

# Функціональний Аналіз

<https://csc-knu.github.io/fa>

Дмитро Ключин\*

9 жовтня 2020 р.

\*Редактор Нікіта Скибицький

*When introduced to a new idea,  
always ask why you should care.  
Do not expect an answer right away,  
but demand one eventually.*  
— Ravi Vakil.

## Про цю книгу

Цей матеріал позиціонується як спроба покращити структурованість, зрозумілість, типографічну та естетичну якість конспекту лекцій Дмитра Анатолійовича Ключина, а саме його курсу “Функціональний аналіз”, що викладається у четвертому семестрі на спеціальності “Прикладна математика” на факультеті комп’ютерних наук та кібернетики.

Книга структурована наступним чином: кожна глава представляє собою одну лекцію і містить кілька розділів. Зокрема, наприкінці кожної глави є рекомендована література до відповідної лекції, а також кілька типових або цікавих задач для закріплення здобутих знань на практиці. Самі глави зібрані у три частини які приблизно розділяють матеріал на змістовні модулі.

## Подяки

Редактор вдячний Володимирі Володимировичу Семенову, одному з небагатьох українських науковців і педагогів, які підтримують у сучасному студентстві зацікавленість математикою як наукою в цілому, і функціональним аналізом зокрема.

Редактор також вдячний Евану Чену за неоціненну допомогу, яку надають усій спільноті його стильові файли для типографічної системи L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, що розміщені у відкритому доступі на [GitHub](#).

## Помилки

На жаль, жоден відносно великий проєкт не обходиться без помилок. Без сумніву, цей матеріал не є виключенням. Ми то чудово розуміємо, і сподіваємося, що ваше невдоволення наявними тут помилками хоча б частково окупиться відчуттям інтелектуальної переваги над редактором, отриманим від виявлення цих помилок.

Будь ласка, надсилайте виправлення, коментарі, зображення кошенят, і таке інше на [n.skybyskyi@gmail.com](mailto:n.skybyskyi@gmail.com), або ж створюйте пул-ріквести у репозиторії курсу, що знаходиться за адресою <https://github.com/csc-knu/fa>.

# Зміст

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>I</b>  | <b>Загальна топологія</b>                    | <b>1</b>  |
| <b>1</b>  | <b>Топологічні простори</b>                  | <b>3</b>  |
| 1.1       | Нагадування: метрична топологія              | 3         |
| 1.2       | Основні означення                            | 3         |
| 1.3       | Замикання                                    | 5         |
| 1.4       | Щільність                                    | 7         |
| 1.5       | Література                                   | 8         |
| <b>2</b>  | <b>Методи введення топології</b>             | <b>9</b>  |
| 2.1       | Замикання і внутрішність                     | 9         |
| 2.2       | База топології                               | 11        |
| 2.3       | Література                                   | 13        |
| <b>3</b>  | <b>Збіжність і неперервність</b>             | <b>15</b> |
| 3.1       | Аксіоми зліченності                          | 15        |
| 3.2       | Збіжність                                    | 16        |
| 3.3       | Неперервність                                | 17        |
| 3.4       | Гомеоморфізми                                | 19        |
| 3.5       | Література                                   | 21        |
| <b>4</b>  | <b>Аксіоми віддільності</b>                  | <b>23</b> |
| 4.1       | Власне аксіоми                               | 23        |
| 4.2       | Наслідки з аксіом                            | 24        |
| 4.3       | Замкнені бази та функціональна віддільність  | 26        |
| 4.4       | Література                                   | 28        |
| <b>5</b>  | <b>Компактність в топологічних просторах</b> | <b>29</b> |
| 5.1       | Покриття і підпокриття                       | 29        |
| 5.2       | Компактні простори                           | 29        |
| 5.3       | Види компактності                            | 31        |
| 5.4       | Зв'язки між видами компактності              | 32        |
| 5.5       | Література                                   | 34        |
| <b>II</b> | <b>Простори зі структурою</b>                | <b>35</b> |
| <b>6</b>  | <b>Метричні простори</b>                     | <b>37</b> |
| 6.1       | Основні означення                            | 37        |
| 6.2       | Збіжність і замкненість                      | 38        |
| 6.3       | Збіжність і фундаментальність                | 40        |
| 6.4       | Література                                   | 41        |
| <b>7</b>  | <b>Повні метричні простори</b>               | <b>43</b> |
| 7.1       | Повнота, ізометрія і поповнення              | 43        |
| 7.2       | Вкладені кулі і повнота                      | 44        |

|  |           |
|--|-----------|
| 7.3 Категорії множин . . . . .   | 46        |
| 7.4 Стискаючі відображення . . . . .                                     | 46        |
| 7.5 Література . . . . .   | 47        |
| <b>8 Компактні метричні простори</b>                                     | <b>49</b> |
| 8.1 Зв'язки між видами компактності . . . . .                            | 49        |
| 8.2 Література . . . . .   | 51        |
| <b>9 Лінійні простори</b>  | <b>53</b> |
| 9.1 Лінійні простори і функціонали . . . . .                             | 53        |
| 9.2 Продовження функціоналів . . . . .                                   | 54        |
| 9.3 Ланцюги і мажоранти . . . . .  | 56        |
| 9.4 Література . . . . .   | 57        |
| <b>10 Нормовані простори</b>   | <b>59</b> |
| 10.1 Норми векторів . . . . .  | 59        |
| 10.2 Норми функціоналів . . . . .  | 59        |
| 10.3 Простір операторів . . . . .  | 61        |
| 10.4 Література . . . . .  | 62        |
| <b>III Функціональний аналіз</b>   | <b>63</b> |
| <b>11 Спряжений простір</b>  | <b>65</b> |
| 11.1 Лінійні топологічні простори і неперервність функціоналів . . . . . | 65        |
| 11.2 Топологія у спряженому просторі і його повнота . . . . .            | 67        |
| 11.3 Другий спряжений простір і природне відображення . . . . .          | 68        |
| 11.4 Рефлексивні простори . . . . .                                      | 69        |
| 11.5 Література . . . . .  | 71        |
| <b>12 Слабка топологія і слабка збіжність</b>                            | <b>73</b> |
| 12.1 Слабка топологія . . . . .  | 73        |
| 12.2 Слабка збіжність . . . . .  | 74        |
| 12.3 Види топології у спряженому просторі . . . . .                      | 76        |
| 12.4 Література . . . . .  | 77        |
| <b>13 Принцип рівномірної обмеженості</b>                                | <b>79</b> |
| 13.1 Види збіжності послідовностей операторів . . . . .                  | 79        |
| 13.2 Повнота простору лінійних неперервних операторів . . . . .          | 81        |
| 13.3 Література . . . . .  | 82        |
| <b>14 Принцип відкритості відображення</b>                               | <b>83</b> |
| 14.1 Обмеженість на всюди щільній множині . . . . .                      | 83        |
| 14.2 Лінійний обмежений обернений оператор . . . . .                     | 84        |
| 14.3 Обернений до наближеного і резольвента . . . . .                    | 86        |
| 14.4 Принцип відкритості відображення . . . . .                          | 87        |
| 14.5 Література . . . . .  | 88        |
| <b>15 Спряжені оператори, спектр і компактні оператори</b>               | <b>89</b> |
| 15.1 Спряжені оператори . . . . .  | 89        |
| 15.2 Спектр оператора . . . . .  | 90        |
| 15.3 Компактні оператори . . . . .                                       | 92        |

|  |            |
|--|------------|
| 15.4 Література . . . . .  | 93         |
| <b>16 Гільбертові простори . . . . .</b>                           | <b>95</b>  |
| 16.1 Скалярний добуток і породжена ним норма . . . . .             | 95         |
| 16.2 Скалярний добуток породжений нормою . . . . .                 | 96         |
| 16.3 Ортогональність і проекції . . . . .                          | 98         |
| 16.4 Лінійний функціонал як скалярне множення на елемент . . . . . | 100        |
| 16.5 Література . . . . .  | 101        |
| <b>17 Теорема про ізоморфізм . . . . .</b>                         | <b>103</b> |
| 17.1 Базиси у гільбертових просторах . . . . .                     | 103        |
| 17.2 Елементи аналізу Фур'є . . . . .                              | 104        |
| 17.3 Сепарабельний простір . . . . .                               | 106        |
| 17.4 Література . . . . .  | 107        |
| <b>IV Фільтри і напрямленості . . . . .</b>                        | <b>109</b> |
| <b>18 Направленості . . . . .</b>                                  | <b>111</b> |
| 18.1 Частково упорядковані множини (нагадування) . . . . .         | 111        |
| 18.2 Направленості . . . . .                                       | 112        |
| 18.3 Границі напрямленості . . . . .                               | 113        |
| 18.4 Направленості та неперервність . . . . .                      | 114        |
| 18.5 Література . . . . .  | 115        |
| <b>19 Фільтри . . . . .</b>  | <b>117</b> |
| 19.1 Фільтри . . . . .   | 117        |
| 19.2 Бази фільтрів . . . . .                                       | 117        |
| 19.3 Образи фільтрів і баз фільтрів . . . . .                      | 118        |
| 19.4 Фільтри, породжені базою . . . . .                            | 119        |
| 19.5 Література . . . . .  | 119        |
| <b>20 Фільтри і збіжність . . . . .</b>                            | <b>121</b> |
| 20.1 Границі і граничні точки фільтрів . . . . .                   | 121        |
| 20.2 Границя функції по фільтру . . . . .                          | 122        |
| 20.3 Література . . . . .  | 122        |
| <b>21 Ультрафільтри . . . . .</b>                                  | <b>123</b> |
| 21.1 Ультрафільтр як мажоранта . . . . .                           | 123        |
| 21.2 Властивості і критерій ультрафільтра . . . . .                | 123        |
| 21.3 Ультрафільтри, збіжність і компактність . . . . .             | 124        |
| 21.4 Література . . . . .  | 125        |
| <b>22 Зв'язок між фільтрами і напрямленостями . . . . .</b>        | <b>127</b> |
| 22.1 Відповідність між фільтрами і напрямленостями . . . . .       | 127        |
| 22.2 Границі і граничні точки фільтрів і напрямленостей . . . . .  | 128        |
| 22.3 Універсальні напрямленості і ультрафільтри . . . . .          | 128        |
| 22.4 Література . . . . .  | 129        |
| <b>V Додаткові розділи функціонального аналізу . . . . .</b>       | <b>131</b> |



# I

## Загальна топологія

# Частина I: Зміст

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Топологічні простори</b>                           | <b>3</b>  |
| 1.1      | Нагадування: метрична топологія . . . . .             | 3         |
| 1.2      | Основні означення . . . . .                           | 3         |
| 1.3      | Замикання . . . . .                                   | 5         |
| 1.4      | Щільність . . . . .                                   | 7         |
| 1.5      | Література . . . . .                                  | 8         |
| <b>2</b> | <b>Методи введення топології</b>                      | <b>9</b>  |
| 2.1      | Замикання і внутрішність . . . . .                    | 9         |
| 2.2      | База топології . . . . .                              | 11        |
| 2.3      | Література . . . . .                                  | 13        |
| <b>3</b> | <b>Збіжність і неперервність</b>                      | <b>15</b> |
| 3.1      | Аксіоми зліченності . . . . .                         | 15        |
| 3.2      | Збіжність . . . . .                                   | 16        |
| 3.3      | Неперервність . . . . .                               | 17        |
| 3.4      | Гомеоморфізми . . . . .                               | 19        |
| 3.5      | Література . . . . .                                  | 21        |
| <b>4</b> | <b>Аксіоми віддільності</b>                           | <b>23</b> |
| 4.1      | Власне аксіоми . . . . .                              | 23        |
| 4.2      | Наслідки з аксіом . . . . .                           | 24        |
| 4.3      | Замкнені бази та функціональна віддільність . . . . . | 26        |
| 4.4      | Література . . . . .                                  | 28        |
| <b>5</b> | <b>Компактність в топологічних просторах</b>          | <b>29</b> |
| 5.1      | Покриття і підпокриття . . . . .                      | 29        |
| 5.2      | Компактні простори . . . . .                          | 29        |
| 5.3      | Види компактності . . . . .                           | 31        |
| 5.4      | Зв'язки між видами компактності . . . . .             | 32        |
| 5.5      | Література . . . . .                                  | 34        |

---



# 1 Топологічні простори

## §1.1 Нагадування: метрична топологія

В курсі математичного аналізу [1, с. 26] уже розглядалися поняття околу точки, відкритої та замкненої множин, точки дотику, граничної точки, границі послідовності в просторі  $\mathbb{R}$  тощо. Всі ці поняття визначалися за допомогою метрики простору  $\mathbb{R}$  і відбивали певні властивості, притаманні множинам, за допомогою яких ми могли описувати основну концепцію цієї теорії — близькість між точками. Адже саме поняття близькості між точками (в розумінні малої відстані) є базовим для таких головних понять математичного аналізу як збіжність послідовностей і неперервність функцій.

Відносним недоліком цього підходу є очевидна залежність від метрики, уведеної в просторі. Тому постало питання, чи не можна побудувати більш абстрактну конструкцію, за допомогою якої можна було б описати ідеї, згадані вище. Серед дослідників цієї проблеми слід відзначити французьких математиків М. Фреше (1906), М. Рісса (1907–1908), німецького математика Ф. Хаусдорфа (1914), польського математика К. Куратовського (1922) і радянського математика П. Александрова (1924). В результаті досліджень цих та багатьох інших математиків виникла нова математична дисципліна — загальна топологія, предметом якої є вивчення ідеї про неперервність на максимально абстрактному рівні.

В цій та наступній лекціях ми введемо в розгляд ряд важливих топологічних понять. Це дозволить нам вийти на вищий рівень абстракції та опанувати ідеї, що пронизують майже всі розділи математики. Не буде великим перебільшенням сказати, що в певному розумінні топологія разом з алгеброю є скелетом сучасної математики, а **функціональний аналіз** — це розділ математики, головною задачею якого є дослідження нескінченновимірних просторів та їх відображень.

## §1.2 Основні означення

**Означення 1.1.** Нехай  $X$  — множина елементів, яку ми будемо називати носієм. **Топологією** в  $X$  називається довільна система  $\tau$  його підмножин, яка задовольняє таким умовам (**аксіомам Александрова**):

A1.  $\emptyset, X \in \tau$ .

A2.  $G_\alpha \in \tau, \alpha \in A \implies \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$ , де  $A$  — довільна множина.

A3.  $G_\alpha \in \tau, \alpha = 1, 2, \dots, n \implies \bigcap_{\alpha=1}^n G_\alpha \in \tau$ .

Інакше кажучи, топологічною структурою називається система множин, замкнена відносно довільного об'єднання і скінченного перетину.

**Означення 1.2.** Пара  $T = (X, \tau)$  називається **топологічним простором**.

### Приклад 1.1 (топологічного простору)

Нехай  $X$  — довільна множина,  $\tau = 2^X$  — множина всіх підмножин  $X$ . Пара  $(X, 2^X)$  називається простором з **дискретною (максимальною) топологією**.

**Приклад 1.2** (топологічного простору)

Нехай  $X$  — довільна множина,  $\tau = \{\emptyset, X\}$ . Пара  $(X, \tau)$  називається простором з **тривіальною (мінімальною, або антидискретною) топологією**.

Зрозуміло, що на одній і тій же множині  $X$  можна ввести різні топології, утворюючи різні топологічні простори. Припустимо, що на носії  $X$  введено дві топології —  $\tau_1$  і  $\tau_2$ . Вони визначають два топологічні простори:  $T_1 = (X, \tau_1)$ , і  $T_2 = (X, \tau_2)$ .

Говорять, що топологія  $\tau_1$  є **сильнішою**, або **тонкішою**, ніж топологія  $\tau_2$ , якщо  $\tau_2 \subset \tau_1$ . Відповідно, топологія  $\tau_2$  є **слабкішою**, або **грубішою**, ніж топологія  $\tau_1$ . Легко бачити, що найслабкішою є тривіальна топологія, а найсильнішою — дискретна.

**Зауваження 1.1** — Множина всіх топологій не є цілком упорядкованою, тобто не всі топології можна порівнювати одну з одною. Наприклад, наступні топології (зв'язні двокрапки) порівнювати не можна:  $X = \{a, b\}$ ,  $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ,  $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ .

**Означення 1.3.** Множини, що належать топології  $\tau$ , називаються **відкритими**. Множини, які є доповненням до відкритих множин, називаються **замкненими**.

Наприклад, множина всіх цілих чисел  $\mathbb{Z}$  замкнена в  $\mathbb{R}$ .

**Зауваження 1.2** — Топологія містить всі відкриті множини. Водночас, треба зауважити, що поняття відкритих і замкнених множин не є взаємовиключними. Одна і та ж множина може бути одночасно і відкритою і замкненою (наприклад,  $\emptyset$  або  $X$ ), або ані відкритою, ані замкненою (множини раціональних та ірраціональних чисел в  $\mathbb{R}$ ). Отже, топологія може містити й замкнені множини, якщо вони одночасно є відкритими.

Як бачимо, поняття відкритої множини в топологічному просторі постулюється — для того щоб довести, що деяка множина  $M$  в топологічному просторі  $T$  є відкритою, треба довести, що вона належить його топології.

**Означення 1.4.** Нехай  $(X, \tau)$  — топологічний простір,  $M \subset X$ . Топологія  $(M, \tau_M)$ , де  $\tau_M = \{U_M^{(\alpha)} = U_\alpha \cap M, U_\alpha \in \tau\}$ , називається **індукованою**.

**Означення 1.5.** Топологічний простір  $(X, \tau)$  називається **зв'язним**, якщо лише множини  $X$  і  $\emptyset$  є замкненими й відкритими одночасно.

**Означення 1.6.** Множина  $M$  топологічного простору  $(X, \tau)$  називається **зв'язною**, якщо топологічний простір  $(M, \tau_M)$  є зв'язним.

**Приклад 1.3** (зв'язних просторів)

Тривіальний (антидискретний) простір і зв'язна двокрапка є зв'язними просторами.

**Зловживання позначеннями 1.1.** Надалі ми будемо часто скорочувати  $(X, \tau)$  просто як  $X$  або  $T$ .

**Означення 1.7.** Довільна відкрита множина  $G \in T$ , що містить точку  $x \in T$ , називається її **околом**.

**Означення 1.8.** Точка  $x \in T$  називається **точкою дотику** множини  $M \subset T$ , якщо кожний окіл  $O(x)$  точки  $x$  містить хоча б одну точку із  $M$ :  $\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap M \neq \emptyset$ .

**Означення 1.9.** Точка  $x \in T$  називається **граничною точкою** множини  $M \subset T$ , якщо кожний окіл точки  $x$  містить хоча б одну точку із  $M$ , що не збігається з  $x$ :  $\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap M \setminus \{x\} \neq \emptyset$ .

### §1.3 Замикання

**Означення 1.10.** Сукупність точок дотику множини  $M \subset T$  називається **замиканням** множини  $M$  і позначається  $\overline{M}$ .

**Означення 1.11.** Сукупність граничних точок множини  $M \subset T$  називається **похідною** множини  $M$  і позначається  $M'$ .

#### Теорема 1.1 (про властивості замикання)

Замикання задовольняє наступним умовам:

1.  $M \subset \overline{M}$ ;
2.  $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$  (ідемпотентність);
3.  $M \subset N \implies \overline{M} \subset \overline{N}$  (монотонність);
4.  $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$  (адитивність).
5.  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .

*Доведення.*

1.  $M \subset \overline{M}$ .

Нехай  $x \in M$ . Тоді  $x$  — точка дотику множини  $M$ . Отже,  $x \in \overline{M}$ .

2.  $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ .

Внаслідок твердження 1)  $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$ . Отже, достатньо довести, що  $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ . Нехай  $x_0 \in \overline{\overline{M}}$  і  $U_0$  — довільний окіл точки  $x_0$ . Оскільки  $U_0 \cap \overline{M} \neq \emptyset$  (за означенням точки дотику), то існує точка  $y_0 \in U_0 \cap \overline{M}$ . Отже, множину  $U_0$  можна вважати околом точки  $y_0$ . Оскільки  $y_0 \in \overline{M}$ , то  $U_0 \cap M \neq \emptyset$ . Значить, точка  $x_0$  є точкою дотику множини  $M$ , тобто  $x_0 \in \overline{M}$ .

3.  $M \subset N \implies \overline{M} \subset \overline{N}$ .

Нехай  $x_0 \in \overline{M}$  і  $U_0$  — довільний окіл точки  $x_0$ . Оскільки  $U_0 \cap M \neq \emptyset$  (за означенням точки дотику) і  $M \subset N$  (за умовою), то  $U_0 \cap N \neq \emptyset$ . Отже,  $x_0$  — точка дотику множини  $N$ , тобто  $x_0 \in \overline{N}$ . Таким чином,  $\overline{M} \subset \overline{N}$ .

4.  $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ .

З очевидних включень  $M \subset M \cup N$  і  $N \subset M \cup N$  внаслідок монотонності операції замикання випливає, що  $\overline{M} \subset \overline{M \cup N}$  і  $\overline{N} \subset \overline{M \cup N}$ . Отже,  $\overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}$ . З іншого боку, припустимо, що  $x \notin \overline{M \cup N}$ , тоді  $x \notin \overline{M}$  і  $x \notin \overline{N}$ . Отже, існує такий окіл точки  $x$ , у якому немає точок з множини  $M \cup N$ , тобто  $x \notin \overline{M \cup N}$ . Таким чином, за законом заперечення,  $x \in \overline{M \cup N} \implies x \in \overline{M} \cup \overline{N}$ , тобто  $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$ .

5.  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .

Припустимо, що замикання порожньої множини не є порожньою множиною:  $x \in \overline{\emptyset} \implies \forall O(x) : O(x) \cap \emptyset \neq \emptyset$ . Але  $\forall N \subset X : N \cap \emptyset = \emptyset$ . Отже,  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .  $\square$

**Теорема 1.2** (критерій замкненості)

Множина  $M$  топологічного простору  $X$  є замкнутою тоді й лише тоді, коли  $M = \overline{M}$ , тобто коли вона містить всі свої точки дотику.

*Доведення.* Необхідність. Припустимо, що  $M$  — замкнена множина, тобто  $G = X \setminus M$  — відкрита множина. Оскільки,  $M \subset \overline{M}$ , достатньо довести, що  $\overline{M} \subset M$ . Дійсно, оскільки  $G$  — відкрита множина, вона є околom кожної своєї точки. До того ж  $G \cap M = \emptyset$ . Звідси випливає, то жодна точка  $x \in G$  не може бути точкою дотику для множини  $M$ , отже всі точки дотику належать множині  $M$ , тобто  $\overline{M} \subset M$ .

$$G = X \setminus M \in \tau \implies G \cap M = \emptyset \implies \overline{M} \subset M.$$

Достатність. Припустимо, що  $\overline{M} = M$ . Доведемо, що  $G = X \setminus M$  — відкрита множина (звідси випливатиме замкненість множини  $M$ ). Нехай  $x_0 \in G$ . З цього випливає, що  $x_0 \notin M$ , а значить  $x_0 \notin \overline{M}$ . Тоді за означенням точки дотику існує окіл  $U_{x_0}$  такий, що  $U_{x_0} \cap M = \emptyset$ . Значить,  $U_{x_0} \subset X \setminus M = G$ , тобто  $G = \bigcup_{x \in G} U_x \in \tau$ .  $\square$

**Наслідок 1.1**

Замикання  $\overline{M}$  довільної множини  $M$  із простору  $X$  є замкнутою множиною в  $X$ .

**Теорема 1.3**

Замикання довільної множини  $M$  простору  $(X, \tau)$  збігається із перетином всіх замкнених множин, що містять множину  $M$ .

$$\forall M \subset X : \quad \overline{M} = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}, \quad F_{\alpha} = \overline{F_{\alpha}}, M \subset F_{\alpha}.$$

*Доведення.* Нехай  $M$  — довільна множина із  $(X, \tau)$  і  $N = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$ , де  $F_{\alpha} = \overline{F_{\alpha}}$ ,  $M \subset F_{\alpha}$ .

Покажемо включення  $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset \overline{M}$ .

$$N = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \implies N \subset F_{\alpha} \forall \alpha \implies N \subset \overline{F_{\alpha}} \forall \alpha.$$

Оскільки  $\{F_{\alpha}\}$  — множина усіх замкнених множин, серед них є множина  $\overline{M}$ :  $\exists \alpha_0 : F_{\alpha_0} = \overline{M}$ . Отже,

$$N \subset \overline{F_{\alpha}} \forall \alpha \implies N \subset F_{\alpha_0} = \overline{M} \implies \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset \overline{M}.$$

Тепер покажемо включення  $\overline{M} \subset \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$ . Розглянемо довільну замкнену множину  $F$ , що містить  $M$ :  $F = \overline{F}$ ,  $M \subset F$ . Внаслідок монотонності замикання маємо:

$$\overline{F} = F, M \subset F \implies \overline{M} \subset \overline{F} = F \implies \overline{M} \subset F_{\alpha}, F_{\alpha} = \overline{F_{\alpha}} \forall \alpha \implies \overline{M} \subset \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}.$$

Порівнюючи обидва включення, маємо

$$\overline{M} = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}.$$

$\square$

**Наслідок 1.2**

Замикання довільної множини  $M$  простору  $X$  є найменшою замкнутою множиною, що містить множину  $M$ .

**§1.4 Щільність**

**Означення 1.12.** Нехай  $A$  і  $B$  — дві множини в топологічному просторі  $T$ . Множина  $A$  називається **щільною в  $B$** , якщо  $\bar{A} \supset B$ .

**Приклад 1.4 (щільних множин)**

В топології числової прямої множина всіх раціональних чисел  $\mathbb{Q}$  є щільною в множині всіх ірраціональних чисел  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , і навпаки.

**Зауваження 1.3** — Множина  $A$  не обов'язково міститься в  $B$ : множина раціональних чисел є щільною в множині ірраціональних чисел і навпаки.

**Означення 1.13.** Якщо  $\bar{A} = X$ , множина  $A$  називається **скрізь щільною**.

**Означення 1.14.** Множина  $A$  називається **ніде не щільною**, якщо вона не є щільною в жодній непорожній відкритій підмножині множини  $X$ .

**Приклад 1.5 (ніде не щільних множин)**

Найпростішими прикладами ніде не щільних множин є цілі числа просторі  $\mathbb{R}$  і пряма в просторі  $\mathbb{R}^2$ .

Множина  $A$  є щільною в кожній непорожній відкритій множині, якщо  $\forall U \in \tau, U \neq \emptyset: \bar{A} \supset U$ , тобто кожна точка множини  $U$  є точкою дотику множини  $A$ . Отже,  $\forall x \in U \forall O(x) \in \tau O(x) \cap A \neq \emptyset$ . Заперечення цього твердження збігається з означенням ніде не щільної множини. Формальний запис означення має такий вигляд:

$$\exists U_0 \in \tau, U_0 \neq \emptyset: \bar{A} \not\supset U_0 \implies \exists x_0 \in U_0 \exists O(x_0) \in \tau: O(x_0) \cap A = \emptyset$$

**Означення 1.15.** Простір  $T$ , що містить скрізь щільну зліченну множину, називається **сепарабельним**.

**Приклад 1.6 (сепарабельного простору)**

Зліченна множина всіх раціональних чисел  $\mathbb{Q}$  є скрізь щільною у просторі  $\mathbb{R}$ , отже простір  $\mathbb{R}$  є сепарабельним.

З того, що  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  і  $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ , зокрема, випливає, що  $\mathbb{Q}$  і  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  є ані відкритими, ані замкненими множинами.

**Приклад 1.7 (сепарабельного простору)**

Зліченна множина всіх поліномів з раціональними коефіцієнтами за теоремою Вейерштраса є скрізь щільною в просторі неперервних функцій  $C[a, b]$ . Отже, простір  $C[a, b]$  є сепарабельним.

## §1.5 Література

- [1] **Ляшко И. И.** Основы классического и современного математического анализа / И. И. Ляшко, В. Ф. Емельянов, А. К. Боярчук. — К.: Вища школа, 1988 (стр. 26–27).
- [2] **Александрян Р.А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 10–20).
- [3] **Энгелькинг Р.** Общая топология / Р. Энгелькинг. — М.: Мир, 1986 (стр. 32–50).

# 2 Методи введення топології

## §2.1 Замикання і внутрішність

Система аксіом, наведена в означенні топології належить радянському математику П.С. Александрову (1925). Проте першу систему аксіом, що визначає топологічну структуру, запропонував польський математик К. Куратовський (1922).

**Означення 2.1.** Нехай  $X$  — довільна множина. Відображення  $\text{cl} : 2^X \rightarrow 2^X$  називається **оператором замикання Куратовського на  $X$** , якщо воно задовольняє наступні умови (**аксіоми Куратовського**):

- K1.  $\text{cl}(M \cup N) = \text{cl}(M) \cup \text{cl}(N)$  (адитивність);
- K2.  $M \subset \text{cl}(M)$ ;
- K3.  $\text{cl}(\text{cl}(M)) = \text{cl}(M)$  (ідемпотентність);
- K4.  $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$ .

### Теорема 2.1

Якщо в деякій множині  $X$  введено топологію в розумінні Александрова, то відображення  $\text{cl}$ , що задовольняє умові  $\text{cl}(M) = \overline{M}$  є оператором Куратовського на  $X$ .

*Доведення.* Неважко помітити, що аксіоми K1–K4 просто збігаються із властивостями замикання, доведеними в теоремі про властивості замикання.  $\square$

### Теорема 2.2 (про завдання топології оператором Куратовського)

Кожний оператор Куратовського  $\text{cl}$  на довільній множині  $X$  задає в  $X$  топологію  $\tau = \{U \subset X : \text{cl}(X \setminus U) = X \setminus U\}$  в розумінні Александрова, до того ж замикання  $\overline{M}$  довільної підмножини  $M$  із  $X$  в цій топології  $\tau$  збігається з  $\text{cl}(M)$ , тобто  $\text{cl}(M) = \overline{M}$ .

*Доведення.* Побудуємо сімейство

$$\sigma = \{M \subset X : M = X \setminus U, U \in \tau\},$$

що складається із всіх можливих доповнень множин із системи  $\tau$ , тобто таких множин, для яких  $\text{cl}(M) = \overline{M}$ . Інакше кажучи, система  $\sigma$  складається з нерухомих точок оператора замикання Куратовського. За принципом двоїстості де Моргана, для сімейства  $\sigma$  виконуються аксіоми замкненої топології

- F1.  $X, \emptyset \in \sigma$ .
- F2.  $F_\alpha \in \sigma, \alpha \in A \implies \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \sigma$ , де  $A$  — довільна множина.
- F3.  $F_\alpha \in \sigma, \alpha = 1, 2, \dots, n \implies \bigcup_{\alpha=1}^n G_\alpha \in \sigma$ .

Отже, щоб перевірити аксіоми Александрова для сімейства множин  $\tau$ , достатньо перевірити виконання аксіом F1–F3 для сімейства множин  $\sigma$ .

1. Перевіримо аксіому F1:  $X \in \sigma$ ?  $\emptyset \in \sigma$ ?

Аксіома K2 стверджує, що  $M \subset \text{cl}(M)$ . Покладемо  $M = X$ . Отже,  $X \subset \text{cl}(X) \subset X \implies \text{cl}(X) = X \implies X \in \sigma$ . Аксіома K4 стверджує, що  $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset \implies \emptyset \in \sigma$ .

2. Перевіримо виконання аксіоми F2.

Спочатку покажемо, що оператор  $\text{cl}$  є **монотонним**:

$$\forall A, B \in \sigma : A \subset B \implies \text{cl}(A) \subset \text{cl}(B).$$

Нехай  $A, B \in \sigma$  і  $A \subset B$ . Тоді за аксіомою K1:

$$\text{cl}(B) = \text{cl}(B \cup A) = \text{cl}(B) \cup \text{cl}(A).$$

Отже,

$$\text{cl}(A) \subset \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) = \text{cl}(B \cup A) = \text{cl}(B).$$

Використаємо це допоміжне твердження для перевірки аксіоми F3. З одного боку,

$$\begin{aligned} \forall F_\alpha \in \sigma : \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset F_\alpha \quad \forall \alpha \in A &\implies \\ \implies \text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) \in \text{cl}(F_\alpha) = F_\alpha \quad \forall \alpha \in A &\implies \\ \implies \text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha. \end{aligned}$$

З іншого боку, за аксіомою K2

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset \text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right).$$

Отже,

$$\text{cl}\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \sigma.$$

3. Перевіримо виконання аксіоми F3.

$$A, B \in \sigma \implies \text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) = A \cup B \implies A \cup B \in \sigma.$$

Таким чином,  $\sigma$  — замкнена топологія, а сімейство  $\tau$ , що складається із доповнень до множин із сімейства  $\sigma$  — відкрита топологія.

Залишилося показати, що в просторі  $(X, \tau)$ , побудованому за допомогою оператора  $\text{cl}$ , замикання  $\overline{M}$  довільної множини  $M$  збігається з  $\text{cl}(M)$ .

Дійсно, за критерієм замкненості, множина  $M$  є замкнутою, якщо  $\overline{M} = M$ . З аксіом K2 і K3 випливає, що множина  $\text{cl}(M)$  є замкнутою і містить  $M$ . Покажемо, що ця множина — найменша замкнена множина, що містить множину  $M$ , тобто є її замиканням.



Нехай  $F$  — довільна замкнена в  $(X, \tau)$  множина, що містить  $M$ :

$$M \subset F, \quad \text{cl}(F) = F.$$

Внаслідок монотонності оператора  $\text{cl}$  отримуємо наступне:

$$M \subset F, \text{cl}(F) = F \implies \text{cl}(M) \subset \text{cl}(F) = F.$$

□

**Означення 2.2.** Нехай  $X$  — довільна множина. Відображення  $\text{int} : 2^X \rightarrow 2^X$  називається **оператором взяття внутрішності множини  $X$** , якщо воно задовольняє наступні умови:

- K1.  $\text{int}(M \cap N) = \text{int}(M) \cap \text{int}(N)$  (адитивність);
- K2.  $\text{int}(M) \subset M$ ;
- K3.  $\text{int}(\text{int}(M)) = \text{int}(M)$  (ідемпотентність);
- K4.  $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$ .

