Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №3 на тему: "Попит та пропозиція. Ринкова рівновага. Стабільність рівноваги. Вплив дотації"

Виконав студент групи ОМ-3
Скибицький Нікіта

Київ, 2019

Зміст

1 Теоретичні відомості

1.1 Аналітична апроксимація

За заданою таблицею значень попиту d_i і пропозиції s_i в залежності від ціни p_i, $i = \overline{1,n}$ знаходиться аналітичний вигляд функцій $Q_d(P)$ та $Q_s(P)$.

Наприклад, можна обмежитися певною сім'єю параметризованих функцій, наприклад

$$Q_d(P) = a_d \cdot P + b_p,$$

тобто лінійних функцій, або

$$Q_s(P) = a_s \cdot \exp\left\{b_s \cdot P\right\},$$

тобто експонент. Серед найрозповсюдженіших моделей залежностей можна також виділити логарифмічну, тобто

$$y = a + b \cdot \ln(x)$$

і поліноміальну, тобто

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Таке обмеження дозволяє поставити скінченно-вимірну оптимізаційну задачу

$$\mathcal{J}(Q_d) = \sum_{i=1}^{n} \left(Q_d(p_i) - d_i\right)^2 \to \min,$$

розв'язок знаходиться за допомогою ітераційних чисельних або навіть аналітичних методів (у випадку найпростіших моделей).

Рекомендується не одразу обмежуватися лише одним класом залежностей, а спробувати усі найпоширеніші, знайти оптимальну функцію з кожного класу, обчислити для них середньоквадратичні відхилення і обирати той клас, на якому досягається мінімум середньоквадратичного відхилення.

1.2 Стабільність рівноваги

За знайденими аналітичними виглядами функці $Q_d(P)$ та $Q_s(P)$ будуються графіки, спочатку у вісях (P, Q) (для математиків), а згодом і у (Q, P) (для економістів), знаходиться точка ринкової рівноваги $(P^\star, Q^\star)$ у якій

$$Q_s(P^\star) = Q_d(P^\star) = Q^\star.$$

Ринок рідко перебуває саме у стані рівноваги, здебільшого відбувається покрокове ітеративне уточнення ціни P (і, як наслідок, обсягу Q), причому в залежності від поведінки функцій $Q_s(\cdot)$ та $Q_d(\cdot)$ в околі точки $(P^\star, Q^\star)$ залижть чи ринок прямує до стану рівноваги, чи він осцилює довкола, чи навіть віддаляється.

Поведінка ринку залежить від стабільності точки рівноваги, яка може бути виражена у числах наступним чином:

- Якщо $\left|\left.\frac{\mathrm{d}Q_d}{\mathrm{d}P}\right|\right|_{P=P^\star} > \left.\frac{\mathrm{d}Q_s}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P^\star}$, то рівновага стійка.
- Якщо $\left|\left.\frac{\mathrm{d}Q_d}{\mathrm{d}P}\right|\right|_{P=P^\star} = \left.\frac{\mathrm{d}Q_s}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P^\star}$, то відбуваються коливання довкола рівноваги.
- Якщо $\left|\left.\frac{\mathrm{d}Q_d}{\mathrm{d}P}\right|\right|_{P=P^\star} < \left.\frac{\mathrm{d}Q_s}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P^\star}$, то рівновага не стійка.

1.3 Вплив державного регулювання

Існує щонайменше чотири види державного регулювання, це податок tax, дотація dot, субсидія sub і квота виробництва Q_{lim}. Вони впливають на функції попиту і пропозиції наступним чином:

- Якщо $Q_s(P) = f(P)$ і ставка податку дорівнює tax, то $Q_s^{\mathrm{tax}} = f(P - \mathrm{tax})$.
- Якщо $Q_s(P) = f(P)$ і розмір дотації дорівнює dot, то $Q_s^{\mathrm{dot}} = f(P + \mathrm{dot})$.
- Якщо $Q_d(P) = f(P)$ і розмір субсидії дорівнює sub, то $Q_d^{\mathrm{sub}} = f(P - \mathrm{sub})$.
- Якщо квота виробництва дорівнює Q_{lim}, то $Q_s(P) = Q_{\mathrm{lim}}$, не залежить від ціни.

