

## Зміст

<b>3 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів</b>	<b>2</b>
3.1 Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини . . . . .	2
3.1.1 Закон збереження теплової енергії . . . . .	2
3.1.2 Частинні випадки рівняння теплопровідності . . . . .	5
3.1.3 Рівняння дифузії речовини . . . . .	7
3.1.4 Задача Стефана (задача про остигання та затвердіння розплавленого металу) . . . . .	10
3.2 Математичні моделі теорії пружності . . . . .	14
3.2.1 Закони рівноваги елемента поверхні . . . . .	17
3.2.2 Закон рівноваги елемента об'єму . . . . .	18
3.2.3 Тензор напружень, головні вісі тензора напружень . . . . .	20
3.2.4 Тензор деформацій і закони його перетворення . . . . .	23
3.2.5 Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат . . . . .	26
3.2.6 Закон Гука. Зв'язок між тензором деформації та тензором напружень . . . . .	28
3.2.7 Початкові та граничні умови для рівнянь теорії пружності . . . . .	33
3.2.8 Спрощення системи рівнянь теорії пружності . . . . .	34
3.2.9 Математична модель поздовжніх коливань стрижня . . . . .	35
3.2.10 Математична модель поперечних коливань струни . . . . .	37
3.3 Математичні моделі руху ідеальної рідини . . . . .	40
3.3.1 Закон збереження маси . . . . .	40
3.3.2 Закон збереження імпульсу . . . . .	41
3.3.3 Закон збереження енергії . . . . .	43
3.3.4 Інші термодинамічні функції та закон збереження ентропії . . . . .	45
3.3.5 Додаткові умови математичної моделі руху ідеальної рідини . . . . .	46
3.3.6 Задача обтікання тіл . . . . .	46
3.3.7 Задача про поршень . . . . .	47
3.3.8 Задача про вільну поверхню . . . . .	48
3.3.9 Задача руху рідини в каналах . . . . .	48
3.3.10 Ізоентропічні течії (течії з постійною ентропією) . . . . .	51
3.3.11 Потенціальні течії . . . . .	53
3.3.12 Модель акустичного руху рідини . . . . .	57
3.3.13 Потенційне обтікання тонких тіл . . . . .	59

## 3 Побудова математичних моделей базових фізичних процесів

### 3.1 Математичні моделі розповсюдження тепла та дифузії речовини

Для запису математичної моделі введемо величини:

- $x = (x_1, x_2, x_3) \in G \subset E^3$  об'єм тіла,  $t$  — час;
- $u(x, t)$  — температура в точці  $x$  у момент часу  $t$ ;
- $c(x)$  — теплоємність (кількість тепла, яка необхідна, для підняти температуру одиниці маси тіла на один градус);
- $k(x)$  — теплопровідність речовини (здатність проводити тепло);
- $\rho(x)$  — щільність речовини;
- $f(x, t)$  — інтенсивність джерел теплової енергії в точці  $x$  в момент часу  $t$ .

#### 3.1.1 Закон збереження теплової енергії

Складемо баланс теплової енергії для довільного об'єму тіла  $G$  за довільний інтервал часу  $t_1 < t < t_2$ . Для цього обчислимо кількість тепла, яка міститься в нескінченно малому об'ємі  $dG$ :

$$\rho(x) \cdot dG \cdot c(x) \cdot u(x, t) \quad (3.1.1)$$

та в об'ємі  $G$  в момент часу  $t$ :

$$Q_1(t) = \iiint_G c(x)\rho(x)u(x, t) dG. \quad (3.1.2)$$

Припустимо, що з часом температура змінилася від значення  $u(x, t_1)$  до значення  $u(x, t_2)$ . Обчислимо кількість тепла, витрачену на зміну температури:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \iiint_G c(x)\rho(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG. \quad (3.1.3)$$

Температура в об'ємі  $G$  може змінюватись за рахунок таких факторів:

1. нерівномірності нагрівання тіла, викликає потік тепла через поверхню  $S$ , яка обмежує уявне тіло об'єму  $G$ ;
2. зміна кількості тепла за рахунок внутрішніх теплових джерел.

Нехай  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до поверхні  $S$ . Обчислимо кількість тепла, яка поступає всередину об'єму  $G$  через елементарну поверхню  $dS$  в одиницю часу:

$$dQ(x, t) = k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \cdot dS \quad (3.1.4)$$

Ця формула є математичним виразом фізичного закону Фур'є.

Кількість тепла, яка проходить через всю поверхню  $S$  за час від  $t_1$  до  $t_2$  обчислюється за формулою

$$Q_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left( k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \right) dS dt. \quad (3.1.5)$$

Кількість тепла за рахунок теплових джерел в об'ємі  $G$  можна обчислити у вигляді:

$$Q_3(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \quad (3.1.6)$$

Таким чином можна записати

#### Теорема 3.1.1 (закон збереження теплової енергії)

Виконується співвідношення:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2) + Q_3(t_1, t_2), \quad (3.1.7)$$

або після підстановки усіх величин маємо

#### Теорема 3.1.2 (інтегральний закон збереження теплової енергії)

Виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} \iiint_G c(x) \rho(x) (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left( k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \right) dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Для перетворення першого інтегралу правої частини останньої рівності застосуємо формулу Остроградського Гауса,

$$\iint_S \langle A, \vec{n} \rangle dS = \iiint_G (\nabla \cdot \vec{A}) dG, \quad (3.1.9)$$

де  $\vec{A}$  — векторне поле,

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \quad (3.1.10)$$

В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \left( c(x) \cdot \rho(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) dG dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G (\nabla \cdot (k(x) \cdot \nabla u)) dG dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Враховуючи, що остання рівність отримана для довільного об'єму  $G$  та довільних моментів часу, можна зробити висновок, що вона має місце тоді і лише тоді, коли має місце рівність підінтегральних виразів:

$$\begin{aligned} c(x) \cdot \rho(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \cdot dG \cdot dt = \\ = \nabla \cdot (k(x) \cdot \nabla u) \cdot dG \cdot dt + f(x, t) \cdot dG \cdot dt, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

де  $x \in G, t > 0$ .

Це рівняння повинно виконуватись для кожної точки  $x$  реального фізичного об'єму тіла (збережемо для нього позначення  $G$ , а для його поверхні позначення  $S$ ), та для кожного моменту часу  $t$ .

Для виділення єдиного розв'язку цього рівняння окрім самого диференціального рівняння необхідно задавати додаткові умови на границі просторово-часової області. Будемо використовувати фізичні міркування для задавання таких умов.

1. Якщо на границі області відома температура тіла, тоді на границі тіла задають умову Діріхле.

**Визначення 3.1.3** (умови Діріхле). Крайовою умовою першого роду, або *умовою Діріхле* називають співвідношення

$$u(x, t)|_{x \in S} = v(x, t). \quad (3.1.13)$$

2. Якщо на границі області відомий тепловий потік в одиницю часу, який поступає всередину тіла через одиничну площу, тоді на границі задають граничну умову Неймана.

**Визначення 3.1.4** (умови Неймана). Крайовою умовою другого роду, або *умовою Неймана* називають співвідношення

$$k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = q(x, t). \quad (3.1.14)$$

3. Якщо на границі тіла відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем відомої температури згідно до закону Ньютона, тоді на границі задають крайову умову Ньютона

**Визначення 3.1.5** (умови Ньютона). Крайовою умовою третього роду, або *умовою Ньютона* називають співвідношення

$$k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = \alpha(x, t) \cdot (v(x, t) - u(x, t))|_{x \in S}, \quad (3.1.15)$$

де  $\alpha(x, t) > 0$  — коефіцієнт теплообміну,  $v(x, t)$  — температура оточуючого середовища.

4. В початковий момент часу задають температура усіх внутрішніх точок тіла:

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x). \quad (3.1.16)$$

**Визначення 3.1.6** (початкової умови). *Початковою умовою* називається співвідношення

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad (3.1.17)$$

при цьому  $u_0(x)$  називається *початковою температурою*.

### 3.1.2 Частинні випадки рівняння теплопровідності

**Зауваження 3.1.7** — У випадку, коли коефіцієнт теплопровідності та інтенсивність теплових джерел залежить не лише від точки простору і часу, а і від самої температури, тобто  $k = k(u, x, t)$ ,  $f = f(u, x, t)$ , лінійне диференціальне рівняння вище стає квазілінійним, тобто лінійним відносно старших похідних.

Окрім загального вигляду рівняння теплопровідності, у практичних випадках часто використовуються частинні випадки рівняння.