### Наслідок 2.1

Оскільки

$$\text{int } A = X \setminus \overline{X \setminus A},$$

оператор взяття внутрішності є двоїстим для оператора замикання Куратовського. Отже, система множин  $\tau = \{A \subseteq X : \text{int } A = A\}$  утворює в  $X$  топологію, а множина  $\text{int } A$  в цій топології є внутрішністю множини  $A$ .

## §2.2 База топології

Для завдання в множині  $X$  певної топології немає потреби безпосередньо указувати всі відкриті підмножини цієї топології. Існує деяка сукупність відкритих підмножин, яка повністю визначає топологію. Така сукупність називається базою цієї топології.

**Означення 2.3.** Сукупність  $\beta$  відкритих множин простору  $(X, \tau)$  називається **базою топології  $\tau$**  або **базою простору  $(X, \tau)$** , якщо довільна непорожня відкрита множина цього простору є об'єднанням деякої сукупності множин, що належать  $\beta$ :

$$\forall G \in \tau, G \neq \emptyset \quad \exists B_\alpha \in \beta, \alpha \in A : \quad G = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

**Зауваження 2.1 —** Будь-який простір  $(X, \tau)$  має базу, оскільки система всіх відкритих підмножин цього простору утворює базу його топології.

**Зауваження 2.2 —** Якщо в просторі  $(X, \tau)$  існують ізольовані точки, вони повинні входити в склад будь-якої бази цього простору.

### Теорема 2.3

Для того щоб сукупність  $\beta$  множин із топології  $\tau$  була базою цієї топології, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки  $x \in X$  і довільної відкритої множини  $U$ , що містить точку  $x$ , існувала множина  $V \in \beta$ , така щоб  $x \in V \subset U$ .

*Доведення.* Необхідність. Нехай  $\beta$  — база простору  $(X, \tau)$ ,  $x_0 \in X$ , а  $U_0 \in \tau$ , таке що  $x_0 \in U_0$ . Тоді за означенням бази  $U_0 = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ , де  $V_\alpha \in \beta$ . З цього випливає, що  $x_0 \in V_{\alpha_0} \subset U_0$ .

$$\beta = \mathcal{B}(\tau), x_0 \in X, U_0 \in \tau, x_0 \in U_0 \implies U_0 = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha, V_\alpha \in \beta \implies x_0 \in V_{\alpha_0} \subset U_0.$$

Достатність. Нехай для кожної точки  $x \in X$  і довільної відкритої множини  $U \in \tau$ , що містить точку  $x$ , існує множина  $V_x \in \beta$ , така що  $x \in V_x \subset U$ . Легко перевірити, що  $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ .

Дійсно, якщо точка  $x \in U$ , то за умовою теореми, вона належить множині  $V_x \subset U$ , а отже й об'єднанню таких множин  $\bigcup_{x \in U} V_x$ :

$$x \in U \implies \exists V_x \subset U : x \in V_x \implies x \in \bigcup_{x \in U} V_x.$$

І навпаки, якщо точка належить об'єднанню  $\bigcup_{x \in U} V_x$ , то вона належить принаймні одній із цих множин  $V_x \subset U$ , а отже — вона належить множині  $U$ :

$$x \in \bigcup_{x \in U} V_x \implies \exists V_x \subset U : x \in V_x \implies x \in U.$$

Таким чином, довільну відкриту множину  $U \in \tau$  можна подати у вигляді об'єднання множин із  $\beta$ . □

### Приклад 2.1

Оскільки  $\forall x \in \mathbb{R}^1$  і  $\forall (a, b) \ni x \exists (a_0, b_0) \subset (a, b)$ , то за попередньою теоремою сукупність всіх відкритих інтервалів утворює базу топології в  $\mathbb{R}^1$ .

### Приклад 2.2

Оскільки  $\forall x \in \mathbb{R}^1$  і  $\forall (a, b) \ni x \exists (r_1, r_2) \subset (a, b)$ ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ , то за попередньою теоремою сукупність всіх відкритих інтервалів із раціональними кінцями також утворює базу топології в  $\mathbb{R}^1$ .

З цієї теореми випливають два наслідки.

### Наслідок 2.2

Об'єднання всіх множин, які належать базі  $\beta$  топології  $\tau$ , утворює всю множину  $X$ .

*Доведення.* Оскільки  $X \in \tau$ , то за означенням бази  $X = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ , де  $V_\alpha \in \beta$ . □

Надалі будемо також називати цей наслідок першою властивістю бази топології.

### Наслідок 2.3

Для довільних двох множин  $U$  і  $V$  із бази  $\beta$  і для кожної точки  $x \in U \cap V$  існує множина  $W$  із  $\beta$  така, що  $x \in W \subset U \cap V$ .

*Доведення.* Оскільки  $U \cap V \in \tau$ , то за попередньою теоремою в множині  $U \cap V$  міститься відкрита множина  $W$  із бази, така що  $x \in W$ .  $\square$

Надалі будемо також називати цей наслідок другою властивістю бази топології.

**Теорема 2.4** (про завдання топології за допомогою бази)

Нехай в довільній множині  $X$  задана деяка сукупність відкритих множин  $\beta$ , що має властивості бази топології. Тоді в множині  $X$  існує єдина топологія  $\tau$ , однією з баз якої є сукупність  $\beta$ .

*Доведення.* Припустимо, що  $\tau$  — сімейство, що містить лише порожню множину і всі підмножини множини  $X$ , кожна з яких є об'єднанням підмножин із сукупності  $\beta$ :

$$\tau = \left\{ \emptyset, G_\alpha \subset X, \alpha \in A, G_\alpha = \bigcup_{i \in I} B_i^\alpha, B_i^\alpha \in \beta \right\}.$$

Перевіримо, що це сімейство множин є топологією. Виконання аксіом топології 1 і 2 є очевидним:  $\emptyset \in \tau$ ,  $X \in \tau$  і

$$G_\alpha \in \tau, \alpha \in A \implies \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau.$$

Аксіома 3 є наслідком властивостей. Не обмежуючи загальності, можна перевірити її для випадку перетину двох множин.

Нехай  $U, U' \in \tau$ . За означенням,  $U = \bigcup_{i \in I} V_i$  і  $U' = \bigcup_{j \in J} V'_j$ , де  $V_i, V'_j \in \beta$ . Розглянемо перетин

$$U \cap U' = \left( \bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} V'_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (V_i \cap V'_j).$$

Доведемо, що  $V_i \cap V'_j \in \tau$ . Нехай  $x \in V_i \cap V'_j$ . Тоді, за другою властивістю, існує множина  $W_x \in \beta$ , така що  $x \in W_x \subset V_i \cap V'_j$ . Оскільки точка  $x \in V_i \cap V'_j$  є довільною, то  $V_i \cap V'_j = \bigcup_{x \in V_i \cap V'_j} W_x \in \tau$ . Отже,  $U \cap U' \in \tau$ .

Таким чином, сімейство  $\tau$  дійсно утворює топологію на  $X$ , а система  $\beta$  є її базою.  $\square$

## §2.3 Література

- [1] **Александрян Р.А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 14–22).
- [2] **Энгелькинг Р.** Общая топология / Р. Энгелькинг — М.: Мир, 1986 (стр. 46–50).



# 3 Збіжність і неперервність

## §3.1 Аксиоми зліченності

В основі поняття збіжності послідовностей в топологічних просторах лежать аксиоми зліченності, які своєю чергою використовують поняття локальної бази в точці.

**Означення 3.1.** Система  $\beta_{x_0}$  відкритих околів точки  $x_0$  називається **локальною базою в точці  $x_0$** , якщо кожний окіл  $U$  точки  $x_0$  містить її деякий окіл  $V$  із системи  $\beta_{x_0}$ .

**Означення 3.2.** Топологічний простір  $X$  називається таким, що **задовольняє першій аксіомі зліченності**, якщо в кожній його точці існує локальна база, що складається із не більш ніж зліченої кількості околів цієї точки.

**Означення 3.3.** Топологічний простір  $X$  називається таким, що **задовольняє другій аксіомі зліченності**, або **простором зі зліченною базою**, якщо він має базу, що складається із не більш ніж зліченої кількості відкритих множин.

### Лема 3.1

Якщо простір  $X$  задовольняє другій аксіомі зліченності, то він задовольняє і першій аксіомі зліченності.

*Доведення.* Нехай  $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$  — зліченна база в просторі  $X$ , тоді  $\beta_{x_0} = \{U_k \in \beta : x_0 \in U_k\}$  — зліченна локальна база в точці  $x_0$ .  $\square$

### Лема 3.2

Існують простори, що задовольняють першій аксіомі зліченності, але не задовольняють другій аксіомі зліченності.

*Доведення.* В якості контрприкладу розглянемо довільну **незліченну** множину  $X$ , в якій введено дискретну топологію  $\tau = 2^X$ .  $\square$

**Вправа 3.1.** Переконайтеся що ви розумієте, чому цей простір задовольняє першій аксіомі зліченності, але не задовольняє другій аксіомі зліченності перед тим як читати далі.

### Приклад 3.1

Простір  $\mathbb{R}^n$ , топологія якого утворена відкритими кулями, задовольняє першій аксіомі зліченності, оскільки в кожній точці  $x_0 \in X$  існує зліченна локальна база  $S(x_0, 1/n)$ .

Очевидно, що цей простір задовольняє і другій аксіомі зліченності, оскільки має зліченну базу, що складається з куль  $S(x_n, r)$ , де центри куль  $x_n$  належать зліченній скрізь щільній множині (наприклад, мають раціональні координати), а  $r$  — раціональне число.

Поняття точки дотику і замикання множини відіграють основну роль в топології, оскільки будь-яка топологічна структура повністю описується в цих термінах.

### §3.2 Збіжність

Проте поняття точки дотику занадто абстрактне. Набагато більше змістовних результатів можна отримати, якщо виділити широкий клас просторів, топологічну структуру яких можна описати виключно в термінах границь збіжних послідовностей.

**Означення 3.4.** Послідовність точок  $\{x_n\}$  топологічного простору  $X$  називається збіжною до точки  $x_0 \in X$ , якщо кожний окіл  $U_0$  точки  $x_0$  містить всі точки цієї послідовності, починаючи з деякої. Точку  $x_0$  називають границею цієї послідовності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

#### Приклад 3.2

В довільному тривіальному просторі послідовність збігається до будь-якої точки цього простору.

Довільна гранична точка множини  $A$  довільного топологічного простору  $X$  є точкою дотику. Проте в загальних топологічних просторах не для всякої точки дотику  $x \in A$  існує послідовність  $\{x_n\} \subset A$ , що до неї збігається.

#### Приклад 3.3

Нехай  $X$  — довільна незліченна множина. Задамо в просторі  $X$  топологію, оголосивши відкритими порожню множину і всі підмножини, які утворені із  $X$  викиданням не більш ніж зліченної кількості точок.

$$\tau = \{\emptyset, X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}\}.$$

*Доведення.* Спочатку покажемо, що в цьому просторі збіжними є лише стаціонарні послідовності.

Припустимо, що в просторі існує нестаціонарна послідовність  $\{x_n\} \rightarrow x_0$ . Тоді, взявши за окіл точки  $x_0$  множину  $U$ , яка утворюється викиданням із  $X$  всіх членів послідовності  $\{x_n\}$ , які відрізняються від точки  $x_0$ , ми дійдемо до суперечності з тим, що окіл  $U$  мусить містити всі точки послідовності  $\{x_n\}$ , починаючи з деякої.

Тепер розглянемо підмножину  $A = X \setminus \{x_0\}$ . Точка  $x_0$  є точкою дотику множини  $A$ . Справді, якщо  $U$  — довільний відкритий окіл точки  $x_0$ , то за означенням відкритих в  $X$  множин, доповнення  $X \setminus U$  є не більш ніж зліченим.

$$\begin{aligned} U \in \tau &\implies U = X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \implies \\ &\implies X \setminus U = X \setminus (X \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \implies \\ &\implies A \cap U \neq \emptyset, \end{aligned}$$

оскільки  $|A| = c$ , а доповнення  $X \setminus U$  і тому не може містити в собі незліченну множину  $A$ .

З іншого боку, оскільки в просторі  $X$  збіжними є лише стаціонарні послідовності, то із  $x_0 \notin A$  випливає, що жодна послідовність точок із множини  $A$  не може збігатися до точки дотику  $x_0 \notin A$ .  $\square$

**Теорема 3.1**

Якщо простір  $X$  задовольняє першій аксіомі зліченності, то  $x_0 \in \bar{A}$  тоді й лише тоді, коли  $x_0$  є границею деякої послідовності  $\{x_n\}$  точок із  $A$ .

*Доведення.* Достатність. Якщо в довільному топологічному просторі послідовність  $\{x_n\} \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , то  $x_0 \in \bar{A}$ .

Необхідність. Нехай  $x_0 \in \bar{A}$ . Якщо  $x_0 \in A$ , достатньо в якості  $\{x_n\} \in A$  взяти стаціонарну послідовність.

Припустимо, що  $x_0 \in \bar{A} \setminus A$  і  $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$  — зліченна локальна база в точці  $x_0$ , до того ж  $\forall n \in \mathbb{N}: U_{n+1} \subset U_n$ . (Якби ця умова не виконувалася, ми взяли б іншу базу  $\{V_n\}$ , де  $V_n = \bigcap_{k=1}^n U_k$ ). Оскільки  $A \cap U_n \neq \emptyset$ , взявши за  $x_n$  довільну точку із  $A \cap U_n$ , ми отримаємо послідовність  $\{x_n\} \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Дійсно, нехай  $V$  — довільний окіл точки  $x_0$ . Оскільки  $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$  база в точці  $x_0$ , існує такий елемент  $U_{n_0}$ , який належить цій базі, що  $U_{n_0} \subset V$ . З іншого боку, для всіх  $n \geq n_0$ :  $U_{n+1} \subset U_n$ . Це означає, що  $\forall n \geq n_0: x_n \in A \cap U_n \subset U_{n_0} \subset V$ . Отже,  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .  $\square$

**§3.3 Неперервність**

Поняття неперервного відображення належить до фундаментальних основ топології.

**Означення 3.5.** Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається **сюр'єктивним**, якщо  $f(X) = Y$ , тобто множина  $X$  відображається на весь простір  $Y$ .

**Означення 3.6.** Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається **ін'єктивним**, якщо з того, що  $f(x_1) \neq f(x_2)$  випливає, що  $x_1 \neq x_2$ .

**Означення 3.7.** Відображення  $f : X \rightarrow Y$ , яке одночасно є сюр'єктивним та ін'єктивним, називається **бієктивним**, або взаємно однозначною відповідністю між  $X$  і  $Y$ .

Тепер нагадаємо основні співвідношення для образів та прообразів множин відносно функції  $f : X \rightarrow Y$ .

Якщо  $A, B \subset X$ , то

1.  $A \subset B \implies f(A) \subset f(B) \not\implies A \subset B$ ;
2.  $A \neq \emptyset \implies f(A) \neq \emptyset$ ;
3.  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ;
4.  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ .

Якщо  $A', B' \subset Y$ , то

1.  $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$ ;
2.  $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ ;
3.  $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$ .

Якщо  $B' \subset A' \subset Y$ , то

1.  $f^{-1}(A' \setminus B') = f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B')$ ;
2.  $f^{-1}(Y \setminus B') = X \setminus f^{-1}(B')$ ;

Для довільних множин  $A \subset X$  і  $B' \subset Y$

1.  $A \subset f^{-1}(f(A))$ ;

$$2. f(f^{-1}(B')) \subset B'.$$

Введемо поняття неперервного відображення.

**Означення 3.8.** Нехай  $X$  і  $Y$  — два топологічних простора. Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається **неперервним в точці  $x_0$** , якщо для довільного околу  $V$  точки  $y_0 = f(x_0)$  існує такий окіл  $U$  точки  $x_0$ , що  $f(U) \subset V$ .

**Означення 3.9.** Відображення  $f : X \rightarrow T$  називається **неперервним**, якщо воно є неперервним в кожній точці  $x \in X$ .

Інакше кажучи, неперервне відображення зберігає граничні властивості: якщо точка  $x \in X$  є близькою до деякої множини  $A \subset X$ , то точка  $y = f(x) \in Y$  є близькою до образу множини  $A$ .

### Теорема 3.2

Для того щоб відображення  $f : X \rightarrow Y$  було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз  $f^{-1}(V)$  будь-якої відкритої множини  $V \subset Y$  був відкритою множиною в  $X$ .

*Доведення.* Необхідність. Нехай  $f : X \rightarrow Y$  — неперервне відображення, а  $V$  — довільна відкрита множина в  $Y$ . Доведемо, що множина  $U = f^{-1}(V)$  є відкритою в  $X$ .

Для цього візьмемо довільну точку  $x_0 \in U$  і позначимо  $y_0 = f(x_0)$ . Оскільки множина  $V$  є відкритим околом точки  $y_0$  в просторі  $Y$ , а відображення  $f$  є неперервним в точці  $x_0$ , в просторі  $X$  існує відкритий окіл  $U_0$  точки  $x_0$ , такий що  $f(U_0) \subset V$ . Звідси випливає, що  $U_0 \subset U$ . Отже, множина  $U$  є відкритою в  $X$ .

$$\begin{aligned} f \in C(X, Y) &\implies \exists U_0 \in \tau_X : x_0 \in U_0, f(U_0) \subset V \implies \\ &\implies f^{-1}(f(U_0)) \subset f^{-1}(V) = U \implies U_0 \subset f^{-1}(f(U_0)) \subset U \implies U \in \tau_X. \end{aligned}$$

Достатність. Нехай прообраз  $f^{-1}(V)$  довільної відкритої в  $Y$  множини  $V$  є відкритим в  $X$ , а  $x_0 \in X$  — довільна точка. Доведемо, що відображення  $f$  є неперервним в точці  $x_0$ .

Дійсно, нехай  $y_0 = f(x_0)$ , а  $V$  — її довільний відкритий окіл. Тоді  $U = f^{-1}(V)$  за умовою теореми є відкритим околом точки  $x_0$ , до того ж  $f(U) \subset V$ . Отже, відображення  $f$  є неперервним в кожній точці  $x_0 \in X$ . Таким чином,  $f$  є неперервним в  $X$ .

$$V \in \tau_Y, U := f^{-1}(V) \in \tau_X \implies f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V \implies f \in C(X, Y). \quad \square$$

### Теорема 3.3

Для того щоб відображення  $f : X \rightarrow Y$  було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз  $f^{-1}(V)$  будь-якої замкнутої множини  $V \subset Y$  був замкнутою множиною в  $X$ .

Доведення випливає з того, що доповнення відкритих множин є замкненими, а прообрази множин, що взаємно доповнюють одна одну, самі взаємно доповнюють одна одну.



**Теорема 3.4**

Для того щоб відображення  $f : X \rightarrow Y$  було неперервним, необхідно і достатньо, щоб  $\forall A \subset X : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

*Доведення.* Необхідність. Нехай відображення  $f : X \rightarrow Y$  є неперервним, а  $x_0 \in \overline{A}$ . Покажемо, що  $y_0 = f(x_0) \in \overline{f(A)}$ .

Справді, нехай  $V$  — довільний окіл точки  $y_0$ . Тоді внаслідок неперервності  $f$  існує окіл  $U$ , який містить точку  $x_0$  такий, що  $f(U) \subset V$ . Оскільки  $x_0 \in \overline{A}$ , то в околі  $U$  повинна міститись точка  $x' \in A$  (можливо, вона збігається з точкою  $x_0$ ). Разом з тим, очевидно, що  $y' = f(x')$  належить одночасно множині  $f(A)$  і околу  $V$ , тобто  $y_0 \in \overline{f(A)}$ .

$$\begin{aligned} f \in C(X, Y) &\implies \forall V \in \tau_Y : f(x_0) \in V : \exists U \in \tau_X : x \in U, f(U) \subset V. \\ x_0 \in \overline{A} &\implies U \cap A \neq \emptyset \implies \exists x' \in U \cap A \implies \\ &\implies f(x') \in f(U \cap A) \subset f(U) \cap f(A) \implies y_0 = f(x_0) \in \overline{f(A)}. \end{aligned}$$

Достатність. Нехай  $\forall A \subset X : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$  і  $B$  — довільна замкнена в  $Y$  множина. Покажемо, що множина  $A = f^{-1}(B)$  є замкнутою в  $X$ .

Нехай  $x_0$  — довільна точка із  $\overline{A}$ . Тоді  $f(x_0) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ . Разом з тим

$$A = f^{-1}(B) \implies f(A) = f(f^{-1}(B)) \subset B \implies \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B.$$

Тому  $f(x_0) \in B$ , отже,  $x_0 \in A$ . Таким чином,  $\overline{A} \subset A$ , тобто  $A$  — замкнена множина. Звідси випливає, що відображення  $f$  є неперервним.  $\square$

**§3.4 Гомеоморфізми**

**Означення 3.10.** Бієктивне відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається **гомеоморфізмом**, або **гомеоморфізмом**, якщо і само відображення  $f$  і обернене відображення  $f^{-1}$  є неперервними.

**Означення 3.11.** Топологічні простори  $X$  і  $Y$  називаються **гомеоморфними**, або **топологічно еквівалентними**, якщо існує хоча б одне гомеоморфне відображення  $f : X \rightarrow Y$ .

Цей факт записується так:  $X \stackrel{f}{\cong} Y$ .

**Приклад 3.4**

Тривіальний приклад гомеоморфізму — тотожне перетворення.

**Приклад 3.5**

Відображення, що задається строго монотонними неперервними дійсними функціями дійсної змінної є гомеоморфізмами. Гомеоморфним образом довільного інтервалу є інтервал.

**Означення 3.12.** Неперервне відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається **відкритим**, якщо образ будь-якої відкритої множини простору  $X$  є відкритим в  $Y$ .

**Означення 3.13.** Неперервне відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається **замкненим**, якщо образ будь-якої замкнутої множини простору  $X$  є замкненим в  $Y$ .

**Зауваження 3.1** — Поняття відкритого і замкнутого відображення не є взаємовиключними. Тотожне відображення одночасно є і відкритим, і замкненим.

### Приклад 3.6

Відображення вкладення (ін'єктивне відображення)  $i : A \subset X \rightarrow X$  є відкритим, якщо підмножина  $A$  є відкритою, і замкненим, якщо підмножина  $A$  є замкнутою.

### Теорема 3.5

Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є замкненим тоді й лише тоді, коли  $\forall A \subset X : f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ .

*Доведення.* Необхідність. Оскільки замкнене відображення є неперервним (за означенням), то внаслідок теореми 3.4  $\forall A \subset X : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

Разом з тим, очевидно, що  $f(A) \subset f(\overline{A})$ , тому внаслідок монотонності замикання  $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})}$ .

Оскільки відображення  $f$  є замкненим, то  $\overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$ . Таким чином,  $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ .

Достатність. Функція  $f$  є неперервною внаслідок теореми 3.4. З умови  $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$  для замкнутої множини  $A \subset X$  отримуємо, що  $f(A) = \overline{f(A)}$ , тобто образ будь-якої замкнутої множини є замкненим.  $\square$

### Теорема 3.6

Відкрите бієктивне відображення  $f : X \rightarrow Y$  є гомеоморфізмом.

*Доведення.* Оскільки  $f : X \rightarrow Y$  — бієктивне відображення, існує обернене відображення  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Оскільки  $\forall A \subset X : (f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$  і, за умовою теореми,  $f$  — відкрите відображення, то прообрази відкритих підмножин із  $X$  є відкритими.

З теореми 3.2 випливає, що відображення  $f^{-1}$  є неперервним. Оскільки бієктивне відкрите відображення завжди є неперервним, доходимо висновку, що  $f$  — гомеоморфізм.  $\square$

### Теорема 3.7

Замкнене бієктивне відображення  $f : X \rightarrow Y$  є гомеоморфізмом.

Доведення цілком аналогічне попередній теоремі.

### Теорема 3.8

Гомеоморфне відображення  $f : X \equiv Y$  одночасно є і відкритим, і замкненим.

*Доведення.* Нехай  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  — обернене відображення. Тоді  $\forall A \subset X : f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ . Оскільки відображення  $f$  є гомеоморфізмом, відображення  $f$  і  $f^{-1}$  є неперервними.

Оскільки образ множини  $A$  при відображенні  $f$  є прообразом множини  $A$  при відображенні  $(f^{-1})^{-1}$  і обидва ці відображення є неперервними, то відображення  $f$  є відкритим і замкненим одночасно, тобто відкриті множини переводить у відкриті, а замкнені — у замкнені.  $\square$

### Теорема 3.9

Бієктивне відображення  $f : X \rightarrow Y$  є гомеоморфізмом тоді й лише тоді, коли воно зберігає операцію замикання, тобто  $\forall A \subset X : f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ .

Необхідність випливає з теорем 3.5 і 3.8, а достатність — з теорем 3.5 і 3.7.

## §3.5 Література

- [1] **Александрян Р.А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 24–28).
- [2] **Энгелькинг Р.** Общая топология / Р. Энгелькинг — М.: Мир, 1986 (стр. 57–68).
- [3] **Колмогоров А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / Колмогоров А.Н., С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 89–91).



# 4 Аксіоми віддільності

Аналізуючи властивості різних топологічних просторів ми бачили, що їх структура може бути настільки "неприродною", що будь-яка послідовність збігається до будь-яких точок (тривіальний простір), існують точки дотику множин, які не є границями послідовностей їх елементів (простір Зариського) тощо. В математичному аналізі ми не зустрічаємо таких "патологій": там всі послідовності мають лише одну границю, кожна точка дотику є границею тощо. Отже, виникає потреба в інструментах, які дозволили б виділити серед топологічних просторів "природні" простори. Такими інструментами є аксіоми віддільності, які разом з аксіомами зліченності дають можливість повністю описати властивості топологічних просторів.

## §4.1 Власне аксіоми

Аксіоми віддільності в топологічному просторі  $(X, \tau)$  формулюються наступним чином.

- $T_0$  (Колмогоров, 1935). Для двох довільних різних точок  $x$  і  $y$ , що належать множині  $X$ , існує множина із топологічної структури  $\tau$ , яка містить рівно одну з цих точок.

$$(\forall x \neq y \in X) : ((\exists V_x \in \tau : x \in V_x, y \notin V_x) \vee (\exists V_y \in \tau : y \in V_y, x \notin V_y)).$$

- $T_1$  (Рісс, 1907). Для двох довільних різних точок  $x$  і  $y$ , що належать множині  $X$ , існують множина  $V_x$  із топологічної структури  $\tau$ , яка містить точку  $x$  і не містить точки  $y$ , і множина  $V_y$  із топологічної структури  $\tau$ , яка містить точку  $y$  і не містить точки  $x$ .

$$(\forall x \neq y \in X) : ((\exists V_x \in \tau : x \in V_x, y \notin V_x) \wedge (\exists V_y \in \tau : y \in V_y, x \notin V_y)).$$

- $T_2$  (Хаусдорф, 1914). Для двох довільних різних точок  $x$  і  $y$ , що належать множині  $X$ , існують множина  $V_x$  із топологічної структури  $\tau$ , яка містить точку  $x$ , і множина  $V_y$  із топологічної структури  $\tau$ , яка містить точку  $y$ , такі що не перетинаються.

$$(\forall x \neq y \in X) : (\exists V_x \sqcup V_y \in \tau) : (x \in V_x \wedge y \in V_y).$$

- $T_3$  (В'єторіс, 1921). Для довільної точки  $x$  і довільної замкненої множини  $F$ , що не містить цієї точки, існують дві відкриті множини  $V_x$  і  $V$ , що не перетинаються, такі що  $x \in V_x$ , а  $F \subset V$ .

$$(\forall x \in X, \overline{F} \subset X) : (\exists V_x \sqcup V \in \tau) : (x \in V_x \wedge \overline{F} \subset V).$$

- $T_{3\frac{1}{2}}$  (Урисон, 1925). Для довільної точки  $x$  і довільної замкненої множини  $\overline{F}$ , що не містить цієї точки, існує неперервна числова функція  $f$ , задана на просторі  $X$ , така що  $0 \leq f(t) \leq 1$ , до того ж  $f(x) = 0$  і  $f(t) = 1$ , якщо  $x \in \overline{F}$ .

$$(\forall x \in X, \overline{F} \subset X : x \notin \overline{F}) : (\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}^1 : 0 \leq f(t) \leq 1, f(x) = 0, f(\overline{F}) = 1).$$

- $T_4$  (В'єторіс, 1921). Для двох довільних замкнених множин  $\overline{F_1}$  і  $\overline{F_2}$  що не перетинаються, існують відкриті множини  $G_1$  і  $G_2$ , що не перетинаються, такі що  $\overline{F_1} \subset G_1$ ,  $\overline{F_2} \subset G_2$ .

$$(\forall \overline{F_1}, \overline{F_2} \subset X : \overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \emptyset) : (\exists G_1, G_2 \in \tau : \overline{F_1} \subset G_1, \overline{F_2} \subset G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset).$$

**Означення 4.1** (Колмогоров, 1935). Топологічні простори, що задовольняють аксіому  $T_0$ , називаються  **$T_0$ -просторами**, або **колмогоровськими**.

**Означення 4.2** (Рісс, 1907). Топологічні простори, що задовольняють аксіому  $T_1$ , називаються  **$T_1$ -просторами**, або **досяжними**.

**Означення 4.3** (Хаусдорф, 1914). Топологічні простори, що задовольняють аксіому  $T_2$ , називаються **хаусдорфовими**, або **віддільними**.

**Означення 4.4** (В'єторіс, 1921). Топологічні простори, що задовольняють аксіоми  $T_1$  і  $T_3$ , називаються **регулярними**.

**Означення 4.5** (Тихонов, 1930). Топологічні простори, що задовольняють аксіоми  $T_1$  і  $T_{3\frac{1}{2}}$ , називаються **цілком регулярними**, або **тихоновськими**.

**Означення 4.6** (Тітце (1923), Александров і Урисон (1929)). Топологічні простори, що задовольняють аксіоми  $T_1$  і  $T_4$ , називаються **нормальними**.

## §4.2 Наслідки з аксіом

Розглянемо наслідки, які випливають з аксіом віддільності.

### Теорема 4.1 (критерій досяжності)

Для того щоб топологічний простір  $(X, \tau)$  був  $T_1$ -простором необхідно і достатньо, щоб будь-яка одноточкова множина  $\{x\} \subset X$  була замкненою.

*Доведення.* Необхідність. Припустимо, що виконується перша аксіома віддільності: якщо  $x \neq y$ , то існує окіл  $V_x \in \tau : x \notin V_y$ . Тоді  $\forall y \neq x, y \notin \overline{\{x\}}$ , тобто  $\overline{\{x\}} = \{x\}$ .

Достатність. Припустимо, що  $\overline{\{x\}} = \{x\}$ . Тоді  $\forall y \neq x: \exists V_y \in \tau : x \notin V_y$ . Отже, виконується перша аксіома віддільності.  $\square$

### Наслідок 4.1

В просторі  $T_1$  будь-яка скінченна множина є замкненою.

### Теорема 4.2

Для того щоб точка  $x$  була граничною точкою множини  $M$  в  $T_1$ -просторі необхідно і достатньо, щоб довільний окіл  $U$  цієї точки містив нескінченну кількість точок множини  $M$ .

*Доведення.* Необхідність. Якщо точка  $x$  є граничною точкою множини  $M$ , то

$$\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap M \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Припустимо, що існує такий окіл  $U$  точки  $x$ , що містить лише скінченну кількість точок  $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ . Оскільки простір  $(X, \tau) \in T_1$ -простором, то існує окіл  $U$  точки  $x$ , що не містить точку  $x_i$ .

Введемо в розгляд множину  $V = \bigcap_{i=1}^n U_i$ . Ця множина є околом точки  $x$ , що не містить точок множини  $M$ , за винятком, можливо, самої точки  $x$ . Отже, точка  $x$  не є граничною точкою множини  $M$ , що суперечить припущенню.

Достатність. Якщо довільний окіл  $U$  точки  $x$  містить нескінченну кількість точок множини  $M$ , то вона є граничною за означенням.  $\square$

#### Приклад 4.1

Зв'язна двокрапка є колмогоровским, але недосяжним простором.

#### Приклад 4.2

Простір Зариського є досяжним, але не хаусдорфовим.

#### Теорема 4.3 (критерій хаусдорфовості)

Для того щоб простір  $(X, \tau)$  був хаусдорфовим необхідно і достатньо, щоб для кожної пари різних точок  $x_1$  і  $x_2$  в  $X$  існувало неперервне ін'єктивне відображення  $f$  простору  $X$  в хаусдорфів простір  $Y$ .

*Доведення.* Необхідність. Нехай простір  $(X, \tau) \in \text{Хаусдорф}$ . Тоді можна покласти  $Y = X$  і  $f = I$  — тотожне відображення.

Достатність. Нехай  $(X, \tau)$  — топологічний простір і

$$(\exists O(f(x_1)) \in \tau_Y, O(f(x_2)) \in \tau_Y) : (O(f(x_1)) \cap O(f(x_2)) = \emptyset),$$

де  $Y$  — хаусдорфів, а  $f$  — неперервне відображення. Оскільки простір  $Y \in \text{Хаусдорф}$ , то

$$(\exists O(f(x_1)), O(f(x_2)) \in \tau_Y) : (O(f(x_1)) \cap O(f(x_2)) = \emptyset).$$

Оскільки відображення  $f$  є неперервним, то

$$(\exists O(x_1) \in \tau_X, O(x_2) \in \tau_X) : (f(O(x_1)) \subset O(f(x_1)) \wedge f(O(x_2)) \subset O(f(x_2))).$$

Тоді околи  $V(x_1) = f^{-1}(f(O(x_1)))$  і  $V(x_2) = f^{-1}(f(O(x_2)))$  не перетинаються.  $\square$

**Означення 4.7.** Замкнена множина, що містить точку  $x$  разом з деяким її околом, називається **замкненим околом** точки  $x$ .

