Зміст

4.8.5 Потенціал подвійного шару та його пряме значення

Згідно до теореми 4.8.1 попередньої лекції, потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца (а також Лапласа)

$$W^k(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y \tag{4.8.62}$$

для будь-якої області, яка не має перетину з поверхнею S є функцією яка має похідні будь-якого порядку.

В точках поверхні S потенціали подвійного шару є невласним інтегралом і його поведінка залежить від властивості щільності та властивості поверхні інтегрування.

Теорема 4.8.5.1 (про пряме значення потенціалу подвійного шару)
Якщо S замкнена поверхня Ляпунова, $\sigma \in C(S)$, тоді потенціал подвійного шару (4.8.3), (4.8.3') має в будь-якій точці x поверхні S цілком визначене скінчене значення і це значення неперервно змінюється, коли точка x пробігає поверхню S.

Доведення. Оскільки $\sigma \in C(S)$, то σ — обмежена на поверхні S, таким чином

$$\begin{aligned} \left|\sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right| &\leq M \left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right| \leq \\ &\leq M\sqrt{1+k^2|x-y|^2} \left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|}\right| \leq \\ &\leq M_1 \left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|}\right| \end{aligned} \tag{4.8.63}$$

Згідно до теореми 5 лекції 24 інтеграл

$$\iiint\limits_S \left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{|x-y|}\right| \mathrm{d}S_y \tag{4.8.64}$$

існує, а таким чином існує інтеграл

$$W^k(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y \tag{4.8.65}$$

коли $x \in S$.

Покажемо тепер, що $W^k \in C(S)$. Розглянемо

$$K(x,y) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \tag{4.8.66}$$

як ядро інтегрального оператора.

Оскільки

$$K(x,y) = \frac{A(x,y)}{4\pi|x-y|^2} \cos(\vec{n}_y, y-x), \tag{4.8.67}$$

де

$$A(x,y) = (\mp ik|x-y|+1)e^{\pm ik|x-y|}, \tag{4.8.68}$$

то згідно (4.8.19) $\cos(\vec{n}_y, y-x)) \le c_1|x-y|^\alpha$. Таким чином

$$K(x,y) = \frac{A(x,y)\cos(\vec{n}_y, y-x)|x-y|^{-\alpha/2}}{4\pi|x-y|^{2-\alpha/2}} = \frac{A_1(x,y)}{|x-y|^{2-\alpha/2}} \tag{4.8.69}$$

є полярним ядром. А це в свою чергу забезпечує відображення неперервної на S щільності σ в неперервний на S потенціал подвійного шару W^k. □

> **Визначення 4.8.5.1.** Значення потенціалу подвійного шару в точках поверхні будемо називати *прямим значенням потенціалу подвійного шару* і позначатимемо його $\overline{W^k(x)}$, $x \in S$.

4.8.6 Інтеграл Гауса

> **Визначення 4.8.6.1.** *Інтегралом Гауса* будемо називати потенціал подвійного шару оператора Лапласа з щільністю $\sigma(y) = 1$, тобто
>
> $$W_0(x) = \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y. \tag{4.8.70}$$

Лема 4.8.6.1

Якщо S — замкнена поверхня Ляпунова, що обмежує область Ω, то інтеграл Гауса визначається наступною формулою:

$$W_0(x) = \begin{cases} -1, & x \in \Omega, \\ -1/2, & x \in S, \\ 0, & x \in \Omega'. \end{cases} \tag{4.8.71}$$

Доведення. Розглянемо випадок коли $x \in \Omega'$. В цьому випадку функція $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ — гармонічна в області Ω по аргументу x оскільки $y \in S$ то $x \neq y$. Згідно до властивості гармонічної функції маємо

$$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y = 0. \tag{4.8.72}$$

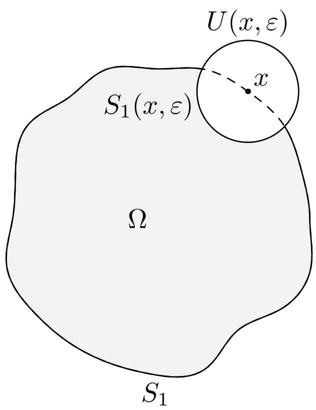
Для випадку, коли $x \in \Omega$ розглянемо область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus U(x,\varepsilon)$. Функція $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ буде гармонічною в області Ω_ε і для неї має місце співвідношення

$$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y + \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y = 0. \tag{4.8.73}$$

