МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА

У ваших руках конспект лекцій з нормативного курсу “Рівняння математичної фізики”, прочитаного доц., к.ф.-м.н. Кузьміном Анатолієм Володимировичем на третьому курсі спеціальності прикладна математика факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка восени 2018-го року.

Конспект у компактній формі відображає матеріал курсу, допомагає сформувати загальне уявлення про предмет вивчення, правильно зорієнтуватися в даній галузі знань. Конспект лекцій з названої дисципліни сприятиме більш успішному вивченню дисципліни, причому більшою мірою для студентів заочної форми, екстернату, дистанційного та індивідуального навчання.

Комп’ютерний набір та верстка – Скибицький Нікіта Максимович.

Зміст

1 Вступ

1.1 Предмет і методи математичної фізики

Сучасні технології дослідження реального світу доволі інтенсивно використовують методи математичного моделювання, зокрема ці методи широко використовуються тоді, коли дослідження реального (фізичного) об'єкту є неможливими, або надто дорогими. Вже традиційними стали моделювання властивостей таких фізичних об'єктів:

- температурні поля і теплові потоки;
- електричні, магнітні та електромагнітні поля;
- концентрація речовини в розчинах, розплавах або сумішах;
- напруження і деформації в пружних твердих тілах;
- параметри рідини або газу, який рухається (обтікає) деяке тіло;
- перенос різних субстанцій потоками рідин або газу та інші.

Характерною особливістю усіх математичних моделей, що описують перелічені та багато інших процесів є те, що параметри, які представляють інтерес для дослідника є функціями точки простору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ та часу t, а самі співвідношення з яких ці характеристики обчислюються є диференціальними рівняннями в частинних похідних зі спеціальними додатковими умовами (крайовими умовами), які дозволяють виділяти однозначний розв'язок.

Таким чином можна сказати, що основними об'єктами дослідження предмету математична фізика є крайові задачі для рівнянь в частинних похідних, які моделюють певні фізичні процеси.

Процес дослідження реального об'єкту фізичного світу можна представити за наступною схемою:

1. Побудова математичної моделі реального процесу у вигляді диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, доповнення диференціального рівняння в частинних похідних граничними умовами.

2. Дослідження властивостей сформульованої крайової задачі з точки зору її коректності. Коректність постановки задачі передбачає виконання наступних умов:

- Розв'язок крайової задачі існує;
- Розв'язок єдиний;
- Розв'язок неперервним чином залежить від вхідних даних задачі.

3. Знаходження розв'язку крайової задачі: точного для найбільш простих задач, або наближеного для переважної більшості задач.

Треба відмітити, що усі перелічені пункти дослідження окрім побудови наближених методів знаходження розв'язків відносяться до предмету дисципліни Математична фізика.

Для дослідження задач математичної фізики використовуються математичний апарат наступних розділів математики:

- математичний аналіз;
- лінійна алгебра;
- диференціальні рівняння;
- теорія функцій комплексної змінної;
- функціональний аналіз;

При побудові математичних моделей використовуються знання з елементарної фізики.

Наведемо приклад доволі простої і в той же час цілком реальної математичної моделі розповсюдження тепла в стрижні.

Нехай ми маємо однорідний стрижень з теплоізольованою боковою поверхнею і наступними фізичними параметрами:

- ρ – густина матеріалу;
- S – площа поперечного перерізу;
- k – коефіцієнт теплопровідності;
- c – коефіцієнт теплоємності;
- L – довжина стрижня.

Позначимо $u(x,t)$ – температуру стрижня в точці x в момент часу t, $u_0(x)$ – температуру стрижня у точці x в початковий момент часу $t = 0$.

Припустимо, що на лівому кінці стрижня температура змінюється за заданим законом $\varphi(t)$, а правий кінець стрижня теплоізольований.

В таких припущеннях математична модель може бути записана у вигляді наступної граничної задачі:

$$c\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0 \tag{1.1.1}$$

$$u(0,u) = \varphi(t), \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0 \tag{1.1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(t) \tag{1.1.3}$$

Математична модель містить диференціальне рівняння (1.1.1), яке виконується для вказаних значень аргументу, граничні умови на кінцях стрижня (1.1.2) та початкову умови (1.1.3).

2 Інтегральні рівняння

2.0.1 Основні поняття

Інтегральні рівняння – рівняння, що містять невідому функцію під знаком інтегралу.

Багато задач математичної фізики зводяться до лінійних інтегральних рівнянь виду:

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x) \tag{2.0.1}$$

– інтегральне рівняння Фредгольма II роду.

$$\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = f(x) \tag{2.0.2}$$

– інтегральне рівняння Фредгольма I роду.

$K(x,y)$ – ядро інтегрального рівняння, $K(x,y) \in C(\bar{G}\times\bar{G})$, $f(x)$ – вільний член інтегрального рівняння, $f(x) \in C(\bar{G})$, λ – комплексний параметр, $\lambda \in \mathbb{C}$ (відомий або невідомий), G – область інтегрування, $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{G}$ – замкнена та обмежена.

Інтегральне рівняння (2.0.1) при $f(x) \equiv 0$ називається однорідним інтегральним рівнянням Фредгольма II роду

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.0.3}$$

K – інтегральний оператор: $(\mathbf{K}\varphi)(x)$.

Будемо записувати інтегральні рівняння (2.0.1), (2.0.2) та (2.0.3) скорочено в операторній формі:

$$\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f \tag{2.0.4}$$

$$\mathbf{K}\varphi = f \tag{2.0.5}$$

$$\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi \tag{2.0.6}$$

$$K^*(x,y) = \bar{K}(y,x) \tag{2.0.7}$$

– спряжене (союзне) ядро.

Інтегральне рівняння

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int\limits_G K^*(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x) \tag{2.0.8}$$

називається спряженим (союзним) до інтегрального рівняння (2.0.1).

Операторна форма:

$$\psi = \bar{\lambda}\mathbf{K}^*\psi + g \tag{2.0.9}$$

$$\psi = \bar{\lambda}\mathbf{K}^*\psi \tag{2.0.10}$$

Визначення. Комплексні значення λ, при яких однорідне інтегральне рівняння Фредгольма (2.0.3) має нетривіальні розв'язки, називаються характеристичними числами ядра $K(x,y)$. Розв'язки, які відповідають власним числам, називаються власними функціями. Кількість лінійно-незалежних власних функцій називається кратністю характеристичного числа.

2.1 Метод послідовних наближень

2.1.1 Метод послідовних наближень для неперервного ядра

Нагадаємо означення норм в банаховому просторі неперервних функцій $C(\bar{G})$ та гільбертовому просторі інтегрованих з квадратом функцій $L_2(G)$ та означення скалярного добутку в просторі $L_2(G)$:

$$\|f\|_{C(\bar{G})} = \max_{x\in\bar{G}} |f(x)|,$$

$$\|f\|_{L_2(G)} = \left(\int\limits_G |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2},$$

$$(f,g)_{L_2(G)} = \int\limits_G f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Лема 1. Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з неперервним ядром $K(x,y)$ петворює множини функцій $C(\bar{G}) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\bar{G})$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} L_2(G)$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\bar{G})$ обмежений та мають місце нерівності:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \le MV\|\varphi\|_{C(G)}, \tag{2.1.1}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)} \le MV\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{2.1.2}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \le M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{2.1.3}$$

де

$$M = \max_{x,y\in G\times G} |K(x,y)|, \tag{2.1.4}$$

$$V = \int\limits_G \mathrm{d}y. \tag{2.1.5}$$

Доведення. Нехай $\varphi \in L_2(G)$. Тоді φ – абсолютно інтегрована функція на G і, оскільки ядро $K(x,y)$ неперервне на $G\times G$, функція $(\mathbf{K}\varphi)(x)$ неперервна на G. Тому оператор $\mathbf{K}$ переводить $L_2(G)$ в $C(\bar{G})$ і, з врахуванням нерівності Коші-Буняковського, обмежений. Доведемо нерівності:

1. (2.1.1):

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} = \max_{x\in\bar{G}} \left| \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right| \le \max_{x\in\bar{G}} \int\limits_G |K(x,y)||\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \le$$

$$\leq \max_{x\in\bar{G}} \left(\max_{y\in\bar{G}} |K(x,y)| \max_{y\in\bar{G}} |\varphi(y)| \int\limits_G \mathrm{d}y \right) \leq$$

$$\leq \max_{x,y\in\bar{G}\times\bar{G}} |K(x,y)| \max_{y\in\bar{G}} |\varphi(y)| \int\limits_G \mathrm{d}y = MV\|\varphi\|_{C(\bar{G})}.$$

2. (2.1.2):

$$\left(\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)}\right)^2 = \int\limits_G \left| \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int\limits_G \left| \max_{y\in\bar{G}} |K(x,y)| \int\limits_G \varphi(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \left(\max_{x,y\in\bar{G}\times\bar{G}} |K(x,y)| \right)^2 \left| \int\limits_G \varphi(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \int\limits_G \mathrm{d}x \leq (M\|\varphi\|_{L_2(G)}V)^2$$

3. (2.1.3):

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} = \max_{x\in\bar{G}} |(\mathbf{K}\varphi)(x)| = \max_{x\in\bar{G}} \left| \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right| \leq$$

$$\leq \max_{x\in\bar{G}} \sqrt{\int\limits_G |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y} \sqrt{\int\limits_G |\varphi(y)|^2\,\mathrm{d}y} \leq M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}.$$

$\square$

Розв'язок інтегрального рівняння другого роду (2.0.4) будемо шукати методом послідовних наближень:

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = \lambda\mathbf{K}\varphi_0 + f, \quad \varphi_2 = \lambda\mathbf{K}\varphi_1 + f, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = \lambda\mathbf{K}\varphi_n + f \tag{2.1.6}$$

$$\varphi_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda^i\mathbf{K}^i f, \quad \mathbf{K}^{i+1} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^i) \tag{2.1.7}$$

$$\varphi_\infty = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\mathbf{K}^i f, \tag{2.1.8}$$

ряд Неймана.

Дослідимо збіжність ряду Неймана (2.1.8)

$$\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\mathbf{K}^i f\right\|_{C(\bar G)} \le \sum_{i=0}^{\infty}|\lambda^i|\|\mathbf{K}^i f\|_{C(\bar G)} \le \sum_{i=0}^{\infty}|\lambda^i|(MV)^i\|f\|_{C(\bar G)} = \frac{\|f\|_{C(\bar G)}}{1-|\lambda|MV} \tag{2.1.9}$$

(оскільки: $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar G)} \le MV\|\varphi\|_{C(\bar G)}$, $\|\mathbf{K}^2\varphi\|_{C(\bar G)} \le (MV)^2\|\varphi\|_{C(\bar G)}$, $\|\mathbf{K}^i\varphi\|_{C(\bar G)} \le (MV)^i\|\varphi\|_{C(\bar G)}$).

Отже, ряд Неймана збігається рівномірно при

$$|\lambda| < \frac{1}{MV}, \tag{2.1.10}$$

умова збіжності методу послідовних наближень.

Покажемо, що при виконанні умови (2.1.10) інтегральне рівняння (2.0.1) має єдиний розв'язок. Дійсно припустимо, що їх два:

$$\begin{matrix}\varphi^{(1)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(1)} + f \\ \varphi^{(2)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(2)} + f\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(0)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(0)}\end{matrix}$$

Обчислимо норму Чебишева:

$$|\lambda|\|\mathbf{K}\varphi^{(0)}\|_{C(\bar G)} = \|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar G)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar G)} \le |\lambda|MV\|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar G)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1-|\lambda|MV)\|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar G)} \le 0.$$

Звідси маємо, що $\|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar G)} = 0$. Таким чином доведена теорема

Теорема 1 (Про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значень параметру)**.** Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $\varphi(x) = \lambda\int_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x)$ з неперервним ядром $K(x,y)$ при умові (2.1.10) має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C(\bar G)$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді ряду Неймана $\varphi = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\mathbf{K}^i f$.

2.1.2 Повторні ядра

$\forall f, g \in \bar G$ має місце рівність

$$(\mathbf{K}f, g)_{L_2(G)} = (f, \mathbf{K}^* g)_{L_2(G)} \tag{2.1.11}$$

Дійсно, якщо $f, g \in L_2(G)$, то за лемою 1 $\mathbf{K}f, \mathbf{K}^*g \in L_2(G)$ тому

$$(\mathbf{K}f, g) = \int\limits_G (\mathbf{K}f)\bar{g}\,\mathrm{d}x = \int\limits_G \left(\int\limits_G K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_G f(y)\left(\int\limits_G K(x,y)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int\limits_G f(y)(\mathbf{K}^*g)(y)\,\mathrm{d}y = (f, \mathbf{K}^*g).$$

Лема 2. Якщо $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ – інтегральні оператори з неперервними ядрами $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ відповідно, то оператор $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ також інтегральний оператор з неперервним ядром $K_3(x,z) = \int_G K_2(x,y)K_1(y,z)\,\mathrm{d}y$. При цьому справедлива формула: $(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1)^* = \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^*$.

Доведення. Нехай $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ – ядра інтегральних операторів $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$. Розглянемо $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$:

$$(\mathbf{K}_3f)(x) = (\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1f)(x) = \int\limits_G K_2(x,y)\left(\int\limits_G K_1(y,z)f(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \int\limits_G \left(\int\limits_G K_2(x,y)K_1(y,z)\,\mathrm{d}y\right)f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_G K_3(x,z)f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Тобто $K_3(x,z) = \int_G K_2(x,y)K_1(y,z)\,\mathrm{d}y$ – ядро оператора $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$.

З рівності (2.1.11) для всіх $f, g \in L_2(G)$ отримуємо $(f, \mathbf{K}_3^*g - \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^*g) = 0$, звідки випливає, що $\mathbf{K}_3^* = \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^*$. $\square$

Із доведеної леми випливає, що оператори $\mathbf{K}^n = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{n-1}) = (\mathbf{K}^{n-1})\mathbf{K}$ – інтегральні та їх ядра $K_{(n)}(x,y)$ – неперервні та задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$K_{(1)}(x,y) = K(x,y), \quad \ldots, \quad K_{(n)}(x,y) = \int\limits_G K(x,\xi)K_{(n-1)}(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi \qquad (2.1.12)$$

– повторні (ітеровані) ядра.

$$\mathbf{K}f = \int\limits_G K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad \ldots, \quad \mathbf{K}^nf = \int\limits_G K_{(n)}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

2.1.3 Резольвента інтегрального оператора

Пригадаємо представлення розв'язку інтегрального рівняння (2.0.1) у вигляді ряду Неймана $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f$. Виконаємо перетворення

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} (\mathbf{K}^i f)x = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y =$$

$$= f(x) + \lambda \int\limits_G \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) \right) f(y)\, \mathrm{d}y = f(x) + \lambda \int\limits_G \mathcal{R}(x,y,\lambda) f(y)\, \mathrm{d}y,$$

при $|\lambda| < \frac{1}{MV}$, де

$$\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) \tag{2.1.13}$$

– резольвента інтегрального оператора.

