Лекція 1

§0. Предмет і методи математичної фізики

Сучасні технології дослідження реального світу доволі інтенсивно використовують методи математичного моделювання, зокрема ці методи широко використовуються тоді, коли дослідження реального (фізичного) об'єкту є неможливими, або надто дорогими. Вже традиційними стали моделювання властивостей таких фізичних об'єктів:

- температурні поля і теплові потоки;
- електричні, магнітні та електромагнітні поля;
- концентрація речовини в розчинах, розплавах або сумішах;
- напруження і деформації в пружних твердих тілах;
- параметри рідини або газу, який рухається (обтікає) деяке тіла ;
- перенос різних субстанцій потоками рідин або газу та інші.

Характерною особливістю усіх математичних моделей, що описують перелічені та багато інших процесів є те, що параметри, які представляють інтерес для дослідника є функціями точки простору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ та часу t, а самі співвідношення з яких ці характеристики обчислюються є диференціальними рівняннями в частинних похідних зі спеціальними додатковими умовами (крайовими умовами), які дозволяють виділяти однозначний розв'язок.

Таким чином можна сказати, що основними об'єктами дослідження предмету математична фізика є крайові задачі для рівнянь в частинних похідних, які моделюють певні фізичні процеси.

Процес дослідження реального об'єкту фізичного світу можна представити за наступною схемою:

1. Побудова математичної моделі реального процесу у вигляді диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, доповнення диференціального рівняння в частинних похідних граничними умовами.
2. Дослідження властивостей сформульованої крайової задачі з точки зору її коректності. Коректність постановки задачі передбачає виконання наступних умов:
   - Розв'язок крайової задачі існує;
   - Розв'язок єдиний;
   - Розв'язок неперервним чином залежить від вхідних даних задачі.
3. Знаходження розв'язку крайової задачі: точного для найбільш простих задач, або наближеного для переважної більшості задач.

Треба відмітити, що усі перелічені пункти дослідження окрім побудови наближених методів знаходження розв'язків відносяться до предмету дисципліни Математична фізика.

Для дослідження задач математичної фізики використовуються математичний апарат наступних розділів математики:

- математичний аналіз;
- лінійна алгебра;

- диференціальні рівняння;
- теорія функцій комплексної змінної;
- функціональний аналіз;

При побудові математичних моделей використовуються знання з елементарної фізики.

Наведемо приклад доволі простої і в той же час цілком реальної математичної моделі розповсюдження тепла в стрижні.

Нехай ми маємо однорідний стрижень з теплоізольованою боковою поверхнею і наступними фізичними параметрами:

- ρ – густина матеріалу;
- S – площа поперечного перерізу;
- k – коефіцієнт теплопровідності;
- c – коефіцієнт теплоємності;
- L – довжина стрижня.

Позначимо $u(x,t)$ – температуру стрижня в точці x в момент часу t, $u_0(x)$ – температуру стрижня у точці x в початковий момент часу $t=0$.

Припустимо, що на лівому кінці стрижня температура змінюється за заданим законом $\varphi(t)$, а правий кінець стрижня теплоізольований.

В таких припущеннях математична модель може бути записана у вигляді наступної граничної задачі:

$$c\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0 \tag{1}$$

$$u(0,u) = \varphi(t), \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(t) \tag{3}$$

Математична модель містить диференціальне рівняння (1), яке виконується для вказаних значень аргументу, граничні умови на кінцях стрижня (2) та початкову умови (3).

Глава 1 Інтегральні рівняння

Основні поняття

Інтегральні рівняння – рівняння, що містять невідому функцію під знаком інтегралу.

Багато задач математичної фізики зводяться до лінійних інтегральних рівнянь виду:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x) \tag{4}$$

– інтегральне рівняння Фредгольма II роду.

$$\int\limits_G K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = f(x) \tag{5}$$

– інтегральне рівняння Фредгольма I роду.

$K(x, y)$ – ядро інтегрального рівняння $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, $f(x)$ – вільний член інтегрального рівняння, $f(x) \in C(\bar{G})$, λ – комплексний параметр, $\lambda \in \mathbb{C}$ (відомий або невідомий), G – область інтегрування, $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{G}$ – замкнена та обмежена.

Інтегральне рівняння (4) при $f(x) \equiv 0$ називається однорідним інтегральним рівнянням Фредгольма II роду

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

$\mathbf{K}$ – інтегральний оператор: $(\mathbf{K}\varphi)(x)$.

Будемо записувати інтегральні рівняння (4), (5) та (6) скорочено в операторній формі:

$$\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f \tag{7}$$

$$\mathbf{K}\varphi = f \tag{8}$$

$$\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi \tag{9}$$

$$K^*(x, y) = \bar{K}(y, x) \tag{10}$$

називають спряжене (союзне) ядро.

Інтегральне рівняння

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int\limits_G K^*(x, y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x) \tag{11}$$

називається спряженим (союзним) до інтегрального рівняння (4).

Операторна форма:

$$\psi = \bar{\lambda}\mathbf{K}^*\psi + g \tag{12}$$

$$\psi = \bar{\lambda}\mathbf{K}^*\psi \tag{13}$$

Визначення. Комплексні значення λ, при яких однорідне інтегральне рівняння Фредгольма (6) має нетривіальні розв'язки, називаються характеристичними числами ядра $K(x,y)$. Розв'язки, які відповідають власним числам, називаються власними функціями. Кількість лінійно-незалежних власних функцій називається кратністю характеристичного числа.

§1. Метод послідовних наближень

Метод послідовних наближень для неперервного ядра

Нагадаємо означення норм в банаховому просторі неперервних функцій $C(\bar{G})$ та гільбертовому просторі інтегрованих з квадратом функцій $L_2(G)$ та означення скалярного добутку в просторі $L_2(G)$:

$$\|f\|_{C(\bar{G})} = \max_{x\in\bar{G}} |f(x)|, \quad \|f\|_{L_2(G)} = \left(\int\limits_G |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}, \quad (f,g)_{L_2(G)} = \int\limits_G f(x)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Лема 1. Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з неперервним ядром $K(x,y)$ петворює $C(\bar{G}) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\bar{G})$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} L_2(G)$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\bar{G})$ обмежений та мають місце нерівності:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \le MV\|\varphi\|_{C(G)}, \tag{14}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)} \le MV\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{15}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \le M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{16}$$

де

$$M = \max_{x,y\in G\times G} |K(x,y)|, \tag{17}$$

$$V = \int\limits_G \mathrm{d}y. \tag{18}$$

Доведення. Нехай $\varphi \in L_2(G)$. Тоді φ – абсолютно інтегрована функція на G і, оскільки ядро $K(x,y)$ неперервне на $G\times G$, функція $(\mathbf{K}\varphi)(x)$ неперервна на G. Тому оператор $\mathbf{K}$ переводить $L_2(G)$ в $C(\bar{G})$ і, з врахуванням нерівності Коші-Буняковського, обмежений. Доведемо нерівності:

1. (14):

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} = \max_{x\in\bar{G}} \left|\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \max_{x\in\bar{G}} \int\limits_G |K(x,y)||\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \le$$

$$\le \max_{x\in\bar{G}} \left(\max_{y\in\bar{G}} |K(x,y)| \max_{y\in\bar{G}} |\varphi(y)| \int\limits_G \mathrm{d}y\right) \le \max_{x,y\in\bar{G}\times\bar{G}} |K(x,y)| \max_{y\in\bar{G}} |\varphi(y)| \int\limits_G \mathrm{d}y = MV\|\varphi\|_{C(\bar{G})}.$$

2. (15):

$$\left(\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)}\right)^2 = \int\limits_G \left|\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x \le \int\limits_G \left|\max_{y\in\bar{G}} |K(x,y)| \int\limits_G \varphi(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x \le$$

$$\leq \left(\max_{x,y\in\bar{G}\times\bar{G}} |K(x,y)|\right)^2 \left|\int\limits_G \varphi(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 \int\limits_G \mathrm{d}x \leq (M\|\varphi\|_{L_2(G)}V)^2$$

3. (16):

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} = \max_{x\in\bar{G}} |(\mathbf{K}\varphi)(x)| = \max_{x\in\bar{G}} \left|\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq$$

$$\leq \max_{x\in\bar{G}} \sqrt{\int\limits_G |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y}\sqrt{\int\limits_G |\varphi(y)|^2\,\mathrm{d}y} \leq M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}.$$

□

Розв'язок інтегрального рівняння другого роду (7) будемо шукати методом послідовних наближень:

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = \lambda\mathbf{K}\varphi_0 + f, \quad \varphi_2 = \lambda\mathbf{K}\varphi_1 + f, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = \lambda\mathbf{K}\varphi_n + f \tag{19}$$

$$\varphi_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda^i\mathbf{K}^i f, \quad \mathbf{K}^{i+1} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^i) \tag{20}$$

$$\varphi_\infty = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\mathbf{K}^i f, \tag{21}$$

ряд Неймана.

