

## Зміст

<b>3 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів</b>	<b>1</b>
3.0 Оператор $\nabla$ (лікбез математичної теорії поля)	1
3.0.1 Властивості оператора $\nabla$	1
3.0.2 Оператори другого порядку	3
3.0.3 Приклади	3
3.1 Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини	4
3.1.1 Закон збереження теплової енергії	4
3.1.2 Частинні випадки рівняння теплопровідності	8
3.1.3 Рівняння дифузії речовини	9
3.1.4 Задача Стефана (задача про остигання та затвердіння розплавленого металу)	12

## 3 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів

### 3.0 Оператор $\nabla$ (лікбез математичної теорії поля)

**Визначення 3.0.0.1** (оператора  $\nabla$  в  $\mathbb{R}^2$ ). Для двовимірного евклідового простору  $\mathbb{R}^2$  у прямокутній декартовій системі координат *оператор набла* визначається наступним чином:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \quad (3.0.1)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}$  — одиничні вектори по вісям  $x$  і  $y$  відповідно.

**Визначення 3.0.0.2** (оператора  $\nabla$  в  $\mathbb{R}^3$ ).

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (3.0.2)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — одиничні вектори по вісям  $x, y$  і  $z$  відповідно.

#### 3.0.1 Властивості оператора $\nabla$

**Визначення 3.0.1.1** (градієнту через оператор  $\nabla$ ). Якщо “скалярно помножити” вектор  $\nabla$  на скалярну функцію  $f = f(x, y, z)$ , то вийде вектор:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \text{grad } f, \quad (3.0.3)$$

який є нічим іншим як *градієнтом*  $\text{grad } f$  функції  $f$ .

**Визначення 3.0.1.2** (дивергенції через оператор  $\nabla$ ). Якщо “скалярно помножити” вектор  $\nabla$  на вектор-функцію

$$\vec{F} = (f, g, h) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)), \quad (3.0.4)$$

то вийде скаляр:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \text{div } \vec{F}, \quad (3.0.5)$$

який є нічим іншим як *дивергенцією*  $\text{div } \vec{F}$  функції  $\vec{F}$ .

**Визначення 3.0.1.3** (ротора через оператор  $\nabla$ ). Якщо “векторно помножити” вектор  $\nabla$  на вектор-функцію

$$\vec{F} = (f, g, h) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)), \quad (3.0.6)$$

то вийде вектор:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot } \vec{F}. \end{aligned} \quad (3.0.7)$$

який є нічим іншим як *ротором*  $\text{rot } \vec{F}$  функції  $\vec{F}$ .

**Визначення 3.0.1.4** (оператора Лапласа через оператор  $\nabla$ ). Скалярний добуток  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$  є ніщо янше як оператор Лапласа, який також позначається  $\Delta$ .

У декартових координатах оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.0.8)$$

### 3.0.2 Оператори другого порядку

Оскільки існують різні способи множення векторів і скалярів, з допомогою оператору набла можна записати різні види “диференціювання”. так, комбінування скалярних і векторних добутків дає 7 різних варіантів “похідних” другого порядку:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (3.0.9)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) \quad (3.0.10)$$

$$\Delta f = \nabla^2 f \quad (3.0.11)$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) \quad (3.0.12)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \quad (3.0.13)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) \quad (3.0.14)$$

$$\Delta \vec{F} = \nabla^2 \vec{F} \quad (3.0.15)$$

Для достатньо гладких полів (двічі неперервно диференційовних) ці оператори не незалежні. Два з них тотожно дорівнюють нулю:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla)f = 0 \quad (3.0.16)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \vec{F} = 0. \quad (3.0.17)$$

Два завжди рівні:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla)f = \nabla^2 f = \Delta f. \quad (3.0.18)$$

А решта три пов’язані співвідношенням:

$$\nabla \times (\nabla \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}. \quad (3.0.19)$$

І ще один може бути виражене через тензорний добуток векторів:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \otimes \vec{F}) \quad (3.0.20)$$

### 3.0.3 Приклади

#### Приклад 3.0.3.1

Нехай  $z = z(x, y) = xy$ , тоді

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = y \vec{i} + x \vec{j}. \quad (3.0.21)$$

