

Зміст

3.2	Математичні моделі теорії пружності	1
3.2.1	Закони рівноваги елемента поверхні	3
3.2.2	Закон рівноваги елемента об'єму	5
3.2.3	Тензор напружень, головні вісі тензора напружень	7
3.2.4	Тензор деформацій і закони його перетворення	10
3.2.5	Перетворення тензора деформацій до нових прямо- кутних координат	12

3.2 Математичні моделі теорії пружності

Відомо, що в природі існують пружні тіла, які можуть змінювати свою форму під дією прикладеної сили, а після припинення дії зовнішньої сили приймати початкову форму. Зовнішня сила викликає в пружних тілах:

- деформації;
- напруження.

Визначення 3.2.1 (деформації). *Деформацією* називають зміну положення одних точок тіла відносно інших.

Визначення 3.2.2 (напружень). *Напруженнями* називають внутрішні сили, які прагнуть повернути тіло в положення рівноваги.

Визначення 3.2.3 (математичної моделі теорії пружності). *Математична модель теорії пружності* — це система диференціальних рівнянь, які описують кількісний зв'язок між зміною форми тіла (деформаціями) і внутрішніми зусиллями (напруженнями).

Введемо позначення:

- x, y, z — координати точки у просторі;
- $U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t)$ — координати вектора зміщень в напрямку вісей Ox, Oy, Oz відповідно.

Зауваження 3.2.4 — *Вектор зміщень* показує зміщення точки тіла з координатами x, y, z в напрямку однієї з координат.

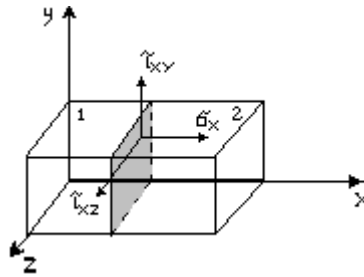
тих вісей в момент часу t від положення рівноваги.

- $F_x(x, y, z, t), F_y(x, y, z, t), F_z(x, y, z, t)$ — компоненти *вектора поверхневих сил* в напрямку вісей Ox, Oy, Oz відповідно.

Зауваження 3.2.5 — Вектор *поверхневих сил* показує які сили діють на поверхню тіла.

- $X(x, y, z, t), Y(x, y, z, t), Z(x, y, z, t)$ — вектори *об'ємних сил*;
- dG — елемент об'єму; dS — елемент поверхні.

Розглянемо просту фізичну модель взаємодії між собою двох частин пружного тіла. Нехай прямокутний паралелепіпед з нескінченно малим поперечним перерізом $dy \times dz$ витягнутий вздовж вісі x та умовно розділений на дві частини площиною ортогональною вісі x :



Охарактеризуємо силу з якою правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед через переріз $dy \times dz$ в площині yOz (на рис. площина взаємодії виділена сірим кольором).

Нехай $\mathbf{t}^{(x)} = (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ — *вектор сили*.

Визначення 3.2.6 (вектора сили). *Вектор сили* показує, з якою силою (на одиницю поверхні) правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед.

Зауваження 3.2.7 — При цьому σ_x — компонента, що може стиснути, або розтягувати лівий паралелепіпед, τ_{xy}, τ_{xz} — компоненти, що зрізають (точне визначення цього поняття буде надано далі) паралелепіпед в напрямках вісей Oy та Oz відповідно.

Аналогічно, для паралелепіпедів витягнутих вздовж вісей Oy та Oz можна розглянути сили, які діють в двох інших площинах xOz та xOy на одиницю площі цих перерізів та охарактеризувати їх векторами:

$$\mathbf{t}^{(y)} = (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}), \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{t}^{(z)} = (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z). \quad (3.2.2)$$

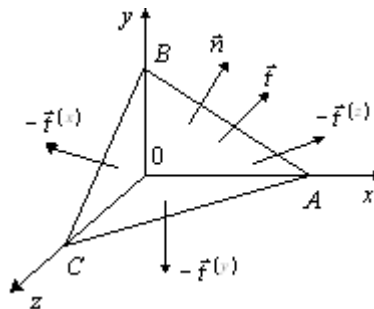
Для будь-якого паралелепіпеда з довжиною ребер dx, dy, dz а тим самим точки простору напружений стан тіла можна охарактеризувати матрицею

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

Зауваження 3.2.8 — При розгляді моделі взаємодії правого паралелепіпеда та лівого паралелепіпеда через спільний переріз має місце принцип рівнодії та протидії, тобто сила, з якою правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед рівна за величиною та протилежна за напрямком силі з якою лівий паралелепіпед діє на правий паралелепіпед. Сили, що діють на тіло обираються зі знаком плюс, якщо вони діють на переріз, який обмежує тіло з боку зростання значення координатної вісей і зі знаком мінус, якщо вони діють на поверхню, що обмежує тіло з боку спадання значень координатних вісей.