Обчислимо значення

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y &= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \frac{\cos(\vec{n}_y, y-x)}{4\pi|x-y|^2} \, \mathrm{d}S_y = \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} (-1) \iint\limits_{S(x,\varepsilon)} \mathrm{d}S_y = 1. \end{aligned} \tag{4.8.74}$$

Випадок $x \in S$ можна дослідити, якщо розглянути область $\Omega_\varepsilon^1 = \Omega \setminus (\Omega \cap U(x,\varepsilon))$:



У ній функція $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ — гармонічна і записати інтеграл по замкненій поверхні S^1_ε яка обмежує область Ω^1_ε та спрямувати ε до нуля. □

Аналізуючи інтеграл Гауса легко бачити, що навіть у найпростішому випадку постійної щільності потенціал подвійного шару при переході через поверхню S має розрив. Наступна теорема вивчає поведінку потенціалу подвійного шару при підході до поверхні S зсередини та ззовні області.

Теорема 4.8.6.1 (про граничні значення потенціалу подвійного шару) Нехай S — замкнута поверхня Ляпунова, а σ — неперервна на S щільність, тоді потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца та Лапласа $W^k(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C(\overline{\Omega'}) \cap C(S)$ і його граничні значення при підході до поверхні S зсередини $W^k_{\text{inner}}(x)$ і ззовні $W^k_{\text{outer}}(x)$ задовольняють співвідношенням:

$$W^k_{\text{inner}}(x) = \overline{W^k(x)} - \frac{\sigma(x)}{2}, \tag{4.8.75}$$

$$W^k_{\text{outer}}(x) = \overline{W^k(x)} + \frac{\sigma(x)}{2}. \tag{4.8.76}$$

Доведення. Розглянемо потенціал подвійного шару

$$\begin{aligned} W^k(x) &= \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\, \mathrm{d}S_y = \\ &= \iint\limits_S \sigma(y)(1 \mp ik|x-y|)e^{\pm ik|x-y|} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|}\, \mathrm{d}S_y. \end{aligned} \tag{4.8.77}$$

Позначимо $(1 \mp ik|x-y|)e^{\pm ik|x-y|} = \varphi(|x-y|)$.

Розглянемо довільну точку $x_0 \in S$ та запишемо потенціал подвійного шару у вигляді:

$$W^k(x) = W^k(x) \pm \iint\limits_S \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y = \\ = W_1^k(x) + \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0)W_0(x). \tag{4.8.78}$$

де

$$W_1^k(x) = \iint\limits_S \left(\sigma(y)\varphi(|x-y|) - \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.79}$$

а $W_0(x)$ — інтеграл Гауса. Покажемо, що W_1^k — неперервна функція в точці x_0. Візьмемо точку x_0 за центр сфери $U(x_0,\eta)$, яка розіб'є поверхню S на дві частини S' і S'', де $S' = S \cap U(x_0,\eta)$, а $S'' = S \setminus S'$. Враховуючи представлення поверхні $S = S' \cap S''$, запишемо

$$W_1^k(x) = W_1'^k(x) + W_1''^k(x) = \iint\limits_{S'} (\ldots)\,\mathrm{d}S'_y + \iint\limits_{S''} (\ldots)\,\mathrm{d}S''_y. \tag{4.8.80}$$

