

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Скибицький Нікіта

5 січня 2019 р.

У ваших руках конспект лекцій з нормативного курсу “Диференціальні рівняння” прочитаного проф., д.ф.-м.н. Хусаїновим Денисом Ях’евичем на другому курсі спеціальності “прикладна математика” факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка восени 2017-го та навесні 2018-го року.

Конспект у компактній формі відображає матеріал курсу, допомагає сформулювати загальне уявлення про предмет вивчення, правильно зорієнтуватися в даній галузі знань. Конспект лекцій з названої дисципліни сприятиме більш успішному вивченню дисципліни, причому більшою мірою для студентів заочної форми, екстернату, дистанційного та індивідуального навчання.

Комп’ютерний набір та верстка – Скибицький Нікіта Максимович.

Зміст

1	Диференціальні рівняння першого порядку	4
1.1	Рівняння зі змінними, що розділяються	5
1.1.1	Загальна теорія	5
1.1.2	Рівняння, що зводяться до рівнянь зі змінними, що розділяються	6
1.1.3	Вправи для самостійної роботи	7
1.2	Однорідні рівняння	9
1.2.1	Загальна теорія	9
1.2.2	Рівняння, що зводяться до однорідних	10
1.2.3	Вправи для самостійної роботи	12
1.3	Лінійні рівняння першого порядку	15
1.3.1	Загальна теорія	15
1.3.2	Рівняння Бернуллі	17
1.3.3	Рівняння Рікатті	17
1.3.4	Вправи для самостійної роботи	18
1.4	Рівняння в повних диференціалах	21
1.4.1	Загальна теорія	21
1.4.2	Множник, що інтегрує	23
1.4.3	Вправи для самостійної роботи	24
1.5	Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної	27
1.5.1	Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратурах	27
1.5.2	Вправи для самостійної роботи	31

Вступ

Наведемо декілька основних визначень теорії диференціальних рівнянь, що будуть використовуватися надалі.

Визначення. Рівняння, що містять похідні від шуканої функції та можуть містити шукану функцію та незалежну змінну, називаються диференціальними рівняннями.

Визначення. Якщо в диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (0.1)$$

то диференціальне рівняння називається звичайним.

Визначення. Якщо невідома функція, що входить в диференціальне рівняння, є функцією двох або більшої кількості незалежних змінних

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial x^\ell \partial y^{k-\ell}}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0 \quad (0.2)$$

то диференціальне рівняння називається рівнянням в частинних похідних.

Визначення. Порядком диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної від невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння.

Визначення. Розв'язком диференціального рівняння називається функція, що має необхідну ступінь гладкості, і яка при підстановці в диференціальне рівняння обертає його в тотожність.

Визначення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.

1 Диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння першого порядку, що розв'язане відносно похідної, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (1.1)$$

Диференціальне рівняння становить зв'язок між координатами точки та кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{dy}{dx}$ до графіку розв'язку в цій же точці. Якщо знати x та y , то можна обчислити $f(x, y)$ тобто $\frac{dy}{dx}$.

Таким чином, диференціальне рівняння визначає поле напрямків, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, що зветься інтегральними кривими, напрям дотичних до яких в кожній точці співпадає з напрямом поля.

1.1 Рівняння зі змінними, що розділяються

1.1.1 Загальна теорія

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \quad (1.1.1)$$

або більш загального вигляду

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot dx + g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0 \quad (1.1.2)$$

називаються рівняннями зі змінними, що розділяються. Розділимо його на $f_2(y) \cdot g_1(x)$ і одержимо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)} \cdot dy = 0. \quad (1.1.3)$$

Взявши інтеграли, отримаємо

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)} \cdot dy = C, \quad (1.1.4)$$

або

$$\Phi(x, y) = C. \quad (1.1.5)$$

Визначення. Кінцеве рівняння (1.1.5), що визначає розв'язок диференціального рівняння як неявну функцію від x , називається інтегралом розглянутого рівняння.

Визначення. Рівняння (1.1.5), що визначає всі без винятку розв'язки даного диференціального рівняння, називається загальним інтегралом.

Бувають випадки (в основному), що невизначені інтеграли з (1.1.3) не можна записати в елементарних функціях. Незважаючи на це, задача

інтегрування вважається виконаною. Кажуть, що диференціальне рівняння розв'язане в квадратурах.

Можливо, що (1.1.5) розв'язується відносно y :

$$y = y(x, C). \quad (1.1.6)$$

Тоді, завдяки вибору C , можна одержати всі розв'язки.

Визначення. Залежність (1.1.6), що тотожно задовольняє вихідному диференціальному рівнянню, де C – довільна стала, називається загальним розв'язком диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок являє собою сім'ю кривих, що не перетинаються, які заповнюють деяку область. Іноді треба виділити одну криву сім'ї, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.

Визначення. Знаходження розв'язку $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$, називається розв'язком задачі Коші.

Визначення. Розв'язок, який записаний у вигляді $y = y(x, x_0, y_0)$ і задовольняє умові $y(x, x_0, y_0) = y_0$, називається розв'язком у формі Коші.

1.1.2 Рівняння, що зводяться до рівнянь зі змінними, що розділяються

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad (1.1.7)$$

де a, b, c – сталі.

Зробимо заміну $ax + by + c = z$. Тоді

$$a \cdot dx + b \cdot dy = dz, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{dz}{dx} - a \right). \quad (1.1.8)$$

Підставивши в (1.1.7), одержимо

$$\frac{1}{b} \cdot \left(\frac{dz}{dx} - a \right) = f(z), \quad (1.1.9)$$

або

$$\frac{dz}{dx} = a + b \cdot f(z), \quad (1.1.10)$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{dz}{a + b \cdot f(z)} - dx = 0 \quad (1.1.11)$$

і

$$\int \frac{dz}{a + b \cdot f(z)} - x = C. \quad (1.1.12)$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(ax + by + c, x) = C$.

1.1.3 Вправи для самостійної роботи

Рівняння зі змінними, що розділяються можуть бути записані у вигляді

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

або

$$f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot dx + g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot dy.$$

Для розв'язків такого рівняння необхідно обидві частини помножити або розділити на такий вираз, щоб в одну частину входило тільки x , а в другу – тільки y . Тоді обидві частини рівняння можна проінтегрувати.