### Приклад 3.0.3.2

Нехай  $z = z(x, y) = 30yx^3$ , тоді

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = 90yx^2 \vec{i} + 30x^3 \vec{j}. \quad (3.0.22)$$

## 3.1 Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини

Для запису математичної моделі введемо величини:

- $x = (x_1, x_2, x_3) \in G \subset \mathbb{R}^3$  об'єм тіла,  $t$  — час;
- $u(x, t)$  — температура в точці  $x$  у момент часу  $t$ ;
- $c(x)$  — теплоємність (кількість тепла, яка необхідна, для підняти температуру одиниці маси тіла на один градус);
- $k(x)$  — теплопровідність речовини (здатність проводити тепло);
- $\rho(x)$  — щільність речовини;
- $f(x, t)$  — інтенсивність джерел теплової енергії в точці  $x$  в момент часу  $t$ .

### 3.1.1 Закон збереження теплової енергії

Складемо баланс теплової енергії для довільного об'єму тіла  $G$  за довільний інтервал часу  $t_1 < t < t_2$ . Для цього обчислимо кількість тепла, яка міститься в нескінченно малому об'ємі  $dG$ :

$$\rho(x) \cdot dG \cdot c(x) \cdot u(x, t) \quad (3.1.1)$$

та в об'ємі  $G$  в момент часу  $t$ :

$$Q_1(t) = \iiint_G c(x) \rho(x) u(x, t) dG. \quad (3.1.2)$$

Припустимо, що з часом температура змінилася від значення  $u(x, t_1)$  до значення  $u(x, t_2)$ . Обчислимо кількість тепла, витрачену на зміну температури:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \iiint_G c(x) \rho(x) (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG. \quad (3.1.3)$$

Температура в об'ємі  $G$  може змінюватись за рахунок таких факторів:

1. нерівномірності нагрівання тіла, викликає потік тепла через поверхню  $S$ , яка обмежує уявне тіло об'єму  $G$ ;
2. зміна кількості тепла за рахунок внутрішніх теплових джерел.

Нехай  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до поверхні  $S$ . Обчислимо кількість тепла, яка поступає всередину об'єму  $G$  через елементарну поверхню  $dS$  в одиницю часу:

$$dQ(x, t) = k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \cdot dS \quad (3.1.4)$$

Ця формула є математичним виразом фізичного закону Фур'є.

Кількість тепла, яка проходить через всю поверхню  $S$  за час від  $t_1$  до  $t_2$  обчислюється за формулою

$$Q_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left( k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \right) dS dt. \quad (3.1.5)$$

Кількість тепла за рахунок теплових джерел в об'ємі  $G$  можна обчислити у вигляді:

$$Q_3(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \quad (3.1.6)$$

Таким чином можна записати

#### Закон (збереження теплової енергії)

Виконується співвідношення:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2) + Q_3(t_1, t_2), \quad (3.1.7)$$

або після підстановки усіх величин маємо

### Закон (збереження теплової енергії в інтегральному вигляді)

Виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} \iiint_G c(x)\rho(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left( k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \right) dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Для перетворення першого інтегралу правої частини останньої рівності застосуємо формулу Остроградського Гауса,

$$\iint_S \langle A, \vec{n} \rangle dS = \iiint_G (\nabla \cdot \vec{A}) dG, \quad (3.1.9)$$

де  $\vec{A}$  — векторне поле,

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \quad (3.1.10)$$

В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \left( c(x)\rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) dG dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G (\nabla \cdot (k(x)\nabla u)) dG dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Враховуючи, що остання рівність отримана для довільного об'єму  $G$  та довільних моментів часу, можна зробити висновок, що вона має місце тоді і лише тоді, коли має місце рівність підінтегральних виразів:

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (k(x)\nabla u) + f(x, t), \quad (3.1.12)$$

де  $x \in G, t > 0$ .

Це рівняння повинно виконуватись для кожної точки  $x$  реального фізичного об'єму тіла (збережемо для нього позначення  $G$ , а для його поверхні позначення  $S$ ), та для кожного моменту часу  $t$ .

Для виділення єдиного розв'язку цього рівняння окрім самого диференціального рівняння необхідно задавати додаткові умови на границі просторово-часової області. Будемо використовувати фізичні міркування для задавання таких умов.

