Лекція 4

Характеристичні числа ермітового неперервного ядра

[1, стор. 304 - 306]

<u>Теорема 1</u> (*Про існування характеристичного числа у ермітового неперервного ядра*). Для будь-якого ермітового неперервного ядра, що не дорівнює тотожно нулю існує принаймні одне характеристичне число і найменше з них за модулем λ_1 задовольняє варіаційному принципу $\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup\limits_{f \in L_2(G)} \frac{\|\mathrm{K} f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}}$ (3.2).

Доведення:

Серед усіх $f \in L_2$ оберемо такі, що $\|f\|_{L_2(G)} = 1$. Позначимо $v = \sup\limits_{\substack{f \in L_2(G) \\ \|f\|_{L_2} = 1}} \|\mathrm{K} f\|_{L_2(G)}$.

Оскільки $\|\mathrm{K} f\|_{L_2(G)} \le MV \|f\|_{L_2(G)} \le MV$, то $0 \le v \le MV$.

Згідно до визначення точної верхньої межі, $\exists \ \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(G)$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathrm{K} f_k\|_{L_2(G)} = v$.

Оцінимо $\|\mathbf{K}^2 f\|_{L_2(G)} = \|\mathbf{K}\ (\ \mathbf{K} f)\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}\left(\frac{\mathbf{K} f}{\|\mathbf{K} f\|}\right)\right\|_{L_2(G)} \|\mathbf{K} f\|_{L_2(G)} \le v \|\mathbf{K} f\|_{L_2(G)} \le v^2$.

Покажемо, що $\mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k \to 0$ в середньому квадратичному. Тобто $\|\mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Дійсно:

$$\|\mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 = \left(\mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k, \mathrm{K}^2 f_k - v^2 f_k\right)_{L_2(G)} = \|\mathrm{K}^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 + v^4 - v^2(\mathrm{K}^2 f_k, f_k) -$$

$$-v^2(f_k, \mathrm{K}^2 f_k) = \|\mathrm{K}^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 + v^4 - 2v^2 \|\mathrm{K} f_k\|_{L_2(G)}^2 \le v^2(v^2 - \|\mathrm{K} f_k\|_{L_2(G)}^2) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Розглянемо послідовність $\{\mathrm{K} f_k\} = \{\varphi_k\}$, яка є компактною в рівномірній метриці.

Звідси підпослідовність $\left\{\varphi_{k_i}\right\}_{i=1,\infty}$ збіжна в $C(\overline{G})$, тобто $\exists\varphi\in C(\overline{G})$, така що

$\left\|\varphi_{k_i}-\varphi\right\|_{C(\overline{G})}\xrightarrow[i\to\infty]{}0$.

Покажемо, що $\mathrm{K}^2\varphi-v^2\varphi=0$ в кожній точці, тобто $\left\|\mathbf{K}^2\varphi-v^2\varphi\right\|_{C(\overline{G})}=0$.

$$\left\|\mathrm{K}^2\varphi-v^2\varphi\right\|_{C(\overline{G})}=\left\|\mathrm{K}^2\varphi-v^2\varphi+\mathrm{K}^2\varphi_{k_i}-\mathrm{K}^2\varphi_{k_i}+v^2\varphi_{k_i}-v^2\varphi_{k_i}\right\|_{C(\overline{G})}\le$$
$$\le\left\|\mathrm{K}^2\varphi-\mathrm{K}^2\varphi_{k_i}\right\|_{C(\overline{G})}+\left\|\mathrm{K}^2\varphi_{k_i}-v^2\varphi_{k_i}\right\|_{C(\overline{G})}+\left\|v^2\varphi_{k_i}-v^2\varphi\right\|_{C(\overline{G})}\le$$
$$\le(MV)^2\left\|\varphi_{k_i}-\varphi\right\|_{C(\overline{G})}+v^2\left\|\varphi_{k_i}-\varphi\right\|_{C(\overline{G})}+M\sqrt{V}\left\|\mathrm{K}^2 f_{k_i}-v^2 f_{k_i}\right\|_{L_2(G)}\to 0+0+0$$

Таким чином має місце рівність $\mathrm{K}^2\varphi-v^2\varphi=0$ (3.3).

