# IV

# Фільтри і напрямленності

# Частина IV: Зміст

# 18 Напрямлености

Як добре відомо, в основі усіх основних понять і конструкцій математичного аналізу (неперервності, диференційовністі, інтегрованісті, сумування рядів тощо) лежить концепція збіжності. В основному курсі функціонального аналізу ми показали, що за допомогою цієї концепції в топологічних просторах, що задовольняють першу аксіому зліченості, можна навіть задавати топологію.

Концепція збіжності містить в собі два поняття: послідовність і границю. Спочатку в математиці розглядалися лише послідовності дійсних чисел. Згодом теорію розповсюдили на послідовності точок в метричному просторі, і, нарешті, узагальнили для послідовності точок в довільному топологічному просторі.

Прагнення вийти за межі просторів, що задовольняють першу аксіому зліченості, в 1920-х роках привело до узагальнення поняття границі звичайних послідовностей на узагальнену послідовність (збіжність за Муром–Смітом) і появи теорії напрямленостей. В 1930-х роках французський математик А. Картан розробив загальну теорію збіжності, яка заснована на поняттях фільтра, ультрафільтра та їх границь. Ця теорія є універсальною. Вона заміняє теорію Мура–Сміта і суттєво спрощує загальну теорію збіжності.

Для того щоб глибше зрозуміти зміст цих теорій, доцільно детально їх розглянути та порівняти.

## §18.1 Частково упорядковані множини (нагадування)

Нагадаємо деякі означення із теорії множин.

**Означення 18.1.** Нехай $A$ — довільна множина. Позначимо як $A \times A$ сукупність усіх упорядкованих пар $(a, b)$, де $a, b \in A$. Говорять, що в множині A задано **бінарне відношення** $\varphi$, якщо в $A \times A$ виділено довільну підмножину $R_\varphi$. Елемент $a$ перебуває у відношенні $\varphi$ з елементом $b$, якщо пара $(a, b)$, належить $R_\varphi$.

**Приклад 18.1**

Бінарним відношенням є, наприклад, тотожність. Множиною $R_\varphi$ у цьому випадку є діагональ $(a, a) \in A \times A$.

**Означення 18.2.** Бінарне відношення, задане в множині $A$, називається **відношенням часткового передупорядкування**, якщо воно є рефлексивним і транзитивним, тобто

1. $(a, a) \in R_\varphi$ — рефлексивність;
2. $(a, b), (b, c) \in R_\varphi \implies (a, c) \in R_\varphi$ — транзитивність.

**Означення 18.3.** Бінарне відношення, задане в множині $A$, називається **відношенням часткового упорядкування**, якщо воно є рефлексивним, транзитивним і антисиметричним, тобто

1. $(a, a) \in R_\varphi$ — рефлексивність;
2. $(a, b), (b, c) \in R_\varphi \implies (a, c) \in R_\varphi$ — транзитивність.
3. $(a, b), (b, a) \in R_\varphi \implies a = b$ — антисиметричність.

**Означення 18.4.** Множина $A$ із заданим на ній відношенням часткового упорядкування (передупорядкування) називається **частково упорядкованою (передупорядкованою) множиною**.

**Зауваження 18.1** — У частково упорядкованих множинах за традицією відношення $xRy$ позначають як $x \le y$ або $y \ge x$.

## §18.2 Напрямленості

**Означення 18.5.** Частково упорядкована множина $S$ називається **фільтрівною вправо**, або **напрямленням за зростанням**, або просто **напрямленою множиною**, якщо

$$\forall s_1, s_2 \in S \quad \exists s \in S: \quad s \ge s_1, s_2.$$

**Приклад 18.2**

Множина натуральних чисел із природним упорядкуванням є напрямленою.

**Приклад 18.3**

Нехай $x$ — фіксована точка топологічного простору $X$, а $\Omega_x$ — сукупність усіх околів цієї точки.

Введемо в множині $\Omega_x$ відношення упорядкування за оберненим включенням:

$$V \subset U \iff V \ge U.$$

Оскільки

$$\forall U_1, U_2 \in \Omega \quad U_1 \cap U_2 \ge U_1, U_2,$$

то множина $\Omega_x$ є *напрямленою* множиною усіх околів точки $x$ в просторі $X$.

Розглянемо довільну множину $X$ і деяку послідовність її елементів $x_n$. Послідовність $x_n$ можна трактувати як відображення

$$f : \mathbb{N} \to X,$$

де $f(n) = x_n$.

Якщо замінити множину $\mathbb{N}$ довільною напрямленою множиною $S$, отримаємо означення узагальненої послідовності, або напрямленості.

**Означення 18.6.** Будь-яке відображення напрямленої множини називається **напрямленістю**, або **узагальненою послідовністю**, або **сіттю**. До того ж, якщо $f : S \to X$ — напрямленість, то напрямлена множина $S$ називається *областю визначеності напрямленості* $f$, а множина $f(S)$ — *областю її значень*.

**Зауваження 18.2** — Будь-яка послідовність елементів простору $X$ є напрямленістю в $X$ з областю визначення $\mathbb{N}$. Для зручності значення $f_s$ напрямленості $f : S \to X$ на елементі $s \in S$ часто позначають як $x_s$, а саму напрямленість $f$ подають як множину $\{x_s \mid s \in S\}$.

**Приклад 18.4**

Нехай $\Omega_x$ — напрямлена множина усіх околів точки $x$ простору $X$. Вибираючи по точці $x_U$ з кожного околу $U \subset \Omega_x$, отримуємо напрямленість $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$.

