Зміст

1 Вступ

1.1 Предмет і методи математичної фізики

Сучасні технології дослідження реального світу доволі інтенсивно використовують методи математичного моделювання, зокрема ці методи широко використовуються тоді, коли дослідження реального (фізичного) об'єкту є неможливими, або надто дорогими. Вже традиційними стали моделювання властивостей таких фізичних об'єктів:

- температурні поля і теплові потоки;
- електричні, магнітні та електромагнітні поля;
- концентрація речовини в розчинах, розплавах або сумішах;
- напруження і деформації в пружних твердих тілах;
- параметри рідини або газу, який рухається (обтікає) деяке тіло;
- перенос різних субстанцій потоками рідин або газу та інші.

Характерною особливістю усіх математичних моделей, що описують перелічені та багато інших процесів є те, що параметри, які представляють інтерес для дослідника є функціями точки простору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ та часу t, а самі співвідношення з яких ці характеристики обчислюються є диференціальними рівняннями в частинних похідних зі спеціальними додатковими умовами (крайовими умовами), які дозволяють виділяти однозначний розв'язок.

Таким чином можна сказати, що основними об'єктами дослідження предмету математична фізика є крайові задачі для рівнянь в частинних похідних, які моделюють певні фізичні процеси.

Процес дослідження реального об'єкту фізичного світу можна представити за наступною схемою:

1. Побудова математичної моделі реального процесу у вигляді диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, доповнення диференціального рівняння в частинних похідних граничними умовами.

2. Дослідження властивостей сформульованої крайової задачі з точки зору її коректності. Коректність постановки задачі передбачає виконання наступних умов:

    - Розв'язок крайової задачі існує;
    - Розв'язок єдиний;
    - Розв'язок неперервним чином залежить від вхідних даних задачі.

3. Знаходження розв'язку крайової задачі:

    - точного для найбільш простих задач;
    - або наближеного для переважної більшості задач.

Треба відмітити, що усі перелічені пункти дослідження окрім побудови наближених методів знаходження розв'язків відносяться до предмету дисципліни Математична фізика.

Для дослідження задач математичної фізики використовуються математичний апарат наступних розділів математики:

- математичний аналіз;
- лінійна алгебра;
- диференціальні рівняння;
- теорія функцій комплексної змінної;
- функціональний аналіз;

При побудові математичних моделей використовуються знання з елементарної фізики.

Наведемо приклад доволі простої і в той же час цілком реальної математичної моделі розповсюдження тепла в стрижні.

Приклад 1.1.1 (моделі розповсюдження тепла в стрижні)
Нехай ми маємо однорідний стрижень з теплоізольованою боковою поверхнею і наступними фізичними параметрами:

- ρ — густина матеріалу;
- S — площа поперечного перерізу;
- k — коефіцієнт теплопровідності;
- c — коефіцієнт теплоємності;
- L — довжина стрижня.

Позначимо $u(x,t)$ — температуру стрижня в точці x в момент часу t, $u_0(x)$ — температуру стрижня у точці x в початковий момент часу $t = 0$.

Припустимо, що на лівому кінці стрижня температура змінюється за заданим законом $\varphi(t)$, а правий кінець стрижня теплоізольований.

В таких припущеннях математична модель може бути записана у вигляді наступної граничної задачі:

$$c\rho \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1.1.1}$$

$$u(0,u) = \varphi(t), \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0 \tag{1.1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(t) \tag{1.1.3}$$

Математична модель містить диференціальне рівняння (1.1.1), яке виконується для вказаних значень аргументу, граничні умови на кінцях стрижня (1.1.2) та початкову умови (1.1.3).

2 Інтегральні рівняння

2.0.1 Основні поняття

Визначення 2.0.1. *Інтегральні рівняння* — рівняння, що містять невідому функцію під знаком інтегралу.

Багато задач математичної фізики зводяться до лінійних інтегральних рівнянь вигляду:

Визначення 2.0.2 (інтегрального рівняння Фредгольма II роду)**.**

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x) \tag{2.0.1}$$

— *інтегральне рівняння Фредгольма II роду.*

Тут λ — комплексний параметр, $\lambda \in \mathbb{C}$ (відомий або невідомий).

Визначення 2.0.3 (інтегрального рівняння Фредгольма I роду)**.**

$$\int\limits_G K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = f(x) \tag{2.0.2}$$

— *інтегральне рівняння Фредгольма I роду.*

Визначення 2.0.4 (ядра інтегрального рівняння)**.** $K(x, y)$ — *ядро інтегрального рівняння*, $K(x, y) \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$.

Визначення 2.0.5 (вільного члена інтегрального рівняння)**.** $f(x)$ — *вільний член інтегрального рівняння*, $f(x) \in C\left(\overline{G}\right)$.

