7 Повні метричні простори

§7.1 Повнота, ізометрія і поповнення

Означення 7.1. Метричний простір називається **повним**, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність має границю.

Приклад 7.1

$\left(\mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}\right)$.

Приклад 7.2

$\left(C[a,b], \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|\right)$.

Означення 7.2. Бієктивне відображення φ одного метричного простору (E_1, ρ_1) на інший (E_2, ρ_2) називається **ізометрією**, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in E_1 : \rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

Означення 7.3. Метричні простори, між якими існує ізометрія, називаються **ізометричними**.

Означення 7.4. Повний метричний простір $(\tilde{E}, \tilde{\rho})$ називається **поповненням** метричного простору (E, ρ), якщо

1. $E \subset \tilde{E}$;
2. $\overline{E} = \tilde{E}$.

Теорема 7.1 (про поповнення метричного простору, Хаусдорф)

Будь-який метричний простір має поповнення, єдине з точністю до ізометрії, що залишає точки простору нерухомими.

Лема 7.1

Якщо фундаментальна послідовність містить збіжну підпослідовність, то сама послідовність збігається до тієї ж границі.

Доведення. Припустимо, що $\lim_{n_k \to \infty} \rho(x_{n_k}, x_0) = 0$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N_1 : \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon.$$

За нерівністю трикутника

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x).$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною,

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \geq N_2 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\forall\varepsilon > 0 \forall n, n_k \geq \max(N_1, N_2) : \rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \qquad \square$$

Лема 7.2

Будь-яка підпослідовність фундаментальної послідовності є фундаментальною.

Доведення. За нерівністю трикутника

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, x_n) + \rho(x_n, x_{n_l}).$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною,

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon > 0 \forall n, n_k, n_l \geq N : \rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, x_n) + \rho(x_n, x_{n_l}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \qquad \square$$

§7.2 Вкладені кулі і повнота

Теорема 7.2 (принцип вкладених куль)

Для того щоб метричний простір був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому будь-яка послідовність замкнених вкладених одна в одну куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.

Доведення. Необхідність. Нехай (X, ρ) — повний метричний простір, а $S_1^\star(x_1, r_1) \supset S_2^\star(x_2, r_2) \supset \dots$ — вкладені одна в одну замкнені кулі.

Послідовність їх центрів є фундаментальною, оскільки

$$\rho(x_n, x_m) < r_n \text{ при } m > n, \text{ а } r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Оскільки (X, ρ) — повний метричний простір, існує елемент $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x \in X$.

Покажемо, що x належить всім кулям $S_n^\star(x_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, тобто $x \in \bigcap_{n=1}^\infty S_n^\star(x_n, r_n)$. Дійсно, оскільки $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, то

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n \geq N : \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Значить, в довільному околі точки x знайдеться нескінченна кількість точок із послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера N. Оскільки кулі вкладені одна в одну, ці точки належать всім попереднім кулям $S_1^\star, S_2^\star, \dots, S_{N-1}^\star$. Отже, для довільного n точка x є точкою дотику множини $S_n^\star$, тобто належить його замиканню. Оскільки кожна куля є замкненою, точка x належить всім $S_n^\star$. Це означає, що

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^\star.$$

Достатність. Покажемо, що якщо $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальна послідовність, то вона має границю $x \in X$.

1. Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, то $\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 > 0$: $\forall n \geq n_1$ $\rho(x_n, x_{n_1}) < \varepsilon$. Поклавши $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ми можемо вибрати точку x_{n_1} так, що $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ для довільного $n > n_1$. Зробимо точку x_{n_1} центром замкненої кулі радіуса 1: $S_1^\star(x_{n_1}, 1)$.
2. Оскільки підпослідовність $\{x_n\}_{n=n_1}^{\infty}$ є фундаментальною (за лемою 7.2), то поклавши $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, можна вибрати точку x_{n_2} x таку, що $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ для довільного $n > n_2 > n_1$. Зробимо точку x_{n_2} центром замкненої кулі радіуса $\frac{1}{2}$: $S_2^\star(x_{n_2}, \frac{1}{2})$.

...

k. Нехай $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}$, де $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ уже вибрані. Тоді, оскільки підпослідовність $\{x_n\}_{n=n_{k-1}}^{\infty}$ є фундаментальною, покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ і виберемо точку x_{n_k} так, щоб виконувалися умови $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ для довільного $n \geq n_k > n_{k-1}$. Як і раніше, будемо вважати точку x_{n_k} центром замкненої кулі радіуса $\frac{1}{2^{k-1}}$: $S_k^\star(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$.

...

