22 Зв'язок між фільтрами і напрямленностями

Фільтри і напрямленості в одній множині X приводять до еквівалентних теорій збіжності. З одного боку, як показано раніше, кожній напрямленості $\{x_s \mid s \in S\}$ в множині X відповідає асоційований з нею фільтр в X. З іншого боку, має місце така теорема.

§22.1 Відповідність між фільтрами і напрямленостями

Теорема 22.1

Нехай $\mathfrak{F}$ — довільний фільтр в множині X. Тоді в цій множині існує напрямленість $\{x_s \mid s \in S\}$ така, що асоційований з нею фільтр збігається з фільтром $\mathfrak{F}$.

Доведення. Розглянемо множину усіх можливих пар $s = (x, M)$, де $M \in \mathfrak{F}$, а $x \in M$. Уведемо в множині таких пар S частковий передпорядок, поклавши $(x, M) \le (y, N)$, якщо $M \supset N$. Таким чином, S — напрямлена множина.

Задамо відображення $f : S \to X$, поклавши

$$f(s) = x, \quad \forall s = (x, M) \in S.$$

Нехай $s = (x, M)$ — довільний елемент з S, а $\hat{M}_s = \{f(t) \mid t \ge s\}$. За означенням фільтра $\hat{\mathfrak{F}}$, асоційованого з напрямленістю $f : S \to X$, система підмножин $\hat{M}_s$, де s пробігає усі значення в множині S, утворює базу $\hat{\beta}$ фільтра $\hat{\mathfrak{F}}$.

Покажемо, що фільтр $\hat{\mathfrak{F}}$, асоційований з побудованою напрямленістю $f : S \to X$, збігається з фільтром $\mathfrak{F}$, тобто

$$\hat{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{F} \quad \text{і} \quad \mathfrak{F} \le \hat{\mathfrak{F}}.$$

1. Для того щоб довести, що $\hat{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{F}$, треба показати, що

   $$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta} \quad \exists M \in \mathfrak{F} : \quad M \subset \hat{M}_s.$$

   Насправді має місце більш сильний факт:

   $$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta} \quad \exists M \in \mathfrak{F} : \quad M = \hat{M}_s.$$

   Дійсно, нехай $y \in \hat{M}_s$, тобто

   $$\exists t = (z, N) \ge (x, M) = s : \quad y = f(t),$$

   тоді

   $$y = z \in N \subset M \implies \hat{M}_s \subset M.$$

   Тепер візьмемо довільну точку $z \in M$ і покладемо $t^\star = (z, M)$. Оскільки $t^\star \ge s = (x, M)$, то $f(t^\star) = z \in \hat{M}_s$, тобто $M \subset \hat{M}_s$. Таким чином, $M = \hat{M}_s$.

2. Покажемо, що має місце і обернене твердження: $\mathfrak{F} \le \hat{\mathfrak{F}}$. Для цього пересвідчимось, що
$$\forall M \in \mathfrak{F} \quad \exists \hat{M}_s \in \hat{\beta}: \quad \hat{M}_s = M.$$
Нехай $x^\star$ — довільний елемент з M і $s^\star = (x^\star, M)$. Повторимо міркування, наведені вище.

   Нехай $s^\star = (x^\star, M)$ — довільний елемент з S, а $y^\star \in \hat{M}_{s^\star}$, тобто
$$\exists t^\star = (z^\star, N) \ge (x^\star, M) = s^\star: \quad y = f(t^\star),$$
тоді
$$y^\star = x^\star \in N \subset M \implies \hat{M}_{s^\star} \subset M.$$
Тепер візьмемо довільну точку $z^\star \in M$ і покладемо $t^\star = (z^\star, M)$. Оскільки $t^\star \ge s^\star = (x, M)$, то $f(t^\star) = z^\star \in \hat{M}_{s^\star}$, тобто $M \subset \hat{M}_{s^\star}$.

Таким чином, $\mathfrak{F} = \hat{\mathfrak{F}}$. □

§22.2 Границі і граничні точки фільтрів і напрямленостей

Теорема 22.2

Нехай $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ — напрямленість в топологічному просторі X, а $\mathfrak{F}$ — асоційований з нею фільтр. Тоді кожна границя (відповідно, гранична точка) напрямленості ξ є границею (відповідно, граничною точкою) фільтра $\mathfrak{F}$, і навпаки.

Доведення. **Необхідність.** Нехай $x_0 = \lim_S x_s$. Покажемо, що фільтр $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{x_0}$ околів точки x_0, тобто $x_0 = \lim \mathfrak{F}$. Нехай U_0 — довільний елемент $\mathfrak{F}_{x_0}$, тобто деякий окіл точки x_0 в просторі X. Тоді
$$x_0 = \lim_S x_s \implies \exists s_0 \in S : M_{s_0} = \{x_s \mid s \ge s_0\} \subset U_0.$$

Оскільки M_{s_0} — елемент бази фільтра, асоційованого з напрямленістю ξ, то $M_{s_0} \subset U_0 \implies U_0 \in \mathfrak{F}$. Отже,
$$\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}_{x_0} \implies x_0 = \lim \mathfrak{F}.$$

Достатність. Нехай $x_0 = \lim \mathfrak{F}$. Отже, будь-який окіл U_0 точки x_0 є елементом фільтра $\mathfrak{F}$. За означенням, множини $M_s = \{x_t \mid t \ge s\}$ утворюють базу фільтра $\mathfrak{F}$, тому $\exists M_{s_0} \subset U_0$. Отже, для будь-якого околу U_0 точки x_0 існує $s_0 \in S$, такий що усі члени напрямленості ξ при $s \ge s_0$ лежать в U_0, тобто $x_0 = \lim_S x_s$. □

§22.3 Універсальні напрямленості і ультрафільтри

Означення 22.1. Напрямленість $\{x_s \mid s \in S\}$ в множині X називається **універсальною**, якщо для будь-якої підмножини $M \subset X$ вона або майже вся лежить в M, або майже вся лежить в $X \setminus M$.

Теорема 22.3

Напрямленість в X є універсальною тоді і лише тоді, коли асоційований з нею фільтр є ультрафільтром.

Доведення. **Необхідність.** Нехай $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ — універсальна напрямленість в X, $\mathfrak{F}$ — асоційований з нею фільтр, а M — довільна підмножина з X. Покажемо, що або M, або $X \setminus M$ належать фільтру $\mathfrak{F}$, звідки випливає, що $\mathfrak{F}$ — ультрафільтр (теорем. 21.2).

Оскільки $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ — універсальна напрямленість в X, то вона майже вся лежить або в M, або в $X \setminus M$, тобто існує індекс $s_0 \in S$, такий що множина $M_{s_0} = \{x_s \mid s \geq s_0\}$ цілком міститься або в M, або в $X \setminus M$. Але оскільки M_{s_0} належить базі фільтра $\mathfrak{F}$, то або M, або $X \setminus M$ містить M_{s_0}, тобто є елементом фільтра $\mathfrak{F}$.

Достатність. Нехай $\mathfrak{F}$ — ультрафільтр, а M — довільна підмножина з X. Доведемо, що $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ майже вся лежить або в M, або в $X \setminus M$. Оскільки або M, або $X \setminus M$ є елементом фільтра $\mathfrak{F}$, то одна з цих множин повинна цілком містити деяку множину з бази фільтра $\mathfrak{F}$ тобто деяку множину M_{s_0}. Це значить, що $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ майже вся лежить або в M, або в $X \setminus M$. Отже, ξ — універсальна напрямленість в X. □

§22.4 Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 101–113).