21 Ультрафільтри

§21.1 Ультрафільтр як мажоранта

Лема 21.1

Нехай $\mathfrak{M}$ — лінійно упорядкована непорожня сім'я фільтрів, заданих на множині X, тобто для довільни $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$ або $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, або $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$. Тоді об'єднання $\mathfrak{F}$ усіх фільтрів сім'ї $\mathfrak{M}$ також буде фільтром на X.

Доведення. Перевіримо виконання аксіом фільтра для об'єднання сім'ї множин $\mathfrak{M}$. Перші дві аксіоми є очевидними, а тому перевіримо останні дві.

Перетин: якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то знайдуться такі $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$. За умовою, один з фільтрів $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$ мажорує інший. Нехай, без обмеження загальності, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді окрім множини B йому належить і множина A, адже $A \in \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Оскільки $\mathfrak{F}_2$ — фільтр, то $A \cap B \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$, тобто сім'я $\mathfrak{F}$ справді замкнена відносно (скінченного) перетину.

Надмножина: якщо $A \in \mathfrak{F}$ і $A \subset B \subset X$, то знайдеться такий $\mathfrak{F}_1 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$, а тому $B \in \mathfrak{F}_1$, як надмножина елемента фільтра. Як наслідок, $B \in \mathfrak{F}$ і сім'я $\mathfrak{F}$ виявляється замкненою відносно взяття надмножини. $\square$

Означення 21.1. **Ультрафільтром** на X називається максимальний[1] за включенням фільтр на X. Інакше кажучи, фільтр $\mathfrak{A}$ на X називається *ультрафільтром*, якщо будь-який фільтр $\mathfrak{F}$ на X, що мажорує $\mathfrak{A}$, збігається з $\mathfrak{A}$.

Теорема 21.1

Для кожного фільтра $\mathfrak{F}$ на X існує ультрафільтр, що його мажорує.

Доведення. Випливає з леми Цорна. Більш детально, необхідно розглянути частково упорядковану множину (сім'ю) фільтрів, що мажорують $\mathfrak{F}$. Лемма 21.1 показує, що довільний ланцюг (лінійно впорядкована підмножина) має верхню межу (також кажуть *верхню грань* або *мажоранту*).

Тоді лема Цорна стверджує, що у нашій частково упорядкованій множині є максимальний елемент. З одного боку зрозуміло, що він буде ультрафільтром, адже немає іншого фільтра, що його мажорує, а з іншого — що він буде мажорувати $\mathfrak{F}$, адже усі елементи нашої частково упорядкованої множини за побудовою мажорують $\mathfrak{F}$. $\square$

§21.2 Властивості і критерій ультрафільтра

Лема 21.2

Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, $A \subset X$ і всі елементи ультрафільтра перетинаються з A. Тоді $A \in \mathfrak{A}$.

[1] для якого не існує більшого, але не обов'язково більший за кожен інший

Доведення. Додавши до сім'ї множин $\mathfrak{A}$ як елемент множину A ми отримаємо центровану систему множин. Справді, для цього достатньо аби $\mathfrak{A}$ була просто фільтром, а точніше замкненою відносно скінченного перетину. Тоді додавши у цей перетин, який є елементом $\mathfrak{A}$, ще й A можна просто скористатися умовою на непорожні перетини A із елементами $\mathfrak{A}$. Зрозуміло, що ці міркування працюють і для ультрафільтрів, адже кожен ультрафільтр є фільтром. Таким чином уся розширена система множин є центрованою.

За теорем. 19.2 звідси випливає, що знайдеться фільтр $\mathfrak{F}$, який містить усі елементи нашої центрованої системи. Але тоді $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$, звідки випливає, що $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, адже $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, і розширюватися уже нікуди. У той же час, за побудовою, $A \in \mathfrak{F}$, тобто $A \in \mathfrak{A}$. □

Зауваження 21.1 — Якщо зняти умову того, що $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, і сказати що він просто фільтр, то вийде, що його можна розширити до якогось $\mathfrak{A}'$ щоб додати якийсь новий елемент A, за умови що цей A перетинається із усіма елеменами $\mathfrak{A}$.