Операторна форма запису розв'язку рівняння Фредгольма через резольвенту ядра має вигляд:

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{R} f \tag{2.1.14}$$

Мають місце операторні рівності: $\varphi = (E + \lambda\mathbf{R})f$, $(E - \lambda\mathbf{K})\varphi = f$, $\varphi = (E - \lambda\mathbf{K})^{-1} f$, таким чином маємо

$$E + \lambda\mathbf{R} = (E - \lambda\mathbf{K})^{-1}, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}. \tag{2.1.15}$$

Зважуючи на формулу (2.1.14) має місце теорема

Теорема 2 (Про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значенням параметру)**.** Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $\varphi(x) = \lambda \int_G K(x,y)\varphi(y)\, \mathrm{d}y + f(x)$ з неперервним ядром $K(x,y)$ при умові (2.1.10) має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C(\bar{G})$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді (2.1.14) за допомогою резольвенти (2.1.13).

Приклад 1. Методом послідовних наближень знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = x + \lambda \int\limits_0^1 (xt)^2 \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Розв'язок. $M = 1$, $V = 1$.

Побудуємо повторні ядра

$$K_{(1)}(x,t) = x^2t^2, \quad K_2(x,t) = \int\limits_0^1 x^2z^4t^2\,\mathrm{d}z = \frac{x^2t^2}{5},$$

$$K_{(p)}(x,t) = \frac{1}{5^{p-2}}\int\limits_0^1 x^2z^4t^2\,\mathrm{d}z = \frac{x^2t^2}{5^{p-1}}.$$

Резольвента має вигляд

$$\mathcal{R}(x,t,\lambda) = x^2t^2\left(1 + \frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda^2}{5^2} + \ldots + \frac{\lambda^p}{5^p} + \ldots\right) = \frac{5x^2t^2}{5-\lambda}, \quad |\lambda| < 5.$$

Розв'язок інтегрального рівняння має вигляд:

$$\varphi(x) + x + \int\limits_0^1 \frac{5x^2t^3}{5-\lambda}\,\mathrm{d}t = x + \frac{5x^2}{4(5-\lambda)}.$$

2.1.4 Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром

Ядро $K(x,y)$ називається полярним, якщо воно представляється у вигляді:

$$K(x,y) = \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} \tag{2.1.16}$$

де $A \in C(\bar{G}\times\bar{G})$, $|x-y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, $\alpha < n$ (n – розмірність евклідового простору).

Ядро називається слабо полярним, якщо $\alpha < n/2$.

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з неперервним ядром мав вигляд:

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_G K(x,y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}y + f(x),$$

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = f + \lambda\mathbf{K}\varphi_0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = f + \lambda\mathbf{K}\varphi_n.$$

Оцінки, що застосовувались для неперервних ядер не працюють для полярних ядер, тому що максимум полярного ядра рівний нескінченності (ядро необмежене в рівномірній метриці), отже, сформулюємо лему аналогічну лемі 1 для полярних ядер.

Лема 3. Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з полярним ядром $K(x, y)$ переводить множину функцій $C(\bar{G}) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\bar{G})$ і при цьому має місце оцінка:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} \le N\|\varphi\|_{C(\bar{G})}, \tag{2.1.17}$$

де

$$N = \max_{x\in\bar{G}} \int\limits_G |K(x, y)\,\mathrm{d}y|. \tag{2.1.18}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція $\mathbf{K}\varphi$ неперервна в точці x_0.

Оцінимо при умові $|x - x_0| < \eta/2$ вираз:

$$\left|\int\limits_G K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_G K(x_0, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| =$$

$$= \left|\int\limits_G \frac{A(x, y)}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_G \frac{A(x_0, y)}{|x_0-y|^\alpha}\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| \le$$

$$\le \int\limits_G \left|\frac{A(x, y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0-y|^\alpha}\right| |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \le (*)$$

винесемо $\max\varphi(y)$ у вигляді $\|\varphi\|_{C(\bar{G})}$, а інтеграл розіб'ємо на два інтеграли: інтеграл по $U(x_0, \eta)$ – кулі з центром в x_0 і радіусом η; інтеграл по залишку $G \setminus U(x_0, \eta)$.

$$(*) \le \|\varphi\|_{C(\bar{G})} \left(\int\limits_{U(x_0,\eta)} \left|\frac{A(x, y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0-y|^\alpha}\right| \mathrm{d}y + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{G\setminus U(x_0,\eta)} \left|\frac{A(x, y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0-y|^\alpha}\right| \mathrm{d}y \right)$$

Оцінимо тепер кожний з інтегралів:

$$\int\limits_{U(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha} \right| \mathrm{d}y \le A_0 \int\limits_{U(x_0,\eta)} \left| \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} - \frac{\mathrm{d}y}{|x_0-y|^\alpha} \right|,$$

де A_0 – max функції $A(x,y)$ на потрібній множині.

Введемо узагальнені сферичні координати з центром у точці x_0 в просторі $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_{0,1} + \rho\cos\nu_1 \\
y_2 &= x_{0,2} + \rho\sin\nu_1\cos\nu_2 \\
&\dots \\
y_{n-1} &= x_{0,n-1} + \rho\sin\nu_1\cdot\ldots\cdot\cos\nu_{n-1} \\
y_n &= x_{0,n} + \rho\sin\nu_1\cdot\ldots\cdot\sin\nu_{n-1}
\end{aligned}$$

Якобіан переходу має вигляд:

$$\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{\rho,\nu_1,\ldots,\nu_{n-1}} = \rho^{n-1}\Phi(\sin\nu_1,\ldots,\sin\nu_{n-1},\cos\nu_1,\ldots,\cos\nu_{n-1}),$$

де $0\le\rho\le\eta, 0\le\nu_i\le\pi, i=\overline{1,n-2}, 0\le\nu_{n-1}\le 2\pi$.

Отримаємо

$$\int\limits_{U(x_0,\eta)} \frac{\mathrm{d}y}{|x_0-y|^\alpha} = \sigma_n\int\limits_0^\eta \frac{\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho}{\rho^\alpha} = \sigma_n \left.\frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right|_0^\eta = \frac{\sigma_n\eta^{n-\alpha}}{n-\alpha} \le \frac{\varepsilon}{4},$$

де σ_n – площа поверхні одиничної сфери в n-вимірному просторі $\mathbb{R}^n$.

Оскільки $|x-x_0|<\eta/2$, то

$$\int\limits_{U(x_0,\eta)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} \le \int\limits_{U(x_0,3\eta/2)} \frac{\mathrm{d}y}{|x_0-y|^\alpha} \le \frac{\sigma_n}{n-\alpha}\left(\frac{3\eta}{2}\right)^{n-\alpha} \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Оскільки $\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} \in C\left(\overline{U(x_0,\eta/2)}\times\overline{G\setminus U(x_0,\eta)}\right)$, то

$$\int\limits_{G\setminus U(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha} \right| \mathrm{d}y \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином ми довели, що $\left|\int_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int_G K(x_0,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \varepsilon$, тобто функція $\mathbf{K}\varphi$ неперервна в точці x_0.

Доведемо оцінку $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} \le N\|\varphi\_C(\bar{G})$, де $N = \max_{x\in\bar{G}} \int_G |K(x,y)\,\mathrm{d}y|$:

$$\left|\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \int\limits_G |K(x,y)||\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \le \|\varphi\|_{C(\bar{G})}\int\limits_G |K(x,y)| \le$$
$$\le |\varphi\|_{C(\bar{G})} \max_{x\in\bar{G}} \int\limits_G |K(x,y)|\,\mathrm{d}y = N\|\varphi\|_{C(\bar{G})},$$

отже $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} \le N\|\varphi\|_{C(\bar{G})}$.

Покажемо скінченність $N = \max_{x\in\bar{G}} \int_G |K(x,y)\,\mathrm{d}y|$. Розглянемо

$$\int\limits_G |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \le A_0 \int\limits_G \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} \le (*).$$

Для будь-якої точки x, існує радіус (рівний максимальному діаметру області G) такий, що в кулю з цим радіусом попадає будь-яка точка y: $D = \operatorname{diam} G$.

$$(*) \le A_0 \int\limits_{U(x,D)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} = A_0\frac{\sigma_n}{n-\alpha}D^{n-\alpha}.$$

□

Теорема 3 (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з полярним ядром для малих значень параметру)**.** Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з полярним ядром $K(x,y)$ має єдиний розв'язок в класі неперервних функцій для будь-якого неперервного вільного члена f при умові

$$|\lambda| < \frac{1}{N} \tag{2.1.19}$$

і цей розв'язок може бути представлений рядом Неймана, який збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення. Сформулюємо умову збіжності ряду Неймана.

$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f$, отже $\|\varphi\|_{C(\bar{G})} \le \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^i N^i \|f\|_{C(\bar{G})}$.

Останній ряд – геометрична прогресія і збігається при умові $|\lambda| < \frac{1}{N}$. □

Лема 4. Нехай маємо два полярних ядра $K_i(x,y) = \frac{A_i(x,y)}{|x-y|_i^\alpha}$, $\alpha_i < n$, $i = 1,2$, а область G обмежена, тоді ядро $K_3(x,y) = \int_G K_2(x,\xi)K_1(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi$ також полярне, причому має місце співвідношення:

$$K_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_3(x,y)}{|x-y|^{\alpha_1+\alpha_2-n}}, & \alpha_1+\alpha_2-n>0, \\ A_3(x,y)|\ln|x-y|| + B_3(x,y), & \alpha_1+\alpha_2-n=0, \\ A_3(x,y), & \alpha_1+\alpha_2-n<0, \end{cases} \tag{2.1.20}$$

де A_3, B_3 неперервні функції.

З леми 4 випливає, що всі повторні ядра $K_{(p)}(x,y)$, полярного ядра $K(x,y)$ задовольняють оцінкам:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$

$$K_{(2)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_2(x,y)}{|x-y|^{2\alpha-n}}, & 2\alpha-n>0, \\ A_2(x,y)|\ln|x-y|| + B_2(x,y), & 2\alpha-n=0, \\ A_2(x,y), & 2\alpha-n<0, \end{cases} \tag{2.1.21}$$

$$K_{(3)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_3(x,y)}{|x-y|^{3\alpha-2n}}, & 3\alpha-2n>0, \\ A_3(x,y)|\ln|x-y|| + B_3(x,y), & 3\alpha-2n=0, \\ A_3(x,y), & 3\alpha-2n<0, \end{cases} \tag{2.1.22}$$

$$K_{(p)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_p(x,y)}{|x-y|^{p\alpha-(p-1)n}}, & p\alpha-(p-1)n>0, \\ A_p(x,y)|\ln|x-y|| + B_p(x,y), & p\alpha-(p-1)n=0, \\ A_p(x,y), & p\alpha-(p-1)n<0. \end{cases} \tag{2.1.23}$$

Легко бачити, що для $\forall \alpha, n$ існує p_0 таке, що починаючи з нього всі повторні ядра є неперервні:

$$p\alpha-(p-1)n<0 \Rightarrow (n-\alpha)p>n \Rightarrow p>\frac{n}{n-\alpha} \Rightarrow p_0 = \left[\frac{n}{n-\alpha}\right]+1. \tag{2.1.24}$$

Звідси маємо, що резольвента $\mathcal{R}(x,y,\lambda)$ полярного ядра $K(x,y)$ складається з двох частин полярної складової $\mathcal{R}_1(x,y,\lambda)$ і неперервної складової $\mathcal{R}_2(x,y,\lambda)$:

$$\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \mathcal{R}_1(x,y,\lambda) + \mathcal{R}_2(x,y,\lambda) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) = \sum_{i=1}^{p_0-1} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) + \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y). \quad (2.1.25)$$

Для доведення збіжності резольвенти, потрібно дослідити збіжність нескінченного ряду $\mathcal{R}_2(x,y,\lambda)$. Він сходиться рівномірно при $x, y \in \bar{G}$, $|\lambda| \le \frac{1}{N} - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, визначаючи неперервну функцію $\mathcal{R}$ при $x, y \in \bar{G}$, $|\lambda| < \frac{1}{N}$ і аналітичну по λ в крузі

$$|\lambda| < \frac{1}{N}. \quad (2.1.26)$$

Дійсно

$$\mathcal{R}_2(x,y,\lambda) = \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y).$$

У свою чергу,

$$|\lambda^{p_0+s-1} K_{(p_0+s)}(x,y)| \le |\lambda|^{p_0+s-1} M_{p_0} N^s,$$

де $M_{p_0} = \max_{x,y \in \bar{G} \times \bar{G}} |K_{p_0}(x,y)|$. Таким чином ряд $\mathcal{R}_2(x,y,\lambda)$ мажорується геометричною прогресією, яка збігається при умові (2.1.26).

2.2 Теореми Фредгольма

2.2.1 Інтегральні рівняння з виродженим ядром

Визначення. Неперервне ядро $K(x,y)$ називається виродженим, якщо представляється у вигляді

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) g_i(y), \quad (2.2.1)$$

де $\{f_i\}_{i=\overline{1,N}}, \{g_i\}_{i=\overline{1,N}} \subset C(\bar{G})$, і $\{f_i\}_{i=\overline{1,N}}$ та $\{g_i\}_{i=\overline{1,N}}$, – лінійно незалежні системи функцій.

Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x,u) \varphi(y) \, \mathrm{d}y + f(x). \quad (2.2.2)$$

Підставимо вигляд ядра з (2.2.1) отримаємо:

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \sum_{i=1}^{N} f_i(x) g_i(y) \varphi(y) \, \mathrm{d}y + f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G g_i(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x), \quad (2.2.3)$$

де

$$c_j = \int_G g_j(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y. \quad (2.2.4)$$

В (2.2.4) підставимо значення $\varphi(x)$ з (2.2.3):

$$c_j = \int_G g_j(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_G g_j(y) \left(f(y) + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(y) \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_G g_j(y) f(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i \int_G g_j(y) f_i(y)\,\mathrm{d}y.$$

В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$c_j = \lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ji} c_i + a_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (2.2.5)$$

де

$$\alpha_{ji} = \int_G g_j(y) f_i(y)\,\mathrm{d}y, \quad a_j = \int_G g_j(y) f(y)\,\mathrm{d}y. \quad (2.2.6)$$

Отримаємо систему рівнянь для спряженого ядра:

$$K^*(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \bar{f}_i(y)\bar{g}_i(x), \quad (2.2.7)$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x), \quad (2.2.8)$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \bar{g}_i(x) \int_G \bar{f}_i(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i \bar{g}_i(x) + g(x), \quad (2.2.9)$$

$$d_i = \int_G \bar{f}_i(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y, \quad d_j = \int_G \bar{f}_j(y) \left(g(y) + \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i \bar{g}_i(y) \right) \mathrm{d}y, \quad (2.2.10)$$

$$d_j = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ji} d_i + b_j, \quad i = \overline{1, N}, \tag{2.2.11}$$

$$\beta_{ji} = \int\limits_G \bar{f}_j(y) \bar{g}_i(y) \, \mathrm{d}y, \quad b_j = \int\limits_G \bar{f}_j(y) g(y) \, \mathrm{d}y, \tag{2.2.12}$$

$$\beta_{ji} = \bar{\alpha}_{ij}. \tag{2.2.13}$$

Тобто отримуємо системи лінійних рівнянь які в матричному вигляді запишуться так:

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c} + \vec{a}, \tag{2.2.14}$$

$$\vec{d} = \lambda A^* \vec{d} + \vec{b}, \tag{2.2.15}$$

з матрицями $E - \lambda A$ та $E - \bar{\lambda} A^*$ відповідно і визначником $D(\lambda = |E - \lambda A| = |E - \bar{\lambda} A^*|$.

