

Зміст

2.4.5	Додатньо визначені ядра	1
2.5	Задача Штурма-Ліувілля. Теорема Стеклова	4
2.5.1	Функція Гріна оператора \mathbf{L}	5
2.5.2	Властивості функції Гріна	9
2.5.3	Зведення крайової задачі з оператором Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння	9

2.4.5 Додатньо визначені ядра

Визначення 2.4.5.1 (додатно-визначеного ядра). Неперервне ядро $K(x, y)$ називається *додатно-визначеним*, якщо $\forall f \in L_2(G): (\mathbf{K}f, f) \geq 0$, причому $(\mathbf{K}f, f) = 0 \iff \|f\|_{L_2(G)} = 0$.

Зауваження 2.4.5.1 — Довільне додатньо визначене ядро є ермітовим (його білінійна форма $(\mathbf{K}f, f)$ приймає дійсні значення).

Лема 2.4.5.1

Для того, щоб неперервне ядро було додатньо визначеним необхідно і достатньо, щоб його характеристичні числа були додатні.

Доведення. Необхідність: для власних функцій $(\mathbf{K}\varphi_k, \varphi_k) = 1/\lambda_k > 0$.

Достатність: Розглянемо $\mathbf{K}f$ як джерелувато-зображувану функцію, згідно до теореми Гілберта-Шмідта

$$\mathbf{K}f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \quad (2.4.42)$$

тоді

$$(\mathbf{K}f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} (\varphi_k, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k} > 0, \quad (2.4.43)$$

отже квадратична форма додатньо визначена.

Таким чином додатність характеристичних чисел є критерієм додатної визначеності ядра. \square

Лема 2.4.5.2

Довільне додатньо визначене неперервне ядро має характеристичні числа і для них має місце варіаційний принцип:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ (f, \varphi_i) = 0, i=1, k-1}} \frac{(\mathbf{K}f, f)_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.4.44)$$

де $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ — ортонормована система власних функцій.

Доведення. З теореми Гілберта Шмідта можна оцінити

$$\frac{(\mathbf{K}f, f)_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}^2} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_i)|^2}{\lambda_i \|f\|^2} \leq \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_i)|^2}{\|f\|^2} \leq \frac{1}{\lambda_k}. \quad (2.4.45)$$

(перша нерівність виконується оскільки λ_k — найменше характеристичне число в сумі, а друга випливає з нерівності Бесселя).

З іншого боку при $f = \varphi_k$ маємо

$$\frac{(\mathbf{K}\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}, \quad (2.4.46)$$

тобто існує функція на якій досягається верхня межа цієї нерівності. \square

Теорема 2.4.5.1 (Мерсера, про регулярну збіжність білінійного ряду для ермітових ядер зі скінченною кількістю від'ємних характеристичних чисел)

Якщо ермітове неперервне ядро $K(x, y)$ має лише скінчену кількість від'ємних характеристичних чисел, то його білінійний ряд

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i} \quad (2.4.47)$$

збігається в $\overline{G} \times \overline{G}$ абсолютно і рівномірно.

Доведення. Покажемо, що якщо ядро $K(x, y)$ — додатньо визначене, то $\forall x \in \overline{G}: K(x, x) \geq 0$. Оскільки $K(x, y)$ — ермітове, то $K(x, x) = \overline{K(x, x)}$ і є дійсною функцією. Якщо існує хоча б одна точка $x_0 \in \overline{G}$ така, що

$K(x_0, x_0) < 0$, то виходячи з неперервності знайдеться і деякий окіл цієї точки $U(x_0, x_0) \subset \overline{G} \times \overline{G}$ такий, що $\forall (x, y) \in U(x_0, x_0): \operatorname{Re} K(x, y) < 0$. Оберемо невід'ємну неперервну функцію $\varphi(x)$ яка відміна від нуля лише в $U(x_0, x_0)$ і отримаємо

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}\varphi, \varphi) &= \int_{U(x_0, x_0)} K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) \, dx \, dy = \\ &= \int_{U(x_0, x_0)} \operatorname{Re} K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) \, dx \, dy \leq 0. \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

Остання нерівність вступає в протиріччя з припущенням додатньої визначеності ядра, тобто теорему достатньо довести для додатньо визначених ядер.