Отже маємо: $(\mathrm{K}+\mathrm{E}v)(\mathrm{K}-\mathrm{E}v)\varphi=0$. Ця рівність може мати місце у двох випадках:

1) $(\mathrm{K}-\mathrm{E}v)\varphi\equiv0$. Тоді $\varphi=\frac{1}{v}\mathrm{K}\varphi$, а отже φ - власна функція, $\frac{1}{v}$ - характеристичне число оператора K.

2) $(\mathrm{K}-\mathrm{E}v)\varphi\equiv\Phi\ne0$. Тоді $(\mathrm{K}+\mathrm{E}v)\Phi\equiv0$. Тоді $\Phi=-\frac{1}{v}\mathrm{K}\Phi$, а отже Φ - власна функція, $-\frac{1}{v}$ - характеристичне число оператора K.

Залишилось довести, що це характеристичне число є мінімальним за модулем.

Припустимо супротивне:

Нехай $\exists\lambda_0:|\lambda_0|<|\lambda_1|$, тоді $\frac{1}{|\lambda_1|}=\sup\limits_{f\in L_2(G)}\frac{\|\mathrm{K}f\|}{\|f\|}\ge\frac{\|\mathrm{K}\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|}=\frac{1}{|\lambda_0|}$ => $|\lambda_0|\ge|\lambda_1|$.

Зауваження

Доведена теорема є вірною і для ермітових полярних ядер [1, стор. 307 - 308].

Звідси безпосередньо випливають такі властивості характеристичних чисел та власних функцій ермітового ядра:

1. Множина характеристичних чисел ермітового неперервного ядра не порожня, є підмножиною множини дійсних чисел і не має скінчених граничних точок.

2. Кратність будь-якого характеристичного числа скінчена.

3. Власні функції можна вибрати так, що вони утворять ортонормовану систему. Тобто $\{\varphi_k\}_{k=1,2,...}$ такі що $(\varphi_k,\varphi_i)_{L_2(G)}=\delta_{ki}$.

(Зокрема достатньо провести процес ортогоналізації Гілберта - Шмідта для будь-якої системи лінійно незалежних власних функцій, і пронормувати отриману систему).

§4. Теорема Гілберта - Шмідта та її наслідки

Білінійне розвинення ермітового неперервного ядра

[1, стор. 308 - 310]

Нехай $K(x,y)\in C(\overline{G}\times\overline{G})$ ермітове неперервне ядро, $|\lambda_i|\le|\lambda_{i+1}|, i=1,2,...$його характеристичні числа і $\{\varphi_i\}$, $i=1,\infty$ ортонормована система власних функцій, що відповідають власним числам.

Розглянемо послідовність ермітових неперервних ядер:

$$K^{(p)}(x,y)=K(x,y)-\sum_{i=1}^{p}\frac{\overline{\varphi_i}(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i},\ p=1,2,... \qquad (4.1).$$

$$K^{(p)}(x,y)=(K^{(p)})^*(x,y)\in C\left(\overline{G}\times\overline{G}\right)$$

Дослідимо властивості операторів (4.1).

Покажемо, що будь-яке характеристичне число $\lambda_j, j>p+1$ та відповідна йому власна функція φ_j є характеристичним числом і власною функцією ядра $K^p(x,y)$.

$$\mathbf{K}^{(p)}\varphi_j=\mathbf{K}\varphi_j-\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi_j)=\mathbf{K}\varphi_j=\frac{1}{\lambda_j}\varphi_j \qquad (4.2).$$

Нехай λ_0, φ_0 - характеристичне число та відповідна власна функція $K^{(p)}(x,y)$, тобто $\lambda_0 \mathbf{K}^{(\mathbf{p})}\varphi_0 = \varphi_0$ Покажемо що, : $(\varphi_0, \varphi_j) = 0$ для $j = \overline{1,p}$.

$$\varphi_0 = \lambda_0 \mathbf{K}\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i}{\lambda_i}(\varphi_0, \varphi_i),$$

$$(\varphi_0, \varphi_j) = \lambda_0 (\mathbf{K}\varphi_0, \varphi_j) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_j)}{\lambda_i} = \frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j) - \frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j) = 0.$$

Отже λ_0, φ_0 відповідно характеристичне число і власна функція ядра $K(x,y)$.

Таким чином φ_0 - ортогональна до усіх власних функцій $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$, таким чином, λ_0 співпадає з одним із характеристичних чисел $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, ...$ тобто $\varphi_0 = \varphi_k$ для деякого $k \geq p+1$.

