Глава 4 Дослідження узагальнених розв'язків граничних задач

Лекція 28

§ 1 Математичний апарат дослідження узагальнених розв'язків граничних задач

[8, стор.69 - 101]

Допоміжні результати

При дослідженні властивостей узагальнених розв'язків граничних задач ми будемо користуватися апаратом функціонального аналізу, тому нагадаємо деякі важливі поняття.

Означення 1 Нехай $\boldsymbol{E}$ - лінійний нормований прострів, тоді будемо говорити, що сукупність елементів $\boldsymbol{E}' \subset \boldsymbol{E}$ є всюди щільною в $\boldsymbol{E}$, якщо будь – який елемент $\boldsymbol{E}$ можна представити як границю в нормі $\boldsymbol{E}$ елементів з $\boldsymbol{E}'$. Якщо в $\boldsymbol{E}$ існує злічена всюди щільна множина елементів, то $\boldsymbol{E}$ називають сепарабільним простором.

Означення 2 Простір $\boldsymbol{E}$ називають повним, якщо для будь – якої фундаментальної в $\boldsymbol{E}$ послідовності існує граничний елемент, що належить $\boldsymbol{E}$. Повний лінійний нормований простір називається банаховим простором.

Означення 3 Банаховий простір $\boldsymbol{H}$ в якому для будь – яких двох елементів $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}$ визначений скалярний добуток $(u,v)_H$ з усіма властивостями скалярного добутку називають гільбертовим простором.

Означення 4 Послідовність $u_n \in H$ будемо називати такою, що слабко збігається в $\boldsymbol{H}$ до елементу $\boldsymbol{u}$, якщо $(u_n - u, v)_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \forall v \in H$.

Означення 5 Множина $\boldsymbol{M}$ банахового (гільбертового) простору $\boldsymbol{B}$ називається компактною, якщо будь – яка нескінчена множина елементів з $\boldsymbol{M}$ містить збіжну в просторі $\boldsymbol{B}$ підпослідовність.

Означення 6 Лінійним функціоналом l у гільбертовому просторі Н будемо називати лінійну неперервну числову функцію $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{u})$, визначену для кожного $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}$. Функціонал є неперервним якщо числова послідовність $l(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l(u)$ для $u_n \xrightarrow{H} u$. Будь – який неперервний лінійний функціонал є також і обмеженим і навпаки, тобто $\left|l(u)\right| \le C\left\|u\right\|_H$.

Теорема 1 (**Ф.Риса-Фішера** *про представлення лінійного неперервного функціоналу в гільбертовому просторі*) Будь – який неперервний лінійний функціонал l, заданий у гільбертовому просторі H може бути представлений у вигляді скалярного добутку $l(u) = (u,v)_H$, при цьому v визначається для кожного функціоналу l єдиним чином, $\left\|l\right\| = \left\|v\right\|_H$.

Означення 7 Лінійний оператор $\boldsymbol{A}$ який діє з банахового простору B_1 у банаховий простів B_2 називається обмеженим, якщо існує така константа C, що для будь-якого елементу $f \in D(A) \subset B_1$ має місце нерівність $\left\|Af\right\|_{B_2} \le C\left\|f\right\|_{B_1}$.

Означення 8 Лінійний оператор $\boldsymbol{A}$, який діє з банахового простору B_1 у банаховий простів B_2 називається неперервним на елементі $f \in D(\boldsymbol{A})$, якщо для будь – якої послідовності елементів $f_n \in D(\boldsymbol{A}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ по нормі банохового простору B_1, числова послідовність $\left\|\boldsymbol{A}f_n\right\|_{B_2}$ збігається до елемента $\left\|\boldsymbol{A}f\right\|_{B_2}$. Якщо оператор $\boldsymbol{A}$ неперервний на кожному елементі банахового простору B_1, його називають неперервним.

Для того щоб лінійний оператор $\boldsymbol{A}$ був неперервним необхідно і достатньо щоб цей оператор був обмеженим.