Розглянемо ядро

$$K^p(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\overline{\varphi}_i(y) \varphi_i(x)}{\lambda_i}, \quad (2.4.49)$$

де p — номер останнього від'ємного характеристичного числа, так що усі λ_i , $i = p+1, p+2, \dots$ є додатніми. Таким чином ядро $K^p(x, y)$ є неперервним та додатньо визначеним. А це означає, що $\forall x \in \overline{G} : K^p(x, x) \geq 0$. Таким чином маємо нерівність:

$$\sum_{i=1}^N \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i} \leq K(x, x) \leq M, \quad x \in \overline{G}, N = p+1, p+2, \dots, \quad (2.4.50)$$

тобто ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \quad (2.4.51)$$

рівномірно збіжний.

Розглянемо білінійний ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \quad (2.4.52)$$

і доведемо його абсолютну і рівномірну збіжність за критерієм Коші. Використовуючи нерівність Коші-Буняківського маємо:

$$\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x) \overline{\varphi}_k(y)|}{\lambda_k} \leq \left(\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \cdot \sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k} \right)^{1/2} \quad (2.4.53)$$

Але оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \quad (2.4.54)$$

рівномірно збіжний, то білінійний ряд

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i} \quad (2.4.55)$$

збігається абсолютно і рівномірно (регулярно) в $\overline{G} \times \overline{G}$. \square

Зауваження 2.4.5.2 — Теорема Гільберта-Шмідта і її наслідки, встановлені для ермітового неперервного ядра, залишаються вірними і для ермітового слабо полярного ядра.

Зауваження 2.4.5.3 — Теорема Гільберта-Шмідта і формула Шмідта у випадку полярного ядра залишаються вірними, але з заміною рівномірної збіжності на середньоквадратичну.

2.5 Задача Штурма-Ліувілля. Теорема Стеклова

Постановка задачі Штурма-Ліувілля: нехай \mathbf{L} — диференціальний оператор другого порядку: задано рівняння

$$\mathbf{L}u = (-p(x)u')' + q(x)u = \lambda u, \quad 0 < x < l, \quad (2.5.1)$$

з крайовими умовами

$$l_1(u)|_{x=0} = h_1 u(0) - h_2 u'(0) = 0, \quad (2.5.2)$$

$$l_2(u)|_{x=l} = H_1 u(l) + H_2 u'(l) = 0, \quad (2.5.3)$$

де функція $p \in C^{(1)}([0, l])$, $p > 0$, функція $q \in C([0, l])$, $q \geq 0$, виконуються наступні умови на сталі: $h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0$, $h_1 + h_2 > 0$, $H_1 + H_2 > 0$, а також

$$M_L = \{u : u \in C^{(2)}(0, l) \cap C^{(1)}([0, l]), u'' \in L_2(0, l), l_1 u(0) = l_2 u(l) = 0\} \quad (2.5.4)$$

— область визначення оператора \mathbf{L} .

Визначення 2.5.0.1 (власних чисел і функцій задачі Штурма-Ліувіля). Знайти розв'язки задачі Штурма-Ліувіля означає знайти всі ті значення параметра λ , при яких крайова задача (2.5.1)–(2.5.4) має нетривіальний розв'язок. Ці значення називаються *власними значеннями* задачі Штурма-Ліувіля, а самі розв'язки — *власними функціями*.

2.5.1 Функція Гріна оператора \mathbf{L}

Будемо припускати, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора \mathbf{L} задачі Штурма-Ліувіля.

Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} (-p(x)u')' + q(x)u = f(x), & 0 < x < l \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Припустимо що $f \in C(0, l) \cap L_2(0, l)$.

З припущення, що $\lambda = 0$ не є власним числом випливає, що задача має єдиний розв'язок.

Розглянемо функції $v_i(x)$, $i = 1, 2$ — ненульові дійсні розв'язки однорідних задач Коші:

$$\begin{cases} (-p(x)v'_i(x))' + q(x)v'_i(x) = 0, & i = 1, 2 \\ l_1v_1|_{x=0} = l_2v_2|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (2.5.6)$$

З загальної теорії задач Коші випливає, що розв'язки цих задач Коші існують, тому $v_i(x)$ — двічі неперервно диференційовані функції.

Твердження 2.5.1.1

$v_1(x)$, $v_2(x)$ — лінійно незалежні.

