

Зміст

4.2	Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів	1
4.2.1	Фундаментальні розв'язки операторів Лапласа та Гельмгольца	3
4.2.2	Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца	5
4.2.3	Фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца	8
4.2.4	Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності	10
4.2.5	Фундаментальний розв'язок хвильового оператора	12

4.2 Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів

Нехай L — диференціальний оператор порядку m вигляду

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha. \quad (4.2.1)$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$Lu = f(x). \quad (4.2.2)$$

Визначення 4.2.1 (узагальненого розв'язку). Узагальненим розв'язком цього рівняння будемо називати будь-яку узагальнену функцію u , яка задовольняє це рівняння в розумінні виконання рівності:

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad (4.2.3)$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Остання рівність рівнозначна рівності

$$\langle u, L^* \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad (4.2.4)$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Тут було введено

Визначення 4.2.2 (спряженого оператора). *Спряженим* до оператора L називається оператор що визначається рівністю

$$L^* \varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi). \quad (4.2.5)$$

Особливу роль в математичній фізиці відіграють фундаментальні розв'язки для основних диференціальних операторів математичної фізики: (Гельмгольца, теплопровідності, хвильового), які представляють собою узагальнені розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$(\Delta + k^2) q_k(x) = -\delta(x), \quad (4.2.6)$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon(x, t) = -\delta(x, t), \quad (4.2.7)$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, t) = -\delta(x, t) \quad (4.2.8)$$

Визначення 4.2.3 (фундаментального розв'язку). Узагальнені функції $q_k(x)$, $\varepsilon(x, t)$, $\psi(x, t)$ називаються фундаментальними розв'язками оператора Гельмгольца, теплопровідності, хвильового відповідно, якщо вони задовольняють відповідні рівняння як узагальнені функції:

$$\iiint_{\mathbb{R}^n} q_k(x) (\Delta + k^2) \varphi(x) dx = -\varphi(0), \quad (4.2.9)$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^{n+1}} \varepsilon(x, t) \left(a^2 \Delta + \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(x, t) dx dt = -\varphi(0, 0), \quad (4.2.10)$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^{n+1}} \psi(x, t) \left(a^2 \Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(x, t) dx dt = -\varphi(0, 0). \quad (4.2.11)$$

Зауваження 4.2.4 — Тут $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, простір усіх можливих значень (x, t) . Зрозуміло, що можна було також записати

$$\iiint_{\mathbb{R}^{n+1}} dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{\mathbb{R}^n} dx dt, \quad (4.2.12)$$

але було вибрано перше позначення для заощадження часу, місця, а також задля одноманітності.

Зауваження 4.2.5 — Неважко зрозуміти, що фундаментальні розв'язки визначені таким чином є неєдиними і визначаються з точністю до розв'язків відповідного однорідного рівняння. Але серед множини фундаментальних розв'язків вибирають такі, які мають певний характер поведінки на нескінченості.

Загальний метод знаходження фундаментальних розв'язків операторів з постійними коефіцієнтами полягає в застосуванні прямого та оберненого перетворення Фур'є по просторовій змінній x та зведення рівняння в частинних похідних до алгебраїчного рівняння у випадку стаціонарного рівняння, або до звичайного диференціального рівняння у випадку нестаціонарного рівняння.

Ми покажемо що деякі узагальнені функції представляють собою фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів.

4.2.1 Фундаментальні розв'язки операторів Лапласа та Гельмгольца

Розглянемо двовимірний оператор Лапласа

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (4.2.13)$$

Теорема 4.2.6 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Лапласа)

Для двохвимірного оператора Лапласа функція

$$q^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \quad (4.2.14)$$

де $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція рівняння

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\delta(x) \quad (4.2.15)$$

Зауваження 4.2.7 — Тут останню рівність необхідно розуміти як

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x) dx = -\varphi(0), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2). \quad (4.2.16)$$

Доведення. Перш за все,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{U_R \setminus U_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{U_R \setminus U_\varepsilon} \Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \varphi(x) dx + \iint_{S_R} \dots dS + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) dS. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Зауваження 4.2.8 — Тут U_R, U_ε — околи нуля такі, що $\text{supp } \varphi \subset U_R$, а U_ε — нескінченно малий окіл.

