5 Компактність в топологічних просторах

Велику роль в топології відіграє клас компактних просторів, які мають дуже важливі властивості. Введемо основні поняття.

§5.1 Покриття і підпокриття

Означення 5.1. Система множин $S = \{A_i \subset X, i \in I\}$ називається **покриттям** простору X, якщо $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Означення 5.2. Покриття S називається **відкритим** (**замкненим**), якщо кожна із множин A_i є відкритою (замкненою).

Означення 5.3. Підсистема P покриття S простору X називається **підпокриттям** покриття S, якщо сама P утворює покриття X.

Теорема 5.1 (Ліндельоф)
Якщо простір X має злічену базу, то із його довільного відкритого покриття можна виділити не більш ніж злічене підпокриття.

Доведення. Нехай $\beta = \{U_n\}$ — деяка злічена база простору X, а $S = \{G_i, i \in I\}$ — довільне відкрите покриття простору X. Для кожного $x \in X$ позначимо через $G_n(x)$ один з елементів покриття S, що містить точку x, а через $U_n(x)$ — один з елементів бази β, що містить точку x і цілком міститься у відкритій множині G_n (теорема 2.3).

$$x \in U_n(x) \subset G_n(x).$$

Відібрані нами множини $U_n(x) \in \beta$ утворюють злічену множину. Крім того, кожна точка x простору X міститься в деякій множині $U_n(x)$, отже

$$\bigcup_{x \in X} U_n(x) = X.$$

Вибираючи для кожного $U_n(x)$ відкриту множину $G_n(x)$, ми отримаємо не більш ніж злічену систему, яка є підпокриттям покриття S. □

Означення 5.4. Топологічний простір (X, τ), в якому із довільного відкритого покриття можна виділити не більш ніж злічене підпокриття, називається **ліндельофовим**, або **фінально компактним**.

§5.2 Компактні простори

Звузимо клас ліндельофових просторів і введемо наступне поняття.

Означення 5.5. Топологічний простір (X, τ) називається **компактним (бікомпактним)**, якщо будь-яке його відкрите покриття містить скінченне підпокриття (умова Бореля—Лебега).

Приклад 5.1

Простір з тривіальною топологією є компактним.

Приклад 5.2

Простір з дискретною топологією є компактним тоді й лише тоді, коли він складається зі скінченної кількості точок.

Приклад 5.3

Простір Зариського є компактним.

Приклад 5.4

Простір $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ не є компактним.

Теорема 5.2 (перший критерій компактності)

Для компактності топологічного простору (X, τ) необхідно і достатньо, щоб будь-яка сукупність його замкнених підмножин з порожнім перетином містила скінченну підмножину таких множин із порожнім перетином.

$$(X, \tau) \text{ — компактний } \iff$$

$$\forall \left\{ \overline{F}_\alpha, \alpha \in A : \bigcap_{\alpha \in A} \overline{F}_\alpha = \varnothing \right\} \ \exists \left\{ \overline{F}_{\alpha_1}, \overline{F}_{\alpha_2}, \dots, \overline{F}_{\alpha_n} \right\} : \ \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \varnothing.$$

Доведення. Необхідність. Нехай (X, τ) — компактний, а $\{\overline{F}_\alpha, \alpha \in A\}$ — довільна сукупність замкнених множин, що задовольняє умові $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{F}_\alpha = \varnothing$. Розглянемо множини $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$. За правилами де Моргана (принцип двоїстості) сукупність множин $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ задовольняє умові $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$, тобто утворює покриття простору (X, τ). Оскільки, за припущенням, (X, τ) — компактний простір, то існує скінченна підмножина множин $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}\}$, які також утворюють покриття: $\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X$. Отже, за правилами де Моргана

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus \overline{F}_{\alpha_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X \implies \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \varnothing.$$

Достатність. Нехай $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — довільне відкрите покриття простору (X, τ). Очевидно, що множини $\overline{F}_\alpha = X \setminus U_\alpha$, $\alpha \in A$ є замкненими, а їх сукупність має порожній перетин: $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{F}_\alpha = \varnothing$. За умовою, ця сукупність містить скінченну підмножину множин $\{\overline{F}_{\alpha_1}, \overline{F}_{\alpha_2}, \dots, \overline{F}_{\alpha_n}\}$, таку що $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \varnothing$. Звідси випливає, що множини U_{α_n}, які є доповненнями множин $\overline{F}_{\alpha_n}$, утворюють покриття простору (X, τ), тобто простір (X, τ) є компактним. □

