

# Зміст

<b>1</b>	<b>Вступ</b>	<b>2</b>
1.1	Предмет і методи математичної фізики . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Інтегральні рівняння</b>	<b>5</b>
2.0.1	Основні поняття . . . . .	5
2.1	Метод послідовних наближень . . . . .	7
2.1.1	Метод послідовних наближень для неперервного ядра	7
2.1.2	Повторні ядра . . . . .	12
2.1.3	Резольвента інтегрального оператора . . . . .	14
2.1.4	Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром . . . . .	17
2.2	Теореми Фредгольма . . . . .	23
2.2.1	Інтегральні рівняння з виродженим ядром . . . . .	23
2.2.2	Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром . . . . .	31
2.2.3	Альтернатива Фредгольма . . . . .	33
2.2.4	Наслідки з теорем Фредгольма . . . . .	34
2.2.5	Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром . . . . .	35
2.3	Інтегральні рівняння з ермітовим ядром . . . . .	37
2.3.1	Характеристичні числа ермітового неперервного ядра	44
2.4	Теорема Гільберта-Шмідта та її наслідки . . . . .	46
2.4.1	Білінійне розвинення ермітового неперервного ядра	46
2.4.2	Ряд Фур'є функції із $L_2(G)$ . . . . .	48
2.4.3	Теорема Гільберта-Шмідта . . . . .	49
2.4.4	Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром . . . . .	53
2.4.5	Додатньо визначені ядра . . . . .	58
2.5	Задача Штурма-Ліувілля. Теорема Стеклова . . . . .	61
2.5.1	Функція Гріна оператора $L$ . . . . .	61
2.5.2	Властивості функції Гріна . . . . .	65
2.5.3	Зведення крайової задачі з оператором Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння . . . . .	65
2.5.4	Властивості власних чисел задачі Штурма-Ліувілля	71
2.5.5	Задача Штурма-Ліувілля з ваговим множником . . . . .	73
2.6	Інтегральні рівняння першого роду . . . . .	74
2.6.1	Ядра Шмідта . . . . .	75
2.6.2	Інтегральні рівняння першого роду з симетричним ядром . . . . .	77

2.6.3	Несиметричні ядра . . . . .	78
2.6.4	Питання до першого розділу . . . . .	82

# 1 Вступ

## 1.1 Предмет і методи математичної фізики

Сучасні технології дослідження реального світу доволі інтенсивно використовують методи математичного моделювання, зокрема ці методи широко використовуються тоді, коли дослідження реального (фізичного) об'єкту є неможливими, або надто дорогими. Вже традиційними стали моделювання властивостей таких фізичних об'єктів:

- температурні поля і теплові потоки;
- електричні, магнітні та електромагнітні поля;
- концентрація речовини в розчинах, розплавах або сумішах;
- напруження і деформації в пружних твердих тілах;
- параметри рідини або газу, який рухається (обтікає) деяке тіло;
- перенос різних субстанцій потоками рідин або газу та інші.

Характерною особливістю усіх математичних моделей, що описують перелічені та багато інших процесів є те, що параметри, які представляють інтерес для дослідника є функціями точки простору  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  та часу  $t$ , а самі співвідношення з яких ці характеристики обчислюються є диференціальними рівняннями в частинних похідних зі спеціальними додатковими умовами (крайовими умовами), які дозволяють виділяти однозначний розв'язок.

Таким чином можна сказати, що основними об'єктами дослідження предмету математична фізика є крайові задачі для рівнянь в частинних похідних, які моделюють певні фізичні процеси.

Процес дослідження реального об'єкту фізичного світу можна представити за наступною схемою:

1. Побудова математичної моделі реального процесу у вигляді диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, доповнення диференціального рівняння в частинних похідних граничними умовами.

2. Дослідження властивостей сформульованої крайової задачі з точки зору її коректності. Коректність постановки задачі передбачає виконання наступних умов:

- Розв'язок крайової задачі існує;
- Розв'язок єдиний;
- Розв'язок неперервним чином залежить від вхідних даних.

3. Знаходження розв'язку крайової задачі:

- точного для найбільш простих задач;
- або наближеного для переважної більшості задач.

Треба відмітити, що усі перелічені пункти дослідження окрім побудови наближених методів знаходження розв'язків відносяться до предмету дисципліни Математична фізика.

Для дослідження задач математичної фізики використовуються математичний апарат наступних розділів математики:

- математичний аналіз;
- лінійна алгебра;
- диференціальні рівняння;
- теорія функцій комплексної змінної;
- функціональний аналіз;

При побудові математичних моделей використовуються знання з елементарної фізики.

Наведемо приклад доволі простої і в той же час цілком реальної математичної моделі розповсюдження тепла в стрижні.

**Приклад 1.1.0.1** (моделі розповсюдження тепла в стрижні)

Нехай ми маємо однорідний стрижень з теплоізолюваною боковою поверхнею і наступними фізичними параметрами:

- $\rho$  — густина матеріалу;
- $S$  — площа поперечного перерізу;
- $k$  — коефіцієнт теплопровідності;
- $c$  — коефіцієнт теплоємності;
- $L$  — довжина стрижня.

Позначимо  $u(x, t)$  — температуру стрижня в точці  $x$  в момент часу  $t$ ,  $u_0(x)$  — температуру стрижня у точці  $x$  в початковий момент часу  $t = 0$ .

Припустимо, що на лівому кінці стрижня температура змінюється за заданим законом  $\varphi(t)$ , а правий кінець стрижня теплоізолюваний.

В таких припущеннях математична модель може бути записана у вигляді наступної граничної задачі:

- диференціальне рівняння:

$$c\rho \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1.1.1)$$

- граничні умови на кінцях стрижня:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.1.2)$$

- початкова умова:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.1.3)$$

## 2 Інтегральні рівняння

### 2.0.1 Основні поняття

**Визначення 2.0.1.1.** *Інтегральні рівняння* — рівняння, що містять невідому функцію під знаком інтегралу.

Багато задач математичної фізики зводяться до лінійних інтегральних рівнянь наступних двох виглядів.

**Визначення 2.0.1.2** (інтегрального рівняння Фредгольма II роду). *Інтегральним рівнянням Фредгольма II роду* називається рівняння вигляду

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y) \varphi(y) dy + f(x). \quad (2.0.1)$$

Тут  $\lambda$  — комплексний параметр,  $\lambda \in \mathbb{C}$  (відомий або невідомий),  $G$  — область інтегрування,  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\overline{G}$  — замкнена та обмежена.

**Визначення 2.0.1.3** (інтегрального рівняння Фредгольма I роду). *Інтегральним рівнянням Фредгольма I роду* називається рівняння вигляду

$$\int_G K(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (2.0.2)$$

**Визначення 2.0.1.4** (ядра інтегрального рівняння). *Ядрам* інтегральних рівнянь наведених вище називається функція  $K(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ .

**Визначення 2.0.1.5** (вільного члена інтегрального рівняння). *Вільним членом* інтегральних рівнянь наведених вище називається функція  $f(x) \in C(\overline{G})$ .

**Визначення 2.0.1.6** (однорідного рівняння Фредгольма II роду). Інтегральне рівняння Фредгольма II роду при  $f(x) \equiv 0$  називається *однорідним*:

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y) \varphi(y) dy. \quad (2.0.3)$$

**Визначення 2.0.1.7** (інтегрального оператора). Зрозуміло, що кожному ядру  $K(x, y)$  відповідає *інтегральний оператор*  $\mathbf{K}$  який визначається наступним чином:

$$\mathbf{K} : \varphi(x) \mapsto (\mathbf{K}\varphi)(x) = \int_G K(x, y)\varphi(y) dy. \quad (2.0.4)$$

**Зауваження 2.0.1.1** — Будемо записувати інтегральні рівняння скорочено в операторній формі:

$$\varphi = \lambda \mathbf{K}\varphi + f, \quad (2.0.5)$$

$$\mathbf{K}\varphi = f, \quad (2.0.6)$$

$$\varphi = \lambda \mathbf{K}\varphi. \quad (2.0.7)$$

**Визначення 2.0.1.8** (спряженого (союзного ядра)). *Спряженим (союзним) ядром* називається функція

$$K^*(x, y) = \overline{K}(y, x). \quad (2.0.8)$$

**Визначення 2.0.1.9** (спряженого (союзного) рівняння). Інтегральне рівняння

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int_G K^*(x, y)\psi(y) dy + g(x) \quad (2.0.9)$$

називається *спряженим (союзним)* до відповідного інтегрального рівняння Фредгольма II роду.

**Зауваження 2.0.1.2** — Операторна форма рівнянь останніх двох рівнянь:

$$\psi = \overline{\lambda} \mathbf{K}^* \psi + g, \quad (2.0.10)$$

$$\psi = \overline{\lambda} \mathbf{K}^* \psi. \quad (2.0.11)$$

**Визначення 2.0.1.10** (характеристичних (власних) чисел ядра). Комплексні  $\lambda$ , при яких однорідне інтегральне рівняння Фредгольма II роду має нетривіальні розв'язки, називаються *характеристичними (власними)*

ми) числами ядра  $K(x, y)$ .

**Визначення 2.0.1.11** (власних функцій ядра). Розв'язки, які відповідають власним числам, називаються *власними функціями ядра*.

**Визначення 2.0.1.12** (кратності характеристичного числа). Кількість лінійно-незалежних власних функцій називається *кратністю характеристичного числа*.

## 2.1 Метод послідовних наближень

### 2.1.1 Метод послідовних наближень для неперервного ядра

Нагадаємо кілька визначень:

**Визначення 2.1.1.1** (норми у  $C(\overline{G})$ ). Нормою у банаховому просторі неперервних функцій  $C(\overline{G})$  називається

$$\|f\|_{C(\overline{G})} = \max_{x \in \overline{G}} |f(x)|. \quad (2.1.1)$$

**Визначення 2.1.1.2** (норми у  $L_2(G)$ ). Нормою у гільбертовому просторі інтегровних з квадратом функцій  $L_2(G)$  називається

$$\|f\|_{L_2(G)} = \left( \int_G |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.1.2)$$

**Визначення 2.1.1.3** (скалярного добутку у  $L_2(G)$ ). Скалярним добутком у просторі  $L_2(G)$  називається

$$(f, g)_{L_2(G)} = \int_G f(x) \bar{g}(x) dx. \quad (2.1.3)$$

### Лема 2.1.1.1

Інтегральний оператор  $\mathbf{K}$  з неперервним ядром  $K(x, y)$  петворює множини функцій  $C(\overline{G}) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\overline{G})$ ,  $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} L_2(G)$ ,  $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\overline{G})$  обмежений та мають місце нерівності:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq MV\|\varphi\|_{C(\overline{G})}, \quad (2.1.4)$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)} \leq MV\|\varphi\|_{L_2(G)}, \quad (2.1.5)$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}, \quad (2.1.6)$$

де

$$M = \max_{(x,y) \in G \times G} |K(x, y)|, \quad V = \int_G dy. \quad (2.1.7)$$

**Зауваження 2.1.1.1** — Мається на увазі, що довільна функція  $\varphi$  з множини функцій  $C(\overline{G})$  під дією інтегрального оператора  $\mathbf{K}$  переходить у функцію  $\mathbf{K}\varphi$  з множини функцій  $C(\overline{G})$ , і так далі.

*Доведення.* Нехай  $\varphi \in L_2(G)$ . Тоді  $\varphi$  — абсолютно інтегровна функція на  $G$  і, оскільки ядро  $K(x, y)$  неперервне на  $G \times G$ , функція  $(\mathbf{K}\varphi)(x)$  неперервна на  $G$ . Тому оператор  $\mathbf{K}$  переводить  $L_2(G)$  в  $C(\overline{G})$  і, з врахуванням нерівності Коші-Буняковського, обмежений. Доведемо нерівності:

$$1. \|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \leq MV\|\varphi\|_{C(G)}:$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} &= \max_{x \in \overline{G}} \left| \int_G K(x, y) \varphi(y) dy \right| \leq \\ &\leq \max_{x \in \overline{G}} \int_G (|K(x, y)| \cdot |\varphi(y)|) dy \leq \\ &\leq \max_{x \in \overline{G}} \left( \max_{y \in \overline{G}} |K(x, y)| \cdot \max_{y \in \overline{G}} |\varphi(y)| \cdot \int_G dy \right) \leq \quad (2.1.8) \\ &\leq \max_{(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}} |K(x, y)| \cdot \max_{y \in \overline{G}} |\varphi(y)| \cdot \int_G dy = \\ &= MV\|\varphi\|_{C(\overline{G})}. \end{aligned}$$



2.  $\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)} \leq MV\|\varphi\|_{L_2(G)}$ :

$$\begin{aligned}
(\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)})^2 &= \int_G \left| \int_G K(x, y) \varphi(y) dy \right|^2 dx \leq \\
&\leq \int_G \left| \max_{y \in \overline{G}} |K(x, y)| \cdot \int_G \varphi(y) dy \right|^2 dx \leq \\
&\leq \left( \max_{(x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}} |K(x, y)| \right)^2 \cdot \left| \int_G \varphi(y) dy \right|^2 \cdot \int_G dx \leq \\
&\leq (M\|\varphi\|_{L_2(G)}V)^2.
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

3.  $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \leq M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}$ :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} &= \max_{x \in \overline{G}} |(\mathbf{K}\varphi)(x)| = \\
&= \max_{x \in \overline{G}} \left| \int_G K(x, y) \varphi(y) dy \right| \leq \\
&\leq \max_{x \in \overline{G}} \sqrt{\int_G |K(x, y)|^2 dy} \cdot \sqrt{\int_G |\varphi(y)|^2 dy} \leq \\
&\leq M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

□

Розв'язок інтегрального рівняння другого роду записаного у операторній формі будемо шукати методом послідовних наближень, тобто запустимо наступний ітераційний процес:

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = \lambda \mathbf{K}\varphi_0 + f, \quad \varphi_2 = \lambda \mathbf{K}\varphi_1 + f, \quad \dots, \quad \varphi_{n+1} = \lambda \mathbf{K}\varphi_n + f. \tag{2.1.11}$$

Тоді можна записати

$$\varphi_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda^i \mathbf{K}^i f, \tag{2.1.12}$$

де  $\mathbf{K}^{i+1} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^i)$ .

Хочеться за розв'язок взяти функцію

$$\varphi_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n. \quad (2.1.13)$$

Це підводить нас до

**Визначення 2.1.1.4** (ряду Неймана). *Рядом Неймана* оператора  $\mathbf{K}$  називається

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n. \quad (2.1.14)$$

Дослідимо збіжність ряду Неймана:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f \right\|_{C(\overline{G})} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda|^i \cdot \|\mathbf{K}^i f\|_{C(\overline{G})} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda|^i \cdot (MV)^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})} = \frac{\|f\|_{C(\overline{G})}}{1 - |\lambda| \cdot MV}. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Справді,

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq MV \|\varphi\|_{C(\overline{G})}, \quad (2.1.16)$$

тому

$$\|\mathbf{K}^2\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq (MV)^2 \|\varphi\|_{C(\overline{G})} \quad (2.1.17)$$

і, взагалі кажучи,

$$\|\mathbf{K}^i\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq (MV)^i \|\varphi\|_{C(\overline{G})}. \quad (2.1.18)$$

Отже ми довели наступне

**Твердження 2.1.1.1** (про умову збіжності методу послідовних наближень)

Ряд Неймана збігається рівномірно при

$$|\lambda| < \frac{1}{MV}. \quad (2.1.19)$$

**Лема 2.1.1.2** (про єдиність розв'язку за умови збіжності методу послідовних наближень)

При виконанні умови збіжності методу послідовних наближень інтегральне рівняння II роду має єдиний розв'язок.