1. Якщо на границі області відома температура тіла, тоді на границі тіла задають умову Діріхле.

**Визначення 3.1.1.1** (умови Діріхле). Крайовою умовою першого роду, або *умовою Діріхле* називають співвідношення

$$u(x, t)|_{x \in S} = v(x, t). \quad (3.1.13)$$

2. Якщо на границі області відомий тепловий потік в одиницю часу, який поступає всередину тіла через одиничну площу, тоді на границі задають граничну умову Неймана.

**Визначення 3.1.1.2** (умови Неймана). Крайовою умовою другого роду, або *умовою Неймана* називають співвідношення

$$k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = q(x, t). \quad (3.1.14)$$

3. Якщо на границі тіла відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем відомої температури згідно до закону Ньютона, тоді на границі задають крайову умову Ньютона

**Визначення 3.1.1.3** (умови Ньютона). Крайовою умовою третього роду, або *умовою Ньютона* називають співвідношення

$$k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = \alpha(x, t)(v(x, t) - u(x, t))|_{x \in S}, \quad (3.1.15)$$

де  $\alpha(x, t) > 0$  — коефіцієнт теплообміну,  $v(x, t)$  — температура оточуючого середовища.

4. В початковий момент часу задають температура усіх внутрішніх точок тіла:

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x). \quad (3.1.16)$$

**Визначення 3.1.1.4** (початкової умови). *Початковою умовою* називається співвідношення

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad (3.1.17)$$

при цьому  $u_0(x)$  називається *початковою температурою*.

### 3.1.2 Частинні випадки рівняння теплопровідності

**Зауваження 3.1.2.1** — У випадку, коли коефіцієнт теплопровідності та інтенсивність теплових джерел залежить не лише від точки простору і часу, а і від самої температури, тобто  $k = k(u, x, t)$ ,  $f = f(u, x, t)$ , лінійне диференціальне рівняння (3.1.12) стає квазілінійним, тобто лінійним відносно старших похідних.

Окрім загального вигляду рівняння теплопровідності, у практичних випадках часто використовуються частинні випадки рівняння.

Зокрема, можна розглядати розповсюдження тепла в одновимірних та двовимірних тілах:

- У пластині:

$$\nabla \cdot (k(x) \nabla u(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_2} \right). \quad (3.1.18)$$

- У стрижні:

$$\nabla \cdot (k(x) \nabla u(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right). \quad (3.1.19)$$

Для однорідних тіл усі коефіцієнти рівняння можна вважати константами, зокрема  $c = c_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $k = k_0$ . В результаті вищезгадане диференціальне рівняння буде мати вигляд

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{1}{c_0 \rho_0} \cdot f(x, t), \quad (3.1.20)$$

де

$$a^2 = \frac{k_0}{c_0 \rho_0} > 0, \quad (3.1.21)$$

і було введено



**Визначення 3.1.2.1** (оператор Лапласа). *Оператором Лапласа* називається диференціальний оператор  $\Delta$  що діє на функцію  $u(x, t)$  по векторній змінній  $x$  наступним чином:

$$\Delta u(x, t) = \nabla \cdot (\nabla u(x, t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2}. \quad (3.1.22)$$

**Зауваження 3.1.2.2** — Зокрема одновимірне рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c_0 \rho_0} f(x, t). \quad (3.1.23)$$

### 3.1.3 Рівняння дифузії речовини

Процес дифузії речовини це процес вирівнювання концентрації речовини у розчинах, розплавах або в сумішах. Фізика вирівнювання температури в тілах та концентрації у розчинах чи розплавах має багато схожих рис і з цього приводу навіть процес розповсюдження тепла називають дифузією тепла.

Для отримання моделі дифузії речовини використаємо наступну таблицю аналогії.

Дифузія	Теплопровідність	Пояснення
$u(x, t)$	$u(x, t)$	Концентрація речовини в розчині, або у розплаві
$c(x)$	$c(x)\rho(x)$	Коефіцієнт пористості, відображає відношення об'єму пор до загального об'єму тіла і вказує на кількість речовини необхідну для зміни концентрації на одну одиницю в одиниці об'єму.

