Зміст

4.3.5 Функція Гріна граничних задач оператора теплопровідності

Будемо розглядати граничні задачі для рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -F(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \\ \ell_i u(x,t)|_{x\in S} = f(x,t), \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.56}$$

для $x \in \Omega$, $t > 0$.

Тут

$$\ell_1 u(x,t)|_{x\in S} = u(x,t)|_{x\in S}\,, \tag{4.3.57}$$

$$\ell_2 u(x,t)|_{x\in S} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x\in S}, \tag{4.3.58}$$

$$\ell_3 u(x,t)|_{x\in S} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + \alpha(x,t)\cdot u(x,t)\right|_{x\in S} \tag{4.3.59}$$

— оператори граничних умов першого, другого, або третього роду.

Визначення 4.3.22 (функції Гріна граничної задачі теплопровідності)**.** Функцію $E_i(x,\xi,t-\tau)$ будемо називати *функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності* в області Ω з границею S для $t > 0$, якщо вона є розв'язком настуної граничної задачі:

$$\begin{cases} a^2\Delta_x E_i(x,\xi,t-\tau) - \dfrac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t} = -\delta(x-\xi,t-\tau), \\ E_i(x,\xi,t-\tau)|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \ell_i E_i(x,\xi,t-\tau)|_{x\in S} = 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.60}$$

для $x \in \Omega$, $t > 0$

Еквівалетнне визначення можна надати у вигляді

Визначення 4.3.23 (функції Гріна граничної задачі теплопровідності)**.** Функцію $E_i(x, \xi, t-\tau)$ будемо називати *функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності* в області Ω з границею S для $t > 0$, якщо вона може бути представлена у вигляді

$$E_i(x, \xi, t-\tau) = \varepsilon(x-\xi, t-\tau) + \omega_i(x, \xi, t-\tau), \tag{4.3.61}$$

де перший доданок є фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності, а другий є розв'язком наступної граничної задачі

$$\begin{cases} a^2 \Delta_x \omega_i(x, \xi, t-\tau) - \dfrac{\partial \omega_i(x, \xi, t-\tau)}{\partial t} = -\delta(x-\xi, t-\tau), \\ \omega_i(x, \xi, t-\tau)|_{t-\tau \le 0} = 0, \\ \ell_i \omega_i(x, \xi, t-\tau)|_{x \in S} = -\,\ell_i \varepsilon_i(x-\xi, t-\tau)|_{x \in S} \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.3.62}$$

для $x \in \Omega$, $t > 0$.

Вивчимо

Властивості 4.3.24 (функції Гріна оператора теплопровідності)
Легко бачити, що

1. Функція Гріна граничних задач рівняння теплопровідності з аргументами $E_i(x, \xi, -t)$ задовольняє спряженому диференціальному рівнянню

$$a^2 \Delta_x E_i(x, \xi, -t) + \frac{\partial E_i(x, \xi, -t)}{\partial t} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \tag{4.3.63}$$

для усіх $x, \xi \in \Omega$, і $t > 0$.

2. Функція Гріна є також симетричною функцією своїх перших двох аргументів.

Доведення. Доведемо другу властивість. Запишемо співвідношення, яким задовольняє функція Гріна:

$$a^2 \Delta_x E_i(x, \xi, t-\tau_1) + \frac{\partial E_i(x, \xi, t-\tau_1)}{\partial t} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau_1), \quad x, \xi \in \Omega, \tag{4.3.64}$$

$$a^2 \Delta_x E_i(x, \eta, \tau_2 - t) + \frac{\partial E_i(x, \eta, \tau_2 - t)}{\partial t} = -\delta(x-\eta)\delta(t-\tau_2), \quad x, \eta \in \Omega. \tag{4.3.65}$$

Перше рівняння помножимо на $E_i(x, \xi, \tau_2 - t)$, друге рівняння помножимо на $E_i(x, \xi, t - \tau_1)$, віднімемо від першого друге і проінтегруємо по $x \in \Omega$ і по $-\infty < t < \tau$:

$$
\begin{gathered}
a^2 \iiint\limits_{\Omega} \int\limits_{-\infty}^{\tau} \Big(E_i(x, \eta, \tau_2 - t) \Delta_x E_i(x, \xi, t - \tau_1) - \\
- E_i(x, \xi, t - \tau_1) \Delta_x E_i(x, \eta, \tau_2 - t) \Big) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x - \\
- \iiint\limits_{\Omega} \int\limits_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(E_i(x, \xi, t - \tau_1) E_i(x, \eta, \tau_2 - t) \right) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \\
= -E_i(\xi, \eta, \tau_2 - \tau_1) + E_i(\eta, \xi, \tau_2 - \tau_1).
\end{gathered}
\tag{4.3.66}
$$