Покажемо, що $|W_1^k(x) - W_1^k(x_0)|$ можна зробити як завгодно малим за рахунок зближення точок x та x_0. Запишемо очевидну нерівність:

$$\left|W_1^k(x) - \overline{W_1^k(x_0)}\right| \le \left|W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)}\right| + \left|W_1'^k(x)\right| + \left|\overline{W_1'^k(x_0)}\right|. \tag{4.8.81}$$

Оцінимо праву частину нерівності. Оберемо радіус сфери η таким чином щоби

$$\left|\sigma(y)\varphi(|x-y|) - \sigma(x_0)\varphi(|x-x_0|)\right| \le \frac{\varepsilon}{3C_0}, \tag{4.8.82}$$

де ε — довільне мале число, а C_0 — константа з формулювання теореми 4.8.5, нерівність (4.8.61). Це можливо завдяки неперервності $\sigma(y)\varphi(|x-y|)$. Таким чином

$$\left|W_1'^k(x_0)\right| \le \frac{\varepsilon}{3C_0}\iint\limits_{S'}\left|\frac{\partial}{\partial \vec{n}_y}\frac{1}{4\pi|x-y|}\right|\mathrm{d}S'_y \le \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.8.83}$$

Аналогічна нерівність виконується і для $\left|\overline{W_1'^k(x_0)}\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$, як для частинного випадку положення точки x.

Зафіксуємо радіус сфери η і будемо вважати, що точка x достатньо близька до точки x_0 така, що $|x-x_0| \le \eta/2$, тоді на поверхні S'':

$$|x-y| \ge |y-x_0| - |x_0-x| \ge \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}. \tag{4.8.84}$$

Таким чином підінтегральна функція в інтегралі $W_1''^k(x)$ є неперервною і тому неперервним буде і сам інтеграл, тобто $\left|W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Це доводить неперервність $W_1''^k(x)$ в точці x_0.

З неперервності $W_1^k(x)$, можемо записати

$$W_{1\,\text{inner}}^k(x_0) = W_{1\,\text{outer}}^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)}. \tag{4.8.85}$$

Врахуємо представлення

$$W^k(x) = W_1^k(x) + \sigma(x_0)\varphi(|x - x_0|)W_0(x). \tag{4.8.86}$$

Обчислимо граничні значення потенціалу в точці x_0 зсередини та ззовні:

$$W_{\text{inner}}^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0\text{inner}}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} - \sigma(x_0), \tag{4.8.87}$$

$$W_{\text{outer}}^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0\text{outer}}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)}. \tag{4.8.88}$$

Оскільки

$$\overline{W_1^k(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} - \sigma(x_0)\overline{W_0(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} + \frac{\sigma(x_0)}{2}, \tag{4.8.89}$$

то з трьох останніх рівностей отримаємо:

$$W_{\text{inner}}^k(x) = \overline{W^k(x)} - \frac{\sigma(x)}{2}, \tag{4.8.90}$$

$$W_{\text{outer}}^k(x) = \overline{W^k(x)} + \frac{\sigma(x)}{2}. \tag{4.8.91}$$

□

4.8.7 Потенціал простого шару та його властивості

Нагадаємо, що потенціали простого шару для оператора Лапласа та Гельмгольца записуються у вигляді

$$V(x) = \iint\limits_S \frac{\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \qquad V^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.92}$$

Вивчимо властивості цих потенціалів в усьому евклідовому просторі.

Теорема 4.8.7.1 (про неперервність потенціалу простого шару)

Якщо S — замкнута поверхня Ляпунова, а μ вимірювана і обмежена на S, то потенціал простого шару оператора Лапласа та Гельмгольца є функцією неперервною в усьому евклідовому просторі.

Доведення. Оскільки властивості потенціалів в будь-якій точці простору, яка не належить поверхні S досліджувались в теоремі 4.8.1, то встановити неперервність потенціалу простого шару необхідно лише в точках поверхні S.

Побудуємо сферу Ляпунова $S(x, d)$ і нехай $S'_d(x)$ — частина поверхні S, яка знаходиться всередині сфери Ляпунова. Тоді потенціал простого шару

$$V^k(x) = \iint\limits_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y + \iint\limits_{S\setminus S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.93}$$

У другому інтегралі підінтегральна функція є неперервна і обмежена , а значить цей інтеграл існує.

