

## Зміст

2.2.2	Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром . . . . .	1
2.2.3	Альтернатива Фредгольма . . . . .	3
2.2.4	Наслідки з теорем Фредгольма . . . . .	5
2.2.5	Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром . . . . .	6
2.3	Інтегральні рівняння з ермітовим ядром . . . . .	8

### 2.2.2 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром

Будемо розглядати рівняння:

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad (2.2.29)$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x, y) \psi(y) dy + g(x), \quad (2.2.30)$$

Ядро  $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$ , отже його можна наблизити поліномом (Теорема Вейерштраса).

Тобто, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує

$$P_N(x, y) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \quad (2.2.31)$$

де  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ , такий що  $|K(x, y) - P_N(x, y)| < \varepsilon$ ,  $(x, y) \in \bar{G} \times \bar{G}$ , тобто

$$K(x, y) = P_N(x, y) + Q_N(x, y), \quad (2.2.32)$$

де  $P_N(x, y)$  — вироджене ядро (поліном),  $|Q_N(x, y)| < \varepsilon$ ,  $(x, y) \in \bar{G} \times \bar{G}$ .

Виходячи з останньої рівності, інтегральне рівняння Фредгольма приймає вигляд

$$\varphi = \lambda \mathbf{P}_N \varphi + \lambda \mathbf{Q}_N \varphi + f, \quad (2.2.33)$$

де  $\mathbf{P}_N$  та  $\mathbf{Q}_N$  — інтегральні оператори з ядрами  $P_N(x, y)$  та  $Q_N(x, y)$  відповідно ( $\mathbf{P}_N + \mathbf{Q}_N = \mathbf{K}$ ).

Для спряженого рівняння маємо:

$$K^*(x, y) = P_N^*(x, y) + Q_N^*(x, y), \quad (2.2.34)$$

і

$$\psi = \bar{\lambda} \mathbf{P}_N^* \psi + \bar{\lambda} \mathbf{Q}_N^* \psi + g. \quad (2.2.35)$$

### Твердження 2.2.2.1

В класі  $C(G)$  отримані рівняння

$$\varphi = \lambda \mathbf{P}_N \varphi + \lambda \mathbf{Q}_N \varphi + f, \quad (2.2.36)$$

$$\psi = \bar{\lambda} \mathbf{P}_N^* \psi + \bar{\lambda} \mathbf{Q}_N^* \psi + g \quad (2.2.37)$$

еквівалентні рівнянням з виродженим ядром.

*Доведення.* Введемо нову функцію

$$\Phi = \varphi - \lambda \mathbf{Q}_N \varphi \quad (2.2.38)$$

З рівняння на  $\varphi$  випливає що  $\Phi = \lambda \mathbf{P}_N \varphi + f$ , а з однією із рівностей твердження 2.1.3.1 (перша лекція) випливає що  $\forall \lambda$  такого що  $|\lambda| < 1/(\varepsilon V)$ :

$$(E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} = (E + \lambda \mathbf{R}_N), \quad (2.2.39)$$

де  $\mathbf{R}_N$  — резольвента для  $\mathbf{Q}_N$ . Отже

$$\varphi = (E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} \Phi = (E + \lambda \mathbf{R}_N) \Phi. \quad (2.2.40)$$

Тобто, рівняння Фредгольма II роду перетворюється на

$$\Phi = \lambda \mathbf{P}_N (E + \lambda \mathbf{R}_N) \Phi + f. \quad (2.2.41)$$

Для спряженого рівняння маємо:

$$\psi = \bar{\lambda} (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) \mathbf{P}_N^* \psi + (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) g. \quad (2.2.42)$$

Позначимо  $g_1 = (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) g$ . Маємо:

$$\psi = \bar{\lambda} (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) \mathbf{P}_N^* \psi + g_1. \quad (2.2.43)$$

Оскільки  $(\mathbf{P}_N \mathbf{R}_N)^* = \mathbf{R}_N^* \mathbf{P}_N^*$ , то отримані рівняння спряжені.

