

11 Спряжений простір

Ввести топологію в лінійному просторі можна не лише за допомогою норми.

§11.1 Лінійні топологічні простори і неперервність функціоналів

Означення 11.1. Упорядкована четвірка $(L, +, \cdot, \tau)$ називається **лінійним топологічним простором**, якщо

1. $(L, +, \cdot)$ — дійсний лінійний простір;
2. (L, τ) — топологічний простір;
3. операція додавання і множення на числа в L є неперервними, тобто
 - а) якщо $z_0 = x_0 + y_0$, то для кожного околу U точки z_0 можна указати такі околи V і W точок x_0 і y_0 відповідно, що $\forall x \in V, \forall y \in W: x + y \in U$;
 - б) якщо $\alpha_0 x_0 = y_0$, то для кожного околу U точки y_0 існує окіл V точки x_0 і таке число $\varepsilon > 0$, що $\forall \alpha \in \mathbb{R} : |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon, \forall x \in V: \alpha x \in U$.

Приклад 11.1

Всі нормовані простори є лінійними топологічними просторами.

Зауваження 11.1 — Оскільки будь-який окіл будь-якої точки x в лінійному топологічному просторі можна отримати зсувом околу нуля U шляхом операції $U + x$, топологія в лінійному топологічному просторі повністю визначається локальною базою нуля.

Спочатку доведемо деякі допоміжні факти щодо лінійних функціоналів, заданих на лінійному топологічному просторі L .

Означення 11.2. Функціонал, визначений на лінійному топологічному просторі L , називається **неперервним**, якщо для будь-якого $x_0 \in L$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U елемента x_0 , що

$$\forall x \in U : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Лема 11.1

Якщо лінійний функціонал f є неперервним в якійсь одній точці x_0 лінійного топологічного простору L , то він є неперервним на усьому просторі L .

Доведення. Дійсно, нехай y — довільна точка простору L і $\varepsilon > 0$. Необхідно знайти такий окіл V точки y , щоб

$$\forall z \in V : |f(z) - f(y)| < \varepsilon.$$

Виберемо окіл U точки x_0 так, щоб

$$\forall x \in U : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Побудуємо окіл точки y шляхом зсуву околу U на елемент $y - x_0$:

$$V = U + (y - x_0) = \{z \in L : z = u + y - x_0, u \in U\}.$$

Із того, що $z \in V$, випливає, що $z - y + x_0 \in U$, отже,

$$|f(z) - f(y)| = |f(z - y)| = |f(z - y + x_0 - x_0)| = |f(z - y + x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Що і треба було довести. \square

Наслідок 11.1

Для того щоб перевірити неперервність лінійного функціонала в просторі, достатньо перевірити його неперервність в одній точці, наприклад, в точці 0 .

Зауваження 11.2 — У скінчено-вимірному лінійному топологічному просторі будь-який лінійний функціонал є неперервним.

Теорема 11.1

Для того щоб лінійний функціонал f був неперервним на лінійному топологічному просторі L , необхідно і достатньо, щоб існував такий окіл нуля в L , на якому значення функціонала f є обмеженими в сукупності.

Доведення. Необхідність. З того що функціонал f є неперервним в точці 0 , випливає що

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U(0) : \forall x \in U(0) : |f(x)| < \varepsilon.$$

Отже, його значення є обмеженими в сукупності на $U(0)$.

Достатність. Нехай $U(0)$ — такий окіл нуля, що

$$\forall U(0) : |f(x)| < C.$$

Крім того, нехай $\varepsilon > 0$. Тоді в околі нуля

$$\frac{\varepsilon}{C}U(0) = \{x \in L : x = \frac{\varepsilon}{C}y, y \in U(0)\}.$$

виконується нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

Це означає, що функціонал f є неперервним в околі нуля, а значить в усьому просторі L . \square

Нехай E — нормований простір. Нагадаємо, що спряженим простором E^* називається сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі E із нормою

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Теорема 11.2

Для того щоб лінійний функціонал f був неперервним на нормованому просторі E , необхідно і достатньо, щоб значення функціонала f були обмеженими в сукупності на одиничній кулі.

