Зміст

3.9 Загальна постановка задачі Коші для хвильового рівняння. Плоскі хвилі

3.9.1 Характеристичні поверхні

В лекції 14 розглядалися питання класифікації диференціальних рівнянь другого порядку з $n > 2$ незалежними змінними. Важливу роль при визначені типу рівняння і вибору нової системи координат відіграють характеристичні поверхні, які є аналогами характеристичних кривих (характеристик) для випадку рівнянь з двома незалежними змінними.

Нехай функція $\omega(x) \in C^1$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$ є такою що на поверхні $\omega(x) = 0$, $\nabla\omega(x) \neq 0$ та

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x) \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} = 0. \tag{3.9.1}$$

Визначення 3.9.1.1 (характеристичної поверхні)**.** Тоді поверхню $\omega(x) = 0$ називають *характеристичною поверхнею* або *характеристикою* квазілінійного рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0. \tag{3.9.2}$$

Визначення 3.9.1.2 (характеристичної лінії)**.** При $n = 2$ характеристична поверхня називається *характеристичною лінією*.

Оскільки $\nabla\omega(x) \neq 0$, то сімейство характеристик $\omega(x) = \mathrm{const}$ заповнює область таким чином, що через кожну точку області проходить одна характеристична поверхня.

Враховуючи закон перетворення коефіцієнтів рівняння

$$\overline{a_{k,l}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \tag{3.9.3}$$

при виборі заміни змінних $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, \ldots, n$, знання однієї чи декількох характеристичних поверхонь дозволяє спростити рівняння, зокрема, якщо $\xi_1 = \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$\overline{a_{1,1}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0. \tag{3.9.4}$$

Для хвильового рівняння

$$u_{tt}(t, x) = a^2 \Delta u(t, x) + f(t, x), \tag{3.9.5}$$

де $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, характеристичне рівняння має вигляд

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \tag{3.9.6}$$

Одним з розв'язків цього диференціального рівняння першого порядку є поверхня

$$\omega(x, t) = a^2 (t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i})^2 = 0. \tag{3.9.7}$$

Визначення 3.9.1.3 (характеристичного конуса)**.** Поверхня

$$a^2 (t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i})^2 = 0. \tag{3.9.8}$$

називається *характеристичним конусом* з вершиною в точці (x_0, t_0) і є характеристичною поверхнею (характеристикою) хвильного рівняння.

Зауваження 3.9.1.1 — Характеристичний конус є границею конусів

$$\Gamma^+(x_0, t_0) = a(t - t_0) > \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i})^2}, \tag{3.9.9}$$

$$\Gamma^-(x_0, t_0) = -a(t - t_0) > \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})^2}, \tag{3.9.10}$$

які називають *конусами майбутнього* та *минулого* відповідно.

Хвильове рівняння має також інше сімейство характеристичних поверхонь

$$a(t - t_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})e_i = 0, \tag{3.9.11}$$

де $\{e_i\}_{i=1}^n$ — довільні числа такі, що $|\vec{e}| = 1$.

3.9.2 Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни

Довільне квазілінійне рівняння гіперболічного типу з двома незалежними змінними

$$a_{1,1}(\xi, \eta)U_{\xi,\xi}(\xi, \eta) + 2a_{1,2}U_{\xi\eta}(\xi, \eta) + a_{2,2}(\xi, \eta)U_{\eta,\eta}(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \tag{3.9.12}$$

може бути зведене до одного із рівнянь:

$$u_{xt}(t, x) = f(x, y, u, u_t, u_x), \tag{3.9.13}$$
$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, y, u, u_t, u_x). \tag{3.9.14}$$

Зауваження 3.9.2.1 — Коефіцієнти $a_{i,j}(\xi, \eta)$ $(i, j = 1, 2)$ і права частина $f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ вважаються неперервно диференційовними функціями у відповідних областях.

При постановці задачі Коші для рівняння (3.9.14) до тепер ми вважали, що носієм початкових умов є пряма $t = 0$.

На прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \tag{3.9.15}$$

покажемо, що носієм початкових умов може бути крива L, яка є відмінною від прямої $t = 0$, причому встановимо, яким умовам повинна задовольняти крива L і який вигляд повинні мати самі початкові умови, щоб одержана задача Коші була поставлена коректно.

Для цього позначимо через D обмежену область фазової площини xOt з кусково-гладкою жордановою межею S. Нехай $u(t, x) \in C^2(D)$ — розв'язок рівняння (3.9.15), який має неперервні частинні похідні 1-го порядку в області $\overline{D} = D \cup S$.

Інтегруючи тотожність (3.9.15) по області D і використовуючи формулу Гріна

$$\iint\limits_{D} (Q_x(x,t) - P_t(x,t))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{S} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}t, \tag{3.9.16}$$

де криволінійний інтеграл в правій частині береться по контуру в напрямі проти годинникової стрілки, одержуємо

$$\iint\limits_{D} (u_{xx} - u_{tt})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{S} u_x\,\mathrm{d}t + u_t\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{S} f(x,t)\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}t \tag{3.9.17}$$

Нехай L — розімкнута крива Жордана з неперервною кривизною, яка задовольняє умовам:

- кожна пряма із двох сімей характеристик $x+t = \mathrm{const}$, $x-t = \mathrm{const}$ рівняння (3.9.15) перетинає криву L не більше, ніж в одній точці;
- напрям дотичної до кривої L в жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (3.9.15).

Зауваження 3.9.2.2 — Іноді таку криву L називають *"вільною"*.

Припустимо, що характеристики $x - x_1 = t - t_1$ і $x - x_1 = t_1 - t$, які виходять із точки C, перетинаються із кривою L в точках A і B: