15 Спряжені оператори, спектр і компактні оператори

§15.1 Спряжені оператори

Нехай E і F — лінійні топологічні простори. Розглянемо неперервний лінійний оператор $A : E \to F$ і функціонал $g \in F^\star$. Застосуємо функціонал g до елемента $y = Ax$. Це визначає функціонал $f \in E^\star$, який визначається формулою $f(x) = g(Ax)$.

Означення 15.1. Оператор $A^\star : F^\star \to E^\star$, що визначається формулою $f(x) = g(Ax)$ і ставить кожному функціоналу g із простору $F^\star$ функціонал f із простору $E^\star$, називається **спряженим** до оператора A.

Приклад 15.1

Розглянемо оператор

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

і функціонал

$$y = Ax,$$

який визначається як

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Тоді

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{i=1}^{m} g_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g_i a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} g_i a_{i,j}.$$

Отже,

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{i,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

З цього випливає, що

$$f = A^\star g \implies A^\star = A^\intercal.$$

Це означає, що спряжений оператор визначається транспонованою матрицею.

Позначивши значення функціонала f на елементі x символом (f, x), отримаємо, що

$$(g, Ax) = (f, x) = (A^\star g, x).$$

Теорема 15.1

Якщо $A \in \mathcal{L}(E, F)$, де E, F — банахові простори, то $\|A\| = \|A^\star\|$.

Доведення. З одного боку

$$|(A^\star g, x)| = |(g, Ax)| \leq \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

звідки

$$\|A^\star g\| \leq \|A\| \cdot \|g\|,$$

тобто

$$\|A^\star\| \leq \|A\|.$$

З іншого боку, для $x \in E$ і $Ax \neq 0$ існує елемент

$$y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|} \in F \implies \|y_0\| = 1.$$

Отже, за теоремою Хана—Банаха існує функціонал g, такий що $\|g\| = 1$, $(g, y_0) = 1$. З цього випливає, що

$$(g, y_0) = \left(g, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = \frac{1}{\|Ax\|}(g, Ax) = 1.$$

Тоді $(g, Ax) = \|Ax\|$. Таким чином,

$$\|Ax\| = (g, Ax) = |(A^\star g, x)| \leq \|A^\star\| \cdot \|g\| \cdot \|x\| = \|A^\star\| \cdot \|x\|,$$

тобто

$$\|A\| \leq \|A^\star\|.$$

Поєднуючи дві нерівності отримуємо, що

$$\|A\| = \|A^\star\|. \qquad \square$$

§15.2 Спектр оператора

Означення 15.2. Нехай $A : E \to E$, де E — комплексний банахів простір. Число λ називається **регулярним** для оператора A, якщо оператор

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$$

визначений на всьому просторі E.

Означення 15.3. Оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ називається **резольвентою**.

Означення 15.4. Сукупність всіх чисел λ, які не є регулярними для оператора A, називається його **спектром**.

Означення 15.5. Число λ, таке що рівняння

$$Ax = \lambda x$$

має ненульові розв'язки, називається **власним числом** оператора A.

Означення 15.6. Всі власні числа оператора A належать його спектру і утворюють **точковий спектр**.

Означення 15.7. Доповнення до точкового спектру називається **неперервним спектром**.

Приклад 15.2

Розглянемо простір $C[a, b]$ і оператор

$$Ax(t) = tx(t).$$

Тоді

$$(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t).$$

Із умови

$$(t - \lambda)x(t) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

випливає, що неперервна функція $x(t)$ тотожно дорівнює нулю, тому оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ існує для довільного λ.

Проте при $\lambda \in [a, b]$ обернений оператор, що діє за формулою

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{t - \lambda}$$

визначений не на всьому просторі $C[a, b]$ і не є обмеженим. Таким чином, спектром є весь відрізок $[a, b]$, власних чисел немає, тобто оператор A має лише неперервний спектр.

Зауваження 15.1 — У скінченновимірних просторах неперервний спектр оператора є порожньою множиною, спектр збігається із точковим спектром і складається лише із власних чисел.

У нескінченновимірних просторах кожне число відносно оператора є регулярним значенням, власним значенням або елементом неперервного спектру.

Теорема 15.2

Якщо $A \in \mathcal{L}(E, E)$, де E — банахів простір і $|\lambda| > \|A\|$, то λ — регулярне значення для оператора A.

Доведення. Оскільки

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \tfrac{1}{\lambda}A),$$

то

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}.$$

За умови $|\lambda| > \|A\|$ цей ряд збігається і визначає на E обмежений оператор (теорема 14.4). $\square$

Зауваження 15.2 — З теореми 15.2 випливає, що спектр оператора A міститься в колі радіусу $\|A\|$ з центром в нулі.

§15.3 Компактні оператори

Означення 15.8. Оператор A, що діє із банахового простору E в банахів простір F називається **компактним**, або **цілком неперервним**, якщо кожну обмежену множину він переводить у відносно компактну множину.

Приклад 15.3

Лінійний неперервний оператор A, що переводить банахів простір E в його скінченновимірний підпростір, є компактним.

Теорема 15.3

Якщо послідовність компактних операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховому просторі E збігається до оператора A рівномірно, то оператор A теж є компактним.

Доведення. Для доведення компактності оператора A доведемо, що для будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ із послідовності $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність.

Оператор A_1 — компактний, тому із послідовності $\{A_1x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ — послідовність, на якій збігається послідовність, яку ми виділили із $\{A_1x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Оператор A_2 — компактний, тому із послідовності $\{A_2x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ — послідовність, на якій збігається послідовність, яку ми виділили із $\{A_2x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$.

Продовжимо цей процес і виділимо діагональну послідовність

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots$$

Оператори $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ переводять її у збіжну послідовність. Покажемо, що оператор A теж переводить її в збіжну послідовність. Простір E — повний, тому достатньо показати, що $\{Ax_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю.

$$\begin{aligned}
&\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| \leq \\
&\qquad \left\|Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)} + A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)} + A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\| \leq \\
&\qquad\qquad \left\|Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)}\right\| + \left\|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\right\| + \left\|A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\|.
\end{aligned}$$

Нехай $\|x_n\| \leq C$. Оскільки $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$,

$$\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Крім того, оскільки послідовність $\{A_kx_n^{(n)}\}$ є збіжною,

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \left\|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Вибравши $M = \max(K, N)$, отримуємо

$$\forall n, m \geq M : \left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 15.4

Якщо A — лінійний компактний оператор, оператор B — лінійний обмежений, то оператори AB і BA є компактними.

Доведення. Якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то BM — обмежена множина, оскільки обмежений оператор переводить будь-яку обмежену множину в обмежену множину. Отже, множина ABM є відносно компактною. Це означає, що оператор AB є компактним.

Аналогічно, якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то AM — відносно компактна множина, оскільки компактний оператор переводить будь-яку обмежену множину у відносно компактну множину. Оператор B — неперервний, тому множина BAM є відносно компактною. Це означає, що оператор BA є компактним. □

Наслідок 15.1

В нескінченновимірному просторі E компактний оператор не може мати обмеженого оберненого оператору.

Теорема 15.5

Оператор, спряжений до компактного, є компактним.

Спряжені, самоспряжені і компактні оператори відіграють особливо важливу роль у гільбертових просторах. Саме на цих поняттях побудована теорія розв'язності операторних рівнянь в гільбертових просторах.

§15.4 Література

[1] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 230–250).