Також тут позначено $S_R = \partial U_R$, $S_\varepsilon = \partial U_\varepsilon$.

У свою чергу n — вектор нормалі до S_ε .

Твердження 4.2.9

Для $x \neq 0$

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = 0. \quad (4.2.18)$$

Доведення. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\frac{x_i}{|x|^2}, \quad (4.2.19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}, \quad (4.2.20)$$

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4} \right) = 0. \quad (4.2.21)$$

□

Таким чином, перший інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по сфері S_R для великого значення R теж дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції φ .

Зауваження 4.2.10 — Справді, цей інтеграл позначає потік поля $\vec{\varphi}$ через S_R , але $\text{supp } \varphi \subset U_R$, тобто поза $U_{R-\varepsilon}$ для якогось (нового) малого ε поле $\vec{\varphi}$ не діє, а тому його потік дорівнює нулеві.

Обчислимо граничні значення поверхневих інтегралів по сфері S_ε :

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) dS = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta)}{\partial n} d\theta - \int_0^{2\pi} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta \right). \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Зауваження 4.2.11 — При обчисленні останнього інтегралу враховано, що

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|x|} \Big|_{x \in S_\varepsilon} = - \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{r} \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.2.23)$$

Множник ε під знаком інтегралу з'являється як якобіан переходу до полярної системи координат.

Враховуючи неперервну диференційовність функції φ , здійснюючи граничний перехід при $\varepsilon \rightarrow 0$, отримаємо, що перший інтеграл прямує до нуля, а другий до значення $-\varphi(0, 0)$. \square

4.2.2 Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца

Розглянемо тривимірний оператор Гельмгольца:

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \quad (4.2.24)$$

Теорема 4.2.12 (про фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца)

Для тривимірного оператора Гельмгольца функція

$$q_{\pm}^k(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \quad (4.2.25)$$

є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція диференціальному рівнянню:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 q_{\pm}^k(x)}{\partial x_i^2} + k^2 q_{\pm}^k(x) = -\delta(x). \quad (4.2.26)$$

Зауваження 4.2.13 — Останнє рівняння треба розуміти як

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} q_{\pm}^k(x) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x) dx = -\varphi(0) \quad (4.2.27)$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останньої рівності:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} q_{\pm}^k(x) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x) dx &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{U_R \setminus U_{\varepsilon}} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) q_{\pm}^k(x) \varphi(x) dx = \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Обчислимо кожний з інтегралів.

Твердження 4.2.14

Для $x \neq 0$

$$\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) q_{\pm}^k(x) = 0. \quad (4.2.29)$$

Доведення. Дійсно, для обчислення другої похідної можна скористатися

формулою

$$\frac{\partial^2 q_{\pm}^k(x)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial |x|^2} \left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \right) \left(\frac{\partial |x|}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial |x|} \left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \right) \left(\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_j^2} \right). \quad (4.2.30)$$

У ній по-перше

$$\frac{\partial^2}{\partial |x|^2} \left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \right) = -\frac{e^{\pm ik|x|}(k^2|x|^2 \pm 2ik|x| - 2)}{4\pi|x|^3}, \quad (4.2.31)$$

і

$$\left(\frac{\partial |x|}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{x_j^2}{|x|^2}, \quad (4.2.32)$$

а також

$$\frac{\partial}{\partial |x|} \left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \right) \left(\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_j^2} \right) = \frac{e^{\pm ik|x|}(\pm ik|x| - 1)}{4\pi|x|^5}(|x|^2 - x_j^2). \quad (4.2.33)$$

Після підстановки та приведення подібних отримаємо

$$\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) q_{\pm}^k(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|^3} \left(-k^2|x|^2 \right) + k^2 \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} = 0. \quad (4.2.34)$$

□

Інтеграл по сфері великого радіусу S_R дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції:

