

Зміст

3.2.6	Закон Гука. Зв'язок між тензором деформації та тензором напружень	2
3.2.7	Початкові та граничні умови для рівнянь теорії пружності	6
3.2.8	Спрощення системи рівнянь теорії пружності	8
3.2.9	Математична модель поздовжніх коливань стрижня	9
3.2.10	Математична модель поперечних коливання струни	10

Порівнюючи формули переходу до нових координат для обох тензорів, бачимо їх ідентичність, тобто перетворення тензора напружень та тензору деформацій відбувається за однаковими формулами. Таким чином існує система координат h_1, h_2, h_3 , для якої тензор деформації має діагональний вигляд:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.57)$$

Визначення 3.2.5.1 (головних компонент тензора деформацій). $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ називаються *головними компонентами* тензора деформацій.

Визначення 3.2.5.2 (головних вісей тензора деформацій). h_1, h_2, h_3 називаються *головними вісями* тензора деформацій.

З формули переходу можна отримати зв'язок між компонентами тензору деформацій у прямокутній системі координат x, y, z та головними компонентами тензору деформацій:

$$\gamma_{ab} = \sum_{i=1}^3 2\varepsilon_i \cos(h_i, a) \cos(h_i, b), \quad (3.2.58)$$

$$\varepsilon_a = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \cos^2(h_i, a), \quad (3.2.59)$$

де $a, b \in \{x, y, z\}$.

Без доведення прийемо до уваги

Твердження 3.2.5.1

Для ізотропних тіл (тіл властивості яких в усіх напрямках однакові) головні вісі тензора деформації та тензора напружень співпадають:

$$\tau_{ab} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos(h_i, a) \cos(h_i, b), \quad (3.2.60)$$

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos^2(h_i, a), \quad (3.2.61)$$

де $a, b \in \{x, y, z\}$.

3.2.6 Закон Гука. Зв'язок між тензором деформації та тензором напружень

Розглянемо пружний паралелепіпед до нижньої грані якого прикладене напруження σ_1 у напрямку першої головної координатної вісі h_1 :

Згідно до спрощеного трактування закону Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad (3.2.62)$$

де E — модуль Юнга.

При подовженні паралелепіпеду у напрямку першої координатної вісі h_1 , відбувається стиснення паралелепіпеду у напрямках двох інших головних вісей і це стиснення пропорційне прикладеному напруженню σ_1 .

Прикладаючи напруження в напрямку двох інших головних координатних вісей σ_2 та σ_3 , відповідно будемо мати стиснення в напрямку h_1 . Це від'ємне подовження (стиснення) в напрямку першої координатної вісі, за рахунок напруження σ_2 дорівнює σ_2/mE , а за рахунок напруження σ_3 дорівнює σ_3/mE .

Отже, маємо загальний закон Гука:

Повна величина подовження в напрямку першої головної координатної вісі дорівнює

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right) = \frac{m+1}{Em} \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{m+1} \right) \quad (3.2.63)$$

Позначимо $S = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ і запишемо

Закон (Гука для головних компонентів тензора напружень та деформацій)

Зв'язок між головними компонентами тензора напружень та тензора деформації:

$$\varepsilon_i = \frac{m+1}{Em} \left(\sigma_i - \frac{S}{m+1} \right), \quad (3.2.64)$$

для $i = 1, 2, 3$.

Використовуючи формули переходу до нової системи координат отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{i=1}^3 \frac{m+1}{Em} \left(\sigma_i - \frac{S}{m+1} \right) \cos^2(h_i, x) = \\ &= \frac{m+1}{Em} \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos^2(h_i, x) - \frac{S}{m+1} \sum_{i=1}^3 \cos^2(h_i, x) \right) = \\ &= \frac{m+1}{Em} \left(\sigma_x - \frac{S}{m+1} \right). \end{aligned} \quad (3.2.65)$$

Неважко перевірити, що

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (3.2.66)$$

тобто S — інваріант для різних прямокутних систем координат.

Для поза діагональних елементів, зв'язок між компонентами тензора деформацій і тензора напружень має вигляд:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(m+1)}{Em} \sum_{i=1}^3 \left(\sigma_i - \frac{S}{m+1} \right) \cos(h_i, x) \cos(h_i, y) = \frac{2(m+1)}{Em} \cdot \tau_{xy}. \quad (3.2.67)$$

Позначимо $G = Em/2(m+1)$ та запишемо

Закон 3.2.6.1 (Гука для будь-якої прямокутної системи координат)

Залежність між тензором деформацій та тензором напружень у довільній прямокутній системі координат:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2G} \left(\sigma_a - \frac{S}{m+1} \right), \quad (3.2.68)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G}, \quad (3.2.69)$$

де $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$.

