

# 18 Напряменості

Як добре відомо, в основі усіх основних понять і конструкцій математичного аналізу (неперервності, диференційовності, інтегрованості, сумування рядів тощо) лежить концепція збіжності. В основному курсі функціонального аналізу ми показали, що за допомогою цієї концепції в топологічних просторах, що задовольняють першу аксіому зліченості, можна навіть задавати топологію.

Концепція збіжності містить в собі два поняття: послідовність і границю. Спочатку в математиці розглядалися лише послідовності дійсних чисел. Згодом теорію розповсюдили на послідовності точок в метричному просторі, і, нарешті, узагальнили для послідовності точок в довільному топологічному просторі.

Прагнення вийти за межі просторів, що задовольняють першу аксіому зліченості, в 1920-х роках привело до узагальнення поняття границі звичайних послідовностей на узагальнену послідовність (збіжність за Муром–Смітом) і появи теорії напрямленостей. В 1930-х роках французький математик А. Картан розробив загальну теорію збіжності, яка заснована на поняттях фільтра, ультрафільтра та їх границь. Ця теорія є універсальною. Вона заміняє теорію Мура–Сміта і суттєво спрощує загальну теорію збіжності.

Для того щоб глибше зрозуміти зміст цих теорій, доцільно детально їх розглянути та порівняти.

## §18.1 Частково упорядковані множини (нагадування)

Нагадаємо деякі означення із теорії множин.

**Означення 18.1.** Нехай  $A$  — довільна множина. Позначимо як  $A \times A$  сукупність усіх упорядкованих пар  $(a, b)$ , де  $a, b \in A$ . Говорять, що в множині  $A$  задано **бінарне відношення**  $\varphi$ , якщо в  $A \times A$  виділено довільну підмножину  $R_\varphi$ . Елемент  $a$  перебуває у відношенні  $\varphi$  з елементом  $b$ , якщо пара  $(a, b)$ , належить  $R_\varphi$ .

### Приклад 18.1

Бінарним відношенням є, наприклад, тотожність. Множиною  $R_\varphi$  у цьому випадку є діагональ  $(a, a) \in A \times A$ .

**Означення 18.2.** Бінарне відношення, задане в множині  $A$ , називається **відношенням часткового передупорядкування**, якщо воно є рефлексивним і транзитивним, тобто

1.  $(a, a) \in R_\varphi$  — рефлексивність;
2.  $(a, b), (b, c) \in R_\varphi \implies (a, c) \in R_\varphi$  — транзитивність.

**Означення 18.3.** Бінарне відношення, задане в множині  $A$ , називається **відношенням часткового упорядкування**, якщо воно є рефлексивним, транзитивним і антисиметричним, тобто

1.  $(a, a) \in R_\varphi$  — рефлексивність;
2.  $(a, b), (b, c) \in R_\varphi \implies (a, c) \in R_\varphi$  — транзитивність.
3.  $(a, b), (b, a) \in R_\varphi \implies a = b$  — антисиметричність.

**Означення 18.4.** Множина  $A$  із заданим на ній відношенням часткового упорядкування (передупорядкування) називається **частково упорядкованою (передупорядкованою) множиною**.

**Зауваження 18.1** — У частково упорядкованих множинах за традицією відношення  $xRy$  позначають як  $x \leq y$  або  $y \geq x$ .

## §18.2 Напрямленисті

**Означення 18.5.** Частково упорядкована множина  $S$  називається **фільтрівною вправо**, або **напрямленим за зростанням**, або просто **напрявленою множиною**, якщо

$$\forall s_1, s_2 \in S \quad \exists s \in S : \quad s \geq s_1, s_2.$$

### Приклад 18.2

Множина натуральних чисел із природним упорядкуванням є направленою.

### Приклад 18.3

Нехай  $x$  — фіксована точка топологічного простору  $X$ , а  $\Omega_x$  — сукупність усіх околів цієї точки.

Введемо в множині  $\Omega_x$  відношення упорядкування за оберненим включенням:

$$V \subset U \iff V \geq U.$$

Оскільки

$$\forall U_1, U_2 \in \Omega \quad U_1 \cap U_2 \geq U_1, U_2,$$

то множина  $\Omega_x$  є **направленою** множиною усіх околів точки  $x$  в просторі  $X$ .

Розглянемо довільну множину  $X$  і деяку послідовність її елементів  $x_n$ . Послідовність  $x_n$  можна трактувати як відображення

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X,$$

де  $f(n) = x_n$ .

