# Зміст



### 2.3.1 Характеристичні числа ермітового неперервного ядра

**Теорема 2.3.1.1** (про існування характеристичного числа у ермітового неперервного ядра)

Для будь-якого ермітового неперервного ядра, що не дорівнює тотожно нулю існує принаймні одне характеристичне число і найменше з них за модулем $\lambda_1$ задовольняє варіаційному принципу

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}}. \tag{2.3.5}$$

*Доведення.* Серед усіх $f \in L_2$ оберемо такі, що $\|f\|_{L_2(G)} = 1$. Позначимо

$$\nu = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ \|f\|_{L_2}=1}} \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}. \tag{2.3.6}$$

Оскільки

$$\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq MV\|f\|_{L_2(G)} \leq MV, \tag{2.3.7}$$

Згідно до визначення точної верхньої межі,

$$\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(G) : \lim_{n \to \infty} \|\mathbf{K}f_k\|_{L_2(G)} = \nu. \tag{2.3.8}$$

Оцінимо

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{K}^2 f\right\|_{L_2(G)} &= \|\mathbf{K}(\mathbf{K}f)\|_{L_2(G)} = \\ &= \left\|\mathbf{K}\left(\frac{\mathbf{K}f}{\|\mathbf{K}f\|}\right)\right\|_{L_2(G)} \cdot \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq \\ &\leq \nu \cdot \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq \nu^2. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Покажемо, що $\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k \to 0$ в середньому квадратичному. Тобто що

$$\|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|^2_{L_2(G)} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0. \tag{2.3.10}$$

Дійсно:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|^2_{L_2(G)} &= (\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k, \mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k)_{L_2(G)} = \\
&= \|\mathbf{K}^2 f_k\|^2_{L_2(G)} + \nu^4 - \nu^2(\mathbf{K}^2 f_k, f_k) - \nu^2(f_k, \mathbf{K}^2 f_k) = \\
&= \|\mathbf{K}^2 f_k\|^2_{L_2(G)} + \nu^4 - 2\nu^2\|\mathbf{K} f_k\|^2_{L_2(G)} \le \\
&\le \nu^2 \left(\nu^2 - \|\mathbf{K}^2 f_k\|^2_{L_2(G)}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Розглянемо послідовність $\{\mathbf{K} f_k\} = \{\varphi_k\}$, яка є компактною в рівномірній метриці.

У неї існує підпослідовність $\{\varphi_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ збіжна в $C\left(\overline{G}\right)$, тобто $\exists \varphi \in C\left(\overline{G}\right)$, така що $\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$.

Покажемо, що $\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi = 0$ в кожній точці, тобто $\|\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} = 0$.

Справді,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} &= \|\mathbf{K}^2\varphi - \mathbf{K}^2\varphi_{k_i} + \mathbf{K}^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi_{k_i} + \nu^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} \le \\
&\le \|\mathbf{K}^2\varphi - \mathbf{K}^2\varphi_{k_i}\|_{C\left(\overline{G}\right)} + \|\mathbf{K}^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi_{k_i}\|_{C\left(\overline{G}\right)} + \\
&\quad + \|\nu^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} \le \\
&\le (MV)^2\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} + M\sqrt{V}\|\mathbf{K}^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\|_{L_2(\overline{G})} + \\
&\quad + \nu^2\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} \to 0 + 0 + 0.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Таким чином має місце рівність

$$\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi = 0 \tag{2.3.13}$$

Отже маємо: $(\mathbf{K} + E\nu)(\mathbf{K} - E\nu)\varphi = 0$. Ця рівність може мати місце у двох випадках:

1. $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv 0$. Тоді $\varphi = \frac{1}{\nu}\mathbf{K}\varphi$, а отже $\varphi$ — власна функція, $\frac{1}{\nu}$ — характеристичне число оператора $\mathbf{K}$.

2. $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv \Phi \ne 0$. Тоді $(\mathbf{K} + E\nu)\Phi \equiv 0$. Тоді $\Phi = -\frac{1}{\nu}\mathbf{K}\Phi$, а отже $\Phi$ — власна функція, $-\frac{1}{\nu}$ — характеристичне число оператора $\mathbf{K}$.

