II

Простори зі структурою

Частина II: Зміст

6 Метричні простори **37**
6.1 Основні означення 37
6.2 Збіжність і замкненість 38
6.3 Збіжність і фундаментальність 40
6.4 Література 41

7 Повні метричні простори **43**
7.1 Повнота, ізометрія і поповнення 43
7.2 Вкладені кулі і повнота 44
7.3 Категорії множин 46
7.4 Стискаючі відображення 46
7.5 Література 47

8 Компактні метричні простори **49**
8.1 Зв'язки між видами компактності 49
8.2 Література 51

9 Лінійні простори **53**
9.1 Лінійні простори і функціонали 53
9.2 Продовження функціоналів 54
9.3 Ланцюги і мажоранти 56
9.4 Література 57

10 Нормовані простори **59**
10.1 Норми векторів 59
10.2 Норми функціоналів 59
10.3 Простір операторів 61
10.4 Література 62

6 Метричні простори

Численні поняття і теореми математичного аналізу використовують поняття відстані між точками простору. Зокрема, це стосується границі і неперервності. В багатьох випадках самі теореми та їх доведення залежать не від способу завдання метрики, а лише від їхніх властивостей: невід'ємності, симетрії і нерівності трикутника.

§6.1 Основні означення

Означення 6.1. Нехай X — довільна множина. Відображення $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ називається **метрикою**, якщо $\forall x, y, z \in X$ воно має такі властивості (аксіоми метрики):

1. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (аксіома тотожності);
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетрії);
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Означення 6.2. **Метричним простором** називається пара (X, ρ), де X — множина-носій, а ρ — метрика.

Приклад 6.1
$\left(\mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}\right)$.

Приклад 6.2
$\left(C[a, b], \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|\right)$.

Означення 6.3. **Відкритою кулею** радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці $x_0 \in X$ називається множина

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Означення 6.4. **Замкненою кулею** радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці $x_0 \in X$ називається множина

$$\overline{S}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

Приклад 6.3
В просторі $(\mathbb{R}, |x - y|)$ відкритою кулею $S(x_0, r)$ є інтервал $(x_0 - r, x_0 + r)$, а замкненою кулею — сегмент $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Приклад 6.4
В просторі $(\mathbb{R}^2, \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2})$ відкритою кулею $S(x_0, r)$ є круг без границі радіуса r з центром в точці x_0.

Приклад 6.5

В просторі $(\mathbb{R}^2, |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)$ одинична куля є ромбом з вершинами $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$ і $(-1,0)$.

Приклад 6.6

В просторі $\big(C[a,b], \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|\big)$ околом є смуга, що складається із функцій, які задовольняють умові $\forall t \in [a,b]$: $|x(t) - y(t)| < r$.

Означення 6.5. Множина $G \subset X$ називається **відкритою** в метричному просторі (X,ρ), якщо $\forall x \in G\ \exists S(x,r) \subset G$.

Означення 6.6. Множина $G \subset X$ називається **замкненою**, якщо її доповнення є відкритою множиною.

Означення 6.7. Множина метричного простору є **обмеженою за відстанню**, або просто **обмеженою**, якщо воно міститься в деякій кулі: $\exists S(x,r) : M \subset S(x,r)$.

§6.2 Збіжність і замкненість

Означення 6.8. Точка x метричного простору (X,ρ) називається **границею послідовності** точок $x_n \in X$, якщо $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Така збіжність називається **збіжністю за відстанню** (або за метрикою).

Цей факт записується так: $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Лема 6.1

Для довільних точок x, x', y, y' метричного простору (X,ρ) виконується нерівність
$$|\rho(x',y') - \rho(x,y)| \le \rho(x,x') + \rho(y,y').$$

Доведення. Із нерівності трикутника випливає:

$$\rho(x',y') \le \rho(x',x) + \rho(x,y') \le \rho(x,x') + \rho(x,y) + \rho(y,y').$$

Отже,
$$\rho(x',y') - \rho(x,y) \le \rho(x,x') + \rho(y,y').$$

Аналогічно,

$$\rho(x,y) \le \rho(x,x') + \rho(x',y) \le \rho(x,x') + \rho(x',y') + \rho(y',y).$$

Звідси випливає, що

$$\rho(x,y) - \rho(x',y') \le \rho(x,x') + \rho(y,y').$$

Таким чином,
$$|\rho(x',y') - \rho(x,y)| \le \rho(x,x') + \rho(y,y'). \qquad \square$$

Лема 6.2

Метрика $\rho(x, y)$ є неперервною функцію своїх аргументів, тобто якщо $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

Доведення. Із леми 6.1 випливає, що при $x_n \to x$, $y_n \to y$

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0.$$

□

Теорема 6.1

Відкрита куля $S(a, r)$ в метричному просторі (X, ρ) є відкритою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in S(a, r)$.

$$x \in S(a, r) \implies \rho(x, a) < r.$$

Покладемо $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Розглянемо довільну точку $y \in S(x, \varepsilon)$.

$$y \in S(x, e) \implies \rho(y, x) < \varepsilon.$$

$$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \implies y \in S(a, r) \implies S(x, \varepsilon) \subset S(a, r).$$

Таким чином, точка x є внутрішньою точкою множини $S(a, r)$, тобто $S(a, r)$ — відкрита множина. □

Теорема 6.2

Точка x належить замиканню $\overline{A}$ множини $A \subset X$ в топології, що індукована на X метрикою ρ, тоді і лише тоді, якщо існує послідовність точок множини A, що збігається до точки x.