Запишемо обернену залежність тензора напружень від тензора деформації, нехай

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left(S - \frac{3S}{m+1} \right) = \frac{1}{2G} \left(\frac{(m-2)S}{m+1} \right), \quad (3.2.70)$$

тоді

$$S = \frac{2\theta(m+1)G}{m-2}. \quad (3.2.71)$$

Таким чином можна записати

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \frac{S}{m+1} = 2G\varepsilon_x + \frac{2G\theta}{m-2} = 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2} \right). \quad (3.2.72)$$

В результаті маємо

Закон 3.2.6.2 (Гука, еквівалентна форма)

Для довільної прямокутної системи координат:

$$\sigma_\alpha = 2G \left(\varepsilon_\alpha + \frac{\theta}{m-2} \right), \quad (3.2.73)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = G\gamma_{\alpha\beta}, \quad (3.2.74)$$

де $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$.

Запишемо замкнену систему диференціальних рівнянь, яка складається

з рівнянь (3.2.73), (3.2.74), закону рівноваги елементу об'єму

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (3.2.75)$$

і виразів які зв'язують компоненти тензору деформацій та вектор переміщень:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma_{yx}, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma_{zx}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma_{zy}, \\ \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.2.76)$$

Всі ці співвідношення складають систему п'ятнадцяти лінійних диференціальних рівнянь з п'ятнадцятьма невідомими функціями.

Найчастіше цю систему перетворюють до вигляду трьох рівнянь з трьома невідомими відносно вектора переміщень. Для здійснення перетворень з першої і третьої груп рівнянь виключимо тензор деформацій, та підставимо отриманий вираз для напружень через переміщення у другу групу рівнянь, отримаємо статичну систему теорії пружності.

Рівняння 3.2.6.1 (статичні рівняння теорії пружності)

Напружено-деформований стан тіла, при умові що воно знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, описується системою

$$G \left(\Delta \vec{U} + \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) \right) + \vec{X} = 0, \quad (3.2.77)$$

де $(x, y, z) \in \Omega$.

У випадку, коли одні частини тіла рухаються відносно інших, замість статичних рівнянь теорії пружності мають місце

Рівняння 3.2.6.2 (динамічні рівняння теорії пружності)

Напружено-деформований стан тіла, коли одні частини тіла рухаються відносно інших, описується системою

$$G \left(\Delta \vec{U} + \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) \right) + \vec{X} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}, \quad (3.2.78)$$

де $(x, y, z) \in \Omega$ і $t > 0$.

Зауваження 3.2.6.1 — Остання система рівнянь може бути отримана, якщо використати більш загальний вигляд закону рівноваги елементу об'єму в якому рівнодіюча поверхневих та об'ємних сил дорівнюють силі інерції (другий закон Ньютона):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = \rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (3.2.79)$$

де права частина формули представляє силу інерції.

3.2.7 Початкові та граничні умови для рівнянь теорії пружності

Для нестационарної системи теорії пружності в початковий момент часу необхідно задавати вектор переміщень

$$\vec{U}(x, y, z, 0) = \vec{U}_0(x, y, z) \quad (3.2.80)$$

та вектор початкових швидкостей

$$\frac{\partial \vec{U}(x, y, z, 0)}{\partial t} = \vec{U}_1(x, y, z). \quad (3.2.81)$$

Перейдемо тепер до крайових (граничних) умов:

- Якщо на границі області $(x, y, z) \in S = \partial\Omega$ відомий вектор зміщень, то задають граничні умови Діріхле.

Визначення 3.2.7.1 (умов Діріхле). *Умовами Діріхле* називають співвідношення

$$\vec{U}(x, y, z, t) \Big|_{(x, y, z) \in S} = \vec{W}(x, y, z, t). \quad (3.2.82)$$

- Якщо на поверхні тіла відомий (заданий) вектор поверхневих сил, то в точках границі згідно закону рівноваги елемента поверхні задають умови для напрямку x :

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{xa} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = F_x(x, y, z, t). \quad (3.2.83)$$

Аналогічно для напрямків y, z . Тобто маємо умови Неймана.

Визначення 3.2.7.2 (умов Неймана). *Умовами Неймана* називають співвідношення

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{ba} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = F_b(x, y, z, t), \quad (3.2.84)$$

де $b \in \{x, y, z\}$.

- Якщо точки границі закріплені пружно, наприклад за допомогою пружини, то у цьому випадку на границю діє поверхнева сила пропорційна зміщенню точок тіла і направлена в бік протилежний зміщенню. Таким чином задаються граничні умови Ньютона.