Дослідимо збіжність ряду Неймана (21)

$$\left\|\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\mathbf{K}^i f\right\|_{C(\bar{G})} \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda^i| \|\mathbf{K}^i f\|_{C(\bar{G})} \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda^i(MV)^i| \|f\|_{C(\bar{G})} = \frac{\|f\|_{C(\bar{G})}}{1 - |\lambda|MV} \tag{22}$$

(оскільки: $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} \leq MV\|\varphi\|_{C(\bar{G})}$, $\|\mathbf{K}^2\varphi\|_{C(\bar{G})} \leq (MV)^2\|\varphi\|_{C(\bar{G})}\|\mathbf{K}^i\varphi\|_{C(\bar{G})} \leq (MV)^i\|\varphi\|_{C(\bar{G})}$).

Отже, ряд Неймана збігається рівномірно при

$$|\lambda| < \frac{1}{MV}, \tag{23}$$

умова збіжності методу послідовних наближень.

Покажемо, що при виконанні умови (23) інтегральне рівняння (4) має єдиний розв'язок. Дійсно припустимо, що їх два:

$$\begin{matrix} \varphi^{(1)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(1)} + f \\ \varphi^{(2)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(2)} + f \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(0)} = \lambda\mathbf{K}\varphi^{(0)} \end{matrix}$$

Обчислимо норму Чебишева:

$$|\lambda|\|\mathbf{K}\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} = \|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} \Rightarrow \|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} \leq |\lambda|MV\|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} \Rightarrow (1 - |\lambda|MV)\|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} \leq 0.$$

Звідси маємо, що $\|\varphi^{(0)}\|_{C(\bar{G})} = 0$. Таким чином доведена теорема

Теорема 1 (Про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значень параметру)**.** Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $\varphi(x) = \lambda\int_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x)$ з неперервним ядром $K(x,y)$ при умові (23) має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C(\bar{G})$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді ряду Неймана $\varphi = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\mathbf{K}^i f$.

Повторні ядра

$\forall f, g \in \bar{G}$ має місце рівність

$$(\mathbf{K}f, g)_{L_2(G)} = (f, \mathbf{K}^* g)_{L_2(G)} \tag{24}$$

Дійсно, якщо $f, g \in L_2(G)$, то за лемою 1 $\mathbf{K}f, \mathbf{K}^* g \in L_2(G)$ тому

$$(\mathbf{K}f, g) = \int\limits_G (\mathbf{K}f)\bar{g}\,\mathrm{d}x = \int\limits_G \left(\int\limits_G K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_G f(y)\left(\int\limits_G K(x,y)\bar{g}(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int\limits_G f(y)(\mathbf{K}^* g)(y)\,\mathrm{d}y = (f, \mathbf{K}^* g).$$

Лема 2. Якщо $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ – інтегральні оператори з неперервними ядрами $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ відповідно, то оператор $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ також інтегральний оператор з неперервним ядром $K_3(x,z) = \int_G K_2(x,y)K_1(y,z)\,\mathrm{d}y$. При цьому справедлива формула: $(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1)^* = \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^*$.

Доведення. Нехай $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ – ядра інтегральних операторів $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$. Розглянемо $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$:

$$(\mathbf{K}_3 f)(x) = (\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1 f)(x) = \int\limits_G K_2(x,y)\left(\int\limits_G K_1(y,z)f(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_G \left(\int\limits_G K_2(x,y)K_1(y,z)\,\mathrm{d}y\right) f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_G K_3(x,z)f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Тобто $K_3(x,z) = \int_G K_2(x,y)K_1(y,z)\,\mathrm{d}y$ – ядро оператора $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$.

З рівності (24) для всіх $f, g \in L_2(G)$ отримуємо $(f, \mathbf{K}_3^* g - \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^* g) = 0$, звідки випливає, що $\mathbf{K}_3^* = \mathbf{K}_1^*\mathbf{K}_2^*$. □

Із доведеної леми випливає, що оператори $\mathbf{K}^n = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{n-1}) = (\mathbf{K}^{n-1})\mathbf{K}$ – інтегральні та їх ядра $K_{(n)}(x,y)$ – неперервні та задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$K_{(1)}(x,y) = K(x,y), \quad \ldots, \quad K_{(n)}(x,y) = \int\limits_G K(x,\xi)K_{(n-1)}(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi \tag{25}$$

– повторні (ітеровані) ядра.

$$\mathbf{K}f = \int\limits_G K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad \ldots, \quad \mathbf{K}^n f = \int\limits_G K_{(n)}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Резольвента інтегрального оператора

Пригадаємо представлення розв'язку інтегрального рівняння (4) у вигляді ряду Неймана $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\mathbf{K}^i f$. Виконаємо перетворення

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}(\mathbf{K}^i f)x = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{(i)}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= f(x) + \lambda\int\limits_G\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{(i)}(x,y)\right)f(y)\,\mathrm{d}y = f(x) + \lambda\int\limits_G \mathcal{R}(x,y,\lambda)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

при $|\lambda| < \frac{1}{MV}$, де

$$\mathcal{R}(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x, y) \tag{26}$$

– резольвента інтегрального оператора.

Операторна форма запису розв'язку рівняння Фредгольма через резольвенту ядра має вигляд:

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{R} f \tag{27}$$

Мають місце операторні рівності: $\varphi = (E + \lambda\mathbf{R})f$, $(E - \lambda\mathbf{K})\varphi = f$, $\varphi = (E - \lambda\mathbf{K})^{-1}f$, таким чином маємо

$$E + \lambda\mathbf{R} = (E - \lambda\mathbf{K})^{-1}, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}. \tag{28}$$

Зважуючи на формулу (27) має місце теорема

Теорема 2 (Про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значенням параметру)**.** Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x)$ з неперервним ядром $K(x, y)$ при умові (23) має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C(\bar{G})$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді (27) за допомогою резольвенти (26).

Приклад 1. Методом послідовних наближень знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt)^2 \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Розв'язок. $M = 1$, $V = 1$.

Побудуємо повторні ядра

$$K_{(1)}(x, t) = x^2t^2, \quad K_2(x, t) = \int_0^1 x^2z^4t^2\,\mathrm{d}z = \frac{x^2t^2}{5}, \quad K_{(p)}(x, t) = \frac{1}{5^{p-2}} \int_0^1 x^2z^4t^2\,\mathrm{d}z = \frac{x^2t^2}{5^{p-1}}.$$

Резольвента має вигляд

$$\mathcal{R}(x, t, \lambda) = x^2t^2 \left(1 + \frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda^2}{5^2} + \ldots + \frac{\lambda^p}{5^p} + \ldots\right) = \frac{5x^2t^2}{5 - \lambda}, \quad |\lambda| < 5.$$

Розв'язок інтегрального рівняння має вигляд:

$$\varphi(x) + x + \int\limits_0^1 \frac{5x^2t^3}{5 - \lambda}\,\mathrm{d}t = x + \frac{5x^2}{4(5 - \lambda)}.$$

Лекція 2

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром

Ядро $K(x, y)$ називається полярним, якщо воно представляється у вигляді:

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} \tag{29}$$

де $A \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, $|x-y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, $\alpha < n$ (n – розмірність евклідового простору).

Ядро називається слабо полярним, якщо $\alpha < n/2$.

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з неперервним ядром мав вигляд:

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x,y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}y + f(x), \quad \varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = f + \lambda \mathbf{K}\varphi_0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = f + \lambda \mathbf{K}\varphi_n.$$

Оцінки, що застосовувались для неперервних ядер не працюють для полярних ядер, тому що максимум полярного ядра рівний нескінченності (ядро необмежене в рівномірній метриці), отже, сформулюємо лему аналогічну лемі 1 для полярних ядер.

Лема 3. Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з полярним ядром $K(x,y)$ переводить $C(\bar{G}) \xrightarrow{\mathbf{K}} C(\bar{G})$ і при цьому має місце оцінка:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} \le N \|\varphi\|_{C(\bar{G})}, \tag{30}$$

де

$$N = \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x,y)\,\mathrm{d}y|. \tag{31}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що функція $\mathbf{K}\varphi$ неперервна в точці x_0.

Оцінимо при умові $|x - x_0| < \eta/2$ вираз:

$$\left| \int_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int_G K(x_0,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right| = \left| \int_G \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int_G \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha}\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right| \le$$
$$\le \int_G \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha} \right| |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \le (*)$$

винесемо $\max \varphi(y)$ у вигляді $\|\varphi\|_{C(\bar{G})}$, а інтеграл розіб'ємо на два інтеграли: інтеграл по $U(x_0,\eta)$ – кулі з центром в x_0 і радіусом η; інтеграл по залишку $G \setminus U(x_0,\eta)$.

$$(*) \le \|\varphi\|_{C(\bar{G})} \left(\int_{U(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha} \right| \mathrm{d}y + \int_{G\setminus U(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha} \right| \mathrm{d}y \right)$$

Оцінимо тепер кожний з інтегралів:

$$\int_{U(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha} \right| \mathrm{d}y \le A_0 \int_{U(x_0,\eta)} \left| \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} - \frac{\mathrm{d}y}{|x_0-y|^\alpha} \right|,$$

де A_0 – max функції $A(x,y)$ на потрібній множині.

