

21 Ультрафільтри

§21.1 Ультрафільтр як мажоранта

Лема 21.1

Нехай \mathfrak{M} — лінійно упорядкована непорожня сім'я фільтрів, заданих на множині X , тобто для довільних $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$ або $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, або $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$. Тоді об'єднання \mathfrak{F} усіх фільтрів сім'ї \mathfrak{M} також буде фільтром на X .

Доведення. Перевіримо виконання аксіом фільтра для об'єднання сім'ї множин \mathfrak{M} . Перші дві аксіоми є очевидними, а тому перевіримо останні дві.

Перетин: якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то знайдуться такі $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$. За умовою, один з фільтрів \mathfrak{F}_1 і \mathfrak{F}_2 мажорує інший. Нехай, без обмеження загальності, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді окрім множини B йому належить і множина A , адже $A \in \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Оскільки \mathfrak{F}_2 — фільтр, то $A \cap B \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$, тобто сім'я \mathfrak{F} справді замкнена відносно (скінченного) перетину.

Надмножина: якщо $A \in \mathfrak{F}$ і $A \subset B \subset X$, то знайдеться такий $\mathfrak{F}_1 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$, а тому $B \in \mathfrak{F}_1$, як надмножина елемента фільтра. Як наслідок, $B \in \mathfrak{F}$ і сім'я \mathfrak{F} виявляється замкнутою відносно взяття надмножини. \square

Означення 21.1. **Ультрафільтром** на X називається максимальний¹ за включенням фільтр на X . Інакше кажучи, фільтр \mathfrak{A} на X називається *ультрафільтром*, якщо будь-який фільтр \mathfrak{F} на X , що мажорує \mathfrak{A} , збігається з \mathfrak{A} .

Теорема 21.1

Для кожного фільтра \mathfrak{F} на X існує ультрафільтр, що його мажорує.

Доведення. Випливає з леми Цорна. Більш детально, необхідно розглянути частково упорядковану множину (сім'ю) фільтрів, що мажорують \mathfrak{F} . **Лема 21.1** показує, що довільний ланцюг (лінійно впорядкована підмножина) має верхню межу (також кажуть *верхню грань* або *мажоранту*).

Тоді лема Цорна стверджує, що у нашій частково упорядкованій множині є максимальний елемент. З одного боку зрозуміло, що він буде ультрафільтром, адже немає іншого фільтра, що його мажорує, а з іншого — що він буде мажорувати \mathfrak{F} , адже усі елементи нашої частково упорядкованої множини за побудовою мажорують \mathfrak{F} . \square

§21.2 Властивості і критерій ультрафільтра

Лема 21.2

Нехай \mathfrak{A} — ультрафільтр, $A \subset X$ і всі елементи ультрафільтра перетинаються з A . Тоді $A \in \mathfrak{A}$.

¹для якого не існує більшого, але не обов'язково більший за кожен інший

Доведення. Додавши до сім'ї множин \mathfrak{A} як елемент множину A ми отримаємо центровану систему множин. Справді, для цього достатньо аби \mathfrak{A} була просто фільтром, а точніше замкненою відносно скінченного перетину. Тоді додавши у цей перетин, який є елементом \mathfrak{A} , ще й A можна просто скористатися умовою на непорожні перетини A із елементами \mathfrak{A} . Зрозуміло, що ці міркування працюють і для ультрафільтрів, адже кожен ультрафільтр є фільтром. Таким чином уся розширена система множин є центрованою.

За **теорем. 19.2** звідси випливає, що знайдеться фільтр \mathfrak{F} , який містить усі елементи нашої центрованої системи. Але тоді $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$, звідки випливає, що $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, адже \mathfrak{A} — ультрафільтр, і розширюватися уже нікуди. У той же час, за побудовою, $A \in \mathfrak{F}$, тобто $A \in \mathfrak{A}$. \square

Зауваження 21.1 — Якщо зняти умову того, що \mathfrak{A} — ультрафільтр, і сказати що він просто фільтр, то вийде, що його можна розширити до якогось \mathfrak{A}' щоб додати якийсь новий елемент A , за умови що цей A перетинається із усіма елементами \mathfrak{A} .