#### Теорема 4.4 (критерій регулярності)

Для того щоб  $T_1$ -простір  $(X, \tau)$  був регулярним необхідно і достатньо, щоб довільний окіл  $U$  довільної точки  $x$  містив її замкнений окіл.

*Доведення.* Необхідність. Нехай простір  $(X, \tau) \in \text{Регулярний}$ ,  $x$  — його довільна точка, а  $U$  — її довільний окіл. Покладемо  $F = X \setminus U$ . Тоді внаслідок регулярності

простору  $(X, \tau)$  існує окіл  $V$  точки  $x$  і окіл  $W$  множини  $F$ , такі що  $V \cap W = \emptyset$ . Звідси випливає, що  $V \subset X \setminus W$ , отже,  $\overline{V} = \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset X \setminus F = U$ .

Достатність. Нехай довільний окіл довільної точки  $x$  містить замкнений окіл цієї точки, а  $F$  — довільна замкнена множина, що не містить точку  $x$ . Покладемо  $G = X \setminus F \in \tau$ . Нехай  $V$  — замкнений окіл точки  $x$ , що міститься в множині  $G$ . Тоді  $W = X \setminus V$  є околom множини  $F$ , який не перетинається з множиною  $V$ .  $\square$

#### Приклад 4.3

Розглянемо множину  $X = \mathbb{R}$  і введемо топологію так: замкненими будемо вважати всі множини, що є замкненими у природній топології числової прямої, а також множину  $A = \{\frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\}$ . Точка нуль їй не належить, але будь-які околи точки нуль і довільні околи множини  $A$  перетинаються. Це означає, що побудований простір не є регулярним, але є хаусдорфовим.

### §4.3 Замкнені бази та функціональна віддільність

**Означення 4.8.** Система  $\gamma = \{A_i, i \in I\}$  замкнених підмножин простору  $X$  називається його **замкненою базою**, якщо будь-яку замкнену в  $X$  множину можна подати у вигляді перетину множин із системи  $\gamma$ .

**Означення 4.9.** Система  $\delta = \{B_j\}$  замкнених підмножин  $B_j$  називається **замкненою передбазою**, якщо будь-яку замкнену в  $X$  множину можна подати у вигляді перетину скінченних об'єднань множин із системи  $\delta$ .

**Означення 4.10.** Підмножини  $A$  і  $B$  простору  $X$  називаються **функціонально віддільними**, якщо існує дійсна неперервна функція  $f : X \rightarrow [0, 1]$  така, що

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Оскільки замкнені бази і передбази є двоїстими до відкритих, мають місце наступні твердження.

#### Лема 4.1

Для того щоб система  $\gamma = \{A_i, i \in I\}$  замкнених множин із  $X$  була замкненою базою в  $X$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної точки  $x_0 \in X$  і для кожної замкненої множини  $F_0$ , що не містить точку  $x_0$ , існувала множина  $A_{j_0}$  така, що  $x_0 \notin A_{j_0} \supset F_0$ .

**Вправа 4.1.** Доведіть лему.

#### Лема 4.2

Для того щоб система  $\delta = \{B_j, j \in J\}$  замкнених множин із  $X$  була замкненою передбазою в  $X$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної точки  $x_0 \in X$  і для кожної замкненої множини  $F_0$ , що не містить точку  $x_0$ , існував скінченний набір елементів  $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_n}$  такий, що  $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^n B_{j_k} \supset F_0$ .



**Вправа 4.2.** Доведіть лему.

**Теорема 4.5** (критерій цілковитої регулярності)

Для того щоб  $(X, \tau)$  був цілком регулярним (тихоновським) необхідно і достатньо, щоб кожна його точка  $x_0$  була функціонально віддільною від усіх множин із деякої замкненої передбази  $\delta = \{F_i, i \in I\}$ , що її не містять.

*Доведення.* Необхідність. Якщо простір  $(X, \tau)$  є цілком регулярним (тихоновським), то точка  $x_0 \in X$  функціонально віддільною від усіх замкнених множин, що її не містять, а значить, і від усіх множин із деякої замкненої передбази  $\delta = \{F_i, i \in I\}$ , що її не містять.

Достатність. Нехай  $F_0$  — довільна замкнена в  $X$  множина, що не містить точку  $x_0$ , і нехай  $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_n}$  — скінченний набір елементів із  $\delta$  такий, що  $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^n F_{i_k} \supset F_0$  (за другою лемою). За припущенням, існує неперервна функція  $f_k : X \rightarrow [0, 1]$ , яка здійснює функціональну віддільність точки  $x_0$  і замкненої множини  $F_{i_k}$ .

Покладемо  $f(x) = \sup_k f_k(x)$  і покажемо, що функція  $f$  здійснює функціональну віддільність точки  $x_0$  і множини  $F$ , а тим більше, точки  $x_0$  і множини  $F_0 \subset F$ .

Дійсно,  $f(x_0) = \sup_k f_k(x_0) = 0$ . Далі, оскільки  $\forall k = 1, 2, \dots, n: f_k(x) \leq 1$ , із  $x \in F$  випливає, що  $f(x) = \sup_k f_k(x) = 1$ . Крім того, із того що  $x \in F = \bigcup_{k=1}^n F_{i_k}$  випливає, що,  $x \in F_{i_m}$ ,  $1 \leq m \leq n$ , тобто  $f_m(x) = 1$ .

Залишилося показати неперервність побудованої функції. Для цього треба довести, що

$$(\forall x' \in X, \varepsilon > 0) : (\exists U \in \tau : x' \in U) : (\forall x \in U) : |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Оскільки  $f_k$  — неперервна функція, то існує окіл  $U_k$  точки  $x'$ , такий що  $\forall x \in U_k : |f_k(x) - f_k(x')| < \varepsilon$ .

Покладемо  $U = \bigcap_{k=1}^n U_k$ . Тоді для кожного  $x \in U$  і  $\forall k = 1, 2, \dots, n$  виконуються нерівності

$$\begin{aligned} f_k(x') - \varepsilon &< f_k(x) \leq \sup_k f_k(x) = f(x), \\ f_k(x) &< f_k(x') + \varepsilon \leq f_k(x') + \varepsilon = f(x') + \varepsilon. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $f(x') - \varepsilon < f(x) < f(x') + \varepsilon$ . □

**Зауваження 4.1** — Побудова регулярних просторів, які не є тихоновськими є нетривіальною задачею.

**Теорема 4.6** (Мала лема Урисона (критерій нормальності))

Досяжний простір  $X$  є нормальним тоді й лише тоді, коли для кожної замкненої підмножини  $F \subset X$  і відкритої множини  $U$ , що її містить, існує такий відкритий окіл  $V$  множини  $F$ , що  $\bar{V} \subset U$ , тобто коли кожна замкнена підмножина має замкнену локальну базу.

*Доведення. Необхідність.* Нехай простір  $X$  нормальний. Розглянемо замкнену множину  $F$  та її окіл  $U$ . Покладемо  $F' = X \setminus U$ . Оскільки  $F \cap F' = \emptyset$ , то існує відкритий окіл  $V$  множини  $F$  і відкритий окіл  $V'$  множини  $F'$ , такі що  $V \cap V' = \emptyset$ . Отже,  $V \subset X \setminus V'$ . З цього випливає, що  $\overline{V} \subset X \setminus \overline{V'} = X \setminus V' \subset X \setminus F' = U$ .

*Достатність.* Нехай умови леми виконані, а  $F$  і  $F'$  — довільні диз'юнктні замкнені підмножини простору  $X$ . Покладемо  $U = X \setminus F'$ . Тоді, оскільки множина  $U$  є відкритим окомом множини  $F$ , то за умовою леми, існує окіл  $V$  множини  $F$ , такий що  $\overline{V} \subset U$ . Покладаючи  $V' = X \setminus \overline{V}$  безпосередньо переконуємося, що множини  $V$  і  $V'$  не перетинаються і є околами множини  $F$  і  $F'$ .  $\square$

#### Теорема 4.7 (Велика лема Урисона)

Будь-які непорожні диз'юнктні замкнені підмножини нормального простору є функціонально віддільними.

**Зауваження 4.2** — Ця лема — критерій нормальності.

## §4.4 Література

- [1] **Александрян Р.А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 191–206).
- [2] **Колмогоров А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / Колмогоров А.Н., С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 94–97).
- [3] **Энгелькинг Р.** Общая топология / Р. Энгелькинг — М.: Мир, 1986 (стр. 69–85).

# 5 Компактність в топологічних просторах

Велику роль в топології відіграє клас компактних просторів, які мають дуже важливі властивості. Введемо основні поняття.

## §5.1 Покриття і підпокриття

**Означення 5.1.** Система множин  $S = \{A_i \subset X, i \in I\}$  називається **покриттям** простору  $X$ , якщо  $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ .

**Означення 5.2.** Покриття  $S$  називається **відкритим (замкненим)**, якщо кожна із множин  $A_i$  є відкритою (замкнутою).

**Означення 5.3.** Підсистема  $P$  покриття  $S$  простору  $X$  називається **підпокриттям** покриття  $S$ , якщо сама  $P$  утворює покриття  $X$ .

### Теорема 5.1 (Ліндельоф)

Якщо простір  $X$  має злічену базу, то із його довільного відкритого покриття можна виділити не більш ніж злічене підпокриття.

*Доведення.* Нехай  $\beta = \{U_n\}$  — деяка злічена база простору  $X$ , а  $S = \{G_i, i \in I\}$  — довільне відкрите покриття простору  $X$ . Для кожного  $x \in X$  позначимо через  $G_n(x)$  один з елементів покриття  $S$ , що містить точку  $x$ , а через  $U_n(x)$  — один з елементів бази  $\beta$ , що містить точку  $x$  і цілком міститься у відкритій множині  $G_n$  (теорема 2.3).

$$x \in U_n(x) \subset G_n(x).$$

Відібрані нами множини  $U_n(x) \in \beta$  утворюють злічену множину. Крім того, кожна точка  $x$  простору  $X$  міститься в деякій множині  $U_n(x)$ , отже

$$\bigcup_{x \in X} U_n(x) = X.$$

Вибираючи для кожного  $U_n(x)$  відкриту множину  $G_n(x)$ , ми отримаємо не більш ніж злічену систему, яка є підпокриттям покриття  $S$ .  $\square$

**Означення 5.4.** Топологічний простір  $(X, \tau)$ , в якому із довільного відкритого покриття можна виділити не більш ніж злічене підпокриття, називається **ліндельофовим**, або **фінально компактним**.

## §5.2 Компактні простори

Звужимо клас ліндельофових просторів і введемо наступне поняття.

**Означення 5.5.** Топологічний простір  $(X, \tau)$  називається **компактним (бікомпактним)**, якщо будь-яке його відкрите покриття містить скінченне підпокриття (умова Бореля—Лебега).

**Приклад 5.1**

Простір з тривіальною топологією є компактним.

**Приклад 5.2**

Простір з дискретною топологією є компактним тоді й лише тоді, коли він складається зі скінченної кількості точок.

**Приклад 5.3**

Простір Зариського є компактним.

**Приклад 5.4**

Простір  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  не є компактним.

**Теорема 5.2** (перший критерій компактності)

Для компактності топологічного простору  $(X, \tau)$  необхідно і достатньо, щоб будь-яка сукупність його замкнених підмножин з порожнім перетином містила скінченну підмножину таких множин із порожнім перетином.

$(X, \tau)$  — компактний  $\iff$

$$\forall \left\{ \bar{F}_\alpha, \alpha \in A : \bigcap_{\alpha \in A} \bar{F}_\alpha = \emptyset \right\} \quad \exists \left\{ \bar{F}_{\alpha_1}, \bar{F}_{\alpha_2}, \dots, \bar{F}_{\alpha_n} \right\} : \quad \bigcap_{i=1}^n \bar{F}_{\alpha_i} = \emptyset.$$

*Доведення.* Необхідність. Нехай  $(X, \tau)$  — компактний, а  $\{\bar{F}_\alpha, \alpha \in A\}$  — довільна сукупність замкнених множин, що задовольняє умові  $\bigcap_{\alpha \in A} \bar{F}_\alpha = \emptyset$ . Розглянемо множини  $U_\alpha = X \setminus \bar{F}_\alpha$ . За правилами де Моргана (принцип двоїстості) сукупність множин  $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$  задовольняє умові  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$ , тобто утворює покриття простору  $(X, \tau)$ . Оскільки, за припущенням,  $(X, \tau)$  — компактний простір, то існує скінченна підмножина множин  $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ , які також утворюють покриття:  $\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = X$ . Отже, за правилами де Моргана

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^n \bar{F}_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus \bar{F}_{\alpha_i}) = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = X \implies \bigcap_{i=1}^n \bar{F}_{\alpha_i} = \emptyset.$$

Достатність. Нехай  $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$  — довільне відкрите покриття простору  $(X, \tau)$ . Очевидно, що множини  $\bar{F}_\alpha = X \setminus U_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  є замкненими, а їх сукупність має порожній перетин:  $\bigcap_{\alpha \in A} \bar{F}_\alpha = \emptyset$ . За умовою, ця сукупність містить скінченну підмножину множин  $\{\bar{F}_{\alpha_1}, \bar{F}_{\alpha_2}, \dots, \bar{F}_{\alpha_n}\}$ , таку що  $\bigcap_{i=1}^n \bar{F}_{\alpha_i} = \emptyset$ . Звідси випливає, що множини  $U_{\alpha_i}$ , які є доповненнями множин  $\bar{F}_{\alpha_i}$ , утворюють покриття простору  $(X, \tau)$ , тобто простір  $(X, \tau)$  є компактним.  $\square$

**Означення 5.6.** Система підмножин  $\{M_\alpha \subset X, \alpha \in A\}$  називається **центрованою**, якщо перетин довільної скінченної кількості цих підмножин є непорожнім.

$$\forall \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in A \quad \bigcap_{i=1}^n M_{\alpha_i} \neq \emptyset \implies \{M_\alpha \subset X, \alpha \in A\} \text{ — центрована система.}$$

**Теорема 5.3** (другий критерій компактності)

Для компактності топологічного простору  $(X, \tau)$  необхідно і достатньо, щоб будь-яка центрована система його замкнених підмножин мала непорожній перетин

*Доведення.* Необхідність. Нехай простір  $(X, \tau)$  — компактний, а  $\{F_\alpha\}$  — довільна центрована система замкнених підмножин. Множини  $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$  відкриті. Жодна скінченна система цих множин  $G_{\alpha_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  не покриває  $X$ , оскільки

$$\forall n \in \mathbb{N} \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \neq \emptyset \implies X \setminus \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \neq X \setminus \emptyset = X.$$

Отже, оскільки  $(X, \tau)$  — компактний простір, система  $\{G_\alpha\}$  не може бути покриттям компактного простору. Інакше ми могли б вибрати із системи  $\{G_\alpha\}$  скінченне підпокриття  $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ , а це означало б, що  $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$ . Але, якщо  $\{G_\alpha\}$  — не покриття, то  $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$ .

Достатність. Припустимо, що довільна центрована система замкнених множин із  $X$  має непорожній перетин. Нехай  $\{G_\alpha\}$  — відкрите покриття  $(X, \tau)$ . Розглянемо множини  $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$ . Тоді

$$\bigcup_\alpha G_\alpha = X \implies X \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha = X \setminus X = \emptyset \implies \bigcap_\alpha (X \setminus G_\alpha) = \bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset.$$

Це означає, що система  $\{F_\alpha\}$  не є центрованою, тобто існують такі множини  $F_1, F_2, \dots, F_N$ , що

$$\bigcap_{i=1}^N F_i = \emptyset \implies X \setminus \bigcap_{i=1}^N F_i = X \setminus \emptyset \implies \bigcup_{i=1}^N G_i = X.$$

Отже, із покриття  $\{G_\alpha\}$  ми виділили скінчену підсистему

$$\{G_1, \dots, G_N\} = \{X \setminus F_1, \dots, X \setminus F_N\}$$

таку що  $\bigcup_{i=1}^N G_i = X$ . Це означає, що простір  $(X, \tau)$  є компактним.  $\square$

**§5.3 Види компактності**

**Означення 5.7.** Множина  $M \subset X$  називається **компактною (бікомпактною)**, якщо топологічний підпростір  $(M, \tau_M)$ , що породжується індукованою топологією, є компактним.

**Означення 5.8.** Множина  $M \subset X$  називається **відносно компактною (відносно бікомпактною)**, якщо її замикання  $\overline{M}$  є компактною множиною.

**Означення 5.9.** Компактний і хаусдорфів простір називається **компактом (бікомпактом)**.

**Означення 5.10.** Топологічний простір називається **зліченно компактним**, якщо із його довільного зліченного відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття (умова Бореля).

**Означення 5.11.** Топологічний простір називається **секвенційно компактним**, якщо довільна нескінченна послідовність його елементів містить збіжну підпослідовність (умова Больцано-Вейерштрасса).

## §5.4 Зв'язки між видами компактності

### Теорема 5.4 (перший критерій зліченної компактності)

Для того щоб простір  $(X, \tau)$  був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна його нескінченна підмножина мала принаймні одну строгу граничну точку, тобто точку, в довільному околі якої міститься нескінченна кількість точок підмножини.

*Доведення.* Необхідність. Нехай  $(X, \tau)$  — зліченно компактний простір, а  $M$  — довільна нескінченна множина в  $X$ . Припустимо, усупереч твердженню, що  $M$  не має жодної строгої граничної точки. Розглянемо послідовність замкнених множин  $\Phi_n \subset M$ , таку що  $\Phi_n \subset \Phi_{n+1}$ . Візьмемо  $x_n \in \Phi_n$ . За припущенням нескінченна послідовність точок  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  не має строгих граничних точок. Побудуємо скінченну систему підмножин  $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ , поклавши  $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ . Зі структури цих множин випливає, що будь-яка скінченна сукупність точок  $F_n$  має непорожній перетин, всі множини  $F_n$  є замкненими, але  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ . Отже, ми побудували зліченну центровану систему замкнених множин, перетин яких порожній, що суперечить припущенню, що простір  $(X, \tau)$  зліченно компактним.

Достатність. Нехай в просторі  $(X, \tau)$  кожна нескінченна множина  $M$  має строгу граничну точку. Доведемо, що простір  $(X, \tau)$  є зліченно компактним. Для цього достатньо перевірити, що будь-яка зліченна центрована система  $\{F_n\}$  замкнених множин має непорожній перетин. Побудуємо множини  $\hat{F}_n = \bigcap_{i=1}^n F_i$ . Оскільки система  $\{F_n\}$  є центрованою, то замкнені непорожні множини  $\hat{F}_n$  утворюють послідовність  $\hat{F}_1, \hat{F}_2, \dots, \hat{F}_n, \dots$ , що не зростає. Очевидно, що  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{F}_n$ . Можливі два варіанти: серед множин  $\hat{F}_n$  є лише скінченна кількість попарно різних множин, або нескінченна кількість таких множин. Розглянемо ці варіанти окремо.

1. Якщо серед множин  $\hat{F}_n$  є лише скінченна кількість попарно різних множин, то починаючи з деякого номера  $n_0$  виконується умова  $\hat{F}_{n_0} = \hat{F}_{n_0+1} = \dots$ . Тоді твердження доведено, оскільки  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{F}_n = \hat{F}_{n_0} \neq \emptyset$ .
2. Якщо серед множин  $\hat{F}_n$  є лише нескінченна кількість попарно різних множин, то можна вважати, що  $\hat{F}_n \setminus \hat{F}_{n+1} \neq \emptyset$ . Оберемо по одній точці з кожної множини  $\hat{F}_n \setminus \hat{F}_{n+1}$ . Отже, ми побудували нескінченну множину різних точок, яка, за умовою, має граничну точку  $x^*$ . Всі точки  $x_n, x_{n+1}, \dots$  належать множинам  $\hat{F}_n$ . Отже,  $x^* \in \hat{F}_n \forall n \in \mathbb{N}$ , до того ж  $\hat{F}_n = \hat{F}_n$ . З цього випливає, що  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{F}_n \neq \emptyset$ .  $\square$

**Зауваження 5.1** — Вимогу наявності строгої граничної точки можна замінити аксіомою  $T_1$ . Інакше кажучи, в досяжних просторах будь-яка гранична точка є строгою. Припустимо, що  $X$  — досяжний простір, а гранична точка  $x$  множини  $A$  не є строгою, і тому існує деякий окіл  $U$ , що містить лише скінчену кількість точок множини  $A$ , що відрізняються від  $x$ . Розглянемо множину  $V = U \setminus ((A \cap U) \setminus \{x\})$ , тобто різницю між множиною  $U$  і цим скінченим перетином. Оскільки простір  $X$  є досяжним, то в ньому будь-яка скінченна множина є замкненою. Отже, множина  $V$  є відкритою ( $V = X \cap (U \setminus \{A \cap U \setminus \{x\}\}) = U \cap (X \setminus (U \cap A \setminus \{x\}))$ ), містить точку  $x$ , а перетин множин дорівнює  $A \cap V = \{x\}$  або  $\emptyset$ . Це суперечить тому, що  $x$  — гранична точка множини  $A$ .

**Зауваження 5.2** — Чому не можна взагалі зняти умову наявності строгої граничної точки? Розглянемо як контрприклад топологію, що складається з натуральних чисел на відрізку  $[1, n]$ , тобто  $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, [1, n] \cap \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Цей простір не є зліченно компактним (порушується другий критерій компактності). Розглянемо нескінченну множину  $A \subset \mathbb{N}$  і покладемо  $n = \min A$ . Тоді будь-який  $m \in A \setminus \{n\}$  є граничною точкою множини  $A$ , тобто  $\mathbb{N}$  є слабо зліченно компактним простором.

**Теорема 5.5** (другий критерій зліченної компактності)

Для того щоб досязний простір  $(X, \tau)$  був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна нескінченна множина точок із  $X$  мала принаймні одну граничну точку (такі простори називаються слабо зліченно компактними). Інакше кажучи, в досязних просторах слабка зліченна компактність еквівалентна зліченній компактності.

*Доведення. Необхідність.* Припустимо, що  $A$  — злічена підмножина  $X$ , що не має граничних точок (це не обмежує загальності, оскільки в будь-якій нескінченній підмножині ми можемо вибрати злічену підмножину). Множина  $A$  є замкненою в  $X$  (оскільки будь-яка точка множини  $\bar{A} \setminus A$  є граничною точкою множини  $A$ , яка за припущенням не має граничних точок, тому  $\bar{A} = A$ ). Нехай  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  і  $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ . Зі сказаного вище випливає, що  $A_n = \bar{A}_n$ , інакше  $A' = \emptyset$ . Покладемо  $G_n = X \setminus A_n$ . Ця множина є доповненням замкненої множини  $A_n$ , тому вона є відкритою. Розглянемо послідовність множин  $G_n$ . Вона зростає і покриває  $X$ , тому що кожна точка  $x$  із множини  $X \setminus A$  належить  $G_1$ , а значить, усім множинам  $G_n$ , а якщо  $x \in A$ , то вона дорівнює якомусь  $a_N$ , отже, належить  $G_{N+1}$ . Таким чином, послідовність множин  $G_n$  є покриттям, але вона не може містити скінченне підпокриття  $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_n}\}$ , оскільки об'єднання елементів цього скінченного підпокриття було б найбільшим серед усіх множин  $G_n$  (які утворюють зростаючу послідовність).

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i_k} = G_N = X.$$

У цьому випадку об'єднання  $G_N = \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$  не може містити усі елементи  $a_i$ , номер яких перевищує  $N$  (за конструкцією), отже, воно не покриває  $X$ . У такому випадку простір  $X$  не є зліченно компактним. Отримана суперечність доводить бажане.

*Достатність.* Припустимо, що простір  $X$  не є зліченно компактним. Значить, існує зліченне відкрите покриття  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , що не містить скінченного підпокриття. Жодна сукупність множин  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  не є покриттям, тому можемо вибрати з множин  $X \setminus \bigcup_{k=1}^n G_i$  по одній точці  $x_i$  і утворити із них множину  $A$ .

Розглянемо довільну точку  $x \in X$ . Оскільки  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — покриття простору  $X$ , точка  $x$  належить якійсь множині  $G_N$ , яка своєю чергою може містити лише такі точки  $x_i$  із множини  $A$ , номер яких задовольняє умові  $i < N$  (оскільки за означенням точка  $x_i$  не належить жодному  $G_j$ , якщо  $j \leq i$ ). Отже, множина  $G_N$  є околom точки  $x$ , перетин якої із множиною  $A$  є лише скінченним. Водночас, оскільки простір є досязним, в околі граничної точки будь-якої множини повинно міститись нескінченна кількість точок цієї множини. Отже, точка  $x$  не є граничною точкою множини  $A$ . Це твердження є слушним для будь-якої точки  $x$ , отже, множина  $A$  не має жодної граничної точки. Отримана суперечність доводить бажане.  $\square$

**Теорема 5.6** (про еквівалентність компактності та зліченої компактності)

Для топологічного простору  $(X, \tau)$  зі зліченною базою компактність еквівалентна зліченній компактності.

*Доведення.* Необхідність. Нехай  $(X, \tau)$  — компактний простір. Тоді із довільного відкритого покриття можна виділити скінченне покриття. Значить, скінченне покриття можна виділити зі зліченного відкритого покриття.

Достатність. Нехай  $(X, \tau)$  є зліченно компактним простором, а  $S = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$  — його довільне відкрите покриття. Оскільки простори зі зліченою базою мають властивість Ліндельофа (теорема 5.1), то покриття  $S$  містить підпокриття  $S'$ , яке, внаслідок, зліченної компактності простору  $(X, \tau)$  містить скінченне підпокриття  $S''$ . Отже, простір  $(X, \tau)$  є зліченно компактним.  $\square$

**Теорема 5.7** (про еквівалентність компактності, секвенційної компактності та зліченної компактності)

Для досяжних просторів зі зліченою базою компактність, секвенційна компактність і зліченна компактність є еквівалентними.

*Доведення.* З огляду на теорему 5.6, достатньо показати, що злічена компактність в досяжному просторі зі зліченною базою еквівалентна секвенційній компактності.

Необхідність. Розглянемо зліченно компактний простір  $(X, \tau)$ . Нехай  $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — довільна нескінченна послідовність (тобто послідовність, що містить нескінченну кількість різних точок), а простір є зліченно компактним. Отже, за теоремою 5.5, множина  $A$  має граничну точку  $x^*$ . Розглянувши зліченну локальну базу околів  $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  точки  $x^*$ , так що  $G_{k+1} \subset G_k$ , можна виділити послідовність  $x_{n_k}$ , що збігається до  $x^*$ . Отже, простір  $(X, \tau)$  є секвенційно компактним.

Достатність. Нехай простір  $(X, \tau)$  є секвенційно компактним. З теореми 5.4 випливає, що будь-яка зліченна нескінченна підмножина простору  $X$  має строгу граничну точку. Це означає, що будь-яка нескінченна зліченна послідовність має граничну точку, тобто із неї можна виділити збіжну підпослідовність.  $\square$

## §5.5 Література

- [1] **Александрян Р.А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 225–238).
- [2] **Колмогоров А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / Колмогоров А.Н., С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 98–105).
- [3] **Энгелькинг Р.** Общая топология / Р. Энгелькинг — М.: Мир, 1986 (стр. 195–215).



# II

Простори зі структурою

## Частина II: Зміст

---

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>6</b>  | <b>Метричні простори</b>                  | <b>37</b> |
| 6.1       | Основні означення . . . . .               | 37        |
| 6.2       | Збіжність і замкненість . . . . .         | 38        |
| 6.3       | Збіжність і фундаментальність . . . . .   | 40        |
| 6.4       | Література . . . . .                      | 41        |
| <b>7</b>  | <b>Повні метричні простори</b>            | <b>43</b> |
| 7.1       | Повнота, ізометрія і поповнення . . . . . | 43        |
| 7.2       | Вкладені кулі і повнота . . . . .         | 44        |
| 7.3       | Категорії множин . . . . .                | 46        |
| 7.4       | Стискаючі відображення . . . . .          | 46        |
| 7.5       | Література . . . . .                      | 47        |
| <b>8</b>  | <b>Компактні метричні простори</b>        | <b>49</b> |
| 8.1       | Зв'язки між видами компактності . . . . . | 49        |
| 8.2       | Література . . . . .                      | 51        |
| <b>9</b>  | <b>Лінійні простори</b>                   | <b>53</b> |
| 9.1       | Лінійні простори і функціонали . . . . .  | 53        |
| 9.2       | Продовження функціоналів . . . . .        | 54        |
| 9.3       | Ланцюги і мажоранти . . . . .             | 56        |
| 9.4       | Література . . . . .                      | 57        |
| <b>10</b> | <b>Нормовані простори</b>                 | <b>59</b> |
| 10.1      | Норми векторів . . . . .                  | 59        |
| 10.2      | Норми функціоналів . . . . .              | 59        |
| 10.3      | Простір операторів . . . . .              | 61        |
| 10.4      | Література . . . . .                      | 62        |

---

# 6 Метричні простори

Численні поняття і теореми математичного аналізу використовують поняття відстані між точками простору. Зокрема, це стосується границі і неперервності. В багатьох випадках самі теореми та їх доведення залежать не від способу завдання метрики, а лише від їхніх властивостей: невід'ємності, симетрії і нерівності трикутника.

## §6.1 Основні означення

**Означення 6.1.** Нехай  $X$  — довільна множина. Відображення  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  називається **метрикою**, якщо  $\forall x, y, z \in X$  воно має такі властивості (аксіоми метрики):

1.  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$  (аксіома тотожності);
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксіома симетрії);
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  (нерівність трикутника).

**Означення 6.2.** **Метричним простором** називається пара  $(X, \rho)$ , де  $X$  — множинаносій, а  $\rho$  — метрика.

### Приклад 6.1

$$\left( \mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \right).$$

### Приклад 6.2

$$(C[a, b], \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|).$$

**Означення 6.3.** **Відкритою кулею** радіуса  $\varepsilon > 0$  з центром в точці  $x_0 \in X$  називається множина

$$S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

**Означення 6.4.** **Замкненою кулею** радіуса  $\varepsilon > 0$  з центром в точці  $x_0 \in X$  називається множина

$$\overline{S}(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

### Приклад 6.3

В просторі  $(\mathbb{R}, |x - y|)$  відкритою кулею  $S(x_0, r)$  є інтервал  $(x_0 - r, x_0 + r)$ , а замкненою кулею — сегмент  $[x_0 - r, x_0 + r]$ .

### Приклад 6.4

В просторі  $(\mathbb{R}^2, \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2})$  відкритою кулею  $S(x_0, r)$  є круг без границі радіуса  $r$  з центром в точці  $x_0$ .

**Приклад 6.5**

В просторі  $(\mathbb{R}^2, |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|)$  одинична куля є ромбом з вершинами  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$  і  $(-1, 0)$ .

**Приклад 6.6**

В просторі  $(C[a, b], \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|)$  околom є смуга, що складається із функцій, які задовольняють умові  $\forall t \in [a, b]: |x(t) - y(t)| < r$ .

**Означення 6.5.** Множина  $G \subset X$  називається **відкритою** в метричному просторі  $(X, \rho)$ , якщо  $\forall x \in G \exists S(x, r) \subset G$ .

**Означення 6.6.** Множина  $G \subset X$  називається **замкненою**, якщо її доповнення є відкритою множиною.

**Означення 6.7.** Множина метричного простору є **обмеженою за відстанню**, або просто **обмеженою**, якщо воно міститься в деякій кулі:  $\exists S(x, r) : M \subset S(x, r)$ .

## §6.2 Збіжність і замкненість

**Означення 6.8.** Точка  $x$  метричного простору  $(X, \rho)$  називається **границею послідовності** точок  $x_n \in X$ , якщо  $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Така збіжність називається **збіжністю за відстанню** (або за метрикою).

Цей факт записується так:  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Лема 6.1**

Для довільних точок  $x, x', y, y'$  метричного простору  $(X, \rho)$  виконується нерівність

$$|\rho(x', y') - \rho(x, y)| \leq \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

*Доведення.* Із нерівності трикутника випливає:

$$\rho(x', y') \leq \rho(x', x) + \rho(x, y') \leq \rho(x, x') + \rho(x, y) + \rho(y, y').$$

Отже,

$$\rho(x', y') - \rho(x, y) \leq \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Аналогічно,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x') + \rho(x', y) \leq \rho(x, x') + \rho(x', y') + \rho(y', y).$$

Звідси випливає, що

$$\rho(x, y) - \rho(x', y') \leq \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Таким чином,

$$|\rho(x', y') - \rho(x, y)| \leq \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

□

**Лема 6.2**

Метрика  $\rho(x, y)$  є неперервною функцією своїх аргументів, тобто якщо  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ , то  $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y)$ .

*Доведення.* Із леми 6.1 випливає, що при  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \rightarrow 0.$$

□

**Теорема 6.1**

Відкрита куля  $S(a, r)$  в метричному просторі  $(X, \rho)$  є відкритою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.

*Доведення.* Розглянемо довільну точку  $x \in S(a, r)$ .

$$x \in S(a, r) \implies \rho(x, a) < r.$$

Покладемо  $\varepsilon = r - \rho(x, a)$ . Розглянемо довільну точку  $y \in S(x, \varepsilon)$ .

$$y \in S(x, \varepsilon) \implies \rho(y, x) < \varepsilon.$$

$$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \implies y \in S(a, r) \implies S(x, \varepsilon) \subset S(a, r).$$

Таким чином, точка  $x$  є внутрішньою точкою множини  $S(a, r)$ , тобто  $S(a, r)$  — відкрита множина. □

**Теорема 6.2**

Точка  $x$  належить замиканню  $\bar{A}$  множини  $A \subset X$  в топології, що індукована на  $X$  метрикою  $\rho$ , тоді і лише тоді, якщо існує послідовність точок множини  $A$ , що збігається до точки  $x$ .