*Доведення.* Дійсно припустимо, що їх два:

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= \lambda \mathbf{K} \varphi^{(1)} + f, \\ \varphi^{(2)} &= \lambda \mathbf{K} \varphi^{(2)} + f.\end{aligned}\tag{2.1.20}$$

Тоді можемо розглянути їхню різницю

$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}.\tag{2.1.21}$$

Вона буде задовольняти лоднорідному рівнянню:

$$\varphi^{(0)} = \lambda \mathbf{K} \varphi^{(0)}.\tag{2.1.22}$$

Обчислимо норму Чебишева:

$$|\lambda| \cdot \|\mathbf{K} \varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} = \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})}.\tag{2.1.23}$$

Застосовуючи нерівність з леми до лівої частини отримуємо

$$\|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} \leq |\lambda| \cdot MV \cdot \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})}.\tag{2.1.24}$$

Звідси безпосередньо випливає

$$(1 - |\lambda| \cdot MV) \cdot \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} \leq 0.\tag{2.1.25}$$

Звідси маємо, що  $\|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} = 0$ . □

Таким чином доведена

**Теорема 2.1.1.1** (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значень параметру)

Довільне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з неперервним ядром  $K(x, y)$  при умові  $|\lambda| < 1/MV$  має єдиний розв'язок  $\varphi$  в класі неперервних функцій  $C(\overline{G})$  для будь-якого неперервного вільного члена  $f$ . Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді ряду Неймана.

## 2.1.2 Повторні ядра

**Твердження 2.1.2.1** (про перенос інтегрального оператора через кому у скалярному добутку)

$\forall f, g \in L_2(G)$  має місце рівність

$$(\mathbf{K}f, g)_{L_2(G)} = (f, \mathbf{K}^*g)_{L_2(G)}. \quad (2.1.26)$$

*Доведення.* Якщо  $f, g \in L_2(G)$  то, за лемою 2.1.1.1, маємо  $\mathbf{K}f, \mathbf{K}^*g \in L_2(G)$ , і тому

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}f, g) &= \int_G (\mathbf{K}f)(\bar{g}(x)) \, dx = \\ &= \int_G \left( \int_G K(x, y) f(y) \, dy \right) \bar{g}(x) \, dx = \\ &= \int_G f(y) \left( \int_G K(x, y) \bar{g}(x) \, dx \right) \, dy = \\ &= \int_G f(y) \cdot (\mathbf{K}^*g)(y) \, dy = \\ &= (f, \mathbf{K}^*g). \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

□

**Лема 2.1.2.1** (про композицію інтегральних операторів)

Якщо  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  — інтегральні оператори що мають неперервні ядра  $K_1(x, y)$  і  $K_2(x, y)$  відповідно, то оператор  $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$  також інтегральний оператор з неперервним ядром

$$K_3(x, z) = \int_G K_2(x, y) K_1(y, z) \, dy. \quad (2.1.28)$$

**Зауваження 2.1.2.1** — При цьому справедлива формула:  $(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1)^* = \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^*$ .

*Доведення.* Нехай  $K_1(x, y)$ ,  $K_2(x, y)$  — ядра інтегральних операторів  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$ . Розглянемо  $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{K}_3 f)(x) &= (\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1 f)(x) = \\
 &= \int_G K_2(x, y) \left( \int_G K_1(y, z) f(z) dz \right) dy = \\
 &= \int_G \left( \int_G K_2(x, y) K_1(y, z) dy \right) f(z) dz = \\
 &= \int_G K_3(x, z) f(z) dz.
 \end{aligned} \tag{2.1.29}$$

Тобто

$$\int_G K_2(x, y) K_1(y, z) dy \tag{2.1.30}$$

— ядро оператора  $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ .

Згідно правила переносу інтегрального оператора через кому у скалярному добутку для всіх  $f, g \in L_2(G)$  отримуємо  $(f, \mathbf{K}_3^*g - \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^*g) = 0$ , звідки випливає, що  $\mathbf{K}_3^* = \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^*$ .  $\square$

Із доведеної леми випливає, що оператори  $\mathbf{K}^n = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{n-1}) = (\mathbf{K}^{n-1})\mathbf{K}$  — інтегральні та їх ядра  $K_{(n)}(x, y)$  — неперервні та задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$K_{(1)}(x, y) = K(x, y), \quad \dots, \quad K_{(n)}(x, y) = \int_G K(x, \xi) K_{(n-1)}(\xi, y) d\xi \tag{2.1.31}$$

**Визначення 2.1.2.1** (повторних (ітерованих) ядер). При цьому інтегральні ядра  $K_{(n)}(x, y)$  називаються *повторними (ітерованими)*.

**Зауваження 2.1.2.2** — Операторна форма:

$$\mathbf{K}f = \int_G K(x, y) f(y) dy, \quad \dots, \quad \mathbf{K}^n f = \int_G K_{(n)}(x, y) f(y) dy. \tag{2.1.32}$$

### 2.1.3 Резольвента інтегрального оператора

Пригадаємо представлення розв'язку інтегрального рівняння II роду у вигляді ряду Неймана. Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} (\mathbf{K}^i f)x = \\
 &= f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y) f(y) dy = \\
 &= f(x) + \lambda \int_G \left( \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y) \right) f(y) dy = \\
 &= f(x) + \lambda \int_G \mathcal{R}(x, y, \lambda) f(y) dy,
 \end{aligned} \tag{2.1.33}$$

при  $|\lambda| < 1/MV$ .

**Визначення 2.1.3.1** (резольвенти інтегрального оператора). Функція

$$\mathcal{R}(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y) \tag{2.1.34}$$

називається *резольвентою* інтегрального оператора  $K(x, y)$ .

**Зауваження 2.1.3.1** — Операторна форма запису розв'язку рівняння Фредгольма через резольвенту ядра має вигляд:

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{R}f. \tag{2.1.35}$$

#### Твердження 2.1.3.1

Мають місце операторні рівності:

$$\varphi = (E + \lambda \mathbf{R})f, \tag{2.1.36}$$

$$(E - \lambda \mathbf{K})\varphi = f, \tag{2.1.37}$$

$$\varphi = (E - \lambda \mathbf{K})^{-1}f. \tag{2.1.38}$$

**Вправа 2.1.3.1.** Доведіть попереднє твердження.

Таким чином маємо

$$E + \lambda \mathbf{R} = (E - \lambda \mathbf{K})^{-1}, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}. \quad (2.1.39)$$

Зважаючи на формулу розв'язку рівняння Фредгольма через резольвенту, має місце

**Теорема 2.1.3.1** (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значення параметру)

Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з неперервним ядром  $K(x, y)$  при умові  $|\lambda| < 1/MV$  має єдиний розв'язок  $\varphi$  в класі неперервних функцій  $C(\overline{G})$  для будь-якого неперервного вільного члена  $f$ . Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді  $f + \lambda \mathbf{R}f$  за допомогою резольвенти  $\mathbf{R}$ .

### Приклад 2.1.3.1

Методом послідовних наближень знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt)^2 \varphi(t) dt.$$

Розв'язок. Перш за все зауважимо, що  $M = 1$  і  $V = 1$ .

Побудуємо повторні ядра

$$\begin{aligned} K_{(1)}(x, t) &= x^2 t^2, \\ K_2(x, t) &= \int_0^1 x^2 z^4 t^2 dz = \frac{x^2 t^2}{5}, \\ K_{(p)}(x, t) &= \frac{1}{5^{p-2}} \int_0^1 x^2 z^4 t^2 dz = \frac{x^2 t^2}{5^{p-1}}. \end{aligned}$$

Резольвента має вигляд

$$\mathcal{R}(x, t, \lambda) = x^2 t^2 \left( 1 + \frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda^2}{5^2} + \dots + \frac{\lambda^p}{5^p} + \dots \right) = \frac{5x^2 t^2}{5 - \lambda}, \quad |\lambda| < 5.$$

Розв'язок інтегрального рівняння має вигляд:

$$\varphi(x) + x + \int_0^1 \frac{5x^2 t^3}{5 - \lambda} dt = x + \frac{5x^2}{4(5 - \lambda)}.$$



### 2.1.4 Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром

**Визначення 2.1.4.1** (полярного ядра). Ядро  $K(x, y)$  називається *полярним*, якщо воно представляється у вигляді:

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} \quad (2.1.40)$$

де  $A \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ ,  $|x - y| = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ ,  $\alpha < n$  ( $n$  — розмірність евклідового простору).

**Визначення 2.1.4.2** (слабо полярного ядра). Полярне ядро називається *слабо полярним*, якщо  $\alpha < n/2$ .

Нагадаємо, що для інтегральних рівнянь

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (2.1.41)$$

з неперервним ядром  $K(x, y)$  метод послідовних наближень мав вигляд:

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = f + \lambda \mathbf{K} \varphi_0, \quad \dots, \quad \varphi_{n+1} = f + \lambda \mathbf{K} \varphi_n. \quad (2.1.42)$$

Оцінки, що застосовувались для неперервних ядер не працюють для полярних ядер, тому що максимум полярного ядра рівний нескінченності (ядро необмежене в рівномірній метриці), отже, сформулюємо лему аналогічну лемі 2.1.1.1 для полярних ядер.

#### Лема 2.1.4.1

Інтегральний оператор  $\mathbf{K}$  з полярним ядром  $K(x, y)$  переводить множину функцій  $C(\overline{G}) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\overline{G})$  і при цьому має місце оцінка:

$$\|\mathbf{K} \varphi\|_{C(\overline{G})} \leq N \|\varphi\|_{C(\overline{G})}, \quad (2.1.43)$$

де

$$N = \max_{x \in \overline{G}} \int_G |K(x, y)| dy. \quad (2.1.44)$$

*Доведення.* Спочатку доведемо, що функція  $\mathbf{K} \varphi$  неперервна в точці  $x_0$ .

Оцінимо при умові  $|x - x_0| < \eta/2$  вираз:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_G K(x, y) \varphi(y) \, dy - \int_G K(x_0, y) \varphi(y) \, dy \right| = \\
& = \left| \int_G \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} \varphi(y) \, dy - \int_G \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \varphi(y) \, dy \right| \leq \\
& \leq \int_G \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| |\varphi(y)| \, dy \leq (*) \quad (2.1.45)
\end{aligned}$$

винесемо  $\max \varphi(y)$  у вигляді  $\|\varphi\|_{C(\bar{G})}$ , а інтеграл розіб'ємо на два інтеграли:

- інтеграл по  $U(x_0, \eta)$  — кулі з центром в  $x_0$  і радіусом  $\eta$ ;
- інтеграл по залишку  $G \setminus U(x_0, \eta)$ :

$$\begin{aligned}
(*) \leq \|\varphi\|_{C(\bar{G})} & \left( \int_{U(x_0, \eta)} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| dy + \right. \\
& \left. + \int_{G \setminus U(x_0, \eta)} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| dy \right) \quad (2.1.46)
\end{aligned}$$

Оцінимо тепер кожний з інтегралів:

$$\int_{U(x_0, \eta)} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| dy \leq A_0 \int_{U(x_0, \eta)} \left| \frac{dy}{|x - y|^\alpha} - \frac{dy}{|x_0 - y|^\alpha} \right|, \quad (2.1.47)$$

де  $A_0$  —  $\max$  функції  $A(x, y)$  на потрібній множині.

Введемо узагальнені сферичні координати з центром у точці  $x_0$  в просторі  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_{0,1} + \rho \cos \nu_1 \\
y_2 &= x_{0,2} + \rho \sin \nu_1 \cos \nu_2 \\
&\dots \\
y_{n-1} &= x_{0,n-1} + \rho \sin \nu_1 \cdot \dots \cdot \cos \nu_{n-1} \\
y_n &= x_{0,n} + \rho \sin \nu_1 \cdot \dots \cdot \sin \nu_{n-1}
\end{aligned} \quad (2.1.48)$$

Якобіан переходу має вигляд:

$$\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{\rho, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}} = \rho^{n-1} \Phi(\sin \nu_1, \dots, \sin \nu_{n-1}, \cos \nu_1, \dots, \cos \nu_{n-1}), \quad (2.1.49)$$

де  $0 \leq \rho \leq \eta, 0 \leq \nu_i \leq \pi, i = \overline{1, n-2}, 0 \leq \nu_{n-1} \leq 2\pi$ .

Отримаємо

$$\int_{U(x_0, \eta)} \frac{dy}{|x_0 - y|^\alpha} = \sigma_n \int_0^\eta \frac{\rho^{n-1} d\rho}{\rho^\alpha} = \sigma_n \left. \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right|_0^\eta = \frac{\sigma_n \eta^{n-\alpha}}{n-\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.1.50)$$

де  $\sigma_n$  — площа поверхні одиничної сфери в  $n$ -вимірному просторі  $\mathbb{R}^n$ .

Оскільки  $|x - x_0| < \eta/2$ , то

$$\int_{U(x_0, \eta)} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} \leq \int_{U(x_0, 3\eta/2)} \frac{dy}{|x_0 - y|^\alpha} \leq \frac{\sigma_n}{n-\alpha} \left( \frac{3\eta}{2} \right)^{n-\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.1.51)$$

Оскільки

$$\frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} \in C \left( \overline{U(x_0, \eta/2)} \times \overline{G \setminus U(x_0, \eta)} \right), \quad (2.1.52)$$

то

$$\int_{G \setminus U(x_0, \eta)} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| dy \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1.53)$$

Таким чином ми довели, що

$$\left| \int_G K(x, y) \varphi(y) dy - \int_G K(x_0, y) \varphi(y) dy \right| \leq \varepsilon, \quad (2.1.54)$$

тобто функція  $\mathbf{K}\varphi$  неперервна в точці  $x_0$ .

Доведемо оцінку  $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_G K(x, y) \varphi(y) dy \right| &\leq \int_G |K(x, y)| |\varphi(y)| dy \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{C(\overline{G})} \int_G |K(x, y)| dy \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{C(\overline{G})} \max_{x \in \overline{G}} \int_G |K(x, y)| dy = \\ &= N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}, \end{aligned} \quad (2.1.55)$$

отже  $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$ .

Покажемо скінченність  $N$ . Розглянемо

$$\int_G |K(x, y)| dy \leq A_0 \int_G \frac{dy}{|x - y|^\alpha} \leq (*). \quad (2.1.56)$$

Для будь-якої точки  $x$ , існує радіус  $D = \text{diam } G$  (рівний максимальному діаметру області  $G$ ) такий, що в кулю з цим радіусом попадає будь-яка точка  $y$ , а тому

$$(*) \leq A_0 \int_{U(x, D)} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} = A_0 \frac{\sigma_n}{n - \alpha} D^{n-\alpha}. \quad (2.1.57)$$

□

**Теорема 2.1.4.1** (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з полярним ядром для малих значень параметру)

Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з полярним ядром  $K(x, y)$  має єдиний розв'язок в класі неперервних функцій для будь-якого неперервного вільного члена  $f$  при умові

$$|\lambda| < \frac{1}{N} \quad (2.1.58)$$

і цей розв'язок може бути представлений рядом Неймана, який збігається абсолютно і рівномірно.

*Доведення.* Сформулюємо умову збіжності ряду Неймана.

Нагадаємо, що ряд Неймана має вигляд

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f, \quad (2.1.59)$$

причому, з щойно доведеної леми, можемо записати

$$\|\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^i \cdot N^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})}. \quad (2.1.60)$$

Останній ряд — геометрична прогресія і збігається при умові  $|\lambda| < 1/N$ . □

#### Лема 2.1.4.2

Нехай маємо два полярних ядра

$$K_i(x, y) = \frac{A_i(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha_i < n, \quad i = 1, 2, \quad (2.1.61)$$

а область  $G$  обмежена, тоді ядро

$$K_3(x, y) = \int_G K_2(x, \xi) K_1(\xi, y) d\xi \quad (2.1.62)$$

також полярне, причому має місце співвідношення:

$$K_3(x, y) = \begin{cases} \frac{A_3(x, y)}{|x - y|^{\alpha_1 + \alpha_2 - n}}, & \alpha_1 + \alpha_2 - n > 0, \\ A_3(x, y) \ln |x - y| + B_3(x, y), & \alpha_1 + \alpha_2 - n = 0, \\ A_3(x, y), & \alpha_1 + \alpha_2 - n < 0, \end{cases} \quad (2.1.63)$$

де  $A_3, B_3$  — неперервні функції.