Визначення 2.0.6 (області інтегрування)**.** G — *область інтегрування*, $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{G}$ — замкнена та обмежена.

Визначення 2.0.7 (однорідного рівняння Фредгольма II роду)**.** Інтегральне рівняння (2.0.1) при $f(x) \equiv 0$ називається *однорідним інтегральним рівнянням Фредгольма II роду*:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.0.3}$$

Визначення 2.0.8 (інтегрального оператору)**.** $\mathbf{K}$ — *інтегральний оператор*: $(\mathbf{K}\varphi)(x)$.

Будемо записувати інтегральні рівняння (2.0.1), (2.0.2) та (2.0.3) скорочено в операторній формі:

$$\varphi = \lambda \mathbf{K}\varphi + f, \tag{2.0.4}$$

$$\mathbf{K}\varphi = f, \tag{2.0.5}$$

$$\varphi = \lambda \mathbf{K}\varphi. \tag{2.0.6}$$

Визначення 2.0.9 (спряженого (союзного рівняння)).

$$K^\star(x,y) = \overline{K}(y,x) \tag{2.0.7}$$

— *спряжене (союзне) ядро.*

Визначення 2.0.10 (спряженого (союзного) рівняння). Інтегральне рівняння

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int\limits_G K^\star(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x) \tag{2.0.8}$$

називається *спряженим (союзним)* до інтегрального рівняння (2.0.1).

Операторна форма рівнянь (2.0.7) та (2.0.8):

$$\psi = \overline{\lambda}\mathbf{K}^\star\psi + g, \tag{2.0.9}$$

$$\psi = \overline{\lambda}\mathbf{K}^\star\psi. \tag{2.0.10}$$

Визначення 2.0.11 (характеристичних чисел ядра). Комплексні значення λ, при яких однорідне інтегральне рівняння Фредгольма (2.0.3) має нетривіальні розв'язки, називаються *характеристичними числами ядра* $K(x,y)$.

Визначення 2.0.12 (власних функцій ядра). Розв'язки, які відповідають власним числам, називаються *власними функціями* ядра.

Визначення 2.0.13 (кратності характеристичного числа). Кількість лінійно-незалежних власних функцій називається *кратністю характеристичного числа.*

2.1 Метод послідовних наближень

2.1.1 Метод послідовних наближень для неперервного ядра

Нагадаємо кілька визначень:

Визначення 2.1.1 (норми у $C\left(\overline{G}\right)$)**.** *Нормою* у банаховому просторі неперервних функцій $C\left(\overline{G}\right)$ називається

$$\|f\|_{C(\overline{G})} = \max_{x\in\overline{G}} |f(x)|. \tag{2.1.1}$$

Визначення 2.1.2 (норми у $L_2(G)$)**.** *Нормою* у гільбертовому просторі інтегровних з квадратом функцій $L_2(G)$ називається

$$\|f\|_{L_2(G)} = \left(\int\limits_G |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{2.1.2}$$

Визначення 2.1.3 (скалярного добутку у $L_2(G)$)**.** *Скалярноим добутком* у просторі $L_2(G)$ наизвається

$$(f,g)_{L_2(G)} = \int\limits_G f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1.3}$$

Лема 2.1.4

Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з неперервним ядром $K(x,y)$ петворює множини функцій $C\left(\overline{G}\right) \xrightarrow{\mathbf{K}} C\left(\overline{G}\right)$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} L_2(G)$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} C\left(\overline{G}\right)$ обмежений та мають місце нерівності:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \le MV\|\varphi\|_{C(G)}, \tag{2.1.4}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)} \le MV\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{2.1.5}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \le M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{2.1.6}$$

де

$$M = \max_{(x,y)\in G\times G} |K(x,y)|, \quad V = \int\limits_G \mathrm{d}y. \tag{2.1.7}$$

Доведення. Нехай $\varphi \in L_2(G)$. Тоді φ — абсолютно інтегровна функція на G і, оскільки ядро $K(x,y)$ неперервне на $G \times G$, функція $(\mathbf{K}\varphi)(x)$ неперервна на G. Тому оператор $\mathbf{K}$ переводить $L_2(G)$ в $C\left(\overline{G}\right)$ і, з врахуванням нерівності Коші-Буняковського, обмежений. Доведемо нерівності:

1. (2.1.4):

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} = \max_{x\in\overline{G}} \left| \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right| \le \max_{x\in\overline{G}} \int\limits_G \left(|K(x,y)|\cdot|\varphi(y)|\right)\mathrm{d}y \le$$
$$\le \max_{x\in\overline{G}} \left(\max_{y\in\overline{G}} |K(x,y)| \cdot \max_{y\in\overline{G}} |\varphi(y)| \cdot \int\limits_G \mathrm{d}y \right) \le$$
$$\le \max_{(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}} |K(x,y)| \cdot \max_{y\in\overline{G}} |\varphi(y)| \cdot \int\limits_G \mathrm{d}y = MV\|\varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)}.$$