Для оцінки першого інтегралу введемо локальну систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 з центром у точці x. Нехай $G'(x)$ — проекція $S'_d(x)$ на площину $\xi_3 = 0$, дотичну до поверхні S в точці x, тоді:

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y\right| &\le \iint\limits_{G'(x)} \frac{|\mu(\xi_1,\xi_2)|\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2}{4\pi\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\cos(\vec{n}_y,\xi_3)} \le \\ &\le 2M\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{4\pi\rho} = Md.\end{aligned} \tag{4.8.94}$$

При оцінці інтегралу були використані оцінки (4.8.47) та оцінка

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}} \le \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} = \frac{1}{\rho}. \tag{4.8.95}$$

Таким чином потенціал простого шару дійсно існує в кожній точці простору $\mathbb{R}^3$.

Покажемо тепер неперервність потенціалу в точці $x \in S$.

Оберемо сферу Ляпунова $S(x,\eta)$, $\eta < d$. Тоді потенціал простого шару можна представити аналогічно (4.8.93) у вигляді:

$$V^k(x) = \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y + \iint\limits_{S\setminus S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \qquad (4.8.96)$$

Очевидно, що другий інтеграл

$$V_1^k(x) = \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \qquad (4.8.97)$$

є неперервною функцією і $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ така, що $|V_1^k(x) - V_1^k(x')| \leq \varepsilon/3$ як тільки $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$.

Покажемо, що

$$\left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y - \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \qquad (4.8.98)$$

при $|x - x'| < \delta$.

Очевидно, що

$$\left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y - \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| \leq$$
$$\leq \left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| + \left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}\,\mathrm{d}S_y \right|. \qquad (4.8.99)$$

Розглянемо другий інтеграл і виберемо точки x, x' так, що $|x - x'| < \eta/2$.

Введемо локальну систему координат з центром в точці x. Тоді нехай точка $y = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$. Тоді

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|y - x'|} \leq \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi'_1)^2 + (\xi_2 - \xi'_2)^2}} \leq \frac{1}{\rho} \qquad (4.8.100)$$

а також

$$\rho \leq |y - x'| = |y - x' + x - x| \leq |x - x'| + |x - y| \leq \eta + \frac{\eta}{2} = \frac{3\eta}{2}. \qquad (4.8.101)$$

Таким чином можна записати оцінку інтеграла

$$\left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| \le 2M \iint\limits_{G'_\eta(x)} \frac{\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2}{4\pi\sqrt{(\xi_1-\xi_1')^2+(\xi_2-\xi_2')^2}} \le \\ \le 2M \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{3\eta/2} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{4\pi\rho} = \frac{3\eta M}{2} \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.8.102}$$

за рахунок вибору достатньо маленького значення η.

Інтеграл

$$\left| \iint\limits_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \right| \le \frac{\varepsilon}{3}, \tag{4.8.103}$$

як частинний випадок попереднього інтегралу при $x' = x$. Таким чином встановлено, що $|V^k - V^k(x')| \le \varepsilon$, якщо $|x - x'| \le \delta$. □

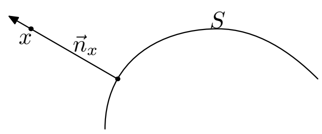
4.8.8 Нормальна похідна потенціалу простого шару

Будемо розглядати потенціал простого шару

$$V^k(x) = \iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \tag{4.8.104}$$

для оператору Гельмгольца.