**Вправа 2.1.4.1.** Доведіть цю лему.

З цієї леми випливає, що всі повторні ядра  $K_{(p)}(x, y)$ , полярного ядра  $K(x, y)$  задовольняють наступним оцінкам:

$$\begin{aligned} K_{(2)}(x, y) &= \begin{cases} \frac{A_2(x, y)}{|x - y|^{2\alpha - n}}, & 2\alpha - n > 0, \\ A_2(x, y) \ln |x - y| + B_2(x, y), & 2\alpha - n = 0, \\ A_2(x, y), & 2\alpha - n < 0, \end{cases} \\ K_{(3)}(x, y) &= \begin{cases} \frac{A_3(x, y)}{|x - y|^{3\alpha - 2n}}, & 3\alpha - 2n > 0, \\ A_3(x, y) \ln |x - y| + B_3(x, y), & 3\alpha - 2n = 0, \\ A_3(x, y), & 3\alpha - 2n < 0, \end{cases} \\ K_{(p)}(x, y) &= \begin{cases} \frac{A_p(x, y)}{|x - y|^{p\alpha - (p-1)n}}, & p\alpha - (p-1)n > 0, \\ A_p(x, y) \ln |x - y| + B_p(x, y), & p\alpha - (p-1)n = 0, \\ A_p(x, y), & p\alpha - (p-1)n < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.64)$$

**Зауваження 2.1.4.1** — Справді, тут  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ , тому  $\alpha_1 + \alpha_2$  замінено на  $2\alpha$  і аналогічно.

Легко бачити, що для  $\forall \alpha, n$  існує  $p_0$  таке, що починаючи з нього всі повторні ядра є неперервні. Справді, для виконання

$$p\alpha - (p-1)n < 0 \quad (2.1.65)$$

достатньо

$$(n - \alpha)p > n, \quad (2.1.66)$$

що в свою чергу рівносильно

$$p > \frac{n}{n - \alpha}. \quad (2.1.67)$$

**Зауваження 2.1.4.2** — Остання нерівність дає не лише якісний факт існування такого  $p_0$ , але і цілком кількісну оцінку:

$$p_0 = \left\lceil \frac{n}{n - \alpha} \right\rceil + 1. \quad (2.1.68)$$

Звідси маємо, що резольвента  $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$  полярного ядра  $K(x, y)$  складається з двох частин:

- полярної складової  $\mathcal{R}_1(x, y, \lambda)$ ;
- неперервної складової  $\mathcal{R}_2(x, y, \lambda)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x, y, \lambda) &= \mathcal{R}_1(x, y, \lambda) + \mathcal{R}_2(x, y, \lambda) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y) = \\ &= \sum_{i=1}^{p_0-1} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y) + \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y). \end{aligned} \quad (2.1.69)$$

Для доведення збіжності резольвенти, потрібно дослідити збіжність нескінченного ряду  $\mathcal{R}_2(x, y, \lambda)$ . Він сходиться рівномірно при  $x, y \in \overline{G}$ ,  $|\lambda| \leq 1/N - \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , визначаючи неперервну функцію  $\mathcal{R}$  при  $x, y \in \overline{G}$ ,  $|\lambda| < 1/N$  і аналітичну по  $\lambda$  в крузі

$$|\lambda| < \frac{1}{N}. \quad (2.1.70)$$

Дійсно

$$\mathcal{R}_2(x, y, \lambda) = \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y). \quad (2.1.71)$$

У свою чергу,

$$|\lambda^{p_0+s-1} K_{(p_0+s)}(x, y)| \leq |\lambda|^{p_0+s-1} M_{p_0} N^s, \quad (2.1.72)$$

де

$$M_{p_0} = \max_{(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}} |K_{p_0}(x, y)|. \quad (2.1.73)$$

Таким чином ряд  $\mathcal{R}_2(x, y, \lambda)$  мажорується геометричною прогресією, яка збігається при умові  $|\lambda| < 1/N$ .

## 2.2 Теорема Фредгольма

### 2.2.1 Інтегральні рівняння з виродженим ядром

**Визначення 2.2.1.1** (виродженого ядра). Неперервне ядро  $K(x, y)$  називається *виродженим*, якщо представляється у вигляді

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(y), \quad (2.2.1)$$

де  $\{f_i\}_{i=1, N}, \{g_i\}_{i=1, N} \subset C(\overline{G})$ , і  $\{f_i\}_{i=1, N}$  та  $\{g_i\}_{i=1, N}$  — лінійно незалежні системи функцій.

**Визначення 2.2.1.2** (інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром). Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, u) \varphi(y) dy + f(x). \quad (2.2.2)$$

Підставимо вигляд виродженого ядра і отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_G \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(y) \varphi(y) dy + f(x) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_G g_i(y) \varphi(y) dy + f(x) = \\ &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

де позначено

$$c_j = \int_G g_j(y) \varphi(y) dy. \quad (2.2.4)$$

Підставимо тепер у  $c_j$  вираження  $\varphi(x)$  через  $c_i$ :

$$\begin{aligned} c_j &= \int_G g_j(y) \varphi(y) dy = \\ &= \int_G g_j(y) \left( f(y) + \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(y) \right) dy = \\ &= \int_G g_j(y) f(y) dy + \lambda \sum_{i=1}^N c_i \int_G g_j(y) f_i(y) dy. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

В результаті отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$c_j = \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ji} c_i + a_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (2.2.6)$$

де позначено

$$\alpha_{ji} = \int_G g_j(y) f_i(y) dy, \quad a_j = \int_G g_j(y) f(y) dy. \quad (2.2.7)$$

Аналогічно для спряженого ядра

$$K^*(x, y) = \sum_{i=1}^N \bar{f}_i(y) \bar{g}_i(x), \quad (2.2.8)$$

і рівняння

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x, y) \psi(y) dy + g(x), \quad (2.2.9)$$

підставляючи вигляд виродженого ядра отримуємо

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \bar{g}_i(x) \int_G \bar{f}_i(y) \psi(y) dy + g(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(x) + g(x), \quad (2.2.10)$$

де позначено

$$d_i = \int_G \bar{f}_i(y) \psi(y) dy. \quad (2.2.11)$$



Знову підставляємо у  $d_j$  вираження  $\psi(x)$  через  $d_i$ :

$$d_j = \int_G \bar{f}_j(y) \left( g(y) + \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(y) \right) dy, \quad (2.2.12)$$

і отримуємо СЛАР

$$d_j = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \beta_{ji} d_i + b_j, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.2.13)$$

де позначено

$$\beta_{ji} = \int_G \bar{f}_j(y) \bar{g}_i(y) dy, \quad b_j = \int_G \bar{f}_j(y) g(y) dy, \quad (2.2.14)$$

причому виконується умова

$$\beta_{ji} = \bar{\alpha}_{ij}. \quad (2.2.15)$$

**Зауваження 2.2.1.1** — У матричному вигляді ці СЛАР запишуться так:

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c} + \vec{a}, \quad (2.2.16)$$

$$\vec{d} = \lambda A^* \vec{d} + \vec{b}, \quad (2.2.17)$$

з матрицями  $E - \lambda A$  та  $E - \bar{\lambda} A^*$  відповідно і визначником  $D(\lambda) = |E - \lambda A| = |E - \bar{\lambda} A^*|$ .

Дослідимо питання існування та єдиності розв'язку цих СЛАР.

- Нехай  $D(\lambda) \neq 0$ ,  $\text{rang } |E - \lambda A| = \text{rang } |E - \bar{\lambda} A^*| = N$ , тоді ці СЛАР мають єдиний розв'язок для будь-яких векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  відповідно, а тому інтегральні рівняння Фредгольма з полярними ядрами (як пряме так і спряжене) мають єдині розв'язки при будь-яких  $f$  та  $g$  відповідно, і ці розв'язки записуються за формулами

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x) + f(x), \quad (2.2.18)$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(x) + g(x). \quad (2.2.19)$$

- Нехай  $D(\lambda) = 0$ ,  $\text{rang } |E - \lambda A| = \text{rang } |E - \bar{\lambda} A^*| = q < N$ , тоді однорідні СЛАР

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c}, \quad (2.2.20)$$

$$\vec{d} = \lambda A^* \vec{d}, \quad (2.2.21)$$

мають  $N - q$  лінійно незалежних розв'язків  $\vec{c}_s, \vec{d}_s, s = \overline{1, N - q}$ , де вектор визначається формулою  $\vec{c}_s = (c_{s1}, \dots, c_{sN})$ ,  $\vec{d}_s = (d_{s1}, \dots, d_{sN})$ , таким чином відповідні однорідні інтегральні рівняння Фредгольма II роду (як пряме так і спряжене) мають  $N - q$  лінійно незалежних розв'язків які записуються за такими формулами:

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_{si} f_i(x), \quad s = \overline{1, N - q}, \quad (2.2.22)$$

$$\psi_s(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_{si} \bar{g}_i(x), \quad s = \overline{1, N - q}, \quad (2.2.23)$$

де  $\varphi_s(x), \psi_s(x)$  — власні функції, а число  $N - q$  — кратність характеристичного числа  $\lambda$  та  $\bar{\lambda}$ . Кожна з систем функцій  $\varphi_s, \psi_s, s = \overline{1, N - q}$  лінійно незалежна, оскільки лінійно незалежними є системи функцій  $f_i$  та  $g_i$  і лінійно незалежні вектори  $\vec{c}_s$  і  $\vec{d}_s, s = \overline{1, N - q}$ .

- Нагадаємо одне з формулювань теореми Кронекера-Капеллі:

#### Теорема 2.2.1.1 (Кронекера-Капеллі)

Для існування розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно і достатньо що би вільний член рівняння був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння.

Для нашого випадку цю умову можна записати у вигляді

$$(\vec{a}, \vec{d}_s) = \sum_{i=1}^N a_i \bar{d}_{si} = 0, \quad \forall s = \overline{1, N - q}. \quad (2.2.24)$$

Покажемо, що для виконання умови  $(\vec{a}, \vec{d}_s) = 0, s = \overline{1, N - q}$  необхідно і достатньо, щоб вільний член прямого інтегрального рівняння Фредгольма II роду був ортогональним розв'язкам спряженого однорідного рівняння тобто

$$(f, \psi_s) = 0, \quad s = \overline{1, N - q} \quad (2.2.25)$$

Дійсно, маємо:

$$\begin{aligned}
(f, \psi_s) &= \int_G f(x) \overline{\psi_s}(x) \, dx = \\
&= \lambda \sum_{i=1}^N \overline{d}_{si} \int_G f(x) g_i(x) \, dx = \\
&= \lambda \sum_{i=1}^N a_i \overline{d}_{si} = \\
&= \lambda(\vec{a}, \vec{d}_s) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

для всіх  $s = \overline{1, N-q}$ .

В цьому випадку розв'язок СЛАР не єдиний, і визначається з точністю до довільного розв'язку однорідної системи рівнянь, тобто з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних векторів характеристичного числа  $\lambda$ :

$$\vec{c} = \vec{c}_0 + \sum_{i=1}^{N-q} \gamma_i \vec{c}_i, \tag{2.2.27}$$

де  $\gamma_i$  — довільні константи,  $\vec{c}_0$  — будь-який розв'язок неоднорідної системи рівнянь  $\vec{c}_0 = \lambda A \vec{c}_0 + \vec{a}$ , тоді розв'язок інтегрального рівняння можна записати у вигляді:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{N-q} \gamma_i \varphi_i(x), \tag{2.2.28}$$

де  $\varphi_0$  — довільний розв'язок неоднорідного рівняння  $\varphi_0 = \lambda \mathbf{K} \varphi_0 + f$ .

Отже доведені такі теореми:

**Теорема 2.2.1.2 (Перша теорема Фредгольма для вироджених ядер)**

Якщо  $D(\lambda) \neq 0$ , то інтегральне рівняння Фредгольма II роду та спряжене до нього мають єдині розв'язки для довільних вільних членів  $f$  та  $g$  з класу неперервних функцій.

**Теорема 2.2.1.3 (Друга теорема Фредгольма для вироджених ядер)**

Якщо  $D(\lambda) = 0$ , то однорідне ( $f \equiv 0$ ) рівняння Фредгольма другого роду і спряжене до нього ( $g \equiv 0$ ) мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків рівну  $N - q$ , де  $q = \text{rang}(E - \lambda A)$ .

**Теорема 2.2.1.4 (Третя теорема Фредгольма для вироджених ядер)**

Якщо  $D(\lambda) = 0$ , то для існування розв'язків рівняння Фредгольма II роду необхідно і достатньо, щоб вільний член  $f$  був ортогональним усім розв'язкам однорідного спряженого рівняння. При виконанні цієї умови розв'язок існує та не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій характеристичного числа  $\lambda$ .

**Наслідок 2.2.1.1**

Характеристичні числа виродженого ядра  $K(x, y)$  співпадають з коренями поліному  $D(\lambda) = 0$ , а їх кількість не перевищує  $N$ .

### Приклад 2.2.1.1

Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-y)\varphi(y) dy + \cos(x).$$

*Розв'язок.* Перш за все перепишемо ядро у виродженому вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda \sin(x) \int_0^{\pi} \cos(y)\varphi(y) dy - \lambda \cos(x) \int_0^{\pi} \sin(y)\varphi(y) dy + \cos(x).$$

Позначимо

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos(y)\varphi(y) dy, \quad c_2 = \int_0^{\pi} \sin(y)\varphi(y) dy,$$

тоді

$$\varphi(x) = \lambda(c_1 \sin(x) - c_2 \cos(x)) + \cos(x).$$

Підставляючи останню рівність в попередні отримаємо систем рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^{\pi} \cos(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y)) dy, \\ c_2 = \int_0^{\pi} \sin(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y)) dy. \end{cases}$$

Після обчислення інтегралів:

$$\begin{cases} c_1 + \frac{\lambda\pi}{2}c_2 = \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\lambda\pi}{2}c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda\pi}{2} \\ -\frac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 \neq 0.$$

За правилом Крамера маємо

$$c_1 = \frac{2\pi}{4 + (\lambda\pi)^2}, \quad c_2 = \frac{\lambda\pi^2}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

Таким чином розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi \sin(x) + 4 \cos(x)}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

### 2.2.2 Теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром

Будемо розглядати рівняння:

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad (2.2.29)$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x, y) \psi(y) dy + g(x), \quad (2.2.30)$$

Ядро  $K(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ , отже його можна наблизити поліномом (Теорема Вейерштраса).

Тобто, для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує

$$P_N(x, y) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \quad (2.2.31)$$

де  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ , такий що  $|K(x, y) - P_N(x, y)| < \varepsilon$ ,  $(x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}$ , тобто

$$K(x, y) = P_N(x, y) + Q_N(x, y), \quad (2.2.32)$$

де  $P_N(x, y)$  — вироджене ядро (поліном),  $|Q_N(x, y)| < \varepsilon$ ,  $(x, y) \in \overline{G} \times \overline{G}$ .

Виходячи з останньої рівності, інтегральне рівняння Фредгольма приймає вигляд

$$\varphi = \lambda \mathbf{P}_N \varphi + \lambda \mathbf{Q}_N \varphi + f, \quad (2.2.33)$$

де  $\mathbf{P}_N$  та  $\mathbf{Q}_N$  — інтегральні оператори з ядрами  $P_N(x, y)$  та  $Q_N(x, y)$  відповідно ( $\mathbf{P}_N + \mathbf{Q}_N = \mathbf{K}$ ).

Для спряженого рівняння маємо:

$$K^*(x, y) = P_N^*(x, y) + Q_N^*(x, y), \quad (2.2.34)$$

і

$$\psi = \bar{\lambda} \mathbf{P}_N^* \psi + \bar{\lambda} \mathbf{Q}_N^* \psi + g. \quad (2.2.35)$$

#### Твердження 2.2.2.1

В класі  $C(G)$  отримані рівняння

$$\varphi = \lambda \mathbf{P}_N \varphi + \lambda \mathbf{Q}_N \varphi + f, \quad (2.2.36)$$

$$\psi = \bar{\lambda} \mathbf{P}_N^* \psi + \bar{\lambda} \mathbf{Q}_N^* \psi + g \quad (2.2.37)$$

еквівалентні рівнянням з виродженим ядром.