**Означення 18.7.** Говорять, що напрямленість $f : S \to X$ **починаючи з деякого місця належить**, або **майже вся лежить** в підмножині $A \subset X$, якщо існує $s_0 \in S$, таке що $\forall s \geq s_0$ $x_s \in A$.

**Означення 18.8.** Якщо $\forall s \in A$ $\exists t \geq s$: $f_t \in A$, то говорять, що напрямленість $f : S \to X$ є **частою** в підмножині $A \subset X$ (**часто буває** в $A$).

**Зауваження 18.3** — Якщо напрямленість $f : S \to X$ є частою в $A$, то вона не може майже вся лежати в доповненні $X \setminus A$. І навпаки, якщо напрямленість майже вся лежить в доповненні $X \setminus A$, то вона не може бути частою в $A$.

**Означення 18.9.** Точка $x^\star$ називається **граничною точкою** напрямленості, якщо ця напрямленість часто буває в будь-якому околі точки $x^\star$.

## §18.3 Границі напрямленості

**Означення 18.10.** Напрямленість $f : S \to X$ в топологічному просторі $X$ називається **збіжною** до точки $x_0 \in X$, якщо вона майже вся лежить в будь-якому околі точки $x_0$, тобто якщо для довільного околу $U$ цієї точки знайдеться елемент $s_U \in S$, такий що $\forall s \geq s_U$ $f_s \in U$. Точка $x_0 = \lim_S f_s$ називається **границею** напрямленості $f : S \to X$.

**Приклад 18.5**

Кожна збіжна послідовність в просторі $X$ є збіжною напрямленістю в $X$, границя якої є границею послідовності.

**Приклад 18.6**

Нехай $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$ — напрямленість в просторі $X$. Легко бачити, що ця напрямленість збігається до точки $x$. Дійсно, нехай $U_0$ — довільний окіл точки $x$. Тоді $\forall U \geq U_0$ $x \in U \subset U_0$, тобто ця напрямленість майже вся лежить в довільному околі точки $x$.

**Зауваження 18.4** — Напрямленість, як і послідовність, в загальних топологічних просторах може мати різні границі. В хаусдорфових просторах вона має одну границю.

**Означення 18.11.** Напрямленість $g : T \to X$ називається **піднапрямленістю** напрямленості $f : S \to X$, якщо існує відображення $h : T \to S$, таке що $g = f \circ h$ і $\forall s_0 \in S$ $\exists t_0 \in T$: $\forall t \geq t_0$ $h(t) \geq s_0$.

**Зауваження 18.5 —** На відміну від означення звичайної підпослідовності, означення піднапрямленості допускає, щоб область визначення піднапрямленості не була частиною області визначення напрямленості.

**Означення 18.12.** Частково упорядкована множина $X$ є **конфінальною** своїй підмножині $A$, якщо в $X$ не існує жодного елемента, що є наступним за усіма елементами множини $A$.

**Приклад 18.7**

Інтервал $(0,1)$ є конфінальним множині $\left\{\frac{n}{n+1}\middle|n \in \mathbb{N}\right\}$.

**Зауваження 18.6 —** Якщо $T \subset S$, а $h$ — відображення вкладення, то друга умова еквівалентна конфінальності $T$ в $S$. І навпаки, для будь-якої конфінальної частини $T$ з $S$ і будь-якої напрямленості $f : S \to X$ звуження $f$ на $T$ є піднапрямленістю напрямленості $f$.

**Теорема 18.1** (Біркгофа)

Нехай $A$ — деяка підмножина довільного топологічного простору $X$. Тоді $x \in \overline{A}$ тоді і лише тоді, коли існує напрямленість в $A$, що збігається до точки $x$.

*Доведення.* **Необхідність.** Нехай $x \in \overline{A}$ і $\Omega_x$ — напрямлена множина усіх околів точки $x$. Оскільки

$$\forall U \in \Omega_x \quad A \cap U \neq \varnothing,$$

то, вибираючи по одній точці $x_U x \in A \cap U$, отримуємо напрямленість $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$ в $A$, що збігається до точки $x$.

**Достатність.** Нехай $\{x_s \mid s \in S\}$ — напрямленість в $A$, що збігається в $X$ до точки $x$. Тоді за означенням границі напрямленості

$$\forall U \in \Omega_x \quad \exists s_0 \in S : \quad \forall s \geq s_0 \quad x_s \in U.$$

Отже,

$$A \cap U \neq \varnothing \implies x_0 \in \overline{A}.$$

□

## §18.4 Напрямленості та неперервність

**Зауваження 18.7 —** Нагадаємо, що в просторах із першою аксіомою зліченності неперервність відображення $f$ в довільній точці $x_0$ була еквівалентною умові, що з $x_n \to x_0$ випливає $f(x_n) \to f(x_0)$. Перехід від послідовностей до напрямленостей дозволяє відмовитись від цієї умови.

**Теорема 18.2** (критерій неперервності)

Відображення $f : X \to Y$ є неперервним в точці $x_0$ тоді і лише тоді, коли для будь-якої напрямленості $\{x_s \mid s \in S\}$, що збігається до точки $x_0 \in X$ напрямленість $\{f(x_s) \mid s \in S\}$ збігається то точки $f(x_0) \in Y$.

*Доведення.* **Необхідність.** Нехай $f : X \to Y$ неперервна в точці $x_0$ і $\{x_s \mid s \in S\}$ — деяка напрямленість в $X$, що збігається до точки $x_0$. Нехай також $V_0$ — довільний окіл точки $f(x_0)$ в $Y$. Тоді достатньо перевірити, що напрямленість $\{f(x_s) \mid s \in S\}$ майже вся лежить в $V_0$.

