16 Гільбертові простори

§16.1 Скалярний добуток і породжена ним норма

Означення 16.1. Дійсна лінійна система H називається **дійсним передгільбертовим простором** (або **евклідовим**, або **унітарним**), якщо кожній парі елементів x, y поставлено у відповідність дійсне число (x, y), що задовольняє умови (**аксіоми скалярного добутку**):

1. $(x, x) \geq 0$, до того ж $(x, x) = 0$ тільки при $x = \vec{0}$;
2. $(x, y) = (y, x)$;
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

Лема 16.1 (нерівність Коші—Буняковського)
В дійсному передгільбертовому просторі справджується нерівність

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)},$$

для довільних $x, y \in H$.

Доведення. Розглянемо вираз

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y).$$

Це означає, що дискримінант цього квадратного трьохчлена є недодатним:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

Отже,

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}. \qquad \square$$

За скалярним добутком в H можна ввести норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Лема 16.2
Відображення $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{(x, x)}$ є нормою.

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.

1. $\forall x \in H$: $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$:

$$\sqrt{(x, x)} = 0 \iff (x, x) = 0 \iff x = \vec{0}.$$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $|\forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda(x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda|\sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

3. $\|x+y\| \le x+y$, $\forall x, y \in H$:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le$$
$$\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \implies \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Що і треба було довести. □

Лема 16.3

Скалярний добуток є неперервним відображенням, тобто

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \ \lim_{n\to\infty} y_n = y \implies \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

Доведення.

$$|(x,y) - (x_n, y_n)| = |(x,y) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x_n, y_n)| =$$
$$|(x, y - y_n) + (x - x_n, y_n) \le |(x, y-y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \le$$
$$\|x\| \cdot \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \cdot \|y_n\|.$$

Враховуючи, що з $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ випливає, що $\exists C : \forall n : \|y_n\| \le C$, можемо заключити, що

$$\lim_{n\to\infty} |(x,y) - (x_n, y_n)| \le 0,$$

як сума двох доданків вигляду $0 \cdot C$, а тому

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$ □

§16.2 Скалярний добуток породжений нормою

Твердження 16.1 (характеристична властивість передгільбертових просторів)

Для того щоб нормований простір E був передгільбертовим необхідно і достатньо, щоб для довільних елементів x і y виконувалась рівність

$$\forall x, y \in H : \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{16.1}$$

Доведення. Необхідність.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$(x,x) + 2(x,y) + (y,y) + (x,x) - 2(x,y) + (y,y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Достатність. Нехай рівність (16.1) виконується. Покладемо

$$(x,y) = \tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{16.2}$$

Покажемо, що якщо рівність (16.1) виконується, то функція (16.2) задовольняє всім аксіомам скалярного добутку.

Оскільки при $x = y$ маємо

$$(x,x) = \tfrac{1}{4}(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2) = \|x\|^2,$$

то за допомогою такого скалярного добутку можна задати норму в просторі E.

1. (невід'ємність). Знову-таки, підставляємо $x = y$:

$$(x, x) = \frac{1}{4}(\|x + x\|^2 + \|x - x\|^2) = \|x\|^2 \geq 0.$$

2. (симетричність). Ця аксіома виконується за визначенням:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}(\|y + x\|^2 + \|y - x\|^2) = (y, x).$$

3. (адитивність). Для перевірки цієї аксіоми розглянемо функцію, що залежить від трьох векторів.

$$\Phi(x, y, z) = 4((x + y, z) - (x, z) - (y, z)).$$

Покажемо, що ця функція тотожно дорівнює нулю.

$$\Phi(x, y, z) = \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 - \\ \|x + z\|^2 + \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2. \quad (16.3)$$

Із рівності (16.1) випливає, що

$$\|x + y \pm z\|^2 = 2\|x \pm z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x \pm z - y\|^2.$$

Підставляючи цю рівність в (16.3), маємо

$$\Phi(x, y, z) = -\|x + y - z\|^2 + \|x - y - z\|^2 + \\ \|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2. \quad (16.4)$$

Обчислимо напівсуму виразів (16.3) і (16.4).

