Зміст

3.9 Загальна постановка задачі Коші для хвильового рівняння. Плоскі хвилі

3.9.1 Характеристичні поверхні

В лекції 14 розглядалися питання класифікації диференціальних рівнянь другого порядку з $n > 2$ незалежними змінними. Важливу роль при визначені типу рівняння і вибору нової системи координат відіграють характеристичні поверхні, які є аналогами характеристичних кривих (характеристик) для випадку рівнянь з двома незалежними змінними.

Нехай функція $\omega(x) \in C^1$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$ є такою що на поверхні $\omega(x) = 0$, $\nabla\omega(x) \neq 0$ та

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x) \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j} = 0. \tag{3.9.1}$$

Визначення 3.9.1.1 (характеристичної поверхні)**.** Тоді поверхню $\omega(x) = 0$ називають *характеристичною поверхнею* або *характеристикою* квазілінійного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0. \tag{3.9.2}$$

Визначення 3.9.1.2 (характеристичної лінії)**.** При $n = 2$ характеристична поверхня називається *характеристичною лінією.*

Оскільки $\nabla\omega(x) \neq 0$, то сімейство характеристик $\omega(x) = \mathrm{const}$ заповнює область таким чином, що через кожну точку області проходить одна характеристична поверхня.

Враховуючи закон перетворення коефіцієнтів рівняння

$$\overline{a_{k,l}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \tag{3.9.3}$$

при виборі заміни змінних $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1, \dots, n$, знання однієї чи декількох характеристичних поверхонь дозволяє спростити рівняння, зокрема, якщо $\xi_1 = \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$\overline{a_{1,1}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0. \tag{3.9.4}$$

Для хвильового рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2\Delta u(t, x) + f(t, x), \tag{3.9.5}$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, характеристичне рівняння має вигляд

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \tag{3.9.6}$$

Одним з розв'язків цього диференціального рівняння першого порядку є поверхня

$$\omega(x, t) = a^2(t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})^2 = 0. \tag{3.9.7}$$

Визначення 3.9.1.3 (характеристичного конуса)**.** Поверхня

$$a^2(t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})^2 = 0. \tag{3.9.8}$$

називається *характеристичним конусом* з вершиною в точці (x_0, t_0) і є характеристичною поверхнею (характеристикою) хвильного рівняння.

Зауваження 3.9.1.1 — Характеристичний конус є границею конусів

$$\Gamma^+(x_0, t_0) = a(t - t_0) > \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})^2}, \tag{3.9.9}$$

$$\Gamma^-(x_0, t_0) = -a(t - t_0) > \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})^2}, \tag{3.9.10}$$

які називають *конусами майбутнього* та *минулого* відповідно.

Хвильове рівняння має також інше сімейство характеристичних поверхонь

$$a(t - t_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})e_i = 0, \tag{3.9.11}$$

де $\{e_i\}_{i=1}^n$ — довільні числа такі, що $|\vec{e}| = 1$.

3.9.2 Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни

Довільне квазілінійне рівняння гіперболічного типу з двома незалежними змінними

$$a_{1,1}(\xi, \eta)U_{\xi,\xi}(\xi, \eta) + 2a_{1,2}U_{\xi\eta}(\xi, \eta) + a_{2,2}(\xi, \eta)U_{\eta,\eta}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \tag{3.9.12}$$

може бути зведене до одного із рівнянь:

$$u_{xt}(t, x) = f(x, y, u, u_t, u_x), \tag{3.9.13}$$

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, y, u, u_t, u_x). \tag{3.9.14}$$

Зауваження 3.9.2.1 — Коефіцієнти $a_{i,j}(\xi, \eta)$ $(i, j = 1, 2)$ і права частина $f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ вважаються неперервно диференційовними функціями у відповідних областях.

При постановці задачі Коші для рівняння (3.9.14) до тепер ми вважали, що носієм початкових умов є пряма $t = 0$.

На прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \tag{3.9.15}$$

покажемо, що носієм початкових умов може бути крива L, яка є відмінною від прямої $t = 0$, причому встановимо, яким умовам повинна задовольняти крива L і який вигляд повинні мати самі початкові умови, щоб одержана задача Коші була поставлена коректно.

