IV

Фільтри і напрямленності

Частина IV: Зміст

18 Напрямленості **111**

18.1 Частково упорядковані множини (нагадування) . . . 111
18.2 Напрямленості . . . 112
18.3 Границі напрямленості . . . 113
18.4 Напрямленості та неперервність . . . 114
18.5 Література . . . 115

19 Фільтри **117**

19.1 Фільтри . . . 117
19.2 Бази фільтрів . . . 117
19.3 Образи фільтрів і баз фільтрів . . . 118
19.4 Фільтри, породжені базою . . . 119
19.5 Література . . . 119

20 Фільтри і збіжність **121**

20.1 Границі і граничні точки фільтрів . . . 121
20.2 Границя функції по фільтру . . . 122
20.3 Література . . . 122

21 Ультрафільтри **123**

21.1 Ультрафільтр як мажоранта . . . 123
21.2 Властивості і критерій ультрафільтра . . . 123
21.3 Ультрафільтри, збіжність і компактність . . . 124
21.4 Література . . . 125

22 Зв'язок між фільтрами і напрямленостями **127**

22.1 Відповідність між фільтрами і напрямленостями . . . 127
22.2 Границі і граничні точки фільтрів і напрямленостей . . . 128
22.3 Універсальні напрямленості і ультрафільтри . . . 128
22.4 Література . . . 129

18 Напрямлености

Як добре відомо, в основі усіх основних понять і конструкцій математичного аналізу (неперервності, диференційовністі, інтегрованісті, сумування рядів тощо) лежить концепція збіжності. В основному курсі функціонального аналізу ми показали, що за допомогою цієї концепції в топологічних просторах, що задовольняють першу аксіому зліченості, можна навіть задавати топологію.

Концепція збіжності містить в собі два поняття: послідовність і границю. Спочатку в математиці розглядалися лише послідовності дійсних чисел. Згодом теорію розповсюдили на послідовності точок в метричному просторі, і, нарешті, узагальнили для послідовності точок в довільному топологічному просторі.

Прагнення вийти за межі просторів, що задовольняють першу аксіому зліченості, в 1920-х роках привело до узагальнення поняття границі звичайних послідовностей на узагальнену послідовність (збіжність за Муром–Смітом) і появи теорії напрямленостей. В 1930-х роках французський математик А. Картан розробив загальну теорію збіжності, яка заснована на поняттях фільтра, ультрафільтра та їх границь. Ця теорія є універсальною. Вона заміняє теорію Мура–Сміта і суттєво спрощує загальну теорію збіжності.

Для того щоб глибше зрозуміти зміст цих теорій, доцільно детально їх розглянути та порівняти.

§18.1 Частково упорядковані множини (нагадування)

Нагадаємо деякі означення із теорії множин.

Означення 18.1. Нехай A — довільна множина. Позначимо як $A \times A$ сукупність усіх упорядкованих пар (a, b), де $a, b \in A$. Говорять, що в множині A задано **бінарне відношення** φ, якщо в $A \times A$ виділено довільну підмножину R_φ. Елемент a перебуває у відношенні φ з елементом b, якщо пара (a, b), належить R_φ.

Приклад 18.1

Бінарним відношенням є, наприклад, тотожність. Множиною R_φ у цьому випадку є діагональ $(a, a) \in A \times A$.

Означення 18.2. Бінарне відношення, задане в множині A, називається **відношенням часткового передупорядкування**, якщо воно є рефлексивним і транзитивним, тобто

1. $(a, a) \in R_\varphi$ — рефлексивність;
2. $(a, b), (b, c) \in R_\varphi \implies (a, c) \in R_\varphi$ — транзитивність.

Означення 18.3. Бінарне відношення, задане в множині A, називається **відношенням часткового упорядкування**, якщо воно є рефлексивним, транзитивним і антисиметричним, тобто

1. $(a, a) \in R_\varphi$ — рефлексивність;
2. $(a, b), (b, c) \in R_\varphi \implies (a, c) \in R_\varphi$ — транзитивність.
3. $(a, b), (b, a) \in R_\varphi \implies a = b$ — антисиметричність.

Означення 18.4. Множина A із заданим на ній відношенням часткового упорядкування (передупорядкування) називається **частково упорядкованою (передупорядкованою) множиною**.

> **Зауваження 18.1** — У частково упорядкованих множинах за традицією відношення xRy позначають як $x \leq y$ або $y \geq x$.

§18.2 Напрямлености

Означення 18.5. Частково упорядкована множина S називається **фільтрівною вправо**, або **напрямленням за зростанням**, або просто **напрямленою множиною**, якщо

$$\forall s_1, s_2 \in S \quad \exists s \in S : \quad s \geq s_1, s_2.$$

Приклад 18.2

Множина натуральних чисел із природним упорядкуванням є напрямленою.

Приклад 18.3

Нехай x — фіксована точка топологічного простору X, а Ω_x — сукупність усіх околів цієї точки.

Введемо в множині Ω_x відношення упорядкування за оберненим включенням:

$$V \subset U \iff V \geq U.$$

Оскільки

$$\forall U_1, U_2 \in \Omega \quad U_1 \cap U_2 \geq U_1, U_2,$$

то множина Ω_x є *напрямленою* множиною усіх околів точки x в просторі X.

