Зміст

3.2 Математичні моделі теорії пружності

Відомо, що в природі існують пружні тіла, які можуть змінювати свою форму під дією прикладеної сили, а після припинення дії зовнішньої сили приймати початкову форму. Зовнішня сила викликає в пружних тілах:

- деформації;
- напруження.

> **Визначення 3.2.1** (деформації)**.** *Деформацією* називають зміну положення одних точок тіла відносно інших.

> **Визначення 3.2.2** (напружень)**.** *Напруженнями* називають внутрішні сили, які прагнуть повернути тіло в положення рівноваги.

> **Визначення 3.2.3** (математичної моделі теорії пружності)**.** *Математична модель теорії пружності* — це система диференціальних рівнянь, які описують кількісний зв'язок між зміною форми тіла (деформаціями) і внутрішніми зусиллями (напруженнями).

Введемо позначення:

- x, y, z — координати точки у просторі;
- $U(x, y, z, t)$, $V(x, y, z, t)$, $W(x, y, z, t)$ — координати *вектора зміщень* в напрямку вісей Ox, Oy, Oz відповідно.

  > **Зауваження 3.2.4** — *Вектор зміщень* показує зміщення точки тіла з координатами x, y, z в напрямку однієї з координа-

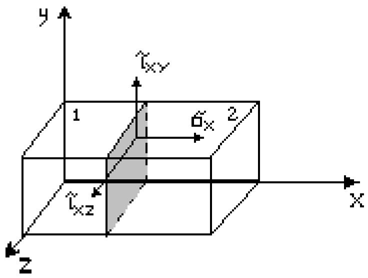
тних вісей в момент часу t від положення рівноваги.

- $F_x(x, y, z, t)$, $F_y(x, y, z, t)$, $F_z(x, y, z, t)$ — компоненти *вектора поверхневих сил* в напрямку вісей Ox, Oy, Oz відповідно.

  Зауваження 3.2.5 — *Вектор поверхневих сил* показує які сили діють на поверхню тіла.

- $X(x, y, z, t)$, $Y(x, y, z, t)$, $Z(x, y, z, t)$ — вектори *об'ємних сил*;
- $\mathrm{d}G$ — елемент об'єму; $\mathrm{d}S$ — елемент поверхні.

Розглянемо просту фізичну модель взаємодії між собою двох частин пружного тіла. Нехай прямокутний паралелепіпед з нескінченно малим поперечним перерізом $\mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$ витягнутий вздовж вісі x та умовно розділений на дві частини площиною ортогональною вісі x:



Охарактеризуємо силу з якою правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед через переріз $\mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$ в площині yOz (на рис. площина взаємодії виділена сірим кольором).

Нехай $\mathbf{t}^{(x)} = (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ — *вектор сили.*

Визначення 3.2.6 (вектора сили)**.** *Вектор сили* показує, з якою силою (на одиницю поверхні) правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед.

Зауваження 3.2.7 — При цьому σ_x — компонента, що може стискати, або розтягувати лівий паралелепіпед, τ_{xy}, τ_{xz} — компоненти, що зрізають (точне визначення цього поняття буде надано далі) паралелепіпед в напрямках вісей Oy та Oz відповідно.

Аналогічно, для паралелепіпедів витягнутих вздовж вісей Oy та Oz можна розглянути сили, яки діють в двох інших площинах xOz та xOy на одиницю площі цих перерізів та охарактеризувати їх векторами:

$$\mathbf{t}^{(y)} = (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}) , \tag{3.2.1}$$

$$\mathbf{t}^{(z)} = (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z) . \tag{3.2.2}$$

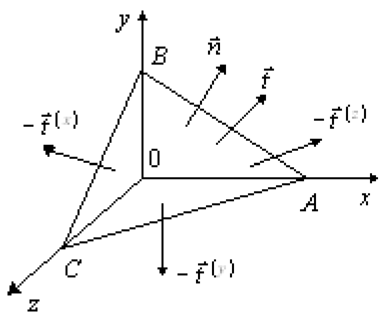
Для будь-якого паралелепіпеда з довжиною ребер $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ а тим самим точки простору напружений стан тіла можна охарактеризувати матрицею

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

Зауваження 3.2.8 — При розгляді моделі взаємодії правого паралелепіпеда та лівого паралелепіпеда через спільний переріз має місце принцип рівнодії та протидії, тобто сила, з якою правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед рівна за величиною та протилежна за напрямком силі з якою лівий паралелепіпед діє на правий паралелепіпед. Сили, що діють на тіло обираються зі знаком плюс, якщо вони діють на переріз, який обмежує тіло з боку зростання значення координатної вісей і зі знаком мінус, якщо вони діють на поверхню, що обмежує тіло з боку спадання значень координатних вісей.