Справді, оскільки відображення $f$ є неперервним в точці $x_0$, то існує окіл $U_0$ точки $x_0$, такий що $f(U_0) \subset V_0$. Оскільки напрямленість $\{x_s \mid s \in S\}$ збігається до $x_0$, то знайдеться індекс $s_0 \in S$ такий, що при всіх $s \geq s_0$ $x_s \in U_0$. Отже, для всіх $s \geq s_0$ $f(x_s) \in V_0$, а це значить, що майже вся напрямленість $\{f(x_s) \mid s \in S\}$ лежить в $V_0$.

**Достатність.** Припустимо, що умови теореми виконуються, але відображення $f$ не є неперервним в точці $x_0$. Тоді існує такий окіл $V_0$ точки $f(x_0)$, що в будь-якому околі $U$ точки $x_0$ знайдеться точка $x_U$, образ $f(x_U)$ якої належить $Y \setminus V_0$.

Розглянемо напрямленість $\{x_U \mid U \in \Omega_{x_0}\}$, де $\Omega_{x_0}$ — напрямлена множина усіх околів точки $x_0$. Очевидно, що ця напрямленість збігається до точки $x_0$.

Проте напрямленість $\{f(x_U) \mid U \in \Omega_{x_0}\}$ не може збігатися до точки $f(x_0)$, оскільки в такому випадку вона майже вся лежала б в околі $V_0$. Отримане протиріччя доводить достатність. $\square$

## §18.5 Література

[1] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 18–21).

[2] **Александрян Р. А.,** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 91–98).

[3] **Келли Дж.** Общая топология / Дж. Келли — М.: Наука, 1966 (стр. 91–118).

# 19 Фільтри

Окрім збіжності напрямленостей, існує ще один вид узагальненої збіжності — збіжність фільтрів. Ця ідея базується на альтернативному означенні збіжної послідовності: послідовність $x_n$ називається збіжною до точки $x_0$, якщо для будь-якого околу $U$ цієї точки доповнення до прообразу $f^{-1}(U)$ є скінченною підмножиною з $\mathbb{N}$, де $f : \mathbb{N} \to X$ — відображення, що задає послідовність. Якщо множину $\mathbb{N}$ замінити абстрактним простором $E$, в якому виділено сім'ю підмножин $F$, що має певні загальні властивості, то можна дати розумне означення узагальненої збіжності.

## §19.1 Фільтри

**Означення 19.1.** Сім'я підмножин $\mathfrak{F}$ множини $X$ називається **фільтром** на $X$, якщо:

1. Сім'я $\mathfrak{F}$ непорожня.
2. $\varnothing \notin \mathfrak{F}$.
3. Якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$.
4. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathfrak{F}$.

**Наслідок 19.1**

$X \in \mathfrak{F}$.

**Наслідок 19.2**

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{F}$.

**Наслідок 19.3**

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$.

**Приклад 19.1**

Система $\Omega_x$ усіх околів точки $x$ у топологічному просторі $X$ є фільтром.

## §19.2 Бази фільтрів

**Означення 19.2.** Непорожня сім'я підмножин $\mathfrak{D}$ множини $X$ називається **базою фільтра**, якщо:

1. $\varnothing \notin \mathfrak{D}$;
2. $\forall A, B \in \mathfrak{D}\ \exists C \in \mathfrak{D}$: $C \subset A \cap B$.

**Означення 19.3.** Нехай $\mathfrak{D}$ — база фільтра. Фільтром, що **породжений** базою $\mathfrak{D}$, називається сім'я $\mathfrak{F}$ усіх множин $A \subset X$, що містять як підмножину хоча б один елемент бази $\mathfrak{D}$.

> **Вправа 19.1.** Довести, що фільтр, породжений базою, дійсно є фільтром.

*Доведення.* Перевіримо аксіоми фільтра. Перші дві аксіоми очевидні, адже фільтр містить як підмножину свою непорожню базу, і порожня множина не є надмножиною ніякоїмножини окрім порожньої, а база її не містить. Перевіримо тепер другі дві аксіоми.

**Перетин:** якщо $A, B \in \mathfrak{F}$ то $\exists C, D \in \mathfrak{D}$ такі, що $C \subset A$ і $D \subset B$, а тоді $\exists E \in \mathfrak{D}$: $E \subset C \cap D$, і тому $E \subset A \cap B$ і, як наслідок, $A \cap B \in \mathfrak{F}$.

**Надмножина:** якщо $A \in \mathfrak{F}$ то $\exists B \in \mathfrak{D}$: $B \subset A$, а тому $B \subset C$ для усіх $C \supset A$ і, як наслідок, $C \in \mathfrak{F}$. □

**Приклад 19.2**

Якщо $X$ — топологічний простір, $x_0 \in X$, $\mathfrak{D}$ — сукупність усіх відкритих множин, що містять $x_0$, то фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, є фільтром $\mathfrak{M}_{x_0}$, що складається з усіх околів точки $x_0$.

**Означення 19.4.** Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів множини $X$. Тоді сім'я $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$ "хвостів" послідовності $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ є базою фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, породжений базою $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$, називається фільтром, **асоційованим** з послідовністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

## §19.3 Образи фільтрів і баз фільтрів

**Теорема 19.1**

Нехай $X, Y$ — множини, $f : X \to Y$ — функція, $\mathfrak{D}$ — база фільтра в $X$. Тоді сім'я $f(\mathfrak{D})$ усіх множин вигляду $f(A)$, $A \in \mathfrak{D}$ є базою фільтра в $Y$.