Якщо замінити множину  $\mathbb{N}$  довільною направленою множиною  $S$ , отримаємо означення узагальненої послідовності, або напрямленості.

**Означення 18.6.** Будь-яке відображення направленої множини називається **напрямленистю**, або **узагальненою послідовністю**, або **сіттю**. До того ж, якщо  $f : S \rightarrow X$  — напрямленість, то направлена множина  $S$  називається **областю визначеності напрямленості  $f$** , а множина  $f(S)$  — **областю її значень**.

**Зауваження 18.2** — Будь-яка послідовність елементів простору  $X$  є напрямленістю в  $X$  з областю визначення  $\mathbb{N}$ . Для зручності значення  $f_s$  напрямленості  $f : S \rightarrow X$  на елементі  $s \in S$  часто позначають як  $x_s$ , а саму напрямленість  $f$  подають як множину  $\{x_s \mid s \in S\}$ .

**Приклад 18.4**

Нехай  $\Omega_x$  — напрямлена множина усіх околів точки  $x$  простору  $X$ . Вибираючи по точці  $x_U$  з кожного околу  $U \subset \Omega_x$ , отримуємо напрямленість  $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$ .

**Означення 18.7.** Говорять, що напрямленість  $f : S \rightarrow X$  **починаючи з деякого місця належить**, або **майже вся лежить** в підмножині  $A \subset X$ , якщо існує  $s_0 \in S$ , таке що  $\forall s \geq s_0 \ x_s \in A$ .

**Означення 18.8.** Якщо  $\forall s \in A \ \exists t \geq s : f_t \in A$ , то говорять, що напрямленість  $f : S \rightarrow X$  є **частою** в підмножині  $A \subset X$  (**часто буває** в  $A$ ).

**Зауваження 18.3** — Якщо напрямленість  $f : S \rightarrow X$  є частою в  $A$ , то вона не може майже вся лежати в доповненні  $X \setminus A$ . І навпаки, якщо напрямленість майже вся лежить в доповненні  $X \setminus A$ , то вона не може бути частою в  $A$ .

**Означення 18.9.** Точка  $x^*$  називається **граничною точкою** напрямленості, якщо ця напрямленість часто буває в будь-якому околі точки  $x^*$ .

### §18.3 Границі напрямленості

**Означення 18.10.** Направленість  $f : S \rightarrow X$  в топологічному просторі  $X$  називається **збіжною** до точки  $x_0 \in X$ , якщо вона майже вся лежить в будь-якому околі точки  $x_0$ , тобто якщо для довільного околу  $U$  цієї точки знайдеться елемент  $s_U \in S$ , такий що  $\forall s \geq s_U \ f_s \in U$ . Точка  $x_0 = \lim_S f_s$  називається **границею** напрямленості  $f : S \rightarrow X$ .

**Приклад 18.5**

Кожна збіжна послідовність в просторі  $X$  є збіжною напрямленістю в  $X$ , границя якої є границею послідовності.

**Приклад 18.6**

Нехай  $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$  — напрямленість в просторі  $X$ . Легко бачити, що ця напрямленість збігається до точки  $x$ . Дійсно, нехай  $U_0$  — довільний окіл точки  $x$ . Тоді  $\forall U \geq U_0 \ x \in U \subset U_0$ , тобто ця напрямленість майже вся лежить в довільному околі точки  $x$ .

**Зауваження 18.4** — Направленість, як і послідовність, в загальних топологічних просторах може мати різні границі. В хаусдорфових просторах вона має одну границю.

**Означення 18.11.** Направленість  $g : T \rightarrow X$  називається **піднаправленістю** напрямленості  $f : S \rightarrow X$ , якщо існує відображення  $h : T \rightarrow S$ , таке що  $g = f \circ h$  і  $\forall s_0 \in S \ \exists t_0 \in T : \forall t \geq t_0 \ h(t) \geq s_0$ .

**Зауваження 18.5** — На відміну від означення звичайної підпослідовності, означення піднапрямлених допускає, щоб область визначення піднапрямлених не була частиною області визначення напрямлених.

**Означення 18.12.** Частково упорядкована множина  $X$  є **конфінальною** своїй підмножині  $A$ , якщо в  $X$  не існує жодного елемента, що є наступним за усіма елементами множини  $A$ .