*Доведення.* Введемо нову функцію

$$\Phi = \varphi - \lambda \mathbf{Q}_N \varphi \quad (2.2.38)$$

З рівняння на  $\varphi$  випливає що  $\Phi = \lambda \mathbf{P}_N + f$ , а з однією із рівностей твердження 2.1.3.1 (перша лекція) випливає що  $\forall \lambda$  такого що  $|\lambda| < 1/(\varepsilon V)$ :

$$(E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} = (E + \lambda \mathbf{R}_N), \quad (2.2.39)$$

де  $\mathbf{R}_N$  — резольвента для  $\mathbf{Q}_N$ . Отже

$$\varphi = (E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} \Phi = (E + \lambda \mathbf{R}_N) \Phi. \quad (2.2.40)$$

Тобто, рівняння Фредгольма II роду перетворюється на

$$\Phi = \lambda \mathbf{P}_N (E + \lambda \mathbf{R}_N) \Phi. \quad (2.2.41)$$

Для спряженого рівняння маємо:

$$\psi = \bar{\lambda} (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) \mathbf{P}_N^* \psi + (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) g. \quad (2.2.42)$$

Позначимо  $g_1 = (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) g$ . Маємо:

$$\psi = \bar{\lambda} (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) \mathbf{P}_N^* \psi + g_1. \quad (2.2.43)$$

Оскільки  $(\mathbf{P}_N \mathbf{R}_N)^* = \mathbf{R}_N^* \mathbf{P}_N^*$ , то отримані рівняння спряжені.

Позначимо нарешті

$$\mathbf{T}_N = \mathbf{P}_N (E + \lambda \mathbf{R}_N), \quad (2.2.44)$$

$$\mathbf{T}_N^* = (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) \mathbf{P}_N^*. \quad (2.2.45)$$

Тоді рівняння Фредгольма з неперервним ядром можна записати у вигляді:

$$\Phi = \lambda \mathbf{T}_N \Phi + f, \quad (2.2.46)$$

$$\Psi = \bar{\lambda} \mathbf{T}_N^* \Psi + g_1, \quad (2.2.47)$$

де

$$T_N(x, y, \lambda) = P_N(x, y) + \lambda \int_G P_N(x, \xi) R_N(\xi, y, \lambda) d\xi \quad (2.2.48)$$

— вироджене, оскільки є сумою двох вироджених, поліному  $P_N(x, y)$ , та інтегрального доданку. Покажемо що другий доданок в  $T_N$  — вироджений. Дійсно:

$$\int_G \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha \xi^\beta R_N(\xi, y) d\xi = \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha \int_G \xi^\beta R_N(\xi, y) d\xi. \quad (2.2.49)$$

□



### 2.2.3 Альтернатива Фредгольма

Сукупність теорем Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром називається альтернативою Фредгольма.

#### Теорема 2.2.3.1 (Перша теорема Фредгольма для неперервних ядер)

Якщо інтегральне рівняння Фредгольма II роду з неперервним ядром  $K(x, y)$  має розв'язок  $\forall f \in C(\overline{G})$  то і спряжене рівняння має розв'язок для  $\forall g \in C(\overline{G})$  і ці розв'язки єдині.

*Доведення.* Нехай інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок в  $C(\overline{G})$  для  $\forall$  вільного члена  $f$ , тоді еквівалентне йому рівняння  $\Phi = \lambda \mathbf{T}_N \Phi + F$  має такі ж властивості і згідно з першою теоремою Фредгольма для вироджених ядер  $D(\lambda) \neq 0$ , а спряжене до нього рівняння  $\Psi = \overline{\lambda} \mathbf{T}_N^* \Psi + g_1$  теж має єдиний розв'язок  $\forall$  вільного члена  $g_1$ , еквівалентне до нього (і спряжене до початкового) рівняння має розв'язок  $\forall g$ .  $\square$

#### Теорема 2.2.3.2 (Друга теорема Фредгольма для неперервних ядер)

Якщо інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язки не для будь-якого вільного члена  $f$ , то однорідні рівняння  $\varphi = \lambda \mathbf{K} \varphi$  та  $\psi = \overline{\lambda} \mathbf{K}^* \psi$  мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків.

*Доведення.* Нехай інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок не  $\forall$  вільного члена  $f$ , тоді еквівалентне йому рівняння з виродженим ядром  $\Phi = \lambda \mathbf{T}_N \Phi + F$  має таку ж властивість. Згідно з теоремами Фредгольма для вироджених ядер  $D(\lambda) = 0$  (для виродженого ядра  $\mathbf{T}_N$ ). Однорідні рівняння які їм відповідають мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків, еквівалентні до них однорідні рівняння  $\varphi = \lambda \mathbf{K} \varphi$  та  $\psi = \overline{\lambda} \mathbf{K}^* \psi$  теж мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв'язків.  $\square$

### Теорема 2.2.3.3 (Третя теорема Фредгольма для неперервних ядер)

Якщо інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок не для довільного вільного члена  $f$ , то для існування розв'язку інтегрального рівняння в  $C(\overline{G})$  необхідно і достатньо, щоб вільний член  $f$  був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння. Розв'язок не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки, натягнутої на систему власних функцій оператора  $\mathbf{K}$ .

*Доведення.* Нехай неоднорідне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок не для будь-якого вільного члена  $f$ , тоді еквівалентне рівняння з виродженим ядром має таку ж властивість, і за третьою теоремою Фредгольма для вироджених ядер  $D(\lambda) = 0$  (для виродженого ядра  $\mathbf{T}_N$ ). Розв'язок цього еквівалентного рівняння існує тоді і тільки тоді коли  $f$  ортогональний до розв'язків спряженого однорідного рівняння. Але легко бачити, що вільний член початкового і еквівалентного рівнянь співпадають, так само співпадають розв'язки вихідного спряженого однорідного рівняння та еквівалентного.  $\square$

**Зауваження 2.2.3.1** — Для доведення теорем для будь-якого фіксованого значення  $\lambda$  вибиралося  $\varepsilon$ , таке щоби  $|\lambda| < 1/(\varepsilon V)$ .

### Теорема 2.2.3.4 (Четверта теорема Фредгольма)

Для будь-якого як завгодно великого числа  $R > 0$  в крузі  $|\lambda| < R$  лежить лише скінчена кількість характеристичних чисел неперервного ядра  $K(x, y)$ .

**Вправа 2.2.3.1.** Доведіть четверту теорему Фредгольма.

## 2.2.4 Наслідки з теорем Фредгольма

### Наслідок 2.2.4.1

З четвертої теореми Фредгольма випливає, що множина характеристичних чисел неперервного ядра не має скінчених граничних точок і не більш ніж злічена  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$ .

**Вправа 2.2.4.1.** Доведіть цей наслідок.

#### Наслідок 2.2.4.2

З другої теореми Фредгольма випливає, що кратність кожного характеристичного числа скінчена, їх можна занумерувати у порядку зростання модулів  $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}| \leq \dots$ , кожне число зустрічається стільки разів, яка його кратність. Також можна занумерувати послідовність власних функцій ядра  $K(x, y)$ :  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots$  і спряженого ядра  $K^*(x, y)$ :  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \psi_{k+1}, \dots$

**Вправа 2.2.4.2.** Доведіть цей наслідок.

#### Наслідок 2.2.4.3

Власні функції неперервного ядра  $K(x, y)$  неперервні в області  $G$ .

**Вправа 2.2.4.3.** Доведіть цей наслідок.

#### Наслідок 2.2.4.4

Якщо  $\lambda_k \neq \lambda_j$ , то  $(\varphi_k, \psi_j) = 0$ .

**Вправа 2.2.4.4.** Доведіть цей наслідок.

### 2.2.5 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром

Розповсюдимо теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром:

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < n. \quad (2.2.50)$$

Покажемо що  $\forall \varepsilon > 0$  існує таке вироджене ядро  $P_N(x, y)$  що,

$$\max_{x \in G} \int_G |K(x, y) - P_N(x, y)| dy < \varepsilon, \quad (2.2.51)$$

$$\max_{x \in \overline{G}} \int_G |K^*(x, y) - P_N^*(x, y)| dy < \varepsilon. \quad (2.2.52)$$

Розглянемо неперервне ядро

$$L_M(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & |x - y| \geq 1/M, \\ A(x, y)M^\alpha, & |x - y| < 1/M. \end{cases} \quad (2.2.53)$$

#### Твердження 2.2.5.1

При достатньо великому  $M$  має місце оцінка

$$\int_G |K(x, y) - L_M(x, y)| dy \leq \varepsilon. \quad (2.2.54)$$

*Доведення.* Дійсно:

$$\begin{aligned} \int_G |K(x, y) - L_M(x, y)| dy &= \int_{|x-y| < 1/M} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - A(x, y)M^\alpha \right| dy = \\ &= \int_{|x-y| < 1/M} |A(x, y)| \left| \frac{1}{|x - y|^\alpha} - M^\alpha \right| dy \leq \\ &\leq A_0 \int_{|x-y| < 1/M} \left| \frac{1}{|x - y|^\alpha} - M^\alpha \right| dy \leq \\ &\leq A_0 \int_{|x-y| < 1/M} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} = \\ &= A_0 \sigma_n \int_0^{1/M} \xi^{n-1-\alpha} d\xi = \\ &= A_0 \sigma_n \left. \frac{\xi^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right|_0^{1/M} = \\ &= \frac{A_0 \sigma_n}{(n-\alpha)M^{n-\alpha}} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

де  $\sigma_n$  — площа поверхні одиничної сфери.  $\square$

Завжди можна підібрати вироджене ядро  $P_N(x, y)$  таке що

$$|L_M(x, y) - P_N(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{2V}, \quad (2.2.56)$$

де  $V$  — об'єм області  $G$ .

$$\begin{aligned} \int_G |K(x, y) - P_N(x, y)| dy &= \int_G |K(x, y) - L_M(x, y) + \\ &\quad + L_M(x, y) - P_N(x, y)| dy \leq \\ &\leq \int_G |K(x, y) - L_M(x, y)| dy + \\ &\quad + \int_G |L_M(x, y) - P_N(x, y)| dy \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2V} \int_G dy = \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.2.57)$$

Використавши попередню техніку (для неперервного ядра) інтегральне рівняння з полярним ядром зводиться до еквівалентного рівняння з виродженим ядром. Тобто теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром з тим же самим формулюванням.

Теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром на обмеженій кусково-гладкій поверхні  $S$  та контурі  $C$ :

$$\varphi(x) = \lambda \int_S K(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < \dim(S). \quad (2.2.58)$$

## 2.3 Інтегральні рівняння з ермітовим ядром

Розглядатимемо ядро  $K(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$  таке що  $K(x, y) = K^*(x, y)$ .

**Визначення 2.3.0.1** (ермітового ядра). Неперервне ядро будемо називати *ермітовим*, якщо виконується

$$K(x, y) = K^*(x, y). \quad (2.3.1)$$

**Зауваження 2.3.0.1** — Ермітовому ядру відповідає ермітовий оператор тобто  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$ .

**Лема 2.3.0.1**

Для того, щоб лінійний оператор був ермітовим, необхідно і достатньо, щоб для довільної комплексно значної функції  $f \in L_2(\overline{G})$  білінійна форма  $(\mathbf{K}f, f)$  приймала лише дійсні значення.

**Вправа 2.3.0.1.** Доведіть цю лему.

**Лема 2.3.0.2**

Характеристичні числа ермітового оператора дійсні.

**Вправа 2.3.0.2.** Доведіть цю лему.

**Визначення 2.3.0.2** (компактної в рівномірній метриці множини функцій). Множина функцій  $M \subset C(\overline{G})$  — *компактна в рівномірній метриці*, якщо з будь-якої нескінченної множини функцій з  $M$  можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність.

**Визначення 2.3.0.3** (рівномірно обмеженої множини функцій). Нескінченна множина  $M \subset C(\overline{G})$  — *рівномірно обмежена*, якщо для будь-якого елемента  $f \in M$  має місце  $\|f\|_{C(\overline{G})} \leq a$ , де  $a$  єдина константа для  $M$ .

**Визначення 2.3.0.4** (одностайно неперервної множини функцій). Множина  $M \subset C(\overline{G})$  — *одностайно неперервна* якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \forall f \in M, \forall x_1, x_2 : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$  як тільки  $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ .

**Теорема 2.3.0.1** (Арчела-Асколі, критерій компактності в рівномірній метриці)

Для того, щоб множина  $M \subset C(\overline{G})$  була компактною, необхідно і достатньо, щоб вона складалась з рівномірно-обмеженої і одностайно-неперервної множини функцій.

**Задача 2.3.1\*.** Доведіть теорему Арчела-Асколі.

**Визначення 2.3.0.5** (цілком неперервного оператора). Назвемо оператор  $\mathbf{K}$  *цілком неперервним* з  $L_2(G)$  у  $C(\overline{G})$ , якщо він переводить обмежену множину в  $L_2(G)$  у компакту множину в  $C(\overline{G})$  (в рівномірній метриці).

**Лема 2.3.0.3** (про цілком неперервність інтегрального оператора з неперервним ядром)

Інтегральний оператор  $\mathbf{K}$  з неперервним ядром  $K(x, y)$  є цілком неперервний з  $L_2(G)$  у  $C(\overline{G})$ .

*Доведення.* Нехай  $f \in M \subset L_2(G)$  та  $\forall f \in M: \|f\|_{L_2(G)} \leq A$ . Але

$$\|\mathbf{K}f\|_{C(\overline{G})} \leq M\sqrt{V}\|f\|_{L_2(G)} \leq M\sqrt{V}A, \quad (2.3.2)$$

тобто множина функцій є рівномірно обмеженою.

Покажемо що множина  $\{\mathbf{K}f(x)\}$  — одностайно неперервна.

