

19 Фільтри

Окрім збіжності напрямленостей, існує ще один вид узагальненої збіжності — збіжність фільтрів. Ця ідея базується на альтернативному означенні збіжної послідовності: послідовність x_n називається збіжною до точки x_0 , якщо для будь-якого околу U цієї точки доповнення до прообразу $f^{-1}(U)$ є скінченною підмножиною з \mathbb{N} , де $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ — відображення, що задає послідовність. Якщо множину \mathbb{N} замінити абстрактною множиною E , в якому виділено сім'ю підмножин F , що має певні загальні властивості, то можна дати розумне означення узагальненої збіжності.

§19.1 Фільтри

Означення 19.1. Сім'я підмножин \mathfrak{F} множини X називається **фільтром** на X , якщо:

1. Сім'я \mathfrak{F} непорожня.
2. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.
3. Якщо $A, B \in \mathfrak{F}$, то $A \cap B \in \mathfrak{F}$.
4. Якщо $A \in \mathfrak{F}$, $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.1

$X \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.2

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F}$.

Наслідок 19.3

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$.

Приклад 19.1

Система Ω_x усіх околів точки x в топологічному просторі X є фільтром.

§19.2 Бази фільтрів

Означення 19.2. Непорожня сім'я підмножин \mathfrak{D} множини X називається **базою фільтра**, якщо:

1. $\emptyset \notin \mathfrak{D}$;
2. $\forall A, B \in \mathfrak{D} \exists C \in \mathfrak{D}: C \subset A \cap B$.

Означення 19.3. Нехай \mathfrak{D} — база фільтра. Фільтром, що **породжений** базою \mathfrak{D} , називається сім'я \mathfrak{F} усіх множин $A \subset X$, що містять як підмножину хоча б один елемент бази \mathfrak{D} .

Вправа 19.1. Довести, що фільтр, породжений базою, дійсно є фільтром.

Приклад 19.2

Якщо X — топологічний простір, $x_0 \in X$, \mathfrak{D} — сукупність усіх відкритих множин, що містять x_0 , то фільтр, породжений базою \mathfrak{D} , є фільтром \mathfrak{M}_{x_0} , що складається з усіх околів точки x_0 .

Означення 19.4. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів множини X . Тоді сім'я $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$ “хвостів” послідовності $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ є базою фільтра. Фільтр $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, породжений базою $\mathfrak{D}_{\{x_n\}}$, називається фільтром, **асоційованим** з послідовністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

§19.3 Образи фільтрів і баз фільтрів

Теорема 19.1

Нехай X, Y — множини, $f : X \rightarrow Y$ — функція, \mathfrak{D} — база фільтра в X . Тоді сім'я $f(\mathfrak{D})$ усіх множин виду $f(A)$, $A \in \mathfrak{D}$ є базою фільтра в Y .

Доведення. Виконання першої аксіоми бази фільтра є очевидним, адже образ непорожньої множини — непорожня множина. Нехай $f(A), f(B)$ — довільні елементи сім'ї $f(\mathfrak{D})$, $A, B \in \mathfrak{D}$. За другою аксіомою існує таке $C \in \mathfrak{D}$, що $C \subset A \cap B$. Тоді $f(C) \subset f(A) \cap f(B)$. Отже друга аксіома виконується і для сім'ї $f(\mathfrak{D})$. \square

Наслідок 19.4

\mathfrak{F} — фільтр на X , то $f(\mathfrak{F})$ — база фільтра в Y .

Означення 19.5. **Образом фільтра** \mathfrak{F} при відображенні f називається фільтр $f[\mathfrak{F}]$, породжений базою $f(\mathfrak{F})$, тобто

$$A \in f[\mathfrak{F}] \iff f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}.$$

Теорема 19.2

Нехай $\mathfrak{C} \subset 2^X$ — непорожня сім'я множин. Для того щоб існував фільтр $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$ (тобто такий, що усі елементи сім'ї \mathfrak{C} є елементами фільтра \mathfrak{F}) необхідно і достатньо, щоб \mathfrak{C} була центрованою.

Доведення. Необхідність. Якщо \mathfrak{F} — фільтр і $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{C}$, то будь-який скінчений набір A_1, A_2, \dots, A_n елементів сім'ї \mathfrak{C} буде складатися з елементів фільтра \mathfrak{F} . Отже,

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset.$$

Достатність. Нехай \mathfrak{C} — центрована сім'я. Тоді сім'я \mathfrak{D} усіх множин виду

$$\bigcap_{i=1}^n A_i, \quad n \in \mathbb{N}, \quad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{C}$$

буде базою фільтра. Як фільтр \mathfrak{F} треба взяти фільтр, породжений базою \mathfrak{D} . \square

§19.4 Фільтри, породжені базою

Означення 19.6. Нехай \mathfrak{F} — фільтр на X . Сім'я множин \mathfrak{D} називається **базою фільтра** \mathfrak{F} , якщо \mathfrak{D} база фільтра і фільтр, породжений базою \mathfrak{D} , збігається з \mathfrak{F} .

Теорема 19.3 (критерій бази фільтра \mathfrak{F})

Для того щоб \mathfrak{D} була базою фільтра \mathfrak{F} , необхідно і достатньо, щоб виконувалися дві умови:

1. $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$;
2. $\forall A \in \mathfrak{F} \exists B \in \mathfrak{D}: B \subset A$.

Вправа 19.2. Доведіть цю теорему.

Означення 19.7. Нехай F — фільтр на X і $A \subset X$. **Слідом** фільтра \mathfrak{F} на A називається сім'я підмножин $\mathfrak{F}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathfrak{F}\}$.

Теорема 19.4

Для того щоб сім'я \mathfrak{F}_A була фільтром на A , необхідно і достатньо, щоб усі перетини $A \cap B$, $B \in \mathfrak{F}$ були непорожніми.

Вправа 19.3. Доведіть цю теорему.

Наслідок 19.5

\mathfrak{F}_A — фільтр, якщо $A \in \mathfrak{F}$.

§19.5 Література

- [1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 99–102).
- [2] **Кадец В. М.** Курс функционального анализа / В. М. Кадец — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. (стр. 481–484).