3.2.1 Закони рівноваги елемента поверхні

Розглянемо елементарну модель пружної взаємодії. Нехай всередині пружного тіла ми виділили нескінченно малий тетраедр $OABC$, \vec{n} — вектор зовнішньої нормалі до грані ABC , а S — площа цієї грані:



Нехай $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ — вектор поверхневої сили, що діє на одиницю площі грані ABC .

Вектор нормалі

$$\vec{n} = (\cos(\vec{n}, x), \cos(\vec{n}, y), \cos(\vec{n}, z)), \quad (3.2.4)$$

а

$$S \cdot \cos(\vec{n}, x), \quad S \cdot \cos(\vec{n}, y), \quad S \cdot \cos(\vec{n}, z) \quad (3.2.5)$$

— площі граней тетраедра, ортогональних вісям Ox , Oy , Oz .

Якщо тетраедр знаходиться в стані спокою, або рівномірного прямолінійного руху, то рівнодіюча сил, що діють на всі чотири грані дорівнює нулю, тобто:

$$\vec{f} \cdot S - \mathbf{t}^{(x)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, x) - \mathbf{t}^{(y)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, y) - \mathbf{t}^{(z)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, z) = 0. \quad (3.2.6)$$

Після скорочення на S отримаємо

Теорема 3.2.9 (векторна форма закону рівноваги елемента поверхні)

Виконується співвідношення:

$$\vec{f} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\vec{n}, z). \quad (3.2.7)$$

Запишемо закон рівноваги елемента поверхні в скалярному вигляді:

$$\sigma_x \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_x, \quad (3.2.8)$$

$$\tau_{yx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_y, \quad (3.2.9)$$

$$\tau_{zx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_z. \quad (3.2.10)$$

У випадку, коли елементарний трикутник ABC є частиною реальної зовнішньої поверхні тіла, то закон рівноваги елемента поверхні приймає вигляд:

$$\sigma_x \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_x, \quad (3.2.11)$$

$$\tau_{yx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_y, \quad (3.2.12)$$

$$\tau_{zx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_z, \quad (3.2.13)$$

де (F_x, F_y, F_z) — вектор поверхневих сил.

3.2.2 Закон рівноваги елемента об'єму

Розглянемо будь-який об'єм G та його елементарний об'єм dG .

Об'ємні сили, що діють на тіло об'єму G можна обчислити у вигляді

$$\iiint_G \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dG. \quad (3.2.14)$$

Через будь-яку елементарну поверхню тіла діє поверхнева сила $\vec{f} \cdot dS$, а результуюча поверхнева сила, яка діє на тіло через усю поверхню S , що обмежує тіло має вигляд

$$\iint_S \vec{f} dS, \quad (3.2.15)$$

або, в скалярному вигляді:

$$\iint_S (\mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\vec{n}, z)) dS. \quad (3.2.16)$$

Теорема 3.2.10 (векторний запис закону рівноваги елемента об'єму)

Для того щоб тіло знаходилося в стані спокою або рухалось рівномірно і прямолінійно, рівнодіюча об'ємної та поверхневої сил повинна дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{t}^{(x)} \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cos(\vec{n}, z)) dS + \\ + \iiint_G \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dG = 0. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Теорема 3.2.11 (скалярний запис закону рівноваги елементу об'єму)

$$\begin{cases} \iint_S (\sigma_x \cos(\vec{n}, x) + \tau_{yx} \cos(\vec{n}, y) + \tau_{zx} \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G X dG = 0, \\ \iint_S (\tau_{xy} \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cos(\vec{n}, y) + \tau_{zy} \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G Y dG = 0, \\ \iint_S (\tau_{xz} \cos(\vec{n}, x) + \tau_{yz} \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G Z dG = 0. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Зауваження 3.2.12 — Додатковою умовою рівноважного положення тіла окрім закону рівноваги елементу об'єму є виконання закону збереження моментів сил з якого випливає симетричність матриці (3.2.3):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (3.2.19)$$

Враховуючи факт симетрії, останній закон можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \iint_S (\mathbf{t}^{(x)}, \vec{n}) dS + \iiint_G X dG = 0, \\ \iint_S (\mathbf{t}^{(y)}, \vec{n}) dS + \iiint_G Y dG = 0, \\ \iint_S (\mathbf{t}^{(z)}, \vec{n}) dS + \iiint_G Z dG = 0. \end{cases} \quad (3.2.20)$$

де

$$\vec{n} = (\cos(\vec{n}, x), \cos(\vec{n}, y), \cos(\vec{n}, z)) \quad (3.2.21)$$

— вектор зовнішньої нормалі до поверхні.