3.2.1 Закони рівноваги елемента поверхні

Розглянемо елементарну модель пружної взаємодії. Нехай всередині пружного тіла ми виділили нескінченно малий тетраедр $OABC$, $\vec{n}$ — вектор зовнішньої нормалі до грані ABC, а S — площа цієї грані:



Нехай $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ — вектор поверхневої сили, що діє на одиницю площі грані ABC.

Вектор нормалі

$$\vec{\mathbf{n}} = \big(\cos(\vec{n}, x), \cos(\vec{n}, y), \cos(\vec{n}, z)\big), \tag{3.2.4}$$

а

$$S \cdot \cos(\vec{n}, x), \quad S \cdot \cos(\vec{n}, y), \quad S \cdot \cos(\vec{n}, z) \tag{3.2.5}$$

— площі граней тетраедра, ортогональних вісям Ox, Oy, Oz.

Якщо тетраедр знаходиться в стані спокою, або рівномірного прямолінійного руху, то рівнодіюча сил, що діють на всі чотири грані дорівнює нулю, тобто:

$$\vec{f} \cdot S - \mathbf{t}^{(x)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, x) - \mathbf{t}^{(y)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, y) - \mathbf{t}^{(z)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, z) = 0. \tag{3.2.6}$$

Після скорочення на S отримаємо

Теорема 3.2.9 (векторна форма закону рівноваги елемента поверхні) Виконується співвідношення:

$$\vec{f} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\vec{n}, z). \tag{3.2.7}$$

Запишемо закон рівноваги елемента поверхні в скалярному вигляді:

$$\sigma_x \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_x, \tag{3.2.8}$$
$$\tau_{yx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_y, \tag{3.2.9}$$
$$\tau_{zx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_z. \tag{3.2.10}$$

У випадку, коли елементарний трикутник ABC є частиною реальної зовнішньої поверхні тіла, то закон рівноваги елемента поверхні приймає вигляд:

$$\sigma_x \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_x, \tag{3.2.11}$$
$$\tau_{yx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_y, \tag{3.2.12}$$
$$\tau_{zx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_z, \tag{3.2.13}$$

де (F_x, F_y, F_z) — вектор поверхневих сил.

3.2.2 Закон рівноваги елемента об'єму

Розглянемо будь-який об'єм G та його елементарний об'єм $\mathrm{d}G$.

Об'ємні сили, що діють на тіло об'єму G можна обчислити у вигляді

$$\iiint\limits_G \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mathrm{d}G. \tag{3.2.14}$$

Через будь-яку елементарну поверхню тіла діє поверхнева сила $\vec{f} \cdot \mathrm{d}S$, а результуюча поверхнева сила, яка діє на тіло через усю поверхню S, що обмежує тіло має вигляд

$$\iint\limits_S \vec{f}\,\mathrm{d}S, \tag{3.2.15}$$

або, в скалярному вигляді:

$$\iint\limits_S (\mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\vec{n}, z))\,\mathrm{d}S. \tag{3.2.16}$$

Теорема 3.2.10 (векторний запис закону рівноваги елементу об'єму)
Для того щоб тіло знаходилося в стані спокою або рухалось рівномірно і прямолінійно, рівнодіюча об'ємної та поверхневої сил повинна дорівнювати нулю:

$$\iint\limits_S \left(\mathbf{t}^{(x)} \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cos(\vec{n}, z)\right) \mathrm{d}S + \\ + \iiint\limits_G \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mathrm{d}G = 0. \tag{3.2.17}$$