Означення 9 Нехай $D(A^*) \subset H$, підмножина елементів гільбертового простору H, з наступними властивостями: для будь – якого $g \in D(A^*)$ існує такий елемент $h \in H$, що для усіх $a \in D(A)$ має місце рівність $\left(Af, g\right) \in \left(f, h\right)$, тоді кажуть що на множині $D(A^*)$ заданий оператор A^*, який ставить у відповідність елементу $g \in D(A^*)$ елемент $h = A^* g$ і називається спряженим до оператора A.

Для основного і спряженого оператора має місце $(Af, g) \in (f, A^* g)$. Якщо $A = A^*$, то оператор A називається самоспряженими.

Означення 10 Будемо називати лінійний оператор A цілком неперервним з гільбертового простору H у гільбертов простір H, якщо він переводить будь – яку обмежену множину елементів в H у компактну множину елементів.

Означення 11 Оператор A, який діє у гільбертовому просторі називається скінченно-вимірним (n – вимірним), якщо він відображає гільбертов простір H у його (n – вимірний) підпростір.

Терема 2 (про представлення цілком неперервного оператора) Для того щоб заданий на сепарабільному гільбертовому просторі H лінійний обмежений оператор A із H в H був цілком неперервним необхідно і достатньо щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існувало ціле число $n(\varepsilon)$ і такі лінійні оператори A_1 та A_2, A_1 - (n – вимірний), а $\|A_2\| \le \varepsilon$, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$.

Матричне представлення лінійного обмеженого оператора

Нехай A - лінійний обмежений оператор, який діє з сепарабільного гільбертового простору H в H нехай $D_A = H$, $\{e_i\}_{i=1,\infty}$ - ортонормований базис елементів з H. Розглянемо нескінчену матрицю

$$a_{i,j} = (Ae_i, e_j) = (e_i, A^* e_j),\ i \ge 1,\ j \ge 1 \qquad (1.1)$$

будемо називати її матричним представленням оператора A по базису $\{e_i\}_{i=1,\infty}$. Оскільки $a_{i,j} = (Ae_i, e_j)$ - коефіцієнт Фур'є елемента Ae_i, то з рівності Парсеваля – Стєклова будемо мати, що $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|^2 = \|Ae_i\|^2 \le \|A\|^2 = \|A^*\|^2$. (1.2).

Візьмемо довільний елемент $f \in H$ і нехай $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$ - його розвинення в ряд Фур'є. Оскільки $Af \in H$, то його коефіцієнти Фур'є мають вигляд

$$\left(Af\right)_j = (Af, e_j) = \left(A\sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \left(Ae_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i a_{i,j},\ j = 1,2... \qquad (1.3).$$

Ряд в правій частині (1.3) збігається абсолютно оскільки його загальний член мажарується загальним членом збіжного ряду $\frac{1}{2}\left(\left|f_i\right|^2 + \left|a_{i,j}\right|^2\right)$. Підставляючи значення коефіцієнтів Фур'є в ряд Фур'є $Af = \sum_{i=1}^{\infty}\left(Af\right)_j e_j$, отримаємо

$$Af = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} f_i\right)e_j \qquad (1.4).$$

Таким чином, для довільного елементу $f \in H$ елемент $Af \in H$ може бути знайдений за формулою (1.4) лише з використанням матриці $a_{i,j}$. Матричне представлення спряженого оператора A^* в базисі $\{e_i\}_{i=1,\infty}$ запишемо через матрицю $a^*_{i,j} = (A^* e_i, e_j) = (e_i, Ae_j) = \overline{a}_{j,i},\ i, j \geq 1$.

Стискаючий лінійний оператор

Результати викладені в цьому параграфі справедливі для будь – якого банахового простору, але ми розглянемо лише випадок коли лінійний оператор діє в сеперебільному гільбертовому просторі H.

Означення 12 Будемо називати лінійний оператор A що дії з H в H стискаючим якщо $\|A\|_H < 1$.

Лема1 Якщо A лінійний стискаючий оператор з H в H, то існує заданий на H оператор $\left(I - A\right)^{-1}$ з H в H такий що $\left\|\left(I - A\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$.

