

Зміст

2.1.5	Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром	1
2.2	Теорема Фредгольма	8
2.2.1	Інтегральні рівняння з виродженим ядром	8

2.1.5 Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром

Визначення 2.1.21 (полярного ядра). Ядро $K(x, y)$ називається *полярним*, якщо воно представляється у вигляді:

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} \quad (2.1.40)$$

де $A \in C(\overline{G} \times \overline{G})$, $|x - y| = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$, $\alpha < n$ (n — розмірність евклідового простору).

Визначення 2.1.22 (слабо полярного ядра). Полярне ядро називається *слабо полярним*, якщо $\alpha < n/2$.

Нагадаємо, що для інтегральних рівнянь

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y) \varphi(x, y) dy + f(x) \quad (2.1.41)$$

з неперервним ядром $K(x, y)$ метод послідовних наближень мав вигляд:

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = f + \lambda \mathbf{K} \varphi_0, \quad \dots, \quad \varphi_{n+1} = f + \lambda \mathbf{K} \varphi_n. \quad (2.1.42)$$

Оцінки, що застосовувались для неперервних ядер не працюють для полярних ядер, тому що максимум полярного ядра рівний нескінченності (ядро необмежене в рівномірній метриці), отже, сформулюємо лему аналогічну лемі ?? для полярних ядер.

Лема 2.1.23

Інтегральний оператор \mathbf{K} з полярним ядром $K(x, y)$ переводить множину функцій $C(\overline{G}) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\overline{G})$ і при цьому має місце оцінка:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}, \quad (2.1.43)$$

де

$$N = \max_{x \in \overline{G}} \int_G |K(x, y)| dy. \quad (2.1.44)$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція $\mathbf{K}\varphi$ неперервна в точці x_0 . Оцінимо при умові $|x - x_0| < \eta/2$ вираз:

$$\begin{aligned} & \left| \int_G K(x, y) \varphi(y) dy - \int_G K(x_0, y) \varphi(y) dy \right| = \\ & = \left| \int_G \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} \varphi(y) dy - \int_G \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \varphi(y) dy \right| \leq \\ & \leq \int_G \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| |\varphi(y)| dy \leq (*) \end{aligned} \quad (2.1.45)$$

винесемо $\max \varphi(y)$ у вигляді $\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$, а інтеграл розіб'ємо на два інтеграли:

- інтеграл по $U(x_0, \eta)$ — кулі з центром в x_0 і радіусом η ;
- інтеграл по залишку $G \setminus U(x_0, \eta)$:

$$\begin{aligned} (*) \leq \|\varphi\|_{C(\overline{G})} & \left(\int_{U(x_0, \eta)} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| dy + \right. \\ & \left. + \int_{G \setminus U(x_0, \eta)} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| dy \right) \end{aligned} \quad (2.1.46)$$

Оцінимо тепер кожний з інтегралів:

$$\int_{U(x_0, \eta)} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| dy \leq A_0 \int_{U(x_0, \eta)} \left| \frac{dy}{|x - y|^\alpha} - \frac{dy}{|x_0 - y|^\alpha} \right|, \quad (2.1.47)$$

де A_0 — мах функції $A(x, y)$ на потрібній множині.

Введемо узагальнені сферичні координати з центром у точці x_0 в просторі \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{0,1} + \rho \cos \nu_1 \\ y_2 &= x_{0,2} + \rho \sin \nu_1 \cos \nu_2 \\ &\dots \\ y_{n-1} &= x_{0,n-1} + \rho \sin \nu_1 \cdot \dots \cdot \cos \nu_{n-1} \\ y_n &= x_{0,n} + \rho \sin \nu_1 \cdot \dots \cdot \sin \nu_{n-1} \end{aligned} \quad (2.1.48)$$

Якобіан переходу має вигляд:

$$\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{\rho, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}} = \rho^{n-1} \Phi(\sin \nu_1, \dots, \sin \nu_{n-1}, \cos \nu_1, \dots, \cos \nu_{n-1}), \quad (2.1.49)$$

де $0 \leq \rho \leq \eta$, $0 \leq \nu_i \leq \pi$, $i = \overline{1, n-2}$, $0 \leq \nu_{n-1} \leq 2\pi$.

Отримаємо

$$\int_{U(x_0, \eta)} \frac{dy}{|x_0 - y|^\alpha} = \sigma_n \int_0^\eta \frac{\rho^{n-1} d\rho}{\rho^\alpha} = \sigma_n \left. \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right|_0^\eta = \frac{\sigma_n \eta^{n-\alpha}}{n-\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.1.50)$$

де σ_n — площа поверхні одиничної сфери в n -вимірному просторі \mathbb{R}^n .