Теорема 3.2.11 (скалярний запис закону рівноваги елементу об'єму)

$$\begin{cases} \iint\limits_S (\sigma_x \cos(\vec{n},x) + \tau_{yx}\cos(\vec{n},y) + \tau_{zx}\cos(\vec{n},z))\,\mathrm{d}S + \iiint\limits_G X\,\mathrm{d}G = 0, \\ \iint\limits_S (\tau_{xy} \cos(\vec{n},x) + \sigma_{y}\cos(\vec{n},y) + \tau_{zy}\cos(\vec{n},z))\,\mathrm{d}S + \iiint\limits_G Y\,\mathrm{d}G = 0, \\ \iint\limits_S (\tau_{xz} \cos(\vec{n},x) + \tau_{yz}\cos(\vec{n},y) + \sigma_{z}\cos(\vec{n},z))\,\mathrm{d}S + \iiint\limits_G Z\,\mathrm{d}G = 0. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

Зауваження 3.2.12 — Додатковою умовою рівноважного положення тіла окрім закону рівноваги елементу об'єму є виконання закону збереження моментів сил з якого випливає симетричність матриці (3.2.3):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \tag{3.2.19}$$

Враховуючи факт симетрії, останній закон можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \iint\limits_S \big(\mathbf{t}^{(x)}, \vec{n}\big)\,\mathrm{d}S + \iiint\limits_G X\,\mathrm{d}G = 0, \\ \iint\limits_S \big(\mathbf{t}^{(y)}, \vec{n}\big)\,\mathrm{d}S + \iiint\limits_G Y\,\mathrm{d}G = 0, \\ \iint\limits_S \big(\mathbf{t}^{(z)}, \vec{n}\big)\,\mathrm{d}S + \iiint\limits_G Z\,\mathrm{d}G = 0. \end{cases} \tag{3.2.20}$$

де

$$\vec{\mathbf{n}} = \big(\cos(\vec{n},x), \cos(\vec{n},y), \cos(\vec{n},z)\big) \tag{3.2.21}$$

— вектор зовнішньої нормалі до поверхні.

Враховуючи формулу Остроградського-Гауса, кожен поверхневий інтеграл перетворимо в об'ємний, в результаті отримаємо

Теорема 3.2.13 (диференціальна форма запису закону рівноваги елементу об'єму)

Виконуються співвідношення:

$$\begin{cases} \iiint\limits_G \left(\nabla \cdot \mathbf{t}^{(x)} + X\right) \mathrm{d}G = 0, \\ \iiint\limits_G \left(\nabla \cdot \mathbf{t}^{(y)} + Y\right) \mathrm{d}G = 0, \\ \iiint\limits_G \left(\nabla \cdot \mathbf{t}^{(z)} + Z\right) \mathrm{d}G = 0. \end{cases} \tag{3.2.22}$$

Визначення 3.2.14 (тензора напружень)**.** В подальшому симетричну матрицю (3.2.3) будемо називати *тензором напружень.*

3.2.3 Тензор напружень, головні вісі тензора напружень

Позначимо через $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ орти прямокутної система координат з координатними осями Ox, Oy, Oz.

Введемо нову систему координат з ортами $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ та осями $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

З'ясуємо, яким чином пов'язані вектори $\mathbf{t}^{(x)}$, $\mathbf{t}^{(y)}$, $\mathbf{t}^{(z)}$ які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у системі координат x, y, z, з векторами $\mathbf{t}^{(\xi)}$, $\mathbf{t}^{(\eta)}$, $\mathbf{t}^{(\zeta)}$ які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у новій системі координат ξ, η, ζ.

Згідно до загальних формул переходу від одного ортогонального базису до іншого, можна записати:

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{(\xi)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\xi, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\xi, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\xi, z), \\ \mathbf{t}^{(\eta)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\eta, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\eta, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\eta, z), \\ \mathbf{t}^{(\zeta)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\zeta, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\zeta, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\zeta, z). \end{cases} \tag{3.2.23}$$

Координати ортів нової системи координат мають значення:

$$\mathbf{e}_\xi = \big(\cos(\xi, x), \cos(\xi, y), \cos(\xi, z)\big), \tag{3.2.24}$$

$$\mathbf{e}_\eta = \big(\cos(\eta, x), \cos(\eta, y), \cos(\eta, z)\big), \tag{3.2.25}$$

$$\mathbf{e}_\zeta = \big(\cos(\zeta, x), \cos(\zeta, y), \cos(\zeta, z)\big). \tag{3.2.26}$$