Доведення. Припустимо що це не так і $v_1(x) = cv_2(x)$, тобто $v_1(x)$ задовольняє одночасно граничним умовам на лівому і правому краях. Тоді $v_1(x)$ — власна функція оператора \mathbf{L} , і відповідає власному числу $\lambda = 0$ що суперечить припущенню. \square

В цьому випадку визначник Вронського

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.5.7)$$

Будемо шукати розв'язок задачі методом варіації довільної сталої у вигляді:

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \quad (2.5.8)$$

Підставимо в рівняння:

$$(-p(c'_1v_1 + c'_2v_2 + c_1v'_1 + c_2v'_2)' + q(c_1v_1 + c_2v_2) = f. \quad (2.5.9)$$

Накладемо першу умову на коефіцієнти: $c'_1v_1 + c'_2v_2 = 0$, маємо:

$$-p'(c_1v'_1 + c_2v'_2) - p(c'_1v'_1 + c'_2v'_2 + c_1v''_1 + c_2v''_2) + q(c_1v_1 + c_2v_2) = f, \quad (2.5.10)$$

або

$$c_1Lv_1 + c_2Lv_2 - p(c'_1v'_1 + c'_2v'_2) = f, \quad (2.5.11)$$

оскільки $c_1\mathbf{L}v_1 = 0$, $c_2\mathbf{L}v_2 = 0$, то

$$-p(c'_1v'_1 + c'_2v'_2) = f, \quad (2.5.12)$$

отже

$$c'_1v'_1 + c'_2v'_2 = -\frac{f}{p}. \quad (2.5.13)$$

Таким чином c'_1 та c'_2 повинні задовольняти системі лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} c'_1v_1 + c'_2v_2 = 0, \\ c'_1v'_1 + c'_2v'_2 = -\frac{f}{p}, \end{cases} \quad (2.5.14)$$

визначник системи

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.5.15)$$

Зауваження 2.5.1.1 — Має місце рівність Ліувілля:

$$w(x) \cdot p(x) = w(0) \cdot p(0) = \text{const}. \quad (2.5.16)$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} c'_1(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -\frac{f}{p} & v'_2 \end{vmatrix} = \frac{v_2(x)f(x)}{p(0)w(0)}, \\ c'_2(x) = \frac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v'_1 & -\frac{f}{p} \end{vmatrix} = -\frac{v_1(x)f(x)}{p(0)w(0)}, \end{cases} \quad (2.5.17)$$

Знайдемо додаткові умови для диференціальних рівнянь вище:

$$l_1 u|_{x=0} = h_1(c_1(0)v_1(0) + c_2(0)v_2(0)) - \\ - h_2(c'_1(0)v_1(0) + c'_2(0)v_2(0) + c_1(0)v'_1(0) + c_2(0)v'_2(0)) = 0, \quad (2.5.18)$$

а враховуючи, що $c'_1(0)v_1(0) + c'_2(0)v_2(0) = 0$ маємо

$$c_1(0)(h_1v_1(0) - h_2v'_1(0)) + c_2(0)v'_2(0) = 0. \quad (2.5.19)$$

Оскільки перший доданок дорівнює нулю, то остання рівність виконується коли $c_2(0) = 0$, аналогічно отримуємо, що $c_1(l) = 0$.

Проінтегруємо систему дифурів що розглядається, отримаємо

$$c_1(x) = - \int_x^l \frac{f(\xi)v_2(\xi)}{p(0)w(0)} d\xi, \quad c_2(x) = - \int_0^x \frac{v_1(\xi)f(\xi)}{p(0)w(0)} d\xi \quad (2.5.20)$$

Тоді розв'язок крайової задачі буде мати вигляд:

$$u(x) = - \int_0^x \frac{v_1(\xi)v_2(x)f(\xi)}{p(0)w(0)} d\xi - \int_x^l \frac{f(\xi)v_1(x)v_2(\xi)}{p(0)w(0)} d\xi \quad (2.5.21)$$

Визначення 2.5.1.1 (функції Гріна). *Функція Гріна* визначається наступним чином:

$$G(x, \xi) = - \frac{1}{p(0)w(0)} \begin{cases} v_1(\xi)v_2(x), & 0 \leq \xi \leq x \leq l, \\ v_1(x)v_2(\xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq l. \end{cases} \quad (2.5.22)$$

Отже розв'язок крайової задачі можна записати у вигляді

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.5.23)$$

$G(x, \xi)$ називається функцією Гріна оператора Штурма-Ліувіля. Попередні міркування доводять наступну лему.