Оскільки $|x - x_0| < \eta/2$, то

$$\int_{U(x_0, \eta)} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} \leq \int_{U(x_0, 3\eta/2)} \frac{dy}{|x_0 - y|^\alpha} \leq \frac{\sigma_n}{n-\alpha} \left(\frac{3\eta}{2} \right)^{n-\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.1.51)$$

Оскільки

$$\frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} \in C \left(\overline{U(x_0, \eta/2)} \times \overline{G \setminus U(x_0, \eta)} \right), \quad (2.1.52)$$

то

$$\int_{G \setminus U(x_0, \eta)} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - \frac{A(x_0, y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| dy \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1.53)$$

Таким чином ми довели, що

$$\left| \int_G K(x, y) \varphi(y) \, dy - \int_G K(x_0, y) \varphi(y) \, dy \right| \leq \varepsilon, \quad (2.1.54)$$

тобто функція $\mathbf{K}\varphi$ неперервна в точці x_0 .

Доведемо оцінку $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_G K(x, y) \varphi(y) \, dy \right| &\leq \int_G |K(x, y)| |\varphi(y)| \, dy \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{C(\overline{G})} \int_G |K(x, y)| \, dy \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{C(\overline{G})} \max_{x \in \overline{G}} \int_G |K(x, y)| \, dy = \\ &= N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}, \end{aligned} \quad (2.1.55)$$

отже $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$.

Покажемо скінченність N . Розглянемо

$$\int_G |K(x, y)| \, dy \leq A_0 \int_G \frac{dy}{|x - y|^\alpha} \leq (*). \quad (2.1.56)$$

Для будь-якої точки x , існує радіус $D = \text{diam } G$ (рівний максимальному діаметру області G) такий, що в кулю з цим радіусом попадає будь-яка точка y , а тому

$$(*) \leq A_0 \int_{U(x, D)} \frac{dy}{|x - y|^\alpha} = A_0 \frac{\sigma_n}{n - \alpha} D^{n - \alpha}. \quad (2.1.57)$$

□

Теорема 2.1.24 (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з полярним ядром для малих значень параметру)

Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з полярним ядром $K(x, y)$ має єдиний розв'язок в класі неперервних функцій для будь-якого неперервного вільного члена f при умові

$$|\lambda| < \frac{1}{N} \quad (2.1.58)$$

і цей розв'язок може бути представлений рядом Неймана, який збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення. Сформулюємо умову збіжності ряду Неймана.

Нагадаємо, що ряд Неймана має вигляд

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f, \quad (2.1.59)$$

причому, з щойно доведеної леми, можемо записати

$$\|\varphi\|_{C(\overline{G})} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^i \cdot N^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})}. \quad (2.1.60)$$

Останній ряд — геометрична прогресія і збігається при умові $|\lambda| < 1/N$. \square

Лема 2.1.25

Нехай маємо два полярних ядра

$$K_i(x, y) = \frac{A_i(x, y)}{|x - y|_i^\alpha}, \quad \alpha_i < n, \quad i = 1, 2, \quad (2.1.61)$$

а область G обмежена, тоді ядро

$$K_3(x, y) = \int_G K_2(x, \xi) K_1(\xi, y) d\xi \quad (2.1.62)$$

також полярне, причому має місце співвідношення:

$$K_3(x, y) = \begin{cases} \frac{A_3(x, y)}{|x - y|^{\alpha_1 + \alpha_2 - n}}, & \alpha_1 + \alpha_2 - n > 0, \\ A_3(x, y) |\ln |x - y|| + B_3(x, y), & \alpha_1 + \alpha_2 - n = 0, \\ A_3(x, y), & \alpha_1 + \alpha_2 - n < 0, \end{cases} \quad (2.1.63)$$

де A_3, B_3 — неперервні функції.

Вправа 2.1.26. Доведіть цю лему.