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(\|y + z + x\|^2 + \|y + z - x\|^2) - \\ \frac{1}{2}(\|y - z + x\|^2 + \|y - z - x\|^2) - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2.$$

Внаслідок (16.1) перший член дорівнює

$$\|y + z\|^2 + \|x\|^2,$$

$$-\|y - z\|^2 - \|x\|^2,$$

Отже,

$$\Phi(x, y, z) \equiv 0.$$

4. (однорідність). Розглянемо функцію

$$\varphi(c) = (cx, y) - c(x, y).$$

Із рівності (16.2) випливає, що

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}(\|g\|^2 - \|g\|^2) = 0,$$

а, оскільки $(-x, y) = -(x, y)$, то

$$\varphi(-1) = 0.$$

Отже, для довільного цілого числа n:

$$(nx, y) = (\operatorname{sgn} n(x + x + \cdots + x), y) = \\ \operatorname{sgn} n((x, y) + (x, y) + \cdots + (x, y)) = |n| \operatorname{sgn} n(x, y) = n(x, y).$$

Таким чином,

$$\varphi(n) = 0.$$

При цілих p, q і $q \neq 0$ маємо

$$\left(\frac{p}{q}x, y\right) = p\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}q\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}(x, y).$$

Отже, $\varphi(c) = 0$ при всіх раціональних числах c. Оскільки функція φ є неперервною, з цього випливає, що

$$\varphi(c) \equiv 0. \qquad \square$$

§16.3 Ортогональність і проекції

Означення 16.2. Повний передгільбертів простір H називається **гільбертовим**.

Приклад 16.1

Простір ℓ_2 зі скалярним добутком $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ і нормою $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ є гільбертовим.

Приклад 16.2

Простір $C^2[a, b]$ зі скалярним добутком $(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$ і нормою $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$. є гільбертовим.

Приклад 16.3

Простір $C[0, \frac{\pi}{2}]$ з нормою $\|x(t)\| = \max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} |x(t)|$ не є передгільбертовим — в ньому не виконується основна характеристична властивість. Нехай $x(t) = \sin t$ і $y(t) = \cos t$. Оскільки $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x + y\| = \sqrt{2}$, $\|x - y\| = 1$, то

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 + 1 = 3 \neq 4 = 2 \cdot 2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Гільбертів простір є банаховим. Отже, на нього переносяться всі попередні означення і факти.

Означення 16.3. Елементи x і y гільбертового простору називаються **ортогональними**, якщо $(x, y) = 0$. Цей факт записується як $x \perp y$.

Означення 16.4. Якщо фіксований елемент $x \in H$ є ортогональним до кожного елемента деякої множини $E \subset H$, говорять, що елемент x є **ортогональним множині** E. Цей факт позначається як $x \perp E$.

Означення 16.5. Сукупність усіх елементів, ортогональних до даної множини $E \subset H$ є підпростором простору H. Цей підпростір називається **ортогональним доповненням множини** E.

Теорема 16.1 (Релліха)
Нехай H_1 — підпростір гільбертового простору H і H_2 — його ортогональне доповнення. Будь-який елемент $x \in H$ можна єдиним способом подати у вигляді

$$x = x' + x'', \quad x' \in H_1, \quad x'' \in H_2. \tag{16.5}$$

До того ж елемент x' реалізує відстань від x до H_1, тобто

$$\|x - x'\| = \rho(x, H_1) = \inf_{y \in H_1} \rho(x, y).$$

Доведення. Позначимо $d = \rho(x, H_1)$. За означенням $\inf_{y \in H_1} \rho(x, y)$ (точної нижньої грані) існують елементи $x_n \in H_1$ такі, що

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{16.6}$$

Застосуємо лему 16.4 до елементів $x - x_n$ і $x - x_m$:

$$\|(x - x_m) + (x - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2).$$

Оскільки $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in H_1$:

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4 \left\| x - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \geq 4d^2.$$

Отже,

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2 \left(d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2} \right) - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Таким чином, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Оскільки H — повний простір, $\exists x' = \lim_{n \to \infty} x_n$. В гільбертовому просторі будь-який підпростір є замкненою лінійною множиною, отже $x' \in H_1$.

