32 Спряжений оператор

§32.1 Алгебраїчно спряжний і спряжений оператори

Означення 32.1. Нехай X, Y — лінійні простори, $T : X \to Y$ — лінійний оператор. **Алгебраїчно спряженим оператором** до T називається оператор $T' : Y' \to X'$, що діє за правилом $T'f = f \circ T$.

Означення 32.2. Нехай (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) — дуальні пари. Будемо говорити, що у оператора T існує **спряжений оператор** $T^\star : Y_2 \to Y_1$, якщо для будь-якого $y \in Y_2$ існує такий елемент $T^\star y \in Y_1$, що $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star, y\rangle$ для всіх $x_1 \in X$.

Трактуючи елементи просторів Y_1, Y_2 як функціонали на X_1 і X_2 відповідно, бачимо, що $T^\star y = y \circ T$. Очевидно, що спряжений оператор до T існує тоді і лише тоді, коли $T'(Y_2) \subset Y_1$. У цьому випадку $T^\star$ — це звуження алгебраїчно спряженого оператора T' на Y_2. Для дуальних пар $(X_1, X_1^\star)$, $(X_2, X_2^\star)$, де X_1, X_2 — банахові простори, то нове означення спряженого оператора збігається з відомим означенням спряженого до оператору в банахових просторах.

Теорема 32.1

Нехай X_1 і X_2 — локально опуклі простори, $T : X_1 \to X_2$ — лінійний неперервний оператор. Тоді у T існує спряжений $T^\star : X_2^\star \to X_1^\star$.

Доведення. Нехай $f \in X_2^\star$. Тоді функціонал $T'f = f \circ T$ є неперервним як композиція двох неперервних відображень. Отже, $T'(X_2^\star) \subset X_1^\star$. □

Теорема 32.2

Нехай (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) — дуальні пари, $T : X_1 \to X_2$ — лінійний оператор, $T^\star : Y_2 \to Y_1$ — спряжений оператор. Тоді для довільного $A \subset Y_2$

$$T^{-1}(A^0) = (T^\star A)^0.$$

Доведення.

$$x \in T^{-1}(A^0) \iff Tx \in A^0 \iff \forall y \in A\, |\langle Tx, y\rangle| \le 1 \iff$$
$$\iff \forall y \in A\, |\langle x, T^\star y\rangle| \le 1 \iff \forall z \in T^\star A\, |\langle x, z\rangle| \le 1 \iff x \in (T^\star A)^0. \quad \square$$

Теорема 32.3

Нехай (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) — дуальні пари, $T : X_1 \to X_2$ — лінійний оператор. Тоді наступні умови є еквівалентними:

1. У оператора T існує спряжений.
2. T — слабко неперервний оператор, тобто він є неперервним як оператор, що діє з $(X_1, \sigma(X_1, Y_1))$ і $(X_2, \sigma(X_2, Y_2))$.

Доведення. 1 $\implies$ 2. Внаслідок лінійності достатньо перевірити неперервність оператору в нулі. За теоремою 13.2 базу околів нуля в топології $\sigma(X_2, Y_2)$ утворюють поляри скінчених множин $A \subset Y$. За формулою

$$T^{-1}(A^0) = (T^\star A)^0$$

прообраз $T^{-1}(A^0)$ околу A^0 — це знову поляра $(T^\star A)^0$ скінченої множини $T^\star A \subset Y_1$. Отже, $T^{-1}(A^0)$ — це окіл нуля в топології $\sigma(X_1, Y_1)$. $\square$

Наслідок 32.1

Нехай X_1, X_2 — локально опуклі простори, $T : X_1 \to X_2$ — лінійний неперервний оператор. Тоді T — слабко неперервний оператор в топологіях $\sigma(X_1, X_1^\star)$ і $\sigma(X_2, X_2^\star)$.

§32.2 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 535–538).