Означення 5.6. Система підмножин $\{M_\alpha \subset X, \alpha \in A\}$ називається **центрованою**, якщо перетин довільної скінченної кількості цих підмножин є непорожнім.

$$\forall \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in A \bigcap_{i=1}^{n} M_{\alpha_i} \neq \varnothing \implies \{M_\alpha \subset X, \alpha \in A\} \text{ — центрована система.}$$

Теорема 5.3 (другий критерій компактності)

Для компактності топологічного простору (X, τ) необхідно і достатньо, щоб будь-яка центрована система його замкнених підмножин мала непорожній перетин

Доведення. Необхідність. Нехай простір (X, τ) — компактний, а $\{F_\alpha\}$ — довільна центрована система замкнених підмножин. Множини $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$ відкриті. Жодна скінченна система цих множин G_{α_n}, $n \in \mathbb{N}$ не покриває X, оскільки

$$\forall n \in \mathbb{N} \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \neq \varnothing \implies X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \neq X \setminus \varnothing = X.$$

Отже, оскільки (X, τ) — компактний простір, система $\{G_\alpha\}$ не може бути покриттям компактного простору. Інакше ми могли б вибрати із системи $\{G_\alpha\}$ скінченне підпокриття $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_n}\}$, а це означало б, що $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing$. Але, якщо $\{G_\alpha\}$ — не покриття, то $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \varnothing$.

Достатність. Припустимо, що довільна центрована система замкнених множин із X має непорожній перетин. Нехай $\{G_\alpha\}$ — відкрите покриття (X, τ). Розглянемо множини $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$. Тоді

$$\bigcup_\alpha G_\alpha = X \implies X \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha = X \setminus X = \varnothing \implies \bigcap_\alpha (X \setminus G_\alpha) = \bigcap_\alpha F_\alpha = \varnothing.$$

Це означає, що система $\{F_\alpha\}$ не є центрованою, тобто існують такі множини $F_1, F_2, \ldots, F_N$, що

$$\bigcap_{i=1}^{N} F_i = \varnothing \implies X \setminus \bigcap_{i=1}^{N} F_i = X \setminus \varnothing \implies \bigcup_{i=1}^{N} G_i = X.$$

Отже, із покриття $\{G_\alpha\}$ ми виділили скінчену підсистему

$$\{G_1, \ldots, G_N\} = \{X \setminus F_1, \ldots, X \setminus F_N\}$$

таку що $\bigcup_{i=1}^{N} G_i = X$. Це означає, що простір (X, τ) є компактним. □

§5.3 Види компактності

Означення 5.7. Множина $M \subset X$ називається **компактною (бікомпактною)**, якщо топологічний підпростір (M, τ_M), що породжується індукованою топологією, є компактним.

Означення 5.8. Множина $M \subset X$ називається **відносно компактною (відносно бікомпактною)**, якщо її замикання $\overline{M}$ є компактною множиною.

Означення 5.9. Компактний і хаусдорфів простір називається **компактом (бікомпактом)**.

Означення 5.10. Топологічний простір називається **зліченно компактним**, якщо із його довільного зліченного відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття (умова Бореля).

Означення 5.11. Топологічний простір називається **секвенційно компактним**, якщо довільна нескінченна послідовність його елементів містить збіжну підпослідовність (умова Больцано-Вейєрштрасса).

§5.4 Зв'язки між видами компактності

Теорема 5.4 (перший критерій зліченної компактності)
Для того щоб простір (X, τ) був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна його нескінченна підмножина мала принаймні одну строгу граничну точку, тобто точку, в довільному околі якої міститься нескінченна кількість точок підмножини.

Доведення. Необхідність. Нехай (X, τ) — зліченно компактний простір, а M — довільна нескінченна множина в X. Припустимо, усупереч твердженню, що M не має жодної строгої граничної точки. Розглянемо послідовність замкнених множин $\Phi_n \subset M$, таку що $\Phi_n \subset \Phi_{n+1}$. Візьмемо $x_n \in \Phi_n$. За припущенням нескінченна послідовність точок $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ не має строгих граничних точок. Побудуємо скінченну систему підмножин $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$, поклавши $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Зі структури цих множин випливає, що будь-яка скінченна сукупність точок F_n має непорожній перетин, всі множини F_n є замкненими, але $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing$. Отже, ми побудували зліченну центровану систему замкнених множин, перетин яких порожній, що суперечить припущенню, що простір (X, τ) зліченно компактним.

