Зміст

4 Дослідження граничних задач математичної фізики та методів побудови їх розв'язків

4.1 Поняття узагальнених функцій та дії над ними

Поняття узагальнених функцій виникло як результат природного розширення класичного поняття функції. Так, виконання деяких дій над класичними функціями виводить за межі таких. Вперше узагальнену функцію в математичні дослідження у 1947 році ввів англійський фізик Поль Дірак у своїх квантово-механічних дослідженнях. Така функція отримала назву δ-функція Дірака. Ця функція дозволяє записати просторову щільність фізичної величини (маси, величини заряду, інтенсивності джерела тепла, сили тощо) зосередженої або прикладеної в одній точці.

Розглянемо приклад, який дає уявлення про δ-функцію.

Приклад 4.1.1

Нехай ε-окіл точки x прямої є джерелом тепла одиничної інтенсивності. Будемо припускати також, що джерело рівномірно розподілене по довжині ε-околу. Враховуючи припущення, джерело тепла може бути описане наступною функцією

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < -\varepsilon, \\ 1/2\varepsilon, & -\varepsilon \le x < \varepsilon, \\ 0, & \varepsilon \le x. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Зауваження 4.1.2 — При цьому важливо, що сумарна кількість тепла, що виділяється ε-околом дорівнює одиниці, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.1.2}$$

Припустимо, що фізичний розмір джерела такий малий, що його розмірами можна нехтувати, тобто будемо вважати що джерело є точковим.

В цьому випадку природно визначити функцію

$$f_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Легко бачити, що інтеграл Лебега функції $f_0(x)$ існує і дорівнює нулю:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_0(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.1.4}$$

Тобто користуючись звичайним граничним переходом (поточковою границею) ми отримуємо функцію, яка не моделює одиничне точкове джерело тепла.

Для коректного визначення граничної функції будемо розглядати замість сильної (поточкової) границі, слабку границю.

Введемо набір пробних функцій $D(\mathbb{R}^n) = C_\infty^0(\mathbb{R}^n)$ — множину нескінченно диференційовних в $\mathbb{R}^n$ функцій з компактним носієм.

> **Зауваження 4.1.3 —** Нагадаємо, що функція має компактний носій якщо існує куля $U_A(0)$ радіусу A, за межами якої функція обертається в тотожній нуль разом з усіма своїми похідними.

Твердження 4.1.4

Виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \tag{4.1.5}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$.

Доведення. Справді:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \varphi(0)\right| &= \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,\mathrm{d}x\right| \le \\ &\le \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\eta(\varepsilon)}{2\varepsilon}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}x = \eta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Це означає, що слабка границя дорівнює $\varphi(0)$ для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^1)$. □

Зауваження 4.1.5 — Тут ми винесли середнє значення підінтегральної функції $g(x) = |\varphi(x) - \varphi(0)|$ з-під інтегралу, тобто $\eta(\varepsilon) = g(\xi) = |\varphi(\xi) - \varphi(0)|$, де $\xi = \xi(\varepsilon)$ — якась середня точка, $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Далі, $|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \to 0$ при $\xi \to 0$, а $\xi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ бо $|\xi| < |\varepsilon|$.

Нарешті, $\eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ адже φ — неперервна, тобто $|\varphi(\xi) - \varphi(0)| \to 0$ при $\xi \to 0$, і знову-ж-таки $\xi \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ бо $|\xi| < |\varepsilon|$.

Таким чином δ-функцію Дірака можна визначити, як слабку границю послідовності функції f_ε на множині $D(\mathbb{R}^1)$, що збігається до числа $\varphi(0)$ при $\varepsilon \to 0$.

Можна записати

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.7}$$

Останню рівність будемо розглядати як лінійний неперервний функціонал, який будь-якій функції φ ставить у відповідність число $\varphi(0)$.

Визначення 4.1.6 (узагальненої функції). *Узагальненою функцією* f будемо називати будь-який лінійний неперервний функціонал заданий на множині основних (пробних) функцій $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Зауваження 4.1.7 — Лінійність і неперервність розуміємо в традиційному сенсі:

$$\langle f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \rangle = a_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + a_2 \langle f, \varphi_2 \rangle, \tag{4.1.8}$$

і

$$\lim_{k \to \infty} \langle f, \varphi_k \rangle = 0, \tag{4.1.9}$$

для довільної $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такої, що $D^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\varphi_k(x) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ для довільних $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Серед усіх узагальнених функцій виділяють клас регулярних узагальнених функцій.

Визначення 4.1.8 (регулярної функції). *Регулярними* називаються функції, які можуть бути представлені у вигляді

$$\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.1.10}$$

з функцією $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}$ — тобто абсолютно інтегровною функцією на будь-якому компакті, що належить $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 4.1.9 — Кожна локально інтегрована функція визначає *єдину* регулярну узагальнену функцію і навпаки, кожна регулярна узагальнена функція визначає *єдину* локально інтегровану функцію.

Зауваження 4.1.10 — *Єдиність* означає, що дві локально інтегровані функції співпадають якщо вони відрізняються між собою на множині нульової міри.

Визначення 4.1.11 (сингулярної функції)**.** Усі інші лінійні неперервні функціонали визначають *сингулярні* узагальнені функції.

Приклад 4.1.12 (сингулярної функції)

δ-функція Дірака.

Зауваження 4.1.13 — Дуже часто узагальнені функції називають також *розподілами*.

Хоча сингулярні узагальнені функції є частинним випадком узагальнених функцій, але для їх представлення найчастіше використовується позначення скалярного добутку таке саме як і для регулярних узагальнених функцій.

Справа в тому, що

Твердження 4.1.14

Для будь-якої сингулярної узагальненої функції $f : \varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ можна побудувати послідовність регулярних узагальнених функцій, яка слабко збігається до неї, тобто $\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.1.11}$$

Зауваження 4.1.15 — Ця послідовність не єдина.

Зауваження 4.1.16 — δ-функцію ми побудували як границю $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon$, яку можна було назвати δ-*образною* послідовністю.

Можна навести і інші

Приклади 4.1.17 (δ-образних послідовностей)

δ-образними послідовностями також є:

- $f_m(x) = \dfrac{m}{\pi(1+m^2x^2)}$;
- $f_m(x) = \dfrac{\sin mx}{\pi x}$;
- $f_m(x) = \dfrac{m}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\dfrac{m^2x^2}{2}\right\}$.

Зауваження 4.1.18 — Константи у знаменниках тут для того, щоби

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.1.12}$$

4.1.1 Узагальнені функції та фізичні розподіли

Узагальнені функції (часто їх називають розподілами) можна інтерпретувати як розподіл електричних, магнітних зарядів або розподіл мас, тощо. Так наприклад функцію Дірака можна трактувати як щільність з якою розподілена маса, що дорівнює одиниці в точці $x = 0$.

Визначення 4.1.19 (зсунутої δ-функції)**.** Аналогічним чином можна ввести і зсунуту функцію Дірака.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a). \tag{4.1.13}$$

Зауваження 4.1.20 — Використовуючи цю формулу можна зобразити щільність розподілу зосереджених мас або іншої фізичної величини в точках прямої.