В результаті застосування другої формули Гріна до першого інтегралу в лівій частині рівності і обчислення другого інтегралу лівої частини, отримаємо:

$$
\begin{gathered}
E_i(\xi, \eta, \tau_2 - \tau_1) - E_i(\eta, \xi, \tau_2 - \tau_1) = \\
= - \iiint\limits_{\Omega} \Big(E_i(x, \xi, \tau - \tau_1) E_i(x, \eta, \tau_2 - \tau) - \\
- E_i(x, \xi, -\infty) E_i(x, \eta, -\infty) \Big) \, \mathrm{d}\Omega + \\
+ a^2 \iint\limits_{S} \int\limits_{-\infty}^{\tau} \left(\frac{\partial E_i(x, \xi, t - \tau_1)}{\partial n} E_i(x, \eta, \tau_2 - t) - \right. \\
\left. - E_i(x, \xi, t - \tau_1) \frac{\partial E_i(x, \eta, \tau_2 - t)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t.
\end{gathered}
\tag{4.3.67}
$$

Обираючи $\tau > \tau_2 > \tau_1$, отримаємо з урахування граничних і початкових умов для функції Гріна, що інтеграли в правій частині останньої рівності дорівнює нулю. $\square$

Для отримання інтегрального представлення розв'язків граничних задач, запишемо граничну задачу теплопровідності в змінних ξ, τ :

$$
\begin{cases}
a^2 \Delta u(\xi, \tau) - \dfrac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -F(\xi, \tau), \quad \xi \in \Omega, \quad \tau > 0, \\
u(\xi, 0) = u_0(\xi), \\
\ell_i u(\xi, \tau)\big|_{\xi \in S} = f(\xi, \tau), \quad i = 1, 2, 3.
\end{cases}
\tag{4.3.68}
$$

та рівняння для функції Гріна по змінних ξ, τ:

$$a^2\Delta_\xi E_i(x,\xi,t-\tau)+\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial\tau}=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \tag{4.3.69}$$

де $x,\xi\in\Omega$, $t>\tau>0$.

Перше рівняння помножимо на $E_i(x,\xi,t-\tau)$, а друге — на $u(\xi,\tau$, віднімемо від першого друге, і проінтегруємо по $0<\tau<t+\varepsilon$ та по $\xi\in\Omega$.

Отриаємо співвідношення:

$$\begin{aligned}a^2\int\limits_0^{t+\varepsilon}\iiint\limits_\Omega\Big(&E_i(x,\xi,t-\tau)\Delta u(\xi,\tau)-\\&-u(\xi,\tau)\Delta_\xi E_i(x,\xi,t-\tau)\Big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau+\\&+\int\limits_0^{t+\varepsilon}\iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau-\\&-\iiint\limits_\Omega\int\limits_0^{t+\varepsilon}\frac{\partial(E_u(x,\xi,t-\tau)u(\xi,\tau))}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi=\\=&\int\limits_0^{t+\varepsilon}\iiint\limits_\Omega\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{4.3.70}$$

Після застосування другої формули Гріна до першого інтегралу, обчислення третього інтегралу при $\varepsilon\to 0$ отримаємо наступну проміжну формулу:

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\int\limits_0^{t}\iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau+\\&+\iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\\&+a^2\int\limits_0^{t}\iint\limits_S\left(E_i(x,\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}-u(\xi,\tau)\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}\right)\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{4.3.71}$$

Враховуючи відповідні граничні умови, яким задовольняє розв'язок на границі поверхні S отримаємо для першої граничної задачі:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_\Omega E_1(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\
+ \iiint\limits_\Omega E_1(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \\
- a^2 \int\limits_0^t \iint\limits_S \left(\frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} f(\xi,\tau) \right) \mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.72}
$$

Для другої та третьої граничних задач отримаємо

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\
+ \iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\
+ a^2 \int\limits_0^t \iint\limits_S E_i(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.73}
$$

4.3.6 Функція Гріна граничних задач хвильового оператора