Доведення Для доведення розглянемо рівняння $\left(I - A\right) f = g$ (1.5)
і покажемо, що для довільного $g \in H$ єдиним розв'язком є розв'язок, що представляється збіжним в H рядом $f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k g,\ A^0 = I$. (1.6).

Цей ряд збіжний, оскільки H - повний простір, а часткові суми ряду

$f_m = \sum_{k=0}^{m} A^k g$, утворюють фундаментальну послідовність: при $p > m$

$\|f_p - f_m\| = \|A^p g + ... + A^{m+1} g\| \le \|A^p g\| + ... + \|A^{m+1} g\| \le$

$\|g\|\left(\|A\|^{m+1} + ...\right) = \|g\| \frac{\|A\|^{m+1}}{1-\|A\|} \to 0$ при $m, p \to \infty$. Елемент $f \in H$ є розв'язком рівняння (1.5) оскільки $(I - A) f = (g + Ag + A^2 g + ...) - \left(Ag + A^2 g + ...\right) = g$. Цей розв'язок єдиний. Дійсно, якщо припустити, що існують два елементи f_1 та f_2 то $f = f_1 - f_2$ задовольняє однорідному рівнянню $(I - A) f = 0$. Тому має місце оцінка $\|f\| = \|Af\| \le \|A\|\|f\|$. Таким чином $f = 0,\ f_1 = f_2$

Тобто оператор $(I - A)^{-1}$ існує, визначений на усьому просторі H. Оскільки $\left\|(I - A)^{-1} g\right\| = \left\|g + Ag + ... + A^m g + ...\right\| \le \|g\|(1 + \|A\| + ...) \le \frac{g}{1-\|A\|}$ для усіх $g \in H$, то оператор $(I - A)^{-1}$ є обмежений.

Зауваження В припущеннях леми 1 існує також обмежений оператор $\left(I - A^*\right)^{-1}$, оскільки $\|A\| = \|A^*\|$ При цьому $\left(I - A^*\right)^{-1} = \left[(I - A)^{-1}\right]^*$.

Представлення операторного рівняння з цілком неперервним оператором у скінчено вимірному вигляді

З теореми про представлення цілком неперервного оператора в сепарабільному гільбертовому просторі, операторне рівняння $\left(I - \lambda A\right) f = g$ можна представити у вигляді $\left(I - \lambda A_2\right) f - \lambda A_1 f = g$ (1.7),

де оператор A_1 - n - вимірний, а $|\lambda|\|A_2\| \le \varepsilon < 1$. Позначимо $\left(I - \lambda A_2\right) f = h$. За лемою 1 оператор $\left(I - \lambda A_2\right)$ має на H заданий обмежений оператор $\left(I - \lambda A_2\right)^{-1}$ при цьому $f = \left(I - \lambda A_2\right)^{-1} h$.

Таким чином операторне рівняння (1.7) перепишеться у вигляді $h - \lambda A_1 \left(I - \lambda A_2\right)^{-1} h = g$. (1.8).

Для спряженого рівняння $\left(I-\overline{\lambda}A^{*}\right)f^{*}=g^{*}$ (1.5′)

можна записати представлення $\left(I-\overline{\lambda}A_2^{*}\right)f^{*}-\overline{\lambda}A_1^{*}f^{*}=g^{*}$ (1.7′).

Застосуємо до останнього рівняння оператор $\left(I-\overline{\lambda}A_2^{*}\right)^{-1}$, отримаємо еквівалентне рівняння:

$$f^{*}-\overline{\lambda}\left[\left(I-\overline{\lambda}A_2^{*}\right)^{-1}\right]A_1^{*}f^{*}=z^{*},\quad z^{*}=\left[\left(I-\overline{\lambda}A_2^{*}\right)^{-1}\right]g^{*}. \quad (1.8′).$$

При цьому оператор $\left[\left(I-\overline{\lambda}A_2^{*}\right)^{-1}\right]A_1^{*}$ буде спряженим до оператора $A_1\left(I-\lambda A_2\right)^{-1}$. Враховуючи скінчено вимірність оператора A_1 скінчено вимірним буде також оператор $A_1\left(I-\lambda A_2\right)^{-1}$, тобто його матричне представлення може бути записане через елементи базису $\{e_1,e_2.....e_n\}$ і при цьому $\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_{i,j}\right|^{2}=\left\|A_1\left(I-\lambda A_2\right)^{-1}\right\|^{2}$.

