17 Теорема про ізоморфізм

Обравши в n-вимірному евклідовому просторі ортогональний нормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, можна кожний вектор $x \in \mathbb{R}^n$ записати у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k,$$

де

$$c_k = (x, e_k).$$

Постає питання, як узагальнити цей розклад на випадок нескінченновимірного евклідова простору. Введемо наступні поняття.

§17.1 Базиси у гільбертових просторах

Означення 17.1. Система ненульових векторів $\{e_k\} \subset E$ називається **ортогональною**, якщо $(e_k, e_l) = 0$ при $k \neq l$.

Означення 17.2. Система $\{e_k\} \subset E$, елементи якої задовольняють умову

$$(e_k, e_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

називається **ортонормованою**.

Нагадаємо означення із теорії лінійних просторів.

Означення 17.3. Найменший лінійний підпростір, що містить множину A у лінійному просторі X, називається **лінійною оболонкою** множини A, або лінійним підпростором, що породжений множиною A. Цей підпростір позначається як $\operatorname{span} A$.

> **Зауваження 17.1** — Лінійна оболонка лінійної множини A є замкненою, але якщо множина A є довільною, це не обов'язково так. В той же час у нормованих просторах підпростори є замкненими за означенням, тому лінійна оболонка множини в нормованому просторі є замкненою.

Означення 17.4. Система $\{e_k\} \subset E$ називається **повною**, якщо її лінійна оболонка є скрізь щільною в E, тобто $\overline{\operatorname{span}\{e_k\}} = E$.

Означення 17.5. Повна ортонормована система $\{e_k\} \subset E$ називається **ортонормованим базисом**.

> **Приклад 17.1**
>
> В просторі ℓ_2 ортонормований базис утворюють послідовності
>
> $$e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots).$$
>
> Скалярний добуток: $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Приклад 17.2

В просторі $C^2(a,b)$ ортонормований базис утворюють вектори

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi t}{b-a}, \sin\frac{2\pi t}{b-a}, \dots \cos\frac{2\pi n t}{b-a}, \sin\frac{2n\pi t}{b-a}, \dots$$

Скалярний добуток: $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Лема 17.1

В сепарабельному евклідовому просторі будь-яка ортогональна система є не більш ніж зліченною.

Доведення. Не обмежуючи загальності, розглянемо ортонормовану систему $\{\varphi_k\} \subset E$. Тоді

$$\|\varphi_k - \varphi_l\| = \sqrt{(\varphi_k - \varphi_l, \varphi_k - \varphi_l)} = \sqrt{(\varphi_k, \varphi_k) - 2(\varphi_k, \varphi_l) + (\varphi_l, \varphi_l)} = \sqrt{(\varphi_k, \varphi_k) + (\varphi_l, \varphi_l)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Розглянемо сукупність куль $S\left(\varphi_k, \frac{1}{2}\right)$. Ці кулі не перетинаються. Якщо зліченна множина $\{\psi_k\}$ є скрізь щільною в E, то в кожну кулю потрапить принаймні один елемент ψ_k. Отже, потужність множини таких куль не може перевищувати потужність зліченої множини. □

§17.2 Елементи аналізу Фур'є

Означення 17.6. Ортонормована система $\{\varphi_k\} \subset E$ називається **замкненою**, якщо для довільного $f \in E$ виконується **рівність Парсеваля**

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2. \tag{17.1}$$

Означення 17.7. Нехай $\{\varphi_k\} \subset E$ — ортонормована система в евклідовому просторі, а f — довільний елемент із E. Поставимо у відповідність елементу $f \in E$ послідовність чисел

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Числа c_k називаються **координатами**, або **коефіцієнтами Фур'є** елемента f по системі $\{\varphi_k\} \subset E$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

називається **рядом Фур'є** елемента f по системі $\{\varphi_k\} \subset E$.

Теорема 17.1

Ряд Фур'є збігається тоді і лише тоді, коли система $\{\varphi_k\} \subset E$ є замкненою.