Введемо узагальнені сферичні координати з центром у точці x_0 в просторі $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_{0,1} + \rho \cos \nu_1 \\
y_2 &= x_{0,2} + \rho \sin \nu_1 \cos \nu_2 \\
&\ldots \\
y_{n-1} &= x_{0,n-1} + \rho \sin \nu_1 \cdot \ldots \cdot \cos \nu_{n-1}
\end{aligned}$$

$$y_n = x_{0,n} + \rho \sin \nu_1 \cdot \ldots \cdot \sin \nu_{n-1}$$

Якобіан переходу має вигляд:

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{\rho, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1}} = \rho^{n-1} \Phi(\sin \nu_1, \ldots, \sin \nu_{n-1}, \cos \nu_1, \ldots, \cos \nu_{n-1}),$$

де $0 \le \rho \le \eta, 0 \le \nu_i \le \pi, i = \overline{1, n-2}, 0 \le \nu_{n-1} \le 2\pi$.

Отримаємо

$$\int\limits_{U(x_0,\eta)} \frac{\mathrm{d}y}{|x_0 - y|^\alpha} = \sigma_n \int\limits_0^\eta \frac{\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho}{\rho^\alpha} = \sigma_n \left. \frac{\rho^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right|_0^\eta = \frac{\sigma_n \eta^{n-\alpha}}{n-\alpha} \le \frac{\varepsilon}{4},$$

де σ_n – площа поверхні одиничної сфери в n-вимірному просторі $\mathbb{R}^n$.

Оскільки $|x - x_0| < \eta/2$, то

$$\int\limits_{U(x_0,\eta)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} \le U(x_0, 3\eta/2) \frac{\mathrm{d}y}{|x_0 - y|^\alpha} \le \frac{\sigma_n}{n-\alpha} \left(\frac{3\eta}{2} \right)^{n-\alpha} \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Оскільки $\frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} \in C\left(\overline{U(x_0,\eta/2)} \times \overline{G \setminus U(x_0,\eta)}\right)$, то

$$\int\limits_{G \setminus U(x_0,\eta)} \left| \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{A(x_0,y)}{|x_0 - y|^\alpha} \right| \mathrm{d}y \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином ми довели, що $\left| \int_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \int_G K(x_0,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right| \le \varepsilon$, тобто функція $\mathbf{K}\varphi$ неперервна в точці x_0.

Доведемо оцінку $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} \le N \|\varphi\_C(\bar{G})$, де $N = \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x,y)\,\mathrm{d}y|$:

$$\left| \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right| \le \int\limits_G |K(x,y)||\varphi(y)|\,\mathrm{d}y \le \|\varphi\|_{C(\bar{G})} \int\limits_G |K(x,y)| \le$$

$$\le |\varphi\|_{C(\bar{G})} \max_{x \in \bar{G}} \int\limits_G |K(x,y)|\,\mathrm{d}y = N \|\varphi\|_{C(\bar{G})},$$

отже $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\bar{G})} \le N \|\varphi\_C(\bar{G})$.
Покажемо скінченність $N = \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x,y)\,\mathrm{d}y|$. Розглянемо

$$\int\limits_G |K(x,y)|\,\mathrm{d}y \le A_0 \int\limits_G \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} \le (*).$$

Для будь-якої точки x, існує радіус (рівний максимальному діаметру області G) такий, що в кулю з цим радіусом попадає будь-яка точка y: $D = \operatorname{diam} G$.

$$(*) \le A_0 \int\limits_{U(x,D)} \frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\alpha} = A_0 \frac{\sigma_n}{n-\alpha} D^{n-\alpha}.$$

□

Теорема 3 (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з полярним ядром для малих значень параметру)**.** Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з полярним ядром $K(x,y)$ має єдиний розв'язок в класі неперервних функцій для будь-якого неперервного вільного члена f при умові
$$|\lambda| < \frac{1}{N} \tag{32}$$
і цей розв'язок може бути представлений рядом Неймана, який збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення. Сформулюємо умову збіжності ряду Неймана.

$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f$, отже $\|\varphi\|_{C(\bar{G})} \le \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^i N^i \|f\|_{C(\bar{G})}$.

Останній ряд – геометрична прогресія і збігається при умові $|\lambda| < \frac{1}{N}$. □

Лема 4. Нехай маємо два полярних ядра $K_i(x,y) = \frac{A_i(x,y)}{|x-y|_i^{\alpha}}$, $\alpha_i < n$, $i = 1,2$, а область G обмежена, тоді ядро $K_3(x,y) = \int_G K_2(x,\xi) K_1(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi$ також полярне, причому має місце співвідношення:
$$K_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_3(x,y)}{|x-y|^{\alpha_1+\alpha_2-n}|}, & \alpha_1+\alpha_2-n > 0, \\ A_3(x,y)|\ln|x-y|| + B_3(x,y), & \alpha_1+\alpha_2-n = 0, \\ A_3(x,y), & \alpha_1+\alpha_2-n < 0, \end{cases} \tag{33}$$
де A_3, B_3 неперервні функції.

З леми 4 випливає, що всі повторні ядра $K_{(p)}(x,y)$, полярного ядра $K(x,y)$ задовольняють оцінкам:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.
$$K_{(2)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_2(x,y)}{|x-y|^{2\alpha-n}|}, & 2\alpha-n > 0, \\ A_2(x,y)|\ln|x-y|| + B_2(x,y), & 2\alpha-n = 0, \\ A_2(x,y), & 2\alpha-n < 0, \end{cases} \tag{34}$$
$$K_{(3)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_3(x,y)}{|x-y|^{3\alpha-2n}|}, & 3\alpha-2n > 0, \\ A_3(x,y)|\ln|x-y|| + B_3(x,y), & 3\alpha-2n = 0, \\ A_3(x,y), & 3\alpha-2n < 0, \end{cases} \tag{35}$$
$$K_{(p)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A_p(x,y)}{|x-y|^{p\alpha-(p-1)n}|}, & p\alpha-(p-1)n > 0, \\ A_p(x,y)|\ln|x-y|| + B_p(x,y), & p\alpha-(p-1)n = 0, \\ A_p(x,y), & p\alpha-(p-1)n < 0. \end{cases} \tag{36}$$
Легко бачити, що для $\forall \alpha, n$ існує p_0 таке, що починаючи з нього всі повторні ядра є неперервні:
$$p\alpha - (p-1)n < 0 \Rightarrow (n-\alpha)p > n \Rightarrow p > \frac{n}{n-\alpha} \Rightarrow p_0 = \left[\frac{n}{n-\alpha}\right] + 1. \tag{37}$$
Звідси маємо, що резольвента $\mathcal{R}(x,y,\lambda)$ полярного ядра $K(x,y)$ складається з двох частин полярної складової $\mathcal{R}_1(x,y,\lambda)$ і неперервної складової $\mathcal{R}_2(x,y,\lambda)$:

$\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \mathcal{R}_1(x,y,\lambda) + \mathcal{R}_2(x,y,\lambda) =$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) = \sum_{i=1}^{p_0-1} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) + \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y). \quad (38)$$

Для доведення збіжності резольвенти, потрібно дослідити збіжність ряду $\mathcal{R}_2(x,y,\lambda)$. Він сходиться рівномірно при $x,y \in \bar{G}$, $|\lambda| \le \frac{1}{N} - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, визначаючи неперервну функцію $\mathcal{R}$ при $x,y \in \bar{G}$, $|\lambda| < \frac{1}{N}$ і аналітичну по λ в крузі

$$|\lambda| < \frac{1}{N}. \quad (39)$$

Дійсно

$$\mathcal{R}_2(x,y,\lambda) = \sum_{i=p_0}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y).$$

У свою чергу,

$$|\lambda^{p_0+s-1} K_{(p_0+s)}(x,y)| \le |\lambda|^{p_0+s-1} M_{p_0} N^s,$$

де $M_{p_0} = \max_{x,y \in \bar{G}\times\bar{G}} |K_{p_0}(x,y)|$. Таким чином ряд $\mathcal{R}_2(x,y,\lambda)$ мажорується геометричною прогресією, яка збігається при умові (39).

§2. Теореми Фредгольма

Інтегральні рівняння з виродженим ядром

Визначення. Неперервне ядро $K(x,y)$ називається виродженим, якщо представляється у вигляді

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) g_i(y), \quad (40)$$

де $\{f_i\}_{i=\overline{1,N}}, \{g_i\}_{i=\overline{1,N}} \subset C(\bar{G})$, і $\{f_i\}_{i=\overline{1,N}}$ та $\{g_i\}_{i=\overline{1,N}}$, – лінійно незалежні системи функцій.

Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x,u)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x). \quad (41)$$

Підставимо вигляд ядра з (40) отримаємо:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G \sum_{i=1}^{N} f_i(x) g_i(y) \varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int\limits_G g_i(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x), \quad (42)$$

де

$$c_j = \int\limits_G g_j(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y. \quad (43)$$

В (43) підставимо значення $\varphi(x)$ з (42):

$$c_j = \int\limits_G g_j(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_G g_j(y) \left(f(y) + \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(y) \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_G g_j(y) f(y) \,\mathrm{d}y + \lambda \sum_{i=1}^N c_i \int\limits_G g_j(y) f_i(y) \,\mathrm{d}y.$$

В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$c_j = \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ji} c_i + a_j, \quad j = \overline{1, N}, \tag{44}$$

де

$$\alpha_{ji} = \int\limits_G g_j(y) f_i(y) \,\mathrm{d}y, \quad a_j = \int\limits_G g_j(y) f(y) \,\mathrm{d}y. \tag{45}$$

Отримаємо систему рівнянь для спряженого ядра:

$$K^*(x, y) = \sum_{i=1}^N \bar{f}_i(y) \bar{g}_i(x), \tag{46}$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int\limits_G K^*(x, y) \psi(y) \,\mathrm{d}y + g(x), \tag{47}$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \bar{g}_i(x) \int\limits_G \bar{f}_i(y) \psi(y) \,\mathrm{d}y + g(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(x) + g(x), \tag{48}$$

$$d_i = \int\limits_G \bar{f}_i(y) \psi(y) \,\mathrm{d}y, \quad d_j = \int\limits_G \bar{f}_j(y) \left(g(y) + \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(y) \right) \mathrm{d}y, \tag{49}$$

$$d_j = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \beta_{ji} d_i + b_j, \quad i = \overline{1, N}, \tag{50}$$

$$\beta_{ji} = \int\limits_G \bar{f}_j(y) \bar{g}_i(y) \,\mathrm{d}y, \quad b_j = \int\limits_G \bar{f}_j(y) g(y) \,\mathrm{d}y, \tag{51}$$

$$\beta_{ji} = \bar{\alpha}_{ij}. \tag{52}$$

Тобто отримуємо системи лінійних рівнянь які в матричному вигляді запишуться так:

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c} + \vec{a}, \tag{53}$$

$$\vec{d} = \lambda A^* \vec{d} + \vec{b}, \tag{54}$$

з матрицями $E - \lambda A$ та $E - \bar{\lambda} A^*$ відповідно і визначником $D(\lambda = |E - \lambda A| = |E - \bar{\lambda} A^*|$.

Дослідимо питання існування та єдиності розв'язку СЛАР (53) та (54).

Нехай $D(\lambda) \neq 0$, $\operatorname{rang} |E - \lambda A| = \operatorname{rang} |E - \bar{\lambda} A^*| = N$, тоді СЛАР (53) і (53) мають єдиний розв'язок для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно, а тому інтегральні рівняння Фредгольма (63), (64) мають єдині розв'язки при будь-яких f та g відповідно, і ці розв'язки записуються за формулами (42), (48).

Нехай $D(\lambda) = 0$, $\operatorname{rang} |E - \lambda A| = \operatorname{rang} |E - \bar{\lambda} A^*| = q < N$, тоді однорідні СЛАР

$$\vec{c} = \lambda A \vec{c}, \tag{55}$$

та

$$\vec{d} = \lambda A^* \vec{d}, \tag{56}$$

мають $N-q$ лінійно незалежних розв'язків $\vec{c}_s$, $\vec{d}_s$, $s = \overline{1, N-q}$, де $\vec{c}_s = (c_{s1}, \ldots, c_{sN})$, $\vec{d}_s = (d_{s1}, \ldots, d_{sN})$, таким чином відповідні однорідні інтегральні рівняння Фредгольма рівнянням (63), (64) мають $N-q$ лінійно незалежних розв'язків які записуються за такими формулами:

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_{si} f_i(x), \quad s = \overline{1, N-q}, \tag{57}$$

$$\psi_s(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_{si} \bar{g}_i(x), \quad s = \overline{1, N-q}, \tag{58}$$

$\varphi_s(x)$, $\psi_s(x)$ – власні функції, а число $N-q$ – кратність характеристичного числа λ та $\bar{\lambda}$. Кожна з систем функцій φ_s, ψ_s, $s = \overline{1, N-q}$ лінійно незалежна, оскільки лінійно незалежними є системи функцій f_i та g_i і лінійно незалежні вектори $\vec{c}_s$ і $\vec{d}_s$, $s = \overline{1, N-q}$.

Нагадаємо одне з формулювань теореми Кронекера-Капеллі. Для існування розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно і достатньо що би вільний член рівняння був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння.

Для нашого випадку цю умову можна записати у вигляді

$$(\vec{a}, \vec{d}_s) = \sum_{i=1}^{N} a_i \bar{d}_{si} = 0, \quad \forall s = \overline{1, N-q}. \tag{59}$$

Покажемо, що для виконання умови $(\vec{a}, \vec{d}_s) = 0$, $s = \overline{1, N-q}$ необхідно і достатньо, щоб вільний член інтегрального рівняння Фредгольма (63) був ортогональним розв'язкам спряженого однорідного рівняння тобто

$$(f, \psi_s) = 0, \quad s = \overline{1, N-q} \tag{60}$$

Дійсно, з (58) та (43) маємо:

$$(f, \psi_s) = \int\limits_G f(x) \bar{\psi}_s(x) \,\mathrm{d}x = \lambda \sum_{i=1}^{N} \bar{d}_{si} \int\limits_G f(x) g_i(x) \,\mathrm{d}x = \lambda \sum_{i=1}^{N} a_i \bar{d}_{si} = \lambda(\vec{a}, \vec{d}_s) = 0, \quad s = \overline{1, N-q}.$$

В цьому випадку розв'язок СЛАР не єдиний, і визначається з точністю до довільного розв'язку однорідної системи рівнянь, тобто з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних векторів характеристичного числа λ:

$$\vec{c} = \vec{c}_0 + \sum_{i=1}^{N-q} \gamma_i \vec{c}_i, \tag{61}$$

, де γ_i – довільні константи, $\vec{c}_0$ – будь-який розв'язок неоднорідної системи рівнянь $\vec{c}_0 = \lambda A \vec{c}_0 + \vec{a}$, тоді розв'язок інтегрального рівняння можна записати у вигляді:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{N-q} \gamma_i \varphi_i(x), \tag{62}$$

де φ_0 – довільний розв'язок неоднорідного рівняння $\varphi_0 = \lambda \mathbf{K} \varphi_0 + f$.

Отже доведені такі теореми:

Теорема 4 (Перша теорема Фредгольма для вироджених ядер)**.** Якщо $D(\lambda) \neq 0$, то інтегральне рівняння (63) та спряжене до нього (64) мають єдині розв'язки для довільних вільних членів f та g з класу неперервних функцій.

Теорема 5 (Друга теорема Фредгольма для вироджених ядер)**.** Якщо $D(\lambda) = 0$, то однорідне рівняння Фредгольма другого роду (63) ($f \equiv 0$) і спряжене до нього (64) ($g \equiv 0$) мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків рівну $N - q$, де $q = \operatorname{rang}(E - \lambda A)$.

Теорема 6 (Третя теорема Фредгольма для вироджених ядер)**.** Якщо $D(\lambda) = 0$, то для існування розв'язків рівняння (63) необхідно і достатньо, щоб вільний член f був ортогональним усім розв'язкам однорідного спряженого рівняння (60). При виконанні цієї умови розв'язок існує та не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій характеристичного числа λ.

Наслідок 1. Характеристичні числа виродженого ядра $K(x, y)$ співпадають з коренями поліному $D(\lambda) = 0$, а їх кількість не перевищує N.

Приклад 2. Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \sin(x - y)\varphi(y \, \mathrm{d}y + \cos(x).$$

Розв'язок.

$$\varphi(x) = \lambda \sin(x) \int\limits_0^\pi \cos(y)\varphi(y) \, \mathrm{d}y - \lambda \cos(x) \int\limits_0^\pi \sin(y)\varphi(y) \, \mathrm{d}y + \cos(x).$$

Позначимо

$$c_1 = \int\limits_0^\pi \cos(y)\varphi(y) \, \mathrm{d}y, \quad c_2 = \int\limits_0^\pi \sin(y)\varphi(y) \, \mathrm{d}y.$$

$$\varphi(x) = \lambda(c_1 \sin(x) - c_2 \cos(x)) + \cos(x).$$

Підставляючи останню рівність в попередні отримаємо систем рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^\pi \cos(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y)) \, \mathrm{d}y, \\ c_2 = \int\limits_0^\pi \sin(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y)) \, \mathrm{d}y. \end{cases}$$

Після обчислення інтегралів:

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{\lambda\pi}{2} c_2 = \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\lambda\pi}{2} c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda\pi}{2} \\ -\frac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 \neq 0.$$

За правилом Крамера маємо

$$c_1 = \frac{2\pi}{4 + (\lambda\pi)^2}, \quad c_2 = \frac{\lambda\pi^2}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

Таким чином розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi \sin(x) + 4\cos(x)}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

Лекція 3

Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром

Будемо розглядати рівняння:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x), \tag{63}$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int\limits_G K^*(x, y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x), \tag{64}$$

Ядро $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$, отже його можна наблизити поліномом (Теорема Вєйєрштраса).

