Математична фізика::практика

Нікіта Скибицький

30 січня 2019 р.

Зміст

1 24.01. Метод Фур'є

Метод також називають *методом розділення змінних*.

1.1 Теорія

Розглянемо наступну постановку задачі:

Задача. Знайти вільні коливання струни довжини ℓ із закріпленими кінцями у середовищі без опору. Початкове положення струни і її швидкість задані.

Цю задачу можна формалізувати наступним чином:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0, \tag{1.1.1}$$

закріплені кінці (крайові умови):

$$u(0, t) = 0 = u(\ell, t), \tag{1.1.2}$$

початкові[1] умови:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, \ell], \tag{1.1.3}$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, \ell). \tag{1.1.4}$$

[1] Тут u_t позначає $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Метод Фур'є застосовується до задач, у яких саме рівняння (1.1.1) та крайові умови (1.1.2) є однорідними (по x).

Розв'язок. Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \not\equiv 0. \tag{1.1.5}$$

Підставляємо (1.1.5) в (1.1.1):

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t).$$

Ділимо[2] обидві частини на $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$ маємо:

$$\frac{T''(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Оскільки ліва частина не залежить від x а права від t, то робимо висновок що вони обидві – сталі. Позначимо відповідну сталу через $-\lambda$, отримаємо:

$$\frac{T''(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Звідси маємо два рівняння:

$$\begin{aligned} T''(t) + \lambda \cdot a^2 \cdot T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda \cdot X(x) &= 0. \end{aligned}$$

Поставимо тепер задачу Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$.

З крайових умов (1.1.2) маємо:

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0.$$

Оскільки $T \not\equiv 0$, то звідси $X(0) = 0$. Аналогічно $X(\ell) = 0$.

Нагадаємо *постановку задачі Штурма-Ліувілля*:

Задача. Необхідно знайти усі λ для яких задане однорідне рівняння має нетривіальний розв'язок.

Знайдемо λ з характеристичного рівняння $\kappa^2 = -\lambda$, маємо три випадки:

[2] Розв'язок нетривіальний тому можемо собі таке дозволити.

1. $\lambda = 0$. Тоді розв'язок рівняння має вигляд[3] $X(x) = ax + b$, підставляємо його в крайові умови:

$$0 = X(0) = b,$$
$$0 = X(\ell) = a\ell + b.$$

Нескладно бачити, що $a = b = 0$, тобто отримали тривіальний розв'язок $X \equiv 0$ який нас не влаштовує.

2. $\lambda < 0$, тоді розв'язок рівняня має вигляд[4]

$$X(x) = a \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x} + b \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x},$$

підставляємо його в крайові умови:

$$0 = X(0) = a + b = 0,$$
$$0 = X(\ell) = a \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot \ell} + b \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot \ell}.$$

Нескладно бачити, що у цієї системи немає нетривіальни розв'язків, зокрема тому що її визначник $\neq 0$.

3. $\lambda > 0$, тоді розв'язок рівняня має вигляд[5]

$$X(x) = a \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) + b \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right),$$

підставляємо його в крайові умови:

$$0 = X(0) = a,$$
$$0 = X(\ell) = b \sin\left(\sqrt{\lambda}\ell\right).$$

Звідси $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідний розв'язок набуває вигляду

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

[3]Тут a – не параметр початквої задачі а локальний невідомий коефіцієнт.
[4]Тут a – не параметр початквої задачі а локальний невідомий коефіцієнт.
[5]Тут a – не параметр початквої задачі а локальний невідомий коефіцієнт.

Підставляємо знайдене λ_n у рівняння на T:

$$T_n''(t) + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \cdot T_n(t) = 0.$$

Тут параметр вже цілком конкретний, тому можемо одразу записати загальний вигляд розв'язку:

$$T_n(t) = a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a t}{\ell}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a t}{\ell}\right).$$

З (1.1.5) маємо $u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$. Але всі ці розв'язки лінійно незалежні, тому загальним розв'язком буде

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \cdot \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{\pi n a t}{\ell}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n a t}{\ell}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Залишилося знайти a_n, b_n з умов (1.1.3) та (1.1.4).

