Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №1 на тему: "Поведінка ізольованої популяції. Модель Леслі вікової структури'

Виконав студент групи ОМ-3
Скибицький Нікіта

Київ, 2018

Зміст

1 Поведінка ізольованої популяції

Припустимо, що кількість кролів $P(t)$ (t виражається в місяцях) в заповіднику задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0.004 \cdot P(t) \cdot (150 - P(t)).$$

Нехай спочатку в заповіднику нараховується 50 кролів. Розв'яжіть це диференціальне рівняння та визначте, що станеться з популяцією в майбутньому.

Що станеться з популяцією кроів, якщо початкова чисельність травин становитиме 300 особин?

Побудувати графіки чисельності популяцій для двох випадків.

1.1 Аналітичний розв'язок

Запишемо обидва питання як задачі Коші для рівняння Бернуллі.

Перша задача:

$$\begin{cases} P'(t) = 0.004 \cdot P(t) \cdot (150 - P(t)), \\ P(0) = 50. \end{cases}$$

Друга задача:

$$\begin{cases} P'(t) = 0.004 \cdot P(t) \cdot (150 - P(t)), \\ P(0) = 300. \end{cases}$$

Як відомо з курсу диференціальних рівнянь, загальним розв'язком цього рівняння Бернуллі є функція

$$P(t) = \frac{150 \cdot e^{0.6t}}{e^{0.6t} + C},$$

де стала C визначається початковими умовами.

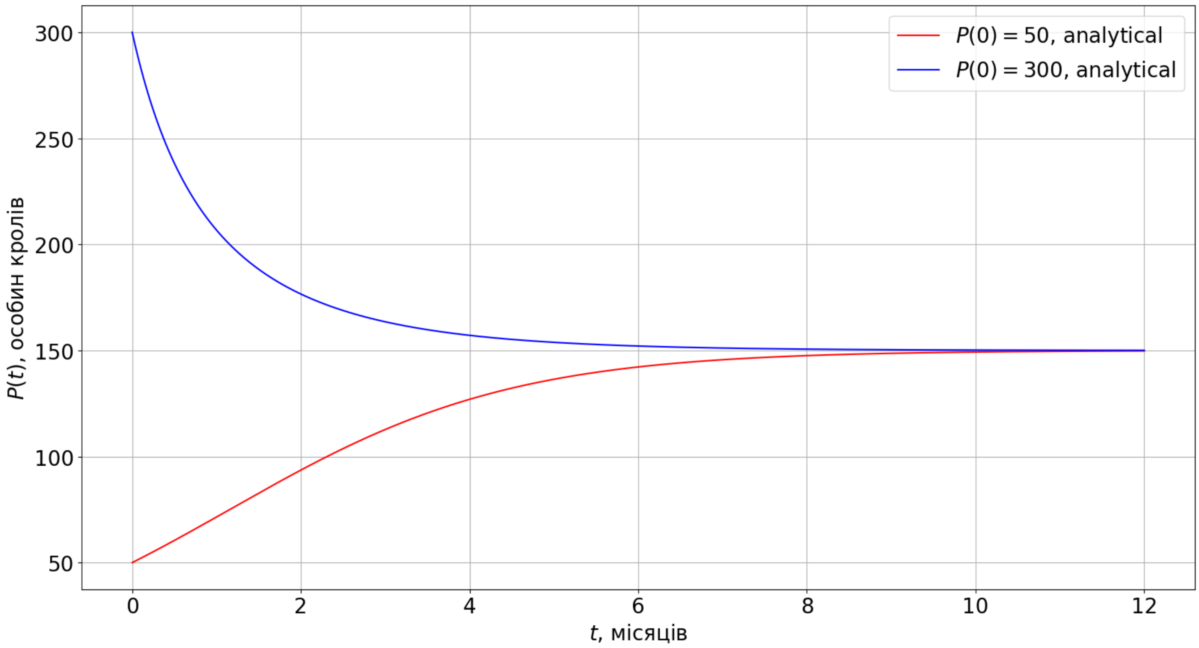
Для першої задачі Коші $C = 2$, і відповідний розв'язок набуває вигляду:

$$P(t) = \frac{150 \cdot e^{0.6t}}{e^{0.6t} + 2}.$$

Для другої задачі Коші $C = -0.5$, і відповідний розв'язок набуває вигляду:

