Зміст

2.1.5 Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром

Визначення 2.1.5.1 (полярного ядра)**.** Ядро $K(x, y)$ називається *полярним*, якщо воно представляється у вигляді:

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x - y|^{\alpha}} \tag{2.1.40}$$

де $A \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$, $|x - y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, $\alpha < n$ (n — розмірність евклідового простору).

Визначення 2.1.5.2 (слабо полярного ядра)**.** Полярне ядро називається *слабо полярним*, якщо $\alpha < n/2$.

Нагадаємо, що для інтегральних рівнянь

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x, y)\varphi(x, y)\,\mathrm{d}y + f(x) \tag{2.1.41}$$

з неперервним ядром $K(x, y)$ метод послідовних наближень мав вигляд:

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = f + \lambda \mathbf{K}\varphi_0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = f + \lambda \mathbf{K}\varphi_n. \tag{2.1.42}$$

Оцінки, що застосовувались для неперервних ядер не працюють для полярних ядер, тому що максимум полярного ядра рівний нескінченності (ядро необмежене в рівномірній метриці), отже, сформулюємо лему аналогічну лемі **??** для полярних ядер.

Лема 2.1.5.1

Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з полярним ядром $K(x,y)$ переводить множину функцій $C\left(\overline{G}\right) \xrightarrow{\mathbf{K}} C\left(\overline{G}\right)$ і при цьому має місце оцінка:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \le N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}, \tag{2.1.43}$$

де

$$N = \max_{x\in\overline{G}} \int\limits_G |K(x,y)|\,\mathrm{d}y. \tag{2.1.44}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція $\mathbf{K}\varphi$ неперервна в точці x_0. Оцінимо при умові $|x - x_0| < \eta/2$ вираз:

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_G K(x_0,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| = \\
&\qquad = \left|\int\limits_G \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_G \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha}\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \\
&\qquad\qquad \le \int\limits_G \left|\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha}\right| |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \le (*)
\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

винесемо $\max\varphi(y)$ у вигляді $\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$, а інтеграл розіб'ємо на два інтеграли:

- інтеграл по $U(x_0,\eta)$ — кулі з центром в x_0 і радіусом η;
- інтеграл по залишку $G \setminus U(x_0,\eta)$:

$$\begin{aligned}
(*) \le \|\varphi\|_{C(\overline{G})} &\left(\int\limits_{U(x_0,\eta)} \left|\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha}\right| \mathrm{d}y \,+\right. \\
&\left. + \int\limits_{G\setminus U(x_0,\eta)} \left|\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha}\right| \mathrm{d}y\right)
\end{aligned} \tag{2.1.46}$$

Оцінимо тепер кожний з інтегралів:

$$\int\limits_{U(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha} \right| \mathrm{d}y \le A_0 \int\limits_{U(x_0,\eta)} \left| \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} - \frac{\mathrm{d}y}{|x_0-y|^\alpha} \right|, \tag{2.1.47}$$

де A_0 — max функції $A(x,y)$ на потрібній множині.

Введемо узагальнені сферичні координати з центром у точці x_0 в просторі $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{0,1} + \rho\cos\nu_1 \\ y_2 &= x_{0,2} + \rho\sin\nu_1\cos\nu_2 \\ &\dots \\ y_{n-1} &= x_{0,n-1} + \rho\sin\nu_1\cdot\ldots\cdot\cos\nu_{n-1} \\ y_n &= x_{0,n} + \rho\sin\nu_1\cdot\ldots\cdot\sin\nu_{n-1} \end{aligned} \tag{2.1.48}$$

Якобіан переходу має вигляд:

$$\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{\rho,\nu_1,\dots,\nu_{n-1}} = \rho^{n-1}\Phi(\sin\nu_1,\dots,\sin\nu_{n-1},\cos\nu_1,\dots,\cos\nu_{n-1}), \tag{2.1.49}$$

де $0 \le \rho \le \eta, 0 \le \nu_i \le \pi, i = \overline{1, n-2}, 0 \le \nu_{n-1} \le 2\pi$.

Отримаємо

$$\int\limits_{U(x_0,\eta)} \frac{\mathrm{d}y}{|x_0-y|^\alpha} = \sigma_n \int\limits_0^\eta \frac{\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho}{\rho^\alpha} = \sigma_n \left.\frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha}\right|_0^\eta = \frac{\sigma_n\eta^{n-\alpha}}{n-\alpha} \le \frac{\varepsilon}{4}, \tag{2.1.50}$$

де σ_n — площа поверхні одиничної сфери в n-вимірному просторі $\mathbb{R}^n$.

