Лекція 25

Потенціал подвійного шару та його пряме значення

[2, стор. 370 - 381]

Згідно до теореми 1 лекції 24, потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца (а також Лапласа) $W^k(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y$ для будь – якої області, яка не має перетину з поверхнею S є функцією яка має похідні будь – якого порядку.

В точках поверхні S потенціали подвійного шару є невласним інтегралом і його поведінка залежить від властивості щільності та властивості поверхні інтегрування.

Теорема 6 (*Про пряме значення потенціалу подвійного шару)* Якщо S замкнена поверхня Ляпунова, $\sigma \in C(S)$, тоді потенціал подвійного шару (8.3), (8.3') має в будь – якій точці поверхні S цілком визначене скінчене значення і це значення неперервно змінюється, коли точка x пробігає поверхню S.

Доведення Оскільки $\sigma \in C(S)$, то σ - обмежена на поверхні S, таким чином

$$\left|\sigma(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right| \le M\left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right| \le M\sqrt{1+k^2|x-y|^2}\left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\right| \le M_1\left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\right|, \ x, y \in S.$$

Згідно до теореми 5 інтеграл $\iiint\limits_S \left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\right| dS_y$ існує, а таким чином існує інтеграл $W^k(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y$ коли $x \in S$.

Покажемо тепер, що $W^k \in C(S)$. Розглянемо $K(x, y) = \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$, як ядро інтегрального оператора.

Оскільки $K(x,y)=\dfrac{A(x,y)}{4\pi|x-y|^2}\cos(n_y, y-x)$, де $A(x,y)=\left(\mp ik|x-y|+1\right)e^{\pm ik|x-y|}$, то згідно (8.19) $\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\le \boldsymbol{c}_1|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha}$. Таким чином $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\dfrac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cos(\boldsymbol{n}_y, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{-0.5\alpha}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2-0.5\alpha}}=\dfrac{\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2-0.5\alpha}}$. є полярним ядром. А це в свою чергу забезпечує відображення неперервної на $\boldsymbol{S}$ щільності σ в неперервний на $\boldsymbol{S}$ потенціал подвійного шару $\boldsymbol{W}^k$. Теорема доведена.

Означення 4 Значення потенціалу подвійного шару в точках поверхні будемо називати прямим значенням потенціалу подвійного шару і позначатимемо його $\overline{W^k(x)},\ x\in S$.

Інтеграл Гауса

Інтегралом Гауса будемо називати потенціал подвійного шару оператора Лапласа з щільністю $\sigma(\boldsymbol{y})=1$, тобто $W_0(x)=\iint\limits_S \dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ (8.22).

Лема Якщо $\boldsymbol{S}$, замкнена поверхня Ляпунова що обмежує область Ω то інтеграл Гауса визначається наступною формулою:

$$\boldsymbol{W}_0(\boldsymbol{x})=\begin{cases}-1, & \boldsymbol{x}\in\Omega\\ -0.5, & \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{S}\\ 0, & \boldsymbol{x}\in\Omega'\end{cases} \qquad (8.23).$$

Доведення. Розглянемо випадок коли $\boldsymbol{x}\in\Omega'$. В цьому випадку функція $\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ - гармонічна в області Ω по аргументу $\boldsymbol{x}$ оскільки $\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{S}$ то $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$.

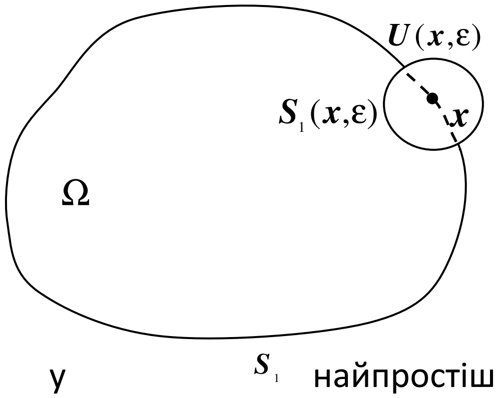
Згідно до властивості гармонічної функції маємо $\iint\limits_S \dfrac{\partial}{\partial n_y}\dfrac{1}{4\pi|x-y|}dS_y=0$