Для знаходження будь-якої компоненти тензора напружень $\tau_{\alpha\beta}$, необхідно обчислити скалярний добуток

$$\tau_{\alpha\beta} = \left\langle \mathbf{t}^{(\alpha)}, \mathbf{e}_\beta \right\rangle. \tag{3.2.27}$$

Так, наприклад,

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\eta} = {} & \big(\sigma_x \cos(\eta, x) + \tau_{xy}\cos(\eta, y) + \tau_{xz}\cos(\eta, z)\big)\cdot\cos(\xi, x) + \\ & + \big(\tau_{yx}\cos(\eta, x) + \sigma_y \cos(\eta, y) + \tau_{yz}\cos(\eta, z)\big)\cdot\cos(\xi, y) + \\ & + \big(\tau_{zx}\cos(\eta, x) + \tau_{zy}\cos(\eta, y) + \sigma_z \cos(\eta, z)\big)\cdot\cos(\xi, z) = \\ = {} & \sum_{a,b\in\{x,y,z\}} \tau_{ab}\cos(\xi, a)\cos(\eta, b).\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Отже, для довільної компоненти тензора напружень має місце

Теорема 3.2.15 (формула переходу до нової системи координат) Виконуються співвідношення вигляду

$$\tau_{\alpha\beta} = \sum_{a,b\in\{x,y,z\}} \tau_{ab}\cos(\alpha, a)\cos(\beta, b). \tag{3.2.29}$$

Зауваження 3.2.16 — Тут використані позначення $\tau_{\alpha\alpha} = \sigma_\alpha$, $\tau_{aa} = \sigma_a$.

Таким чином, тензор напружень — це симетрична матриця

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \tag{3.2.30}$$

компоненти якої перетворюються за формулою вище при переході до нової прямокутної системи координат.

Поставимо задачу вибору нової прямокутної системи координат, для якої тензор напружень має діагональну форму. Нехай $\mathbf{e}_{v_i}$, $i = 1, 2, 3$ — орти нової прямокутної системи координат. Для того, щоб тензор T мав діагональну форму запису, кожен вектор $\mathbf{t}^{(v_i)}$, $i = 1, 2, 3$ в новій системі координат повинен бути колінеарним відповідному орту $\mathbf{e}_{v_i}$, $i = 1, 2, 3$ тобто $\mathbf{t}^{(v_i)} = \sigma_i \vec{v}_i$.

Скористаємось формулою переходу від однієї до іншої системи координат та запишемо співвідношення для пошуку ортів:

$$\mathbf{t}^{(v)} = \sigma \mathbf{e}_v = \sigma\big(\cos(v,x), \cos(v,y), \cos(v,z)\big). \tag{3.2.31}$$

Запишемо останнє співвідношення в координатному вигляді:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(v,x) + \tau_{xy}\cos(v,y) + \tau_{xz}\cos(v,z) = \sigma\cos(v,x), \\ \tau_{yx}\cos(v,x) + \sigma_y\cos(v,y) + \tau_{yz}\cos(v,z) = \sigma\cos(v,y), \\ \tau_{zx}\cos(v,x) + \tau_{zy}\cos(v,y) + \sigma_z\cos(v,z) = \sigma\cos(v,z). \end{cases} \tag{3.2.32}$$

Для ортонормованого базису

$$\cos^2(v,x) + \cos^2(v,y) + \cos^2(v,z) = 1. \tag{3.2.33}$$

Тому в матрично-векторній формі попередні співвідношення мають вигляд

$$T\mathbf{e}_v = \sigma\mathbf{e}_v. \tag{3.2.34}$$

Ця задача на власні значення з симетричною матрицею має три дійсних власних числа, позначимо їх σ_1, σ_2, σ_3 тобто

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma), \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2.35}$$

і три ортонормовані власні вектори

$$\mathbf{e}_{v_i} = \big(\cos(v_i,x), \cos(v_i,y), \cos(v_i,z)\big), \quad i = 1,2,3. \tag{3.2.36}$$

Визначення 3.2.17 (головних вісей тензора напружень)**.** Координатні вісі, для яких тензор напружень має діагональний вигляд, називаються *головними вісями тензора напружень*.