Візьмемо довільну точку $x \notin S$, і проведемо через цю точку яку-небудь нормаль $\vec{n}_x$ до поверхні S:



Для такого випадку в точці x, можна обчислити похідну по напрямку нормалі $\vec{n}_x$ від потенціалу простого шару, яку обчислюють шляхом диференціювання підінтегральної функції

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \iint\limits_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y = \iint\limits_S \mu(y)\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.105}$$

Обчислимо вираз

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{\pm ik|x-y|-1}{4\pi|x-y|^2}\cdot e^{\pm ik|x-y|}\sum_{j=1}^{3}\frac{x_j-y_j}{|x-y|}\cos(\vec{n}_x, x_j) = \\ = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(\vec{n}_x, x-y). \tag{4.8.106}$$

Теорема 4.8.8.1 (про пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару)

Якщо μ обмежена і вимірювана функція на поверхні Ляпунова S, то нормальна похідна потенціалу простого шару

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x} = \iint\limits_S \mu(y)\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(\vec{n}_x, x-y)\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.107}$$

має в кожній точці поверхні S цілком визначене скінчене значення, яке неперервно змінюється коли точка x пробігає поверхню S.

Визначення 4.8.8.1. Це значення називають *прямим значенням нормальної похідної потенціалу простого шару*, позначається $\overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x}}$, $x \in S$.

Доведення. При доведенні теореми будемо розглядати нормальну похідну потенціалу, як результат відображення щільності μ за допомогою інтегрального оператора з ядром

$$K(x,y) = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(\vec{n}_x, x-y). \tag{4.8.108}$$

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова, можна показати, що ця ядро є полярним, оскільки для достатньо малих значень $|x-y|$ виконується $\cos(\vec{n}_x, x-y) \le a_2|x-y|^\alpha$. Це означає, що

$$K(x,y) = \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}\cos(\vec{n}_x, x-y)|x-y|^{-\alpha/2}}{4\pi|x-y|^{2-\alpha/2}} = \\ = \frac{A(x,y)}{4\pi|x-y|^{2-\alpha/2}} \tag{4.8.109}$$

є полярним ядром. Далі використовуємо, що інтегральний оператор з полярним ядром відображає обмежену функцію у неперервну. ∎

Теорема 4.8.8.2 (про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару)

Якщо S замкнута поверхня Ляпунова, а μ неперервна на S щільність, то потенціал простого шару має на S граничні значення правильної нормальної похідної при підході до точки $x \in S$ зсередини та ззовні, і ці граничні значення можуть бути обчислені за формулами:

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_{\text{inner}}} = \overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}}} + \frac{\mu(x)}{2}, \tag{4.8.110}$$

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_{\text{outer}}} = \overline{\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}}} - \frac{\mu(x)}{2}. \tag{4.8.111}$$

Визначення 4.8.8.2. Граничні значення нормальної похідної в точці $x_0 \in S$ потенціалу простого шару зсередини $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_{\text{inner}}}$ та ззовні $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_{\text{outer}}}$ будемо називати *правильними*, якщо вони є граничними значеннями $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}}$ коли $x \to x_0$ вздовж нормалі $\vec{n}_{x_0}$ зсередини та ззовні відповідно.

Доведення. Розглянемо вираз, який представляє собою суму потенціалу подвійного шару і нормальної похідної потенціалу простого шару з однаковою щільністю $\mu(x)$:

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x} + W^k(x) = \iint\limits_S \mu(y) \left(\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y. \tag{4.8.112}$$

Можна показати, що ця функція змінюється неперервно, коли точка x перетинає поверхню S, рухаючись по нормалі до цієї поверхні в точці x.

Враховуючи цю неперервність при переході через поверхню вздовж нормалі , можемо записати:

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_{\text{inner}}} + W^k_{\text{inner}}(x_0) = \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_{\text{outer}}} + W^k_{\text{outer}}(x_0) = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \overline{W^k(x_0)}. \tag{4.8.113}$$

Звідси маємо:

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_{\text{inner}}} = \overline{W^k(x_0)} - W^k_{\text{inner}}(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} + \frac{\mu(x_0)}{2}. \tag{4.8.114}$$

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_{\text{outer}}} = \overline{W^k(x_0)} - W^k_{\text{outer}}(x_0) + \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} = \overline{\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x}} - \frac{\mu(x_0)}{2}. \tag{4.8.115}$$

□