Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №1 на тему: "Поведінка ізольованої популяції. Модель Леслі вікової структури'

Виконав студент групи ОМ-3
Скибицький Нікіта

Київ, 2018

Зміст

1 Поведінка ізольованої популяції

Припустимо, що кількість кролів $P(t)$ (t виражається в місяцях) в заповіднику задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0.004 \cdot P(t) \cdot (150 - P(t)).$$

Нехай спочатку в заповіднику нараховується 50 кролів. Розв'яжіть це диференціальне рівняння та визначте, що станеться з популяцією в майбутньому.

Що станеться з популяцією кролів, якщо початкова чисельність тварин становитиме 300 особин?

Побудувати графіки чисельності популяцій для двох випадків.

1.1 Аналітичний розв'язок

Запишемо обидва питання як задачі Коші для рівняння Бернуллі.

Перша задача:

$$\begin{cases} P'(t) = 0.004 \cdot P(t) \cdot (150 - P(t)), \\ P(0) = 50. \end{cases}$$

Друга задача:

$$\begin{cases} P'(t) = 0.004 \cdot P(t) \cdot (150 - P(t)), \\ P(0) = 300. \end{cases}$$

Як відомо з курсу диференціальних рівнянь, загальним розв'язком цього рівняння Бернуллі є функція

$$P(t) = \frac{150 \cdot e^{0.6t}}{e^{0.6t} + C},$$

де стала C визначається початковими умовами.

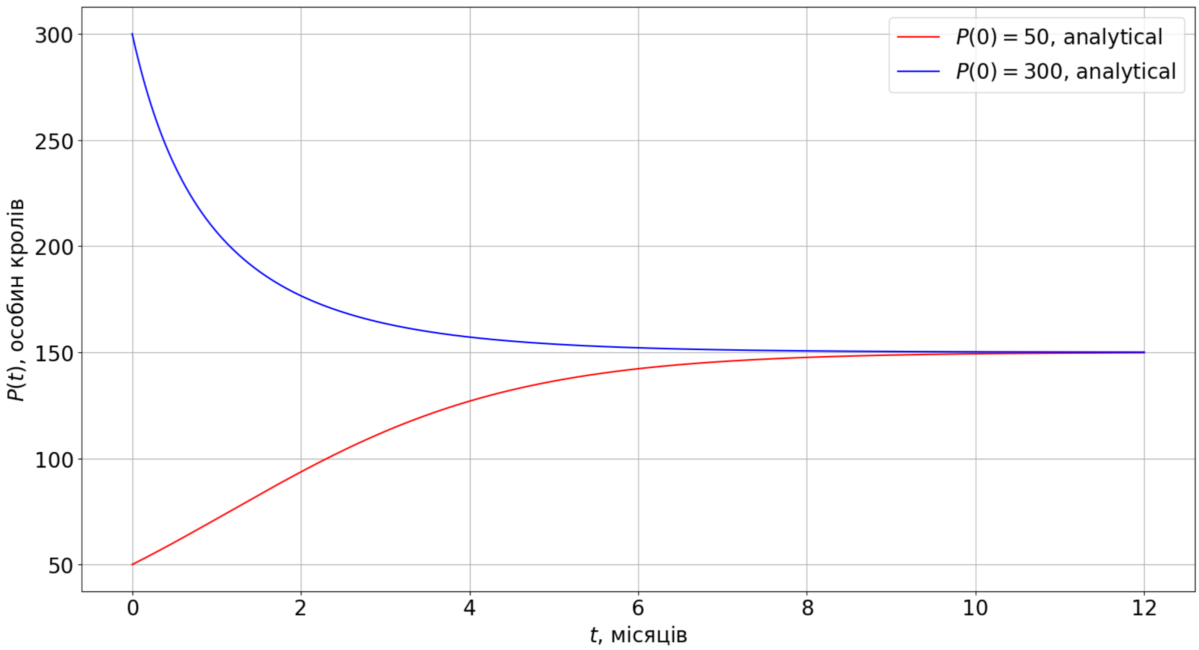
Для першої задачі Коші $C = 2$, і відповідний розв'язок набуває вигляду:

$$P(t) = \frac{150 \cdot e^{0.6t}}{e^{0.6t} + 2}.$$

Для другої задачі Коші $C = -0.5$, і відповідний розв'язок набуває вигляду:

$$P(t) = \frac{150 \cdot e^{0.6t}}{e^{0.6t} - 0.5}.$$

Графіки цих аналітичних розв'язків:



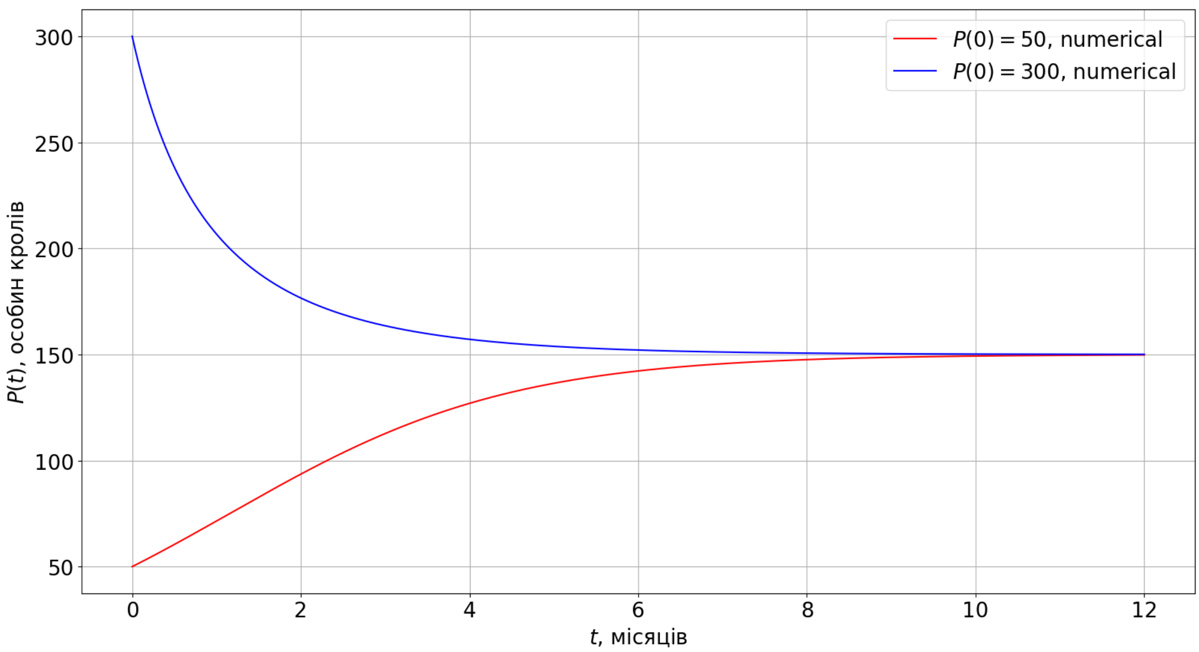
1.2 Чисельне моделювання

Було використано мову програмування `Python` і модуль `scipy.integrate`. Лістинг коду програми:

```
#!/usr/bin/env python
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np

# проміжок на якому розглядається задачу, 12 місяців = 1 рік
t = np.linspace(0, 12, 1000)

# початкові умови
P10, P20 = 50, 300


# задаємо похідну dP / dt як функцію двох змінних: P і t
def dPdt(P, t):
        return 0.004 * P * (150 - P)


# знаходимо чисельні розв'язки відповідних задач Коші
P1, P2 = odeint(dPdt, P10, t), odeint(dPdt, P20, t)


# побудова графіків
matplotlib.rcParams.update({'font.size': 20})
plt.plot(t, P1, 'r-', label='$P(0) = 50$, numerical')
plt.plot(t, P2, 'b-', label='$P(0) = 300$, numerical')
```

```
plt.xlabel('$t$, місяців')
plt.ylabel('$P(t)$, особин кролів')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.get_current_fig_manager().full_screen_toggle()
plt.show()
```

Графіки отриманих чисельних розв'язків:



Як бачимо отримані графіки (майже) не відрізняються.