*Доведення.* Виконання першої аксіоми бази фільтра є очевидним, адже образ непорожньої множини — непорожня множина. Нехай $f(A), f(B)$ — довільні елементи сім'ї $f(\mathfrak{D})$, $A, B \in D$. За другою аксіомою існує таке $C \in \mathfrak{D}$, що $C \subset A \cap B$. Тоді $f(C) \subset f(A) \cap f(B)$. Отже друга аксіома виконується і для сім'ї $f(\mathfrak{D})$. □

**Наслідок 19.4**

Якщо $\mathfrak{F}$ — фільтр на $X$, то $f(\mathfrak{F})$ — база фільтра в $Y$.

**Означення 19.5.** **Образом фільтра $\mathfrak{F}$** при відображенні $f$ називається фільтр $f[\mathfrak{F}]$, породжений базою $f(\mathfrak{F})$, тобто

$$A \in f[\mathfrak{F}] \iff f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}.$$

**Теорема 19.2**

Нехай $\mathfrak{C} \subset 2^X$ — непорожня сім'я множин. Тоді аби існував фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ (тобто такий, що усі елементи сім'ї $\mathfrak{C}$ є елементами фільтра $\mathfrak{F}$) необхідно і достатньо, щоб $\mathfrak{C}$ була центрованою.

*Доведення.* **Необхідність.** Якщо $\mathfrak{F}$ — фільтр і $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$, то будь-який скінчений набір $A_1, A_2, \ldots, A_n$ елементів сім'ї $\mathfrak{C}$ буде складатися з елементів фільтра $\mathfrak{F}$. Отже,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing.$$

**Достатність.** Нехай $\mathfrak{C}$ — центрована сім'я. Тоді сім'я $\mathfrak{D}$ усіх множин виду

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{C}$$

буде базою фільтра. Як фільтр $\mathfrak{F}$ треба взяти фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$. □

## §19.4 Фільтри, породжені базою

**Означення 19.6.** Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр на $X$. Сім'я множин $\mathfrak{D}$ називається **базою фільтра $\mathfrak{F}$**, якщо $\mathfrak{D}$ база фільтра і фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, збігається з $\mathfrak{F}$.

**Теорема 19.3** (критерій бази фільтра $\mathfrak{F}$)

Для того щоб $\mathfrak{D}$ була базою фільтра $\mathfrak{F}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися дві умови:

1. $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$;
2. $\forall A \in \mathfrak{F}\ \exists B \in \mathfrak{D}$: $B \subset A$.

**Вправа 19.2.** Доведіть цю теорему.

*Доведення.* **Необхідність.** Без першої з цих умов $\mathfrak{F}$ замалий щоб бути породженим базою $\mathfrak{D}$ (не містить якоїсь із множин бази), а без другої — завеликий (містить якусь множину $A$, яка не є надмножиною жодної із множин бази).

**Достатність.** Зрозуміло, що за таких умов усі множини фільтра $\mathfrak{F}$ будуть належати фільтру, породженому базою $\mathfrak{D}$. Відповідно, питання полягає у тому, щоб у породженому фільтрі не опинилося зайвих множин. Розглянемо якусь множинк $A$ з нього. Вона є надмножиною якогось елемента $B$ бази. З першої умови випливає, що фільтр $\mathfrak{F}$ також містить $B$. Тоді він містить і множину $A$ як надмножину $B$. Отже, породжений базою $\mathfrak{D}$ фільтр не може бути ані більшим ані меншим від фільтра $\mathfrak{F}$, і теорема доведена. □

**Означення 19.7.** Нехай $F$ — фільтр на $X$ і $A \subset X$. **Слідом фільтра $\mathfrak{F}$ на $A$** називається сім'я підмножин $\mathfrak{F}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathfrak{F}\}$.

**Теорема 19.4**

Для того щоб слід $\mathfrak{F}_A$ фільтра $\mathfrak{F}$ був фільтром на $A$, необхідно і достатньо, щоб усі перетини $A \cap B$, $B \in \mathfrak{F}$ були непорожніми.

**Вправа 19.3.** Доведіть цю теорему.

*Доведення.* **Необхідність.** Якщо $A \cap B$ порожня для якогось $B \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_A$ містить $A \cap B = \varnothing$, тобто точно не є фільтром, адже не задовольняє першу аксіому.

**Достатність.** Перевіримо аксіоми фільтра. Перші дві аксіоми очевидні. Перевіримо другі дві аксіоми.

**Перетин.** Якщо $B, C \in \mathfrak{F}_A$, то $\exists D, E \in \mathfrak{F}$: $B = D \cap A$, $C = E \cap A$. Тоді $B \cap C = (D \cap A) \cap (E \cap A) = (D \cap E) \cap A \in \mathfrak{F}$.

**Надмножина.** Якщо $B \in \mathfrak{F}_A$, $C \supset B$, $C \subset A$, то $\exists D \in \mathfrak{F}$: $B = D \cap A$. Тоді $C \cup D \supset D$, тобто $C \cup D \in \mathfrak{F}$, а тому $(C \cup D) \cap A = (C \cap A) \cup (D \cap A) = C \cup B = C \in \mathfrak{F}_A$. $\square$

**Наслідок 19.5**

Зокрема, якщо $A \in \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_A$ — фільтр.

## §19.5 Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 99–102).

[2] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 481–484).

