

23 Топологія, що породжена сім'єю відображень

§23.1 Топологія, у якій задані функції неперервні

Нехай на множині X задано сім'я відображень F , де відображення $f \in F$ діють у топологічні простори $f(X)$, які, взагалі кажучи, можуть бути різними. Для будь-якої точки $x \in X$, будь-якого скінченного сім'ї відображень $\{f_k\}_{k=1}^n \subset F$ і відкритих околів V_k точок $f_k(x)$ в просторі $f_k(X)$ визначимо множини

$$U_{n, \{f_k\}_{k=1}^n, \{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(V_k).$$

Як відомо, якщо для кожної точки $x \in X$ задане непорожнє сім'я підмножин U_x , що має такі властивості:

1. якщо $U \in U_x$, то $x \in U$;
2. якщо $U_1, U_2 \in U_x$, то існує таке $U_3 \in U_x$, що $U_3 \subset U_1 \cap U_2$;
3. якщо $U \in U_x$ і $y \in U$, то існує така множина $V \in U_y$, що $V \subset U$,

то існує топологія τ на X , для якої сім'я U_x будуть базами околів відповідних точок.

Таким чином, на X існує топологія, для якої множини $U_{n, \{f_k\}_{k=1}^n, \{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ утворюють базу околів точки x при всіх точках $x \in X$. Позначимо цю топологію як $\sigma(X, F)$. Зокрема, околами точок $x \in X$ в топології $\sigma(X, F)$ будуть всі множини $f^{-1}(V)$, де $f \in F$, а V — окіл точки $f(x)$ в топологічному просторі $f(X)$. Отже, усі відображення сім'ї F є неперервними в топології $\sigma(X, F)$.

Теорема 23.1

$\sigma(X, F)$ — найслабкіша топологія серед усіх топологій на X , в яких усі відображення сім'ї F є неперервними.

Доведення. Нехай τ — довільна топологія, в якій усі відображення сім'ї F є неперервними. Доведемо, що будь-яка множина $U_{n, \{f_k\}_{k=1}^n, \{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ є околом точки x в топології τ . Звідси випливатиме, що $\tau \succ \sigma(X, F)$. За умовою, усі відображення $f_k : X \rightarrow F_k(X)$ є неперервними в топології τ . Отже, $f_k^{-1}(V_k)$ — це відкриті околи точки x в топології τ . Відкритим околом буде і скінченний перетин $U_{n, \{f_k\}_{k=1}^n, \{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ таких множин. \square

Означення 23.1. Топологія $\sigma(X, F)$ називається топологією, **породженою сім'єю відображень F** , або **слабкішою топологією**, в якій усі відображення сім'ї F є неперервними.

§23.2 Породжена топологія і віддільність

Означення 23.2. Кажуть, що сім'я відображень F **розділяє** точки множини X , якщо $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2, \exists f \in F: f(x_1) \neq f(x_2)$.

Теорема 23.2

Нехай усі простори $f(X)$, $f \in F$ є хаусдорфовими. Для того щоб топологія $\sigma(X, F)$ була віддільною за Хаусдорфом необхідно і достатньо, щоб сім'я відображень F розділяла точки множини X .

Доведення. Достатність. Припустимо, що сім'я відображень F розділяє точки множини X . Тоді

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad \exists f \in F : \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Оскільки $f(X)$ — хаусдорфів простір, існують околи V_1, V_2 точок $f(x_1)$ і $f(x_2)$ відповідно. Множини $f^{-1}(V_1)$ і $f^{-1}(V_2)$ є шуканими околами в топології $\sigma(X, F)$, що розділяють точки x_1 і x_2 .

Необхідність. Нехай сім'я відображень F не розділяє точок множини X . Тоді

$$\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad \forall f \in F : \quad f(x_1) = f(x_2).$$

Візьмемо довільний окіл $U_{n, \{f_k\}_{k=1}^n, \{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$ точки x_1 в топології $\sigma(X, F)$. Оскільки $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$, то й точка x_2 лежить у тому ж околі $U_{n, \{f_k\}_{k=1}^n, \{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$. Отже, в топології $\sigma(X, F)$, не виконується навіть аксіома про віддільність, а не лише властивість Хаусдорфа. \square

§23.3 Породжена топологія і фільтри**Теорема 23.3**

Для того щоб фільтр \mathfrak{F} на X збігався в топології $\sigma(X, F)$ до елемента x , необхідно і достатньо, щоб умова $\lim_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ виконувалася для всіх $f \in F$.

Доведення. Необхідність. З огляду на неперервність усіх $f \in F$ в $\sigma(X, F)$, необхідність випливає з теореми 3.3.

Достатність. Нехай $\lim_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ для всіх $f \in F$. Доведемо, що будь-який окіл $U_{n, \{f_k\}_{k=1}^n, \{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ є елементом фільтра \mathfrak{F} . За умовою, $\lim_{\mathfrak{F}} f_k = f_k(x)$, отже $f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}$ для усіх $k = 1, 2, \dots, n$. Оскільки фільтр є замкненим відносно скінченного перетину елементів

$$U_{n, \{f_k\}_{k=1}^n, \{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}. \quad \square$$

§23.4 Література

- [1] Кадец В. М. Курс функціонального аналізу / В. М. Кадец — Х.: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2006. (стр. 492–495).