Визначення 3.2.18 (головних компонент тензора напружень)**.** Відповідні діагональні компоненти тензора напружень σ_i, $i = 1,2,3$ називаються *головними компонентами тензора напружень*.

Використовуючи формулу переходу між системами координат, запишемо зв'язок між компонентами тензора напружень в декартових координатах x, y, z і головними компонентами тензора напружень:

$$\tau_{ab} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \cos(v_i, a)\cos(v_i b), \tag{3.2.37}$$

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \cos^2(v_i, a), \tag{3.2.38}$$

де $x, b \in \{x, y, z\}$.

3.2.4 Тензор деформацій і закони його перетворення

Раніше були введені характеристики:

$$U(x, y, z, t), \quad V(x, y, z, t), \quad W(x, y, z, t) \tag{3.2.39}$$

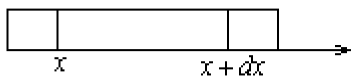
— зміщення точки з координатами (x, y, z) від положення рівноваги в напрямку відповідної вісі.

Розглянемо можливі види деформації.

1. Нормальні деформації.

   Визначення 3.2.19 (нормальних деформацій)**.** *Нормальні деформації* — зміна довжини в напрямку координатної вісі — характеризуються відносною зміною довжини відрізків.

   Приклавши силу в напрямку вісі Ox, точка x змістилася і зайняла положення $x + U(x, \cdot, \cdot)$; точка $x + \mathrm{d}x$ теж змістилася і зайняла положення $(x + \mathrm{d}x) + U(x + \mathrm{d}x, \cdot, \cdot)$:

   Порахуємо відносне подовження відрізка $\mathrm{d}x$ після прикладення до нього напруження:

$$\frac{(x + \mathrm{d}x) + U(x + \mathrm{d}x, \cdot, \cdot) - x - U(x, \cdot, \cdot) - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \\ = \frac{U(x + \mathrm{d}x, \cdot, \cdot) - U(x, \cdot, \cdot)}{\mathrm{d}x} \xrightarrow[\mathrm{d}x \to 0]{} \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{3.2.40}$$

   Аналогічно, можна ввести характеристику відносного подовження в напрямку двох інших вісей.

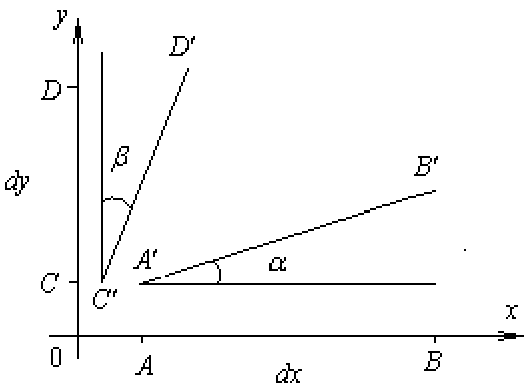
   Отже, нормальні деформації характеризуються частинними похідними

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z}. \tag{3.2.41}$$

2. Зрізаючі (дотичні) деформації.

> **Визначення 3.2.20** (зрізаючих (дотичних) деформацій)**.** *Зрізаючі (дотичні) деформації* будемо характеризувати абсолютною зміною кутів між відрізками в кожній з трьох координатних площин, які до початку дії напружень були ортогональними.

Розглянемо фізичну модель. Нехай відрізки AB та CD довжини $\mathrm{d}x$ та $\mathrm{d}y$ відповідно після дії прикладених сил зайняли положення $A'B'$ та $C'D'$ відповідно:



Точка A змістилася на відстань $V(x, \cdot, \cdot)$, а точка B змістилася на відстань $V(x + \mathrm{d}x, \cdot, \cdot)$.

