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *у тому ж околі.*

Зауваження. Умову Ліпшиця можна замінити більш грубою умовою, але такою, що перевіряється легше, існування обмежених частинних похідних, тобто

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leq M, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

4.1.1 Геометрична інтерпретація розв'язків

Назвемо $(n+1)$-вимірний простір змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ розширеним фазовим простором $\mathbb{R}^{n+1}$. Тоді розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ визначає в просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ деяку криву, що називається інтегральною кривою. Загальний розв'язок (чи загальний інтеграл) визначає сім'ю інтегральних кривих, що всюди щільно заповнюють деяку область $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (область існування та єдиності розв'язків). Задача Коші ставиться як виділення із сім'ї інтегральних кривих, окремої кривої, що проходить через задану початкову точку $M\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0\right) \in D$.

4.1.2 Механічна інтерпретація розв'язків

В евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ змінних $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ визначає закон руху по деякій траєкторії в залежності від часу t. При такій інтерпретації функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ є складовими швидкості руху, простір зміни перемінних називається фазовим простором, система динамічної, а крива, по якій відбувається рух $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ – фазовою траєкторією. Фазова траєкторія є проекцією інтегральної кривої на фазовий простір.

4.1.3 Зведення одного диференціального рівняння вищого порядку до системи рівнянь першого порядку

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

Розглянемо заміну змінних

$$x \mapsto t, \quad y \mapsto x_1, \quad , \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \mapsto x_2, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} \mapsto x_n.$$

Тоді одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

4.1.4 Зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння вищого порядку

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{cases}$$

і заданий її розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$. Якщо цей розв'язок підставити в перше рівняння, то вийде тотожність і її можна диференціювати

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Підставивши замість $\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}$ їх значення, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdot f_i = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Знову диференціюємо це рівняння й одержимо

$$\frac{\mathrm{d}^3 x_1}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \cdot f_i = F_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Продовжуючи процес далі, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1} x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$\frac{\mathrm{d}^{n} x_1}{\mathrm{d}t^{n}} = F_{n}(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \dfrac{\mathrm{d}^nx_1}{\mathrm{d}t^n} = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Припустимо, що

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Тоді систему перших $(n-1)$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

можна розв'язати відносно останніх $(n-1)$ змінних $x_2, x_3, \ldots, x_n$ і одержати

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_2\left(t, x_1, \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \\ x_3 = \varphi_3\left(t, x_1, \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \varphi_n\left(t, x_1, \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \end{cases}$$

Підставивши одержані вирази в останнє рівняння, запишемо

$$\frac{\mathrm{d}^nx_1}{\mathrm{d}t^n} = F_n\left(t, x_1, \varphi_2\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \ldots, \right.$$
$$\left. \varphi_n\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)\right).$$

Або, після перетворень

$$\frac{\mathrm{d}^n x_1}{\mathrm{d}t^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right),$$

одержимо одне диференціальне рівняння n-го порядку.

У загальному випадку, одержимо, що система диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t). \end{cases}$$

зводиться до одного рівняння n-го порядку

$$\frac{\mathrm{d}^n x_1}{\mathrm{d}t^n} = \Phi\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right),$$

і системи $(n-1)$ рівнянь зв'язку

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_2\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \\ x_3 = \varphi_3\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \varphi_n\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right), \end{cases}$$

Зауваження. Було зроблене припущення, що

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Якщо ця умова не виконана, то можна зводити до рівняння щодо інших змінних, наприклад відносно x_2.

4.1.5 Комбінації, що інтегруються

Визначення. Комбінацією, що інтегрується, називається диференціальне рівняння, отримане шляхом перетворень із системи, диференціальних рівнянь, але яке вже можна легко інтегрувати.

$$\mathrm{d}\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Одна комбінація, що інтегрується, дає можливість одержати одне кінцеве рівняння

$$\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C,$$

яке є першим інтегралом системи.

Геометрично перший інтеграл являє собою n-вимірну поверхню в $(n+1)$-вимірному просторі, що цілком складається з інтегральних кривих.