Рівняння (1.8) можна представити у вигляді $\sum_j h_j e_j-\lambda\sum_j\sum_i h_i a_{i,j}e_j=\sum_j g_j e_j$, яке еквівалентне алгебраїчній системі рівнянь для коефіцієнтів Фур’є $h_1,h_{2,....,}h_m,...$елементу h: $h_j-\lambda\sum_{i=1}^{\infty}a_{i,j}h_i=g_j,\ j\le n;\ h_j=g_j,\ j>n$. Оскільки $j>n,\ h_j=g_j$ тобто відомі, то остання система зводиться до системи алгебраїчних рівнянь $h_j-\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}h_i=g_j+\lambda\sum_{i=n+1}^{\infty}a_{i,j}g_i,\ j\le n;$ (1.9).

Аналогічним чином спряжене рівняння (1.8′) можна замінити системою лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів Фур’є $f_j^{*},\ j=1,2...$ елемента f^{*} через коефіцієнти Фур’є $z_j^{*},\ j=1,2,..$ елемента $z^{*}=(I-\overline{\lambda}A_2^{*})^{-1}g^{*}$. При цьому для $f_j^{*},\ j\le n$ отримаємо лінійну алгебраїчну систему

$$f_j^{*}-\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{j,i}f_j^{*}=z_j^{*},\ j=1,2,...n \quad (1.9′).$$

При цьому $f_j^* = z_j^* + \overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\overline{a}_{j,i} f_j^*,\ j > n$ (1.10).

Теореми Фредгольма для операторного рівняння

Розглянемо операторні рівняння другого роду з лінійним цілком неперервним оператором $\boldsymbol{A}$, який діє з гільбертового простору $\boldsymbol{H}$ у гільбертів простір $\boldsymbol{H}$.

$$f - \lambda \boldsymbol{A} f = g \qquad (1.11),$$

спряжене рівняння

$$f^* - \lambda \boldsymbol{A}^* f^* = g^* \qquad (1.12)$$

та однорідні рівняння :

$$f - \lambda \boldsymbol{A} f = 0 \qquad (1.11'),$$

$$f^* - \lambda \boldsymbol{A}^* f^* = 0 \qquad (1.12'),$$

λ - комплексно значний параметр.

Для вказаних рівнянь має місце **теореми Фредгольма**, які узагальнюють відомі нам теореми Фредгольма для інтегральних рівняння Фредгольма другого роду (інтегральний оператор з неперервним та полярним ядром є цілком неперервним).

Теорема 1 (*перша теорема Фредгольма для операторного рівняння*) Якщо однорідне рівняння (1.11′) має при даному значені параметру λ лише тривіальний розв'язок, то спряжене рівняння (1.12′) теж має лише тривіальний розв'язок, а неоднорідне рівняння (1.11) і спряжене до нього неоднорідне рівняння (1.10) мають єдині розв'язки для будь – яких $g, g^* \in H$.

Теорема 2 (*друга теорема Фредгольма для операторного рівняння*) Однорідне рівняння (1.11′) може мати нетривіальний розв'язок лише для зліченої множини значень параметру $\lambda = \lambda_k,\ k = 1,2,...,$ кожне з яких має скінчену кратність. Спряжене рівняння (1.12′) має нетривіальний розв'язок тоді і лише тоді, коли параметр $\lambda = \overline{\lambda}_k,\ k = 1,2,...$, при цьому кратність λ_k і $\overline{\lambda_k}$ співпадає.

