

# 1 Топологічні простори

## §1.1 Нагадування: метрична топологія

В курсі математичного аналізу [1, с. 26] уже розглядалися поняття околу точки, відкритої та замкнутої множин, точки дотику, граничної точки, границі послідовності в просторі  $\mathbb{R}$  тощо. Всі ці поняття визначалися за допомогою метрики простору  $\mathbb{R}$  і відбивали певні властивості, притаманні множинам, за допомогою яких ми могли описувати основну концепцію цієї теорії — близькість між точками. Адже саме поняття близькості між точками (в розумінні малої відстані) є базовим для таких головних понять математичного аналізу як збіжність послідовностей і неперервність функцій.

Відносним недоліком цього підходу є очевидна залежність від метрики, уведеної в просторі. Тому постало питання, чи не можна побудувати більш абстрактну конструкцію, за допомогою якої можна було б описати ідеї, згадані вище. Серед дослідників цієї проблеми слід відзначити французьких математиків М. Фреше (1906), М. Рісса (1907–1908), німецького математика Ф. Хаусдорфа (1914), польського математика К. Куратовського (1922) і радянського математика П. Александрова (1924). В результаті досліджень цих та багатьох інших математиків виникла нова математична дисципліна — загальна топологія, предметом якої є вивчення ідеї про неперервність на максимально абстрактному рівні.

В цій та наступній лекціях ми введемо в розгляд ряд важливих топологічних понять. Це дозволить нам вийти на вищий рівень абстракції та опанувати ідеї, що пронизують майже всі розділи математики. Не буде великим перебільшенням сказати, що в певному розумінні топологія разом з алгеброю є скелетом сучасної математики, а **функціональний аналіз** — це розділ математики, головною задачею якого є дослідження нескінченновимірних просторів та їх відображень.

## §1.2 Основні означення

**Означення 1.1.** Нехай  $X$  — множина елементів, яку ми будемо називати носієм. **Топологією** в  $X$  називається довільна система  $\tau$  його підмножин, яка задовольняє таким умовам (**аксіомам Александрова**):

A1.  $\emptyset, X \in \tau$ .

A2.  $G_\alpha \in \tau, \alpha \in A \implies \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$ , де  $A$  — довільна множина.

A3.  $G_\alpha \in \tau, \alpha = 1, 2, \dots, n \implies \bigcap_{\alpha=1}^n G_\alpha \in \tau$ .

Інакше кажучи, топологічною структурою називається система множин, замкнена відносно довільного об'єднання і скінченного перетину.

**Означення 1.2.** Пара  $T = (X, \tau)$  називається **топологічним простором**.

### Приклад 1.1 (топологічного простору)

Нехай  $X$  — довільна множина,  $\tau = 2^X$  — множина всіх підмножин  $X$ . Пара  $(X, 2^X)$  називається простором з **дискретною (максимальною) топологією**.

**Приклад 1.2** (топологічного простору)

Нехай  $X$  — довільна множина,  $\tau = \{\emptyset, X\}$ . Пара  $(X, \tau)$  називається простором з **тривіальною (мінімальною, або антидискретною) топологією**.

Зрозуміло, що на одній і тій же множині  $X$  можна ввести різні топології, утворюючи різні топологічні простори. Припустимо, що на носії  $X$  введено дві топології —  $\tau_1$  і  $\tau_2$ . Вони визначають два топологічні простори:  $T_1 = (X, \tau_1)$ , і  $T_2 = (X, \tau_2)$ .

Говорять, що топологія  $\tau_1$  є **сильнішою**, або **тонкішою**, ніж топологія  $\tau_2$ , якщо  $\tau_2 \subset \tau_1$ . Відповідно, топологія  $\tau_2$  є **слабкішою**, або **грубішою**, ніж топологія  $\tau_1$ . Легко бачити, що найслабкішою є тривіальна топологія, а найсильнішою — дискретна.

**Зауваження 1.1** — Множина всіх топологій не є цілком упорядкованою, тобто не всі топології можна порівнювати одну з одною. Наприклад, наступні топології (зв'язні двокрапки) порівнювати не можна:  $X = \{a, b\}$ ,  $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ,  $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ .

**Означення 1.3.** Множини, що належать топології  $\tau$ , називаються **відкритими**. Множини, які є доповненням до відкритих множин, називаються **замкненими**.

Наприклад, множина всіх цілих чисел  $\mathbb{Z}$  замкнена в  $\mathbb{R}$ .

**Зауваження 1.2** — Топологія містить всі відкриті множини. Водночас, треба зауважити, що поняття відкритих і замкнених множин не є взаємовиключними. Одна і та ж множина може бути одночасно і відкритою і замкненою (наприклад,  $\emptyset$  або  $X$ ), або ані відкритою, ані замкненою (множини раціональних та ірраціональних чисел в  $\mathbb{R}$ ). Отже, топологія може містити й замкнені множини, якщо вони одночасно є відкритими.

Як бачимо, поняття відкритої множини в топологічному просторі постулюється — для того щоб довести, що деяка множина  $M$  в топологічному просторі  $T$  є відкритою, треба довести, що вона належить його топології.

**Означення 1.4.** Нехай  $(X, \tau)$  — топологічний простір,  $M \subset X$ . Топологія  $(M, \tau_M)$ , де  $\tau_M = \{U_M^{(\alpha)} = U_\alpha \cap M, U_\alpha \in \tau\}$ , називається **індукованою**.

**Означення 1.5.** Топологічний простір  $(X, \tau)$  називається **зв'язним**, якщо лише множини  $X$  і  $\emptyset$  є замкненими й відкритими одночасно.

**Означення 1.6.** Множина  $M$  топологічного простору  $(X, \tau)$  називається **зв'язною**, якщо топологічний простір  $(M, \tau_M)$  є зв'язним.

**Приклад 1.3** (зв'язних просторів)

Тривіальний (антидискретний) простір і зв'язна двокрапка є зв'язними просторами.

**Зловживання позначеннями 1.1.** Надалі ми будемо часто скорочувати  $(X, \tau)$  просто як  $X$  або  $T$ .

**Означення 1.7.** Довільна відкрита множина  $G \in T$ , що містить точку  $x \in T$ , називається її **околом**.

**Означення 1.8.** Точка  $x \in T$  називається **точкою дотику** множини  $M \subset T$ , якщо кожний окіл  $O(x)$  точки  $x$  містить хоча б одну точку із  $M$ :  $\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap M \neq \emptyset$ .

**Означення 1.9.** Точка  $x \in T$  називається **граничною точкою** множини  $M \subset T$ , якщо кожний окіл точки  $x$  містить хоча б одну точку із  $M$ , що не збігається з  $x$ :  $\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap M \setminus \{x\} \neq \emptyset$ .

### §1.3 Замикання

**Означення 1.10.** Сукупність точок дотику множини  $M \subset T$  називається **замиканням** множини  $M$  і позначається  $\overline{M}$ .

**Означення 1.11.** Сукупність граничних точок множини  $M \subset T$  називається **похідною** множини  $M$  і позначається  $M'$ .

#### Теорема 1.1 (про властивості замикання)

Замикання задовольняє наступним умовам:

1.  $M \subset \overline{M}$ ;
2.  $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$  (ідемпотентність);
3.  $M \subset N \implies \overline{M} \subset \overline{N}$  (монотонність);
4.  $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$  (адитивність).
5.  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .

*Доведення.*

1.  $M \subset \overline{M}$ .

Нехай  $x \in M$ . Тоді  $x$  — точка дотику множини  $M$ . Отже,  $x \in \overline{M}$ .

2.  $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ .

Внаслідок твердження 1)  $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$ . Отже, достатньо довести, що  $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ . Нехай  $x_0 \in \overline{\overline{M}}$  і  $U_0$  — довільний окіл точки  $x_0$ . Оскільки  $U_0 \cap \overline{M} \neq \emptyset$  (за означенням точки дотику), то існує точка  $y_0 \in U_0 \cap \overline{M}$ . Отже, множину  $U_0$  можна вважати околом точки  $y_0$ . Оскільки  $y_0 \in \overline{M}$ , то  $U_0 \cap M \neq \emptyset$ . Значить, точка  $x_0$  є точкою дотику множини  $M$ , тобто  $x_0 \in \overline{M}$ .