Якщо знайдено k комбінацій, що інтегруються, то одержуємо k перших інтегралів

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1, \\ \Phi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Phi_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = C_n. \end{cases}$$

І, якщо інтеграли незалежні, то хоча б один з визначників

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k)}{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})} \neq 0.$$

Звідси з системи можна виразити k невідомих функцій $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ через інші і підставивши їх у вихідну систему, понизити порядок до $(n-k)$ рівнянь. Якщо $n = k$ і всі інтеграли незалежні, то одержимо загальний інтеграл системи.

Особливо поширеним засобом знаходження комбінацій, що інтегруються, є використання систем у симетричному вигляді.

Систему диференціальних рівнянь, що записана в нормальній формі

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{cases}$$

можна переписати у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)} = \frac{\mathrm{d}t}{1}.$$

При такій формі запису всі змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ рівнозначні.

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

називається системою у симетричному вигляді.

При знаходженні комбінацій, що інтегруються, найбільш часто використовується властивість "пропорційності". А саме, для систем в симетричному вигляді справедлива рівність

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \\ = \frac{k_1 \cdot \mathrm{d}x_1 + k_2 \cdot \mathrm{d}x_2 + \ldots k_n \cdot \mathrm{d}x_n}{(k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot X_2 + \ldots + k_n \cdot X_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

4.1.6 Вправи для самостійної роботи

Приклад 4.1.1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь зведенням до одного рівняння вищого порядку:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}.$$

Розв'язок. Диференціюємо перше рівняння по змінній x:

$$y'' = \frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} \cdot z' = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Таким чином, одержали допоміжну систему:

$$y' = \frac{x}{z}, \quad y'' = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

З першого рівняння отримаємо $z = \frac{x}{y'}$. Підставляємо одержане значення в другу систему

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{(y')^2}{y}.$$

Маємо однорідне (по y, y', y'') диференціальне рівняння другого порядку. Робимо заміну

$$y = \exp\left\{\int u \,\mathrm{d}x\right\},$$

$$y' = u \cdot \exp\left\{\int u\,\mathrm{d}x\right\},$$
$$y'' = (u^2 + u') \cdot \exp\left\{\int u\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Після підстановки та скорочення на $e^{\int u\,\mathrm{d}x}$ одержуємо

$$u^2 + u' = \frac{u}{x} + u^2,$$

або

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{x}.$$

Далі

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \implies u = \frac{C_1 \cdot x}{2}.$$

Звідси

$$y = \exp\left\{\int \frac{C_1 \cdot x}{2}\,\mathrm{d}x\right\} = e^{C_1 x^2 + \ln C_2},$$

або

$$y_2 = C_2 \cdot e^{C_1 x^2}.$$

Змінна z знаходиться з умови $z = \frac{x}{y'}$, або

$$z = \frac{x}{2 \cdot C_2 \cdot C_1 \cdot x \cdot e^{C_1 x^2}} = \frac{1}{2 \cdot C_1 \cdot C_2} \cdot e^{-C_1 x^2}.$$

Приклад 4.1.2. Розв'язати систему в симетричному вигляді за допомогою інтегрованих комбінацій

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Розв'язок. Використовуючи властивості "пропорційності", маємо

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}(x-y)}{-(x-y)} = \frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{(x+y+z)}.$$

1. Візьмемо

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}(x-y)}{-(x-y)}.$$

   Звідси

$$\ln|z| + \ln|x-y| = \ln C_1,$$

   і перший інтеграл має вигляд $z \cdot (x - y) = C_1$.

2. Візьмемо

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{(x+y+z)}.$$

Звідси

$$\ln|z| + \ln|x+y+z| = \ln C_2,$$

і ще один інтеграл має вигляд $\frac{x+y+z}{z} = C_2$.

Умовою функціональної незалежності одержаних інтегралів є

$$\frac{D(C_1, C_2)}{D(x,y)} \neq 0.$$

Перевіряємо:

$$\frac{D(C_1, C_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & -z \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Таким чином

$$z \cdot (x-y) = C_1, \quad \frac{x+y+z}{z} = C_2$$

є загальним інтегралом системи.

