24 Тихоновський добуток і тихоновська топологія

§24.1 Декартів добуток як множина функцій

Нехай Γ — не обов'язково скінченна індексна множина, кожному елементу γ якої поставлено у відповідність деяку множину X_γ.

Означення 24.1. **Декартовим добутком** множин X_γ по $\gamma \in \Gamma$ називається множина $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, яка складається із усіх таких функцій $x : \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, що $\forall\gamma \in \Gamma$ $x(\gamma) \in X_\gamma$.

> **Зауваження 24.1** — У частковому випадку, коли $\forall\gamma \in \Gamma$ $X_\gamma = X$, добуток складається з усіх функцій $x : \Gamma \to X$ і називається **декартовим степенем** X^Γ.

Приклад 24.1

Простір Фреше — добуток $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, де $X_n = \mathbb{R}$. Отже, простір Фреше є степенем $\mathbb{R}^\mathbb{N} = \mathbb{R}^{\aleph_0}$, елементами якого є зліченні послідовності $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ дійсних чисел x_n.

Приклад 24.2

Гільбертів куб — добуток $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, де $X_n = I = [0, 1]$, тобто це простір $I^{\aleph_0}$.

Приклад 24.3

Тихоновський куб — добуток $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, де $\#\Gamma = \nu$, а $X_\gamma = I = [0, 1]$, тобто це простір I^ν.

Приклад 24.4

Канторів дисконтинуум ваги ν — добуток $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, де $\#\Gamma = \nu$, а множини $X_\gamma = D = \{0, 1\}$(проста двокрапка), тобто це простір D^ν.

§24.2 Проектори, тихоновська топологія і добуток

Означення 24.2. Відображення $P_\alpha : \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to X_\alpha$, що діє за правилом $P_\alpha(x) = x_\alpha$, $\forall\alpha \in \Gamma$, називається **координатним проектором**.

Означення 24.3. Нехай X_γ, $\gamma \in \Gamma$ — топологічні простори. **Тихоновською топологією** на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ називається найслабкіша з топологій, в якій усі координатні проектори $P_\alpha(x)$, $\alpha \in \Gamma$ є неперервними.

Означення 24.4. Декартів добуток $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, наділений тихоновською топологією, називається **тихоновським добутком**.

Зауваження 24.2 — Очевидно, що координатні проектори розділяють точки добутку, тому за теорем. 23.2 тихоновський добуток хаусдорфових просторів є віддільним за Хаусдорфом.

Означення 24.5. Нехай K — скінчений набір індексів з Γ. Добуток $A = \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, де $A_\gamma = X_\gamma$ при $\gamma \notin K$, і $A_\gamma \subset X_\gamma$ при $\gamma \in K$ і A_γ — відкриті множини в топологіях τ_γ, називається **відкритою циліндричною множиною** з основою $\prod_{\gamma\in K} A_\gamma$.

Запишемо тихоновську топологію як топологію, що породжена сім'єю відображень. Нехай $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, $K \subset \Gamma$ — скінченна множина індексів, $V_\gamma \subset X_\gamma$, $\gamma \in K$ — околи точок x_γ. Введемо позначення

$$U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x) = \left\{\gamma \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma : \gamma_\alpha \in V_\alpha, \forall\alpha \in K\right\}.$$

Зауваження 24.3 — Множина $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x)$ є відкритим циліндричним околом точки x з основою $\prod_{\gamma\in K} V_\gamma$.

Теорема 24.1 (про базу околів точки в тихоновській топології)
Множини $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x)$ утворюють у тихоновській топології базу околів точки x.

Вправа 24.1. Перевірте властивості бази.

Доведення. ... □

§24.3 Тихоновська топологія і фільтри

Теорема 24.2 (критерій збіжності в тихоновському добутку)
Фільтр $\mathfrak{F}$ на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ збігається в тихоновській топології до елемента $x = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ тоді і тільки тоді, коли $x_\gamma = \lim_{\mathfrak{F}} P_\gamma$, $\forall\gamma \in \Gamma$.