Доведення. Необхідність.

$$x \in \overline{A} \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in S \cap S(x, \tfrac{1}{n}) \implies \rho(x, x_n) < \tfrac{1}{n} \implies x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Достатність.

$$x \notin \overline{A} \implies \exists r > 0 : A \cap S(x, r) = \varnothing \implies$$
$$\forall x' \in A : \rho(x, x') \geq r \implies \nexists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Що і треба було довести. □

Наслідок 6.1

Теорема 6.2 стверджує, що кожна точка дотику множини в метричному просторі є границею деякої послідовності елементів цієї множини. Отже, топологію метричного простору можна описати не лише за допомогою куль, а й за допомогою збіжних послідовностей.

Наслідок 6.2

Множина є замкненою, якщо всі послідовності її точок збігаються лише до точок цієї ж множини.

Теорема 6.3

Замкнена куля $\overline{S}(a,r)$ є замкненою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.

Доведення. Нехай $x_n \in \overline{S}(a,r)$.

$$x_n \in \overline{S}(a,r) \implies \rho(x_n,a) \le r \implies \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,a) = \rho\left(\lim_{n\to\infty} x_n, a\right) = \rho(x,a) \le r \implies x \in \overline{S}(a,r).$$

Отже, всі граничні точки множини $\overline{S}(a,r)$, які є точками її дотику, належать кулі $\overline{S}(a,r)$. □

§6.3 Збіжність і фундаментальність

Означення 6.9. Послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ точок метричного простору (X,ρ) називається **фундаментальною**, якщо $\rho(x_n,x_m) \to 0$ при $n\to\infty$, $m\to\infty$.

Лема 6.3

Будь-яка збіжна послідовність метричного простору є фундаментальною.

Доведення. Нехай $x_n \to x$ при $n\to\infty$. Тоді

$$\rho(x_n,x_m) \le \rho(x_n,x) + \rho(x,x_m) \to 0 \text{ при } n,m\to\infty.$$

Отже, послідовність є фундаментальною. □

Лема 6.4

Будь-яка фундаментальна послідовність точок метричного простору є обмеженою.

Доведення. Задамо $\varepsilon > 0$ і підберемо натуральне число N так, щоб $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$ при $n,m \ge N$. Зокрема, $\rho(x_n,x_N) < \varepsilon$ при $n \ge N$. Введемо позначення

$$r = \max\{\varepsilon, \rho(x_1,x_N), \rho(x_2,x_N), \dots, \rho(x_{N-1},x_N)\}.$$

Тепер при всіх $n = 1,2,\dots$

$$\rho(x_n,x_N) \le r.$$

Інакше кажучи,

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{S}(x_N,r).$$

Замінюючи число r на будь-яке число $r' > r$, можна заключити послідовність в довільну відкриту кулю:

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S(x_N,r').$$ □

§6.4 Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 47–50).

[2] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 60–69).

7 Повні метричні простори

§7.1 Повнота, ізометрія і поповнення

Означення 7.1. Метричний простір називається **повним**, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність має границю.

Приклад 7.1

$\left(\mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}\right)$.

Приклад 7.2

$\left(C[a,b], \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|\right)$.

Означення 7.2. Бієктивне відображення φ одного метричного простору (E_1, ρ_1) на інший (E_2, ρ_2) називається **ізометрією**, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in E_1 : \rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

Означення 7.3. Метричні простори, між якими існує ізометрія, називаються **ізометричними**.

Означення 7.4. Повний метричний простір $(\tilde{E}, \tilde{\rho})$ називається **поповненням** метричного простору (E, ρ), якщо

1. $E \subset \tilde{E}$;
2. $\overline{E} = \tilde{E}$.

Теорема 7.1 (про поповнення метричного простору, Хаусдорф)

Будь-який метричний простір має поповнення, єдине з точністю до ізометрії, що залишає точки простору нерухомими.

Лема 7.1

Якщо фундаментальна послідовність містить збіжну підпослідовність, то сама послідовність збігається до тієї ж границі.

Доведення. Припустимо, що $\lim_{n_k\to\infty} \rho(x_{n_k}, x_0) = 0$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N_1 : \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon.$$

За нерівністю трикутника

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x).$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною,

$$\forall\varepsilon>0\exists N_2(\varepsilon)>0:\forall n,m\geq N_2:\rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

Таким чином,

$$\forall\varepsilon>0\forall n,n_k\geq\max(N_1,N_2):\rho(x_n,x_0)\leq\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x_0)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\qquad\square$$

Лема 7.2

Будь-яка підпослідовність фундаментальної послідовності є фундаментальною.

Доведення. За нерівністю трикутника

$$\rho(x_{n_k},x_{n_l})\leq\rho(x_{n_k},x_n)+\rho(x_n,x_{n_l}).$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною,

$$\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon)>0:\forall n,m\geq N:\rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon>0\forall n,n_k,n_l\geq N:\rho(x_{n_k},x_{n_l})\leq\rho(x_{n_k},x_n)+\rho(x_n,x_{n_l})<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\qquad\square$$

§7.2 Вкладені кулі і повнота

Теорема 7.2 (принцип вкладених куль)

Для того щоб метричний простір був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому будь-яка послідовність замкнених вкладених одна в одну куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.

Доведення. Необхідність. Нехай (X,ρ) — повний метричний простір, а $S_1^\star(x_1,r_1)\supset S_2^\star(x_2,r_2)\supset\ldots$ — вкладені одна в одну замкнені кулі.

Послідовність їх центрів є фундаментальною, оскільки

$$\rho(x_n,x_m)<r_n \text{ при } m>n, \text{ а } r_n\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Оскільки (X,ρ) — повний метричний простір, існує елемент $x=\lim_{n\to\infty}x_n$, $x\in X$.

