13 Принцип рівномірної обмеженості

В цій лекції ми розглянемо види збіжності послідовностей лінійних неперервних операторів і з'ясуємо, коли простір $\mathcal{L}(E, F)$ є банаховим в розумінні тої чи іншої збіжності.

§13.1 Види збіжності послідовностей операторів

Означення 13.1. Послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, що діють із нормованого простору E в нормований простір F, **поточково збігається** до оператора A в просторі $\mathcal{L}(E, F)$ при $n \to \infty$, якщо $\forall x \in E$: $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$.

Означення 13.2. Послідовність операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, що діють із нормованого простору E в нормований простір F, **рівномірно збігається** до оператора A в просторі $\mathcal{L}(E, F)$ при $n \to \infty$, якщо $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$.

Зауваження 13.1 — Якщо $F = \mathbb{R}$, то простір $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ є спряженим простором, поточкова збіжність є аналогом слабкої збіжності в спряженому просторі, а рівномірна збіжність є аналогом сильної збіжності в спряженому просторі.

Лема 13.1

Якщо послідовність лінійних обмежених операторів $A_n : E \to F$, де E, F — нормовані простори, є такою, що послідовність $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ є необмеженою, то послідовність $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ є необмеженою в будь-якій замкненій кулі.

Доведення. Припустимо супротивне: послідовність $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою в деякій замкненій кулі $\overline{S}(x_0, \varepsilon)$:

$$\exists(\overline{S}(x_0, \varepsilon), C > 0) : \forall n \in N : \forall x \in \overline{(}x_0, \varepsilon) : \|A_n x\|_F \leq C.$$

Кожному елементу $\xi \in E$ поставимо у відповідність елемент $x = \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi + x_0$, якщо $\xi \neq 0$. Елементу $\xi = 0$ поставимо у відповідність елемент $x = x_0$.

$$\xi \neq 0 \implies \|x - x_0\|_E = \left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi + x_0 - x_0\right\|_E = \left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi\right\|_E = \varepsilon.$$

Це означає, що для довільних $\xi \in E$ всі елементи $x \in \overline{S}(x_0, \varepsilon)$.

Оцінимо наступну величину (використовуючи допоміжну нерівність $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$.

$$\left|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\|A_n\xi\|_F - \|A_n x_0\|_F\right| \leq \left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}A_n\xi + A_n x_0\right\|_F = \left\|A_n\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi + x_0\right)\right\|_F \leq C. \tag{13.1}$$

Отже,

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\|A_n\xi\|_F - \|A_n x_0\|_F \leq C.$$

Звідси випливає, що

$$\|A_n \xi\|_F \le \frac{C + \|A_n x_0\|_F}{\varepsilon} \|\xi\|_E \le \frac{2C}{\varepsilon} \|\xi\|_E.$$

Отже,

$$\exists C_1 = \frac{2C}{\varepsilon} > 0 : \forall \xi \in E : \|A_n \xi\|_E \le C_1 \|\xi\|_E \implies \|A_n\| \le C_1.$$

Отримане протиріччя доводить лему. □

Теорема 13.1 (Банаха—Штейнгауза)

Нехай послідовність лінійних обмежених операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, що відображають банахів простір E в нормований простір F, поточково збігається до оператора A при $n \to \infty$. Тоді послідовність $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою, оператор A є лінійним і неперервним, а $A_n x \to Ax$ рівномірно по n на кожному компакті $K \subset E$ (тобто n не залежить від x).

Доведення. Припустимо, що послідовність $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ є необмеженою. Тоді за лемою 13.1 послідовність $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ є необмеженою на довільній замкненій кулі $\overline{S}(x_0, \varepsilon_0)$.

Отже,

$$\exists (n_1 \in \mathbb{N}, x_1 \in \overline{S}(x_0, \varepsilon_0) : \|A_{n_1} x_1\|_F > 1.$$

Оскільки A_{n_1} — неперервний оператор,

$$\exists \overline{S}(x_1, \varepsilon_1) \subset \overline{S}(x_0, \varepsilon_0) : \forall x \in \overline{S}(x_1, \varepsilon_1) : \|A_{n_1} x\|_F > 1.$$

На кулі $\overline{S}(x_1, \varepsilon_1)$ послідовність $\{\|A_n x\|_F\}_{n=1}^{\infty}$ також є необмеженою. Отже,

$$\exists \overline{S}(x_2, \varepsilon_2) \subset \overline{S}(x_1, \varepsilon_1) : \forall x \in \overline{S}(x_2, \varepsilon_2) : \|A_{n_2} x\|_F > 2.$$

Нехай $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}$ і $x_1, x_2, \dots, x_k$:

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k, \quad \overline{S}(x_0, \varepsilon_0) \supset \overline{S}(x_1, \varepsilon_1) \supset \dots \supset \overline{S}(x_k, \varepsilon_k).$$

Продовжуючи цей процес при $k \to \infty$, отримуємо послідовність вкладених замкнених куль, таких що

$$\forall x \in \overline{S}(x_k, \varepsilon_k) : \|A_{n_k} x\|_F > k, \quad \varepsilon_k \to 0.$$

Оскільки E — повний простір, за принципом вкладених куль

$$\exists x^\star \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S(x_k, \varepsilon_k) : \|A_{n_k} x^\star\|_F \ge k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що $\exists x^\star \in E$ така, що послідовність $\{A_n x^\star\}$ не збігається. Це суперечить умові теореми, згідно якої послідовність операторів $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається в кожній точці простору E.

