Лекція 6

Властивості власних чисел задачі Штурма – Ліувіля

[1, стор. 341 - 343]

Таким чином, теоремою 2 установлена еквівалентність задачі Штурма - Ліувіля (5.16) і задачі на власні значення для однорідного інтегрального рівняння (5.14′) з ермітовим неперервним ядром $G_1(x,\xi)$. При цьому власні значення λ_k задачі (5.16) пов'язані з характеристичними числами μ_k ядра $G_1(x,\xi)$ співвідношенням $\mu = \lambda + 1$, а відповідні їм власні функції $u_k(x),\ k = 1,2...$співпадають. Тому для задачі Штурма - Ліувіля справедливі всі положення теорії інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром.

А саме:

множина власних чисел λ_k не порожня та немає скінчених граничних точок;

всі власні числа λ_k дійсні та мають скінчену кратність;

власні функції $u_k \in C^2\left((0,l)\right) \cap C^1([0,l]), ...(u_k, u_j) = \delta_{k,j}, k, j = 1,2...$

всі $\lambda_k \geq 0$;

Останнє твердження випливає з додатної визначеності диференціального оператора Штурма – Ліувілля з відповідними граничними умовами, для цього оператора *всі власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.*

множина власних чисел злічена (не може бути скінчена);

Дійсно, якщо б множина була скінченою $\mu_1,...,\mu_N$, то для ядра $G_1(x,\xi)$ було вірним представлення: $G_1(x,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{u_i(x)u_i(\xi)}{\mu_i}$.

Але $u_k \in C^2((0,l)) \cap C^1([0,l])$, і тому таке представлення суперечить властивості функції Гріна $G_1(x,\xi)$ про наявність розриву першої похідної. Ця суперечність і доводить твердження.

кожне власне число має одиничну кратність;

Справді, нехай u_1 та u_2 – власні функції, які відповідають власному значенню μ_0. З граничної умови запишемо:

$\Rightarrow \quad \begin{cases} h_1 u_1(0) - h_2 u_1'(0) = 0 \\ h_1 u_2(0) - h_2 u_2'(0) = 0 \end{cases}$ - розглядатиме ці співвідношення як систему лінійних рівнянь відносно h_1, h_2. Визначник системи співпадає за величиною з визначником Вронського $\begin{vmatrix} u_1(0) & -u_1'(0) \\ u_2(0) & -u_2'(0) \end{vmatrix}$ = -w(0) $\neq$ 0, враховуючи лінійну незалежність власних функцій. Звідси випливає, що розв'язок лінійної системи тривіальний, тобто $h_1 = h_2 = 0$, що суперечить припущенню $h_1 + h_2 > 0$.

Тому ці розв'язки лінійно залежні. Це і означає, що μ_0 має одиничну кратність, тобто просте.

<u>**Теорема**</u> <u>**2**</u> (*Стеклова про розвинення в ряд Фур'є*) Будь – яка $f \in M_L$ розкладається в ряд Фур'є за системою власних функцій задачі Штурма –Ліувіля $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x)$ (5.18) І цей ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення: Покажемо, що f – джерелувато зображувана.

$$\begin{cases} L_1 f = Lf + f = h, \ h \in C(0,l) \cap L_2(0,l) \\ l_1 f\,|_{x=0} = l_2 f\,|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Функція f є розв'язком цієї граничної задачі, причому, $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора L_1. Позначимо через $G_1(x,\xi)$ функцію Гріна оператора L_1. Тоді має місце представлення $f(x) = \int_0^l G_1(x,\xi) h(\xi) d\xi$, $f(x)$- джерелувато зображувана. За теоремою Гілберта - Шмідта функція f розкладається в регулярно збіжний ряд Фур'є по власним функціям ядра $G_1(x,\xi)$. Але власні функції ядра $G_1(x,\xi)$ співпадають з власними функціями $\{u_k(x)\}$ оператора L.