Отже у ядра $K^{(p)}(x,y)$ множина власних функцій і характеристичних чисел вичерпується множиною власних функцій і характеристичних чисел ядра $K\ (x,y)$ починаючи з номера $p+1$.

Враховуючи, що λ_{p+1} найменше за модулем характерне число ядра $K^{\mathrm{p}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$,

має місце нерівність $$\frac{\left\| \mathbf{K}^{(\mathbf{p})} f \right\|_{L_2(G)}}{\left\| f \right\|_{L_2(G)}} \leq \frac{1}{\left| \lambda_{p+1} \right|}.$$

Для ядра, що має скінчену кількість характеристичних чисел, очевидно, має місце рівність $K^{(N)}(x,y) = K\ (x,y) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i} \equiv 0$.

Тобто будь-яке ермітове ядро зі скінченою кількістю характеристичних чисел є виродженим і представляється у вигляді $K(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}$.

Враховуючи теорему про існування характеристичних чисел у ермітового оператора можемо записати:

$$\left\| K^{(p)} f \right\|_{L_2(G)} = \left\| \mathrm{K} f - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} \le \frac{\|f\|_{L_2(G)}}{\left|\lambda_{p+1}\right|} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \qquad (4.3).$$

Тобто можна вважати, що ермітове ядро в розумінні (4.3) наближається наступним білінійним рядом:

$$K\ (x,y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i} \qquad (4.4)\ .$$

Для виродженого ядра маємо його представлення у вигляді

$$K\ (x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i} \qquad (4.5).$$

Ряд Фур’є функції із $L_2(G)$

Розглянемо довільну функцію $f \in L_2(G)$ і деяку ортонормовану систему функцій $\{u_i\}_{i=\overline{1,+\infty}}$, $(u_i,u_j) = \delta_{ij}$.

Рядом Фур`є функції f із $L_2(G)$ називається ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f,u_i)u_i \sim f \qquad (4.6),$$

(f,u_i) - називається *коефіцієнтом Фур`є*.

$\forall f \in L_2(G)$ виконується *нерівність Бесселя* :

$$\forall N \quad \sum_{i=1}^{N} \left|(f,u_i)\right|^2 \le \|f\|^2_{L_2(G)} \qquad (4.7).$$

Нерівність Бесселя гарантує збіжність ряду Фур’є в середньоквадратичному, але не обов’язково до функції f .

Означення Ортонормована система функцій $\{u_i\}_{i=\overline{1,+\infty}}$ з $L_2(G)$ називається повною (замкненою), якщо ряд Фур’є для будь – якої функції $f \in L_2(G)$ по цій системі функцій збігається до цієї функції в просторі $L_2(G)$.

Теорема 2 (*Критерій замкненості ортонормованої системи функцій*) Для того щоб система функцій $\{u_i\}_{i=\overline{1,+\infty}}$ була повною в $L_2(G)$ необхідно і достатньо, щоб для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ виконувалось *рівність* Парсеваля – Стеклова

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(f,u_i\right)\right|^2 = \|f\|^2_{L_2(G)} \qquad (4.8).$$

Теорема Гілберта – Шмідта

[1, стор. 310 - 312]

Функція $f(x)$ називається *джерелувато - зображуваною* через ермітове неперервне ядро $K(x,y)=K^*(x,y)$, $K \in C(G\times G)$, якщо існує функція $h(x)\in L_2(G)$ така, що $f(x)=\int\limits_G K(x,y)h(y)\,\mathrm{d}\,y$ (4.9).

Теорема 3 (*Гільберта – Шмідта*) Довільна джерелувато - зображувана функція f розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур\`є за системою власних функцій ермітового неперервного ядра $K(x,y)$.

Доведення: Обчислимо коефіцієнти Фур\`є $(f,\varphi_i)=(\mathrm{K}h,\varphi_i)=(h,\mathrm{K}\varphi_i)=\dfrac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}$.

Отже ряд Фур’є функції f має вигляд $f \sim \sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i$ (4.10).