Розглянемо довільну множину X і деяку послідовність її елементів x_n. Послідовність x_n можна трактувати як відображення

$$f : \mathbb{N} \to X,$$

де $f(n) = x_n$.

Якщо замінити множину $\mathbb{N}$ довільною напрямленою множиною S, отримаємо означення узагальненої послідовності, або напрямленості.

Означення 18.6. Будь-яке відображення напрямленої множини називається **напрямленістю**, або **узагальненою послідовністю**, або **сіттю**. До того ж, якщо $f : S \to X$ — напрямленість, то напрямлена множина S називається *областю визначеності напрямленості* f, а множина $f(S)$ — *областю її значень*.

> **Зауваження 18.2** — Будь-яка послідовність елементів простору X є напрямленістю в X з областю визначення $\mathbb{N}$. Для зручності значення f_s напрямленості $f : S \to X$ на елементі $s \in S$ часто позначають як x_s, а саму напрямленість f подають як множину $\{x_s \mid s \in S\}$.

Приклад 18.4

Нехай Ω_x — напрямлена множина усіх околів точки x простору X. Вибираючи по одній точці x_U з кожного околу $U \subset \Omega_x$, ми отримуємо напрямленість $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$.

Означення 18.7. Говорять, що напрямленість $f : S \to X$ починаючи з деякого місця **належить**, або **майже вся лежить** в підмножині $A \subset X$, якщо існує $s_0 \in S$, таке що $\forall s \geq s_0\ x_s \in A$.

Означення 18.8. Якщо $\forall s \in A\ \exists t \geq s$: $f_t \in A$, то говорять, що напрямленість $f : S \to X$ є **частою** в підмножині $A \subset X$ (**часто буває** в A).

Зауваження 18.3 — Якщо напрямленість $f : S \to X$ є частою в A, то вона не може майже вся лежати в доповненні $X \setminus A$. І навпаки, якщо напрямленість майже вся лежить в доповненні $X \setminus A$, то вона не може бути частою в A.

Означення 18.9. Точка $x^\star$ називається **граничною точкою** напрямленості, якщо ця напрямленість часто буває в будь-якому околі точки $x^\star$.

§18.3 Границі напрямленості

Означення 18.10. Напрямленість $f : S \to X$ в топологічному просторі X називається **збіжною** до точки $x_0 \in X$, якщо вона майже вся лежить в будь-якому околі точки x_0, тобто якщо для довільного околу U цієї точки знайдеться елементs $s_U \in S$, такий що $\forall s \geq s_U\ f_s \in U$. Точка $x_0 = \lim_S f_s$ називається **границею** напрямленості $f : S \to X$.

Приклад 18.5

Кожна збіжна послідовність в просторі X є збіжною напрямленістю в X, границя якої є границею послідовності.

Приклад 18.6

Нехай $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$ — напрямленість в просторі X. Легко бачити, що ця напрямленість збігається до точки x. Дійсно, нехай U_0 — довільний окіл точки x. Тоді $\forall U \geq U_0\ x \in U \subset U_0$, тобто ця напрямленість майже вся лежить в довільному околі точки x.

Зауваження 18.4 — Напрямленість, як і послідовність, в загальних топологічних просторах може мати різні границі. В хаусдорфових просторах вона має одну границю.

Означення 18.11. Напрямленість $g : T \to X$ називається **піднапрямленістю** напрямленості $f : S \to X$, якщо існує відображення $h : T \to S$, таке що $g = f \circ h$ і $\forall s_0 \in S\ \exists t_0 \in T$: $\forall t \geq t_0\ h(t) \geq s_0$.

Зауваження 18.5 — На відміну від означення звичайної підпослідовності, означення піднапрямленості допускає, щоб область визначення піднапрямленості не була частиною області визначення напрямленості.

Означення 18.12. Частково упорядкована множина X є **конфінальною** своїй підмножині A, якщо в X не існує жодного елемента, що є наступним за усіма елементами множини A.

Приклад 18.7

Інтервал $(0,1)$ є конфінальним множині $\left\{\frac{n}{n+1}\middle|n\in\mathbb{N}\right\}$.

Зауваження 18.6 — Якщо $T\subset S$, а h — відображення вкладення, то друга умова еквівалентна конфінальності T в S. І навпаки, для будь-якої конфінальної частини T з S і будь-якої напрямленості $f : S \to X$ звуження f на T є піднапрямленістю напрямленості f.

Теорема 18.1 (Біркгофа)

Нехай A — деяка підмножина довільного топологічного простору X. Тоді $x\in\overline{A}$ тоді і лише тоді, коли існує напрямленість в A, що збігається до точки x.

Доведення. **Необхідність.** Нехай $x\in\overline{A}$ і Ω_x — напрямлена множина усіх околів точки x. Оскільки

$$\forall U\in\Omega_x \quad A\cap U\neq\varnothing,$$

то, вибираючи по одній точці $x_U x\in A\cap U$, отримуємо напрямленість $\{x_U \mid U\in\Omega_x\}$ в A, що збігається до точки x.