Доведення. **Необхідність.** Оскільки координатні проектори на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ є неперервними і $x = \lim \mathfrak{F}$, то за теорем. 20.3 $\lim_{\mathfrak{F}} P_\gamma = P_\gamma(x) = x_\gamma$.

Достатність. Покажемо, що будь-який окіл V точки x належить фільтру $\mathfrak{F}$. З огляду на те, що $\forall A \in \mathfrak{F}\ A \subset B \subset X \implies B \in \mathfrak{F}$, достатньо розглянути відкритий циліндричний окіл точки x, який міститься в V. Отже, розглянемо відкритий циліндричний окіл $U = \prod_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$ точки x з основою $\prod_{\gamma\in K} V_\gamma$, тобто $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x)$.

Оскільки $\forall\gamma_0 \in K$ множина V_{γ_0} є околом точки x_{γ_0} в просторі X_{γ_0} і $\lim_{\mathfrak{F}} P_{\gamma_0} = x_{\gamma_0}$, то існує множина $A \in \mathfrak{F}$ така, що $P_{\gamma_0}(A) \subset V_{\gamma_0}$, отже, $A \subset P_{\gamma_0}^{-1}(V_{\gamma_0})$, тому $P_{\gamma_0}^{-1}(V_{\gamma_0}) \in \mathfrak{F}$. Таким чином, $\forall\gamma \in K\ P_\gamma^{-1}(V_\gamma) \in \mathfrak{F}$. Оскільки множина K є скінченою, то $\bigcap_{\gamma\in K} P_\gamma^{-1}(V - \gamma) \in \mathfrak{F}$.

Оскільки

$$\bigcap_{\gamma\in K} P_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subset U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x),$$

а $U_{K,\{V_\gamma\}_{\gamma\in K}}(x)$ утворюють в $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ базу околів точки x(теорем. 24.1), то

$$\bigcap_{\gamma\in K} P_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subset U, \quad \forall U \in \Omega_x.$$

Тому, за четвертою аксіомою фільтра $U \in \mathfrak{F}$. □

Зауваження 24.4 — Із теорем. 24.1 випливає, що послідовність $x_n = \{x_{n,\gamma}\}_{\gamma\in\Gamma}$ точок добутку $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ топологічних просторів збігається до точки x тоді і лише тоді, коли для кожного $\gamma_0 \in \Gamma$ послідовність $\{x_{\gamma_0,n}\}$ збігається в просторі X_{γ_0} до точки x_{γ_0}.

Інакше кажучи, збіжність в тихоновській топології є покоординатною.

Теорема 24.3 (теорема Тихонова про добуток компактів)
Тихоновський добуток $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ будь-якої сім'ї непорожніх топологічних просторів X_γ, $\gamma \in \Gamma$ є компактним тоді і лише тоді, коли усі X_γ є компактними.

Доведення. **Необхідність.** Нехай X_γ, $\gamma \in \Gamma$ — довільна сім'я непорожніх просторів і їх тихоновський добуток $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ є компактним. Оскільки кожна множина X_γ, $\gamma \in \Gamma$ є образом компактного простору $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, отриманим за допомогою неперервного відображення $P_\gamma : X \to X_\gamma$, то простори X_γ, $\gamma \in \Gamma$ є компактними (неперервний образ компактного простору є компактним простором).

Достатність. За критерієм компактності в термінах фільтрів, для того щоб простір був компактним, необхідно і достатньо, щоб кожний ультрафільтр на X збігався. Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Оскільки X_γ, $\gamma \in \Gamma$ — компактні топологічні простори, то за критерієм компактності в термінах фільтрів $\forall\gamma \in \Gamma\ \exists y_\gamma = \lim_{\mathfrak{A}} P_\gamma$. Оскільки P_γ — неперервні відображення, то за теорем. 24.2 $y = \{y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = \lim \mathfrak{A}$. □

§24.4 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 492–495).

[2] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979(стр. 120–126, 230–234).