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\varepsilon}} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} q_{\pm}^k(x) dS &= \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2} \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi(\varepsilon \cos \psi \cos \theta, \varepsilon \sin \psi \cos \theta, \varepsilon \sin \theta)}{\partial n} d\psi d\theta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Обчислимо останній поверхневий інтеграл

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\varepsilon}} \frac{\partial q_{\pm}^k(x)}{\partial n} \varphi(x) dS &= \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{S_{\varepsilon}} \varphi(x) dS = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2} \\ &\cdot \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 \sin \theta \cdot \varphi(\varepsilon \cos \psi \cos \theta, \varepsilon \sin \psi \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\psi d\theta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\varphi(0). \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

□

Зауваження 4.2.15 — З формули для $q_{\pm}^k(x)$ легко отримати фундаментальний розв'язок для тривимірного оператора Лапласа, тобто показати, що функція

$$\frac{1}{4\pi|x|} \quad (4.2.37)$$

задовольняє наступному рівнянню:

$$\Delta_3 \frac{1}{4\pi|x|} = -\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (4.2.38)$$

Зауваження 4.2.16 — Формально формулу $1/4\pi|x|$ можна отримати з $q_{\pm}^k(x)$ при $k = 0$.

4.2.3 Фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца

Теорема 4.2.17 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца)

Функція

$$q^k(x) = \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|), \quad (4.2.39)$$

де $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ є фундаментальним розв'язком двовимірного оператора Гельмгольца, тобто задовольняє співвідношенню:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} q^k(x) \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x) dx = \varphi(0). \quad (4.2.40)$$

Зауваження 4.2.18 — У формулі для $q^k(x)$ функція $K_{\nu}(x)$ — функція Бесселя другого роду уявного аргументу ν -порядку і є одним з двох лінійно-незалежних розв'язків лінійного диференціального рівняння Бесселя уявного аргументу:

$$x^2 Y'' + x Y' - (x^2 + \nu^2) Y = 0. \quad (4.2.41)$$

Доведення. Аналогічне доведенню співвідношення для двовимірного оператора Лапласа.

Твердження 4.2.19

Для $x \neq 0$

$$\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) = 0. \quad (4.2.42)$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-k^2 K_0''(-ik|x|) \frac{x_j^2}{|x|^2} - ik K_0'(-ik|x|) \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3} \right). \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-k^2 K_0''(-ik|x|) - ik K_0'(-ik|x|) \frac{1}{|x|} + k^2 K_0(ik|x|) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

□

Зауваження 4.2.20 — Остання рівність стає очевидною якщо помножити останнє рівняння на $|x|^2$ та ввести нову незалежну змінну $\xi = -ik|x|$.

Зауваження 4.2.21 — При доведенні необхідної рівності важливим є також характер поведінки фундаментального розв'язку і його першої похідної в околі точки $x = 0$.

Відомо, що

$$K_0(ix) \sim \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \quad (4.2.45)$$

$$K_0'(ix) \sim -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|}, \quad (4.2.46)$$

при $x \rightarrow +0$.

□

4.2.4 Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності

Теорема 4.2.22 (про фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності)

Фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності є

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \cdot \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.2.47)$$

Зауваження 4.2.23 — Це означає, що узагальнена функція $\varepsilon(x, t)$ задовольняє інтегральній тотожності:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x, t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) dx dt = -\varphi(0, 0) \quad (4.2.48)$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Доведення. Очевидно, що $\varepsilon(x, t) \in C^\infty(t > 0)$.

Твердження 4.2.24

Ця функція задовольняє рівняння теплопровідності:

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.2.49)$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2 t^2} - \frac{n}{2t} \right) \varepsilon, \quad (4.2.50)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2a^2 t} \varepsilon, \quad (4.2.51)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i^2}{4a^2 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right) \varepsilon. \quad (4.2.52)$$

Підставляючи знайдені похідні в оператор теплопровідності встановимо справедливість співвідношення. \square