2 Чисельне моделювання

Було використано мову програмування `Python` і модуль `scipy`.

2.1 Код

```python
#!/usr/bin/env python
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
from scipy.optimize import curve_fit, root_scalar
import numpy as np
from typing import Callable


df = pd.DataFrame({
        'price': [1.2, 1.7, 2.5, 2.9, 3.5, 4.2, 4.8, 5.5],
        'demand': [122, 97, 77, 56, 43, 36, 27, 17],
        'supply': [20, 35, 59, 65, 78, 83, 95, 120],
})

p_l, p_r, q_l, q_r = 1, 6, 10, 130
```

```python
class SupplyLin(object):
        def __init__(self, df: pd.DataFrame):
                self.a, self.b = curve_fit(lambda t, a, b: a * t + b,
                        df['price'], df['supply'])[0]

        def __call__(self, t: float) -> float:
                return self.a * t + self.b

        def __repr__(self):
                return f'{self.a:.2f} * t + {self.b:.2f}'


class DemandExp(object):
        def __init__(self, df: pd.DataFrame):
                self.a, self.b = curve_fit(lambda t, a, b: a * np.exp(b * t),
                        df['price'], df['demand'])[0]

        def __call__(self, t: float) -> float:
                return self.a * np.exp(self.b * t)

        def __repr__(self):
                return f'{self.a:.2f} * exp({self.b:.2f} * t)'


f = {'supply_lin': SupplyLin(df), 'demand_exp': DemandExp(df)}

price_space = np.arange(1, 6, .01)

df_interp = pd.DataFrame({
        'price': price_space,
        'demand': f['demand_exp'](price_space),
        'supply': f['supply_lin'](price_space),
})

p = root_scalar(lambda t: f['demand_exp'](t) - f['supply_lin'](t), x0=p_l, x1=p_r).root
q = (f['demand_exp'](p) + f['supply_lin'](p)) / 2


plt.figure(figsize=(20,20))
plt.scatter(df['price'], df['demand'], s=100,
        marker='x', c='r', label='$Q_d(P)$, true')
plt.scatter(df['price'], df['supply'], s=100,
        marker='x', c='b', label='$Q_s(P)$, true')
plt.plot(df_interp['price'], df_interp['supply'],
        'b-', label='$Q_s(P)$', zorder=1)
plt.plot(df_interp['price'], df_interp['demand'],
        'r-', label='$Q_d(P)$', zorder=1)
plt.scatter(p, q, s=100, c='k', label=f'equilibrium, ({p:.2f}, {q:.2f})', zorder=2)
plt.axvline(p, 0, (q - q_l) / (q_r - q_l), c='k', linestyle='--')
plt.axhline(q, 0, (p - p_l) / (p_r - p_l), c='k', linestyle='--')
```

```python
plt.title('Лінії тренду у вісях $(P, Q)$', fontsize=20)
plt.xlabel('$P$', fontsize=16)
plt.ylabel('$Q$', fontsize=16)
plt.xlim((p_l, p_r))
plt.ylim((q_l, q_r))
plt.legend(loc='right', fontsize=16)
plt.grid(True)
plt.savefig('../tex/p_q.png', bbox_inches='tight')
```