Якщо власних чисел скінчена кількість, то з (4.5) випливає, що $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i(x)$, якщо ж власних чисел злічена кількість, то з (4.3) випливає співвідношення:

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{p}\frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i\right\|_{L_2(G)}=\left\|\mathrm{K}h-\sum_{i=1}^{p}\frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i\right\|_{L_2(G)}\xrightarrow[p\to\infty]{}0, \qquad h\in L_2(G).$$

Покажемо, що формулу (4.4) можна розглядати як розвинення ядра $K(x,y)$ в ряд Фур'є по системі власних функцій $\varphi_i(x)$. Перевіримо це обчислюючи коефіцієнт Фур'є $\left(K(\cdot,y),\varphi_i\right)_{L_2(G)}=\int\limits_G K(x,y)\overline{\varphi_i(x)}\,\mathrm{d}x=\int\limits_G \overline{K(y,x)\varphi_i(x)}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}$. Доведемо рівномірну збіжність ряду Фур'є (4.10) за критерієм Коші і покажемо, що при $n,m\to\infty$, відрізок ряду прямує до нуля. За нерівністю Коші - Буняківського маємо:

$$\left|\sum_{i=n}^{m}\frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i\right|\le\sum_{i=n}^{m}\left|(h,\varphi_i)\right|\frac{|\varphi_i|}{|\lambda_i|}\le\left(\sum_{i=n}^{m}\left|(h,\varphi_i)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=n}^{m}\frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2}\right)^{1/2}.$$

$\sum\limits_{i=n}^{m}\left|(h,\varphi_i)\right|^2\le\|h\|^2_{L_2(G)}$, тобто ряд збігається, а вказана сума прямує до 0 при $n,m\to\infty$.

$\sum\limits_{i=n}^{m}\dfrac{|\varphi_i(y)|^2}{\lambda_i^2}\le\int\limits_G\left|K(x,y)\right|^2dx\le \mathrm{M}^2V$, тобто ряд збігається.

Отже $\left(\sum\limits_{i=n}^{m}\left|(h,\varphi_i)\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum\limits_{i=n}^{m}\dfrac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2}\right)^{1/2}\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0$

а отже $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i$ збігається абсолютно і рівномірно.

Наслідок 1 Довільне повторне ядро для ермітового неперервного ядра $K(x,y)$ розкладається в білінійний ряд по системі власних функцій ермітового неперервного ядра, який збігається абсолютно і рівномірно. $K_{(p)}(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i^p}$, $p=2,3,...$ де коефіцієнти Фур'є $\dfrac{\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i^p}$.

Повторне ядро $K_{(p)}(x,y)=\int\limits_G K(x,\xi)K_{p-1}(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi$ є джерелувато-зображувана функція і таким чином для цього має місце теорема Гільберта – Шмідта.

Доведемо деякі важливі нерівності:

$$K_{(2)}(x,x)=\int\limits_G K(x,\xi)K(\xi,x)\,\mathrm{d}\xi=$$

$$=\int\limits_G K(x,\xi)\overline{K(x,\xi)}\,\mathrm{d}\xi=\int\limits_G \left|K(x,\xi)\right|^2\mathrm{d}\xi=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_i(x)\right|^2}{\lambda_i^2} \qquad (4.11).$$

Рівність (4.11) випливає з наслідку 1. Проінтегруємо (4.11), отримаємо

$$\iint\limits_{G\times G}\left|K(x,y)\right|^2\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2} \qquad (4.12).$$

<u>Теорема</u> 4 *(Про збіжність білінійного ряду для ермітового неперервного ядра)* Ермітове неперервне ядро $K(x,y)$ розкладається в білінійний ряд $K(x,y)\sim\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}$ по своїх власних функціях, і цей ряд збігаються в нормі $L_2(G)$ по аргументу x рівномірно для кожного $y\in\overline{G}$, тобто $\left\|K(x,y)-\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}\right\|_{L_2(x\in G)}\xrightarrow[p\to\infty]{y\in\overline{G}}0$.

Доведення:

$$\left\|K(x,y)-\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}\right\|^2_{L_2(x\in G)}=\int\limits_G\left|K(x,y)\right|^2\mathrm{d}\,x-\sum_{i=1}^{p}\frac{\left|\varphi_i(y)\right|^2}{\lambda_i^2}\xrightarrow[p\to\infty]{y\in\overline{G}}0$$

Додатково інтегруючи по аргументу $y\in G$ отримаємо збіжність білінійного ряду(4.4) в середньоквадратичному.

$$\iint\limits_G\left(K(x,y)-\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}\right)^2dxdy\xrightarrow[p\to\infty]{}0 \qquad (4.13)\,\mathbf{.}$$

Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром

[1, стор. 315 - 317]

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду $\varphi=\lambda\mathbf{K}\varphi+f$, з ермітовим неперервним ядром $K(x,y)=K^*(x,y)$ (4.14)

$\varphi_1,\ldots,\varphi_p,\ldots$
$\lambda_1,\ldots,\lambda_p,\ldots$ - множина характеристичних чисел та - ортонормована система

власних функцій ядра.