Приклад 4.1.21

Так, якщо в точках x_i розташовані зосереджені маси m_i, $i \in I$, то щільність такого розподілу мас можна зобразити у вигляді

$$\rho(x) = \sum_{i\in I} m_i \cdot \delta(x - x_i). \tag{4.1.14}$$

Зауваження 4.1.22 — При цьому повну масу, яка зосереджена на прямій можна порахувати за формулою

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i\in I} m_i. \tag{4.1.15}$$

Визначення 4.1.23 (δ-функції в $\mathbb{R}^n$)**.** Аналогічно δ-функції, введеній на прямій, можна ввести δ-функцію для n-вимірного евклідового простору:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x-a)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a). \tag{4.1.16}$$

Зауваження 4.1.24 — Тоді щільність розподілу точкових мас у просторі можна також записати у вигляді

$$\rho(x) = \sum_{i \in I} m_i \cdot \delta_3(x - x_i). \tag{4.1.17}$$

Нагадаємо

Твердження 4.1.25

Точковий одиничний електричний заряд розташований в точці x_0 створює потенціал рівний

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(y - x_0)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x - y|} = \frac{1}{4\pi|x - x_0|} \tag{4.1.18}$$

в точці $x \in \mathbb{R}^3$.

Зауваження 4.1.26 — В цьому випадку $\delta(y - x_0)$ можна сприймати як щільність одиничного точкового заряду.

Приклад 4.1.27

Якщо щільність зарядів $f(y)$ представляє собою локально інтегровану функцію, то маємо для потенціалу електростатичного поля відому формулу електростатики:

$$P(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x - y|}. \tag{4.1.19}$$

Визначення 4.1.28 (поверхневої функції Дірака)**.** Узагальненням точкової функції Дірака є так звана *поверхнева функція Дірака* δ_S, яку можна визначити як лінійний неперервний функціонал:

$$\varphi \mapsto \langle \delta_S, \varphi \rangle = \iint\limits_S \varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.20}$$

Зауваження 4.1.29 — Ця узагальнена функція може бути інтерпретована як щільність розподілу зарядів на поверхні S.

Приклад 4.1.30

Потенціал електростатичного поля можна записати у вигляді

$$W(x) = \left\langle \mu(y)\delta_S(y), \frac{1}{4\pi|x-y|} \right\rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(y)\delta_S(y)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|} = \iint\limits_{S} \frac{\mu(y)\,\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|}. \tag{4.1.21}$$

Визначення 4.1.31 (потенціалу просторого шару). Легко бачити, що $W(x)$ представляє собою потенціал електростатичного поля, утворений зарядженою поверхнею S і називається *потенціалом простого шару*.

4.1.2 Дії над узагальненими функціями

Головною перевагою узагальнених функцій є те, що будь-яка узагальнена функція має похідні будь-якого порядку.

Для визначення похідної узагальненої функції розглянемо звичайну неперервно диференційовну функцію $f(x)$ і згадаємо, що виконується наступна

Формула 4.1.32 (інтегрування за частинами)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha_1\ldots\alpha_n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) D^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.1.22}$$

де $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, яка є істинною для будь-якої функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.

Права частина цієї рівності має зміст для будь-якої локально-інтегровної функції f.

Таким чином можемо дати

Визначення 4.1.33 (похідної локально-інтегровної функції). *Похідною* $D^{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ будь-якої локально-інтегровної функції f будемо називати лінійний неперервний функціонал

$$\langle D^{\alpha_1\ldots\alpha_n} f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) D^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.23}$$

Аналогічним чином вводиться похідна і для сингулярних узагальнених функцій.

Визначення 4.1.34 (похідної сингулярних функцій)**.** $D^{\alpha_1\ldots\alpha_n} f$ визначається як лінійний неперервний функціонал

$$\langle D^{\alpha_1\ldots\alpha_n} f, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varphi\rangle\,. \tag{4.1.24}$$

Розглянемо приклади обчислення похідних деяких узагальнених функцій:

Приклад 4.1.35

Знайти θ', де

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & 0 < x \end{cases} \tag{4.1.25}$$

— функція Хевісайда.

Розв'язок. Розглянемо наступні рівності:

$$\begin{aligned}\langle \theta', \varphi\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\ = -(\varphi(\infty) - \varphi(0)) = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0) - 0 = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle\,.\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

Таким чином можна записати $\theta' = \delta$.

Приклад 4.1.36

Знайти $\delta^{(2)}$.

Розв'язок.

$$\left\langle \delta^{(2)}, \varphi\right\rangle = \left\langle \delta, \varphi^{(2)}\right\rangle = \varphi^{(2)}(0). \tag{4.1.27}$$

Приклад 4.1.37

f — кусково неперервно-диференційовна функція, яка має в деякій точці x_0 розрив першого роду.

Розв'язок.

$$
\begin{aligned}
\langle f', \varphi\rangle &= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -f(x_0-0)+\varphi(x_0)+f(x_0+0)\varphi(x_0)+ \\
&\quad + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \varphi(x_0)[f(x_0)] + \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_0}^{\infty} f(x)'\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \varphi(x_0)[f(x_0)] + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)'\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big([f(x_0)]\cdot\delta(x-x_0)+\{f(x)'\}\Big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{4.1.28}
$$

де $[f(x_0)] = f(x_0+0)-f(x_0-0)$, $\{f'(x)\}$ — локально інтегрована функція, яка співпадає з звичайною похідною функції f в усіх точках де вона існує.

Зауваження 4.1.38 — Таким чином для функції, яка має скінченну кількість точок розриву першого роду має місце така формула обчислення похідної:

$$
f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_i [f(x_i)]\delta(x-x_i). \tag{4.1.29}
$$

Приклад 4.1.39

Нехай функція $f(x)$ задана в просторі $\mathbb{R}^3$ кусково неперервно-диференційовна і має розрив першого роду на кусково–гладкій поверхні S. Будемо припускати, що поверхня розділяє простір $\mathbb{R}^3$ на два півпростори $\mathbb{R}^3_+$ та $\mathbb{R}^3_-$.

Розв'язок. Зафіксуємо на S напрям нормалі, яка направлена всередину $\mathbb{R}^3_+$.

Визначимо похідну від $f(x)$:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= -\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \\ &= -\iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x - \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_-} f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \\ &= \iint\limits_S f(x+0)\varphi(x)\cos(n, x_i)\,\mathrm{d}S - \\ &\quad - \iint\limits_S f(x-0)\varphi(x)\cos(n, x_i)\,\mathrm{d}S + \\ &\quad + \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} \varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x + \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_-} \varphi(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \\ &= \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + [f]_S(x)\cos(n, x_i)\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

де $\{\partial f(x)/\partial x_i\}$ — класична похідна функції $f(x)$ в усіх точках, де вона існує, $[f(x)]_S = (f(x+0) - f(x-0))|_{x \in S}$ — стрибок функції $f(x)$ на поверхні S.

Таким чином можна записати, що

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\} + [f]_S(x)\cos(n, x_i)\delta_S(x). \tag{4.1.31}$$

4.1.3 Носій та порядок узагальнених функцій

Вводячи поняття узагальнених функцій ми використовували множину основних (пробних) функцій $D(\mathbb{R}^n) = C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$. Взагалі кажучи, простір пробних функцій (а таким чином і розподілів) можна узагальнити, ввівши простір основних функцій як $D(\Omega) = C^0_\infty(\Omega)$, тобто клас пробних функцій складається з функцій, які нескінченно-диференційовні в Ω і на границі $\partial\Omega$ перетворюються в нуль разом з усіма своїми похідними.