Ядро  $K \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ , а отже є рівномірно неперервним, бо неперервне на компактї, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overline{G} : \|x' - x''\| < \delta \implies |(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| \leq \varepsilon. \quad (2.3.3)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} |(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| &= \left| \int_G K(x', y)f(y) dy - \int_G K(x'', y)f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_G (|K(x', y) - K(x'', y)| \cdot |f(y)|) dy \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon\sqrt{V}}{A\sqrt{V}} \cdot \|f\|_{L_2(\overline{G})} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

□

### Приклад 2.3.0.1

Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального оператора

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left( \left( \frac{x}{t} \right)^{2/5} + \left( \frac{t}{x} \right)^{2/5} \right) \varphi(t) dt.$$

*Розв'язок.* Розділимо ядро наступним чином:

$$\varphi(x) = \lambda x^{2/5} \int_0^1 t^{-2/5} \varphi(t) dt + \lambda x^{-2/5} \int_0^1 t^{2/5} \varphi(t) dt.$$

Позначимо

$$c_1 = \int_0^1 t^{-2/5} \varphi(t) dt, \quad c_2 = \int_0^1 t^{2/5} \varphi(t) dt,$$

тоді

$$\varphi(x) = \lambda c_1 x^{2/5} + \lambda c_2 x^{-2/5}.$$

Підставляючи  $\varphi$  назад у  $c_i$  маємо СЛАР

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 t^{-2/5} (\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5}) dt, \\ c_2 = \int_0^1 t^{2/5} (\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5}) dt. \end{cases}$$

Інтегруючи знаходимо

$$\begin{cases} (1 - \lambda)c_1 - 5\lambda c_2 = 0, \\ -\frac{5\lambda}{9}c_1 + (1 - \lambda)c_2 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї СЛАР

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -5\lambda \\ -\frac{5\lambda}{9} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - \frac{25\lambda^2}{9} = 0,$$



тобто власні числа

$$\lambda_1 = \frac{3}{8}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

З системи однорідних рівнянь при  $\lambda = \lambda_1 = 3/8$  маємо  $c_1 = 3c_2$ . Тоді маємо власну функцію

$$\varphi_1(x) = 3x^{2/5} + x^{-2/5}.$$

При  $\lambda = \lambda_2 = -3/2$  маємо  $c_1 = -3c_2$ . Маємо другу власну функцію

$$\varphi_2(x) = -3x^{2/5} + x^{-2/5}.$$

### Приклад 2.3.0.2

Знайти розв'язок інтегрального рівняння при всіх значеннях параметрів  $\lambda$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \varphi(y) dy + ax^2 + bx + c.$$

*Розв'язок.* Запишемо рівняння у вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda \sqrt[3]{x} \int_{-1}^1 \varphi(y) dy + \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{y} \cdot \varphi(y)) dy + ax^2 + bx + c.$$

Введемо позначення:

$$c_1 = \int_{-1}^1 \varphi(y) dy, \quad c_2 = \int_{-1}^1 \sqrt[3]{y} \varphi(y) dy,$$

та запишемо розв'язок у вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda \sqrt[3]{x} c_1 + \lambda c_2 + ax^2 + bx + c$$

Для визначення констант отримаємо СЛАР:

$$\begin{cases} c_1 - 2\lambda c_2 = \frac{2a}{3} + 2c, \\ -\frac{6\lambda}{5} c_1 + c_2 = \frac{6b}{7}. \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{6\lambda}{5} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{12\lambda^2}{5}.$$

Характеристичні числа ядра

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Нехай  $\lambda \neq \lambda_1$ ,  $\lambda \neq \lambda_2$ . Тоді розв'язок існує та єдиний для будь-якого вільного члена і має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{5\lambda(14a + 30\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{28\lambda a + 84\lambda c + 30b}{7(5 - 12\lambda^2)} + ax^2 + bx + c.$$

Нехай

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Тоді система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} c_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \frac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6b}{7}. \end{cases}$$

Ранги розширеної і основної матриці співпадатимуть якщо має місце рівність

$$\frac{2a}{3} + 2c = -\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{6}{7} \cdot b \quad (*)$$

При виконанні цієї умови розв'язок існує

$$c_2 = c, \quad c_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}c + \frac{2a}{3} + 2c.$$

Таким чином розв'язок можна записати

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x} \left( \sqrt{\frac{5}{3}}c + \frac{2a}{3} + 2c \right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c + ax^2 + bx + x.$$

Якщо

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$$

а умова  $(\star)$  не виконується, то розв'язків не існує.

Нехай

$$\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Після підстановки цього значення отримаємо СЛАР

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \frac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6b}{7}. \end{cases}$$

Остання система має розв'язок при умові

$$\frac{2a}{3} + 2c = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{6}{7} \cdot b, \quad (\star\star)$$

При виконанні умови  $(\star\star)$ , розв'язок існує

$$c_2 = c_2, \quad c_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c.$$

Розв'язок інтегрального рівняння можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x} \left( -\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c \right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + c.$$

### 2.3.1 Характеристичні числа ермітового неперервного ядра

**Теорема 2.3.1.1** (про існування характеристичного числа у ермітового неперервного ядра)

Для будь-якого ермітового неперервного ядра, що не дорівнює тотожно нулю існує принаймні одне характеристичне число і найменше з них за модулем  $\lambda_1$  задовольняє варіаційному принципу

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}}. \quad (2.3.5)$$

*Доведення.* Серед усіх  $f \in L_2$  оберемо такі, що  $\|f\|_{L_2(G)} = 1$ . Позначимо

$$\nu = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ \|f\|_{L_2} = 1}} \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}. \quad (2.3.6)$$

Оскільки

$$\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq MV \|f\|_{L_2(G)} \leq MV, \quad (2.3.7)$$

то  $0 \leq \nu \leq MV$ .

Згідно до визначення точної верхньої межі,

$$\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(G) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{K}f_k\|_{L_2(G)} = \nu. \quad (2.3.8)$$

Оцінимо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}^2 f\|_{L_2(G)} &= \|\mathbf{K}(\mathbf{K}f)\|_{L_2(G)} = \\ &= \left\| \mathbf{K} \left( \frac{\mathbf{K}f}{\|\mathbf{K}f\|} \right) \right\|_{L_2(G)} \cdot \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq \\ &\leq \nu \cdot \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq \nu^2. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Покажемо, що  $\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k \rightarrow 0$  в середньому квадратичному. Тобто що

$$\|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.3.10)$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 &= (\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k, \mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k)_{L_2(G)} = \\ &= \|\mathbf{K}^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 + \nu^4 - \nu^2 (\mathbf{K}^2 f_k, f_k) - \nu^2 (f_k, \mathbf{K}^2 f_k) = \\ &= \|\mathbf{K}^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \|\mathbf{K}f_k\|_{L_2(G)}^2 \leq \\ &\leq \nu^2 (\nu^2 - \|\mathbf{K}^2 f_k\|_{L_2(G)}^2) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Розглянемо послідовність  $\{\mathbf{K}f_k\} = \{\varphi_k\}$ , яка є компактною в рівномірній метриці.

У неї існує підпослідовність  $\{\varphi_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$  збіжна в  $C(\overline{G})$ , тобто  $\exists \varphi \in C(\overline{G})$ , така що  $\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\overline{G})} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ .

Покажемо, що  $\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi = 0$  в кожній точці, тобто  $\|\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi\|_{C(\overline{G})} = 0$ .

Справді,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi\|_{C(\overline{G})} &= \|\mathbf{K}^2\varphi - \mathbf{K}^2\varphi_{k_i} + \mathbf{K}^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi_{k_i} + \nu^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq \\ &\leq \|\mathbf{K}^2\varphi - \mathbf{K}^2\varphi_{k_i}\|_{C(\overline{G})} + \|\mathbf{K}^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi_{k_i}\|_{C(\overline{G})} + \\ &\quad + \|\nu^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq \\ &\leq (MV)^2\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\overline{G})} + M\sqrt{V}\|\mathbf{K}^2f_{k_i} - \nu^2f_{k_i}\|_{L_2(\overline{G})} + \\ &\quad + \nu^2\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\overline{G})} \rightarrow 0 + 0 + 0. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Таким чином має місце рівність

$$\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi = 0 \tag{2.3.13}$$

Отже маємо:  $(\mathbf{K} + E\nu)(\mathbf{K} - E\nu)\varphi = 0$ . Ця рівність може мати місце у двох випадках:

1.  $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv 0$ . Тоді  $\varphi = \frac{1}{\nu}\mathbf{K}\varphi$ , а отже  $\varphi$  — власна функція,  $\frac{1}{\nu}$  — характеристичне число оператора  $\mathbf{K}$ .
2.  $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv \Phi \neq 0$ . Тоді  $(\mathbf{K} + E\nu)\Phi \equiv 0$ . Тоді  $\Phi = -\frac{1}{\nu}\mathbf{K}\Phi$ , а отже  $\Phi$  — власна функція,  $-\frac{1}{\nu}$  — характеристичне число оператора  $\mathbf{K}$ .

Залишилось довести, що це характеристичне число є мінімальним за модулем. Припустимо супротивне. Нехай  $\exists \lambda_0 : |\lambda_0| < |\lambda_1|$ , тоді

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K}f\|}{\|f\|} \geq \frac{\|\mathbf{K}\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{|\lambda_0|}, \tag{2.3.14}$$

тобто  $|\lambda_0| \geq |\lambda_1|$ , протиріччя. □

**Зауваження 2.3.1.1** — Доведена теорема є вірною і для ермітових полярних ядер,

Звідси безпосередньо випливають такі

**Властивості 2.3.1.1** (характеристичних чисел та власних функцій ермітового ядра)

Нескладно показати, що:

1. Множина характеристичних чисел ермітового неперервного ядра не порожня, є підмножиною множини дійсних чисел і не має скінчених граничних точок.
2. Кратність будь-якого характеристичного числа скінчена.
3. Власні функції можна вибрати так, що вони утворюють ортонормовану систему, тобто  $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\dots}$  такі що  $(\varphi_k, \varphi_i)_{L_2(G)} = \delta_{ki}$ .

**Зауваження 2.3.1.2** — Для доведення останньої властивості достатньо провести процес ортогоналізації Гілберта-Шмідта для будь-якої системи лінійно незалежних власних функцій, і пронормувати отриману систему.

## 2.4 Теорема Гілберта-Шмідта та її наслідки

### 2.4.1 Білінійне розвинення ермітового неперервного ядра

Нехай  $K(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$  — ермітове неперервне ядро,  $|\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}|$ ,  $i = 1, 2, \dots$  — його характеристичні числа і  $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$  — ортонормована система власних функцій, що відповідають власним числам.

Розглянемо послідовність ермітових неперервних ядер:

$$K^p(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\overline{\varphi}_i(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.4.1)$$

Зрозуміло що при цьому

$$K^p(x, y) = (K^p)^*(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G}). \quad (2.4.2)$$

Дослідимо властивості повторних ермітових операторів.

#### Твердження 2.4.1.1

Будь-яке характеристичне число  $\lambda_j$ ,  $j > p + 1$  та відповідна йому власна функція  $\varphi_j$  є характеристичним числом і власною функцією ядра  $K^p(x, y)$ .

*Доведення.* Справді:

$$\mathbf{K}^p \varphi_j = \mathbf{K} \varphi_j - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} (\varphi_i, \varphi_j) = \mathbf{K} \varphi_j = \frac{\varphi_j}{\lambda_j}. \quad (2.4.3)$$

□

Нехай  $\lambda_0$ ,  $\varphi_0$  — характеристичне число та відповідна власна функція  $K^p(x, y)$ , тобто  $\lambda_0 \mathbf{K}^p \varphi_0 = \varphi_0$ .

#### Твердження 2.4.1.2

$(\varphi_0, \varphi_j) = 0$  для  $j = \overline{1, p}$ .

*Доведення.* З того, що  $\varphi_0$  є власною функцією ядра  $\mathbf{K}^p$  випливає, що

$$\varphi_0 = \lambda_0 \mathbf{K} \varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i}{\lambda_i} (\varphi_0, \varphi_i). \quad (2.4.4)$$

Підставляючи цей вираз для  $\varphi_0$  у потрібний скалярний добуток маємо

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_j) &= \lambda_0 (\mathbf{K} \varphi_0, \varphi_j) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_j)}{\lambda_i} = \\ &= \frac{\lambda_0}{\lambda_j} (\varphi_0, \varphi_j) - \frac{\lambda_0}{\lambda_j} (\varphi_0, \varphi_j) = 0. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

□

Отже  $\lambda_0$ ,  $\varphi_0$  відповідно характеристичне число і власна функція ядра  $K(x, y)$ .

Таким чином  $\varphi_0$  — ортогональна до усіх власних функцій  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ . Але тоді  $\lambda_0$  співпадає з одним із характеристичних чисел  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$  тобто  $\varphi_0 = \varphi_k$  для деякого  $k \geq p + 1$ .

Отже у ядра  $K^p(x, y)$  множина власних функцій і характеристичних чисел вичерпується множиною власних функцій і характеристичних чисел ядра  $K(x, y)$  починаючи з номера  $p + 1$ .

Враховуючи, що  $\lambda_{p+1}$  — найменше за модулем характерне число ядра  $K^p(x, y)$ , має місце нерівність

$$\frac{\|\mathbf{K}^p f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}} \leq \frac{1}{|\lambda_{p+1}|}. \quad (2.4.6)$$

Для ядра, що має скінчену кількість характеристичних чисел, очевидно, має місце рівність

$$K^N(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \equiv 0. \quad (2.4.7)$$

Тобто будь-яке ермітове ядро зі скінченною кількістю характеристичних чисел є виродженим і представляється у вигляді

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \quad (2.4.8)$$

Враховуючи теорему про існування характеристичних чисел у ермітового оператора можемо записати:

$$\|K^{(p)} f\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}f - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} \leq \frac{\|f\|_{L_2(G)}}{|\lambda_{p+1}|} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \quad (2.4.9)$$

Тобто можна вважати, що ермітове ядро в певному розумінні наближається наступним білінійним рядом:

$$K(x, y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \quad (2.4.10)$$

Для виродженого ядра маємо його представлення у вигляді

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \quad (2.4.11)$$

#### 2.4.2 Ряд Фур'є функції із $L_2(G)$

Розглянемо довільну функцію  $f \in L_2(G)$  і деяку ортонормовану систему функцій  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ .



**Визначення 2.4.2.1** (ряду Фур'є). *Рядом Фур'є* функції  $f$  із  $L_2(G)$  називається

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i \sim f. \quad (2.4.12)$$

**Визначення 2.4.2.2** (коефіцієнта Фур'є). Вираз  $(f, u_i)$  називається *коефіцієнтом Фур'є*.

#### Теорема 2.4.2.1 (нерівність Бесселя)

$\forall f \in L_2(G)$  виконується *нерівність Бесселя*:  $\forall N$

$$\sum_{i=1}^N |(f, u_i)|^2 \leq \|f\|_{L_2(G)}^2. \quad (2.4.13)$$

**Зауваження 2.4.2.1** — Нерівність Бесселя гарантує збіжність ряду Фур'є в середньоквадратичному, але не обов'язково до функції  $f$ .

**Визначення 2.4.2.3** (повної (замкненої) системи функцій). Ортонормована система функцій  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  називається *повною (замкненою)*, якщо ряд Фур'є для будь-якої функції  $f \in L_2(G)$  по цій системі функцій збігається до цієї функції в просторі  $L_2(G)$ .

#### Теорема 2.4.2.2 (критерій повноти ортонормованої системи функцій)

Для того щоб система функцій  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  була повною в  $L_2(G)$  необхідно і достатньо, щоби для будь-якої функції  $f \in L_2(G)$  виконувалась рівність Парсеваля-Стеклова:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, u_i)|^2 = \|f\|_{L_2(G)}^2. \quad (2.4.14)$$

### 2.4.3 Теорема Гільберта-Шмідта

**Визначення 2.4.3.1** (джерелувато-зображуваної функції). Функція  $f(x)$  називається *джерелувато-зображуваною* через ермітове неперервне ядро  $K(x, y) = K^*(x, y)$ ,  $K \in C(G \times G)$ , якщо існує функція  $h(x) \in L_2(G)$ , така що

$$f(x) = \int_G K(x, y)h(y) dy. \quad (2.4.15)$$

### Теорема 2.4.3.1 (Гільберта-Шмідта)

Довільна джерелувато-зображувана функція  $f$  розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою власних функцій ермітового неперервного ядра  $K(x, y)$

*Доведення.* Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$(f, \varphi_i) = (\mathbf{K}h, \varphi_i) = (h, \mathbf{K}\varphi_i) = \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i}. \quad (2.4.16)$$

Отже ряд Фур'є функції  $f$  має вигляд

$$f \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \quad (2.4.17)$$

Якщо власних чисел скінченна кількість, то можливе точне представлення

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i(x), \quad (2.4.18)$$

якщо ж власних чисел злічена кількість, то можемо записати:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^p \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}h - \sum_{i=1}^p \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \quad (2.4.19)$$

Покажемо, що формулу

$$K(x, y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}. \quad (2.4.20)$$

можна розглядати як розвинення ядра  $K(x, y)$  в ряд Фур'є по системі власних функцій  $\varphi_i(x)$ . Перевіримо це обчислюючи коефіцієнт Фур'є:

$$\begin{aligned} (K(x, y), \varphi_i)_{L_2(G)} &= \int_G K(x, y) \overline{\varphi_i}(x) dx = \\ &= \int_G \overline{K(y, x)} \overline{\varphi_i}(x) dx = \frac{\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}. \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Доведемо рівномірну збіжність ряду Фур'є за критерієм Коші і покажемо, що при  $n, m \rightarrow \infty$ , відрізок ряду прямує до нуля. За нерівністю Коші-Буняківського маємо:

$$\left| \sum_{i=n}^m \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right| \leq \sum_{i=n}^m |(h, \varphi_i)| \frac{|\varphi_i|}{|\lambda_i|} \leq \left( \sum_{i=n}^m |(h, \varphi_i)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=n}^m \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \right)^{1/2} \quad (2.4.22)$$

Але

$$\sum_{i=n}^m |(h, \varphi_i)|^2 \leq \|h\|_{L_2(G)}^2, \quad (2.4.23)$$

тобто ряд збігається, а вказана сума прямує до 0 при  $n, m \rightarrow \infty$ . Зокрема маємо

$$\sum_{i=n}^m \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \leq \int_G |K(x, y)|^2 dx \leq M^2 V, \quad (2.4.24)$$

тобто ряд збігається.