Задача Штурма - Ліувіля з ваговим множником

[4, стор. 60 - 67]

$$\begin{cases} Lu = \lambda\rho(x)u, 0 < x < l \\ l_1 u|_{x=0} = l_2 u|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (5.19),$$

$\rho(x) > 0, \rho \in C([0,l])$, *$\rho$ - ваговий множник.*

З теореми 2 випливає представлення $u(x) = \lambda\int\limits_0^l \rho(\xi)G(x,\xi)u(\xi)d\xi$.

Інтегральне рівняння має неперервне, але не симетричне ядра, для його симетризації домножимо рівняння на $\sqrt{\rho(x)}$ і отримаємо

$$\sqrt{\rho(x)}u(x) = \lambda\int\limits_0^l \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}G(x,\xi)\cdot\sqrt{\rho(\xi)}u(\xi)d\xi \quad (5.20).$$

Позначимо $v(x) = \sqrt{\rho(x)}u(x)$, $G_\rho(x,\xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}G(x,\xi)$, отримаємо інтегральне рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$v(x) = \lambda\int\limits_0^l G_\rho(x,\xi)\cdot v(\xi)d\xi \quad (5.21).$$

Власні функції задачі Штурма – Ліувіля (5.19) пов'язані з власними функціями інтегрального рівняння (5.21) співвідношенням

$$\sqrt{\rho(x)}u_k(x) = v_k(x) \quad (5.22).$$

Має місце співвідношення $(v_k, v_i) = \delta_{i,k} = \int\limits_0^l u_k(x)\cdot u_i(x)\rho(x)dx = (u_k, u_i)_\rho$ - ваговий скалярний добуток.

Таким чином система власних функцій задачі Штурма – Ліувілля з ваговим множником (5.19) є ортонормованою у ваговому скалярному добутку $(u,v)_\rho$.

§6 Інтегральні рівняння першого роду.

[3, стор. 122 - 127]

Будемо розглядати інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_G K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \qquad (6.1).$$

Неважко перевірити, що розв'язок інтегрального рівняння (6.1) може існувати не для будь – якої неперервної функції $f(x)$. Дійсно, нехай наприклад $G=[a,b]$, а $K(x,y)=a_0(y)x^m + a_1(y)x^{m-1}+...a_m(y)$, тоді для будь – якої неперервної $\varphi(y)$, $\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = b_0x^m + b_1x^{m-1}+...b_m$. Це означає, що такий самий вигляд повинна мати і функція $f(x)$.

Ядра Шмідта

Будемо розглядати неперервне ядро $K(x,y)$ і спряжене до нього $K^*(x,y)$, яке задовольняє нерівності $\int_G\int_G |K(x,y)| dxdy < \infty$. Відповідні інтегральні оператори Фредгольма позначимо через $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}^*$. Введемо інтегральні оператори $\mathbf{K_1}=\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ та $\mathbf{K_2}=\mathbf{K}\mathbf{K}^*$, які є симетричними і додатними. Цим операторам відповідають ядра

$$K_1(x,y)=\int_G K^*(x,z)K(z,y)dz \quad K_2(x,y)=\int_G K(x,z)K^*(z,y)dz \qquad (6.2),$$

які називаються ядрами Шмідта.

Можна довести, що характеристичні числа ядер Шмідта $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ співпадають, позначимо їх через $\mu_k^2,\ k=1,2,...$. Позначимо через $u_k(x)$ та $v_k(x)$, $(k=1,2,...)$ ортонормовані власні функції ядра $K_1(x,y)$ та $K_2(x,y)$ відповідно.