Для побудови функцій такого класу використовуються ε-шапочки.

Визначення 4.1.40 (ε-шапочки)**.** ε-шапочкою називається функція

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right\}, & |x| \le \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases} \tag{4.1.32}$$

Зауваження 4.1.41 — Сталу C_ε обираємо так, щоби

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{4.1.33}$$

Легко бачити, що

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x). \tag{4.1.34}$$

Це означає, що ε-шапочки слабко збігаються до $\delta(x)$ при $\varepsilon \to +0$.

Введемо функцію

$$\eta(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\omega_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.1.35}$$

де $\chi(x)$ – характеристична функція множини $\Omega_{2\varepsilon}$, тобто

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{2\varepsilon}, \\ 0, & x \notin \Omega_{2\varepsilon}, \end{cases} \tag{4.1.36}$$

а множина $\Omega_{2\varepsilon}$ утворилася з множини Ω шляхом відступу всередину Ω від границі на полосу ширини 2ε.

Тоді будь-яка функція $\varphi(x) = \eta(x)f(x) \in D(\Omega)$ якщо $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Таким чином можна утворити достатньо широкий клас пробних функцій.

Зауваження 4.1.42 — Узагальнені функції взагалі кажучи не мають значень в окремих точках.

В той же час можна говорити про обертання узагальненої функції на нуль у деякій області.

Визначення 4.1.43 (обертання узагальненої функції на нуль)**.** Будемо говорити, що узагальнена функція f *обертається на нуль* у області Ω, якщо $\langle f, \varphi \rangle = 0$, $\forall \varphi \in D(\Omega)$.

Визначення 4.1.44 (нульової множини узагальненої функції)**.** *Нульовою множиною* O_f узагальненої функції f будемо називати об'єднання усіх областей у яких узагальнена функція f обертається на нуль.

Визначення 4.1.45 (носія узагальненої функції)**.** *Носієм* $\mathrm{supp} f$ узагальненої функції f називають множину $\mathbb{R}^n \setminus O_f$.

Визначення 4.1.46 (порядку узагальненої функції)**.** Будемо говорити, що узагальнена функція f має *порядок сингулярності* (або просто порядок) $\le j$, якщо

$$f = \sum_{|\alpha| \le j} D^\alpha g_\alpha, \tag{4.1.37}$$

де $g_\alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Якщо число j у цій формулі неможливо зменшити, то кажуть що порядок узагальненої функції f *дорівнює* j.

Нехай f — узагальнена функція порядку j, а φ — довільна пробна функція. За визначенням

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \le j} \langle D^\alpha g_\alpha, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \le j} (-1)^{|\alpha|} \iiint\limits_{\Omega} g_\alpha D^\alpha \varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \tag{4.1.38}$$

Неважко бачити, що права частина цієї формули зберігає зміст не тільки для функцій з класу $D(\Omega)$, але і для функцій ширшого класу $D^j(\Omega)$.

Зауваження 4.1.47 — Узагальнені функції порядку j можна визначати як лінійні неперервні функціонали на класі основних функцій $D^j(\Omega)$.

4.1.4 Згортка та регуляризація узагальнених функцій

Нехай $f(x), g(x)$ — дві локально-інтегровні функції в $\mathbb{R}^n$. При цьому функція

$$h(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y) f(x - y)| \, \mathrm{d}y \tag{4.1.39}$$

теж буде локально-інтегровна в $\mathbb{R}^n$.

Визначення 4.1.48 (згортки). *Згорткою* $f * g$ *цих функцій будемо називати функцію*

$$(f * g)(x) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\,\mathrm{d}y = (g * f)(x). \quad (4.1.40)$$

Таким чином згортка є локально-інтегровною функцію і тим самим визначає регулярну узагальнену функцію, яка діє на основні функції за правилом

$$\varphi \mapsto \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \quad (4.1.41)$$

Розглянемо випадок згортки двох функцій f та ψ, де f — узагальнена, а ψ — основна (пробна) функція. Оскільки ψ — фінітна функція, то згортка $f * \psi$ існує, а враховуючи нескінчену гладкість пробної функції, $(f * \psi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Визначення 4.1.49. *Регуляризацією* узагальненої функції f будемо називати функцію $f_\varepsilon = f * \omega_\varepsilon$.

Зрозуміло, що $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а враховуючи властивості ε-шапочки ω_ε легко бачити, що

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{w.}} f, \quad (4.1.42)$$

тобто довели

Твердження 4.1.50

Будь-яка узагальнена функція є слабка границя своїх регуляризацій.

Приклад 4.1.51

Розглянемо узагальнену функцію

$$P\frac{1}{x-a}, \tag{4.1.43}$$

яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\frac{1}{x-a}$ за винятком точки a і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом

$$\begin{aligned} \left\langle P\frac{1}{x-a}, \psi \right\rangle &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x-a}\, \mathrm{d}x = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi(x)}{x-a}\, \mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x-a}\, \mathrm{d}x \right). \end{aligned} \tag{4.1.44}$$

Розглянемо узагальнену функцію

$$P\frac{1}{(x-a)^2}, \tag{4.1.45}$$

яка співпадає на усій числовій прямій з функцією $\frac{1}{(x-a)^2}$ за винятком точки a і визначає лінійний неперервний функціонал, який діє за правилом

$$\begin{aligned} \left\langle P\frac{1}{(x-a)^2}, \psi \right\rangle &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\, \mathrm{d}x = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\, \mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\, \mathrm{d}x \right). \end{aligned} \tag{4.1.46}$$

Покажемо, що

$$\left(P\frac{1}{x-a}\right)' = P\frac{1}{(x-a)^2} \tag{4.1.47}$$

з точки зору узагальнених функцій.

Доведення. Справді,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left(P\frac{1}{x-a}\right)', \psi \right\rangle &= -\left\langle P\frac{1}{x-a}, \psi' \right\rangle = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi'(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi'(x)}{x-a}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}(\psi(x)-\psi(a))}{x-a} + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{d}(\psi(x)-\psi(a))}{x-a}\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}\bigg|_{-\infty}^{a-\varepsilon} + \frac{\psi(x)-\psi(a)}{x-a}\bigg|_{a+\varepsilon}^{\infty} + \right. \\
&\qquad \left. + \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x\right) - \\
&\qquad -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\psi(a-\varepsilon)-\psi(a)}{-\varepsilon} - \frac{\psi(a+\varepsilon)-\psi(a)}{\varepsilon}\right) = \\
&= -\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)-\psi(a)}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = -\left\langle P\frac{1}{(x-a)^2}, \psi \right\rangle .
\end{aligned}
\tag{4.1.48}
$$

□

4.2 Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів

Нехай L — диференціальний оператор порядку m вигляду

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{4.2.1}$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$Lu = f(x). \tag{4.2.2}$$

Визначення 4.2.1 (узагальненого розв'язку)**.** Узагальненим розв'язком цього рівняння будемо називати будь-яку узагальнену функцію u, яка задовольняє це рівняння в розумінні виконання рівності:

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.2.3}$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Остання рівність рівнозначна рівності

$$\langle u, L^\star \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.2.4}$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Тут було введено

Визначення 4.2.2 (спряженого оператора)**.** *Спряженим* до оператора L нзаивається оператор що визначається рівністю

$$L^\star \varphi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi). \tag{4.2.5}$$

Особливу роль в математичній фізиці відіграють фундаментальні розв'язки для основних диференціальних операторів математичної фізики: (Гельмгольца, теплопровідності, хвильового), які представляють собою узагальнені розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$(\Delta + k^2) q_k(x) = -\delta(x), \tag{4.2.6}$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon(x,t) = -\delta(x,t), \tag{4.2.7}$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x,t) = -\delta(x,t) \tag{4.2.8}$$

Визначення 4.2.3 (фундаментального розв'язку)**.** Узагальнені функції $q_k(x)$, $\varepsilon(x,t)$, $\psi(x,t)$ називаються фундаментальними розв'язками оператора Гельмгольца, теплопровідності, хвильового відповідно, якщо вони задовольняють відповідні рівняння як узагальнені функції:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} q_k(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(0), \tag{4.2.9}$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \varepsilon(x,t)\left(a^2\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0), \tag{4.2.10}$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \psi(x,t)\left(a^2\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0). \tag{4.2.11}$$

Зауваження 4.2.4 — Тут $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, простір усіх можливих значень (x,t). Зрозуміло, що можна було також записати

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{4.2.12}$$

але було вибрано перше позначення для заощадження часу, місця, а також задля одноманітності.

Зауваження 4.2.5 — Неважко зрозуміти, що фундаментальні розв'язки визначені таким чином є неєдиними і визначаються з точністю до розв'язків відповідного однорідного рівняння. Але серед множини фундаментальних розв'язків вибирають такі, які мають певний характер поведінки на нескінченості.

Загальний метод знаходження фундаментальних розв'язків операторів з постійними коефіцієнтами полягає в застосуванні прямого та оберненого перетворення Фур'є по просторовій змінній x та зведення рівняння в частинних похідних до алгебраїчного рівняння у випадку стаціонарного рівняння, або до звичайного диференціального рівняння у випадку нестаціонарного рівняння.

Ми покажемо що деякі узагальнені функції представляють собою фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів.

4.2.1 Фундаментальні розв'язки операторів Лапласа та Гельмгольца

Розглянемо двовимірний оператор Лапласа

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{4.2.13}$$

Теорема 4.2.6 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Лапласа)
Для двохвимірного оператора Лапласа функція

$$q^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \tag{4.2.14}$$

де $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція рівняння

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\delta(x) \tag{4.2.15}$$

Зауваження 4.2.7 — Тут останню рівність необхідно розуміти як

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x = -\varphi(0), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2). \tag{4.2.16}$$

Доведення. Перш за все,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \varphi(x) \, \mathrm{d}x + \iint\limits_{S_R} \ldots \mathrm{d}S + \\
&+ \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) \mathrm{d}S.
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Зауваження 4.2.8 — Тут U_R, U_ε — околи нуля такі, що $\operatorname{supp}\varphi \subset U_R$, а U_ε — нескінченно малий окіл.

Також тут позначено $S_R = \partial U_R$, $S_\varepsilon = \partial U_\varepsilon$.

У свою чергу n — вектор нормалі до S_ε.

Твердження 4.2.9
Для $x \neq 0$

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = 0. \tag{4.2.18}$$

Доведення. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\frac{x_i}{|x|^2}, \tag{4.2.19}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}, \tag{4.2.20}$$

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4} \right) = 0. \tag{4.2.21}$$

□

Таким чином, перший інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по сфері S_R для великого значення R теж дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції φ.

Зауваження 4.2.10 — Справді, цей інтеграл позначає потік поля $\vec{\varphi}$ через S_R, але $\operatorname{supp}\varphi \subset U_R$, тобто поза $U_{R-\varepsilon}$ для якогось (нового) малого ε поле $\vec{\varphi}$ не діє, а тому його потік дорівнє нулеві.

Обчислимо граничні значення поверхневих інтегралів по сфері S_ε:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{S\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) \mathrm{d}S =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)}{\partial n} \,\mathrm{d}\theta - \int\limits_0^{2\pi} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta) \,\mathrm{d}\theta \right). \tag{4.2.22}$$

Зауваження 4.2.11 — При обчисленні останнього інтегралу враховано, що

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|x|}\bigg|_{x\in S_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{r}\bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.2.23}$$

Множник ε під знаком інтегралу з'являється як якобіан переходу до полярної системи координат.

Враховуючи неперервну диференційовність функції φ, здійснюючи граничний перехід при $\varepsilon \to 0$, отримаємо, що перший інтеграл прямує до нуля, а другий до значення $-\varphi(0,0)$. □

4.2.2 Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца

Розглянемо тривимірний оператор Гельмгольца:

$$\Lambda_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \tag{4.2.24}$$

Теорема 4.2.12 (про фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца)
Для тривимірного оператора Гельмгольца функція

$$q_\pm^k(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \tag{4.2.25}$$

є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція диференціальному рівнянню:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 q_\pm^k(x)}{\partial x_i^2} + k^2 q_\pm^k(x) = -\delta(x). \tag{4.2.26}$$

Зауваження 4.2.13 — Останнє рівняння треба розуміти як

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} q_\pm^k(x)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2\right)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(0) \tag{4.2.27}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останньої рівності:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} q_{\pm}^k(x) \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \tag{4.2.28}$$

Обчислимо кожний з інтегралів.

Твердження 4.2.14

Для $x \neq 0$

$$\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) q_{\pm}^k(x) = 0. \tag{4.2.29}$$

Доведення. Дійсно, для обчислення другої похідної можна скористатися формулою

$$\frac{\partial^2 q_{\pm}^k(x)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial |x|^2} \left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \right) \left(\frac{\partial |x|}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial |x|} \left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \right) \left(\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_j^2} \right). \tag{4.2.30}$$

У ній по-перше

$$\frac{\partial^2}{\partial |x|^2} \left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \right) = -\frac{e^{\pm ik|x|}(k^2|x|^2 \pm 2ik|x| - 2)}{4\pi|x|^3}, \tag{4.2.31}$$

і

$$\left(\frac{\partial |x|}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{x_j^2}{|x|^2}, \tag{4.2.32}$$

а також

$$\frac{\partial}{\partial |x|} \left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \right) \left(\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_j^2} \right) = \frac{e^{\pm ik|x|}(\pm ik|x| - 1)}{4\pi|x|^5}(|x|^2 - x_j^2). \tag{4.2.33}$$

Після підстановки та приведення подібних отримаємо

$$\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) q_{\pm}^k(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|^3} \Big(-k^2|x|^2 \Big) + k^2 \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} = 0. \tag{4.2.34}$$

□

Інтеграл по сфері великого радіусу S_R дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції:

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} q_\pm^k(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\cdot$$
$$\cdot \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 \sin\theta \frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\psi, \cos\theta, \varepsilon\sin\theta)}{\partial n}\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \quad (4.2.35)$$

Обчислимо останній поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial q_\pm^k(x)}{\partial n}\varphi(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\cdot$$
$$\cdot \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2\sin\theta\cdot\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\varphi(0). \quad (4.2.36)$$

□

Зауваження 4.2.15 — З формули для $q_\pm^k(x)$ легко отримати фундаментальний розв'язок для тривимірного оператора Лапласа, тобто показати, що функція

$$\frac{1}{4\pi|x|} \quad (4.2.37)$$

задовольняє наступному рівнянню:

$$\Delta_3 \frac{1}{4\pi|x|} = -\delta(x), \quad x\in\mathbb{R}^3 \quad (4.2.38)$$

Зауваження 4.2.16 — Формально формулу $1/4\pi|x|$ можна отримати з $q_\pm^k(x)$ при $k = 0$.