Для випадку, коли $\boldsymbol{x}\in\Omega$ розглянемо область $\Omega_\varepsilon=\Omega/\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. Функція $\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ буде гармонічною в області Ω_ε і для неї має місце співвідношення

$\iint\limits_{S}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y+\iint\limits_{S(\boldsymbol{x},\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y=0.$ Обчислимо значення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S(\boldsymbol{x},\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y=-\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S(\boldsymbol{x},\varepsilon)}\frac{\cos(\boldsymbol{n}_y,\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\boldsymbol{dS}_y=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}(-1)\iint\limits_{S(\boldsymbol{x},\varepsilon)}\boldsymbol{dS}_y=1$$

Випадок $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{S}$ можна дослідити, якщо розглянути область $\Omega^1_\varepsilon=\Omega/(\Omega\cap \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\varepsilon))$ у якій функція $\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}$ - гармонічна і записати інтеграл по замкненій поверхні $\boldsymbol{S}^1_\varepsilon$ яка обмежує область Ω^1_ε та спрямувати ε до нуля.



Аналізуючи інтеграл Гауса легко бачити, що навіть у найпростішому випадку постійної щільності потенціал подвійного шару при переході через поверхню $\boldsymbol{S}$ має розрив. Наступна теорема вивчає поведінку потенціалу подвійного шару при підході до поверхні S з середини та ззовні області.

Теорема 7 *(Про граничні значення потенціалу подвійного шару)* Нехай $\boldsymbol{S}$ - замкнута поверхня Ляпунова, а σ неперервна на S щільність, тоді потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца та Лапласа $\boldsymbol{W}^k(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{C}(\overline{\Omega})\cap \boldsymbol{C}(\overline{\Omega'})\cap \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S})$ і його граничні значення при підході до поверхні $\boldsymbol{S}$ з середини $\boldsymbol{W}^k_i(\boldsymbol{x})$ і з зовні $\boldsymbol{W}^k_e(\boldsymbol{x})$ задовольняють співвідношенням:

$$\begin{aligned} W_i^k(x)&=-\frac{\sigma(x)}{2}+\overline{W^k(x)},\ \ x\in S\\ W_e^k(x)&=\frac{\sigma(x)}{2}+\overline{W^k(x)},\quad x\in S \end{aligned} \qquad (8.24).$$

Доведення Розглянемо потенціал подвійного шару

$$\boldsymbol{W}^k(\boldsymbol{x})=\iint\limits_{S}\sigma(\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y=\iint\limits_{S}\sigma(\boldsymbol{y})(1\mp \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ik}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y$$

Позначимо $(1\mp ik|x-y|)e^{\pm ik|x-y|}=\varphi(|x-y|)$.

Розглянемо довільну точку $\boldsymbol{x}_0\in \boldsymbol{S}$ та запишемо потенціал подвійного шару у вигляді: $$W^k(x) = W^k(x) \pm \iint_S \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y = \\ = W_1^k(x) + \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)W_0(x)$$,

де $W_1^k(x) = \iint_S \left[\sigma(y)\varphi(|x-y|) - \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right]\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ (8.25),

а $W_0(x) = \iint_S \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y$ - інтеграл Гауса. Покажемо, що $\boldsymbol{W}_1^{\boldsymbol{k}}$ неперервна функція в точці $\boldsymbol{x}_0$. Візьмемо точку $\boldsymbol{x}_0$ за центр сфери $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0,\eta)$, яка розіб'є поверхню $\boldsymbol{S}$ на дві частини S' і S'', де $S' = S \cap U(x_0,\eta)$, а $S'' = S / S'$. Враховуючи представлення поверхні $S = S' \cup S''$, запишемо $W_1^k(x) = W_1'^k(x) + W_1''^k(x) =$

$$= \iint_{S'} [\sigma(y)\varphi(|x-y|) - \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)]\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}dS_y + \iint_{S''}[\cdots]dS_y$$

Покажемо, що $\left|W_1^k(x) - W_1^k(x_0)\right|$ можна зробити як завгодно малим за рахунок зближення точок $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{x}_0$. Запишемо очевидну нерівність

