# Зміст


2.2.2 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром . . . 1
2.2.3 Альтернатива Фредгольма . . . 3
2.2.4 Наслідки з теорем Фредгольма . . . 5
2.2.5 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром . . . 6
2.3 Інтегральні рівняння з ермітовим ядром . . . 8


### 2.2.2 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром

Будемо розглядати рівняння:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x), \tag{2.2.29}$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int\limits_G K^\star(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x), \tag{2.2.30}$$

Ядро $K(x,y) \in C\left(\overline{G}\times\overline{G}\right)$, отже його можна наблизити поліномом (Теорема Вейєрштраса).

Тобто, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує

$$P_N(x,y) = \sum_{|\alpha+\beta|\le N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{2.2.31}$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, такий що $|K(x,y) - P_N(x,y)| < \varepsilon$, $(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}$, тобто

$$K(x,y) = P_N(x,y) + Q_N(x,y), \tag{2.2.32}$$

де $P_N(x,y)$ — вироджене ядро (поліном), $|Q_N(x,y)| < \varepsilon$, $(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}$.

Виходячи з останньої рівності, інтегральне рівняння Фредгольма приймає вигляд

$$\varphi = \lambda \mathbf{P}_N\varphi + \lambda\mathbf{Q}_N\varphi + f, \tag{2.2.33}$$

де $\mathbf{P}_N$ та $\mathbf{Q}_N$ — інтегральні оператори з ядрами $P_N(x,y)$ та $Q_N(x,y)$ відповідно ($\mathbf{P}_N + \mathbf{Q}_N = \mathbf{K}$).

Для спряженого рівняння маємо:

$$K^\star(x,y) = P_N^\star(x,y) + Q_N^\star(x,y), \tag{2.2.34}$$

і

$$\psi = \overline{\lambda}\mathbf{P}_N^\star\psi + \overline{\lambda}\mathbf{Q}_N^\star\psi + g. \tag{2.2.35}$$

**Твердження 2.2.10**
В класі $C(G)$ отримані рівняння

$$\varphi = \lambda \mathbf{P}_N \varphi + \lambda \mathbf{Q}_N \varphi + f, \tag{2.2.36}$$
$$\psi = \overline{\lambda} \mathbf{P}_N^\star \psi + \overline{\lambda} \mathbf{Q}_N^\star \psi + g \tag{2.2.37}$$

еквівалентні рівнянням з виродженим ядром.

*Доведення.* Введемо нову функцію

$$\Phi = \varphi - \lambda \mathbf{Q}_N \varphi \tag{2.2.38}$$

З рівняння на $\varphi$ випливає що $\Phi = \lambda \mathbf{P}_N + f$, а з однією із рівностей твердження **??** випливає що $\forall \lambda$ такого що $|\lambda| < 1/\varepsilon V$:

$$(E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} = (E + \lambda \mathbf{R}_N), \tag{2.2.39}$$

де $\mathbf{R}_N$ — резольвента для $\mathbf{Q}_N$. Отже

$$\varphi = (E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} \Phi = (E + \lambda \mathbf{R}_N) \Phi. \tag{2.2.40}$$

Тобто, рівняння Фредгольма II роду перетворюється на

$$\Phi = \lambda \mathbf{P}_N (E + \lambda \mathbf{R}_N) \Phi. \tag{2.2.41}$$

Для спряженого рівняння маємо:

$$\psi = \overline{\lambda} \left( E + \overline{\lambda} \mathbf{R}_N^\star \right) \mathbf{P}_N^\star \psi + \left( E + \overline{\lambda} \mathbf{R}_N^\star \right) g. \tag{2.2.42}$$

Позначимо $g_1 = \left( E + \overline{\lambda} \mathbf{R}_N^\star \right) g$. Маємо:

$$\psi = \overline{\lambda} \left( E + \overline{\lambda} \mathbf{R}_N^\star \right) \mathbf{P}_N^\star \psi + g_1. \tag{2.2.43}$$

Оскільки $(\mathbf{P}_N \mathbf{R}_N)^\star = \mathbf{R}_N^\star \mathbf{P}_N^\star$, то отримані рівняння спряжені.