Отже

$$\left( \sum_{i=n}^m |(h, \varphi_i)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=n}^m \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \right)^{1/2} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0, \quad (2.4.25)$$

а отже

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \quad (2.4.26)$$

збігається абсолютно і рівномірно.  $\square$

#### Наслідок 2.4.3.1

Довільне повторне ядро для ермітового неперервного ядра  $K(x, y)$  розкладається в білінійний ряд по системі власних функцій ермітового неперервного ядра, який збігається абсолютно і рівномірно, а саме рядом

$$K_{(p)}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i^p}, \quad (2.4.27)$$

де  $p = 2, 3, \dots$ , і коефіцієнти Фур'є  $\overline{\varphi_i(y)}/\lambda_i^p$ .

Повторне ядро  $K_{(p)}(x, y) = \int_G K(x, \xi) K_{(p-1)}(\xi, y) d\xi$  є джерелувато-зображувана функція і таким чином для нього має місце теорема Гільберта-Шмідта.

Доведемо деякі важливі рівності:

$$\begin{aligned} K_{(2)}(x, x) &= \int_G K(x, \xi) K(\xi, x) d\xi = \\ &= \int_G K(x, \xi) \overline{K(x, \xi)} d\xi = \\ &= \int_G |K(x, \xi)|^2 d\xi = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i^2}. \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

**Зауваження 2.4.3.1** — Останій перехід впливає з наслідку вище.

Проінтегруємо отримане співвідношення, отримаємо

$$\iint_{G \times G} |K(x, y)|^2 dx dy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}. \quad (2.4.29)$$

**Теорема 2.4.3.2** (про збіжність білінійного ряду для ермітового неперервного ядра)

Ермітове неперервне ядро  $K(x, y)$  розкладається в білінійний ряд

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \quad (2.4.30)$$

по своїх власних функціях, і цей ряд збігаються в нормі  $L_2(G)$  по аргументу  $x$  рівномірно для кожного  $y \in \bar{G}$ , тобто

$$\left\| K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right\|_{L_2(x \in G)} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{y \in \bar{G}} 0. \quad (2.4.31)$$

*Доведення.*

$$\left\| K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right\|_{L_2(G)}^2 = \int_G |K(x, y)|^2 dx - \sum_{i=1}^p \frac{|\varphi_i(y)|^2}{\lambda_i^2} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{y \in \bar{G}} 0. \quad (2.4.32)$$

Додатково інтегруючи по аргументу  $y \in G$  отримаємо збіжність вищезгаданого білінійного ряду в середньоквадратичному:

$$\iint_{G \times G} \left( K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right)^2 dy \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.4.33)$$

□

#### 2.4.4 Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду  $\varphi = \lambda \mathbf{K} \varphi + f$ , з ермітовим неперервним ядром

$$K(x, y) = K^*(x, y). \quad (2.4.34)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p, \dots, \varphi_1, \dots, \varphi_p, \dots$  — множина характеристичних чисел та ортонормована система власних функцій ядра  $K(x, y)$ .

Розкладемо розв'язок рівняння  $\varphi$  по системі власних функцій ядра  $K(x, y)$ :

$$\begin{aligned}\varphi &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{K}\varphi, \varphi_i) \varphi_i + f = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, \mathbf{K}\varphi_i) \varphi_i + f = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i + f,\end{aligned}\tag{2.4.35}$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$(\varphi, \varphi_k) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_i)}{\lambda_i} (\varphi_i, \varphi_k) + (f, \varphi_k) = \lambda \frac{(\varphi, \varphi_k)}{\lambda_k} + (f, \varphi_k).\tag{2.4.36}$$

Отже,

$$(\varphi, \varphi_k) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) = (f, \varphi_k),\tag{2.4.37}$$

і тому

$$(\varphi, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}, \quad k = 1, 2, \dots\tag{2.4.38}$$

Таким чином має місце

#### Теорема 2.4.4.1 (формула Шмідта)

Виконується співвідношення

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x) + f(x).\tag{2.4.39}$$

Розглянемо усі можливі значення  $\lambda$ :

1. Якщо  $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ , тоді існує єдиний розв'язок для довільного вільного члена  $f$  і цей розв'язок представляється за формулою Шмідта.
2. Якщо  $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+q-1}$  — співпадає з одним з характеристичних чисел кратності  $q$ , та при цьому виконуються умови ортогональності

$$(f, \varphi_k) = (f, \varphi_{k+1}) = \dots = (f, \varphi_{k+q-1}) = 0\tag{2.4.40}$$

тоді розв'язок існує (не єдиний), і представляється у вигляді

$$\varphi(x) = \lambda_k \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq \lambda_k}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i - \lambda_k} \varphi_i(x) + f(x) + \sum_{j=k}^{k+q-1} c_j \varphi_j(x), \quad (2.4.41)$$

де  $c_j$  — довільні константи.

3. Якщо  $\exists j : (f, \varphi_j) \neq 0, k \leq j \leq k+q-1$  то розв'язків не існує.

#### Приклад 2.4.4.1

Знайти ті значення параметрів  $a, b$  для яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left( xy - \frac{1}{3} \right) \varphi(y) dy + ax^2 - bx + 1$$

має розв'язок для будь-якого значення  $\lambda$ .

*Розв'язок.* Знайдемо характеристичні числа та власні функції спряженого однорідного рівняння (ядро ермітове).

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-1}^1 y \varphi(y) dy - \frac{\lambda}{3} \int_{-1}^1 \varphi(y) dy = \lambda x c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2.$$

Маємо СЛАР:

$$\begin{cases} c_1 = \int_{-1}^1 y \varphi(y) dy = \int_{-1}^1 y \left( \lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) dy = \frac{2\lambda}{3} c_1, \\ c_2 = \int_{-1}^1 \varphi(y) dy = \int_{-1}^1 \left( \lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) dy = -\frac{2\lambda}{3} c_2. \end{cases}$$

Її визначник

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2\lambda}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Тобто характеристичні числа

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

А відповідні власні функції

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = 1.$$



Умови ортогональності:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 (ax^2 - bx + 1)x \, dx = -\frac{2b}{3} = 0, \\ \int_{-1}^1 (ax^2 - bx + 1) \, dx = \frac{2a}{3} + 2 = 0. \end{cases}$$

Тобто розв'язок існує для будь-якого  $\lambda$  якщо

$$a = -3, \quad b = 0.$$

## 2.4.5 Додатньо визначені ядра

**Визначення 2.4.5.1** (додатно-визначеного ядра). Неперервне ядро  $K(x, y)$  називається *додатно-визначеним*, якщо  $\forall f \in L_2(G): (\mathbf{K}f, f) \geq 0$ , причому  $(\mathbf{K}f, f) = 0 \iff \|f\|_{L_2(G)} = 0$ .

**Зауваження 2.4.5.1** — Довільне додатньо визначене ядро є ермітовим (його білінійна форма  $(\mathbf{K}f, f)$  приймає дійсні значення).

### Лема 2.4.5.1

Для того, щоб неперервне ядро було додатньо визначеним необхідно і достатньо, щоб його характеристичні числа були додатні.

*Доведення.* Необхідність: для власних функцій  $(\mathbf{K}\varphi_k, \varphi_k) = 1/\lambda_k > 0$ .

Достатність: Розглянемо  $\mathbf{K}f$  як джерелувато-зображувану функцію, згідно до теореми Гілберта-Шмідта

$$\mathbf{K}f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \quad (2.4.42)$$

тоді

$$(\mathbf{K}f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} (\varphi_k, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k} > 0, \quad (2.4.43)$$

отже квадратична форма додатньо визначена.

Таким чином додатність характеристичних чисел є критерієм додатної визначеності ядра.  $\square$

### Лема 2.4.5.2

Довільне додатньо визначене неперервне ядро має характеристичні числа і для них має місце варіаційний принцип:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ (f, \varphi_i) = 0, i=1, k-1}} \frac{(\mathbf{K}f, f)_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.4.44)$$

де  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ , а  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  — ортонормована система власних функцій.

*Доведення.* З теореми Гілберта Шмідта можна оцінити

$$\frac{(\mathbf{K}f, f)_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}^2} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_i)|^2}{\lambda_i \|f\|^2} \leq \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_i)|^2}{\|f\|^2} \leq \frac{1}{\lambda_k}. \quad (2.4.45)$$

(перша нерівність виконується оскільки  $\lambda_k$  — найменше характеристичне число в сумі, а друга випливає з нерівності Бесселя).

З іншого боку при  $f = \varphi_k$  маємо

$$\frac{(\mathbf{K}\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}, \quad (2.4.46)$$

тобто існує функція на якій досягається верхня межа цієї нерівності.  $\square$

**Теорема 2.4.5.1** (Мерсера, про регулярну збіжність білінійного ряду для ермітових ядер зі скінченною кількістю від'ємних характеристичних чисел)

Якщо ермітове неперервне ядро  $K(x, y)$  має лише скінчену кількість від'ємних характеристичних чисел, то його білінійний ряд

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i} \quad (2.4.47)$$

збігається в  $\overline{G} \times \overline{G}$  абсолютно і рівномірно.

*Доведення.* Покажемо, що якщо ядро  $K(x, y)$  — додатньо визначене, то  $\forall x \in \overline{G}: K(x, x) \geq 0$ . Оскільки  $K(x, y)$  — ермітове, то  $K(x, x) = \overline{K(x, x)}$  і є дійсною функцією. Якщо існує хоча б одна точка  $x_0 \in \overline{G}$  така, що  $K(x_0, x_0) < 0$ , то виходячи з неперервності знайдеться і деякий окіл цієї точки  $U(x_0, x_0) \subset \overline{G} \times \overline{G}$  такий, що  $\forall (x, y) \in U(x_0, x_0): \operatorname{Re} K(x, y) < 0$ . Оберемо невід'ємну неперервну функцію  $\varphi(x)$  яка відміна від нуля лише в  $U(x_0, x_0)$  і отримаємо

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}\varphi, \varphi) &= \int_{U(x_0, x_0)} K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \\ &= \int_{U(x_0, x_0)} \operatorname{Re} K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy \leq 0. \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

Остання нерівність вступає в протиріччя з припущенням додатньої визначеності ядра, тобто теорему достатньо довести для додатньо визначених ядер.

Розглянемо ядро

$$K^p(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\bar{\varphi}_i(y) \varphi_i(x)}{\lambda_i}, \quad (2.4.49)$$

де  $p$  — номер останнього від'ємного характеристичного числа, так що усі  $\lambda_i$ ,  $i = p+1, p+2, \dots$  є додатніми. Таким чином ядро  $K^p(x, y)$  є неперервним та додатньо визначеним. А це означає, що  $\forall x \in \overline{G} : K^p(x, x) \geq 0$ . Таким чином маємо нерівність:

$$\sum_{i=1}^N \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i} \leq K(x, x) \leq M, \quad x \in \overline{G}, N = p+1, p+2, \dots, \quad (2.4.50)$$

тобто ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \quad (2.4.51)$$

рівномірно збіжний.

Розглянемо білінійний ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \quad (2.4.52)$$

і доведемо його абсолютну і рівномірну збіжність за критерієм Коші. Використовуючи нерівність Коші-Буняківського маємо:

$$\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x) \bar{\varphi}_k(y)|}{\lambda_k} \leq \left( \sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \cdot \sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k} \right)^{1/2} \quad (2.4.53)$$

Але оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \quad (2.4.54)$$

рівномірно збіжний, то білінійний ряд

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \quad (2.4.55)$$

збігається абсолютно і рівномірно (регулярно) в  $\overline{G} \times \overline{G}$ .  $\square$

**Зауваження 2.4.5.2** — Теорема Гільберта-Шмідта і її наслідки, встановлені для ермітового неперервного ядра, залишаються вірними і для ермітового слабо полярного ядра.

**Зауваження 2.4.5.3** — Теорема Гільберта-Шмідта і формула Шмідта у випадку полярного ядра залишаються вірними, але з заміною рівномірної збіжності на середньоквадратичну.

## 2.5 Задача Штурма-Ліувілля. Теорема Стеклова

Постановка задачі Штурма-Ліувілля: нехай  $\mathbf{L}$  — диференціальний оператор другого порядку: задано рівняння

$$\mathbf{L}u = (-p(x)u')' + q(x)u = \lambda u, \quad 0 < x < l, \quad (2.5.1)$$

з крайовими умовами

$$l_1(u)|_{x=0} = h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \quad (2.5.2)$$

$$l_2(u)|_{x=l} = H_1u(l) + H_2u'(l) = 0, \quad (2.5.3)$$

де функція  $p \in C^{(1)}([0, l])$ ,  $p > 0$ , функція  $q \in C([0, l])$ ,  $q \geq 0$ , виконуються наступні умови на сталі:  $h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0$ ,  $h_1 + h_2 > 0$ ,  $H_1 + H_2 > 0$ , а також

$$M_L = \{u : u \in C^{(2)}(0, l) \cap C^{(1)}([0, l]), u'' \in L_2(0, l), l_1u(0) = l_2u(l) = 0\} \quad (2.5.4)$$

— область визначення оператора  $\mathbf{L}$ .

**Визначення 2.5.0.1** (власних чисел і функцій задачі Штурма-Ліувілля). Знайти розв'язки задачі Штурма-Ліувілля означає знайти всі ті значення параметра  $\lambda$ , при яких крайова задача (2.5.1)–(2.5.4) має нетривіальний розв'язок. Ці значення називаються *власними значеннями* задачі Штурма-Ліувілля, а самі розв'язки — *власними функціями*.

### 2.5.1 Функція Гріна оператора $\mathbf{L}$

Будемо припускати, що  $\lambda = 0$  не є власним числом оператора  $\mathbf{L}$  задачі Штурма-Ліувілля.

Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} (-p(x)u')' + q(x)u = f(x), & 0 < x < l \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Припустимо що  $f \in C(0, l) \cap L_2(0, l)$ .

З припущення, що  $\lambda = 0$  не є власним числом випливає, що задача має єдиний розв'язок.

Розглянемо функції  $v_i(x)$ ,  $i = 1, 2$  — ненульові дійсні розв'язки однорідних задач Коші:

$$\begin{cases} (-p(x)v'_i(x))' + q(x)v'_i(x) = 0, & i = 1, 2 \\ l_1 v_1|_{x=0} = l_2 v_2|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (2.5.6)$$

З загальної теорії задач Коші випливає, що розв'язки цих задач Коші існують, тому  $v_i(x)$  — двічі неперервно диференційовані функції.

#### Твердження 2.5.1.1

$v_1(x)$ ,  $v_2(x)$  — лінійно незалежні.