Дослідимо питання існування та єдиності розв'язку СЛАР (2.2.14) та (2.2.15).

Нехай $D(\lambda) \neq 0$, $\operatorname{rang} |E - \lambda A| = \operatorname{rang} |E - \bar{\lambda} A^*| = N$, тоді СЛАР (2.2.14) і (2.2.14) мають єдиний розв'язок для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно, а тому інтегральні рівняння Фредгольма (2.2.24), (2.2.25) мають єдині розв'язки при будь-яких f та g відповідно, і ці розв'язки записуються за формулами (2.2.3), (2.2.9).

Нехай $D(\lambda) = 0$, $\operatorname{rang} |E - \lambda A| = \operatorname{rang} |E - \bar{\lambda} A^*| = q < N$, тоді однорідні СЛАР

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c}, \tag{2.2.16}$$

та

$$\vec{d} = \lambda A^* \vec{d}, \tag{2.2.17}$$

мають $N - q$ лінійно незалежних розв'язків $\vec{c}_s$, $\vec{d}_s$, $s = \overline{1, N-q}$, де вектор визначається формулою $\vec{c}_s = (c_{s1}, \ldots, c_{sN})$, $\vec{d}_s = (d_{s1}, \ldots, d_{sN})$, таким чином відповідні однорідні інтегральні рівняння Фредгольма рівнянням (2.2.24), (2.2.25) мають $N - q$ лінійно незалежних розв'язків які записуються за такими формулами:

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_{si} f_i(x), \quad s = \overline{1, N-q}, \tag{2.2.18}$$

$$\psi_s(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_{si} \bar{g}_i(x), \quad s = \overline{1, N-q}, \tag{2.2.19}$$

$\varphi_s(x)$, $\psi_s(x)$ – власні функції, а число $N-q$ – кратність характеристичного числа λ та $\bar{\lambda}$. Кожна з систем функцій φ_s, ψ_s, $s=\overline{1,N-q}$ лінійно незалежна, оскільки лінійно незалежними є системи функцій f_i та g_i і лінійно незалежні вектори $\vec{c}_s$ і $\vec{d}_s$, $s=\overline{1,N-q}$.

Нагадаємо одне з формулювань теореми Кронекера-Капеллі. Для існування розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно і достатньо що би вільний член рівняння був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння.

Для нашого випадку цю умову можна записати у вигляді

$$(\vec{a},\vec{d}_s)=\sum_{i=1}^{N} a_i\bar{d}_{si}=0, \quad \forall s=\overline{1,N-q}. \tag{2.2.20}$$

Покажемо, що для виконання умови $(\vec{a},\vec{d}_s)=0$, $s=\overline{1,N-q}$ необхідно і достатньо, щоб вільний член інтегрального рівняння Фредгольма (2.2.24) був ортогональним розв'язкам спряженого однорідного рівняння тобто

$$(f,\psi_s)=0, \quad s=\overline{1,N-q} \tag{2.2.21}$$

Дійсно, з (2.2.19) та (2.2.4) маємо:

$$(f,\psi_s)=\int\limits_G f(x)\bar{\psi}_s(x)\,\mathrm{d}x=\lambda\sum_{i=1}^{N}\bar{d}_{si}\int\limits_G f(x)g_i(x)\,\mathrm{d}x=\lambda\sum_{i=1}^{N}a_i\bar{d}_{si}=\lambda(\vec{a},\vec{d}_s)=0,$$

для всіх $s=\overline{1,N-q}$.

В цьому випадку розв'язок СЛАР не єдиний, і визначається з точністю до довільного розв'язку однорідної системи рівнянь, тобто з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних векторів характеристичного числа λ:

$$\vec{c}=\vec{c}_0+\sum_{i=1}^{N-q}\gamma_i\vec{c}_i, \tag{2.2.22}$$

де γ_i – довільні константи, $\vec{c}_0$ – будь-який розв'язок неоднорідної системи рівнянь $\vec{c}_0=\lambda A\vec{c}_0+\vec{a}$, тоді розв'язок інтегрального рівняння можна записати у вигляді:

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{N-q}\gamma_i\varphi_i(x), \tag{2.2.23}$$

де φ_0 – довільний розв'язок неоднорідного рівняння $\varphi_0 = \lambda \mathbf{K}\varphi_0 + f$.

Отже доведені такі теореми:

Теорема 4 (Перша теорема Фредгольма для вироджених ядер)**.** Якщо $D(\lambda) \neq 0$, то інтегральне рівняння (2.2.24) та спряжене до нього (2.2.25) мають єдині розв'язки для довільних вільних членів f та g з класу неперервних функцій.

Теорема 5 (Друга теорема Фредгольма для вироджених ядер)**.** Якщо $D(\lambda) = 0$, то однорідне рівняння Фредгольма другого роду (2.2.24) ($f \equiv 0$) і спряжене до нього (2.2.25) ($g \equiv 0$) мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків рівну $N - q$, де $q = \operatorname{rang}(E - \lambda A)$.

Теорема 6 (Третя теорема Фредгольма для вироджених ядер)**.** Якщо $D(\lambda) = 0$, то для існування розв'язків рівняння (2.2.24) необхідно і достатньо, щоб вільний член f був ортогональним усім розв'язкам однорідного спряженого рівняння (2.2.21). При виконанні цієї умови розв'язок існує та не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій характеристичного числа λ.

Наслідок 1. Характеристичні числа виродженого ядра $K(x, y)$ співпадають з коренями поліному $D(\lambda) = 0$, а їх кількість не перевищує N.

Приклад 2. Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \sin(x - y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \cos(x).$$

Розв'язок.

$$\varphi(x) = \lambda \sin(x) \int\limits_0^\pi \cos(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \lambda\cos(x) \int\limits_0^\pi \sin(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \cos(x).$$

Позначимо

$$c_1 = \int\limits_0^\pi \cos(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad c_2 = \int\limits_0^\pi \sin(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

$$\varphi(x) = \lambda(c_1 \sin(x) - c_2\cos(x)) + \cos(x).$$

Підставляючи останню рівність в попередні отримаємо систем рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^\pi \cos(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y))\,\mathrm{d}y, \\ c_2 = \int\limits_0^\pi \sin(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y))\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

Після обчислення інтегралів:

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{\lambda\pi}{2} c_2 = \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\lambda\pi}{2} c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda\pi}{2} \\ -\frac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 \neq 0.$$

За правилом Крамера маємо

$$c_1 = \frac{2\pi}{4 + (\lambda\pi)^2}, \quad c_2 = \frac{\lambda\pi^2}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

Таким чином розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi \sin(x) + 4\cos(x)}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

2.2.2 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром

Будемо розглядати рівняння:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x), \tag{2.2.24}$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int\limits_G K^*(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x), \tag{2.2.25}$$

Ядро $K(x,y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, отже його можна наблизити поліномом (Теорема Вєйєрштраса).

Тобто, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує

$$P_N(x,y) = \sum_{|\alpha+\beta|\le N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{2.2.26}$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, такий що $|K(x,y) - P_N(x,y)| < \varepsilon$, $x, y \in \bar{G} \times \bar{G}$, тобто

$$K(x,y) = P_N(x,y) + Q_N(x,y), \tag{2.2.27}$$

де $P_N(x,y)$ – вироджене ядро (поліном), $|Q_N(x,y)| < \varepsilon$, $x, y \in \bar{G} \times \bar{G}$.

Виходячи з (2.2.27), інтегральне рівняння Фредгольма приймає вигляд

$$\varphi = \lambda \mathbf{P}_N \varphi + \lambda \mathbf{Q}_N \varphi + f, \tag{2.2.28}$$

де $\mathbf{P}_N$ та $\mathbf{Q}_N$ інтегральні оператори з ядрами $P_N(x,y)$ та $Q_N(x,y)$ відповідно ($\mathbf{P}_N + \mathbf{Q}_N = \mathbf{K}$).

Для спряженого рівняння маємо:

$$K^*(x,y) = P_N^*(x,y) + Q_N^*(x,y), \tag{2.2.29}$$

$$\psi = \bar{\lambda} \mathbf{P}_N^* \psi + \bar{\lambda} \mathbf{Q}_N^* \psi + g. \tag{2.2.30}$$

Покажемо, що в класі $C(G)$ рівняння (2.2.28), (2.2.30) еквівалентні рівнянням з виродженим ядром. Введемо нову функцію

$$\Phi = \varphi - \lambda \mathbf{Q}_N \varphi \tag{2.2.31}$$

З (2.2.28) випливає що $\Phi = \lambda \mathbf{P}_N + f$, з (2.1.15) випливає що $\forall \lambda$ такого що $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$: $(E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} = (E + \lambda \mathbf{R}_N)$, де $\mathbf{R}_N$ – резольвента для $\mathbf{Q}_N$. Отже $\varphi = (E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} \Phi = (E + \lambda \mathbf{R}_N)\Phi$.

Отже, рівняння (2.2.24) перетворюється на

$$\Phi = \lambda \mathbf{P}_N (E + \lambda \mathbf{R}_N)\Phi. \tag{2.2.32}$$

Для спряженого рівняння (2.2.25) маємо:

$$\psi = \bar{\lambda}(E + \bar{\lambda}\mathbf{R}_N^*)\mathbf{P}_N^* \psi + (E + \bar{\lambda}\mathbf{R}_N^*) g.$$

Позначимо $g_1 = (E + \bar{\lambda}\mathbf{R}_N^*)g$. Маємо:

$$\psi = \bar{\lambda}(E + \bar{\lambda}\mathbf{R}_N^*)\mathbf{P}_N^*\psi + g_1. \tag{2.2.33}$$

Оскільки $(\mathbf{P}_N\mathbf{R}_N)^* = \mathbf{R}_N^*\mathbf{P}_N^*$, то рівняння (2.2.32) та (2.2.33) спряжені.

Позначимо

$$\mathbf{T}_N = \mathbf{P}_N(E + \lambda\mathbf{R}_N), \tag{2.2.34}$$

$$\mathbf{T}_N^* = (E + \bar{\lambda}\mathbf{R}_N^*)\mathbf{P}_N^*. \tag{2.2.35}$$

Тоді рівняння Фредгольма з неперервним ядром можна записати у вигляді:

$$\Phi = \lambda\mathbf{T}_N\Phi + f, \tag{2.2.36}$$

$$\Psi = \bar{\lambda}\mathbf{T}_N^*\Psi + g_1, \tag{2.2.37}$$

де $T_N(x,y,\lambda) = P_N(x,y) + \lambda\int_G P_N(x,\xi)R_N(\xi,y,\lambda)\,\mathrm{d}\xi$ – вироджене, оскільки є сумою двох вироджених, поліному $P_N(x,y)$, та інтегрального доданку. Покажемо що другий доданок в T_N – вироджений. Дійсно:

$$\int\limits_G \sum_{|\alpha+\beta|\le N} a_{\alpha\beta}x^\alpha\xi^\beta R_N(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{|\alpha+\beta|\le N} a_{\alpha\beta}x^\alpha \int\limits_G \xi^\beta R_N(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi.$$

2.2.3 Альтернатива Фредгольма

Сукупність теорем Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром називається альтернативою Фредгольма.

Теорема 7 (Перша теорема Фредгольма для неперервних ядер)**.** Якщо інтегральне рівняння (2.2.24) з неперервним ядром $K(x,y)$ має розв'язок $\forall f \in C(\bar{G})$ то і спряжене рівняння (2.2.25) має розв'язок для $\forall g \in C(\bar{G})$ і ці роз'язки єдині.

Теорема 8 (Друга теорема Фредгольма для непевних ядер)**.** Якщо інтегральне рівняння (2.2.24) має розв'язки не для будь-якого вільного члена f, то однорідні рівняння $\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi$ $(*)$ та $\psi = \bar{\lambda}\mathbf{K}^*\psi$ $(**)$ мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків.

Теорема 9 (Третя теорема Фредгольма для неперервних ядер)**.** Якщо інтегральне рівняння (2.2.24) має розв'язок не для $\forall$ вільного члена f, то для існування розв'язку інтегрального рівняння (2.2.24) в $C(\bar{G})$ необхідно і достатньо, щоб вільний член f був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння $(**)$. Розв'язок не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки, натягнутої на систему власних функцій оператора $\mathbf{K}$.

Доведення теорем: Для будь-якого фіксованого значення λ виберемо ε, таке щоби $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$.

Теореми 1. Нехай (2.2.24) має розв'язок в $C(\bar{G})$ для $\forall$ вільного члена f, тоді еквівалентне йому рівняння (2.2.36): $\Phi = \lambda \mathbf{T}_N \Phi + F$ має такі ж властивості і згідно з першою теоремою Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda) \neq 0$, а спряжене до нього рівняння (2.2.37): $\Psi = \bar{\lambda} \mathbf{T}_N^* + g_1$ теж має єдиний розв'язок $\forall$ вільного члена g_1, еквівалентне до нього рівняння (2.2.25) має розв'язок $\forall g$. □

Теореми 2. Нехай (2.2.24) має розв'язок не $\forall$ вільного члена f, тоді, рівняння з виродженим ядром (2.2.36) має таку ж властивість. Згідно з теоремами Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda) = 0$ (для виродженого ядра $\mathbf{T}_N$). Однорідні рівняння які відповідають (2.2.36) і (2.2.37) мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків, еквівалентні до них однорідні рівняння $(*)$, $(**)$ теж мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв'язків. □

Теореми 3. Нехай неоднорідне рівняння (2.2.24) має розв'язок не для будь-якого вільного члена f, тоді еквівалентне рівняння з виродженим ядром (2.2.36) має таку ж властивість, і за третьою теоремою Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda) = 0$ (для виродженого ядра $\mathbf{T}_N$). Розв'язок (2.2.36) існує тоді і тільки тоді коли f ортогональний до розв'язків спряженого однорідного рівняння до (2.2.37). Але легко бачити, що вільний член (2.2.24) і (2.2.36) співпадають, так само співпадають розв'язки однорідного рівняння (2.2.25) і (2.2.37). □

Теорема 10 (Четверта теорема Фредгольма)**.** *Для будь-якого як завгодно великого числа $R > 0$ в крузі $|\lambda| < R$ лежить лише скінчена кількість характеристичних чисел неперервного ядра $K(x, y)$.*

2.2.4 Наслідки з теорем Фредгольма

Наслідок 2. З четвертої теореми Фредгольма випливає, що множина характеристичних чисел неперервного ядра не має скінчених граничних точок і не більш ніж злічена $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$.

