19 Фільтри

Окрім збіжності напрямленостей, існує ще один вид узагальненої збіжності — збіжність фільтрів. Ця ідея базується на альтернативному означенні збіжної послідовності: послідовність x_n називається збіжною до точки x_0, якщо для будь-якого околу U цієї точки доповнення до прообразу $f^{-1}(U)$ є скінченною підмножиною з $\mathbb{N}$, де $f : \mathbb{N} \to X$ — відображення, що задає послідовність. Якщо множину $\mathbb{N}$ замінити абстрактною множиною E, в якому виділено сім'ю підмножин F, що має певні загальні властивості, то можна дати розумне означення узагальненої збіжності.

§19.1 Фільтри

Означення 19.1. Сім'я підмножин $\mathfrak{F}$ множини X називається **фільтром** на X, якщо:

1. Сім'я $\mathfrak{F}$ непорожня.
2. $\varnothing \notin \mathfrak{F}$.
3. Якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$.
4. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.1

$X \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.2

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.3

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \varnothing$.

Приклад 19.1

Система Ω_x усіх околів точки x в топологічному просторі X є фільтром.

§19.2 Бази фільтрів

Означення 19.2. Непорожня сім'я підмножин $\mathfrak{D}$ множини X називається **базою фільтра**, якщо:

1. $\varnothing \notin \mathfrak{D}$;
2. $\forall A, B \in \mathfrak{D}\ \exists C \in \mathfrak{D}$: $C \subset A \cap B$.

Означення 19.3. Нехай $\mathfrak{D}$ — база фільтра. Фільтром, що **породжений** базою $\mathfrak{D}$, називається сім'я $\mathfrak{F}$ усіх множин $A \subset X$, що містять як підмножину хоча б один елемент бази $\mathfrak{D}$.

> **Вправа 19.1.** Довести, що фільтр, породжений базою, дійсно є фільтром.

Приклад 19.2

Якщо X — топологічний простір, $x_0 \in X$, $\mathfrak{D}$ — сукупність усіх відкритих множин, що містять x_0, то фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, є фільтром $\mathfrak{M}_{x_0}$, що складається з усіх околів точки x_0.

Означення 19.4. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів множини X. Тоді сім'я $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$ "хвостів" послідовності $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ є базою фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, породжений базою $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$, називається фільтром, **асоційованим** з послідовністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

§19.3 Образи фільтрів і баз фільтрів

Теорема 19.1

Нехай X, Y — множини, $f : X \to Y$ — функція, $\mathfrak{D}$ — база фільтра в X. Тоді сім'я $f(\mathfrak{D})$ усіх множин виду $f(A)$, $A \in \mathfrak{D}$ є базою фільтра в Y.

Доведення. Виконання першої аксіоми бази фільтра є очевидним, адже образ непорожньої множини — непорожня множина. Нехай $f(A), f(B)$ — довільні елементи сім'ї $f(\mathfrak{D})$, $A, B \in D$. За другою аксіомою існує таке $C \in \mathfrak{D}$, що $C \subset A \cap B$. Тоді $f(C) \subset f(A) \cap f(B)$. Отже друга аксіома виконується і для сім'ї $f(\mathfrak{D})$. □

Наслідок 19.4

$\mathfrak{F}$ — фільтр на X, то $f(\mathfrak{F})$ — база фільтра в Y.

Означення 19.5. **Образом фільтра** $\mathfrak{F}$ при відображенні f називається фільтр $f[\mathfrak{F}]$, породжений базою $f(\mathfrak{F})$, тобто

$$A \in f[\mathfrak{F}] \iff f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}.$$

Теорема 19.2

Нехай $\mathfrak{C} \subset 2^X$ — непорожня сім'я множин. Для того щоб існував фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ (тобто такий, що усі елементи сім'ї $\mathfrak{C}$ є елементами фільтра $\mathfrak{F}$) необхідно і достатньо, щоб $\mathfrak{C}$ була центрованою.

Доведення. **Необхідність.** Якщо $\mathfrak{F}$ — фільтр і $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$, то будь-який скінчений набір $A_1, A_2, \ldots, A_n$ елементів сім'ї $\mathfrak{C}$ буде складатися з елементів фільтра $\mathfrak{F}$. Отже,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing.$$

Достатність. Нехай $\mathfrak{C}$ — центрована сім'я. Тоді сім'я $\mathfrak{D}$ усіх множин виду

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{C}$$

буде базою фільтра. Як фільтр $\mathfrak{F}$ треба взяти фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$. □

§19.4 Фільтри, породжені базою

Означення 19.6. Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр на X. Сім'я множин $\mathfrak{D}$ називається **базою фільтра $\mathfrak{F}$**, якщо $\mathfrak{D}$ база фільтра і фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, збігається з $\mathfrak{F}$.

Теорема 19.3

Для того щоб $\mathfrak{D}$ була базою фільтра $\mathfrak{F}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися дві умови:

1. $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$;
2. $\forall A \in \mathfrak{F}\ \exists B \in \mathfrak{D}$: $B \subset A$.

Вправа 19.2. Доведіть цю теорему.

Означення 19.7. Нехай F — фільтр на X і $A \subset X$. **Слідом** фільтра $\mathfrak{F}$ на A називається сім'я підмножин $\mathfrak{F}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathfrak{F}\}$.

Теорема 19.4

Для того щоб сім'я $\mathfrak{F}_A$ була фільтром на A, необхідно і достатньо, щоб усі перетини $A \cap B$, $B \in \mathfrak{F}$ були непорожніми.

Вправа 19.3. Доведіть цю теорему.

Наслідок 19.5

$\mathfrak{F}_A$ — фільтр, якщо $A \in \mathfrak{F}$.