Розв'язати системи диференціальних рівнянь, зведенням до одного рівняння вищого порядку

Задача 4.1.3.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{z-x}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y+1;$$

Задача 4.1.4.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)};$$

Задача 4.1.5.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 \cdot z, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{x} - y \cdot z^2;$$

Задача 4.1.6.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 - z^2 + 1}{2z}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z + y.$$

Розв'язати системи диференціальних рівнянь за допомогою інтегрованих комбінацій.

Задача 4.1.7.

$$\frac{\mathrm{d}x}{y+z} = \frac{\mathrm{d}y}{x+z} = \frac{\mathrm{d}z}{x+y};$$

Задача 4.1.8.

$$\frac{\mathrm{d}x}{y-x} = \frac{\mathrm{d}y}{x+y+z} = \frac{\mathrm{d}z}{x-y};$$

Задача 4.1.9.

$$\frac{\mathrm{d}x}{z} = \frac{\mathrm{d}y}{x \cdot z} = \frac{\mathrm{d}z}{y};$$

Задача 4.1.10.

$$\frac{\mathrm{d}x}{z^2 - y^2} = \frac{\mathrm{d}y}{z} = \frac{\mathrm{d}z}{-y};$$

Задача 4.1.11.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{x \cdot y + z};$$

Задача 4.1.12.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x + y^2 + z^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z};$$

Задача 4.1.13.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(y+z)} = \frac{\mathrm{d}y}{z(z-y)} = \frac{\mathrm{d}z}{y(y-z)};$$

Задача 4.1.14.

$$\frac{\mathrm{d}x}{-x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{x \cdot y - 2z^2} = \frac{\mathrm{d}z}{x \cdot z};$$

Задача 4.1.15.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(z-y)} = \frac{\mathrm{d}y}{y(y-x)} = \frac{\mathrm{d}z}{y^2 - x \cdot z};$$

Задача 4.1.16.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(y^2 - z^2)} = \frac{\mathrm{d}y}{-y(z^2 + x^2)} = \frac{\mathrm{d}z}{z(x^2 + y^2)}.$$

4.2 Системи лінійних диференціальних рівнянь. Загальні положення

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t) \cdot x_1 + a_{12}(t) \cdot x_2 + \ldots + a_{1n}(t) \cdot x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t) \cdot x_1 + a_{22}(t) \cdot x_2 + \ldots + a_{2n}(t) \cdot x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t) \cdot x_1 + a_{n2}(t) \cdot x_2 + \ldots + a_{nn}(t) \cdot x_n + f_n(t), \end{cases}$$

називається лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь. Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t) \cdot x_1 + a_{12}(t) \cdot x_2 + \ldots + a_{1n}(t) \cdot x_n, \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t) \cdot x_1 + a_{22}(t) \cdot x_2 + \ldots + a_{2n}(t) \cdot x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t) \cdot x_1 + a_{n2}(t) \cdot x_2 + \ldots + a_{nn}(t) \cdot x_n, \end{cases}$$

називається лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь. Якщо ввести векторні позначення

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1}(t) a_{n2}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

то лінійну неоднорідну систему можна переписати у вигляді

$$\dot{x} = A(t) \cdot x + f(t),$$

а лінійну однорідну систему у вигляді

$$\dot{x} = A(t) \cdot x.$$

Якщо функції $a_{ij}(t), f_i(t),\ i, j = \overline{1, n}$ неперервні в околі точки $(x_0, t_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0)$, то виконані умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, і існує єдиний розв'язок

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = x_n(t),$$

системи рівнянь, що задовольняє початковим даним

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

4.2.1 Властивості розв'язків лінійних однорідних систем

Властивість 1. Якщо вектор $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$ є розв'язком лінійної однорідної системи, то і

$$C \cdot x(t) = (C \cdot x_1(t), C \cdot x_2(t), \ldots, C \cdot x_n(t))^T,$$

де C — стала скалярна величина, також є розв'язком цієї системи.