Тобто, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує

$$P_N(x, y) = \sum_{|\alpha+\beta| \le N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{65}$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, такий що $|K(x, y) - P_N(x, y)| < \varepsilon$, $x, y \in \bar{G} \times \bar{G}$, тобто

$$K(x, y) = P_N(x, y) + Q_n(x, y), \tag{66}$$

де $P_N(x, y)$ – вироджене ядро (поліном), $|Q_N(x, y)| < \varepsilon$, $x, y \in \bar{G} \times \bar{G}$.

Виходячи з (66), інтегральне рівняння Фредгольма приймає вигляд

$$\varphi = \lambda \mathbf{P}_N \varphi + \lambda \mathbf{Q}_N \varphi + f, \tag{67}$$

де $\mathbf{P}_N$ та $\mathbf{Q}_N$ інтегральні оператори з ядрами $P_N(x, y)$ та $Q_N(x, y)$ відповідно ($\mathbf{P}_N + \mathbf{Q}_N = \mathbf{K}$).

Для спряженого рівняння маємо:

$$K^*(x, y) = P_N^*(x, y) + Q_N^*(x, y), \tag{68}$$

$$\psi = \bar{\lambda} \mathbf{P}_N^* \psi + \bar{\lambda} \mathbf{Q}_N^* \psi + g. \tag{69}$$

Покажемо, що в класі $C(G)$ рівняння (67), (69) еквівалентні рівнянням з виродженим ядром. Введемо нову функцію

$$\Phi = \varphi - \lambda \mathbf{Q}_N \varphi \tag{70}$$

З (67) випливає що $\Phi = \lambda \mathbf{P}_N + f$, з (28) випливає що $\forall \lambda$ такого що $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$: $(E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} = (E + \lambda \mathbf{R}_N)$, де $\mathbf{R}_N$ – резольвента для $\mathbf{Q}_N$. Отже $\varphi = (E - \lambda \mathbf{Q}_N)^{-1} \Phi = (E + \lambda \mathbf{R}_N) \Phi$.

Отже, рівняння (63) перетворюється на

$$\Phi = \lambda \mathbf{P}_N (E + \lambda \mathbf{R}_N) \Phi. \tag{71}$$

Для спряженого рівняння (64) маємо:

$$\psi = \bar{\lambda}(E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) \mathbf{P}_N^* \psi + (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) g.$$

Позначимо $g_1 = (E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) g$. Маємо:

$$\psi = \bar{\lambda}(E + \bar{\lambda} \mathbf{R}_N^*) \mathbf{P}_N^* \psi + g_1. \tag{72}$$

Оскільки $(\mathbf{P}_N\mathbf{R}_N)^* = \mathbf{R}_N^*\mathbf{P}_N^*$, то рівняння (71) та (72) спряжені.

Позначимо
$$\mathbf{T}_N = \mathbf{P}_N(E + \lambda\mathbf{R}_N), \tag{73}$$
$$\mathbf{T}_N^* = (E + \bar{\lambda}\mathbf{R}_N^*)\mathbf{P}_N^*. \tag{74}$$

Тоді рівняння Фредгольма з неперервним ядром можна записати у вигляді:
$$\Phi = \lambda\mathbf{T}_N\Phi + f, \tag{75}$$
$$\Psi = \bar{\lambda}\mathbf{T}_N^*\Psi + g_1, \tag{76}$$
де $T_N(x,y,\lambda) = P_N(x,y) + \lambda\int_G P_N(x,\xi)R_N(\xi,y,\lambda)\,\mathrm{d}\xi$ – вироджене, оскільки є сумою двох вироджених, поліному $P_N(x,y)$, та інтегрального доданку. Покажемо що другий доданок в T_N – вироджений. Дійсно:
$$\int\limits_G \sum_{|\alpha+\beta|\le N} a_{\alpha\beta}x^\alpha\xi^\beta R_N(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{|\alpha+\beta|\le N} a_{\alpha\beta}x^\alpha \int\limits_G \xi^\beta R_N(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi.$$

Альтернатива Фредгольма

Сукупність теорем Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром називається альтернативою Фредгольма.

Теорема 7 (Перша теорема Фредгольма для неперервних ядер)**.** Якщо інтегральне рівняння (63) з неперервним ядром $K(x,y)$ має розв'язок $\forall f \in C(\bar{G})$ то і спряжене рівняння (64) має розв'язок для $\forall g \in C(\bar{G})$ і ці роз'язки єдині.

Теорема 8 (Друга теорема Фредгольма для непевних ядер)**.** Якщо інтегральне рівняння (63) має розв'язки не для будь-якого вільного члена f, то однорідні рівняння $\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi$ $(*)$ та $\psi = \bar{\lambda}\mathbf{K}^*\psi$ $(**)$ мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків.

Теорема 9 (Третя теорема Фредгольма для неперервних ядер)**.** Якщо інтегральне рівняння (63) має розв'язок не для $\forall$ вільного члена f, то для існування розв'язку інтегрального рівняння (63) в $C(\bar{G})$ необхідно і достатньо, щоб вільний член f був ортогональним всім розв'язкам спряженого однорідного рівняння $(**)$. Розв'язок не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки, натягнутої на систему власних функцій оператора $\mathbf{K}$.

Доведення теорем: Для будь-якого фіксованого значення λ виберемо ε, таке щоби $|\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V}$.

Теореми 1. Нехай (63) має розв'язок в $C(\bar{G})$ для $\forall$ вільного члена f, тоді еквівалентне йому рівняння (75): $\Phi = \lambda\mathbf{T}_N\Phi + F$ має такі ж властивості і згідно з першою теоремою Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda) \ne 0$, а спряжене до нього рівняння (76): $\Psi = \bar{\lambda}\mathbf{T}_N^* + g_1$ теж має єдиний розв'язок $\forall$ вільного члена g_1, еквівалентне до нього рівняння (64) має розв'язок $\forall g$. □

Теореми 2. Нехай (63) має розв'язок не $\forall$ вільного члена f, тоді, рівняння з виродженим ядром (75) має таку ж властивість. Згідно з теоремами Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda) = 0$ (для виродженого ядра $\mathbf{T}_N$). Однорідні рівняння які відповідають (75) і (76) мають однакову скінчену кількість лінійно-незалежних розв'язків, еквівалентні до них однорідні рівняння $(*)$, $(**)$ теж мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв'язків. □

Теореми 3. Нехай неоднорідне рівняння (63) має розв'язок не для будь-якого вільного члена f, тоді еквівалентне рівняння з виродженим ядром (75) має таку ж властивість, і за третьою теоремою Фредгольма для вироджених ядер $D(\lambda) = 0$ (для виродженого ядра $\mathbf{T}_N$). Розв'язок (75) існує тоді і тільки тоді коли f ортогональний до розв'язків спряженого однорідного рівняння до (76). Але легко бачити, що вільний член (63) і (75) співпадають, так само співпадають розв'язки однорідного рівняння (64) і (76). □

Теорема 10 (Четверта теорема Фредгольма)**.** Для будь-якого як завгодно великого числа $R > 0$ в крузі $|\lambda| < R$ лежить лише скінчена кількість характеристичних чисел неперервного ядра $K(x, y)$.

Наслідки з теорем Фредгольма

Наслідок 2. З четвертої теореми Фредгольма випливає, що множина характеристичних чисел неперервного ядра не має скінчених граничних точок і не більш ніж злічена $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$.

Наслідок 3. З другої теореми Фредгольма випливає, що кратність кожного характеристичного числа скінчена, їх можна занумерувати у порядку зростання модулів $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_k| \le |\lambda_{k+1}| \le \ldots$, кожне число зустрічається стільки разів, яка його кратність. Також можна занумерувати послідовність власних функцій ядра $K(x, y)$: φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_k, φ_{k+1}, $\ldots$ і спряженого ядра $K^*(x, y)$: ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_k, ψ_{k+1}, $\ldots$.

Наслідок 4. Власні функції неперервного ядра $K(x, y)$ неперервні в області G.

Наслідок 5. Якщо $\lambda_k \ne \lambda_j$, то $(\varphi_k, \psi_j) = 0$.

Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром

Розповсюдимо Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром:

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < n. \tag{77}$$

Покажемо що $\forall \varepsilon > 0$ існує таке вироджене ядро $P_N(x, y)$ що,

$$\max_{x\in\bar G} \int\limits_G |K(x, y) - P_N(x, y)| \,\mathrm{d}y < \varepsilon \tag{78}$$

$$\max_{x\in\bar G} \int\limits_G |K^*(x, y) - P_N^*(x, y)| \,\mathrm{d}y < \varepsilon \tag{79}$$

Розглянемо неперервне ядро

$$L_M(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & |x - y| \ge 1/M, \\ A(x, y)M^\alpha, & |x - y| < 1/M. \end{cases} \tag{80}$$

Покажемо, що при достатньо великому M має місце оцінка

$$\int\limits_G |K(x, y) - L_M(x, y)| \,\mathrm{d}y \le \varepsilon.$$

Дійсно:

$$\int\limits_G |K(x, y) - L_M(x, y)| \,\mathrm{d}y = \int\limits_{|x-y|<1/M} \left| \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha} - A(x, y)M^\alpha \right| \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{|x-y|<1/M} |A(x, y)| \left| \frac{1}{|x - y|^\alpha} - M^\alpha \right| \mathrm{d}y \le A_0 \int\limits_{|x-y|<1/M} \left| \frac{1}{|x - y|^\alpha} - M^\alpha \right| \mathrm{d}y \le A_0 \int\limits_{|x-y|<1/M} \frac{\mathrm{d}y}{|x - y|^\alpha} =$$

$$= A_0\sigma_n \int\limits_0^{1/M} \xi^{n-1-\alpha} \,\mathrm{d}\xi = A_0\sigma_n \left.\frac{\xi^{n-\alpha}}{n - \alpha}\right|_0^{1/M} = \frac{A_0\sigma_n}{(n - \alpha)M^{n-\alpha}} \le \frac{\varepsilon}{2},$$

де σ_n – площа поверхні одиничної сфери.

Завжди можна підібрати вироджене ядро $P_N(x, y)$ таке що

$$|L_M(x, y) - P_N(x, y)| \leq \frac{\varepsilon}{2V},$$

де V – об'єм області G.

$$\int_G |K(x, y) - P_N(x, y)| \, \mathrm{d}y = \int_G |K(x, y) - L_M(x, y) + L_M(x, y) - P_N(x, y)| \, \mathrm{d}y \leq$$
$$\leq \int_G |K(x, y) - L_M(x, y)| \, \mathrm{d}y + \int_G |L_M(x, y) - P_N(x, y)| \, \mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2V} \int_G \mathrm{d}y = \varepsilon.$$

Використавши попередню техніку (для неперервного ядра) інтегральне рівняння з полярним ядром зводиться до еквівалентного рівняння з виродженим ядром. Тобто теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром з тим же самим формулюванням.

Теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром на обмеженій кусково-гладкій поверхні S та контурі C:

$$\varphi(x) = \lambda \int_S K(x, y)\varphi(y) \, \mathrm{d}y + f(x), \quad \frac{A(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < \dim(S).$$

§3. Інтегральні рівняння з ермітовим ядром

Розглядатимемо ядро $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$ таке що $K(x, y) = K^*(x, y)$.

Неперервне ядро будемо називати ермітовим, якщо виконується

$$K(x, y) = K^*(x, y) \tag{81}$$

Ермітовому ядру відповідає ермітовий оператор тобто $\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$.

Лема 5. Для того, щоб лінійний оператор був ермітовим, необхідно і достатньо, щоб для довільної комплексно значної функції $f \in L_2(\bar{G})$ білінійна форма $(\mathbf{K}f, f)$ приймала лише дійсні значення.

Лема 6. Характеристичні числа ермітового оператора дійсні.

Визначення 1. Множина функцій $M \subset C(\bar{G})$ – компактна в рівномірній метриці, якщо з будь-якої нескінченної множини функцій з можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність.

Визначення 2. Нескінченна множина $M \subset C(\bar{G})$ – рівномірно обмежена, якщо для будь-якого елемента $f \in M$ має місце $\|f\|_{C(\bar{G})} \leq a$, де a єдина константа для M.

Визначення 3. Множина $M \subset C(\bar{G})$ – одностайно неперервна якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \forall f \in M, \forall x_1, x_2 :$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ як тільки $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$.

Теорема 11 (Арчела-Асколі, критерій компактності в рівномірній метриці)**.** Для того, щоб множина $M \subset C(\bar{G})$ була компактною, необхідно і достатньо, щоб вона складалась з рівномірно-обмеженої і одностайно-неперервної множини функцій.

Визначення 4. Назвемо оператор $\mathbf{K}$ цілком неперервним з $L_2(G)$ у $C(\bar{G})$, якщо він переводить обмежену множину в $L_2(G)$ у компактну множину в $C(\bar{G})$ (в рівномірній метриці).

Лема 7. Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з неперервним ядром $K(x, y)$ є цілком неперервний з $L_2(G)$ у $C(\bar{G})$.

Доведення. Нехай $f \in << \subset L_2(G)$ та $\forall f \in M : \|f\|_{L_2(G)} \le A$. Але $\|\mathbf{K}f\|_{C(\bar{G})} \le M\sqrt{V}\|f\|_{L_2(G)} \le M\sqrt{V}A$, тобто множина функцій є рівномірно обмеженою.

Покажемо що множина $\{\mathbf{K}f(x)\}$ – одностайно неперервна.

Ядро $K \in C(\bar{G}\times\bar{G}) <$ а отже є рівномірно неперервним, бо неперервне на компакті, тобто $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \bar{G} : \|x' - x''\| < \delta \Rightarrow |(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| \le \varepsilon$. Дійсно,

$$|(\mathbf{K}f)(x') - (\mathbf{K}f)(x'')| = \left|\int\limits_G K(x', y)f(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_G K(x'', y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \le$$

$$\le \int\limits_G |K(x', y) - K(x'', y)||f(y)|\,\mathrm{d}y \le \frac{\varepsilon\sqrt{V}}{A\sqrt{V}}\|f\|_{L_2(\bar{G})} \le \varepsilon.$$

□

Приклад 3. Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального оператора

$$\varphi(x0 = \lambda \int\limits_0^1 \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{2/5} + \left(\frac{t}{x}\right)^{2/5}\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Розв'язок.

$$\varphi(x) = \lambda x^{2/5}\int\limits_0^1 t^{-2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \lambda x^{-2/5}\int\limits_0^1 t^{2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Позначимо

$$c_1 = \int\limits_0^1 t^{-2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad c_2 = \int\limits_0^1 t^{2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\varphi(x) = \lambda c_1 x^{2/5} + \lambda c_2 x^{-2/5}.$$

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^1 t^{-2/5}(\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5})\,\mathrm{d}t, \\ c_2 = \int\limits_0^1 t^{2/5}(\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5})\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)c_1 - 5\lambda c_2 = 0, \\ -\dfrac{5\lambda}{9}c_1 + (1-\lambda)c_2 = 0. \end{cases}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5\lambda \\ -\dfrac{5\lambda}{9} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{25\lambda^2}{9} = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{8}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

З системи однорідних рівнянь при $\lambda = \lambda_1 = \frac{3}{8}$ маємо $c_1 = 3c_2$. Тоді маємо власну функцію $\varphi_1(x) = 3x^{2/5} + x^{-2/5}$.

При $\lambda = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$ маємо $c_1 = -3c_2$. Маємо другу власну функцію $\varphi_2(x) = -3x^{2/5} + x^{-2/5}$.

Приклад 4. Знайти розв'язок інтегрального рівняння при всіх значеннях параметрів λ, a, b, c:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})\varphi(y)\,\mathrm{d}y + ax^2 + bx + c.$$

Розв'язок. Запишемо рівняння у вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x} \int_{-1}^{1} \varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{y}\varphi(y)\,\mathrm{d}y + ax^2 + bx + c.$$

Введемо позначення:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} \varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad c_2 = \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{y}\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

та запишемо розв'язок у вигляді: $\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}c_1 + \lambda c_2 + ax^2 + bx + c$.

Для визначення констант отримаємо СЛАР:

$$\begin{cases} c_1 - 2\lambda c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ -\dfrac{6\lambda}{5}c_1 + c_2 = \dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює $\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{6\lambda}{5} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{12\lambda^2}{5}$.
Характеристичні числа ядра $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Нехай $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$. Тоді розв'язок існує та єдиний для будь-якого вільного члена і має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{5\lambda(14a + 30\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)}\sqrt[3]{x} + \frac{28\lambda a + 84\lambda c + 30b}{7(5 - 12\lambda^2)} + ax^2 + bx + c.$$

Нехай $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Тоді система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} c_1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Ранги розширеної і основної матриці співпадатимуть якщо має місце рівність $\frac{2a}{3} + 2c = -\sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6}{7}b$, $(*)$.

При виконанні цієї умови розв'язок існує $c_2 = c_2$, $c_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c$.

Таким чином розв'язок можна записати

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + x.$$

Якщо $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, а умова (*) не виконується, то розв'язків не існує.

Нехай $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Після підстановки цього значення отримаємо СЛАР

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = \sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Остання система має розв'язок при умові, $\frac{2a}{3} + 2c = \sqrt{\frac{5}{3}}\frac{6}{7}b$, (**).

При виконанні умови (**), розв'язок існує $c_2 = c_2$, $c_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c$.