Дифузія	Теплопровідність	Пояснення
$D \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS$	$k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS$	Закон Фур'є, описує кількість речовини, яка поступає всередину тіла через його поверхню в одиницю часу за рахунок нерівномірності концентрації.
$f(x, t)$	$f(x, t)$	Інтенсивність джерела речовини в середині об'єму.
$D \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \alpha (v - u) _S$	$k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \alpha (v - u) _S$	Кількість речовини, яка поступає через поверхню $S$ тіла за законом, аналогічним закону Ньютона, $v$ — відома концентрація речовини в тому чи іншому середовищі; $\alpha$ — коефіцієнт проникності поверхні.

Побудови математичної моделі процесу дифузії відбувається за аналогією згідно до попередньої таблиці.

Кількість речовини, яка витрачена для зміни концентрації від  $u(x, t_1) \rightarrow u(x, t_2)$ ,  $t_1 < t_2$  має вигляд:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \iiint_G c(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG. \quad (3.1.24)$$

Кількість речовини, яка проходить через всю поверхню  $S$  за час від  $t_1 \rightarrow t_2$ :

$$Q_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left( D(x, t) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS dt. \quad (3.1.25)$$

Кількість речовини, яка поступає за рахунок джерел речовини в об'ємі  $G$  за час від  $t_1$  до  $t_2$ :

$$Q_3(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \quad (3.1.26)$$

Отже, отримали

### Закон (збереження маси)

Вісунується співвідношення:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2) + Q_3(t_1, t_2). \quad (3.1.27)$$

а також

### Закон (збереження маси в інтегральному вигляді)

Вісунується співвідношення:

$$\begin{aligned} \iiint_G c(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left( D(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \right) dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Після застосування формули Остроградського-Гауса та прирівнювання підінтегральних виразів отримаємо рівняння дифузії речовини у вигляді:

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D(x, t) \nabla u) + f(x, t), \quad (3.1.29)$$

де  $x \in G, t > 0$ .

Додаткові умови на границі області задають аналогічно умовам для рівняння теплопровідності:

1. Якщо відома концентрація речовини на поверхні:

$$u(x, t)|_{x \in S} = v(x, t); \quad (3.1.30)$$

2. Якщо на границі відомий потік речовини:

$$D \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = g(x, t); \quad (3.1.31)$$

3. Якщо на границі відбувається обмін речовиною з оточуючим середовищем через напівпроникливу мембрану за законом аналогічним закону Ньютона:

$$D(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = \alpha(x, t) (v(x, t) - u(x, t))|_{x \in S}; \quad (3.1.32)$$

4. Якщо в початковий момент часу відома концентрація речовини:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.1.33)$$

**Зауваження 3.1.3.1** — У випадку, коли коефіцієнти рівняння та граничних умов не залежать від часу  $t$ , розв'язок рівняння не залежить від часу в результаті отримаємо стаціонарне рівняння теплопровідності та дифузії:

$$\nabla \cdot (k(x) \nabla u(x)) = -f(x), \quad (3.1.34)$$

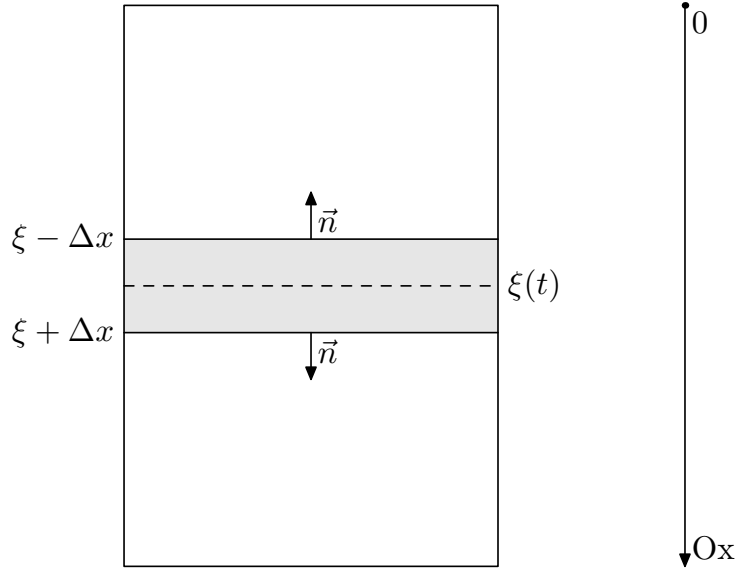
$$\nabla \cdot (D(x) \nabla u(x)) = -f(x). \quad (3.1.35)$$