*Доведення.* Припустимо що це не так і  $v_1(x) = cv_2(x)$ , тобто  $v_1(x)$  задовольняє одночасно граничним умовам на лівому і правому краях. Тоді  $v_1(x)$  — власна функція оператора  $\mathbf{L}$ , і відповідає власному числу  $\lambda = 0$  що суперечить припущенню.  $\square$

В цьому випадку визначник Вронського

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.5.7)$$

Будемо шукати розв'язок задачі методом варіації довільної сталої у вигляді:

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \quad (2.5.8)$$

Підставимо в рівняння:

$$(-p(c'_1 v_1 + c'_2 v_2 + c_1 v'_1 + c_2 v'_2))' + q(c_1 v_1 + c_2 v_2) = f. \quad (2.5.9)$$

Накладемо першу умову на коефіцієнти:  $c'_1 v_1 + c'_2 v_2 = 0$ , маємо:

$$-p'(c_1 v'_1 + c_2 v'_2) - p(c'_1 v'_1 + c'_2 v'_2 + c_1 v''_1 + c_2 v''_2) + q(c_1 v_1 + c_2 v_2) = f, \quad (2.5.10)$$

або

$$c_1 L v_1 + c_2 L v_2 - p(c'_1 v'_1 + c'_2 v'_2) = f, \quad (2.5.11)$$

оскільки  $c_1 \mathbf{L}v_1 = 0$ ,  $c_2 \mathbf{L}v_2 = 0$ , то

$$-p(c'_1 v'_1 + c'_2 v'_2) = f, \quad (2.5.12)$$

отже

$$c'_1 v'_1 + c'_2 v'_2 = -\frac{f}{p}. \quad (2.5.13)$$

Таким чином  $c'_1$  та  $c'_2$  повинні задовольняти системі лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} c'_1 v_1 + c'_2 v_2 = 0, \\ c'_1 v'_1 + c'_2 v'_2 = -\frac{f}{p}, \end{cases} \quad (2.5.14)$$

визначник системи

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.5.15)$$

**Зауваження 2.5.1.1** — Має місце рівність Ліувілля:

$$w(x) \cdot p(x) = w(0) \cdot p(0) = \text{const}. \quad (2.5.16)$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} c'_1(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -\frac{f}{p} & v'_2 \end{vmatrix} = \frac{v_2(x)f(x)}{p(0)w(0)}, \\ c'_2(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v'_1 & -\frac{f}{p} \end{vmatrix} = -\frac{v_1(x)f(x)}{p(0)w(0)}, \end{cases} \quad (2.5.17)$$

Знайдемо додаткові умови для диференціальних рівнянь вище:

$$\begin{aligned} l_1 u|_{x=0} &= h_1(c_1(0)v_1(0) + c_2(0)v_2(0)) - \\ &- h_2(c'_1(0)v_1(0) + c'_2(0)v_2(0) + c_1(0)v'_1(0) + c_2(0)v'_2(0)) = 0, \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

а враховуючи, що  $c'_1(0)v_1(0) + c'_2(0)v_2(0) = 0$  маємо

$$c_1(0)(h_1 v_1(0) - h_2 v'_1(0)) + c_2(0)v'_2(0) = 0. \quad (2.5.19)$$

Оскільки перший доданок дорівнює нулю, то остання рівність виконується коли  $c_2(0) = 0$ , аналогічно отримаємо, що  $c_1(l) = 0$ .

Проінтегруємо систему дифурів що розглядається, отримаємо

$$c_1(x) = - \int_x^l \frac{f(\xi)v_2(\xi)}{p(0)w(0)} d\xi, \quad c_2(x) = - \int_0^x \frac{v_1(\xi)f(\xi)}{p(0)w(0)} d\xi \quad (2.5.20)$$

Тоді розв'язок крайової задачі буде мати вигляд:

$$u(x) = - \int_0^x \frac{v_1(\xi)v_2(x)f(\xi)}{p(0)w(0)} d\xi - \int_x^l \frac{f(\xi)v_1(x)v_2(\xi)}{p(0)w(0)} d\xi \quad (2.5.21)$$

**Визначення 2.5.1.1** (функції Гріна). *Функція Гріна* визначається наступним чином:

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(\xi)v_2(x), & 0 \leq \xi \leq x \leq l, \\ v_1(x)v_2(\xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq l. \end{cases} \quad (2.5.22)$$

Отже розв'язок крайової задачі можна записати у вигляді

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.5.23)$$

$G(x, \xi)$  називається функцією Гріна оператора Штурма-Ліувіля. Попередні міркування доводять наступну лему.

#### Лема 2.5.1.1

Якщо  $\lambda = 0$  не є власним числом задачі Штурма-Ліувіля, то розв'язок крайової задачі існує та єдиний і представляється за формулою

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.5.24)$$

через функцію Гріна.



## 2.5.2 Властивості функції Гріна

### Властивості 2.5.2.1 (функції Гріна)

Можна показати, що:

1.
  - $G(x, \xi) \in C([0, l] \times [0, l])$ ;
  - $G(x, \xi) \in C^{(2)}(0 < x < \xi < l)$ ;
  - $G(x, \xi) \in C^{(2)}(0 < \xi < x < l)$ .
2. Симетричність:  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ ,  $x, \xi \in [0, l] \times [0, l]$ .
3. На діагоналі  $x = \xi$  має місце розрив першої похідної:

$$\frac{\partial G(\xi + 0, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi - 0, \xi)}{\partial x} = -\frac{1}{p(\xi)}, \quad (2.5.25)$$

да  $\xi \in (0, l)$ .

4. Поза діагоналлю  $x = \xi$  функція Гріна задовольняє однорідному диференціальному рівнянню  $\mathbf{L}_x G(x, y) = 0$ .
5. На бічних сторонах квадрату  $[0, l] \times [0, l]$  функція Гріна  $G(x, y)$  задовольняє граничним умовам  $l_1 G|_{x=0} = l_2 G|_{x=l} = 0$ .
6. Функція  $G(x, \xi)$  є розв'язком неоднорідного рівняння:

$$\mathbf{L}_x G(x, \xi) = -\delta(x - \xi), \quad (2.5.26)$$

де  $\delta(x)$  — дельта-функція Дірака.

## 2.5.3 Зведення крайової задачі з оператором Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння

Розглянемо крайову задачу з параметром

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = (-p(x)u')' + q(x)u = f(x) + \lambda u, \\ l_1(u)|_{x=0} = 0, \\ l_2(u)|_{x=l} = 0, \\ f \in C(0, l) \cap L_2(0, l), \end{cases} \quad (2.5.27)$$

і покажемо що вона може бути зведена до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з дійсним, симетричним та неперервним ядром  $G(x, \xi)$ .

**Теорема 2.5.3.1** (про еквівалентність крайової задачі для рівняння другого порядку інтегральному рівнянню з ермітовим ядром)

Крайова задача при умові, що  $\lambda = 0$  не є власним числом оператора  $\mathbf{L}$ , еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду:

$$u(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi + \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad u \in C([0, l]), \quad (2.5.28)$$

де  $G(x, \xi)$  — функція Гріна оператора  $\mathbf{L}$  із задачі (2.5.27).

*Доведення.* Необхідність. Нехай виконуються умови крайової задачі, тоді з леми 2.5.1.1 із заміною правої частини  $f \mapsto f + \lambda u$  розв'язок крайової задачі можемо представити у вигляді:

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) (\lambda u(\xi) + f(\xi)) d\xi, \quad (2.5.29)$$

тобто  $u(x)$  задовольняє вищенаведеному інтегральному рівнянню.

Достатність. Нехай має місце інтегральна рівність і  $u_0(x)$  — її розв'язок. Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f + \lambda u_0, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

За лемою 2.5.1.1, єдиний розв'язок цієї задачі задається формулою

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) u_0(\xi) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (2.5.30)$$

звідки випливає, що  $u_0$  задовольняє рівнянню  $\mathbf{L}u_0 = f + \lambda u_0$ , таким чином  $u(x) = u_0(x)$  тобто  $u_0$  є розв'язком вищенаведеної крайової задачі.  $\square$

У випадку коли  $f \equiv 0$ , ця крайова задача перетворюється в задачу Штурма-Ліувіля

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = \lambda u, & 0 < x < l, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (2.5.31)$$

Задача Штурма-Ліувіля еквівалентна задачі про знаходження характеристичних чисел та власних функцій для однорідного інтегрального рівняння Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (2.5.32)$$

при умові, що  $\lambda = 0$  не є власним числом оператора  $\mathbf{L}$ .

Покажемо як позбавитись цього припущення. Нехай маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = \lambda u, & 0 < x < l, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (2.5.33)$$

Легко бачити, що  $(\mathbf{L}u, u) \geq 0$ , тобто власні числа невід'ємні.

Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 u \equiv (-p(x)u')' + (q(x) + 1)u = \mu u, \\ l_1 u|_{x=0} = l_2 u|_{x=l}, \quad \mu = \lambda + 1. \end{cases} \quad (2.5.34)$$

Ця задача з точністю до позначень співпадає з початковою задачею Штурма-Ліувіля. Очевидно, що  $\mu = 0$  не є власним числом нової задачі Штурма-Ліувіля (бо тоді  $\lambda = -1$  могло би бути власним числом початкової задачі Штурма-Ліувілля).

Введемо диференціальний оператор

$$\mathbf{L}_1 u = (-pu')' + q_1 u = \mu u \quad (2.5.35)$$

Отже, нова задача еквівалентна попередній задачі при  $\mu = \lambda + 1$ , та еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x) = (\lambda + 1) \int_0^1 G_1(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad (2.5.36)$$

де  $G_1(x, \xi)$  — функція Гріна оператора  $\mathbf{L}_1$ .

Таким чином, ввівши оператор  $\mathbf{L}_1$  і відповідну йому нову функцію Гріна  $G_1(x, \xi)$ , можна позбутися припущення, що  $\lambda = 0$  не є власним числом задачі Штурма-Ліувілля.

### Приклад 2.5.3.1

Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy + x,$$

де

$$K(x, y) = \begin{cases} x(y-1), & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(x-1), & 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

*Розв'язок.* Розв'язок будемо шукати за формулою Шмідта. Знайдемо характеристичні числа та власні функції ермітового ядра. Запишемо однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x y(x-1) \varphi(y) dy + \lambda \int_x^1 x(y-1) \varphi(y) dy.$$

Продиференціюємо рівняння:

$$\varphi'(x) = \lambda \int_0^x y \varphi(y) dy + \lambda x(x-1) \varphi(x) + \lambda \int_x^1 (y-1) \varphi(y) dy - \lambda x(x-1) \varphi(x).$$

Обчислимо другу похідну:

$$\varphi''(x) = \lambda x \varphi(x) - \lambda(x-1) \varphi(x).$$

Або після спрощення  $\varphi'' = \lambda \varphi$ . Доповнимо диференціальне рівняння другого порядку крайовими умовами: легко бачити що

$$\varphi(0) = \lambda \int_0^0 y(0-1) \varphi(y) dy + \lambda \int_0^1 0(y-1) \varphi(y) dy = 0.$$

Аналогічно

$$\varphi(1) = \lambda \int_0^1 y(1-1) \varphi(y) dy + \lambda \int_1^1 1(y-1) \varphi(y) dy = 0.$$

Таким чином отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \varphi'' = \lambda \varphi, & 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Для знаходження власних чисел і власних функцій розглянемо можливі значення параметру  $\lambda$ :

1.  $\lambda > 0$ ,  $\varphi(x) = c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}x)$ .

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sinh(\sqrt{\lambda}) & \cosh(\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} = -\sinh(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Єдиним розв'язком цього рівняння є  $\lambda = 0$ , яке не задовольняє, бо  $\lambda > 0$ . Це означає, що система рівнянь має тривіальний розв'язок і будь-яке  $\lambda > 0$  не є власним числом.

2.  $\lambda = 0$ ,  $\varphi(x) = c_1 x + c_2$ . З граничних умов маємо, що  $c_1 = c_2 = 0$ .  
Тобто  $\lambda = 0$  не є власним числом.

3.  $\lambda < 0$ ,  $\varphi(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$ .

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи прирівнюємо до нуля:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{-\lambda}) & \cos(\sqrt{-\lambda}) \end{vmatrix} = -\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Це рівняння має зліченну множину розв'язків

$$\lambda_k = -(\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок  $c_2 = 0$ ,  $c_1 = c_1$ .

Таким чином нормовані власні функції задачі Штурма-Ліувілля мають вигляд  $\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$ .

Порахуємо коефіцієнти Фур'є:

$$f_n = (f, \varphi_n) = \sqrt{2} \int_0^1 x \sin(\pi n x) dx = \sqrt{2} \frac{(-1)^n}{\pi n}$$

Згідно до формули Шмідта розв'язок рівняння при  $\lambda \neq \lambda_k$  має вигляд:

$$\varphi(x) = x - 2\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin(\pi k x)}{((\pi k)^2 + \lambda) \pi k}$$

При  $\lambda = \lambda_k$  розв'язок не існує, оскільки не виконана умова ортогональності вільного члена до власної функції.

#### 2.5.4 Властивості власних чисел задачі Штурма-Ліувіля

Нагадаємо, що теоремою 2.5.3.1 (п'ята лекція) встановлена еквівалентність задачі Штурма-Ліувіля і задачі на власні значення для однорідного інтегрального рівняння з ермітовим неперервним ядром  $G_1(x, \xi)$ . При цьому власні значення  $\lambda_k$  задачі Штурма-Ліувіля пов'язані з характеристичними числами  $\mu_k$  ядра  $G_1(x, \xi)$  співвідношенням  $\mu = \lambda + 1$ , а відповідні їм власні функції  $u_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  співпадають. Тому для задачі Штурма-Ліувіля справедливі всі положення теорії інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром.

А саме:

##### Твердження 2.5.4.1

Множина власних чисел  $\lambda_k$  не порожня та немає скінчених граничних точок.

##### Твердження 2.5.4.2

Всі власні числа  $\lambda_k$  дійсні та мають скінчену кратність.

##### Твердження 2.5.4.3

Власні функції  $u_k \in C^{(2)}(0, l) \cap C^{(1)}([0, l])$ ,  $(u_k, u_j) = \delta_{k,j}$ ,  $k, j = 1, 2, \dots$

##### Твердження 2.5.4.4

Всі  $\lambda_k \geq 0$ .

*Доведення.* Справді, це випливає з додатної визначеності диференціального оператора Штурма-Ліувіля з відповідними граничними умовами, для цього оператора всі власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.  $\square$

##### Твердження 2.5.4.5

Множина власних чисел злічена (не може бути скінченна).

*Доведення.* Дійсно, якщо б множина була скінченою  $\mu_1, \dots, \mu_N$ , то для ядра  $G_1(x, \xi)$  було вірним представлення

$$G_1(x, \xi) = \sum_{i=1}^N \frac{u_i(x)u_i(\xi)}{\mu_i}. \quad (2.5.37)$$

Але  $u_k \in C^{(2)}(0, l) \cap C^{(1)}([0, l])$ , і тому таке представлення суперечить властивості функції Гріна  $G_1(x, \xi)$  про наявність розриву першої похідної. Ця суперечність і доводить твердження.  $\square$

#### Твердження 2.5.4.6

Кожне власне число має одиничну кратність.

*Доведення.* Справді, нехай  $u_1$  та  $u_2$  — власні функції, які відповідають власному значенню  $\lambda_0$ . З граничної умови запишемо:

$$\begin{cases} h_1 u_1(0) - h_2 u_1'(0) = 0, \\ h_1 u_2(0) - h_2 u_2'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.5.38)$$

Розглядатимемо ці співвідношення як систему лінійних рівнянь відносно  $h_1, h_2$ . Визначник системи співпадає за величиною з визначником Вронського

$$\begin{vmatrix} u_1(0) & -u_1'(0) \\ u_2(0) & -u_2'(0) \end{vmatrix} = -w(0) \neq 0 \quad (2.5.39)$$

враховуючи лінійну незалежність власних функцій. Звідси випливає, що розв'язок лінійної системи тривіальний, тобто  $h_1 = h_2 = 0$ , що суперечить припущенню  $h_1 + h_2 > 0$ .

Тому ці розв'язки лінійно залежні. Це і означає, що  $\lambda_0$  має одиничну кратність, тобто просте.  $\square$

#### Теорема 2.5.4.1 (Стеклова про розвинення в ряд Фур'є)

Будь-яка  $f \in M_L$  розкладається в ряд Фур'є за системою власних функцій задачі Штурма -Ліувіля

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x), \quad (2.5.40)$$

і цей ряд збігається абсолютно і рівномірно.



*Доведення.* Покажемо, що  $f$  — джерелувато зображувана:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 f = \mathbf{L}f + f = h, & h \in C(0, l) \cap L_2(0, l), \\ l_1 f|_{x=0} = l_2 f|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (2.5.41)$$

Функція  $f$  є розв'язком цієї граничної задачі, причому,  $\lambda = 0$  не є власним значенням оператора  $\mathbf{L}_1$ . Позначимо через  $G_1(x, \xi)$  функцію Гріна оператора  $\mathbf{L}_1$ .