4.2.3 Фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца

Теорема 4.2.17 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца)

Функція

$$q^k(x) = \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|), \tag{4.2.39}$$

де $x = (x_1, x_2)$ є фундаментальним розв'язком двовимірного оператора Гельмгольца, тобто задовольняє співвідношенню:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} q^k(x) \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0). \tag{4.2.40}$$

Зауваження 4.2.18 — У формулі для $q^k(x)$ функція $K_\nu(x)$ — функція Бесселя другого роду уявного аргументу ν-порядку і є одним з двох лінійно-незалежних розв'язків лінійного диференціального рівняння Бесселя уявного аргументу:

$$x^2Y'' + xY' - (x^2 + \nu^2)Y = 0. \tag{4.2.41}$$

Доведення. Аналогічне доведенню співвідношення для двовимірного оператора Лапласа.

Твердження 4.2.19

Для $x \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) = 0. \tag{4.2.42}$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-k^2 K_0''(-ik|x|) \frac{x_j^2}{|x|^2} - ikK_0'(-ik|x|) \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3} \right). \tag{4.2.43}$$

Таким чином

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-k^2 K_0''(-ik|x|) - ikK_0'(-ik|x|)\frac{1}{|x|} + k^2 K_0(ik|x|)\right) = 0. \quad (4.2.44)$$

□

Зауваження 4.2.20 — Остання рівність стає очевидною якщо помножити останнє рівняння на $|x|^2$ та ввести нову незалежну змінну $\xi = -ik|x|$.

Зауваження 4.2.21 — При доведенні необхідної рівності важливим є також характер поведінки фундаментального розв'язку і його першої похідної в околі точки $x = 0$.

Відомо, що

$$K_0(ix) \sim \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \tag{4.2.45}$$

$$K_0'(ix) \sim -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|}, \tag{4.2.46}$$

при $x \to +0$.

□

4.2.4 Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності

Теорема 4.2.22 (про фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності)

Фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності є

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \cdot \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.2.47}$$

Зауваження 4.2.23 — Це означає, що узагальнена функція $\varepsilon(x,t)$ задовольняє інтегральній тотожності:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0) \tag{4.2.48}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Доведення. Очевидно, що $\varepsilon(x,t) \in C^\infty(t > 0)$.

Твердження 4.2.24

Ця функція задовольняє рівняння теплопровідності:

$$\left(a^2\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon(x,t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.49}$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t}\right)\varepsilon, \tag{4.2.50}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2a^2t}\varepsilon, \tag{4.2.51}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i^2}{4a^2t^2} - \frac{1}{2a^2t}\right)\varepsilon. \tag{4.2.52}$$

Підставляючи знайдені похідні в оператор теплопровідності встановимо справедливість співвідношення. □

Повертаємося до доведення інтегральної тотожності:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty}\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{\substack{\tau\to 0\\ R\to\infty}} \int\limits_{\tau}^{\infty}\iiint\limits_{U_R} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{\substack{\tau\to 0\\ R\to\infty}} \left(\int\limits_{\tau}^{\infty}\iiint\limits_{U_R} \varphi(x,t)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2\Delta\varepsilon\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \right. \\
&\left. + \int\limits_{\tau}^{\infty}\iint\limits_{S_R} a^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial n}\varphi\right)\mathrm{d}S_r\,\mathrm{d}t + \iiint\limits_{U_R} \varepsilon\,\varphi|_{\tau}^{\infty}\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= -\lim_{\tau\to 0}\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x,\tau)\varepsilon(x,\tau)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{4.2.53}$$

Можна показати, що

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right\}}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\,\mathrm{d}x = 1, \quad t > 0. \tag{4.2.54}$$

Твердження 4.2.25

$$\frac{\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}\right\}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n} \xrightarrow[\tau\to+0]{\text{w.}} \delta(x). \tag{4.2.55}$$

Доведення. Дійсно

$$\left|\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}\right\}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^2}(\varphi(x)-\varphi(0))\,\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$\leq \frac{K}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}\right\}|x|\,\mathrm{d}x = A, \tag{4.2.56}$$

де $K = \max\limits_x |\varphi'(x)|$. □

Для обчислення останнього інтегралу перейдемо до узагальненої сферичної системи координат та введемо нову змінну: $\xi = r/2a\sqrt{\tau}$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{K\sigma_n}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2\tau}\right\}r^n\,\mathrm{d}r = \\ &= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}}\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{R/2a\sqrt{\tau}} e^{-\xi^2}\xi^n\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}\xi^n\,\mathrm{d}\xi = \\ &= O\left(\sqrt{\tau}\right) \xrightarrow[\tau\to+0]{} 0. \end{aligned} \tag{4.2.57}$$

□

4.2.5 Фундаментальний розв'язок хвильового оператора

Теорема 4.2.26 (про фундаментальний розв'язок одновимірного хвильового оператора)
Узагальнена функція

$$\psi_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|) \tag{4.2.58}$$

є фундаментальним розв'язком одновимірного хвильового оператора, тобто задовольняє інтегральному співвідношенню:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0) \tag{4.2.59}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останнього виразу:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&\qquad = -\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{|x|/a}^{\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&\qquad = \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\varphi(x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}t = \\
&\qquad = \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi(x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\partial\varphi(-x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \\
&\qquad + \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}t = (\star)
\end{aligned} \tag{4.2.60}$$

Зауваження 4.2.27 — Зрозуміло, що третій інтеграл $= 0$, адже ми інтегруємо частинну похідну функції що не залежить від змінної x по змінній x, тобто підінтегральна функція дорівнює нулеві.

В першому та другому інтегралах введемо нову змінну $x = at$, отримаємо

$$\begin{aligned}(\star) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(-at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \\ &= -\frac{\varphi(0,0)}{2} - \frac{\varphi(0,0)}{2} = -\varphi(0,0).\end{aligned} \tag{4.2.61}$$

Зауваження 4.2.28 — Тут ми вкотре скористалися скінченністю носія φ (фінітністю пробної функції):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\varphi(at,t) &= \\ &= \left.\frac{\varphi(at,t)}{2}\right|_0^{\infty} = \\ &= \frac{\varphi(a\cdot\infty,\infty) - \varphi(a\cdot 0,0)}{2} = \\ &= \frac{0-\varphi(0,0)}{2} = -\frac{\varphi(0,0)}{2}.\end{aligned} \tag{4.2.62}$$

□

Зауваження 4.2.29 — Без доведення наведемо вигляд фундаментального розв'язку для двовимірного та тривимірного хвильового оператора.

$$\psi_2(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{4.2.63}$$

$$\psi_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad x\in\mathbb{R}^3. \tag{4.2.64}$$

4.3 Використання фундаментальних розв'язків та функцій Гріна для знаходження розв'язків задач Коші та граничних задач

Фундаментальні розв'язки оператора теплопровідності та хвильового оператора можна ефективно використовувати для побудови розв'язків задач Коші для рівняння теплопровідності, або хвильового рівняння.