2. (2.1.5):

$$\left(\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)}\right)^2 = \int\limits_G \left| \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \le$$
$$\le \int\limits_G \left| \max_{y\in\overline{G}} |K(x,y)| \cdot \int\limits_G \varphi(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \le$$
$$\le \left(\max_{(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}} |K(x,y)| \right)^2 \cdot \left| \int\limits_G \varphi(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \cdot \int\limits_G \mathrm{d}x \le \left(M\|\varphi\|_{L_2(G)}V\right)^2$$

3. (2.1.6):

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} = \max_{x\in\overline{G}} |(\mathbf{K}\varphi)(x)| = \max_{x\in\overline{G}} \left| \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right| \le$$
$$\le \max_{x\in\overline{G}} \sqrt{\int\limits_G |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y} \cdot \sqrt{\int\limits_G |\varphi(y)|^2\,\mathrm{d}y} \le M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}.$$

□

Розв'язок інтегрального рівняння другого роду (2.0.4) будемо шукати методом послідовних наближень:

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = \lambda \mathbf{K}\varphi_0 + f, \quad \varphi_2 = \lambda \mathbf{K}\varphi_1 + f, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = \lambda \mathbf{K}\varphi_n + f \tag{2.1.8}$$

$$\varphi_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda^i \mathbf{K}^i f, \quad \mathbf{K}^{i+1} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^i) \tag{2.1.9}$$

Визначення 2.1.5 (ряду Неймана).

$$\varphi_\infty = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f, \tag{2.1.10}$$

— *ряд Неймана.*

Дослідимо збіжність ряду Неймана (2.1.10)

$$\left\| \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f \right\|_{C(\overline{G})} \le \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda^i| \cdot \|\mathbf{K}^i f\|_{C(\overline{G})} \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda^i| \cdot (MV)^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})} = \frac{\|f\|_{C(\overline{G})}}{1 - |\lambda| MV}. \tag{2.1.11}$$

Справді, $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \le MV\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$, тому $\|\mathbf{K}^2\varphi\|_{C(\overline{G})} \le (MV)^2\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$ і, взагалі кажучи, $\|\mathbf{K}^i\varphi\|_{C(\overline{G})} \le (MV)^i\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$.

Твердження 2.1.6 (умова збіжності методу послідовних наближень)
Отже, ряд Неймана збігається рівномірно при

$$|\lambda| < \frac{1}{MV}, \tag{2.1.12}$$

— умова збіжності методу послідовних наближень.

Лема 2.1.7 (про єдиність розв'язку)
При виконанні умови (2.1.12) інтегральне рівняння (2.0.1) має єдиний розв'язок

Доведення. Дійсно припустимо, що їх два:

$$\begin{matrix} \varphi^{(1)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(1)} + f \\ \varphi^{(2)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(2)} + f \end{matrix} \implies \begin{matrix} \varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(0)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(0)} \end{matrix}$$

Обчислимо норму Чебишева:

$$|\lambda| \cdot \|\mathbf{K}\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} = \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} \implies \\ \implies \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} \le |\lambda| \cdot MV \cdot \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} \implies \\ \implies (1 - |\lambda| \cdot MV) \cdot \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} \le 0.$$

Звідси маємо, що $\|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} = 0$. □

Таким чином доведена теорема

Теорема 2.1.8 (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значень параметру)
Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (2.0.1) з неперервним ядром $K(x, y)$ при умові (2.1.12) має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C\left(\overline{G}\right)$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді ряду Неймана (2.1.10).

2.1.2 Повторні ядра

Твердження 2.1.9 (про перенос інтегрального оператору через кому)
$\forall f, g \in \overline{G}$ має місце рівність

$$(\mathbf{K}f, g)_{L_2(G)} = (f, \mathbf{K}^\star g)_{L_2(G)} \tag{2.1.13}$$

Доведення. Якщо $f, g \in L_2(G)$, то за лемою 2.1.4 $\mathbf{K}f, \mathbf{K}^\star g \in L_2(G)$ тому

$$(\mathbf{K}f, g) = \int\limits_G (\mathbf{K}f)(\overline{g}(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_G \left(\int\limits_G K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x = \\ = \int\limits_G f(y)\left(\int\limits_G K(x,y)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int\limits_G f(y)\cdot(\mathbf{K}^\star g)(y)\,\mathrm{d}y = (f, \mathbf{K}^\star g).$$

□

Лема 2.1.10 (про композицію інтегральних операторів)
Якщо $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ — інтегральні оператори з неперервними ядрами $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ відповідно, то оператор $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ також інтегральний оператор з неперервним ядром

$$K_3(x,z) = \int_G K_2(x,y) K_1(y,z)\,\mathrm{d}y. \tag{2.1.14}$$

При цьому справедлива формула: $(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1)^\star = \mathbf{K}_1^\star\mathbf{K}_2^\star$.