Оскільки $|x-x_0| < \eta/2$, то

$$\int\limits_{U(x_0,\eta)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} \le \int\limits_{U(x_0,3\eta/2)} \frac{\mathrm{d}y}{|x_0-y|^\alpha} \le \frac{\sigma_n}{n-\alpha}\left(\frac{3\eta}{2}\right)^{n-\alpha} \le \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.1.51}$$

Оскільки

$$\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} \in C\left(\overline{U(x_0,\eta/2)} \times \overline{G \setminus U(x_0,\eta)}\right), \tag{2.1.52}$$

то

$$\int\limits_{G\setminus U(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha} \right| \mathrm{d}y \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.53}$$

Таким чином ми довели, що

$$\left|\int_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int_G K(x_0,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \varepsilon, \tag{2.1.54}$$

тобто функція $\mathbf{K}\varphi$ неперервна в точці x_0.

Доведемо оцінку $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \le N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| &\le \int\limits_G |K(x,y)||\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \le \\ &\le \|\varphi\|_{C(\overline{G})}\int\limits_G |K(x,y)| \le \\ &\le |\varphi\|_{C(\overline{G})}\max_{x\in\overline{G}}\int\limits_G |K(x,y)|\,\mathrm{d}y = \\ &= N\|\varphi\|_{C(\overline{G})},\end{aligned} \tag{2.1.55}$$

отже $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \le N\|\varphi\|_{C(\overline{G})}$.

Покажемо скінченність N. Розглянемо

$$\int\limits_G |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \le A_0\int\limits_G \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} \le (*). \tag{2.1.56}$$

Для будь-якої точки x, існує радіус $D = \operatorname{diam} G$ (рівний максимальному діаметру області G) такий, що в кулю з цим радіусом попадає будь-яка точка y, а тому

$$(*) \le A_0\int\limits_{U(x,D)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} = A_0\frac{\sigma_n}{n-\alpha}D^{n-\alpha}. \tag{2.1.57}$$

$\square$

Теорема 2.1.5.1 (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з полярним ядром для малих значень параметру)

Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з полярним ядром $K(x, y)$ має єдиний розв'язок в класі неперервних функцій для будь-якого неперервного вільного члена f при умові

$$|\lambda| < \frac{1}{N} \tag{2.1.58}$$

і цей розв'язок може бути представлений рядом Неймана, який збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення. Сформулюємо умову збіжності ряду Неймана.

Нагадаємо, що ряд Неймана має вигляд

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f, \tag{2.1.59}$$

причому, з щойно доведеної леми, можемо записати

$$\|\varphi\|_{C(\overline{G})} \le \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^i \cdot N^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})}. \tag{2.1.60}$$

Останній ряд — геометрична прогресія і збігається при умові $|\lambda| < 1/N$. □

Лема 2.1.5.2

Нехай маємо два полярних ядра

$$K_i(x,y) = \frac{A_i(x,y)}{|x-y|_i^{\alpha}}, \quad \alpha_i < n, \quad i = 1,2, \tag{2.1.61}$$

а область G обмежена, тоді ядро

$$K_3(x,y) = \int_G K_2(x,\xi)K_1(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.1.62}$$

також полярне, причому має місце співвідношення:

$$K_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_3(x,y)}{|x-y|^{\alpha_1+\alpha_2-n}}, & \alpha_1+\alpha_2-n > 0, \\ A_3(x,y)\ln|x-y| + B_3(x,y), & \alpha_1+\alpha_2-n = 0, \\ A_3(x,y), & \alpha_1+\alpha_2-n < 0, \end{cases} \tag{2.1.63}$$

де A_3, B_3 — неперервні функції.

Вправа 2.1.5.1. Доведіть цю лему.

З цієї леми випливає, що всі повторні ядра $K_{(p)}(x,y)$, полярного ядра $K(x,y)$ задовольняють наступним оцінкам:

$$\begin{gathered} K_{(2)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_2(x,y)}{|x-y|^{2\alpha-n}}, & 2\alpha-n > 0, \\ A_2(x,y)\ln|x-y| + B_2(x,y), & 2\alpha-n = 0, \\ A_2(x,y), & 2\alpha-n < 0, \end{cases} \\ K_{(3)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_3(x,y)}{|x-y|^{3\alpha-2n}}, & 3\alpha-2n > 0, \\ A_3(x,y)\ln|x-y| + B_3(x,y), & 3\alpha-2n = 0, \\ A_3(x,y), & 3\alpha-2n < 0, \end{cases} \\ K_{(p)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_p(x,y)}{|x-y|^{p\alpha-(p-1)n}}, & p\alpha-(p-1)n > 0, \\ A_p(x,y)\ln|x-y| + B_p(x,y), & p\alpha-(p-1)n = 0, \\ A_p(x,y), & p\alpha-(p-1)n < 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{2.1.64}$$

Зауваження 2.1.5.1 — Справді, тут $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, тому $\alpha_1 + \alpha_2$ замінено на 2α і аналогічно.