Позначимо нарешті

$$\mathbf{T}_N = \mathbf{P}_N (E + \lambda \mathbf{R}_N), \tag{2.2.44}$$
$$\mathbf{T}_N^\star = \left( E + \overline{\lambda} \mathbf{R}_N^\star \right) \mathbf{P}_N^\star. \tag{2.2.45}$$

Тоді рівняння Фредгольма з неперервним ядром можна записати у вигляді:

$$\Phi = \lambda \mathbf{T}_N \Phi + f, \tag{2.2.46}$$

$$\Psi = \overline{\lambda}\mathbf{T}_N^\star\Psi + g_1, \tag{2.2.47}$$

де

$$T_N(x,y,\lambda) = P_N(x,y) + \lambda\int_G P_N(x,\xi)R_N(\xi,y,\lambda)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.2.48}$$

— вироджене, оскільки є сумою двох вироджених, поліному $P_N(x,y)$, та інтегрального доданку. Покажемо що другий доданок в $T_N$ — вироджений. Дійсно:

$$\int\limits_G \sum_{|\alpha+\beta|\le N} a_{\alpha\beta}x^\alpha\xi^\beta R_N(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{|\alpha+\beta|\le N} a_{\alpha\beta}x^\alpha\int\limits_G \xi^\beta R_N(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.2.49}$$

□

### 2.2.3 Альтернатива Фредгольма

Сукупність теорем Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром називається альтернативою Фредгольма.

**Теорема 2.2.11** (Перша теорема Фредгольма для неперервних ядер)
Якщо інтегральне рівняння Фредгольма II роду з неперервним ядром $K(x,y)$ має розв'язок $\forall f \in C\left(\overline{G}\right)$ то і спряжене рівняння має розв'язок для $\forall g \in C(\overline{G})$ і ці роз'язки єдині.

*Доведення.* Нехай інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок в $C\left(\overline{G}\right)$ для $\forall$ вільного члена $f$, тоді еквівалентне йому рівняння $\Phi = \lambda\mathbf{T}_N\Phi + F$ має такі ж властивості і згідно з першою теоремою Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda)\ne 0$, а спряжене до нього рівняння $\Psi = \overline{\lambda}\mathbf{T}_N^\star + g_1$ теж має єдиний розв'язок $\forall$ вільного члена $g_1$, еквівалентне до нього (і спряжене до початкового) рівняння має розв'язок $\forall g$. □

**Теорема 2.2.12** (Друга теорема Фредгольма для непевних ядер)
Якщо інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язки не для будь-якого вільного члена $f$, то однорідні рівняння $\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi$ та $\psi = \overline{\lambda}\mathbf{K}^\star\psi$ мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків.

*Доведення.* Нехай інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок не $\forall$ вільного члена $f$, тоді еквівалентне йому рівняння з виродженим ядром $\Phi = \lambda \mathbf{T}_N \Phi + F$ має таку ж властивість. Згідно з теоремами Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda) = 0$ (для виродженого ядра $\mathbf{T}_N$). Однорідні рівняння які їм відповідають мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків, еквівалентні до них однорідні рівняння $\varphi = \lambda \mathbf{K} \varphi$ та $\psi = \overline{\lambda} \mathbf{K}^{\star} \psi$ теж мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв'язків. □

**Теорема 2.2.13** (Третя теорема Фредгольма для неперервних ядер)
Якщо інтегральне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок не для довільного вільного члена $f$, то для існування розв'язку інтегрального рівняння в $C\left(\overline{G}\right)$ необхідно і достатньо, щоб вільний член $f$ був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння. Розв'язок не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки, натягнутої на систему власних функцій оператора $\mathbf{K}$.

*Доведення.* Нехай неоднорідне рівняння Фредгольма II роду має розв'язок не для будь-якого вільного члена $f$, тоді еквівалентне рівняння з виродженим ядром має таку ж властивість, і за третьою теоремою Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda) = 0$ (для виродженого ядра $\mathbf{T}_N$). Розв'язок цього еквівалентного рівняння існує тоді і тільки тоді коли $f$ ортогональний до розв'язків спряженого однорідного рівняння. Але легко бачити, що вільний член початкового і еквівалентного рівнянь співпадають, так само співпадають розв'язки вихідного спряженого однорідного рівняння та еквівалентного. □

**Зауваження 2.2.14** — Для доведення теорем для будь-якого фіксованого значення $\lambda$ вибиралося $\varepsilon$, таке щоби $|\lambda| < 1/\varepsilon V$.

