

## Лекція 7

### *Глава 2 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів*

#### *§ 1. Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини*

[6, стор. 8 - 11]

Для запису математичної моделі введемо величини:

$x = (x_1, x_2, x_3) \in G \subset E^3$  - об'єм тіла,  $t$  - час;

$u(x, t)$  - температура в точці  $x$  у момент часу  $t$ ;

$c(x)$  - теплоємність (кількість тепла, яка необхідна, для підняти температуру одиниці маси тіла на один градус);

$k(x)$  - теплопровідність речовини (здатність проводити тепло);

$\rho(x)$  - щільність речовини;

$f(x, t)$  - інтенсивність джерел теплової енергії в точці  $x$  в момент часу  $t$

#### **Закон збереження теплової енергії**

Складемо баланс теплової енергії для довільного об'єму тіла  $G$  за довільний інтервал часу  $t_1 < t < t_2$ . Для цього обчислимо кількість тепла, яка міститься в нескінченно малому об'ємі  $dG$ :

$$\rho(x) dG \cdot c(x) \cdot u(x, t) \quad (1.1)$$

$$\text{та в об'ємі } G \text{ в момент часу } t \quad Q_1(t) = \iiint_G c(x) \rho(x) u(x, t) dG \quad (1.2).$$

Припустимо, що з часом температура змінилася від значення  $u(x, t_1)$  до значення  $u(x, t_2)$ . Обчислимо кількість тепла, витрачену на зміну температури:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \iiint_G c(x) \rho(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dG \quad (1.3).$$

Температура в об'ємі  $G$  може змінюватись за рахунок таких факторів:

1) нерівномірності нагрівання тіла, викликає потік тепла через поверхню  $S$ , яка обмежує уявне тіло об'єму  $G$ ;

2) зміна кількості тепла за рахунок внутрішніх теплових джерел.

Нехай  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні  $S$ . Обчислимо кількість тепла, яка поступає всередину об'єму  $G$  через елементарну поверхню  $dS$  в одиницю часу:

$$dQ(x,t) = k(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} dS \quad (1.4).$$

Формула (1.4) є математичним виразом фізичного закону Фур'є.

Кількість тепла, яка проходить через всю поверхню  $S$  за час від  $t_1$  до  $t_2$

$$\text{обчислюється за формулою } Q_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S k(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} dS dt \quad (1.5).$$

Кількість тепла за рахунок теплових джерел в об'ємі  $G$  можна обчислити у

$$\text{вигляді: } Q_3(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x,t) dG dt \quad (1.6).$$

Таким чином можна записати закон збереження теплової енергії:

$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2) + Q_3(t_1, t_2)$ , або після підстановки усіх величин маємо інтегральний закон збереження теплової енергії:

$$\iiint_G c(x) \rho(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dG = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S k(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x,t) dG dt \quad (1.7).$$

Для перетворення першого інтегралу лівої частини (1.7) застосуємо формулу

Остроградського Гауса,  $\iint_S \langle A, \mathbf{n} \rangle ds = \iiint_G \text{div } \vec{A} dG$ , де  $\vec{A}$  векторне поле. В результаті

отримаємо:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_G c(x) \rho(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dG dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \text{div}(k \text{ grad } u) dG dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x,t) dG dt \quad (1.8),$$

$$\text{де } \text{div}(A) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}.$$

Враховуючи, що рівність (1.8) отримана для довільного об'єму  $G$  та

довільних моментів часу  $t_1, t_2$ , можна зробити висновок, що рівність (1.8) має місце тоді і лише тоді, коли має місце рівність підінтегральних виразів:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \text{div}(k(x,t)\text{grad}u(x,t)) + f(x,t), \quad x \in G, t > 0 \quad (1.9).$$

Рівняння (1.9) повинно виконуватись для кожної точки  $x$  реального фізичного об'єму тіла (збережемо для нього позначення  $G$ , а для його поверхні позначення  $S$ ), та для кожного моменту часу  $t > 0$ .

Для виділення єдиного розв'язку рівняння (1.9) окрім диференціального рівняння (1.9) необхідно задавати додаткові умови на границі просторово – часової області. Будемо використовувати фізичні міркування для задавання таких умов.