Теорема 21.2 (критерій ультрафільтра)

Для того, щоб фільтр $\mathfrak{A}$ на X був ультрафільтром, необхідно і достатньо, щоб для довільної множини $A \subset X$ або сама множина A, або її доповнення $X \setminus A$ належало фільтру $\mathfrak{A}$.

Доведення. **Необхідність.** Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, і $X \setminus A \notin \mathfrak{A}$. Тоді жодна множина $B \in \mathfrak{A}$ не міститься цілком в $X \setminus A$, тобто будя-яка $B \in \mathfrak{A}$ перетинається з A. Отже, за попередньою лемою, $A \in \mathfrak{A}$.

Достатність. Припустимо що $\mathfrak{A}$ — не ультрафільтр. Тоді існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ і множина $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$. За побудовою, $A \notin \mathfrak{A}$. З іншого боку, $X \setminus A$ не перетинається з A, $A \in \mathfrak{F}$, отже $X \setminus A \notin \mathfrak{F}$, а отже $X \setminus A \notin \mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$. □

Наслідок 21.1

Образ ультрафільтра є ультрафільтром.

Доведення. Нехай $f : X \to Y$ і $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на X. Розглянемо довільну множину $A \subset Y$. Тоді або $f^{-1}(A)$ або $f^{-1}(Y \setminus A) = Y \setminus f^{-1}(A)$ належить $\mathfrak{A}$, отже $A \in f[\mathfrak{A}]$ або $Y \setminus A \in f[\mathfrak{A}]$. □

§21.3 Ультрафільтри, збіжність і компактність

Лема 21.3

Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на хаусдорфовому топологічному просторі X і $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{A})$. Тоді $x = \lim \mathfrak{A}$.

Доведення. Нехай $U \in \Omega_x$. Тоді за означенням граничної точки окіл U перетинається зі всіма елементами ультрафільтра $\mathfrak{A}$. За лемм. 21.2 $U \subset \mathfrak{A}$. □

Теорема 21.3 (критерій компактності у термінах ультрафільтрів)

Для хаусдорфового топологічного простору X наступні умови еквівалентні:

- X компакт;
- кожен ультрафільтр на X має граничну точку;
- кожен ультрафільтр на X має границю.

Доведення. 1 $\implies$ 2. Фільтр $\mathfrak{F}$ — центрована сім'я множин. Тим більше, центрованою буде сім'я замикань елементів фільтра. Отже, перетин $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ цих замикань не є порожнім.

2 $\implies$ 1. Нехай $\mathfrak{C}$ — довільна центромана система замкнених підмножин простору X. За теорем. 19.2 існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$. Тоді

$$\bigcap_{A\in\mathfrak{C}} \overline{A} \supset \bigcap_{A\in\mathfrak{F}} \overline{A} = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}) \neq \varnothing.$$

2 $\implies$ 3. За умовою кожен ультрафільтр має граничну точку, а за лемм. 21.3 ця точка буде його границею.

3 $\implies$ 2. Розглянемо довільний фільтр $\mathfrak{F}$ на X і виберемо (теорем. 21.1) ультрафільтр $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}$. За умовою ультрафільтр $\mathfrak{A}$ має границю $x \in X$. Згідно твердження 3) теорем. 20.2 точка x є граничною точкою фільтра $\mathfrak{F}$. □

Наслідок 21.2

Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на E, X — топологічний простір і образ $f(E)$ функції $f : E \to X$ лежить в деякому компакті $K \subset X$. Тоді існує $\lim_{\mathfrak{A}} f$.

Доведення. Розглянемо f як функцію, що діє з E в K. Оскільки (висн. 21.1) $f[\mathfrak{A}]$ є ультрафільтром на компакті K, то існує $\lim f[\mathfrak{A}]$. Отже, за означенням границі функції за фільтром, $\lim_{\mathfrak{A}} f = \lim f[\mathfrak{A}]$. □

§21.4 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 484–490).