$\left|W_1^k(x) - \overline{W_1^k(x_0)}\right| \le \left|W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)}\right| + \left|W_1'^k(x)\right| + \left|\overline{W_1'^k(x_0)}\right|$. Оцінимо праву частину нерівності. Оберемо радіус сфери η таким чином щоби $\left\|\left[\sigma(y)\varphi(|x-y|) - \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right]\right\| \le \frac{\varepsilon}{3C_0}$, де ε - довільне мале число, а C_0 - константа з формулювання теореми 5, нерівність (8.22). Це можливо завдяки неперервності $\sigma(\boldsymbol{y})\varphi(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)$. Таким чином $\left|\boldsymbol{W}_1'^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\right| \le \frac{\varepsilon}{3\boldsymbol{C}_0}\iint_{S'}\left|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right|\boldsymbol{dS}_y \le \frac{\varepsilon}{3}$.

Аналогічна нерівність виконується і для $\left|\overline{\boldsymbol{W}_1'^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}_0)}\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$, як для частинного випадку положення точки $\boldsymbol{x}$.

Зафіксуємо радіус сфери η і будемо вважати, що точка $\boldsymbol{x}$ достатньо близька до точки $\boldsymbol{x}_0$, така $|x-x_0| \le \frac{1}{2}\eta$, тоді на поверхні $\boldsymbol{S''}$

$\left|x-y\right| \geq \left|y-x_0\right| - \left|x-x_0\right| \geq \eta - \dfrac{\eta}{2} = \dfrac{\eta}{2}$. Таким чином підінтегральна функція в інтегралі $W_1''^k(x)$ є неперервною і тому неперервним буде і сам інтеграл, тобто

$\left| W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)} \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Це доводить неперервність $W_1^k(x)$ в точці $\boldsymbol{x}_0$.

З неперервності $W_1^k(x)$, можемо записати

$$W_1{}^k{}_i(x_0) = W_1{}^k{}_e(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} \qquad (8.26).$$

Врахуємо представлення

$$W^k(x) = W_1^k(x) + \sigma(x_0)\varphi(\left|x-x_0\right|)W_0(x) \qquad (8.27).$$

Обчислимо граничні значення потенціалу в точці $\boldsymbol{x}_0$ з середини та ззовні:

$$W_i^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(\left|x_0-x_0\right|)W_{0i}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} - \sigma(x_0) \qquad (8.28);$$

$$W_e^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(\left|x_0-x_0\right|)W_{0e}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} \qquad (8.29).$$

Оскільки $\overline{W_1^k(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} - \sigma(x_0)\overline{W_0(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} + \dfrac{\sigma(x_0)}{2}$ (8.30).

Враховуючи (8.28) - (8.30) отримаємо:

$$W_i^k(x_0) = \overline{W^k(x_0)} - \frac{\sigma(x_0)}{2}$$

$$W_e^k(x_0) = \overline{W^k(x_0)} + \frac{\sigma(x_0)}{2}$$

Таким чином теорема доведена.

Потенціал простого шару та його властивості

Нагадаємо, що потенціали простого шару для оператора Лапласа та Гельмгольца записуються у вигляді

$$V(x) = \iint_S \frac{\mu(y)}{4\pi\left|x-y\right|}dS_y \qquad V^k(x) = \iint_S \frac{e^{\pm ik\left|x-y\right|}\mu(y)}{4\pi\left|x-y\right|}dS_y.$$

Вивчимо властивості цих потенціалів в усьому евклідовому просторі.

Теорема 8 *(про неперервність потенціалу простого шару)* Якщо S - замкнута поверхня Ляпунова, а μ вимірювана і обмежена на S, то потенціал простого шару оператора Лапласа та Гельмгольца є функцією неперервною в усьому евклідовому просторі.

Доведення. Оскільки властивості потенціалів в будь – якій точці простору, яка не належить поверхні $\boldsymbol{S}$ досліджувались в теоремі 1, то встановити неперервність потенціалу простого шару необхідно лише в точках поверхні $\boldsymbol{S}$.

