V

Додаткові розділи функціонального аналізу

Частина V: Зміст

23 Топологія, що породжена сім'єю відображень

§23.1 Топологія, у якій задані функції неперервні

Нехай на множині X задано сім'я відображень F, де відображення $f \in F$ діють у топологічні простори $f(X)$, які, взагалі кажучи, можуть бути різними. Для будь-якої точки $x \in X$, будь-якого скінченного сім'ї відображень $\{f_k\}_{k=1}^n \subset F$ і відкритих околів V_k точок $f_k(x)$ в просторі $f_k(X)$ визначимо множини

$$U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}(V_k).$$

Як відомо, якщо для кожної точки $x \in X$ задане непорожнє сім'я підмножин U_x, що має такі властивості:

1. якщо $U \in U_x$, то $x \in U$;
2. якщо $U_1, U_2 \in U_x$, то існує таке $U_3 \in U_x$, що $U_3 \subset U_1 \cap U_2$;
3. якщо $U \in U_x$ і $y \in U$, то існує така множина $V \in U_y$, що $V \subset U$,

то існує топологія τ на X, для якої сім'ї U_x будуть базами околів відповідних точок.

Таким чином, на X існує топологія, для якої множини $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ утворюють базу околів точки x при всіх точках $x \in X$. Позначимо цю топологію як $\sigma(X,F)$. Зокрема, околами точок $x \in X$ в топології $\sigma(X,F)$ будуть всі множини $f^{-1}(V)$, де $f \in F$, а V — окіл точки $f(x)$ в топологічному просторі $f(X)$. Отже, усі відображення сім'ї F є неперервними в топології $\sigma(X,F)$.

Теорема 23.1

$\sigma(X,F)$ — найслабкіша топологія серед усіх топологій на X, в яких усі відображення сім'ї F є неперервними.

Доведення. Нехай τ — довільна топологія, в якій усі відображення сім'ї F є неперервними. Доведемо, що будь-яка множина $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ є околом точки x в топології τ. Звідси випливатиме, що $\tau \succ \sigma(X,F)$. За умовою, усі відображення $f_k : X \to F_k(X)$ є неперервними в топології τ. Отже, $f_k^{-1}(V_k)$ — це відкриті околи точки x в топології τ. Відкритим околом буде і скінченний перетин $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ таких множин. □

Означення 23.1. Топологія $\sigma(X,F)$ називається топологією, **породженою сім'єю відображень F**, або *слабкішою топологією, в якій усі відображення сім'ї F є неперервними.*

§23.2 Породжена топологія і віддільність

Означення 23.2. Кажуть, що сім'я відображень F **розділяє** точки множини X, якщо $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $\exists f \in F$: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Теорема 23.2

Нехай усі простори $f(X)$, $f \in F$ є хаусдорфовими. Для того щоб топологія $\sigma(X, F)$ була віддільною за Хаусдорфом необхідно і достатньо, щоб сім'я відображень F розділяла точки множини X.

Доведення. **Достатність.** Припустимо, що сім'я відображень F розділяє точки множини X. Тоді

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad \exists f \in F: \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Оскільки $f(X)$ — хаусдорфів простір, існують околи V_1, V_2 точок $f(x_1)$ і $f(x_2)$ відповідно. Множини $f^{-1}(V_1)$ і $f^{-1}(V_2)$ є шуканими околами в топології $\sigma(X, F)$, що розділяють точки x_1 і x_2.

Необхідність. Нехай сім'я відображень F не розділяє точок множини X. Тоді

$$\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \quad \forall f \in F: \quad f(x_1) = f(x_2).$$

Візьмемо довільний окіл $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$ точки x_1 в топології $\sigma(X, F)$. Оскільки $f_k(x_1) = f_k(x_2)$ для всіх $k = 1, 2, \dots, n$, то й точка x_2 лежить у тому ж околі $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x_1)$. Отже, в топології $\sigma(X, F)$, не виконується навіть аксіома про віддільність, а не лише властивість Хаусдорфа. □

§23.3 Породжена топологія і фільтри

Теорема 23.3

Для того щоб фільтр $\mathfrak{F}$ на X збігався в топології $\sigma(X, F)$ до елемента x, необхідно і достатньо, щоб умова $\lim_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ виконувалася для всіх $f \in F$.