Залишилось довести, що це характеристичне число є мінімальним за модулем. Припустимо супротивне. Нехай $\exists\lambda_0 : |\lambda_0| < |\lambda_1|$, тоді

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f\in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K} f\|}{\|f\|} \ge \frac{\|\mathbf{K}\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{|\lambda_0|}, \tag{2.3.14}$$

тобто $|\lambda_0| \ge |\lambda_1|$, протиріччя. $\square$

**Зауваження 2.3.1.1 —** Доведена теорема є вірною і для ермітових полярних ядер,

Звідси безпосередньо випливають такі

**Властивості 2.3.1.1** (характеристичних чисел та власних функцій ермітового ядра)
Нескладно показати, що:

1. Множина характеристичних чисел ермітового неперервного ядра не порожня, є підмножиною множини дійсних чисел і не має скінчених граничних точок.

2. Кратність будь-якого характеристичного числа скінчена.

3. Власні функції можна вибрати так, що вони утворять ортонормовану систему, тобто $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\dots}$ такі що $(\varphi_k, \varphi_i)_{L_2(G)} = \delta_{ki}$.

**Зауваження 2.3.1.2 —** Для доведення останньої властивості достатньо провести процес ортогоналізації Гілберта-Шмідта для будь-якої системи лінійно незалежних власних функцій, і пронормувати отриману систему.

## 2.4 Теорема Гілберта-Шмідта та її наслідки

### 2.4.1 Біліній розвинення ермітового неперервного ядра

Нехай $K(x,y) \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$ — ермітове неперервне ядро, $|\lambda_i| \le |\lambda_{i+1}|$, $i = 1, 2, \dots$ — його характеристичні числа і $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормована система власних функцій, що відповідають власним числам.

Розглянемо послідовність ермітових неперервних ядер:

$$K^p(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\overline{\varphi}_i(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \dots \tag{2.4.1}$$

Зрозуміло що при цьому

$$K^p(x,y) = (K^p)^\star(x,y) \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right). \tag{2.4.2}$$

Дослідимо властивості ермітових операторів, що відврвідають ядру $K^p(x,y)$.

**Твердження 2.4.1.1**

Будь-яке характеристичне число $\lambda_j$, $j \geq p+1$ та відповідна йому власна функція $\varphi_j$ є характеристичним числом і власною функцією ядра $K^p(x,y)$.

*Доведення.* Справді:

$$\mathbf{K}^p\varphi_j = \mathbf{K}\varphi_j - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}(\varphi_i, \varphi_j) = \mathbf{K}\varphi_j = \frac{\varphi_j}{\lambda_j}. \tag{2.4.3}$$

□

Нехай $\lambda_0$, $\varphi_0$ — характеристичне число та відповідна власна функція $K^p(x,y)$, тобто $\lambda_0\mathbf{K}^p\varphi_0 = \varphi_0$.

**Твердження 2.4.1.2**

$(\varphi_0, \varphi_j) = 0$ для $j = \overline{1,p}$.

*Доведення.* З того, що $\varphi_0$ є власною функцією ядра $\mathbf{K}^p$ випливає, що

$$\varphi_0 = \lambda_0\mathbf{K}\varphi_0 - \lambda_0\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i}{\lambda_i}(\varphi_0, \varphi_i). \tag{2.4.4}$$

Підставляючи цей вираз для $\varphi_0$ у потрібний скалярний добуток маємо

$$\begin{aligned}(\varphi_0, \varphi_j) = \lambda_0(\mathbf{K}\varphi_0, \varphi_j) - \lambda_0\sum_{i=1}^{p}\frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_j)}{\lambda_i} = \\ = \frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j) - \frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j) = 0.\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

□

Отже $\lambda_0$, $\varphi_0$ відповідно характеристичне число і власна функція ядра $K(x,y)$.