Ми не наводимо тут код для побудови графіку у вісях (Q, P) адже він цілком аналогічний коду для побудови графіку у вісях (P, Q), тому одразу перейдемо до коду для впливу дотації:

```python
dotation = .5

df_dot = pd.DataFrame({
        'price': price_space,
        'demand': f['demand_exp'](price_space),
        'supply': f['supply_lin'](price_space + dotation),
})

p = root_scalar(lambda t: f['demand_exp'](t) - f['supply_lin'](t + dotation),
        x0=p_l, x1=p_r).root
q = (f['demand_exp'](p) + f['supply_lin'](p + dotation)) / 2


plt.figure(figsize=(20,20))
plt.plot(df_dot['supply'], df_dot['price'],
        'b-', label='$Q_s^{dot}(P)$', zorder=1)
plt.plot(df_dot['demand'], df_dot['price'],
        'r-', label='$Q_d(P)$', zorder=1)
plt.plot(df_interp['supply'], df_interp['price'],
        'b--', label='$Q_s(P)$', zorder=1)
plt.scatter(q, p, s=100, c='k', label=f'equilibrium, ({q:.2f}, {p:.2f})', zorder=2)
plt.axvline(q, 0, (p - p_l) / (p_r - p_l), c='k', linestyle='--')
plt.axhline(p, 0, (q - q_l) / (q_r - q_l), c='k', linestyle='--')
plt.title(f'Вплив дотації, $dot={dotation}$', fontsize=20)
plt.xlabel('$Q$', fontsize=16)
plt.ylabel('$P$', fontsize=16)
plt.xlim((q_l, q_r))
plt.ylim((p_l, p_r))
plt.legend(loc='right', fontsize=16)
plt.grid(True)
plt.savefig('../tex/dotation.png', bbox_inches='tight')
```