Якщо ділити на вираз, що містить x та y , може бути загублений розв'язок, що обертає цей вираз в нуль.

Приклад 1.1.1. Розв'язати рівняння

$$x^2 y^2 y' + y = 1.$$

Розв'язок. Підставивши $y = \frac{dy}{dx}$ в рівняння, отримаємо

$$x^2 y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y = 1.$$

Помножимо обидві частини рівняння на dx і розділимо на $x^2 \cdot (y - 1)$. Перевіримо, що $y = 1$ при цьому є розв'язком, а $x = 0$ цим розв'язком не є:

$$\frac{y^2}{y - 1} \cdot dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{y^2}{y - 1} \cdot dy = - \int \frac{dx}{x^2}.$$
$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| = \frac{1}{x} + C$$

Приклад 1.1.2. Розв'язати рівняння

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

Розв'язок. Введемо заміну змінних $z = 4x + 2y - 1$. Тоді $x' = 4 + 2y'$. Рівняння перетвориться до вигляду

$$\begin{aligned} z' - 4 &= 2\sqrt{z} \\ z' &= 4 + 2\sqrt{z} \\ \frac{dz}{2 + \sqrt{z}} &= 2 dx. \end{aligned}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dz}{2 + \sqrt{z}} = \int 2 dx$$

Обчислимо інтеграл, що стоїть зліва. При обчисленні будемо використовувати таку заміну:

$$\sqrt{z} = t, \quad dz = 2t dt, \quad 2 + \sqrt{z} = 2 + t,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{2 + \sqrt{z}} &= \int \frac{2t dt}{2 + t} = 2 \int \frac{t + 2 - 2}{t + 2} \cdot dt = \\ &= 2t - 4 \ln |2 + t| = 2\sqrt{z} - 4 \ln (2 + \sqrt{z}). \end{aligned}$$

Після інтегрування отримаємо

$$2\sqrt{z} - 4 \ln (2 + \sqrt{z}) = 2x + 2C.$$

Зробимо обернену заміну, $z = 4x + 2y - 1$:

$$\sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln (2 + \sqrt{4x + 2y - 1}) = x + C.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 1.1.3.

$$xy \cdot dx + (x + 1) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.1.5.

$$y' = 10^{x+y};$$

Задача 1.1.4.

$$x \cdot (1 + y) \cdot dx = y \cdot (1 + x^2) \cdot dy;$$

Задача 1.1.6.

$$y' - xy^2 = 2xy;$$

Задача 1.1.7.

$$\sqrt{y^2 + 1} \, dx = xy \cdot dy;$$

Задача 1.1.8.

$$y' = x \tan(y);$$

Задача 1.1.9.

$$yy' + x = 1;$$

Задача 1.1.10.

$$3y^2 y' + 15x = 2xy^3;$$

Задача 1.1.11.

$$y' = \cos(y - x);$$

Задача 1.1.12.

$$y' - y = 2x - 3;$$

Задача 1.1.13.

$$xy' + y = y^2;$$

Задача 1.1.14.

$$e^{-y} \cdot (1 + y') = 1;$$

Задача 1.1.15.

$$2x^2 y' + y^2 = 2;$$

Задача 1.1.16.

$$y' - xy^3 = 2xy^2.$$

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють заданим початковим умовам:

Задача 1.1.17.

$$(x^2 - 1) \cdot y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.1.18.

$$y' \cdot \cot(x) + y = 2, \quad y(0) = -1;$$

Задача 1.1.19.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0.$$

1.2 Однорідні рівняння

1.2.1 Загальна теорія

Нехай рівняння має вигляд

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0. \quad (1.2.1)$$

Якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ однорідні одного ступеня, то рівняння називається однорідним. Нехай функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ однорідні ступеня k , тобто

$$M(t \cdot x, t \cdot y) = t^k \cdot M(x, y), \quad N(t \cdot x, t \cdot y) = t^k \cdot N(x, y). \quad (1.2.2)$$

Робимо заміну

$$y = ux, \quad dy = u dx + x du. \quad (1.2.3)$$

Після підстановки одержуємо

$$M(x, ux) \cdot dx + N(x, ux) \cdot (u dx + x du) = 0, \quad (1.2.4)$$

або

$$x^k M(1, u) \cdot dx + x^k N(1, u) \cdot (u dx + x du) = 0. \quad (1.2.5)$$

Скоротивши на x^k і розкривши дужки, запишемо

$$M(1, u) \cdot dx + N(1, u) \cdot u dx + N(1, u) \cdot x du = 0. \quad (1.2.6)$$

Згрупувавши, одержимо рівняння зі змінними, що розділяються

$$(M(1, u) + N(1, u) \cdot u) dx + N(1, u) \cdot x du = 0, \quad (1.2.7)$$

або

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1, u) \cdot du}{M(1, u) + N(1, u) \cdot u} = C. \quad (1.2.8)$$

Взявши інтеграли та замінивши $u = y/x$, отримаємо загальний інтеграл $\Phi(x, y/x) = C$.

1.2.2 Рівняння, що зводяться до однорідних

Нехай маємо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \quad (1.2.9)$$

Розглянемо два випадки

1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.2.10)$$

Тоді система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \quad (1.2.11)$$

має єдиний розв'язок (x_0, y_0) . Проведемо заміну

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0, \\ y = y_1 + y_0 \end{cases} \quad (1.2.12)$$

та отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx_1} &= f\left(\frac{a_1 \cdot (x_1 + x_0) + b_1 \cdot (y_1 + y_0) + c_1}{a_2 \cdot (x_1 + x_0) + b_2 \cdot (y_1 + y_0) + c_2}\right) = \\ &= f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1)}{a_2 x_1 + b_2 y_1 + (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2)}\right)\end{aligned}\quad (1.2.13)$$

Оскільки (x_0, y_0) – розв’язок (1.2.11), то (1.2.9) набуде вигляду

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1}{a_2 x_1 + b_2 y_1}\right)\quad (1.2.14)$$

і є однорідним нульового ступеня. Робимо заміну

$$y_1 = ux_1, \quad dy_1 = u \cdot dx_1 + x_1 \cdot du.\quad (1.2.15)$$

Підставимо в (1.2.14)

$$u + x_1 \cdot \frac{du}{dx_1} = f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 ux_1}{a_2 x_1 + b_2 ux_1}\right).\quad (1.2.16)$$

Одержимо

$$x_1 \cdot du + \left(u - f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 ux_1}{a_2 x_1 + b_2 ux_1}\right)\right) dx_1 = 0.\quad (1.2.17)$$

Розділивши змінні, маємо

$$\int \frac{du}{u - f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 ux_1}{a_2 x_1 + b_2 ux_1}\right)} + \ln(x_1) = C.\quad (1.2.18)$$

І загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд $\Phi(u, x_1) = C$. Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}, x - x_0\right) = C.\quad (1.2.19)$$

2. Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,\quad (1.2.20)$$

тобто коефіцієнти рядків лінійно залежні і

$$a_1 x + b_1 y = \alpha \cdot (a_2 x + b_2 y).\quad (1.2.21)$$

Робимо заміну $a_2x + b_2y = z$. Звідси $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_2} \cdot \left(\frac{dz}{dx} - a_2\right)$.