Достатність. Нехай $\{x_s \mid s\in S\}$ — напрямленість в A, що збігається в X до точки x. Тоді за означенням границі напрямленості

$$\forall U\in\Omega_x \quad \exists s_0\in S: \quad \forall s\geq s_0 \quad x_s\in U.$$

Отже,

$$A\cap U\neq\varnothing \implies x_0\in\overline{A}.$$

□

§18.4 Напрямленості та неперервність

Зауваження 18.7 — Нагадаємо, що в просторах із першою аксіомою зліченності неперервність відображення f в довільній точці x_0 була еквівалентною умові, що з $x_n\to x_0$ випливає $f(x_n)\to f(x_0)$. Перехід від послідовностей до напрямленостей дозволяє відмовитись від цієї умови.

Теорема 18.2 (критерій неперервності)

Відображення $f : X\to Y$ є неперервним в точці x_0 тоді і лише тоді, коли для будь-якої напрямленості $\{x_s \mid s\in S\}$, що збігається до точки $x_0\in X$ напрямленість $\{f(x_s)\mid s\in S\}$ збігається то точки $f(x_0)\in Y$.

Доведення. **Необхідність.** Нехай $f : X \to Y$ є неперервною в точці x_0 і $\{x_s \mid s \in S\}$ — деяка напрямленість в X, що збігається до точки x_0. Нехай також V_0 — довільний окіл точки $f(x_0)$ в Y. Тоді достатньо пересвідчитись, що напрямленість $\{f(x_s) \mid s \in S\}$ майже вся лежить в V_0.

Справді, оскільки відображення f є неперервним в точці x_0, існує окіл U_0 точки x_0, такий що $f(U_0) \subset V_0$. Оскільки напрямленість $\{x_s \mid s \in S\}$ збігається до x_0, то знайдеться індекс $s_0 \in S$ такий, що при всіх $s \geq s_0$ $x_s \in U_0$. Отже, для всіх $s \geq s_0$ $f(x_s) \in V_0$, а це значить, що майже вся напрямленість $\{f(x_s) \mid s \in S\}$ лежить в V_0.

Достатність. Припустимо, що умови теореми виконуються, але відображення f не є неперервним в точці x_0. Тоді існує такий окіл V_0 точки $f(x_0)$, що в будь-якому околі U точки x_0 знайдеться точка x_U, образ $f(x_U)$ якої належить $Y \setminus V_0$.

Розглянемо напрямленість $\{x_U \mid U \in \Omega_{x_0}\}$, де Ω_{x_0} — напрямлена множина усіх околів точки x_0. Очевидно, що ця напрямленість збігається до точки x_0.

Проте напрямленість $\{f(x_U) \mid U \in \Omega_{x_0}\}$ не може збігатися до точки $f(x_0)$, оскільки в такому випадку вона майже вся лежала б в околі V_0. Отримане протиріччя доводить достатність. □

§18.5 Література

[1] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 18–21).

[2] **Александрян Р. А.,** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 91–98).

[3] **Келли Дж.** Общая топология / Дж. Келли — М.: Наука, 1966 (стр. 91–118).

19 Фільтри

Окрім збіжності напрямленостей, існує ще один вид узагальненої збіжності — збіжність фільтрів. Ця ідея базується на альтернативному означенні збіжної послідовності: послідовність x_n називається збіжною до точки x_0, якщо для будь-якого околу U цієї точки доповнення до прообразу $f^{-1}(U)$ є скінченною підмножиною з $\mathbb{N}$, де $f : \mathbb{N} \to X$ — відображення, що задає послідовність. Якщо множину $\mathbb{N}$ замінити абстрактною множиною E, в якому виділено сім'ю підмножин F, що має певні загальні властивості, то можна дати розумне означення узагальненої збіжності.

§19.1 Фільтри

Означення 19.1. Сім'я підмножин $\mathfrak{F}$ множини X називається **фільтром** на X, якщо:

1. Сім'я $\mathfrak{F}$ непорожня.
2. $\varnothing \notin \mathfrak{F}$.
3. Якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$.
4. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.1

$X \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.2

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.3

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \varnothing$.

Приклад 19.1

Система Ω_x усіх околів точки x в топологічному просторі X є фільтром.

§19.2 Бази фільтрів

Означення 19.2. Непорожня сім'я підмножин $\mathfrak{D}$ множини X називається **базою фільтра**, якщо:

1. $\varnothing \notin \mathfrak{D}$;
2. $\forall A, B \in \mathfrak{D}\ \exists C \in \mathfrak{D}$: $C \subset A \cap B$.

Означення 19.3. Нехай $\mathfrak{D}$ — база фільтра. Фільтром, що **породжений** базою $\mathfrak{D}$, називається сім'я $\mathfrak{F}$ усіх множин $A \subset X$, що містять як підмножину хоча б один елемент бази $\mathfrak{D}$.

Вправа 19.1. Довести, що фільтр, породжений базою, дійсно є фільтром.

Приклад 19.2

Якщо X — топологічний простір, $x_0 \in X$, $\mathfrak{D}$ — сукупність усіх відкритих множин, що містять x_0, то фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, є фільтром $\mathfrak{M}_{x_0}$, що складається з усіх околів точки x_0.