**Теорема 2.2.15** (Четверта теорема Фредгольма)
Для будь-якого як завгодно великого числа $R > 0$ в крузі $|\lambda| < R$ лежить лише скінчена кількість характеристичних чисел неперервного ядра $K(x, y)$.

**Вправа 2.2.16.** Доведіть четверту теорему Фредгольма.

### 2.2.4 Наслідки з теорем Фредгольма

**Наслідок 2.2.17**

З четвертої теореми Фредгольма випливає, що множина характеристичних чисел неперервного ядра не має скінчених граничних точок і не більш ніж злічена $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$.

**Вправа 2.2.18.** Доведіть цей наслідок.

**Наслідок 2.2.19**

З другої теореми Фредгольма випливає, що кратність кожного характеристичного числа скінчена, їх можна занумерувати у порядку зростання модулів $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_k| \le |\lambda_{k+1}| \le \ldots$, кожне число зустрічається стільки разів, яка його кратність. Також можна занумерувати послідовність власних функцій ядра $K(x, y)$: $\varphi_1$, $\varphi_2$, …, $\varphi_k$, $\varphi_{k+1}$, … і спряженого ядра $K^\star(x, y)$: $\psi_1$, $\psi_2$, …, $\psi_k$, $\psi_{k+1}$, ….

**Вправа 2.2.20.** Доведіть цей наслідок.

**Наслідок 2.2.21**

Власні функції неперервного ядра $K(x, y)$ неперервні в області $G$.

**Вправа 2.2.22.** Доведіть цей наслідок.

**Наслідок 2.2.23**

Якщо $\lambda_k \ne \lambda_j$, то $(\varphi_k, \psi_j) = 0$.

**Вправа 2.2.24.** Доведіть цей наслідок.

### 2.2.5 Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром

Розповсюдимо теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром:

$$K(x,y) = \frac{A(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}, \quad \alpha < n. \tag{2.2.50}$$

Покажемо що $\forall \varepsilon > 0$ існує таке вироджене ядро $P_N(x,y)$ що,

$$\max_{x \in \overline{G}} \int_G |K(x,y) - P_N(x,y)| \,\mathrm{d}y < \varepsilon, \tag{2.2.51}$$

$$\max_{x \in \overline{G}} \int_G |K^{\star}(x,y) - P_N^{\star}(x,y)| \,\mathrm{d}y < \varepsilon. \tag{2.2.52}$$

Розглянемо неперервне ядро

$$L_M(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & |x-y| \geq 1/M, \\ A(x,y)M^{\alpha}, & |x-y| < 1/M. \end{cases} \tag{2.2.53}$$

**Твердження 2.2.25**

При достатньо великому $M$ має місце оцінка

$$\int_G |K(x,y) - L_M(x,y)| \,\mathrm{d}y \leq \varepsilon. \tag{2.2.54}$$

*Доведення.* Дійсно:

$$\begin{aligned}
\int\limits_G |K(x,y) - L_M(x,y)|\,\mathrm{d}y &= \int\limits_{|x-y|<1/M} \left|\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - A(x,y)M^\alpha\right| \mathrm{d}y = \\
&= \int\limits_{|x-y|<1/M} |A(x,y)| \left|\frac{1}{|x-y|^\alpha} - M^\alpha\right| \mathrm{d}y \le \\
&\le A_0 \int\limits_{|x-y|<1/M} \left|\frac{1}{|x-y|^\alpha} - M^\alpha\right| \mathrm{d}y \le \\
&\le A_0 \int\limits_{|x-y|<1/M} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} = \\
&= A_0\sigma_n \int\limits_0^{1/M} \xi^{n-1-\alpha}\,\mathrm{d}\xi = \\
&= A_0\sigma_n \left.\frac{\xi^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right|_0^{1/M} = \\
&= \frac{A_0\sigma_n}{(n-\alpha)M^{n-\alpha}} \le \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned} \tag{2.2.55}$$

де $\sigma_n$ — площа поверхні одиничної сфери. □

Завжди можна підібрати вироджене ядро $P_N(x,y)$ таке що

$$|L_M(x,y) - P_N(x,y)| \le \frac{\varepsilon}{2V}, \tag{2.2.56}$$

де $V$ — об'єм області $G$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_G |K(x,y) - P_N(x,y)|\,\mathrm{d}y &= \int\limits_G |K(x,y) - L_M(x,y) + \\
&\quad + L_M(x,y) - P_N(x,y)|\,\mathrm{d}y \le \\
&\le \int\limits_G |K(x,y) - L_M(x,y)|\,\mathrm{d}y + \\
&\quad + \int\limits_G |L_M(x,y) - P_N(x,y)|\,\mathrm{d}y \le \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2V}\int\limits_G \mathrm{d}y = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.2.57}$$

Використавши попередню техніку (для неперервного ядра) інтегральне рівняння з полярним ядром зводиться до еквівалентного рівняння з виродженим ядром. Тобто теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром з тим же самим формулюванням.

Теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром на обмеженій кусково-гладкій поверхні $S$ та контурі $C$:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_S K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x), \quad \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}, \quad \alpha < \dim(S). \tag{2.2.58}$$

## 2.3 Інтегральні рівняння з ермітовим ядром

Розглядатимемо ядро $K(x,y) \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$ таке що $K(x,y) = K^\star(x,y)$.

**Визначення 2.3.1** (ермітового ядра)**.** Неперервне ядро будемо називати *ермітовим*, якщо виконується

$$K(x,y) = K^\star(x,y). \tag{2.3.1}$$

Зауваження 2.3.2 — Ермітовому ядру відповідає ермітовий оператор тобто $\mathbf{K} = \mathbf{K}^\star$.

**Лема 2.3.3**

Для того, щоб лінійний оператор був ермітовим, необхідно і достатньо, щоб для довільної комплексно значної функції $f \in L_2\left(\overline{G}\right)$ білінійна форма $(\mathbf{K}f, f)$ приймала лише дійсні значення.

**Вправа 2.3.4.** Доведіть цю лему.

**Лема 2.3.5**

Характеристичні числа ермітового оператора дійсні.

**Вправа 2.3.6.** Доведіть цю лему.

**Визначення 2.3.7** (компактної в рівномірній метриці множини функцій)**.** Множина функцій $M \subset C\left(\overline{G}\right)$ — *компактна в рівномірній метриці*, якщо з будь-якої нескінченної множини функцій з $M$ можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність.

**Визначення 2.3.8** (рівномірно обмеженої множини функцій)**.** Нескінченна множина $M \subset C\left(\overline{G}\right)$ — *рівномірно обмежена*, якщо для будь-якого елемента $f \in M$ має місце $\|f\|_{C(\overline{G})} \leq a$, де $a$ єдина константа для $M$.

**Визначення 2.3.9** (одностайно неперервної множини функцій)**.** Множина $M \subset C\left(\overline{G}\right)$ — *одностайно неперервна* якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \forall f \in M, \forall x_1, x_2 :$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ як тільки $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$.

**Теорема 2.3.10** (Арчела-Асколі, критерій компактності в рівномірній метриці)

Для того, щоб множина $M \subset C\left(\overline{G}\right)$ була компактною, необхідно і достатньо, щоб вона складалась з рівномірно-обмеженої і одностайно-неперервної множини функцій.

**Задача 2.3.1*.** Доведіть теорему Арчела-Асколі.

**Визначення 2.3.11** (цілком неперервного оператора)**.** Назвемо оператор $\mathbf{K}$ *цілком неперервним* з $L_2(G)$ у $C\left(\overline{G}\right)$, якщо він переводить обмежену множину в $L_2(G)$ у компактну множину в $C\left(\overline{G}\right)$ (в рівномірній метриці).

**Лема 2.3.12** (про цілком неперервність інтегральнього оператора з неперервним ядром)

Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з неперервним ядром $K(x, y)$ є цілком неперервний з $L_2(G)$ у $C\left(\overline{G}\right)$.

*Доведення.* Нехай $f \in M \subset L_2(G)$ та $\forall f \in M$: $\|f\|_{L_2(G)} \leq A$. Але

$$\|\mathbf{K}f\|_{C(\overline{G})} \leq M\sqrt{V}\|f\|_{L_2(G)} \leq M\sqrt{V}A, \tag{2.3.2}$$

тобто множина функцій є рівномірно обмеженою.

Покажемо що множина $\{\mathbf{K}f(x)\}$ — одностайно неперервна.

