Екологічні та економічні процеси, та їхнє моделювання

Нікіта Скибицький

30 січня 2019 р.

Зміст

Логістика

Лектор Колянова Тетяна Володимирівна, з кафедри МІ, знайти можна у аудиторії 711 на сьомому поверху, `tania.kolianova@gmail.com`.

Остання лекція 15-го травня, практика 24-го квітня чи десь там, мабуть там і проведемо залік.

Екологічні процеси

В принципі досить складні, бо живі істоти що входять до моделі самі по собі дуже складні. Зачасту для моделювання застосовуються диференціальні рівняння або системи диференціальних рівнянь.

Екологічні процеси дозволяють пояснити зміст фазових портретів системи, стійких і нестійких точок і так далі, тобто надати диференціальним рівнянням певного сенсу.

1 Моделі динаміки ізольованої популяції

1.1 Найпростіші математичні моделі динаміки популяції

Моделі бувають неперервні і дискретні.

1.1.1 Неперервні моделі

Літерою N будемо позначати чисельність (густина, щільність, обсяг, об'єм, кількість) популяції.

Найпростіша модель росту популяції організмів задається рівнянням Бернуллі (1760 р.)

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \mu \cdot N, \quad N(0) = N_0, \tag{1.1.1}$$

де t – час, і $\mu = B - D$, різниця між народжуваністю B і смертністю D.

Розв'язком цього рівняння

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\mu t}. \tag{1.1.2}$$

При $\mu = const > 0$ маємо експоненціальний ріст, більш відомий як закон Мальтуса, або закон експоненціального росту популяції в необмеженому середовищі (в розумінні поживності).

Якщо $\mu > 0$ і $t \to +\infty$ маємо $N(t) \to +\infty$. Якщо ж $\mu < 0$ то при $t \to +\infty$ маємо $N(t) \to 0$.

Першим рівнянням описується доволі багато процесів, таких як радіоактивний розпад або ріст дріжджів, але він неможливий на нескінченному проміжку.

В природі для багатьох популяцій при $t \to +\infty$ маємо $N(t) \to K = const$ (ємність середовища). Цим умовам відповідає, наприклад, модель Гемпертца (1825 р.):

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\mu \cdot \frac{N \cdot \ln \frac{N}{K}}{\ln K}, \quad N(0) = N_0. \tag{1.1.3}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$N(t) = K \cdot \left(\frac{N_0}{K}\right)^{e^{-\frac{\mu}{\ln K}}}. \tag{1.1.4}$$

Зауважимо, що цією моделлю можна користуватися тільки якщо відомий параметр K.

Наступна модель Верхюльста (1838 р.):

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{q}\right), \quad N(0) = N_0, \tag{1.1.5}$$

де r – коефіцієнт росту, $q = K$. Іншою назвою є "рівняння логістичного росту".

Це одне з найперших рівнянь яке враховує внутрішньовидову конкуренцію (містить член $-c \cdot N^2$).

Розв'язком цього рівняння є

$$N(t) = \frac{q}{1 - \left(1 - \frac{q}{N_0}\right) \cdot e^{-rt}}. \tag{1.1.6}$$

При $t \to +\infty$ маємо $N(t) \to q$.

Це певні основні моделі які часто використовуються. Взагалі кажучи різних моделей набагато більше, але це основні з якими ми будемо працювати багато на лабораторних заняттях.

1.1.2 Дискретні моделі

Замінимо і останній моделі похідну її дискретним аналогом:

$$N_{i+1} \approx N_i \cdot \exp\left(r - \left(1 - \frac{N_i}{q}\right)\right). \tag{1.1.7}$$

Ця модель носить назву "модель Ріккера".

Іншими вченими була запропонована ще ось така дискретна модель:

$$N_{i+1} \approx \frac{\lambda \cdot N_i}{(1 + a \cdot N_i)^b}, \tag{1.1.8}$$

де λ, a, b – деякі параметри системи. Ця модель може бути застосованою до багатьох популяцій.

У найзагальнішій формі дискретна модель має вигляд

$$N_{i+1} = N_i \cdot F(N_i), \tag{1.1.9}$$

де $F(\cdot)$ – певна функція.

1.2 Модель Леслі вікової структури

У деяких популяціях врахування вікової структури має досить істотне значення. У життєвому циклі будь-якого організму можна виділити кілька стадій розвитку або вікових сходинок.

Розглядаючи далі деяку популяцію вважатимемо, що вона складатиметься з n вікових груп. Спосіб розбиття на вікові групи визначається, як правило, біологічними особливостями організмів та специфікою задачі.

Вікові структури мають різну ймовірність виживання та народжуваності для кожного періоду. Найпростіша модель яка враховую віковий ценз та ймовірність виживання це модель Леслі (1945 р.):

Нехай $x_i(t)$ – чисельність i-ої вікової групи (якщо не враховувати поділ на статі), $i = \overline{1, n}$. Якщо ж поділ на статі істотний то $x_i(t)$ – чисельність самок i-ої вікової групи.

Змінна t враховує лише дискретні зміни часу при переході від однієї вікової групи до наступної.

Для зручності вводиться вектор стану вікової структури

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T . \tag{1.2.1}$$

Вважатимемо, що функція народжуваності $b(x)$ та функції, що характеризують перехід від однієї вікової структури до іншої $s(x)$ мають вигляд

$$b_i(x) = b_i \cdot x_i \quad (i = \overline{1, n}), \tag{1.2.2}$$

$$s_i(x) = s_i \cdot x_i \quad (0 \leq s_i \leq 1). \tag{1.2.3}$$

Тоді чисельність кожної із вікових груп можна описати наступними співвідношеннями

$$x_1(t+1) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i(t), \tag{1.2.4}$$

$$x_{i+1}(t) = x_i \cdot x_i(t), \quad i = \overline{i, n-2}, \tag{1.2.5}$$

$$x_n(t+1) = s_{n-1} \cdot x_{n-1}(t) + s_n \cdot x_n(t). \tag{1.2.6}$$

Введемо матрицю Леслі:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & s_n \end{pmatrix} \tag{1.2.7}$$

Тоді систему Леслі можна записати у матричному вигляді:

$$X(t+1) = L \cdot X(t). \tag{1.2.8}$$

Якщо відомий початковий розподіл популяції $X(0) = X_0$, то маємо

$$X(t+1) = L^{t+1} \cdot X(0). \tag{1.2.9}$$

Оскільки $b_i, s_i \geq 0$, то L невід'ємно-визначена, тому для неї виконується теорема Перона-Фробеніуса, тобто знайдеться λ_L – найбільше додатне власне число (число Фробеніуса, швидкість росту).

Тоді власний вектор $X_L = \left(x_1^L, \ldots, x_n^L\right)$ що відповідає λ_L – вектор стійкої вікової структури популяції, тобто пропорція між чисельностями вікових груп збігається до пропорції у цьому векторі.

Приклад. Побудувати модель Леслі з трьох вікових груп. Знайти швидкість росту та стійку вікову структуру популяції.

Розв'язок. Будуємо матрицю Леслі:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо його власні значення з характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 9 & 12 \\ \frac{1}{3} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)^2 \cdot (\lambda - 2) = 0.$$

Таким чином маємо:

$$\lambda_L = 2, \quad X_L = (24, 4, 1)^T.$$