

# 7 Повні метричні простори

## §7.1 Повнота, ізометрія і поповнення

**Означення 7.1.** Метричний простір називається **повним**, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність має границю.

### Приклад 7.1

$$\left(\mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}\right).$$

### Приклад 7.2

$$(C[a, b], \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|).$$

**Означення 7.2.** Бієктивне відображення  $\varphi$  одного метричного простору  $(E_1, \rho_1)$  на інший  $(E_2, \rho_2)$  називається **ізометрією**, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in E_1 : \rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

**Означення 7.3.** Метричні простори, між якими існує ізометрія, називаються **ізометричними**.

**Означення 7.4.** Повний метричний простір  $(\tilde{E}, \tilde{\rho})$  називається **поповненням** метричного простору  $(E, \rho)$ , якщо

1.  $E \subset \tilde{E}$ ;
2.  $\overline{E} = \tilde{E}$ .

### Теорема 7.1 (про поповнення метричного простору, Хаусдорф)

Будь-який метричний простір має поповнення, єдине з точністю до ізометрії, що залишає точки простору нерухомими.

### Лема 7.1

Якщо фундаментальна послідовність містить збіжну підпослідовність, то сама послідовність збігається до тієї ж границі.

*Доведення.* Припустимо, що  $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \rho(x_{n_k}, x_0) = 0$ , тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N_1 : \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon.$$

За нерівністю трикутника

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x).$$

Оскільки послідовність  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  є фундаментальною,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \geq N_2 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n, n_k \geq \max(N_1, N_2) : \rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad \square$$

### Лема 7.2

Будь-яка підпослідовність фундаментальної послідовності є фундаментальною.

*Доведення.* За нерівністю трикутника

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, x_n) + \rho(x_n, x_{n_l}).$$

Оскільки послідовність  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  є фундаментальною,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n, n_k, n_l \geq N : \rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, x_n) + \rho(x_n, x_{n_l}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad \square$$

## §7.2 Вкладені кулі і повнота

### Теорема 7.2 (принцип вкладених куль)

Для того щоб метричний простір був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому будь-яка послідовність замкнених вкладених одна в одну куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.

*Доведення.* Необхідність. Нехай  $(X, \rho)$  — повний метричний простір, а  $S_1^*(x_1, r_1) \supset S_2^*(x_2, r_2) \supset \dots$  — вкладені одна в одну замкнені кулі.

Послідовність їх центрів є фундаментальною, оскільки

$$\rho(x_n, x_m) < r_n \text{ при } m > n, \text{ а } r_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Оскільки  $(X, \rho)$  — повний метричний простір, існує елемент  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x \in X$ .

Покажемо, що  $x$  належить всім кулям  $S_n^*(x_n, r_n), n \in \mathbb{N}$ , тобто  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^*(x_n, r_n)$ . Дійсно, оскільки  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n \geq N : \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Значить, в довільному околі точки  $x$  знайдеться нескінченна кількість точок із послідовності  $\{x_n\}$ , починаючи з деякого номера  $N$ . Оскільки кулі вкладені одна в одну, ці точки належать всім попереднім кулям  $S_1^*, S_2^*, \dots, S_{N-1}^*$ . Отже, для довільного  $n$  точка  $x$  є точкою дотику множини  $S_n^*$ , тобто належить його замиканню. Оскільки кожна куля є замкненою, точка  $x$  належить всім  $S_n^*$ . Це означає, що

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^*.$$

Достатність. Покажемо, що якщо  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — фундаментальна послідовність, то вона має границю  $x \in X$ .

1. Оскільки послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  є фундаментальною, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 > 0: \forall n \geq n_1 \rho(x_n, x_{n_1}) < \varepsilon$ . Поклавши  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , ми можемо вибрати точку  $x_{n_1}$  так, що  $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$  для довільного  $n > n_1$ . Зробимо точку  $x_{n_1}$  центром замкненої кулі радіуса 1:  $S_1^*(x_{n_1}, 1)$ .
2. Оскільки підпослідовність  $\{x_n\}_{n=n_1}^\infty$  є фундаментальною (за лемою 7.2), то поклавши  $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ , можна вибрати точку  $x_{n_2}$  х таку, що  $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$  для довільного  $n > n_2 > n_1$ . Зробимо точку  $x_{n_2}$  центром замкненої кулі радіуса  $\frac{1}{2}$ :  $S_2^*(x_{n_2}, \frac{1}{2})$ .
- ...
- k. Нехай  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}$ , де  $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$  уже вибрані. Тоді, оскільки підпослідовність  $\{x_n\}_{n=n_{k-1}}^\infty$  є фундаментальною, покладемо  $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$  і виберемо точку  $x_{n_k}$  так, щоб виконувалися умови  $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$  для довільного  $n \geq n_k > n_{k-1}$ . Як і раніше, будемо вважати точку  $x_{n_k}$  центром замкненої кулі радіуса  $\frac{1}{2^{k-1}}$ :  $S_k^*(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$ .
- ...