Означення 19.4. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів множини X. Тоді сім'я $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$ "хвостів" послідовності $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ є базою фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, породжений базою $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$, називається фільтром, **асоційованим** з послідовністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

§19.3 Образи фільтрів і баз фільтрів

Теорема 19.1

Нехай X, Y — множини, $f : X \to Y$ — функція, $\mathfrak{D}$ — база фільтра в X. Тоді сім'я $f(\mathfrak{D})$ усіх множин виду $f(A)$, $A \in \mathfrak{D}$ є базою фільтра в Y.

Доведення. Виконання першої аксіоми бази фільтра є очевидним, адже образ непорожньої множини — непорожня множина. Нехай $f(A), f(B)$ — довільні елементи сім'ї $f(\mathfrak{D})$, $A, B \in D$. За другою аксіомою існує таке $C \in \mathfrak{D}$, що $C \subset A \cap B$. Тоді $f(C) \subset f(A) \cap f(B)$. Отже друга аксіома виконується і для сім'ї $f(\mathfrak{D})$. □

Наслідок 19.4

$\mathfrak{F}$ — фільтр на X, то $f(\mathfrak{F})$ — база фільтра в Y.

Означення 19.5. **Образом фільтра** $\mathfrak{F}$ при відображенні f називається фільтр $f[\mathfrak{F}]$, породжений базою $f(\mathfrak{F})$, тобто

$$A \in f[\mathfrak{F}] \iff f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}.$$

Теорема 19.2

Нехай $\mathfrak{C} \subset 2^X$ — непорожня сім'я множин. Для того щоб існував фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ (тобто такий, що усі елементи сім'ї $\mathfrak{C}$ є елементами фільтра $\mathfrak{F}$) необхідно і достатньо, щоб $\mathfrak{C}$ була центрованою.

Доведення. **Необхідність.** Якщо $\mathfrak{F}$ — фільтр і $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$, то будь-який скінчений набір $A_1, A_2, \ldots, A_n$ елементів сім'ї $\mathfrak{C}$ буде складатися з елементів фільтра $\mathfrak{F}$. Отже,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing.$$

Достатність. Нехай $\mathfrak{C}$ — центрована сім'я. Тоді сім'я $\mathfrak{D}$ усіх множин виду

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{C}$$

буде базою фільтра. Як фільтр $\mathfrak{F}$ треба взяти фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$. □

§19.4 Фільтри, породжені базою

Означення 19.6. Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр на X. Сім'я множин $\mathfrak{D}$ називається **базою фільтра $\mathfrak{F}$**, якщо $\mathfrak{D}$ база фільтра і фільтр, породжений базою $\mathfrak{D}$, збігається з $\mathfrak{F}$.

Теорема 19.3 (критерій бази фільтра $\mathfrak{F}$)

Для того щоб $\mathfrak{D}$ була базою фільтра $\mathfrak{F}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися дві умови:

1. $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$;
2. $\forall A \in \mathfrak{F}\ \exists B \in \mathfrak{D}\colon B \subset A$.

Вправа 19.2. Доведіть цю теорему.

Означення 19.7. Нехай F — фільтр на X і $A \subset X$. **Слідом** фільтра $\mathfrak{F}$ на A називається сім'я підмножин $\mathfrak{F}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathfrak{F}\}$.

Теорема 19.4

Для того щоб сім'я $\mathfrak{F}_A$ була фільтром на A, необхідно і достатньо, щоб усі перетини $A \cap B$, $B \in \mathfrak{F}$ були непорожніми.

Вправа 19.3. Доведіть цю теорему.

Наслідок 19.5

$\mathfrak{F}_A$ — фільтр, якщо $A \in \mathfrak{F}$.

§19.5 Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 99–102).

[2] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 481–484).

20 Фільтри і збіжність

§20.1 Границі і граничні точки фільтрів

Означення 20.1. Нехай на множині X задані фільтри $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$. Говорять, що $\mathfrak{F}_1$ **мажорує** $\mathfrak{F}_2$, якщо $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$, тобто кожний елемент фільтра $\mathfrak{F}_2$ є водночас і елементом фільтра $\mathfrak{F}_1$.

Приклад 20.1

Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в X, а $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — її підпослідовність. Тоді фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$ асоційований з підпослідовністю, мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, асоційований з самою послідовністю.

Дійсно, нехай $A \in \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$. Тоді існує таке $N \in \mathbb{N}$, що $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset A$. Але тоді й $\{x_{n_k}\}_{k=N}^{\infty} \subset A$, тобто $A \in \mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$.

Означення 20.2. Нехай X — топологічний простір, $\mathfrak{F}$ — фільтр на X. Точка $x \in X$ називається **границею** фільтра $\mathfrak{F}$ (цей факт позначається як $x = \lim \mathfrak{F}$), якщо $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр околів точки x. Іншими словами, $x = \lim \mathfrak{F}$, якщо кожний окіл точки x належить фільтру $\mathfrak{F}$.

Означення 20.3. Точка $x \in X$ називається **граничною точкою** фільтра $\mathfrak{F}$, якщо кожний окіл точки x перетинається з усіма елементами фільтра $\mathfrak{F}$. Множина усіх граничних точок фільтра називається $\operatorname{LIM} \mathfrak{F}$.