Покажемо, що x належить всім кулям $S_n^\star(x_n,r_n)$, $n\in\mathbb{N}$, тобто $x\in\bigcap_{n=1}^\infty S_n^\star(x_n,r_n)$. Дійсно, оскільки $x=\lim_{n\to\infty}x_n$, то

$$\forall\varepsilon>0\exists N>0:\forall n\geq N:\rho(x_n,x)<\varepsilon.$$

Значить, в довільному околі точки x знайдеться нескінченна кількість точок із послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера N. Оскільки кулі вкладені одна в одну, ці точки належать всім попереднім кулям $S_1^\star,S_2^\star,\ldots,S_{N-1}^\star$. Отже, для довільного n точка x є точкою дотику множини $S_n^\star$, тобто належить його замиканню. Оскільки кожна куля є замкненою, точка x належить всім $S_n^\star$. Це означає, що

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n^\star.$$

Достатність. Покажемо, що якщо $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальна послідовність, то вона має границю $x\in X$.

1. Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, то $\forall\varepsilon > 0 \exists n_1 > 0$: $\forall n \geq n_1$ $\rho(x_n, x_{n_1}) < \varepsilon$. Поклавши $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ми можемо вибрати точку x_{n_1} так, що $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ для довільного $n > n_1$. Зробимо точку x_{n_1} центром замкненої кулі радіуса 1: $S_1^{\star}(x_{n_1}, 1)$.
2. Оскільки підпослідовність $\{x_n\}_{n=n_1}^{\infty}$ є фундаментальною (за лемою 7.2), то поклавши $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, можна вибрати точку x_{n_2} х таку, що $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ для довільного $n > n_2 > n_1$. Зробимо точку x_{n_2} центром замкненої кулі радіуса $\frac{1}{2}$: $S_2^{\star}(x_{n_2}, \frac{1}{2})$.

   ...

k. Нехай $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{k-1}}$, де $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ уже вибрані. Тоді, оскільки підпослідовність $\{x_n\}_{n=n_{k-1}}^{\infty}$ є фундаментальною, покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ і виберемо точку x_{n_k} так, щоб виконувалися умови $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ для довільного $n \geq n_k > n_{k-1}$. Як і раніше, будемо вважати точку x_{n_k} центром замкненої кулі радіуса $\frac{1}{2^{k-1}}$: $S_k^{\star}(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$.

   ...

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. Покажемо, що ці кулі вкладаються одна в одну, тобто

$$S_{k+1}^{\star}(x_{n_{k+1}}, \tfrac{1}{2^k}) \subset S_k^{\star}(x_{n_k}, \tfrac{1}{2^{k-1}}).$$

Нехай точка $y \in S_{k+1}^{\star}(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^k})$. Значить, $\rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$. За нерівністю трикутника

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}).$$

Оскільки $n_{k+1} > n_k$, то $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$. Значить,

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Інакше кажучи,

$$y \in S_k^{\star}(x_{n_k}, \tfrac{1}{2^{k-1}})$$

Таким чином, ми побудували послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. За припущенням, в просторі (X, ρ) існує точка x, спільна для всіх таких куль: $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k^{\star}(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$. Крім того, за побудовою, $\rho(x_n, x) = \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$, коли $k \to \infty$. Таким чином, фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ містить підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до деякої точки в просторі (X, ρ). Із леми 7.1 випливає, що і вся послідовність $\{x_n\}$ прямує то тієї ж точки. Таким чином, простір (X, ρ) є повним. □

Зауваження 7.1 — Покажемо, що умову $r_n \to 0$ зняти не можна. Розглянемо метричний простір $(\mathbb{N}, \rho)$, де

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Визначимо послідовність замкнених куль з центрами в точках n і радіусом $1 + \frac{1}{2n}$:

$$\overline{S}(n, 1 + \tfrac{1}{2n}) = \{m : \rho(n, m) \leq 1 + \tfrac{1}{2n}\} = \{n, n+1, \ldots\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ці кулі є вкладеними одна в одну і замкненими, простір є повним, але перетин куль є порожнім (яке б число ми не взяли, знайдеться нескінченна кількість куль, які лежать правіше цієї точки). Отже, необхідні умови в принципі вкладених куль не виконуються.

§7.3 Категорії множин

Означення 7.5. Підмножина M метричного простору (X, ρ) називається **множиною першої категорії**, якщо її можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зліченої кількості ніде не щільних множин.

Означення 7.6. Підмножина M метричного простору (X, ρ) називається **множиною другої категорії**, якщо вона не є множиною першої категорії.

Теорема 7.3 (теорема Бера про категорії)

Нехай (X, ρ)— непорожній повний метричний простір, тоді X є множиною другої категорії.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

і кожна множина E_n, $n = 1, 2, \dots$ є ніде не щільною в X. Нехай S_0 — деяка замкнена куля радіуса 1.

Оскільки множина E_1 є ніде не щільною, існує замкнена куля S_1, радіус якої менше $\frac{1}{2}$, така що

$$S_1 \subset S_0 \text{ і } S_1 \cap E_1 = \varnothing.$$

(Якщо існує куля радіуса більше $\frac{1}{2}$, що задовольняє таким умовам, то ми виберемо в ній кулю, радіуса менше $\frac{1}{2}$.)

Оскільки множина E_2 є ніде не щільною, існує замкнена куля S_2, радіус якої менше $\frac{1}{2^2}$, така що

$$S_2 \subset S_1 \text{ і } S_2 \cap E_2 = \varnothing.$$

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність вкладених одна в одну замкнених куль $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, радіуси яких прямують до нуля. За принципом вкладених куль існує точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \cap X$. Оскільки за побудовою $S_n \cap E_n = \varnothing$, то $x \notin E_n$, $\forall n = 1, 2, \dots$. Значить, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.. Це суперечить припущенню, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. □

§7.4 Стискаючі відображення

Означення 7.7. Відображення $g : (X, \rho) \to (X, \rho)$ називається **стискаючим**, якщо існує таке число $0 < a < 1$, що $\rho(g(x), g(y)) \le a\rho(x, y)$ для довільних $x, y \in X$.

Теорема 7.4

Будь-яке стискаюче відображення є неперервним.