Доведення. Необхідність. Нормований простір E є лінійним топологічним простором. За теоремою 11.1 будь-яке значення неперервного лінійного функціонала f в деякому околі нуля є обмеженими в сукупності.

$$\forall C > 0 : \exists U(0) : \forall x \in U(0) : |f(x)| < C.$$

В нормованому просторі будь-який окіл нуля містить кулю.

$$\exists S(0, r) \subset U(0).$$

Отже, значення функціонала f є обмеженими в сукупності в деякій кулі. Оскільки f — лінійний функціонал, це еквівалентно тому, що значення функціонала f є обмеженими в сукупності в одиничній кулі, оскільки

$$\forall x \in S(0, r) : |f(x)| < C \implies \forall y = \frac{1}{r}x \in S(0, 1) : |f(y)| < \frac{C}{r}.$$

Достатність. Оскільки значення функціонала f є обмеженими в сукупності в одиничній кулі, а одинична куля є околom точки 0, то за теоремою 11.1 він є неперервним в точці 0. Отже, лінійний функціонал f є неперервним в нормованому просторі E . \square

§11.2 Топологія у спряженому просторі і його повнота

На спряженому просторі можна ввести різні топології. Найважливішими з них є сильна і слабка топології.

Означення 11.3. **Сильною топологією** в просторі E^* називається топологія, визначена нормою в просторі E^* , тобто локальною базою нуля

$$\{f \in E^* : \|f\| < \varepsilon\}.$$

де функціонали f задовольняють умову

$$|f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E : \|x\| \leq 1.$$

а ε — довільне додатне число.

Теорема 11.3

Спряжений простір E^* є повним.

Доведення. Нехай $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальна послідовність лінійних неперервних функціоналів, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|. \quad (11.1)$$

Покладемо $\forall x \in E$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Покажемо, що f — лінійний неперервний функціонал.

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Крім того, з нерівності (11.1) випливає, що

$$\forall x \in E : \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f(x) - f(n)| < \varepsilon \|x\|.$$

Це означає, що функціонал $f - f_n$ є обмеженим. Оскільки він є лінійним і обмеженим, значить він є неперервним. Таким чином, функціонал $f = f_n + (f - f_n)$ також є неперервним. Крім того, $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq N$, тобто $f_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ за нормою простору E^* . \square

Зауваження 11.3 — Зверніть увагу на те, що простір E^* повний незалежно від того, чи є повним простір E .

Приклад 11.2

$$c_0^* = \ell_1.$$

Приклад 11.3

$$\ell_1^* = m.$$

Приклад 11.4

$$\ell_p^* = \ell_q, \text{ де } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1.$$

§11.3 Другий спряжений простір і природне відображення

Означення 11.4. Другим спряженим простором E^{**} називається сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі E^* .

Лема 11.2

Будь-який елемент $x_0 \in E$ визначає певний лінійний неперервний функціонал, заданий на E^* .

Доведення. Введемо відображення

$$\pi : E \rightarrow E^{**},$$

поклавши

$$\varphi_{x_0}(f) = f(x_0), \quad (11.2)$$

де x_0 — фіксований елемент із E , а f — довільний лінійний неперервний функціонал із E^* . Оскільки рівність (11.2) ставить у відповідність кожному функціоналу f із E^* дійсне число $\varphi_{x_0}(f)$, вона визначає функціонал на просторі E^* .

Покажемо, що φ_{x_0} — лінійний неперервний функціонал, тобто він належить E^{**} .