Приклад 20.2

Нехай $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність в топологічному просторі X. Тоді $x = \lim \mathfrak{F}_{\{x_n\}} = \lim_{n\to\infty} x_n$, а $x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$ збігається з множиною граничних точок послідовності $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Теорема 20.1

Нехай $\mathfrak{F}$ — фільтр на топологічному просторі X, $\mathfrak{D}$ — деяка база фільтра $\mathfrak{F}$. Тоді

1. $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x\ \exists A \in \mathfrak{D}\colon A \subset U$;
2. $x = \lim \mathfrak{F} \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}$. Якщо до того ж X — хаусдорфів простір, то у фільтра $\mathfrak{F}$ немає інших граничних точок. Зокрема, якщо у фільтра в хаусдорфовому просторі є границя, то ця границя є єдиною;
3. множина $\operatorname{LIM} \mathfrak{F}$ збігається з перетином замикань усіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

Доведення.

1. $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x\ U \in \mathfrak{F} \iff \forall U \in \mathfrak{F}\ \exists A \in \mathfrak{D}\colon A \subset U$.
2. $x = \lim \mathfrak{F}, U \in \Omega_x \implies U \in \mathfrak{F} \implies \forall A \in \mathfrak{F}\ A \cap U \neq \varnothing \implies x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F}$;

   $x \in \operatorname{LIM} \mathfrak{F} \implies \forall U \in \mathfrak{F}, V \in \Omega_y\ U \cap V \neq \varnothing \implies x = y$ (оскільки простір хаусдорфів).

3. $x = \operatorname{LIM}\mathfrak{F} \iff \forall A \in \mathfrak{F}, U \in \Omega_x \; A \cap U \neq \varnothing \iff \forall A \in \mathfrak{F} \; x \in \overline{A}$. □

Теорема 20.2

Нехай $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — фільтри на топологічному просторі X і $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді

1. $x = \lim \mathfrak{F}_1 \implies x = \lim \mathfrak{F}_2$;
2. $x \in \operatorname{LIM}\mathfrak{F}_2 \implies x \in \operatorname{LIM}\mathfrak{F}_1$;
3. $x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \operatorname{LIM}\mathfrak{F}_1$.

Доведення.

1. $\mathfrak{F}_1$ мажорує фільтр $\mathfrak{M}_x$ околів точки x, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \implies \mathfrak{M}_x \subset \mathfrak{F}_2$.
2. Оскільки при збільшенні сім'я множин її перетин зменшується, то

$$\operatorname{LIM}\mathfrak{F}_2 = \bigcap_{A\in\mathfrak{F}_2} \overline{A} \subset \bigcap_{A\in\mathfrak{F}_1} \overline{A} = \operatorname{LIM}\mathfrak{F}_1.$$

3. $x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \operatorname{LIM}\mathfrak{F}_2 \implies x \in \operatorname{LIM}\mathfrak{F}_1$.

□

§20.2 Границя функції по фільтру

Означення 20.4. Нехай X — множина, Y — топологічний простір, $\mathfrak{F}$ — фільтр на X. Точка $y \in Y$ називається **границею** функції $f : X \to Y$ по фільтру $\mathfrak{F}$ (цей факт позначається як $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$, якщо $y = \lim f[\mathfrak{F}]$. Іншими словами, $y = \lim f[\mathfrak{F}]$, якщо для довільного околу U точки y існує такий елемент $A \in \mathfrak{F}$, що $f(A) \subset U$.

Означення 20.5. Точка $y \in Y$ називається **граничною** точкою функції $f : X \to Y$ по фільтру $\mathfrak{F}$, якщо $y \in \operatorname{LIM} f[\mathfrak{F}]$, тобто якщо довільний окіл точки y перетинається з образами усіх елементів фільтра $\mathfrak{F}$.

Приклад 20.3

Нехай X — топологічний простір, $f : \mathbb{N} \to X$ і F — фільтр Фреше на $\mathbb{N}$. Тоді $\lim_{\mathfrak{F}} f = \lim_{n\to\infty} f(n)$.

Теорема 20.3

Нехай X і Y — топологічні простори, F — фільтр на X, $x = \lim \mathfrak{F}$ і $f : X \to Y$ — неперервна функція. Тоді $f(x) = \lim_{\mathfrak{F}} f$.

Доведення. Нехай U — довільний окіл точки $f(x)$. Тоді існує окіл V точки X, для якого $f(V) \subset U$. Умова $x = \lim \mathfrak{F}$ означає, що $V \in \mathfrak{F}$. Інакше кажучи, для довільного околу U точки $f(x)$ ми знайшли шуканий елемент $V \in \mathfrak{F}$: $f(V) \subset U$. □

§20.3 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 484–488).

21 Ультрафільтри

§21.1 Ультрафільтр як мажоранта

Лема 21.1

Нехай $\mathfrak{M}$ — лінійно упорядкована непорожня сім'я фільтрів, заданих на множині X, тобто для довільни $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$ або $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, або $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$. Тоді об'єднання $\mathfrak{F}$ усіх фільтрів сім'ї $\mathfrak{M}$ також буде фільтром на X.