Тоді

$$\frac{V(x + \mathrm{d}x, \cdot, \cdot) - V(x, \cdot, \cdot)}{\mathrm{d}x} = \tan\alpha \xrightarrow[\mathrm{d}x \to 0]{} \frac{\partial V}{\partial x}, \tag{3.2.42}$$

тому

$$\alpha \approx \tan\alpha = \partial V / \partial x. \tag{3.2.43}$$

Аналогічно $\beta \approx \partial U / \partial y$.

Сумарна зміна кута

$$\alpha + \beta \approx \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{3.2.44}$$

Позначимо

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma_{yx}. \tag{3.2.45}$$

Провівши аналогічні міркування щодо інших координатних площин отримаємо:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma_{zx}, \tag{3.2.46}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma_{zy}. \tag{3.2.47}$$

Позначимо також

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{3.2.48}$$

і $\gamma_{aa} = 2\varepsilon_a$.

В результаті повну деформацію у будь-якій точці простору можна охарактеризувати

Визначення 3.2.21 (тензора деформацій)**.** Симетрична матриця

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{3.2.49}$$

називається симетричним *тензором деформацій.*

3.2.5 Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат

Вивчимо перетворення симетричного тензору деформацій при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої. Нехай $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ — вісі нової системи координат (замість Ox, Oy, Oz), а функції U', V', W' — зміщення в напряму нових вісей.

Враховуючи формули переходу від одного ортогонального базису до іншого можемо записати:

$$\begin{cases} U' = U\cos(\xi, x) + V\cos(\xi, y) + W\cos(\xi, z), \\ V' = U\cos(\eta, x) + V\cos(\eta, y) + W\cos(\eta, z), \\ W' = U\cos(\zeta, x) + V\cos(\zeta, y) + W\cos(\zeta, z), \end{cases} \tag{3.2.50}$$

а також

$$\begin{cases} x = \xi\cos(\xi, x) + \eta\cos(\eta, x) + \zeta\cos(\zeta, x), \\ y = \xi\cos(\xi, y) + \eta\cos(\eta, y) + \zeta\cos(\zeta, y), \\ z = \xi\cos(\xi, z) + \eta\cos(\eta, z) + \zeta\cos(\zeta, z), \end{cases} \tag{3.2.51}$$

і

$$\begin{cases} \xi = x\cos(\xi,x) + y\cos(\xi,y) + z\cos(\xi,z), \\ \eta = x\cos(\eta,x) + y\cos(\eta,y) + z\cos(\eta,z), \\ \zeta = x\cos(\zeta,x) + y\cos(\zeta,y) + z\cos(\zeta,z). \end{cases} \tag{3.2.52}$$

У цих формулах

$$\big(\cos(\alpha,x), \cos(\alpha,y), \cos(\alpha,z)\big) = \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha \in \{\xi,\eta,\zeta\}. \tag{3.2.53}$$

— координати ортів нового базису.

Знайдемо вирази для компонентів тензору у новій системі координатах: ε_α, $\gamma_{\alpha,\beta}$ при $\alpha,\beta \in \{\xi,\eta,\zeta\}$.

Зокрема для ε_ξ отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi = \frac{\partial U'}{\partial x} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\cos(\xi,x) + \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\cos(\xi,y) + \\ &+ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\cos(\xi,z) = \\ &= \cos(\xi,x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos(\xi,x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(\xi,y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(\xi,z)\right) + \\ &+ \cos(\xi,y)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos(\xi,x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(\xi,y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(\xi,z)\right) + \\ &+ \cos(\xi,z)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\cos(\xi,x) + \frac{\partial W}{\partial y}\cos(\xi,y) + \frac{\partial W}{\partial z}\cos(\xi,z)\right). \end{aligned} \tag{3.2.54}$$

Розкриваючи дужки і використовуючи відповідні позначення отримаємо наступну формулу:

$$\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_\xi = \sum_{a,b\in\{x,y,z\}} \gamma_{ab}\cos(\xi,a)\cos(\xi b). \tag{3.2.55}$$

Отже у загальному вигляді доведена

Теорема 3.2.22 (формула перетворення тензора деформацій)

Виконуються співвідношення вигляду:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{a,b\in\{x,y,z\}} \gamma_{ab}\cos(\alpha,a)\cos(\beta b), \tag{3.2.56}$$

де $\alpha,\beta \in \{\xi,\eta,\zeta\}$.