З цієї леми випливає, що всі повторні ядра $K_{(p)}(x, y)$, полярного ядра $K(x, y)$ задовольняють наступним оцінкам:

$$K_{(2)}(x, y) = \begin{cases} \frac{A_2(x, y)}{|x - y|^{2\alpha - n}}, & 2\alpha - n > 0, \\ A_2(x, y) |\ln |x - y|| + B_2(x, y), & 2\alpha - n = 0, \\ A_2(x, y), & 2\alpha - n < 0, \end{cases}$$

$$K_{(3)}(x, y) = \begin{cases} \frac{A_3(x, y)}{|x - y|^{3\alpha - 2n}}, & 3\alpha - 2n > 0, \\ A_3(x, y) |\ln |x - y|| + B_3(x, y), & 3\alpha - 2n = 0, \\ A_3(x, y), & 3\alpha - 2n < 0, \end{cases}$$

$$K_{(p)}(x, y) = \begin{cases} \frac{A_p(x, y)}{|x - y|^{p\alpha - (p-1)n}}, & p\alpha - (p-1)n > 0, \\ A_p(x, y) |\ln |x - y|| + B_p(x, y), & p\alpha - (p-1)n = 0, \\ A_p(x, y), & p\alpha - (p-1)n < 0. \end{cases} \quad (2.1.64)$$

Зауваження 2.1.27 — Справді, тут $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, тому $\alpha_1 + \alpha_2$ замінено на 2α і аналогічно.

Легко бачити, що для $\forall \alpha, n$ існує p_0 таке, що починаючи з нього всі повторні ядра є неперервні. Справді, для виконання

$$p\alpha - (p-1)n < 0 \quad (2.1.65)$$

достатньо

$$(n - \alpha)p > n, \quad (2.1.66)$$

що в свою чергу рівносильно

$$p > \frac{n}{n - \alpha}. \quad (2.1.67)$$

Зауваження 2.1.28 — Остання нерівність дає не лише якісний факт існування такого p_0 , але і цілком кількісну оцінку:

$$p_0 = \left\lceil \frac{n}{n - \alpha} \right\rceil + 1. \quad (2.1.68)$$

Звідси маємо, що резольвента $\mathcal{R}(x, y, \lambda)$ полярного ядра $K(x, y)$ складається з двох частин:

- полярної складової $\mathcal{R}_1(x, y, \lambda)$;
- неперервної складової $\mathcal{R}_2(x, y, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x, y, \lambda) &= \mathcal{R}_1(x, y, \lambda) + \mathcal{R}_2(x, y, \lambda) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y) = \\ &= \sum_{i=1}^{p_0-1} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y) + \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y). \end{aligned} \quad (2.1.69)$$

Для доведення збіжності резольвенти, потрібно дослідити збіжність нескінченного ряду $\mathcal{R}_2(x, y, \lambda)$. Він сходиться рівномірно при $x, y \in \overline{G}$, $|\lambda| \leq 1/N - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, визначаючи неперервну функцію \mathcal{R} при $x, y \in \overline{G}$, $|\lambda| < 1/N$ і аналітичну по λ в крузі

$$|\lambda| < \frac{1}{N}. \quad (2.1.70)$$

Дійсно

$$\mathcal{R}_2(x, y, \lambda) = \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y). \quad (2.1.71)$$

У свою чергу,

$$|\lambda^{p_0+s-1} K_{(p_0+s)}(x, y)| \leq |\lambda|^{p_0+s-1} M_{p_0} N^s, \quad (2.1.72)$$

де

$$M_{p_0} = \max_{(x,y) \in \overline{G} \times \overline{G}} |K_{p_0}(x, y)|. \quad (2.1.73)$$

Таким чином ряд $\mathcal{R}_2(x, y, \lambda)$ мажорується геометричною прогресією, яка збігається при умові $|\lambda| < 1/N$.

2.2 Теореми Фредгольма

2.2.1 Інтегральні рівняння з виродженим ядром

Визначення 2.2.1 (виродженого ядра). Неперервне ядро $K(x, y)$ називається *виродженим*, якщо представляється у вигляді

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(y), \quad (2.2.1)$$

де $\{f_i\}_{i=1, \overline{N}}, \{g_i\}_{i=1, \overline{N}} \subset C(\overline{G})$, і $\{f_i\}_{i=1, \overline{N}}$ та $\{g_i\}_{i=1, \overline{N}}$ — лінійно незалежні системи функцій.