Легко бачити, що для $\forall \alpha, n$ існує p_0 таке, що починаючи з нього всі повторні ядра є неперервні. Справді, для виконання

$$p\alpha - (p-1)n < 0 \tag{2.1.65}$$

достатньо

$$(n-\alpha)p > n, \tag{2.1.66}$$

що в свою чергу рівносильно

$$p > \frac{n}{n-\alpha}. \tag{2.1.67}$$

Зауваження 2.1.5.2 — Остання нерівність дає не лише якісний факт існування такого p_0, але і цілком кількісну оцінку:

$$p_0 = \left[\frac{n}{n-\alpha}\right] + 1. \tag{2.1.68}$$

Звідси маємо, що резольвента $\mathcal{R}(x,y,\lambda)$ полярного ядра $K(x,y)$ складається з двох частин:

- полярної складової $\mathcal{R}_1(x,y,\lambda)$;
- неперервної складової $\mathcal{R}_2(x,y,\lambda)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \mathcal{R}_1(x,y,\lambda) + \mathcal{R}_2(x,y,\lambda) &= \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) &= \\ = \sum_{i=1}^{p_0-1} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) + \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y).\end{aligned} \tag{2.1.69}$$

Для доведення збіжності резольвенти, потрібно дослідити збіжність нескінченного ряду $\mathcal{R}_2(x,y,\lambda)$. Він сходиться рівномірно при $x, y \in \overline{G}$, $|\lambda| \le 1/N - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, визначаючи неперервну функцію $\mathcal{R}$ при $x, y \in \overline{G}$, $|\lambda| < 1/N$ і аналітичну по λ в крузі

$$|\lambda| < \frac{1}{N}. \tag{2.1.70}$$

Дійсно

$$\mathcal{R}_2(x, y, \lambda) = \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y). \tag{2.1.71}$$

У свою чергу,

$$\left|\lambda^{p_0+s-1} K_{(p_0+s)}(x, y)\right| \le |\lambda|^{p_0+s-1} M_{p_0} N^s, \tag{2.1.72}$$

де

$$M_{p_0} = \max_{(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}} |K_{p_0}(x, y)|. \tag{2.1.73}$$

Таким чином ряд $\mathcal{R}_2(x, y, \lambda)$ мажорується геометричною прогресією, яка збігається при умові $|\lambda| < 1/N$.

2.2 Теореми Фредгольма

2.2.1 Інтегральні рівняння з виродженим ядром

Визначення 2.2.1.1 (виродженого ядра)**.** Неперервне ядро $K(x, y)$ називається *виродженим*, якщо представляється у вигляді

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) g_i(y), \tag{2.2.1}$$

де $\{f_i\}_{i=\overline{1,N}}, \{g_i\}_{i=\overline{1,N}} \subset C\left(\overline{G}\right)$, і $\{f_i\}_{i=\overline{1,N}}$ та $\{g_i\}_{i=\overline{1,N}}$ — лінійно незалежні системи функцій.

Визначення 2.2.1.2 (інтегрального рівняння Фредгольма з виродженим ядром)**.** Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x, u) \varphi(y) \,\mathrm{d}y + f(x). \tag{2.2.2}$$

Підставимо вигляд виродженого ядра і отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int\limits_G \sum_{i=1}^{N} f_i(x) g_i(y) \varphi(y) \,\mathrm{d}y + f(x) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int\limits_G g_i(y) \varphi(y) \,\mathrm{d}y + f(x) = \\ &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x), \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

де позначено

$$c_j = \int\limits_G g_j(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.2.4}$$

Підставимо тепер у c_j вираження $\varphi(x)$ через c_i:

$$\begin{aligned} c_j &= \int\limits_G g_j(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \int\limits_G g_j(y)\left(f(y) + \lambda\sum_{i=1}^N c_i f_i(y)\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int\limits_G g_j(y)f(y)\,\mathrm{d}y + \lambda\sum_{i=1}^N c_i\int\limits_G g_j(y)f_i(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