Зокрема, можна розглядати розповсюдження тепла в одновимірних та двовимірних тілах:

- У пластині:

$$\nabla \cdot (k(x) \cdot \nabla u(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_2} \right). \quad (3.1.18)$$

- У стрижні:

$$\nabla \cdot (k(x) \cdot \nabla u(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right). \quad (3.1.19)$$

Для однорідних тіл усі коефіцієнти рівняння можна вважати константами, зокрема  $c = c_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $k = k_0$ . В результаті вищезгадане диференціальне рівняння буде мати вигляд

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{1}{c_0 \rho_0} \cdot f(x, t), \quad (3.1.20)$$

де

$$a^2 = \frac{k_0}{c_0 \rho_0} > 0, \quad (3.1.21)$$

і було введено

**Визначення 3.1.8** (оператора Лапласа). *Оператором Лапласа* називається функціонал  $\Delta$  що діє на функцію  $u(x, t)$  наступним чином:

$$\Delta u(x, t) = \nabla \cdot (\nabla u(x, t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2}. \quad (3.1.22)$$

**Зауваження 3.1.9** — Зокрема одновимірне рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c_0 \rho_0} \cdot f(x, t). \quad (3.1.23)$$

### 3.1.3 Рівняння дифузії речовини

Процес дифузії речовини це процес вирівнювання концентрації речовини у розчинах, розплавах або в сумішах. Фізика вирівнювання температури в тілах та концентрації у розчинах чи розплавах має багато схожих рис і з цього приводу навіть процес розповсюдження тепла називають дифузією тепла.

Для отримання моделі дифузії речовини використаємо наступну таблицю аналогії.

Дифузія	Теплопровідність	Пояснення
$u(x, t)$	$u(x, t)$	Концентрація речовини в розчині, або у розплаві
$c(x)$	$c(x)\rho(x)$	Коефіцієнт пористості, відображає відношення об'єму пор до загального об'єму тіла і вказує на кількість речовини необхідну для зміни концентрації на одну одиницю в одиниці об'єму.

Дифузія	Теплопровідність	Пояснення
$D \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot dS$	$k \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \cdot dS$	Закон Фіка, описує кількість речовини, яка поступає всередину тіла через його поверхню в одиницю часу за рахунок нерівномірності концентрації.
$f(x, t)$	$f(x, t)$	Інтенсивність джерела речовини в середині об'єму.
$D \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \alpha (v - u) _S$	$k \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \alpha (v - u) _S$	Кількість речовини, яка поступає через поверхню $S$ тіла за законом, аналогічним закону Ньютона, $v$ — відома концентрація речовини в тому чи іншому середовищі; $\alpha$ — коефіцієнт проникності поверхні.

Побудови математичної моделі процесу дифузії відбувається за аналогією згідно до попередньої таблиці.

Кількість речовини, яка витрачена для зміни концентрації від  $u(x, t_1) \rightarrow u(x, t_2)$ ,  $t_1 < t_2$  має вигляд:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_1(t_2) - Q_1(t_1) = \iiint_G c(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) dG. \quad (3.1.24)$$

Кількість речовини, яка проходить через всю поверхню  $S$  за час від  $t_1 \rightarrow t_2$ :

$$Q_2(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left( D(x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS dt. \quad (3.1.25)$$

Кількість речовини, яка поступає за рахунок джерел речовини в об'ємі  $G$  за час від  $t_1$  до  $t_2$ :

$$Q_3(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) dG dt. \quad (3.1.26)$$



Отже, отримали

**Теорема 3.1.10 (закон збереження маси)**

Віонується співвідношення:

$$\Delta Q_1(t_1, t_2) = Q_2(t_1, t_2) + Q_3(t_1, t_2). \quad (3.1.27)$$

а також

**Теорема 3.1.11 (інтегральний закон збереження маси)**

Віонується співвідношення:

$$\begin{aligned} & \iiint_G c(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1)) \, dG = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left( D(x, t) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \right) \, dS \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G f(x, t) \, dG \, dt. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Після застосування формули Остроградського-Гауса та прирівнювання підінтегральних виразів отримаємо рівняння дифузії речовини у вигляді:

$$c(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D(x, t) \cdot \nabla u) + f(x, t), \quad (3.1.29)$$

де  $x \in G, t > 0$ .