Ядро $K \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$, а отже є рівномірно неперервним, бо неперервне на компакті, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overline{G} : \|x' - x''\| < \delta \implies |(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| \leq \varepsilon. \tag{2.3.3}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} |(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| &= \left| \int\limits_G K(x', y) f(y) \,\mathrm{d}y - \int\limits_G K(x'', y) f(y) \,\mathrm{d}y \right| \leq \\ &\leq \int\limits_G \left( |K(x', y) - K(x'', y)| \cdot |f(y)| \right) \mathrm{d}y \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon \sqrt{V}}{A \sqrt{V}} \cdot \|f\|_{L_2(\overline{G})} \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

$\square$

**Приклад 2.3.13**

Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального оператора

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left( \left(\frac{x}{t}\right)^{2/5} + \left(\frac{t}{x}\right)^{2/5} \right) \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

*Розв'язок.* Розділимо ядро наступним чином:

$$\varphi(x) = \lambda x^{2/5} \int_0^1 t^{-2/5}\varphi(t)\, \mathrm{d}t + \lambda x^{-2/5} \int_0^1 t^{2/5}\varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Позначимо

$$c_1 = \int_0^1 t^{-2/5}\varphi(t)\, \mathrm{d}t, \quad c_2 = \int_0^1 t^{2/5}\varphi(t)\, \mathrm{d}t,$$

тоді

$$\varphi(x) = \lambda c_1 x^{2/5} + \lambda c_2 x^{-2/5}.$$

Підставляючи $\varphi$ назад у $c_i$ маємо СЛАР

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 t^{-2/5}(\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5})\, \mathrm{d}t, \\ c_2 = \int_0^1 t^{2/5}(\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5})\, \mathrm{d}t. \end{cases}$$

Інтегруючи знаходимо

$$\begin{cases} (1-\lambda)c_1 - 5\lambda c_2 = 0, \\ -\dfrac{5\lambda}{9}c_1 + (1-\lambda)c_2 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї СЛАР

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5\lambda \\ -\dfrac{5\lambda}{9} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{25\lambda^2}{9} = 0,$$

тобто власні числа
$$\lambda_1 = \frac{3}{8}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$
З системи однорідних рівнянь при $\lambda = \lambda_1 = 3/8$ маємо $c_1 = 3c_2$. Тоді маємо власну функцію
$$\varphi_1(x) = 3x^{2/5} + x^{-2/5}.$$
При $\lambda = \lambda_2 = -3/2$ маємо $c_1 = -3c_2$. Маємо другу власну функцію
$$\varphi_2(x) = -3x^{2/5} + x^{-2/5}.$$

**Приклад 2.3.14**

Знайти розв'язок інтегрального рівняння при всіх значеннях параметрів $\lambda$, $a$, $b$, $c$:
$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y + ax^2 + bx + c.$$

*Розв'язок.* Запишемо рівняння у вигляді:
$$\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt[3]{y} \cdot \varphi(y)\right)\mathrm{d}y + ax^2 + bx + c.$$
Введемо позначення:
$$c_1 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad c_2 = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt[3]{y}\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$
та запишемо розв'язок у вигляді:
$$\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}c_1 + \lambda c_2 + ax^2 + bx + c$$
Для визначення констант отримаємо СЛАР:
$$\begin{cases} c_1 - 2\lambda c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ -\dfrac{6\lambda}{5}c_1 + c_2 = \dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{6\lambda}{5} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{12\lambda^2}{5}.$$

Характеристичні числа ядра

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Нехай $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$. Тоді розв'язок існує та єдиний для будь-якого вільного члена і має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{5\lambda(14a + 30\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)} \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{28\lambda a + 84\lambda c + 30b}{7(5 - 12\lambda^2)} + ax^2 + bx + c.$$

Нехай

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Тоді система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} c_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \frac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6b}{7}. \end{cases}$$

Ранги розширеної і основної матриці співпадатимуть якщо має місце рівність

$$\frac{2a}{3} + 2c = -\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{6}{7} \cdot b \quad (\star)$$

При виконанні цієї умови розв'язок існує

$$c_2 = c_2, \quad c_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c.$$

Таким чином розв'язок можна записати

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + x.$$

Якщо

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$$

а умова $(\star)$ не виконується, то розв'язків не існує.

Нехай

$$\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

Після підстановки цього значення отримаємо СЛАР

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \frac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6b}{7}. \end{cases}$$

Остання система має розв'язок при умові

$$\frac{2a}{3} + 2c = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{6}{7} \cdot b, \quad (\star\star)$$

При виконанні умови $(\star\star)$, розв'язок існує

$$c_2 = c_2, \quad c_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c.$$

Розв'язок інтегрального рівняння можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + c.$$