Побудуємо сферу Ляпунова $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$ і нехай $\boldsymbol{S}'_d(\boldsymbol{x})$ - частина поверхні $\boldsymbol{S}$, яка знаходиться всередині сфери Ляпунова. Тоді потенціал простого шару

$$V^k(x)=\iint\limits_{S'_d(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y+\iint\limits_{S\setminus S'_d(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y \qquad (8.31).$$

У другому інтегралі (8.31) підінтегральна функція є неперервна і обмежена , а значить цей інтеграл існує.

Для оцінки першого інтегралу введемо локальну систему координат ξ_1,ξ_2,ξ_3 с центром в точці $\boldsymbol{x}$. Нехай $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{x})$ - проекція $\boldsymbol{S}'_d(\boldsymbol{x})$ на площину $\xi_3=0$, дотичну до поверхні $\boldsymbol{S}$ в точці $\boldsymbol{x}$.

$$\left|\iint\limits_{S'_d(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y\right|\le\iint\limits_{G'(x)}\frac{|\mu(\xi_1,\xi_2)|d\xi_1 d\xi_2}{4\pi\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\cos(n_y,\xi_3)}\le 2M\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d}\frac{\rho d\rho}{4\pi\rho}=Md$$

При оцінці інтегралу були використані оцінки (8.13) та оцінка

$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}\le\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}=\frac{1}{\rho}$. Таким чином потенціал простого шару дійсно існує в кожній точці простору $\boldsymbol{R}^3$

Покажемо тепер неперервність потенціалу в точці $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$

Оберемо сферу Ляпунова $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\eta),\ \eta<\boldsymbol{d}$. Тоді потенціал простого шару можна представити аналогічно (8.31) у вигляді:

$$V^k(x)=\iint\limits_{S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y+\iint\limits_{S\setminus S'_\eta(x)}\frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y \qquad (8.31').$$

Очевидно, що перший інтеграл $\boldsymbol{V}_1^k(\boldsymbol{x})=\iint\limits_{S\setminus S'_\eta(x)}\frac{\boldsymbol{e}^{\pm ik|x-y|}\mu(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{dS}_y$ є неперервною функцією і для $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, що $\left|\boldsymbol{V}_1^k(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{V}_1^k(\boldsymbol{x}')\right|\le\frac{\varepsilon}{3}$ як тільки $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|<\delta$.

Покажемо, що $\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y - \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS\right| \le \frac{2\varepsilon}{3},\ |x-x'|<\delta$

Очевидно, що

$$\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y - \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS_y\right| \le \left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y\right| + \left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS\right|$$

Розглянемо другий інтеграл і виберемо точки $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ так, що $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| < \frac{\eta}{2}$.

Введемо локальну систему координат з центром в точці $\boldsymbol{x}$. Тоді нехай точка $y=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, а $x'=(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)$ Тоді $\frac{1}{r}=\frac{1}{|y-x'|}\le\frac{1}{\sqrt{(\xi_1-\xi'_1)^2+(\xi_2-\xi'_2)^2}}\le\frac{1}{\rho}$

$$\rho \le |y-x'| = \|y-x'+x-x\| \le |x-x'| + |x-y| \le \eta + \frac{\eta}{2} = \frac{3\eta}{2}$$

Таким чином можна записати оцінку інтеграла

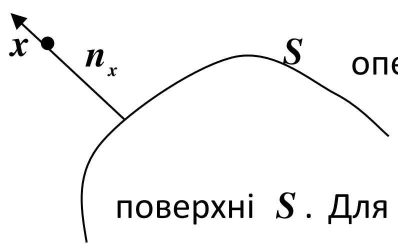
$$\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}dS_y\right| \le 2M \iint\limits_{G'_\eta(x)} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{4\pi\sqrt{(\xi_1-\xi'_1)^2+(\xi_2-\xi'_2)^2}} \le 2M \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{3\eta}{2}} \frac{\rho d\rho}{4\pi\rho} = \frac{3\eta M}{2} \le \frac{\varepsilon}{3}$$

за рахунок вибору достатньо маленького значення η.

Інтеграл $\left|\iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$, як частинний випадок попереднього інтегралу при $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}$. Таким чином встановлено, що $|\boldsymbol{V}^k(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{V}^k(\boldsymbol{x}')| \le \varepsilon$, якщо $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \le \delta$. Теорема доведена.

