

# 2 Методи введення топології

## §2.1 Замикання і внутрішність

Система аксіом, наведена в означенні топології належить радянському математику П.С. Александрову (1925). Проте першу систему аксіом, що визначає топологічну структуру, запропонував польський математик К. Куратовський (1922).

**Означення 2.1.** Нехай  $X$  — довільна множина. Відображення  $\text{cl} : 2^X \rightarrow 2^X$  називається **оператором замикання Куратовського на  $X$** , якщо воно задовольняє наступні умови (**аксіоми Куратовського**):

- K1.  $\text{cl}(M \cup N) = \text{cl}(M) \cup \text{cl}(N)$  (адитивність);
- K2.  $M \subset \text{cl}(M)$ ;
- K3.  $\text{cl}(\text{cl}(M)) = \text{cl}(M)$  (ідемпотентність);
- K4.  $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ .

### Теорема 2.1

Якщо в деякій множині  $X$  введено топологію в розумінні Александрова, то відображення  $\text{cl}$ , що задовольняє умові  $\text{cl}(M) = \overline{M}$  є оператором Куратовського на  $X$ .

*Доведення.* Неважко помітити, що аксіоми K1–K4 просто збігаються із властивостями замикання, доведеними в теоремі про властивості замикання.  $\square$

### Теорема 2.2 (про завдання топології оператором Куратовського)

Кожний оператор Куратовського  $\text{cl}$  на довільній множині  $X$  задає в  $X$  топологію  $\tau = \{U \subset X : \text{cl}(X \setminus U) = X \setminus U\}$  в розумінні Александрова, до того ж замикання  $\overline{M}$  довільної підмножини  $M$  із  $X$  в цій топології  $\tau$  збігається з  $\text{cl}(M)$ , тобто  $\text{cl}(M) = \overline{M}$ .

*Доведення.* Побудуємо сімейство

$$\sigma = \{M \subset X : M = X \setminus U, U \in \tau\},$$

що складається із всіх можливих доповнень множин із системи  $\tau$ , тобто таких множин, для яких  $\text{cl}(M) = \overline{M}$ . Інакше кажучи, система  $\sigma$  складається з нерухомих точок оператора замикання Куратовського. За принципом двоїстості де Моргана, для сімейства  $\sigma$  виконуються аксіоми замкненої топології

- F1.  $X, \emptyset \in \sigma$ .
- F2.  $F_\alpha \in \sigma, \alpha \in A \implies \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \sigma$ , де  $A$  — довільна множина.
- F3.  $F_\alpha \in \sigma, \alpha = 1, 2, \dots, n \implies \bigcup_{\alpha=1}^n G_\alpha \in \sigma$ .

Отже, щоб перевірити аксіоми Александрова для сімейства множин  $\tau$ , достатньо перевірити виконання аксіом F1–F3 для сімейства множин  $\sigma$ .

1. Перевіримо аксіому F1:  $X \in \sigma$ ?  $\emptyset \in \sigma$ ?

Аксіома K2 стверджує, що  $M \subset \text{cl}(M)$ . Покладемо  $M = X$ . Отже,  $X \subset \text{cl}(X) \subset X \implies \text{cl}(X) = X \implies X \in \sigma$ . Аксіома K4 стверджує, що  $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset \implies \emptyset \in \sigma$ .

2. Перевіримо виконання аксіоми F2.

Спочатку покажемо, що оператор  $\text{cl}$  є **монотонним**:

$$\forall A, B \in \sigma : A \subset B \implies \text{cl}(A) \subset \text{cl}(B).$$

Нехай  $A, B \in \sigma$  і  $A \subset B$ . Тоді за аксіомою K1:

$$\text{cl}(B) = \text{cl}(B \cup A) = \text{cl}(B) \cup \text{cl}(A).$$

Отже,

$$\text{cl}(A) \subset \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) = \text{cl}(B \cup A) = \text{cl}(B).$$

Використаємо це допоміжне твердження для перевірки аксіоми F3. З одного боку,

$$\begin{aligned} \forall F_\alpha \in \sigma : \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset F_\alpha \quad \forall \alpha \in A &\implies \\ \implies \text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) \in \text{cl}(F_\alpha) = F_\alpha \quad \forall \alpha \in A &\implies \\ \implies \text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha. \end{aligned}$$

З іншого боку, за аксіомою K2

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset \text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right).$$

Отже,

$$\text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \sigma.$$

3. Перевіримо виконання аксіоми F3.

$$A, B \in \sigma \implies \text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) = A \cup B \implies A \cup B \in \sigma.$$

Таким чином,  $\sigma$  — замкнена топологія, а сімейство  $\tau$ , що складається із доповнень до множин із сімейства  $\sigma$  — відкрита топологія.