Враховуючи формулу Остроградського-Гауса, кожен поверхневий інтеграл перетворимо в об'ємний, в результаті отримаємо

Теорема 3.2.13 (диференціальна форма запису закону рівноваги елемента об'єму)

Виконуються співвідношення:

$$\begin{cases} \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{t}^{(x)} + X) dG = 0, \\ \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{t}^{(y)} + Y) dG = 0, \\ \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{t}^{(z)} + Z) dG = 0. \end{cases} \quad (3.2.22)$$

Визначення 3.2.14 (тензора напружень). В подальшому симетричну матрицю (3.2.3) будемо називати *тензором напружень*.

3.2.3 Тензор напружень, головні вісі тензора напружень

Позначимо через $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ орти прямокутної система координат з координатними осями Ox, Oy, Oz .

Введемо нову систему координат з ортами $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ та осями $O\xi, O\eta, O\zeta$.

З'ясуємо, яким чином пов'язані вектори $\mathbf{t}^{(x)}, \mathbf{t}^{(y)}, \mathbf{t}^{(z)}$ які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у системі координат x, y, z , з векторами $\mathbf{t}^{(\xi)}, \mathbf{t}^{(\eta)}, \mathbf{t}^{(\zeta)}$ які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у новій системі координат ξ, η, ζ .

Згідно до загальних формул переходу від одного ортогонального базису до іншого, можна записати:

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{(\xi)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\xi, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\xi, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\xi, z), \\ \mathbf{t}^{(\eta)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\eta, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\eta, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\eta, z), \\ \mathbf{t}^{(\zeta)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\zeta, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\zeta, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\zeta, z). \end{cases} \quad (3.2.23)$$

Координати ортів нової системи координат мають значення:

$$\mathbf{e}_\xi = (\cos(\xi, x), \cos(\xi, y), \cos(\xi, z)), \quad (3.2.24)$$

$$\mathbf{e}_\eta = (\cos(\eta, x), \cos(\eta, y), \cos(\eta, z)), \quad (3.2.25)$$

$$\mathbf{e}_\zeta = (\cos(\zeta, x), \cos(\zeta, y), \cos(\zeta, z)). \quad (3.2.26)$$

Для знаходження будь-якої компоненти тензора напружень $\tau_{\alpha\beta}$, необхідно обчислити скалярний добуток

$$\tau_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{t}^{(\alpha)}, \mathbf{e}_\beta \rangle. \quad (3.2.27)$$

Так, наприклад,

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= (\sigma_x \cos(\eta, x) + \tau_{xy} \cos(\eta, y) + \tau_{xz} \cos(\eta, z)) \cdot \cos(\xi, x) + \\ &+ (\tau_{yx} \cos(\eta, x) + \sigma_y \cos(\eta, y) + \tau_{yz} \cos(\eta, z)) \cdot \cos(\xi, y) + \\ &+ (\tau_{zx} \cos(\eta, x) + \tau_{zy} \cos(\eta, y) + \sigma_z \cos(\eta, z)) \cdot \cos(\xi, z) = \\ &= \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} \tau_{ab} \cos(\xi, a) \cos(\eta, b). \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Отже, для довільної компоненти тензора напружень має місце

Теорема 3.2.15 (формула переходу до нової системи координат)

Виконуються співвідношення вигляду

$$\tau_{\alpha\beta} = \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} \tau_{ab} \cos(\alpha, a) \cos(\beta, b). \quad (3.2.29)$$

Зауваження 3.2.16 — Тут використані позначення $\tau_{\alpha\alpha} = \sigma_\alpha$, $\tau_{aa} = \sigma_a$.

Таким чином, тензор напружень — це симетрична матриця

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (3.2.30)$$

компоненти якої перетворюються за формулою вище при переході до нової прямокутної системи координат.

Поставимо задачу вибору нової прямокутної системи координат, для якої тензор напружень має діагональну форму. Нехай \mathbf{e}_{v_i} , $i = 1, 2, 3$ — орти нової прямокутної системи координат. Для того, щоб тензор T мав діагональну форму запису, кожен вектор $\mathbf{t}^{(v_i)}$, $i = 1, 2, 3$ в новій системі координат повинен бути колінарним відповідному орту \mathbf{e}_{v_i} , $i = 1, 2, 3$ тобто $\mathbf{t}^{(v_i)} = \sigma_i \vec{v}_i$.