Доведення. Дійсно, за умовою

$$\dot{x}(t) - A(t) \cdot x(t) \equiv 0.$$

Але тоді і

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C \cdot x(t)) - A(t) \cdot (C \cdot x(t)) = \\ = C \cdot (\dot{x}(t) - A(t) \cdot x(t)) \equiv 0$$

оскільки дорівнює нулю вираз в дужках. Тобто $C \cdot x(t)$ є розв'язком однорідної системи. □

Властивість 2. Якщо дві векторні функції $x_1 = (x_{11}(t), x_{21}(t), \ldots, x_{n1}(t))^T$, $x_2 = (x_{12}(t), x_{22}(t), \ldots, x_{n2}(t))^T$ є розв'язками однорідної системи, то і їхня сума також буде розв'язком однорідної системи.

Доведення. Дійсно, за умовою

$$\dot{x}_1(t) - A(t) \cdot x_1(t) \equiv 0,$$
$$\dot{x}_2(t) - A(t) \cdot x_2(t) \equiv 0.$$

Але тоді і

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1(t)+x_2(t))-A(t)\cdot(x_1(t)+x_2(t)) = (\dot{x}_1(t)-A(t)\cdot x_1(t))+(\dot{x}_2(t)-A(t)\cdot x_2(t)) \equiv 0$$

тому що дорівнюють нулю вирази в дужках, тобто $x_1(t)+x_2(t)$ є розв'язком однорідної системи. □

Властивість 3. Якщо вектори $x_1 = (x_{11}(t), x_{21}(t), \ldots, x_{n1}(t))^T$, …, $x_n = (x_{1n}(t), x_{2n}(t), \ldots, x_{nn}(t))^T$ є розв'язками однорідної системи, та і їхня лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами також буде розв'язком однорідної системи.

Доведення. Дійсно, за умовою

$$\dot{x}_i(t) - A(t) \cdot x_i(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Але тоді і

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot x_i(t)\right) - A(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot x_i(t)\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot (\dot{x}_i(t) - A(t) \cdot x_i(t)) \equiv 0$$

тому що дорівнює нулю кожний з доданків, тобто $\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot x_i(t)$ є розв'язком однорідної системи. □

Властивість 4. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $u(t) + i \cdot v(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^T + i \cdot (v_1(t), \ldots, v_n(t))^T$ є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна та уявна частини є розв'язками системи.

Доведення. Дійсно за умовою

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t) + i \cdot v(t)) - A(t) \cdot (u(t) + i \cdot v(t)) \equiv 0.$$

Розкривши дужки і зробивши перетворення, одержимо

$$(\dot{u}(t) - A(t) \cdot u(t)) + i \cdot (\dot{v}(t) - A(t) \cdot v(t)) \equiv 0.$$

А комплексний вираз дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли дорівнюють нулю дійсна і уявна частини, тобто

$$\dot{u}(t) - A(t) \cdot u(t) \equiv 0,$$
$$\dot{v}(t) - A(t) \cdot v(t) \equiv 0.$$

що і було потрібно довести. □

Визначення. Вектори

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad x_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

називаються лінійно залежними на відрізку $t \in [a, b]$, якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$, такі, що

$$C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t) + \ldots + C_n \cdot x_n(t) \equiv 0$$

при $t \in [a, b]$.

Якщо тотожність справедлива лише при $C_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, то вектори лінійно незалежні.

Визначення. Визначник, що складається з векторів $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, тобто

$$W[x_1, x_2, \ldots, x_n](t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

називається визначником Вронського.

Теорема 4.3. *Якщо векторні функції $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ лінійно залежні, то визначник Вронського тотожно дорівнює нулю.*

Доведення. За умовою існують не всі рівні нулю $C_1, C_2, \ldots, C_n$, такі, що $C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t) + \ldots + C_n \cdot x_n(t) \equiv 0$ при $t \in [a, b]$.