Теорема 3 *(третя теорема Фредгольма для операторного рівняння)* Рівняння (1.11) при $\lambda = \lambda_k$, кратності $\boldsymbol{r_k}$ має розв'язок тоді і лише тоді, коли вільний член g, ортогональний до усіх розв'язків спряженого однорідного рівняння $f^*_{k+j,\ j=0..r_k-1}$, тобто $(g, f^{*}_{k+j})_H = 0,\ j = 0..r_k - 1$. Тоді розв'язок неєдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій характеристичного числа λ_k, тобто $f = f_0 + \sum_{j=0}^{r_{k-}-1} c_j f_{k+j}$, де f_0 - частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1.11).

Доведення. *Перша теорема Фредгольма*. Розглянемо системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.9) та (1.9'), матриці цих систем є ермітово спряженими, таким чином модулі визначників цих матриць співпадають. Якщо для одна з цих систем має розв'язок при довільному вільному члені (тобто визначник відмінний від нуля) то і спряжене рівняння має розв'язок для довільного вільного члена. Зокрема розв'язки однорідного рівняння і спряженого рівняння тільки тривіальні. Якщо одне з однорідних рівнянь має лише тривіальний розв'язок (тобто відповідний визначник не дорівнює нулю) то спряжене однорідне рівняння має лише тривіальний розв'язок, при цьому неоднорідні системи (1.9) та (1.9') мають єдині розв'язки для довільних вільних членів. Ту саму властивість мають рівняння (1.7) та (1.7'). Дійсно, нехай рівняння (1.7) або (1.7') має розв'язок для довільного вільного члена $g \in H$ або ($g^{*} \in H$). Або теж саме рівняння (1.8) та (1.8') має розв'язок для довільного вільного члена $g \in H$ або ($z^{*} \in H$), зокрема і для $g \in H$ або ($z^{*} \in H$), які натягнуті на елементи базису $e_1, e_{2,\ldots\ldots,} e_n$. Таким чином система алгебраїчних рівнянь (1.9) або (1.9') мають розв'язки для довільного вільного члена, тому визначник цих систем відмінний від нуля, а значить відповідні однорідні системи рівнянь мають лише тривіальні розв'язки.

Зворотно, нехай одне з однорідних рівнянь (1.11') або (1.12') має лише тривіальний розв'язок, тоді відповідна однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь для (1.9), (1.9') мають лише тривіальні розв'язки. Визначники обох систем відмінні від нуля, тобто неоднорідні системи (1.9), (1.9') мають єдині розв'язки для довільних вільних членів, а тоді єдині розв'язки мають рівняння (1.11), (1.12) для довільних вільних членів з H .

Друга теорема Фредгольма Для довільного значення параметра λ $rang(\mathbf{E}-\lambda\mathbf{A}) = rang(\mathbf{E}-\overline{\lambda}\mathbf{A}^*) = q \le n$, де $\mathbf{A} = a_{i,j}$, $\mathbf{A}^* = \overline{a}_{j.i}, i = 1..n, j = 1..n$. Таким чином однорідні для (1.9) та (1.9’) системи рівнянь мають однакову кількість лінійно незалежних розв’язків, що рівна $n-q$. Для випадку, коли $q<n$ число λ будемо визначати як характеристичне число, число $r = n-q$ є кратність характеристичного числа λ, а відповідні розв’язки (n-вимірні вектори) $\mathbf{f}^{(1)},\mathbf{f}^{(2)},...\mathbf{f}^{(r)}$ як власні вектори числа λ. При цьому спряжене однорідне рівняння для (1.9’) має характеристичне число $\overline{\lambda}$ і власні вектори $\mathbf{f}^{*(1)},\mathbf{f}^{*(2)},...\mathbf{f}^{*(r)}$