### Приклад 18.7

Інтервал  $(0, 1)$  є конфінальним множині  $\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

**Зауваження 18.6** — Якщо  $T \subset S$ , а  $h$  — відображення вкладення, то друга умова еквівалентна конфінальності  $T$  в  $S$ . І навпаки, для будь-якої конфінальної частини  $T$  з  $S$  і будь-якої напрямленості  $f : S \rightarrow X$  звуження  $f$  на  $T$  є піднапрямленистю напрямленості  $f$ .

### Теорема 18.1 (Бірхгофа)

Нехай  $A$  — деяка підмножина довільного топологічного простору  $X$ . Тоді  $x \in \bar{A}$  тоді і лише тоді, коли існує напрямленість в  $A$ , що збігається до точки  $x$ .

**Доведення. Необхідність.** Нехай  $x \in \bar{A}$  і  $\Omega_x$  — напрямлена множина усіх околів точки  $x$ . Оскільки

$$\forall U \in \Omega_x \quad A \cap U \neq \emptyset,$$

то, вибираючи по одній точці  $x_U \in A \cap U$ , отримуємо напрямленість  $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$  в  $A$ , що збігається до точки  $x$ .

**Достатність.** Нехай  $\{x_s \mid s \in S\}$  — напрямленість в  $A$ , що збігається в  $X$  до точки  $x$ . Тоді за означенням границі напрямленості

$$\forall U \in \Omega_x \quad \exists s_0 \in S : \quad \forall s \geq s_0 \quad x_s \in U.$$

Отже,

$$A \cap U \neq \emptyset \implies x_0 \in \bar{A}.$$

□

## §18.4 Напрямлених та неперервність

**Зауваження 18.7** — Нагадаємо, що в просторах із першою аксіомою зліченності неперервність відображення  $f$  в довільній точці  $x_0$  була еквівалентною умові, що з  $x_n \rightarrow x_0$  випливає  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Перехід від послідовностей до напрямлених дозволяє відмовитись від цієї умови.

### Теорема 18.2 (критерій неперервності)

Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є неперервним в точці  $x_0$  тоді і лише тоді, коли для будь-якої напрямленості  $\{x_s \mid s \in S\}$ , що збігається до точки  $x_0 \in X$  напрямленість  $\{f(x_s) \mid s \in S\}$  збігається до точки  $f(x_0) \in Y$ .

*Доведення. Необхідність.* Нехай  $f : X \rightarrow Y$  неперервна в точці  $x_0$  і  $\{x_s \mid s \in S\}$  — деяка напрямленість в  $X$ , що збігається до точки  $x_0$ . Нехай також  $V_0$  — довільний окіл точки  $f(x_0)$  в  $Y$ . Тоді достатньо перевірити, що напрямленість  $\{f(x_s) \mid s \in S\}$  майже вся лежить в  $V_0$ .

Справді, оскільки відображення  $f$  є неперервним в точці  $x_0$ , то існує окіл  $U_0$  точки  $x_0$ , такий що  $f(U_0) \subset V_0$ . Оскільки напрямленість  $\{x_s \mid s \in S\}$  збігається до  $x_0$ , то знайдеться індекс  $s_0 \in S$  такий, що при всіх  $s \geq s_0$   $x_s \in U_0$ . Отже, для всіх  $s \geq s_0$   $f(x_s) \in V_0$ , а це значить, що майже вся напрямленість  $\{f(x_s) \mid s \in S\}$  лежить в  $V_0$ .

*Достатність.* Припустимо, що умови теореми виконуються, але відображення  $f$  не є неперервним в точці  $x_0$ . Тоді існує такий окіл  $V_0$  точки  $f(x_0)$ , що в будь-якому околі  $U$  точки  $x_0$  знайдеться точка  $x_U$ , образ  $f(x_U)$  якої належить  $Y \setminus V_0$ .

Розглянемо напрямленість  $\{x_U \mid U \in \Omega_{x_0}\}$ , де  $\Omega_{x_0}$  — напрямлена множина усіх околів точки  $x_0$ . Очевидно, що ця напрямленість збігається до точки  $x_0$ .

Проте напрямленість  $\{f(x_U) \mid U \in \Omega_{x_0}\}$  не може збігатися до точки  $f(x_0)$ , оскільки в такому випадку вона майже вся лежала б в околі  $V_0$ . Отримане протиріччя доводить достатність.  $\square$

## §18.5 Література

- [1] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 18–21).
- [2] Александрян Р. А., Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 91–98).
- [3] Келли Дж. Общая топология / Дж. Келли — М.: Наука, 1966 (стр. 91–118).