Перейдемо до границі в нерівності (16.6). Отримаємо, що

$$\|x - x'\| \leq d. \tag{16.7}$$

З іншого боку,

$$\forall y \in H_1 : \|x - y\| \geq d \implies \|x - x'\| \geq d. \tag{16.8}$$

Порівнюючи нерівності (16.7) і (16.8), доходимо висновку, що

$$\|x - x'\| = d.$$

Доведемо твердження:

$$x'' = x - x' \perp H_1 \implies x'' \in H_2.$$

Візьмемо $y \in H_1$, $y \neq 0$. Тоді

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : x' + \lambda y \in H_1 \implies \|x'' - \lambda y\|^2 = \|x - (x' + \lambda y)\|^2 \geq d^2 \implies$$
$$(x'' - \lambda y, x'' - \lambda y) = (x'', x'') - 2\lambda(x'', y) + \lambda^2(y, y) \geq d^2 \implies$$
$$d^2 - 2\lambda(x'', y) + \lambda^2(y, y) \geq d^2 \implies -2\lambda(x'', y) + \lambda^2(y, y) \geq 0.$$

Покладемо $\lambda = \frac{(x'',y)}{(y,y)}$. Тоді

$$-2\frac{(x'',y)^2}{(y,y)} + \frac{(x'',y)^2}{(y,y)} \geq 0 \implies (x'',y)^2 \leq 0.$$

Це можливо лише тоді, коли

$$(x'',y) = 0 \implies x'' \perp y.$$

Доведемо тепер єдиність подання (16.5). Припустимо, що існують два подання:

$$x = x' + x'', \quad x' \in H_1, \quad x'' \in H_2,$$
$$x = x_1' + x_1'', \quad x_1' \in H_1, \quad x_1'' \in H_2.$$

З цього випливає, що

$$x' - x_1' = x_1'' - x'',$$

але $x' - x_1' \in H_1$, і $x_1'' - x'' \in H_2$, а ці підпростори перетинаються лише по $\vec{0}$, тобто

$$x' - x_1' = \vec{0} = x_1'' - x''. \qquad \square$$

Означення 16.6. Елементи x' і x'', які однозначно визначаються елементом $x = x' + x''$, називаються **проекціями** елемента x на підпростори H_1 і H_2 відповідно.

§16.4 Лінійний функціонал як скалярне множення на елемент

Теорема 16.2 (Рісса)

Якщо $f \in H^\star$, то існує єдиний елемент $y(f) \in H$, такий що $f(x) = (x,y)$ для довільного $x \in H$, та $\|f\|_{H^\star} = \|y\|_H$.

Доведення. Спочатку доведемо існування елемента y. Позначимо через $H_0 = \ker f$ множину тих елементів $x \in H$, які функціонал f відображає в нуль:

$$H_0 = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Оскільки $f \in H^\star$, він є лінійним і неперервним, отже, $H_0 = \ker f$ — підпростір, тобто замкнена лінійна множина. Якщо $H_0 = H$, покладемо $y = 0$.

Розглянемо випадок, коли $H_0 \neq H$. Нехай $y_0 \in H \setminus H_0$. За теоремою Релліха подамо його у вигляді

$$y_0 = y' + y'', \quad y' \in H_0, \quad y'' \perp H_0.$$

Якщо $y'' \neq 0$, то $f(y'') \neq 0$. Значить, можна покласти

$$f(y'') = 1$$

(інакше ми могли б взяти замість y'' елемент $\frac{y''}{f(y'')}$. Виберемо довільний елемент $x \in H$ і позначимо $f(x) = \alpha$. Розглянемо елемент $x' = x - \alpha y''$. Тоді

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0.$$

Отже,

$$x' \in H_0 \implies (x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha(y'', y'') \implies f(x) = \alpha = \left(x, \frac{y''}{(y'', y'')}\right) \implies y = \frac{y''}{(y'', y'')}.$$

Доведемо єдиність цього елемента. Дійсно, якщо

$$\exists y, y_1 \in H : \forall x \in H : (x, y) = (x, y_1),$$

то

$$(x, y - y_1) = 0 \implies y - y_1 \perp H \implies y = y_1.$$

Оцінимо норму функціонала.

$$|f(y)| \le \|f\| \cdot \|y\| \implies \|f\| \ge f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|.$$

З іншого боку,

$$|f(x)| = |(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \implies \|f\| \le \|y\|. \qquad \square$$

Зауваження 16.1 — З теореми Рісса випливає, що між гільбертовим простором H і спряженим простором $H^\star$ існує ізоморфізм, і скалярні добутки вичерпують весь запас функціоналів, які можна задати на просторі H.

§16.5 Література

[1] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 143–147).

[2] **Канторович Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов — М.: 1977 (стр. 160–167, 197–198).