Третя теорема Фредгольма Для випадку, коли параметр λ є характеристичним числом, то для існування розв’язку неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.9) згідно теореми Кронекера - Капеллі необхідно і достатньо щоб вільний член системи (1.9) був ортогональним до усіх розв’язків спряженого однорідного рівняння. Тобто

$$0 = \sum_{j=1}^{n}\left(g_j + \lambda\sum_{i=n+1}^{\infty} a_{i,j}g_i\right)\mathbf{f}_j^{*(s)} = \sum_{j=1}^{n} g_j\overline{\mathbf{f}}_j^{*(s)} + \sum_{j=n+1}^{\infty} g_j\overline{\mathbf{f}}_j^{*(s)} = (g,\mathbf{f}^*) \qquad (1.13)$$

Розв’язок рівняння (1.11) очевидно може бути записаний у вигляді $f^{(0)} + \sum_{s=1}^{r} c_s f^{(s)}$, де $f^{(0)}$ - довільний розв’язок неоднорідного рівняння, c_s, $s = 1..r$ - довільні константи.

Простір $W_2^k(\Omega)$ та його властивості

[8, стор.120 - 145]

Нехай Ω - обмежена область з границею S, яка задовольняє умові Ліпшица. Нехай $C^\infty(\overline{\Omega})$ - лінійна множина функцій неперервних з усіма їх похідними в області $\overline{\Omega}$. Позначимо через $C_0^\infty(\Omega)$ лінійну множину усіх функцій з $C^\infty(\overline{\Omega})$, які мають компактний носій в області Ω, тобто усі функції з множини

$\boldsymbol{C_0^\infty(\Omega)}$ тотожно перетворюються в нуль в околі границі $\boldsymbol{S}$ разом з усіма своїми похідними.

Для функцій з класу $\boldsymbol{C_0^\infty(\Omega)}$ та $\boldsymbol{C^\infty(\overline{\Omega})}$ можна ввести скалярний добуток $(u,v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u(x)\overline{v}(x)dx$, який породжує норму $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int\limits_\Omega u(x)\overline{u}(x)dx$.

Для функцій з $\boldsymbol{C_0^\infty(\Omega)}$ та $\boldsymbol{C^\infty(\overline{\Omega})}$ можна ввести скалярний добуток і в іншій спосіб. Нехай $\boldsymbol{k}$ ціле невід'ємне число. Тоді

$$(u,v)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|i|\le k}\int\limits_\Omega D^iuD^ivdx, \quad u,v\in C^\infty(\Omega) \qquad (1.14),$$

де $$D^iu = \frac{\partial^{i_1i_2.....i_n}u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}.....\partial x_n^{i_n}} \qquad (1.15).$$

Скалярний добуток (1.14) породжує норму

$$\|(u)\|_{W_2^k(\Omega)}^2 = (u,u)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|i|\le k}\int\limits_\Omega D^iuD^iudx, \quad u,v\in C^\infty(\Omega) \qquad (1.14').$$

(1.14′) відповідає усім аксіомам норми і таким чином простір $C^\infty(\overline{\Omega})$ з введеною нормою $\|(u)\|_{W_2^k(\Omega)}$стає нормованим простором, який ми будемо позначати $S_2^k(\Omega)$. Збіжність у цьому просторі означає, що, якщо $\|u_n - u\|_{W_2^k(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\|D^iu_n - D^iu\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ \forall|i|\le k$, тобто в просторі $\boldsymbol{S_2^k(\Omega)}$ по нормі $\boldsymbol{L_2(\Omega)}$збігається послідовність функцій та послідовність усіх частинних похідних до $\boldsymbol{k}$ - го порядку включно.

Особливістю нормованого простору $\boldsymbol{S_2^k(\Omega)}$ є його неповнота, тобто не будь – яка фундаментальна по нормі простору $\boldsymbol{S_2^k(\Omega)}$ послідовність буде мати границю, що належить цьому простору.

Важливим для подальшого буде наступна властивість похідних функцій з класу $\boldsymbol{S_2^k(\Omega)}$:

$$\int\limits_\Omega D^iu(x)\psi(x)dx = (-1)^{|i|}\int\limits_\Omega u(x)D^i\psi(x)dx,\ \forall u\in S_2^k(\Omega), \psi\in C_0^\infty(\Omega) \qquad (1.16).$$

Для побудови повного простору з нормою $\boldsymbol{W}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$ будемо використовувати стандартну процедуру поповнення.