$$P(t) = \frac{150 \cdot e^{0.6t}}{e^{0.6t} - 0.5}.$$

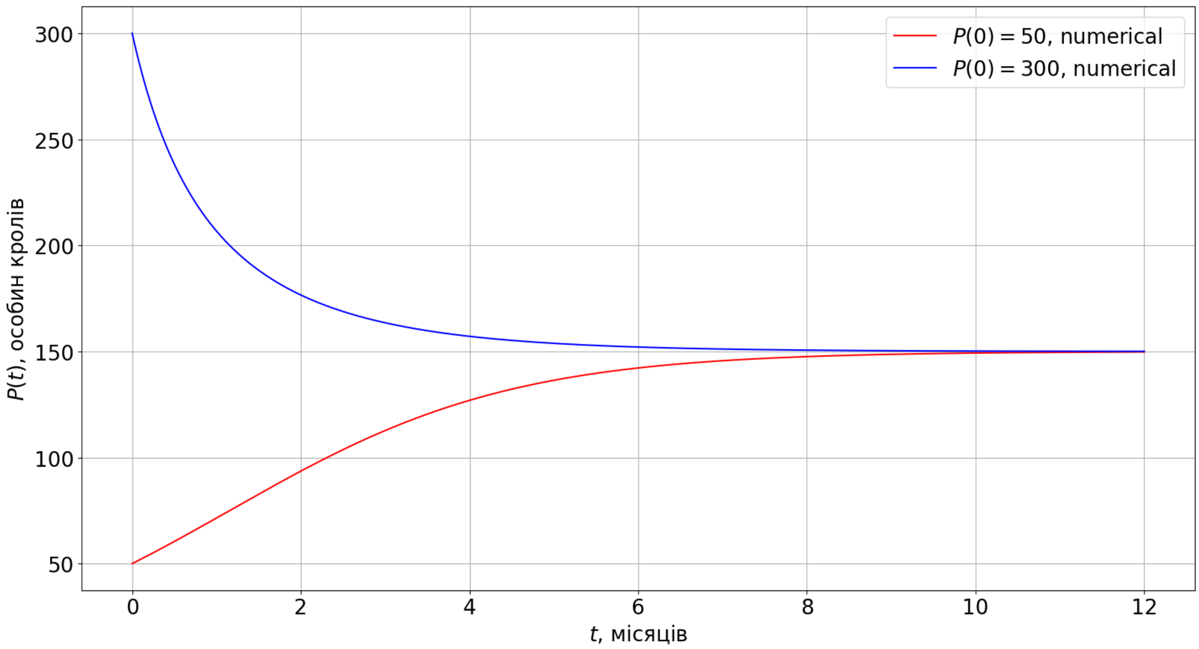
Графіки цих аналітичних розв'язків:



1.2 Чисельне моделювання

Було використано мову програмування `Python` і модуль `scipy.integrate`.

Графіки отриманих чисельних розв'язків:



Як бачимо отримані графіки (майже) не відрізняються.

1.3 Висновки про задачу

Модель що розглядається в задачі – модель Верхюльста, канонічним записом якої є

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{q}\right), \quad N(0) = N_0,$$

де r – коефіцієнт росту. Іншою назвою є “рівняння логістичного росту”. У нашій задачі коефіцієнт росту – $150 \cdot 0.004 = 0.6$.

Як відомо з теоретичного курсу лекції, модель враховує внутрішньовидову конкуренцію (містить член $-c \cdot N^2$), тому популяції не зростають необмежено а прямують до ємності середовища, у нашому випадку – 150 особин кролів.

Отримані аналітичні та чисельні розв’язки повністю підтверджують теоретичні результати.

2 Модель Леслі вікової структури

Вихідна популяція складається з трьох вікових груп.

Матриця Леслі має вигляд

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

У початковий момент часу ($t = 0$) популяція складається з одніє самки кожного віку.

Знайти:

1. склад $x(t)$ у момент часу $t = 5$;
2. стійку вікову структуру популяції;
3. момент часу, коли загальна кількість популяції перевищить 75 особин.

2.1 Чисельне моделювання

Було використано мову програмування `Python` і модуль `numpy.linalg`.

Запишемо $x(t) = L^t \cdot x(0)$, звідси

$$x(5) = L^5 \cdot x(0) = (239.625, 55.125, 16.6875)^T.$$

Для визначення стійкої структури популяції знайдемо власні числа матриці Леслі:

$$\det(L - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 6 & 15 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + \frac{15}{4} = 0.$$

Найбільшим додатним власним числом є

$$\lambda_L = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \sqrt[3]{405 - 27\sqrt{161}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{161}} \right) \approx 2.17374.$$

Цьому власному числу відповідає власний вектор

$$x_L = \left(8 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{10422 - 810\sqrt{161}} + \sqrt[3]{386 + 30\sqrt{161}}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{405 - 27\sqrt{161}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{161}}, 1\right)^T \approx$$
$$\approx (18.9006, 4.34748, 1)^T.$$

Для зручності пронормуємо цей вектор у $\| \cdot \|_1$-нормі, щоб дізнатися відсоткове співвідношення чисельностей вікових груп, отримаємо

$$\tilde{x}_L = (0.77946759, 0.17929195, 0.04124046)^T.$$

2.2 Висновки про задачу