Таким чином $\varphi_0$ — ортогональна до усіх власних функцій $\varphi_1$, $\varphi_2$, ..., $\varphi_p$. Але тоді $\lambda_0$ співпадає з одним із характеристичних чисел $\lambda_{p+1}$, $\lambda_{p+2}$, ... тобто $\varphi_0 = \varphi_k$ для деякого $k \geq p+1$.

Отже у ядра $K^p(x,y)$ множина власних функцій і характеристичних чисел вичерпується множиною власних функцій і характеристичних чисел ядра $K(x,y)$ починаючи з номера $p+1$.

Враховуючи, що $\lambda_{p+1}$ — найменше за модулем характерне число ядра $K^p(x,y)$, має місце нерівність

$$\frac{\|\mathbf{K}^p f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}} \leq \frac{1}{|\lambda_{p+1}|}. \tag{2.4.6}$$

Для ядра, що має скінчену кількість характеристичних чисел, очевидно, має місце рівність

$$K^N(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \equiv 0. \tag{2.4.7}$$

Тобто будь-яке ермітове ядро зі скінченою кількістю характеристичних чисел є виродженим і представляється у вигляді

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \tag{2.4.8}$$

Враховуючи теорему про існування характеристичних чисел у ермітового оператора можемо записати:

$$\|K^{(p)} f\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K} f - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} \leq \frac{\|f\|_{L_2(G)}}{|\lambda_{p+1}|} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0. \tag{2.4.9}$$

Тобто можна вважати, що ермітове ядро в певному розумінні наближається наступним білінійним рядом:

$$K(x,y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \tag{2.4.10}$$

Для виродженого ядра маємо його представлення у вигляді

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \tag{2.4.11}$$

### 2.4.2 Ряд Фур'є функції із $L_2(G)$

Розглянемо довільну функцію $f \in L_2(G)$ і деяку ортонормовану систему функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$.

**Визначення 2.4.2.1** (ряда Фур'є). *Рядом Фур'є* функції $f$ із $L_2(G)$ називається

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f,u_i)u_i \sim f. \tag{2.4.12}$$

**Визначення 2.4.2.2** (коефіцієнта Фур'є). Вираз $(f,u_i)$ називається *коефіцієнтом Фур'є*.

**Теорема 2.4.2.1** (нерівність Бесселя)
$\forall f \in L_2(G)$ виконується *нерівність Бесселя*: $\forall N$

$$\sum_{i=1}^{N}|(f,u_i)|^2 \leq \|f\|^2_{L_2(G)}. \tag{2.4.13}$$

**Зауваження 2.4.2.1** — Нерівність Бесселя гарантує збіжність ряду Фур'є в середньоквадратичному, але не обов'язково до функції $f$.

**Визначення 2.4.2.3** (повної (замкненої) системи функцій). Ортонормована система функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ називається *повною (замкненою)*, якщо ряд Фур'є для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ по цій системі функцій збігається до цієї функції в просторі $L_2(G)$.

**Теорема 2.4.2.2** (критерій повноти ортонормованої системи функцій)
Для того щоб система функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ була повною в $L_2(G)$ необхідно і достатньо, щоби для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ виконувалась рівність Парсеваля-Стеклова:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(f,u_i)|^2 = \|f\|^2_{L_2(G)}. \tag{2.4.14}$$

### 2.4.3 Теорема Гільберта-Шмідта

**Визначення 2.4.3.1** (джерелувато-зображуваної функції)**.** Функція $f(x)$ називається *джерелувато-зображуваною* через ермітове неперервне ядро $K(x,y) = K^{\star}(x,y)$, $K \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$, якщо існує функція $h(x) \in L_2(G)$, така що

$$f(x) = \int\limits_G K(x,y) h(y) \, \mathrm{d}y. \tag{2.4.15}$$

**Теорема 2.4.3.1** (Гільберта-Шмідта)

Довільна джерелувато-зображувана функція $f$ розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою власних функцій ермітового неперервного ядра $K(x,y)$

*Доведення.* Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$(f, \varphi_i) = (\mathbf{K}h, \varphi_i) = (h, \mathbf{K}\varphi_i) = \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i}. \tag{2.4.16}$$