§19.5 Границі і граничні точки фільтрів

Означення 19.8. Нехай на множині X задані фільтри $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$. Говорять, що $\mathfrak{F}_1$ **мажорує** $\mathfrak{F}_2$, якщо $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$, тобто кожний елемент фільтра $\mathfrak{F}_2$ є водночас і елементом фільтра $\mathfrak{F}_1$.

Приклад 19.3

Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в X, а $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — її підпослідовність. Тоді фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$ асоційований з підпослідовністю, мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, асоційований з самою послідовністю.

Дійсно, нехай $A \in \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$. Тоді існує таке $N \in \mathbb{N}$, що $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset A$. Але тоді й $\{x_{n_k}\}_{k=N}^{\infty} \subset A$, тобто $A \in \mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$.

Означення 19.9. Нехай X — топологічний простір, $\mathfrak{F}$ — фільтр на X. Точка $x \in X$ називається **границею** фільтра $\mathfrak{F}$ (цей факт позначається як $x = \lim \mathfrak{F}$), якщо $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр околів точки x. Іншими словами, $x = \lim \mathfrak{F}$, якщо кожний окіл точки x належить фільтру $\mathfrak{F}$.

Означення 19.10. Точка $x \in X$ називається **граничною точкою** фільтра $\mathfrak{F}$, якщо кожний окіл точки x перетинається з усіма елементами фільтра $\mathfrak{F}$. Множина усіх граничних точок фільтра називається $\mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}$.

Приклад 19.4

Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в топологічному просторі X. Тоді $x = \lim \mathfrak{F}_{\{x_n\}} = \lim_{n\to\infty} x_n$, а $x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$ збігається з множиною граничних точок послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 19.5

Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр на топологічному просторі X, $\mathfrak{D}$ — деяка база фільтра $\mathfrak{F}$. Тоді

1. $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x\ \exists A \in \mathfrak{D}\colon A \subset U$;
2. $x = \lim \mathfrak{F} \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}$. Якщо до того ж X — хаусдорфів простір, то у фільтра $\mathfrak{F}$ немає інших граничних точок. Зокрема, якщо у фільтра в хаусдорфовому просторі є границя, то ця границя є єдиною;
3. множина $\mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}$ збігається з перетином замикань усіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

Доведення.

1. $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x\ U \in \mathfrak{F} \iff \forall U \in \mathfrak{F}\ \exists A \in \mathfrak{D}\colon A \subset U$.
2. $x = \lim \mathfrak{F}, U \in \Omega_x \implies U \in \mathfrak{F} \implies \forall A \in \mathfrak{F}\ A \cap U \neq \varnothing \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}$;
   $x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F} \implies \forall U \in \mathfrak{F}, V \in \Omega_y\ U \cap V \neq \varnothing \implies x = y$ (оскільки простір хаусдорфів).
3. $x = \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F} \iff \forall A \in \mathfrak{F}, U \in \Omega_x\ A \cap U \neq \varnothing \iff \forall A \in \mathfrak{F}\ x \in \overline{A}$. □

Теорема 19.6

Нехай $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — фільтри на топологічному просторі X і $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді

1. $x = \lim \mathfrak{F}_1 \implies x = \lim \mathfrak{F}_2$;
2. $x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_2 \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_1$;
3. $x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_1$.

Доведення.

1. $\mathfrak{F}_1$ мажорує фільтр $\mathfrak{M}_x$ околів точки x, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \implies \mathfrak{M}_x \subset \mathfrak{F}_2$.
2. Оскільки при збільшенні сім'я множин її перетин зменшується, то
$$\mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_2 = \bigcap_{A\in\mathfrak{F}_2} \overline{A} \subset \bigcap_{A\in\mathfrak{F}_1} \overline{A} = \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_1. \tag{19.1}$$
3. $x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_2 \implies x \in \mathrm{LIM}\,\mathfrak{F}_1$.

□

§19.6 Границя функції по фільтру

Означення 19.11. Нехай X — множина, Y — топологічний простір, $\mathfrak{F}$ — фільтр на X. Точка $y \in Y$ називається **границею** функції $f : X \to Y$ по фільтру $\mathfrak{F}$ (цей факт позначається як $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$, якщо $y = \lim f[\mathfrak{F}]$. Іншими словами, $y = \lim f[\mathfrak{F}]$, якщо для довільного околу U точки y існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $f(A) \subset U$.

Означення 19.12. Точка $y \in Y$ називається **граничною** точкою функції $f : X \to Y$ по фільтру $\mathfrak{F}$, якщо $y \in \mathrm{LIM}\, f[\mathfrak{F}]$, тобто якщо довільний окіл точки y перетинається з образами усіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

Приклад 19.5

Нехай X — топологічний простір, $f : \mathbb{N} \to X$ і F — фільтр Фреше на $\mathbb{N}$. Тоді $\lim_{\mathfrak{F}} f = \lim_{n\to\infty} f(n)$.

Теорема 19.7

Нехай X і Y — топологічні простори, F — фільтр на X, $x = \lim \mathfrak{F}$ і $f : X \to Y$ — неперервна функція. Тоді $f(x) = \lim_{\mathfrak{F}} f$.

Доведення. Нехай U — довільний окіл точки $f(x)$. Тоді існує окіл V точки X, для якого $f(V) \subset U$. Умова $x = \lim \mathfrak{F}$ означає, що $V \in \mathfrak{F}$. Інакше кажучи, для довільного околу U точки $f(x)$ ми знайшли шуканий елемент $V \in \mathfrak{F}$: $f(V) \subset U$. $\square$

§19.7 Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 99–102).

[2] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 481–488).