Доведення. Розглянемо суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

і для заданого числа n відшукаємо коефіцієнти α_k, що мінімізують $\|f - S_n\|^2$.

$$\|f - S_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$
$$(f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$
$$\|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2.$$

Мінімум цього виразу досягається тоді, коли останній член дорівнює нулю, тобто, коли

$$\alpha_k = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

В цьому випадку

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{17.2}$$

Оскільки $\|f - S_n\|^2 \geq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо нерівністю Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Із тотожності (17.2) випливає, що рід Фур'є збігається тоді і лише тоді, коли виконується рівність Парсеваля, тобто система є замкненою. □

Теорема 17.2 (Рісса—Фішера)
Нехай $\{\varphi_k\} \subset E$ — довільна ортонормована система в гільбертовому просторі E, а числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ є такими, що ряд $\sum_{k=1}^{n} c_k^2$ є збіжним.
Тоді існує такий елемент $f \in E$, що $c_k = (f, \varphi_k)$ і $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2$.

Доведення. Розглянемо суму

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

Тоді,

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \cdots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{n} c_k^2$ є збіжним, а простір E — повним, послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до деякого елемента $f \in E$. Оцінимо наступний скалярний добуток.

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i).$$

При $n \geq i$ перший доданок дорівнює c_i, а другий доданок при $n \to \infty$ прямує до нуля, оскільки

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_i\|.$$

Ліва частина рівності від n не залежить. Переходячи до границі при $n \to \infty$, доходимо висновку, що

$$(f, \varphi_i) = c_i.$$

Оскільки за означенням елемента f

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0,$$

то

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = (f, f).$$

□

§17.3 Сепарабельний простір

Теорема 17.3

В сепарабельному евклідовому просторі E будь-яка повна ортонормована система є замкненою, і навпаки.

Доведення. Необхідність. Нехай система $\{\varphi_k\} \subset E$ є замкненою. Тоді за теоремою 17.1 для довільного елемента $f \in E$ послідовність часткових сум його ряду Фур'є збігається до f. Це означає, що $\overline{\text{span}\{\varphi_k\}} = E$, тобто система $\{\varphi_k\}$ є повною.

Достатність. Нехай система $\{\varphi_k\}$ є повною, тобто довільний елемент $f \in E$ можна скільки завгодно точно апроксимувати лінійною комбінацією $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ елементів системи $\{\varphi_k\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k : \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon.$$

За теоремою 17.1 елементом найкращого наближення серед усіх сум вигляду $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ є ряд Фур'є. Отже, цей ряд збігається, а, значить, виконується рівність Парсеваля, тобто система $\{\varphi_k\}$ є замкненою. □

Теорема 17.4 (про ізоморфізм)

Довільні два сепарабельних гільбертових простора є ізоморфними один до одного.

Доведення. Покажемо, що кожний гільбертів простір H є ізоморфним простору ℓ_2. Це доведе теорему про ізоморфізм.

Виберемо в H довільну повну ортонормовану систему $\{\varphi_k\} \subset H$ і поставимо у відповідність елементу $f \in H$ сукупність його коефіцієнтів Фур'є за цією системою $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$. Оскільки $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, то послідовність $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ належить ℓ_2.

І навпаки, за теоремою Рісса—Фішера довільному елементу $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\} \in \ell_2$ відповідає деякий елемент $f \in H$, у якого числа $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ є коефіцієнтами Фур'є за системою $\{\varphi_k\} \subset H$. Ця відповідність є взаємно-однозначною.

Крім того, якщо

$$
\begin{aligned}
f &\leftrightarrow \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}, \\
g &\leftrightarrow \{d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\},
\end{aligned}
$$

то

$$
\begin{aligned}
f + g &\leftrightarrow \{c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n, \ldots\}, \\
\alpha f &\leftrightarrow \{\alpha c_1, \alpha c_2, \ldots, \alpha c_n, \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Нарешті, із рівності Парсеваля випливає, що

$$
(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2,
$$

а тому

$$
2(f, g) = (f + g, f + g) - (f, f) - (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k.
$$

Отже,

$$
(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k.
$$

Таким чином, установлена відповідність між елементами просторів H і ℓ_2 є ізоморфізмом. □

§17.4 Література

[1] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 149–157).