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. Покажемо, що ці кулі вкладаються одна в одну, тобто

$$S_{k+1}^\star(x_{n_{k+1}}, \tfrac{1}{2^k}) \subset S_k^\star(x_{n_k}, \tfrac{1}{2^{k-1}}).$$

Нехай точка $y \in S_{k+1}^\star(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^k})$. Значить, $\rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$. За нерівністю трикутника

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}).$$

Оскільки $n_{k+1} > n_k$, то $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$. Значить,

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Інакше кажучи,

$$y \in S_k^\star(x_{n_k}, \tfrac{1}{2^{k-1}})$$

Таким чином, ми побудували послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. За припущенням, в просторі (X, ρ) існує точка x, спільна для всіх таких куль: $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k^\star(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$. Крім того, за побудовою, $\rho(x_n, x) = \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$, коли $k \to \infty$. Таким чином, фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ містить підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до деякої точки в просторі (X, ρ). Із леми 7.1 випливає, що і вся послідовність $\{x_n\}$ прямує то тієї ж точки. Таким чином, простір (X, ρ) є повним. □

Зауваження 7.1 — Покажемо, що умову $r_n \to 0$ зняти не можна. Розглянемо метричний простір $(\mathbb{N}, \rho)$, де

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Визначимо послідовність замкнених куль з центрами в точках n і радіусом $1 + \frac{1}{2n}$:

$$\overline{S}(n, 1 + \tfrac{1}{2n}) = \{m : \rho(n, m) \leq 1 + \tfrac{1}{2n}\} = \{n, n+1, \dots\}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Ці кулі є вкладеними одна в одну і замкненими, простір є повним, але перетин куль є порожнім (яке б число ми не взяли, знайдеться нескінченна кількість куль, які лежать правіше цієї точки). Отже, необхідні умови в принципі вкладених куль не виконуються.

§7.3 Категорії множин

Означення 7.5. Підмножина M метричного простору (X, ρ) називається **множиною першої категорії**, якщо її можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зліченої кількості ніде не щільних множин.

Означення 7.6. Підмножина M метричного простору (X, ρ) називається **множиною другої категорії**, якщо вона не є множиною першої категорії.

Теорема 7.3 (теорема Бера про категорії)

Нехай (X, ρ)— непорожній повний метричний простір, тоді X є множиною другої категорії.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

і кожна множина E_n, $n = 1, 2, \ldots$ є ніде не щільною в X. Нехай S_0 — деяка замкнена куля радіуса 1.

Оскільки множина E_1 є ніде не щільною, існує замкнена куля S_1, радіус якої менше $\frac{1}{2}$, така що

$$S_1 \subset S_0 \text{ і } S_1 \cap E_1 = \varnothing.$$

(Якщо існує куля радіуса більше $\frac{1}{2}$, що задовольняє таким умовам, то ми виберемо в ній кулю, радіуса менше $\frac{1}{2}$.)

Оскільки множина E_2 є ніде не щільною, існує замкнена куля S_2, радіус якої менше $\frac{1}{2^2}$, така що

$$S_2 \subset S_1 \text{ і } S_2 \cap E_2 = \varnothing.$$

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність вкладених одна в одну замкнених куль $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, радіуси яких прямують до нуля. За принципом вкладених куль існує точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \cap X$. Оскільки за побудовою $S_n \cap E_n = \varnothing$, то $x \notin E_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$. Значить, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.. Це суперечить припущенню, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. □

§7.4 Стискаючі відображення

Означення 7.7. Відображення $g : (X, \rho) \to (X, \rho)$ називається **стискаючим**, якщо існує таке число $0 < a < 1$, що $\rho(g(x), g(y)) \leq a\rho(x, y)$ для довільних $x, y \in X$.

Теорема 7.4

Будь-яке стискаюче відображення є неперервним.

Доведення. Нехай $x_n \to x$, а $g : X \to X$ є стискаючим відображенням. Тоді

$$0 \leq \rho(g(x_n), g(x)) \leq \alpha\rho(x_n, x) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отже,

$$g(x_n) \to g(x), \text{ коли } x_n \to x.$$ □

Теорема 7.5 (принцип стискаючих відображень Банаха)
Будь-яке стискаюче відображення повного метричного простору (X, ρ) в себе має лише одну нерухому точку, тобто $\exists! x \in X$: $g(x) = x$.

Доведення. Нехай x_0 — деяка точка із X. Визначимо послідовність точок $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ за таким правилом:

$$x_1 = g(x_0), \dots, x_n = g(x_{n-1}).$$

Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною. Дійсно, якщо $m > n$, то

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \leq \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq \dots \leq$$
$$\alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n(\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \leq$$
$$\alpha^n\rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) \leq \alpha^n\rho(x_0, x_1)\tfrac{1}{1-\alpha}.$$

Таким чином, оскільки $0 < \alpha < 1$,

$$\rho(x_n, x_m) \to 0, n \to \infty, m \to \infty, m > n.$$

Внаслідок повноти простору (X, ρ) в ньому існує границя послідовності $\{x_n\}$. Позначимо її через $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Із теореми 7.3 випливає, що

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, нерухома точка існує.

Доведемо її єдиність. Якщо $g(x) = x$ і $g(y) = y$, то $\rho(x, y) \leq a\rho(x, y)$, тобто $\rho(x, y) = 0$. За аксіомою тотожності (невиродженості) це означає, що $x = y$. □

Наслідок 7.1
Умову $a < 1$ не можна замінити на $a \leq 1$.

Доведення. Якщо відображення $g : (X, \rho) \to (X, \rho)$ має властивість $\rho(g(x), g(y)) \leq \rho(x, y)$, $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, то нерухомої точки може не бути. Дійсно, розглянемо простір $([1, \infty), |x - y|)$ і визначимо відображення $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Тоді $\rho(g(x), g(y)) = |x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}| < |x - y|$. Оскільки для жодного $x \in [1, \infty)$ $g(x) = x + \frac{1}{x} \neq x$, нерухомої точки немає. □

§7.5 Література

[1] **Садовничий В. А.** Теория операторов. / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 41–47).

[2] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 66–75).