Наслідок 3. З другої теореми Фредгольма випливає, що кратність кожного характеристичного числа скінчена, їх можна занумерувати у порядку зростання модулів $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}| \leq \ldots$, кожне число зустрічається стільки разів, яка його кратність. Також можна занумерувати послідовність власних функцій ядра $K(x, y)$: φ_1, φ_2, …, φ_k, φ_{k+1}, … і спряженого ядра $K^*(x, y)$: ψ_1, ψ_2, …, ψ_k, ψ_{k+1}, ….

Наслідок 4. Власні функції неперервного ядра $K(x, y)$ неперервні в області G.

Наслідок 5. Якщо $\lambda_k \neq \lambda_j$, то $(\varphi_k, \psi_j) = 0$.

2.2.5 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром

Розповсюдимо Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром:

$$K(x,y) = \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}, \quad \alpha < n. \tag{2.2.38}$$

Покажемо що $\forall \varepsilon > 0$ існує таке вироджене ядро $P_N(x,y)$ що,

$$\max_{x\in\bar{G}} \int\limits_G |K(x,y) - P_N(x,y)|\,\mathrm{d}y < \varepsilon \tag{2.2.39}$$

$$\max_{x\in\bar{G}} \int\limits_G |K^*(x,y) - P_N^*(x,y)|\,\mathrm{d}y < \varepsilon \tag{2.2.40}$$

Розглянемо неперервне ядро

$$L_M(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & |x-y| \geq 1/M, \\ A(x,y)M^{\alpha}, & |x-y| < 1/M. \end{cases} \tag{2.2.41}$$

Покажемо, що при достатньо великому M має місце оцінка

$$\int\limits_G |K(x,y) - L_M(x,y)|\,\mathrm{d}y \leq \varepsilon.$$

Дійсно:

$$\int\limits_G |K(x,y) - L_M(x,y)|\,\mathrm{d}y = \int\limits_{|x-y|<1/M} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}} - A(x,y)M^{\alpha} \right| \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{|x-y|<1/M} |A(x,y)| \left| \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} - M^{\alpha} \right| \mathrm{d}y \leq A_0 \int\limits_{|x-y|<1/M} \left| \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} - M^{\alpha} \right| \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq A_0 \int\limits_{|x-y|<1/M} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{\alpha}} = A_0\sigma_n \int\limits_0^{1/M} \xi^{n-1-\alpha}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= A_0\sigma_n \left.\frac{\xi^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right|_0^{1/M} = \frac{A_0\sigma_n}{(n-\alpha)M^{n-\alpha}} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

де σ_n – площа поверхні одиничної сфери.

Завжди можна підібрати вироджене ядро $P_N(x, y)$ таке що

$$|L_M(x, y) - P_N(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{2V},$$

де V – об'єм області G.

$$\int\limits_G |K(x, y) - P_N(x, y)| \, \mathrm{d}y = \int\limits_G |K(x, y) - L_M(x, y) + L_M(x, y) - P_N(x, y)| \, \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq \int\limits_G |K(x, y) - L_M(x, y)| \, \mathrm{d}y + \int\limits_G |L_M(x, y) - P_N(x, y)| \, \mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2V} \int\limits_G \mathrm{d}y = \varepsilon.$$

Використавши попередню техніку (для неперервного ядра) інтегральне рівняння з полярним ядром зводиться до еквівалентного рівняння з виродженим ядром. Тобто теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром з тим же самим формулюванням.

Теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром на обмеженій кусково-гладкій поверхні S та контурі C:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_S K(x, y)\varphi(y) \, \mathrm{d}y + f(x), \quad \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < \dim(S).$$

2.3 Інтегральні рівняння з ермітовим ядром

Розглядатимемо ядро $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$ таке що $K(x, y) = K^*(x, y)$.

Неперервне ядро будемо називати ермітовим, якщо виконується

$$K(x, y) = K^*(x, y) \tag{2.3.1}$$

Ермітовому ядру відповідає ермітовий оператор тобто $\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$.

Лема 5. Для того, щоб лінійний оператор був ермітовим, необхідно і достатньо, щоб для довільної комплексно значної функції $f \in L_2(\bar{G})$ білінійна форма $(\mathbf{K}f, f)$ приймала лише дійсні значення.

Лема 6. Характеристичні числа ермітового оператора дійсні.

Визначення 1. Множина функцій $M \subset C(\bar{G})$ – компактна в рівномірній метриці, якщо з будь-якої нескінченної множини функцій з можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність.

Визначення 2. Нескінченна множина $M \subset C(\bar{G})$ – рівномірно обмежена, якщо для будь-якого елемента $f \in M$ має місце $\|f\|_{C(\bar{G})} \leq a$, де a єдина константа для M.

Визначення 3. Множина $M \subset C(\bar{G})$ – одностайно неперервна якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \forall f \in M, \forall x_1, x_2 : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ як тільки $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$.

Теорема 11 (Арчела-Асколі, критерій компактності в рівномірній метриці)**.** Для того, щоб множина $M \subset C(\bar{G})$ була компактною, необхідно і достатньо, щоб вона складалась з рівномірно-обмеженої і одностайно-неперервної множини функцій.

Визначення 4. Назвемо оператор $\mathbf{K}$ цілком неперервним з $L_2(G)$ у $C(\bar{G})$, якщо він переводить обмежену множину в $L_2(G)$ у компактну множину в $C(\bar{G})$ (в рівномірній метриці).

Лема 7. Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з неперервним ядром $K(x, y)$ є цілком неперервний з $L_2(G)$ у $C(\bar{G})$.

Доведення. Нехай $f \in M \subset L_2(G)$ та $\forall f \in M : \|f\|_{L_2(G)} \leq A$. Але $\|\mathbf{K}f\|_{C(\bar{G})} \leq M\sqrt{V}\|f\|_{L_2(G)} \leq M\sqrt{V}A$, тобто множина функцій є рівномірно обмеженою.

Покажемо що множина $\{\mathbf{K}f(x)\}$ – одностайно неперервна.

Ядро $K \in C(\bar{G} \times \bar{G})<$ а отже є рівномірно неперервним, бо неперервне на компакті, тобто $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \bar{G} : \|x' - x''\| < \delta \Rightarrow |(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| \leq \varepsilon$. Дійсно,

$$|(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| = \left| \int\limits_G K(x', y) f(y)\, \mathrm{d}y - \int\limits_G K(x'', y) f(y)\, \mathrm{d}y \right| \leq$$
$$\leq \int\limits_G |K(x', y) - K(x'', y)| |f(y)|\, \mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon\sqrt{V}}{A\sqrt{V}} \|f\|_{L_2(\bar{G})} \leq \varepsilon.$$

□

Приклад 3. Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального оператора

$$\varphi(x0 = \lambda \int\limits_0^1 \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{2/5} + \left(\frac{t}{x}\right)^{2/5} \right) \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Розв'язок.

$$\varphi(x) = \lambda x^{2/5} \int\limits_0^1 t^{-2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \lambda x^{-2/5} \int\limits_0^1 t^{2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Позначимо

$$c_1 = \int\limits_0^1 t^{-2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad c_2 = \int\limits_0^1 t^{2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\varphi(x) = \lambda c_1 x^{2/5} + \lambda c_2 x^{-2/5}.$$

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^1 t^{-2/5}(\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5})\,\mathrm{d}t, \\ c_2 = \int\limits_0^1 t^{2/5}(\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5})\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)c_1 - 5\lambda c_2 = 0, \\ -\dfrac{5\lambda}{9}c_1 + (1-\lambda)c_2 = 0. \end{cases}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5\lambda \\ -\dfrac{5\lambda}{9} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{25\lambda^2}{9} = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{8}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

З системи однорідних рівнянь при $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{8}$ маємо $c_1 = 3c_2$. Тоді маємо власну функцію $\varphi_1(x) = 3x^{2/5} + x^{-2/5}$.

При $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$ маємо $c_1 = -3c_2$. Маємо другу власну функцію $\varphi_2(x) = -3x^{2/5} + x^{-2/5}$.

Приклад 4. Знайти розв'язок інтегрального рівняння при всіх значеннях параметрів λ, a, b, c:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})\varphi(y)\,\mathrm{d}y + ax^2 + bx + c.$$

Розв'язок. Запишемо рівняння у вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda\int\limits_{-1}^{1}\sqrt[3]{y}\varphi(y)\,\mathrm{d}y + ax^2 + bx + c.$$

Введемо позначення:

$$c_1 = \int\limits_{-1}^{1}\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad c_2 = \int\limits_{-1}^{1}\sqrt[3]{y}\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

та запишемо розв'язок у вигляді: $\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}c_1 + \lambda c_2 + ax^2 + bx + c$.

Для визначення констант отримаємо СЛАР:

$$\begin{cases} c_1 - 2\lambda c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ -\dfrac{6\lambda}{5}c_1 + c_2 = \dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює $\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{6\lambda}{5} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{12\lambda^2}{5}$.
Характеристичні числа ядра $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Нехай $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$. Тоді розв'язок існує та єдиний для будь-якого вільного члена і має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{5\lambda(14a + 30\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)}\sqrt[3]{x} + \frac{28\lambda a + 84\lambda c + 30b}{7(5 - 12\lambda^2)} + ax^2 + bx + c.$$

Нехай $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Тоді система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} c_1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Ранги розширеної і основної матриці співпадатимуть якщо має місце рівність $\frac{2a}{3} + 2c = -\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6}{7}b$, $(*)$.

При виконанні цієї умови розв'язок існує $c_2 = c_2$, $c_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c$.

Таким чином розв'язок можна записати

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + x.$$

Якщо $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, а умова $(*)$ не виконується, то розв'язків не існує.

Нехай $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Після підстановки цього значення отримаємо СЛАР

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = \sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Остання система має розв'язок при умові, $\frac{2a}{3} + 2c = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6}{7}b$, $(**)$.

При виконанні умови $(**)$, розв'язок існує $c_2 = c_2$, $c_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c$.

Розв'язок інтегрального рівняння можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + c.$$

2.3.1 Характеристичні числа ермітового неперервного ядра

Теорема 12 (Про існування характеристичного числа у ермітового неперервного ядра)**.** Для будь-якого ермітового неперервного ядра, що не дорівнює тотожно нулю існує принаймні одне характеристичне число і найменше з них за модулем λ_1 задовольняє варіаційному принципу

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}}. \tag{2.3.2}$$

Доведення. Серед усіх $f \in L_2$ оберемо такі, що $\|f\|_{L_2(G)} = 1$. Позначимо

$$\nu = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ \|f\|_{L_2}=1}} \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}.$$

Оскільки $\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq MV\|f\|_{L_2(G)} \leq MV$, то $0 \leq \nu \leq MV$.

Згідно до визначення точної верхньої межі,

$$\exists\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(G) : \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{K}f_k\|_{L_2(G)} = \nu.$$

Оцінимо

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{K}^2 f\|_{L_2(G)} = \|\mathbf{K}(\mathbf{K}f)\|_{L_2(G)} = \\ &\qquad = \mathbf{K}\left\|\left(\frac{\mathbf{K}f}{\|\mathbf{K}f\|}\right)\right\|_{L_2(G)} \mathbf{K}\|f\|_{L_2(G)} \leq \\ &\qquad\qquad \leq \nu\mathbf{K}\|f\|_{L_2(G)} \leq \nu^2.\end{aligned}$$

Покажемо, що $\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k \to 0$ в середньому квадратичному. Тобто $\|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|^2_{L_2(G)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
Дійсно:

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|^2_{L_2(G)} = (\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k, \mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k)_{L_2(G)} = \\ &\qquad = \|\mathbf{K}^2 f_k\|^2_{L_2(G)} + \nu^4 - \nu^2(\mathbf{K}^2 f_k, f_k) - \nu^2(f_k, \mathbf{K}^2 f_k) = \\ &\quad = \|\mathbf{K}^2 f_k\|^2_{L_2(G)} + \nu^4 - 2\nu^2\|\mathbf{K}f_k\|^2_{L_2(G)} \leq \nu^2(\nu^2 - \|\mathbf{K}^2 f_k\|^2_{L_2(G)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Розглянемо послідовність $\{\mathbf{K}f_k\} = \{\varphi_k\}$, яка є компактною в рівномірній метриці.

Звідси підпослідовність $\{\varphi_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ збіжна в $C(\bar{G})$, тобто $\exists\varphi \in C(\bar{G})$, така що $\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\bar{G})} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$.

Покажемо, що $\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi = 0$ в кожній точці, тобто $\|\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi\|_{C(\bar{G})} = 0$.

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi\|_{C(\bar{G})} = \|\mathbf{K}^2\varphi - \mathbf{K}^2\varphi_{k_i} + \mathbf{K}^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi_{k_i} + \nu^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi\|_{C(\bar{G})} \leq \\ &\quad \leq \|\mathbf{K}^2\varphi - \mathbf{K}^2\varphi_{k_i}\|_{C(\bar{G})} + \|\mathbf{K}^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi_{k_i}\|_{C(\bar{G})} + \|\nu^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi\|_{C(\bar{G})} \leq \\ &\leq (MV)^2\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\bar{G})} + M\sqrt{V}\|\mathbf{K}^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\|_{L_2(\bar{G})} + \nu^2\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\bar{G})} \to 0+0+0.\end{aligned}$$

Таким чином має місце рівність

$$\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi = 0 \tag{2.3.3}$$

Отже маємо: $(\mathbf{K} + E\nu)(\mathbf{K} - E\nu)\varphi = 0$. Ця рівність може мати місце у двох випадках:

1. $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv 0$. Тоді $\varphi = \frac{1}{\nu}\mathbf{K}\varphi$, а отже φ – власна функція, $\frac{1}{\nu}$ – характеристичне число оператора $\mathbf{K}$.

2. $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv \Phi \neq 0$. Тоді $(\mathbf{K} + E\nu)\Phi \equiv 0$. Тоді $\Phi = -\frac{1}{\nu}\mathbf{K}\Phi$, а отже Φ – власна функція, $-\frac{1}{\nu}$ – характеристичне число оператора $\mathbf{K}$.

Залишилось довести, що це характеристичне число є мінімальним за модулем. Припустимо супротивне. Нехай $\exists\lambda_0 : |\lambda_0| < |\lambda_1|$, тоді $\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f\in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K}f\|}{\|f\|} \geq \frac{\|\mathbf{K}\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{|\lambda_0|} \Rightarrow |\lambda_0| \geq |\lambda_1|$. □

Зауваження. Доведена теорема є вірною і для ермітових полярних ядер,

Звідси безпосередньо випливають такі властивості характеристичних чисел та власних функцій ермітового ядра:

1. Множина характеристичних чисел ермітового неперервного ядра не порожня, є підмножиною множини дійсних чисел і не має скінчених граничних точок.