# 20 Фільтри і збіжність

## §20.1 Границі і граничні точки фільтрів

**Означення 20.1.** Нехай на множині $X$ задані фільтри $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$. Говорять, що $\mathfrak{F}_1$ **мажорує** $\mathfrak{F}_2$, якщо $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$, тобто кожний елемент фільтра $\mathfrak{F}_2$ є водночас і елементом фільтра $\mathfrak{F}_1$.

**Приклад 20.1**

Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в $X$, а $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — її підпослідовність. Тоді фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$ асоційований з підпослідовністю, мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, асоційований з самою послідовністю.

Дійсно, нехай $A \in \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$. Тоді існує таке $N \in \mathbb{N}$, що $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset A$. Але тоді й $\{x_{n_k}\}_{k=N}^{\infty} \subset A$, тобто $A \in \mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$.

**Означення 20.2.** Нехай $X$ — топологічний простір, $\mathfrak{F}$ — фільтр на $X$. Точка $x \in X$ називається **границею фільтра $\mathfrak{F}$** (цей факт позначається як $x = \lim \mathfrak{F}$), якщо $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр околів точки $x$. Іншими словами, $x = \lim \mathfrak{F}$, якщо кожний окіл точки $x$ належить фільтру $\mathfrak{F}$.

**Означення 20.3.** Точка $x \in X$ називається **граничною точкою фільтра $\mathfrak{F}$**, якщо кожний окіл точки $x$ перетинається з усіма елементами фільтра $\mathfrak{F}$. Множина усіх граничних точок фільтра називається $\operatorname{LIM} \mathfrak{F}$.

**Приклад 20.2**

Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в топологічному просторі $X$. Тоді $x = \lim \mathfrak{F}_{\{x_n\}} = \lim_{n\to\infty} x_n$, а $x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$ збігається з множиною граничних точок послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**Теорема 20.1**

Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр на топологічному просторі $X$, $\mathfrak{D}$ — база фільтра $\mathfrak{F}$. Тоді

1. $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x\ \exists A \in \mathfrak{D}\colon A \subset U$;
2. $x = \lim \mathfrak{F} \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}$. Якщо до того ж $X$ — хаусдорфів простір, то у фільтра $\mathfrak{F}$ немає інших граничних точок. Зокрема, якщо у фільтра в хаусдорфовому просторі є границя, то ця границя є єдиною;
3. множина $\operatorname{LIM} \mathfrak{F}$ збігається з перетином замикань усіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

*Доведення.*

1. $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x\ U \in \mathfrak{F} \iff \forall U \in \mathfrak{F}\ \exists A \in \mathfrak{D}\colon A \subset U$.
2. $x = \lim \mathfrak{F}, U \in \Omega_x \implies U \in \mathfrak{F} \implies \forall A \in \mathfrak{F}\ A \cap U \neq \varnothing \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}$;
   $x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F} \implies \forall U \in \mathfrak{F}, V \in \Omega_y\ U \cap V \neq \varnothing \implies x = y$ (простір хаусдорфів).
3. $x = \operatorname{LIM} \mathfrak{F} \iff \forall A \in \mathfrak{F}, U \in \Omega_x\ A \cap U \neq \varnothing \iff \forall A \in \mathfrak{F}\ x \in \overline{A}$. □

**Теорема 20.2**

Нехай $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — фільтри на топологічному просторі $X$ і $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді:

1. $x = \lim \mathfrak{F}_1 \implies x = \lim \mathfrak{F}_2$;
2. $x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}_2 \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}_1$;
3. $x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}_1$.

*Доведення.*

1. $\mathfrak{F}_1$ мажорує фільтр $\mathfrak{M}_x$ околів точки $x$, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \implies \mathfrak{M}_x \subset \mathfrak{F}_2$.
2. Оскільки при збільшенні сім'ї множин її перетин зменшується, то

$$\operatorname{LIM} \mathfrak{F}_2 = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_2} \overline{A} \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_1} \overline{A} = \operatorname{LIM} \mathfrak{F}_1.$$

3. $x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}_2 \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}_1$. □

## §20.2 Границя функції по фільтру

**Означення 20.4.** Нехай $X$ — множина, $Y$ — топологічний простір, $\mathfrak{F}$ — фільтр на $X$. Точка $y \in Y$ називається **границею функції $f : X \to Y$ по фільтру $\mathfrak{F}$** (цей факт позначається як $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$, якщо $y = \lim f[\mathfrak{F}]$. Іншими словами, $y = \lim f[\mathfrak{F}]$, якщо для довільного околу $U$ точки $y$ існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $f(A) \subset U$.

**Означення 20.5.** Точка $y \in Y$ називається **граничною точкою функції $f : X \to Y$ по фільтру $\mathfrak{F}$**, якщо $y \in \operatorname{LIM} f[\mathfrak{F}]$, тобто якщо довільний окіл точки $y$ перетинається з образами усіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

**Приклад 20.3**

Нехай $X$ — топологічний простір, $f : \mathbb{N} \to X$ і $\mathfrak{F}$ — фільтр Фреше на $\mathbb{N}$. Тоді $\lim_{\mathfrak{F}} f = \lim_{n\to\infty} f(n)$.

**Теорема 20.3**

Нехай $X$ і $Y$ — топологічні простори, $\mathfrak{F}$ — фільтр на $X$, $x = \lim \mathfrak{F}$ і $f : X \to Y$ — неперервна функція. Тоді $f(x) = \lim_{\mathfrak{F}} f$.