Підставивши в диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2} \cdot \left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right), \quad (1.2.22)$$

або

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 \cdot f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right), \quad (1.2.23)$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int \frac{dz}{a_2 + b_2 \cdot f\left(\frac{\alpha z + c_1}{z + c_2}\right)} - x = C, \quad (1.2.24)$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(a_2x + b_2y, x) = C$

1.2.3 Вправи для самостійної роботи

Однорідні рівняння можуть бути записані у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

або

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0,$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні функції одного й того ж ступеня. Для того, щоб розв'язати однорідне рівняння, необхідно провести заміну

$$y = ux, \quad dy = u \cdot dx + x \cdot du,$$

в результаті якої отримаємо рівняння зі змінними, що розділяються.

Приклад 1.2.1. Розв'язати рівняння $x \cdot dy = (x + y) \cdot dy$.

Розв'язок. Дане рівняння однорідне, оскільки x та $x + y$ є однорідними функціями першого ступеня.

Проведемо заміну: $y = ux$. Тоді $dy = u dx + x du$. Підставивши y та dy в задане рівняння, отримаємо

$$\begin{aligned} x \cdot (x du + u dx) &= (x + xu) dx, \\ x^2 du &= x dx \end{aligned}$$

Розв'яжемо це рівняння зі змінними, що розділяються:

$$\begin{aligned} du &= \frac{dx}{x}, \\ u &= \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Повернувшись до вихідних змінних $u = y/x$, отримаємо

$$y = x \cdot (\ln|x| + C).$$

Крім того розв'язком є $x = 0$, що було загублене при поділенні рівняння на x .

Розв'язати рівняння:

Задача 1.2.2.

$$(x + 2y) \cdot dx - x \, dy = 0;$$

Задача 1.2.3.

$$(x - y) \cdot dx + (x + y) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.2.4.

$$y^2 + x^2 y' = x y y';$$

Задача 1.2.5.

$$(x^2 + y^2) \cdot y' = 2xy;$$

Задача 1.2.6.

$$x y' - y = x \cdot \tan\left(\frac{y}{x}\right);$$

Задача 1.2.7.

$$x y' = y - x e^{y/x};$$

Задача 1.2.8.

$$x y' - y = (x + y) \cdot \ln\left(\frac{x + y}{x}\right);$$

Задача 1.2.9.

$$(3x + y) \cdot dx - (2x + 3y) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.2.10.

$$x y' = y \cos\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right);$$

Задача 1.2.11.

$$(y + \sqrt{xy}) \cdot dx = x \, dy;$$

Задача 1.2.12.

$$x y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;$$

Задача 1.2.13.

$$x^2 y' = y \cdot (x + y);$$

Задача 1.2.14.

$$y \cdot (-y + x y') = \sqrt{x^4 + y^4};$$

Задача 1.2.15.

$$x \, dy - y \, dx = \sqrt{x^2 + y^2} \, dx;$$

Задача 1.2.16.

$$(y^2 - 2xy) \cdot dx + x^2 \cdot dy = 0;$$

Задача 1.2.17.

$$2x^3y' = y \cdot (2x^2 - y^2);$$

Задача 1.2.18.

$$(x - y \cos(y/x)) dx + x \cos(y/x) dy = 0;$$

Задача 1.2.19.

$$y'(xy - x^2) = y^2;$$

Задача 1.2.20.

$$2xyy' = x^2 + y^2;$$

Задача 1.2.21.

$$(6x + 3y) \cdot dx = (7x - 2y) \cdot dy;$$

Задача 1.2.22.

$$y^2x dx = y \cdot (xy - 2y^2) \cdot dy;$$

Задача 1.2.23.

$$x^2y dx = y \cdot (xy - 2y^2) \cdot dy;$$

Задача 1.2.24.

$$2y^3 = xy' \cdot (2y^2 - x^2);$$

Задача 1.2.25.

$$(x + \sqrt{xy}) \cdot dy = y dx;$$

Задача 1.2.26.

$$y = \left(\sqrt{y^2 - x^2} + x \right) y';$$

Задача 1.2.27.

$$(3x - 2y) \cdot dx - (2x + y) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.2.28.

$$(7x + 6y) \cdot dx - (x + 3y) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.2.29.

$$xy' = y + x \cdot \cot\left(\frac{y}{x}\right).$$

Знайти частинні розв'язки, що задовольняють задані початкові умови:

Задача 1.2.30.

$$xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 2;$$

Задача 1.2.31.

$$(2y^2 + 3x^2) \cdot xy' = 3y^3 + 6yx^2, \quad y(2) = 1;$$

Задача 1.2.32.

$$y'(x^2 - 2xy) = x^2 + xy - y^2, \quad y(3) = 0;$$

Задача 1.2.33.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8 \cdot \frac{y}{x} + 8, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.34.

$$y'(x^2 - 4xy) = x^2 + xy - 3y^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.35.

$$xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.36.

$$(2y^2 + 7x^2) \cdot xy' = 3y^3 + 14yx^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.37.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \cdot \frac{y}{x} + 3, \quad y(3) = 1;$$

Задача 1.2.38.

$$x^2y' = y^2 + 4xy + 2x^2, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.39.

$$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.40.

$$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(3) = 4;$$

Задача 1.2.41.

$$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y, \quad y(4) = 3;$$

Задача 1.2.42.