Для цього позначимо через D обмежену область фазової площини xOt з кусково-гладкою жордановою межею S. Нехай $u(t, x) \in C^2(D)$ — розв'язок рівняння (3.9.15), який має неперервні частинні похідні 1-го порядку в області $\overline{D} = D \cup S$.

Інтегруючи тотожність (3.9.15) по області D і використовуючи формулу Гріна

$$\iint\limits_{D} (Q_x(x,t) - P_t(x,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{S} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}t, \tag{3.9.16}$$

де криволінійний інтеграл в правій частині береться по контуру в напрямі проти годинникової стрілки, одержуємо

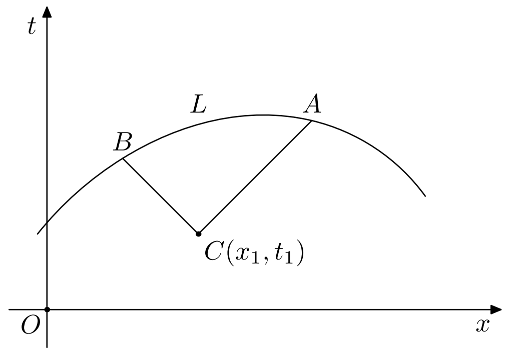
$$\iint\limits_{D} (u_{xx} - u_{tt})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{S} u_x\,\mathrm{d}t + u_t\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{S} f(x,t)\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}t \tag{3.9.17}$$

Нехай L — розімкнута крива Жордана з неперервною кривизною, яка задовольняє умовам:

- кожна пряма із двох сімей характеристик $x+t = \mathrm{const}$, $x-t = \mathrm{const}$ рівняння (3.9.15) перетинає криву L не більше, ніж в одній точці;
- напрям дотичної до кривої L в жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (3.9.15).

Зауваження 3.9.2.2 — Іноді таку криву L називають *"вільною"*.

Припустимо, що характеристики $x - x_1 = t - t_1$ і $x - x_1 = t_1 - t$, які виходять із точки C, перетинаються із кривою L в точках A і B:



Застосовуючи формулу (3.9.14) в області, яка обмежена дугою AB кривої L і відрізками характеристик $[CA]$ і $[CB]$, одержуємо:

$$\int\limits_{AB+[BC]+[CA]} u_x\,\mathrm{d}t + u_t\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{D} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{3.9.18}$$

Оскільки вздовж $[BC]$ і $[AC]$ маємо $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ відповідно, то (3.9.15) запишеться у вигляді:

$$\int\limits_{AB} u_x\,\mathrm{d}t + u_t\,\mathrm{d}x - 2u(C) + u(A) + u(B) = \iint\limits_{D} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{3.9.19}$$

звідки знаходимо

$$u(C) = \frac{u(A)+u(B)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{AB} u_x\,\mathrm{d}t + u_t\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\iint\limits_{D} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{3.9.20}$$

Якщо розв'язок рівняння (3.9.13) задовольняє умовам:

$$u|_L = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_L = \psi(x), \tag{3.9.21}$$

де φ і ψ — задані дійсні відповідно два рази і один раз неперервно диференційовні функції, а ℓ — заданий на L достатньо гладкий вектор, що ніде не збігається з дотичною до кривої L. Визначимо u_x і u_t із рівностей:

$$u_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + u_t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}, \quad u_x\ell_x + u_t\ell_t = \psi, \tag{3.9.22}$$

де s — довжина дуги L, і підставляючи відомі значення u, u_x, u_t в праву частину (3.9.20), одержуємо розв'язок задачі Коші (3.9.15), (3.9.21).

Із наведених міркувань випливає, що постановка задачі Коші (3.9.14), (3.9.18) є коректною, тобто вона має в розглядуваній області тільки єдиний розв'язок, і він є стійким.

Аналогічно ставиться задача Коші і у випадку рівняння (3.9.13).