Розкладемо розв’язок рівняння φ по системі власних функцій ядра $K(x,y)$.

$\varphi=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}(\mathbf{K}\varphi,\varphi_i)\varphi_i+f=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi,K\varphi_i)\varphi_i+f=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i+f$, обчислимо

коефіцієнти Фур’є $(\varphi,\varphi_k)=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_i)}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi_k)+(f,\varphi_k)=\lambda\frac{(\varphi,\varphi_k)}{\lambda_k}+(f,\varphi_k)$

Отже, $(\varphi,\varphi_k)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)=(f,\varphi_k)$, тому $(\varphi,\varphi_k)=(f,\varphi_k)\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}$, $k=1,2,\ldots$

Таким чином має місце формулу Шмідта:

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i-\lambda}\varphi_i(x)+f(x) \quad (4.15).$$

Розглянемо усі можливі значення λ:

1. Якщо $\lambda\neq\{\lambda_i\}_{i=\overline{1,\infty}}$,тоді існує єдиний розв’язок для довільного вільного члена f і цей розв’язок представляється за формулою (4.15).

2. Якщо $\lambda=\lambda_k=\lambda_{k+1}=\ldots=\lambda_{k+q-1}$ - співпадає з одним з характеристичних чисел кратності q, та при цьому виконанні умови ортогональності $(f,\varphi_k)=(f,\varphi_{k+1})=\ldots=(f,\varphi_{k+q-1})=0$ тоді розв’язок існує (не єдиний), і

представляється у вигляді, $\varphi(x)=\lambda_k\sum_{\substack{i=1\\ \lambda_i\neq\lambda_k}}^{\infty}\frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i-\lambda_k}\varphi_i(x)+f(x)+\sum_{j=k}^{k+q-1}c_j\varphi_j(x)$, (4.16),

c_j - довільні константи.

Якщо $\exists j:(f,\varphi_j)\neq0,\ k\leq j\leq k+q-1$ тоді розв’язків не існує.

Приклад: Знайти ті значення параметрів a, b для яких інтегральне рівняння $\varphi(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(xy-\frac{1}{3})\varphi(y)dy+ax^2-bx+1$ має розв'язок для будь – якого значення λ.

Розв'язок: Знайдемо характеристичні числа та власні функції спряженого рівняння (ядро ермітове).

$$\varphi(x)=\lambda x\int\limits_{-1}^{1}y\varphi(y)dy-\frac{\lambda}{3}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(y)dy=\lambda xc_1-\frac{\lambda}{3}c_2$$

$$c_1=\int\limits_{-1}^{1}y\varphi(y)dy=\int\limits_{-1}^{1}y(\lambda yc_1-\frac{\lambda}{3}c_2)dy=\frac{2}{3}\lambda c_1$$

$$c_2=\int\limits_{-1}^{1}\varphi(y)dy=\int\limits_{-1}^{1}(\lambda yc_1-\frac{\lambda}{3}c_2)dy=-\frac{2}{3}\lambda c_2$$

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\frac{2}{3}\lambda & 0\\ 0 & 1+\frac{2}{3}\lambda\end{vmatrix}=0.$$

$$\lambda_1=\frac{3}{2},\ \lambda_2=-\frac{3}{2} \qquad \varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=1.$$

Умови ортогональності:

$$\int\limits_{-1}^{1}(ax^2-bx+1)xdx=-\frac{2}{3}b=0$$

$$\int\limits_{-1}^{1}(ax^2-bx+1)dx=\frac{2}{3}a+2=0$$

$$a=-3,\ b=0$$

Словник термінів

	характеристичне число	characteristic number
	неперервне ядро	continuous kernel
	компактна послідовність	compact sequence
	кратність	multiplicity
	білінійний ряд	bilinear series
	джерелувато – зображувана функція	sourcewise- representation function
	Рівномірно збіжний ряд	uniformly convergent series