Або, розписавши покоординатно, одержимо

$$\begin{cases} C_1 \cdot x_{11}(t) + C_2 \cdot x_{12}(t) + \ldots + C_n \cdot x_{1n}(t) \equiv 0, \\ C_1 \cdot x_{21}(t) + C_2 \cdot x_{22}(t) + \ldots + C_n \cdot x_{2n}(t) \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1 \cdot x_{n1}(t) + C_2 \cdot x_{n2}(t) + \ldots + C_n \cdot x_{nn}(t) \equiv 0. \end{cases}$$

А однорідна система має ненульовий розв'язок $C_1, C_2, \ldots, C_n$ тоді і тільки тоді, коли визначник дорівнює нулю, тобто

$$W[x_1, x_2, \ldots, x_n](t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix} \equiv 0, \quad t \in [a, b].$$

□

Теорема 4.4. *Якщо розв'язки $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ лінійної однорідної системи лінійно незалежні, то визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці $t \in [a, b]$.*

Доведення. Нехай, від супротивного, існує точка $t_0 \in [a, b]$ і

$$W[x_1, x_2, \ldots, x_n](t_0) = 0.$$

Тоді виконується система однорідних алгебраїчних рівнянь

$$C_1 \cdot x_1(t_0) + C_2 \cdot x_2(t_0) + \ldots + C_n \cdot x_n(t_0) = 0.$$

Або, розписавши покоординатно, одержимо

$$\begin{cases} C_1 \cdot x_{11}(t_0) + C_2 \cdot x_{12}(t_0) + \ldots + C_n \cdot x_{1n}(t_0) = 0, \\ C_1 \cdot x_{21}(t_0) + C_2 \cdot x_{22}(t_0) + \ldots + C_n \cdot x_{2n}(t_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1 \cdot x_{n1}(t_0) + C_2 \cdot x_{n2}(t_0) + \ldots + C_n \cdot x_{nn}(t_0) = 0. \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$. Розглянемо лінійну комбінацію розв'язків з отриманими коефіцієнтами

$$x(t) = C_1^0 \cdot x_1(t) + C_2^0 \cdot x_2(t) + \ldots + C_n^0 \cdot x_n(t).$$

Відповідно до властивості 4, ця комбінація буде розв'язком. Крім того, як випливає із системи алгебраїчних рівнянь, для отриманих $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$: $x(t_0) = 0$, $t_0 \in [a, b]$. Але розв'язком, що задовольняють таким умовам, є $x \equiv 0$. І в силу теореми існування та єдиності ці два розв'язки збігаються, тобто $x(t) \equiv 0$ при $t \in [a, b]$, або

$$C_1^0 \cdot x_1(t) + C_2^0 \cdot x_2(t) + \ldots + C_n^0 \cdot x_n(t) \equiv 0,$$

або розв'язки $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ лінійно залежні, що суперечить умові теореми.

Таким чином, $W[x_1, x_2, \ldots, x_n](t) \neq 0$ у жодній точці $t \in [a, b]$, що і було потрібно довести. □

Теорема 4.5. *Для того щоб розв'язки* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *були лінійно незалежні, необхідно і достатньо, щоб* $W[x_1, \ldots, x_n](t) \neq 0$ *у жодній точці* $t \in [a, b]$.

Доведення. Випливає з попередніх двох теорем. □

Теорема 4.6. *Загальний розв'язок лінійної однорідної системи представляється у вигляді лінійної комбінації* n *лінійно незалежних розв'язків.*

Доведення. Як випливає з властивості 3, лінійна комбінація розв'язків також буде розв'язком. Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто завдяки вибору коефіцієнтів $C_1, \ldots, C_n$ можна розв'язати будь-яку задачу Коші $x(t_0) = x_0$ або в координатній формі:

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

Оскільки розв'язки $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ лінійно незалежні, то визначник Вронського відмінний від нуля. Отже, система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 \cdot x_{11}(t_0) + C_2 \cdot x_{12}(t_0) + \ldots + C_n \cdot x_{1n}(t_0) = x_1^0, \\ C_1 \cdot x_{21}(t_0) + C_2 \cdot x_{22}(t_0) + \ldots + C_n \cdot x_{2n}(t_0) = x_2^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1 \cdot x_{n1}(t_0) + C_2 \cdot x_{n2}(t_0) + \ldots + C_n \cdot x_{nn}(t_0) = x_n^0. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$.

