19 Фільтри

Окрім збіжності напрямленостей, існує ще один вид узагальненої збіжності — збіжність фільтрів. Ця ідея базується на альтернативному означенні збіжної послідовності: послідовність x_n називається збіжною до точки x_0, якщо для будь-якого околу U цієї точки доповнення до прообразу $f^{-1}(U)$ є скінченною підмножиною з $\mathbb{N}$, де $f : \mathbb{N} \to X$ — відображення, що задає послідовність. Якщо множину $\mathbb{N}$ замінити абстрактним простором E, в якому виділено сім'ю підмножин F, що має певні загальні властивості, то можна дати розумне означення узагальненої збіжності.

§19.1 Фільтри

Означення 19.1. Сім'я підмножин $\mathfrak{F}$ множини X називається **фільтром** на X, якщо:

1. Сім'я $\mathfrak{F}$ непорожня.
2. $\varnothing \notin \mathfrak{F}$.
3. Якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$.
4. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.1

$X \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.2

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.3

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$.

Приклад 19.1

Система Ω_x усіх околів точки x у топологічному просторі X є фільтром.

§19.2 Бази фільтрів

Означення 19.2. Непорожня сім'я підмножин $\mathfrak{D}$ множини X називається **базою фільтра**, якщо:

1. $\varnothing \notin \mathfrak{D}$;
2. $\forall A, B \in \mathfrak{D}\ \exists C \in \mathfrak{D}$: $C \subset A \cap B$.

Означення 19.3. Нехай $\mathfrak{D}$ — база фільтра. Фільтром, що **породжений** базою $\mathfrak{D}$, називається сім'я $\mathfrak{F}$ усіх множин $A \subset X$, що містять як підмножину хоча б один елемент бази $\mathfrak{D}$.

> **Вправа 19.1.** Довести, що фільтр, породжений базою, дійсно є фільтром.

Доведення. Перевіримо аксіоми фільтра. Перші дві аксіоми очевидні, адже фільтр містить як підмножину свою непорожню базу, і порожня множина не є надмножиною ніякоїмножини окрім порожньої, а база її не містить. Перевіримо тепер другі дві аксіоми.

Перетин: якщо $A, B \in \mathfrak{F}$ то $\exists C, D \in \mathfrak{D}$ такі, що $C \subset A$ і $D \subset B$, а тоді $\exists E \in \mathfrak{D}$: $E \subset C \cap D$, і тому $E \subset A \cap B$ і, як наслідок, $A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Надмножина: якщо $A \in \mathfrak{F}$ то $\exists B \in \mathfrak{D}$: $B \subset A$, а тому $B \subset C$ для усіх $C \supset A$ і, як наслідок, $C \in \mathfrak{F}$. □

Приклад 19.2

Якщо X — топологічний простір, $x_0 \in X$, $\mathfrak{D}$ — сукупність усіх відкритих множин, що містять x_0, то фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, є фільтром $\mathfrak{M}_{x_0}$, що складається з усіх околів точки x_0.

Означення 19.4. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів множини X. Тоді сім'я $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$ "хвостів" послідовності $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ є базою фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, породжений базою $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$, називається фільтром, **асоційованим** з послідовністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

§19.3 Образи фільтрів і баз фільтрів

Теорема 19.1

Нехай X, Y — множини, $f : X \to Y$ — функція, $\mathfrak{D}$ — база фільтра в X. Тоді сім'я $f(\mathfrak{D})$ усіх множин вигляду $f(A)$, $A \in \mathfrak{D}$ є базою фільтра в Y.

Доведення. Виконання першої аксіоми бази фільтра є очевидним, адже образ непорожньої множини — непорожня множина. Нехай $f(A), f(B)$ — довільні елементи сім'ї $f(\mathfrak{D})$, $A, B \in D$. За другою аксіомою існує таке $C \in \mathfrak{D}$, що $C \subset A \cap B$. Тоді $f(C) \subset f(A) \cap f(B)$. Отже друга аксіома виконується і для сім'ї $f(\mathfrak{D})$. □

Наслідок 19.4

Якщо $\mathfrak{F}$ — фільтр на X, то $f(\mathfrak{F})$ — база фільтра в Y.