Визначення 2.2.2 (інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром). Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, u) \varphi(y) dy + f(x). \quad (2.2.2)$$

Підставимо вигляд виродженого ядра і отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_G \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(y) \varphi(y) dy + f(x) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_G g_i(y) \varphi(y) dy + f(x) = \\ &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

де позначено

$$c_j = \int_G g_j(y) \varphi(y) \, dy. \quad (2.2.4)$$

Підставимо тепер у c_j вираження $\varphi(x)$ через c_i :

$$\begin{aligned} c_j &= \int_G g_j(y) \varphi(y) \, dy = \\ &= \int_G g_j(y) \left(f(y) + \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(y) \right) \, dy = \\ &= \int_G g_j(y) f(y) \, dy + \lambda \sum_{i=1}^N c_i \int_G g_j(y) f_i(y) \, dy. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

В результаті отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$c_j = \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ji} c_i + a_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (2.2.6)$$

де позначено

$$\alpha_{ji} = \int_G g_j(y) f_i(y) \, dy, \quad a_j = \int_G g_j(y) f(y) \, dy. \quad (2.2.7)$$

Аналогічно для спряженого ядра

$$K^*(x, y) = \sum_{i=1}^N \bar{f}_i(y) \bar{g}_i(x), \quad (2.2.8)$$

і рівняння

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x, y) \psi(y) \, dy + g(x), \quad (2.2.9)$$

підставляючи вигляд виродженого ядра отримуємо

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \bar{g}_i(x) \int_G \bar{f}_i(y) \psi(y) \, dy + g(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(x) + g(x), \quad (2.2.10)$$

де позначено

$$d_i = \int_G \bar{f}_i(y) \psi(y) \, dy. \quad (2.2.11)$$

Знову підставляємо у d_j вираження $\psi(x)$ через d_i :

$$d_j = \int_G \bar{f}_j(y) \left(g(y) + \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(y) \right) dy, \quad (2.2.12)$$

і отримуємо СЛАР

$$d_j = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \beta_{ji} d_i + b_j, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.2.13)$$

де позначено

$$\beta_{ji} = \int_G \bar{f}_j(y) \bar{g}_i(y) dy, \quad b_j = \int_G \bar{f}_j(y) g(y) dy, \quad (2.2.14)$$

причому виконується умова

$$\beta_{ji} = \bar{\alpha}_{ij}. \quad (2.2.15)$$

Зауваження 2.2.3 — У матричному вигляді ці СЛАР запишуться так:

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c} + \vec{a}, \quad (2.2.16)$$

$$\vec{d} = \lambda A^* \vec{d} + \vec{b}, \quad (2.2.17)$$

з матрицями $E - \lambda A$ та $E - \bar{\lambda} A^*$ відповідно і визначником $D(\lambda) = |E - \lambda A| = |E - \bar{\lambda} A^*|$.

Дослідимо питання існування та єдиності розв'язку цих СЛАР.

- Нехай $D(\lambda) \neq 0$, $\text{rang } |E - \lambda A| = \text{rang } |E - \bar{\lambda} A^*| = N$, тоді ці СЛАР мають єдиний розв'язок для будь-яких векторів \vec{a} і \vec{b} відповідно, а тому інтегральні рівняння Фредгольма з полярними ядрами (як пряме так і спряжене) мають єдині розв'язки при будь-яких f та g відповідно, і ці розв'язки записуються за формулами

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x) + f(x), \quad (2.2.18)$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(x) + g(x). \quad (2.2.19)$$

- Нехай $D(\lambda) = 0$, $\text{rang } |E - \lambda A| = \text{rang } |E - \bar{\lambda} A^*| = q < N$, тоді однорідні СЛАР

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c}, \quad (2.2.20)$$

$$\vec{d} = \lambda A^* \vec{d}, \quad (2.2.21)$$

мають $N - q$ лінійно незалежних розв'язків $\vec{c}_s, \vec{d}_s, s = \overline{1, N - q}$, де вектор визначається формулою $\vec{c}_s = (c_{s1}, \dots, c_{sN})$, $\vec{d}_s = (d_{s1}, \dots, d_{sN})$, таким чином відповідні однорідні інтегральні рівняння Фредгольма II роду (як пряме так і спряжене) мають $N - q$ лінійно незалежних розв'язків які записуються за такими формулами:

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_{si} f_i(x), \quad s = \overline{1, N - q}, \quad (2.2.22)$$

$$\psi_s(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_{si} \bar{g}_i(x), \quad s = \overline{1, N - q}, \quad (2.2.23)$$

де $\varphi_s(x), \psi_s(x)$ — власні функції, а число $N - q$ — кратність характеристичного числа λ та $\bar{\lambda}$. Кожна з систем функцій $\varphi_s, \psi_s, s = \overline{1, N - q}$ лінійно незалежна, оскільки лінійно незалежними є системи функцій f_i та g_i і лінійно незалежні вектори \vec{c}_s і $\vec{d}_s, s = \overline{1, N - q}$.

- Нагадаємо одне з формулювань теореми Кронекера-Капеллі:

Теорема 2.2.4 (Кронекера-Капеллі)

Для існування розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно і достатньо що би вільний член рівняння був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння.