Повертаємося до доведення інтегральної тотожності:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{\mathbb{R}^n} \varepsilon(x, t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) dx dt = \\
& = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\tau}^{\infty} \iiint_{U_R} \varepsilon(x, t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi \right) dx dt = \\
& = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left(\int_{\tau}^{\infty} \iiint_{U_R} \varphi(x, t) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2 \Delta \varepsilon \right) dx dt + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\tau}^{\infty} \iint_{S_R} a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \varphi \right) dS_r dt + \iiint_{U_R} \varepsilon \varphi|_{\tau}^{\infty} dx \right) = \\
& = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \iiint_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, \tau) \varepsilon(x, \tau) dx \quad (4.2.53)
\end{aligned}$$

Можна показати, що

$$\iiint_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 t} \right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^n} dx = 1, \quad t > 0. \quad (4.2.54)$$

Твердження 4.2.25

$$\frac{\exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 \tau} \right\}}{(2a\sqrt{\pi \tau})^n} \xrightarrow[\tau \rightarrow +0]{w.} \delta(x). \quad (4.2.55)$$

Доведення. Дійсно

$$\begin{aligned}
& \left| \iiint_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 \tau} \right\}}{(2a\sqrt{\pi \tau})^2} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| \leq \\
& \leq \frac{K}{(2a\sqrt{\pi \tau})^n} \iiint_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 \tau} \right\} |x| dx = A, \quad (4.2.56)
\end{aligned}$$

де $K = \max_x |\varphi'(x)|$.

□

Для обчислення останнього інтегралу перейдемо до узагальненої сферичної системи координат та введемо нову змінну: $\xi = r/2a\sqrt{\tau}$:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{K\sigma_n}{(2a\sqrt{\pi\tau})^n} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2\tau}\right\} r^n dr = \\
&= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{R/2a\sqrt{\tau}} e^{-\xi^2} \xi^n d\xi = \\
&= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^n d\xi = \\
&= O(\sqrt{\tau}) \xrightarrow{\tau \rightarrow +0} 0.
\end{aligned} \tag{4.2.57}$$

□

4.2.5 Фундаментальний розв'язок хвильового оператора

Теорема 4.2.26 (про фундаментальний розв'язок одновимірного хвильового оператора)

Узагальнена функція

$$\psi_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) \tag{4.2.58}$$

є фундаментальним розв'язком одновимірного хвильового оператора, тобто задовольняє інтегральному співвідношенню:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) dx dt = -\varphi(0, 0) \tag{4.2.59}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останнього виразу:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) dx dt = \\
&= -\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|x|/a}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx + \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \int_{-at}^{at} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi(x, |x|/a)}{\partial t} dx + \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x} \right) dt = \\
&= \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(x, |x|/a)}{\partial t} dx + \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(-x, |x|/a)}{\partial t} dx + \\
&\quad + \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial x} \right) dt = (\star) \quad (4.2.60)
\end{aligned}$$

Зауваження 4.2.27 — Зрозуміло, що третій інтеграл $= 0$, адже ми інтегруємо частинну похідну функції що не залежить від змінної x по змінній x , тобто підінтегральна функція дорівнює нулеві.

В першому та другому інтегралах введемо нову змінну $x = at$, отримаємо

$$\begin{aligned}
(\star) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(at, t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(-at, t)}{\partial t} dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(at, t)}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(-at, t)}{dt} dt = \quad (4.2.61) \\
&= -\frac{\varphi(0, 0)}{2} - \frac{\varphi(0, 0)}{2} = -\varphi(0, 0).
\end{aligned}$$

Зауваження 4.2.28 — Тут ми вкотре скористалися скінченністю носія φ (фінітністю пробної функції):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\varphi(at, t)}{dt} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\varphi(at, t) = \\
&= \frac{\varphi(at, t)}{2} \Big|_0^{\infty} = \quad (4.2.62) \\
&= \frac{\varphi(a \cdot \infty, \infty) - \varphi(a \cdot 0, 0)}{2} = \\
&= \frac{0 - \varphi(0, 0)}{2} = -\frac{\varphi(0, 0)}{2}.
\end{aligned}$$

□

Зауваження 4.2.29 — Без доведення наведемо вигляд фундаментального розв’язку для двовимірного та тривимірного хвильового оператора.

$$\psi_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (4.2.63)$$

$$\psi_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (4.2.64)$$