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8 \cdot \frac{y}{x} + 8, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.2.43.

$$y' = \frac{x + 2y}{2x - y}, \quad y(3) = 8.$$

1.3 Лінійні рівняння першого порядку

1.3.1 Загальна теорія

Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається лінійним диференціальним рівнянням. Його загальний вигляд такий:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x). \quad (1.3.1)$$

Якщо $q(x) \equiv 0$, тобто рівняння має вигляд

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = 0, \quad (1.3.2)$$

то воно зветься однорідним. Однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються і розв'язується таким чином:

$$\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx, \quad (1.3.3)$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x) \cdot dx, \quad (1.3.4)$$

$$\ln y = - \int p(x) \cdot dx + \ln C. \quad (1.3.5)$$

Нарешті

$$y = C \cdot \exp \left\{ - \int p(x) \cdot dx \right\} \quad (1.3.6)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих (методом невизначених множників Лагранжа). Він складається в тому, що розв'язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв'язок однорідного, але C вважається невідомою функцією від x , тобто $C = C(x)$ і

$$y = C(x) \cdot \exp \left\{ - \int p(x) \cdot dx \right\} \quad (1.3.7)$$

Для знаходження $C(x)$ підставимо y у рівняння

$$\begin{aligned} \frac{dC(x)}{dx} \cdot \exp \left\{ - \int p(x) \cdot dx \right\} &= -C(x) \cdot p(x) \cdot \exp \left\{ - \int p(x) \cdot dx \right\} + \\ &+ p(x) \cdot C(x) \cdot \exp \left\{ - \int p(x) \cdot dx \right\} = q(x). \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Звідси

$$dC(x) = q(x) \cdot \exp \left\{ \int p(x) \cdot dx \right\} \cdot dx. \quad (1.3.9)$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$C(x) = \int q(x) \cdot \exp \left\{ \int p(x) \cdot dx \right\} \cdot dx + C. \quad (1.3.10)$$

І загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \exp \left\{ - \int p(x) \cdot dx \right\} \cdot$$

$$\cdot \left(\int q(x) \cdot \exp \left\{ \int p(x) \cdot dx \right\} \cdot dx + C \right). \quad (1.3.11)$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0) = y_0$, то розв'язок можна записати у формі Коші:

$$y(x, x_0, y_0) = \exp \left\{ - \int_{x_0}^x p(t) \cdot dt \right\} \cdot \left(\int_{x_0}^x q(t) \cdot \exp \left\{ \int_t^x p(\xi) \cdot d\xi \right\} \cdot dt + y_0 \right). \quad (1.3.12)$$

1.3.2 Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^m, \quad m \neq 1 \quad (1.3.13)$$

називається рівнянням Бернуллі. Розділимо на y^m і одержимо

$$y^{-m} \cdot \frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y^{1-m} = q(x). \quad (1.3.14)$$

Зробимо заміну:

$$y^{1-m} = z, \quad (1-m) \cdot y^{-m} \cdot \frac{dy}{dx} = dz. \quad (1.3.15)$$

Підставивши в рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{1-m} \cdot \frac{dz}{dx} + p(x) \cdot z = q(x). \quad (1.3.16)$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок має вигляд

$$z = \exp \left\{ -(1-m) \cdot \int p(x) dx \right\} \cdot \left((1-m) \cdot \int q(x) \cdot \exp \left\{ (1-m) \cdot \int p(x) dx \right\} + C \right). \quad (1.3.17)$$

1.3.3 Рівняння Рікатті

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y + r(x) \cdot y^2 = q(x) \quad (1.3.18)$$

називається рівнянням Рікатті. В загальному випадку рівняння Рікатті не інтегрується. Відомі лише деякі частинні випадки рівнянь Рікатті, що інтегруються в квадратурах. Розглянемо один з них. Нехай відомий один частинний розв'язок $y = y_1(x)$. Робимо заміну $y = y_1(x) + z$ і одержуємо

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} + p(x) \cdot (y_1(x) + z) + r(x) \cdot (y_1(x) + z)^2 = q(x). \quad (1.3.19)$$

Оскільки $y_1(x)$ – частинний розв'язок, то

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + p(x) \cdot y_1 + r(x) \cdot y_1^2 = q(x). \quad (1.3.20)$$

Розкривши в (1.3.19) скобки і використовуючи (1.3.20), одержуємо

$$\frac{dz}{dx} + p(x) \cdot z + 2r(x) \cdot y_1(x) \cdot z + r(x) \cdot z^2 = 0. \quad (1.3.21)$$

Перепишемо одержане рівняння у вигляді

$$\frac{dz}{dx} + (p(x) + 2r(x) \cdot y_1(x)) \cdot z = -r(x) \cdot z^2, \quad (1.3.22)$$

це рівняння Бернуллі з $m = 2$.

1.3.4 Вправи для самостійної роботи

Приклад 1.3.1. Розв'язати рівняння

$$y' - y \cdot \tan x = \cos x.$$

Розв'язок. Використовуючи вигляд загального розв'язку, отримаємо

$$y = \exp \left\{ \int \tan x \, dx \right\} \cdot \left(\int \exp \left\{ - \int \tan x \, dx \right\} \cdot \cos x \, dx + C \right).$$

Оскільки

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x|,$$

то отримаємо

$$\begin{aligned} y &= e^{-\ln |\cos x|} \cdot \left(\int e^{\ln |\cos x|} \cdot \cos x \, dx + C \right) = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\int \cos^2 x \, dx + C \right) = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \right). \end{aligned}$$

Або

$$y = \frac{C}{\cos x} + \frac{x}{2 \cos x} + \frac{\sin x}{2}.$$

Приклад 1.3.2. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' - \frac{y}{x} = x^2,$$

що задовольняє початковій умові $y(2) = 2$.