3.  $M \subset N \implies \overline{M} \subset \overline{N}$ .

Нехай  $x_0 \in \overline{M}$  і  $U_0$  — довільний окіл точки  $x_0$ . Оскільки  $U_0 \cap M \neq \emptyset$  (за означенням точки дотику) і  $M \subset N$  (за умовою), то  $U_0 \cap N \neq \emptyset$ . Отже,  $x_0$  — точка дотику множини  $N$ , тобто  $x_0 \in \overline{N}$ . Таким чином,  $\overline{M} \subset \overline{N}$ .

4.  $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ .

З очевидних включень  $M \subset M \cup N$  і  $N \subset M \cup N$  внаслідок монотонності операції замикання випливає, що  $\overline{M} \subset \overline{M \cup N}$  і  $\overline{N} \subset \overline{M \cup N}$ . Отже,  $\overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}$ . З іншого боку, припустимо, що  $x \notin \overline{M \cup N}$ , тоді  $x \notin \overline{M}$  і  $x \notin \overline{N}$ . Отже, існує такий окіл точки  $x$ , у якому немає точок з множини  $M \cup N$ , тобто  $x \notin \overline{M \cup N}$ . Таким чином, за законом заперечення,  $x \in \overline{M \cup N} \implies x \in \overline{M} \cup \overline{N}$ , тобто  $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$ .

5.  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .

Припустимо, що замикання порожньої множини не є порожньою множиною:  $x \in \overline{\emptyset} \implies \forall O(x) : O(x) \cap \emptyset \neq \emptyset$ . Але  $\forall N \subset X : N \cap \emptyset = \emptyset$ . Отже,  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .  $\square$

**Теорема 1.2** (критерій замкненості)

Множина  $M$  топологічного простору  $X$  є замкнутою тоді й лише тоді, коли  $M = \overline{M}$ , тобто коли вона містить всі свої точки дотику.

*Доведення.* Необхідність. Припустимо, що  $M$  — замкнена множина, тобто  $G = X \setminus M$  — відкрита множина. Оскільки,  $M \subset \overline{M}$ , достатньо довести, що  $\overline{M} \subset M$ . Дійсно, оскільки  $G$  — відкрита множина, вона є околом кожної своєї точки. До того ж  $G \cap M = \emptyset$ . Звідси випливає, то жодна точка  $x \in G$  не може бути точкою дотику для множини  $M$ , отже всі точки дотику належать множині  $M$ , тобто  $\overline{M} \subset M$ .

$$G = X \setminus M \in \tau \implies G \cap M = \emptyset \implies \overline{M} \subset M.$$

Достатність. Припустимо, що  $\overline{M} = M$ . Доведемо, що  $G = X \setminus M$  — відкрита множина (звідси випливатиме замкненість множини  $M$ ). Нехай  $x_0 \in G$ . З цього випливає, що  $x_0 \notin M$ , а значить  $x_0 \notin \overline{M}$ . Тоді за означенням точки дотику існує окіл  $U_{x_0}$  такий, що  $U_{x_0} \cap M = \emptyset$ . Значить,  $U_{x_0} \subset X \setminus M = G$ , тобто  $G = \bigcup_{x \in G} U_x \in \tau$ .  $\square$

**Наслідок 1.1**

Замикання  $\overline{M}$  довільної множини  $M$  із простору  $X$  є замкнутою множиною в  $X$ .

**Теорема 1.3**

Замикання довільної множини  $M$  простору  $(X, \tau)$  збігається із перетином всіх замкнених множин, що містять множину  $M$ .

$$\forall M \subset X : \quad \overline{M} = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}, \quad F_{\alpha} = \overline{F_{\alpha}}, M \subset F_{\alpha}.$$

*Доведення.* Нехай  $M$  — довільна множина із  $(X, \tau)$  і  $N = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$ , де  $F_{\alpha} = \overline{F_{\alpha}}$ ,  $M \subset F_{\alpha}$ .