*Доведення.* Необхідність.

$$x \in \bar{A} \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A \cap S(x, \frac{1}{n}) \implies \rho(x, x_n) < \frac{1}{n} \implies x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Достатність.

$$x \notin \bar{A} \implies \exists r > 0 : A \cap S(x, r) = \emptyset \implies \forall x' \in A : \rho(x, x') \geq r \implies \nexists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Що і треба було довести. □

**Наслідок 6.1**

Теорема 6.2 стверджує, що кожна точка дотику множини в метричному просторі є границею деякої послідовності елементів цієї множини. Отже, топологію метричного простору можна описати не лише за допомогою куль, а й за допомогою збіжних послідовностей.

**Наслідок 6.2**

Множина є замкнутою, якщо всі послідовності її точок збігаються лише до точок цієї ж множини.

**Теорема 6.3**

Замкнена куля  $\bar{S}(a, r)$  є замкнутою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.

*Доведення.* Нехай  $x_n \in \bar{S}(a, r)$ .

$$x_n \in \bar{S}(a, r) \implies \rho(x_n, a) \leq r \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = \rho\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, a\right) = \rho(x, a) \leq r \implies x \in \bar{S}(a, r).$$

Отже, всі граничні точки множини  $\bar{S}(a, r)$ , які є точками її дотику, належать кулі  $\bar{S}(a, r)$ .  $\square$

**§6.3 Збіжність і фундаментальність**

**Означення 6.9.** Послідовність  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  точок метричного простору  $(X, \rho)$  називається **фундаментальною**, якщо  $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ .

**Лема 6.3**

Будь-яка збіжна послідовність метричного простору є фундаментальною.

*Доведення.* Нехай  $x_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тоді

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty.$$

Отже, послідовність є фундаментальною.  $\square$

**Лема 6.4**

Будь-яка фундаментальна послідовність точок метричного простору є обмеженою.

*Доведення.* Задамо  $\varepsilon > 0$  і підберемо натуральне число  $N$  так, щоб  $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$  при  $n, m \geq N$ . Зокрема,  $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$  при  $n \geq N$ . Введемо позначення

$$r = \max\{\varepsilon, \rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N)\}.$$

Тепер при всіх  $n = 1, 2, \dots$

$$\rho(x_n, x_N) \leq r.$$

Інакше кажучи,

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{S}(x_N, r).$$

Замінюючи число  $r$  на будь-яке число  $r' > r$ , можна заключити послідовність в довільну відкриту кулю:

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S(x_N, r'). \quad \square$$

## §6.4 Література

- [1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 47–50).
- [2] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 60–69).





# 7 Повні метричні простори

## §7.1 Повнота, ізометрія і поповнення

**Означення 7.1.** Метричний простір називається **повним**, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність має границю.

### Приклад 7.1

$$\left(\mathbb{R}^n, \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}\right).$$

### Приклад 7.2

$$(C[a, b], \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|).$$

**Означення 7.2.** Бієктивне відображення  $\varphi$  одного метричного простору  $(E_1, \rho_1)$  на інший  $(E_2, \rho_2)$  називається **ізометрією**, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in E_1 : \rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

**Означення 7.3.** Метричні простори, між якими існує ізометрія, називаються **ізометричними**.

**Означення 7.4.** Повний метричний простір  $(\tilde{E}, \tilde{\rho})$  називається **поповненням** метричного простору  $(E, \rho)$ , якщо

1.  $E \subset \tilde{E}$ ;
2.  $\overline{E} = \tilde{E}$ .

### Теорема 7.1 (про поповнення метричного простору, Хаусдорф)

Будь-який метричний простір має поповнення, єдине з точністю до ізометрії, що залишає точки простору нерухомими.

### Лема 7.1

Якщо фундаментальна послідовність містить збіжну підпослідовність, то сама послідовність збігається до тієї ж границі.

*Доведення.* Припустимо, що  $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \rho(x_{n_k}, x_0) = 0$ , тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N_1 : \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon.$$

За нерівністю трикутника

$$\rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x).$$

Оскільки послідовність  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  є фундаментальною,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \geq N_2 : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n, n_k \geq \max(N_1, N_2) : \rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad \square$$

### Лема 7.2

Будь-яка підпослідовність фундаментальної послідовності є фундаментальною.

*Доведення.* За нерівністю трикутника

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, x_n) + \rho(x_n, x_{n_l}).$$

Оскільки послідовність  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  є фундаментальною,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \geq N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n, n_k, n_l \geq N : \rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, x_n) + \rho(x_n, x_{n_l}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad \square$$

## §7.2 Вкладені кулі і повнота

### Теорема 7.2 (принцип вкладених куль)

Для того щоб метричний простір був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому будь-яка послідовність замкнених вкладених одна в одну куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.

*Доведення.* Необхідність. Нехай  $(X, \rho)$  — повний метричний простір, а  $S_1^*(x_1, r_1) \supset S_2^*(x_2, r_2) \supset \dots$  — вкладені одна в одну замкнені кулі.

Послідовність їх центрів є фундаментальною, оскільки

$$\rho(x_n, x_m) < r_n \text{ при } m > n, \text{ а } r_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Оскільки  $(X, \rho)$  — повний метричний простір, існує елемент  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x \in X$ .

Покажемо, що  $x$  належить всім кулям  $S_n^*(x_n, r_n), n \in \mathbb{N}$ , тобто  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^*(x_n, r_n)$ . Дійсно, оскільки  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall n \geq N : \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Значить, в довільному околі точки  $x$  знайдеться нескінченна кількість точок із послідовності  $\{x_n\}$ , починаючи з деякого номера  $N$ . Оскільки кулі вкладені одна в одну, ці точки належать всім попереднім кулям  $S_1^*, S_2^*, \dots, S_{N-1}^*$ . Отже, для довільного  $n$  точка  $x$  є точкою дотику множини  $S_n^*$ , тобто належить його замиканню. Оскільки кожна куля є замкнутою, точка  $x$  належить всім  $S_n^*$ . Це означає, що

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^*.$$

Достатність. Покажемо, що якщо  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — фундаментальна послідовність, то вона має границю  $x \in X$ .

1. Оскільки послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  є фундаментальною, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 > 0: \forall n \geq n_1 \rho(x_n, x_{n_1}) < \varepsilon$ . Поклавши  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , ми можемо вибрати точку  $x_{n_1}$  так, що  $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$  для довільного  $n > n_1$ . Зробимо точку  $x_{n_1}$  центром замкненої кулі радіуса 1:  $S_1^*(x_{n_1}, 1)$ .
2. Оскільки підпослідовність  $\{x_n\}_{n=n_1}^{\infty}$  є фундаментальною (за лемою 7.2), то поклавши  $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ , можна вибрати точку  $x_{n_2}$  х таку, що  $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$  для довільного  $n > n_2 > n_1$ . Зробимо точку  $x_{n_2}$  центром замкненої кулі радіуса  $\frac{1}{2}$ :  $S_2^*(x_{n_2}, \frac{1}{2})$ .
- ...
- k. Нехай  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{k-1}}$ , де  $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$  уже вибрані. Тоді, оскільки підпослідовність  $\{x_n\}_{n=n_{k-1}}^{\infty}$  є фундаментальною, покладемо  $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$  і виберемо точку  $x_{n_k}$  так, щоб виконувалися умови  $\rho(x_n, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$  для довільного  $n \geq n_k > n_{k-1}$ . Як і раніше, будемо вважати точку  $x_{n_k}$  центром замкненої кулі радіуса  $\frac{1}{2^{k-1}}$ :  $S_k^*(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$ .
- ...

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. Покажемо, що ці кулі вкладаються одна в одну, тобто

$$S_{k+1}^*(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^k}) \subset S_k^*(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}).$$

Нехай точка  $y \in S_{k+1}^*(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^k})$ . Значить,  $\rho(y, x_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ . За нерівністю трикутника

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \rho(y, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}).$$

Оскільки  $n_{k+1} > n_k$ , то  $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$ . Значить,

$$\rho(y, x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Інакше кажучи,

$$y \in S_k^*(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$$

Таким чином, ми побудували послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. За припущенням, в просторі  $(X, \rho)$  існує точка  $x$ , спільна для всіх таких куль:  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k^*(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}})$ . Крім того, за побудовою,  $\rho(x_n, x) = \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0$ , коли  $k \rightarrow \infty$ . Таким чином, фундаментальна послідовність  $\{x_n\}$  містить підпослідовність  $\{x_{n_k}\}$ , що збігається до деякої точки в просторі  $(X, \rho)$ . Із леми 7.1 випливає, що і вся послідовність  $\{x_n\}$  прямує до тієї ж точки. Таким чином, простір  $(X, \rho)$  є повним.  $\square$

**Зауваження 7.1** — Покажемо, що умову  $r_n \rightarrow 0$  зняти не можна. Розглянемо метричний простір  $(\mathbb{N}, \rho)$ , де

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Визначимо послідовність замкнених куль з центрами в точках  $n$  і радіусом  $1 + \frac{1}{2n}$ :

$$\bar{S}(n, 1 + \frac{1}{2n}) = \{m : \rho(n, m) \leq 1 + \frac{1}{2n}\} = \{n, n+1, \dots\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ці кулі є вкладеними одна в одну і замкненими, простір є повним, але перетин куль є порожнім (якщо б число ми не взяли, знайдеться нескінченна кількість куль, які лежать правіше цієї точки). Отже, необхідні умови в принципі вкладених куль не виконуються.

### §7.3 Категорії множин

**Означення 7.5.** Підмножина  $M$  метричного простору  $(X, \rho)$  називається **множиною першої категорії**, якщо її можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зліченої кількості ніде не щільних множин.

**Означення 7.6.** Підмножина  $M$  метричного простору  $(X, \rho)$  називається **множиною другої категорії**, якщо вона не є множиною першої категорії.

#### Теорема 7.3 (теорема Бера про категорії)

Нехай  $(X, \rho)$  — непорожній повний метричний простір, тоді  $X$  є множиною другої категорії.

*Доведення.* Припустимо супротивне, тобто

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

і кожна множина  $E_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  є ніде не щільною в  $X$ . Нехай  $S_0$  — деяка замкнена куля радіуса 1.

Оскільки множина  $E_1$  є ніде не щільною, існує замкнена куля  $S_1$ , радіус якої менше  $\frac{1}{2}$ , така що

$$S_1 \subset S_0 \text{ і } S_1 \cap E_1 = \emptyset.$$

(Якщо існує куля радіуса більше  $\frac{1}{2}$ , що задовольняє таким умовам, то ми виберемо в ній кулю, радіуса менше  $\frac{1}{2}$ .)

Оскільки множина  $E_2$  є ніде не щільною, існує замкнена куля  $S_2$ , радіус якої менше  $\frac{1}{2^2}$ , така що

$$S_2 \subset S_1 \text{ і } S_2 \cap E_2 = \emptyset.$$

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність вкладених одна в одну замкнених куль  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , радіуси яких прямують до нуля. За принципом вкладених куль існує точка  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \cap X$ . Оскільки за побудовою  $S_n \cap E_n = \emptyset$ , то  $x \notin E_n$ ,  $\forall n = 1, 2, \dots$ . Значить,  $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Це суперечить припущенню, що  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .  $\square$

### §7.4 Стискаючі відображення

**Означення 7.7.** Відображення  $g : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$  називається **стискаючим**, якщо існує таке число  $0 < a < 1$ , що  $\rho(g(x), g(y)) \leq a\rho(x, y)$  для довільних  $x, y \in X$ .

#### Теорема 7.4

Будь-яке стискаюче відображення є неперервним.

*Доведення.* Нехай  $x_n \rightarrow x$ , а  $g : X \rightarrow X$  є стискаючим відображенням. Тоді

$$0 \leq \rho(g(x_n), g(x)) \leq \alpha \rho(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отже,

$$g(x_n) \rightarrow g(x), \text{ коли } x_n \rightarrow x.$$

□

### Теорема 7.5 (принцип стискаючих відображень Банаха)

Будь-яке стискаюче відображення повного метричного простору  $(X, \rho)$  в себе має лише одну нерухому точку, тобто  $\exists! x \in X: g(x) = x$ .

*Доведення.* Нехай  $x_0$  — деяка точка із  $X$ . Визначимо послідовність точок  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  за таким правилом:

$$x_1 = g(x_0), \dots, x_n = g(x_{n-1}).$$

Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною. Дійсно, якщо  $m > n$ , то

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \leq \alpha \rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq \dots \leq \\ &\alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \\ &\alpha^n \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Таким чином, оскільки  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, m > n.$$

Внаслідок повноти простору  $(X, \rho)$  в ньому існує границя послідовності  $\{x_n\}$ . Позначимо її через  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Із теореми 7.3 випливає, що

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, нерухома точка існує.

Доведемо її єдиність. Якщо  $g(x) = x$  і  $g(y) = y$ , то  $\rho(x, y) \leq \alpha \rho(x, y)$ , тобто  $\rho(x, y) = 0$ . За аксіомою тотожності (невиродженості) це означає, що  $x = y$ . □

### Наслідок 7.1

Умову  $\alpha < 1$  не можна замінити на  $\alpha \leq 1$ .

*Доведення.* Якщо відображення  $g : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$  має властивість  $\rho(g(x), g(y)) \leq \rho(x, y)$ ,  $\forall x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , то нерухомої точки може не бути. Дійсно, розглянемо простір  $([1, \infty), |x - y|)$  і визначимо відображення  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ . Тоді  $\rho(g(x), g(y)) = |x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}| < |x - y|$ . Оскільки для жодного  $x \in [1, \infty)$   $g(x) = x + \frac{1}{x} \neq x$ , нерухомої точки немає. □

## §7.5 Література

- [1] **Садовничий В. А.** Теория операторов. / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 41–47).
- [2] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 66–75).



# 8 Компактні метричні простори

## §8.1 Зв'язки між видами компактності

**Означення 8.1.** Нехай  $A$  — деяка множина в метричному просторі  $(X, \rho)$  і  $\varepsilon$  — деяке додатне число. Множина  $B$  із цього простору називається  **$\varepsilon$ -сіткою для множини  $A$** , якщо  $\forall x \in A \exists y \in B: \rho(x, y) < \varepsilon$ .

**Означення 8.2.** Множина  $A$  називається **цілком обмеженою**, якщо для неї при довільному  $\varepsilon > 0$  існує скінченна  $\varepsilon$ -сітка.

### Теорема 8.1 (Хаусдорф)

Нехай  $(X, \rho)$  — метричний простір. Наступні твердження є еквівалентними.

1.  $(X, \rho)$  — компактний;
2.  $(X, \rho)$  — повний і цілком обмежений;
3. із довільної послідовності точок простору  $(X, \rho)$  можна вибрати збіжну підпослідовність (**секвенціальна компактність**);
4. довільна нескінченна підмножина в  $X$  має хоча б одну граничну точку (**злічення компактність**).

*Доведення.*  $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1$ .

Покажемо, що  $1 \implies 2$ . Нехай  $(X, \rho)$  — компактний простір. Покажемо його повноту. Нехай  $\{x_n\}$  — фундаментальна послідовність в  $X$ . Покладемо  $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$  і  $B_n = \overline{A_n}$ . Оскільки система  $\{B_n\}$  є центрованою системою замкнених підмножин, то  $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$  — непорожня множина. Нехай  $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ . Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N > 0 \exists n > N : \rho(x_0, x_n) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, m > N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, m > N : \rho(x_0, x_m) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, x_m) < 2\varepsilon.$$

З цього випливає, що

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in X.$$

Отже,  $(X, \rho)$  — повний простір. Припустимо тепер, що простір  $(X, \rho)$  не є цілком обмеженим. Інакше кажучи, припустимо, що існує таке число  $\varepsilon_0$  таке, що в  $X$  немає скінченної  $\varepsilon_0$ -сітки. Візьмемо довільну точку  $x_1 \in X$ .

1.  $\exists x_2 \in X: \rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$ . Інакше точка  $x_1$  утворювала б  $\varepsilon_0$ -сітку в  $X$ .
2.  $\exists x_3 \in X: \rho(x_1, x_3), \rho(x_2, x_3) > \varepsilon_0$ . Інакше точки  $x_1, x_2$  утворювали б  $\varepsilon_0$ -сітку в  $X$ .
- ...
- n.  $\exists x_{n+1} \in X: \rho(x_i, x_{n+1}) > \varepsilon_0, i = 1, 2, \dots, n$ . Інакше точки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  утворювали б  $\varepsilon_0$ -сітку в  $X$ .
- ...

Таким чином, ми побудували послідовність  $\{x_n\}$ , яка не є фундаментальною, а, отже, не має границі. З цього випливає, що кожна із множин  $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ , які утворюють центровану систему, є замкненою. Їх перетин є порожнім. Це протирічить компактності простору  $(X, \rho)$ .

Покажемо, що  $2 \implies 3$ . Нехай  $\{x_n\}$  — послідовність точок  $X$ .

1. Виберемо в  $X$  скінченну 1-сітку і побудуємо навколо кожної з точок, що її утворюють, кулю радіуса 1:  $S_i(a_i, 1)$ ,  $i = 1, \dots, N_1$ . Оскільки  $X$  є цілком обмеженою,

$$\bigcup_{i=1}^{N_1} S_i(a_i, 1) = X.$$

З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо,  $S_1$ , містить нескінченну підпослідовність  $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$  послідовності  $\{x_n\}$ .

2. Виберемо в  $X$  скінченну  $\frac{1}{2}$ -сітку і побудуємо навколо кожної з цих точок, що її утворюють, кулю радіуса  $\frac{1}{2}$ :  $S_i(b_i, \frac{1}{2})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_2$ . Оскільки множина  $X$  є цілком обмеженою,

$$\bigcup_{i=1}^{N_2} S_i(b_i, \frac{1}{2}) = X.$$

З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо,  $S_2$ , містить нескінченну підпослідовність  $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$  послідовності  $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ .

...

- $m$ . Виберемо в  $X$  скінченну  $\frac{1}{m}$ -сітку і побудуємо навколо кожної з цих точок, що її утворюють, кулю радіуса  $\frac{1}{m}$ :  $S_i(c_i, \frac{1}{m})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_m$ . Оскільки множина  $X$  є цілком обмеженою,

$$\bigcup_{i=1}^{N_m} S_i(c_i, \frac{1}{m}) = X.$$

З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо,  $S_m$ , містить нескінченну підпослідовність  $\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$  послідовності  $\{x_n^{(m-1)}\}_{n=1}^{\infty}$ .

...

Продовжимо цей процес до нескінченності. Розглянемо діагональну послідовність  $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ . Вона є підпослідовністю послідовності  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Крім того, при  $m \geq n_0$ :  $x_m^{(m)} \in \{x_n^{(n_0)}\} \subset S_{n_0}$ . Це означає, що  $\{x_n^{(n)}\}$  є фундаментальною і внаслідок повноти  $(X, \rho)$  має границю.

Твердження  $3 \implies 4$  є тривіальним, оскільки із довільної нескінченної множини можна виділити зліченну множину  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , яка внаслідок секвенціальної компактності містить збіжну підпослідовність:  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow x_0 \in X$ .

Покажемо тепер, що  $4 \implies 1$ . Для цього спочатку доведемо, що множина  $X$  є цілком обмеженою, тобто в ній для довільного числа  $\varepsilon > 0$  існує  $\varepsilon$ -сітка. Якщо б це було не так, то застосувавши той же прийом, що і на етапі  $1 \implies 2$ , ми побудували б послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , яка не має граничних точок, оскільки вона не є фундаментальною. Для кожного  $n$  побудуємо скінченну  $\frac{1}{n}$ -сітку і розглянемо об'єднання всіх таких сіток. Воно є щільним і не більше ніж зліченим. Таким чином, простір  $(X, \rho)$  є сепарабельним, отже, має зліченну базу.

Для того щоб довести компактність простору, що має зліченну базу, достатньо перевірити, що із будь-якого зліченного (а не довільного нескінченного) відкритого



покриття можна виділити скінченне підпокриття. Припустимо, що  $\{U_\alpha\}$  — довільне покриття простору  $(X, \rho)$ , а  $\{V_n\}$  — його зліченна база. Кожна точка  $x \in X$  міститься в деякому  $U_\alpha$ . За означенням бази знайдеться деяке  $V_i \in \{V_n\}$  таке, що  $x \in V_i \subset U_\alpha$ . Якщо кожній точці  $x \in X$  поставити у відповідність окіл  $V_i \in \{V_n\}$ , то сукупність цих околів утворить зліченне покриття множини  $X$ .

Залишилося довести, що із довільного зліченного відкритого покриття множини  $X$  можна вибрати скінченне підпокриття. Для цього достатньо довести еквівалентне твердження для замкнених підмножин, що утворюють зліченну центровану систему.

Нехай  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  — центрована система замкнених підмножин  $X$ . Покажемо, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Нехай  $\Phi_n = \bigcap_{k=1}^n F_k$ . Ясно, що множини  $\Phi_n$  є замкненими і непорожніми, оскільки система  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  є центрованою, і

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \dots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Можливі два випадки.

1. Починаючи з деякого номера

$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \dots = \Phi_{n_0+k} = \dots$$

Тоді

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \emptyset.$$

2. Серед  $\Phi_n$  є нескінченно багато попарно різних. Достатньо розглянути випадок, коли всі вони відрізняються одна від одної. Нехай  $x_n \in \Phi_n \setminus \Phi_{n+1}$ . Тоді послідовність  $\{x_n\}$  є нескінченною множиною різних точок із  $X$  і, внаслідок уже доведеного факту (зліченна компактність), має хоча б одну граничну точку  $x_0$ . Оскільки  $\Phi_n$  містить всі точки  $x_n, x_{n+1}, \dots$  то  $x_0$  — гранична точка для кожної множини  $\Phi_n$  і внаслідок замкненості  $\Phi_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_0 \in \Phi_n.$$

Отже,

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

тобто  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  є непорожнім. □

## §8.2 Література

- [1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 49–51).



# 9 Лінійні простори

Лінійна система є алгебраїчною структурою, яка абстрагує властивості, пов'язані із додаванням та множенням векторів евклідова простору на скаляр.

## §9.1 Лінійні простори і функціонали

**Означення 9.1.** Дійсним лінійним (векторним) простором називається упорядкована трійка  $(E, +, \cdot)$ , що складається з множини  $E$ , елементи якого називаються **векторами**, операції додавання і операції множення на дійсні числа, якщо для кожних двох її елементів  $x$  та  $y$  визначено їх суму  $x + y \in E$ , і для будь-якого  $x$  та дійсного числа  $\lambda$  визначено добуток  $\lambda x \in E$ , які задовольняють аксіоми лінійного простору:

1.  $\exists \vec{0} \in E$ , що  $x + \vec{0} = x$  для довільного  $x \in E$ ;
2.  $\forall x \in E \exists (-x) \in E: x + (-x) = 0$ ;
3.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (асоціативність додавання);
4.  $x + y = y + x$  (комутативність додавання);
5.  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  (дистрибутивність);
6.  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  (дистрибутивність);
7.  $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$  (асоціативність множення);
8.  $1 \cdot x = x$ .

**Зауваження 9.1** — Властивості 1–4 означають, що лінійний простір є **абелевою (комутативною) групою**.

### Приклад 9.1

Сукупність дійсних чисел  $\mathbb{R}$  із звичайними арифметичними операціями додавання та множення є лінійним простором.

### Приклад 9.2

Евклідів простір  $\mathbb{R}^n$  — сукупність векторів  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , що складаються з дійсних чисел, є лінійним.

**Означення 9.2.** Лінійні простори  $E$  і  $F$  називаються **ізоморфними**, якщо між їхніми елементами можна установити взаємно-однозначну відповідність, яка узгоджена із операціями в цих просторах, тобто  $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y', x, y \in E, x', y' \in F$ :  $x + y \leftrightarrow x' + y', \lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ .

**Зауваження 9.2** — Ізоморфні простори можна вважати різними реалізаціями одного простору.

**Приклад 9.3**

Простір  $\mathbb{R}^n$  і простір поліномів, степені яких не перевищує  $n - 1$  є ізоморфними.

**Означення 9.3.** Числова функція  $f$ , визначена на лінійному просторі  $E$ , називається **функціоналом**.

**Означення 9.4.** Функціонал  $f$  називається **адитивним**, якщо

$$\forall x, y \in E : f(x + y) = f(x) + f(y).$$

**Означення 9.5.** Функціонал називається **однорідним**, якщо

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in E : f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

**Означення 9.6.** Адитивний однорідний функціонал називається **лінійним**.

**Означення 9.7.** Функціонал називається **неперервним у точці  $x_0$** , якщо з того що послідовність  $x_n$  прямує до  $x_0$  випливає, що послідовність  $f(x_n)$  прямує до  $f(x_0)$ .

**Означення 9.8.** Сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на лінійному топологічному просторі  $E$ , називається **спряженим простором**, і позначається як  $E^*$ .

**Приклад 9.4**

$I(f) = \int_a^b f(t)dt$  є лінійним функціоналом в  $C[a, b]$ .

**Означення 9.9.** Нехай  $E$  — лінійний простір. Визначений на просторі  $E$  функціонал  $p(x)$  називається **опуклим**, якщо

$$\forall x, y \in E, 0 \leq a \leq 1 : p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y).$$

**Означення 9.10.** Функціонал  $p(x)$  називається **додатно-однорідним**, якщо

$$\forall x \in E, \lambda > 0 : p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

**Приклад 9.5**

Будь-який лінійний функціонал є додатно-однорідним.

**Означення 9.11.** Непорожня підмножина  $L'$  лінійного простору  $L$  називається **лінійним підпростором**, якщо вона сама утворює лінійний простір відносно операцій додавання і множення на число, уведених в просторі  $L$ .

**§9.2 Продовження функціоналів**

**Означення 9.12.** Нехай  $E$  — дійсний лінійний простір, а  $E_0$  — його підпростір. До того ж на підпросторі  $E_0$  заданий деякий лінійний функціонал  $f_0$ . Лінійний функціонал  $f$ , визначений на всьому просторі  $E$ , називається **продовженням** функціонала  $f_0$ , якщо

$$\forall x \in E_0 : f_0(x) = f(x).$$

**Теорема 9.1 (Хана—Банаха)**

Нехай  $p(x)$  — додатно-однорідний і опуклий функціонал, визначений на дійсно-лінійному просторі  $L$ , а  $L_0$  — лінійний підпростір в  $L$ . Якщо  $f_0$  — лінійний функціонал, заданий на  $L_0$  і підпорядкований на цьому підпросторі функціоналу  $p$ , тобто

$$f_0(x) \leq p(x), \forall x \in L_0 \quad (9.1)$$

то функціонал  $f_0$  може бути продовжений до лінійного функціонала  $f$ , заданого на просторі  $L$  і підпорядкованого функціоналу  $p$  на всьому просторі  $L$ :

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in L. \quad (9.2)$$

*Доведення.* Покажемо, що якщо  $L_0 \neq L$ , то  $f_0$  можна продовжити на  $L' \supset L_0$ , зберігаючи умову підпорядкованості. Нехай  $z \in L' \setminus L_0$ , а  $L'$  — елементарне розширення  $L_0$ :

$$L' = \{x' : x' = \lambda z + x, x \in L_0, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{L_0; z\}.$$

Якщо  $f'$  — шукане продовження  $f_0$  на  $L'$ , то

$$f'(\lambda z + x) = \lambda f'(z) + f(x) = \lambda f'(z) + f_0(x).$$

Покладемо  $f'(z) = c$ . Тоді  $f'(\lambda z + x) = \lambda c + f_0(x)$ . Виберемо  $c$  так, щоб виконувалась умова підпорядкованості:

$$\forall x \in L_0 : f_0(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda z). \quad (9.3)$$

Якщо  $\lambda > 0$ , поділимо (9.3) на  $\lambda$  і отримаємо еквівалентну умову

$$\forall x \in L_0 : f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + z\right) \implies c \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (9.4)$$

Якщо  $\lambda < 0$ , поділимо (9.3) на  $-\lambda$ . Тоді

$$\forall x \in L_0 : -f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) - c \leq p\left(-\frac{x}{\lambda} - z\right) \implies c \geq -p\left(-\frac{x}{\lambda} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (9.5)$$

Покажемо, що число  $c$ , що задовольняє умови (9.4) і (9.5) існує. Нехай  $y'$  і  $y'' \in L_0$ , а  $z \in L' \setminus L_0$ . Тоді

$$f_0(y'' - y') = f_0(y'') - f_0(y') \leq p(y'' - y') = p(y'' + z - y' - z) \leq p(y'' + z) + p(-y' - z).$$

З цього випливає, що

$$-f_0(y'') + p(y'' + z) \geq -f_0(y') - p(-y' - z).$$

Покладемо

$$c'' = \inf_{y''} (-f_0(y'') + p(y'' + z)), \quad c' = \sup_{y'} (-f_0(y') + p(-y' - z)).$$

Оскільки  $y'$  і  $y''$  — довільні, то з умови підпорядкованості випливає, що  $c'' \geq c'$ . Отже,  $\exists c : c'' \geq c \geq c'$ .

Визначимо функціонал  $f'$  на  $L'$ :

$$f'(\lambda z + x) = \lambda c + f_0(x).$$

За побудовою цей функціонал задовольняє умову (9.1). Отже, якщо  $f_0$  задано на  $L_0 \subset L$  і задовольняє на  $L_0$  умову (9.1), то його можна продовжити на  $L' \supset L$  із збереженням цієї умови (9.2).

Якщо в просторі  $L$  існує злічена система елементів  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  така, що будь-який елемент простору  $L$  можна подати як (скінченну) лінійну комбінацію елементів  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , то продовження функціонала  $f_0$  на  $L$  можна побудувати за індукцією, розглядаючи зростаючий ланцюжок підпросторів

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\}, \quad L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\}, \quad \dots, \quad L^{(n)} = \{L^{(n-1)}, x_n\}, \quad \dots,$$

де  $L^{(k)} = \{L^{(k-1)}, x_k\}$  — мінімальний лінійний підпростір, що містить  $L^{(k-1)}$  і  $x_k$ . Тоді кожний елемент  $x \in L$  увійде в деякий  $L^{(k)}$  і функціонал  $f_0$  буде продовжений на весь простір  $L$ .  $\square$

В загальному випадку використовується схема, яка базується на лемі Цорна. Уведемо в розгляд потрібні означення.

### §9.3 Ланцюги і мажоранти

**Означення 9.13.** Говорять, що на множині  $X$  задано **відношення часткового порядку**  $\leq$ , якщо виділено деяку сукупність пар  $P = \{(x, y) \in X \times X\}$ , для яких

1.  $x \leq x$ ;
2.  $x \leq y, y \leq z \implies x \leq z$ .

При цьому не вимагається, щоб усі елементи були порівняними.

#### Приклад 9.6

Площина  $\mathbb{R}^2$ , на якій між точками  $x = (x_1, x_2)$  і  $y = (y_1, y_2)$  встановлено відношення  $x \leq y$ , якщо  $x_1 \leq y_1$  і  $x_2 \leq y_2$ .

**Означення 9.14.** Якщо всі елементи  $X$  є попарно порівняними, то множина  $X$  називається **лінійно упорядкованою**.

**Означення 9.15.** Лінійно упорядкована підмножина частково упорядкованої множини називається **ланцюгом**.

#### Приклад 9.7

Пряма  $\mathbb{R}$  із покоординатним порядком, що розглядається як підмножина площини  $\mathbb{R}^2$ , є ланцюгом.

**Означення 9.16.** Якщо  $X$  — частково упорядкована множина і  $M \subset X$ , то елемент  $m^* \in X$  називається **мажорантою** множини  $M$ , якщо

$$m \leq m^*, \forall m \in M.$$

**Означення 9.17.** Якщо  $m_*$  — така мажоранта  $M \subset X$ , що  $m_* \leq m'$  для будь-якої іншої мажоранти  $m'$  множини  $M$ , то  $m_*$  називається **точною верхньою гранню** множини  $M$ .

**Означення 9.18.** Елемент  $m \in X$  називається **максимальним**, якщо немає такого елемента  $m' \in X$ , що  $m \leq m'$ .

**Лема 9.1 (Цорна)**

Якщо будь-який ланцюг в частково упорядкованій множині  $X$  має мажоранту, то в  $X$  існує максимальний елемент.

*Доведення.* (теореми Хана—Банаха) Позначимо через  $\mathfrak{M}$  сукупність усіх можливих продовжень функціоналу  $f_0$  на більш широкі підпростори з умовою підпорядкованості  $p$ . Кожне таке продовження  $f'$  має лінійну область визначення  $L'$ , на якій  $f' \leq p$  і  $f'|_{X_0} = f$ . Будемо вважати продовження  $f'$  підпорядкованим продовженню  $f''$ , якщо для відповідних областей визначення маємо  $L' \subset L''$  і  $f''|_{L'} = f'$ . Таким чином, маємо частковий порядок. Умова щодо ланцюгів виконана: якщо дано ланцюг продовжень  $f_\alpha$  з областями визначення  $L_\alpha$ , то мажоранта  $f \in \mathfrak{M}$  будується так. Розглянемо множину  $L = \bigcup_\alpha L_\alpha$ , яка є лінійним простором, оскільки  $\forall x, y \in L \exists L_\alpha, L_\beta$ , такі що  $x \in L_\alpha$  і  $y \in L_\beta$ . Але за означенням ланцюга або  $L_\alpha \subset L_\beta$ , або  $L_\beta \subset L_\alpha$ , тобто  $x + y \in L$ . Ясно, що  $\lambda x \in L$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . З тих же причин функціонал  $f(x) = f_\alpha(x_\alpha)$  для  $x = x_\alpha$  коректно заданий на  $L$ , тобто  $f_\alpha(x_\alpha) = f_\beta(x_\beta)$ , якщо  $x_\alpha = x_\beta$ . До того ж  $f \leq p$  на  $L$ . Отже,  $f \in \mathfrak{M}$  — мажоранта для всіх  $f_\alpha$ . За лемою Цорна в  $\mathfrak{M}$  є максимальний елемент  $f$ . Отже, область визначення функціонала  $f$  збігається із  $X$ , інакше функціонал  $f$  можна було б лінійно продовжити на більш широкий простір із умовою підпорядкованості  $p$ , що суперечить максимальності  $p$ .  $\square$

**§9.4 Література**

- [1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 91–96, 106–109).
- [2] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 119–138).
- [3] **Богачев В. И.** Действительный и функциональный анализ. Университетский курс / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов — М.: Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009 (стр. 14–16, 258–264).





