

Зміст

4.4.4	Функція Гріна задачі Діріхле для кулі	1
4.4.5	Функція Гріна для областей на площині	3

4.4.4 Функція Гріна задачі Діріхле для кулі

Будемо розглядати граничну задачу

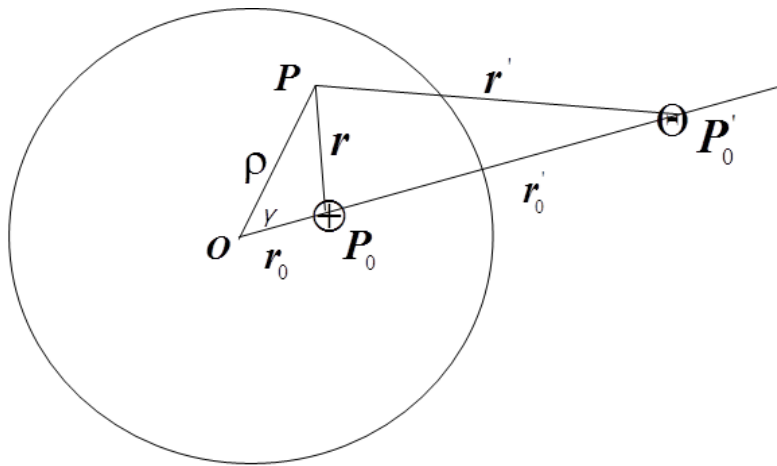
$$\begin{cases} \Delta U(P) = 0, & |P| < R, \\ U(P)|_{|P|=R} = f(P). \end{cases} \quad (4.4.18)$$

Побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа для кулі.

Введемо позначення:

$$|OP_0| = r_0, \quad |OP'_0| = r'_0, \quad r = |P - P_0|, \quad r' = |P - P'_0|. \quad (4.4.19)$$

На довільному промені, який проходить через центр кулі точку O розмістимо всередині кулі у точці P_0 одиничний точковий додатний заряд. Розглянемо точку P'_0 симетричну точці відносно сфери.



Це означає, що обидві точки лежать на одному промені, а їх відстані від центру сфери задовольняють співвідношенню

$$r_0 \cdot r'_0 = R^2. \quad (4.4.20)$$

В P'_0 точці розмістимо від'ємний заряд величини e , яку оберемо виходячи з властивостей функції Гріна.

Запишемо потенціал електростатичного поля від суми зарядів:

$$\Pi(P) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{e}{4\pi r}. \quad (4.4.21)$$

Обчислимо величину e використовуючи теорему косинусів:

$$\begin{aligned} \Pi(P) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \gamma}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2\rho \cdot \frac{R^2}{r_0} \cdot \cos \gamma}} \right) \Big|_{\rho=R} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma}} - \frac{e}{\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2R \cdot \frac{R^2}{r_0} \cdot \cos \gamma}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1 - e \cdot \frac{r_0}{R}}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma}} = 0. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Остання рівність буде вірною, якщо $e = R/r_0$.

Таким чином функцію Гріна задачі Діріхле для кулі можна записати при знайденому значенні величини зовнішнього заряду:

$$G_1(P, P_0) = \frac{1}{4\pi} \left(1/\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \gamma} - 1/\sqrt{R^2 + \frac{\rho^2 r_0^2}{R^2} - 2\rho r_0 \cos \gamma} \right). \quad (4.4.23)$$

Для знаходження формули інтегрального представлення обчислимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial n_P} \Big|_{P \in S} &= \frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\rho - r_0 \cos \gamma}{(\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \gamma)^{3/2}} + \frac{\frac{\rho r_0^2}{R^2} - r_0 \cos \gamma}{\left(\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2} + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma \right)^{3/2}} \right) \Big|_{\rho=R} = \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Для запису остаточної формули треба ввести сферичну систему координат. Запишемо через сферичні кути:

$$\cos \gamma = \frac{\angle(OP, OP_0)}{\rho r_0} = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (4.4.25)$$

Тут ρ, φ, θ — сферичні координати точки P , а r_0, φ_0, θ_0 — сферичні координати точки P_0 .

Формула 4.4.1 (формула Пуассона для кулі)

Використовуючи формулу (3.16) запишемо розв'язок задачі Діріхле:

$$U(r_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(R^2 - r_0^2) \sin \theta f(\varphi, \theta) d\theta d\varphi}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (4.4.26)$$

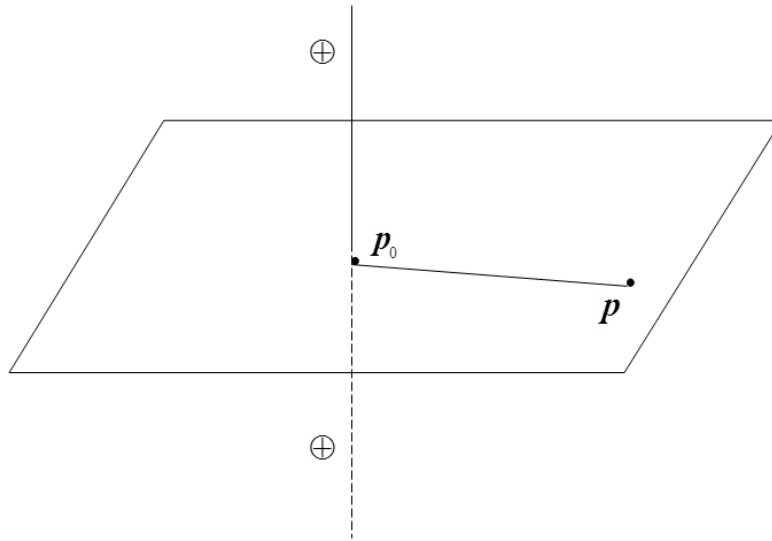
Ця формула дає розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа і називається *формулою Пуассона для кулі*.

4.4.5 Функція Гріна для областей на площині

Функція Гріна для областей у двовимірному випадку в принципі можна будувати в той же спосіб, що і в тривимірному випадку. При цьому треба враховувати вигляд фундаментального розв'язку для \mathbb{R}^2 , що приводить до наступного вигляду функції Гріна:

$$G_i(p, p_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{1}{|p - p_0|} \right) + g_i(p, p_0), \quad p, p_0 \in D \subset \mathbb{R}^2. \quad (4.4.27)$$

Фізичний зміст фундаментального розв'язку в двовимірному випадку представляє собою потенціал електростатичного поля в точці p рівномірно зарядженої одиничним додатнім зарядом нескінченної нитки, яка проходить ортогонально до площини через деяку точку p_0 . Точки p, p_0 належать площині:



Аналогічно кулі, можна отримати функцію Гріна задачі Діріхле для кола, яка має вигляд:

$$G_1(p, p_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + \rho^2 - 2\rho r_0 \cos \gamma}} \right) - \ln \left(\frac{R}{r_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{r_0^2} + \rho^2 - 2\rho \cdot \frac{R^2}{r_0} \cdot \cos \gamma}} \right) \right) \quad (4.4.28)$$