Для нашого випадку цю умову можна записати у вигляді

$$(\vec{a}, \vec{d}_s) = \sum_{i=1}^N a_i \bar{d}_{si} = 0, \quad \forall s = \overline{1, N - q}. \quad (2.2.24)$$

Покажемо, що для виконання умови $(\vec{a}, \vec{d}_s) = 0, s = \overline{1, N - q}$ необхідно і достатньо, щоб вільний член прямого інтегрального рівняння Фредгольма II роду був ортогональним розв'язкам спряженого однорідного рівняння тобто

$$(f, \psi_s) = 0, \quad s = \overline{1, N - q} \quad (2.2.25)$$

Дійсно, маємо:

$$\begin{aligned}
(f, \psi_s) &= \int_G f(x) \overline{\psi_s}(x) \, dx = \\
&= \lambda \sum_{i=1}^N \bar{d}_{si} \int_G f(x) g_i(x) \, dx = \\
&= \lambda \sum_{i=1}^N a_i \bar{d}_{si} = \\
&= \lambda(\vec{a}, \vec{d}_s) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

для всіх $s = \overline{1, N-q}$.

В цьому випадку розв'язок СЛАР не єдиний, і визначається з точністю до довільного розв'язку однорідної системи рівнянь, тобто з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних векторів характеристичного числа λ :

$$\vec{c} = \vec{c}_0 + \sum_{i=1}^{N-q} \gamma_i \vec{c}_i, \tag{2.2.27}$$

де γ_i — довільні константи, \vec{c}_0 — будь-який розв'язок неоднорідної системи рівнянь $\vec{c}_0 = \lambda A \vec{c}_0 + \vec{a}$, тоді розв'язок інтегрального рівняння можна записати у вигляді:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{N-q} \gamma_i \varphi_i(x), \tag{2.2.28}$$

де φ_0 — довільний розв'язок неоднорідного рівняння $\varphi_0 = \lambda \mathbf{K} \varphi_0 + f$.

Отже доведені такі теореми:

Теорема 2.2.5 (Перша теорема Фредгольма для вироджених ядер)

Якщо $D(\lambda) \neq 0$, то інтегральне рівняння Фредгольма II роду та спряжене до нього мають єдині розв'язки для довільних вільних членів f та g з класу неперервних функцій.

Теорема 2.2.6 (Друга теорема Фредгольма для вироджених ядер)

Якщо $D(\lambda) = 0$, то однорідне ($f \equiv 0$) рівняння Фредгольма другого роду і спряжене до нього ($g \equiv 0$) мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків рівну $N - q$, де $q = \text{rang}(E - \lambda A)$.

Теорема 2.2.7 (Третя теорема Фредгольма для вироджених ядер)

Якщо $D(\lambda) = 0$, то для існування розв'язків рівняння Фредгольма II роду необхідно і достатньо, щоб вільний член f був ортогональним усім розв'язкам однорідного спряженого рівняння. При виконанні цієї умови розв'язок існує та не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій характеристичного числа λ .

Наслідок 2.2.8

Характеристичні числа виродженого ядра $K(x, y)$ співпадають з коренями поліному $D(\lambda) = 0$, а їх кількість не перевищує N .

Приклад 2.2.9

Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-y)\varphi(y) dy + \cos(x).$$

Розв'язок. Перш за все перепишемо ядро у виродженому вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda \sin(x) \int_0^{\pi} \cos(y)\varphi(y) dy - \lambda \cos(x) \int_0^{\pi} \sin(y)\varphi(y) dy + \cos(x).$$

Позначимо

$$c_1 = \int_0^{\pi} \cos(y)\varphi(y) dy, \quad c_2 = \int_0^{\pi} \sin(y)\varphi(y) dy,$$

тоді

$$\varphi(x) = \lambda(c_1 \sin(x) - c_2 \cos(x)) + \cos(x).$$

Підставляючи останню рівність в попередні отримаємо систем рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^{\pi} \cos(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y)) dy, \\ c_2 = \int_0^{\pi} \sin(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y)) dy. \end{cases}$$

Після обчислення інтегралів:

$$\begin{cases} c_1 + \frac{\lambda\pi}{2}c_2 = \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\lambda\pi}{2}c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda\pi}{2} \\ -\frac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 \neq 0.$$

За правилом Крамера маємо

$$c_1 = \frac{2\pi}{4 + (\lambda\pi)^2}, \quad c_2 = \frac{\lambda\pi^2}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

Таким чином розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi \sin(x) + 4 \cos(x)}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$