# 10 Нормовані простори

## §10.1 Норми векторів

**Означення 10.1.** Нехай  $E$  — лінійний простір над полем  $k$ . Відображення  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  називається **нормою** в просторі  $E$ , якщо  $\forall x, y \in E, \lambda \in k$  виконуються аксіоми норми:

1.  $\|x\| = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $x = 0$  (віддільність);
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  (однорідність);
3.  $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\|$  (нерівність трикутника).

**Означення 10.2.** Лінійний простір із введеною на ньому нормою називається **нормованим**.

**Зауваження 10.1** — Ясно, що нормований простір є метричним, оскільки в ньому можна ввести метрику  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . З цього випливає, що норма елемента в нормованому просторі є відстанню між ним і нульовим елементом:  $\|x\| = \rho(x, \vec{0})$ .

### Приклад 10.1

Простір

$$\ell = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\}$$

є нормованим з нормою  $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ .

**Означення 10.3.** Послідовність  $\{x_n\}$  елементів нормованого простору  $E$  називається **збіжною за нормою**, або **сильно збіжною**, або просто **збіжною**, до елемента  $x_0 \in E$ , якщо  $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Якщо  $\{x_n\}$  збігається до елемента  $x_0 \in E$ , то  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Означення 10.4.** Повний нормований простір називається **банаховим**.

## §10.2 Норми функціоналів

**Означення 10.5.** Функціонал називається **обмеженим**, якщо

$$\exists C > 0 : |f(x)| \leq C \|x\|_E. \quad (10.1)$$

**Означення 10.6.** Найменша серед усіх додатних констант, що задовольняють нерівність (10.1) називається **нормою** функціонала:

$$\|f\| = \sup_{x \neq \vec{0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

**Означення 10.7.** Нехай  $E_1$  і  $E_2$  — нормовані простори. На множині  $D \subset E_1$  задано **оператор**, або відображення  $A$ , із значеннями в  $E_2$ , якщо кожному елементу  $x \in D$  поставлено у відповідність елемент  $y = Ax \in E_2$ .

**Означення 10.8.** Оператор  $A$  називається **лінійним**, якщо

1.  $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D$  для довільних  $x_1, x_2 \in D$ , де  $\alpha, \beta$  — дійсні числа;
2.  $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$  для довільних  $x_1, x_2 \in D$ , де  $\alpha, \beta$  — дійсні числа.

**Означення 10.9.** Якщо  $A$  — лінійний оператор з  $E_1$  в  $E_2$  такий, що  $D = E_1$ , та з умови  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n, x_0 \in E_1$  випливає, що  $A(x_n) \rightarrow A(x_0)$  в  $E_2$ , то  $A$  називається **лінійним неперервним оператором**.

**Означення 10.10.** Оператор  $A$  називається **обмеженим** в просторі  $E$ , якщо існує така константа  $C$ , що

$$\|Ax\| \leq C\|x\|. \quad (10.2)$$

**Означення 10.11.** Найменша константа  $C$ , яка задовольняє нерівність (10.2), називається **нормою** оператора  $A$ .

### Теорема 10.1

Лінійний оператор, заданий на лінійному нормованому просторі, є неперервним тоді і тільки тоді, коли він обмежений.

*Доведення.* Необхідність. Припустимо, що  $A$  — неперервний, лінійний, але не обмежений оператор. Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in E : \|Ax_n\|_F > n\|x_n\|_E.$$

Покладемо

$$\xi_n = \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

За побудовою

$$\xi_n = \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Оцінимо норму елемента  $A\xi_n$  в  $F$ :

$$\|A\xi_n\|_F = \left\| A \left( \frac{1}{n} \frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| = \frac{1}{n\|x_n\|_E} \|Ax_n\|_F > \frac{n\|x_n\|_E}{n\|x_n\|_E} = 1.$$

З цього випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A\xi_n\|_F \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} A\xi_n \neq 0.$$

Тобто  $A$  — лінійний оператор,  $A\vec{0} = 0$  і у той же час  $\xi_n \rightarrow 0$ , але  $A\xi_n \not\rightarrow 0$ , тобто  $A$  — не неперервний. Отримане протиріччя доводить, що оператор  $A$  є обмеженим.

Достатність.  $A$  — обмежений оператор, а тому

$$\exists C > 0 : \forall x \in E : \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Нехай

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x &\implies \|x_n - x\|_E \rightarrow 0 \implies \\ \|Ax_n - Ax\|_F &= \|A(x_n - x)\|_F \leq C\|x_n - x\|_E \rightarrow 0 \implies \\ \|Ax_n - Ax\|_F &\rightarrow 0 \implies Ax_n \rightarrow Ax, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Це означає, що оператор  $A$  — неперервний.  $\square$

### §10.3 Простір операторів

**Означення 10.12.** Лінійні оператори  $A$ , що відображають нормований простір  $E$  в нормований простір  $F$ , утворюють **нормований простір операторів**  $\mathcal{L}(E, F)$  з нормою

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_F.$$

#### Теорема 10.2

Нехай  $A$  — лінійний обмежений оператор, що діє із нормованого простору  $E$  в банахів простір  $F$ . Якщо область визначення оператора  $D(A)$  щільна в  $E$ , то існує такий лінійний обмежений оператор  $\bar{A} : E \rightarrow F$  такий що,  $\bar{A}x = Ax$ ,  $\forall x \in D(A)$  і  $\|\bar{A}\| = \|A\|$ .

*Доведення.* Нехай  $x \in E \setminus D(A)$ . Оскільки  $\bar{D}(A) = E$ , то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Із нерівності

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E,$$

і обмеженості оператора  $A$  випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N : \|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon.$$

Це означає, що послідовність  $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$  є фундаментальною. Оскільки простір  $F$  є повним, ця послідовність є збіжною:

$$\exists \bar{A}x = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n.$$

Покажемо, що цей елемент визначений коректно, тобто не залежить від вибору послідовності  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Припустимо, що існує ще одна послідовність  $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ , яка збігається до елемента  $x$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x.$$

Нехай

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n, \quad y' = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax'_n.$$

З того що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\| \cdot \|x_n - x'_n\|_E = 0,$$

випливає

$$\begin{aligned} \|y - y'\|_F &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - y'\|_F \leq \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \|y - Ax_n\|_F + \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F + \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax'_n - y'\|_F = 0. \end{aligned}$$

Отже,  $y = y'$ .

Лінійність оператора  $\bar{A}$  випливає із лінійності оператора  $A$  і властивостей границь.

Оскільки оператор  $\bar{A}$  збігається з оператором  $A$  в області визначення  $D(A)$ , але має більш широку область визначення,

$$\|A\| \leq \|\bar{A}\|.$$

З іншого боку,

$$\|Ax_n\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n\|_E, \quad \forall x_n \in E.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\|_F = \left\| A \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \right\| = \|\bar{A}x\|_F \leq \|A\| \cdot \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\| = \|A\| \cdot \|x\|_E, \quad x \in E.$$

Це означає, що

$$\|\bar{A}\| \leq \|A\|.$$

Порівнюючи оцінки  $\|\bar{A}\|$ , отримуємо

$$\|\bar{A}\| = \|A\|.$$

□

### Теорема 10.3 (Хана—Банаха в нормованому просторі)

Нехай  $E$  — дійсний нормований простір,  $L$  — його підпростір,  $f_0$  — обмежений лінійний функціонал на  $L$ . Цей лінійний функціонал можна продовжити до деякого лінійного функціонала  $f$ , заданого на всьому просторі  $E$  без збільшення норми:

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

*Доведення.* Нехай  $f_0$  — обмежений лінійний функціонал на  $L$ . Значить,

$$|f_0(x)| \leq \|f_0\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in L.$$

За теоремою Хана—Банаха в лінійному просторі

$$\exists f \text{ — продовження } f_0 \text{ на } E : |f(x)| \leq \|f_0\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

З цього випливає, що

$$\|f\| \leq \|f_0\|.$$

З іншого боку,  $L \subset E$ , а тому

$$\|f\| = \sup_{x \neq \vec{0}, x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \neq \vec{0}, x \in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq \vec{0}, x \in L} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \|f_0\|.$$

Отже,  $\|f\| = \|f_0\|$ .

□

## §10.4 Література

- [1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 96–102).

# III

Функціональний аналіз

## Частина III: Зміст

---

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>11</b> | <b>Спряжений простір</b>  | <b>65</b>  |
| 11.1      | Лінійні топологічні простори і неперервність функціоналів . . . . . | 65         |
| 11.2      | Топологія у спряженому просторі і його повнота . . . . .            | 67         |
| 11.3      | Другий спряжений простір і природне відображення . . . . .          | 68         |
| 11.4      | Рефлексивні простори . . . . .                                      | 69         |
| 11.5      | Література . . . . .  | 71         |
| <b>12</b> | <b>Слабка топологія і слабка збіжність</b>                          | <b>73</b>  |
| 12.1      | Слабка топологія . . . . .  | 73         |
| 12.2      | Слабка збіжність . . . . .  | 74         |
| 12.3      | Види топології у спряженому просторі . . . . .                      | 76         |
| 12.4      | Література . . . . .  | 77         |
| <b>13</b> | <b>Принцип рівномірної обмеженості</b>                              | <b>79</b>  |
| 13.1      | Види збіжності послідовностей операторів . . . . .                  | 79         |
| 13.2      | Повнота простору лінійних неперервних операторів . . . . .          | 81         |
| 13.3      | Література . . . . .  | 82         |
| <b>14</b> | <b>Принцип відкритості відображення</b>                             | <b>83</b>  |
| 14.1      | Обмеженість на всюди щільній множині . . . . .                      | 83         |
| 14.2      | Лінійний обмежений обернений оператор . . . . .                     | 84         |
| 14.3      | Обернений до наближеного і резольвента . . . . .                    | 86         |
| 14.4      | Принцип відкритості відображення . . . . .                          | 87         |
| 14.5      | Література . . . . .  | 88         |
| <b>15</b> | <b>Спряжені оператори, спектр і компактні оператори</b>             | <b>89</b>  |
| 15.1      | Спряжені оператори . . . . .  | 89         |
| 15.2      | Спектр оператора . . . . .  | 90         |
| 15.3      | Компактні оператори . . . . .                                       | 92         |
| 15.4      | Література . . . . .  | 93         |
| <b>16</b> | <b>Гільбертові простори</b>   | <b>95</b>  |
| 16.1      | Скалярний добуток і породжена ним норма . . . . .                   | 95         |
| 16.2      | Скалярний добуток породжений нормою . . . . .                       | 96         |
| 16.3      | Ортогональність і проекції . . . . .                                | 98         |
| 16.4      | Лінійний функціонал як скалярне множення на елемент . . . . .       | 100        |
| 16.5      | Література . . . . .  | 101        |
| <b>17</b> | <b>Теорема про ізоморфізм</b>                                       | <b>103</b> |
| 17.1      | Базиси у гільбертових просторах . . . . .                           | 103        |
| 17.2      | Елементи аналізу Фур'є . . . . .                                    | 104        |
| 17.3      | Сепарабельний простір . . . . .                                     | 106        |
| 17.4      | Література . . . . .  | 107        |

---

# 11 Спряжений простір

Ввести топологію в лінійному просторі можна не лише за допомогою норми.

## §11.1 Лінійні топологічні простори і неперервність функціоналів

**Означення 11.1.** Упорядкована четвірка  $(L, +, \cdot, \tau)$  називається **лінійним топологічним простором**, якщо

1.  $(L, +, \cdot)$  — дійсний лінійний простір;
2.  $(L, \tau)$  — топологічний простір;
3. операція додавання і множення на числа в  $L$  є неперервними, тобто
  - а) якщо  $z_0 = x_0 + y_0$ , то для кожного околу  $U$  точки  $z_0$  можна указати такі околи  $V$  і  $W$  точок  $x_0$  і  $y_0$  відповідно, що  $\forall x \in V, \forall y \in W: x + y \in U$ ;
  - б) якщо  $\alpha_0 x_0 = y_0$ , то для кожного околу  $U$  точки  $y_0$  існує окіл  $V$  точки  $x_0$  і таке число  $\varepsilon > 0$ , що  $\forall \alpha \in \mathbb{R} : |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon, \forall x \in V: \alpha x \in U$ .

### Приклад 11.1

Всі нормовані простори є лінійними топологічними просторами.

**Зауваження 11.1** — Оскільки будь-який окіл будь-якої точки  $x$  в лінійному топологічному просторі можна отримати зсувом околу нуля  $U$  шляхом операції  $U + x$ , топологія в лінійному топологічному просторі повністю визначається локальною базою нуля.

Спочатку доведемо деякі допоміжні факти щодо лінійних функціоналів, заданих на лінійному топологічному просторі  $L$ .

**Означення 11.2.** Функціонал, визначений на лінійному топологічному просторі  $L$ , називається **неперервним**, якщо для будь-якого  $x_0 \in L$  і будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує такий окіл  $U$  елемента  $x_0$ , що

$$\forall x \in U : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

### Лема 11.1

Якщо лінійний функціонал  $f$  є неперервним в якійсь одній точці  $x_0$  лінійного топологічного простору  $L$ , то він є неперервним на усьому просторі  $L$ .

*Доведення.* Дійсно, нехай  $y$  — довільна точка простору  $L$  і  $\varepsilon > 0$ . Необхідно знайти такий окіл  $V$  точки  $y$ , щоб

$$\forall z \in V : |f(z) - f(y)| < \varepsilon.$$

Виберемо окіл  $U$  точки  $x_0$  так, щоб

$$\forall x \in U : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Побудуємо окіл точки  $y$  шляхом зсуву околу  $U$  на елемент  $y - x_0$ :

$$V = U + (y - x_0) = \{z \in L : z = u + y - x_0, u \in U\}.$$

Із того, що  $z \in V$ , випливає, що  $z - y + x_0 \in U$ , отже,

$$|f(z) - f(y)| = |f(z - y)| = |f(z - y + x_0 - x_0)| = |f(z - y + x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Що і треба було довести. □

### Наслідок 11.1

Для того щоб перевірити неперервність лінійного функціонала в просторі, достатньо перевірити його неперервність в одній точці, наприклад, в точці 0.

**Зауваження 11.2** — У скінчено-вимірному лінійному топологічному просторі будь-який лінійний функціонал є неперервним.

### Теорема 11.1

Для того щоб лінійний функціонал  $f$  був неперервним на лінійному топологічному просторі  $L$ , необхідно і достатньо, щоб існував такий окіл нуля в  $L$ , на якому значення функціонала  $f$  є обмеженими в сукупності.

*Доведення.* Необхідність. З того що функціонал  $f$  є неперервним в точці 0, випливає що

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists U(0) : \forall x \in U(0) : |f(x)| < \varepsilon.$$

Отже, його значення є обмеженими в сукупності на  $U(0)$ .

Достатність. Нехай  $U(0)$  — такий окіл нуля, що

$$\forall U(0) : |f(x)| < C.$$

Крім того, нехай  $\varepsilon > 0$ . Тоді в околі нуля

$$\frac{\varepsilon}{C}U(0) = \{x \in L : x = \frac{\varepsilon}{C}y, y \in U(0)\}.$$

виконується нерівність  $|f(x)| < \varepsilon$ .

Це означає, що функціонал  $f$  є неперервним в околі нуля, а значить в усьому просторі  $L$ . □

Нехай  $E$  — нормований простір. Нагадаємо, що спряженим простором  $E^*$  називається сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі  $E$  із нормою

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$



**Теорема 11.2**

Для того щоб лінійний функціонал  $f$  був неперервним на нормованому просторі  $E$ , необхідно і достатньо, щоб значення функціонала  $f$  були обмеженими в сукупності на одиничній кулі.

*Доведення.* Необхідність. Нормований простір  $E$  є лінійним топологічним простором. За теоремою 11.1 будь-яке значення неперервного лінійного функціонала  $f$  в деякому околі нуля є обмеженими в сукупності.

$$\forall C > 0 : \exists U(0) : \forall x \in U(0) : |f(x)| < C.$$

В нормованому просторі будь-який окіл нуля містить кулю.

$$\exists S(0, r) \subset U(0).$$

Отже, значення функціонала  $f$  є обмеженими в сукупності в деякій кулі. Оскільки  $f$  — лінійний функціонал, це еквівалентно тому, що значення функціонала  $f$  є обмеженими в сукупності в одиничній кулі, оскільки

$$\forall x \in S(0, r) : |f(x)| < C \implies \forall y = \frac{1}{r}x \in S(0, 1) : |f(y)| < \frac{C}{r}.$$

Достатність. Оскільки значення функціонала  $f$  є обмеженими в сукупності в одиничній кулі, а одинична куля є околom точки 0, то за теоремою 11.1 він є неперервним в точці 0. Отже, лінійний функціонал  $f$  є неперервним в нормованому просторі  $E$ .  $\square$

**§11.2 Топологія у спряженому просторі і його повнота**

На спряженому просторі можна ввести різні топології. Найважливішими з них є сильна і слабка топології.

**Означення 11.3.** **Сильною топологією** в просторі  $E^*$  називається топологія, визначена нормою в просторі  $E^*$ , тобто локальною базою нуля

$$\{f \in E^* : \|f\| < \varepsilon\}.$$

де функціонали  $f$  задовольняють умову

$$|f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E : \|x\| \leq 1.$$

а  $\varepsilon$  — довільне додатне число.

**Теорема 11.3**

Спряжений простір  $E^*$  є повним.

*Доведення.* Нехай  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальна послідовність лінійних неперервних функціоналів, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Отже,

$$\forall x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|. \quad (11.1)$$

Покладемо  $\forall x \in E$ :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Покажемо, що  $f$  — лінійний неперервний функціонал.

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Крім того, з нерівності (11.1) випливає, що

$$\forall x \in E : \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f(x) - f(n)| < \varepsilon \|x\|.$$

Це означає, що функціонал  $f - f_n$  є обмеженим. Оскільки він є лінійним і обмеженим, значить він є неперервним. Таким чином, функціонал  $f = f_n + (f - f_n)$  також є неперервним. Крім того,  $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N$ , тобто  $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$  за нормою простору  $E^*$ .  $\square$

**Зауваження 11.3** — Зверніть увагу на те, що простір  $E^*$  повний незалежно від того, чи є повним простір  $E$ .

#### Приклад 11.2

$$c_0^* = \ell_1.$$

#### Приклад 11.3

$$\ell_1^* = m.$$

#### Приклад 11.4

$$\ell_p^* = \ell_q, \text{ де } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q > 1.$$

## §11.3 Другий спряжений простір і природне відображення

**Означення 11.4.** Другим спряженим простором  $E^{**}$  називається сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі  $E^*$ .

#### Лема 11.2

Будь-який елемент  $x_0 \in E$  визначає певний лінійний неперервний функціонал, заданий на  $E^*$ .

*Доведення.* Введемо відображення

$$\pi : E \rightarrow E^{**},$$

поклавши

$$\varphi_{x_0}(f) = f(x_0), \quad (11.2)$$

де  $x_0$  — фіксований елемент із  $E$ , а  $f$  — довільний лінійний неперервний функціонал із  $E^*$ . Оскільки рівність (11.2) ставить у відповідність кожному функціоналу  $f$  із  $E^*$  дійсне число  $\varphi_{x_0}(f)$ , вона визначає функціонал на просторі  $E^*$ .

Покажемо, що  $\varphi_{x_0}$  — лінійний неперервний функціонал, тобто він належить  $E^{**}$ .

Дійсно, функціонал  $\varphi_{x_0}$  є лінійним, оскільки

$$\varphi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha \varphi_{x_0}(f_1) + \beta \varphi_{x_0}(f_2).$$

Крім того, нехай  $\varepsilon > 0$  і  $A$  — обмежена множина в  $E$ , що містить  $x_0$ . Розглянемо в  $E^*$  окіл нуля  $U(\varepsilon, A)$ :

$$U(\varepsilon, A) = \{f \in E^*, x_0 \in A : |f(x_0)| \leq \varepsilon\}.$$

тобто

$$U(\varepsilon, A) = \{f \in E^*, x_0 \in A : |\varphi_{x_0}(f)| \leq \varepsilon\}.$$

З цього випливає, що функціонал  $\varphi_{x_0}$  є неперервним в точці 0, а значить і на всьому просторі  $E^*$ .  $\square$

**Означення 11.5.** Відображення  $\pi : E \rightarrow E^{**}$ , побудоване в лемі 11.2, називається **природнім відображенням** простору  $E$  в другий спряжений простір  $E^{**}$ .

## §11.4 Рефлексивні простори

**Означення 11.6.** Якщо природне відображення  $\pi : E \rightarrow E^{**}$  є бієкцією і  $p(E) = E^{**}$ , то простір  $E$  називається **напіврефлексивним**.

**Означення 11.7.** Якщо простір  $E$  є напіврефлексивним і відображення  $\pi : E \rightarrow E^{**}$  є неперервним, то простір  $E$  називається **рефлексивним**.

**Зауваження 11.4** — Якщо  $E$  — рефлексивний простір, то природне відображення  $\pi : E \rightarrow E^{**}$  є ізоморфізмом.

### Теорема 11.4

Якщо  $E$  — нормований простір, то природне відображення  $\pi : E \rightarrow E^{**}$  є ізометрією.

*Доведення.* Нехай  $x \in E$ . Покажемо, що

$$\|x\|_E = \|\pi(x)\|_{E^{**}}.$$

Нехай  $f$  — довільний ненульовий елемент простору  $E^*$ . Тоді

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \implies \|x\| \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Оскільки ліва частина нерівності не залежить від  $f$ , маємо

$$\|x\| \geq \sup_{f \in E^*, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|\pi(x)\|_{E^{**}}.$$

З іншого боку, внаслідок теореми Хана—Банаха, якщо  $x$  — ненульовий елемент в нормованому просторі  $E$ , то існує такий неперервний лінійний функціонал  $f$ , визначений на  $E$ , що

$$\|f\| = 1, \quad f(x) = \|x\|$$

(визначаємо функціонал на одновимірному підпросторі формулою  $f(\alpha x) = \alpha \|x\|$ , а потім продовжуємо без збільшення норми на весь простір). Отже, для кожного  $x \in E$  знайдеться такий ненульовий лінійний функціонал  $f$ , що

$$|f(x)| = \|f\| \cdot \|x\|$$

тому

$$\|\pi(x)\|_{E^{**}} = \sup_{f \in E^*, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \|x\|.$$

Отже,  $\|x\|_E = \|\pi(x)\|_{E^{**}}$ . □

**Зауваження 11.5** — Оскільки природне відображення нормованих просторів  $\pi : E \rightarrow E^{**}$  є ізометричним, поняття напіврефлексивних і рефлексивних просторів для нормованих просторів є еквівалентними.

**Зауваження 11.6** — Оскільки простір, спряжений до нормованого, є повним (теорема 11.3), будь-який рефлексивний нормований простір є повним.

**Зауваження 11.7** — Обернене твердження є невірним.

### Приклад 11.5

Простір  $c_0$  є повним, але нерелексивним, тому що спряженим до нього є простір  $\ell_1$ , а спряженим до простору  $\ell_1$  є простір  $m$ .

### Приклад 11.6

Простір неперервних функцій  $C[a, b]$  є повним, але нерелексивним (більше того, немає жодного нормованого простору, для якого простір  $C[a, b]$  був би спряженим).

### Приклад 11.7

Приклад рефлексивного простору, що не збігається із своїм спряженим:

$$\ell_p^{**} = \ell_q^* = \ell_p, \quad p, q > 1, p \neq q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Приклад 11.8**

Приклад рефлексивного простору, що збігається із своїм спряженням:

$$\ell_2^{\star\star} = \ell_2^{\star} = \ell_2.$$

**§11.5 Література**

- [1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 112–123).
- [2] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 175–178, 182–192).



# 12 Слабка топологія і слабка збіжність

Ми розглянули поняття сильної топології і сильної збіжності в нормованому просторі  $E$ , а також сильної топології і сильної збіжності в спряженому просторі  $E^*$ . Ці топології та поняття збіжності спиралися на поняття норми.

Розглянемо відповідні поняття слабкої топології і слабкої збіжності в нормованих просторах  $E$  і  $E^*$ .

## §12.1 Слабка топологія

**Означення 12.1.** Слабкою топологією в просторі  $E^*$  називається топологія, визначена локальною базою нуля, тобто сукупністю множин

$$U_{f_1, f_2, \dots, f_n; \varepsilon} = \{x \in L : |f_i(x)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\},$$

де  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — скінченна сукупність неперервних функціоналів, а  $\varepsilon$  — довільне додатне число.

### Лема 12.1

Слабка топологія слабкіша за вихідну топологію простору  $L$ .

*Доведення.* Розглянемо скінчену сукупність неперервних функціоналів  $f_1, f_2, \dots, f_n$  і довільне додатне число  $\varepsilon$ .

Тоді внаслідок неперервності функціоналів  $f_1, f_2, \dots, f_n$  множина  $U_{f_1, f_2, \dots, f_n; \varepsilon}$  є відкритою в вихідній топології простору  $L$ , оскільки прообразом відкритої множини при неперервному відображенні є відкрита множина, і містить нуль, тобто є околom нуля, оскільки ці функціонали є лінійними.

Перетин двох таких околів сам містить множину точок, в яких скінченна кількість функціоналів за модулем менше  $\varepsilon$ , отже, виконується критерій локальної бази.

Оскільки нова топологія є лише частиною локальної бази нуля в вихідній топології, вона є слабкішою.  $\square$

**Зауваження 12.1 —** Слабка топологія є найменшою з усіх топологій, в яких є неперервними всі лінійні функціонали, неперервні у природній топології простору.

**Зауваження 12.2 —** У нормованому просторі слабка топологія задовольняє аксіому  $T_2$ , але може не задовольняти першу аксіому зліченності, отже, вона не описується за допомогою збіжних послідовностей.

## §12.2 Слабка збіжність

**Означення 12.2.** Послідовність називається **слабко збіжною**, якщо вона є збіжною в слабкій топології.

### Лема 12.2

Послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  елементів лінійного топологічного простору  $L$  є слабко збіжною до  $x_0 \in L$  тоді і лише тоді, коли для будь-якого неперервного лінійного функціонала  $f$  на  $L$  числова послідовність  $f(x_n)$  збігається до  $f(x_0)$ .

*Доведення.* Необхідність. Без обмеження загальності, розглянемо випадок  $x_0 = 0$ . Якщо для будь-якого околу  $U_{f_1, \dots, f_k; \varepsilon}$  в слабкій топології існує таке число  $N$ , що  $x_n \in U_{f_1, \dots, f_k; \varepsilon}$  для всіх  $n \geq N$ , то ця умова виконується і для околу  $U_{f; \varepsilon}$ , де  $f \in L^*$  — довільний фіксований функціонал, а це означає, що  $f(x_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Достатність. Припустимо, що  $f(x_n) \rightarrow 0$  для будь-якого  $f \in L^*$ . Тоді ця умова виконується і для всіх функціоналів  $f_i \in L^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , що визначають довільний окіл в слабкій топології:

$$U_{f_1, f_2, \dots, f_k; \varepsilon} = \{x \in L : |f_i(x)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Виберемо числа  $N_i$  так, щоб  $|f_i(x_n)| < \varepsilon$  при  $n \geq N_i$  і покладемо  $N = \max_{i=1, \dots, k} N_i$ . Отже, при всіх  $n \geq N$  виконується умова  $x_n \in U$ . Це означає, що послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  збігається в слабкій топології.  $\square$

### Лема 12.3

Будь-яка сильно збіжна послідовність є слабко збіжною, але не навпаки.

*Доведення.* Відповідно до леми 12.1, слабка топологія слабкіша за вихідну топологію лінійного топологічного простору, тому будь-яка послідовність, що збігається в сильній топології, буде збігатися і в слабкій.

Обернене твердження є невірним, тому що, наприклад, в просторі  $\ell_2$  послідовність ортів  $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  слабко збігається до нуля, але не збігається до нуля сильно.  $\square$

Розглянемо поняття слабкої збіжності в нормованому просторі  $E$ .

### Теорема 12.1

Якщо послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  слабко збігається в нормованому просторі  $E$ , то існує така константа  $C$ , що

$$\|x_n\| \leq C$$

тобто будь-яка слабко збіжна послідовність в нормованому просторі є обмеженою.

*Доведення.* Розглянемо в просторі  $E^*$  множини

$$A_{k,n} = \{f \in E^* : |f(x_n)| \leq k\}, \quad k, n = 1, 2, \dots$$



Оскільки при фіксованому  $x_n$  функціонали  $\varphi_{x_n}(f) = f(x_n)$  є неперервними (лема 11.2), множини  $A_{k,n}$  є замкненими.

Дійсно,

$$f_m \rightarrow f, f_m \in A_{k,n} \implies \varphi_{x_n}(f_m) = f_m(x_n) \leq k \implies f(x_n) \leq k.$$

Отже, множина

$$A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k,n}$$

є замкнутою.

Оскільки послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  збігається слабо, послідовність  $\varphi_{x_n}(f)$  є обмеженою для кожного  $f \in E^*$ .

Дійсно,

$$x_n \rightharpoonup x \implies \varphi_{x_n}(f) = f(x_n) \rightarrow f(x) \implies \exists k > 0 : |f(x_n)| \leq k.$$

Отже, будь-який функціонал  $f \in E^*$  належить деякій множині  $A_k$ , тобто

$$E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Оскільки простір  $E^*$  є повним (теорема 11.3), то за теоремою Бера хоча б одна з множин  $A_k$ , наприклад,  $A_{k_0}$  повинна бути щільною в деякій кулі  $S(f_0, \varepsilon)$ . Оскільки множина  $A_{k_0}$  замкнутою, це означає, що

$$S(f_0, \varepsilon) \subset \bar{A}_{k_0} = A_{k_0}.$$

Звідси випливає, що послідовність  $\{\varphi_{x_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$  є обмеженою на кулі  $S(f_0, \varepsilon)$ , а значить, на будь-якій кулі в просторі  $E^*$ , оскільки  $E^*$  є лінійним топологічним простором. Зокрема, це стосується одиничної кулі. Таким чином, послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  є обмеженою як послідовність елементів з  $E^{**}$ . Оскільки природне відображення  $\pi : E \rightarrow E^{**}$  є ізометричним, це означає обмеженість послідовності  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  в просторі  $E$ .  $\square$

### Теорема 12.2

Послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  елементів нормованого простору  $E$  слабо збігається до  $x \in E$ , якщо

1. значення  $\|x_n\|$  є обмеженими в сукупності деякою константою  $M$ ;
2.  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  для будь-яких функціоналів  $f$ , що належать множині, лінійні комбінації елементів якого скрізь щільними в  $E^*$ .

*Доведення.* Із умови 2) і властивостей операцій над лінійними функціоналами випливає, що якщо  $\varphi$  — лінійна комбінація функціоналів  $f$ , то

$$\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x).$$

Нехай  $\varphi$  — довільний елемент з  $E^*$  і  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  — сильно збіжна до  $\varphi$  послідовність лінійних комбінацій із функціоналів  $f$ , тобто  $\|\varphi_k - \varphi\| \rightarrow 0$  (вона завжди існує внаслідок щільності). Покажемо, що  $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ .

Нехай  $M$  задовольняє умову

$$\|x_n\| \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \|x\| \leq M.$$

Оскільки  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ , то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \|\varphi - \varphi_k\| < \varepsilon.$$

З цього випливає, що

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n) - \varphi(x)| &\leq |\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \leq \\ &\|\varphi - \varphi_k\|M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + \|\varphi - \varphi_k\|M \leq \varepsilon M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + \varepsilon M. \end{aligned}$$

За умовою теореми,  $\varphi_k(x_n) \rightarrow \varphi_k(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отже,

$$\varphi(x_n) - \varphi(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \varphi \in E^*.$$

□

## §12.3 Види топології у спряженому просторі

Розглянемо поняття слабкої топології в спряженому просторі  $E^*$ . Спочатку згадаємо, що із означення 11.3 сильної топології в спряженому просторі випливає, що цю топологію можна задати за допомогою локальної бази нуля. Наведемо її еквівалентне формулювання.

**Означення 12.3.** **Сильною топологією** в спряженому просторі  $E^*$  називається топологія, визначена локальною базою нуля, тобто сукупністю множин

$$B_{\varepsilon, A} = \{f \in E^* : |f(x)| < \varepsilon, x \in A \subset E\},$$

де  $A$  — довільна обмежена множина в  $E$ , а  $\varepsilon$  — довільне додатне число.

**Зауваження 12.3** — Оскільки будь-яка скінченна множина є обмеженою, то слабка топологія в  $E^*$  є слабкішою, ніж сильна топологія цього простору.

**Означення 12.4.** Послідовність  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  називається **слабко збіжною**, якщо вона є збіжною в слабкій топології  $E^*$ , інакше кажучи,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  для кожного  $x \in E$ .

**Зауваження 12.4** — В спряженому просторі сильно збіжна послідовність є одночасно слабко збіжною, але не навпаки.

В спряженому просторі мають місце теореми, аналогічні теоремам 12.1 і 12.2.

### Теорема 12.3

Якщо послідовність лінійних функціоналів  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  слабко збігається на банаховому просторі  $E$ , то існує така константа  $C$ , що

$$\|f_n\| \leq C,$$

тобто будь-яка слабко збіжна послідовність простору, спряженого до банахова простору, є обмеженою.