Тоді лінійна комбінація

$$x(t) = C_1^0 \cdot x_1(t) + C_2^0 \cdot x_2(t) + \ldots + C_n^0 \cdot x_n(t)$$

є розв'язком поставленої задачі Коші. Теорема доведена. □

Зауваження. Максимальне число незалежних розв'язків дорівнює кількості рівнянь n.

Доведення. Це випливає з теореми про загальний розв'язок системи однорідних рівнянь, тому що будь-який інший розв'язок може бути представлений у вигляді лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків. □

Визначення. Матриця, складена з будь-яких n лінійно незалежних розв'язків, називається фундаментальною матрицею розв'язків системи.

Якщо лінійно незалежними розв'язками будуть

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad x_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

то матриця

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

буде фундаментальною матрицею розв'язків.

Як випливає з попередньої теореми загальний розв'язок може бути представлений у вигляді

$$x_{\mathrm{homo}} = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot x_i(t),$$

де C_i — довільні сталі. Якщо ввести вектор $C = (C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$, то загальний розв'язок можна записати у вигляді $x_{\mathrm{homo}} = X(t) \cdot C$.

4.2.2 Формула Якобі

Нехай $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — лінійно незалежні розв'язки однорідної системи, $W[x_1, \ldots, x_n]$ — визначник Вронського. Обчислимо похідну визначника Вронського

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W[x_1, \ldots, x_n] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{vmatrix} x_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x'_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x'_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x'_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}(t) x'_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x'_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x'_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x'_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x'_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Оскільки для похідних виконується співвідношення

$$\begin{cases} x'_{11}(t)= \alpha_{11}\cdot x_{11}(t)+\alpha_{12}\cdot x_{12}(t)+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_{1n}(t),\\ x'_{12}(t)= \alpha_{11}\cdot x_{21}(t)+\alpha_{12}\cdot x_{22}(t)+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_{2n}(t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x'_{1n}(t)= \alpha_{11}\cdot x_{n1}(t)+\alpha_{12}\cdot x_{n2}(t)+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_{nn}(t), \end{cases}$$
$$\begin{cases} x'_{21}(t)= \alpha_{21}\cdot x_{11}(t)+\alpha_{22}\cdot x_{12}(t)+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_{1n}(t),\\ x'_{22}(t)= \alpha_{21}\cdot x_{21}(t)+\alpha_{22}\cdot x_{22}(t)+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_{2n}(t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x'_{2n}(t)= \alpha_{21}\cdot x_{n1}(t)+\alpha_{22}\cdot x_{n2}(t)+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_{nn}(t), \end{cases}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\begin{cases} x'_{n1}(t)= \alpha_{n1}\cdot x_{11}(t)+\alpha_{n2}\cdot x_{12}(t)+\ldots+\alpha_{nn}\cdot x_{1n}(t),\\ x'_{2n}(t)= \alpha_{n1}\cdot x_{21}(t)+\alpha_{n2}\cdot x_{22}(t)+\ldots+\alpha_{nn}\cdot x_{2n}(t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x'_{nn}(t)= \alpha_{n1}\cdot x_{n1}(t)+\alpha_{n2}\cdot x_{n2}(t)+\ldots+\alpha_{nn}\cdot x_{nn}(t), \end{cases}$$