Дійсно, функціонал φ_{x_0} є лінійним, оскільки

$$\varphi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha \varphi_{x_0}(f_1) + \beta \varphi_{x_0}(f_2).$$

Крім того, нехай $\varepsilon > 0$ і A — обмежена множина в E , що містить x_0 . Розглянемо в E^* окіл нуля $U(\varepsilon, A)$:

$$U(\varepsilon, A) = \{f \in E^*, x_0 \in A : |f(x_0)| \leq \varepsilon\}.$$

тобто

$$U(\varepsilon, A) = \{f \in E^*, x_0 \in A : |\varphi_{x_0}(f)| \leq \varepsilon\}.$$

З цього випливає, що функціонал φ_{x_0} є неперервним в точці 0, а значить і на всьому просторі E^* . \square

Означення 11.5. Відображення $\pi : E \rightarrow E^{**}$, побудоване в лемі 11.2, називається **природнім відображенням** простору E в другий спряжений простір E^{**} .

§11.4 Рефлексивні простори

Означення 11.6. Якщо природне відображення $\pi : E \rightarrow E^{**}$ є бієкцією і $p(E) = E^{**}$, то простір E називається **напіврефлексивним**.

Означення 11.7. Якщо простір E є напіврефлексивним і відображення $\pi : E \rightarrow E^{**}$ є неперервним, то простір E називається **рефлексивним**.

Зауваження 11.4 — Якщо E — рефлексивний простір, то природне відображення $\pi : E \rightarrow E^{**}$ є ізоморфізмом.

Теорема 11.4

Якщо E — нормований простір, то природне відображення $\pi : E \rightarrow E^{**}$ є ізометрією.

Доведення. Нехай $x \in E$. Покажемо, що

$$\|x\|_E = \|\pi(x)\|_{E^{**}}.$$

Нехай f — довільний ненульовий елемент простору E^* . Тоді

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \implies \|x\| \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Оскільки ліва частина нерівності не залежить від f , маємо

$$\|x\| \geq \sup_{f \in E^*, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|\pi(x)\|_{E^{**}}.$$

З іншого боку, внаслідок теореми Хана—Банаха, якщо x — ненульовий елемент в нормованому просторі E , то існує такий неперервний лінійний функціонал f , визначений на E , що

$$\|f\| = 1, \quad f(x) = \|x\|$$

(визначаємо функціонал на одновимірному підпросторі формулою $f(\alpha x) = \alpha \|x\|$, а потім продовжуємо без збільшення норми на весь простір). Отже, для кожного $x \in E$ знайдеться такий ненульовий лінійний функціонал f , що

$$|f(x)| = \|f\| \cdot \|x\|$$

тому

$$\|\pi(x)\|_{E^{**}} = \sup_{f \in E^*, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \|x\|.$$

Отже, $\|x\|_E = \|\pi(x)\|_{E^{**}}$. □

Зауваження 11.5 — Оскільки природне відображення нормованих просторів $\pi : E \rightarrow E^{**}$ є ізометричним, поняття напіврефлексивних і рефлексивних просторів для нормованих просторів є еквівалентними.

Зауваження 11.6 — Оскільки простір, спряжений до нормованого, є повним (теорема 11.3), будь-який рефлексивний нормований простір є повним.

Зауваження 11.7 — Обернене твердження є невірним.

Приклад 11.5

Простір c_0 є повним, але нерефлексивним, тому що спряженим до нього є простір ℓ_1 , а спряженим до простору ℓ_1 є простір m .

Приклад 11.6

Простір неперервних функцій $C[a, b]$ є повним, але нерефлексивним (більше того, немає жодного нормованого простору, для якого простір $C[a, b]$ був би спряженим).

Приклад 11.7

Приклад рефлексивного простору, що не збігається із своїм спряженим:

$$\ell_p^{**} = \ell_q^* = \ell_p, \quad p, q > 1, p \neq q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Приклад 11.8

Приклад рефлексивного простору, що збігається із своїм спряженням:

$$\ell_2^{\star\star} = \ell_2^{\star} = \ell_2.$$

§11.5 Література

- [1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 112–123).
- [2] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 175–178, 182–192).