Визначення 3.2.7.3 (умов Ньютона). *Умовами Ньютона* називають співвідношення

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{ba} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = -K_b \cdot U_b(x, y, z, t) \Big|_{(x, y, z) \in S}, \quad (3.2.85)$$

де $b \in \{x, y, z\}$.

Зауваження 3.2.7.1 — Тут K_b — коефіцієнт пропорційності (пружного закріплення).

- Якщо на тіло закріплено пружно одночасно дії зовнішня сила, то маємо неоднорідну граничну умову третього роду, яка запишеться у вигляді:

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{ba} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = -K_b \cdot (U_b(x, y, z, t) + F_b(x, y, z, t))|_{(x, y, z) \in S}, \quad (3.2.86)$$

де $b \in \{x, y, z\}$.

3.2.8 Спрощення системи рівнянь теорії пружності

Відомо, що за теоремою Гельмгольца, векторне поле \vec{U} завжди можна представити у вигляді суми потенціального та соліноїдального векторних полів.

Тобто існують така скалярна функція φ та векторна функція $\vec{\Phi}$, які називають скалярним та векторним потенціалами відповідно що

$$\vec{U} = \nabla \varphi + \nabla \times \vec{\Phi}. \quad (3.2.87)$$

Для вектору масових сил \vec{X} теж застосуємо представлення у вигляді потенціальної та соліноїдальної складових:

$$\vec{X} = \nabla f + \nabla \times \vec{F}. \quad (3.2.88)$$

Підставимо ці представлення у динамічні рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\left(\frac{2G(m-1)}{(m-2)} \cdot \Delta \varphi + f - \rho \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \right) + \\ + \nabla \times \left(G \Delta \vec{\Phi} + \vec{F} - \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.89)$$

В результаті маємо скалярне та векторне хвильове рівняння:

Рівняння 3.2.8.1 (скалярне хвильове рівняння)

Виконується співвідношення для скалярного потенціалу:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(\frac{2G(m-1)}{(m-2)} \right) \Delta \varphi + f. \quad (3.2.90)$$

Рівняння 3.2.8.2 (векторне хвильове рівняння)

Виконується співвідношення для векторного потенціалу:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} = G \Delta \vec{\Phi} + \vec{F}. \quad (3.2.91)$$

3.2.9 Математична модель поздовжніх коливань стрижня

Нехай маємо пружний стрижень, який витягнутий вздовж вісі Ox і має довжину L . Відносно стрижня будемо припускати, що переміщення, деформації та напруження, які можуть виникати в стрижні направлені лише вздовж вісі Ox і не залежать від інших просторових координат.

Зрозуміло, що в цьому випадку для компонентів тензора напружень можна записати:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \sigma_x = \sigma_x(x, t). \quad (3.2.92)$$

Будемо нехтувати також змінами поперечного перерізу при деформаціях вздовж вісі Ox . В цьому випадку закон Гука має вигляд: $\varepsilon_x = \sigma_x / E$.

Спрощений вигляд закону рівноваги елементу об'єму з можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + F_x(x, t) = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (3.2.93)$$

Або враховуючи зв'язок тензора деформацій і вектору переміщень, будемо мати

Рівняння 3.2.9.1 (поздовжніх коливань стрижня)

Виконується рівняння

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F_x(x, t), \quad (3.2.94)$$

де $0 < x < L$ і $t > 0$.

В початковий момент часу необхідно задавати початкові зміщення та початкові швидкості в напрямку вісі Ox :

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad (3.2.95)$$

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = U_1(x). \quad (3.2.96)$$

Розглянемо можливі граничні умови на правому кінці стрижня:

- На правому кінці заданий закон його руху (зміщення):

$$U(L, t) = \varphi_2(t). \quad (3.2.97)$$

- На правий кінець діє задана сила. Враховуючи, що $\vec{n} = (1, 0, 0)$, можна записати $\sigma_x(L, t) = \psi_2(t)$, або, враховуючи спрощений закон Гука:

$$E \cdot \frac{\partial U(L, t)}{\partial x} = \psi_2(t). \quad (3.2.98)$$

- Правий кінець закріплений пружно. Можемо записати $\sigma_x(L, t) + K_x \cdot U(L, t) = 0$, або враховуючи закон Гука:

$$E \cdot \frac{\partial U(L, t)}{\partial x} + K_x \cdot U(L, t) = 0. \quad (3.2.99)$$

3.2.10 Математична модель поперечних коливання струни

Струною будемо називати абсолютно гнучку нитку, нескінченно малого поперечного перерізу, яка не протидіє згинанню.

Нехай струна має довжину L і в положенні рівноваги співпадає з відрізком вісі Ox , лівий кінець співпадає з початком координат.