Доведення. Нехай $x_n \to x$, а $g : X \to X$ є стискаючим відображенням. Тоді

$$0 \le \rho(g(x_n), g(x)) \le \alpha\rho(x_n, x) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отже,

$$g(x_n) \to g(x), \text{ коли } x_n \to x.$$

□

Теорема 7.5 (принцип стискаючих відображень Банаха)

Будь-яке стискаюче відображення повного метричного простору (X, ρ) в себе має лише одну нерухому точку, тобто $\exists! x \in X$: $g(x) = x$.

Доведення. Нехай x_0 — деяка точка із X. Визначимо послідовність точок $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ за таким правилом:

$$x_1 = g(x_0), \ldots, x_n = g(x_{n-1}).$$

Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною. Дійсно, якщо $m > n$, то

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \le \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \le \cdots \le$$
$$\alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \le \alpha^n(\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \le$$
$$\alpha^n\rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}) \le \alpha^n\rho(x_0, x_1)\tfrac{1}{1-\alpha}.$$

Таким чином, оскільки $0 < \alpha < 1$,

$$\rho(x_n, x_m) \to 0, n \to \infty, m \to \infty, m > n.$$

Внаслідок повноти простору (X, ρ) в ньому існує границя послідовності $\{x_n\}$. Позначимо її через $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Із теореми 7.3 випливає, що

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, нерухома точка існує.

Доведемо її єдиність. Якщо $g(x) = x$ і $g(y) = y$, то $\rho(x, y) \le a\rho(x, y)$, тобто $\rho(x, y) = 0$. За аксіомою тотожності (невиродженості) це означає, що $x = y$. □

Наслідок 7.1

Умову $a < 1$ не можна замінити на $a \le 1$.

Доведення. Якщо відображення $g : (X, \rho) \to (X, \rho)$ має властивість $\rho(g(x), g(y)) \le \rho(x, y)$, $\forall x, y \in X$, $x \ne y$, то нерухомої точки може не бути. Дійсно, розглянемо простір $([1, \infty), |x - y|)$ і визначимо відображення $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Тоді $\rho(g(x), g(y)) = |x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}| < |x - y|$. Оскільки для жодного $x \in [1, \infty)$ $g(x) = x + \frac{1}{x} \ne x$, нерухомої точки немає. □

§7.5 Література

[1] **Садовничий В. А.** Теория операторов. / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 41–47).

[2] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 66–75).

8 Компактні метричні простори

§8.1 Зв'язки між видами компактності

Означення 8.1. Нехай A — деяка множина в метричному просторі (X, ρ) і ε — деяке додатне число. Множина B із цього простору називається **ε-сіткою для множини A**, якщо $\forall x \in A\ \exists y \in B$: $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Означення 8.2. Множина A називається **цілком обмеженою**, якщо для неї при довільному $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε-сітка.

Теорема 8.1 (Хаусдорф)

Нехай (X, ρ)— метричний простір. Наступні твердження є еквівалентними.

1. (X, ρ) — компактний;
2. (X, ρ) — повний і цілком обмежений;
3. із довільної післідовності точок простору (X, ρ) можна вибрати збіжну підпослідовність (**секвенціальна компактність**);
4. довільна нескінченна підмножина в X має хоча б одну граничну точку (**зліченна компактність**).

Доведення. $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1$.

Покажемо, що $1 \implies 2$. Нехай (X, ρ) — компактний простір. Покажемо його повноту. Нехай $\{x_n\}$ — фундаментальна послідовність в X. Покладемо $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ і $B_n = \overline{A}_n$. Оскільки система $\{B_n\}$ є центрованою системою замкнених підмножин, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ — непорожня множина. Нехай $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N > 0 \exists n > N : \rho(x_0, x_n) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, m > N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, m > N : \rho(x_0, x_m) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, x_m) < 2\varepsilon.$$

З цього випливає, що

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n \in X.$$

Отже, (X, ρ) — повний простір. Припустимо тепер, що простір (X, ρ) не є цілком обмеженим. Інакше кажучи, припустимо, що існує таке число ε_0 таке, що в X немає скінченної ε_0-сітки. Візьмемо довільну точку $x_1 \in X$.

1. $\exists x_2 \in X$: $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$. Інакше точка x_1 утворювала б ε_0-сітку в X.
2. $\exists x_3 \in X$: $\rho(x_1, x_3), \rho(x_2, x_3) > \varepsilon_0$. Інакше точки x_1, x_2 утворювали б ε_0-сітку в X.

   ...

n. $\exists x_{n+1} \in X$: $\rho(x_i, x_{n+1}) > \varepsilon_0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Інакше точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ утворювали б ε_0-сітку в X.

   ...

Таким чином, ми побудували послідовність $\{x_n\}$, яка не є фундаментальною, а, отже, не має границі. З цього випливає, що кожна із множин $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, які утворюють центровану систему, є замкненою. Їх перетин є порожнім. Це протирічить компактності простору (X, ρ) .

Покажемо, що 2 $\implies$ 3. Нехай $\{x_n\}$ — послідовність точок X.

1. Виберемо в X скінченну 1-сітку і побудуємо навколо кожної з точок, що її утворюють, кулю радіуса 1: $S_i(a_i, 1)$, $i = 1, \dots, N_1$. Оскільки X є цілком обмеженою,

$$\bigcup_{i=1}^{N_1} S_i(a_i, 1) = X.$$

   З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо, S_1, містить нескінченну підпослідовність $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ послідовності $\{x_n\}$.

2. Виберемо в X скінченну $\frac{1}{2}$-сітку і побудуємо навколо кожної з цих точок, що її утворюють кулю радіуса $\frac{1}{2}$: $S_i(b_i, \frac{1}{2})$, $i = 1, 2, \dots, N_2$. Оскільки множина X є цілком обмеженою,

$$\bigcup_{i=1}^{N_2} S_i(b_i, \tfrac{1}{2}) = X.$$

   З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо, S_2, містить нескінченну підпослідовність $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ послідовності $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$.

   ...

m. Виберемо в X скінченну $\frac{1}{m}$-сітку і побудуємо навколо кожної з цих точок, що її утворюють кулю радіуса $\frac{1}{m}$: $S_i(c_i, \frac{1}{m})$, $i = 1, 2, \dots, N_m$. Оскільки множина X є цілком обмеженою,

$$\bigcup_{i=1}^{N_m} S_i(c_i, \tfrac{1}{m}) = X.$$

   З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо, S_m, містить нескінченну підпослідовність $\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$ послідовності $\{x_n^{(m-1)}\}_{n=1}^{\infty}$.

   ...

Продовжимо цей процес до нескінченності. Розглянемо діагональну послідовність $\{x_n^(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Вона є підпослідовністю послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Крім того, при $m \geq n_0$: $x_m^{(m)} \in \{x_n^{(n_0)}\} \subset S_{n_0}$. Це означає, що $\{x_n^{(n)}\}$ є фундаментальною і внаслідок повноти (X, ρ) має границю.

Твердження 3 $\implies$ 4 є тривіальним, оскільки із довільної нескінченної множини можна виділити зліченну множину $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка внаслідок секвенціальної компактності містить збіжну підпослідовність: $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to x_0 \in X$.

Покажемо тепер, що 4 $\implies$ 1. Для цього спочатку доведемо, що множина X є цілком обмеженою, тобто в ній для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує ε-сітка. Якщо б це було не так, то застосувавши той же прийом, що і на етапі 1 $\implies$ 2, ми побудували б послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка не має граничних точок, оскільки вона не є фундаментальною. Для кожного n побудуємо скінченну $\frac{1}{n}$-сітку і розглянемо об'єднання всіх таких сіток. Воно є щільним і не більше ніж зліченним. Таким чином, простір (X, ρ) є сепарабельним, отже, має зліченну базу.

Для того щоб довести компактність простору, що має зліченну базу, достатньо перевірити, що із будь-якого зліченного (а не довільного нескінченного) відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття. Припустимо, що $\{U_\alpha\}$ — довільне покриття простору (X, ρ) , а $\{V_n\}$ — його зліченна база. Кожна точка $x \in X$ міститься в деякому U_α. За означенням бази знайдеться деяке $V_i \in \{V_n\}$ таке, що $x \in V_i \subset U_\alpha$. Якщо кожній точці $x \in X$ поставити у відповідність окіл $V_i \in \{V_n\}$, то сукупність цих околів утворить зліченне покриття множини X.

Залишилося довести, що із довільного зліченного відкритого покриття множини X можна вибрати скінченне підпокриття. Для цього достатньо довести еквівалентне твердження для замкнених підмножин, що утворюють зліченну центровану систему.

Нехай $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — центрована система замкнених підмножин X. Покажемо, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing.$$

Нехай $\Phi_n = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$. Ясно, що множини Φ_n є замкненими і непорожніми, оскільки система $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ є центрованою, і

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \dots, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Можливі два випадки.

1. Починаючи з деякого номера

$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \dots = \Phi_{n_0+k} = \dots$$

Тоді

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \varnothing.$$

2. Серед Φ_n є нескінченно багато попарно різних. Достатньо розглянути випадок, коли всі вони відрізняються одна від одної. Нехай $x_n \in \Phi_n \setminus \Phi_{n+1}$. Тоді послідовність $\{x_n\}$ є нескінченною множиною різних точок із X і, внаслідок уже доведеного факту (зліченна компактність), має хоча б одну граничну точку x_0. Оскільки Φ_n містить всі точки $x_n, x_{n+1}, \dots$ то x_0 — гранична точка для кожної множини Φ_n і внаслідок замкненості Φ_n

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_0 \in \Phi_n.$$

Отже,

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

тобто $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ є непорожнім. □

§8.2 Література

[1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 49–51).

9 Лінійні простори

Лінійна система є алгебраїчною структурою, яка абстрагує властивості, пов'язані із додаванням та множенням векторів евклідова простору на скаляр.

§9.1 Лінійні простори і функціонали

Означення 9.1. **Дійсним лінійним (векторним) простором** називається упорядкована трійка $(E, +, \cdot)$, що складається з множини E, елементи якого називаються **векторами**, операції додавання і операції множення на дійсні числа, якщо для кожних двох її елементів x та y визначено їх суму $x + y \in E$, і для будь-якого x та дійсного числа λ визначено добуток $\lambda x \in E$, які задовольняють аксіоми лінійного простору:

1. $\exists \vec{0} \in E$, що $x + \vec{0} = x$ для довільного $x \in E$;
2. $\forall x \in E \; \exists (-x) \in E$: $x + (-x) = 0$;
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоціативність додавання);
4. $x + y = y + x$ (комутативність додавання);
5. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивність);
6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивність);
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (асоціативність множення);
8. $1 \cdot x = x$.

Зауваження 9.1 — Властивості 1–4 означають, що лінійний простір є **абелевою (комутативною) групою**.

Приклад 9.1

Сукупність дійсних чисел $\mathbb{R}$ із звичайними арифметичними операціями додавання та множення є лінійним простором.

Приклад 9.2

Евклідів простір $\mathbb{R}^n$ — сукупність векторів $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що складаються с дійсних чисел, є лінійним.

Означення 9.2. Лінійні простори E і F називаються **ізоморфними**, якщо між їхніми елементами можна установити взаємно-однозначну відповідність, яка узгоджена із операціями в цих просторах, тобто $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, $x, y \in E$, $x', y' \in F$: $x + y \leftrightarrow x' + y'$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$.

Зауваження 9.2 — Ізоморфні простори можна вважати різними реалізаціями одного простору.

Приклад 9.3

Простір $\mathbb{R}^n$ і простір поліномів, степінь яких не перевищує $n-1$ є ізоморфними.