Нормальна похідна потенціалу простого шару

Будемо розглядати потенціал простого шару $V^k(x)=\iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y$ для



оператору Гельмгольца Візьмемо довільну точку $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{S}$, і проведемо через цю точку яку-не будь нормаль $\boldsymbol{n}_x$ до поверхні $\boldsymbol{S}$. Для такого випадку в точці $\boldsymbol{x}$, можна обчислити похідну по напрямку нормалі n_x від потенціалу простого шару, яку обчислюють шляхом диференціювання підінтегральної функції

$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x} = \frac{\partial}{\partial n_x}\iint_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}dS_y = \iint_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}dS_y$ Обчислимо вираз

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{\pm ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2}e^{\pm ik|x-y|}\sum_{j=1}^{3}\frac{x_j-y_j}{|x-y|}\cos(n_x,x_j) =$$

$$\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(n_x,x-y)$$

Теорема 9 *(про пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару)* Якщо μ обмежена і вимірювана функція на поверхні Ляпунова $\boldsymbol{S}$, то нормальна похідна потенціалу простого шару

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x} = \iint_S \mu(y)\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(n_x,x-y)dS_y$$

(8.32) має в кожній точці поверхні $\boldsymbol{S}$ цілком визначене скінчене значення, яке неперервно змінюється коли точка $\boldsymbol{x}$ пробігає поверхню $\boldsymbol{S}$, це значення називають прямим значенням нормальної похідної потенціалу простого шару $\overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x}},\ x\in S$.

Доведення При доведенні теореми будемо розглядати нормальну похідну потенціалу, як результат відображення щільності μ за допомогою інтегрального оператора з ядром $K(x,y) = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(n_x,x-y)$. (8.33).

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова, можна показати, що ядро (8.33) є полярним, оскільки для достатньо малих значень $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, $\cos(n_x,x-y)\le a_2|x-y|^{\alpha}$. Це означає, що

$K(x,y) = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}\cos(n_x,x-y)|x-y|^{-\frac{\alpha}{2}}}{4\pi|x-y|^{2-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{A(x,y)}{4\pi|x-y|^{2-\frac{\alpha}{2}}}$ - є полярним ядром. Звідси маємо, що інтегральний оператор з полярним ядром відображає обмежену функцію у неперервну.

Теорема 10 *(про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару)* Якщо S замкнута поверхня Ляпунова, а μ неперервна на S щільність, то потенціал простого шару має на S граничні значення правильної нормальної похідної при підході до точки $x \in S$ з середини та ззовні і ці граничні значення можуть бути обчислені:

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_i} = \overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial n}} + \frac{\mu(x)}{2} \qquad (8.34),$$

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_e} = \overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial n}} - \frac{\mu(x)}{2} \qquad (8.35).$$

Означення 5 Граничні значення нормальної похідної в точці $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{S}$ потенціалу простого шару з середини $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i}$ та з зовні $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e}$ будемо називати правильними, якщо вони є граничними значеннями $\frac{\partial V^k(x)}{\partial n}$ коли $x \to x_0$ вздовж нормалі n_{x_0} з середини та ззовні відповідно.

Доведення. Розглянемо вираз, який представляє собою суму потенціалу подвійного шару і нормальної похідної потенціалу простого шару з однаковою щільністю μ. $\frac{\partial V^k(x)}{\partial n_x} + W^k(x) = \iint\limits_S \mu(y)\left[\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right]dS_y$ (8.36).

Можна показати, що ця функція змінюється неперервно, коли точка $\boldsymbol{x}$ перетинає поверхню $\boldsymbol{S}$, рухаючись по нормалі до цієї поверхні в точці $\boldsymbol{x}$.

Враховуючи неперервність (8.36) при переході через поверхню вздовж нормалі , можемо записати: $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} + W_i^k(x_0) = \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} + W_e^k(x_0) = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \overline{W^k(x_0)}$.

Звідси маємо: $\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} = \overline{W^k(x_0)} - W_i^k(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \frac{\mu(x_0)}{2}$.

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} = \overline{W^k(x_0)} - W_e^k(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} - \frac{\mu(x_0)}{2}$$ Що і треба було довести.