**Теорема 12.4**

Послідовність лінійних функціоналів  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  елементів спряженого простору  $E^*$  слабо збігається до  $f \in E$ , якщо

1. послідовність  $\|f_n\|$  є обмеженою, тобто

$$\exists C \in \mathbb{R} : \|f_n\| \leq C, \quad n = 1, 2, \dots;$$

2.  $\varphi_x(f_n) \rightarrow \varphi_x(f)$  для будь-яких елементів  $x$ , що належать множині, лінійні комбінації елементів якої скрізь щільними в  $E$ .

**Зауваження 12.5** — Простір  $E^*$  лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі  $E$ , можна тлумачити і як простір, спряжений до простору  $E$ , і як основний простір, спряжений до якого є простір  $E^{**}$ . Відповідно, слабку топологію в просторі  $E^*$  можна ввести або за означенням 12.4 (через скінченні множини елементів простору  $E$ ), або як в основному просторі відповідно до означення 12.1 (через функціонали із простору  $E^{**}$ ). Для рефлексивних просторів це одне й теж, а для нереклексивних просторів ми таким чином отримуємо різні слабкі топології.

**Означення 12.5.** Топологія в спряженому просторі  $E^*$ , що вводиться за допомогою простору  $E^{**}$  (як в означенні 12.1), називається **слабкою** і позначається як  $\sigma(E^*, E^{**})$ .

**Означення 12.6.** Топологія в спряженому просторі  $E^*$ , що вводиться за допомогою простору  $E$  (як в означенні 12.4), називається **\*-слабкою** і позначається як  $\sigma(E^*, E)$ .

**Зауваження 12.6** — Очевидно, що \*-слабка топологія в  $E^*$  є більш слабкою, ніж слабка топологія простору  $E$ , тобто в слабкій топології не менше відкритих множин, ніж в \*-слабкій топології.

## §12.4 Література

- [1] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 114–117).
- [2] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 192–202).



# 13

## Принцип рівномірної обмеженості

В цій лекції ми розглянемо види збіжності послідовностей лінійних неперервних операторів і з'ясуємо, коли простір  $\mathcal{L}(E, F)$  є банаховим в розумінні тої чи іншої збіжності.

### §13.1 Види збіжності послідовностей операторів

**Означення 13.1.** Послідовність операторів  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , що діють із нормованого простору  $E$  в нормований простір  $F$ , **поточково збігається** до оператора  $A$  в просторі  $\mathcal{L}(E, F)$  при  $n \rightarrow \infty$ , якщо  $\forall x \in E: \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$ .

**Означення 13.2.** Послідовність операторів  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , що діють із нормованого простору  $E$  в нормований простір  $F$ , **рівномірно збігається** до оператора  $A$  в просторі  $\mathcal{L}(E, F)$  при  $n \rightarrow \infty$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$ .

**Зауваження 13.1** — Якщо  $F = \mathbb{R}$ , то простір  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  є спряженим простором, поточкова збіжність є аналогом слабкої збіжності в спряженому просторі, а рівномірна збіжність є аналогом сильної збіжності в спряженому просторі.

#### Лема 13.1

Якщо послідовність лінійних обмежених операторів  $A_n : E \rightarrow F$ , де  $E, F$  — нормовані простори, є такою, що послідовність  $\{\|A_n\|\}_{n=1}^\infty$  є необмеженою, то послідовність  $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^\infty$  є необмеженою в будь-якій замкненій кулі.

*Доведення.* Припустимо супротивне: послідовність  $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^\infty$  є обмеженою в деякій замкненій кулі  $\bar{S}(x_0, \varepsilon)$ :

$$\exists(\bar{S}(x_0, \varepsilon), C > 0) : \forall n \in N : \forall x \in \bar{S}(x_0, \varepsilon) : \|A_n x\|_F \leq C.$$

Кожному елементу  $\xi \in E$  поставимо у відповідність елемент  $x = \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \xi + x_0$ , якщо  $\xi \neq 0$ . Елементу  $\xi = 0$  поставимо у відповідність елемент  $x = x_0$ .

$$\xi \neq 0 \implies \|x - x_0\|_E = \left\| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \xi + x_0 - x_0 \right\|_E = \left\| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \xi \right\|_E = \varepsilon.$$

Це означає, що для довільних  $\xi \in E$  всі елементи  $x \in \bar{S}(x_0, \varepsilon)$ .

Оцінимо наступну величину (використовуючи допоміжну нерівність  $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$ ).

$$\left| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \|A_n \xi\|_F - \|A_n x_0\|_F \right| \leq \left\| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} A_n \xi + A_n x_0 \right\|_F = \left\| A_n \left( \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \xi + x_0 \right) \right\|_F \leq C. \quad (13.1)$$

Отже,

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \|A_n \xi\|_F - \|A_n x_0\|_F \leq C.$$

Звідси випливає, що

$$\|A_n \xi\|_F \leq \frac{C + \|A_n x_0\|_F}{\varepsilon} \|\xi\|_E \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|\xi\|_E.$$

Отже,

$$\exists C_1 = \frac{2C}{\varepsilon} > 0 : \forall \xi \in E : \|A_n \xi\|_E \leq C_1 \|\xi\|_E \implies \|A_n\| \leq C_1.$$

Отримане протиріччя доводить лему.  $\square$

### Теорема 13.1 (Банаха—Штейнгауза)

Нехай послідовність лінійних обмежених операторів  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , що відображають банахів простір  $E$  в нормований простір  $F$ , поточно збігається до оператора  $A$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тоді послідовність  $\{\|A_n\|\}_{n=1}^\infty$  є обмеженою, оператор  $A$  є лінійним і неперервним, а  $A_n x \rightarrow Ax$  рівномірно по  $n$  на кожному компакт  $K \subset E$  (тобто  $n$  не залежить від  $x$ ).

*Доведення.* Припустимо, що послідовність  $\{\|A_n\|\}_{n=1}^\infty$  є необмеженою. Тоді за лемою 13.1 послідовність  $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^\infty$  є необмеженою на довільній замкненій кулі  $\bar{S}(x_0, \varepsilon_0)$ .

Отже,

$$\exists (n_1 \in \mathbb{N}, x_1 \in \bar{S}(x_0, \varepsilon_0) : \|A_{n_1} x_1\|_F > 1.$$

Оскільки  $A_{n_1}$  — неперервний оператор,

$$\exists \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) \subset \bar{S}(x_0, \varepsilon_0) : \forall x \in \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) : \|A_{n_1} x\|_F > 1.$$

На кулі  $\bar{S}(x_1, \varepsilon_1)$  послідовність  $\{\|A_n x\|_F\}_{n=1}^\infty$  також є необмеженою. Отже,

$$\exists \bar{S}(x_2, \varepsilon_2) \subset \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) : \forall x \in \bar{S}(x_2, \varepsilon_2) : \|A_{n_2} x\|_F > 2.$$

Нехай  $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}$  і  $x_1, x_2, \dots, x_k$ :

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k, \quad \bar{S}(x_0, \varepsilon_0) \supset \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) \supset \dots \supset \bar{S}(x_k, \varepsilon_k).$$

Продовжуючи цей процес при  $k \rightarrow \infty$ , отримуємо послідовність вкладених замкнених куль, таких що

$$\forall x \in \bar{S}(x_k, \varepsilon_k) : \|A_{n_k} x\|_F > k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0.$$

Оскільки  $E$  — повний простір, за принципом вкладених куль

$$\exists x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{S}(x_k, \varepsilon_k) : \|A_{n_k} x^*\|_F \geq k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що  $\exists x^* \in E$  така, що послідовність  $\{A_n x^*\}$  не збігається. Це суперечить умові теореми, згідно якої послідовність операторів  $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$  поточно збігається в кожній точці простору  $E$ .

Покажемо, що оператор  $A$  — лінійний. Оскільки

$$A_n(x + y) = A_n(x) + A_n(y), \quad A_n(\lambda x) = \lambda A_n(x),$$

маємо

$$\begin{aligned} A(x+y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x+y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(y) = Ax + Ay. \\ A(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \lambda Ax. \end{aligned}$$

Крім того,

$$\|A_n x\|_F \leq C \|x\|_E \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\|_F = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \right\|_F = \|Ax\|_E \leq C \|x\|_E.$$

Отже,  $A$  — лінійний і обмежений, а значить, неперервний.

Нехай  $K \subset E$  — компакт,  $\varepsilon > 0$ . За теоремою Хаусдорфа існує скінчена  $\frac{\varepsilon}{3C}$ -сітка  $M$ :

$$\forall x \in K : \exists x_\alpha \in M, \alpha \in A : \|x - x_\alpha\|_E < \frac{\varepsilon}{3C},$$

де  $A$  — скінчена множина.

Оскільки послідовність  $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$  поточно збігається в кожній точці простору  $E$ , то вона збігається і в кожній точці сітки  $M$ :

$$\forall x_\alpha \in M : \exists n_\alpha : \forall n \geq n_\alpha : \|A_n x_\alpha - A x_\alpha\|_F < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай  $n_0 = \max_{\alpha \in A} n_\alpha$  (сітка  $M$  є скінченою, тому максимум існує). Тоді  $\forall n \geq n_0$ ,  $\forall x \in S(x_\alpha, \frac{\varepsilon}{3C})$

$$\begin{aligned} \|A_n x - A x\|_F &\leq \|A_n x - A_n x_\alpha + A_n x_\alpha - A x_\alpha + A x_\alpha - A x\|_F \leq \\ &\|A_n x - A_n x_\alpha\|_F + \|A_n x_\alpha - A x_\alpha\|_F + \|A x_\alpha - A x\|_F < \\ &C \|x - x_\alpha\|_E + \frac{\varepsilon}{3} + C \|x - x_\alpha\|_E = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,  $\forall n \geq n_0, \forall x \in K : \|A_n x - A x\|_F < \varepsilon$ , до того ж номер  $n_0$  не залежить від точки  $x$ . Це означає, що  $A_n x \rightarrow A x$  рівномірно по  $n$  на кожному компакт  $K \subset E$ .  $\square$

## §13.2 Повнота простору лінійних неперервних операторів

З'ясуємо, коли простір  $\mathcal{L}(E, F)$  є повним у розумінні рівномірної або точкової збіжності.

### Теорема 13.2

Якщо нормований простір  $F$  — банахів, то  $\mathcal{L}(E, F)$  — банахів у розумінні рівномірної збіжності.

*Доведення.* Нехай  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальна послідовність операторів, тобто

$$\|A_n - A_m\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Тоді  $\forall x \in E$

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Для кожного фіксованого  $x \in E$  послідовність  $\{A_n x\}$  є фундаментальною в  $F$ . Оскільки простір  $F$  є повним за умовою теореми, то послідовність  $\{A_n x\}$  збігається

до певного елемента  $y \in F$ . Позначимо  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ . Отже, ми визначили відображення  $A : E \rightarrow F$ . Його лінійність випливає із властивостей границі. Покажемо його обмеженість:  $\{\|A_n\|\}$  фундаментальна в  $\mathbb{R}$ , адже

$$\|\|A_n\| - \|A_m\|\| \leq \|A_n - A_m\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty,$$

а отже  $\{\|A_n\|\}$  обмежена в  $\mathbb{R}$ , тобто

$$\exists C : \forall n \in \mathbb{N} : \|A_n\| \leq C.$$

Отже,

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \|x\| \leq C \|x\|.$$

Внаслідок неперервності норми, маємо

$$\|Ax\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq C \|x\|.$$

Покажемо, що  $A_n$  рівномірно збігається до  $A$  в просторі  $\mathcal{L}(E, F)$ . Задамо  $\varepsilon > 0$  і виберемо  $n_0$  так, щоб  $\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon$  для  $n \geq n_0$ ,  $p > 0$  і для будь-якого  $x : \|x\| \leq 1$ . Нехай  $p \rightarrow \infty$ . Тоді

$$\forall n \geq n_0, x : \|x\| \leq 1 : \|Ax - A_n x\| < \varepsilon,$$

звідки

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon,$$

а тому  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  в розумінні рівномірної збіжності.

Отже,  $\mathcal{L}(E, F)$  є банаховим. □

### Теорема 13.3

Якщо нормовані простори  $E$  і  $F$  — банахові, то  $\mathcal{L}(E, F)$  — банахів у розумінні поточної збіжності.

*Доведення.* Розглянемо точку  $x \in E$  і фундаментальну у розумінні поточної збіжності послідовність  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Оскільки  $F$  — банахів простір, то існує елемент  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ . Таким чином, визначений оператор  $A : E \rightarrow F$ , такий що  $y = Ax$ . Лінійність цього оператора випливає із лінійності границі, а обмеженість — із теореми Банаха-Штейнгауза:

$$\|Ax\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \cdot \|x\| = C \|x\|. \quad \square$$

## §13.3 Література

- [1] Садовничий В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 96–102).
- [2] Ляшко И. И. Основы классического и современного математического анализа / И. И. Ляшко, В. Ф. Емельянов, А. К. Боярчук. — К.: Вища школа, 1988 (стр. 576–578).



# 14

## Принцип відкритості відображення

### §14.1 Обмеженість на всюди щільній множині

#### Лема 14.1

Нехай  $E$  і  $F$  — банахові простори,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $E_n$  — множина тих точок  $x \in E$ , для яких

$$\|Ax\|_F \leq n\|x\|_E, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тоді  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  і принаймні одна із множин  $E_n$  є всюди щільною в  $E$ .

*Доведення.* Спочатку пересвідчимося в тому, що

$$\forall x \in E : \exists n \in \mathbb{N} : x \in E_n.$$

Очевидно, що  $E_n \neq \emptyset$ , оскільки  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \in E$ . Якщо  $x \neq 0$ , позначимо через  $n$  найменше натуральне число, що задовольняє нерівність

$$n \geq \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

Тоді

$$\forall x \in E : \exists n \in \mathbb{N} : \|Ax\|_F \leq n\|x\|_E.$$

Звідси випливає, що

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Згідно теореми Бера, банахів простір  $E$  не може бути поданий у вигляді не більш ніж зліченного об'єднання ніде не щільних множин. Значить, одна із множин  $E_{n_0}$  не є ніде не щільною. Отже, існує відкрита куля  $S(x_0, r)$ , така що  $S(x_0, r) \subset \overline{E_{n_0}}$ .

Розглянемо замкнену кулю  $\overline{S}(x_1, r_1)$  з центром  $x_1 \in E_{n_0}$ , таку що

$$\overline{S}(x_1, r_1) \subset S(x_0, r).$$

Візьмемо довільний елемент  $x$  з нормою  $\|x\| = r_1$ . Оскільки

$$\|x_1 + x - x_1\|_E = \|x\|_E = r_1,$$

отримаємо, що  $x_1 + x \in \overline{S}(x_1, r_1)$ . Отже,  $\overline{S}(x_1, r_1) \subset \overline{E_{n_0}}$ , звідки

$$\exists \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S(x_1, r_1) \cap E_{n_0} : y_k \rightarrow x_1 + x, \quad k \rightarrow \infty.$$

Якщо  $x_1 + x \in E_{n_0}$ , ця послідовність може бути стаціонарною. Таким чином,  $\exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{y_k - x_1\}_{k=1}^{\infty}$ , така що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_l = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k - x_1 = x.$$

Оскільки

$$\|x\|_E = r_1, \quad \|x_k\|_E \leq r_1,$$

можна вважати, що

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x_k\|_E \geq \frac{r_1}{2} \quad (14.1)$$

Із умов  $y_k \in E_{n_0}$ ,  $x_1 \in E_{n_0}$ ,  $y_k = x_k + x_1$  маємо наступні оцінки

$$\|Ax_k\|_F = \|Ay_k - Ax_1\|_F \leq \|Ay_k\|_F + \|Ax_1\|_F \leq n_0(\|y_k\|_E + \|x_1\|_E). \quad (14.2)$$

$$\|y_k\|_E = \|x_k + x_1\|_E \leq \|x_k\|_E + \|x_1\|_E \leq r_1 + \|x_1\|_E. \quad (14.3)$$

Беручи до уваги умову (14.1) і оцінки (14.2), (14.3), маємо

$$\|Ax_k\|_F \leq n_0(r_1 + 2\|x_1\|_E) \leq \frac{2n_0}{r_1}(r_1 + 2\|x_1\|_E)\|x_k\|_E.$$

Нехай  $n$  — найменше натуральне число, що задовольняє нерівність

$$n \geq \frac{2n_0}{r_1}(r_1 + 2\|x_1\|_E).$$

Тоді  $\|Ax_k\|_F \leq n\|x_k\|_E$ , тобто  $x_k \in E_n$ .

Таким чином, довільний елемент  $x$ , норма якого дорівнює  $r_1$  можна апроксимувати елементами множини  $E_n$ .

Нехай  $x \in E$  — довільний ненульовий елемент. Розглянемо точку

$$\xi = r_1 \frac{x}{\|x\|_E}.$$

Вище ми довели, що існує послідовність

$$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} : \xi_k \in E_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi.$$

Тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k \frac{\|x\|_E}{r_1} = x,$$

звідки

$$\|Ax_k\|_F = \frac{\|x\|_E}{r_1} \|A\xi_k\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{r_1} n \|\xi_k\|_E = n\|x_k\|_E.$$

Отже,  $x_k \in E_n$  і  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ ,  $\forall x \in E$ . Таким чином, множина  $E_n$  скрізь щільна в  $E$ .  $\square$

## §14.2 Лінійний обмежений обернений оператор

### Теорема 14.1 (Банаха, про обернений оператор)

Нехай  $E$  і  $F$  — банахові простори,  $A$  — лінійний обмежений взаємно-однозначний оператор, що діє із  $E$  в  $F$ . Тоді існує лінійний обмежений обернений оператор  $A^{-1} : F \rightarrow E$ .

*Доведення.* Покажемо лінійність оберненого оператора. Покладемо  $\forall x_1, x_2 \in E$ :  $Ax_1 = y_1$ ,  $Ax_2 = y_2$ . Внаслідок лінійності оператора  $A$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2. \quad (14.4)$$

Оскільки  $A^{-1}y_1 = x_1$ ,  $A^{-1}y_2 = x_2$ , помножимо ці рівності на  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно і складемо результати:

$$\alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2 = \alpha x_1 + \beta x_2. \quad (14.5)$$

Із рівності (14.4) і означення оберненого оператора випливає, що

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2).$$

Беручи до уваги рівність (14.5), отримуємо

$$A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2.$$

Отже, оператор  $A^{-1}$  є лінійним. Тепер доведемо його обмеженість.

За лемою 14.1 банахів простір  $F$  можна подати у вигляді

$$F = \bigcup_k F_k$$

де  $F_k$  — множина таких елементів  $y \in F$ , для яких

$$\|A^{-1}y\|_E \leq k\|y\|_F,$$

до того ж одна із множин  $F_k$  скрізь щільна в  $F$ . Позначимо цю множину через  $F_n$ . Візьмемо довільну точку  $y \in F$ , а її норму позначимо як  $\|y\|_F = a$ . Знайдемо таку точку  $y_1 \in F_n$ , щоб виконувались нерівності

$$\|y - y_1\|_F \leq \frac{a}{2}, \quad \|y_1\|_F \leq a.$$

Такий вибір можливий, оскільки множина  $\overline{S}(0, a) \cap F_n$  є щільною в замкненій кулі  $\overline{S}(0, a)$  і  $y \in \overline{S}(0, a)$ . Знайдемо такий елемент  $y_2 \in F_n$ , щоб виконувались умови

$$\|y - y_1 - y_2\|_F \leq \frac{a}{2^2}, \quad \|y_1\|_F \leq \frac{a}{2}.$$

Продовжуючи вибір, побудуємо елементи  $y_k \in F_n$ , такі що

$$\|y - (y_1 + \dots + y_k)\|_F \leq \frac{a}{2^k}, \quad \|y_k\|_F \leq \frac{a}{2^{k-1}}.$$

Внаслідок вибору елементів  $y_k$  маємо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^m y_k \right\|_F = 0.$$

Це означає, що ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$  збігається до елемента  $y$ .

Покладемо  $x_k = A^{-1}y_k$ . Тоді отримуємо оцінку

$$\|x_k\|_E \leq n\|y_k\|_F \leq \frac{na}{2^{k-1}}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\|v_{k+p} - v_k\|_E &= \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} x_i \right\|_E \leq \sum_{i=k+1}^{k+p} \|x_i\|_E \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \|x_i\|_E \leq \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{na}{2^{i-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{na}{2^{i+k}} = \frac{na}{2^k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{na}{2^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{na}{2^{k-1}},\end{aligned}$$

а простір  $E$  — повний, послідовність  $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ , де  $v_k = \sum_{i=1}^k x_i$  збігається до деякої границі  $x \in E$ . Отже,

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Внаслідок лінійності і неперервності оператора  $A$ , маємо

$$Ax = A \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k x_i \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k Ax_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k y_i = y.$$

Звідси отримуємо, що

$$\|A^{-1}y\|_E = \|x\|_E = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\|_E \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \|x_i\|_E \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{na}{2^{i-1}} = 2na = 2n\|y\|_E.$$

Оскільки  $y$  — довільний елемент із простору  $F$ , обмеженість оператора  $A^{-1}$  доведено.  $\square$

#### Наслідок 14.1

Якщо  $E$  і  $F$  — банахові простори,  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , то образ будь-якого околу нуля простору  $E$  містить деякий окіл нуля простору  $F$ .

### §14.3 Обернений до наближеного і резольвента

Нехай  $E, F$  — банахові простори. Відокремимо в банаховому просторі  $\mathcal{L}(E, F)$  множину операторів  $\mathfrak{M}(E, F)$ , що мають обернений оператор.

#### Теорема 14.2

Нехай  $A_0 \in \mathfrak{M}(E, F)$ ,  $\Delta \in \mathcal{L}(E, F)$  і  $\|\Delta\| \cdot \|A_0^{-1}\| < 1$ . Тоді  $A = A_0 + \Delta \in \mathfrak{M}(E, F)$ .

*Доведення.* Зафіксуємо довільний  $y \in F$  і розглянемо відображення  $B : E \rightarrow E$ , таке що  $Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta x$ .

Оскільки  $\|\Delta\| \cdot \|A_0^{-1}\| < 1$ , відображення  $B$  є стискаючим. Простір  $E$  — банахів, тому існує єдина нерухома точка відображення  $B$

$$x = Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta x.$$

Отже,

$$Ax = A_0x + \Delta x = y.$$

Якщо існує ще одна точка  $x'$ , така що  $Ax' = y$ , то  $x'$  також є нерухомою точкою відображення  $B$ . Оскільки це відображення має єдину нерухому точку, це означає, що  $x = x'$ . Отже, для будь-якого  $y \in F$  рівняння  $Ax = y$  має єдиний розв'язок в просторі  $E$ . Значить, оператор  $A$  має обернений оператор  $A^{-1}$ . За теоремою Банаха про обернений оператор  $A^{-1}$  є обмеженим.  $\square$

### Теорема 14.3

Нехай  $E$  — банахів простір,  $I$  — тотожний оператор, що діє в  $E$ ,  $A \in \mathcal{L}(E, E)$  і  $\|A\| < 1$ . Тоді оператор  $(I - A)^{-1}$  існує, обмежений і може бути поданий у вигляді

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

*Доведення.* Спочатку зауважимо, що із  $\|A\| < 1$  випливає

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty.$$

Простір  $E$  — банахів, тому із збіжності ряду  $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\|$  випливає, що  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathcal{L}(E, E)$ . Для довільного  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(I - A) \sum_{k=0}^n A^k = \sum_{k=0}^n A^k (I - A) = I - A^{n+1}.$$

Перейдемо до границі при  $n \rightarrow \infty$  і зважимо на те, що  $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \rightarrow 0$ . Отже,

$$(I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I - A) = I.$$

Звідси випливає, що

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \quad \square$$

## §14.4 Принцип відкритості відображення

### Теорема 14.4 (принцип відкритості відображення)

Лінійне сюр'єктивне і неперервне відображення банахова простору  $E$  на банахів простір  $F$  є відкритим відображенням.

*Доведення.* Покажемо, що образ будь-якої відкритої множини простору  $E$  є відкритою множиною простору  $F$ . Нехай  $G \subset E$  — непорожня відкрита множина,  $x \in G$ , а  $G_0$  — окіл нуля в  $E$ , такий що  $x + G_0 \in G$ . Розглянемо окіл нуля  $G_1$  в просторі  $F$ , такий що  $G_1 \subset AG_0$ , який існує завдяки наслідку 14.1. Мають місце включення

$$Ax + G_1 \subset Ax + AG_0 = A(x + G_0) \subset AG.$$

Оскільки  $Ax + G_1$  є околom точки  $Ax$ , а  $x$  — довільна точка із множини  $G$  і  $Ax \in AG$ , то множина  $AG$  разом із кожною своєю точкою містить її деякий окіл  $W$ . Отже, множина  $AG$  є відкритою і відображення  $A$  є відкритим.  $\square$

## §14.5 Література

- [1] **Березанский Ю. М.** Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель — К.: Вища школа, 1990 (стр. 254–255).
- [2] **Ляшко И. И.** Основы классического и современного математического анализа / И. И. Ляшко, В. Ф. Емельянов, А. К. Боярчук. — К.: Вища школа, 1988 (стр. 578–581).
- [3] **Садовничий В. А.** Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 102–106).
- [4] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 224–233).

# 15 Спряжені оператори, спектр і компактні оператори

## §15.1 Спряжені оператори

Нехай  $E$  і  $F$  — лінійні топологічні простори. Розглянемо неперервний лінійний оператор  $A : E \rightarrow F$  і функціонал  $g \in F^*$ . Застосуємо функціонал  $g$  до елемента  $y = Ax$ . Це визначає функціонал  $f \in E^*$ , який визначається формулою  $f(x) = g(Ax)$ .

**Означення 15.1.** Оператор  $A^* : F^* \rightarrow E^*$ , що визначається формулою  $f(x) = g(Ax)$  і ставить кожному функціоналу  $g$  із простору  $F^*$  функціонал  $f$  із простору  $E^*$ , називається **спряженим** до оператора  $A$ .

### Приклад 15.1

Розглянемо оператор

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

і функціонал

$$y = Ax,$$

який визначається як

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Тоді

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{i=1}^m g_i y_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_i a_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m g_i a_{i,j}.$$

Отже,

$$f_j = \sum_{i=1}^m g_i a_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

З цього випливає, що

$$f = A^* g \implies A^* = A^T.$$

Це означає, що спряжений оператор визначається транспонованою матрицею.

Позначивши значення функціонала  $f$  на елементі  $x$  символом  $(f, x)$ , отримаємо, що

$$(g, Ax) = (f, x) = (A^* g, x).$$

### Теорема 15.1

Якщо  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , де  $E, F$  — банахові простори, то  $\|A\| = \|A^*\|$ .

Доведення. З одного боку

$$|(A^*g, x)| = |(g, Ax)| \leq \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

звідки

$$\|A^*g\| \leq \|A\| \cdot \|g\|,$$

тобто

$$\|A^*\| \leq \|A\|.$$

З іншого боку, для  $x \in E$  і  $Ax \neq 0$  існує елемент

$$y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|} \in F \implies \|y_0\| = 1.$$

Отже, за теоремою Хана—Банаха існує функціонал  $g$ , такий що  $\|g\| = 1$ ,  $(g, y_0) = 1$ . З цього випливає, що

$$(g, y_0) = \left(g, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right) = \frac{1}{\|Ax\|}(g, Ax) = 1.$$

Тоді  $(g, Ax) = \|Ax\|$ . Таким чином,

$$\|Ax\| = (g, Ax) = |(A^*g, x)| \leq \|A^*\| \cdot \|g\| \cdot \|x\| = \|A^*\| \cdot \|x\|,$$

тобто

$$\|A\| \leq \|A^*\|.$$

Поєднуючи дві нерівності отримуємо, що

$$\|A\| = \|A^*\|. \quad \square$$

## §15.2 Спектр оператора

**Означення 15.2.** Нехай  $A : E \rightarrow E$ , де  $E$  — комплексний банахів простір. Число  $\lambda$  називається **регулярним** для оператора  $A$ , якщо оператор

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$$

визначений на всьому просторі  $E$ .

**Означення 15.3.** Оператор  $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$  називається **резольвентою**.

**Означення 15.4.** Сукупність всіх чисел  $\lambda$ , які не є регулярними для оператора  $A$ , називається його **спектром**.

**Означення 15.5.** Число  $\lambda$ , таке що рівняння

$$Ax = \lambda x$$

має ненульові розв'язки, називається **власним числом** оператора  $A$ .

**Означення 15.6.** Всі власні числа оператора  $A$  належать його спектру і утворюють **точковий спектр**.

**Означення 15.7.** Доповнення до точкового спектру називається **неперервним спектром**.



**Приклад 15.2**

Розглянемо простір  $C[a, b]$  і оператор

$$Ax(t) = tx(t).$$

Тоді

$$(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t).$$

Із умови

$$(t - \lambda)x(t) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

випливає, що неперервна функція  $x(t)$  тотожно дорівнює нулю, тому оператор  $(A - \lambda I)^{-1}$  існує для довільного  $\lambda$ .

Проте при  $\lambda \in [a, b]$  обернений оператор, що діє за формулою

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{t - \lambda}$$

визначений не на всьому просторі  $C[a, b]$  і не є обмеженим. Таким чином, спектром є весь відрізок  $[a, b]$ , власних чисел немає, тобто оператор  $A$  має лише неперервний спектр.

**Зауваження 15.1** — У скінченновимірних просторах неперервний спектр оператора є порожньою множиною, спектр збігається із точковим спектром і складається лише із власних чисел.

У нескінченновимірних просторах кожне число відносно оператора є регулярним значенням, власним значенням або елементом неперервного спектру.

**Теорема 15.2**

Якщо  $A \in \mathcal{L}(E, E)$ , де  $E$  — банахів простір і  $|\lambda| > \|A\|$ , то  $\lambda$  — регулярне значення для оператора  $A$ .

*Доведення.* Оскільки

$$A - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}A),$$

то

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left( I - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}.$$

За умови  $|\lambda| > \|A\|$  цей ряд збігається і визначає на  $E$  обмежений оператор (теорема 14.4).  $\square$

**Зауваження 15.2** — З теореми 15.2 випливає, що спектр оператора  $A$  міститься в колі радіуса  $\|A\|$  з центром в нулі.

### §15.3 Компактні оператори

**Означення 15.8.** Оператор  $A$ , що діє із банахового простору  $E$  в банахів простір  $F$  називається **компактним**, або **цілком неперервним**, якщо кожну обмежену множину він переводить у відносно компактну множину.

#### Приклад 15.3

Лінійний неперервний оператор  $A$ , що переводить банахів простір  $E$  в його скінченновимірний підпростір, є компактним.

#### Теорема 15.3

Якщо послідовність компактних операторів  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  в банаховому просторі  $E$  збігається до оператора  $A$  рівномірно, то оператор  $A$  теж є компактним.

*Доведення.* Для доведення компактності оператора  $A$  доведемо, що для будь-якої обмеженої послідовності  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$  із послідовності  $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$  можна виділити збіжну підпослідовність.

Оператор  $A_1$  — компактний, тому із послідовності  $\{A_1x_n\}_{n=1}^{\infty}$  можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай  $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty} \subset E$  — послідовність, на якій збігається послідовність, яку ми виділили із  $\{A_1x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Оператор  $A_2$  — компактний, тому із послідовності  $\{A_2x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$  можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай  $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty} \subset E$  — послідовність, на якій збігається послідовність, яку ми виділили із  $\{A_2x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ .

Продовжимо цей процес і виділимо діагональну послідовність

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots$$

Оператори  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  переводять її у збіжну послідовність. Покажемо, що оператор  $A$  теж переводить її в збіжну послідовність. Простір  $E$  — повний, тому достатньо показати, що  $\{Ax_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  є фундаментальною послідовністю.

$$\begin{aligned} \|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| &\leq \\ &\|Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)} + A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)} + A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\| \leq \\ &\|Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)}\| + \|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\| + \|A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\|. \end{aligned}$$

Нехай  $\|x_n\| \leq C$ . Оскільки  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Крім того, оскільки послідовність  $\{A_kx_n^{(n)}\}$  є збіжною,

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Вибравши  $M = \max(K, N)$ , отримуємо

$$\forall n, m \geq M : \|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| < \varepsilon. \quad \square$$

**Теорема 15.4**

Якщо  $A$  — лінійний компактний оператор, оператор  $B$  — лінійний обмежений, то оператори  $AB$  і  $BA$  є компактними.

*Доведення.* Якщо множина  $M \subset E$  є обмеженою, то  $BM$  — обмежена множина, оскільки обмежений оператор переводить будь-яку обмежену множину в обмежену множину. Отже, множина  $ABM$  є відносно компактною. Це означає, що оператор  $AB$  є компактным.

Аналогічно, якщо множина  $M \subset E$  є обмеженою, то  $AM$  — відносно компактна множина, оскільки компактний оператор переводить будь-яку обмежену множину у відносно компактну множину. Оператор  $B$  — неперервний, тому множина  $BAM$  є відносно компактною. Це означає, що оператор  $BA$  є компактным.  $\square$

**Наслідок 15.1**

В нескінченновимірному просторі  $E$  компактний оператор не може мати обмеженого оберненого оператору.

**Теорема 15.5**

Оператор, спряжений до компактного, є компактным.

Спряжені, самоспряжені і компактні оператори відіграють особливо важливу роль у гільбертових просторах. Саме на цих поняттях побудована теорія розв'язності операторних рівнянь в гільбертових просторах.

## §15.4 Література

- [1] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 230–250).



# 16 Гільбертові простори

## §16.1 Скалярний добуток і породжена ним норма

**Означення 16.1.** Дійсна лінійна система  $H$  називається **дійсним передгільбертовим простором** (або **евклідовим**, або **унітарним**), якщо кожній парі елементів  $x, y$  поставлено у відповідність дійсне число  $(x, y)$ , що задовольняє умови (**аксіоми скалярного добутку**):

1.  $(x, x) \geq 0$ , до того ж  $(x, x) = 0$  тільки при  $x = \vec{0}$ ;
2.  $(x, y) = (y, x)$ ;
3.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ ;
4.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ .

### Лема 16.1 (нерівність Коші—Буняковського)

В дійсному передгільбертовому просторі справджується нерівність

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)},$$

для довільних  $x, y \in H$ .

*Доведення.* Розглянемо вираз

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y).$$

Це означає, що дискримінант цього квадратного трьохчлена є недодатним:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

Отже,

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

□

За скалярним добутком в  $H$  можна ввести норму  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

### Лема 16.2

Віображення  $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{(x, x)}$  є нормою.

*Доведення.* Перевіримо аксіоми норми.

1.  $\forall x \in H: \|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$ :

$$\sqrt{(x, x)} = 0 \iff (x, x) = 0 \iff x = \vec{0}.$$

2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall x \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda(x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda|\sqrt{(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in H$ :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \\ &\|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \implies \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Що і треба було довести.  $\square$

### Лема 16.3

Скалярний добуток є неперервним відображенням, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

Доведення.

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x_n, y_n)| &= |(x, y) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x_n, y_n)| = \\ &|(x, y - y_n) + (x - x_n, y_n)| \leq \\ &\|x\| \cdot \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \cdot \|y_n\|. \end{aligned}$$

Враховуючи, що з  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  випливає, що  $\exists C : \forall n : \|y_n\| \leq C$ , можемо заключити, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(x, y) - (x_n, y_n)| \leq 0,$$

як сума двох доданків вигляду  $0 \cdot C$ , а тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y). \quad \square$$

## §16.2 Скалярний добуток породжений нормою

### Твердження 16.1 (характеристична властивість передгільбертових просторів)

Для того щоб нормований простір  $E$  був передгільбертовим необхідно і достатньо, щоб для довільних елементів  $x$  і  $y$  виконувалась рівність

$$\forall x, y \in H : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (16.1)$$

Доведення. Необхідність.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &(x, x) + 2(x, y) + (y, y) + (x, x) - 2(x, y) + (y, y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Достатність. Нехай рівність (16.1) виконується. Покладемо

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \quad (16.2)$$

Покажемо, що якщо рівність (16.1) виконується, то функція (16.2) задовольняє всім аксіомам скалярного добутку.

Оскільки при  $x = y$  маємо

$$(x, x) = \frac{1}{4}(\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2) = \|x\|^2,$$

то за допомогою такого скалярного добутку можна задати норму в просторі  $E$ .

1. (невід'ємність). Знову-таки, підставляємо  $x = y$ :

$$(x, x) = \frac{1}{4}(\|x + x\|^2 + \|x - x\|^2) = \|x\|^2 \geq 0.$$

2. (симетричність). Ця аксіома виконується за визначенням:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = \frac{1}{4}(\|y + x\|^2 + \|y - x\|^2) = (y, x).$$

3. (адитивність). Для перевірки цієї аксіоми розглянемо функцію, що залежить від трьох векторів.

$$\Phi(x, y, z) = 4((x + y, z) - (x, z) - (y, z)).$$

Покажемо, що ця функція тотожно дорівнює нулю.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 - \\ &\quad \|x + z\|^2 + \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Із рівності (16.1) випливає, що

$$\|x + y \pm z\|^2 = 2\|x \pm z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x \pm z - y\|^2.$$

Підставляючи цю рівність в (16.3), маємо

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= -\|x + y - z\|^2 + \|x - y - z\|^2 + \\ &\quad \|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Обчислимо напівсуму виразів (16.3) і (16.4).

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= \frac{1}{2}(\|y + z + x\|^2 + \|y + z - x\|^2) - \\ &\quad \frac{1}{2}(\|y - z + x\|^2 + \|y - z - x\|^2) - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2. \end{aligned}$$

Внаслідок (16.1) перший член дорівнює

$$\begin{aligned} &\|y + z\|^2 + \|x\|^2, \\ &-\|y - z\|^2 - \|x\|^2, \end{aligned}$$

Отже,

$$\Phi(x, y, z) \equiv 0.$$

4. (однорідність). Розглянемо функцію

$$\varphi(c) = (cx, y) - c(x, y).$$

Із рівності (16.2) випливає, що

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}(\|g\|^2 - \|g\|^2) = 0,$$

а, оскільки  $(-x, y) = -(x, y)$ , то

$$\varphi(-1) = 0.$$

Отже, для довільного цілого числа  $n$ :

$$(nx, y) = (\operatorname{sgn} n(x + x + \cdots + x), y) = \\ \operatorname{sgn} n((x, y) + (x, y) + \cdots + (x, y)) = |n| \operatorname{sgn} n(x, y) = n(x, y).$$

Таким чином,

$$\varphi(n) = 0.$$

При цілих  $p, q$  і  $q \neq 0$  маємо

$$\left(\frac{p}{q}x, y\right) = p \left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q} q \left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}(x, y).$$

Отже,  $\varphi(c) = 0$  при всіх раціональних числах  $c$ . Оскільки функція  $\varphi$  є неперервною, з цього випливає, що

$$\varphi(c) \equiv 0. \quad \square$$

### §16.3 Ортогональність і проєкції

**Означення 16.2.** Повний передгільбертів простір  $H$  називається **гільбертовим**.

#### Приклад 16.1

Простір  $\ell_2$  зі скалярним добутком  $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$  і нормою  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$  є гільбертовим.

#### Приклад 16.2

Простір  $C^2[a, b]$  зі скалярним добутком  $(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$  і нормою  $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$  є гільбертовим.

#### Приклад 16.3

Простір  $C[0, \frac{\pi}{2}]$  з нормою  $\|x(t)\| = \max_{t \in [0, \frac{\pi}{2}]} |x(t)|$  не є передгільбертовим — в ньому не виконується основна характеристична властивість. Нехай  $x(t) = \sin t$  і  $y(t) = \cos t$ . Оскільки  $\|x\| = \|y\| = 1$ ,  $\|x + y\| = \sqrt{2}$ ,  $\|x - y\| = 1$ , то

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 + 1 = 3 \neq 4 = 2 \cdot 2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Гільбертів простір є банаховим. Отже, на нього переносяться всі попередні означення і факти.

**Означення 16.3.** Елементи  $x$  і  $y$  гільбертового простору називаються **ортогональними**, якщо  $(x, y) = 0$ . Цей факт записується як  $x \perp y$ .

**Означення 16.4.** Якщо фіксований елемент  $x \in H$  є ортогональним до кожного елемента деякої множини  $E \subset H$ , говорять, що елемент  $x$  є **ортогональним множині**  $E$ . Цей факт позначається як  $x \perp E$ .

**Означення 16.5.** Сукупність усіх елементів, ортогональних до даної множини  $E \subset H$  є підпростором простору  $H$ . Цей підпростір називається **ортогональним доповненням множини**  $E$ .



**Теорема 16.1 (Релліха)**

Нехай  $H_1$  — підпростір гільбертового простору  $H$  і  $H_2$  — його ортогональне доповнення. Будь-який елемент  $x \in H$  можна єдиним способом подати у вигляді

$$x = x' + x'', \quad x' \in H_1, \quad x'' \in H_2. \quad (16.5)$$

До того ж елемент  $x'$  реалізує відстань від  $x$  до  $H_1$ , тобто

$$\|x - x'\| = \rho(x, H_1) = \inf_{y \in H_1} \rho(x, y).$$

*Доведення.* Позначимо  $d = \rho(x, H_1)$ . За означенням  $\inf_{y \in H_1} \rho(x, y)$  (точної нижньої грані) існують елементи  $x_n \in H_1$  такі, що

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.6)$$

Застосуємо лему 16.4 до елементів  $x - x_n$  і  $x - x_m$ :

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2).$$

Оскільки  $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in H_1$ :

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4 \left\| x - \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \geq 4d^2.$$

Отже,

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2 \left( d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2} \right) - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Таким чином, послідовність  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  є фундаментальною. Оскільки  $H$  — повний простір,  $\exists x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . В гільбертовому просторі будь-який підпростір є замкненою лінійною множиною, отже  $x' \in H_1$ .

Перейдемо до границі в нерівності (16.6). Отримаємо, що

$$\|x - x'\| \leq d. \quad (16.7)$$

З іншого боку,

$$\forall y \in H_1 : \|x - y\| \geq d \implies \|x - x'\| \geq d. \quad (16.8)$$

Порівнюючи нерівності (16.7) і (16.8), доводимо висновок, що

$$\|x - x'\| = d.$$

Доведемо твердження:

$$x'' = x - x' \perp H_1 \implies x'' \in H_2.$$

Візьмемо  $y \in H_1$ ,  $y \neq 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R} : x' + \lambda y \in H_1 &\implies \|x'' - \lambda y\|^2 = \|x - (x' + \lambda y)\|^2 \geq d^2 \implies \\ (x'' - \lambda y, x'' - \lambda y) &= (x'', x'') - 2\lambda(x'', y) + \lambda^2(y, y) \geq d^2 \implies \\ d^2 - 2\lambda(x'', y) + \lambda^2(y, y) &\geq d^2 \implies -2\lambda(x'', y) + \lambda^2(y, y) \geq 0. \end{aligned}$$

Покладемо  $\lambda = \frac{(x'', y)}{(y, y)}$ . Тоді

$$-2 \frac{(x'', y)^2}{(y, y)} + \frac{(x'', y)^2}{(y, y)} \geq 0 \implies (x'', y)^2 \leq 0.$$

Це можливо лише тоді, коли

$$(x'', y) = 0 \implies x'' \perp y.$$

Доведемо тепер єдиність подання (16.5). Припустимо, що існують два подання:

$$\begin{aligned} x &= x' + x'', & x' &\in H_1, & x'' &\in H_2, \\ x &= x'_1 + x''_1, & x'_1 &\in H_1, & x''_1 &\in H_2. \end{aligned}$$

З цього випливає, що

$$x' - x'_1 = x''_1 - x'',$$

але  $x' - x'_1 \in H_1$ , і  $x''_1 - x'' \in H_2$ , а ці підпростори перетинаються лише по  $\vec{0}$ , тобто

$$x' - x'_1 = \vec{0} = x''_1 - x''. \quad \square$$

**Означення 16.6.** Елементи  $x'$  і  $x''$ , які однозначно визначаються елементом  $x = x' + x''$ , називаються **проекціями** елемента  $x$  на підпростори  $H_1$  і  $H_2$  відповідно.

## §16.4 Лінійний функціонал як скалярне множення на елемент

### Теорема 16.2 (Рісса)

Якщо  $f \in H^*$ , то існує єдиний елемент  $y(f) \in H$ , такий що  $f(x) = (x, y)$  для довільного  $x \in H$ , та  $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$ .

*Доведення.* Спочатку доведемо існування елемента  $y$ . Позначимо через  $H_0 = \ker f$  множину тих елементів  $x \in H$ , які функціонал  $f$  відображає в нуль:

$$H_0 = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Оскільки  $f \in H^*$ , він є лінійним і неперервним, отже,  $H_0 = \ker f$  — підпростір, тобто замкнена лінійна множина. Якщо  $H_0 = H$ , покладемо  $y = 0$ .

Розглянемо випадок, коли  $H_0 \neq H$ . Нехай  $y_0 \in H \setminus H_0$ . За теоремою Релліха подамо його у вигляді

$$y_0 = y' + y'', \quad y' \in H_0, \quad y'' \perp H_0.$$

Якщо  $y'' \neq 0$ , то  $f(y'') \neq 0$ . Значить, можна покласти

$$f(y'') = 1$$

(інакше ми могли б взяти замість  $y''$  елемент  $\frac{y''}{f(y'')}$ ). Виберемо довільний елемент  $x \in H$  і позначимо  $f(x) = \alpha$ . Розглянемо елемент  $x' = x - \alpha y''$ . Тоді

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0.$$

Отже,

$$x' \in H_0 \implies (x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha (y'', y'') \implies \\ f(x) = \alpha = \left( x, \frac{y''}{(y'', y'')} \right) \implies y = \frac{y''}{(y'', y'')}.$$

Доведемо єдиність цього елемента. Дійсно, якщо

$$\exists y, y_1 \in H : \forall x \in H : (x, y) = (x, y_1),$$

то

$$(x, y - y_1) = 0 \implies y - y_1 \perp H \implies y = y_1.$$

Оцінимо норму функціонала.

$$|f(y)| \leq \|f\| \cdot \|y\| \implies \|f\| \geq f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|.$$

З іншого боку,

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \implies \|f\| \leq \|y\|.$$

□

**Зауваження 16.1** — З теореми Рісса випливає, що між гільбертовим простором  $H$  і спряженим простором  $H^*$  існує ізоморфізм, і скалярні добутки вичерпують весь запас функціоналів, які можна задати на просторі  $H$ .

## §16.5 Література

- [1] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 143–147).
- [2] Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов — М.: 1977 (стр. 160–167, 197–198).



# 17 Теорема про ізоморфізм

Обравши в  $n$ -вимірному евклідовому просторі ортогональний нормований базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , можна кожний вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  записати у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^n c_k e_k,$$

де

$$c_k = (x, e_k).$$

Постає питання, як узагальнити цей розклад на випадок нескінченновимірного евклідова простору. Введемо наступні поняття.

## §17.1 Базиси у гільбертових просторах

**Означення 17.1.** Система ненульових векторів  $\{e_k\} \subset E$  називається **ортогональною**, якщо  $(e_k, e_l) = 0$  при  $k \neq l$ .

**Означення 17.2.** Система  $\{e_k\} \subset E$ , елементи якої задовольняють умову

$$(e_k, e_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

називається **ортонормованою**.

Нагадаємо означення із теорії лінійних просторів.

**Означення 17.3.** Найменший лінійний підпростір, що містить множину  $A$  у лінійному просторі  $X$ , називається **лінійною оболонкою** множини  $A$ , або лінійним підпростором, що породжений множиною  $A$ . Цей підпростір позначається як  $\text{span } A$ .

**Зауваження 17.1** — Лінійна оболонка лінійної множини  $A$  є замкнутою, але якщо множина  $A$  є довільною, це не обов'язково так. В той же час у нормованих просторах підпростори є замкненими за означенням, тому лінійна оболонка множини в нормованому просторі є замкнутою.

**Означення 17.4.** Система  $\{e_k\} \subset E$  називається **повною**, якщо її лінійна оболонка є скрізь щільною в  $E$ , тобто  $\text{span}\{e_k\} = E$ .

**Означення 17.5.** Повна ортонормована система  $\{e_k\} \subset E$  називається **ортонормованим базисом**.

### Приклад 17.1

В просторі  $\ell_2$  ортонормований базис утворюють послідовності

$$e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots).$$

Скалярний добуток:  $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ .

**Приклад 17.2**

В просторі  $C^2(a, b)$  ортонормований базис утворюють вектори

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{2\pi t}{b-a}, \sin \frac{2\pi t}{b-a}, \dots, \cos \frac{2\pi nt}{b-a}, \sin \frac{2\pi nt}{b-a}, \dots$$

Скалярний добуток:  $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ .

**Лема 17.1**

В сепарабельному евклідовому просторі будь-яка ортогональна система є не більш ніж зліченною.

*Доведення.* Не обмежуючи загальності, розглянемо ортонормовану систему  $\{\varphi_k\} \subset E$ . Тоді

$$\begin{aligned} \|\varphi_k - \varphi_l\| &= \sqrt{(\varphi_k - \varphi_l, \varphi_k - \varphi_l)} = \\ &= \sqrt{(\varphi_k, \varphi_k) - 2(\varphi_k, \varphi_l) + (\varphi_l, \varphi_l)} = \\ &= \sqrt{(\varphi_k, \varphi_k) + (\varphi_l, \varphi_l)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Розглянемо сукупність куль  $S(\varphi_k, \frac{1}{2})$ . Ці кулі не перетинаються. Якщо зліченна множина  $\{\psi_k\}$  є скрізь щільною в  $E$ , то в кожну кулю потрапить принаймні один елемент  $\psi_k$ . Отже, потужність множини таких куль не може перевищувати потужність зліченої множини.  $\square$

**§17.2 Елементи аналізу Фур'є**

**Означення 17.6.** Ортонормована система  $\{\varphi_k\} \subset E$  називається **замкненою**, якщо для довільного  $f \in E$  виконується **рівність Парсеваля**

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2. \quad (17.1)$$

**Означення 17.7.** Нехай  $\{\varphi_k\} \subset E$  — ортонормована система в евклідовому просторі, а  $f$  — довільний елемент із  $E$ . Поставимо у відповідність елементу  $f \in E$  послідовність чисел

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Числа  $c_k$  називаються **координатами**, або **коефіцієнтами Фур'є** елемента  $f$  по системі  $\{\varphi_k\} \subset E$ , а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

називається **рядом Фур'є** елемента  $f$  по системі  $\{\varphi_k\} \subset E$ .

**Теорема 17.1**

Ряд Фур'є збігається тоді і лише тоді, коли система  $\{\varphi_k\} \subset E$  є замкненою.

*Доведення.* Розглянемо суму

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$$

і для заданого числа  $n$  відшукаємо коефіцієнти  $\alpha_k$ , що мінімізують  $\|f - S_n\|^2$ .

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|^2 &= \left( f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) = \\ &= (f, f) - 2 \left( f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) + \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - c_k)^2. \end{aligned}$$

Мінімум цього виразу досягається тоді, коли останній член дорівнює нулю, тобто, коли

$$\alpha_k = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В цьому випадку

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2. \quad (17.2)$$

Оскільки  $\|f - S_n\|^2 \geq 0$ , то

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Переходячи до границі при  $n \rightarrow \infty$ , отримуємо нерівність Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Із тотожності (17.2) випливає, що ряд Фур'є збігається тоді і лише тоді, коли виконується рівність Парсеваля, тобто система є замкнутою.  $\square$

### Теорема 17.2 (Рісса—Фішера)

Нехай  $\{\varphi_k\} \subset E$  — довільна ортонормована система в гільбертовому просторі  $E$ , а числа  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  є такими, що ряд  $\sum_{k=1}^n c_k^2$  є збіжним.

Тоді існує такий елемент  $f \in E$ , що  $c_k = (f, \varphi_k)$  і  $\sum_{k=1}^n c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2$ .

*Доведення.* Розглянемо суму

$$f_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k.$$

Тоді,

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \dots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

Оскільки ряд  $\sum_{k=1}^n c_k^2$  є збіжним, а простір  $E$  — повним, послідовність  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  збігається до деякого елемента  $f \in E$ . Оцінимо наступний скалярний добуток.

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i).$$

При  $n \geq i$  перший доданок дорівнює  $c_i$ , а другий доданок при  $n \rightarrow \infty$  прямує до нуля, оскільки

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_i\|.$$

Ліва частина рівності від  $n$  не залежить. Переходячи до границі при  $n \rightarrow \infty$ , доходимо висновку, що

$$(f, \varphi_i) = c_i.$$

Оскільки за означенням елемента  $f$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0,$$

то

$$\left( f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right) = (f, f) - \sum_{k=1}^n c_k^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^n c_k^2 = (f, f).$$

□

### §17.3 Сепарабельний простір

#### Теорема 17.3

В сепарабельному евклідовому просторі  $E$  будь-яка повна ортонормована система є замкнутою, і навпаки.

*Доведення.* Необхідність. Нехай система  $\{\varphi_k\} \subset E$  є замкнутою. Тоді за теоремою 17.1 для довільного елемента  $f \in E$  послідовність часткових сум його ряду Фур'є збігається до  $f$ . Це означає, що  $\overline{\text{span}\{\varphi_k\}} = E$ , тобто система  $\{\varphi_k\}$  є повною.

Достатність. Нехай система  $\{\varphi_k\}$  є повною, тобто довільний елемент  $f \in E$  можна скільки завгодно точно апроксимувати лінійною комбінацією  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$  елементів системи  $\{\varphi_k\}$ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k : \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon.$$

За теоремою 17.1 елементом найкращого наближення серед усіх сум вигляду  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$  є ряд Фур'є. Отже, цей ряд збігається, а, значить, виконується рівність Парсеваля, тобто система  $\{\varphi_k\}$  є замкнутою. □

#### Теорема 17.4 (про ізоморфізм)

Довільні два сепарабельних гільбертових простора є ізоморфними один до одного.



*Доведення.* Покажемо, що кожний гільбертів простір  $H$  є ізоморфним простору  $\ell_2$ . Це доведе теорему про ізоморфізм.

Виберемо в  $H$  довільну повну ортонормовану систему  $\{\varphi_k\} \subset H$  і поставимо у відповідність елементу  $f \in H$  сукупність його коефіцієнтів Фур'є за цією системою  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ . Оскільки  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$ , то послідовність  $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$  належить  $\ell_2$ .

І навпаки, за теоремою Рісса—Фішера довільному елементу  $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\} \in \ell_2$  відповідає деякий елемент  $f \in H$ , у якого числа  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  є коефіцієнтами Фур'є за системою  $\{\varphi_k\} \subset H$ . Ця відповідність є взаємно-однозначною.

Крім того, якщо

$$\begin{aligned} f &\leftrightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}, \\ g &\leftrightarrow \{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} f + g &\leftrightarrow \{c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n, \dots\}, \\ \alpha f &\leftrightarrow \{\alpha c_1, \alpha c_2, \dots, \alpha c_n, \dots\}. \end{aligned}$$

Нварешті, із рівності Парсеваля випливає, що

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2,$$

а тому

$$2(f, g) = (f + g, f + g) - (f, f) - (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k.$$

Отже,

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k.$$

Таким чином, установлена відповідність між елементами просторів  $H$  і  $\ell_2$  є ізоморфізмом.  $\square$

## §17.4 Література

- [1] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 149–157).



# IV

Фільтри і напрямленості

## Частина IV: Зміст

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>18 Напряменості</b>                                  | <b>111</b> |
| 18.1 Частково упорядковані множини (нагадування)        | 111        |
| 18.2 Напряменості                                       | 112        |
| 18.3 Границі напрямленості                              | 113        |
| 18.4 Напряменості та неперервність                      | 114        |
| 18.5 Література   | 115        |
| <b>19 Фільтри</b>                                       | <b>117</b> |
| 19.1 Фільтри  | 117        |
| 19.2 Бази фільтрів                                      | 117        |
| 19.3 Образи фільтрів і баз фільтрів                     | 118        |
| 19.4 Фільтри, породжені базою                           | 119        |
| 19.5 Література   | 119        |
| <b>20 Фільтри і збіжність</b>                           | <b>121</b> |
| 20.1 Границі і граничні точки фільтрів                  | 121        |
| 20.2 Границя функції по фільтру                         | 122        |
| 20.3 Література   | 122        |
| <b>21 Ультрафільтри</b>                                 | <b>123</b> |
| 21.1 Ультрафільтр як мажоранта                          | 123        |
| 21.2 Властивості і критерій ультрафільтра               | 123        |
| 21.3 Ультрафільтри, збіжність і компактність            | 124        |
| 21.4 Література   | 125        |
| <b>22 Зв'язок між фільтрами і напрямленостями</b>       | <b>127</b> |
| 22.1 Відповідність між фільтрами і напрямленостями      | 127        |
| 22.2 Границі і граничні точки фільтрів і напрямленостей | 128        |
| 22.3 Універсальні напрямленості і ультрафільтри         | 128        |
| 22.4 Література   | 129        |

---

# 18 Напряменості

Як добре відомо, в основі усіх основних понять і конструкцій математичного аналізу (неперервності, диференційовності, інтегрованості, сумування рядів тощо) лежить концепція збіжності. В основному курсі функціонального аналізу ми показали, що за допомогою цієї концепції в топологічних просторах, що задовольняють першу аксіому зліченості, можна навіть задавати топологію.

Концепція збіжності містить в собі два поняття: послідовність і границю. Спочатку в математиці розглядалися лише послідовності дійсних чисел. Згодом теорію розповсюдили на послідовності точок в метричному просторі, і, нарешті, узагальнили для послідовності точок в довільному топологічному просторі.

Прагнення вийти за межі просторів, що задовольняють першу аксіому зліченості, в 1920-х роках привело до узагальнення поняття границі звичайних послідовностей на узагальнену послідовність (збіжність за Муром–Смітом) і появи теорії напрямленостей. В 1930-х роках французький математик А. Картан розробив загальну теорію збіжності, яка заснована на поняттях фільтра, ультрафільтра та їх границь. Ця теорія є універсальною. Вона заміняє теорію Мура–Сміта і суттєво спрощує загальну теорію збіжності.

Для того щоб глибше зрозуміти зміст цих теорій, доцільно детально їх розглянути та порівняти.

## §18.1 Частково упорядковані множини (нагадування)

Нагадаємо деякі означення із теорії множин.

**Означення 18.1.** Нехай  $A$  — довільна множина. Позначимо як  $A \times A$  сукупність усіх упорядкованих пар  $(a, b)$ , де  $a, b \in A$ . Говорять, що в множині  $A$  задано **бінарне відношення**  $\varphi$ , якщо в  $A \times A$  виділено довільну підмножину  $R_\varphi$ . Елемент  $a$  перебуває у відношенні  $\varphi$  з елементом  $b$ , якщо пара  $(a, b)$ , належить  $R_\varphi$ .

### Приклад 18.1

Бінарним відношенням є, наприклад, тотожність. Множиною  $R_\varphi$  у цьому випадку є діагональ  $(a, a) \in A \times A$ .

**Означення 18.2.** Бінарне відношення, задане в множині  $A$ , називається **відношенням часткового передупорядкування**, якщо воно є рефлексивним і транзитивним, тобто

1.  $(a, a) \in R_\varphi$  — рефлексивність;
2.  $(a, b), (b, c) \in R_\varphi \implies (a, c) \in R_\varphi$  — транзитивність.

**Означення 18.3.** Бінарне відношення, задане в множині  $A$ , називається **відношенням часткового упорядкування**, якщо воно є рефлексивним, транзитивним і антисиметричним, тобто

1.  $(a, a) \in R_\varphi$  — рефлексивність;
2.  $(a, b), (b, c) \in R_\varphi \implies (a, c) \in R_\varphi$  — транзитивність.
3.  $(a, b), (b, a) \in R_\varphi \implies a = b$  — антисиметричність.

**Означення 18.4.** Множина  $A$  із заданим на ній відношенням часткового упорядкування (передупорядкування) називається **частково упорядкованою (передупорядкованою) множиною**.

**Зауваження 18.1** — У частково упорядкованих множинах за традицією відношення  $xRy$  позначають як  $x \leq y$  або  $y \geq x$ .

## §18.2 Напрямленисті

**Означення 18.5.** Частково упорядкована множина  $S$  називається **фільтрівною вправо**, або **напрямленим за зростанням**, або просто **напрявленою множиною**, якщо

$$\forall s_1, s_2 \in S \quad \exists s \in S : \quad s \geq s_1, s_2.$$

### Приклад 18.2

Множина натуральних чисел із природним упорядкуванням є спрявленою.

### Приклад 18.3

Нехай  $x$  — фіксована точка топологічного простору  $X$ , а  $\Omega_x$  — сукупність усіх околів цієї точки.

Введемо в множині  $\Omega_x$  відношення упорядкування за оберненим включенням:

$$V \subset U \iff V \geq U.$$

Оскільки

$$\forall U_1, U_2 \in \Omega \quad U_1 \cap U_2 \geq U_1, U_2,$$

то множина  $\Omega_x$  є *спрявленою* множиною усіх околів точки  $x$  в просторі  $X$ .

Розглянемо довільну множину  $X$  і деяку послідовність її елементів  $x_n$ . Послідовність  $x_n$  можна трактувати як відображення

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X,$$

де  $f(n) = x_n$ .

Якщо замінити множину  $\mathbb{N}$  довільною спрявленою множиною  $S$ , отримаємо означення узагальненої послідовності, або спрямленисті.

**Означення 18.6.** Будь-яке відображення спрявленої множини називається **напрямленистю**, або **узагальненою послідовністю**, або **сіттю**. До того ж, якщо  $f : S \rightarrow X$  — спрямленистість, то спрявлена множина  $S$  називається *областю визначеності спрямленисті*  $f$ , а множина  $f(S)$  — *областю її значень*.

**Зауваження 18.2** — Будь-яка послідовність елементів простору  $X$  є спрямленистю в  $X$  з областю визначення  $\mathbb{N}$ . Для зручності значення  $f_s$  спрямленисті  $f : S \rightarrow X$  на елементі  $s \in S$  часто позначають як  $x_s$ , а саму спрямленистість  $f$  подають як множину  $\{x_s \mid s \in S\}$ .

**Приклад 18.4**

Нехай  $\Omega_x$  — напрямлена множина усіх околів точки  $x$  простору  $X$ . Вибираючи по одній точці  $x_U$  з кожного околу  $U \subset \Omega_x$ , ми отримуємо напрямленість  $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$ .

**Означення 18.7.** Говорять, що напрямленість  $f : S \rightarrow X$  починаючи з деякого місця **належить**, або **майже вся лежить** в підмножині  $A \subset X$ , якщо існує  $s_0 \in S$ , таке що  $\forall s \geq s_0 \ x_s \in A$ .

**Означення 18.8.** Якщо  $\forall s \in A \ \exists t \geq s: f_t \in A$ , то говорять, що напрямленість  $f : S \rightarrow X$  є **частою** в підмножині  $A \subset X$  (**часто буває** в  $A$ ).

**Зауваження 18.3 —** Якщо напрямленість  $f : S \rightarrow X$  є частою в  $A$ , то вона не може майже вся лежати в доповненні  $X \setminus A$ . І навпаки, якщо напрямленість майже вся лежить в доповненні  $X \setminus A$ , то вона не може бути частою в  $A$ .

**Означення 18.9.** Точка  $x^*$  називається **граничною точкою** напрямленості, якщо ця напрямленість часто буває в будь-якому околі точки  $x^*$ .

### §18.3 Границі напрямленості

**Означення 18.10.** Направленість  $f : S \rightarrow X$  в топологічному просторі  $X$  називається **збіжною** до точки  $x_0 \in X$ , якщо вона майже вся лежить в будь-якому околі точки  $x_0$ , тобто якщо для довільного околу  $U$  цієї точки знайдеться елемент  $s_U \in S$ , такий що  $\forall s \geq s_U \ f_s \in U$ . Точка  $x_0 = \lim_S f_s$  називається **границею** напрямленості  $f : S \rightarrow X$ .

**Приклад 18.5**

Кожна збіжна послідовність в просторі  $X$  є збіжною напрямленістю в  $X$ , границя якої є границею послідовності.

**Приклад 18.6**

Нехай  $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$  — напрямленість в просторі  $X$ . Легко бачити, що ця напрямленість збігається до точки  $x$ . Дійсно, нехай  $U_0$  — довільний окіл точки  $x$ . Тоді  $\forall U \geq U_0 \ x \in U \subset U_0$ , тобто ця напрямленість майже вся лежить в довільному околі точки  $x$ .

**Зауваження 18.4 —** Направленість, як і послідовність, в загальних топологічних просторах може мати різні границі. В хаусдорфових просторах вона має одну границю.

**Означення 18.11.** Направленість  $g : T \rightarrow X$  називається **піднаправленістю** напрямленості  $f : S \rightarrow X$ , якщо існує відображення  $h : T \rightarrow S$ , таке що  $g = f \circ h$  і  $\forall s_0 \in S \ \exists t_0 \in T: \forall t \geq t_0 \ h(t) \geq s_0$ .

**Зауваження 18.5** — На відміну від означення звичайної підпослідовності, означення піднапрямлених допускає, щоб область визначення піднапрямлених не була частиною області визначення напрямлених.

**Означення 18.12.** Частково упорядкована множина  $X$  є **конфінальною** своїй підмножині  $A$ , якщо в  $X$  не існує жодного елемента, що є наступним за усіма елементами множини  $A$ .

**Приклад 18.7**

Інтервал  $(0, 1)$  є конфінальним множині  $\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ .

**Зауваження 18.6** — Якщо  $T \subset S$ , а  $h$  — відображення вкладення, то друга умова еквівалентна конфінальності  $T$  в  $S$ . І навпаки, для будь-якої конфінальної частини  $T$  з  $S$  і будь-якої напрямленої  $f : S \rightarrow X$  звуження  $f$  на  $T$  є піднапрямленим напрямленої  $f$ .

**Теорема 18.1 (Бірхгофа)**

Нехай  $A$  — деяка підмножина довільного топологічного простору  $X$ . Тоді  $x \in \bar{A}$  тоді і лише тоді, коли існує напрямленість в  $A$ , що збігається до точки  $x$ .

**Доведення. Необхідність.** Нехай  $x \in \bar{A}$  і  $\Omega_x$  — напрямлена множина усіх околів точки  $x$ . Оскільки

$$\forall U \in \Omega_x \quad A \cap U \neq \emptyset,$$

то, вибираючи по одній точці  $x_U \in A \cap U$ , отримуємо напрямленість  $\{x_U \mid U \in \Omega_x\}$  в  $A$ , що збігається до точки  $x$ .

**Достатність.** Нехай  $\{x_s \mid s \in S\}$  — напрямленість в  $A$ , що збігається в  $X$  до точки  $x$ . Тоді за означенням границі напрямленості

$$\forall U \in \Omega_x \quad \exists s_0 \in S : \quad \forall s \geq s_0 \quad x_s \in U.$$

Отже,

$$A \cap U \neq \emptyset \implies x_0 \in \bar{A}.$$

□

## §18.4 Напрямлених та неперервність

**Зауваження 18.7** — Нагадаємо, що в просторах із першою аксіомою зліченності неперервність відображення  $f$  в довільній точці  $x_0$  була еквівалентною умові, що з  $x_n \rightarrow x_0$  випливає  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Перехід від послідовностей до напрямлених дозволяє відмовитись від цієї умови.

**Теорема 18.2 (критерій неперервності)**

Відображення  $f : X \rightarrow Y$  є неперервним в точці  $x_0$  тоді і лише тоді, коли для будь-якої напрямленої  $\{x_s \mid s \in S\}$ , що збігається до точки  $x_0 \in X$  напрямленість  $\{f(x_s) \mid s \in S\}$  збігається до точки  $f(x_0) \in Y$ .



