25 Основні відомості про топологічні векторні простори

§25.1 Простір із неперервними операціями

Означення 25.1. Лінійний простір X(дійсний чи комплексний) із заданою на ньому топологією τ називається **топологічним векторним простором**(ТВП), якщо топологія τ так погоджена з лінійною структурою, що відображення суми елементів і множення скаляра на елемент є неперервними по сукупності змінних.

Розпишемо означення докладніше. Нехай X — топологічний векторний простір. Розглянемо функції $+ : X \times X \to X$ і $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$. Узгодження топології лінійною структурою означає, что функції $+$ і $\cdot$ є неперервними як функції двох змінних.

Теорема 25.1

Нехай U — відкрита множина у просторі X. Тоді

1. для будь-якого $x \in X$ множина $U + x$ є відкритою
2. для будь-якого $\lambda \neq 0$ множина λU є відкритою.

Доведення. Зафіксуємо $x_2 = -x$ і скористаємося неперервністю функції $+(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ по першій змінній при фіксованій другій змінній. Отже, функція $f(x_1) = x_1 - x$ є неперервною по x_1, а $U + x$ є прообразом відкритої множини U під дією функції f. Отже, множина $U + x$ є відкритою.

Друга властивість виводиться так само, але з використанням неперервності функції $g(x) = \lambda^{-1}x$. $\square$

З теореми випливає, що околи будь-якого елемента $x \in X$ є множинами вигляду $U + x$, де U — околи нуля. Відповідно, топологія τ однозначно визначається системою $\mathfrak{R}_0$ околів нуля. Тому інші властивості топології τ будуть формулюватися через околи нуля. Далі через S_r позначатимемо множину $S_r = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq r\}$.

§25.2 Поглинаючі та урівноважені множини

Означення 25.2. Підмножина A лінійного простору X називається **поглинаючою**, якщо для будь-якого $x \in X$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $x \in tA$ для будь-якого $t > n$.

Означення 25.3. Підмножина $A \subset X$ називається **урівноваженою**, якщо для будь-якого скаляра $\lambda \in S_1$ виконане включення $\lambda A \subset A$.

Теорема 25.2

Властивості системи $\mathfrak{R}_0$ околів нуля топологічного векторного простору X:

1. Будь-який окіл нуля є поглинаючою множиною.
2. Довільний окіл нуля містить урівноважений окіл нуля.
3. Для кожного околу $U \in \mathfrak{R}_0$ існує урівноважений окіл $V \in \mathfrak{R}_0$ з $V + V \subset U$.

Доведення.

1. Зафіксуємо $x \in X$ і скористаємося неперервністю функції $f(\lambda) = \lambda x$. Оскільки $f(0) = 0$, неперервність у точці $\lambda = 0$ означає, що для будь-якого $U \in \mathfrak{R}_0$ існує таке $\varepsilon > 0$, що $\lambda x \in U$ для будь-якого $\lambda \in S_\varepsilon$. Увівши позначення $t = \lambda^{-1}$, одержимо, що $x \in tU$ для будь-якого $t \geq \varepsilon^{-1}$.
2. Нехай $U \in \mathfrak{R}_0$. Через неперервність у точці $(0, 0)$ функції $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$, існує таке $\varepsilon > 0$ і такий окіл $W \in \mathfrak{R}_0$, що $\lambda x \in U$ для будь-якого $\lambda \in S_\varepsilon$ і будь-якого $x \in W$.

   Покладемо $V = \bigcup_{\lambda \in S_\varepsilon} \lambda W$. Покажемо, що множина $V \supset U$ і є шуканаий урівноваженаий окіл нуля. З одного боку, $V \supset W$, отже, $V \in \mathfrak{R}_0$. З іншого боку, для будь-якого $\lambda_0 \in S_1$ маємо $\lambda_0 S_\varepsilon \subset S_\varepsilon$, отже,

   $$\lambda_0 V = \bigcup_{\lambda \in S_\varepsilon} \lambda_0 \lambda W = \bigcup_{\mu \in \lambda_0 S_\varepsilon} \mu W \subset \bigcup_{\mu \in S_\varepsilon} \mu W = V,$$

   чим доведена урівноваженість околу V.
3. Через неперервність у точці $(0, 0)$ функції $+(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, для будь-якого околу $U \in \mathfrak{R}_0$ існують околи $V_1, V_2 \in \mathfrak{R}_0$ з $V_1 + V_2 \subset U$. Шуканий урівноважений окіл нуля V виберемо за пунктом 2 так, щоб V містився в околі $V_1 \cap V_2$. $\square$

§25.3 Узгодженість та віддільність

Теорема 25.3

Нехай система $\mathfrak{R}_0$ околів нуля топології τ на лінійному просторі X підкоряється умовам теорем. 25.2, і для будь-якої точки $x \in X$ система околів $\mathfrak{R}_x$ цієї точки отримується паралельним переносом $\mathfrak{R}_0$ на вектор x. Тоді топологія τ узгоджується з лінійною структурою.

Зауваження 25.1 — Через урівноваженість умову $V + V \subset U$ пункту 3 теорем. 25.2 можна записувати у вигляді $V - V \subset U$.

Теорема 25.4

Для віддільності за Хаусдорфом топологічного векторного простору X необхідно і достатньо, щоб система $\mathfrak{R}_0$ околів нуля підкорялася такій умові: для будь-якого $x \neq 0$ існує окіл $U \in \mathfrak{R}_0$, що не містить точку x.

Доведення. Нехай $x \neq y$. Тоді $x - y \neq 0$ та існує окіл $U \in \mathfrak{R}_0$, який не містить $x - y$. Виберемо такий окіл $V \in \mathfrak{R}_0$, що $V - V \subset U$. Тоді околи $x + V$ і $y + V$ не перетинаються: якщо існує точка z, яка лежить одночасно в $x + V$ і $y + V$, то $z - x \in V$, $z - y \in V$ і $x - y = (z - y) - (z - x) \in V - V \subset U$. $\square$

§25.4 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 497–499).