Позначимо нарешті

$$\mathbf{T}_N = \mathbf{P}_N (E + \lambda \mathbf{R}_N), \quad (2.2.44)$$

$$\mathbf{T}_N^* = (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) \mathbf{P}_N^*. \quad (2.2.45)$$

Тоді рівняння Фредгольма з неперервним ядром можна записати у вигляді:

$$\Phi = \lambda \mathbf{T}_N \Phi + f, \quad (2.2.46)$$

$$\Psi = \bar{\lambda} \mathbf{T}_N^* \Psi + g_1, \quad (2.2.47)$$

де

$$T_N(x, y, \lambda) = P_N(x, y) + \lambda \int_G P_N(x, \xi) R_N(\xi, y, \lambda) d\xi \quad (2.2.48)$$

— вироджене, оскільки є сумою двох вироджених, поліному  $P_N(x, y)$ , та інтегрального доданку. Покажемо що другий доданок в  $T_N$  — вироджений. Дійсно:

$$\int_G \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha \xi^\beta R_N(\xi, y) d\xi = \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha \int_G \xi^\beta R_N(\xi, y) d\xi. \quad (2.2.49)$$

□

### 2.2.3 Альтернатива Фредгольма

Сукупність теорем Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром називається альтернативою Фредгольма.

#### Теорема 2.2.3.1 (Перша теорема Фредгольма для неперервних ядер)

Якщо інтегральне рівняння Фредгольма II роду з неперервним ядром  $K(x, y)$  має розв'язок  $\forall f \in C(\bar{G})$  то і спряжене рівняння має розв'язок для  $\forall g \in C(\bar{G})$  і ці розв'язки єдині.

*Доведення.* Нехай інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок в  $C(\bar{G})$  для  $\forall$  вільного члена  $f$ , тоді еквівалентне йому рівняння  $\Phi = \lambda \mathbf{T}_N \Phi + f$  має такі ж властивості і згідно з першою теоремою Фредгольма для вироджених ядер  $D(\lambda) \neq 0$ , а спряжене до нього рівняння  $\Psi = \bar{\lambda} \mathbf{T}_N^* \Psi + g_1$  теж має єдиний розв'язок  $\forall$  вільного члена  $g_1$ , еквівалентне до нього (і спряжене до початкового) рівняння має розв'язок  $\forall g$ . □

#### Теорема 2.2.3.2 (Друга теорема Фредгольма для неперервних ядер)

Якщо інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язки не для будь-якого вільного члена  $f$ , то однорідні рівняння  $\varphi = \lambda \mathbf{K} \varphi$  та  $\psi = \bar{\lambda} \mathbf{K}^* \psi$  мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків.

*Доведення.* Нехай інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок не  $\forall$  вільного члена  $f$ , тоді еквівалентне йому рівняння з виродженим

ядром  $\Phi = \lambda \mathbf{T}_N \Phi + f$  має таку ж властивість. Згідно з теоремами Фредгольма для вироджених ядер  $D(\lambda) = 0$  (для виродженого ядра  $\mathbf{T}_N$ ). Однорідні рівняння які їм відповідають мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків, еквівалентні до них однорідні рівняння  $\varphi = \lambda \mathbf{K} \varphi$  та  $\psi = \bar{\lambda} \mathbf{K}^* \psi$  теж мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв'язків.  $\square$

### Теорема 2.2.3.3 (Третя теорема Фредгольма для неперервних ядер)

Якщо інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок не для довільного вільного члена  $f$ , то для існування розв'язку інтегрального рівняння в  $C(\overline{G})$  необхідно і достатньо, щоб вільний член  $f$  був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння. Розв'язок не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки, натягнутої на систему власних функцій оператора  $\mathbf{K}$ .

*Доведення.* Нехай неоднорідне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок не для будь-якого вільного члена  $f$ , тоді еквівалентне рівняння з виродженим ядром має таку ж властивість, і за третьою теоремою Фредгольма для вироджених ядер  $D(\lambda) = 0$  (для виродженого ядра  $\mathbf{T}_N$ ). Розв'язок цього еквівалентного рівняння існує тоді і тільки тоді коли  $f$  ортогональний до розв'язків спряженого однорідного рівняння. Але легко бачити, що вільний член початкового і еквівалентного рівнянь співпадають, так само співпадають розв'язки вихідного спряженого однорідного рівняння та еквівалентного.  $\square$

**Зауваження 2.2.3.1** — Для доведення теорем для будь-якого фіксованого значення  $\lambda$  вибиралося  $\varepsilon$ , таке щоби  $|\lambda| < 1/(\varepsilon V)$ .

### Теорема 2.2.3.4 (Четверта теорема Фредгольма)

Для будь-якого як завгодно великого числа  $R > 0$  в крузі  $|\lambda| < R$  лежить лише скінченна кількість характеристичних чисел неперервного ядра  $K(x, y)$ .

**Вправа 2.2.3.1.** Доведіть четверту теорему Фредгольма.

## 2.2.4 Наслідки з теорем Фредгольма

### Наслідок 2.2.4.1

З четвертої теореми Фредгольма випливає, що множина характеристичних чисел неперервного ядра не має скінчених граничних точок і не більш ніж злічена  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ .

**Вправа 2.2.4.1.** Доведіть цей наслідок.

### Наслідок 2.2.4.2

З другої теореми Фредгольма випливає, що кратність кожного характеристичного числа скінчена, їх можна занумерувати у порядку зростання модулів  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}| \leq \dots$ , кожне число зустрічається стільки разів, яка його кратність. Також можна занумерувати послідовність власних функцій ядра  $K(x, y)$ :  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots$  і спряженого ядра  $K^*(x, y)$ :  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \psi_{k+1}, \dots$

**Вправа 2.2.4.2.** Доведіть цей наслідок.

### Наслідок 2.2.4.3

Власні функції неперервного ядра  $K(x, y)$  неперервні в області  $G$ .

**Вправа 2.2.4.3.** Доведіть цей наслідок.

### Наслідок 2.2.4.4

Якщо  $\lambda_k \neq \lambda_j$ , то  $(\varphi_k, \psi_j) = 0$ .

**Вправа 2.2.4.4.** Доведіть цей наслідок.

### 2.2.5 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром

Розповсюдимо теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром:

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < n. \quad (2.2.50)$$

Покажемо що  $\forall \varepsilon > 0$  існує таке вироджене ядро  $P_N(x, y)$  що,

$$\max_{x \in \overline{G}} \int_G |K(x, y) - P_N(x, y)| dy < \varepsilon, \quad (2.2.51)$$

$$\max_{x \in \overline{G}} \int_G |K^*(x, y) - P_N^*(x, y)| dy < \varepsilon. \quad (2.2.52)$$

Розглянемо неперервне ядро

$$L_M(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & |x - y| \geq 1/M, \\ A(x, y)M^\alpha, & |x - y| < 1/M. \end{cases} \quad (2.2.53)$$

#### Твердження 2.2.5.1

При достатньо великому  $M$  має місце оцінка

$$\int_G |K(x, y) - L_M(x, y)| dy \leq \varepsilon. \quad (2.2.54)$$

Доведення. Дійсно:

$$\begin{aligned}
\int_G |K(x, y) - L_M(x, y)| dy &= \int_{|x-y| < 1/M} \left| \frac{A(x, y)}{|x-y|^\alpha} - A(x, y)M^\alpha \right| dy = \\
&= \int_{|x-y| < 1/M} |A(x, y)| \left| \frac{1}{|x-y|^\alpha} - M^\alpha \right| dy \leq \\
&\leq A_0 \int_{|x-y| < 1/M} \left| \frac{1}{|x-y|^\alpha} - M^\alpha \right| dy \leq \\
&\leq A_0 \int_{|x-y| < 1/M} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} = \\
&= A_0 \sigma_n \int_0^{1/M} \xi^{n-1-\alpha} d\xi = \\
&= A_0 \sigma_n \frac{\xi^{n-\alpha}}{n-\alpha} \Big|_0^{1/M} = \\
&= \frac{A_0 \sigma_n}{(n-\alpha)M^{n-\alpha}} \leq \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned} \tag{2.2.55}$$

де  $\sigma_n$  — площа поверхні одиничної сфери.  $\square$

Завжди можна підібрати вироджене ядро  $P_N(x, y)$  таке що

$$|L_M(x, y) - P_N(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{2V}, \tag{2.2.56}$$

де  $V$  — об'єм області  $G$ .

$$\begin{aligned}
\int_G |K(x, y) - P_N(x, y)| dy &= \int_G |K(x, y) - L_M(x, y) + \\
&\quad + L_M(x, y) - P_N(x, y)| dy \leq \\
&\leq \int_G |K(x, y) - L_M(x, y)| dy + \\
&\quad + \int_G |L_M(x, y) - P_N(x, y)| dy \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2V} \int_G dy = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.2.57}$$

Використавши попередню техніку (для неперервного ядра) інтегральне рівняння з полярним ядром зводиться до еквівалентного рівняння з виродженим ядром. Тобто теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром з тим же самим формулюванням.

Теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром на обмеженій кусково-гладкій поверхні  $S$  та контурі  $C$ :

$$\varphi(x) = \lambda \int_S K(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < \dim(S). \quad (2.2.58)$$

## 2.3 Інтегральні рівняння з ермітовим ядром

Розглядатимемо ядро  $K(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$  таке що  $K(x, y) = K^*(x, y)$ .

**Визначення 2.3.0.1** (ермітового ядра). Неперервне ядро будемо називати *ермітовим*, якщо виконується

$$K(x, y) = K^*(x, y). \quad (2.3.1)$$

**Зауваження 2.3.0.1** — Ермітовому ядру відповідає ермітовий оператор тобто  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$ .

### Лема 2.3.0.1

Для того, щоб лінійний оператор був ермітовим, необхідно і достатньо, щоб для довільної комплексно значної функції  $f \in L_2(G)$  білінійна форма  $(\mathbf{K}f, f)$  приймала лише дійсні значення.

**Вправа 2.3.0.1.** Доведіть цю лему.

### Лема 2.3.0.2

Характеристичні числа ермітового оператора дійсні.



**Вправа 2.3.0.2.** Доведіть цю лему.

**Визначення 2.3.0.2** (компактної в рівномірній метриці множини функцій). Множина функцій  $M \subset C(\overline{G})$  — *компактна в рівномірній метриці*, якщо з будь-якої нескінченної множини функцій з  $M$  можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність.

**Визначення 2.3.0.3** (рівномірно обмеженої множини функцій). Нескінченна множина  $M \subset C(\overline{G})$  — *рівномірно обмежена*, якщо для будь-якого елемента  $f \in M$  має місце  $\|f\|_{C(\overline{G})} \leq a$ , де  $a$  єдина константа для  $M$ .

**Визначення 2.3.0.4** (одностайно неперервної множини функцій). Множина  $M \subset C(\overline{G})$  — *одностайно неперервна* якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \forall f \in M, \forall x_1, x_2 : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$  як тільки  $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ .

**Теорема 2.3.0.1** (Арчела-Асколі, критерій компактності в рівномірній метриці)

Для того, щоб множина  $M \subset C(\overline{G})$  була компактною, необхідно і достатньо, щоб вона була рівномірно-обмеженою і одностайно - неперервною множиною функцій.

**Задача 2.3.1\*.** Доведіть теорему Арчела-Асколі.

**Визначення 2.3.0.5** (цілком неперервного оператора). Назвемо оператор  $\mathbf{K}$  *цілком неперервним* з  $L_2(G)$  у  $C(\overline{G})$ , якщо він переводить обмежену множину в  $L_2(G)$  у компакту множину в  $C(\overline{G})$  (в рівномірній метриці).

**Лема 2.3.0.3** (про цілком неперервність інтегрального оператора з неперервним ядром)

Інтегральний оператор  $\mathbf{K}$  з неперервним ядром  $K(x, y)$  є цілком неперервним з  $L_2(G)$  у  $C(\overline{G})$ .

*Доведення.* Нехай  $f \in M \subset L_2(G)$  та  $\forall f \in M: \|f\|_{L_2(G)} \leq A$ . Але

$$\|\mathbf{K}f\|_{C(\overline{G})} \leq M\sqrt{V}\|f\|_{L_2(G)} \leq M\sqrt{V}A, \quad (2.3.2)$$

тобто множина функцій є рівномірно обмеженою.

Покажемо що множина  $\{\mathbf{K}f(x)\}$  — одностайно неперервна.

Ядро  $K \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ , а отже є рівномірно неперервним, бо неперервне на компактї, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overline{G} : \|x' - x''\| < \delta \implies |(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| \leq \varepsilon. \quad (2.3.3)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} |(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| &= \left| \int_G K(x', y) f(y) \, dy - \int_G K(x'', y) f(y) \, dy \right| \leq \\ &\leq \int_G (|K(x', y) - K(x'', y)| \cdot |f(y)|) \, dy \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon \sqrt{V}}{A \sqrt{V}} \cdot \|f\|_{L_2(\overline{G})} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Остання нерівність виконується для довільної функції  $f$  тобто множина  $\{\mathbf{K}f(x)\}$  одностайно неперервна.  $\square$