Лема 2.5.1.1

Якщо $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувіля, то розв'язок крайової задачі існує та єдиний і представляється за формулою

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.5.24)$$

через функцію Гріна.

2.5.2 Властивості функції Гріна

Властивості 2.5.2.1 (функції Гріна)

Можна показати, що:

1.
 - $G(x, \xi) \in C([0, l] \times [0, l])$;
 - $G(x, \xi) \in C^{(2)}(0 < x < \xi < l)$;
 - $G(x, \xi) \in C^{(2)}(0 < \xi < x < l)$.
2. Симетричність: $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, $x, \xi \in [0, l] \times [0, l]$.
3. На діагоналі $x = \xi$ має місце розрив першої похідної:

$$\frac{\partial G(\xi + 0, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi - 0, \xi)}{\partial x} = -\frac{1}{p(\xi)}, \quad (2.5.25)$$

да $\xi \in (0, l)$.

4. Поза діагоналлю $x = \xi$ функція Гріна задовольняє однорідному диференціальному рівнянню $\mathbf{L}_x G(x, y) = 0$.
5. На бічних сторонах квадрату $[0, l] \times [0, l]$ функція Гріна $G(x, y)$ задовольняє граничним умовам $l_1 G|_{x=0} = l_2 G|_{x=l} = 0$.
6. Функція $G(x, \xi)$ є розв'язком неоднорідного рівняння:

$$\mathbf{L}_x G(x, \xi) = -\delta(x - \xi), \quad (2.5.26)$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака.

2.5.3 Зведення крайової задачі з оператором Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння

Розглянемо крайову задачу з параметром

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = (-p(x)u')' + q(x)u = f(x) + \lambda u, \\ l_1(u)|_{x=0} = 0, \\ l_2(u)|_{x=l} = 0, \\ f \in C(0, l) \cap L_2(0, l), \end{cases} \quad (2.5.27)$$

і покажемо що вона може бути зведена до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з дійсним, симетричним та неперервним ядром $G(x, \xi)$.

Теорема 2.5.3.1 (про еквівалентність крайової задачі для рівняння другого порядку інтегральному рівнянню з ермітовим ядром)

Крайова задача при умові, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора \mathbf{L} , еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду:

$$u(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi + \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad u \in C([0, l]), \quad (2.5.28)$$

де $G(x, \xi)$ — функція Гріна оператора \mathbf{L} із задачі (2.5.27).

Доведення. Необхідність. Нехай виконуються умови крайової задачі, тоді з леми 2.5.1.1 із заміною правої частини $f \mapsto f + \lambda u$ розв'язок крайової задачі можемо представити у вигляді:

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) (\lambda u(\xi) + f(\xi)) d\xi, \quad (2.5.29)$$

тобто $u(x)$ задовольняє вищенаведеному інтегральному рівнянню.

Достатність. Нехай має місце інтегральна рівність і $u_0(x)$ — її розв'язок. Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f + \lambda u_0, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

За лемою 2.5.1.1, єдиний розв'язок цієї задачі задається формулою

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) u_0(\xi) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (2.5.30)$$

звідки випливає, що u_0 задовольняє рівнянню $\mathbf{L}u_0 = f + \lambda u_0$, таким чином $u(x) = u_0(x)$ тобто u_0 є розв'язком вищенаведеної крайової задачі. \square

У випадку коли $f \equiv 0$, ця крайова задача перетворюється в задачу Штурма-Ліувіля

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = \lambda u, & 0 < x < l, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (2.5.31)$$

Задача Штурма-Ліувіля еквівалентна задачі про знаходження характеристичних чисел та власних функцій для однорідного інтегрального рівняння Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (2.5.32)$$

при умові, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора \mathbf{L} .

Покажемо як позбавитись цього припущення. Нехай маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = \lambda u, & 0 < x < l, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (2.5.33)$$

Легко бачити, що $(\mathbf{L}u, u) \geq 0$, тобто власні числа невід'ємні.

Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 u \equiv (-p(x)u')' + (q(x) + 1)u = \mu u, \\ l_1 u|_{x=0} = l_2 u|_{x=l}, \quad \mu = \lambda + 1. \end{cases} \quad (2.5.34)$$

Ця задача з точністю до позначень співпадає з початковою задачею Штурма-Ліувіля. Очевидно, що $\mu = 0$ не є власним числом нової задачі Штурма-Ліувіля (бо тоді $\lambda = -1$ могло би бути власним числом початкової задачі Штурма-Ліувілля).

Введемо диференціальний оператор

$$\mathbf{L}_1 u = (-pu')' + q_1 u = \mu u \quad (2.5.35)$$

Отже, нова задача еквівалентна попередній задачі при $\mu = \lambda + 1$, та еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x) = (\lambda + 1) \int_0^1 G_1(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad (2.5.36)$$

де $G_1(x, \xi)$ — функція Гріна оператора \mathbf{L}_1 .

Таким чином, ввівши оператор \mathbf{L}_1 і відповідну йому нову функцію Гріна $G_1(x, \xi)$, можна позбутися припущення, що $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувілля.

Приклад 2.5.3.1

Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) \varphi(y) dy + x,$$

де

$$K(x, y) = \begin{cases} x(y-1), & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y(x-1), & 0 \leq y \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Розв'язок. Розв'язок будемо шукати за формулою Шмідта. Знайдемо характеристичні числа та власні функції ермітового ядра. Запишемо однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x y(x-1) \varphi(y) dy + \lambda \int_x^1 x(y-1) \varphi(y) dy.$$

Продиференціюємо рівняння:

$$\varphi'(x) = \lambda \int_0^x y \varphi(y) dy + \lambda x(x-1) \varphi(x) + \lambda \int_x^1 (y-1) \varphi(y) dy - \lambda x(x-1) \varphi(x).$$

Обчислимо другу похідну:

$$\varphi''(x) = \lambda x \varphi(x) - \lambda(x-1) \varphi(x).$$

Або після спрощення $\varphi'' = \lambda \varphi$. Доповнимо диференціальне рівняння другого порядку крайовими умовами: легко бачити що

$$\varphi(0) = \lambda \int_0^0 y(0-1) \varphi(y) dy + \lambda \int_0^1 0(y-1) \varphi(y) dy = 0.$$

Аналогічно

$$\varphi(1) = \lambda \int_0^1 y(1-1) \varphi(y) dy + \lambda \int_1^1 1(y-1) \varphi(y) dy = 0.$$

Таким чином отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \varphi'' = \lambda\varphi, & 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Для знаходження власних чисел і власних функцій розглянемо можливі значення параметру λ :

1. $\lambda > 0$, $\varphi(x) = c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}x)$.

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sinh(\sqrt{\lambda}) & \cosh(\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} = -\sinh(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Єдиним розв'язком цього рівняння є $\lambda = 0$, яке не задовольняє, бо $\lambda > 0$. Це означає, що система рівнянь має тривіальний розв'язок і будь-яке $\lambda > 0$ не є власним числом.

2. $\lambda = 0$, $\varphi(x) = c_1x + c_2$. З граничних умов маємо, що $c_1 = c_2 = 0$.
Тобто $\lambda = 0$ не є власним числом.

3. $\lambda < 0$, $\varphi(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}) = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи прирівнюємо до нуля:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{-\lambda}) & \cos(\sqrt{-\lambda}) \end{vmatrix} = -\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Це рівняння має зліченну множину розв'язків

$$\lambda_k = -(\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок $c_2 = 0$, $c_1 = c_1$.

Таким чином нормовані власні функції задачі Штурма-Ліувілля мають вигляд $\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$.

Порахуємо коефіцієнти Фур'є:

$$f_n = (f, \varphi_n) = \sqrt{2} \int_0^1 x \sin(\pi n x) dx = \sqrt{2} \frac{(-1)^n}{\pi n}$$

Згідно до формули Шмідта розв'язок рівняння при $\lambda \neq \lambda_k$ має вигляд:

$$\varphi(x) = x - 2\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin(\pi k x)}{((\pi k)^2 + \lambda) \pi k}$$

При $\lambda = \lambda_k$ розв'язок не існує, оскільки не виконана умова ортогональності вільного члена до власної функції.