Доведення. Перевіримо виконання аксіом фільтра для об'єднання сім'ї множин $\mathfrak{M}$. Перші дві аксіоми є очевидними, а тому перевіримо останні дві.

Перетин: якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то знайдуться такі $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$, $B \in \mathfrak{F}_2$. За умовою, один з фільтрів $\mathfrak{F}_1$ і $\mathfrak{F}_2$ мажорує інший. Нехай, без обмеження загальності, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Тоді окрім множини B йому належить і множина A, адже $A \in \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$. Оскільки $\mathfrak{F}_2$ — фільтр, то $A \cap B \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$, тобто сім'я $\mathfrak{F}$ справді замкнена відносно (скінченного) перетину.

Надмножина: якщо $A \in \mathfrak{F}$ і $A \subset B \subset X$, то знайдеться такий $\mathfrak{F}_1 \in \mathfrak{M}$, що $A \in \mathfrak{F}_1$, а тому $B \in \mathfrak{F}_1$, як надмножина елеметну фільтра. Як наслідок, $B \in \mathfrak{F}$ і сім'я $\mathfrak{F}$ виявляється замкненою відносно взяття надмножини. □

Означення 21.1. **Ультрафільтром** на X називається максимальний[1] за включенням фільтр на X. Інакше кажучи, фільтр $\mathfrak{A}$ на X називається *ультрафільтром*, якщо будь-який фільтр $\mathfrak{F}$ на X, що мажорує $\mathfrak{A}$, збігається з $\mathfrak{A}$.

Теорема 21.1

Для кожного фільтра $\mathfrak{F}$ на X існує ультрафільтр, що його мажорує.

Доведення. Випливає з леми Цорна. Більш детально, необхідно розглянути частково упорядковану множину (сім'ю) фільтрів, що мажорують $\mathfrak{F}$. Лемма 21.1 показує, що довільний ланцюг (лінійно впорядкована підмножина) має верхню межу (також кажуть *верхню грань* або *мажоранту*).

Тоді лема Цорна стверджує, що у нашій частково упорядкованій множині є максимальний елемент. З одного боку зрозуміло, що він буде ультрафільтром, адже немає іншого фільтра, що його мажорує, а з іншого — зо він буде мажорувати $\mathfrak{F}$, адже усі елементи нашої частково упорядкованої множини за побудовою мажорують $\mathfrak{F}$. □

§21.2 Властивості і критерій ультрафільтра

Лема 21.2

Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, $A \subset X$ і всі елементи ультрафільтр перетинаються з A. Тоді $A \in \mathfrak{A}$.

[1] для якого не існує більшого, але не обов'язково більший за кожен інший

Доведення. Додавши до сім'ї множин $\mathfrak{A}$ як елемент множину A ми отримаємо центровану систему множин. Справді, для цього достатньо аби $\mathfrak{A}$ була просто фільтром, а точніше замкненою відносно скінченного перетину. Тоді додавши у цей перетин, який є елементом $\mathfrak{A}$, ще й A можна просто скористатися умовою на непорожні перетини A із елементами $\mathfrak{A}$. Зрозуміло, що ці міркування працюють і для ультрафільтрів, адже кожен ультрафільтр є фільтром. Таким чином уся розширена система множин є центрованою.

За теорем. 19.2 звідси випливає, що знайдеться фільтр $\mathfrak{F}$, який містить усі елементи нашої центрованої системи. Але тоді $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$, звідки випливає, що $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$, адже $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, і розширюватися уже нікуди. У той же час, за побудовою, $A \in \mathfrak{F}$, тобто $A \in \mathfrak{A}$. □

Зауваження 21.1 — Якщо зняти умову того, що $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, і сказати що він просто фільтр, то вийде, що його можна розширити до якогось $\mathfrak{A}'$ щоб додати якийсь новий елемент A, за умови що цей A перетинається із усіма елеменами $\mathfrak{A}$.

Теорема 21.2 (критерій ультрафільтра)

Для того, щоб фільтр $\mathfrak{A}$ на X був ультрафільтром, необхідно і достатньо, щоб для довільної множини $A \subset X$ або сама множина A, або її доповнення $X \setminus A$ належало фільтру $\mathfrak{A}$.

Доведення. **Необхідність.** Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр, і $X \setminus A \notin \mathfrak{A}$. Тоді жодна множина $B \in \mathfrak{A}$ не міститься цілком в $X \setminus A$, тобто будь-яка $B \in \mathfrak{A}$ перетинається з A. Отже, за попередньою лемою, $A \in \mathfrak{A}$.

Достатність. Припустимо що $\mathfrak{A}$ — не ультрафільтр. Тоді існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ і множина $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$. За побудовою, $A \notin \mathfrak{A}$. З іншого боку, $X \setminus A$ не перетинається з A, $A \in \mathfrak{F}$, отже $X \setminus A \notin \mathfrak{F}$, а отже $X \setminus A \notin \mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$. □

Наслідок 21.1

Образ ультрафільтра є ультрафільтром.