Означення 19.5. **Образом фільтра** $\mathfrak{F}$ при відображенні f називається фільтр $f[\mathfrak{F}]$, породжений базою $f(\mathfrak{F})$, тобто

$$A \in f[\mathfrak{F}] \iff f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}.$$

Теорема 19.2

Нехай $\mathfrak{C} \subset 2^X$ — непорожня сім'я множин. Тоді аби існував фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ (тобто такий, що усі елементи сім'ї $\mathfrak{C}$ є елементами фільтра $\mathfrak{F}$) необхідно і достатньо, щоб $\mathfrak{C}$ була центрованою.

Доведення. **Необхідність.** Якщо $\mathfrak{F}$ — фільтр і $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$, то будь-який скінчений набір $A_1, A_2, \dots, A_n$ елементів сім'ї $\mathfrak{C}$ буде складатися з елементів фільтра $\mathfrak{F}$. Отже,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing.$$

Достатність. Нехай $\mathfrak{C}$ — центрована сім'я. Тоді сім'я $\mathfrak{D}$ усіх множин виду

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{C}$$

буде базою фільтра. Як фільтр $\mathfrak{F}$ треба взяти фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$. □

§19.4 Фільтри, породжені базою

Означення 19.6. Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр на X. Сім'я множин $\mathfrak{D}$ називається **базою фільтра $\mathfrak{F}$**, якщо $\mathfrak{D}$ база фільтра і фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, збігається з $\mathfrak{F}$.

Теорема 19.3 (критерій бази фільтра $\mathfrak{F}$)

Для того щоб $\mathfrak{D}$ була базою фільтра $\mathfrak{F}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися дві умови:

1. $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$;
2. $\forall A \in \mathfrak{F}\ \exists B \in \mathfrak{D}$: $B \subset A$.

Вправа 19.2. Доведіть цю теорему.

Доведення. **Необхідність.** Без першої з цих умов $\mathfrak{F}$ замалий щоб бути породженим базою $\mathfrak{D}$ (не містить якоїсь із множин бази), а без другої — завеликий (містить якусь множину A, яка не є надмножиною жодної із множин бази).

Достатність. Зрозуміло, що за таких умов усі множини фільтра $\mathfrak{F}$ будуть належати фільтру, породженому базою $\mathfrak{D}$. Відповідно, питання полягає у тому, щоб у породженому фільтрі не опинилося зайвих множин. Розглянемо якусь множинк A з нього. Вона є надмножиною якогось елемента B бази. З першої умови випливає, що фільтр $\mathfrak{F}$ також містить B. Тоді він містить і множину A як надмножину B. Отже, породжений базою $\mathfrak{D}$ фільтр не може бути ані більшим ані меншим від фільтра $\mathfrak{F}$, і теорема доведена. □

Означення 19.7. Нехай F — фільтр на X і $A \subset X$. **Слідом фільтра $\mathfrak{F}$ на A** називається сім'я підмножин $\mathfrak{F}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathfrak{F}\}$.

Теорема 19.4

Для того щоб слід $\mathfrak{F}_A$ фільтра $\mathfrak{F}$ був фільтром на A, необхідно і достатньо, щоб усі перетини $A \cap B$, $B \in \mathfrak{F}$ були непорожніми.

Вправа 19.3. Доведіть цю теорему.

Доведення. **Необхідність.** Якщо $A \cap B$ порожня для якогось $B \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_A$ містить $A \cap B = \varnothing$, тобто точно не є фільтром, адже не задовольняє першу аксіому.

Достатність. Перевіримо аксіоми фільтра. Перші дві аксіоми очевидні. Перевіримо другі дві аксіоми.

Перетин. Якщо $B, C \in \mathfrak{F}_A$, то $\exists D, E \in \mathfrak{F}$: $B = D \cap A$, $C = E \cap A$. Тоді $B \cap C = (D \cap A) \cap (E \cap A) = (D \cap E) \cap A \in \mathfrak{F}$.

Надмножина. Якщо $B \in \mathfrak{F}_A$, $C \supset B$, $C \subset A$, то $\exists D \in \mathfrak{F}$: $B = D \cap A$. Тоді $C \cup D \supset D$, тобто $C \cup D \in \mathfrak{F}$, а тому $(C \cup D) \cap A = (C \cap A) \cup (D \cap A) = C \cup B = C \in \mathfrak{F}_A$. □

Наслідок 19.5

Зокрема, якщо $A \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_A$ — фільтр.

§19.5 Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 99–102).

[2] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 481–484).