то після підстановки одержимо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W[x_1,\ldots,x_n]=$$
$$=\begin{vmatrix} \alpha_{11}\cdot x_{11}(t)+\alpha_{12}\cdot x_{12}(t)+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_{1n}(t) & x_{12}(t)\ldots x_{1n}(t)\\ \alpha_{11}\cdot x_{21}(t)+\alpha_{12}\cdot x_{22}(t)+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_{2n}(t) & x_{22}(t)\ldots x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots\ \ \ddots\ \ \vdots\\ \alpha_{11}\cdot x_{n1}(t)+\alpha_{12}\cdot x_{n2}(t)+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_{nn}(t) & x_{n2}(t)\ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix}+$$
$$+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \alpha_{21}\cdot x_{11}(t)+\alpha_{22}\cdot x_{12}(t)+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_{1n}(t)\ldots x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & \alpha_{21}\cdot x_{21}(t)+\alpha_{22}\cdot x_{22}(t)+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_{2n}(t)\ldots x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots\ \ \ddots\ \ \vdots\\ x_{n1}(t) & \alpha_{21}\cdot x_{n1}(t)+\alpha_{22}\cdot x_{n2}(t)+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_{nn}(t)\ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix}+\ldots$$
$$\ldots+\begin{vmatrix} x_{11}(t)x_{12}(t)\ldots & \alpha_{n1}\cdot x_{11}(t)+\alpha_{n2}\cdot x_{12}(t)+\ldots+\alpha_{nn}\cdot x_{1n}(t)\\ x_{21}(t)x_{22}(t)\ldots & \alpha_{n1}\cdot x_{21}(t)+\alpha_{n2}\cdot x_{22}(t)+\ldots+\alpha_{nn}\cdot x_{2n}(t)\\ \vdots\ \ \vdots\ \ \ddots & \vdots\\ x_{n1}(t)x_{n2}(t)\ldots & \alpha_{n1}\cdot x_{n1}(t)+\alpha_{n2}\cdot x_{n2}(t)+\ldots+\alpha_{nn}\cdot x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Розкривши кожний з визначників, і з огляду на те, що визначники з однаковими стовпцями дорівнюють нулю, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W[x_1,\ldots,x_n]=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}+$$

$$+ a_{22} \cdot \begin{vmatrix} x_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ldots + a_{nn} \cdot \begin{vmatrix} x_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) \cdot \begin{vmatrix} x_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{tr} A \cdot \begin{vmatrix} x_{11}(t) x_{12}(t) \ldots x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) x_{22}(t) \ldots x_{2n}(t) \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n1}(t) x_{n2}(t) \ldots x_{nn}(t) \end{vmatrix} = \operatorname{tr} A \cdot W[x_1, \ldots, x_n].$$

Або

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W[x_1, \ldots, x_n] = \operatorname{tr} A \cdot W[x_1, \ldots, x_n].$$

Розділивши змінні, одержимо

$$\frac{\mathrm{d}W[x_1, \ldots, x_n]}{W[x_1, \ldots, x_n]} = \operatorname{tr} A \cdot \mathrm{d}t.$$

Проінтегруємо в межах $t_0 \leq s \leq t$,

$$\ln W[x_1, \ldots, x_n](t) - \ln W[x_1, \ldots, x_n](t_0) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A \cdot \mathrm{d}t,$$

або

$$W[x_1, \ldots, x_n](t) = W[x_1, \ldots, x_n](t_0) \cdot \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A \cdot \mathrm{d}t \right\}.$$

Взагалі кажучи, доведення проводилося в припущенні, що система рівнянь може залежати від часу, тобто

$$W[x_1, \ldots, x_n](t) = W[x_1, \ldots, x_n](t_0) \cdot \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(t) \cdot \mathrm{d}t \right\}.$$

Отримана формула називається формулою Якобі.

4.3 Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами [TO DO]

4.3.1 Розв'язування систем однорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами методом Ейлера [TO DO]

4.3.2 Розв'язок систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами матричним методом [TO DO]

4.3.3 Вправи для самостійної роботи [TO DO]

4.4 Лінійні неоднорідні системи [TO DO]

4.4.1 Властивості розв'язків лінійних неоднорідних систем [TO DO]

4.4.2 Побудова частинного розв'язку неоднорідної системи методом варіації довільних сталих [TO DO]

4.4.3 Формула Коші [TO DO]

4.4.4 Метод невизначених коефіцієнтів [TO DO]

4.4.5 Вправи для самостійної роботи [TO DO]