6 Метричні простори

Численні поняття і теореми математичного аналізу використовують поняття відстані між точками простору. Зокрема, це стосується границі і неперервності. В багатьох випадках самі теореми та їх доведення залежать не від способу завдання метрики, а лише від їхніх властивостей: невід'ємності, симетрії і нерівності трикутника.

§6.1 Основні означення

Означення 6.1. Нехай X — довільна множина. Відображення $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ називається **метрикою**, якщо $\forall x, y, z \in X$ воно має такі властивості (аксіоми метрики):

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (аксіома тотожності);
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетрії);
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Означення 6.2. **Метричним простором** називається пара (X, ρ), де X — множина-носій, а ρ — метрика.

Приклад 6.1

$\left(\mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\right)$.

Приклад 6.2

$\left(C[a, b], \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|\right)$.

Означення 6.3. **Відкритою кулею** радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці $x_0 \in X$ називається множина

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Означення 6.4. **Замкненою кулею** радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці $x_0 \in X$ називається множина

$$\overline{S}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Приклад 6.3

В просторі $(\mathbb{R}, |x - y|)$ відкритою кулею $S(x_0, r)$ є інтервал $(x_0 - r, x_0 + r)$, а замкненою кулею — сегмент $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Приклад 6.4

В просторі $(\mathbb{R}^2, \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2})$ відкритою кулею $S(x_0, r)$ є круг без границі радіуса r з центром в точці x_0.

Приклад 6.5

В просторі $(\mathbb{R}^2, |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)$ одинична куля є ромбом з вершинами $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ і $(-1,0)$.

Приклад 6.6

В просторі $\big(C[a,b], \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|\big)$ околом є смуга, що складається із функцій, які задовольняють умові $\forall t \in [a,b]$: $|x(t) - y(t)| < r$.

Означення 6.5. Множина $G \subset X$ називається **відкритою** в метричному просторі (X, ρ), якщо $\forall x \in G\ \exists S(x,r) \subset G$.

Означення 6.6. Множина $G \subset X$ називається **замкненою**, якщо її доповнення є відкритою множиною.

Означення 6.7. Множина метричного простору є **обмеженою за відстанню**, або просто **обмеженою**, якщо воно міститься в деякій кулі: $\exists S(x,r) : M \subset S(x,r)$.

§6.2 Збіжність і замкненість

Означення 6.8. Точка x метричного простору (X, ρ) називається **границею послідовності** точок $x_n \in X$, якщо $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Така збіжність називається **збіжністю за відстанню** (або за метрикою).

Цей факт записується так: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Лема 6.1

Для довільних точок x, x', y, y' метричного простору (X, ρ) виконується нерівність
$$|\rho(x', y') - \rho(x, y)| \le \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Доведення. Із нерівності трикутника випливає:
$$\rho(x', y') \le \rho(x', x) + \rho(x, y') \le \rho(x, x') + \rho(x, y) + \rho(y, y').$$
Отже,
$$\rho(x', y') - \rho(x, y) \le \rho(x, x') + \rho(y, y').$$
Аналогічно,
$$\rho(x, y) \le \rho(x, x') + \rho(x', y) \le \rho(x, x') + \rho(x', y') + \rho(y', y).$$
Звідси випливає, що
$$\rho(x, y) - \rho(x', y') \le \rho(x, x') + \rho(y, y').$$
Таким чином,
$$|\rho(x', y') - \rho(x, y)| \le \rho(x, x') + \rho(y, y'). \qquad \square$$

Лема 6.2

Метрика $\rho(x, y)$ є неперервною функцію своїх аргументів, тобто якщо $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

Доведення. Із леми 6.1 випливає, що при $x_n \to x$, $y_n \to y$

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0. \qquad \square$$

Теорема 6.1

Відкрита куля $S(a, r)$ в метричному просторі (X, ρ) є відкритою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in S(a, r)$.

$$x \in S(a, r) \implies \rho(x, a) < r.$$

Покладемо $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Розглянемо довільну точку $y \in S(x, \varepsilon)$.

$$y \in S(x, e) \implies \rho(y, x) < \varepsilon.$$

$$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \implies y \in S(a, r) \implies S(x, \varepsilon) \subset S(a, r).$$

Таким чином, точка x є внутрішньою точкою множини $S(a, r)$, тобто $S(a, r)$ — відкрита множина. $\square$

Теорема 6.2

Точка x належить замиканню $\overline{A}$ множини $A \subset X$ в топології, що індукована на X метрикою ρ, тоді і лише тоді, якщо існує послідовність точок множини A, що збігається до точки x.

Доведення. Необхідність.

$$x \in \overline{A} \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in S \cap S(x, \tfrac{1}{n}) \implies \rho(x, x_n) < \tfrac{1}{n} \implies x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Достатність.

$$x \notin \overline{A} \implies \exists r > 0 : A \cap S(x, r) = \varnothing \implies$$
$$\forall x' \in A : \rho(x, x') \geq r \implies \nexists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Що і треба було довести. $\square$

Наслідок 6.1

Теорема 6.2 стверджує, що кожна точка дотику множини в метричному просторі є границею деякої послідовності елементів цієї множини. Отже, топологію метричного простору можна описати не лише за допомогою куль, а й за допомогою збіжних послідовностей.

Наслідок 6.2

Множина є замкненою, якщо всі послідовності її точок збігаються лише до точок цієї ж множини.

Теорема 6.3

Замкнена куля $\overline{S}(a, r)$ є замкненою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.

Доведення. Нехай $x_n \in \overline{S}(a, r)$.

$$x_n \in \overline{S}(a, r) \implies \rho(x_n, a) \le r \implies \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = \rho\left(\lim_{n\to\infty} x_n, a\right) = \rho(x, a) \le r \implies x \in \overline{S}(a, r).$$

Отже, всі граничні точки множини $\overline{S}(a, r)$, які є точками її дотику, належать кулі $\overline{S}(a, r)$. □

§6.3 Збіжність і фундаментальність

Означення 6.9. Послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ точок метричного простору (X, ρ) називається **фундаментальною**, якщо $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$.

Лема 6.3

Будь-яка збіжна послідовність метричного простору є фундаментальною.

Доведення. Нехай $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Отже, послідовність є фундаментальною. □

Лема 6.4

Будь-яка фундаментальна послідовність точок метричного простору є обмеженою.

Доведення. Задамо $\varepsilon > 0$ і підберемо натуральне число N так, щоб $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m \ge N$. Зокрема, $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$ при $n \ge N$. Введемо позначення

$$r = \max\{\varepsilon, \rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\}.$$

Тепер при всіх $n = 1, 2, \dots$

$$\rho(x_n, x_N) \le r.$$

Інакше кажучи,

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{S}(x_N, r).$$

Замінюючи число r на будь-яке число $r' > r$, можна заключити послідовність в довільну відкриту кулю:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S(x_N, r').$$ □

§6.4 Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 47–50).

[2] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 60–69).