а) Якщо на границі області відома температура тіла, тоді на границі тіла задають умову:  $u(x,t)|_{x \in S} = v(x,t)$  (1.10).

Умову (1.10) називають граничною умовою першого роду, або умовою Діріхле.

б) Якщо на границі області відомий тепловий потік в одиницю часу, який поступає всередину тіла через одиничну площадку, тоді на границі задають

$$\text{граничну умову: } k(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x \in S} = q(x,t) \quad (1.11).$$

Умову (1.11) називають граничною умовою другого роду, або умовою Неймана.

в) Якщо на границі тіла відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем відомої температури згідно до закону Ньютона, тоді на границі

$$\text{задають граничну умову: } k\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{x \in S} = \alpha(x,t)(v(x,t) - u(x,t))|_{x \in S} \quad (1.12).$$

Умову (1.12) називають граничною умовою третього роду або умовою Ньютона.  $\alpha(x,t) > 0$  - коефіцієнт теплообміну,  $v(x,t)$  - температура оточуючого середовища.

г) В початковий момент часу задають температура усіх внутрішніх точок тіла.

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x) \quad (1.13),$$

Умову (1.13) називають початковою умовою, а  $u_0(x)$  - початковою температурою тіла.

### Частинні випадки рівняння теплопровідності

У випадку, коли коефіцієнт теплопровідності та інтенсивність теплових джерел залежить не лише від точки простору і часу, а і від самої температури  $k(u, x, t)$ ,  $f(u, x, t)$ , лінійне рівняння (1.9) стає квазілінійним, тобто лінійним відносно старших похідних.

Окрім загального вигляду рівняння теплопровідності, у практичних випадках часто використовуються частинні випадки рівняння.

Зокрема, можна розглядати розповсюдження тепла в одновимірних та двовимірних тілах:

$$\text{(пластина)} \quad \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \quad (1.14),$$

$$\text{(стрижень)} \quad \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.15).$$

Для однорідних тіл усі коефіцієнти рівняння можна вважати константами, зокрема  $c = c_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $k = k_0$ . В результаті рівняння (1.9) буде мати вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{1}{c_0 \rho_0} f(x, t) \quad (1.16),$$

$$\text{де } a^2 = \frac{k_0}{c_0 \rho_0}, \quad \Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \text{оператор Лапласа.}$$

Зокрема одновимірне рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{c_0 \rho_0} f(x, t) \quad (1.17).$$

### Рівняння дифузії речовини

Процес дифузії речовини це процес вирівнювання концентрації речовини у

розчинах, розплавах або в сумішах. Фізика вирівнювання температури в тілах та концентрації у розчинах чи розплавах має багато схожих рис і з цього приводу навіть процес розповсюдження тепла називають дифузією тепла.

Для отримання моделі дифузії речовини використаємо наступну таблицю аналогії.

Дифузія	Теплопровідність	Пояснення
$u(x, t)$	$u(x, t)$	Концентрація речовини в розчині, або у розплаві
$c(x)$	$c(x)\rho(x)$	Коефіцієнт пористості, відображає відношення об'єму пор до загального об'єму тіла і вказує на кількість речовини необхідну для зміни концентрації на одну одиницю в одиниці об'єму.
$D \frac{\partial u}{\partial n} dS$	$k \frac{\partial u}{\partial n} dS$	Закон Нерста, описує кількість речовини, яка поступає всередину тіла через його поверхню в одиницю часу за рахунок нерівномірності концентрації.
$f(x, t)$	$f(x, t)$	Інтенсивність джерела речовини в середині об'єму.
$D \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(v - u) _S$	$k \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(v - u) _S$	Кількість речовини, яка поступає через поверхню $S$ тіла за законом, аналогічним закону Ньютона,  $v$ – відома концентрація речовини в тому чи іншому середовищі;  $\alpha$ -коефіцієнт проникності поверхні.

Побудови математичної моделі процесу дифузії відбувається за аналогією згідно до попередньої таблиці.

Кількість речовини, яка витрачена для зміни концентрації від  $u(x, t_1) \rightarrow u(x, t_2)$ ,  $t_1 < t_2$  має вигляд:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \iiint_G c(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dG \quad (1.3').$$

Кількість речовини, яка проходить через всю поверхню  $S$  за час від  $t_1 \rightarrow t_2$ :

$$Q_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S D(x, t) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt \quad (1.5').$$

Кількість речовини, яка поступає за рахунок джерел речовини в об'ємі  $G$  за

час від  $t_1$  до  $t_2$ : 
$$Q_3(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt \quad (1.6').$$

Отже, закон збереження маси має вигляд:  $\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2) + Q_3(t_1, t_2)$ .

