# 31 Біполяра

## §31.1 Абсолютна опуклість і біполяра

**Означення 31.1.** Нехай $X$ — лінійний простір.

**Абсолютно опуклою комбінацією** набору елементів $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ називається будь-яка сума вигляду $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$, де $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1$.

**Означення 31.2.** **Абсолютно опуклою оболонкою** множини $A$ в лінійному просторі $X$ називається множина усіх абсолютно опуклих комбінацій скінченнлшл числа елементів множини $A$. Позначається абсолютно опукла оболонка як $\operatorname{aconv} A$.

Нехай $(X, Y)$ — дуальна пара, $A \subset X$. Тоді $A^0 \subset Y$ і у цієї множини теж можна розглянути поляру.

**Означення 31.3.** Множина $(A^0)^0 \subset X$ називається **біполярою** множини $A \subset X$ і позначається як $A^{00}$.

**Теорема 31.1**

Біполяра $A^{00}$ множини $A \subset X$ збігається з $\sigma(X,Y)$-замиканням абсолютно опуклої оболонки множини $A$.

*Доведення.* Зауважимо, що $A^{00} \supset A$. Дійсно, якщо $x \in A$, то за означенням множини $A^0$:

$$\forall y \in A^0 \quad |\langle x, y\rangle| \leq 1.$$

Це означає, що $X \in A^{00}$.

Далі, біполяра — частковий приклад поляри. Отже, відповідно до пункту 6) теореми 13.2 $A^{00}$ —опукла врівноважена $\sigma(X,Y)$-замкнена множина. Відповідно, $A^{00} \supset \overline{\operatorname{aconv}} A$.

Для доведення оберненого включання візьмемо довільну точку $x_0 \in X \setminus \overline{\operatorname{aconv}} A$ і переконаємося, що $x_0 \notin A^{00}$. Дійсно, оскільки $x_0 \in \overline{\operatorname{aconv}} A$ і $\overline{\operatorname{aconv}} A$ — це опукла врівноважена $\sigma(X,Y)$-замкнена множина, тому за теоремою Хана—Банаха (теорем. 28.5) існує такий $\sigma(X,Y)$-неперервний лінійний функціонал $y$ на $X$, що

1. $|y(x)| \leq 1$ $\forall x \in \overline{\operatorname{aconv}} A$;
2. $|y(x_0)| > 1$.

Будь-який $\sigma(X,Y)$-неперервний лінійний функціонал — це елемент простору $Y$. Умова 1 означає, що $y \in (\overline{\operatorname{aconv}} A)^0 \subset A^0$. Тоді друга умова означає, що $x_0 \notin A^{00}$. □

**Наслідок 31.1**

Якщо $A \subset X$ — $\sigma(X,Y)$-замкнена врівноважена множина, то $A^{00} = A$. Зокрема, $B^{000} = B^0$ $\forall B \subset Y$.

**Наслідок 31.2**

$A^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{lin}} A$ $\forall A \subset X$. Якщо $A$ — лінійний підпростір, то $A^{\perp\perp} = \overline{A}$. Нарешті, $B^{\perp\perp\perp} = B^{\perp}$ $\forall B \subset Y$.

*Доведення.*
$$A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp} = ((\operatorname{lin} A)^{\perp})^{\perp}) = (\operatorname{lin} A)^{00} = \overline{\operatorname{lin}} A. \qquad \square$$

**Наслідок 31.3**

Якщо $A_1, A_2 \subset X$ — $\sigma(X,Y)$-замкнені врівноважені множини, то $A_1 = A_2 \iff A_1^0 = A_2^0$. Якщо до того ж $A_1 = A_2$ — підпростори, то $A_1 = A_2 \iff A_1^{\perp} = A_2^{\perp}$

*Доведення.* Очевидно, що $A_1 = A_2 \implies A_1^0 = A_2^0$.

З іншого боку, якщо $A_1^0 = A_2^0$, то $A_1^{00} = A_2^{00}$ і можна застосувати теорему про біполяру. $\square$

**Теорема 31.2**

Нехай $(X, Y)$ — дуальна пара і $A \subset X$. Тоді наступні умови є еквівалентними:

1. Множина функціоналів $A \subset X$ розділяє точки простору $X$.
2. $A^{\perp} = \{0\}$;
3. $A^{\perp\perp} = X$;
4. Лінійна оболонка множини $A$ є $\sigma(Y, X)$-щільною в $Y$.

*Доведення.* 1 $\implies$ 2. Включення $A^{\perp} \supset \{0\}$ виконано завжди. Якщо ж $x \in X \setminus \{0\}$, то за умовою існує $y \in A$ такий, що $\langle x, y\rangle \neq 0$. У цьому випадку $x \notin A^{\perp}$.

2 $\implies$ 1. Нехай $x \in X \setminus \{0\}$. Тоді $x \notin A^{\perp}$, отже існує $y \in A$, такий що $\langle x, y\rangle \neq 0$.

2 $\iff$ 3. Оскільки $A^{\perp}$ і $\{0\}$ — це $\sigma(X,Y)$-замкнені підпростори, можна скористатися наслідком 11.3.

3 $\iff$ 4. За наслідком 11.2 $A^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{lin}} A$. $\square$

## §31.2 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 533–535).