**Приклад 2.3.0.1**

Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального оператора

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left( \left( \frac{x}{t} \right)^{2/5} + \left( \frac{t}{x} \right)^{2/5} \right) \varphi(t) dt.$$

*Розв'язок.* Розділимо ядро наступним чином:

$$\varphi(x) = \lambda x^{2/5} \int_0^1 t^{-2/5} \varphi(t) dt + \lambda x^{-2/5} \int_0^1 t^{2/5} \varphi(t) dt.$$

Позначимо

$$c_1 = \int_0^1 t^{-2/5} \varphi(t) dt, \quad c_2 = \int_0^1 t^{2/5} \varphi(t) dt,$$

тоді

$$\varphi(x) = \lambda c_1 x^{2/5} + \lambda c_2 x^{-2/5}.$$

Підставляючи  $\varphi$  назад у  $c_i$  маємо СЛАР

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 t^{-2/5} (\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5}) dt, \\ c_2 = \int_0^1 t^{2/5} (\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5}) dt. \end{cases}$$

Інтегруючи знаходимо

$$\begin{cases} (1 - \lambda)c_1 - 5\lambda c_2 = 0, \\ -\frac{5\lambda}{9}c_1 + (1 - \lambda)c_2 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї СЛАР

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -5\lambda \\ -\frac{5\lambda}{9} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - \frac{25\lambda^2}{9} = 0,$$

тобто власні числа

$$\lambda_1 = \frac{3}{8}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

З системи однорідних рівнянь при  $\lambda = \lambda_1 = 3/8$  маємо  $c_1 = 3c_2$ . Тоді маємо власну функцію

$$\varphi_1(x) = 3x^{2/5} + x^{-2/5}.$$

При  $\lambda = \lambda_2 = -3/2$  маємо  $c_1 = -3c_2$ . Маємо другу власну функцію

$$\varphi_2(x) = -3x^{2/5} + x^{-2/5}.$$

### Приклад 2.3.0.2

Знайти розв'язок інтегрального рівняння при всіх значеннях параметрів  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \varphi(y) dy + ax^2 + bx + c.$$

*Розв'язок.* Запишемо рівняння у вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda \sqrt[3]{x} \int_{-1}^1 \varphi(y) dy + \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{y} \cdot \varphi(y)) dy + ax^2 + bx + c.$$

Введемо позначення:

$$c_1 = \int_{-1}^1 \varphi(y) dy, \quad c_2 = \int_{-1}^1 \sqrt[3]{y} \varphi(y) dy,$$

та запишемо розв'язок у вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda \sqrt[3]{x} c_1 + \lambda c_2 + ax^2 + bx + c$$

Для визначення констант отримаємо СЛАР:

$$\begin{cases} c_1 - 2\lambda c_2 = \frac{2a}{3} + 2c, \\ -\frac{6\lambda}{5} c_1 + c_2 = \frac{6b}{7}. \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{6\lambda}{5} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{12\lambda^2}{5}.$$

Характеристичні числа ядра

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Нехай  $\lambda \neq \lambda_1$ ,  $\lambda \neq \lambda_2$ . Тоді розв'язок існує та єдиний для будь-якого вільного члена і має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{5\lambda(14a + 30\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{28\lambda a + 84\lambda c + 30b}{7(5 - 12\lambda^2)} + ax^2 + bx + c.$$

Нехай

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Тоді система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} c_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \frac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6b}{7}. \end{cases}$$

Ранги розширеної і основної матриці співпадатимуть якщо має місце рівність

$$\frac{2a}{3} + 2c = -\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{6}{7} \cdot b \quad (*)$$

При виконанні цієї умови розв'язок існує

$$c_2 = c_2, \quad c_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c.$$

Таким чином розв'язок можна записати

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x} \left( \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c \right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + x.$$

Якщо

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$$

а умова  $(\star)$  не виконується, то розв'язків не існує.

Нехай

$$\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Після підстановки цього значення отримаємо СЛАР

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \frac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6b}{7}. \end{cases}$$

Остання система має розв'язок при умові

$$\frac{2a}{3} + 2c = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{6}{7} \cdot b, \quad (\star\star)$$

При виконанні умови  $(\star\star)$ , розв'язок існує

$$c_2 = c_2, \quad c_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c.$$

Розв'язок інтегрального рівняння можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x} \left( -\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c \right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + c.$$