Теорема 21.2 (критерій ультрафільтра)

Для того, щоб фільтр \mathfrak{A} на X був ультрафільтром, необхідно і достатньо, щоб для довільної множини $A \subset X$ або сама множина A , або її доповнення $X \setminus A$ належало фільтру \mathfrak{A} .

Доведення. Необхідність. Нехай \mathfrak{A} — ультрафільтр, і $X \setminus A \notin \mathfrak{A}$. Тоді жодна множина $B \in \mathfrak{A}$ не міститься цілком в $X \setminus A$, тобто будьяка $B \in \mathfrak{A}$ перетинається з A . Отже, за попередньою лемою, $A \in \mathfrak{A}$.

Достатність. Припустимо що \mathfrak{A} — не ультрафільтр. Тоді існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ і множина $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$. За побудовою, $A \notin \mathfrak{A}$. З іншого боку, $X \setminus A$ не перетинається з A , $A \in \mathfrak{F}$, отже $X \setminus A \notin \mathfrak{F}$, а отже $X \setminus A \notin \mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$. \square

Наслідок 21.1

Образ ультрафільтра є ультрафільтром.

Доведення. Нехай $f : X \rightarrow Y$ і \mathfrak{A} — ультрафільтр на X . Розглянемо довільну множину $A \subset Y$. Тоді або $f^{-1}(A)$ або $f^{-1}(Y \setminus A) = Y \setminus f^{-1}(A)$ належить \mathfrak{A} , отже $A \in f[\mathfrak{A}]$ або $Y \setminus A \in f[\mathfrak{A}]$. \square

§21.3 Ультрафільтри, збіжність і компактність

Лема 21.3

Нехай \mathfrak{A} — ультрафільтр на хаусдорфовому топологічному просторі X і $x \in \text{LIM}(\mathfrak{A})$. Тоді $x = \lim \mathfrak{A}$.

Доведення. Нехай $U \in \Omega_x$. Тоді за означенням граничної точки окіл U перетинається зі всіма елементами ультрафільтра \mathfrak{A} . За **лемм. 21.2** $U \in \mathfrak{A}$. \square

Теорема 21.3 (критерій компактності у термінах ультрафільтрів)

Для хаусдорфового топологічного простору X наступні умови еквівалентні:

- X компакт;
- кожен ультрафільтр на X має граничну точку;
- кожен ультрафільтр на X має границю.

Доведення. $1 \implies 2$. Фільтр \mathfrak{F} — центрована сім'я множин. Тим більше, центрованою буде сім'я замикань елементів фільтра. Отже, перетин $\text{LIM}(\mathfrak{F})$ цих замикань не є порожнім.

$2 \implies 1$. Нехай \mathfrak{C} — довільна центромана система замкнених підмножин простору X . За [теорем. 19.2](#) існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$. Тоді

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{C}} \bar{A} \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \bar{A} = \text{LIM}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset.$$

$2 \implies 3$. За умовою кожен ультрафільтр має граничну точку, а за [лемм. 21.3](#) ця точка буде його границею.

$3 \implies 2$. Розглянемо довільний фільтр \mathfrak{F} на X і виберемо ([теорем. 21.1](#)) ультрафільтр $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}$. За умовою ультрафільтр \mathfrak{A} має границю $x \in X$. Згідно твердження 3) [теорем. 20.2](#) точка x є граничною точкою фільтра \mathfrak{F} . \square

Наслідок 21.2

Нехай \mathfrak{A} — ультрафільтр на E , X — топологічний простір і образ $f(E)$ функції $f : E \rightarrow X$ лежить в деякому компактi $K \subset X$. Тоді існує $\lim_{\mathfrak{A}} f$.

Доведення. Розглянемо f як функцію, що діє з E в K . Оскільки ([виснов. 21.1](#)) $f[\mathfrak{A}]$ є ультрафільтром на компактi K , то існує $\lim f[\mathfrak{A}]$. Отже, за означенням границі функції за фільтром, $\lim_{\mathfrak{A}} f = \lim f[\mathfrak{A}]$. \square

§21.4 Література

- [1] **Кадец В. М.** Курс функціонального аналіза / В. М. Кадец — Х.: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2006. (стр. 484–490).