Доведення. **Необхідність.** З огляду на неперервність усіх $f \in F$ в $\sigma(X, F)$, необхідність випливає з теореми 3.3.

Достатність. Нехай $\lim_{\mathfrak{F}} f = f(x)$ для всіх $f \in F$. Доведемо, що будь-який окіл $U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x)$ є елементом фільтра $\mathfrak{F}$. За умовою, $\lim_{\mathfrak{F}} f_k = f_k(x)$, отже $f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}$ для усіх $k = 1, 2, \dots, n$. Оскільки фільтр є замкненим відносно скінченого перетину елементів

$$U_{n,\{f_k\}_{k=1}^n,\{V_k\}_{k=1}^n}(x) = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}(V_k) \in \mathfrak{F}.$$

□

§23.4 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 492–495).

24 Тихоновський добуток і тихоновська топологія

§24.1 Декартів добуток як множина функцій

Нехай Γ — не обов'язково скінченна індексна множина, кожному елементу γ якої поставлено у відповідність деяку множину X_γ.

Означення 24.1. **Декартовим добутком** множин X_γ по $\gamma \in \Gamma$ називається множина $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, яка складається із усіх таких функцій $x : \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, що $\forall \gamma \in \Gamma$ $x(\gamma) \in X_\gamma$.

Зауваження 24.1 — У частковому випадку, коли $\forall \gamma \in \Gamma$ $X_\gamma = X$, добуток складається з усіх функцій $x : \Gamma \to X$ і називається **декартовим степенем** X^Γ.

Приклад 24.1

Простір Фреше — добуток $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, де $X_n = \mathbb{R}$. Отже, простір Фреше є степенем $\mathbb{R}^\mathbb{N} = \mathbb{R}^{\aleph_0}$, елементами якого є зліченні послідовності $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ дійсних чисел x_n.

Приклад 24.2

Гільбертів куб — добуток $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, де $X_n = I = [0, 1]$, тобто це простір $I^{\aleph_0}$.

Приклад 24.3

Тихоновський куб — добуток $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, де $\#\Gamma = \nu$, а $X_\gamma = I = [0, 1]$, тобто це простір I^ν.

Приклад 24.4

Канторів дисконтинуум ваги ν — добуток $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, де $\#\Gamma = \nu$, а множини $X_\gamma = D = \{0, 1\}$(проста двокрапка), тобто це простір D^ν.

§24.2 Проектори, тихоновська топологія і добуток

Означення 24.2. Відображення $P_\alpha : \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \to X_\alpha$, що діє за правилом $P_\alpha(x) = x_\alpha$, $\forall \alpha \in \Gamma$, називається **координатним проектором**.

Означення 24.3. Нехай X_γ, $\gamma \in \Gamma$ — топологічні простори. **Тихоновською топологією** на $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ називається найслабкіша з топологій, в якій усі координатні проектори $P_\alpha(x)$, $\alpha \in \Gamma$ є неперервними.

Означення 24.4. Декартів добуток $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$, наділений тихоновською топологією, називається **тихоновським добутком**.

Зауваження 24.2 — Очевидно, що координатні проектори розділяють точки добутку, тому за теорем. 23.2 тихоновський добуток хаусдорфових просторів є віддільним за Хаусдорфом.

Означення 24.5. Нехай K — скінчений набір індексів з Γ. Добуток $A = \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, де $A_\gamma = X_\gamma$ при $\gamma \notin K$, і $A_\gamma \subset X_\gamma$ при $\gamma \in K$ і A_γ — відкриті множини в топологіях τ_γ, називається **відкритою циліндричною множиною** з основою $\prod_{\gamma\in K} A_\gamma$.

Запишемо тихоновську топологію як топологію, що породжена сім'єю відображень. Нехай $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, $K \subset \Gamma$ — скінченна множина індексів, $V_\gamma \subset X_\gamma$, $\gamma \in K$ — околи точок x_γ. Введемо позначення

$$U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x) = \left\{\gamma \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma : \gamma_\alpha \in V_\alpha, \forall\alpha \in K\right\}.$$

Зауваження 24.3 — Множина $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x)$ є відкритим циліндричним околом точки x з основою $\prod_{\gamma\in K} V_\gamma$.

