1 Класифікація рівнянь другого порядку

1.1 Теорія

Рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot u_{x_i x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \tag{1}$$

у кожній фіксованій точці x_0 можна звести до канонічного вигляду неособливим лінійним перетворенням $\xi = B^T x$, де B – така матриця, що перетворення $y = B\eta$ приводить квадратичну форму

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \cdot y_i \cdot y_j \tag{2}$$

до канонічного вигляду. (Нагадаємо, що довільну квадратичну форму можна звести до канонічного вигляду, наприклад методом виділення повних квадратів.)

1.2 Практика

Задача 1.1 (Владіміров, 2.1.1). Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0.$$

Розв'язок. Перш за все перейменуємо змінні для зручності:

$$u_{x_1x_1} + 2u_{x_1x_2} - 2u_{x_1x_3} + 2u_{x_2x_2} + 6u_{x_3x_3} = 0. \tag{3}$$

Далі запишемо згадану в теоретичній частині квадратичну форму:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_1y_2 - 2y_1y_3 + 2y_2^2 + 6y_3^2. \tag{4}$$

Виділимо в ній повні квадрати:

$$\begin{aligned} Q(y_1, y_2, y_3) &= (y_1 + y_2 - y_3)^2 + y_2^2 + 2y_2y_3 + 5y_3^2 = \\ &= (y_1 + y_2 - y_3)^2 + (y_2 + y_3)^2 + 4y_3^2 = \\ &= (y_1 + y_2 - y_3)^2 + (y_2 + y_3)^2 + (2y_3)^2 . \end{aligned} \tag{5}$$

Як бачимо, рівняння має еліптичний тип.

Таким чином, маємо наступну пряму заміну:

$$\begin{cases} \eta_1 = y_1 + y_2 - y_3, \\ \eta_2 = y_2 + y_3, \\ \eta_3 = 2y_3. \end{cases} \tag{6}$$

І відповідну їй обернену заміну:

$$\begin{cases} y_1 = \eta_1 - \eta_2 + \eta_3, \\ y_2 = \eta_2 - {}^{\eta_3}/_2, \\ y_3 = {}^{\eta_3}/_2. \end{cases} \tag{7}$$

Тобто матриця з теоретичної частини має наступний вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Знайдемо тепер заміну яка зводить рівняння до канонічного вигляду:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Або, що те саме,

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1, \\ \xi_2 = -x_1 + x_2, \\ \xi_3 = x_1 - x_2/2 + x_3/2. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки рівняння має еліптичний тип, то канонічною формою буде

$$u_{\xi_1\xi_1} + u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3} = 0. \tag{11}$$

Задача 1.2 (Владіміров, 2.1.2). Звести до канонічного вигляду рівняння

$$4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0.$$

Розв'язок. Перш за все перейменуємо змінні для зручності:

$$4u_{x_1x_1} - 4u_{x_1x_2} - 2u_{x_2x_3} + u_{x_2} + u_{x_3} = 0. \tag{12}$$

Далі запишемо згадану в теоретичній частині квадратичну форму:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 - 4y_1y_2 - 2y_2y_3. \tag{13}$$

Виділимо в ній повні квадрати:

$$\begin{aligned} Q(y_1, y_2, y_3) &= (2y_1 - y_2)^2 - y_2^2 - 2y_2y_3 = \\ &= (2y_1 - y_2)^2 - (y_2 + y_3)^2 + y_3^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Як бачимо, рівняння має гіперболічний тип.

Таким чином, маємо наступну пряму заміну:

$$\begin{cases} \eta_1 = 2y_1 - y_2, \\ \eta_2 = y_2 + y_3, \\ \eta_3 = y_3. \end{cases} \tag{15}$$

І відповідну їй обернену заміну:

$$\begin{cases} y_1 = \eta_1/2 + \eta_2/2 - \eta_3/2, \\ y_2 = \eta_2 - \eta_3, \\ y_3 = \eta_3. \end{cases} \tag{16}$$

Тобто матриця з теоретичної частини має наступний вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Знайдемо тепер заміну яка зводить рівняння до канонічного вигляду:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Або, що те саме,

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1/2, \\ \xi_2 = x_1/2 + x_2, \\ \xi_3 = -x_1/2 - x_2 + x_3. \end{cases} \tag{19}$$

Оскільки рівняння має гіперболічний тип, то канонічною формою буде

$$u_{\xi_1\xi_1} - u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3} + u_{\xi_2} = 0. \tag{20}$$

Задача 1.3 (Владіміров, 2.1.3). Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0.$$

Розв'язок. Перш за все перейменуємо змінні для зручності:

$$u_{x_1x_2} - u_{x_1x_3} + u_{x_1} + u_{x_2} - u_{x_3} = 0. \tag{21}$$

Далі запишемо згадану в теоретичній частині квадратичну форму:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = y_1y_2 - y_1y_3. \tag{22}$$

Виділимо в ній повні квадрати:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} - \frac{y_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{2}\right)^2. \tag{23}$$

Як бачимо, рівняння має параболічний тип.

Таким чином, маємо наступну пряму заміну:

$$\begin{cases} \eta_1 = y_1/2 + y_2/2 - y_3/2, \\ \eta_2 = y_1/2 - y_2/2 + y_3/2, \\ \eta_3 = y_3. \end{cases} \tag{24}$$

І відповідну їй обернену заміну:

$$\begin{cases} y_1 = \eta_1 + \eta_2, \\ y_2 = \eta_1 - \eta_2 + \eta_3, \\ y_3 = \eta_3. \end{cases} \tag{25}$$

Тобто матриця з теоретичної частини має наступний вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Знайдемо тепер заміну яка зводить рівняння до канонічного вигляду:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Або, що те саме,

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + x_2, \\ \xi_2 = x_1 - x_2, \\ \xi_3 = x_2 + x_3. \end{cases} \tag{28}$$

Оскільки рівняння має параболічний тип, то канонічною формою буде

$$u_{\xi_1\xi_1} - u_{\xi_2\xi_2} + 2u_{\xi_1} = 0. \tag{29}$$