Розв'язок. Використовуючи вигляд загального розв'язку, отримаємо

$$\begin{aligned} y &= \exp \left\{ \int \frac{1}{x} dx \right\} \cdot \left(\int \exp \left\{ - \int \frac{1}{x} dx \right\} \cdot x^2 dx + C \right) = \\ &= e^{\ln |x|} \cdot \left(\int e^{-\ln |x|} \cdot x^2 dx + C \right) = \\ &= x \cdot \left(\int x dx + C \right) = \\ &= x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C \right). \end{aligned}$$

Таким чином

$$y = Cx + \frac{x^3}{2}.$$

Підставивши початкові умови $y(2) = 2$, одержимо $2 = 2C + 4$. Звідси $C = -1$ і частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{част.}} = \frac{x^3}{2} - x.$$

Розв'язати рівняння:

Задача 1.3.3.

$$xy' + (x+1) \cdot y = 3x^2 e^{-x};$$

Задача 1.3.4.

$$(2x+1) \cdot y' = 4x + 2y;$$

Задача 1.3.5.

$$y' = 2x \cdot (x^2 + y);$$

Задача 1.3.6.

$$x^2 y' + xy + 1 = 0;$$

Задача 1.3.7.

$$y' + y \cdot \tan x = \sec x;$$

Задача 1.3.8.

$$x \cdot (y' - y) = e^x;$$

Задача 1.3.9.

$$(xy' - 1) \cdot \ln x = 2y;$$

Задача 1.3.10.

$$(y + x^2) \cdot dx = x \cdot dy;$$

Задача 1.3.11.

$$(2e^x - y) \cdot dx = dy;$$

Задача 1.3.12.

$$\sin^2 y + x \cdot \cot y = \frac{1}{y^2};$$

Задача 1.3.14.

$$(3e^y - x) \cdot y' = 1;$$

Задача 1.3.13.

$$(x + y^2) \cdot y' = y;$$

Задача 1.3.15.

$$y = x \cdot (y' - x \cdot \cos x).$$

Знайти частинні розв'язки рівняння з заданими початковими умовами:

Задача 1.3.16.

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1;$$

Задача 1.3.17.

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, \quad y(1) = 3;$$

Задача 1.3.18.

$$y' - \frac{2y}{x+1} = e^x \cdot (x+1)^2, \quad y(0) = 1;$$

Задача 1.3.19.

$$xy' + 2y = x64, \quad y(1) = -\frac{5}{8};$$

Задача 1.3.20.

$$y' - \frac{y}{x} = x \cdot \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

Задача 1.3.21.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi};$$

Задача 1.3.22.

$$(13y^3 - x) \cdot y' = 4y, \quad y(5) = 1;$$

Задача 1.3.23.

$$2 \cdot (x + \ln^2 y - \ln y) \cdot y' = y, \quad y(2) = 1.$$

Розв'язати рівняння Бернуллі:

Задача 1.3.24.

$$y' + xy = (1+x) \cdot e^{-x} \cdot y^2;$$

Задача 1.3.25.

$$xy' + y = 2y^2 \cdot \ln x;$$

Задача 1.3.26.

$$2 \cdot (2xy' + y) = xy^2;$$

Задача 1.3.27.

$$3 \cdot (xy' + y) = y^2 \cdot \ln x;$$

Розв'язати рівняння Рікатті:

Задача 1.3.29.

$$x^2 \cdot y' + xy + x^2 y^2 = 4;$$

Задача 1.3.30.

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x} = 0;$$

Задача 1.3.31.

$$xy' - (2x + 1) \cdot y + y^2 = 5 - x^2;$$

Задача 1.3.28.

$$2 \cdot (y' + y) = xy^2.$$

Задача 1.3.32.

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2;$$

Задача 1.3.33.

$$y' + 2y \cdot e^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$

1.4 Рівняння в повних диференціалах

1.4.1 Загальна теорія

Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0, \quad (1.4.1)$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$du(x, y) = M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy, \quad (1.4.2)$$

і, таким чином, (1.4.1) набуває вигляду $du(x, y) = 0$ то рівняння називається рівнянням в повних диференціалах. Звідси вираз

$$u(x, y) = C \quad (1.4.3)$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння.

Критерієм того, що рівняння є рівнянням в повних диференціалах, тобто необхідною та достатньою умовою, є виконання рівності

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (1.4.4)$$

Нехай маємо рівняння в повних диференціалах. Тоді

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y). \quad (1.4.5)$$

Звідси $u(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y)$ де $\varphi(y)$ – невідома функція. Для її визначення продиференціюємо співвідношення по y і прирівняємо $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + \frac{d\varphi(y)}{dy} = N(x, y). \quad (1.4.6)$$

Звідси

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) \right) dy. \quad (1.4.7)$$

Остаточно, загальний інтеграл має вигляд

$$\int M(x, y) dx + \int \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) \right) dy = C. \quad (1.4.8)$$

Як відомо з математичного аналізу, якщо відомий повний диференціал (1.4.2), то $u(x, y)$ можна визначити, взявши криволінійний інтеграл по довільному контуру, що з'єднує фіксовану точку (x_0, y_0) і точку із змінними координатами (x, y) .

Більш зручно брати криву, що складається із двох відрізків прямих. В цьому випадку криволінійний інтеграл розпадається на два простих інтеграла

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} M(x, y) \cdot dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} N(x, y) \cdot dy = \\ &= \int_{x_0}^x M(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^y N(x, \eta) \cdot d\eta. \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

В цьому випадку одразу одержуємо розв'язок задачі Коші.

$$\int_{x_0}^x M(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^y N(x, \eta) \cdot d\eta = 0. \quad (1.4.10)$$

1.4.2 Множник, що інтегрує

В деяких випадках рівняння (1.4.1) не є рівнянням в повних диференціалах, але існує функція $\mu = \mu(x, y)$ така, що рівняння

$$\mu(x, y) \cdot M(x, y) \cdot dx + \mu(x, y) \cdot N(x, y) \cdot dy = 0, \quad (1.4.11)$$

вже буде рівнянням в повних диференціалах. Необхідною та достатньою умовою цього є рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y) \cdot M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y) \cdot N(x, y)), \quad (1.4.12)$$

або

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (1.4.13)$$

Таким чином замість звичайного диференціального рівняння відносно функції $y(x)$ одержимо диференціальне рівняння в частинних похідних відносно функції $\mu(x, y)$.

Задача інтегрування його значно спрощується, якщо відомо в якому вигляді шукати функцію $\mu(x, y)$, наприклад $\mu = \mu(\omega(x, y))$ де $\omega(x, y)$ – відома функція. В цьому випадку одержуємо

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (1.4.14)$$

Після підстановки в (1.4.13) маємо

$$\frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot N + \mu \cdot \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (1.4.15)$$

або

$$\frac{d\mu}{d\omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot N - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot M \right) = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right). \quad (1.4.16)$$

Розділимо змінні

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot N - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot M} \cdot d\omega. \quad (1.4.17)$$

Проінтегрувавши і поклавши сталу інтегрування одиницею, одержимо:

$$\mu(\omega(x, y)) = \exp \left\{ \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot N - \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot M} \cdot d\omega \right\}. \quad (1.4.18)$$

Розглянемо частинні випадки.

