Лекція 18

§2 Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів

[1, стор. 198 - 207]

Нехай L - диференціальний оператор порядку m вигляду

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad (2.1).$$

Розглянемо диференціальне рівняння $Lu = f(x)$ (2.2).

Означення 1 Узагальненим розв'язком рівняння (2.2) будемо називати будь – яку узагальнену функцію u, яка задовольняє рівняння (2.2) в розумінні виконання рівності: $< Lu, \varphi > = < f, \varphi >, \ \forall \varphi \in D(\Omega)$ (2.3).

Рівність (2.3) рівнозначна $< u, L^* \varphi > = < f, \varphi >, \ \forall \varphi \in D(\Omega)$ (2.3'),

$L^* \varphi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$ - спряжений оператор (2.4).

Особливу роль в математичній фізиці відіграють фундаментальні розв'язки для основних диференціальних операторів математичної фізики: (Гельмгольца, теплопровідності, хвильового), які представляють собою узагальнені розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$(\Delta + k^2) q_k(x) = -\delta(x) \qquad (2.5),$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon(x,t) = -\delta(x,t) \qquad (2.6),$$

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x,t) = -\delta(x,t) \qquad (2.7).$$

Означення 2 Узагальнені функції $q_k(x), \varepsilon(x,t), \psi(x,t)$ називаються фундаментальними розв'язками оператора Гельмгольца, теплопровідності, хвильового відповідно, якщо вони задовольняють рівняння (2.5), (2.6), (2.7) як узагальнені функції:

$$\iiint\limits_{R^n} q_k(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)dx = -\varphi(0) \qquad (2.5'),$$

$$\iiint\limits_{R^{n+1}} \varepsilon(x,t)\left(a^2\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x,t)dxdt = -\varphi(0,0) \qquad (2.6'),$$

$$\iiint\limits_{R^{n+1}} \theta(x,t)\left(a^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(x,t)dxdt = -\varphi(0,0) \qquad (2.7').$$

Неважко зрозуміти, що фундаментальні розв’язки визначені таким чином є неєдиними і визначаються з точністю до розв’язків відповідного однорідного рівняння. Але серед множини фундаментальних розв’язків вибирають такі, які мають певний характер поведінки на нескінченості.

Загальний метод знаходження фундаментальних розв’язків операторів з постійними коефіцієнтами полягає в застосуванні прямого та оберненого перетворення Фур’є по просторовій змінній x та зведення рівняння в частинних похідних до алгебраїчного рівняння у випадку стаціонарного рівняння, або до звичайного диференціального рівняння у випадку нестаціонарного рівняння.

Ми покажемо що деякі узагальнені функції представляють собою фундаментальні розв’язки основних диференціальних операторів.

Фундаментальні розв’язки операторів Лапласа та Гельмгольца

Розглянемо оператор Лапласа $\Delta_2 = \sum\limits_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Покажемо, що для двохвимірного оператора Лапласа функція

$$q^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}, \quad \text{де } |x| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.8).$$

Є фундаментальним розв’язком, тобто задовольняє як узагальнена функція рівняння $\Delta_2 \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|} = -\delta(x)$.

Останнє рівняння треба розуміти як співвідношення

$$\iint_{R^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \mathbf{\Delta}_2 \varphi(x) dx = -\varphi(0), \ \forall \varphi \in D(R^2) \qquad (2.9).$$

Доведемо рівність (2.9).

$$\iint_{R^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \mathbf{\Delta}_2 \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{U_R / U_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \mathbf{\Delta_2} \varphi(x) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{U_R / U_\varepsilon} \mathbf{\Delta_2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \varphi(x) dx +$$

$$+ \iint_{S_R} .....dS + \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) dS$$

Покажемо, що $\mathbf{\Delta_2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = 0, \ x \neq 0$.

Дійсно $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} = -\frac{\boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}|^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}$

$\mathbf{\Delta_2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4} \right) = 0$. Таким чином, першій інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по сфері S_R для великого значення R теж дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції φ.

Обчислимо граничні значення поверхневих інтегралів по сфері S_ε.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) dS =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \Big(\int_0^{2\pi} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi(\varepsilon \cos(\theta), \varepsilon \sin(\theta))}{\partial n} d\theta - \int_0^{2\pi} \varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\varepsilon \cos(\theta), \varepsilon \sin(\theta) d\theta \Big)$$

При обчисленні останнього інтегралу враховано, що

$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} \ln \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \Big|_{x \in S_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \ln \frac{1}{\boldsymbol{r}} \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$. Множник ε під знаком інтегралу з'являється як якобіан переходу до полярної системи координат.

Враховуючи неперервну диференційованість функції φ, здійснюючи граничний перехід при $\varepsilon \to 0$, отримаємо, що першій інтеграл прямує до нуля, а другий до значення $-\varphi(0,0)$, що і доводить рівність (2.9).

Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца

$$\Lambda_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2$$

Покажемо, що для тривимірного оператора Гельмгольца функція

$$\boldsymbol{q}_{\pm}^{k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{e}^{\pm ik|x|}}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \tag{2.10}$$

є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція диференціальному рівнянню: $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 q_{\pm}^{k}(x)}{\partial x_i^2} + k^2 q_{\pm}^{k}(x) = -\delta(x)$, яке треба розуміти як $\iiint_{R^3} q_{\pm}^{k}(x)\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2\right)\varphi(x)dx = -\varphi(0)$ (2.11).

Обчислимо ліву частину рівності (2.11)

$$\iiint_{R^3} q_{\pm}^{k}(x)\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2\right)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \iiint_{U_R/U_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2\right)\varphi(x) \cdot q_{\pm}^{k}(x)dx =$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left(\iiint_{U_R/U_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2\right) q_{\pm}^{k}(x) \cdot \varphi(x)dx + \iint_{S_R} \cdots dS + \right.$$

$$\left. + \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} q_{\pm}^{k}(x) - \varphi(x) \frac{\partial q_{\pm}^{k}(x)}{\partial n}\right) dS \right)$$

Обчислимо кожний з інтегралів.

Покажемо, що $\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2\right) q_{\pm}^{k}(x) = 0,\ x \neq 0$.

Дійсно, для обчислення другої похідної можна скористатися формулою:

$$\frac{\partial^2 q_{+}^{k}(x)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial |x|^2}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial |x|}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial |x|}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_j^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial |x|^2}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right) = -\frac{e^{ik|x|}(k^2|x|^2 + 2ik|x| - 2)}{4\pi|x|^3} \qquad \left(\frac{\partial |x|}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{x_j^2}{|x|^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2|x|}{\partial x_j^2}\right)=\frac{e^{ik|x|}(ik|x|-1)}{4\pi|x|^5}\left(\left|x^2\right|-x_j^2\right).$$

Після підстановки та приведення подібних отримаємо

$$\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2\right)q_{\pm}^{k}(x)=\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|^3}\left(-k^2|x|^2\right)+k^2\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}=0.$$

Таким чином першій інтеграл дорівнює нулю.

Інтеграл по сфері великого радіусу S_R дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції.

$$\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}q_{\pm}^{k}(x)dS=\frac{e^{ik|\varepsilon|}}{4\pi\varepsilon}\int_{0}^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)}{\partial n}d\psi d\theta\underset{\varepsilon\to0}{\to}0$$

Обчислимо останній поверхневий інтеграл

$$\iint_{S_\varepsilon}\frac{\partial q_{\pm}^{k}(x)(x)}{\partial n}\varphi(x)dS=\frac{e^{ik\varepsilon}(ik\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}\varphi(x)dS=\frac{e^{ik\varepsilon}(ik\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon^2}\times$$

$$\times\int_{0}^{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\cdot\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\psi\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\psi d\theta\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}-\varphi(0)$$

Таким чином рівність (2.11) доведена.

Зауважимо, що з формули (2.10) легко отримати фундаментальний розв’язок для тривимірного оператора Лапласа, тобто показати, що функція

$$\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|} \qquad (2.12)$$

задовольняє наступному рівнянню. $\Delta_3\frac{1}{4\pi|x|}=-\delta(x),\ x\in R^3$ (2.13).

Формально формула (2.12) можна отримати з (2.10) при $k=0$.

Фундаментальний розв’язок двовимірного оператора Гельмгольца

Покажемо, що $q^k(x)=\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|),\ x=(x_1,x_2)$ (2.14)

є фундаментальним розв’язком двовимірного оператора Гельмгольца, тобто задовольняє співвідношенню:

$$\iint\limits_{R^2} q^k(x)\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2\right)\varphi(x)dx = -\varphi(0) \qquad (2.15).$$

У формулі (2.14) функція $K_\nu(x)$ - функція Бесселя другого роду уявного аргументу ν - порядку і є одним з двох лінійно – незалежних розв'язків лінійного диференціального рівняння Бесселя уявного аргументу $x^2Y'' + xY' - (x^2+\nu^2)Y = 0$.

Доведення (2.15) аналогічне доведенню співвідношення (2.9).

Покажемо, що (2.14) задовольняє рівняння:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right)\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|) = 0,\ \ x \neq 0$$

Обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|) = \frac{1}{2\pi}\left(-k^2K_0''(-ik|x|)\frac{x_j^{\,2}}{|x|^2} - ikK_0'(-ik|x|)\frac{|x^2| - x_j^2}{|x|^3}\right)$$

Таким чином

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+k^2\right)\frac{1}{2\pi}K_0(-ik|x|) = \frac{1}{2\pi}\left(-k^2K_0''(-ik|x|) - ikK'(-ik|x|)\frac{1}{|x|} + k^2K_0(-ik|x)|\right) = 0$$

Остання рівність стає очевидною якщо помножити останнє рівняння на $|x|^2$ та ввести нову незалежну змінну $\xi = -ik|x|$.