Покажемо включення  $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset \overline{M}$ .

$$N = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \implies N \subset F_{\alpha} \forall \alpha \implies N \subset \overline{F_{\alpha}} \forall \alpha.$$

Оскільки  $\{F_{\alpha}\}$  — множина усіх замкнених множин, серед них є множина  $\overline{M}$ :  $\exists \alpha_0 : F_{\alpha_0} = \overline{M}$ . Отже,

$$N \subset \overline{F_{\alpha}} \forall \alpha \implies N \subset F_{\alpha_0} = \overline{M} \implies \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset \overline{M}.$$

Тепер покажемо включення  $\overline{M} \subset \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$ . Розглянемо довільну замкнену множину  $F$ , що містить  $M$ :  $F = \overline{F}$ ,  $M \subset F$ . Внаслідок монотонності замикання маємо:

$$\overline{F} = F, M \subset F \implies \overline{M} \subset \overline{F} = F \implies \overline{M} \subset F_{\alpha}, F_{\alpha} = \overline{F_{\alpha}} \forall \alpha \implies \overline{M} \subset \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}.$$

Порівнюючи обидва включення, маємо

$$\overline{M} = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}.$$

$\square$

**Наслідок 1.2**

Замикання довільної множини  $M$  простору  $X$  є найменшою замкнутою множиною, що містить множину  $M$ .

**§1.4 Щільність**

**Означення 1.12.** Нехай  $A$  і  $B$  — дві множини в топологічному просторі  $T$ . Множина  $A$  називається **щільною в  $B$** , якщо  $\bar{A} \supset B$ .

**Приклад 1.4 (щільних множин)**

В топології числової прямої множина всіх раціональних чисел  $\mathbb{Q}$  є щільною в множині всіх ірраціональних чисел  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , і навпаки.

**Зауваження 1.3** — Множина  $A$  не обов'язково міститься в  $B$ : множина раціональних чисел є щільною в множині ірраціональних чисел і навпаки.

**Означення 1.13.** Якщо  $\bar{A} = X$ , множина  $A$  називається **скрізь щільною**.

**Означення 1.14.** Множина  $A$  називається **ніде не щільною**, якщо вона не є щільною в жодній непорожній відкритій підмножині множини  $X$ .

**Приклад 1.5 (ніде не щільних множин)**

Найпростішими прикладами ніде не щільних множин є цілі числа просторі  $\mathbb{R}$  і пряма в просторі  $\mathbb{R}^2$ .

Множина  $A$  є щільною в кожній непорожній відкритій множині, якщо  $\forall U \in \tau, U \neq \emptyset: \bar{A} \supset U$ , тобто кожна точка множини  $U$  є точкою дотику множини  $A$ . Отже,  $\forall x \in U \forall O(x) \in \tau O(x) \cap A \neq \emptyset$ . Заперечення цього твердження збігається з означенням ніде не щільної множини. Формальний запис означення має такий вигляд:

$$\exists U_0 \in \tau, U_0 \neq \emptyset: \bar{A} \not\supset U_0 \implies \exists x_0 \in U_0 \exists O(x_0) \in \tau: O(x_0) \cap A = \emptyset$$

**Означення 1.15.** Простір  $T$ , що містить скрізь щільну зліченну множину, називається **сепарабельним**.

**Приклад 1.6 (сепарабельного простору)**

Зліченна множина всіх раціональних чисел  $\mathbb{Q}$  є скрізь щільною у просторі  $\mathbb{R}$ , отже простір  $\mathbb{R}$  є сепарабельним.

З того, що  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  і  $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , зокрема, випливає, що  $\mathbb{Q}$  і  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  є ані відкритими, ані замкненими множинами.

**Приклад 1.7 (сепарабельного простору)**

Зліченна множина всіх поліномів з раціональними коефіцієнтами за теоремою Вейерштраса є скрізь щільною в просторі неперервних функцій  $C[a, b]$ . Отже, простір  $C[a, b]$  є сепарабельним.

## §1.5 Література

- [1] **Ляшко И. И.** Основы классического и современного математического анализа / И. И. Ляшко, В. Ф. Емельянов, А. К. Боярчук. — К.: Вища школа, 1988 (стр. 26–27).
- [2] **Александрян Р.А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 10–20).
- [3] **Энгелькинг Р.** Общая топология / Р. Энгелькинг. — М.: Мир, 1986 (стр. 32–50).