Означення 9.3. Числова функція f, визначена на лінійному просторі E, називається **функціоналом**.

Означення 9.4. Функціонал f називається **адитивним**, якщо

$$\forall x, y \in E : f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Означення 9.5. Функціонал називається **однорідним**, якщо

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in E : f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Означення 9.6. Адитивний однорідний функціонал називається **лінійним**.

Означення 9.7. Функціонал називається **неперервним у точці x_0**, якщо з того що послідовність x_n прямує до x_0 випливає, що послідовність $f(x_n)$ прямує до $f(x_0)$.

Означення 9.8. Сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на лінійному топологічному просторі E, називається **спряженим простором**, і позначається як $E^\star$.

Приклад 9.4

$I(f) = \int_a^b f(t)dt$ є лінійним функціоналом в $C[a,b]$.

Означення 9.9. Нехай E — лінійний простір. Визначений на просторі E функціонал $p(x)$ називається **опуклим**, якщо

$$\forall x, y \in E, 0 \leq a \leq 1 : p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y).$$

Означення 9.10. Функціонал $p(x)$ називається **додатно-однорідним**, якщо

$$\forall x \in E, \lambda > 0 : p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

Приклад 9.5

Будь-який лінійний функціонал є додатно-однорідним.

Означення 9.11. Непорожня підмножина L' лінійного простору L називається **лінійним підпростором**, якщо вона сама утворює лінійний простір відносно операцій додавання і множення на число, уведених в просторі L.

§9.2 Продовження функціоналів

Означення 9.12. Нехай E — дійсний лінійний простір, а E_0 — його підпростір. До того ж на підпросторі E_0 заданий деякий лінійний функціонал f_0. Лінійний функціонал f, визначений на всьому просторі E, називається **продовженням** функціонала f_0, якщо

$$\forall x \in E_0 : f_0(x) = f(x).$$

Теорема 9.1 (Хана—Банаха)

Нехай $p(x)$ —додатно-однорідний і опуклий функціонал, визначений на дійсному лінійному просторі L, а L_0 — лінійний підпростір в L. Якщо f_0 — лінійний функціонал, заданий на L_0 і підпорядкований на цьому підпросторі функціоналу p, тобто

$$f_0(x) \leq p(x), \forall x \in L_0 \tag{9.1}$$

то функціонал f_0 може бути продовжений до лінійного функціонала f, заданого на просторі L і підпорядкованого функціоналу p на всьому просторі L:

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in L. \tag{9.2}$$

Доведення. Покажемо, що якщо $L_0 \neq L$, то f_0 можна продовжити на $L' \supset L_0$, зберігаючи умову підпорядкованості. Нехай $z \in L' \setminus L_0$, а L'— елементарне розширення L_0:

$$L' = \{x' : x' = \lambda z + x, x \in L_0, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{L_0; z\}.$$

Якщо f' — шукане продовження f_0 на L', то

$$f'(\lambda z + x) = \lambda f'(z) + f(x) = \lambda f'(z) + f_0(x).$$

Покладемо $f'(z) = c$. Тоді $f'(\lambda z + x) = \lambda c + f_0(x)$. Виберемо c так, щоб виконувалась умова підпорядкованості:

$$\forall x \in L_0 : f_0(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda z). \tag{9.3}$$

Якщо $\lambda > 0$, поділимо (9.3) на λ і отримаємо еквівалентну умову

$$\forall x \in L_0 : f_0(\tfrac{x}{\lambda}) + c \leq p(\tfrac{x}{\lambda} + z) \implies c \leq p(\tfrac{x}{\lambda} + z) - f_0(\tfrac{x}{\lambda}). \tag{9.4}$$

Якщо $\lambda < 0$, поділимо (9.3) на $-\lambda$. Тоді

$$\forall x \in L_0 : -f_0(\tfrac{x}{\lambda}) - c \leq p(-\tfrac{x}{\lambda} - z) \implies c \geq -p(-\tfrac{x}{\lambda} - z) - f_0(\tfrac{x}{\lambda}). \tag{9.5}$$

Покажемо, що число c, що задовольняє умови (9.4) і (9.5) існує. Нехай y' і $y'' \in L_0$, а $z \in L' \setminus L_0$. Тоді

$$f_0(y'' - y') = f_0(y'') - f_0(y') \leq p(y'' - y') = p(y'' + z - y - z) \leq p(y'' + z) + p(-y' - z).$$

З цього випливає, що

$$-f_0(y'') + p(y'' + z) \geq -f_0(y') - p(-y' - z).$$

Покладемо

$$c'' = \inf_{y''}(-f_0(y'') + p(y'' + z)), \quad c' = \sup_{y'}(-f_0(y') + p(-y' - z)).$$

Оскільки y' і y'' — довільні, то з умови підпорядкованості випливає, що $c'' \geq c'$. Отже, $\exists c : c'' \geq c \geq c'$.

Визначимо функціонал f' на L':

$$f'(\lambda z + x) = \lambda c + f_0(x).$$

За побудовою цей функціонал задовольняє умову (9.1). Отже, якщо f_0 задано на $L_0 \subset L$ і задовольняє на L_0 умову (9.1), то його можна продовжити на $L' \supset L$ із збереженням цієї умови (9.2).

Якщо в просторі L існує злічена система елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ така, що будь-який елемент простору L можна подати як (скінченну) лінійну комбінацію елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, то продовження функціонала f_0 на L можна побудувати за індукцією, розглядаючи зростаючий ланцюжок підпросторів

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\}, \quad L^{(2)} = \{L^{(1)}; x_2\}, \quad \ldots, \quad L^{(n)} = \{L^{(n-1)}; x_n\}, \quad \ldots,$$

де $L^{(k)} = \{L^{(k-1)}; x_k\}$ — мінімальний лінійний підпростір, що містить $L^{(k-1)}$ і x_k. Тоді кожний елемент $x \in L$ увійде в деякий $L^{(k)}$ і функціонал f_0 буде продовжений на весь простір L. $\square$

В загальному випадку використовується схема, яка базується на лемі Цорна. Введемо у розгляд потрібні означення.