Покажемо, що оператор A — лінійний. Оскільки

$$A_n(x + y) = A_n(x) + A_n(y), \quad A_n(\lambda x) = \lambda A_n(x),$$

маємо

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x) + \lim_{n\to\infty} A_n(y) = Ax + Ay.$$
$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n(x) = \lambda Ax.$$

Крім того,

$$\|A_n x\|_F \le C\|x\|_E \implies \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_F = \left\| \lim_{n\to\infty} A_n x \right\|_F = \|Ax\|_E \le C\|x\|_E.$$

Отже, A — лінійний і обмежений, а значить, неперервний.

Нехай $K \subset E$ — компакт, $\varepsilon > 0$. За теоремою Хаусдорфа існує скінчена $\frac{\varepsilon}{3C}$-сітка M:

$$\forall x \in K : \exists x_\alpha \in M, \alpha \in A : \|x - x_\alpha\|_E < \frac{\varepsilon}{3C},$$

де A — скінчена множина.

Оскільки послідовність $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається в кожній точці простору E, то вона збігається і в кожній точці сітки M:

$$\forall x_\alpha \in M : \exists n_\alpha : \forall n \ge n_\alpha : \|A_n x_\alpha - Ax_\alpha\|_F < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай $n_0 = \max_{\alpha\in A} n_\alpha$ (сітка M є скінченою, тому максимум існує). Тоді $\forall n \ge n_0$, $\forall x \in S\left(x_\alpha, \frac{\varepsilon}{3C}\right)$

$$\begin{aligned}\|A_n x - Ax\|_F &\le \|A_n x - A_n x_\alpha + A_n x_\alpha - Ax_\alpha + Ax_\alpha - Ax\|_F \le \\ &\|A_n x - A_n x_\alpha\|_F + \|A_n x_\alpha - Ax_\alpha\|_F + \|Ax_\alpha - Ax\|_F < \\ &C\|x - x_\alpha\|_F + \frac{\varepsilon}{3} + C\|x - x_\alpha\|_F = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Отже, $\forall n \ge n_0$, $\forall x \in K$: $\|A_n x - Ax\|_F < \varepsilon$, до того ж номер n_0 не залежить від точки x. Це означає, що $A_n x \to Ax$ рівномірно по n на кожному компакті $K \subset E$. □

§13.2 Повнота простору лінійних неперервних операторів

З'ясуємо, коли простір $\mathcal{L}(E, F)$ є повним у розумінні рівномірної або точкової збіжності.

Теорема 13.2

Якщо нормований простір F — банахів, то $\mathcal{L}(E, F)$ — банахів у розумінні рівномірної збіжності.

Доведення. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність операторів, тобто

$$\|A_n - A_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Тоді $\forall x \in E$

$$\|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Для кожного фіксованого $x \in E$ послідовність $\{A_n x\}$ є фундаментальною в F. Оскільки простір F є повним за умовою теореми, то послідовність $\{A_n x\}$ збігається до певного елемента $y \in F$. Позначимо $\lim_{n\to\infty} A_n x$. Отже, ми визначили відображення $A : E \to F$. Його лінійність випливає із властивостей границі. Покажемо його обмеженість: $\{\|A_n\|\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}$, адже

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leq \|A_n - A_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty,$$

а отже $\{\|A_n\|\}$ обмежена в $\mathbb{R}$, тобто

$$\exists C : \forall n \in \mathbb{N} : \|A_n\| \leq C.$$

Отже,

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \|x\| \leq C\|x\|.$$

Внаслідок неперервності норми, маємо

$$\|Ax\| \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq C\|x\|.$$

Покажемо, що A_n рівномірно збігається до A в просторі $\mathcal{L}(E, F)$. Задамо $\varepsilon > 0$ і виберемо n_0 так, щоб $\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon$ для $n \geq n_0$, $p > 0$ і для будь-якого $x : \|x\| \leq 1$. Нехай $p \to \infty$. Тоді

$$\forall n \geq n_0, x : \|x\| \leq 1 : \|Ax - A_n x\| < \varepsilon,$$

звдки

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon,$$

а тому $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ в розумінні рівномірної збіжності.

Отже, $\mathcal{L}(E, F)$ є банаховим. □

Теорема 13.3

Якщо нормовані простори E і F — банахові, то $\mathcal{L}(E, F)$ — банахів у розумінні поточкової збіжності.

Доведення. Розглянемо точку $x \in E$ і фундаментальну у розумінні поточкової збіжності послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Оскільки F — банахів простір, то існує елемент $y = \lim_{n\to\infty} A_n x$. Таким чином, визначений оператор $A : E \to F$, такий що $y = Ax$. Лінійність цього оператора випливає із лінійності границі, а обмеженість — із теореми Банаха-Штейнгауза:

$$\|Ax\| = \left\| \lim_{n\to\infty} A_n x \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \cdot \|x\| = C\|x\|. \qquad \square$$

§13.3 Література

[1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 96–102).

[2] **Ляшко И. И.** Основы классического и современного математического анализа / И. И. Ляшко, В. Ф Емельянов, А. К. Боярчук. — К.: Вища школа, 1988 (стр. 576–578).