Підставляємо (1.1.6) в (1.1.3):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) = \varphi(x) = \ldots$$

Зауваження. *Тут ми припускаємо, що $\varphi(x)$ відповідає умовам теореми Стеклова і граничним умовам нашої задачі Штурма-Ліувілля.*

$$\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти[6] в цих рядах Фур'є знаходимо що $a_n = \varphi_n$.

Знайдемо[7] b_n з (1.1.4):

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \cdot b_n \cdot \frac{\pi n a}{\ell} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти в цих рядах Фур'є знаходимо що $b_n = \psi_n \cdot \frac{\ell}{\pi n a}$.

Далі підставляємо a_n, b_n в (1.1.6).

[6] $\varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \cdot \int_0^{\ell} \varphi(x) \cdot X_n(x) \cdot \mathrm{d}x$.

[7] Тут ψ_n визначається аналогічно до φ_n вище.

Ми вже не будемо тут цього робити, оскількьи подальші формули в загальному випадку доволі громізкі, і не дуже змістовні.

Рівняння коливання струни є рівнянням гіперболічного типу. Метод Фур'є можна також застосовувати до рівнянь параболічного типу, таких як розводіл тепла:

Задача. Знайти розводіл температури теплоізольованого (немає стоків) стержня на кінцях якого підтримується нульова температура. Початковий розподіл температури заданий.

Формально, маємо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1.7}$$

на кінцях підтримуєтсья нульова температура:

$$u(0, t) = 0 = u(\ell, t), \tag{1.1.8}$$

початкові умови:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, \ell]. \tag{1.1.9}$$

Розв'язок. Будемо шукати розв'язок у вигляді (1.1.5).
Підставляємо (1.1.5) в (1.1.1):

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t).$$

Ділимо обидві частини на $a^2 \cdot X(x) \cdot T(t)$ маємо:

$$\frac{T(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Звідси маємо два рівняння:

$$\begin{aligned} T'(t) + \lambda \cdot a^2 \cdot T(t) = 0, \\ X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0. \end{aligned}$$

Задача Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$ вже розв'язана, одразу переходимо до знаходження $T(t)$.

Підставляємо знайдене λ_n у рівняння на T:

$$T_n'(t) + \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 \cdot T_n(t) = 0.$$

Тут параметр вже цілком конкретний, тому можемо одразу записати загальний вигляд розв'язку:

$$T_n(t) = a_n \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{\ell} \cdot t\right)\right\}.$$

Загальним розв'язком буде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \cdot a_n \cdot \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{\ell} \cdot t\right)\right\}. \tag{1.1.10}$$

Залишилося знайти a_n з умови (1.1.9).

Підставляємо (1.1.10) в (1.1.9):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) = \\ = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти в цих рядах Фур'є знаходимо що $a_n = \varphi_n$.

Далі підставляємо a_n в (1.1.10).

1.2 Практика

Задача 1.1 (Владіміров, №20.14.1)**.**

$$u_{tt} = u_{xx} - 4u, \quad 0 < x < 1$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$$
$$u|_{t=0} = x^2 - x$$
$$u_t|_{t=0} = 0$$

Розв'язок. Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$u(t,x) = T(t) \cdot X(x).$$

Підставляємо

$$T''(t) \cdot X(x) = T(T) \cdot X''(x) - 4 \cdot T(t) \cdot X(x).$$

Ділимо обидві частини на $X(x) \cdot T(t)$, маємо:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - 4 = -\lambda.$$

Поставимо тепер задачу Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$:

$$X''(x) + (\lambda - 4) \cdot X(x) = 0.$$

Знайдемо λ з характеристичного рівняння $\kappa^2 = 4-\lambda$, маємо три випадки:

1. $\lambda - 4 = 0 \implies X \equiv 0;$
2. $\lambda - 4 < 0 \implies X \equiv 0;$
3. $\lambda - 4 > 0 \implies \lambda_n = (\pi n)^2 + 4$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідний розв'язок набуває вигляду

$$X_n(x) = \sin(\pi n x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пісдтавляємо знайдене λ_n у рівняння на T:

$$T''(t) + ((\pi n)^2 + 4)T(t) = 0.$$

Тут параметр вже цілком конкретний, тому можемо одразу записати загальний вигляд розв'язку:

$$T_n(t) = a_n \cdot \cos\left(\sqrt{(\pi n)^2 + 4} \cdot t\right) + b_n \cdot \sin\left(\sqrt{(\pi n)^2 + 4} \cdot t\right).$$

Загальним розв'язком буде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x) \cdot \left(a_n \cdot \cos\left(\sqrt{(\pi n)^2 + 4} \cdot t\right) + b_n \cdot \sin\left(\sqrt{(\pi n)^2 + 4} \cdot t\right)\right).$$

Знайдемо a_n з

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(\pi n x) = u|_{t=0} = x^2 - x = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin(\pi n x).$$

Після певних неприємних обчислень маємо:

$$a_n = \varphi_n = \begin{cases} -\frac{8}{(\pi n)^3}, & n = 2k - 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Знайдемо b_n з

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(\pi n x) \cdot \sqrt{(\pi n)^2 + 4} = u_t|_{t=0} = 0.$$

Звідси одразу маємо $b_n = 0$, зокрема тому, що функції $\sin(\pi n x)$ є лінійно-незалежними.

1.3 Домашнє завдання

Задача 1.2 (Владіміров, №20.41.1)**.** Розв'язати змішану задачу:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1$$

$$u_x|_{x=0} = 0 = u_x|_{x=1}$$
$$u|_{t=0} = x^2 - 1$$

Розв'язок. Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$u(t,x) = T(t) \cdot X(x).$$

Підставляємо

$$T'(t) \cdot X(x) = T(T) \cdot X''(x).$$

Ділимо обидві частини на $X(x) \cdot T(t)$, маємо:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Поставимо тепер задачу Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0.$$

Її крайові умови:

$$X'(0) = 0 = X'(1)$$

Знайдемо λ з характеристичного рівняння $\kappa^2 = -\lambda$, маємо три випадки:

1. $\lambda = 0 \implies X \equiv 1;$
2. $\lambda < 0 \implies X \equiv 0;$
3. $\lambda > 0 \implies \lambda_n = (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Відповідний розв'язок набуває вигляду

$$X_n(x) = \cos(\pi n x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пісдтавляємо знайдене λ_n у рівняння на T:

$$T'(t) + (\pi n)^2 \cdot T(t) = 0.$$

Тут параметр вже цілком конкретний, тому можемо одразу записати загальний вигляд розв'язку:

$$T_n(t) = a_n \cdot e^{-(\pi n)^2 t}.$$

Загальним розв'язком буде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n x) \cdot a_n \cdot e^{-(\pi n)^2 t}.$$

Знайдемо a_n з

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(\pi n x) = u|_{t=0} = x^2 - 1 = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \cos(\pi n x).$$

Після певних неприємних обчислень маємо:

$$\begin{aligned} a_n = \varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \cdot \int_0^1 (x^2 - 1) \cdot \cos(\pi n x) \cdot \mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi n)}{4\pi n}} \cdot \frac{2\pi n \cdot \cos(\pi n) - 2\sin(\pi n)}{\pi^3 \cdot n^3} = \\ = 2 \cdot \frac{2\pi n \cdot \cos(\pi n)}{\pi^3 \cdot n^3} = \frac{(-1)^n \cdot 4}{\pi^2 \cdot n^2}. \end{aligned}$$

Пригадаємо що у нас є ще $\lambda_0 = 0$ для якого $X_0 \equiv 1$, а також $T'(t) = 0$, тобто $T(t) = const = a_0$. Зрозуміло, що аналогічно попередньому (a_n, $n \in \mathbb{N}$) маємо:

$$a_0 = \varphi_0 = \frac{1}{\|1\|^2} \cdot \int_0^1 (x^2 - 1) \cdot 1 \, \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}.$$

Підставляємо це все у вигляд загального розв'язку:

$$u(x,t) = -\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cos(\pi n x) \cdot e^{-(\pi n)^2 t}}{n^2}$$