Достатність. Нехай в просторі (X, τ) кожна нескінченна множина M має строгу граничну точку. Доведемо, що простір (X, τ) є зліченно компактним. Для цього достатньо перевірити, що будь-яка зліченна центрована система $\{F_n\}$ замкнених множин має непорожній перетин. Побудуємо множини $\hat{F}_n = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$. Оскільки система $\{F_n\}$ є центрованою, то замкнені непорожні множини $\hat{F}_n$ утворюють послідовність $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \dots, \hat{F}_n, \dots$, що не зростає. Очевидно, що $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{F}_n$. Можливі два варіанти: серед множин $\hat{F}_n$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, або нескінченна кількість таких множин. Розглянемо ці варіанти окремо.

1. Якщо серед множин $\hat{F}_n$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, то починаючи з деякого номера n_0 виконується умова $\hat{F}_{n_0} = \hat{F}_{n_0+1} = \dots$. Тоді твердження доведено, оскільки $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{F}_n = \hat{F}_{n_0} \neq \varnothing$.

2. Якщо серед множин $\hat{F}_n$ є лише нескінченна кількість попарно різних множин, то можна вважати, що $\hat{F}_n \backslash \hat{F}_{n+1} \neq \varnothing$. Оберемо по одній точці з кожної множини $\hat{F}_n \setminus \hat{F}_{n+1}$. Отже, ми побудували нескінченну множину різних точок, яка, за умовою, має граничну точку $x^\star$. Всі точки $x_n, x_{n+1}, \dots$ належать множинам $\hat{F}_n$. Отже, $x^\star \in \hat{F}'_n \forall n \in \mathbb{N}$, до того ж $\overline{\hat{F}_n} = \hat{F}_n$. З цього випливає, що $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{F}_n \neq \varnothing$. □

Зауваження 5.1 — Вимогу наявності строгої граничної точки можна замінити аксіомою T_1. Інакше кажучи, в досяжних просторах будь-яка гранична точка є строгою. Припустимо, що X — досяжний простір, а гранична точка x множини A не є строгою, і тому існує деякий окіл U, що містить лише скінчену кількість точок множини A, що відрізняються від x. Розглянемо множину $V = U \setminus ((A \cap U) \backslash \{x\})$, тобто різницю між множиною U і цим скінченним перетином. Оскільки простір X є досяжним, то в ньому будь-яка скінченна множина є замкненою. Отже, множина V є відкритою ($V = X \cap (U \backslash \{A \cap U \backslash \{x\}\}) = U \cap (X \backslash (U \cap A \backslash \{x\}))$, містить точку x, а перетин множин дорівнює $A \cap V = \{x\}$ або $\varnothing$. Це суперечить тому, що x — гранична точка множини A.

Зауваження 5.2 — Чому не можна взагалі зняти умову наявності строгої граничної точки? Розглянемо як контрприклад топологію, що складається з натуральних чисел на відрізку $[1, n]$, тобто $\tau = \{\varnothing, \mathbb{N}, [1, n] \cap \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}\}$. Цей простір не є зліченно компактним (порушується другий критерій компактності). Розглянемо нескінченну множину $A \subset \mathbb{N}$ і покладемо $n = \min A$. Тоді будь-який $m \in A \setminus \{n\}$ є граничною точкою множини A, тобто $\mathbb{N}$ є слабко зліченно компактним простором.