В результаті отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$c_j = \lambda\sum_{i=1}^N \alpha_{ji}c_i + a_j, \quad j = \overline{1, N}, \tag{2.2.6}$$

де позначено

$$\alpha_{ji} = \int\limits_G g_j(y)f_i(y)\,\mathrm{d}y, \quad a_j = \int\limits_G g_j(y)f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.2.7}$$

Аналогічно для спряженого ядра

$$K^\star(x, y) = \sum_{i=1}^N \overline{f}_i(y)\overline{g}_i(x), \tag{2.2.8}$$

і рівняння

$$\psi(x) = \overline{\lambda}\int\limits_G K^\star(x, y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x), \tag{2.2.9}$$

підставляючи вигляд виродженого ядра отримуємо

$$\psi(x) = \overline{\lambda}\sum_{i=1}^N \overline{g}_i(x)\int\limits_G \overline{f}_i(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x) = \overline{\lambda}\sum_{i=1}^N d_i\overline{g}_i(x) + g(x), \tag{2.2.10}$$

де позначено

$$d_i = \int\limits_G \overline{f}_i(y)\psi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.2.11}$$

Знову підставляємо у d_j вираження $\psi(x)$ через d_i:

$$d_j = \int\limits_G \overline{f}_j(y) \left(g(y) + \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i \overline{g}_i(y) \right) \mathrm{d}y, \tag{2.2.12}$$

і отримуємо СЛАР

$$d_j = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ji} d_i + b_j, \quad i = \overline{1, N}, \tag{2.2.13}$$

де позначено

$$\beta_{ji} = \int\limits_G \overline{f}_j(y) \overline{g}_i(y) \,\mathrm{d}y, \quad b_j = \int\limits_G \overline{f}_j(y) g(y) \,\mathrm{d}y, \tag{2.2.14}$$

причому виконується умова

$$\beta_{ji} = \overline{\alpha}_{ij}. \tag{2.2.15}$$

Зауваження 2.2.1.1 — У матричному вигляді ці СЛАР запишуться так:

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c} + \vec{a}, \tag{2.2.16}$$

$$\vec{d} = \lambda A^\star \vec{d} + \vec{b}, \tag{2.2.17}$$

з матрицями $E - \lambda A$ та $E - \overline{\lambda} A^\star$ відповідно і визначником $D(\lambda) = |E - \lambda A| = |E - \overline{\lambda} A^\star|$.

Дослідимо питання існування та єдиності розв'язку цих СЛАР.

- Нехай $D(\lambda) \neq 0$, $\operatorname{rang} |E - \lambda A| = \operatorname{rang} \left| E - \overline{\lambda} A^\star \right| = N$, тоді ці СЛАР мають єдиний розв'язок для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно, а тому інтегральні рівняння Фредгольма з полярними ядрами (як пряме так і спряжене) мають єдині розв'язки при будь-яких f та g відповідно, і ці розв'язки записуються за формулами

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) + f(x), \tag{2.2.18}$$

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i \overline{g}_i(x) + g(x). \tag{2.2.19}$$

- Нехай $D(\lambda) = 0$, $\operatorname{rang}|E - \lambda A| = \operatorname{rang}\left|E - \overline{\lambda} A^\star\right| = q < N$, тоді однорідні СЛАР

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c}, \tag{2.2.20}$$

$$\vec{d} = \lambda A^\star \vec{d}, \tag{2.2.21}$$

мають $N - q$ лінійно незалежних розв'язків $\vec{c}_s$, $\vec{d}_s$, $s = \overline{1, N-q}$, де вектор визначається формулою $\vec{c}_s = (c_{s1}, \ldots, c_{sN})$, $\vec{d}_s = (d_{s1}, \ldots, d_{sN})$, таким чином відповідні однорідні інтегральні рівняння Фредгольма рівняння II роду (як пряме так і спряжене) мають $N - q$ лінійно незалежних розв'язків які записуються за такими формулами:

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_{si} f_i(x), \quad s = \overline{1, N-q}, \tag{2.2.22}$$

$$\psi_s(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_{si} \overline{g}_i(x), \quad s = \overline{1, N-q}, \tag{2.2.23}$$

де $\varphi_s(x)$, $\psi_s(x)$ — власні функції, а число $N - q$ — кратність характеристичного числа λ та $\overline{\lambda}$. Кожна з систем функцій φ_s, ψ_s, $s = \overline{1, N-q}$ лінійно незалежна, оскільки лінійно незалежними є системи функцій f_i та g_i і лінійно незалежні вектори $\vec{c}_s$ і $\vec{d}_s$, $s = \overline{1, N-q}$.