Легко бачити, що $v_k=\mu_k\mathbf{K}u_k$, $\quad u_k=\mu_k\mathbf{K}^*v_k \qquad (6.3).$

Дійсно: $v_k=\mu_k^2\mathbf{K_2}v_k$, тоді $\mathbf{K}^*v_k=\mu_k^2\mathbf{K}^*\mathbf{K_2}v_k=\mu_k^2\mathbf{K}^*\mathbf{K}\mathbf{K}^*v_k=\mu_k^2\mathbf{K_1}\mathbf{K}^*v_k$ звідси випливає, що $\mathrm{C}_k\mathbf{K}^*v_k=u_k$. Оберемо константу з умови ортонормованості:

$$(u_k,u_k)=\mathrm{C}_k^2\left(\mathbf{K}^*v_k,\mathbf{K}^*v_k\right)=\mathrm{C}_k^2\left(v_k,\mathbf{K}\mathbf{K}^*v_k\right)=\mathrm{C}_k^2\left(v_k,\mathbf{K_2}v_k\right)=\frac{\mathrm{C}_k^2}{\mu_k^2}=1, \qquad \text{звідси}$$

$\mathrm{C}_k=\mu_k$. І перша рівність (6.3) доведена.

Виходячи з теореми Мерсера про регулярну збіжність білінійного ряду для неперервних ядер зі скінченою кількістю від'ємних характеристичних чисел, для ядер Шмідта має місце відоме розвинення :

$$K_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)\overline{u_k(y)}}{\mu_k^2} \qquad K_2(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)\overline{v_k(y)}}{\mu_k^2} \qquad (6.4).$$

Ряди (6.4) для неперервних ядер збігається абсолютно і рівномірно, а для ядер, які належать $L_2(G)$ в середньому квадратичному.

Покажемо, що для ядра $K(x,y)$ має місце білінійне розвинення за формулою:

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{v_i(x)\overline{u_i(y)}}{\mu_k} \qquad K^*(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\overline{v_i(y)}u_i(x)}{\mu_k} \qquad (6.5).$$

Дійсно, написане розвинення (6.5) представляє собою ряд Фур'є ядра по ортонормованой системі функцій $\{u_k(x)\}_{i=1,\infty}$, або $\{v_i(x)\}_{i=1,\infty}$ (дивись 6.3) і збігається в середньому по кожній змінній x, y. Тобто

$$\int_G\left|K(x,y)-\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i(x)\overline{u_i(y)}}{\mu_k}\right|^2dx=\int_G\left|K(x,y)\right|^2dx-\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|u_k(y)\right|^2}{\mu_k^2}=$$

$=K_1(y,y)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|u_k(y)\right|^2}{\mu_k^2}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left|u_k(y)\right|^2}{\mu_k^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. При доведенні цього представлення було використане друге співвідношення (6.3).

Інтегральні рівняння першого роду з симетричним ядром

Нехай $K(x,y)$ симетричне ядро, а $\lambda_i, u_i(x), i=1,2,...$ характеристичні числа та ортонормована система власних функцій цього ядра.

Означення Будемо називати симетричне ядро повним, якщо система його власних функцій є повною.

Якщо ядро не є повним, то інтегральне рівняння $\int_G K(x,y)\varphi(y)dy=0$ має розв'язок відмінний від нуля. Інтегральне рівняння з симетричним повним ядром може мати лише єдиний розв’язок.

Будемо шукати розв’язок інтегрального рівняння першого роду (6.1) у вигляді $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x)$ (6.6), де c_i невідомі константи. Вільний член рівняння представимо у вигляді ряду Фур’є по системі власних функцій ядра в результаті чого будемо мати рівність:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_G K(x,y)u_i(y)dy=\sum_{i=1}^{\infty}(f,u_i)u_i(x) \qquad (6.7),$$

або після спрощення $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{\lambda_i}u_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty}(f,u_i)u_i(x)$. Враховуючи лінійну незалежність власних функцій $u_i(x)$ отримаємо співвідношення $c_i=(f,u_i)\lambda_i$ (6.8)

<u>**Теорема 1**</u> *(Пікара про існування розв’язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром)* Нехай $K(x,y)$ повне ермітове ядро, $f\in L_2(G)$. Тоді для існування розв’язку рівняння (6.1) необхідно і достатньо щоб збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left|(f,u_k)\right|^2 \qquad (6.9).$$

Доведення: *Необхідність:* Нехай існує розв’язок $u(x)$ з $L_2(G)$ рівняння (6.1). Нехай c_k - коефіцієнти Фур’є розв’язку по системі власних функцій $\{u_k(x)\}_{\ k=1,\infty}$. Виходячи з (6.6) маємо, що ряд (6.9) збігається.