Теорема 5.5 (другий критерій зліченної компактності)
Для того щоб досяжний простір (X, τ) був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна нескінченна множина точок із X мала принаймні одну граничну точку (такі простори називаються слабко зліченно компактними). Інакше кажучи, в досяжних просторах слабка зліченна компактність еквівалентна зліченній компактності.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що A — злічена підмножина X, що не має граничних точок (це не обмежує загальності, оскільки в будь-якій нескінченій підмножині ми можемо вибрати злічену підмножину). Множина A є замкненою в X (оскільки будь-яка точка множини $\overline{A} \setminus A$ є граничною точкою множини A, яка за припущенням не має граничних точок, тому $\overline{A} = A$). Нехай $A = \{a_1, s_2, \dots\}$ і $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Зі сказаного вище випливає, що $A_n = \overline{A}_n$, інакше $A' = \varnothing$. Покладемо $G_n = X \setminus A_n$. Ця множина є доповненням замкненої множини A_n, тому вона є відкритою. Розглянемо послідовність множин G_n. Вона зростає і покриває X, тому що кожна точка x із множини $X \setminus A$ належить G_1, а значить, усім множинам G_n, а якщо $x \in A$, то вона дорівнює якомусь a_N, отже, належить G_{N+1}. Таким чином, послідовність множин G_n є покриттям, але вона не може містити скінченне підпокриття $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_n}\}$, оскільки об'єднання елементів цього скінченного підпокриття було б найбільшим серед усіх множин G_n (які утворюють зростаючу послідовність).

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k} = G_N = X.$$

У цьому випадку об'єднання $G_N = \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$ не може містити усі елементи a_i, номер яких перевищує N (за конструкцією), отже, воно не покриває X. У такому випадку простір X не є зліченно компактним. Отримана суперечність доводить бажане.

Достатність. Припустимо, що простір X не є зліченно компактним. Значить, існує зліченне відкрите покриття $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, що не містить скінченного підпокриття. Жодна сукупність множин $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ не є покриттям, тому можемо вибрати з множин $X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} G_i$ по одній точці x_i і утворити із них множину A.

Розглянемо довільну точку $x \in X$. Оскільки $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — покриття простору X, точка x належить якійсь множині G_N, яка своєю чергою може містити лише такі точки x_i із множини A, номер яких задовольняє умові $i < N$ (оскільки за означенням точка x_i не належить жодному G_j, якщо $j \le i$). Отже, множина G_N є околом точки x, перетин якої із множиною A є лише скінченним. Водночас, оскільки простір є досяжним, в околі граничної точки будь-якої множини повинно міститись нескінченна кількість точок цієї множини. Отже, точка x не є граничною точкою множини A. Це твердження є слушним для будь-якої точки x, отже, множина A не має жодної граничної точки. Отримана суперечність доводить бажане. □

Теорема 5.6 (про еквівалентність компактності та зліченої компактності)
Для топологічного простору (X, τ) зі зліченною базою компактність еквівалентна зліченній компактності.

Доведення. Необхідність. Нехай (X, τ) — компактний простір. Тоді із довільного відкритого покриття можна виділити скінченне покриття. Значить, скінченне покриття можна виділити зі зліченного відкритого покриття.

Достатність. Нехай (X, τ) є зліченно компактним простором, а $S = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — його довільне відкрите покриття. Оскільки простори зі зліченою базою мають властивість Ліндельофа (теорема 5.1), то покриття S містить підпокриття S', яке, внаслідок, зліченної компактності простору (X, τ) містить скінченне підпокриття S''. Отже, простір (X, τ) є зліченно компактним. □

Теорема 5.7 (про еквівалентність компактності, секвенційної компактності та зліченної компактності)
Для досяжних просторів зі зліченою базою компактність, секвенційна компактність і злічення компактність є еквівалентними.

Доведення. З огляду на теорему 5.6, достатньо показати, що злічена компактність в досяжному просторі зі зліченною базою еквівалентна секвенційній компактності.

Необхідність. Розглянемо зліченно компактний простір (X, τ). Нехай $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — довільна нескінченна послідовність (тобто послідовність, що містить нескінченну кількість різних точок), а простір є зліченно компактним. Отже, за теоремою 5.5, множина A має граничну точку $x^\star$. Розглянувши зліченну локальну базу околів $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ точки $x^\star$, так що $G_{k+1} \subset G_k$, можна виділити послідовність x_{n_k}, що збігається до $x^\star$. Отже, простір (X, τ) є секвенційно компактним.

Достатність. Нехай простір (X, τ) є секвенційно компактним. З теореми 5.4 випливає, що будь-яка зліченна нескінченна підмножина простору X має строгу граничну точку. Це означає, що будь-яка нескінченна зліченна послідовність має граничну точку, тобто із неї можна виділити збіжну підпослідовність. □

§5.5 Література

[1] **Александрян Р.А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 225–238).

[2] **Колмогоров А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / Колмогоров А.Н., С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 98–105).

[3] **Энгелькинг Р.** Общая топология / Р. Энгелькинг — М.: Мир, 1986 (стр. 195–215).