Залишилося показати, що в просторі  $(X, \tau)$ , побудованому за допомогою оператора  $\text{cl}$ , замикання  $\overline{M}$  довільної множини  $M$  збігається з  $\text{cl}(M)$ .

Дійсно, за критерієм замкненості, множина  $M$  є замкнутою, якщо  $\overline{M} = M$ . З аксіом K2 і K3 випливає, що множина  $\text{cl}(M)$  є замкнутою і містить  $M$ . Покажемо, що ця множина — найменша замкнена множина, що містить множину  $M$ , тобто є її замиканням.

Нехай  $F$  — довільна замкнена в  $(X, \tau)$  множина, що містить  $M$ :

$$M \subset F, \quad \text{cl}(F) = F.$$

Внаслідок монотонності оператора  $\text{cl}$  отримуємо наступне:

$$M \subset F, \text{cl}(F) = F \implies \text{cl}(M) \subset \text{cl}(F) = F.$$

□

**Означення 2.2.** Нехай  $X$  — довільна множина. Відображення  $\text{int} : 2^X \rightarrow 2^X$  називається **оператором взяття внутрішності множини  $X$** , якщо воно задовольняє наступні умови:

- K1.  $\text{int}(M \cap N) = \text{int}(M) \cap \text{int}(N)$  (адитивність);
- K2.  $\text{int}(M) \subset M$ ;
- K3.  $\text{int}(\text{int}(M)) = \text{int}(M)$  (ідемпотентність);
- K4.  $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$ .

### Наслідок 2.1

Оскільки

$$\text{int } A = X \setminus \overline{X \setminus A},$$

оператор взяття внутрішності є двоїстим для оператора замикання Куратовського. Отже, система множин  $\tau = \{A \subseteq X : \text{int } A = A\}$  утворює в  $X$  топологію, а множина  $\text{int } A$  в цій топології є внутрішністю множини  $A$ .

## §2.2 База топології

Для завдання в множині  $X$  певної топології немає потреби безпосередньо указувати всі відкриті підмножини цієї топології. Існує деяка сукупність відкритих підмножин, яка повністю визначає топологію. Така сукупність називається базою цієї топології.

**Означення 2.3.** Сукупність  $\beta$  відкритих множин простору  $(X, \tau)$  називається **базою топології  $\tau$**  або **базою простору  $(X, \tau)$** , якщо довільна непорожня відкрита множина цього простору є об'єднанням деякої сукупності множин, що належать  $\beta$ :

$$\forall G \in \tau, G \neq \emptyset \quad \exists B_\alpha \in \beta, \alpha \in A : \quad G = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

**Зауваження 2.1 —** Будь-який простір  $(X, \tau)$  має базу, оскільки система всіх відкритих підмножин цього простору утворює базу його топології.

**Зауваження 2.2 —** Якщо в просторі  $(X, \tau)$  існують ізольовані точки, вони повинні входити в склад будь-якої бази цього простору.

### Теорема 2.3

Для того щоб сукупність  $\beta$  множин із топології  $\tau$  була базою цієї топології, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки  $x \in X$  і довільної відкритої множини  $U$ , що містить точку  $x$ , існувала множина  $V \in \beta$ , така щоб  $x \in V \subset U$ .

*Доведення.* Необхідність. Нехай  $\beta$  — база простору  $(X, \tau)$ ,  $x_0 \in X$ , а  $U_0 \in \tau$ , таке що  $x_0 \in U_0$ . Тоді за означенням бази  $U_0 = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ , де  $V_\alpha \in \beta$ . З цього випливає, що  $x_0 \in V_{\alpha_0} \subset U_0$ .

$$\beta = \mathcal{B}(\tau), x_0 \in X, U_0 \in \tau, x_0 \in U_0 \implies U_0 = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha, V_\alpha \in \beta \implies x_0 \in V_{\alpha_0} \subset U_0.$$

Достатність. Нехай для кожної точки  $x \in X$  і довільної відкритої множини  $U \in \tau$ , що містить точку  $x$ , існує множина  $V_x \in \beta$ , така що  $x \in V_x \subset U$ . Легко перевірити, що  $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ .

Дійсно, якщо точка  $x \in U$ , то за умовою теореми, вона належить множині  $V_x \subset U$ , а отже й об'єднанню таких множин  $\bigcup_{x \in U} V_x$ :

$$x \in U \implies \exists V_x \subset U : x \in V_x \implies x \in \bigcup_{x \in U} V_x.$$

І навпаки, якщо точка належить об'єднанню  $\bigcup_{x \in U} V_x$ , то вона належить принаймні одній із цих множин  $V_x \subset U$ , а отже — вона належить множині  $U$ :

$$x \in \bigcup_{x \in U} V_x \implies \exists V_x \subset U : x \in V_x \implies x \in U.$$

Таким чином, довільну відкриту множину  $U \in \tau$  можна подати у вигляді об'єднання множин із  $\beta$ . □

### Приклад 2.1

Оскільки  $\forall x \in \mathbb{R}^1$  і  $\forall (a, b) \ni x \exists (a_0, b_0) \subset (a, b)$ , то за попередньою теоремою сукупність всіх відкритих інтервалів утворює базу топології в  $\mathbb{R}^1$ .

### Приклад 2.2

Оскільки  $\forall x \in \mathbb{R}^1$  і  $\forall (a, b) \ni x \exists (r_1, r_2) \subset (a, b)$ ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ , то за попередньою теоремою сукупність всіх відкритих інтервалів із раціональними кінцями також утворює базу топології в  $\mathbb{R}^1$ .

З цієї теореми випливають два наслідки.

### Наслідок 2.2

Об'єднання всіх множин, які належать базі  $\beta$  топології  $\tau$ , утворює всю множину  $X$ .

*Доведення.* Оскільки  $X \in \tau$ , то за означенням бази  $X = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ , де  $V_\alpha \in \beta$ . □

Надалі будемо також називати цей наслідок першою властивістю бази топології.

### Наслідок 2.3

Для довільних двох множин  $U$  і  $V$  із бази  $\beta$  і для кожної точки  $x \in U \cap V$  існує множина  $W$  із  $\beta$  така, що  $x \in W \subset U \cap V$ .

*Доведення.* Оскільки  $U \cap V \in \tau$ , то за попередньою теоремою в множині  $U \cap V$  міститься відкрита множина  $W$  із бази, така що  $x \in W$ .  $\square$

Надалі будемо також називати цей наслідок другою властивістю бази топології.

**Теорема 2.4** (про завдання топології за допомогою бази)

Нехай в довільній множині  $X$  задана деяка сукупність відкритих множин  $\beta$ , що має властивості бази топології. Тоді в множині  $X$  існує єдина топологія  $\tau$ , однією з баз якої є сукупність  $\beta$ .

*Доведення.* Припустимо, що  $\tau$  — сімейство, що містить лише порожню множину і всі підмножини множини  $X$ , кожна з яких є об'єднанням підмножин із сукупності  $\beta$ :

$$\tau = \left\{ \emptyset, G_\alpha \subset X, \alpha \in A, G_\alpha = \bigcup_{i \in I} B_i^\alpha, B_i^\alpha \in \beta \right\}.$$

Перевіримо, що це сімейство множин є топологією. Виконання аксіом топології 1 і 2 є очевидним:  $\emptyset \in \tau$ ,  $X \in \tau$  і

$$G_\alpha \in \tau, \alpha \in A \implies \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau.$$

Аксіома 3 є наслідком властивостей. Не обмежуючи загальності, можна перевірити її для випадку перетину двох множин.

Нехай  $U, U' \in \tau$ . За означенням,  $U = \bigcup_{i \in I} V_i$  і  $U' = \bigcup_{j \in J} V'_j$ , де  $V_i, V'_j \in \beta$ . Розглянемо перетин

$$U \cap U' = \left( \bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} V'_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (V_i \cap V'_j).$$

Доведемо, що  $V_i \cap V'_j \in \tau$ . Нехай  $x \in V_i \cap V'_j$ . Тоді, за другою властивістю, існує множина  $W_x \in \beta$ , така що  $x \in W_x \subset V_i \cap V'_j$ . Оскільки точка  $x \in V_i \cap V'_j$  є довільною, то  $V_i \cap V'_j = \bigcup_{x \in V_i \cap V'_j} W_x \in \tau$ . Отже,  $U \cap U' \in \tau$ .

Таким чином, сімейство  $\tau$  дійсно утворює топологію на  $X$ , а система  $\beta$  є її базою.  $\square$

## §2.3 Література

- [1] **Александрян Р.А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 14–22).
- [2] **Энгелькинг Р.** Общая топология / Р. Энгелькинг — М.: Мир, 1986 (стр. 46–50).