Отже ряд Фур'є функції $f$ має вигляд

$$f \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \tag{2.4.17}$$

Якщо власних чисел скінчена кількість, то можливе точне представлення

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i(x), \tag{2.4.18}$$

якщо ж власних чисел злічена кількість, то можемо записати:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{p} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}h - \sum_{i=1}^{p} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} \xrightarrow[p \to \infty]{} 0. \tag{2.4.19}$$

Покажемо, що формулу

$$K(x,y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \tag{2.4.20}$$

можна розглядати як розвинення ядра $K(x,y)$ в ряд Фур'є по системі власних функцій $\varphi_i(x)$. Перевіримо це обчислюючи коефіцієнт Фур'є:

$$\begin{aligned}(K(x,y),\varphi_i)_{L_2(G)} &= \int\limits_G K(x,y)\overline{\varphi}_i(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_G \overline{K(y,x)}\overline{\varphi}_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}.\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Доведемо рівномірну збіжність ряду Фур'є за критерієм Коші і покажемо, що при, $n,m\to\infty$, відрізок ряду прямує до нуля. За нерівністю Коші-Буняківського маємо:

$$\left|\sum_{i=n}^{m}\frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i\right| \le \sum_{i=n}^{m}|(h,\varphi_i)\frac{|\varphi_i|}{|\lambda_i|} \le \left(\sum_{i=n}^{m}|(h,\varphi_i)|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=n}^{m}\frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2}\right)^{1/2} \tag{2.4.22}$$

Але

$$\sum_{i=n}^{m}|(h,\varphi_i)|^2 \le \|h\|^2_{L_2(G)}, \tag{2.4.23}$$

тобто ряд збігається, а вказана сума прямує до 0 при $n,m\to\infty$.
Зокрема маємо

$$\sum_{i=n}^{m}\frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \le \int\limits_G |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}x \le M^2V, \tag{2.4.24}$$

тобто ряд збігається.

Отже

$$\left(\sum_{i=n}^{m}|(h,\varphi_i)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=n}^{m}\frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2}\right)^{1/2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0, \tag{2.4.25}$$

а отже

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \tag{2.4.26}$$

збігається абсолютно і рівномірно саме до функції $f(x)$. □

**Наслідок 2.4.3.1**

Довільне повторне ядро для ермітового неперервного ядра $K(x, y)$ розкладається в білінійний ряд по системі власних функцій ермітового неперервного ядра, який збігається абсолютно і рівномірно, а саме рядом

$$K_{(p)}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i^p}, \tag{2.4.27}$$

де $p = 2, 3, \ldots$, і коефіцієнти Фур'є $\overline{\varphi}_i(y)/\lambda_i^p$.

Повторне ядро $K_{(p)}(x, y) = \int_G K(x, \xi) K_{(p-1)}(\xi, y) \, \mathrm{d}\xi$ є джерелувато-зображувана функція і таким чином для нього має місце теорема Гільберта-Шмідта.

Доведемо деякі важливі рівності:

$$\begin{aligned} K_{(2)}(x, x) &= \int\limits_G K(x, \xi) K(\xi, x) \, \mathrm{d}\xi = \\ &= \int\limits_G K(x, \xi) \overline{K(x, \xi)} \, \mathrm{d}\xi = \\ &= \int\limits_G |K(x, \xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i^2}. \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

**Зауваження 2.4.3.1** — Останій перехід випливає з наслідку вище.

Проінтегруємо отримане співвідношення, отримаємо

$$\iint\limits_{G \times G} |K(x, y)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}. \tag{2.4.29}$$

**Теорема 2.4.3.2** (про збіжність білінійного ряду для ермітового неперервного ядра)
Ермітове неперервне ядро $K(x,y)$ розкладається в білінійний ряд

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \tag{2.4.30}$$

по своїх власних функціях, і цей ряд збігаються в нормі $L_2(G)$ по аргументу $x$ рівномірно для кожного $y \in \overline{G}$, тобто

$$\left\| K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right\|_{L_2(x\in G)} \overset{y\in\overline{G}}{\underset{p\to\infty}{\rightrightarrows}} 0. \tag{2.4.31}$$