*Доведення.* Нехай $U$ — довільний окіл точки $f(x)$. Тоді існує окіл $V$ точки $X$, для якого $f(V) \subset U$. Умова $x = \lim \mathfrak{F}$ означає, що $V \in \mathfrak{F}$. Інакше кажучи, для довільного околу $U$ точки $f(x)$ ми знайшли шуканий елемент $V \in \mathfrak{F}$: $f(V) \subset U$. □

## §20.3 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 484–488).

# 21 Ультрафільтри

## §21.1 Ультрафільтр як мажоранта

**Лема 21.1**

Нехай $\mathfrak{M}$ — лінійно упорядкована непорожня сім'я фільтрів, заданих на множині $X$, тобто для довільни $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$ або $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, або $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$. Тоді об'єднання $\mathfrak{F}$ усіх фільтрів сім'ї $\mathfrak{M}$ також буде фільтром на $X$.

*Доведення.* Перевіримо виконання аксіом фільтра для об'єднання сім'ї множин $\mathfrak{M}$. Перші дві аксіоми є очевидними, а тому перевіримо останні дві.

**Перетин:** якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то знайдуться такі $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$. За умовою, один з фільтрів $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$ мажорує інший. Нехай, без обмеження загальності, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді окрім множини $B$ йому належить і множина $A$, адже $A \in \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Оскільки $\mathfrak{F}_2$ — фільтр, то $A \cap B \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$, тобто сім'я $\mathfrak{F}$ справді замкнена відносно (скінченного) перетину.

**Надмножина:** якщо $A \in \mathfrak{F}$ і $A \subset B \subset X$, то знайдеться такий $\mathfrak{F}_1 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$, а тому $B \in \mathfrak{F}_1$, як надмножина елемента фільтра. Як наслідок, $B \in \mathfrak{F}$ і сім'я $\mathfrak{F}$ виявляється замкненою відносно взяття надмножини. □

**Означення 21.1.** **Ультрафільтром** на $X$ називається максимальний[1] за включенням фільтр на $X$. Інакше кажучи, фільтр $\mathfrak{A}$ на $X$ називається *ультрафільтром*, якщо будь-який фільтр $\mathfrak{F}$ на $X$, що мажорує $\mathfrak{A}$, збігається з $\mathfrak{A}$.

**Теорема 21.1**

Для кожного фільтра $\mathfrak{F}$ на $X$ існує ультрафільтр, що його мажорує.

*Доведення.* Випливає з леми Цорна. Більш детально, необхідно розглянути частково упорядковану множину (сім'ю) фільтрів, що мажорують $\mathfrak{F}$. Лемма 21.1 показує, що довільний ланцюг (лінійно впорядкована підмножина) має верхню межу (також кажуть *верхню грань* або *мажоранту*).

Тоді лема Цорна стверджує, що у нашій частково упорядкованій множині є максимальний елемент. З одного боку зрозуміло, що він буде ультрафільтром, адже немає іншого фільтра, що його мажорує, а з іншого — що він буде мажорувати $\mathfrak{F}$, адже усі елементи нашої частково упорядкованої множини за побудовою мажорують $\mathfrak{F}$. □

## §21.2 Властивості і критерій ультрафільтра

**Лема 21.2**

Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, $A \subset X$ і всі елементи ультрафільтра перетинаються з $A$. Тоді $A \in \mathfrak{A}$.

[1] для якого не існує більшого, але не обов'язково більший за кожен інший

*Доведення.* Додавши до сім'ї множин $\mathfrak{A}$ як елемент множину $A$ ми отримаємо центровану систему множин. Справді, для цього достатньо аби $\mathfrak{A}$ була просто фільтром, а точніше замкненою відносно скінченного перетину. Тоді додавши у цей перетин, який є елементом $\mathfrak{A}$, ще й $A$ можна просто скористатися умовою на непорожні перетини $A$ із елементами $\mathfrak{A}$. Зрозуміло, що ці міркування працюють і для ультрафільтрів, адже кожен ультрафільтр є фільтром. Таким чином уся розширена система множин є центрованою.

За теорем. 19.2 звідси випливає, що знайдеться фільтр $\mathfrak{F}$, який містить усі елементи нашої центрованої системи. Але тоді $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$, звідки випливає, що $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, адже $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, і розширюватися уже нікуди. У той же час, за побудовою, $A \in \mathfrak{F}$, тобто $A \in \mathfrak{A}$. $\square$

**Зауваження 21.1** — Якщо зняти умову того, що $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, і сказати що він просто фільтр, то вийде, що його можна розширити до якогось $\mathfrak{A}'$ щоб додати якийсь новий елемент $A$, за умови що цей $A$ перетинається із усіма елеменами $\mathfrak{A}$.

**Теорема 21.2** (критерій ультрафільтра)

Для того, щоб фільтр $\mathfrak{A}$ на $X$ був ультрафільтром, необхідно і достатньо, щоб для довільної множини $A \subset X$ або сама множина $A$, або її доповнення $X \setminus A$ належало фільтру $\mathfrak{A}$.

*Доведення.* **Необхідність.** Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, і $X \setminus A \notin \mathfrak{A}$. Тоді жодна множина $B \in \mathfrak{A}$ не міститься цілком в $X \setminus A$, тобто будь-яка $B \in \mathfrak{A}$ перетинається з $A$. Отже, за попередньою лемою, $A \in \mathfrak{A}$.