Теорема 24.1 (про базу околів точки в тихоновській топології)
Множини $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x)$ утворюють у тихоновській топології базу околів точки x.

Вправа 24.1. Перевірте властивості бази.

Доведення. … □

§24.3 Тихоновська топологія і фільтри

Теорема 24.2 (критерій збіжності в тихоновському добутку)
Фільтр $\mathfrak{F}$ на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ збігається в тихоновській топології до елемента $x = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ тоді і тільки тоді, коли $x_\gamma = \lim_{\mathfrak{F}} P_\gamma$, $\forall\gamma \in \Gamma$.

Доведення. **Необхідність.** Оскільки координатні проектори на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ є неперервними і $x = \lim \mathfrak{F}$, то за теорем. 20.3 $\lim_{\mathfrak{F}} P_\gamma = P_\gamma(x) = x_\gamma$.

Достатність. Покажемо, що будь-який окіл V точки x належить фільтру $\mathfrak{F}$. З огляду на те, що $\forall A \in \mathfrak{F}\ A \subset B \subset X \implies B \in \mathfrak{F}$, достатньо розглянути відкритий циліндричний окіл точки x, який міститься в V. Отже, розглянемо відкритий циліндричний окіл $U = \prod_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$ точки x з основою $\prod_{\gamma\in K} V_\gamma$, тобто $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x)$.

Оскільки $\forall\gamma_0 \in K$ множина V_{γ_0} є околом точки x_{γ_0} в просторі X_{γ_0} і $\lim_{\mathfrak{F}} P_{\gamma_0} = x_{\gamma_0}$, то існує множина $A \in \mathfrak{F}$ така, що $P_{\gamma_0}(A) \subset V_{\gamma_0}$, отже, $A \subset P_{\gamma_0}^{-1}(V_{\gamma_0})$, тому $P_{\gamma_0}^{-1}(V_{\gamma_0}) \in \mathfrak{F}$. Таким чином, $\forall\gamma \in K\ P_\gamma^{-1}(V_\gamma) \in \mathfrak{F}$. Оскільки множина K є скінченою, то $\bigcap_{\gamma\in K} P_\gamma^{-1}(V-\gamma) \in \mathfrak{F}$.

Оскільки

$$\bigcap_{\gamma\in K} P_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subset U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x),$$

а $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x)$ утворюють в $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ базу околів точки x(теорем. 24.1), то

$$\bigcap_{\gamma\in K} P_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subset U, \quad \forall U \in \Omega_x.$$

Тому, за четвертою аксіомою фільтра $U \in \mathfrak{F}$. $\square$

Зауваження 24.4 — Із теорем. 24.1 випливає, що послідовність $x_n = \{x_{n,\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$ точок добутку $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ топологічних просторів збігається до точки x тоді і лише тоді, коли для кожного $\gamma_0 \in \Gamma$ послідовність $\{x_{\gamma_0,n}\}$ збігається в просторі X_{γ_0} до точки x_{γ_0}.

Інакше кажучи, збіжність в тихоновській топології є покоординатною.

Теорема 24.3 (теорема Тихонова про добуток компактів)

Тихоновський добуток $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ будь-якої сім'ї непорожніх топологічних просторів X_γ, $\gamma \in \Gamma$ є компактним тоді і лише тоді, коли усі X_γ є компактними.

Доведення. **Необхідність.** Нехай X_γ, $\gamma \in \Gamma$ — довільна сім'я непорожніх просторів і їх тихоновський добуток $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ є компактним. Оскільки кожна множина X_γ, $\gamma \in \Gamma$ є образом компактного простору $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, отриманим за допомогою неперервного відображення $P_\gamma : X \to X_\gamma$, то простори X_γ, $\gamma \in \Gamma$ є компактними (неперервний образ компактного простору є компактним простором).

Достатність. За критерієм компактності в термінах фільтрів, для того щоб простір був компактним, необхідно і достатньо, щоб кожний ультрафільтр на X збігався. Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Оскільки X_γ, $\gamma \in \Gamma$ — компактні топологічні простори, то за критерієм компактності в термінах фільтрів $\forall\gamma \in \Gamma\ \exists y_\gamma = \lim_{\mathfrak{A}} P_\gamma$. Оскільки P_γ — неперервні відображення, то за теорем. 24.2 $y = \{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \lim \mathfrak{A}$. $\square$

§24.4 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 492–495).