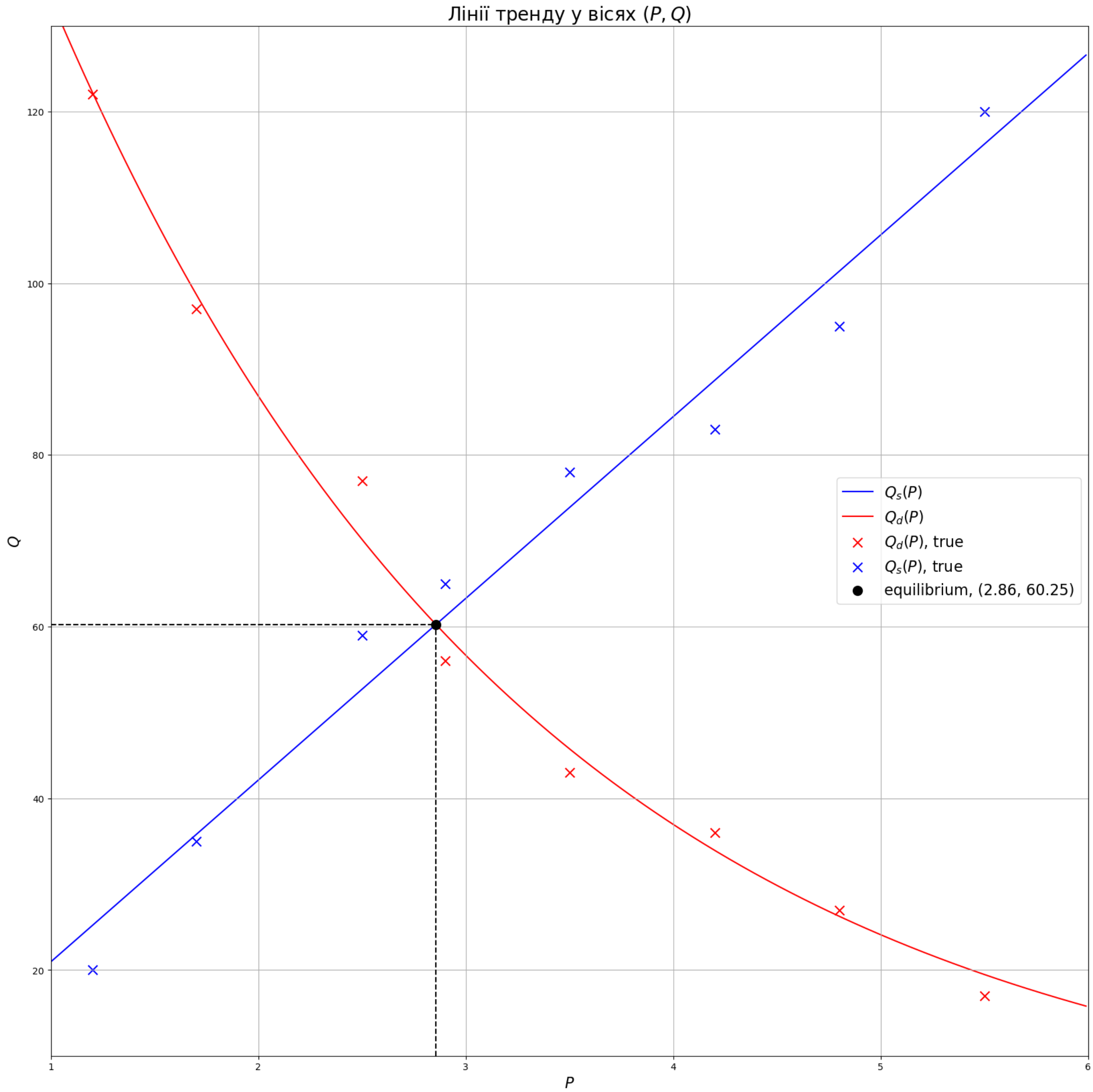
2.2 Аналітичні апроксимації

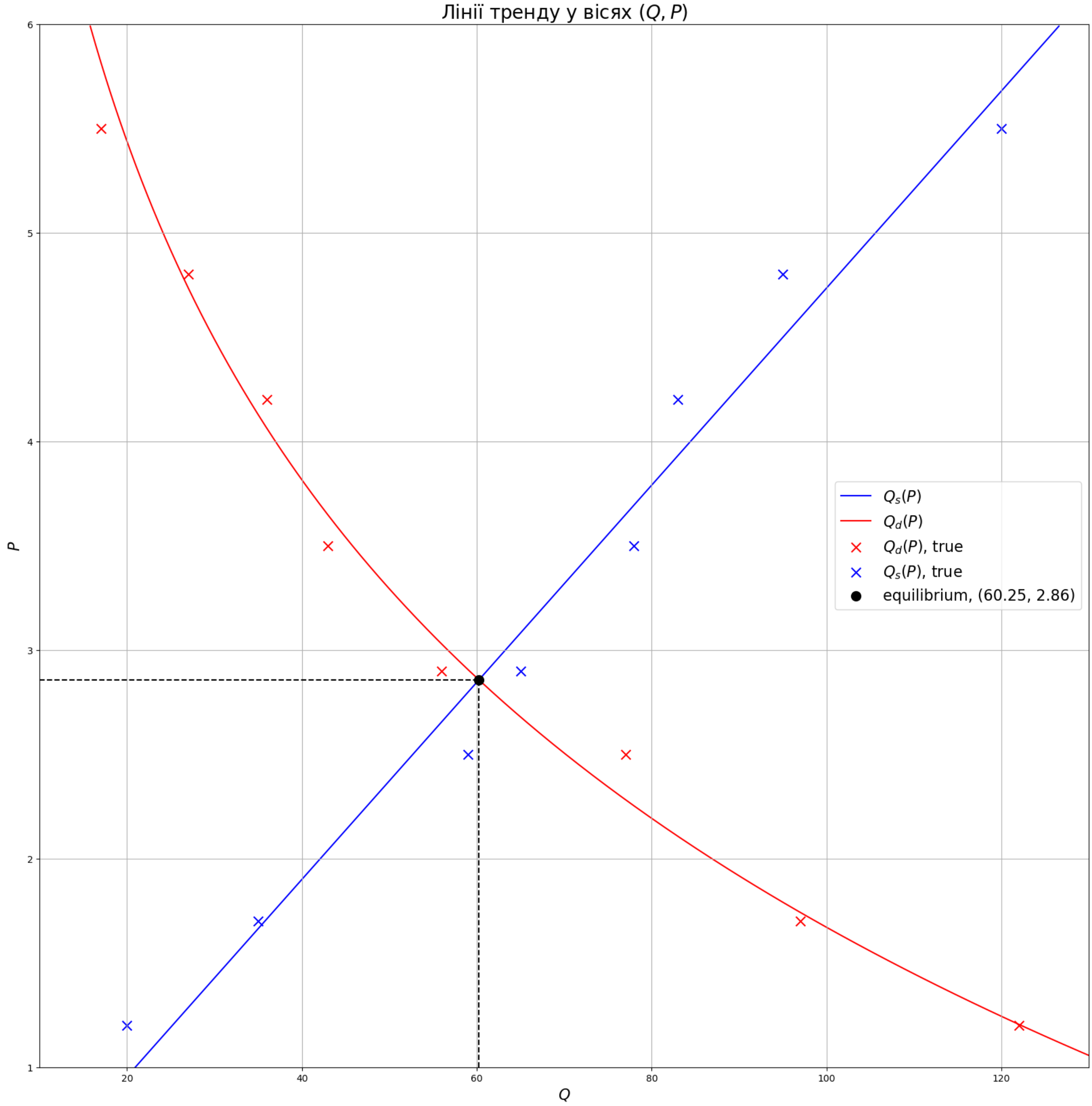
Було розглянуто лінійні, експоненціальні, та логарифмічні залежності, найкращі представники цих класів залежностей наступні та відповідні значення функціоналу якості:

попит чи пропозиція	клас залежності	найкраща функція	$\mathcal{J}(\cdot)$
попит	лінійна	$Q_d(P) = -23.59 \cdot P + 136.93$	576
пропозиція	лінійна	$Q_s(P) = 21.17 \cdot P + -0.22$	186
попит	експоненційна	$Q_d(P) = 204.17 \cdot \exp\{-0.43 \cdot P\}$	78
пропозиція	експоненційна	$Q_s(P) = 25.00 \cdot \exp\{0.29 \cdot P\}$	496
попит	логарифмічна	$Q_d(P) = 134.41 + \ln(-69.36 \cdot P)$	83
пропозиція	логарифмічна	$Q_s(P) = 4.31 + \ln(60.14 \cdot P)$	282

У зв'язку з цими значеннями було обрано лінійну залежність для пропозиції і експоненціальну залежність для попиту.

2.3 Графіки





Як бачимо, отримані результати відповідають теоретичним очікуванням.

2.4 Стабільність рівноваги

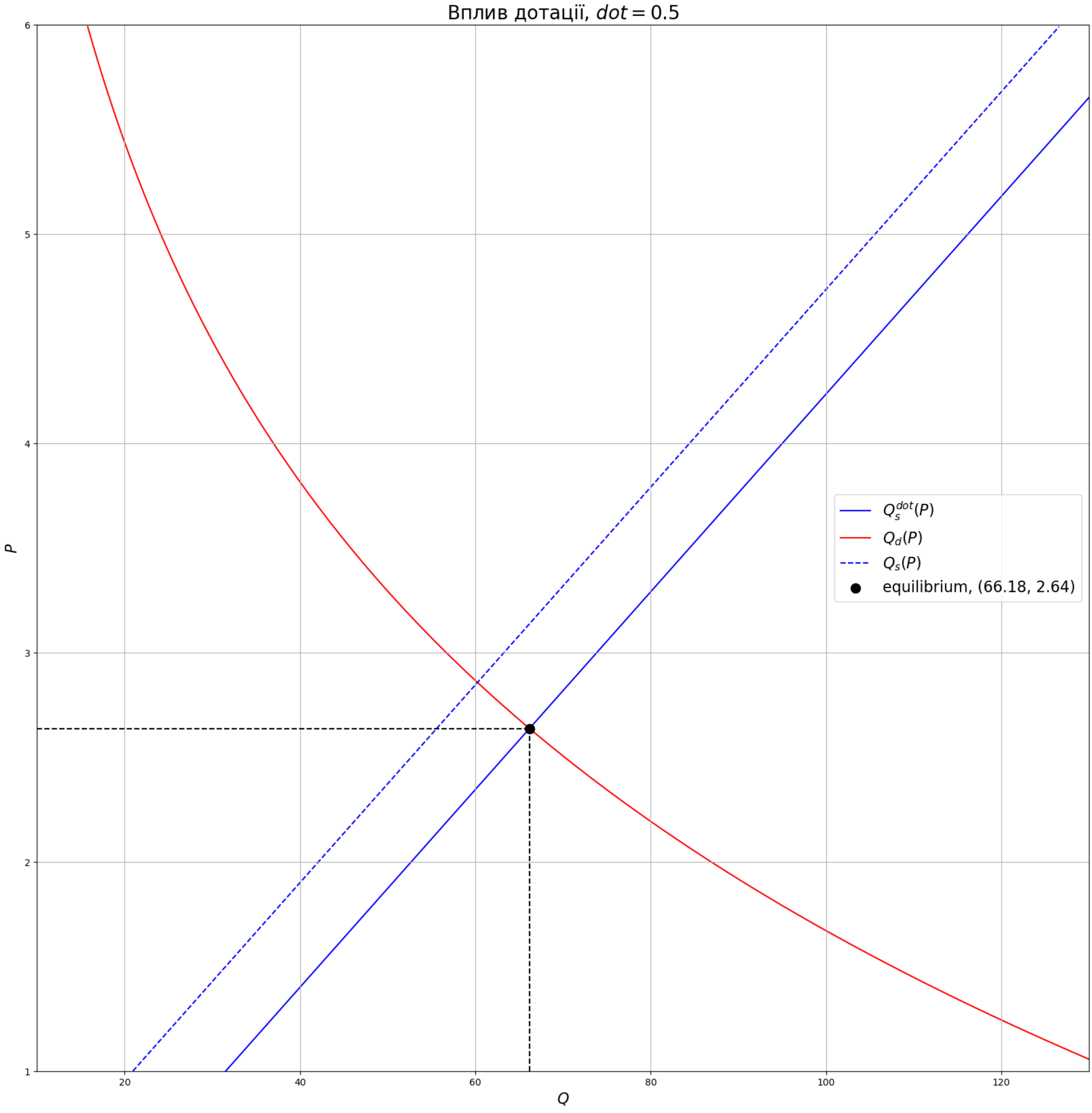
З вибраними аналітичними апроксимаційними функціями маємо

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}Q_d}{\mathrm{d}P}\right|\Bigg|_{P=P^\star} &= \left|-87.7931\cdot\exp\{-0.43\cdot P\}\right|\big|_{P=P^\star} = \\ &= \left(87.7931\cdot\exp\{-0.43\cdot P\}\right)\big|_{P=P^\star} = \\ &= 87.7931\cdot\exp\{-0.43\cdot 2.86\}\approx 25.6664. \\ \left.\frac{\mathrm{d}Q_s}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P^\star} &= 21.17\big|_{P=P^\star} = 21.17.\end{aligned}$$

Таким чином $\left|\frac{\mathrm{d}Q_d}{\mathrm{d}P}\right|\Bigg|_{P=P^\star}\approx 25.6664 > 21.17 = \left.\frac{\mathrm{d}Q_s}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P^\star}$, тому рівновага стійка.

2.5 Вплив дотації

При введенні дотації (тут dot = 0.5) крива пропозиції зсувається вниз, що дозволяє зменшити рівноважну ціну і збільшити обсяг виробництва.



Як бачимо, отримані результати відповідають теоретичним очікуванням.