**Доведення. Необхідність.** Нехай  $f : X \rightarrow Y$  є неперервною в точці  $x_0$  і  $\{x_s \mid s \in S\}$  — деяка напрямленість в  $X$ , що збігається до точки  $x_0$ . Нехай також  $V_0$  — довільний окіл точки  $f(x_0)$  в  $Y$ . Тоді достатньо пересвідчитись, що напрямленість  $\{f(x_s) \mid s \in S\}$  майже вся лежить в  $V_0$ .

Справді, оскільки відображення  $f$  є неперервним в точці  $x_0$ , існує окіл  $U_0$  точки  $x_0$ , такий що  $f(U_0) \subset V_0$ . Оскільки напрямленість  $\{x_s \mid s \in S\}$  збігається до  $x_0$ , то знайдеться індекс  $s_0 \in S$  такий, що при всіх  $s \geq s_0$   $x_s \in U_0$ . Отже, для всіх  $s \geq s_0$   $f(x_s) \in V_0$ , а це значить, що майже вся напрямленість  $\{f(x_s) \mid s \in S\}$  лежить в  $V_0$ .

**Достатність.** Припустимо, що умови теореми виконуються, але відображення  $f$  не є неперервним в точці  $x_0$ . Тоді існує такий окіл  $V_0$  точки  $f(x_0)$ , що в будь-якому околі  $U$  точки  $x_0$  знайдеться точка  $x_U$ , образ  $f(x_U)$  якої належить  $Y \setminus V_0$ .

Розглянемо напрямленість  $\{x_U \mid U \in \Omega_{x_0}\}$ , де  $\Omega_{x_0}$  — напрямлена множина усіх околів точки  $x_0$ . Очевидно, що ця напрямленість збігається до точки  $x_0$ .

Проте напрямленість  $\{f(x_U) \mid U \in \Omega_{x_0}\}$  не може збігатися до точки  $f(x_0)$ , оскільки в такому випадку вона майже вся лежала б в околі  $V_0$ . Отримане протиріччя доводить достатність.  $\square$

## §18.5 Література

- [1] Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин — М.: Наука, 1981 (стр. 18–21).
- [2] Александрян Р. А., Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 91–98).
- [3] Келли Дж. Общая топология / Дж. Келли — М.: Наука, 1966 (стр. 91–118).



# 19 Фільтри

Окрім збіжності напрямленостей, існує ще один вид узагальненої збіжності — збіжність фільтрів. Ця ідея базується на альтернативному означенні збіжної послідовності: послідовність  $x_n$  називається збіжною до точки  $x_0$ , якщо для будь-якого околу  $U$  цієї точки доповнення до прообразу  $f^{-1}(U)$  є скінченною підмножиною з  $\mathbb{N}$ , де  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  — відображення, що задає послідовність. Якщо множини  $\mathbb{N}$  замінити абстрактною множиною  $E$ , в якому виділено сім'ю підмножин  $F$ , що має певні загальні властивості, то можна дати розумне означення узагальненої збіжності.

## §19.1 Фільтри

**Означення 19.1.** Сім'я підмножин  $\mathfrak{F}$  множини  $X$  називається **фільтром** на  $X$ , якщо:

1. Сім'я  $\mathfrak{F}$  непорожня.
2.  $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ .
3. Якщо  $A, B \in \mathfrak{F}$ , то  $A \cap B \in \mathfrak{F}$ .
4. Якщо  $A \in \mathfrak{F}$ ,  $A \subset B \subset X$ , то  $B \in \mathfrak{F}$ .

### Наслідок 19.1

$X \in \mathfrak{F}$ .

### Наслідок 19.2

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F}$ .

### Наслідок 19.3

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ .

### Приклад 19.1

Система  $\Omega_x$  усіх околів точки  $x$  в топологічному просторі  $X$  є фільтром.

## §19.2 Бази фільтрів

**Означення 19.2.** Непорожня сім'я підмножин  $\mathfrak{D}$  множини  $X$  називається **базою фільтра**, якщо:

1.  $\emptyset \notin \mathfrak{D}$ ;
2.  $\forall A, B \in \mathfrak{D} \exists C \in \mathfrak{D}: C \subset A \cap B$ .

**Означення 19.3.** Нехай  $\mathfrak{D}$  — база фільтра. Фільтром, що **породжений** базою  $\mathfrak{D}$ , називається сім'я  $\mathfrak{F}$  усіх множин  $A \subset X$ , що містять як підмножину хоча б один елемент бази  $\mathfrak{D}$ .

**Вправа 19.1.** Довести, що фільтр, породжений базою, дійсно є фільтром.

### Приклад 19.2

Якщо  $X$  — топологічний простір,  $x_0 \in X$ ,  $\mathfrak{D}$  — сукупність усіх відкритих множин, що містять  $x_0$ , то фільтр, породжений базою  $\mathfrak{D}$ , є фільтром  $\mathfrak{M}_{x_0}$ , що складається з усіх околів точки  $x_0$ .

**Означення 19.4.** Нехай  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  — послідовність елементів множини  $X$ . Тоді сім'я  $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$  “хвостів” послідовності  $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$  є базою фільтра. Фільтр  $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$ , породжений базою  $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$ , називається фільтром, **асоційованим** з послідовністю  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

## §19.3 Образи фільтрів і баз фільтрів

### Теорема 19.1

Нехай  $X, Y$  — множини,  $f : X \rightarrow Y$  — функція,  $\mathfrak{D}$  — база фільтра в  $X$ . Тоді сім'я  $f(\mathfrak{D})$  усіх множин виду  $f(A)$ ,  $A \in \mathfrak{D}$  є базою фільтра в  $Y$ .

*Доведення.* Виконання першої аксіоми бази фільтра є очевидним, адже образ непорожньої множини — непорожня множина. Нехай  $f(A), f(B)$  — довільні елементи сім'ї  $f(\mathfrak{D})$ ,  $A, B \in \mathfrak{D}$ . За другою аксіомою існує таке  $C \in \mathfrak{D}$ , що  $C \subset A \cap B$ . Тоді  $f(C) \subset f(A) \cap f(B)$ . Отже друга аксіома виконується і для сім'ї  $f(\mathfrak{D})$ .  $\square$

### Наслідок 19.4

$\mathfrak{F}$  — фільтр на  $X$ , то  $f(\mathfrak{F})$  — база фільтра в  $Y$ .

**Означення 19.5.** **Образом фільтра**  $\mathfrak{F}$  при відображенні  $f$  називається фільтр  $f[\mathfrak{F}]$ , породжений базою  $f(\mathfrak{F})$ , тобто

$$A \in f[\mathfrak{F}] \iff f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}.$$

### Теорема 19.2

Нехай  $\mathfrak{C} \subset 2^X$  — непорожня сім'я множин. Для того щоб існував фільтр  $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$  (тобто такий, що усі елементи сім'ї  $\mathfrak{C}$  є елементами фільтра  $\mathfrak{F}$ ) необхідно і достатньо, щоб  $\mathfrak{C}$  була центрованою.

*Доведення. Необхідність.* Якщо  $\mathfrak{F}$  — фільтр і  $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ , то будь-який скінчений набір  $A_1, A_2, \dots, A_n$  елементів сім'ї  $\mathfrak{C}$  буде складатися з елементів фільтра  $\mathfrak{F}$ . Отже,

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset.$$

**Достатність.** Нехай  $\mathfrak{C}$  — центрована сім'я. Тоді сім'я  $\mathfrak{D}$  усіх множин виду

$$\bigcap_{i=1}^n A_i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{C}$$

буде базою фільтра. Як фільтр  $\mathfrak{F}$  треба взяти фільтр, породжений базою  $\mathfrak{D}$ .  $\square$

## §19.4 Фільтри, породжені базою

**Означення 19.6.** Нехай  $\mathfrak{F}$  — фільтр на  $X$ . Сім'я множин  $\mathfrak{D}$  називається **базою фільтра**  $\mathfrak{F}$ , якщо  $\mathfrak{D}$  база фільтра і фільтр, породжений базою  $\mathfrak{D}$ , збігається з  $\mathfrak{F}$ .

### Теорема 19.3 (критерій бази фільтра $\mathfrak{F}$ )

Для того щоб  $\mathfrak{D}$  була базою фільтра  $\mathfrak{F}$ , необхідно і достатньо, щоб виконувалися дві умови:

1.  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$ ;
2.  $\forall A \in \mathfrak{F} \exists B \in \mathfrak{D}: B \subset A$ .

**Вправа 19.2.** Доведіть цю теорему.

**Означення 19.7.** Нехай  $F$  — фільтр на  $X$  і  $A \subset X$ . **Слідом** фільтра  $\mathfrak{F}$  на  $A$  називається сім'я підмножин  $\mathfrak{F}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathfrak{F}\}$ .

### Теорема 19.4

Для того щоб сім'я  $\mathfrak{F}_A$  була фільтром на  $A$ , необхідно і достатньо, щоб усі перетини  $A \cap B$ ,  $B \in \mathfrak{F}$  були непорожніми.

**Вправа 19.3.** Доведіть цю теорему.

### Наслідок 19.5

$\mathfrak{F}_A$  — фільтр, якщо  $A \in \mathfrak{F}$ .

## §19.5 Література

- [1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 99–102).
- [2] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 481–484).



# 20 Фільтри і збіжність

## §20.1 Границі і граничні точки фільтрів

**Означення 20.1.** Нехай на множині  $X$  задані фільтри  $\mathfrak{F}_1$  і  $\mathfrak{F}_2$ . Говорять, що  $\mathfrak{F}_1$  **мажорує**  $\mathfrak{F}_2$ , якщо  $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$ , тобто кожний елемент фільтра  $\mathfrak{F}_2$  є водночас і елементом фільтра  $\mathfrak{F}_1$ .

### Приклад 20.1

Нехай  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — послідовність в  $X$ , а  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  — її підпослідовність. Тоді фільтр  $\mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$  асоційований з підпослідовністю, мажорує фільтр  $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$ , асоційований з самою послідовністю.

Дійсно, нехай  $A \in \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$ . Тоді існує таке  $N \in \mathbb{N}$ , що  $\{x_n\}_{n=N}^\infty \subset A$ . Але тоді й  $\{x_{n_k}\}_{k=N}^\infty \subset A$ , тобто  $A \in \mathfrak{F}_{\{x_{n_k}\}}$ .

**Означення 20.2.** Нехай  $X$  — топологічний простір,  $\mathfrak{F}$  — фільтр на  $X$ . Точка  $x \in X$  називається **границею** фільтра  $\mathfrak{F}$  (цей факт позначається як  $x = \lim \mathfrak{F}$ ), якщо  $\mathfrak{F}$  мажорує фільтр околів точки  $x$ . Іншими словами,  $x = \lim \mathfrak{F}$ , якщо кожний окіл точки  $x$  належить фільтру  $\mathfrak{F}$ .

**Означення 20.3.** Точка  $x \in X$  називається **граничною точкою** фільтра  $\mathfrak{F}$ , якщо кожний окіл точки  $x$  перетинається з усіма елементами фільтра  $\mathfrak{F}$ . Множина усіх граничних точок фільтра називається  $\text{LIM } \mathfrak{F}$ .

### Приклад 20.2

Нехай  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — послідовність в топологічному просторі  $X$ . Тоді  $x = \lim \mathfrak{F}_{\{x_n\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , а  $x \in \text{LIM } \mathfrak{F}_{\{x_n\}}$  збігається з множиною граничних точок послідовності  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Теорема 20.1

Нехай  $\mathfrak{F}$  — фільтр на топологічному просторі  $X$ ,  $\mathfrak{D}$  — деяка база фільтра  $\mathfrak{F}$ . Тоді

1.  $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x \exists A \in \mathfrak{D}: A \subset U$ ;
2.  $x = \lim \mathfrak{F} \implies x \in \text{LIM } \mathfrak{F}$ . Якщо до того ж  $X$  — хаусдорфів простір, то у фільтра  $\mathfrak{F}$  немає інших граничних точок. Зокрема, якщо у фільтра в хаусдорфовому просторі є границя, то ця границя є єдиною;
3. множина  $\text{LIM } \mathfrak{F}$  збігається з перетином замикань усіх елементів фільтра  $\mathfrak{F}$ .

*Доведення.*

1.  $x = \lim \mathfrak{F} \iff \forall U \in \Omega_x U \in \mathfrak{F} \iff \forall U \in \mathfrak{F} \exists A \in \mathfrak{D}: A \subset U$ .
2.  $x = \lim \mathfrak{F}, U \in \Omega_x \implies U \in \mathfrak{F} \implies \forall A \in \mathfrak{F} A \cap U \neq \emptyset \implies x \in \text{LIM } \mathfrak{F}$ ;  
 $x \in \text{LIM } \mathfrak{F} \implies \forall U \in \mathfrak{F}, V \in \Omega_y U \cap V \neq \emptyset \implies x = y$  (оскільки простір хаусдорфів).

$$3. x = \text{LIM } \mathfrak{F} \iff \forall A \in \mathfrak{F}, U \in \Omega_x \ A \cap U \neq \emptyset \iff \forall A \in \mathfrak{F} \ x \in \overline{A}. \quad \square$$

### Теорема 20.2

Нехай  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  — фільтри на топологічному просторі  $X$  і  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ . Тоді

1.  $x = \lim \mathfrak{F}_1 \implies x = \lim \mathfrak{F}_2$ ;
2.  $x \in \text{LIM } \mathfrak{F}_2 \implies x \in \text{LIM } \mathfrak{F}_1$ ;
3.  $x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \text{LIM } \mathfrak{F}_1$ .

*Доведення.*

1.  $\mathfrak{F}_1$  мажорує фільтр  $\mathfrak{M}_x$  околів точки  $x$ ,  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \implies \mathfrak{M}_x \subset \mathfrak{F}_2$ .
2. Оскільки при збільшенні сім'я множин її перетин зменшується, то

$$\text{LIM } \mathfrak{F}_2 = \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_2} \overline{A} \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}_1} \overline{A} = \text{LIM } \mathfrak{F}_1.$$

$$3. x = \lim \mathfrak{F}_2 \implies x \in \text{LIM } \mathfrak{F}_2 \implies x \in \text{LIM } \mathfrak{F}_1. \quad \square$$

## §20.2 Границя функції по фільтру

**Означення 20.4.** Нехай  $X$  — множина,  $Y$  — топологічний простір,  $\mathfrak{F}$  — фільтр на  $X$ . Точка  $y \in Y$  називається **границею** функції  $f : X \rightarrow Y$  по фільтру  $\mathfrak{F}$  (цей факт позначається як  $y = \lim_{\mathfrak{F}} f$ , якщо  $y = \lim f[\mathfrak{F}]$ ). Іншими словами,  $y = \lim f[\mathfrak{F}]$ , якщо для довільного околу  $U$  точки  $y$  існує такий елемент  $A \in \mathfrak{F}$ , що  $f(A) \subset U$ .

**Означення 20.5.** Точка  $y \in Y$  називається **граничною** точкою функції  $f : X \rightarrow Y$  по фільтру  $\mathfrak{F}$ , якщо  $y \in \text{LIM } f[\mathfrak{F}]$ , тобто якщо довільний окіл точки  $y$  перетинається з образами усіх елементів фільтра  $\mathfrak{F}$ .

### Приклад 20.3

Нехай  $X$  — топологічний простір,  $f : \mathbb{N} \rightarrow X$  і  $F$  — фільтр Фреше на  $\mathbb{N}$ . Тоді  $\lim_{\mathfrak{F}} f = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ .

### Теорема 20.3

Нехай  $X$  і  $Y$  — топологічні простори,  $F$  — фільтр на  $X$ ,  $x = \lim \mathfrak{F}$  і  $f : X \rightarrow Y$  — неперервна функція. Тоді  $f(x) = \lim_{\mathfrak{F}} f$ .

*Доведення.* Нехай  $U$  — довільний окіл точки  $f(x)$ . Тоді існує окіл  $V$  точки  $X$ , для якого  $f(V) \subset U$ . Умова  $x = \lim \mathfrak{F}$  означає, що  $V \in \mathfrak{F}$ . Інакше кажучи, для довільного околу  $U$  точки  $f(x)$  ми знайшли шуканий елемент  $V \in \mathfrak{F}$ :  $f(V) \subset U$ .  $\square$

## §20.3 Література

- [1] **Кадец В. М.** Курс функціонального аналізу / В. М. Кадец — Х.: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2006. (стр. 484–488).



# 21 Ультрафільтри

## §21.1 Ультрафільтр як мажоранта

### Лема 21.1

Нехай  $\mathfrak{M}$  — лінійно упорядкована непорожня сім'я фільтрів, заданих на множині  $X$ , тобто для довільних  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$  або  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ , або  $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$ . Тоді об'єднання  $\mathfrak{F}$  усіх фільтрів сім'ї  $\mathfrak{M}$  також буде фільтром на  $X$ .

*Доведення.* Перевіримо виконання аксіом фільтра для об'єднання сім'ї множин  $\mathfrak{M}$ . Перші дві аксіоми є очевидними, а тому перевіримо останні дві.

Перетин: якщо  $A, B \in \mathfrak{F}$ , то знайдуться такі  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \mathfrak{M}$ , що  $A \in \mathfrak{F}_1$ ,  $B \in \mathfrak{F}_2$ . За умовою, один з фільтрів  $\mathfrak{F}_1$  і  $\mathfrak{F}_2$  мажорує інший. Нехай, без обмеження загальності,  $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ . Тоді окрім множини  $B$  йому належить і множина  $A$ , адже  $A \in \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ . Оскільки  $\mathfrak{F}_2$  — фільтр, то  $A \cap B \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$ , тобто сім'я  $\mathfrak{F}$  справді замкнена відносно (скінченного) перетину.

Надмножина: якщо  $A \in \mathfrak{F}$  і  $A \subset B \subset X$ , то знайдеться такий  $\mathfrak{F}_1 \in \mathfrak{M}$ , що  $A \in \mathfrak{F}_1$ , а тому  $B \in \mathfrak{F}_1$ , як надмножина елементу фільтра. Як наслідок,  $B \in \mathfrak{F}$  і сім'я  $\mathfrak{F}$  виявляється замкнутою відносно взяття надмножини.  $\square$

**Означення 21.1.** **Ультрафільтром** на  $X$  називається максимальний<sup>1</sup> за включенням фільтр на  $X$ . Інакше кажучи, фільтр  $\mathfrak{A}$  на  $X$  називається *ультрафільтром*, якщо будь-який фільтр  $\mathfrak{F}$  на  $X$ , що мажорує  $\mathfrak{A}$ , збігається з  $\mathfrak{A}$ .

### Теорема 21.1

Для кожного фільтра  $\mathfrak{F}$  на  $X$  існує ультрафільтр, що його мажорує.

*Доведення.* Випливає з леми Цорна. Більш детально, необхідно розглянути частково упорядковану множину (сім'ю) фільтрів, що мажорують  $\mathfrak{F}$ . **Лема 21.1** показує, що довільний ланцюг (лінійно впорядкована підмножина) має верхню межу (також кажуть *верхню грань* або *мажоранту*).

Тоді лема Цорна стверджує, що у нашій частково упорядкованій множині є максимальний елемент. З одного боку зрозуміло, що він буде ультрафільтром, адже немає іншого фільтра, що його мажорує, а з іншого — зо він буде мажорувати  $\mathfrak{F}$ , адже усі елементи нашої частково упорядкованої множини за побудовою мажорують  $\mathfrak{F}$ .  $\square$

## §21.2 Властивості і критерій ультрафільтра

### Лема 21.2

Нехай  $\mathfrak{A}$  — ультрафільтр,  $A \subset X$  і всі елементи ультрафільтра перетинаються з  $A$ . Тоді  $A \in \mathfrak{A}$ .

<sup>1</sup>для якого не існує більшого, але не обов'язково більший за кожен інший

*Доведення.* Додавши до сім'ї множин  $\mathfrak{A}$  як елемент множину  $A$  ми отримаємо центровану систему множин. Справді, для цього достатньо аби  $\mathfrak{A}$  була просто фільтром, а точніше замкненою відносно скінченного перетину. Тоді додавши у цей перетин, який є елементом  $\mathfrak{A}$ , ще й  $A$  можна просто скористатися умовою на непорожні перетини  $A$  із елементами  $\mathfrak{A}$ . Зрозуміло, що ці міркування працюють і для ультрафільтрів, адже кожен ультрафільтр є фільтром. Таким чином уся розширена система множин є центрованою.

За **теорем. 19.2** звідси випливає, що знайдеться фільтр  $\mathfrak{F}$ , який містить усі елементи нашої центрованої системи. Але тоді  $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$ , звідки випливає, що  $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$ , адже  $\mathfrak{A}$  — ультрафільтр, і розширюватися уже нікуди. У той же час, за побудовою,  $A \in \mathfrak{F}$ , тобто  $A \in \mathfrak{A}$ .  $\square$

**Зауваження 21.1** — Якщо зняти умову того, що  $\mathfrak{A}$  — ультрафільтр, і сказати що він просто фільтр, то вийде, що його можна розширити до якогось  $\mathfrak{A}'$  щоб додати якийсь новий елемент  $A$ , за умови що цей  $A$  перетинається із усіма елементами  $\mathfrak{A}$ .

### Теорема 21.2 (критерій ультрафільтра)

Для того, щоб фільтр  $\mathfrak{A}$  на  $X$  був ультрафільтром, необхідно і достатньо, щоб для довільної множини  $A \subset X$  або сама множина  $A$ , або її доповнення  $X \setminus A$  належало фільтру  $\mathfrak{A}$ .

*Доведення. Необхідність.* Нехай  $\mathfrak{A}$  — ультрафільтр, і  $X \setminus A \notin \mathfrak{A}$ . Тоді жодна множина  $B \in \mathfrak{A}$  не міститься цілком в  $X \setminus A$ , тобто будьяка  $B \in \mathfrak{A}$  перетинається з  $A$ . Отже, за попередньою лемою,  $A \in \mathfrak{A}$ .

*Достатність.* Припустимо що  $\mathfrak{A}$  — не ультрафільтр. Тоді існує фільтр  $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{A}$  і множина  $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$ . За побудовою,  $A \notin \mathfrak{A}$ . З іншого боку,  $X \setminus A$  не перетинається з  $A$ ,  $A \in \mathfrak{F}$ , отже  $X \setminus A \notin \mathfrak{F}$ , а отже  $X \setminus A \notin \mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$ .  $\square$

### Наслідок 21.1

Образ ультрафільтра є ультрафільтром.

*Доведення.* Нехай  $f : X \rightarrow Y$  і  $\mathfrak{A}$  — ультрафільтр на  $X$ . Розглянемо довільну множину  $A \subset Y$ . Тоді або  $f^{-1}(A)$  або  $f^{-1}(Y \setminus A) = Y \setminus f^{-1}(A)$  належить  $\mathfrak{A}$ , отже  $A \in f[\mathfrak{A}]$  або  $Y \setminus A \in f[\mathfrak{A}]$ .  $\square$

## §21.3 Ультрафільтри, збіжність і компактність

### Лема 21.3

Нехай  $\mathfrak{A}$  — ультрафільтр на хаусдорфовому топологічному просторі  $X$  і  $x \in \text{LIM}(\mathfrak{A})$ . Тоді  $x = \lim \mathfrak{A}$ .

*Доведення.* Нехай  $U \in \Omega_x$ . Тоді за означенням граничної точки окіл  $U$  перетинається зі всіма елементами ультрафільтра  $\mathfrak{A}$ . За **лемм. 21.2**  $U \in \mathfrak{A}$ .  $\square$

**Теорема 21.3** (критерій компактності у термінах ультрафільтрів)

Для хаусдорфового топологічного простору  $X$  нижченаведені умови є еквівалентними:

- $X$  компакт;
- кожен ультрафільтр на  $X$  має граничну точку;
- кожен ультрафільтр на  $X$  має границю.

*Доведення.*  $1 \implies 2$ . Фільтр  $\mathfrak{F}$  — центрована сім'я множин. Тим більше, центрованою буде сім'я замикань елементів фільтра. Отже, перетин  $\text{LIM}(\mathfrak{F})$  цих замикань не є порожнім.

$2 \implies 1$ . Нехай  $\mathfrak{C}$  — довільна центромана система замкнених підмножин простору  $X$ . За [теорем. 19.2](#) існує фільтр  $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ . Тоді

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{C}} \overline{A} \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} \overline{A} = \text{LIM}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset.$$

$2 \implies 3$ . За умовою кожен ультрафільтр має граничну точку, а за [лемм. 21.3](#) ця точка буде його границею.

$3 \implies 2$ . Розглянемо довільний фільтр  $\mathfrak{F}$  на  $X$  і виберемо ([теорем. 21.1](#)) ультрафільтр  $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}$ . За умовою ультрафільтр  $\mathfrak{A}$  має границю  $x \in X$ . Згідно твердження 3) [теорем. 20.2](#) точка  $x$  є граничною точкою фільтра  $\mathfrak{F}$ .  $\square$

**Наслідок 21.2**

Нехай  $\mathfrak{A}$  — ультрафільтр на  $E$ ,  $X$  — топологічний простір і образ функції  $f : E \rightarrow X$  лежить в деякому компактi  $K \subset X$ . Тоді існує  $\lim_{\mathfrak{A}} f$ .

*Доведення.* Розглянемо  $f$  як функцію, що діє з  $E$  в  $K$ . Оскільки ([виснов. 21.1](#))  $f[\mathfrak{A}]$  є ультрафільтром на компактi  $K$ , то існує  $\lim f[\mathfrak{A}]$ . Отже, за означенням,  $\lim_{\mathfrak{A}} f = \lim f[\mathfrak{A}]$ .  $\square$

**§21.4 Література**

- [1] **Кадец В. М.** Курс функціонального аналізу / В. М. Кадец — Х.: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2006. (стр. 484–490).



# 22 Зв'язок між фільтрами і напрямленостями

Фільтри і напрямленості в одній множині  $X$  приводять до еквівалентних теорій збіжності. З одного боку, як показано раніше, кожній напрямленості  $\{x_s \mid s \in S\}$  в множині  $X$  відповідає асоційований з нею фільтр в  $X$ . З іншого боку, має місце така теорема.

## §22.1 Відповідність між фільтрами і напрямленостями

### Теорема 22.1

Нехай  $\mathfrak{F}$  — довільний фільтр в множині  $X$ . Тоді в цій множині існує напрямленість  $\{x_s \mid s \in S\}$  така, що асоційований з нею фільтр збігається з фільтром  $\mathfrak{F}$ .

*Доведення.* Розглянемо множину усіх можливих пар  $s = (x, M)$ , де  $M \in \mathfrak{F}$ , а  $x \in M$ . Уведемо в множині таких пар  $S$  частковий передпорядок, поклавши  $(x, M) \leq (y, N)$ , якщо  $M \supset N$ . Таким чином,  $S$  — напрямлена множина.

Задамо відображення  $f : S \rightarrow X$ , поклавши

$$f(s) = x, \quad \forall s = (x, M) \in S.$$

Нехай  $s = (x, M)$  — довільний елемент з  $S$ , а  $\hat{M}_s = \{f(t) \mid t \geq s\}$ . За означенням фільтра  $\hat{\mathfrak{F}}$ , асоційованого з напрямленістю  $f : S \rightarrow X$ , система підмножин  $\hat{M}_s$ , де  $s$  пробігає усі значення в множині  $S$ , утворює базу  $\hat{\beta}$  фільтра  $\hat{\mathfrak{F}}$ .

Покажемо, що фільтр  $\hat{\mathfrak{F}}$ , асоційований з побудованою напрямленістю  $f : S \rightarrow X$ , збігається з фільтром  $\mathfrak{F}$ , тобто

$$\hat{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{F} \quad \text{і} \quad \mathfrak{F} \leq \hat{\mathfrak{F}}.$$

1. Для того щоб довести, що  $\hat{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{F}$ , треба показати, що

$$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta} \quad \exists M \in \mathfrak{F} : \quad M \subset \hat{M}_s.$$

Насправді має місце більш сильний факт:

$$\forall \hat{M}_s \in \hat{\beta} \quad \exists M \in \mathfrak{F} : \quad M = \hat{M}_s.$$

Дійсно, нехай  $y \in \hat{M}_s$ , тобто

$$\exists t = (z, N) \geq (x, M) = s : \quad y = f(t),$$

тоді

$$y = z \in N \subset M \implies \hat{M}_s \subset M.$$

Тепер візьмемо довільну точку  $z \in M$  і покладемо  $t^* = (z, M)$ . Оскільки  $t^* \geq s = (x, M)$ , то  $f(t^*) = z \in \hat{M}_s$ , тобто  $M \subset \hat{M}_s$ . Таким чином,  $M = \hat{M}_s$ .

2. Покажемо, що має місце і обернене твердження:  $\mathfrak{F} \leq \hat{\mathfrak{F}}$ . Для цього пересвідчимося, що

$$\forall M \in \mathfrak{F} \quad \exists \hat{M}_s \in \hat{\beta} : \quad \hat{M}_s = M.$$

Нехай  $x^*$  — довільний елемент з  $M$  і  $s^* = (x^*, M)$ . Повторимо міркування, наведені вище.

Нехай  $s^* = (x^*, M)$  — довільний елемент з  $S$ , а  $y^* \in \hat{M}_{s^*}$ , тобто

$$\exists t^* = (z^*, N) \geq (x^*, M) = s^* : \quad y = f(t^*),$$

тоді

$$y^* = x^* \in N \subset M \implies \hat{M}_{s^*} \subset M.$$

Тепер візьмемо довільну точку  $z^* \in M$  і покладемо  $t^* = (z^*, M)$ . Оскільки  $t^* \geq s^* = (x^*, M)$ , то  $f(t^*) = z^* \in \hat{M}_{s^*}$ , тобто  $M \subset \hat{M}_{s^*}$ .

Таким чином,  $\mathfrak{F} = \hat{\mathfrak{F}}$ . □

## §22.2 Границі і граничні точки фільтрів і напрямленостей

### Теорема 22.2

Нехай  $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$  — напрямленість в топологічному просторі  $X$ , а  $\mathfrak{F}$  — асоційований з нею фільтр. Тоді кожна границя (відповідно, гранична точка) напрямленості  $\xi$  є границею (відповідно, граничною точкою) фільтра  $\mathfrak{F}$ , і навпаки.

**Доведення. Необхідність.** Нехай  $x_0 = \lim_S x_s$ . Покажемо, що фільтр  $\mathfrak{F}$  мажоруює фільтр  $\mathfrak{F}_{x_0}$  околів точки  $x_0$ , тобто  $x_0 = \lim \mathfrak{F}$ . Нехай  $U_0$  — довільний елемент  $\mathfrak{F}_{x_0}$ , тобто деякий окіл точки  $x_0$  в просторі  $X$ . Тоді

$$x_0 = \lim_S x_s \implies \exists s_0 \in S : M_{s_0} = \{x_s \mid s \geq s_0\} \subset U_0.$$

Оскільки  $M_{s_0}$  — елемент бази фільтра, асоційованого з напрямленістю  $\xi$ , то  $M_{s_0} \subset U_0 \implies U_0 \in \mathfrak{F}$ . Отже,

$$\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}_{x_0} \implies x_0 = \lim \mathfrak{F}.$$

**Достатність.** Нехай  $x_0 = \lim \mathfrak{F}$ . Отже, будь-який окіл  $U_0$  точки  $x_0$  є елементом фільтра  $\mathfrak{F}$ . За означенням, множини  $M_s = \{x_t \mid t \geq s\}$  утворюють базу фільтра  $\mathfrak{F}$ , тому  $\exists M_{s_0} \subset U_0$ . Отже, для будь-якого околу  $U_0$  точки  $x_0$  існує  $s_0 \in S$ , такий що усі члени напрямленості  $\xi$  при  $s \geq s_0$  лежать в  $U_0$ , тобто  $x_0 = \lim_S x_s$ . □

## §22.3 Універсальні напрямленості і ультрафільтри

**Означення 22.1.** Направленість  $\{x_s \mid s \in S\}$  в множині  $X$  називається **універсальною**, якщо для будь-якої підмножини  $M \subset X$  вона або майже вся лежить в  $M$ , або майже вся лежить в  $X \setminus M$ .

**Теорема 22.3**

Напрямленисть в  $X$  є універсальною тоді і лише тоді, коли асоційований з нею фільтр є ультрафільтром.

*Доведення. Необхідність.* Нехай  $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$  — універсальна напрямленість в  $X$ ,  $\mathfrak{F}$  — асоційований з нею фільтр, а  $M$  — довільна підмножина з  $X$ . Покажемо, що або  $M$ , або  $X \setminus M$  належать фільтру  $\mathfrak{F}$ , звідки випливає, що  $\mathfrak{F}$  — ультрафільтр (теорем. 21.2).

Оскільки  $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$  — універсальна напрямленість в  $X$ , то вона майже вся лежить або в  $M$ , або в  $X \setminus M$ , тобто існує індекс  $s_0 \in S$ , такий що множина  $M_{s_0} = \{x_s \mid s \geq s_0\}$  цілком міститься або в  $M$ , або в  $X \setminus M$ . Але оскільки  $M_{s_0}$  належить базі фільтра  $\mathfrak{F}$ , то або  $M$ , або  $X \setminus M$  містить  $M_{s_0}$ , тобто є елементом фільтра  $\mathfrak{F}$ .

*Достатність.* Нехай  $\mathfrak{F}$  — ультрафільтр, а  $M$  — довільна підмножина з  $X$ . Доведемо, що  $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$  майже вся лежить або в  $M$ , або в  $X \setminus M$ . Оскільки або  $M$ , або  $X \setminus M$  є елементом фільтра  $\mathfrak{F}$ , то одна з цих множин повинна цілком містити деяку множину з бази фільтра  $\mathfrak{F}$  тобто деяку множину  $M_{s_0}$ . Це значить, що  $\xi = \{x_s \mid s \in S\}$  майже вся лежить або в  $M$ , або в  $X \setminus M$ . Отже,  $\xi$  — універсальна напрямленість в  $X$ .  $\square$

**§22.4 Література**

- [1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 101–113).





# V

## Додаткові розділи функціонального аналізу