### 3.1.4 Задача Стефана (задача про остигання та затвердіння розплавленого металу)

Вертикальний циліндричний посуд заповнений розплавленим металом, який знаходиться при заданій температурі  $U_0 > U_{melt}$  - температура плавлення металу. Починаючи з моменту часу  $t_0$  вільна поверхня розплавленого металу підтримується при постійній температурі  $U_1 < U_{melt}$ . Поставимо задачу про остудження та затвердіння металу, якщо дно і бокова поверхня посуду теплоізовані. Термічними деформаціями об'єму будемо нехтувати тобто процес розповсюдження тепла відбувається лише вздовж вісі циліндру. Введемо позначення:

- $\rho_s, \rho_l$  — щільність твердої (eng. *solid*) та рідкої (eng. *liquid*) фази металу;
- $c_s, c_l$  — теплоємність твердої та рідкої фази металу;
- $k_s, k_l$  — теплопровідність твердої та рідкої фази металу;
- $\xi(t)$  — положення границі розділу твердої та рідкої фаз;
- $L$  — висота циліндру,  $S$  — площа основи циліндру;
- $\lambda$  — питома теплота плавлення;
- $u(x, t)$  — температура в момент часу  $t$  в точці  $x$ .

Деякі з введених позначень краще видно на наступній ілюстрації:



Отримаємо рівняння теплового балансу для нескінченно малого об'єму розплавленого металу, який знаходиться між перерізами  $x$  та  $x + \Delta x$  за проміжок часу від  $t$  до  $t + \Delta t$ .

Обчислимо кількість тепла, яка необхідна для зміни температури у виділеному елементарному об'ємі від значення  $u(x, t)$  до значення  $u(x, t + \Delta t)$ . Кількість тепла, що міститься в виділеному об'ємі в момент часу  $t$  можна обчислити за формулою

$$dQ(t) = c_l \cdot \rho_l \cdot S \cdot \Delta x \cdot u(x, t). \quad (3.1.36)$$

Аналогічно для моменту часу  $t + \Delta t$  кількість тепла дорівнює

$$dQ(t + \Delta t) = c_l \cdot \rho_l \cdot S \cdot \Delta x \cdot u(x, t + \Delta t). \quad (3.1.37)$$

При цьому нехтуємо, зміною температури по просторовій змінній у середині елементарного об'єму. Тоді кількість тепла, необхідна для зміни температури всередині об'єму дорівнює:

$$\Delta Q(t, t + \Delta t) = c_l \cdot \rho_l \cdot S \cdot \Delta x \cdot (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)). \quad (3.1.38)$$

Ця зміна може відбуватися за рахунок теплових потоків, через перерізи  $x$  та  $x + \Delta x$ . Підрахуємо кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз  $x + \Delta x$  за час  $\Delta t$ :

$$dQ(x + \Delta x) = k_l \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial \vec{n}} S \Delta t = k_l \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} S \Delta t \quad (3.1.39)$$

Напрямок нормалі  $\vec{n}$  в цьому перерізі співпадає з напрямком вісі  $Ox$ .

Кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз  $x$  за час  $\Delta t$  можна записати у вигляді:

$$dQ(x) = k_l \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} S \Delta t = -k_l \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S \Delta t \quad (3.1.40)$$

Таким чином можна скласти рівняння теплового балансу:

$$dQ(t, t + \Delta t) = dQ(x + \Delta x) + dQ(x). \quad (3.1.41)$$

Або після підстановки відповідних значень поділених на  $\Delta x \cdot \Delta t \cdot S$  отримаємо:

$$\frac{c_l \rho_l (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))}{\Delta t} = k_l \left( \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \frac{1}{\Delta x}. \quad (3.1.42)$$

Після граничного переходу коли  $\Delta x$  та  $\Delta t$  прямують до нуля, отримаємо диференціальне рівняння:

$$c_l \rho_l \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k_l \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1.43)$$

де  $\xi(t) < x < L$ ,  $t > t_0$ .