Скористаємось формулою переходу від однієї до іншої системи координат та запишемо співвідношення для пошуку ортів:

$$\mathbf{t}^{(v)} = \sigma \mathbf{e}_v = \sigma (\cos(v, x), \cos(v, y), \cos(v, z)). \quad (3.2.31)$$

Запишемо останнє співвідношення в координатному вигляді:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(v, x) + \tau_{xy} \cos(v, y) + \tau_{xz} \cos(v, z) = \sigma \cos(v, x), \\ \tau_{yx} \cos(v, x) + \sigma_y \cos(v, y) + \tau_{yz} \cos(v, z) = \sigma \cos(v, y), \\ \tau_{zx} \cos(v, x) + \tau_{zy} \cos(v, y) + \sigma_z \cos(v, z) = \sigma \cos(v, z). \end{cases} \quad (3.2.32)$$

Для ортонормованого базису

$$\cos^2(v, x) + \cos^2(v, y) + \cos^2(v, z) = 1. \quad (3.2.33)$$

Тому в матрично-векторній формі попередні співвідношення мають вигляд

$$T \mathbf{e}_v = \sigma \mathbf{e}_v. \quad (3.2.34)$$

Ця задача на власні значення з симетричною матрицею має три дійсних власних числа, позначимо їх $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ тобто

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.35)$$

і три ортонормовані власні вектори

$$\mathbf{e}_{v_i} = (\cos(v_i, x), \cos(v_i, y), \cos(v_i, z)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2.36)$$

Визначення 3.2.17 (головних вісей тензора напружень). Координатні вісі, для яких тензор напружень має діагональний вигляд, називаються *головними вісями тензора напружень*.

Визначення 3.2.18 (головних компонент тензора напружень). Відповідні діагональні компоненти тензора напружень $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ називаються *головними компонентами тензора напружень*.

Використовуючи формулу переходу між системами координат, запишемо зв'язок між компонентами тензора напружень в декартових координатах x, y, z і головними компонентами тензора напружень:

$$\tau_{ab} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos(v_i, a) \cos(v_i, b), \quad (3.2.37)$$

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos^2(v_i, a), \quad (3.2.38)$$

де $x, b \in \{x, y, z\}$.

3.2.4 Тензор деформацій і закони його перетворення

Раніше були введені характеристики:

$$U(x, y, z, t), \quad V(x, y, z, t), \quad W(x, y, z, t) \quad (3.2.39)$$

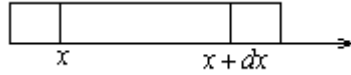
— зміщення точки з координатами (x, y, z) від положення рівноваги в напрямку відповідної вісі.

Розглянемо можливі види деформації.

1. Нормальні деформації.

Визначення 3.2.19 (нормальних деформацій). *Нормальні деформації* — зміна довжини в напрямку координатної вісі — характеризуються відносною зміною довжини відрізків.

Приклавши силу в напрямку вісі Ox , точка x змістилася і зайняла положення $x + U(x, \cdot, \cdot)$; точка $x + dx$ теж змістилася і зайняла положення $(x + dx) + U(x + dx, \cdot, \cdot)$:



Порахуємо відносне подовження відрізка dx після прикладення до нього напруження:

$$\begin{aligned} & \frac{(x + dx) + U(x + dx, \cdot, \cdot) - x - U(x, \cdot, \cdot) - dx}{dx} = \\ & = \frac{U(x + dx, \cdot, \cdot) - U(x, \cdot, \cdot)}{dx} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

Аналогічно, можна ввести характеристику відносного подовження в напрямку двох інших вісей.

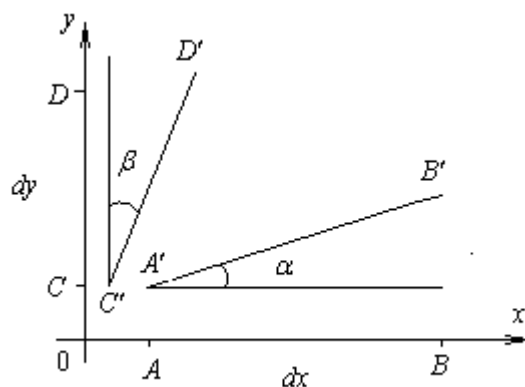
Отже, нормальні деформації характеризуються частинними похідними

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (3.2.41)$$

2. Зрізаючі (дотичні) деформації.