У випадку $\boldsymbol{k}=0$ повним простором, який містить в собі $\boldsymbol{S}_2^0(\boldsymbol{\Omega})$ та щільну лінійну множину $\boldsymbol{C}^\infty(\overline{\boldsymbol{\Omega}})$ є простір $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$.

Для випадку $\boldsymbol{k}>0$ скалярний добуток введений в $S_2^k(\Omega)$ не може бути розширений на усі елементи простору $L_2(\Omega)$, оскільки не усі елементи цього простору мають похідні в якому не будь розумному сенсі.

Розглянемо послідовність $\{u_n\}$ фундаментальну в $\boldsymbol{S}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$. Тобто $\|u_n-u_m\|_{W_2^k(\Omega)}\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0$, або $\|D^iu_n-D^iu_m\|_{L_2(\Omega)}\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0,\ |i|\le k$. Можливі два випадки:

а) Послідовність $\{\boldsymbol{u}_n\}$ збігається до деякого елементу $\boldsymbol{u}$ в $S_2^k(\Omega)$, тобто $\|u_n-u\|_{W_2^k(\Omega)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ і елемент $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{S}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$, тобто $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^\infty(\boldsymbol{\Omega})$. При цьому послідовність $\{\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{u}_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{u}$ по нормі $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$ для $|\boldsymbol{i}|\le\boldsymbol{k}$.

б) Послідовність $\{\boldsymbol{u}_n\}$ збігається до деякого елементу $\boldsymbol{u}$ по нормі $\boldsymbol{S}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$, але елемент $u\notin S_2^k(\Omega)$, тобто $\boldsymbol{u}\notin\boldsymbol{C}^\infty(\boldsymbol{\Omega})$. В цьому випадку $\boldsymbol{u}$ граничний елемент фундаментальної послідовності будемо додавати до простору $\boldsymbol{S}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$.

Якщо до простору $\boldsymbol{S}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$ додати границі усіх фундаментальних по нормі $\boldsymbol{S}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$ послідовностей, то ми отримаємо повний нормований простір який позначатиме $W_2^k(\Omega)$.

Покажемо, що будь – який елемент $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{W}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$ має похідні до $\boldsymbol{k}$ порядку включно Дійсно, якщо $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{C}^\infty(\boldsymbol{\Omega})$, то ця функція має похідні будь – якого порядку в класичному розумінні. Якщо $\boldsymbol{u}$ є границею деякої фундаментальної послідовності, тобто $\boldsymbol{u}=\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{u}_n$ то послідовність $\{\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{u}_n\}$, як вже відмічалося, фундаментальна по нормі $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$, оскільки простір $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$ є повним, то послідовність $\{\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{u}_n\}$ збігається по нормі $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$ до деякого елементу $\boldsymbol{v}^{(i)}\in\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$.

Саме функцію $\boldsymbol{v}^{(i)}$ і можна вважати узагальненою похідною функції $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$. Тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{D}^i \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}^{(i)}$ в $\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{\Omega})$.

Покажемо, що функція $\boldsymbol{v}^{(i)}$ задовольняє інтегральній тотожності, дійсно $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} D^i u_n \phi dx = (-1)^{|i|} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} u_n D^i \phi dx$, перейдемо до границі в лівій і правій частині рівності $\int\limits_{\Omega} v^{(i)} \phi dx = (-1)^{|i|} \int\limits_{\Omega} u D^i \phi dx$ (1.17).

Остання рівність і показує, що $\boldsymbol{v}^{(i)}$ можна вважати похідною $\boldsymbol{D}^i \boldsymbol{u}$. Можна показати що така похідна єдина.

Аналогічно простору $\boldsymbol{W}_2^k(\boldsymbol{\Omega})$ можна побудувати простір $\overset{0}{\boldsymbol{W}}{}_2^{k}(\boldsymbol{\Omega})$, який будується за допомогою процедури поповнення простора $\boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{\Omega})$.