20 Фільтри і збіжність

§20.1 Границі і граничні точки фільтрів

Означення 20.1. Нехай на множині X задані фільтри $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$. Говорять, що $\mathfrak{F}_1$ **мажорує** $\mathfrak{F}_2$, якщо $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$, тобто кожний елемент фільтра $\mathfrak{F}_2$ є водночас і елементом фільтра $\mathfrak{F}_1$.

Приклад 20.1

Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в X, а $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — її підпослідовність. Тоді фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$ асоційований з підпослідовністю, мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, асоційований з самою послідовністю.

Дійсно, нехай $A \in \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$. Тоді існує таке $N \in \mathbb{N}$, що $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset A$. Але тоді й $\{x_{n_k}\}_{k=N}^{\infty} \subset A$, тобто $A \in \mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$.

Означення 20.2. Нехай X — топологічний простір, $\mathfrak{F}$ — фільтр на X. Точка $x \in X$ називається **границею** фільтра $\mathfrak{F}$ (цей факт позначається як $x = \lim \mathfrak{F}$), якщо $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр околів точки x. Іншими словами, $x = \lim \mathfrak{F}$, якщо кожний окіл точки x належить фільтру $\mathfrak{F}$.

Означення 20.3. Точка $x \in X$ називається **граничною точкою** фільтра $\mathfrak{F}$, якщо кожний окіл точки x перетинається з усіма елементами фільтра $\mathfrak{F}$. Множина усіх граничних точок фільтра називається $\operatorname{LIM} \mathfrak{F}$.

Приклад 20.2

Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в топологічному просторі X. Тоді $x = \lim \mathfrak{F}_{\{x_n\}} = \lim_{n\to\infty} x_n$, а $x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$ збігається з множиною граничних точок послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 20.1

Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр на топологічному просторі X, $\mathfrak{D}$ — деяка база фільтра $\mathfrak{F}$. Тоді

1. $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x\ \exists A \in \mathfrak{D}\colon A \subset U$;
2. $x = \lim \mathfrak{F} \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}$. Якщо до того ж X — хаусдорфів простір, то у фільтра $\mathfrak{F}$ немає інших граничних точок. Зокрема, якщо у фільтра в хаусдорфовому просторі є границя, то ця границя є єдиною;
3. множина $\operatorname{LIM} \mathfrak{F}$ збігається з перетином замикань усіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

Доведення.

1. $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x\ U \in \mathfrak{F} \iff \forall U \in \mathfrak{F}\ \exists A \in \mathfrak{D}\colon A \subset U$.
2. $x = \lim \mathfrak{F}, U \in \Omega_x \implies U \in \mathfrak{F} \implies \forall A \in \mathfrak{F}\ A \cap U \neq \varnothing \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}$;

   $x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F} \implies \forall U \in \mathfrak{F}, V \in \Omega_y\ U \cap V \neq \varnothing \implies x = y$ (оскільки простір хаусдорфів).

3. $x = \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F} \iff \forall A \in \mathfrak{F}, U \in \Omega_x\ A \cap U \neq \varnothing \iff \forall A \in \mathfrak{F}\ x \in \overline{A}$. □

Теорема 20.2

Нехай $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — фільтри на топологічному просторі X і $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді

1. $x = \lim \mathfrak{F}_1 \implies x = \lim \mathfrak{F}_2$;
2. $x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_2 \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_1$;
3. $x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_1$.

Доведення.

1. $\mathfrak{F}_1$ мажорує фільтр $\mathfrak{M}_x$ околів точки x, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \implies \mathfrak{M}_x \subset \mathfrak{F}_2$.
2. Оскільки при збільшенні сім'я множин її перетин зменшується, то

$$\mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_2 = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_2} \overline{A} \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_1} \overline{A} = \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_1.$$

3. $x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_2 \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_1$.

□

§20.2 Границя функції по фільтру

Означення 20.4. Нехай X — множина, Y — топологічний простір, $\mathfrak{F}$ — фільтр на X. Точка $y \in Y$ називається **границею** функції $f : X \to Y$ по фільтру $\mathfrak{F}$ (цей факт позначається як $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$, якщо $y = \lim f[\mathfrak{F}]$. Іншими словами, $y = \lim f[\mathfrak{F}]$, якщо для довільного околу U точки y існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $f(A) \subset U$.

Означення 20.5. Точка $y \in Y$ називається **граничною** точкою функції $f : X \to Y$ по фільтру $\mathfrak{F}$, якщо $y \in \mathrm{LIM}\, f[\mathfrak{F}]$, тобто якщо довільний окіл точки y перетинається з образами усіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

Приклад 20.3

Нехай X — топологічний простір, $f : \mathbb{N} \to X$ і F — фільтр Фреше на $\mathbb{N}$. Тоді $\lim_{\mathfrak{F}} f = \lim_{n\to\infty} f(n)$.

Теорема 20.3

Нехай X і Y — топологічні простори, F — фільтр на X, $x = \lim \mathfrak{F}$ і $f : X \to Y$ — неперервна функція. Тоді $f(x) = \lim_{\mathfrak{F}} f$.

Доведення. Нехай U — довільний окіл точки $f(x)$. Тоді існує окіл V точки X, для якого $f(V) \subset U$. Умова $x = \lim \mathfrak{F}$ означає, що $V \in \mathfrak{F}$. Інакше кажучи, для довільного околу U точки $f(x)$ ми знайшли шуканий елемент $V \in \mathfrak{F}$: $f(V) \subset U$. □

§20.3 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 484–488).