[2] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979(стр. 120–126, 230–234).

25 Основні відомості про топологічні векторні простори

§25.1 Простір із неперервними операціями

Означення 25.1. Лінійний простір X(дійсний чи комплексний) із заданою на ньому топологією τ називається **топологічним векторним простором**(ТВП), якщо топологія τ так погоджена з лінійною структурою, що відображення суми елементів і множення скаляра на елемент є неперервними по сукупності змінних.

Розпишемо означення докладніше. Нехай X — топологічний векторний простір. Розглянемо функції $+ : X \times X \to X$ і $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$. Узгодження топології лінійною структурою означає, что функції $+$ і $\cdot$ є неперервними як функції двох змінних.

Теорема 25.1

Нехай U — відкрита множина у просторі X. Тоді

1. для будь-якого $x \in X$ множина $U + x$ є відкритою
2. для будь-якого $\lambda \neq 0$ множина λU є відкритою.

Доведення. Зафіксуємо $x_2 = -x$ і скористаємося неперервністю функції $+(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ по першій змінній при фіксованій другій змінній. Отже, функція $f(x_1) = x_1 - x$ є неперервною по x_1, а $U + x$ є прообразом відкритої множини U під дією функції f. Отже, множина $U + x$ є відкритою.

Друга властивість виводиться так само, але з використанням неперервності функції $g(x) = \lambda^{-1}x$. □

З теореми випливає, що околи будь-якого елемента $x \in X$ є множинами вигляду $U + x$, де U — околи нуля. Відповідно, топологія τ однозначно визначається системою $\mathfrak{N}_0$ околів нуля. Тому інші властивості топології τ будуть формулюватися через околи нуля. Далі через S_r позначатимемо множину $S_r = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq r\}$.

§25.2 Поглинаючі та урівноважені множини

Означення 25.2. Підмножина A лінійного простору X називається **поглинаючою**, якщо для будь-якого $x \in X$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $x \in tA$ для будь-якого $t > n$.

Означення 25.3. Підмножина $A \subset X$ називається **урівноваженою**, якщо для будь-якого скаляра $\lambda \in S_1$ виконане включення $\lambda A \subset A$.

Теорема 25.2

Властивості системи $\mathfrak{N}_0$ околів нуля топологічного векторного простору X:

1. Будь-який окіл нуля є поглинаючою множиною.
2. Довільний окіл нуля містить урівноважений окіл нуля.
3. Для кожного околу $U \in \mathfrak{N}_0$ існує урівноважений окіл $V \in \mathfrak{N}_0$ з $V + V \subset U$.

Доведення.

1. Зафіксуємо $x \in X$ і скористаємося неперервністю функції $f(\lambda) = \lambda x$. Оскільки $f(0) = 0$, неперервність у точці $\lambda = 0$ означає, що для будь-якого $U \in \mathfrak{N}_0$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $\lambda x \in U$ для будь-якого $\lambda \in S_\varepsilon$. Увівши позначення $t = \lambda^{-1}$, одержимо, що $x \in tU$ для будь-якого $t \geq \varepsilon^{-1}$.
2. Нехай $U \in \mathfrak{N}_0$. Через неперервність у точці $(0,0)$ функції $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$, існує таке $\varepsilon > 0$ і такий окіл $W \in \mathfrak{N}_0$, що $\lambda x \in U$ для будь-якого $\lambda \in S_\varepsilon$ і будь-якого $x \in W$.

   Покладемо $V = \bigcup_{\lambda \in S_\varepsilon} \lambda W$. Покажемо, що множина $V \supset U$ і є шуканаий урівноваженаий окіл нуля. З одного боку, $V \supset W$, отже, $V \in \mathfrak{N}_0$. З іншого боку, для будь-якого $\lambda_0 \in S_1$ маємо $\lambda_0 S_\varepsilon \subset S_\varepsilon$, отже,

   $$\lambda_0 V = \bigcup_{\lambda \in S_\varepsilon} \lambda_0 \lambda W = \bigcup_{\mu \in \lambda_0 S_\varepsilon} \mu W \subset \bigcup_{\mu \in S_\varepsilon} \mu W = V,$$

