26 Повнота, передкомпактність, компактність

§26.1 Фільтр Коші

Означення 26.1. Фільтр $\mathfrak{F}$ у топологічному векторному просторі X називається **фільтром Коші**, якщо для будьякого околу нуля U існує такий елемент $A \in F$, що $A - A \subset U$. Такий елемент A називається **малим порядку U**.

Теорема 26.1

Якщо фільтр $\mathfrak{F}$ має границю, то $\mathfrak{F}$ — фільтр Коші.

Доведення. Нехай $\lim \mathfrak{F} = x$ і $U \in \mathfrak{N}_0$. Виберемо $V \in \mathfrak{N}_0$ з $V - V \subset U$. За теоремою 1.1 (п.1) існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $A \subset x + V$ Отже,

$$A - A \subset (x + V) - (x + V) \subset V - V \subset U. \qquad \square$$

Теорема 26.2

Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр Коші на ТВП X і x — гранична точка $\mathfrak{F}$. Тоді $\lim \mathfrak{F} = x$.

Доведення. Нехай $x+U$ — довільний окіл точки x, де $U \in \mathfrak{N}_0$. Виберемо окіл $V \in \mathfrak{N}_0$ з $V+V \subset U$ і множину $A \in F$, малу порядку V: $A-A \subset V$. За означенням граничної точки, множини A і $x + V$ перетинаються, тобто існує $y \in A \cap (x + V)$. Тоді

$$x + U \supset x + V + V \supset y + V \supset y + A - A \supset y + A - y = A.$$

Таким чином, окіл $x + U$ містить елемент фільтра $\mathfrak{F}$, отже, $x + U \in F$. $\square$

§26.2 Повнота і фільтри

Означення 26.2. Множина A у ТВП X називається **повною**, якщо будь-який фільтр Коші на X, що містить A як елемент, має границю, що належить A.

Зауваження 26.1 — Зокрема, топологічний векторний простір X називається **повним**, якщо будь-який фільтр Коші в X має границю.

Теорема 26.3

Нехай X — підпростір топологічного векторного простору E і $A \subset X$ — повна в X підмножина. Тоді A є повною як підмножина простору E.

Доведення. Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр Коші на E, що містить A як елемент. Тоді, зокрема $X \in \mathfrak{F}$, то слід $\mathfrak{F}_X$ фільтра $\mathfrak{F}$ на X є фільтром. Легко бачити, що $\mathfrak{F}_X$ — це фільтр Коші на X, що містить A як елемент. Отже, через повноту A у X фільтр $\mathfrak{F}_X$ має в X границю $a \in A$. Ця ж точка a буде границею фільтра $\mathfrak{F}$ в E. $\square$

Теорема 26.4

Повна підмножина A хаусдорфового ТВП X є замкнутою.

Зауваження 26.2 — Зокрема, якщо підпростір хаусдорфового ТВП є повним в індукованій топології, то цей підпростір є замкнутим.

§26.3 Передкомпактність і компактність

Доведення. Нехай точка $x \in X$ належить замиканню множини A. Нам потрібно довести, що $x \in A$. Розглянемо сімейство $\mathfrak{D}$ усіх перетинів виду $(x + U) \cap A$, де $U \in \mathfrak{N}_0$. Усі такі перетини не порожні, і $\mathfrak{D}$ задовольняє усі аксіоми бази фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}$, породжений базою $\mathfrak{D}$, мажорує фільтр $\mathfrak{N}_x$ усіх околів точки x, отже, $x = \lim \mathfrak{F}$. Зокрема, $\mathfrak{F}$ — це фільтр Коші. За побудовою, наша повна множина A є елементом фільтра $\mathfrak{F}$; отже, відповідно до означення, фільтр $\mathfrak{F}$ має границю в A. Через єдиність границі $x \in A$, що і було потрібно довести. □

Означення 26.3. Множина A у ТВП X називається **передкомпактом**, якщо для будь-якого околу нуля U існує така скінченна множина $B \subset X$, що $A \subset U + B$. Така множина B називається, за аналогією з ε-сіттю, **U-сіттю** множини A.

Теорема 26.5

Щоб підмножина A хаусдорфового ТВП X була компактом, необхідно і достатньо, щоб A була одночасно передкомпактом і повною множиною в X.

§26.4 Поглинання і обмеженість

Означення 26.4. Нехай X — топологічний векторний простір. Будемо говорити, що окіл нуля $U \in \mathfrak{N}_0$ **поглинає** множину $A \subset X$, якщо існує таке число $N > 0$, що $A \subset tU$ для будь-якого $t \geq N$.

Означення 26.5. Множина $A \subset X$ називається **обмеженою**, якщо вона поглинається кожним околом нуля.

Теорема 26.6

Властивості обмежених підмножин топологічного векторного простору X:

1. Нехай $A \subset X$ — обмежена множина. Тоді для будьякого околу $U \in \mathfrak{N}_0$ існує таке число $N > 0$, що $A \subset tU$ для будь-якого $t \geq N$.
2. Об'єднання скінченної кількості обмежених множин обмежене.
3. Будь-яка скінченна множина є обмеженою.
4. Будь-який передкомпакт у X є обмеженим.

Доведення.

1. Нехай $V \in \Omega_0$ — врівноважений окіл, що міститься в U за теорем. 25.2 (п. 2). Виберемо таке число $N > 0$, що $A \subset NV$. Тоді для будь-якого $t \geq N$ маємо
$$A \subset NV = t(Nt^{-1}V) \subset tV \subset tU.$$

2. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — обмежені множини, U — окіл нуля. За пунктом 1)

$$\forall A_k \quad \exists N_k : \quad \forall t \geq N \quad A_k \subset tU.$$

Покладемо $N = \max_k N_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тоді $\forall t \geq N$ усі включення $A_k \subset tU$ виконуються одночасно, тобто $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset tU$.

3. Одноточкова множина є обмеженою, оскільки окіл нуля є поглинаючою множиною. Отже, за попереднім пунктом, будь-яка скінченна множина як скінченне об'єднання одноточкових множин є обмеженою.

4. Нехай A — передкомпакт в X, U — окіл нуля. Виберемо врівноважений окіл $V \in \Omega_0$, такий що $V + V \subset U$. За означенням передкомпакта, існує така скінченна множина $B \subset X$, що $A \subset B + V$. Відповідно до попереднього пункту, можна знайти такий коефіцієнт $N > 0$, що $B \subset NV$. Тоді

$$A \subset B + V \subset NV + V \subset N(V + V) \subset NU. \qquad \square$$

§26.5 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 502–504).