Тоді має місце представлення

$$f(x) = \int_0^1 G_1(x, \xi) h(\xi) d\xi, \quad (2.5.42)$$

тобто  $f(x)$  — джерелувато-зображувана. За теоремою Гільберта-Шмідта функція  $f$  розкладається в регулярно збіжний ряд Фур'є по власним функціям ядра  $G_1(x, \xi)$ . Але власні функції ядра  $G_1(x, \xi)$  співпадають з власними функціями  $\{u_k(x)\}$  оператора  $\mathbf{L}$ .  $\square$

### 2.5.5 Задача Штурма-Ліувіля з ваговим множником

**Визначення 2.5.5.1** (задачі Штурма-Ліувіля з ваговим множником). *Задачею Штурма-Ліувіля з ваговим множником* називається

$$\begin{cases} \mathbf{L}f = \lambda \rho(x)u, & 0 < x < l, \\ l_1 u|_{x=0} = l_2 u|_{x=l} = 0, \end{cases} \quad (2.5.43)$$

де  $\rho(x) > 0$ ,  $\rho \in C([0, l])$ ,  $\rho$  — ваговий множник.

З теореми 2.5.3.1 (п'ята лекція) випливає представлення

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \rho(\xi) G(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (2.5.44)$$

Інтегральне рівняння має неперервне, але не симетричне ядра, для його симетризації домножимо рівняння на  $\sqrt{\rho(x)}$  і отримаємо

$$\sqrt{\rho(x)} u(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)} G(x, \xi) \sqrt{\rho(\xi)} u(\xi) d\xi \quad (2.5.45)$$

Позначимо  $v(x) = \sqrt{\rho(x)} \cdot u(x)$ ,  $G_\rho(x, \xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}G(x, \xi)$ , отримаємо інтегральне рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G_\rho(x, \xi) v(\xi) d\xi \quad (2.5.46)$$

Власні функції задачі Штурма-Ліувіля з ваговим множником пов'язані з власними функціями останнього інтегрального рівняння співвідношенням

$$\sqrt{\rho(x)} \cdot u_k(x) = v_k(x). \quad (2.5.47)$$

#### Твердження 2.5.5.1

Має місце співвідношення

$$(v_k, v_i) = \delta_{i,k} = \int_0^l u_k(x) \cdot u_i(x) \cdot \rho(x) dx = (u_k, u_i)_\rho \quad (2.5.48)$$

— ваговий скалярний добуток.

Таким чином система власних функцій задачі Штурма-Ліувіля з ваговим множником є ортонормованою у ваговому скалярному добутку  $(u, v)_\rho$ .

## 2.6 Інтегральні рівняння першого роду

Будемо розглядати інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_G K(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (2.6.1)$$

Неважко перевірити, що розв'язок цього інтегрального рівняння може існувати не для будь-якої неперервної функції  $f(x)$ .

### Приклад 2.6.0.1

Нехай  $G = [a, b]$ , а

$$K(x, y) = a_0(y)x^m + a_1(y)x^{m-1} + \dots + a_m(y), \quad (2.6.2)$$

тоді для будь-якої неперервної  $\varphi(y)$ :

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m \quad (2.6.3)$$

Це означає, що такий самий вигляд повинна мати і функція  $f(x)$ .

### 2.6.1 Ядра Шмідта

Будемо розглядати неперервне ядро  $K(x, y)$  і спряжене до нього  $K^*(x, y)$  яке задовольняє нерівності

$$\int_G \int_G |K(x, y)| dx dy < \infty \quad (2.6.4)$$

Відповідні інтегральні оператори Фредгольма позначимо через  $\mathbf{K}, \mathbf{K}^*$ . Введемо інтегральні оператори  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}^*\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}\mathbf{K}^*$ , які є симетричними і додатними. Цим операторам відповідають

**Визначення 2.6.1.1** (ядер Шмідта). *Ядрами Шмідта* називаються ядра

$$K_1(x, y) = \int_G K^*(x, z)K(z, y) dz, \quad K_2(x, y) = \int_G K(x, z)K^*(z, y) dz. \quad (2.6.5)$$

**Задача 2.6.1.** Доведіть, що характеристичні числа ядер Шмідта  $K_1(x, y)$  та  $K_2(x, y)$  співпадають.

Позначимо їх (характеристичні числа) через  $\mu_k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Позначимо через  $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$  ортонормовані власні функції ядра  $K_1(x, y)$  та  $K_2(x, y)$  відповідно.

### Твердження 2.6.1.1

Виконуються рівності:

$$v_k = \mu_k \mathbf{K} u_k, \quad (2.6.6)$$

$$u_k = \mu_k \mathbf{K}^* v_k. \quad (2.6.7)$$

*Доведення.* Дійсно:  $v_k = \mu_k^2 \mathbf{K}_2 v_k$ , тоді

$$\mathbf{K}^* v_k = \mu_k^2 \mathbf{K}^* \mathbf{K}_2 v_k = \mu_k^2 \mathbf{K}^* \mathbf{K} \mathbf{K}^* v_k = \mu_k^2 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}^* v_k \quad (2.6.8)$$

звідси випливає, що  $C_k \mathbf{K}^* v_k = u_k$ . Оберемо константу з умови ортонормованості:

$$\begin{aligned} (u_k, u_k) &= C_k^2 (\mathbf{K}^* v_k, \mathbf{K}^* v_k) = \\ &= C_k^2 (v_k, \mathbf{K} \mathbf{K}^* v_k) = \\ &= C_k^2 (v_k, \mathbf{K}_2 v_k) = \\ &= C_k^2 / \mu_k^2 = 1, \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

звідси  $C_k = \mu_k$ . І перша рівність доведена.

Аналогічно доводиться друга.  $\square$

Виходячи з теореми Мерсера про регулярну збіжність білінійного ряду для неперервних ядер зі скінченною кількістю від'ємних характеристичних чисел, для ядер Шмідта має місце відоме розвинення:

$$K_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x) \bar{u}_k(y)}{\mu_k^2}, \quad (2.6.10)$$

$$K_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) \bar{v}_k(y)}{\mu_k^2}. \quad (2.6.11)$$

Ці ряди для неперервних ядер збігається абсолютно і рівномірно, а для ядер, які належать  $L_2(G)$  — в середньому квадратичному.

### Твердження 2.6.1.2

Для ядра  $K(x, y)$  має місце білінійне розвинення за формулою:

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x) \bar{u}_k(y)}{\mu_k^2}, \quad (2.6.12)$$

$$K^*(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x) \bar{v}_k(y)}{\mu_k^2}. \quad (2.6.13)$$

*Доведення.* Дійсно, написане розвинення представляє собою ряд Фур'є ядра по ортонормованій системі функцій  $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , або  $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  і збігається в середньому квадратичному по кожній змінній  $x, y$ . Тобто

$$\begin{aligned} \int_G \left| K(x, y) - \sum_{i=1}^n \frac{v_i(x) \bar{u}_i(y)}{\mu_i} \right|^2 dx &= \int_G |K(x, y)|^2 dx - \sum_{k=1}^n \frac{|u_k(y)|^2}{\mu_k^2} = \\ &= K_1(y, y) - \sum_{k=1}^n \frac{|u_k(y)|^2}{\mu_k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.6.14)$$

□

**Зауваження 2.6.1.1** — При доведенні цього представлення було використане друге співвідношення з твердження 2.6.1.1.

## 2.6.2 Інтегральні рівняння першого роду з симетричним ядром

Нехай  $K(x, y)$  симетричне ядро, а  $\lambda_i, u_i(x), i = 1, 2, \dots$  — характеристичні числа та ортонормована система власних функцій цього ядра.

**Визначення 2.6.2.1** (повного ядра). Будемо називати симетричне ядро *повним*, якщо система його власних функцій є повною.

Якщо ядро не є повним, то інтегральне рівняння

$$\int_G K(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (2.6.15)$$

має розв'язок відмінний від нуля. Інтегральне рівняння з симетричним повним ядром може мати лише єдиний розв'язок.

Будемо шукати розв'язок інтегрального рівняння першого роду у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x), \quad (2.6.16)$$

де  $c_i$  — невідомі константи. Вільний член рівняння представимо у вигляді ряду Фур'є по системі власних функцій ядра в результаті чого будемо мати рівність:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_G K(x, y) u_i(y) dy = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x), \quad (2.6.17)$$

або, після спрощення

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i} u_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x). \quad (2.6.18)$$

Враховуючи лінійну незалежність власних функцій  $u_i(x)$  отримаємо співвідношення

$$c_i = (f, u_i) \lambda_i. \quad (2.6.19)$$

**Теорема 2.6.2.1** (Пікара про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром)

Нехай  $K(x, y)$  повне ермітове ядро  $f \in L_2(G)$ . Тоді для існування розв'язку рівняння I роду необхідно і достатньо щоб збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f, u_k)|^2. \quad (2.6.20)$$

*Доведення.* Необхідність: Нехай існує розв'язок  $u(x)$  з  $L_2(G)$  інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Нехай  $c_k$  — коефіцієнти Фур'є розв'язку по системі власних функцій  $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ . Виходячи з вигляду у якому шукаємо розв'язок маємо, що вищезгаданий ряд збігається.

Достатність: Нехай ряд збігається. Тоді існує єдина функція  $u(x) \in L_2(G)$  з коефіцієнтами Фур'є  $(f, u_i) \lambda_i$ . Вона має вигляд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, u_i) u_i(x) \quad (2.6.21)$$

і задовольняє інтегральному рівнянню Фредгольма I роду.  $\square$

### 2.6.3 Несиметричні ядра

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма I роду з несиметричним ядром. Для представлення ядра скористаємось формулами з твердження 2.6.1.2, а для представлення вільного члена  $f(x)$  застосуємо розвинування цієї функції в ряд Фур'є по системі власних функцій ядра  $K_2(x, y)$ ,  $v_k(x)$ . В результаті будемо мати:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_G \frac{v_i(x) \bar{u}_i(y)}{\mu_i} \varphi(y) dy = \sum_{i=1}^{\infty} (f, v_i) v_i(x). \quad (2.6.22)$$

Ліву частину можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, u_i) v_i(x)}{\mu_i} \varphi(y) dy = \sum_{i=1}^{\infty} (f, v_i) v_i(x). \quad (2.6.23)$$

З останньої рівності можна записати співвідношення для коефіцієнтів Фур'є розв'язку:

$$(\varphi, u_i) = (f, v_i) \mu_i. \quad (2.6.24)$$

Таким чином, доведена наступна теорема:

**Теорема 2.6.3.1 (критерій існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма I роду з несиметричним ядром)**

Для існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма I роду з несиметричним ядром необхідно і достатньо щоби вільний член  $f \in L_2(G)$  можна було розкласти в ряд Фур'є по системі власних функцій  $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$  ядра Шмідта

$$K_2(x, y) = \int_G K(x, z) K^*(z, y) dz, \quad (2.6.25)$$

а числовий ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, v_i)|^2 \mu_i^2. \quad (2.6.26)$$

збігався.

### Приклад 2.6.3.1

Звести задачу Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$\begin{cases} \mathbf{L}y \equiv -(1+e^x)y'' - e^xy' = \lambda x^2y, & 0 < x < 1, \\ y(0) - 2y'(0) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

*Розв'язок.* Побудуємо функцію Гріна оператора  $\mathbf{L}$ . Розглянемо задачі Коші:

$$\begin{cases} -(1+e^x)v_i'' - e^xv_i' = 0, & i = 1, 2, \\ v_1(0) - 2v_1'(0) = v_2'(1) = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$-(1+e^x)y'' - e^xy' = 0$$

має вигляд

$$c_1(x - \ln(1+e^x)) + c_2.$$

Тоді розв'язки задач Коші:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= a(x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2), & a = \text{const}, \\ v_2(x) &= b, & b = \text{const}. \end{aligned}$$

Обчислимо визначник Вронського

$$\begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{ab}{1+e^x}.$$

Про всяк випадок перевіримо тотожність Ліувілля:

$$p(x) \cdot w(x) = a \cdot b = \text{const}$$

Запишемо функцію Гріна за формулою:

$$G(x, \xi) = - \begin{cases} (x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \\ (\xi - \ln(1+e^\xi) + 1 + \ln 2), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Запишемо інтегральне рівняння:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (G(x, \xi) \cdot \xi^2 \cdot y(\xi)) d\xi.$$



Симетризуємо ядро інтегрального рівняння, помножимо обидві частини на  $x$ :

$$x \cdot y(x) = \lambda \int_0^1 x \cdot \xi \cdot G(x, \xi) \cdot \xi \cdot y(\xi) \, d\xi.$$

Введемо позначення:

$$\omega(x) = x \cdot y(x),$$

та

$$G_1(x, \xi) = x \cdot \xi \cdot G(x, \xi).$$

Отримаємо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром:

$$\omega(x) = \lambda \int_0^1 G_1(x, \xi) \omega(\xi) \, d\xi.$$

#### 2.6.4 Питання до першого розділу

1. Записати інтегральне рівняння Фредгольма першого та другого роду.
2. Дати визначення характеристичних чисел і власних функцій інтегрального рівняння.
3. Що називається союзним інтегральним рівнянням, спряженим ядром?
4. Сформулювати лему про обмеженість інтегрального оператора з неперервним ядром.
5. Записати схему методу послідовних наближень, ряд Неймана.
6. Сформулювати теорему про збіжність методу послідовних наближень для неперервних ядер.
7. Дати визначення повторних ядер і резольвенти, записати умову збіжності резольвенти.
8. Дати визначення полярного ядра, сформулювати лему про поводження повторних ядер для полярного ядра.
9. Сформулювати лему про обмеженість інтегрального оператора з полярним ядром.
10. Сформулювати теорему про збіжність методу послідовних наближень для інтегральних рівнянь із полярним ядром.
11. Записати резольвенту інтегрального оператора з полярним ядром, сформулювати умови її збіжності.
12. Дати визначення виродженого ядра, записати систему рівнянь для інтегрального рівняння з виродженим ядром.
13. Сформулювати першу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром.
14. Сформулювати другу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром.
15. Сформулювати третю теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром.

16. В чому полягає ідея доведення теорем Фредгольма для неперервного ядра.
17. Сформулювати першу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
18. Сформулювати другу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
19. Сформулювати третю теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
20. Сформулювати четверту теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
21. В чому полягає ідея доведення теорем Фредгольма для полярного ядра.
22. Сформулювати наслідок з теорем Фредгольма.
23. Дати визначення компактної множини в рівномірній метриці. Сформулювати теорему Арцела-Асколі.
24. Дати визначення цілком неперервного оператора, сформулювати лему про цілковиту неперервність оператора з неперервним ядром.
25. Дати визначення ермітового оператора, властивість характеристичних чисел, критерій ермітовості.
26. Ряд Фур'є, нерівність Бесселя, рівність Парсеваля-Стеклова.
27. Визначення джерелуватозображуваної функції. Теорема Гільберта-Шмідта.
28. Представлення виродженого ядра через характеристичні числа та власні функції.
29. Теорема про білінійне розкладання ермітового неперервного ядра.
30. Наслідок з теореми Гільберта-Шмідта про розкладання повторного ядра для ермітового ядра.
31. Формула Шмідта, особливості її застосування для різних значень параметра.

32. Теорема про існування характеристичних чисел ермітового неперервного та ермітового полярного ядра.
33. Додатньо визначені ядра. Лема про властивості характеристичних чисел додатньо визначених ядер.
34. Теорема Мерсера.
35. Постановка задачі Штурма-Ліувілля, визначення власних чисел і власних функцій.
36. Визначення функції Гріна для оператора Штурма-Ліувілля.
37. Властивості функції Гріна.
38. Властивості власних функцій і власних значень задачі Штурма-Ліувілля.
39. Лема про зведення задачі Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння.
40. Задача Штурма-Ліувілля з ваговим множником, зведення її до інтегрального рівняння з ермітовим ядром.
41. Теорема Стеклова про розкладання функцій у ряд Фур'є.
42. Ядра Шмідта та їх властивості, білінійне розвинення ядер Шмідта.
43. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром, теорема існування розв'язку.
44. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду з несиметричним ядром, умови існування розв'язку.