Для рівняння (3.9.13) характеристиками будуть прямі, паралельні осям координат ($x = \mathrm{const}$, $t = \mathrm{const}$). Отже, в цьому випадку всяка гладка крива L, яка перетинається не більш, ніж в одній точці з прямими, паралельними осям координат, буде "вільною". Нехай рівняння цієї кривої буде $t = g(x)$ (або $x = h(t)$). Вважаємо, що існують похідні $g'(x)$, $h'(t)$, відмінні від нуля. Тоді задача Коші може бути поставлена наступним чином: в області

$$D = \{(t,x) | x_0 < x < x_0 + \alpha, g(x) < t < t_0 + \beta\}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \tag{3.9.23}$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (3.9.1), який на кривій L задовольняє умови

$$u|_{t=g(x)} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=g(x)} = \psi(x). \tag{3.9.24}$$

Дані Коші (3.9.20) дозволяють на кривій $t = g(x)$ знайти значення похідної u_x. Дійсно, диференціюючи по x першу із умов (3.9.24), одержуємо

$$u_x|_{t=g(x)} + u_t|_{t=g(x)}, \quad g'(x) = \varphi'(x), \tag{3.9.25}$$

або

$$u_x|_{t=g(x)} = \varphi'(x) - \psi(x)\varphi'(x). \tag{3.9.26}$$

3.9.3 Узагальнена задача Коші для n-вимірного хвильового рівняння

У випадку хвильового рівняння в n-вимірному просторі

$$u_{tt}(t,x) = a^2 \Delta u(t,x) + f(t,x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.9.27}$$

носієм початкових умов може бути будь-яка "вільна" поверхня Σ, тобто гіперповерхня $\Psi(x,t) = 0$, яка задовольняє умовам:

- в жодній її точці (x,t) не має місце рівність

$$\sum_{i=1}^{n} a^2 \left(\Psi_{x_i}\right)^2 - \left(\Psi_t\right)^2 = 0, \tag{3.9.28}$$

  тобто поверхня Σ не є характеристичною;

- при $n \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{n} a^2 \left(\Psi_{x_i}\right)^2 - \left(\Psi_t\right)^2 < 0. \tag{3.9.29}$$

Задача Коші ставиться наступним чином: знайти два рази неперервно диференційовний розв'язок рівняння (3.9.21), який задовольняє умови

$$u(t,x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial n} = \psi(x), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{3.9.30}$$

де n — заданий на Σ одиничний вектор нормалі, а $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — задані на Σ досить гладкі функції. Будемо вважати, що поверхня Σ задана рівнянням $t = \sigma(x)$.

Покажемо, що задачу Коші (3.9.27), (3.9.30) можна звести до задачі Коші з початковими умовами заданими на поверхні $\tau = 0$.

Замість змінної t введемо змінну $\tau = t - \sigma(x)$. Для такої заміни змінних отримаємо хвильове рівняння для функції $\tilde{u}(x,\tau) = u(x, \tau + \sigma(x))$.

Підрахуємо похідні, що входять в хвильове рівняння (3.9.27):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}\right)^2 = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}, \tag{3.9.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2}.\end{aligned} \tag{3.9.32}$$

Таким чином хвильове рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = \frac{a^2}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} - \frac{a^2}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i^2} + \frac{f(x, \tau + \sigma(x))}{a_0}, \tag{3.9.33}$$

де

$$a_0 = 1 - a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}\right)^2 \neq 0. \tag{3.9.34}$$

Остання нерівність випливає з того, що Σ задана рівнянням $\tau = \sigma(x)$ не є характеристичною поверхнею.

При обраній заміні змінних поверхня Σ переходить в площину $\tau = 0$, а умови (3.9.30) приймають вигляд:

$$\tilde{u}\big|_{\tau=0} = u\big|_{\Sigma} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma}. \tag{3.9.35}$$

Залишається знайти $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{\Sigma}$. Для цього диференціюємо першу з умов (3.9.35).

Врахуємо, що

$$u\big|_{\Sigma} = \varphi(x) = u(x, \sigma(x)), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.9.36}$$