1. Нехай $\omega(x, y) = x$. Тоді $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$, $d\omega = dx$ і формула має вигляд

$$\mu(\omega(x, y)) = \exp \left\{ \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \cdot dx \right\}. \quad (1.4.19)$$

2. Нехай $\omega(x, y) = y$. Тоді $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 1$, $d\omega = dy$ і формула має вигляд

$$\mu(\omega(x, y)) = \exp \left\{ \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \cdot dy \right\}. \quad (1.4.20)$$

3. Нехай $\omega(x, y) = x^2 \pm y^2$. Тоді $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \pm 2y$, $d\omega = d(x^2 \pm y^2)$ і формула має вигляд

$$\mu(\omega(x, y)) = \exp \left\{ \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2xN \mp 2yM} \cdot d(x^2 \pm y^2) \right\}. \quad (1.4.21)$$

4. Нехай $\omega(x, y) = xy$. Тоді $\frac{\partial \omega}{\partial x} = y$, $\frac{\partial \omega}{\partial y} = x$, $d\omega = d(xy)$ і формула має вигляд

$$\mu(\omega(x, y)) = \exp \left\{ \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} \cdot d(xy) \right\}. \quad (1.4.22)$$

1.4.3 Вправи для самостійної роботи

Як вже було сказано, рівняння

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$$

буде рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції. Це має місце при

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Приклад 1.4.1. Розв'язати рівняння

$$(2x + 3x^2y) \cdot dx + (x^3 - 3y^2) \cdot dy = 0.$$

Розв'язок. Перевіримо, що це рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Обчислимо

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

Таким чином існує функція $u(x, y)$, що

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x + 3x^2y.$$

Проінтегруємо по x . Отримаємо

$$u(x, y) = \int (2x + 3x^2y) \cdot dx + \Phi(y) = x^2 + x^3y + \Phi(y).$$

Для знаходження функції $\Phi(y)$ візьмемо похідну від $u(x, y)$ по y і прирівняємо до $x^3 - 3y^2$. Отримаємо

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x^3 + \Phi'(y) = x^3 - 3y^2.$$

Звідси $\Phi'(y) = -3y^2$ і $\Phi(y) = -y^3$. Таким чином,

$$u(x, y) = x^2 + x^3y - y^3$$

і загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд

$$x^2 + x^3y - y^3 = C.$$

Перевірити, що дані рівняння є рівняннями в повних диференціалах, і розв'язати їх:

Задача 1.4.2.

$$2xy \cdot dx + (x^2 - y^2) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.3.

$$(2 - 9xy^2) \cdot x \cdot dx + (4y^2 - 6x^3) \cdot y \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.4.

$$e^{-y} \cdot dx - (2y + x \cdot e^{-y}) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.5.

$$\frac{y}{x} \cdot dx + (y^3 + \ln x) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.6.

$$\frac{3x^2 + y^2}{y^2} \cdot dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.7.

$$2x \cdot \left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) \cdot dx - \sqrt{x^2 - y} \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.8.

$$(1 + y^2 \cdot \sin 2x) \cdot dx - 2y \cdot \cos^2 x \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.9.

$$3x^2 \cdot (1 + \ln y) \cdot dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right) \cdot dy;$$

Задача 1.4.10.

$$\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right) \cdot dx + \frac{(x^2 + 1) \cdot \cos y}{\cos 2y - 1} \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.11.

$$(2x + y \cdot e^{xy}) \cdot dx + (x \cdot e^{xy} + 3y^2) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.12.

$$\left(2 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) \cdot x \cdot dx + \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.13.

$$\left(3y^2 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) \cdot dx + \left(6xy + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) \cdot dy = 0.$$

Розв'язати, використовуючи множник, що інтегрує:

Задача 1.4.14. $\mu = \mu(x - y)$,

$$(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3) \cdot dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.15.

$$\left(y - \frac{ay}{x} + x\right) \cdot dx + a \cdot dy = 0, \quad \mu = \mu(x + y);$$

Задача 1.4.16.

$$(x^2 + y) \cdot dy + x \cdot (1 - y) \cdot dx = 0, \quad \mu = \mu(xy);$$

Задача 1.4.17.

$$(x^2 - y^2 + y) \cdot dx + x \cdot (2y - 1) \cdot dy = 0;$$

Задача 1.4.18.

$$(2x^2y^2 + y) \cdot dx + (x^3y - x) \cdot dy = 0.$$

1.5 Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв'язане відносно похідної, має такий вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.5.1)$$

1.5.1 Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратах

Розглянемо ряд диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратах.

1. Рівняння вигляду

$$F(y') = 0. \quad (1.5.2)$$

Нехай алгебраїчне рівняння $F(k) = 0$ має принаймні один дійсний корінь $k = k_0$. Тоді, інтегруючи $y' = k_0$, одержимо $y = k_0 \cdot x + C$. Звідси $k_0 = (y - C)/x$ і вираз

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0 \quad (1.5.3)$$

містить всі розв'язки вихідного диференціального рівняння.

2. Рівняння вигляду

$$F(x, y') = 0. \quad (1.5.4)$$

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Використовуючи співвідношення $dy = y' \cdot dx$, одержимо

$$dy = \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt. \quad (1.5.6)$$

Проінтегрувавши, запишемо

$$y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt + C. \quad (1.5.7)$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt + C. \end{cases} \quad (1.5.8)$$

3. Рівняння вигляду

$$F(y, y') = 0. \quad (1.5.9)$$

Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ y' = \psi(t). \end{cases} \quad (1.5.10)$$

Використовуючи співвідношення $dy = y' \cdot dx$, одержимо

$$\varphi'(t) \cdot dt = \psi(t) \cdot dx \quad (1.5.11)$$

і

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot dt \quad (1.5.12)$$

Проінтегрувавши, запишемо

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot dt + C. \quad (1.5.13)$$

І загальний розв'язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \cdot dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases} \quad (1.5.14)$$