4.3.1 Задача Коші для рівняння теплопровідності

Приклад 4.3.1

Розглянемо задачу Коші для рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -F(x,t), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Для отримання необхідної формули запишемо диференціальне рівняння для фундаментального розв'язку $\varepsilon(x-\xi, t-\tau)$ по парі аргументів ξ, τ:

$$a^2\Delta_\xi \varepsilon(x-\xi,t-\tau) + \frac{\partial \varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau). \tag{4.3.2}$$

Зауваження 4.3.2 — Оскільки диференціювання ведеться по аргументах ξ, τ то фундаментальний розв'язок задовольняє спряженому рівнянню теплопровідності.

Запишемо рівняння теплопровідності відносно незалежних змінних ξ, τ:

$$a^2\Delta u(\xi,\tau) - \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau} = -F(\xi,\tau). \tag{4.3.3}$$

Останнє рівняння домножимо на $\varepsilon(x-\xi,t-\tau)$, а рівняння (4.3.2) — на $u(\xi,\tau)$, від першого відніме друге та проінтегруємо результат по змінній

$\xi \in U_R$ і по змінній $\tau \in [0, t+\alpha]$ для якогось $\alpha > 0$. Отримаємо

$$\int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} a^2(\varepsilon(x-\xi, t-\tau)\Delta u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\Delta\varepsilon(x-\xi,t-\tau))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau -$$
$$- \int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} \frac{\partial(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau))}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= - \int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} \delta(x-\xi)\delta(t-\tau)u(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.3.4}$$

Вправа 4.3.3. Переконайтеся що вас ніде не обманюють!

Для обчислення першого інтегралу лівої частини застосуємо другу формулу Гріна, другий інтеграл спростимо, обчисливши інтеграл від похідної по змінній τ, другий інтеграл у правій частині рівності обчислимо з використанням властивості δ-функції Дірака. В результаті отримаємо:

$$\int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} a^2(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Delta(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)\Delta\varepsilon(x-\xi,t-\tau))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= a^2 \int\limits_0^{t+\alpha} \iint\limits_{S_R} \left(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} - u(\xi,\tau)\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}\right)\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau, \tag{4.3.5}$$

і

$$- \int\limits_0^{t+\alpha} \iiint\limits_{U_R} \frac{\partial(\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau))}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= - \iiint\limits_{U_R} \varepsilon(x-\xi,-\alpha)u(\xi,t+\alpha)\,\mathrm{d}\xi + \iiint\limits_{U_R} \varepsilon(x-\xi,t)u(\xi,0)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.3.6}$$

Вправа 4.3.4. Переконайтеся що вас ніде не обманюють!

Врахуємо, що $\varepsilon(x-\xi,-\alpha)=0$ при $\alpha>0$. Спрямуємо радіус кулі $R\to\infty$, та врахуємо поведінку фундаментального розв'язку в нескінченно віддаленій точці, отримаємо, що поверхневі інтеграли обертаються в нуль. В результаті остаточних спрощень отримаємо

Формула 4.3.5 (інтегрального представлення розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності)

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\iiint\limits_{\mathbb{R}^n}F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau+\iiint\limits_{\mathbb{R}^n}\varepsilon(x-\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.3.7}$$

4.3.2 Задача Коші для рівняння коливання струни. Формула д'Аламбера

Приклад 4.3.6

Розглянемо задачу Коші для рівняння коливання струни

$$\begin{cases} a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=-F(x,t), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^1,\\ u(x,0)=u_0(x),\\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=v_0(x). \end{cases} \tag{4.3.8}$$

Для знаходження формули інтегрального представлення розв'язку цієї задачі Коші запишемо рівняння, якому задовольняє фундаментальний розв'язок:

$$a^2\frac{\partial^2\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau^2}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau). \tag{4.3.9}$$

Над цими рівняннями проведемо наступні дії аналогічні попередньому випадку:

1. перше помножимо на $\psi_1(x-\xi,t-\tau)$;
2. друге помножимо на $y(\xi,\tau)$;

3. аргументи x, t першого перепозначимо через ξ, τ відповідно;

4. віднімемо від першого рівняння друге та проінтегруємо по $\tau \in (0, t)$ та по $\xi \in (-R, R)$.

Будемо мати:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \int\limits_{-R}^R a^2 \left(\psi_1(x-\xi, t-\tau) \frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - u(\xi,\tau) \frac{\partial^2 \psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial \xi^2} \right) \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau - \\ - \int\limits_0^t \int\limits_{-R}^R \left(\psi_1(x-\xi, t-\tau) \frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial \tau^2} - u(\xi,\tau) \frac{\partial^2 \psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau^2} \right) \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau = \\ = -\int\limits_0^t \int\limits_{-R}^R \psi_1(x-\xi,t-\tau) F(\xi,\tau) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{-R}^R \delta(x-\xi)\delta(t-\tau) u(\xi,\tau) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau\end{gathered} \tag{4.3.10}$$

Вправа 4.3.7. Переконайтеся що вас ніде не обманюють!

Застосуємо до першого та другого інтегралів формулу інтегрування за частинами:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t a^2 \left(\psi_1(x-\xi,t-\tau) \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi} - u(\xi,\tau) \frac{\partial \psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial \xi} \right) \Bigg|_{\xi=-R}^{\xi=R} \mathrm{d}\tau - \\ - \int\limits_{-R}^R \left(\psi_1(x-\xi,t-\tau) \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} - u(\xi,\tau) \frac{\partial \psi_1(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau} \right) \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \mathrm{d}\xi = \\ = -\int\limits_0^t \int\limits_{-R}^R \psi(x-\xi,t-\tau) F(\xi,\tau) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\tau + u(x,t).\end{gathered} \tag{4.3.11}$$

Вправа 4.3.8. Переконайтеся що вас ніде не обманюють!

Виконаємо необхідні підстановки та спрямуємо $R \to \infty$, отримаємо, що перший інтеграл в лівій частині тотожньо перетворюється в нуль за рахунок властивостей фундаментального розв'язку. В другому інтегралі у лівій частині верхня підстановка перетворюється в нуль за рахунок властивостей фундаментального розв'язку, а нижню підстановку можна перетворити з використанням початкових умов задачі Коші.

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x-\xi, t-\tau) F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau - \\ - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial \psi_1(x-\xi, t-\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x-\xi, t) v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Вправа 4.3.9. Переконайтеся що вас ніде не обманюють!