- Нагадаємо одне з формулювань теореми Кронекера-Капеллі:

Теорема 2.2.1.1 (Кронекера-Капеллі)

Для існування розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно і достатньо що би вільний член рівняння був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння.

Для нашого випадку цю умову можна записати у вигляді

$$\left(\vec{a}, \vec{d}_s\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i \overline{d}_{si} = 0, \quad \forall s = \overline{1, N-q}. \tag{2.2.24}$$

Покажемо, що для виконання умови $\left(\vec{a}, \vec{d}_s\right) = 0$, $s = \overline{1, N-q}$ необхідно і достатньо, щоб вільний член прямого інтегрального рівняння Фредгольма II роду був ортогональним розв'язкам спряженого однорідного рівняння тобто

$$(f, \psi_s) = 0, \quad s = \overline{1, N-q} \tag{2.2.25}$$

Дійсно, маємо:

$$
\begin{aligned}
(f, \psi_s) &= \int\limits_G f(x)\overline{\psi}_s(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{N} \overline{d}_{si} \int\limits_G f(x) g_i(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{N} a_i \overline{d}_{si} = \\
&= \lambda(\vec{a}, \vec{d_s}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.26}
$$

для всіх $s = \overline{1, N-q}$.

В цьому випадку розв'язок СЛАР не єдиний, і визначається з точністю до довільного розв'язку однорідної системи рівнянь, тобто з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних векторів характеристичного числа λ:

$$\vec{c} = \vec{c}_0 + \sum_{i=1}^{N-q} \gamma_i \vec{c}_i, \tag{2.2.27}$$

де γ_i — довільні константи, $\vec{c}_0$ — будь-який розв'язок неоднорідної системи рівнянь $\vec{c}_0 = \lambda A \vec{c}_0 + \vec{a}$, тоді розв'язок інтегрального рівняння можна записати у вигляді:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{N-q} \gamma_i \varphi_i(x), \tag{2.2.28}$$

де φ_0 — довільний розв'язок неоднорідного рівняння $\varphi_0 = \lambda \mathbf{K} \varphi_0 + f$.

Отже доведені такі теореми:

Теорема 2.2.1.2 (Перша теорема Фредгольма для вироджених ядер)
Якщо $D(\lambda) \neq 0$, то інтегральне рівняння Фредгольма II роду та спряжене до нього мають єдині розв'язки для довільних вільних членів f та g з класу неперервних функцій.

Теорема 2.2.1.3 (Друга теорема Фредгольма для вироджених ядер)
Якщо $D(\lambda) = 0$, то однорідне ($f \equiv 0$) рівняння Фредгольма другого роду і спряжене до нього ($g \equiv 0$) мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків рівну $N - q$, де $q = \operatorname{rang}(E - \lambda A)$.

Теорема 2.2.1.4 (Третя теорема Фредгольма для вироджених ядер)
Якщо $D(\lambda) = 0$, то для існування розв'язків рівняння Фредгольма II роду необхідно і достатньо, щоб вільний член f був ортогональним усім розв'язкам однорідного спряженого рівняння. При виконанні цієї умови розв'язок існує та не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій характеристичного числа λ.

Наслідок 2.2.1.1
Характеристичні числа виродженого ядра $K(x, y)$ співпадають з коренями поліному $D(\lambda) = 0$, а їх кількість не перевищує N.

Приклад 2.2.1.1

Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \sin(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \cos(x).$$

Розв'язок. Перш за все перепишемо ядро у виродженому вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda \sin(x) \int\limits_0^\pi \cos(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \lambda \cos(x) \int\limits_0^\pi \sin(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \cos(x).$$

Позначимо

$$c_1 = \int\limits_0^\pi \cos(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad c_2 = \int\limits_0^\pi \sin(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

тоді

$$\varphi(x) = \lambda(c_1 \sin(x) - c_2 \cos(x)) + \cos(x).$$

Підставляючи останню рівність в попередні отримаємо систем рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^\pi \cos(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y))\,\mathrm{d}y, \\ c_2 = \int\limits_0^\pi \sin(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y))\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

Після обчислення інтегралів:

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{\lambda\pi}{2} c_2 = \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\lambda\pi}{2} c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda\pi}{2} \\ -\frac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 \neq 0.$$

За правилом Крамера маємо

$$c_1 = \frac{2\pi}{4 + (\lambda\pi)^2}, \quad c_2 = \frac{\lambda\pi^2}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

Таким чином розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi \sin(x) + 4\cos(x)}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$