

# 13

## Принцип рівномірної обмеженості

В цій лекції ми розглянемо види збіжності послідовностей лінійних неперервних операторів і з'ясуємо, коли простір  $\mathcal{L}(E, F)$  є банаховим в розумінні тої чи іншої збіжності.

### §13.1 Види збіжності послідовностей операторів

**Означення 13.1.** Послідовність операторів  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , що діють із нормованого простору  $E$  в нормований простір  $F$ , **поточково збігається** до оператора  $A$  в просторі  $\mathcal{L}(E, F)$  при  $n \rightarrow \infty$ , якщо  $\forall x \in E: \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$ .

**Означення 13.2.** Послідовність операторів  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , що діють із нормованого простору  $E$  в нормований простір  $F$ , **рівномірно збігається** до оператора  $A$  в просторі  $\mathcal{L}(E, F)$  при  $n \rightarrow \infty$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$ .

**Зауваження 13.1 —** Якщо  $F = \mathbb{R}$ , то простір  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  є спряженим простором, поточкова збіжність є аналогом слабкої збіжності в спряженому просторі, а рівномірна збіжність є аналогом сильної збіжності в спряженому просторі.

#### Лема 13.1

Якщо послідовність лінійних обмежених операторів  $A_n : E \rightarrow F$ , де  $E, F$  — нормовані простори, є такою, що послідовність  $\{\|A_n\|\}_{n=1}^\infty$  є необмеженою, то послідовність  $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^\infty$  є необмеженою в будь-якій замкненій кулі.

*Доведення.* Припустимо супротивне: послідовність  $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^\infty$  є обмеженою в деякій замкненій кулі  $\bar{S}(x_0, \varepsilon)$ :

$$\exists(\bar{S}(x_0, \varepsilon), C > 0) : \forall n \in N : \forall x \in \bar{S}(x_0, \varepsilon) : \|A_n x\|_F \leq C.$$

Кожному елементу  $\xi \in E$  поставимо у відповідність елемент  $x = \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \xi + x_0$ , якщо  $\xi \neq 0$ . Елементу  $\xi = 0$  поставимо у відповідність елемент  $x = x_0$ .

$$\xi \neq 0 \implies \|x - x_0\|_E = \left\| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \xi + x_0 - x_0 \right\|_E = \left\| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \xi \right\|_E = \varepsilon.$$

Це означає, що для довільних  $\xi \in E$  всі елементи  $x \in \bar{S}(x_0, \varepsilon)$ .

Оцінимо наступну величину (використовуючи допоміжну нерівність  $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$ ).

$$\left| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \|A_n \xi\|_F - \|A_n x_0\|_F \right| \leq \left\| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} A_n \xi + A_n x_0 \right\|_F = \left\| A_n \left( \frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \xi + x_0 \right) \right\|_F \leq C. \quad (13.1)$$

Отже,

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E} \|A_n \xi\|_F - \|A_n x_0\|_F \leq C.$$

Звідси випливає, що

$$\|A_n \xi\|_F \leq \frac{C + \|A_n x_0\|_F}{\varepsilon} \|\xi\|_E \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|\xi\|_E.$$

Отже,

$$\exists C_1 = \frac{2C}{\varepsilon} > 0 : \forall \xi \in E : \|A_n \xi\|_E \leq C_1 \|\xi\|_E \implies \|A_n\| \leq C_1.$$

Отримане протиріччя доводить лему.  $\square$

### Теорема 13.1 (Банаха—Штейнгауза)

Нехай послідовність лінійних обмежених операторів  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , що відображають банахів простір  $E$  в нормований простір  $F$ , поточно збігається до оператора  $A$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тоді послідовність  $\{\|A_n\|\}_{n=1}^\infty$  є обмеженою, оператор  $A$  є лінійним і неперервним, а  $A_n x \rightarrow Ax$  рівномірно по  $n$  на кожному компакт  $K \subset E$  (тобто  $n$  не залежить від  $x$ ).

*Доведення.* Припустимо, що послідовність  $\{\|A_n\|\}_{n=1}^\infty$  є необмеженою. Тоді за лемою 13.1 послідовність  $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^\infty$  є необмеженою на довільній замкненій кулі  $\bar{S}(x_0, \varepsilon_0)$ .

Отже,

$$\exists (n_1 \in \mathbb{N}, x_1 \in \bar{S}(x_0, \varepsilon_0) : \|A_{n_1} x_1\|_F > 1.$$

Оскільки  $A_{n_1}$  — неперервний оператор,

$$\exists \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) \subset \bar{S}(x_0, \varepsilon_0) : \forall x \in \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) : \|A_{n_1} x\|_F > 1.$$

На кулі  $\bar{S}(x_1, \varepsilon_1)$  послідовність  $\{\|A_n x\|_F\}_{n=1}^\infty$  також є необмеженою. Отже,

$$\exists \bar{S}(x_2, \varepsilon_2) \subset \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) : \forall x \in \bar{S}(x_2, \varepsilon_2) : \|A_{n_2} x\|_F > 2.$$

Нехай  $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}$  і  $x_1, x_2, \dots, x_k$ :

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k, \quad \bar{S}(x_0, \varepsilon_0) \supset \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) \supset \dots \supset \bar{S}(x_k, \varepsilon_k).$$

Продовжуючи цей процес при  $k \rightarrow \infty$ , отримуємо послідовність вкладених замкнених куль, таких що

$$\forall x \in \bar{S}(x_k, \varepsilon_k) : \|A_{n_k} x\|_F > k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0.$$

Оскільки  $E$  — повний простір, за принципом вкладених куль

$$\exists x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{S}(x_k, \varepsilon_k) : \|A_{n_k} x^*\|_F \geq k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що  $\exists x^* \in E$  така, що послідовність  $\{A_n x^*\}$  не збігається. Це суперечить умові теореми, згідно якої послідовність операторів  $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$  поточно збігається в кожній точці простору  $E$ .