1.3 Висновки про задачу

Модель що розглядається в задачі – модель Верхюльста, канонічним записом якої є

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{q}\right), \quad N(0) = N_0,$$

де r – коефіцієнт росту. Іншою назвою є "рівняння логістичного росту". У нашій задачі коефіцієнт росту – $150 \cdot 0.004 = 0.6$.

Як відомо з теоретичного курсу лекції, модель враховує внутрішньовидову конкуренцію (містить член $-c \cdot N^2$), тому популяції не зростають необмежено а прямують до ємності середовища, у нашому випадку – 150 особин кролів.

Отримані аналітичні та чисельні розв'язки повністю підтверджують теоретичні результати.

2 Модель Леслі вікової структури

Вихідна популяція складається з трьох вікових груп.

Матриця Леслі має вигляд

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

У початковий момент часу ($t = 0$) популяція складається з однієї самки кожного віку.

Знайти:

1. склад $x(t)$ у момент часу $t = 5$;
2. стійку вікову структуру популяції;
3. момент часу, коли загальна кількість популяції перевищить 75 особин.

2.1 Чисельне моделювання

Було використано мову програмування `Python` і модуль `numpy.linalg`. Лістинг коду програми:

```
#!/usr/bin/env python -W ignore
import numpy as np

# матриця Леслі
L = np.array([
        [  0,   6, 15],
        [0.5,   0,  0],
        [  0, 0.5,  0]
])

# початковий розподіл популяції
x0 = np.array([1, 1, 1])

# розподіл через t = 5 кроків обчислюємо як L^t * x0
t = 5
xt = np.dot(np.linalg.matrix_power(L, t), x0)
print(f'x({t}) = {xt}')  # x(5) = [239.625   55.125   16.6875]

# знаходимо власні значення і власні вектори
_lambda, x = np.linalg.eig(L)
# знаходимо найбільше додатне власне значення
lambda_L = np.max(_lambda)

print(f'lambda_L = {np.float_(lambda_L)}')  # lambda_L = 2.173738392044369

# знаходимо власний вектор що йому відповідає
x_L = x[:, _lambda == lambda_L].T[0]
# нормуємо цей вектор в || ||_1 нормі
x_L /= np.linalg.norm(x_L, 1)

print(f'x_L = {np.abs(np.float_(x_L))}')  # x_L = [0.77946759 0.17929195 0.04124046]

# знаходимо min t: ||x(t)||_1 > 75
```

```
t = 0
while np.sum(x0) <= 75:
        x0 = np.dot(L, x0)
        t += 1

print(f't = {t}, X({t}) = {np.sum(x0)}')  # t = 3, X(3) = 77.25
```

Запишемо $x(t) = L^t \cdot x(0)$, звідси

$$x(5) = L^5 \cdot x(0) = (239.625, 55.125, 16.6875)^T.$$

Для визначення стійкої структури популяції знайдемо власні числа матриці Леслі:

$$\det(L - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 6 & 15 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + \frac{15}{4} = 0.$$

Найбільшим додатним власним числом є

$$\lambda_L = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \sqrt[3]{405 - 27\sqrt{161}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{161}} \right) \approx 2.17374.$$

Цьому власному числу відповідає власний вектор

$$x_L = \left(8 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{10422 - 810\sqrt{161}} + \sqrt[3]{386 + 30\sqrt{161}}, \frac{1}{3} \sqrt[3]{405 - 27\sqrt{161}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{161}}, 1 \right)^T \approx$$
$$\approx (18.9006, 4.34748, 1)^T.$$

Для зручності пронормуємо цей вектор у $\| \cdot \|_1$-нормі, щоб дізнатися відсоткове співвідношення чисельностей вікових груп, отримаємо

$$\tilde{x}_L = (0.77946759, 0.17929195, 0.04124046)^T.$$

Як бачимо, у стійкій віковій структурі популяції 78% особин першої вікової категорії, 18% особин другої вікової категорії, і 4% особин третьої вікової категорії.

Останнє завдання розв'язуємо простим циклом, ось його вивід:

t	$\|x(t)\|_1$
0	3
1	22.0
2	21.25
3	77.25

Як бачимо, чисельність популяції вперше перевищує 75 особин у момент часу $t = 3$.