Доведення. Нехай $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ — ядра інтегральних операторів $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$. Розглянемо $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$:

$$(\mathbf{K}_3 f)(x) = (\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1 f)(x) = \int\limits_G K_2(x,y)\left(\int\limits_G K_1(y,z) f(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \int\limits_G \left(\int\limits_G K_2(x,y)K_1(y,z)\,\mathrm{d}y\right) f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_G K_3(x,z) f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Тобто (2.1.14) — ядро оператора $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$.

З рівності (2.1.13) для всіх $f, g \in L_2(G)$ отримуємо $(f, \mathbf{K}_3^\star g - \mathbf{K}_1^\star\mathbf{K}_2^\star g) = 0$, звідки випливає, що $\mathbf{K}_3^\star = \mathbf{K}_1^\star\mathbf{K}_2^\star$. □

Із доведеної леми випливає, що оператори $\mathbf{K}^n = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{n-1}) = (\mathbf{K}^{n-1})\mathbf{K}$ — інтегральні та їх ядра $K_{(n)}(x,y)$ — неперервні та задовольняють рекурентним співвідношенням:

Визначення 2.1.11 (повторних (ітерованих) ядер)**.**

$$K_{(1)}(x,y) = K(x,y), \quad \ldots, \quad K_{(n)}(x,y) = \int\limits_G K(x,\xi) K_{(n-1)}(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.1.15}$$

— *повторні (ітеровані) ядра.*

Операторна форма:

$$\mathbf{K}f = \int\limits_G K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y, \quad \ldots, \quad \mathbf{K}^n f = \int\limits_G K_{(n)}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.1.16}$$

2.1.3 Резольвента інтегрального оператора

Пригадаємо представлення розв'язку інтегрального рівняння 2.0.1 у вигляді ряду Неймана (2.1.10). Виконаємо перетворення

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} (\mathbf{K}^i f) x = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y =$$

$$= f(x) + \lambda \int_G \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) \right) f(y) \, \mathrm{d}y = f(x) + \lambda \int_G \mathcal{R}(x,y,\lambda) f(y) \, \mathrm{d}y,$$

при $|\lambda| < \frac{1}{MV}$, де

Визначення 2.1.12 (резольвенти інтегрального оператора)**.**

$$\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) \qquad (2.1.17)$$

— *резольвента інтегрального оператора.*

Операторна форма запису розв'язку рівняння Фредгольма через резольвенту ядра має вигляд:

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{R} f \qquad (2.1.18)$$

Твердження 2.1.13

Мають місце операторні рівності:

$$\varphi = (E + \lambda \mathbf{R}) f, \quad (E - \lambda \mathbf{K}) \varphi = f, \quad \varphi = (E - \lambda \mathbf{K})^{-1} f. \qquad (2.1.19)$$

Вправа 2.1.14. Доведіть попереднє твердження.

Таким чином маємо

$$E + \lambda \mathbf{R} = (E - \lambda \mathbf{K})^{-1}, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}. \qquad (2.1.20)$$

Зважуючи на формулу (2.1.18) має місце теорема

Теорема 2.1.15 (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значенням параметру)

Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (2.0.1) з неперервним ядром $K(x, y)$ при умові (2.1.12) має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C\left(\overline{G}\right)$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді (2.1.17) за допомогою резольвенти (2.1.17).

2.1.4 Задачі

Приклад 2.1.16

Методом послідовних наближень знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = x + \lambda \int\limits_0^1 (xt)^2 \varphi(t) \, \mathrm{d}t.$$

Розв'язок. $M = 1$, $V = 1$.

Побудуємо повторні ядра

$$K_{(1)}(x, t) = x^2 t^2,$$

$$K_2(x, t) = \int\limits_0^1 x^2 z^4 t^2 \, \mathrm{d}z = \frac{x^2 t^2}{5},$$

$$K_{(p)}(x, t) = \frac{1}{5^{p-2}} \int\limits_0^1 x^2 z^4 t^2 \, \mathrm{d}z = \frac{x^2 t^2}{5^{p-1}}.$$

Резольвента має вигляд

$$\mathcal{R}(x, t, \lambda) = x^2 t^2 \left(1 + \frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda^2}{5^2} + \ldots + \frac{\lambda^p}{5^p} + \ldots\right) = \frac{5x^2 t^2}{5 - \lambda}, \quad |\lambda| < 5.$$

Розв'язок інтегрального рівняння має вигляд:

$$\varphi(x) + x + \int\limits_0^1 \frac{5x^2 t^3}{5 - \lambda} \mathrm{d}t = x + \frac{5x^2}{4(5 - \lambda)}.$$