Покажемо, що оператор  $A$  — лінійний. Оскільки

$$A_n(x + y) = A_n(x) + A_n(y), \quad A_n(\lambda x) = \lambda A_n(x),$$

маємо

$$\begin{aligned} A(x+y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x+y) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(y) = Ax + Ay. \\ A(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \lambda Ax. \end{aligned}$$

Крім того,

$$\|A_n x\|_F \leq C \|x\|_E \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\|_F = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \right\|_F = \|Ax\|_E \leq C \|x\|_E.$$

Отже,  $A$  — лінійний і обмежений, а значить, неперервний.

Нехай  $K \subset E$  — компакт,  $\varepsilon > 0$ . За теоремою Хаусдорфа існує скінченна  $\frac{\varepsilon}{3C}$ -сітка  $M$ :

$$\forall x \in K : \exists x_\alpha \in M, \alpha \in A : \|x - x_\alpha\|_E < \frac{\varepsilon}{3C},$$

де  $A$  — скінченна множина.

Оскільки послідовність  $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$  поточно збігається в кожній точці простору  $E$ , то вона збігається і в кожній точці сітки  $M$ :

$$\forall x_\alpha \in M : \exists n_\alpha : \forall n \geq n_\alpha : \|A_n x_\alpha - A x_\alpha\|_F < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай  $n_0 = \max_{\alpha \in A} n_\alpha$  (сітка  $M$  є скінченною, тому максимум існує). Тоді  $\forall n \geq n_0$ ,  $\forall x \in S(x_\alpha, \frac{\varepsilon}{3C})$

$$\begin{aligned} \|A_n x - A x\|_F &\leq \|A_n x - A_n x_\alpha + A_n x_\alpha - A x_\alpha + A x_\alpha - A x\|_F \leq \\ &\|A_n x - A_n x_\alpha\|_F + \|A_n x_\alpha - A x_\alpha\|_F + \|A x_\alpha - A x\|_F < \\ &C \|x - x_\alpha\|_E + \frac{\varepsilon}{3} + C \|x - x_\alpha\|_E = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,  $\forall n \geq n_0, \forall x \in K : \|A_n x - A x\|_F < \varepsilon$ , до того ж номер  $n_0$  не залежить від точки  $x$ . Це означає, що  $A_n x \rightarrow A x$  рівномірно по  $n$  на кожному компакт  $K \subset E$ .  $\square$

## §13.2 Повнота простору лінійних неперервних операторів

З'ясуємо, коли простір  $\mathcal{L}(E, F)$  є повним у розумінні рівномірної або точкової збіжності.

### Теорема 13.2

Якщо нормований простір  $F$  — банахів, то  $\mathcal{L}(E, F)$  — банахів у розумінні рівномірної збіжності.

*Доведення.* Нехай  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальна послідовність операторів, тобто

$$\|A_n - A_m\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Тоді  $\forall x \in E$

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Для кожного фіксованого  $x \in E$  послідовність  $\{A_n x\}$  є фундаментальною в  $F$ . Оскільки простір  $F$  є повним за умовою теореми, то послідовність  $\{A_n x\}$  збігається

до певного елемента  $y \in F$ . Позначимо  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ . Отже, ми визначили відображення  $A : E \rightarrow F$ . Його лінійність випливає із властивостей границі. Покажемо його обмеженість:  $\{\|A_n\|\}$  фундаментальна в  $\mathbb{R}$ , адже

$$\|\|A_n\| - \|A_m\|\| \leq \|A_n - A_m\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty,$$

а отже  $\{\|A_n\|\}$  обмежена в  $\mathbb{R}$ , тобто

$$\exists C : \forall n \in \mathbb{N} : \|A_n\| \leq C.$$

Отже,

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \cdot \|x\| \leq C \|x\|.$$

Внаслідок неперервності норми, маємо

$$\|Ax\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq C \|x\|.$$

Покажемо, що  $A_n$  рівномірно збігається до  $A$  в просторі  $\mathcal{L}(E, F)$ . Задамо  $\varepsilon > 0$  і виберемо  $n_0$  так, щоб  $\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon$  для  $n \geq n_0$ ,  $p > 0$  і для будь-якого  $x : \|x\| \leq 1$ . Нехай  $p \rightarrow \infty$ . Тоді

$$\forall n \geq n_0, x : \|x\| \leq 1 : \|Ax - A_n x\| < \varepsilon,$$

звідки

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon,$$

а тому  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  в розумінні рівномірної збіжності.

Отже,  $\mathcal{L}(E, F)$  є банаховим. □

### Теорема 13.3

Якщо нормовані простори  $E$  і  $F$  — банахові, то  $\mathcal{L}(E, F)$  — банахів у розумінні поточної збіжності.

*Доведення.* Розглянемо точку  $x \in E$  і фундаментальну у розумінні поточної збіжності послідовність  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Оскільки  $F$  — банахів простір, то існує елемент  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ . Таким чином, визначений оператор  $A : E \rightarrow F$ , такий що  $y = Ax$ . Лінійність цього оператора випливає із лінійності границі, а обмеженість — із теореми Банаха-Штейнгауза:

$$\|Ax\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \cdot \|x\| = C \|x\|. \quad \square$$

## §13.3 Література

- [1] Садовничий В. А. Теория операторов / В. А. Садовничий — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986 (стр. 96–102).
- [2] Ляшко И. И. Основы классического и современного математического анализа / И. И. Ляшко, В. Ф. Емельянов, А. К. Боярчук. — К.: Вища школа, 1988 (стр. 576–578).