Доведення. Нехай $f : X \to Y$ і $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на X. Розглянемо довільну множину $A \subset Y$. Тоді або $f^{-1}(A)$ або $f^{-1}(Y \setminus A) = Y \setminus f^{-1}(A)$ належить $\mathfrak{A}$, отже $A \in f[\mathfrak{A}]$ або $Y \setminus A \in f[\mathfrak{A}]$. □

§21.3 Ультрафільтри, збіжність і компактність

Лема 21.3

Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на хаусдорфовому топологічному просторі X і $x \in \mathrm{LIM}(\mathfrak{A})$. Тоді $x = \lim \mathfrak{A}$.

Доведення. Нехай $U \in \Omega_x$. Тоді за означенням граничної точки окіл U перетинається зі всіма елементами ультрафільтра $\mathfrak{A}$. За лемм. 21.2 $U \subset \mathfrak{A}$. □

Теорема 21.3 (критерій компактності у термінах ультрафільтрів)

Для хаусдорфового топологічного простору X нижченаведені умови є еквівалентними:

- X компакт;
- кожен ультрафільтр на X має граничну точку;
- кожен ультрафільтр на X має границю.

Доведення. 1 $\implies$ 2. Фільтр $\mathfrak{F}$ — центрована сім'я множин. Тим більше, центрованою буде сім'я замикань елементів фільтра. Отже, перетин $\mathrm{LIM}(\mathfrak{F})$ цих замикань не є порожнім.

2 $\implies$ 1. Нехай $\mathfrak{C}$ — довільна центромана система замкнених підмножин простору X. За теорем. 19.2 існує фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$. Тоді

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{C}} \overline{A} \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \overline{A} = \mathrm{LIM}(\mathfrak{F}) \neq \varnothing.$$

2 $\implies$ 3. За умовою кожен ультрафільтр має граничну точку, а за лемм. 21.3 ця точка буде його границею.

3 $\implies$ 2. Розглянемо довільний фільтр $\mathfrak{F}$ на X і виберемо (теорем. 21.1) ультрафільтр $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}$. За умовою ультрафільтр $\mathfrak{A}$ має границю $x \in X$. Згідно твердження 3) теорем. 20.2 точка x є граничною точкою фільтра $\mathfrak{F}$. $\square$

Наслідок 21.2

Нехай $\mathfrak{A}$ — ультрафільтр на E, X — топологічний простір і образ функції $f : E \to X$ лежить в деякому компакті $K \subset X$. Тоді існує $\lim_{\mathfrak{A}} f$.

Доведення. Розглянемо f як функцію, що діє з E в K. Оскільки (виснов. 21.1) $f[\mathfrak{A}]$ є ультрафільтром на компакті K, то існує $\lim f[\mathfrak{A}]$. Отже, за означенням, $\lim_{\mathfrak{A}} = \lim f[\mathfrak{A}]$. $\square$

§21.4 Література

[1] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 484–490).

22 Зв'язок між фільтрами і напрямленностями

Фільтри і напрямленості в одній множині X приводять до еквівалентних теорій збіжності. З одного боку, як показано раніше, кожній напрямленості $\{x_s \mid s \in S\}$ в множині X відповідає асоційований з нею фільтр в X. З іншого боку, має місце така теорема.

§22.1 Відповідність між фільтрами і напрямленостями

Теорема 22.1

Нехай $\mathfrak{F}$ — довільний фільтр в множині X. Тоді в цій множині існує напрямленість $\{x_s \mid s \in S\}$ така, що асоційований з нею фільтр збігається з фільтром $\mathfrak{F}$.

Доведення. Розглянемо множину усіх можливих пар $s = (x, M)$, де $M \in \mathfrak{F}$, а $x \in M$. Уведемо в множині таких пар S частковий передпорядок, поклавши $(x, M) \le (y, N)$, якщо $M \supset N$. Таким чином, S — напрямлена множина.

Задамо відображення $f : S \to X$, поклавши

$$f(s) = x, \quad \forall s = (x, M) \in S.$$

Нехай $s = (x, M)$ — довільний елемент з S, а $\hat{M}_s = \{f(t) \mid t \ge s\}$. За означенням фільтра $\hat{\mathfrak{F}}$, асоційованого з напрямленістю $f : S \to X$, система підмножин $\hat{M}_s$, де s пробігає усі значення в множині S, утворює базу $\hat{\beta}$ фільтра $\hat{\mathfrak{F}}$.

Покажемо, що фільтр $\hat{\mathfrak{F}}$, асоційований з побудованою напрямленістю $f : S \to X$, збігається з фільтром $\mathfrak{F}$, тобто

$$\hat{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{F} \quad \text{і} \quad \mathfrak{F} \le \hat{\mathfrak{F}}.$$

1. Для того щоб довести, що $\hat{\mathfrak{F}} \le \mathfrak{F}$, треба показати, що

   $$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta} \quad \exists M \in \mathfrak{F} : \quad M \subset \hat{M}_s.$$

   Насправді має місце більш сильний факт:

   $$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta} \quad \exists M \in \mathfrak{F} : \quad M = \hat{M}_s.$$

   Дійсно, нехай $y \in \hat{M}_s$, тобто

   $$\exists t = (z, N) \ge (x, M) = s : \quad y = f(t),$$

   тоді

   $$y = z \in N \subset M \implies \hat{M}_s \subset M.$$

   Тепер візьмемо довільну точку $z \in M$ і покладемо $t^\star = (z, M)$. Оскільки $t^\star \ge s = (x, M)$, то $f(t^\star) = z \in \hat{M}_s$, тобто $M \subset \hat{M}_s$. Таким чином, $M = \hat{M}_s$.