2. Кратність будь-якого характеристичного числа скінчена.

3. Власні функції можна вибрати так, що вони утворять ортонормовану систему. Тобто $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\ldots}$ такі що $(\varphi_k, \varphi_i)_{L_2(G)} = \delta_{ki}$.

   (Зокрема достатньо провести процес ортогоналізації Гілберта-Шмідта для будь-якої системи лінійно незалежних власних функцій, і пронормувати отриману систему).

2.4 Теорема Гілберта-Шмідта та її наслідки

2.4.1 Білінійний розвинення ермітового неперервного ядра

Нехай $K(x,y) \in C(\bar{G}\times\bar{G})$ ермітове неперервне ядро, $|\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}|$, $i = 1, 2, \ldots$ його характеристичні числа і $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортонормована система власних функцій, що відповідають власним числам.

Розглянемо послідовність ермітових неперервних ядер:

$$K^p(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\bar{\varphi}_i(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{2.4.1}$$

$$K^p(x,y) = (K^p)^*(x,y) \in C(\bar{G}\times\bar{G}).$$

Дослідимо властивості операторів (2.4.1). Покажемо, що будь-яке характеристичне число λ_j, $j > p+1$ та відповідна йому власна функція φ_j є характеристичним числом і власною функцією ядра $K^p(x, y)$.

$$\mathbf{K}^p\varphi_j = \mathbf{K}\varphi_j - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}(\varphi_i, \varphi_j) = \mathbf{K}\varphi_j = \frac{\varphi_j}{\lambda_j}. \tag{2.4.2}$$

Нехай λ_0, φ_0 – характеристичне число та відповідна власна функція $K^p(x, y)$, тобто $\lambda_0\mathbf{K}^p\varphi_0 = \varphi_0$. Покажемо що, $(\varphi_0, \varphi_j) = 0$ для $j = \overline{1, p}$.

$$\varphi_0 = \lambda_0\mathbf{K}\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i}{\lambda_i}(\varphi_0, \varphi_i),$$

$$(\varphi_0, \varphi_j) = \lambda_0(\mathbf{K}\varphi_0, \varphi_j) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_j)}{\lambda_i} = \frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j) - \frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j) = 0.$$

Отже λ_0, φ_0 відповідно характеристичне число і власна функція ядра $K(x, y)$.

Таким чином φ_0 – ортогональна до усіх власних функцій φ_1, φ_2, …, φ_p, таким чином, λ_0 співпадає з одним із характеристичних чисел λ_{p+1}, λ_{p+2}, … тобто $\varphi_0 = \varphi_k$ для деякого $k \geq p + 1$.

Отже у ядра $K^p(x, y)$ множина власних функцій і характеристичних чисел вичерпується множиною власних функцій і характеристичних чисел ядра $K(x, y)$ починаючи з номера $p + 1$.

Враховуючи, що λ_{p+1} найменше за модулем характерне число ядра $K^p(x, y)$, має місце нерівність

$$\frac{\|\mathbf{K}^p f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}} \leq \frac{1}{|\lambda_{p+1}|}.$$

Для ядра, що має скінчену кількість характеристичних чисел, очевидно, має місце рівність $K^N(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \equiv 0$.

Тобто будь-яке ермітове ядро зі скінченою кількістю характеристичних чисел є виродженим і представляється у вигляді $K(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}$.

Враховуючи теорему про існування характеристичних чисел у ермітового оператора можемо записати:

$$\|K^{(p)} f\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}f - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_{L_2(G)} \leq \frac{\|f\|_{L_2(G)}}{|\lambda_{p+1}|} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0. \tag{2.4.3}$$

Тобто можна вважати, що ермітове ядро в розумінні (2.4.3) наближається наступним білінійним рядом:

$$K(x,y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \tag{2.4.4}$$

Для виродженого ядра маємо його представлення у вигляді

$$K(x,y) \sim \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \tag{2.4.5}$$

2.4.2 Ряд Фур'є функції із $L_2(G)$

Розглянемо довільну функцію $f \in L_2(G)$ і деяку ортонормовану систему функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$. Рядом Фур'є функції f із $L_2(G)$ називається ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i \sim f, \tag{2.4.6}$$

(f, u_i) – називається коефіцієнтом Фур'є.

$\forall f \in L_2(G)$ виконується нерівність Бесселя

$$\forall N : \sum_{i=1}^{N} |(f, u_i)|^2 \leq \|f\|^2_{L_2(G)}. \tag{2.4.7}$$

Нерівність Бесселя гарантує збіжність ряду Фур'є в середньоквадратичному, але не обов'язково до функції f.

Визначення 5. Ортонормована система функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ називається повною (замкненою), якщо ряд Фур'є для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ по цій системі функцій збігається до цієї функції в просторі $L_2(G)$.

Теорема 13 (Критерій замкненості ортонормованої системи функцій)**.** Для того щоб система функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ була повною в $L_2(G)$ необхідно і достатньо, щоби для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ виконувалось рівність Парсеваля-Стеклова:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, u_i)|^2 = \|f\|^2_{L_2(G)}. \tag{2.4.8}$$

2.4.3 Теорема Гільберта-Шмідта

Функція $f(x)$ називається джерелувато-зображуваною через ермітове неперервне ядро $K(x,y) = K^*(x,y)$, $K \in C(G \times G$, якщо існує функція $h(x) \in L_2(G)$, така що

$$f(x) = \int\limits_G K(x,y)h(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.4.9}$$

Теорема 14 (Гільберта-Шмідта)**.** *Довільна джерелувато-зображувана функція f розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою власних функцій ермітового неперервного ядра $K(x,y)$*

Доведення. Обчислимо коефіцієнти Фур'є: $(f,\varphi_i) = (\mathbf{K}h,\varphi_i) = (h,\mathbf{K}\varphi_i) = \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}$. Отже ряд Фур'є функції f має вигляд

$$f \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \tag{2.4.10}$$

Якщо власних чисел скінчена кількість, то з (2.4.5) випливає, що можливе точне представлення $f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i(x)$, якщо ж власних чисел злічена кількість, то з (2.4.3) випливає співвідношення:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{p} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}h - \sum_{i=1}^{p} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_{L_2(G)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0, \quad h \in L_2(G).$$

Покажемо, що формулу (2.4.4) можна розглядати як розвинення ядра $K(x,y)$ в ряд Фур'є по системі власних функцій $\varphi_i(x)$. Перевіримо це обчислюючи коефіцієнт Фур'є:

$$(K(\cdot,y),\varphi_i)_{L_2(G)} = \int\limits_G K(x,y)\bar{\varphi}_i(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_G \bar{K}(y,x)\bar{\varphi}_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}.$$

Доведемо рівномірну збіжність ряду Фур'є (2.4.10) за критерієм Коші і покажемо, що при, $n,m \to \infty$, відрізок ряду прямує до нуля. За нерівністю Коші-Буняківського маємо:

$$\left| \sum_{i=n}^{m} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right| \le \sum_{i=n}^{m} |(h,\varphi_i)| \frac{|\varphi_i|}{|\lambda_i|} \le \left(\sum_{i=n}^{m} |(h,\varphi_i)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=n}^{m} \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \right)^{1/2}$$

$$\sum_{i=n}^{m} |(h,\varphi_i)|^2 \le \|h\|^2_{L_2(G)},$$

тобто ряд збігається, а вказана сума прямує до 0 при $n, m \to \infty$.

$$\sum_{i=n}^{m} \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \leq \int\limits_G |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x \leq M^2 V,$$

тобто ряд збігається.

Отже

$$\left(\sum_{i=n}^{m} |(h,\varphi_i)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=n}^{m} \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2}\right)^{1/2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

а отже $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i$ збігається абсолютно і рівномірно. □

Наслідок 6. Довільне повторне ядро для ермітового неперервного ядра $K(x,y)$ розкладається в білінійний ряд по системі власних функцій ермітового неперервного ядра, який збігається абсолютно і рівномірно, а саме рядом

$$K_{(p)}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i^p},$$

де $p = 2, 3, \ldots$, і коефіцієнти Фур'є $\frac{\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i^p}$.

Повторне ядро $K_{(p)} = \int_G K(x,\xi)K_{(p-1)}(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi$ є джерелувато-зображувана функція і таким чином для нього має місце теорема Гільберта-Шмідта.

Доведемо деякі важливі нерівності:

$$K_{(2)}(x,x) = \int\limits_G K(x,\xi)K(\xi,x)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_G K(x,\xi)\bar{K}(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int\limits_G |K(x,\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i^2}. \quad (2.4.11)$$

Рівність (2.4.11) випливає з наслідку 1. Проінтегруємо (2.4.11), отримаємо

$$\iint\limits_{G\times G} |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}. \quad (2.4.12)$$

Теорема 15 (Про збіжність білінійного ряду для ермітового неперервного ядра)**.** Ермітове неперервне ядро $K(x,y)$ розкладається в білінійний ряд $K(x,y) =$

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}$ по своїх власних функціях, і цей ряд збігаються в нормі $L_2(G)$ по аргументу x рівномірно для кожного $y \in \bar{G}$, тобто

$$\left\| K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right\|_{L_2(x\in G)} \xrightarrow[p\to\infty]{y\in\bar{G}} 0.$$

Доведення.

$$\left\| K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right\|^2_{L_2(G)} = \int\limits_G |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{p} \frac{|\varphi_i(y)|^2}{\lambda_i^2} \xrightarrow[p\to\infty]{y\in\bar{G}} 0.$$

Додатково інтегруючи по аргументу $y \in G$ отримаємо збіжність білінійного ряду (2.4.4) в середньоквадратичному.

$$\iint\limits_G \left(K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right)^2 \mathrm{d}y \xrightarrow[p\to\infty]{} 0. \tag{2.4.13}$$

□

2.4.4 Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду $\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f$, з ермітовим неперервним ядром

$$K(x,y) = K^*(x,y). \tag{2.4.14}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \ldots$ – множина характеристичних чисел та ортонормована система власних функцій ядра $K(x,y)$.

Розкладемо розв'язок рівняння φ по системі власних функцій ядра $K(x,y)$:

$$\varphi = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{K}\varphi, \varphi_i)\varphi_i + f = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, \mathbf{K}\varphi_i)\varphi_i + f = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i + f,$$

обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$(\varphi,\varphi_k) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi,\varphi_i)}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi_k) + (f,\varphi_k) = \lambda\frac{(\varphi,\varphi_k)}{\lambda_k} + (f,\varphi_k).$$

Отже, $(\varphi,\varphi_k)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) = (f,\varphi_k)$, тому $(\varphi,\varphi_k) = (f,\varphi_k)\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}$, $k = 1, 2, \ldots$

Таким чином має місце формула Шмідта:

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x) + f(x). \tag{2.4.15}$$

Розглянемо усі можливі значення λ:

1. Якщо $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, тоді існує єдиний розв'язок для довільного вільного члена f і цей розв'язок представляється за формулою (2.4.15).

2. Якщо $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+q-1}$ – співпадає з одним з характеристичних чисел кратності q, та при цьому виконанні умови ортогональності $(f, \varphi_k) = (f, \varphi_{k+1}) = \ldots = (f, \varphi_{k+q-1}) = 0$ тоді розв'язок існує (не єдиний), і представляється у вигляді

$$\varphi(x) = \lambda_k \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq \lambda_k}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i - \lambda_k} \varphi_i(x) + f(x) + \sum_{j=k}^{k+q-1} c_j \varphi_j(x), \tag{2.4.16}$$

   де c_j – довільні константи.

   Якщо $\exists j : (f, \varphi_j) \neq 0$, $k \leq j \leq k+q-1$ тоді розв'язків не існує.

Приклад 5. Знайти ті значення параметрів a, b для яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(xy - \frac{1}{3} \right) \varphi(y) \, \mathrm{d}y + ax^2 - bx + 1$$

має розв'язок для будь-якого значення λ.

Розв'язок. Знайдемо характеристичні числа та власні функції спряженого однорідного рівняння (ядро ермітове).

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-1}^{1} y \varphi(y) \, \mathrm{d}y - \frac{\lambda}{3} \int_{-1}^{1} \varphi(y) \, \mathrm{d}y = \lambda x c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2.$$

$$\begin{cases} c_1 = \displaystyle\int_{-1}^{1} y \varphi(y) \, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y \left(\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) \mathrm{d}y = \frac{2\lambda}{3} c_1, \\ c_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi(y) \, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left(\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) \mathrm{d}y = -\frac{2\lambda}{3} c_2. \end{cases}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{2\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 1 + \dfrac{2\lambda}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = 1.$$

Умови ортогональності:

$$\begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1)x \, \mathrm{d}x = -\dfrac{2b}{3} = 0, \\ \int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1) \, \mathrm{d}x = \dfrac{2a}{3} + 2 = 0. \end{cases}$$

$$a = -3, \quad b = 0.$$

2.4.5 Додатньо визначені ядра

Визначення 6. Неперервне ядро $K(x,y)$ називається додатньо визначеним, якщо $\forall f \in L_2(G) : (\mathbf{K}f, f) \geq 0$. Причому $(\mathbf{K}f, f) = 0 \Leftrightarrow \|f\|_{L_2(G)} = 0$.

Довільне додатньо визначене ядро є ермітовим (його білінійна форма $(\mathbf{K}f, f)$ приймає дійсні значення).

Лема 8. Для того, щоб неперервне ядро було додатньо визначеним необхідно і достатньо, щоб його характеристичні числа були додатні.

Доведення. Необхідність: Для довільної власної функції $(\mathbf{K}\varphi_k, \varphi_k) = \frac{1}{\lambda_k} > 0$.

Достатність: Розглянемо $\mathbf{K}f$ як джерелувато-зображувану функцію, згідно до теореми Гілберта-Шмідта $\mathbf{K}f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k$, тоді

$$(\mathbf{K}f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k}(\varphi_k, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k} > 0,$$

отже квадратична форма додатньо визначена.

Таким чином додатність характеристичних чисел є критерієм додатної визначеності ядра. $\square$

Лема 9. Довільне додатньо визначене неперервне ядро має характеристичні числа і для них має місце варіаційний принцип:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ (f,\varphi_i)=0, i=\overline{1,k-1}}} \frac{(\mathbf{K}f,f)_{L_2(G)}}{\|f\|^2_{L_2(G)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.4.17}$$

де $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots$, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ – ортонормована система власних функцій.