**Достатність.** Припустимо що $\mathfrak{A}$ — не ультрафільтр. Тоді існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ і множина $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$. За побудовою, $A \notin \mathfrak{A}$. З іншого боку, $X \setminus A$ не перетинається з $A$, $A \in \mathfrak{F}$, отже $X \setminus A \notin \mathfrak{F}$, а отже $X \setminus A \notin \mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$. $\square$

**Наслідок 21.1**

Образ ультрафільтра є ультрафільтром.

*Доведення.* Нехай $f : X \to Y$ і $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на $X$. Розглянемо довільну множину $A \subset Y$. Тоді або $f^{-1}(A)$ або $f^{-1}(Y \setminus A) = Y \setminus f^{-1}(A)$ належить $\mathfrak{A}$, отже $A \in f[\mathfrak{A}]$ або $Y \setminus A \in f[\mathfrak{A}]$. $\square$

## §21.3 Ультрафільтри, збіжність і компактність

**Лема 21.3**

Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на хаусдорфовому топологічному просторі $X$ і $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{A})$. Тоді $x = \lim \mathfrak{A}$.

*Доведення.* Нехай $U \in \Omega_x$. Тоді за означенням граничної точки окіл $U$ перетинається зі всіма елементами ультрафільтра $\mathfrak{A}$. За лемм. 21.2 $U \subset \mathfrak{A}$. $\square$

**Теорема 21.3** (критерій компактності у термінах ультрафільтрів)

Для хаусдорфового топологічного простору $X$ наступні умови еквівалентні:

- $X$ компакт;
- кожен ультрафільтр на $X$ має граничну точку;
- кожен ультрафільтр на $X$ має границю.

*Доведення.* 1 $\implies$ 2. Фільтр $\mathfrak{F}$ — центрована сім'я множин. Тим більше, центрованою буде сім'я замикань елементів фільтра. Отже, перетин $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ цих замикань не є порожнім.

2 $\implies$ 1. Нехай $\mathfrak{C}$ — довільна центромана система замкнених підмножин простору $X$. За теорем. 19.2 існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$. Тоді

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{C}} \overline{A} \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \overline{A} = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}) \neq \varnothing.$$

2 $\implies$ 3. За умовою кожен ультрафільтр має граничну точку, а за лемм. 21.3 ця точка буде його границею.

3 $\implies$ 2. Розглянемо довільний фільтр $\mathfrak{F}$ на $X$ і виберемо (теорем. 21.1) ультрафільтр $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}$. За умовою ультрафільтр $\mathfrak{A}$ має границю $x \in X$. Згідно твердження 3) теорем. 20.2 точка $x$ є граничною точкою фільтра $\mathfrak{F}$. □

**Наслідок 21.2**

Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на $E$, $X$ — топологічний простір і образ $f(E)$ функції $f : E \to X$ лежить в деякому компакті $K \subset X$. Тоді існує $\lim_{\mathfrak{A}} f$.

*Доведення.* Розглянемо $f$ як функцію, що діє з $E$ в $K$. Оскільки (виснов. 21.1) $f[\mathfrak{A}]$ є ультрафільтром на компакті $K$, то існує $\lim f[\mathfrak{A}]$. Отже, за означенням границі функції за фільтром, $\lim_{\mathfrak{A}} f = \lim f[\mathfrak{A}]$. □

## §21.4 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 484–490).

# 22 Зв'язок між фільтрами і напрямленностями

Фільтри і напрямленості в одній множині $X$ приводять до еквівалентних теорій збіжності. З одного боку, як показано раніше, кожній напрямленості $\{x_s \mid s \in S\}$ в множині $X$ відповідає асоційований з нею фільтр в $X$. З іншого боку, має місце така теорема.

## §22.1 Відповідність між фільтрами і напрямленостями

**Теорема 22.1**

Нехай $\mathfrak{F}$ — довільний фільтр в множині $X$. Тоді в цій множині існує напрямленість $\{x_s \mid s \in S\}$ така, що асоційований з нею фільтр збігається з фільтром $\mathfrak{F}$.

*Доведення.* Розглянемо множину усіх можливих пар $s = (x, M)$, де $M \in \mathfrak{F}$, а $x \in M$. Уведемо в множині таких пар $S$ частковий передпорядок, поклавши $(x, M) \leq (y, N)$, якщо $M \supset N$. Таким чином, $S$ — напрямлена множина.

Задамо відображення $f : S \to X$, поклавши

$$f(s) = x, \quad \forall s = (x, M) \in S.$$

Нехай $s = (x, M)$ — довільний елемент з $S$, а $\hat{M}_s = \{f(t) \mid t \geq s\}$. За означенням фільтра $\hat{\mathfrak{F}}$, асоційованого з напрямленістю $f : S \to X$, система підмножин $\hat{M}_s$, де $s$ пробігає усі значення в множині $S$, утворює базу $\hat{\beta}$ фільтра $\hat{\mathfrak{F}}$.

Покажемо, що фільтр $\hat{\mathfrak{F}}$, асоційований з побудованою напрямленістю $f : S \to X$, збігається з фільтром $\mathfrak{F}$, тобто

$$\hat{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{F} \quad \text{і} \quad \mathfrak{F} \leq \hat{\mathfrak{F}}.$$

1. Для того щоб довести, що $\hat{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{F}$, треба показати, що

   $$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta} \quad \exists M \in \mathfrak{F} : \quad M \subset \hat{M}_s.$$

   Насправді має місце більш сильний факт:

   $$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta} \quad \exists M \in \mathfrak{F} : \quad M = \hat{M}_s.$$

   Дійсно, нехай $y \in \hat{M}_s$, тобто

   $$\exists t = (z, N) \geq (x, M) = s : \quad y = f(t),$$

   тоді

   $$y = z \in N \subset M \implies \hat{M}_s \subset M.$$

   Тепер візьмемо довільну точку $z \in M$ і покладемо $t^\star = (z, M)$. Оскільки $t^\star \geq s = (x, M)$, то $f(t^\star) = z \in \hat{M}_s$, тобто $M \subset \hat{M}_s$. Таким чином, $M = \hat{M}_s$.