2. Покажемо, що має місце і обернене твердження: $\mathfrak{F} \le \hat{\mathfrak{F}}$. Для цього пересвідчимось, що
$$\forall M \in \mathfrak{F} \quad \exists \hat{M}_s \in \hat{\beta}: \quad \hat{M}_s = M.$$
Нехай $x^\star$ — довільний елемент з M і $s^\star = (x^\star, M)$. Повторимо міркування, наведені вище.

Нехай $s^\star = (x^\star, M)$ — довільний елемент з S, а $y^\star \in \hat{M}_{s^\star}$, тобто
$$\exists t^\star = (z^\star, N) \ge (x^\star, M) = s^\star: \quad y = f(t^\star),$$
тоді
$$y^\star = x^\star \in N \subset M \implies \hat{M}_{s^\star} \subset M.$$
Тепер візьмемо довільну точку $z^\star \in M$ і покладемо $t^\star = (z^\star, M)$. Оскільки $t^\star \ge s^\star = (x, M)$, то $f(t^\star) = z^\star \in \hat{M}_{s^\star}$, тобто $M \subset \hat{M}_{s^\star}$.

Таким чином, $\mathfrak{F} = \hat{\mathfrak{F}}$. □

§22.2 Границі і граничні точки фільтрів і напрямленостей

Теорема 22.2

Нехай $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ — напрямленість в топологічному просторі X, а $\mathfrak{F}$ — асоційований з нею фільтр. Тоді кожна границя (відповідно, гранична точка) напрямленості ξ є границею (відповідно, граничною точкою) фільтра $\mathfrak{F}$, і навпаки.

Доведення. **Необхідність.** Нехай $x_0 = \lim_S x_s$. Покажемо, що фільтр $\mathfrak{F}$ мажорує фільтр $\mathfrak{F}_{x_0}$ околів точки x_0, тобто $x_0 = \lim \mathfrak{F}$. Нехай U_0 — довільний елемент $\mathfrak{F}_{x_0}$, тобто деякий окіл точки x_0 в просторі X. Тоді
$$x_0 = \lim_S x_s \implies \exists s_0 \in S : M_{s_0} = \{x_s \mid s \ge s_0\} \subset U_0.$$
Оскільки M_{s_0} — елемент бази фільтра, асоційованого з напрямленістю ξ, то $M_{s_0} \subset U_0 \implies U_0 \in \mathfrak{F}$. Отже,
$$\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}_{x_0} \implies x_0 = \lim \mathfrak{F}.$$
Достатність. Нехай $x_0 = \lim \mathfrak{F}$. Отже, будь-який окіл U_0 точки x_0 є елементом фільтра $\mathfrak{F}$. За означенням, множини $M_s = \{x_t \mid t \ge s\}$ утворюють базу фільтра $\mathfrak{F}$, тому $\exists M_{s_0} \subset U_0$. Отже, для будь-якого околу U_0 точки x_0 існує $s_0 \in S$, такий що усі члени напрямленості ξ при $s \ge s_0$ лежать в U_0, тобто $x_0 = \lim_S x_s$. □

§22.3 Універсальні напрямленості і ультрафільтри

Означення 22.1. Напрямленість $\{x_s \mid s \in S\}$ в множині X називається **універсальною**, якщо для будь-якої підмножини $M \subset X$ вона або майже вся лежить в M, або майже вся лежить в $X \setminus M$.

Теорема 22.3

Напрямленість в X є універсальною тоді і лише тоді, коли асоційований з нею фільтр є ультрафільтром.

Доведення. **Необхідність.** Нехай $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ — універсальна напрямленість в X, $\mathfrak{F}$ — асоційований з нею фільтр, а M — довільна підмножина з X. Покажемо, що або M, або $X \setminus M$ належать фільтру $\mathfrak{F}$, звідки випливає, що $\mathfrak{F}$ — ультрафільтр (теорем. 21.2).

Оскільки $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ — універсальна напрямленість в X, то вона майже вся лежить або в M, або в $X \setminus M$, тобто існує індекс $s_0 \in S$, такий що множина $M_{s_0} = \{x_s \mid s \geq s_0\}$ цілком міститься або в M, або в $X \setminus M$. Але оскільки M_{s_0} належить базі фільтра $\mathfrak{F}$, то або M, або $X \setminus M$ містить M_{s_0}, тобто є елементом фільтра $\mathfrak{F}$.

Достатність. Нехай $\mathfrak{F}$ — ультрафільтр, а M — довільна підмножина з X. Доведемо, що $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ майже вся лежить або в M, або в $X \setminus M$. Оскільки або M, або $X \setminus M$ є елементом фільтра $\mathfrak{F}$, то одна з цих множин повинна цілком містити деяку множину з бази фільтра $\mathfrak{F}$ тобто деяку множину M_{s_0}. Це значить, що $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$ майже вся лежить або в M, або в $X \setminus M$. Отже, ξ — універсальна напрямленість в X. □

§22.4 Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 101–113).