Аналогічні міркування дозволяють отримати рівняння для твердої фази:

$$c_s \rho_s \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k_s \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1.44)$$

де  $0 < x < \xi(t)$ ,  $t > t_0$ .

**Визначення 3.1.4.1** (співвідношення на границі розділу фаз). Температура при переході через границю розділу фаз повинна змінюватись неперервно і співпадати з температурою плавлення металу, тобто повинно виконуватись наступне співвідношення:

$$u(\xi(t) - 0, t) = u(\xi(t) + 0, t) = U_{melt}, \quad (3.1.45)$$

яке називається *співвідношенням на границі розділу фаз*.

Отримаємо рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами  $\xi(t) - \Delta x$  та  $\xi(t) + \Delta x$ .

За час  $\Delta t$  затвердіє об'єм металу рівний

$$(\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \cdot S. \quad (3.1.46)$$

При цьому буде виділено кількість тепла рівна

$$dQ_{melt} = (\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \cdot S \cdot \lambda \cdot \rho_s. \quad (3.1.47)$$

Кількість тепла, яка надійде всередину об'єму за рахунок теплових потоків через відповідні перерізи за час  $\Delta t$  може бути записана у вигляді:

$$\Delta t \cdot S \cdot \left( k_l \cdot \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x, t)}{\partial x} - k_s \cdot \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x, t)}{\partial x} \right). \quad (3.1.48)$$

Оскільки фазовий перехід відбувається при постійній температурі, то в околі границі розділу фаз  $\xi(t)$  зміною температури по змінній  $t$  можна нехтувати, в зв'язку з чим можна не враховувати кількість тепла, яка витрачається на зміну температури у виділеному елементарному об'ємі.

Рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами  $\xi(t) - \Delta x$  та  $\xi(t) + \Delta x$  можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} (\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) S \lambda \rho_s = \\ = \Delta t S \left( k_l \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x, t)}{\partial x} - k_s \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x, t)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

Поділивши обидві частини на  $\Delta t$ , скоротивши на  $S$  і спрямувавши  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  до нуля отримаємо співвідношення:

$$\lambda \rho_s \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = k_l \frac{\partial u(\xi(t) + 0, t)}{\partial x} - k_s \frac{\partial u(\xi(t) - 0, t)}{\partial x}. \quad (3.1.50)$$

**Визначення 3.1.4.2** (внутрішніх граничних умов (умов спряження)).  
Останню умову

$$\lambda \rho_s \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = k_l \frac{\partial u(\xi(t) + 0, t)}{\partial x} - k_s \frac{\partial u(\xi(t) - 0, t)}{\partial x}. \quad (3.1.51)$$

разом із співвідношенням (3.1.45) на границі розділу фаз називають *внутрішніми граничними умовами*, або *умовами спряження*.

Запишемо початкові умови та умови на верхній та нижній основі циліндру:

- В початковий момент часу задана температура розплавленого металу:

$$u(x, t_0) = U_0, \quad 0 < x < L. \quad (3.1.52)$$

- На верхній основі задана температура:

$$u(0, t) = U_1, \quad t > t_0. \quad (3.1.53)$$

- Нижня основа теплоізована, тобто тепловий потік, який поступає всередину тіла дорівнює нулю:

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad t > t_0. \quad (3.1.54)$$

- В початковий момент часу положення границі фазового переходу співпадає з верхньою основою циліндру:

$$\xi(t_0) = 0. \quad (3.1.55)$$

Таким чином, до моменту часу, коли весь метал затвердіє постановка задачі Стефана включає в себе диференційні рівняння (3.1.43), (3.1.44), співвідношення на границі розділу фаз (3.1.45), умови спряження (3.1.51), початкові умови (3.1.52), (3.1.55) та граничні умови (3.1.53), (3.1.54).

**Зауваження 3.1.4.1** — Після повного затвердіння металу, тобто коли  $\xi(t_1) = L$ , процес буде описуватись звичайним рівнянням теплообміну для  $t > t_1$  з граничними умовами

$$u(0, t) = U_1, \quad (3.1.56)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (3.1.57)$$

та початковою температурою  $u(x, t_1)$ .