Розв'язок інтегрального рівняння можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + c.$$

Лекція 4

Характеристичні числа ермітового неперервного ядра

Теорема 12 (Про існування характеристичного числа у ермітового неперервного ядра)**.** Для будь-якого ермітового неперервного ядра, що не дорівнює тотожно нулю існує принаймні одне характеристичне число і найменше з них за модулем λ_1 задовольняє варіаційному принципу

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}}. \tag{82}$$

Доведення. Серед усіх $f \in L_2$ оберемо такі, що $\|f\|_{L_2(G)} = 1$. Позначимо

$$\nu = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ \|f\|_{L_2} = 1}} \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}.$$

Оскільки $\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \le MV\|f\|_{L_2(G)} \le MV$, то $0 \le \nu \le MV$.

Згідно до визначення точної верхньої межі, $\exists\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(G)$, $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{K}f_k\|_{L_2(G)} = \nu$.

Оцінимо

$$\|\mathbf{K}^2 f\|_{L_2(G)} = \|\mathbf{K}(\mathbf{K}f)\|_{L_2(G)} = \mathbf{K}\left\|\left(\frac{\mathbf{K}f}{\|\mathbf{K}f\|}\right)\right\|_{L_2(G)} \mathbf{K}\|f\|_{L_2(G)} \le \nu\mathbf{K}\|f\|_{L_2(G)} \le \nu^2.$$

Покажемо, що $\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k \to 0$ в середньому квадратичному. Тобто $\|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|^2_{L_2(G)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Дійсно:

$$\|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|^2_{L_2(G)} = (\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k, \mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k)_{L_2(G)} = \|\mathbf{K}^2 f_k\|^2_{L_2(G)} + \nu^4 - \nu^2(\mathbf{K}^2 f_k, f_k) - \\ - \nu^2(f_k, \mathbf{K}^2 f_k) = \|\mathbf{K}^2 f_k\|^2_{L_2(G)} + \nu^4 - 2\nu^2\|\mathbf{K} f_k\|^2_{L_2(G)} \le \nu^2(\nu^2 - \|\mathbf{K}^2 f_k\|^2_{L_2(G)}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Розглянемо послідовність $\{\mathbf{K} f_k\} = \{\varphi_k\}$, яка є компактною в рівномірній метриці.

Звідси підпослідовність $\{\varphi_{k_i}\}_{i=1}^\infty$ збіжна в $C(\bar{G})$, тобто $\exists \varphi \in C(\bar{G})$, така що $\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\bar{G})} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$.

Покажемо, що $\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi = 0$ в кожній точці, тобто $\|\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi\|_{C(\bar{G})} = 0$.

$$\|\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi\|_{C(\bar{G})} = \|\mathbf{K}^2\varphi - \mathbf{K}^2\varphi_{k_i} + \mathbf{K}^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi_{k_i} + \nu^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi\|_{C(\bar{G})} \le \\ \le \|\mathbf{K}^2\varphi - \mathbf{K}^2\varphi_{k_i}\|_{C(\bar{G})} + \|\mathbf{K}^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi_{k_i}\|_{C(\bar{G})} + \|\nu^2\varphi_{k_i} - \nu^2\varphi\|_{C(\bar{G})} \le \\ \le (MV)^2\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\bar{G})} + M\sqrt{V}\|\mathbf{K}^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\|_{L_2(\bar{G})} + \nu^2\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\bar{G})} \to 0 + 0 + 0.$$

Таким чином має місце рівність

$$\mathbf{K}^2\varphi - \nu^2\varphi = 0 \tag{83}$$

Отже маємо: $(\mathbf{K} + E\nu)(\mathbf{K} - E\nu)\varphi = 0$. Ця рівність може мати місце у двох випадках:

1. $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv 0$. Тоді $\varphi = \frac{1}{\nu}\mathbf{K}\varphi$, а отже φ – власна функція, $\frac{1}{\nu}$ – характеристичне число оператора $\mathbf{K}$.

2. $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv \Phi \ne 0$. Тоді $(\mathbf{K} + E\nu)\Phi \equiv 0$. Тоді $\Phi = -\frac{1}{\nu}\mathbf{K}\Phi$, а отже Φ – власна функція, $-\frac{1}{\nu}$ – характеристичне число оператора $\mathbf{K}$.

Залишилось довести, що це характеристичне число є мінімальним за модулем. Припустимо супротивне. Нехай $\exists \lambda_0 : |\lambda_0| < |\lambda_1|$, тоді $\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f\in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K}f\|}{\|f\|} \ge \frac{\|\mathbf{K}\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{|\lambda_0|} \Rightarrow |\lambda_0| \ge |\lambda_1|$. □

Зауваження. Доведена теорема є вірною і для ермітових полярних ядер,

Звідси безпосередньо випливають такі властивості характеристичних чисел та власних функцій ермітового ядра:

1. Множина характеристичних чисел ермітового неперервного ядра не порожня, є підмножиною множини дійсних чисел і не має скінчених граничних точок.

2. Кратність будь-якого характеристичного числа скінчена.

3. Власні функції можна вибрати так, що вони утворять ортонормовану систему. Тобто $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\dots}$ такі що $(\varphi_k, \varphi_i)_{L_2(G)} = \delta_{ki}$.

   (Зокрема достатньо провести процес ортогоналізації Гілберта-Шмідта для будь-якої системи лінійно незалежних власних функцій, і пронормувати отриману систему).

§4. Теорема Гілберта-Шмідта та її наслідки

Білінійний розвинення ермітового неперервного ядра

Нехай $K(x, y) \in C(\bar{G} \times \bar{G})$ ермітове неперервне ядро, $|\lambda_i| \le |\lambda_{i+1}|$, $i = 1, 2, \dots$ його характеристичні числа і $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ ортонормована система власних функцій, що відповідають власним числам.

Розглянемо послідовність ермітових неперервних ядер:

$$K^p(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\bar{\varphi}_i(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{84}$$

$$K^p(x,y) = (K^p) * (x,y) \in C(\bar{G} \times \bar{G}).$$

Дослідимо властивості операторів (84). Покажемо, що будь-яке характеристичне число λ_j, $j > p+1$ та відповідна йому власна функція φ_j є характеристичним числом і власною функцією ядра $K^p(x,y)$.

$$\mathbf{K}^p \varphi_j = \mathbf{K}\varphi_j - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}(\varphi_i, \varphi_j) = \mathbf{K}\varphi_j = \frac{\varphi_j}{\lambda_j}. \tag{85}$$

Нехай λ_0, φ_0 – характеристичне число та відповідна власна функція $K^p(x,y)$, тобто $\lambda_0 \mathbf{K}^p \varphi_0 = \varphi_0$. Покажемо що, $(\varphi_0, \varphi_j) = 0$ для $j = \overline{1,p}$.

$$\varphi_0 = \lambda_0 \mathbf{K}\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i}{\lambda_i}(\varphi_0, \varphi_i),$$

$$(\varphi_0, \varphi_j) = \lambda_0(\mathbf{K}\varphi_0, \varphi_j) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_j)}{\lambda_i} = \frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j) - \frac{\lambda_0}{\lambda_j}(\varphi_0, \varphi_j) = 0.$$

Отже λ_0, φ_0 відповідно характеристичне число і власна функція ядра $K(x,y)$.

Таким чином φ_0 – ортогональна до усіх власних функцій φ_1, φ_2, ..., φ_p, таким чином, λ_0 співпадає з одним із характеристичних чисел λ_{p+1}, λ_{p+2}, ... тобто $\varphi_0 = \varphi_k$ для деякого $k \ge p+1$.

Отже у ядра $K^p(x,y)$ множина власних функцій і характеристичних чисел вичерпується множиною власних функцій і характеристичних чисел ядра $K(x,y)$ починаючи з номера $p+1$.

Враховуючи, що λ_{p+1} найменше за модулем характерне число ядра $K^p(x,y)$, має місце нерівність

$$\frac{\|\mathbf{K}^p f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}} \le \frac{1}{|\lambda_{p+1}|}.$$

Для ядра, що має скінчену кількість характеристичних чисел, очевидно, має місце рівність $K^N(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \equiv 0$.

Тобто будь-яке ермітове ядро зі скінченою кількістю характеристичних чисел є виродженим і представляється у вигляді $K(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}$.

Враховуючи теорему про існування характеристичних чисел у ермітового оператора можемо записати:

$$\|K^{(p)} f\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}f - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_{L_2(G)} \le \frac{\|f\|_{L_2(G)}}{|\lambda_{p+1}|} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0. \tag{86}$$

Тобто можна вважати, що ермітове ядро в розумінні (86) наближається наступним білінійним рядом:

$$K(x,y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \tag{87}$$

Для виродженого ядра маємо його представлення у вигляді

$$K(x,y) \sim \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \tag{88}$$

Ряд Фур'є функції із $L_2(G)$

Розглянемо довільну функцію $f \in L_2(G)$ і деяку ортонормовану систему функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$. Рядом Фур'є функції f із $L_2(G)$ називається ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f, u_i)u_i \sim f, \tag{89}$$

(f, u_i) – називається коефіцієнтом Фур'є.