4. Рівняння Лагранжа

$$y = \varphi(y') \cdot x + \psi(y'). \quad (1.5.15)$$

Введемо параметр $y' = \frac{dy}{dx} = p$ і отримаємо

$$y = \varphi(p) \cdot x + \psi(p). \quad (1.5.16)$$

Продиференціювавши, запишемо

$$dy = \varphi'(p) \cdot x \cdot dp + \varphi(p) \cdot dx + \psi'(p) \cdot dp. \quad (1.5.17)$$

Замінивши $dy = p \cdot dx$ одержимо

$$p \cdot dx = \varphi'(p) \cdot x \cdot dp + \varphi(p) \cdot dx + \psi'(p) \cdot dp. \quad (1.5.18)$$

Звідси

$$(p - \varphi(p)) \cdot dx - \varphi'(p) \cdot x \cdot dp = \psi'(p) \cdot dp. \quad (1.5.19)$$

І отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot x = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}. \quad (1.5.20)$$

Його розв'язок

$$\begin{aligned} x = \exp \left\{ \int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot dp \right\} \cdot \\ \cdot \left(\int \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} \cdot \exp \left\{ \int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \cdot dp \right\} dp + C \right) = \\ = \Psi(p, C). \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

І остаточний розв'язок рівняння Лагранжа в параметричній формі запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x = \Psi(p, C), \\ y = \varphi(p) \cdot \Phi(p, C) + \psi(p). \end{cases} \quad (1.5.22)$$

5. Рівняння Клеро.

Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y') = y'$ є рівняння Клеро

$$y = y'x + \psi(y'). \quad (1.5.23)$$

Поклавши $y' = \frac{dy}{dx} = p$, отримаємо $y = px + \psi(p)$. Продиференціюємо

$$dy = p \cdot dx + x \cdot dp + \psi'(p) \cdot dp. \quad (1.5.24)$$

Оскільки $dy = p \cdot dx$, то

$$p \cdot dx = p \cdot dx + x \cdot dp + \psi'(p) \cdot dp. \quad (1.5.25)$$

Скоротивши, одержимо

$$(x + \psi'(p)) \cdot dp = 0. \quad (1.5.26)$$

Можливі два випадки.

(а) $x + \psi'(p) = 0$ і розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p \cdot \psi'(p) + \psi(p). \end{cases} \quad (1.5.27)$$

(б) $dp = 0$, $p = C$ і розв’язок має вигляд

$$y = Cx + \psi(C). \quad (1.5.28)$$

Загальним розв’язком рівняння Клеро буде сім’я “прямих” (1.5.28). Цю сім’ю огинає особлива крива (1.5.27).

6. Параметризація загального вигляду. Нехай диференціальне рівняння $F(x, y, y') = 0$ вдалося записати у вигляді системи рівнянь з двома параметрами

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \theta(u, v). \quad (1.5.29)$$

Використовуючи співвідношення $dy = y' \cdot dx$, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \cdot dv = \\ = \theta(u, v) \cdot \left(\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \cdot dv \right) \end{aligned} \quad (1.5.30)$$

Перегрупувавши члени, одержимо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} - \theta(u, v) \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \right) du = \\ = \left(\theta(u, v) \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right) dv. \end{aligned} \quad (1.5.31)$$

Звідси

$$\frac{du}{dv} = \frac{\theta(u, v) \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v}}{\frac{\partial \psi(u, v)}{\partial u} - \theta(u, v) \cdot \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}}. \quad (1.5.32)$$

Або отримали рівняння вигляду

$$\frac{du}{dv} = f(u, v). \quad (1.5.33)$$

Параметризація загального вигляду не дає інтеграл диференціального рівняння. Вона дозволяє звести диференціальне рівняння, не розв’язане відносно похідної, до диференціального рівняння, розв’язаного відносно похідної.

7. Нехай рівняння $F(x, y, y') = 0$ можна розв’язати відносно y' і воно має n коренів, тобто його можна записати у вигляді

$$\prod_{i=1}^n (y' - f_i(x, y)) = 0. \quad (1.5.34)$$

Розв'язавши кожне з рівнянь $y' = f_i(x, y)$, $i = \overline{1, n}$, отримаємо n загальних розв'язків (або інтервалів) $y = \varphi_i(x, C)$, $i = \overline{1, n}$ (або $\varphi_i(x, y) = C$, $i = \overline{1, n}$). І загальний розв'язок вихідного рівняння, не розв'язаного відносно похідної має вигляд

$$\prod_{i=1}^n (y - \varphi_i(x, C)) = 0, \quad (1.5.35)$$

або

$$\prod_{i=1}^n (\varphi_i(x, y) - C) = 0. \quad (1.5.36)$$

1.5.2 Вправи для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння вигляду $F(y') = 0$:

Приклад 1.5.1. $(y')^3 - 1 = 0$;

Розв'язок. Рівняння має дійсний розв'язок, тобто воно поставлене коректно. Тому його розв'язком буде $\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - 1 = 0$.

Задача 1.5.2.

Задача 1.5.3.

$$(y')^2 - 2y' + 1 = 0;$$

$$(y')^4 - 16 = 0.$$

2. Розв'язати рівняння вигляду $F(x, y') = 0$:

Приклад 1.5.4. $x = (y')^3 + y'$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $x = t^3 + t$. Використовуючи основну форму запису $dy = y' \cdot dx$ одержимо

$$dy = t \cdot (3t^2 + 1) \cdot dt.$$

Звідси

$$y = \int t \cdot (3t^2 + 1) \cdot dt = \frac{3t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C.$$

Остаточний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$x = t^3 + t, \quad y = \frac{3t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C.$$

Задача 1.5.5.

$$x \cdot ((y')^2 - 1) = 2y';$$

Задача 1.5.6.

$$x = y' \cdot \sqrt{(y')^2 - 1};$$

Задача 1.5.7.

$$y' \cdot (x - \ln y') = 1.$$

3. Розв'язати рівняння вигляду $F(y, y') = 0$:

Приклад 1.5.8. $y = (y')^2 + 2(y')^3$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $y = t^2 + 2t^3$. Використовуючи основну форму запису $dy = y' \cdot dx$, одержуємо

$$(2t + 6t^2) \cdot dt = t \cdot dx.$$

Звідси

$$dx = (2 + 6t) \cdot dt, \quad x = \int (2 + 6t) \cdot dt = 2t + 3t^2 + C.$$

Остаточний розв'язок у параметричній формі має вигляд

$$x = 2t + 3t^2, \quad y = t^2 + 2t^3$$

Крім того за рахунок скорочення втрачено $y \equiv 0$.