Достатність: Нехай ряд (6.9) збігається . Тоді існує єдина функція $u(x)\in L_2(G)$ з коефіцієнтами Фур’є $(f,u_i)\lambda_i$. Вона має вигляд $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(f,u_i)u_i(x)$ і задовольняє інтегральному рівнянню (6.1).

Несиметричні ядра.

Розглянемо рівняння з несиметричним ядром (6.1). Для представлення ядра скористаємось формулою (6.5), а для представлення вільного члена $f(x)$ застосуємо розвинення цієї функції в ряд Фур’є по системі власних функцій ядра $K_2(x,y)$, $v_k(x)$. В результаті будемо мати:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_G \frac{v_i(x)\overline{u_i(y)}}{\mu_i}\varphi(y)dy = \sum_{i=1}^{\infty}(f,v_i)v_i(x)$$

(6.10).

Ліву чистину можна записати у вигляді: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\varphi,u_i)v_i(x)}{\mu_i} = \sum_{i=1}^{\infty}(f,v_i)v_i(x)$. (6.11).

З останньої рівності можна записати співвідношення для коефіцієнтів Фур'є розв'язку: $(\varphi,u_i) = (f,v_i)\mu_i$ (6.12).

Таким чином, для існування розв'язку інтегрального рівняння (6.1) з несиметричним ядром необхідно і достатньо щоби вільний член $f \in L_2(G)$ можна було розкласти в ряд Фур'є по системі власних функцій $v_i, i=1,\infty$ ядра Шмідта $K_2(x,y) = \int_G K\ (x,z)K^*(z,y)dz$, а числовий ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|(f,v_i)\right|^2\mu_i^2 \qquad (6.13)$$

збігався.

Приклад Звести задачу Штурма – Ліувілля до інтегрального рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$\begin{cases} Ly \equiv -(1+e^x)y'' - e^x y' = \lambda x^2 y, \ 0<x<1 \\ y(0) - 2y'(0) = 0, \ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Розв'язок Побудуємо функцію Гріна оператора L. Розглянемо задачі Коші:

$$-(1+e^x)v_i'' - e^x v_i' = 0, \ i = 1,2$$

$$v_1(0) - 2v_1'(0) = 0, \quad v_2'(1) = 0$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння $-(1+e^x)y'' - e^x y' = 0$ має вигляд $c_1(x - \ln(1+e^x)) + c_2$. Тоді розв'язок першої задачі Коші

Розв'язки останніх можна записати у вигляді:

$$v_1(x) = a\left(x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2\right), \ a = const \ \ v_2(x) = b, \ b = const$$

Обчислимо визначник Вронського $\begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{ab}{1+e^x}$

Перевіримо тотожність Ліувілля $p(x)w(x) = ab = const$. Запишемо функцію Гріна за формулою:

$$G(x,\xi) = -\begin{cases} \left(x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2\right), 0 \le x \le \xi \le 1 \\ \left(\xi - \ln(1+e^\xi) + 1 + \ln 2\right), 0 \le \xi \le x \le 1 \end{cases}$$

Запишемо інтегральне рівняння $y(x) = \lambda \int_0^1 G(x,\xi)\xi^2 y(\xi)d\xi$.

Симетризуємо ядро інтегрального рівняння, помножимо обидві частини на x.

$x \cdot y(x) = \lambda \int_0^1 x \cdot G(x,\xi) \cdot \xi \cdot \xi \cdot y(\xi)d\xi$. Введемо позначення: $\omega(x) = xy(x),\ G_1(x,\xi) = xG(x,\xi)\xi$.

Отримаємо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром: $\omega(x) = \lambda \int_0^1 G_1(x,\xi)\omega(\xi)d\xi$