10 Нормовані простори

§10.1 Норми векторів

Означення 10.1. Нехай E — лінійний простір над полем k. Відображення $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ називається **нормою** в просторі E, якщо $\forall x, y \in E$, $\lambda \in k$) виконуються аксіоми норми:

1. $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ (віддільність);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однорідність);
3. $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\|$ (нерівність трикутника).

Означення 10.2. Лінійний простір із введеною на ньому нормою називається **нормованим**.

Зауваження 10.1 — Ясно, що нормований простір є метричним, оскільки в ньому можна ввести метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$. З цього випливає, що норма елемента в нормованому просторі є відстанню між ним і нульовим елементом: $\|x\| = \rho(x, \vec{0})$.

Приклад 10.1

Простір

$$\ell = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\}$$

є нормованим з нормою $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

Означення 10.3. Послідовність $\{x_n\}$ елементів нормованого простору E називається **збіжною за нормою**, або **сильно збіжною**, або просто **збіжною**, до елемента $x_0 \in E$, якщо $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо $\{x_n\}$ збігається до елемента $x_0 \in E$, то $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Означення 10.4. Повний нормований простір називається **банаховим**.

§10.2 Норми функціоналів

Означення 10.5. Функціонал називається **обмеженим**, якщо

$$\exists C > 0 : |f(x)| \leq C\|x\|_E. \tag{10.1}$$

Означення 10.6. Найменша серед усіх додатних констант, що задовольняють нерівність (10.1) називається **нормою** функціонала:

$$\|f\| = \sup_{x \neq \vec{0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Означення 10.7. Нехай E_1 і E_2 — нормовані простори. На множині $D \subset E_1$ задано **оператор**, або відображення A, із значеннями в E_2, якщо кожному елементу $x \in D$ поставлено у відповідність елемент $y = Ax \in E_2$.

Означення 10.8. Оператор A називається **лінійним**, якщо

1. $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D$ для довільних $x_1, x_2 \in D$, де α, β — дійсні числа;
2. $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$ для довільних $x_1, x_2 \in D$, де α, β — дійсні числа.

Означення 10.9. Якщо A — лінійний оператор з E_1 в E_2 такий, що $D = E_1$, та з умови $x_n \to x_0$, $x_n, x_0 \in E_1$ випливає, що $A(x_n) \to A(x_0)$ в E_2, то A називається **лінійним неперервним оператором**.

Означення 10.10. Оператор A називається **обмеженим** в просторі E, якщо існує така константа C, що

$$\|Ax\| \leq C\|x\|. \tag{10.2}$$

Означення 10.11. Найменша константа C, яка задовольняє нерівність (10.2), називається **нормою** оператора A.

Теорема 10.1

Лінійний оператор, заданий на лінійному нормованому просторі, є неперервним тоді і тільки тоді, коли він обмежений.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що A — неперервний, лінійний, але не обмежений оператор. Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in E : \|Ax_n\|_F > n\|x_n\|_E.$$

Покладемо

$$\xi_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

За побудовою

$$\xi_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Оцінимо норму елемента $\|A\xi_n\|_F$:

$$\|A\xi_n\|_F = \left\| A\left(\frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| = \frac{1}{n\|x_n\|_E}\|Ax_n\|_F > \frac{n\|x_n\|_E}{n\|x_n\|_E} = 1.$$

З цього випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \|A\xi_n\|_F \neq 0 \implies \lim_{n\to\infty} A\xi_n \neq 0.$$

Тобто A — лінійний оператор, $A\vec{0} = 0$ і у той же час $\xi_n \to 0$, але $A\xi_n \not\to 0$, тобто A — не неперервний. Отримане протиріччя доводить, що оператор A є обмеженим.

Достатність. A — обмежений оператор, а тому

$$\exists C > 0 : \forall x \in E : \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Нехай

$$x_n \to x \implies \|x_n - x\|_E \to 0 \implies \\ \|Ax_n - Ax\|_F = \|A(x_n - x)\|_F \leq C\|x - x_n\|_E \to 0 \implies \\ \|Ax_n - Ax\|_F \to 0 \implies Ax_n \to Ax, \quad n \to \infty.$$

Це означає, що оператор A — неперервний. □

§10.3 Простір операторів

Означення 10.12. Лінійні оператори A, що відображають нормований простір E в нормований простір F, утворюють **нормований простір операторів** $\mathcal{L}(E,F)$ з нормою

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_F.$$

Теорема 10.2

Нехай A — лінійний обмежений оператор, що діє із нормованого простору E в банахів простір F. Якщо область визначення оператора $D(A)$ щільна в E, то існує такий лінійний обмежений оператор $\overline{A} : E \to F$ такий що, $\overline{A}x = Ax$, $\forall x \in D(A)$ і $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

Доведення. Нехай $x \in E \setminus D(A)$. Оскільки $\overline{D}(A) = E$, то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A) : \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Із нерівності

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E.$$

і обмеженості оператора A випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N : \|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon.$$

Це означає, що послідовність $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Оскільки простір F є повним, ця послідовність є збіжною:

$$\exists \overline{A}x = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Покажемо, що цей елемент визначений коректно, тобто не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Припустимо, що існує ще одна послідовність $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, яка збігається до елемента x:

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = x.$$

Нехай

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \quad y' = \lim_{n\to\infty} Ax'_n.$$

З того що

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F \leq \lim_{n\to\infty} \|A\| \cdot \|x_n - x'_n\|_E = 0,$$

випливає

$$\|y - y'\|_F = \lim_{n\to\infty} \|y - y'\|_F \leq \lim_{n\to\infty} \|y - Ax_n\|_F + \lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F + \lim_{n\to\infty} \|Ax'_n - y'\|_F = 0.$$

Отже, $y = y'$.

Лінійність оператора $\overline{A}$ випливає із лінійності оператора A і властивостей границь.

Оскільки оператор $\overline{A}$ збігається з оператором A в області визначення $D(A)$, але має більш широку область визначення,

$$\|A\| \le \|\overline{A}\|.$$

З іншого боку,

$$\|Ax_n\|_F \le \|A\| \cdot \|x_n\|_E, \quad \forall x_n \in E.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\|_F = \left\|A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right\| = \|\overline{A}x\|_F \le \|A\| \cdot \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\| = \|A\| \cdot \|x\|_E, \quad x \in E.$$

Це означає, що

$$\|\overline{A}\| \le \|A\|.$$

Порівнюючи оцінки $\|\overline{A}\|$, отримуємо

$$\|\overline{A}\| = \|A\|. \qquad \square$$

Теорема 10.3 (Хана—Банаха в нормованому просторі)
Нехай E — дійсний нормований простір, L — його підпростір, f_0 — обмежений лінійний функціонал на L. Цей лінійний функціонал можна продовжити до деякого лінійного функціонала f, заданого на всьому просторі E без збільшення норми:

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

Доведення. Нехай f_0 — обмежений лінійний функціонал на L. Значить,

$$|f_0(x)| \le \|f_0\| \cdot \|x\|, \forall x \in L.$$

За теоремою Хана—Банаха в лінійному просторі

$$\exists f \text{ — продовження } f_0 \text{ на } E : |f(x)| \le \|f_0\| \cdot \|x\|, \forall x \in E.$$

З цього випливає, що

$$\|f\| \le \|f_0\|.$$

З іншого боку, $L \subset E$, а тому

$$\|f\| = \sup_{x\ne\vec{0}, x\in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \sup_{x\ne\vec{0}, x\in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\ne\vec{0}, x\in L} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \|f_0\|.$$

Отже, $\|f\| = \|f_0\|$. $\square$

§10.4 Література

[1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 96–102).