   чим доведена урівноваженість околу V.
3. Через неперервність у точці $(0,0)$ функції $+(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, для будь-якого околу $U \in \mathfrak{N}_0$ існують околи $V_1, V_2 \in \mathfrak{N}_0$ з $V_1 + V_2 \subset U$. Шуканий урівноважений окіл нуля V виберемо за пунктом 2 так, щоб V містився в околі $V_1 \cap V_2$. $\square$

§25.3 Узгодженість та віддільність

Теорема 25.3

Нехай система $\mathfrak{N}_0$ околів нуля топології τ на лінійному просторі X підкоряється умовам теорем. 25.2, і для будь-якої точки $x \in X$ система околів $\mathfrak{N}_x$ цієї точки отримується паралельним переносом $\mathfrak{N}_0$ на вектор x. Тоді топологія τ узгоджується з лінійною структурою.

Зауваження 25.1 — Через урівноваженість умову $V + V \subset U$ пункту 3 теорем. 25.2 можна записувати у вигляді $V - V \subset U$.

Теорема 25.4

Для віддільності за Хаусдорфом топологічного векторного простору X необхідно і достатньо, щоб система $\mathfrak{N}_0$ околів нуля підкорялася такій умові: для будь-якого $x \neq 0$ існує окіл $U \in \mathfrak{N}_0$, що не містить точку x.

Доведення. Нехай $x \neq y$. Тоді $x - y \neq 0$ та існує окіл $U \in \mathfrak{N}_0$, який не містить $x - y$. Виберемо такий окіл $V \in \mathfrak{N}_0$, що $V - V \subset U$. Тоді околи $x + V$ і $y + V$ не перетинаються: якщо існує точка z, яка лежить одночасно в $x + V$ і $y + V$, то $z - x \in V$, $z - y \in V$ і $x - y = (z - y) - (z - x) \in V - V \subset U$. $\square$

§25.4 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 497–499).

26 Повнота, передкомпактність, компактність

§26.1 Фільтр Коші

Означення 26.1. Фільтр $\mathfrak{F}$ у топологічному векторному просторі X називається **фільтром Коші**, якщо для будьякого околу нуля U існує такий елемент $A \in F$, що $A - A \subset U$. Такий елемент A називається **малим порядку U**.

Теорема 26.1

Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ має границю, то $\mathfrak{F}$ — фільтр Коші.

Доведення. Нехай $\lim \mathfrak{F} = x$ і $U \in \mathfrak{N}_0$. Виберемо $V \in \mathfrak{N}_0$ з $V - V \subset U$. За теоремою 1.1 (п.1) існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $A \subset x + V$ Отже,

$$A - A \subset (x + V) - (x + V) \subset V - V \subset U. \qquad \square$$

Теорема 26.2

Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр Коші на ТВП X і x — гранична точка $\mathfrak{F}$. Тоді $\lim \mathfrak{F} = x$.

Доведення. Нехай $x+U$ — довільний окіл точки x, де $U \in \mathfrak{N}_0$. Виберемо окіл $V \in \mathfrak{N}_0$ з $V+V \subset U$ і множину $A \in F$, малу порядку V: $A-A \subset V$. За означенням граничної точки, множини A і $x + V$ перетинаються, тобто існує $y \in A \cap (x + V)$. Тоді

$$x + U \supset x + V + V \supset y + V \supset y + A - A \supset y + A - y = A.$$

Таким чином, окіл $x + U$ містить елемент фільтра $\mathfrak{F}$, отже, $x + U \in F$. $\square$

§26.2 Повнота і фільтри

Означення 26.2. Множина A у ТВП X називається **повною**, якщо будь-який фільтр Коші на X, що містить A як елемент, має границю, що належить A.

Зауваження 26.1 — Зокрема, топологічний векторний простір X називається **повним**, якщо будь-який фільтр Коші в X має границю.

Теорема 26.3

Нехай X — підпростір топологічного векторного простору E і $A \subset X$ — повна в X підмножина. Тоді A є повною як підмножина простору E.