Доведення. З теореми Гілберта Шмідта функціонал (2.4.17) можна оцінити

$$\frac{(\mathbf{K}f,f)_{L_2(G)}}{\|f\|^2_{L_2(G)}} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_i)|^2}{\lambda_i \|f\|^2} \le \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_i)|^2}{\|f\|^2} \le \frac{1}{\lambda_k}.$$

(перша нерівність виконується оскільки λ_k – найменше характеристичне число в сумі, а друга випливає з нерівності Бесселя). З іншого боку при $f = \varphi_k$ маємо $\frac{(\mathbf{K}\varphi_k,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}$, тобто існує функція на якій досягається верхня межа цієї нерівності. □

Теорема 16 (Мерсера, про регулярну збіжність білінійного ряду для ермітових ядер зі скінченою кількістю від'ємних характеристичних чисел)**.** Якщо ермітове неперервне ядро $K(x,y)$ має лише скінчену кількість від'ємних характеристичних чисел, то його білінійний ряд

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \tag{2.4.18}$$

збігається в $\bar{G} \times \bar{G}$ абсолютно і рівномірно.

Доведення. Покажемо, що якщо ядро $K(x,y)$ – додатньо визначене, то $\forall x \in \bar{G} : K(x,x) \ge 0$. Оскільки $K(x,y)$ – ермітове, то $K(x,x) = \bar{K}(x,x)$ і є дійсною функцією. Якщо існує хоча б одна точка $x_0 \in \bar{G}$ така, що $K(x_0,x_0) < 0$, то виходячи з неперервності знайдеться і деякій окіл цієї точки $U(x_0,x_0) \subset \bar{G} \times \bar{G}$ такий, що $\forall (x,y) \in U(x_0,x_0) : ReK(x,y) < 0$. Оберемо невід'ємну неперервну функцію $\varphi(x)$ яка відміна від нуля лише в $U(x_0,x_0)$ і отримаємо

$$(\mathbf{K}\varphi,\varphi) = \int\limits_{U(x_0,x_0)} K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{U(x_0,x_0)} ReK(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le 0.$$

Остання нерівність вступає в протиріччя з припущенням додотньої визначеності ядра, тобто теорему достатньо довести для додатньо визначених ядер.

Розглянемо ядро $K^p(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\bar{\varphi}_i(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i}$, де p – номер останнього від'ємного характеристичного числа, так що усі λ_i, $i = p+1, p+2, \ldots$ є додатніми. Таким чином ядро $K^p(x,y)$ є неперервним та додатньо визначеним. А це означає, що $\forall x \in \bar{G} : K(x,x) \geq 0$. Таким чином маємо нерівність:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i} \leq K(x,x) \leq M, \quad x \in \bar{G}, N = p+1, p+2, \ldots \tag{2.4.19}$$

Розглянемо білінійний ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}$ і доведемо його абсолютну і рівномірну збіжність за критерієм Коші. Використовуючи нерівність Коші-Буняківського маємо:

$$\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)|}{\lambda_k} \leq \left(\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k} \right)^{1/2} \tag{2.4.20}$$

Але оскільки має місце (2.4.19), яка гарантує рівномірну збіжність нескінченного ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k}$, то білінійний ряд (2.4.18) збігається абсолютно і рівномірно (регулярно) в $\bar{G} \times \bar{G}$. □

Зауваження 1. Теорема Гільберта-Шмідта і її наслідки, встановлені для ермітового неперервного ядра, залишаються вірними і для ермітового слабо полярного ядра.

Зауваження 2. Теорема Гільберта-Шмідта і формула Шмідта у випадку полярного ядра залишаються вірними, але з заміною рівномірної збіжності на середньоквадратичну.

2.5 Задача Штурма-Ліувілля. Теорема Стеклова

Постановка задачі Штурма-Ліувілля: нехай $\mathbf{L}$ – диференціальний оператор другого порядку:

$$\mathbf{L}u = (-p(x)u')' + q(x)u = \lambda u, \quad 0 < x < l, \tag{2.5.1}$$

$$l_1(u)|_{x=0} = h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \tag{2.5.2}$$

$$l_2(u)|_{x=l} = H_1 u(l) - H_2 u'(l) = 0, \tag{2.5.3}$$

$$p \in C^{(1)}([0,l]), q \in C([0,l]), q \geq 0, p > 0,$$
$$h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0, h_1 + h_2 > 0, H_1 + H_2 > 0, \tag{2.5.4}$$

$$M_L = \{u : u \in C^{(2)}(0,l) \cap C^{(1)}([0,l]), u'' \in L_2(0,l), l_1 u(0) = l_2 u(l) = 0\} \tag{2.5.5}$$

– область визначення оператора $\mathbf{L}$.

Визначення 7. Знайти розв'язки задачі Штурма-Ліувіля означає знайти всі ті значення параметра λ, при яких гранична задача (2.5.1)-(2.5.4) має нетривіальний розв'язок. Ці значення називаються власними значеннями задачі Штурма-Ліувіля, а самі розв'язки – власними функціями.

2.5.1 Функція Гріна оператора L

Будемо припускати, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора $\mathbf{L}$ задачі Штурма-Ліувіля.

Розглянемо граничну задачу:

$$\begin{cases} (-p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{2.5.6}$$

Припустимо що $f \in C(0,l) \cap L_2(0,l)$.

З припущення, що $\lambda = 0$ не є власним числом випливає, що задача (2.5.6) має єдиний розв'язок.

Розглянемо функції $v_i(x)$, $i = 1,2$ – ненульові дійсні розв'язки однорідних задач Коші:

$$\begin{cases} (-p(x)v_i'(x))' + q(x)v_i'(x) = 0, \quad i = 1,2 \\ l_1 v_1|_{x=0} = l_2 v_2|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{2.5.7}$$

З загальної теорії задач Коші випливає, що розв'язки цих задач Коші існують, тому $v_i(x)$ – двічі неперервно диференційовані функції. Покажемо що $v_1(x)$, $v_2(x)$ – лінійно незалежні.

Припустимо що це не так і $v_1(x) = cv_2(x)$, тобто $v_1(x)$ задовольняє одночасно граничним умовам на лівому і правому краях. Тоді $v_1(x)$ – власна функція оператора $\mathbf{L}$, і відповідає власному числу $\lambda = 0$ що суперечить припущенню, тому $v_1(x)$, $v_2(x)$ – лінійно незалежні. В цьому випадку визначник Вронського $w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \neq 0$.

Будемо шукати розв'язок задачі (2.5.6) методом варіації довільної сталої у вигляді: $u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$.

Підставимо в рівняння: $(-p(c_1'v_1 + c_2'v_2 + c_1v_1' + c_2v_2')' + q(c_1v_1 + c_2v_2) = f$.

Накладемо першу умову на коефіцієнти: $c_1'v_1 + c_2'v_2 = 0$, маємо:

$$-p'(c_1v_1' + c_2v_2') - p(c_1'v_1' + c_2'v_2' + c_1v_1'' + c_2v_2'') + q(c_1v_1 + c_2v_2) = f,$$

або $c_1Lv_1 + c_2Lv_2 - p(c_1'v_1' + c_2'v_2') = f$, оскільки $c_1\mathbf{L}v_1 = 0$, $c_2\mathbf{L}v_2 = 0$, то $-p(c_1'v_1' + c_2'v_2') = f$, отже $c_1'v_1' + c_2'v_2' = -\frac{f}{p}$.

Таким чином c_1' та c_2' повинні задовольняти системі лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'v_1 + c_2'v_2 = 0, \\ c_1'v_1' + c_2'v_2' = -\dfrac{f}{p}, \end{cases}$$

визначник системи $w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \neq 0.$

Має місце рівність Ліувілля: $w(x)p(x) = w(0)p(0) = const.$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -\dfrac{f}{p} & v_2' \end{vmatrix} = \dfrac{v_2(x)f(x)}{p(0)w(0)}, \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & -\dfrac{f}{p} \end{vmatrix} = -\dfrac{v_1(x)f(x)}{p(0)w(0)}, \end{cases} \tag{2.5.8}$$

Знайдемо додаткові умови для диференціальних рівнянь (2.5.8).

$$l_1u|_{x=0} = h_1(c_1(0)v_1(0) + c_2(0)v_2(0)) - \\ - h_2(c_1'(0)v_1(0) + c_2'(0)v_2(0) + c_1(0)v_1'(0) + c_2(0)v_2'(0)) = 0, \tag{2.5.9}$$

враховуючи, що $c_1'(0)v_1(0) + c_2'(0)v_2(0) = 0$ маємо

$$c_1(0)(h_1v_1(0) - h_2v_1'(0)) + c_2(0)v_2'(0) = 0.$$

Оскільки перший доданок дорівнює нулю, то остання рівність виконується коли $c_2(0) = 0$, аналогічно отримаємо, що $c_1(l) = 0$.

Проінтегруємо (2.5.8) отримаємо

$$c_1(x) = -\int\limits_x^l \frac{f(\xi)v_2(\xi)}{p(0)w(0)}\,\mathrm{d}\xi, \quad c_2(x) = -\int\limits_0^x \frac{v_1(\xi)f(\xi)}{p(0)w(0)}\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.10}$$

Розв'язок граничної задачі (2.5.6) буде мати вигляд:

$$u(x) = -\int_0^x \frac{v_1(\xi)v_2(x)f(\xi)}{p(0)w(0)}\,\mathrm{d}\xi - \int_x^l \frac{f(\xi)v_1(x)v_2(\xi)}{p(0)w(0)}\,\mathrm{d}\xi \qquad (2.5.11)$$

Визначимо функцію Гріна:

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{p(0)w(0)}\begin{cases} v_1(\xi)v_2(x), & 0 \le \xi \le x \le l, \\ v_1(x)v_2(\xi), & 0 \le x \le \xi \le l. \end{cases} \qquad (2.5.12)$$

Отже розв'язок граничної задачі (2.5.6) можна записати у вигляді

$$u(x) = \int_0^l G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \qquad (2.5.13)$$

$G(x,\xi)$ називається функцією Гріна оператору Штурма-Ліувіля. Попередні міркування доводять наступну лемму.

Лема 10. Якщо $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувіля (2.5.1)–(2.5.4), то розв'язок граничної задачі (2.5.6) існує та єдиний і представляється за формулою (2.5.13) через функцію Гріна (2.5.12).

2.5.2 Властивості функції Гріна

1. $G(x,\xi) \in C([0,l]\times[0,l])$, $G(x,\xi) \in C^{(2)}(0 < x < \xi < l)$, $G(x,\xi) \in C^{(2)}(0 < \xi < x < l)$.
2. Симетричність: $G(x,\xi) = G(\xi,x)$, $x,\xi \in [0,l]\times[0,l]$.
3. На діагоналі $x = \xi$ має місце розрив першої похідної: $\frac{\partial G(\xi+0,\xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi-0,\xi)}{\partial x} = -\frac{1}{p(\xi)}$, $\xi \in (0,l)$.
4. Поза діагоналлю $x = \xi$ функція Гріна задовольняє однорідному диференціальному рівнянню $\mathbf{L}_x G(x,y) = 0$.
5. На бічних сторонах квадрату $[0,l]\times[0,l]$ функція Гріна $G(x,y)$ задовольняє граничним умовам $l_1 G|_{x=0} = l_2 G|_{x=l} = 0$.
6. Функція $G(x,\xi)$ є розв'язком неоднорідного рівняння: $\mathbf{L}_x G(x,\xi) = -\delta(x-\xi)$, де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

2.5.3 Зведення граничної задачі з оператором Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння

Розглянемо граничну задачу з параметром

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = (-p(x)u')' + q(x)u = f + \lambda u, \\ l_1(u)|_{x=0} = 0, \\ l_2(u)|_{x=l} = 0, \\ f \in C(0,l) \cap L_2(0,l), \end{cases} \tag{2.5.14}$$

і покажемо що вона зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з дійсним, симетричним та неперервним ядром $G(x,\xi)$.

Теорема 17 (Про еквівалентність граничної задачі для рівняння другого порядку інтегральному рівнянню з ермітовим ядром)**.** Гранична задача (2.5.14) при умові, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора $\mathbf{L}$, еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду:

$$u(x) = \lambda \int\limits_0^l G(x,\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^l G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad u \in C([0,l]), \tag{2.5.15}$$

де $G(x,\xi)$ – функція Гріна оператора $\mathbf{L}$.

Доведення. Необхідність. Нехай виконується (2.5.14), тоді з леми 3 із заміною правої частини $f \mapsto f + \lambda u$ розв'язок (2.5.14) можемо представити у вигляді:

$$u(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi)(\lambda u(\xi) + f(\xi))\,\mathrm{d}\xi,$$

тобто $u(x)$ задовольняє інтегральному рівнянню (2.5.15).

Достатність. Нехай має місце рівність (2.5.15) і $u_0(x)$ її розв'язок. Розглянемо граничну задачу:

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f + \lambda u_0, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

За лемою 3, єдиний розв'язок цієї задачі задається формулою

$$u(x) = \lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^1 G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

звідки випливає, що u_0 задовольняє рівнянню $Lu_0 = f + \lambda u_0$, таким чином $u(x) = u_0(x)$ тобто u_0 є розв'язком крайової задачі (2.5.14).

У випадку коли $f \equiv 0$, гранична задача (2.5.14) перетворюється в задачу Штурма-Ліувіля

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = \lambda u, \quad 0 < x < l, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases} \tag{2.5.16}$$

Задача Штурма-Ліувіля еквівалентна задачі про знаходження характеристичних чисел та власних функцій для однорідного інтегрального рівняння Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.17}$$

при умові, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора $\mathbf{L}$.

Покажемо як позбавитись цього припущення. Нехай маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = \lambda u, \quad 0 < x < l, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases} \tag{2.5.18}$$

Легко бачити, що $(\mathbf{L}u, u) \geq 0$, тобто власні числа невід'ємні.

Розглянемо граничну задачу:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 u \equiv (-p(x)u')' + (q(x)+1)u = \mu u, \\ l_1 u|_{x=0} = l_2 u|_{x=l}, \quad \mu = \lambda + 1. \end{cases} \tag{2.5.19}$$

Задача (2.5.19) з точністю до позначень співпадає з задачею Штурма-Ліувіля (2.5.1)-(2.5.3). Очевидно, що $\mu = 0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувіля (2.5.19) (бо тоді $\lambda = -1$ могло би бути власним числом задачі Штурма-Ліувілля (2.5.1)-(2.5.4)). Введемо диференціальний оператор $\mathbf{L}_1 u = (-pu')' + q_1 u = \mu u$.

Отже, задача (2.5.19) еквівалентна задачі (2.5.18) при $\mu = \lambda + 1$, та еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x) = (\lambda+1) \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.5.20}$$

де $G_1(x,\xi)$ – функція Гріна оператора $\mathbf{L}_1$.