Цю проміжну формулу можна конкретизувати обчисливши відповідні інтеграли, враховуючи конкретний вигляд фундаментального розв'язку

$$\psi_1(x-\xi, t-\tau) = \frac{\theta(a(t-\tau) - |x-\xi|)}{2a}. \tag{4.3.13}$$

Обчислимо перший інтеграл:

$$\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x-\xi, t-\tau) F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau. \tag{4.3.14}$$

Аналогічно попередньому можна записати третій інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x-\xi, t) v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.3.15}$$

Для обчислення другого інтегралу, обчислимо спочатку похідну від фундаментального розв'язку, яка фігурує під знаком інтегралу:

$$\left.\frac{\partial \psi_1(x-\xi, t)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left.\frac{\theta(a(t-\tau) - |x-\xi|)}{2a}\right|_{\tau=0} = -\frac{1}{2}\delta(at - |x-\xi|). \tag{4.3.16}$$

Враховуючи вигляд похідної фундаментального розв'язку, запишемо другий інтеграл у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(at - |x-\xi|)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} \delta(at+\xi-x)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty} \delta(at-\xi+x)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} \delta(\xi-(x-at))u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty} \delta(\xi-(x+at))u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \\
&\quad = \frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2}.
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Таким чином остаточно можемо записати

Формула 4.3.10 (д'Аламбера)
Розв'язок задачі Коші для рівняння коливання струни:

$$\begin{aligned}
u(x,t) = {}& \frac{u_0(x-at)+u_0(x+at)}{2} + \\
&+ \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

4.3.3 Задача Коші для рівняння коливання мембрани та коливання необмеженого об'єму. Формули Пуассона та Кіргофа

Приклад 4.3.11
Будемо розглядати задачу Коші для двовимірного або тривимірного хвильового рівняння:

$$\begin{cases}
a^2\Delta u(x,t) - u_{tt}(x,t) = -F(x,t), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad n=2,3, \\
u(x,0) = u_0(x), \\
u_t(x,0) = v_0.
\end{cases} \tag{4.3.19}$$

Використовуючи перетворення аналогічні випадку формули д'Аламбера, можемо отримати проміжну формулу для розв'язання двовимірної або тривимірної задач Коші:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_n(x-\xi, t-\tau) F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau - \\ - \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \left.\frac{\partial \psi_n(x-\xi, t-\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi_n(x-\xi, t) v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Використовуючи вигляд фундаментального розв'язку для двовимірного випадку:

$$\psi_2(x,t) = \frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{4.3.21}$$

та проміжну формулу запишемо формулу Пуассона. Обчислимо першій інтеграл:

$$\int\limits_0^t \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_2(x-\xi, t) v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a\pi} \iint\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}. \tag{4.3.22}$$

Запишемо третій інтеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_2(x-\xi, t) v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a\pi} \iint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}. \tag{4.3.23}$$

Нарешті запишемо другий інтеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial \psi_2(x-\xi, t-\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{|\xi-x|<at} \frac{u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}. \tag{4.3.24}$$

Зводячи усі три інтеграли в одну формулу отримаємо

Формула 4.3.12 (Пуассона)
Розв'язок задачі Коші коливання мембрани

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\pi}\int_0^t \iint\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}}+ \\ +\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{|\xi-x|<at}\frac{u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}+ \\ +\frac{1}{2a\pi}\iint\limits_{|\xi-x|<at}\frac{v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}}. \tag{4.3.25}$$

Без доведення наведемо

Формула 4.3.13 (Кіргофа)
Для тривимірної задачі Коші хвильового рівняння:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{|x-\xi|<at}\frac{F(\xi,t-|x-\xi|/a)}{|x-\xi|}\,\mathrm{d}\xi+ \\ +\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{|x-\xi|=at} v_0(\xi)\,\mathrm{d}S_\xi+ \\ +\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{|x-\xi|=at} u_0(\xi)\,\mathrm{d}S_\xi\right). \tag{4.3.26}$$

4.3.4 Функція Гріна граничних задач оператора Гельмгольца

При розв'язанні задач Коші для рівняння теплопровідності та хвильового рівняння ми використовували фундаментальний розв'язок відповідного оператора, який дозволяв врахувати вплив вільного члена рівняння та початкових умов. Для розв'язання граничних задач, для яких розв'язок треба шукати в деякій обмеженій області на границі якої повинні виконуватися деякі граничні умови, треба використовувати спеціальні фундаментальні розв'язки. Крім того ці спеціальні фундаментальні розв'язки повинні задовольняти однорідним граничним умовам. Такі спеціальні фундаментальні розв'язки отримали назву функцій Гріна граничної задачі певного роду для відповідного диференціального рівняння.

Приклад 4.3.14

Будемо розглядати граничні задачі для рівняння Гельмгольца:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(x) = -F(x), & x \in \Omega, \\ \ell_i u(x)\big|_{x\in S} = f(x), & i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.3.27}$$

Використаємо позначення для граничних операторів:

$$\ell_1 u(x)\big|_{x\in S} = u(x)\big|_{x\in S}, \tag{4.3.28}$$

$$\ell_2 u(x)\big|_{x\in S} = \left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{x\in S}, \tag{4.3.29}$$

$$\ell_3 u(x)\big|_{x\in S} = \left.\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \alpha(x)u(x)\right|_{x\in S}, \tag{4.3.30}$$

(4.3.31)

— граничні умови першого, другого або третього роду. Зауважимо, що в найпростішому випадку в кожній точці границі виконується умова першого, другого або третього роду, у зв'язку з чим і граничні задачі називають першою, другою або третьою для рівняння Гельмгольца.

Визначення 4.3.15 (функції Гріна)**.** Функцію $G_i^k(x, \xi)$ будемо називати *функцією Гріна* першої другої або третьої граничної задачі в області Ω з границею S оператора Гельмгольца, якщо ця функція є розв'язком граничної задачі:

$$\begin{cases} (\Delta_x + k^2)G_i^k(x, \xi) = -\delta(x - \xi), & x, \xi \in \Omega, \\ \ell_i G_i^k(x, \xi)\Big|_{x\in S} = 0, & i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.3.32}$$

Оскільки функція Гріна задовольняє рівняння з такою ж правою частиною як і фундаментальний розв'язок (лише зі здвигом на ξ), то для визначення функції Гріна можна надати наступне еквівалентне визначення:

Визначення 4.3.16 (еквівалентне функції Гріна)**.** Функцію $G_i^k(x,\xi)$ будемо називати функцією Гріна першої другої або третьої граничної задачі в області Ω з границею S оператора Гельмгольца, якщо ця функція може бути представлена у вигляді

$$G_i^k(x,\xi) = q_\pm^k(x-\xi) + g_i^k(x,\xi), \tag{4.3.33}$$

де $q_\pm^k(x-\xi)$ є фундаментальним розв'язком оператора Гельмгольца, а функція g_i^k задовольняє граничній задачі:

$$\begin{cases} (\Delta_x + k^2) g_i^k(x,\xi) = -\delta(x-\xi), \quad x,\xi \in \Omega, \\ \ell_i g_i^k(x,\xi)\Big|_{x\in S} = -\ \ell_i q_\pm^k(x)\Big|_{x\in S}, \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.34}$$

Твердження 4.3.17

Функція Гріна $G_i^k(x,\xi) = G_i^k(\xi,x)$, $x,\xi\in\Omega$, $i=1,2,3$, тобто є симетричною функцією своїх аргументів.