2. Покажемо, що має місце і обернене твердження: $\mathfrak{F} \leq \hat{\mathfrak{F}}$. Для цього пересвідчимось, що
$$\forall M \in \mathfrak{F} \quad \exists \hat{M}_s \in \hat{\beta} : \quad \hat{M}_s = M.$$
Нехай $x^\star$ — довільний елемент з $M$ і $s^\star = (x^\star, M)$. Повторимо міркування, наведені вище.
Нехай $s^\star = (x^\star, M)$ — довільний елемент з $S$, а $y^\star \in \hat{M}_{s^\star}$, тобто
$$\exists t^\star = (z^\star, N) \geq (x^\star, M) = s^\star : \quad y = f(t^\star),$$
тоді
$$y^\star = x^\star \in N \subset M \implies \hat{M}_{s^\star} \subset M.$$
Тепер візьмемо довільну точку $z^\star \in M$ і покладемо $t^\star = (z^\star, M)$. Оскільки $t^\star \geq s^\star = (x, M)$, то $f(t^\star) = z^\star \in \hat{M}_{s^\star}$, тобто $M \subset \hat{M}_{s^\star}$.

Таким чином, $\mathfrak{F} = \hat{\mathfrak{F}}$. □

## §22.2 Границі і граничні точки фільтрів і напрямленостей

**Теорема 22.2**
Нехай $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ — напрямленість в топологічному просторі $X$, а $\mathfrak{F}$ — асоційований з нею фільтр. Тоді кожна границя (відповідно, гранична точка) напрямленості $\xi$ є границею (відповідно, граничною точкою) фільтра $\mathfrak{F}$, і навпаки.

*Доведення.* **Необхідність.** Нехай $x_0 = \lim_S x_s$. Покажемо, що фільтр $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{x_0}$ околів точки $x_0$, тобто $x_0 = \lim \mathfrak{F}$. Нехай $U_0$ — довільний елемент $\mathfrak{F}_{x_0}$, тобто деякий окіл точки $x_0$ в просторі $X$. Тоді
$$x_0 = \lim_S x_s \implies \exists s_0 \in S : M_{s_0} = \{x_s \mid s \geq s_0\} \subset U_0.$$

Оскільки $M_{s_0}$ — елемент бази фільтра, асоційованого з напрямленістю $\xi$, то $M_{s_0} \subset U_0 \implies U_0 \in \mathfrak{F}$. Отже,
$$\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}_{x_0} \implies x_0 = \lim \mathfrak{F}.$$

**Достатність.** Нехай $x_0 = \lim \mathfrak{F}$. Отже, будь-який окіл $U_0$ точки $x_0$ є елементом фільтра $\mathfrak{F}$. За означенням, множини $M_s = \{x_t \mid t \geq s\}$ утворюють базу фільтра $\mathfrak{F}$, тому $\exists M_{s_0} \subset U_0$. Отже, для будь-якого околу $U_0$ точки $x_0$ існує $s_0 \in S$, такий що усі члени напрямленості $\xi$ при $s \geq s_0$ лежать в $U_0$, тобто $x_0 = \lim_S x_s$. □

## §22.3 Універсальні напрямленості і ультрафільтри

**Означення 22.1.** Напрямленість $\{x_s \mid s \in S\}$ в множині $X$ називається **універсальною**, якщо для будь-якої підмножини $M \subset X$ вона або майже вся лежить в $M$, або майже вся лежить в $X \setminus M$.

**Теорема 22.3**

Напрямленість в $X$ є універсальною тоді і лише тоді, коли асоційований з нею фільтр є ультрафільтром.

*Доведення.* **Необхідність.** Нехай $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ — універсальна напрямленість в $X$, $\mathfrak{F}$ — асоційований з нею фільтр, а $M$ — довільна підмножина з $X$. Покажемо, що або $M$, або $X \setminus M$ належать фільтру $\mathfrak{F}$, звідки випливає, що $\mathfrak{F}$ — ультрафільтр (теорем. 21.2).

Оскільки $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ — універсальна напрямленість в $X$, то вона майже вся лежить або в $M$, або в $X \setminus M$, тобто існує індекс $s_0 \in S$, такий що множина $M_{s_0} = \{x_s \mid s \geq s_0\}$ цілком міститься або в $M$, або в $X \setminus M$. Але оскільки $M_{s_0}$ належить базі фільтра $\mathfrak{F}$, то або $M$, або $X \setminus M$ містить $M_{s_0}$, тобто є елементом фільтра $\mathfrak{F}$.

**Достатність.** Нехай $\mathfrak{F}$ — ультрафільтр, а $M$ — довільна підмножина з $X$. Доведемо, що $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ майже вся лежить або в $M$, або в $X \setminus M$. Оскільки або $M$, або $X \setminus M$ є елементом фільтра $\mathfrak{F}$, то одна з цих множин повинна цілком містити деяку множину з бази фільтра $\mathfrak{F}$ тобто деяку множину $M_{s_0}$. Це значить, що $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ майже вся лежить або в $M$, або в $X \setminus M$. Отже, $\xi$ — універсальна напрямленість в $X$. □

## §22.4 Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 101–113).