$\forall f \in L_2(G)$ виконується нерівність Бесселя

$$\forall N : \sum_{i=1}^{N} |(f, u_i)|^2 \leq \|f\|^2_{L_2(G)}. \tag{90}$$

Нерівність Бесселя гарантує збіжність ряду Фур'є в середньоквадратичному, але не обов'язково до функції f.

Визначення 5. Ортонормована система функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ називається повною (замкненою), якщо ряд Фур'є для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ по цій системі функцій збігається до цієї функції в просторі $L_2(G)$.

Теорема 13 (Критерій замкненості ортонормованої системи функцій)**.** Для того щоб система функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ була повною в $L_2(G)$ необхідно і достатньо, щоби для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ виконувалось рівність Парсеваля-Стеклова:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, u_i)|^2 = \|f\|^2_{L_2(G)}. \tag{91}$$

Теорема Гільберта-Шмідта

Функція $f(x)$ називається джерелувато-зображуваною через ермітове неперервне ядро $K(x, y) = K^*(x, y)$, $K \in C(G \times G$, якщо існує функція $h(x) \in L_2(G)$, така що

$$f(x) = \int_G K(x, y)h(y)\,\mathrm{d}y. \tag{92}$$

Теорема 14 (Гільберта-Шмідта)**.** Довільна джерелувато-зображувана функція f розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою власних функцій ермітового неперервного ядра $K(x, y)$

Доведення. Обчислимо коефіцієнти Фур'є: $(f, \varphi_i) = (\mathbf{K}h, \varphi_i) = (h, \mathbf{K}\varphi_i) = \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}$. Отже ряд Фур'є функції f має вигляд

$$f \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \tag{93}$$

Якщо власних чисел скінчена кількість, то з (88) випливає, що $f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i(x)$, якщо ж власних чисел злічена кількість, то з (86) випливає співвідношення:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{p} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}h - \sum_{i=1}^{p} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_{L_2(G)} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0, \quad h \in L_2(G).$$

Покажемо, що формулу (87) можна розглядати як розвинення ядра $K(x,y)$ в ряд Фур'є по системі власних функцій $\varphi_i(x)$. Перевіримо це обчислюючи коефіцієнт Фур'є:

$$(K(\cdot,y),\varphi_i)_{L_2(G)} = \int\limits_G K(x,y)\bar{\varphi}_i(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_G \bar{K}(y,x)\bar{\varphi}_i(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}.$$

Доведемо рівномірну збіжність ряду Фур'є (93) за критерієм Коші і покажемо, що при, $n,m\to\infty$, відрізок ряду прямує до нуля. За нерівністю Коші-Буняківського маємо:

$$\left|\sum_{i=n}^m \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i\right| \le \sum_{i=n}^m |(h,\varphi_i)|\frac{|\varphi_i|}{|\lambda_i|} \le \left(\sum_{i=n}^m |(h,\varphi_i)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=n}^m \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2}\right)^{1/2}$$

$$\sum_{i=n}^m |(h,\varphi_i)|^2 \le \|h\|_{L_2(G)^2},$$

тобто ряд збігається, а вказана сума прямує до 0 при $n,m\to\infty$.

$$\sum_{i=n}^m \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \le \int\limits_G |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}x \le M^2V,$$

тобто ряд збігається.

Отже

$$\left(\sum_{i=n}^m |(h,\varphi_i)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=n}^m \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2}\right)^{1/2} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

а отже $\sum_{i=1}^\infty \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i$ збігається абсолютно і рівномірно. □

Наслідок 6. Довільне повторне ядро для ермітового неперервного ядра $K(x,y)$ розкладається в білінійний ряд по системі власних функцій ермітового неперервного ядра, який збігається абсолютно і рівномірно $K_{(p)}(x,y) = \sum_{i=1}^\infty \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i^p}$, $p=2,3,\ldots$, де коефіцієнти Фур'є $\frac{\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i^p}$.

Повторне ядро $K_{(p)} = \int_G K(x,\xi)K_{(p-1)}(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi$ є джерелувато-зображувана функція і таким чином для цього має місце теорема Гільберта-Шмідта.

Доведемо деякі важливі нерівності:

$$K_{(2)}(x,x) = \int\limits_G K(x,\xi)K(\xi,x)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_G K(x,\xi)\bar{K}(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_G |K(x,\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^\infty \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i^2}. \tag{94}$$

Рівність (94) випливає з наслідку 1. Проінтегруємо (94), отримаємо

$$\iint\limits_{G\times G} |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i^2}. \tag{95}$$

Теорема 15 (Про збіжність білінійного ряду для ермітового неперервного ядра)**.** Ермітове неперервне ядро $K(x,y)$ розкладається в білінійний ряд $K(x,y) = \sum_{i=1}^\infty \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}$ по своїх власних функціях, і цей ряд збігаються в нормі $L_2(G)$ по аргументу x рівномірно для кожного $y\in\bar{G}$, тобто

$$\left\|K(x,y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}\right\|_{L_2(x\in G)} \xrightarrow[p\to\infty]{y\in\bar{G}} 0.$$

Доведення.

$$\left\|K(x,y)-\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}\right\|^2_{L_2(G)} = Int_G|K(x,y)|^2\,\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{p}\frac{|\varphi_i(y)|^2}{\lambda_i^2}\xrightarrow[p\to\infty]{y\in\bar{G}}0.$$

Додатково інтегруючи по аргументу $y \in G$ отримаємо збіжність білінійного ряду (87) в середньоквадратичному.

$$\iint\limits_G\left(K(x,y)-\sum_{i=1}^{p}\frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}\right)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\xrightarrow[p\to\infty]{}0. \tag{96}$$

□

Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду $\varphi=\lambda\mathbf{K}\varphi+f$, з ермітовим неперервним ядром

$$K(x,y)=K^*(x,y). \tag{97}$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_p,\ldots,\ \varphi_1,\ldots,\varphi_p,\ldots$ – множина характеристичних чисел та ортонормована система власних функцій ядра $K(x,y)$.

Розкладемо розв'язок рівняння φ по системі власних функцій ядра $K(x,y)$:

$$\varphi=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}(\mathbf{K}\varphi,\varphi_i)\varphi_i+f=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi,\mathbf{K}\varphi_i)\varphi_i+f=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i+f,$$

обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$(\varphi,\varphi_k)=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_i)}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi_k)+(f,\varphi_k)=\lambda\frac{\varphi,\varphi_k}{\lambda_k}+(f,\varphi_k).$$

Отже, $(\varphi,\varphi_k)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)=(f,\varphi_k)$, тому $(\varphi,\varphi_k)=(f,\varphi_k)\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}$, $k=1,2,\ldots$

Таким чином має місце формула Шмідта:

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i-\lambda}\varphi_i(x)+f(x). \tag{98}$$

Розглянемо усі можливі значення λ:

1. Якщо $\lambda\notin\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, тоді існує єдиний розв'язок для довільного вільного члена f і цей розв'язок представляється за формулою (98).

2. Якщо $\lambda=\lambda_k=\lambda_{k+1}=\ldots=\lambda_{k+q-1}$ – співпадає з одним з характеристичних чисел кратності q, та при цьому виконанні умови ортогональності $(f,\varphi_k)=(f,\varphi_{k+1})=\ldots=(f,\varphi_{k+q-1})=0$ тоді розв'язок існує (не єдиний), і представляється у вигляді

$$\varphi(x)=\lambda_k\sum_{\substack{i=1\\ \lambda_i\neq\lambda_k}}^{\infty}\frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i-\lambda_k}\varphi_i(x)+f(x)+\sum_{j=k}^{k+q-1}c_j\varphi_j(x), \tag{99}$$

   де c_j – довільні константи.

   Якщо $\exists j:(f,\varphi_j)\neq0$, $k\le j\le k+q-1$ тоді розв'язків не існує.

Приклад 5. Знайти ті значення параметрів a, b для яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(xy - \frac{1}{3} \right) \varphi(y) \, \mathrm{d}y + ax^2 - bx + 1$$

має розв'язок для будь-якого значення λ.

Розв'язок. Знайдемо характеристичні числа та власні функції спряженого однорідного рівняння (ядро ермітове).

$$\varphi(x) = \lambda x \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y0 \, \mathrm{d}y - \frac{\lambda}{3} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y) \, \mathrm{d}y = \lambda x c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2.$$

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} y \left(\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) \mathrm{d}y = \frac{2\lambda}{3} c_1, \\ c_2 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \left(\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) \mathrm{d}y = -\frac{2\lambda}{3} c_2. \end{cases}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2\lambda}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = 1.$$

Умови ортогональності:

$$\begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1) x \, \mathrm{d}x = -\frac{2b}{3} = 0, \\ \int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1) \, \mathrm{d}x = \frac{2a}{3} + 2 = 0. \end{cases}$$

$$a = -3, \quad b = 0.$$