Доведення. Для цього розглянемо рівняння для функції Гріна з параметром η:

$$(\Delta_x + k^2) G_i^k(x,\eta) = -\delta(x-\eta), \quad x,\eta\in\Omega \tag{4.3.35}$$

Рівняння з визначення помножимо на $G_i^k(x,\eta)$, а останнє рівняння — на $G_i^k(x,\xi)$, віднімемо від першого рівняння друге і проінтегруємо па аргументу $x\in\Omega$:

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_\Omega \big(G_i^k(x,\eta)(\Delta_x+k^2)G_i^k(x,\xi) - G_i^k(x,\xi)(\Delta_x+k^2)G_i^k(x,\eta)\big)\,\mathrm{d}x = \\ &\quad = \iiint\limits_\Omega \big(-G_i^k(x,\eta)\delta(x-\xi) + G_i^k(x,\xi)\delta(x-\eta)\big)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{4.3.36}$$

Вправа 4.3.18. Переконайтеся що вас ніде не обманюють!

До лівої частини застосуємо формулу Остроградського-Гауса, а інтеграл в правій частині обчислюється безпосередньо:

$$-G_i^k(\xi,\eta) + G_i^k(\eta,\xi) = \iint\limits_S \left(G_i^k(x,\eta)\frac{\partial G_i^k(x,\xi)}{\partial n_x} - G_i^k(x,\xi)\frac{\partial G_i^k(x,\eta)}{\partial n_x}\right)\mathrm{d}S_x. \tag{4.3.37}$$

Поверхневий інтеграл останнього співвідношення дорівнює нулю для кожного $i = 1, 2, 3$. Дійсно при $i = 1$:

$$G_1^k(x,\xi)\Big|_{x\in S} = G_1^k(x,\eta)\Big|_{x\in S} \equiv 0, \tag{4.3.38}$$

при $i = 2$:

$$\left.\frac{\partial G_2^k(x,\xi)}{\partial n}\right|_{x\in S} = \left.\frac{\partial G_2^k(x,\eta)}{\partial n}\right|_{x\in S} \equiv 0, \tag{4.3.39}$$

при $i = 3$:

$$\left.\frac{\partial G_3^k(x,\xi)}{\partial n} + \alpha(x)G_3^k(x,\xi)\right|_{x\in S} = \left.\frac{\partial G_3^k(x,\eta)}{\partial n} + \alpha(x)G_3^k(x,\eta)\right|_{x\in S} \equiv 0, \tag{4.3.40}$$

що забезпечує рівність нулю поверхневого інтегралу для граничних умов будь-якого роду. □

Враховуючи симетричність функції Гріна отримаємо формули інтегрального представлення розв'язків трьох основних граничних задач рівняння Гельмгольца.

Для цього запишемо граничну задачу відносно аргументу ξ:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u(\xi) = -F(\xi), \quad \xi \in \Omega, \\ \ell_i u(\xi)\big|_{\xi\in S} = f(\xi), \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.3.41}$$

Враховуючи симетрію функції Гріна та парність δ-функції Дірака, запишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} (\Delta_\xi + k^2)G_i^k(x,\xi) = -\delta(x-\xi), \quad x,\xi \in \Omega, \\ \ell_i g_i^k(x,\xi)\Big|_{\xi\in S} = -\left.\ell_i q_\pm^k(\xi)\right|_{\xi\in S}, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.3.42}$$

Проведемо наступні перетворення: першу систему помножимо на $G_i^k(x,\xi)$, а другу помножимо на $u(\xi)$, віднімемо від першої рівності другу і проінтегруємо по змінній $\xi \in \Omega$:

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_\Omega \Big(G_i^k(x,\xi)(\Delta + k^2)u(\xi) - u(\xi)(\Delta_\xi + k^2)G_i^k(x,\xi)\Big)\,\mathrm{d}\xi = \\ &= \iiint\limits_\Omega \Big(-G_i^k(x,\xi)F(\xi) + u(\xi)\delta(x-\xi)\Big)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{4.3.43}$$

Вправа 4.3.19. Переконайтеся що вас ніде не обманюють!

Застосуємо до лівої частини рівності другу формулу Гріна, а другий інтеграл в правій частині обчислимо безпосередньо враховуючи властивості δ-функції Дірака:

$$u(x) = \iiint\limits_{\Omega} G_i^k(x,\xi) F(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ + \iint\limits_{S} \left(G_i^k(x,\xi) \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial G_i^k(x,\xi)}{\partial n_\xi} \right) \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.3.44}$$

Проміжну формулу можна конкретизувати для кожної з трьох граничних задач:

1. Нехай $i = 1$, тоді

   $$G_1^k(x,\xi)\big|_{\xi\in S} = 0, \quad u(\xi)|_{\xi\in S} = f(\xi), \tag{4.3.45}$$

   і тоді формула прийме наступний вигляд:

   $$u(x) = \iiint\limits_{\Omega} G_1^k(x,\xi) F(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial G_1^k(x,\xi)}{\partial n_\xi} f(\xi) \right) \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.3.46}$$

2. Нехай $i = 2$, тоді

   $$\left.\frac{\partial G_2^k(x,\xi)}{\partial n_\xi}\right|_{\xi\in S} = 0, \quad \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}\right|_{\xi\in S} = f(\xi), \tag{4.3.47}$$

   і формула приймає вигляд:

   $$u(x) = \iiint\limits_{\Omega} G_2^k(x,\xi) F(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \iint\limits_{S} \big(G_2^k(x,\xi) f(\xi) \big)\,\mathrm{d}S_\xi. \tag{4.3.48}$$

3. У випадку $i = 3$

   $$\left.\frac{\partial G_3^k(x,\xi)}{\partial n_\xi} + \alpha(\xi) G_3^k(x,\xi)\right|_{\xi\in S} = 0, \quad \left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} + \alpha(\xi) u(\xi)\right|_{\xi\in S} = f(\xi). \tag{4.3.49}$$

   Розв'язок має вигляд:

   $$u(x) = \iiint\limits_{\Omega} G_3^k(x,\xi) F(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \iint\limits_{S} \big(G_3^k(x,\xi) f(\xi) \big)\,\mathrm{d}S_\xi. \tag{4.3.50}$$

Вправа 4.3.20. Доведіть останню формулу.

Зауваження 4.3.21 — Підказка: домножаючи

$$\left.\frac{\partial G_3^k(x,\xi)}{\partial n_\xi} + \alpha(\xi) G_3^k(x,\xi)\right|_{\xi \in S} = 0 \tag{4.3.51}$$

на $u(\xi)$ отримаємо

$$\left. u(\xi)\frac{\partial G_3^k(x,\xi)}{\partial n_\xi} + \alpha(\xi) u(\xi) G_3^k(x,\xi)\right|_{\xi \in S} = 0. \tag{4.3.52}$$

У свою чергу, домножаючи

$$\left.\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} + \alpha(\xi) u(\xi)\right|_{\xi \in S} = f(\xi) \tag{4.3.53}$$

на $G_3^k(x,\xi)$ отримаємо

$$\left. G_3^k(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} + \alpha(\xi) u(\xi) G_3^k(x,\xi)\right|_{\xi \in S} = f(\xi) G_3^k(x,\xi). \tag{4.3.54}$$

Віднімаючи звідси (4.3.52) маємо

$$\left. G_3^k(x,\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi)\frac{\partial G_3^k(x,\xi)}{\partial n_\xi}\right|_{\xi \in S} = f(\xi) G_3^k(x,\xi). \tag{4.3.55}$$

Залишається просто підставити це у другий інтеграл загальної формули.