Визначення 3.2.20 (зрізаючих (дотичних) деформацій). *Зрізаючі (дотичні) деформації* будемо характеризувати абсолютною зміною кутів між відрізками в кожній з трьох координатних площин, які до початку дії напружень були ортогональними.

Розглянемо фізичну модель. Нехай відрізки AB та CD довжини dx та dy відповідно після дії прикладених сил зайняли положення $A'B'$ та $C'D'$ відповідно:



Точка A змістилася на відстань $V(x, \cdot, \cdot)$, а точка B змістилася на відстань $V(x + dx, \cdot, \cdot)$.

Тоді

$$\frac{V(x + dx, \cdot, \cdot) - V(x, \cdot, \cdot)}{dx} = \tan \alpha \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3.2.42)$$

тому

$$\alpha \approx \tan \alpha = \partial V / \partial x. \quad (3.2.43)$$

Аналогічно $\beta \approx \partial U / \partial y$.

Сумарна зміна кута

$$\alpha + \beta \approx \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (3.2.44)$$

Позначимо

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma_{yx}. \quad (3.2.45)$$

Провівши аналогічні міркування щодо інших координатних площин отримаємо:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma_{zx}, \quad (3.2.46)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma_{zy}. \quad (3.2.47)$$

Позначимо також

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (3.2.48)$$

і $\gamma_{aa} = 2\varepsilon_a$.

В результаті повну деформацію у будь-якій точці простору можна охарактеризувати

Визначення 3.2.21 (тензора деформацій). Симетрична матриця

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (3.2.49)$$

називається симетричним *тензором деформацій*.

3.2.5 Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат

Вивчимо перетворення симетричного тензора деформацій при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої. Нехай $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ — вісі нової системи координат (замість Ox , Oy , Oz), а функції U' , V' , W' — зміщення в напрямку нових вісей.

Враховуючи формули переходу від одного ортогонального базису до іншого можемо записати:

$$\begin{cases} U' = U \cos(\xi, x) + V \cos(\xi, y) + W \cos(\xi, z), \\ V' = U \cos(\eta, x) + V \cos(\eta, y) + W \cos(\eta, z), \\ W' = U \cos(\zeta, x) + V \cos(\zeta, y) + W \cos(\zeta, z), \end{cases} \quad (3.2.50)$$

а також

$$\begin{cases} x = \xi \cos(\xi, x) + \eta \cos(\eta, x) + \zeta \cos(\zeta, x), \\ y = \xi \cos(\xi, y) + \eta \cos(\eta, y) + \zeta \cos(\zeta, y), \\ z = \xi \cos(\xi, z) + \eta \cos(\eta, z) + \zeta \cos(\zeta, z), \end{cases} \quad (3.2.51)$$

i

$$\begin{cases} \xi = x \cos(\xi, x) + y \cos(\xi, y) + z \cos(\xi, z), \\ \eta = x \cos(\eta, x) + y \cos(\eta, y) + z \cos(\eta, z), \\ \zeta = x \cos(\zeta, x) + y \cos(\zeta, y) + z \cos(\zeta, z). \end{cases} \quad (3.2.52)$$

У цих формулах

$$(\cos(\alpha, x), \cos(\alpha, y), \cos(\alpha, z)) = \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (3.2.53)$$

— координати ортів нового базису.

Знайдемо вирази для компонентів тензору у новій системі координатах: $\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha, \beta}$ при $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$.

Зокрема для ε_ξ отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{\partial U'}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cos(\xi, x) + \\ &+ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cos(\xi, y) + \\ &+ \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cos(\xi, z) = \\ &= \cos(\xi, x) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos(\xi, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(\xi, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(\xi, z) \right) + \\ &+ \cos(\xi, y) \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos(\xi, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(\xi, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(\xi, z) \right) + \\ &+ \cos(\xi, z) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \cos(\xi, x) + \frac{\partial W}{\partial y} \cos(\xi, y) + \frac{\partial W}{\partial z} \cos(\xi, z) \right). \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

Розкриваючи дужки і використовуючи відповідні позначення отримаємо наступну формулу:

$$\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_\xi = \sum_{a, b \in \{x, y, z\}} \gamma_{ab} \cos(\xi, a) \cos(\xi, b). \quad (3.2.55)$$

Отже у загальному вигляді доведена

Теорема 3.2.22 (формула перетворення тензора деформацій)

Виконуються співвідношення вигляду:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{a, b \in \{x, y, z\}} \gamma_{ab} \cos(\alpha, a) \cos(\beta, b), \quad (3.2.56)$$

де $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$.