§9.3 Ланцюги і мажоранти

Означення 9.13. Говорять, що на множині X задано **відношення часткового порядку** $\leq$, якщо виділено деяку сукупність пар $P = \{(x, y) \in X \times X\}$, для яких

1. $x \leq x$;
2. $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$.

При цьому не вимагається, щоб усі елементи були порівняними.

Приклад 9.6

Площина $\mathbb{R}^2$, на якій між точками $x = (x_1, x_2)$ і $y = (y_1, y_2)$ встановлено відношення $x \leq y$, якщо $x_1 \leq y_1$ і $x_2 \leq y_2$.

Означення 9.14. Якщо всі елементи X є попарно порівняними, то множина X називається **лінійно упорядкованою**.

Означення 9.15. Лінійно упорядкована підмножина частково упорядкованої множини називається **ланцюгом**.

Приклад 9.7

Пряма $\mathbb{R}$ із покоординатним порядком, що розглядається як підмножина площини $\mathbb{R}^2$, є ланцюгом.

Означення 9.16. Якщо X — частково упорядкована множина і $M \subset X$, то елемент $m^\star \in X$ називається **мажорантою** множини M, якщо

$$m \leq m^\star, \forall m \in M.$$

Означення 9.17. Якщо $m_\star$ — така мажоранта $M \subset X$, що $m_\star \leq m'$ для будь-якої іншої мажоранти m' множини M, то $m_\star$ називається **точною верхньою гранню** множини M.

Означення 9.18. Елемент $m \in X$ називається **максимальним**, якщо немає такого елемента $m' \in X$, що $m \leq m'$.

Лема 9.1 (Цорна)

Якщо будь-який ланцюг в частково упорядкованій множині X має мажоранту, то в X існує максимальний елемент.

Доведення. (теореми Хана—Банаха) Позначимо через $\mathfrak{M}$ сукупність усіх можливих продовжень функціоналу f_0 на більш широкі підпростори з умовою підпорядкованості p. Кожне таке продовження f' має лінійну область визначення L', на якій $f' \leq p$ і $f'|_{X_0} = f$. Будемо вважати продовження f' підпорядкованим продовженню f'', якщо для відповідних областей визначення маємо $L' \subset L''$ і $f''|_{L'} = f'$. Таким чином, маємо частковий порядок. Умова щодо ланцюгів виконана: якщо дано ланцюг продовжень f_α з областями визначення L_α, то мажоранта $f \in \mathfrak{M}$ будується так. Розглянемо множину $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$, яка є лінійним простором, оскільки $\forall x, y \in L\ \exists L_\alpha, L_\beta$, такі що $x \in L_\alpha$ і $y \in L_\beta$. Але за означенням ланцюга або $L_\alpha \subset L_\beta$, або $L_\beta \subset L_\alpha$, тобто $x + y \in L$. Ясно, що $\lambda x \in L$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. З тих же причин функціонал $f(x) = f_\alpha(x_\alpha)$ для $x = x_\alpha$ коректно заданий на L, тобто $f_\alpha(x_\alpha) = f_\beta(x_\beta)$, якщо $x_\alpha = x_\beta$. До того ж $f \leq p$ на L. Отже, $f \in \mathfrak{M}$ — мажоранта для всіх f_α. За лемою Цорна в $\mathfrak{M}$ є максимальний елемент f. Отже, область визначення функціонала f збігається із X, інакше функціонал f можна було б лінійно продовжити на більш широкий простір із умовою підпорядкованості p, що суперечить максимальності p. $\square$

§9.4 Література

[1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 91–96, 106–109).

[2] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 119–138).

[3] **Богачев В. И.** Действительный и функциональный анализ. Университетский курс / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов — М.: Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009 (стр. 14–16, 258–264).

10 Нормовані простори

§10.1 Норми векторів

Означення 10.1. Нехай E — лінійний простір над полем k. Відображення $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}^+$ називається **нормою** в просторі E, якщо $\forall x, y \in E$, $\lambda \in k$) виконуються аксіоми норми:

1. $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ (віддільність);
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однорідність);
3. $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\|$ (нерівність трикутника).

Означення 10.2. Лінійний простір із введеною на ньому нормою називається **нормованим**.

> Зауваження 10.1 — Ясно, що нормований простір є метричним, оскільки в ньому можна ввести метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$. З цього випливає, що норма елемента в нормованому просторі є відстанню між ним і нульовим елементом: $\|x\| = \rho(x, \vec{0})$.

Приклад 10.1

Простір

$$\ell = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\}$$

є нормованим з нормою $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

Означення 10.3. Послідовність $\{x_n\}$ елементів нормованого простору E називається **збіжною за нормою**, або **сильно збіжною**, або просто **збіжною**, до елемента $x_0 \in E$, якщо $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо $\{x_n\}$ збігається до елемента $x_0 \in E$, то $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Означення 10.4. Повний нормований простір називається **банаховим**.

§10.2 Норми функціоналів

Означення 10.5. Функціонал називається **обмеженим**, якщо

$$\exists C > 0 : |f(x)| \leq C\|x\|_E. \tag{10.1}$$

Означення 10.6. Найменша серед усіх додатних констант, що задовольняють нерівність (10.1) називається **нормою** функціонала:

$$\|f\| = \sup_{x \neq \vec{0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Означення 10.7. Нехай E_1 і E_2 — нормовані простори. На множині $D \subset E_1$ задано **оператор**, або відображення A, із значеннями в E_2, якщо кожному елементу $x \in D$ поставлено у відповідність елемент $y = Ax \in E_2$.