Задача 1.5.9.

$$y = \ln(1 + (y')^2);$$

Задача 1.5.11.

$$(y')^4 - (y')^2 = y^2.$$

Задача 1.5.10.

$$y = (y' - 1) \cdot e^{y'};$$

4. Розв'язати рівняння Лагранжа

Приклад 1.5.12. $y = -xy' + 4\sqrt{y'}$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $y = -xt + 4\sqrt{t}$. Диференціюємо друге рівняння.

$$dy = -x \cdot dt - t \cdot dx + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt.$$

Оскільки зроблено заміну $dy = t \cdot dx$, то одержимо

$$t \cdot dx = -x \cdot dt - t \cdot dx + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt,$$

або

$$2t \cdot dx = -x \cdot dt + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt.$$

Звідси

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{2t} = \frac{1}{t \cdot \sqrt{t}}.$$

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння може бути представлений у вигляді

$$\begin{aligned} x &= \exp \left\{ - \int \frac{dt}{2t} \right\} \cdot \left(\int \exp \left\{ \int \frac{dt}{2t} \right\} \cdot \frac{1}{t \cdot \sqrt{t}} + C \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left(\int \frac{dt}{t} + C \right) = \frac{\ln |t| + C}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$x = \frac{\ln |t| + C}{\sqrt{t}}, \quad y = -\sqrt{t} \cdot (\ln |t| + C) + 4\sqrt{t}.$$

Крім того при діленні на t втратили $y \equiv 0$.

Задача 1.5.13.

Задача 1.5.15.

$$y = 2xy' - 4 \cdot (y')^3;$$

$$xy' \cdot (y' + 2) = y;$$

Задача 1.5.14.

Задача 1.5.16.

$$y = x \cdot (y')^2 - 2 \cdot (y')^3;$$

$$2xy' - y = \ln y'.$$

5. Розв'язати рівняння Клеро

Приклад 1.5.17. $y = xy' - (y')^2$;

Розв'язок. Робимо параметризацію $y' = t$, $y = xt - t^2$. Диференціюємо друге рівняння:

$$dy = x \cdot dt + t \cdot dx - 2t \cdot dt.$$

Оскільки зроблено заміну $dy = t \cdot dx$, то одержимо

$$t \cdot dx = x \cdot dt + t \cdot dx - 2t \cdot dt.$$

Звідси $(x - 2t) \cdot dt = 0$. І маємо дві гілки

(а) Особливий розв'язок $x = 2t$, $y = t^2$, або $y = \frac{x^2}{4}$.

(б) Загальний розв'язок $y = Cx - C^2$.

Задача 1.5.18.

$$y = xy' + 4\sqrt{y'};$$

Задача 1.5.19.

$$y = xy' + 2 - y';$$

Задача 1.5.20.

$$y = xy' - \ln y';$$

Задача 1.5.21.

$$y = xy' + \sin y';$$

Задача 1.5.22.

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2};$$

Задача 1.5.23.

$$y = xy' + (y')^3;$$

Задача 1.5.24.

$$y = xy' + \cos(2 + y');$$

Задача 1.5.25.

$$y = xy' - \ln \sqrt{1 + (y')^2};$$

Задача 1.5.26.

$$y = xy' - y' - (y')^3;$$

Задача 1.5.27.

$$y = xy' - \sqrt{2 - (y')^2};$$

Задача 1.5.28.

$$y = xy' + \sqrt{2y' + 2};$$

Задача 1.5.29.

$$y = xy' - e^{y'};$$

Задача 1.5.30.

$$y = xy' - \tan y';$$

Задача 1.5.31.

$$(y')^3 = 3(xy' - y).$$

6. Розв'язати рівняння параметризацією загального виду

Приклад 1.5.32. $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y;$

Розв'язок. Введемо параметризацію рівняння

$$x = u, \quad y' = v, \quad y = \frac{u^2 + 2uv - v^2}{4}.$$

Використовуючи співвідношення $dy = y' \cdot dx$, одержимо рівняння

$$\frac{1}{u}(2u \cdot du + 2u \cdot dv + 2v \cdot du - 2v \cdot dv) = v \cdot du.$$

Перепишемо його у вигляді

$$(u + v) \cdot du + (u - v) \cdot dv = 2v \cdot du,$$

або

$$(u - v) \cdot du + (u - v) \cdot dv = 0,$$

Воно розділяється на два

$$(a) \quad du + dv = 0 \implies v = -u + C.$$

Підставивши в параметризовану систему, одержуємо

$$x = u, \quad y = \frac{u^2 + 2u \cdot (-u + C) - (-u + C)^2}{4},$$

або

$$y = \frac{x^2 + 2x \cdot (-x + C) - (-x + C)^2}{4} = \frac{-2x^2 + 4Cx - C^2}{4}.$$

$$(б) \quad u - v = 0 \implies v = u. \text{ І розв'язок має вигляд } y = \frac{x^2}{2}.$$

Задача 1.5.33.

Задача 1.5.36.

$$5y + (y')^2 = x \cdot (x + y');$$

$$y = x \cdot (y')^2 - 2 \cdot (y')^3;$$

Задача 1.5.34.

Задача 1.5.37.

$$x^2 \cdot (y')^2 = xy y' + 1;$$

$$2xy' - y = y' \cdot \ln(y y');$$

Задача 1.5.35.

Задача 1.5.38.

$$(y')^3 + y^2 = xy y';$$

$$y' = e^{xy'/y}.$$

7. Розв'язати рівняння

Приклад 1.5.39. $(y')^2 - y^2 = 0;$

Розв'язок. Це рівняння розв'язується відносно y' . Маємо

$$y' = y, \quad y' = -y.$$

Розв'язок першого має вигляд $y = ce^x$, другого Ce^{-x} . Загальний розв'язок має вигляд

$$(y - ce^x) \cdot (y - Ce^{-x}) = 0.$$

Задача 1.5.40.

$$y^2 \cdot ((y')^2 + 1) = 1;$$

Задача 1.5.41.

$$(y')^2 - 4y^3 = 0;$$

Задача 1.5.42.

$$x \cdot (y')^2 = y;$$

Задача 1.5.43.

$$(y')^2 + xy = y^2 + xy';$$

Задача 1.5.44.

$$xy' \cdot (xy' + y) = 2y^2.$$