*Доведення.*

$$\left\| K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right\|_{L_2(G)}^2 = \int\limits_G |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{p} \frac{|\varphi_i(y)|^2}{\lambda_i^2} \overset{y\in\overline{G}}{\underset{p\to\infty}{\rightrightarrows}} 0. \tag{2.4.32}$$

Додатково інтегруючи по аргументу $y \in G$ отримаємо збіжність вищезгаданого білінійного ряду в середньоквадратичному:

$$\iint\limits_{G\times G} \left( K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right)^2 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \xrightarrow[p\to\infty]{} 0. \tag{2.4.33}$$

□

### 2.4.4 Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду $\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f$, з ермітовим неперервним ядром

$$K(x,y) = K^\star(x,y). \tag{2.4.34}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots, \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \ldots$ — множина характеристичних чисел та ортонормована система власних функцій ядра $K(x,y)$.

Розкладемо розв'язок рівняння $\varphi$ по системі власних функцій ядра $K(x,y)$:

$$\begin{aligned}\varphi &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{K}\varphi, \varphi_i)\varphi_i + f = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, \mathbf{K}\varphi_i)\varphi_i + f = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i + f,\end{aligned} \tag{2.4.35}$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$(\varphi, \varphi_k) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_i)}{\lambda_i}(\varphi_i, \varphi_k) + (f, \varphi_k) = \lambda \frac{(\varphi, \varphi_k)}{\lambda_k} + (f, \varphi_k). \tag{2.4.36}$$

Отже,

$$(\varphi, \varphi_k)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) = (f, \varphi_k), \tag{2.4.37}$$

і тому

$$(\varphi, \varphi_k) = (f, \varphi_k)\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.4.38}$$

Таким чином має місце

**Теорема 2.4.4.1** (формула Шмідта)

Виконується співвідношення

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i - \lambda}\varphi_i(x) + f(x). \tag{2.4.39}$$

Розглянемо усі можливі значення $\lambda$:

1. Якщо $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, тоді існує єдиний розв'язок для довільного вільного члена $f$ і цей розв'язок представляється за формулою Шмідта.

2. Якщо $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+q-1}$ — співпадає з одним з характеристичних чисел кратності $q$, та при цьому виконуються умови ортогональності

$$(f, \varphi_k) = (f, \varphi_{k+1}) = \ldots = (f, \varphi_{k+q-1}) = 0 \tag{2.4.40}$$

тоді розв'язок існує (не єдиний), і представляється у вигляді

$$\varphi(x) = \lambda_k \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq \lambda_k}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i - \lambda_k} \varphi_i(x) + f(x) + \sum_{j=k}^{k+q-1} c_j \varphi_j(x), \tag{2.4.41}$$

де $c_j$ — довільні константи.

3. Якщо $\exists j : (f, \varphi_j) \neq 0,\ k \leq j \leq k+q-1$ то розв'язків не існує.

**Приклад 2.4.4.1**

Знайти ті значення параметрів $a$, $b$ для яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left( xy - \frac{1}{3} \right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y + ax^2 - bx + 1$$

має розв'язок для будь-якого значення $\lambda$.

*Розв'язок.* Знайдемо характеристичні числа та власні функції спряженого однорідного рівняння (ядро ермітове).

$$\varphi(x) = \lambda x \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \frac{\lambda}{3} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \lambda x c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2.$$

Маємо СЛАР:

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} y \left( \lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) \mathrm{d}y = \frac{2\lambda}{3} c_1, \\ c_2 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \left( \lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) \mathrm{d}y = -\frac{2\lambda}{3} c_2. \end{cases}$$

Її визначник

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2\lambda}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Тобто характеристичні числа

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

А відповідні власні функції

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = 1.$$

Умови ортогональності:

$$\begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1)x \, \mathrm{d}x = -\dfrac{2b}{3} = 0, \\ \int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1) \, \mathrm{d}x = \dfrac{2a}{3} + 2 = 0. \end{cases}$$

Тобто розв'язок існує для будь-якого $\lambda$ якщо

$$a = -3, \quad b = 0.$$