При доведенні рівності (2.15) важливим є також характер поведінки фундаментального розв'язку і його першої похідної к околі точки $x = 0$.

Відомо, що $K_0(ix) \sim \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\mathrm{x}|},\ K_0'(ix) \sim -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x|},\ x \to +0$.

Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності

Покажемо, що фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності є

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},\ x \in R^n \qquad (2.16).$$

Це означає, що узагальнена функція (2.16) задовольняє інтегральний тотожності :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\iiint_{R^n}\varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\right)dxdt=-\varphi(0,0),\ \ \forall\varphi\in D(R^{n+1}) \qquad (2.17).$$

Очевидно, що $\varepsilon(x,t)\in C^{\infty}(t>0)$. Покажемо, що ця функція задовольняє рівняння теплопровідності:

$$\left(a^2\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon(x,t)=0,\ \ t>0,\ x\in R^n. \qquad (2.18).$$

Обчислимо частинні похідні: $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2}-\frac{n}{2t}\right)\varepsilon$ $\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}=-\frac{x_i}{2a^2t}\varepsilon$

$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_i^2}=\left(\frac{x_i^2}{4a^2t^2}-\frac{1}{2a^2t}\right)\varepsilon$. Підставляючи знайдені похідні в оператор теплопровідності встановимо справедливість співвідношення (2.18).

Покажемо справедливість (2.17).

$$\int_{-\infty}^{\infty}\iiint_{R^n}\varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\right)dxdt=\lim_{\tau\to0,R\to\infty}\int_{\tau}^{\infty}\iiint_{U_R}\varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\right)dxdt=$$

$$=\lim_{\tau\to0 R\to\infty}\left[\int_{\tau}^{\infty}\iiint_{U_R}\varphi(x,t)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-a^2\Delta\varepsilon\right)dxdt+\int_{\tau}^{\infty}\iint_{S_R}a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\varepsilon-\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\varphi\right)dS_R dt+\iiint_{U_R}\varepsilon\,\varphi\Big|_{\tau}^{\infty}dx\right]=$$

$=-\lim_{\tau\to0}\iiint_{R^n}\varphi(x,\tau)\varepsilon(x,\tau)dx$. Можна показати, що $\iiint_{R^3}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}dx=1,\ t>0$.

Покажемо, що $\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\underset{\tau\to+0}{\overset{слабко}{\to}}\delta(x)$.

Дійсно $\left|\iiint_{R^3}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)dx\right|\le\frac{K}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\iiint_{R^3}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}}|x|dx=A$, де

$K=\max_x|\varphi'(x)|$ Для обчислення останнього інтегралу перейдемо до узагальненої сферичної системи координат та введемо нову змінну: $\xi = \dfrac{r}{2a\sqrt{\tau}}$.

$$A = \frac{K\sigma_n}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n} \lim_{R\to\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4a^2\tau}} r^n dr = \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{R}{2a\sqrt{\tau}}} e^{-\xi^2}\xi^n d\xi =$$

$$\frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2}\xi^n d\xi = \mathrm{O}(\tau^{0.5}) \underset{\tau\to+0}{\to} 0$$

Фундаментальний розв’язок хвильового оператора

Покажемо, що узагальнена функція

$$\psi_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |\mathrm{x}|) \qquad (2.19)$$

є фундаментальним розв’язком одновимірного хвильового оператора, тобто задовольняє інтегральному співвідношенню:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x,t)\left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)dxdt = -\varphi(0,0), \quad \forall\varphi\in D(R^2) \qquad (2.20).$$

Обчислимо ліву частину виразу (2.20)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x,t)\left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)dxdt = -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\frac{|x|}{a}}^{\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dtdx + \frac{a}{2}\int_0^{\infty}\int_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dxdt =$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\varphi\left(x, \frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx + \frac{a}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^{\infty} \frac{\partial\varphi\left(x, \frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx + \frac{1}{2a}\int_0^{\infty} \frac{\partial\varphi\left(-x, \frac{|x|}{a}\right)}{\partial t}dx + \frac{a}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)dt =$$

В першому та другому інтегралах введемо нову змінну $x = at$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial t}dt + \frac{a}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{d\varphi(at,t)}{dt}dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{d\varphi(-at,t)}{dt}dt = -\frac{1}{2}\varphi(0,0) - \frac{1}{2}\varphi(0,0) = -\varphi(0,0)$$

Таким чином формула (2.20) доведена.

Без доведення наведемо вигляд фундаментального розв’язку для двовимірного та тривимірного хвильового оператора.

$$\psi_2(x,t)=\frac{\theta(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x^2|}},\ \ x\in R^2 \qquad (2.21).$$

$$\psi_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\frac{\theta(\boldsymbol{t})}{4\pi \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{t}}\delta_{S_{at}}(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^3 \qquad (2.22).$$