Означення 10.8. Оператор A називається **лінійним**, якщо

1. $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D$ для довільних $x_1, x_2 \in D$, де α, β — дійсні числа;
2. $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$ для довільних $x_1, x_2 \in D$, де α, β — дійсні числа.

Означення 10.9. Якщо A — лінійний оператор з E_1 в E_2 такий, що $D = E_1$, та з умови $x_n \to x_0$, $x_n, x_0 \in E_1$ випливає, що $A(x_n) \to A(x_0)$ в E_2, то A називається **лінійним неперервним оператором**.

Означення 10.10. Оператор A називається **обмеженим** в просторі E, якщо існує така константа C, що

$$\|Ax\| \le C\|x\|. \tag{10.2}$$

Означення 10.11. Найменша константа C, яка задовольняє нерівність (10.2), називається **нормою** оператора A.

Теорема 10.1

Лінійний оператор, заданий на лінійному нормованому просторі, є неперервним тоді і тільки тоді, коли він обмежений.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що A — неперервний, лінійний, але не обмежений оператор. Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in E : \|Ax_n\|_F > n\|x_n\|_E.$$

Покладемо

$$\xi_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

За побудовою

$$\xi_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Оцінимо норму елемента $\|A\xi_n\|_F$:

$$\|A\xi_n\|_F = \left\| A\left(\frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| = \frac{1}{n\|x_n\|_E}\|Ax_n\|_F > \frac{n\|x_n\|_E}{n\|x_n\|_E} = 1.$$

З цього випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \|A\xi_n\|_F \ne 0 \implies \lim_{n\to\infty} A\xi_n \ne 0.$$

Тобто A — лінійний оператор, $A\vec{0} = 0$ і у той же час $\xi_n \to 0$, але $A\xi_n \not\to 0$, тобто A — не неперервний. Отримане протиріччя доводить, що оператор A є обмеженим.

Достатність. A — обмежений оператор, а тому

$$\exists C > 0 : \forall x \in E : \|Ax\|_F \le C\|x\|_E.$$

Нехай

$$x_n \to x \implies \|x_n - x\|_E \to 0 \implies$$
$$\|Ax_n - Ax\|_F = \|A(x_n - x)\|_F \le C\|x - x_n\|_E \to 0 \implies$$
$$\|Ax_n - Ax\|_F \to 0 \implies Ax_n \to Ax, \quad n \to \infty.$$

Це означає, що оператор A — неперервний. $\square$

§10.3 Простір операторів

Означення 10.12. Лінійні оператори A, що відображають нормований простір E в нормований простір F, утворюють **нормований простір операторів** $\mathcal{L}(E,F)$ з нормою

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_F.$$

Теорема 10.2

Нехай A — лінійний обмежений оператор, що діє із нормованого простору E в банахів простір F. Якщо область визначення оператора $D(A)$ щільна в E, то існує такий лінійний обмежений оператор $\overline{A} : E \to F$ такий що, $\overline{A}x = Ax$, $\forall x \in D(A)$ і $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

Доведення. Нехай $x \in E \setminus D(A)$. Оскільки $\overline{D}(A) = E$, то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A) : \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Із нерівності

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E.$$

і обмеженості оператора A випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N : \|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon.$$

Це означає, що послідовність $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Оскільки простір F є повним, ця послідовність є збіжною:

$$\exists \overline{A}x = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Покажемо, що цей елемент визначений коректно, тобто не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Припустимо, що існує ще одна послідовність $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, яка збігається до елемента x:

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = x.$$

Нехай

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \quad y' = \lim_{n\to\infty} Ax'_n.$$

З того що

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F \leq \lim_{n\to\infty} \|A\| \cdot \|x_n - x'_n\|_E = 0,$$

випливає

$$\|y - y'\|_F = \lim_{n\to\infty} \|y - y'\|_F \leq \lim_{n\to\infty} \|y - Ax_n\|_F + \lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F + \lim_{n\to\infty} \|Ax'_n - y'\|_F = 0.$$

Отже, $y = y'$.

Лінійність оператора $\overline{A}$ випливає із лінійності оператора A і властивостей границь.

Оскільки оператор $\overline{A}$ збігається з оператором A в області визначення $D(A)$, але має більш широку область визначення,

$$\|A\| \le \|\overline{A}\|.$$

З іншого боку,

$$\|Ax_n\|_F \le \|A\| \cdot \|x_n\|_E, \quad \forall x_n \in E.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\|_F = \left\|A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right\| = \|\overline{A}x\|_F \le \|A\| \cdot \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\| = \|A\| \cdot \|x\|_E, \quad x \in E.$$

Це означає, що

$$\|\overline{A}\| \le \|A\|.$$

Порівнюючи оцінки $\|\overline{A}\|$, отримуємо

$$\|\overline{A}\| = \|A\|. \qquad \square$$

Теорема 10.3 (Хана—Банаха в нормованому просторі)
Нехай E — дійсний нормований простір, L — його підпростір, f_0 — обмежений лінійний функціонал на L. Цей лінійний функціонал можна продовжити до деякого лінійного функціонала f, заданого на всьому просторі E без збільшення норми:

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

Доведення. Нехай f_0 — обмежений лінійний функціонал на L. Значить,

$$|f_0(x)| \le \|f_0\| \cdot \|x\|, \forall x \in L.$$

За теоремою Хана—Банаха в лінійному просторі

$$\exists f \text{ — продовження } f_0 \text{ на } E : |f(x)| \le \|f_0\| \cdot \|x\|, \forall x \in E.$$

З цього випливає, що

$$\|f\| \le \|f_0\|.$$

З іншого боку, $L \subset E$, а тому

$$\|f\| = \sup_{x\ne\vec{0}, x\in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \sup_{x\ne\vec{0}, x\in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\ne\vec{0}, x\in L} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \|f_0\|.$$

Отже, $\|f\| = \|f_0\|$. $\square$

§10.4 Література

[1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 96–102).