Таким чином, ввівши оператор $\mathbf{L}_1$ і відповідну йому функцію Гріна $G_1(x,\xi)$, можна позбутися припущення, що $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувілля. $\square$

Приклад 6. Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + x,$$

де

$$K(x,y) = \begin{cases} x(y-1), & 0 \le x \le y \le 1 \\ y(x-1), & 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}.$$

Розв'язок. Розв'язок будемо шукати за формулою Шмідта. Знайдемо характеристичні числа та власні функції ермітового ядра. Запишемо однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^x y(x-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_x^1 x(y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Продиференціюємо рівняння:

$$\varphi'(x) = \lambda \int\limits_0^x y\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda x(x-1)\varphi(x) + \lambda \int\limits_x^1 (y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \lambda x(x-1)\varphi(x).$$

Обчислимо другу похідну:

$$\varphi''(x) = \lambda x\varphi(x) - \lambda(x-1)\varphi(x).$$

Або після спрощення $\varphi'' = \lambda\varphi$. Доповнимо диференціальне рівняння другого порядку граничними умовами вигляду (2.5.2), (2.5.3). Легко бачити що

$$\varphi(0) = \lambda \int\limits_0^0 y(0-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_0^1 0(y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Аналогічно

$$\varphi(1) = \lambda \int\limits_0^1 y(1-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_1^1 1(y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Таким чином отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \varphi'' = \lambda\varphi, \quad 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Для знаходження власних чисел і власних функцій розглянемо можливі значення параметру λ:

1. $\lambda > 0$, $\varphi(x) = c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}x)$.

   Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

   $$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

   Визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю.

   $$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sinh(\sqrt{\lambda}) & \cosh(\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} = -\sinh(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

   Єдиним розв'язком цього рівняння є $\lambda = 0$, яке не задовольняє, бо $\lambda > 0$. Це означає, що система рівнянь має тривіальний розв'язок і будь-яке $\lambda > 0$ не є власним числом.

2. $\lambda = 0$, $\varphi(x) = c_1 x + c_2$. З граничних умов маємо, що $c_1 = c_2 = 0$. Тобто $\lambda = 0$ не є власним числом.

3. $\lambda < 0$, $\varphi(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

   Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

   $$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}) = 0. \end{cases}$$

   Визначник цієї системи прирівняємо до нуля

   $$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{-\lambda}) & \cos(\sqrt{-\lambda}) \end{vmatrix} = -\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Це рівняння має зліченну множину розв'язків $\lambda_k = -(\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок $c_2 = 0$, $c_1 = c_1$.

Таким чином нормовані власні функції задачі Штурма-Ліувілля мають вигляд $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$.

Порахуємо коефіцієнти Фур'є $f_n = (f, \varphi_n) = \sqrt{2}\int_0^1 x\sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\frac{(-1)^n}{\pi n}$.

Згідно до формули Шмідта розв'язок рівняння при $\lambda \neq \lambda_k$ має вигляд:

$$\varphi(x) = x - 2\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin(\pi k x)}{((\pi k)^2 + \lambda)\pi k}.$$

При $\lambda = \lambda_k$ розв'язок не існує, оскільки не виконана умова ортогональності вільного члена до власної функції.

2.5.4 Властивості власних чисел задачі Штурма-Ліувіля

Таким чином, теоремою 2 установлена еквівалентність задачі Штурма-Ліувіля (2.5.19) і задачі на власні значення для однорідного інтегрального рівняння (2.5.17) з ермітовим неперервним ядром $G_1(x, \xi)$. При цьому власні значення λ_k задачі (2.5.19) пов'язані з характеристичними числами μ_k ядра $G_1(x, \xi)$ співвідношенням $\mu = \lambda + 1$, а відповідні їм власні функції $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ співпадають. Тому для задачі Штурма-Ліувіля справедливі всі положення теорії інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром.

А саме:

- множина власних чисел λ_k не порожня та немає скінчених граничних точок;
- всі власні числа λ_k дійсні та мають скінчену кратність;
- власні функції $u_k \in C^{(2)}(0, l) \cap C^{(1)}([0, l])$, $(u_k, u_j) = \delta_{k,j}$, $k, j = 1, 2, \ldots$;
- всі $\lambda_k \geq 0$;

Останнє твердження випливає з додатної визначеності диференціального оператора Штурма-Ліувілля з відповідними граничними умовами, для цього оператора всі власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.

- множина власних чисел злічена (не може бути скінчена);

  Дійсно, якщо б множина була скінченою $\mu_1, \dots, \mu_N$, то для ядра $G_1(x,\xi)$ було вірним представлення $G_1(x,\xi) = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i(x)u_i(\xi)}{\mu_i}$.

  Але $u_k \in C^{(2)}(0,l) \cap C^{(1)}([0,l])$, і тому таке представлення суперечить властивості функції Гріна $G_1(x,\xi)$ про наявність розриву першої похідної. Ця суперечність і доводить твердження.

- кожне власне число має одиничну кратність;

  Справді, нехай u_1 та u_2 – власні функції, які відповідають власному значенню λ_0. З граничної умови запишемо:

$$\begin{cases} h_1 u_1(0) - h_2 u_1'(0) = 0, \\ h_1 u_2(0) - h_2 u_2'(0) = 0. \end{cases}$$

  Розглядатимемо ці співвідношення як систему лінійних рівнянь відносно h_1, h_2. Визначник системи співпадає за величиною з визначником Вронського $\begin{vmatrix} u_1(0) & -u_1'(0) \\ u_2(0) & -u_2'(0) \end{vmatrix} = -w(0) \neq 0$ враховуючи лінійну незалежність власних функцій. Звідси випливає, що розв'язок лінійної системи тривіальний, тобто $h_1 = h_2 = 0$, що суперечить припущенню $h_1 + h_2 > 0$.

  Тому ці розв'язки лінійно залежні. Це і означає, що λ_0 має одиничну кратність, тобто просте.

Теорема 18 (Стеклова про розвинення в ряд Фур'є)**.** Будь-яка $f \in M_L$ розкладається в ряд Фур'є за системою власних функцій задачі Штурма -Ліувіля

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x), \tag{2.5.21}$$

і цей ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення. Покажемо, що f – джерелувато зображувана:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 f = \mathbf{L} f + f = h, \quad h \in C(0,l) \cap L_2(0,l), \\ l_1 f|_{x=0} = l_2 f|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Функція f є розв'язком цієї граничної задачі, причому, $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора $\mathbf{L}_1$. Позначимо через $G_1(x,\xi)$ функцію Гріна оператора $\mathbf{L}_1$.

Тоді має місце представлення $f(x) = \int_0^1 G_1(x,\xi)h(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, $f(x)$ – джерелуватозображувана. За теоремою Гільберта-Шмідта функція f розкладається в регулярно збіжний ряд Фур'є по власним функціям ядра $G_1(x,\xi)$. Але власні функції ядра $G_1(x,\xi)$ співпадають з власними функціями $\{u_k(x)\}$ оператора $\mathbf{L}$. □

2.5.5 Задача Штурма-Ліувіля з ваговим множником

$$\begin{cases} \mathbf{L}f = \lambda\rho(x)u, \quad 0 < x < l, \\ l_1 u|_{x=0} = l_2 u|_{x=l} = 0, \end{cases} \tag{2.5.22}$$

$\rho(x) > 0$, $\rho \in C([0,l])$, ρ – ваговий множний.

З теореми 2 випливає представлення $u(x) = \lambda \int_0^1 \rho(\xi)G(x,\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

Інтегральне рівняння має неперервне, але не симетричне ядра, для його симетризації домножимо рівняння на $\sqrt{\rho(x)}$ і отримаємо

$$\rho(x)u(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}G(x,\xi)\rho(\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.23}$$

Позначимо $v(x) = \sqrt{\rho(x)}u(x)$, $G_\rho(x,\xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}G(x,\xi)$, отримаємо інтегральне рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G_\rho(x,\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.24}$$

Власні функції задачі Штурма-Ліувіля (2.5.22) пов'язані з власними функціями інтегрального рівняння (2.5.24) співвідношенням

$$\sqrt{\rho(x)}u_k(x) = v_k(x). \tag{2.5.25}$$

Має місце співвідношення $(v_k, v_i) = \delta_{i,k} = \int_0^l u_k(x)\cdot u_i(x)\cdot\rho(x)\,\mathrm{d}x = (u_k, u_i)_\rho$ – ваговий скалярний добуток.

Таким чином система власних функцій задачі Штурма-Ліувілля з ваговим множником (2.5.22) є ортонормованою у ваговому скалярному добутку $(u,v)_\rho$.

2.6 Інтегральні рівняння першого роду

Будемо розглядати інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = f(x). \tag{2.6.1}$$

Неважко перевірити, що розв'язок інтегрального рівняння (2.6.1) може існувати не для будь-якої неперервної функції $f(x)$. Дійсно, нехай наприклад $G = [a,b]$, а $K(x,y) = a_0(y)x^m + a_1(y)x^{m-1} + \ldots + a_m(y)$, тоді для будь-якої неперервної $\varphi(y)$: $\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$. Це означає, що такий самий вигляд повинна мати і функція $f(x)$.

2.6.1 Ядра Шмідта

Будемо розглядати неперервне ядро $K(x,y)$ і спряжене до нього $K^*(x,y)$ яке задовольняє нерівності $\int_G\int_G |K(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$. Відповідні інтегральні оператори Фредгольма позначимо через $\mathbf{K}, \mathbf{K}^*$. Введемо інтегральні оператори $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}^*\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}\mathbf{K}^*$, які є симетричними і додатними. Цим операторам відповідають ядра

$$K_1(x,y) = \int\limits_G K^*(x,z)K(z,y)\,\mathrm{d}z, \quad K_2(x,y) = \int\limits_G K(x,z)K^*(z,y)\,\mathrm{d}z, \tag{2.6.2}$$

які називаються ядрами Шмідта.

Можна довести, що характеристичні числа ядер Шмідта $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ співпадають, позначимо їх через μ_k^2, $k = 1,2,\ldots$. Позначимо через $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормовані власні функції ядра $K_1(x,y)$ та $K_2(x,y)$ відповідно.

Легко бачити, що

$$v_k = \mu_k\mathbf{K}u_k, \quad u_k = \mu_k\mathbf{K}^*v_k \tag{2.6.3}$$

Дійсно: $v_k = \mu_k^2\mathbf{K}_2v_k$, тоді $\mathbf{K}^*v_k = \mu_k\mathbf{K}^*\mathbf{K}_2v_k = \mu_k\mathbf{K}^*\mathbf{K}\mathbf{K}^*v_k = \mu_k^2\mathbf{K}_1\mathbf{K}v_k$, звідси випливає, що $C_k\mathbf{K}^*v_k = u_k$. Оберемо константу з умови ортонормованості:

$$(u_k,u_k) = C_k^2(\mathbf{K}^*v_k,\mathbf{K}^*v_k) = C_k^2(v_k,\mathbf{K}\mathbf{K}^*v_k) = C_k^2(v_k,\mathbf{K}_2v_k) = \frac{C_k^2}{\mu_k^2} = 1,$$

звідси $C_k = \mu_k$. І перша рівність (2.6.3) доведена.

Виходячи з теореми Мерсера про регулярну збіжність білінійного ряду для неперервних ядер зі скінченою кількістю від'ємних характеристичних чисел, для ядер Шмідта має місце відоме розвинення :

$$K_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\bar{u}_k(y)}{\mu_k^2}, \quad K_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\bar{v}_k(y)}{\mu_k^2}, \tag{2.6.4}$$

Ряди (2.6.4) для неперервних ядер збігається абсолютно і рівномірно, а для ядер, які належать $L_2(G)$ – в середньому квадратичному.

Покажемо, що для ядра $K(x,y)$ має місце білінійне розвинення за формулою:

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\bar{u}_k(y)}{\mu_k^2}, \quad K^*(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\bar{v}_k(y)}{\mu_k^2}, \tag{2.6.5}$$

Дійсно, написане розвинення (2.6.5) представляє собою ряд Фур'є ядра по ортонормованой системі функцій $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, або $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ (дивись 2.6.3) і збігається в середньому по кожній змінній x, y. Тобто

$$\int_G \left| K(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i(x)\bar{u}_i(y)}{\mu_i} \right|^2 \mathrm{d}x = \int_G |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k(y)|^2}{\mu_k^2} =$$

$$= K_1(y,y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k(y)|^2}{\mu_k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

При доведенні цього представлення було використане друге співвідношення (2.6.3).

2.6.2 Інтегральні рівняння першого роду з симетричним ядром

Нехай $K(x,y)$ симетричне ядро, а λ_i, $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ – характеристичні числа та ортонормована система власних функцій цього ядра.

Визначення 8. Будемо називати симетричне ядро повним, якщо система його власних функцій є повною.

Якщо ядро не є повним, то інтегральне рівняння $\int_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0$ має розв'язок відмінний від нуля. Інтегральне рівняння з симетричним повним ядром може мати лише єдиний розв'язок.

Будемо шукати розв'язок інтегрального рівняння першого роду (2.6.1) у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x), \tag{2.6.6}$$

де c_i – невідомі константи. Вільний член рівняння представимо у вигляді ряду Фур'є по системі власних функцій ядра в результаті чого будемо мати рівність:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \int\limits_G K(x,y) u_i(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x), \tag{2.6.7}$$

або, після спрощення

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i} u_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x).$$

Враховуючи лінійну незалежність власних функцій $u_i(x)$ отримаємо співвідношення

$$c_i = (f, u_i)\lambda_i. \tag{2.6.8}$$

Теорема 19 (Пікара про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром)**.** Нехай $K(x,y)$ повне ермітове ядро $f \in L_2(G)$. Тоді для існування розв'язку рівняння (2.6.1) необхідно і достатньо щоб збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f, u_k)|^2. \tag{2.6.9}$$

Доведення. Необхідність: Нехай існує розв'язок $u(x)$ з $L_2(G)$ рівняння (2.6.1). Нехай c_k – коефіцієнти Фур'є розв'язку по системі власних функцій $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Виходячи з (2.6.6) маємо, що ряд (2.6.9) збігається.

Достатність: Нехай ряд (2.6.9) збігається. Тоді існує єдина функція $u(x) \in L_2(G)$ з коефіцієнтами Фур'є $(f, u_i)\lambda_i$. Вона має вигляд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, u_i) u_i(x)$ і задовольняє інтегральному рівнянню (2.6.1). □

2.6.3 Несиметричні ядра

Розглянемо рівняння з несиметричним ядром (2.6.1). Для представлення ядра скористаємось формулою (2.6.5), а для представлення вільного члена $f(x)$ застосуємо розвинення цієї функції в ряд Фур'є по системі власних функцій ядра

$K_2(x,y)$, $v_k(x)$. В результаті будемо мати:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_G \frac{v_i(x)\bar{u}_i(y)}{\mu_i}\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty}(f,v_i)v_i(x). \tag{2.6.10}$$

Ліву чистину можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\varphi,u_i)v_i(x)}{\mu_i}\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty}(f,v_i)v_i(x). \tag{2.6.11}$$

З останньої рівності можна записати співвідношення для коефіцієнтів Фур'є розв'язку:

$$(\varphi,u_i) = (f,v_i)\mu_i. \tag{2.6.12}$$

Таким чином, для існування розв'язку інтегрального рівняння (2.6.1) з несиметричним ядром необхідно і достатньо щоби вільний член $f \in L_2(G)$ можна було розкласти в ряд Фур'є по системі власних функцій $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ ядра Шмідта $K_2(x,y) = \int_G K(x,z)K^*(z,y)\,\mathrm{d}z$, а числовий ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(f,v_i)|^2\mu_i^2. \tag{2.6.13}$$

збігався.