Будемо вважати, що струна рівномірно натягнута з силою $T_0 = \text{const}$, і може здійснювати коливання лише в одній площині.

Будемо розглядати лише малі коливання, тобто такі, коли відхилення точок струни від положення рівноваги є величинами першого порядку малості, при цьому величинами більш високого порядку малості будемо нехтувати.

Припущення про абсолютну гнучкість струни означає, що при відхиленні точок струни від положення рівноваги сила натягу весь час направлена по дотичній до миттєвого профілю струни.

Введемо позначення:

- ρ — лінійна щільність точок струни (const);
- $u(x, t)$ — відхилення точок струни від положення рівноваги в точці (x, t) ;
- $f(x, t)$ — інтенсивність зовнішніх сил.

Запишемо рівняння руху для елементарної частини струни $(x, x + \Delta x)$ в проекції на вісь u . Підрахуємо наскільки змінилася довжина частини струни, між перерізами x і $x + \Delta x$. Згідно до відомої формули математичного аналізу можемо записати, що довжина дуги обчислюється

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx dx. \quad (3.2.100)$$

Таким чином зміною довжини дуги струни з точністю до членів другого порядку малості можна нехтувати.

Це в свою чергу означає, що за законом Гука сила натягу залишається постійною в кожному перерізі струни, тобто $T(x, t) = T_0$.

Виділимо сили, які діють на елементарну частину струни.

Проекція сили натягу в перерізі $x + \Delta x$ на вісь вздовж якої відбувається рух точок струни (вісь u) дорівнює $T_0 \sin \alpha(x + \Delta x, t)$, а в перерізі x дорівнює $-T_0 \sin \alpha(x, t)$, де $\sin \alpha(x, t)$ — синус кута між дотичною і додатнім напрямом вісі x . Для малих кутів $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \partial u / \partial x$.

Таким чином рівнодіючу сил натягу можна записати у вигляді

$$T_0(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)). \quad (3.2.101)$$

Зовнішня сила яка діє на виділений елемент струни дорівнює $f(\xi, t)\Delta x$.

Згідно до другого закону Ньютона рівнодіюча зовнішніх сил повинна дорівнювати силі інерції $F = ma$.

Сила інерції елементарного відрізка струни має вигляд:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2}, \quad (3.2.102)$$

де ξ — якась середня точка, тобто $\xi \in (x, x + \Delta x)$.

Таким чином згідно до закону Ньютона можна записати рівняння руху:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = T_0(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)) + f(\xi, t)\Delta x. \quad (3.2.103)$$

Поділивши це рівняння на Δx і спрямувавши його до нуля отримаємо

Рівняння 3.2.10.1 (коливання струни)

Виконується рівняння

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3.2.104)$$

де $0 < x < L$, і $t > 0$.

Додаткові умови для рівняння коливання струни полягають в необхідності задавати початкове відхилення точок струни і початкові швидкості точок струни:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.2.105)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0(x), \quad (3.2.106)$$

для $0 < x < L$.

Окрім початкових умов необхідно задавати умови на кінцях струни. Найбільш поширеними умовами є:

- Кінець струни рухаються за заданим законом;
- На кінець струни діє задана сила;
- Кінець струни закріплений пружно.

Запишемо відповідні граничні умови для випадку лівого кінця.

- Якщо лівий кінець рухається за заданим законом, то

$$u(0, t) = \varphi_1(t). \quad (3.2.107)$$

- У випадку, коли на лівому кінці діє задана сила, то для отримання граничної умови можна записати рівняння руху для елементарного відрізка $[0, \Delta x]$ яке матиме вигляд:

$$\rho \Delta x t \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = T_0 u_x(\Delta x, t) - \psi_1(t) + f(\xi, t), \quad (3.2.108)$$

де ξ — якась середня точка, тобто $\xi \in (0, \Delta x)$.

Спрямувавши $\Delta x \rightarrow 0$ отримаємо граничну умову

$$u_x(0, t) = \frac{\psi_1(t)}{T_0}. \quad (3.2.109)$$

- Для випадку пружного закріплення замість заданої сили $\psi_1(t)$ необхідно розглядати силу реакції пружини, яка пропорційна зміщенню і діє в напрямку протилежному зміщенню. Таким чином рівняння руху буде мати вигляд:

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = T_0 u_x(\Delta x, t) + ku(0, t) + f(\xi, t), \quad (3.2.110)$$

де ξ — якась середня точка, тобто $\xi \in (0, \Delta x)$.

Після граничного переходу отримаємо

$$u_x(0, t) + \frac{K}{T_0} u(0, t) = 0, \quad (3.2.111)$$

де k — коефіцієнт жорсткості пружини.