Інтегральний закон збереження маси:

$$\iiint_G c(x) [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dG = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S D(x, t) \frac{\partial u}{\partial n} dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt \quad (1.7').$$

Після застосування формули Остроградського – Гауса та прирівнювання підінтегральних виразів отримаємо рівняння дифузії речовини у вигляді:

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D(x, t) \operatorname{grad} u) + f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0 \quad (1.17).$$

Додаткові умови на границі області задають аналогічно умовам для рівняння теплопровідності  $u|_S = v(x, t)$  (1.18),

відома концентрація речовини на поверхні.

$$D \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = g(x, t) \quad (1.19),$$

на границі відомий потік речовини.

$$D \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(v - u) \Big|_S \quad (1.20),$$

на границі відбувається обмін речовиною з оточуючим середовищем через

напівпроникливу мембрану за законом аналогічним закону Ньютона.

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (1.21),$$

в початковий момент часу відома концентрація речовини.

У випадку, коли коефіцієнти рівняння та граничних умов не залежать від часу  $t$ , розв'язок рівняння не залежить від часу в результаті отримаємо стаціонарне рівняння теплопровідності та дифузії:

$$\text{div}(k(x)\text{gradu}) = -f(x) \quad (1.22)$$

$$\text{div}(D(x)\text{gradu}) = -f(x) \quad (1.22')$$

## Задача Стефана

**(задача про остигання та затвердіння розплавленого металу)**

Вертикальний циліндричний посуд заповнений розплавленим металом, який знаходиться при заданій температурі  $U_0 > U_{\text{пл}}$ . Починаючи з моменту часу  $t_0$  вільна поверхня розплавленого металу підтримується при постійній температурі  $U_1 < U_{\text{пл}}$ . Поставимо задачу про остидження та затвердіння металу, якщо дно і бокова поверхня посуду теплоізовані. Термічними деформаціями об'єму процес розповсюдження тепла відбувається лише



Введемо позначення:

$\rho_p, \rho_m$  - щільність твердої та рідкої фази металу;

$c_p, c_m$  - теплоємність твердої та рідкої фази металу;

$k_p, k_m$  - теплопровідність твердої та рідкої фази металу;

$\xi(t)$  - положення границі розділу твердої та рідкої фаз;

$L$  - висота циліндру,  $S$  - площа основи циліндру;

$\lambda$  - питома теплота плавлення;

$u(x, t)$  - температура в момент часу  $t$  в точці  $x$ .

Отримаємо рівняння теплового балансу для нескінченно малого об'єму розплавленого металу, який знаходиться між перерізами  $x$  та  $x + \Delta x$  за проміжок часу від  $t$  до  $t + \Delta t$ .

Обчислимо кількість тепла, яка необхідна для зміни температури у виділеному елементарному об'ємі від значення  $u(x, t)$  до значення  $u(x, t + \Delta t)$ . Кількість тепла, що міститься в виділеному об'ємі в момент часу  $t$  можна обчислити за формулою  $dQ(t) = c_p \rho_p S \Delta x u(x, t)$ . Аналогічно для моменту часу  $t + \Delta t$  кількість тепла дорівнює  $dQ(t + \Delta t) = c_p \rho_p S \Delta x u(x, t + \Delta t)$ . При цьому нехтуємо, зміною температури по просторовій змінній у середині елементарного об'єму. Тоді кількість тепла, необхідна для зміни температури всередині об'єму дорівнює:  $\Delta Q(t, t + \Delta t) = c_p \rho_p S \Delta x (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))$ .

Ця зміна може відбуватися за рахунок теплових потоків, через перерізи  $x$  та  $x + \Delta x$ . Підрахуємо кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз  $x + \Delta x$  за час  $\Delta t$

$$dQ(x + \Delta x) = k_p \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial n} S \Delta t = k_p \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} S \Delta t$$

Напрямок нормалі в цьому перерізі співпадає з напрямком вісі  $x$ .

Кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз  $x$  за час  $\Delta t$  можна записати у вигляді:

$$dQ(x) = k_p \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} S \Delta t = -k_p \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S \Delta t$$

Таким чином можна скласти рівняння теплового балансу:

$$\Delta Q(t, t + \Delta t) = dQ(x + \Delta x) + dQ(x)$$

Або після підстановки відповідних значень поділених на  $\Delta x \Delta t$  отримаємо:

$$\frac{c_p \rho_p S \Delta x (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))}{\Delta x \Delta t} = k_p \left( \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \frac{S \Delta t}{\Delta x \Delta t}$$

Після граничного переходу коли  $\Delta x$  та  $\Delta t$  прямують до нуля, отримаємо



диференціальне рівняння:

$$c_p \rho_p \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k_p \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad \xi(t) < x < L, \quad t > t_0 \quad (1.23).$$

Аналогічні міркування дозволяють отримати рівняння для твердої фази:

$$c_m \rho_m \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k_m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), \quad t > t_0 \quad (1.24).$$

Отримаємо співвідношення на границі розділу фаз.

В першу чергу відмітимо, що температура при переході через границю розділу фаз повинна змінюватись неперервно і співпадати з температурою плавлення металу, тобто повинно виконуватись співвідношення :

$$u(\xi(t) - 0, t) = u(\xi(t) + 0, t) = U_{nl}. \quad (1.25).$$

Отримаємо рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами  $\xi(t) - \Delta x$  та  $\xi(t) + \Delta x$

За час  $\Delta t$  затвердіє об'єм металу рівний  $(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))S$ . При цьому буде виділено кількість тепла рівна  $dQ_m = (\xi(t + \Delta t) - \xi(t))S\lambda\rho_m$ .

Кількість тепла, яка надійде всередину об'єму за рахунок теплових потоків через відповідні перерізи за час  $\Delta t$  може бути записана у вигляді:

$$\Delta t S \left( k_p \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x)}{\partial x} - k_m \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x)}{\partial x} \right)$$

Оскільки фазовий перехід відбувається при постійній температурі, то в околі границі розділу фаз  $\xi(t)$  зміною температури по змінній  $t$  можна нехтувати, в зв'язку з чим можна не враховувати кількість тепла, яка витрачається на зміну температури у виділеному елементарному об'ємі.

Рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами  $\xi(t) - \Delta x$  та  $\xi(t) + \Delta x$  можна записати у вигляді:

$$(\xi(t + \Delta t) - \xi(t))S\lambda\rho_m = \Delta t S \left( k_p \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x)}{\partial x} - k_m \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x)}{\partial x} \right) \quad (1.26).$$

Поділивши обидві частини на  $\Delta t$ , скоротивши на  $S$  і спрямувавши  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  до

нуля отримаємо співвідношення:

$$\lambda \rho_m \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = \left( k_p \frac{\partial u(\xi(t) + 0)}{\partial x} - k_m \frac{\partial u(\xi(t) - 0)}{\partial x} \right) \quad t > t_0 \quad (1.27).$$

Умови (1.25), (1.27) називають внутрішніми граничними умовами, або умовами спряження.

Запишемо початкові умови та умови на верхній та нижній основі циліндру:

В початковий момент часу задана температура розплавленого металу:

$$u(x, t_0) = U_0, \quad 0 < x < L \quad (1.28).$$

На верхній основі задана температура:

$$u(0, t) = U_1, \quad t > t_0 \quad (1.29).$$

Нижня основа теплоізольована, тобто тепловий потік, який поступає всередину тіла дорівнює нулю:

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad t > t_0 \quad (1.30).$$

В початковий момент часу положення границі фазового переходу співпадає з верхньою основою циліндру:

$$\xi(0) = 0 \quad (1.31).$$

Таким чином до моменту часу, коли весь метал затвердіє постановка задачі Стефана включає в себе рівняння (1.23) та (1.24), умови спряження (1.25) та (1.27), початкові умови (1.28) та (1.31) та граничні умови (1.29) та (1.30).

Після повного затвердіння металу, тобто коли  $\xi(t_1) = L$ , процес буде описуватись рівнянням (2) для  $t > t_1$  з граничними умовами (1.29), (1.30) та початковою температурою  $u(x, t_1)$ .