Приклад 7. Звести задачу Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$\begin{cases}\mathbf{L}y \equiv -(1+e^x)y'' - e^x y' = \lambda x^2 y, \quad 0<x<1,\\ y(0)-2y'(0) = y'(1) = 0.\end{cases}$$

Розв'язок. Побудуємо функцію Гріна оператора $\mathbf{L}$. Розглянемо задачі Коші:

$$\begin{cases}-(1+e^x)v_i'' - e^x v_i' = 0, \quad i=1,2,\\ v_1(0)-2v_1'(0) = v_2'(1) = 0.\end{cases}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння $-(1+e^x)y'' - e^x y' = 0$ має вигляд $c_1(x - \ln(1+e^x)) + c_2$. Тоді розв'язки задач Коші:

$$v_1(x) = a(x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2), \quad a = const, \quad v_2(x) = b, \quad b = const.$$

Обчислимо визначник Вронського $\begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x)\\ v_1'(x) & v_2'(x)\end{vmatrix} = \frac{ab}{1+e^x}$.

Перевіримо тотожність Ліувілля $p(x)w(x) = ab = const$. Запишемо функцію Гріна за формулою:

$$G(x,\xi) = -\begin{cases}(x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2), & 0 \le x \le \xi \le 1,\\ (\xi - \ln(1+e^\xi) + 1 + \ln 2), & 0 \le \xi \le i \le 1.\end{cases}$$

Запишемо інтегральне рівняння $y(x) = \lambda \int_0^1 G(x,\xi)\xi^2 y(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

Симетризуємо ядро інтегрального рівняння, помножимо обидві частини на x:

$$x \cdot y(x) = \lambda \int\limits_0^1 x \cdot \xi \cdot G(x,\xi) \cdot \xi \cdot y(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Введемо позначення:

$$\omega(x) = xy(x), \quad G_1(x,\xi) = x\xi G(x,\xi).$$

Отримаємо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром: $\omega(x) = \lambda \int_0^1 G_1(x,\xi)\omega(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

2.6.4 Питання до першого розділу

1. Записати інтегральне рівняння Фредгольма першого та другого роду.
2. Дати визначення характеристичних чисел і власних функцій інтегрального рівняння.
3. Що називається союзним інтегральним рівнянням, спряженим ядром?
4. Сформулювати лему про обмеженість інтегрального оператора з неперервним ядром.
5. Записати схему методу послідовних наближень, ряд Неймана.
6. Сформулювати теорему про збіжність методу послідовних наближень для неперервних ядер.
7. Дати визначення повторних ядер і резольвенти, записати умова збіжності резольвенти.
8. Дати визначення полярного ядра, сформулювати лему про поводження повторних ядер для полярного ядра.

9. Сформулювати лему про обмеженість інтегрального оператора з полярним ядром.
10. Сформулювати теорему про збіжність методу послідовних наближень для інтегральних рівнянь із полярним ядром.
11. Записати резольвенту інтегрального оператора з полярним ядром, сформулювати умови її збіжності.
12. Дати визначення виродженого ядра, записати систему рівнянь для інтегрального рівняння. з виродженим ядром.
13. Сформулювати першу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром.
14. Сформулювати другу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром.
15. Сформулювати третю теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром.
16. В чому полягає ідея доведення теорем Фредгольма для неперервного ядра.
17. Сформулювати першу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
18. Сформулювати другу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
19. Сформулювати третю теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
20. Сформулювати четверту теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.
21. В чому полягає ідея доведення теорем Фредгольма для полярного ядра.
22. Сформулювати наслідку з теорем Фредгольма.
23. Дати визначення компактної множини в рівномірній метриці. Сформулювати теорему Арцела-Асколі.
24. Дати визначення цілком неперервного оператора, сформулювати лему про цілковиту неперервність оператора з неперервним ядром.

25. Дати визначення ермітового оператора, властивість характеристичних чисел, критерій ермітовості.
26. Ряд Фур'є, нерівність Бесселя, рівність Парсеваля-Стеклова.
27. Визначення джерелуватозображуваної функції. Теорема Гільберта-Шмідта.
28. Представлення виродженого ядра через характеристичні числа та власні функції.
29. Теорема про білінійне розкладання ермітового неперервного ядра. 76
30. Наслідок з теореми Гільберта - Шмідта про розкладання повторного ядра для ермітового ядра.
31. Формула Шмідта, особливості її застосування для різних значень параметра.
32. Теорема про існування характеристичних чисел ермітового неперервного та ермітового полярного ядра.
33. Додатньо визначені ядра. Лема про властивості характеристичних чисел додатньо визначених ядер.
34. Теорема Мерсера.
35. Постановка задачі Штурма-Ліувілля, визначення власних чисел і власних функцій.
36. Визначення функції Гріна для оператора Штурма-Ліувілля.
37. Властивості функції Гріна.
38. Властивості власних функцій і власних значень задачі Штурма-Ліувілля.
39. Лема про зведення задачі Штурму-Ліувілля до інтегрального рівняння.
40. Задача Штурма-Ліувілля з ваговим множником, зведення її до інтегрального рівняння з ермітовим ядром.
41. Теорема Стеклова про розкладання функцій у ряд Фур'є.
42. Ядра Шмідта та їх властивості, білінійне розвинення ядер Шмідта.
43. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром, теорема існування розв'язку.
44. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду з несиметричним ядром, умови існування розв'язку.

3 Математичні моделі

3.1 Класифікація рівнянь в частинних похідних

3.1.1 Класифікація рівнянь з двома незалежними змінними

Будемо розглядати загальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними, лінійне відносно старших похідних. Частина рівняння, яка містить похідні другого порядку називають головною частиною рівняння.

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \tag{3.1.1}$$

Поставимо задачу спростити вигляд головної частини рівняння. Для чого введемо заміну змінних:

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y). \tag{3.1.2}$$

Для скорочення скористаємося позначеннями $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u_x$.

Обчислимо вирази для похідних в нових змінних ξ, η:

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x, \quad u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x \cdot \eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2 + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y \cdot \eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2 + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \cdot \xi_x \cdot \xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_y + u_\xi \cdot \xi_{xy} + u_\eta \cdot \eta_{xy}.$$

Підставимо обчислені похідні в рівняння (3.1.1):

$$\begin{aligned} A(u_{\xi\xi} \cdot \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x^2) + \\ + 2B(u_{\xi\xi} \cdot \xi_x \cdot \xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta} \cdot \eta_x \cdot \eta_y) + \\ + C(u_{\xi\xi} \cdot \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y^2) + \widetilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Перегрупуємо доданки і отримаємо рівняння у вигляді:

$$\overline{A} \cdot u_{\xi\xi} + 2\overline{B} \cdot u_{\xi\eta} + \overline{C} \cdot u_{\eta\eta} + \widetilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tag{3.1.4}$$

де

$$\overline{A} = A \cdot \xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C \cdot \xi_y^2$$

$$\overline{B} = A \cdot \xi_x \cdot \eta_x + B(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + C \cdot \xi_y \cdot \eta_y$$
$$\overline{C} = A \cdot \eta_y^2 + 2B\eta_x\eta_y + C \cdot \eta_y^2$$

Зробимо нульовими коефіцієнти при $u_{\xi\xi}$ та $u_{\eta\eta}$ за рахунок вибору нових змінних:

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0, \tag{3.1.5}$$

$$A\eta_x^2 + 2B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0, \tag{3.1.6}$$

Розв'язком рівняння (3.1.5) буде функція $\xi(x, y)$, а рівняння (3.1.6) – $\eta(x, y)$.

Для знаходження функцій $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, зведемо рівняння в частинних похідних до звичайного диференціального рівняння.

Розглянемо рівняння (3.1.5) і розділимо його на ξ_y^2

$$A\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2B\frac{\xi_x}{\xi_y} + C = 0. \tag{3.1.7}$$

Розглянемо неявно задану функцію $y = y(x)$ у вигляді $\xi(x, y) = \text{const}$, легко бачити $\mathrm{d}\xi = \xi_x \,\mathrm{d}x + \xi_y \,\mathrm{d}y = 0$; $\dfrac{\xi_x}{\xi_y} = -\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Тобто рівняння в частинних похідних зводиться до звичайного диференціального рівняння:

$$A\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + C = 0. \tag{3.1.8}$$

Останнє рівняння називається характеристичним, а його розв'язки називаються характеристиками. Рівняння розпадається на два лінійних рівняння:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{3.1.9}$$

Знак підкореневого виразу визначає тип рівняння і спосіб вибору нових змінних. Розглянемо можливі випадки:

1. рівняння гіперболічного типу $B^2 - AC > 0$.

   Кожне з рівнянь (3.1.9) має по одній дійсній характеристиці. Нехай $\varphi(x, y) = \text{const}$ та $\psi(x, y) = \text{const}$ – загальні інтеграли першого та другого характеристичного рівняння, тоді нові змінні вибираються $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$.

Після застосування вказаної заміни змінних отримаємо першу канонічну форму запису рівняння гіперболічного типу

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{3.1.10}$$

Якщо використати змінні $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$, то можна отримати другу канонічну форму запису рівняння гіперболічного типу

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \tag{3.1.11}$$

2. рівняння еліптичного типу $B^2 - AC < 0$.

В цьому випадку розв'язки характеристичних рівнянь (характеристики) – комплексно спряжені і можуть бути записані у вигляді: $\omega(x, y) = \varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = \text{const}$.

Тоді для змінних $\xi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, $\eta = \varphi(x, y) - i\psi(x, y)$ отримаємо вигляд аналогічний першій канонічній формі гіперболічного рівняння $u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Для того щоб позбутися комплексних змінних виберемо нові дійсні змінні $\alpha = \varphi(x, y) = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \psi(x, y) = \dfrac{\xi - \eta}{2i}$. Тоді отримаємо канонічну форму запису рівняння еліптичного вигляду:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \tag{3.1.12}$$

3. рівняння параболічного типу $B^2 - AC = 0$.

Характеристики в цьому випадку співпадають і нові змінні обирають у вигляді: $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \nu(x, y)$, де $\nu(x, y)$ – будь-яка функція незалежна від $\varphi(x, y)$.

Зауваження. Необхідно, щоб визначник Вронського для нових змінних $W[] \neq 0$, тобто, щоб заміна змінних $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \nu(x, y)$ була не виродженою.

У випадку параболічного рівняння маємо $AC = B^2$ і таким чином

$$\overline{A} = (A \cdot \xi_x^2 + 2B\xi_X\xi_y + C \cdot \xi_y^2) = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = 0.$$

$$\overline{B} = A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y\right) = 0.$$

При цьому $\overline{C} \neq 0$. Таким чином після ділення на $\overline{C}$ отримаємо канонічну форму запису рівняння гіперболічного типу.

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{3.1.13}$$

3.1.2 Класифікація рівнянь другого порядку з багатьма незалежними змінними

Будемо розглядати лінійне рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} B_iu_{x_i} + Cu + F = 0, \tag{3.1.14}$$

де $A_{i,j} = A_{j,i}$, $A_{i,j}$, B_i, C, F є функціями від $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Введемо нові змінні

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.1.15}$$

Обчислимо похідні, що входять в рівняння

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{i,k}, \quad u_{x_ix_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k\xi_l}\alpha_{i,k}\alpha_{j,l} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}(\xi_k)_{x_ix_j},$$

де $\alpha_{i,k} = \dfrac{\partial\xi_k}{\partial x_i}$.

Підставляючи вираз для похідних в вихідне рівняння отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{A}_{k,l}u_{\xi_k\xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \overline{B}_ku_{\xi_k} + \overline{C}u + \overline{F} = 0, \tag{3.1.16}$$

де

$$\overline{A}_{k,l} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\alpha_{i,k}\alpha_{j,l}, \quad \overline{B}_k = \sum_{i=1}^{n} B_i\alpha_{i,k} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}(\xi_k)_{x_ix_j}. \tag{3.1.17}$$

Поставимо у відповідність рівнянню квадратичну форму $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} A^0_{i,j}y_iy_j$, де $A^0_{i,j} = A_{i,j}(x^0_1, \ldots, x^0_n)$, тобто коефіцієнти квадратичної форми співпадають з коефіцієнтами рівняння в деякій точці області.

Здійснимо над змінними y лінійне перетворення $y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{i,k}\eta_k$.

Будемо мати для квадратичної форми новий вираз:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A^0_{i,j} y_i y_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{A}^0_{k,l}\eta_k\eta_l, \tag{3.1.18}$$

де $\overline{A}_{k,l} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \overline{A}^0_{i,j}\alpha_{i,k}\alpha_{j,l}$.

Таким чином можна бачити, що коефіцієнти головної частини рівняння перетворюються аналогічно коефіцієнтам квадратичної форми при лінійному перетворені (3.1.17), (3.1.18). Відомо, що використовуючи лінійне перетворення можна привести матрицю $\left[A^0_{i,j}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ квадратичної форми до діагонального вигляду, в якому $\overline{A}^0_{i,j} = \delta_{i,j}$.

Згідно до закону інерції квадратичних форм, кількість додатних, від'ємних та нульових діагональних елементів інваріантне відносно лінійного перетворення.

Будемо називати рівняння в точці $(x^0_1, \ldots, x^0_n)$ еліптичним, якщо всі $\overline{A}^0_{i,i}$, $i = \overline{1,n}$ мають один і той же знак. Гіперболічним, якщо $m < n$ елементів матриці мають один знак, а $n - m$ коефіцієнтів мають протилежний знак. Параболічним, якщо хоча б один з діагональних елементів матриці $\overline{A}^0_{i,i}$ дорівнює нулю.

Обираючи нові незалежні змінні ξ_i таким чином що б у точці $(x^0_1, \ldots, x^0_n)$ виконувалось рівність $\alpha_{i,k} = \dfrac{\partial\xi_k}{\partial xi_i} = \alpha^0_{i,k}$, де $\alpha^0_{i,k}$ – коефіцієнти перетворення, яке приводить квадратичну форму до канонічної форми запису. Зокрема, покладаючи $\xi_k = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha^0_{i,k}x_i$, отримаємо у точці $(x^0_1, \ldots, x^0_n)$ канонічну форму запису рівняння в залежності від його типу:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{\xi_i\xi_i} + \Phi = 0 \tag{3.1.19}$$

– еліптичний тип;

$$\sum_{i=1}^{m} u_{\xi_i\xi_i} - \sum_{i=m+1}^{n} u_{\xi_i\xi_i} + \Phi = 0 \tag{3.1.20}$$

– гіперболічний тип;

$$\sum_{i=1}^{m} \pm u_{\xi_i \xi_i} + \Phi = 0 \qquad (3.1.21)$$

– параболічний тип.