Доведення. Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр Коші на E, що містить A як елемент. Тоді, зокрема $X \in \mathfrak{F}$, то слід $\mathfrak{F}_X$ фільтра $\mathfrak{F}$ на X є фільтром. Легко бачити, що $\mathfrak{F}_X$ — це фільтр Коші на X, що містить A як елемент. Отже, через повноту A у X фільтр $\mathfrak{F}_X$ має в X границю $a \in A$. Ця ж точка a буде границею фільтра $\mathfrak{F}$ в E. $\square$

Теорема 26.4

Повна підмножина A хаусдорфового ТВП X є замкнутою.

Зауваження 26.2 — Зокрема, якщо підпростір хаусдорфового ТВП є повним в індукованій топології, то цей підпростір є замкнутим.

§26.3 Передкомпактність і компактність

Доведення. Нехай точка $x \in X$ належить замиканню множини A. Нам потрібно довести, що $x \in A$. Розглянемо сімейство $\mathfrak{D}$ усіх перетинів вигляду $(x+U) \cap A$, де $U \in \mathfrak{R}_0$. Усі такі перетини не порожні, і $\mathfrak{D}$ задовольняє усі аксіоми бази фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}$, породжений базою $\mathfrak{D}$, мажорує фільтр $\mathfrak{R}_x$ усіх околів точки x, отже, $x = \lim \mathfrak{F}$. Зокрема, $\mathfrak{F}$ — це фільтр Коші. За побудовою, наша повна множина A є елементом фільтра $\mathfrak{F}$; отже, відповідно до означення, фільтр $\mathfrak{F}$ має границю в A. Через єдиність границі $x \in A$, що і було потрібно довести. □

Означення 26.3. Множина A у ТВП X називається **передкомпактом**, якщо для будь-якого околу нуля U існує така скінченна множина $B \subset X$, що $A \subset U + B$. Така множина B називається, за аналогією з ε-сіттю, **U-сіттю** множини A.

Теорема 26.5

Щоб підмножина A хаусдорфового ТВП X була компактом, необхідно і достатньо, щоб A була одночасно передкомпактом і повною множиною в X.

§26.4 Поглинання і обмеженість

Означення 26.4. Нехай X — топологічний векторний простір. Будемо говорити, що окіл нуля $U \in \mathfrak{R}_0$ **поглинає** множину $A \subset X$, якщо існує таке число $N > 0$, що $A \subset tU$ для будь-якого $t \geq N$.

Означення 26.5. Множина $A \subset X$ називається **обмеженою**, якщо вона поглинається кожним околом нуля.

Теорема 26.6

Властивості обмежених підмножин топологічного векторного простору X:

1. Нехай $A \subset X$ — обмежена множина. Тоді для будьякого околу $U \in \mathfrak{R}_0$ існує таке число $N > 0$, що $A \subset tU$ для будь-якого $t \geq N$.
2. Об'єднання скінченної кількості обмежених множин обмежене.
3. Будь-яка скінченна множина є обмеженою.
4. Будь-який передкомпакт у X є обмеженим.

Доведення.

1. Нехай $V \in \Omega_0$ — врівноважений окіл, що міститься в U за теорем. 25.2 (п. 2). Виберемо таке число $N > 0$, що $A \subset NV$. Тоді для будь-якого $t \geq N$ маємо
$$A \subset NV = t(Nt^{-1}V) \subset tV \subset tU.$$

2. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — обмежені множини, U — окіл нуля. За попереднім пунктом
$$\forall A_k \quad \exists N_k : \quad \forall t \geq N \quad A_k \subset tU.$$
Покладемо $N = \max_k N_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тоді $\forall t \geq N$ усі включення $A_k \subset tU$ виконуються одночасно, тобто $\bigcup_{k=1}^n A_k \subset tU$.

3. Одноточкова множина є обмеженою, оскільки окіл нуля є поглинаючою множиною. Отже, за попереднім пунктом, будь-яка скінченна множина як скінченне об'єднання одноточкових множин є обмеженою.

4. Нехай A — передкомпакт в X, U — окіл нуля. Виберемо врівноважений окіл $V \in \Omega_0$, такий що $V + V \subset U$. За означенням передкомпакта, існує така скінченна множина $B \subset X$, що $A \subset B + V$. Відповідно до попереднього пункту, можна знайти такий коефіцієнт $N > 0$, що $B \subset NV$. Тоді
$$A \subset B + V \subset NV + V \subset N(V + V) \subset NU. \qquad \square$$

§26.5 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 502–504).