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. Покажемо, що ці кулі вкладаються одна в одну, тобто

$$S_{k+1}^*(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^k}) \subset S_k^*(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}).$$

Нехай точка  $y \in S_{k+1}^*(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^k})$ . Значить,  $\rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ . За нерівністю трикутника

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}).$$

Оскільки  $n_{k+1} > n_k$ , то  $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ . Значить,

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Інакше кажучи,

$$y \in S_k^*(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$$

Таким чином, ми побудували послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. За припущенням, в просторі  $(X, \rho)$  існує точка  $x$ , спільна для всіх таких куль:  $x \in \bigcap_{k=1}^\infty S_k^*(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$ . Крім того, за побудовою,  $\rho(x_n, x) = \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$ , коли  $k \rightarrow \infty$ . Таким чином, фундаментальна послідовність  $\{x_n\}$  містить підпослідовність  $\{x_{n_k}\}$ , що збігається до деякої точки в просторі  $(X, \rho)$ . Із леми 7.1 випливає, що і вся послідовність  $\{x_n\}$  прямує до тієї ж точки. Таким чином, простір  $(X, \rho)$  є повним.  $\square$

**Зауваження 7.1** — Покажемо, що умову  $r_n \rightarrow 0$  зняти не можна. Розглянемо метричний простір  $(\mathbb{N}, \rho)$ , де

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Визначимо послідовність замкнених куль з центрами в точках  $n$  і радіусом  $1 + \frac{1}{2n}$ :

$$\bar{S}(n, 1 + \frac{1}{2n}) = \{m : \rho(n, m) \leq 1 + \frac{1}{2n}\} = \{n, n+1, \dots\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ці кулі є вкладеними одна в одну і замкненими, простір є повним, але перетин куль є порожнім (яке б число ми не взяли, знайдеться нескінченна кількість куль, які лежать правіше цієї точки). Отже, необхідні умови в принципі вкладених куль не виконуються.

### §7.3 Категорії множин

**Означення 7.5.** Підмножина  $M$  метричного простору  $(X, \rho)$  називається **множиною першої категорії**, якщо її можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зліченої кількості ніде не щільних множин.

**Означення 7.6.** Підмножина  $M$  метричного простору  $(X, \rho)$  називається **множиною другої категорії**, якщо вона не є множиною першої категорії.

#### Теорема 7.3 (теорема Бера про категорії)

Нехай  $(X, \rho)$  — непорожній повний метричний простір, тоді  $X$  є множиною другої категорії.

*Доведення.* Припустимо супротивне, тобто

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

і кожна множина  $E_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  є ніде не щільною в  $X$ . Нехай  $S_0$  — деяка замкнена куля радіуса 1.

Оскільки множина  $E_1$  є ніде не щільною, існує замкнена куля  $S_1$ , радіус якої менше  $\frac{1}{2}$ , така що

$$S_1 \subset S_0 \text{ і } S_1 \cap E_1 = \emptyset.$$

(Якщо існує куля радіуса більше  $\frac{1}{2}$ , що задовольняє таким умовам, то ми виберемо в ній кулю, радіуса менше  $\frac{1}{2}$ .)

Оскільки множина  $E_2$  є ніде не щільною, існує замкнена куля  $S_2$ , радіус якої менше  $\frac{1}{2^2}$ , така що

$$S_2 \subset S_1 \text{ і } S_2 \cap E_2 = \emptyset.$$

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність вкладених одна в одну замкнених куль  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , радіуси яких прямують до нуля. За принципом вкладених куль існує точка  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \cap X$ . Оскільки за побудовою  $S_n \cap E_n = \emptyset$ , то  $x \notin E_n$ ,  $\forall n = 1, 2, \dots$ . Значить,  $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Це суперечить припущенню, що  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .  $\square$

### §7.4 Стискаючі відображення

**Означення 7.7.** Відображення  $g : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$  називається **стискаючим**, якщо існує таке число  $0 < a < 1$ , що  $\rho(g(x), g(y)) \leq a\rho(x, y)$  для довільних  $x, y \in X$ .

#### Теорема 7.4

Будь-яке стискаюче відображення є неперервним.

*Доведення.* Нехай  $x_n \rightarrow x$ , а  $g : X \rightarrow X$  є стискаючим відображенням. Тоді

$$0 \leq \rho(g(x_n), g(x)) \leq \alpha \rho(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отже,

$$g(x_n) \rightarrow g(x), \text{ коли } x_n \rightarrow x.$$

□

### Теорема 7.5 (принцип стискаючих відображень Банаха)

Будь-яке стискаюче відображення повного метричного простору  $(X, \rho)$  в себе має лише одну нерухому точку, тобто  $\exists! x \in X: g(x) = x$ .

*Доведення.* Нехай  $x_0$  — деяка точка із  $X$ . Визначимо послідовність точок  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  за таким правилом:

$$x_1 = g(x_0), \dots, x_n = g(x_{n-1}).$$

Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною. Дійсно, якщо  $m > n$ , то

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \leq \alpha \rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq \dots \leq \\ &\alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \\ &\alpha^n \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Таким чином, оскільки  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, m > n.$$

Внаслідок повноти простору  $(X, \rho)$  в ньому існує границя послідовності  $\{x_n\}$ . Позначимо її через  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Із теореми 7.3 випливає, що

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, нерухома точка існує.

Доведемо її єдиність. Якщо  $g(x) = x$  і  $g(y) = y$ , то  $\rho(x, y) \leq \alpha \rho(x, y)$ , тобто  $\rho(x, y) = 0$ . За аксіомою тотожності (невиродженості) це означає, що  $x = y$ . □

### Наслідок 7.1

Умову  $\alpha < 1$  не можна замінити на  $\alpha \leq 1$ .

*Доведення.* Якщо відображення  $g : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$  має властивість  $\rho(g(x), g(y)) \leq \rho(x, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , то нерухомої точки може не бути. Дійсно, розглянемо простір  $([1, \infty), |x - y|)$  і визначимо відображення  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ . Тоді  $\rho(g(x), g(y)) = |x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}| < |x - y|$ . Оскільки для жодного  $x \in [1, \infty)$   $g(x) = x + \frac{1}{x} \neq x$ , нерухомої точки немає. □

## §7.5 Література

- [1] **Садовничий В. А.** Теория операторов. / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 41–47).
- [2] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 66–75).