Додаткові умови на границі області задають аналогічно умовам для рівняння теплопровідності:

1. Якщо відома концентрація речовини на поверхні:

$$u(x, t)|_{x \in S} = v(x, t); \quad (3.1.30)$$

2. Якщо на границі відомий потік речовини:

$$D \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = g(x, t); \quad (3.1.31)$$

3. Якщо на границі відбувається обмін речовиною з оточуючим середовищем через напівпроникливу мембрану за законом аналогічним закону Ньютона:

$$D \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \Big|_{x \in S} = \alpha \cdot (v(x, t) - u(x, t))|_{x \in S}; \quad (3.1.32)$$

4. Якщо в початковий момент часу відома концентрація речовини:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.1.33)$$

**Зауваження 3.1.12** — У випадку, коли коефіцієнти рівняння та граничних умов не залежать від часу  $t$ , розв'язок рівняння не залежить від часу в результаті отримаємо стаціонарне рівняння теплопровідності та дифузії:

$$\nabla \cdot (k(x) \cdot \nabla u(x, t)) = -f(x), \quad (3.1.34)$$

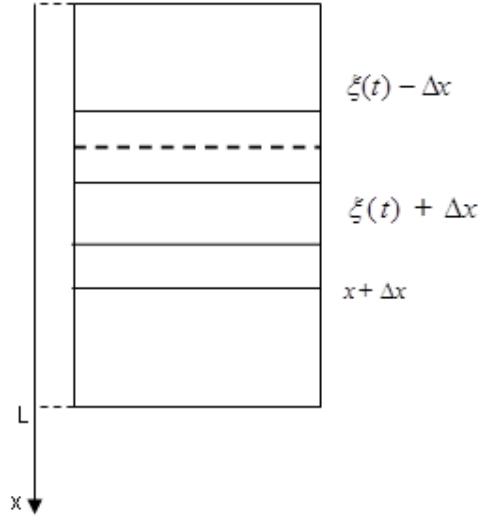
$$\nabla \cdot (D(x) \cdot \nabla u(x, t)) = -f(x). \quad (3.1.35)$$

### 3.1.4 Задача Стефана (задача про остигання та затвердіння розплавленого металу)

Вертикальний циліндричний посуд заповнений розплавленим металом, який знаходиться при заданій температурі  $U_0 > U_{melt}$ . Починаючи з моменту часу  $t_0$  вільна поверхня розплавленого металу підтримується при постійній температурі  $U_1 < U_{melt}$ . Поставимо задачу про остудження та затвердіння металу, якщо дно і бокова поверхня посуду теплоізовані. Термічними деформаціями об'єму будемо нехтувати тобто процес розповсюдження тепла відбувається лише вздовж вісі циліндру. Введемо позначення:

- $\rho_s, \rho_l$  — щільність твердої (eng. *solid*) та рідкої (eng. *liquid*) фази металу;
- $c_s, c_l$  — теплоємність твердої та рідкої фази металу;
- $k_s, k_l$  — теплопровідність твердої та рідкої фази металу;
- $\xi(t)$  — положення границі розділу твердої та рідкої фаз;
- $L$  — висота циліндру,  $S$  — площа основи циліндру;
- $\lambda$  — питома теплота плавлення;
- $u(x, t)$  — температура в момент часу  $t$  в точці  $x$ .

Деякі з введених позначень краще видно на наступній ілюстрації:



Отримаємо рівняння теплового балансу для нескінченно малого об'єму розплавленого металу, який знаходиться між перерізами  $x$  та  $x + \Delta x$  за проміжок часу від  $t$  до  $t + \Delta t$ .

Обчислимо кількість тепла, яка необхідна для зміни температури у виділеному елементарному об'ємі від значення  $u(x, t)$  до значення  $u(x, t + \Delta t)$ . Кількість тепла, що міститься в виділеному об'ємі в момент часу  $t$  можна обчислити за формулою

$$dQ(t) = c_l \cdot \rho_l \cdot S \cdot \Delta x \cdot u(x, t). \quad (3.1.36)$$

Аналогічно для моменту часу  $t + \Delta t$  кількість тепла дорівнює

$$dQ(t + \Delta t) = c_l \cdot \rho_l \cdot S \cdot \Delta x \cdot u(x, t + \Delta t). \quad (3.1.37)$$

При цьому нехтуємо, зміною температури по просторовій змінній у середині елементарного об'єму. Тоді кількість тепла, необхідна для зміни температури всередині об'єму дорівнює:

$$\Delta Q(t, t + \Delta t) = c_l \cdot \rho_l \cdot S \cdot \Delta x \cdot (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)). \quad (3.1.38)$$

Ця зміна може відбуватися за рахунок теплових потоків, через перерізи  $x$  та  $x + \Delta x$ . Підрахуємо кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз  $x + \Delta x$  за час  $\Delta t$ :

$$dQ(x + \Delta x) = k_l \cdot \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial \vec{n}} \cdot S \cdot \Delta t k_l \cdot \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t \quad (3.1.39)$$

Напрямок нормалі  $\vec{n}$  в цьому перерізі співпадає з напрямком вісі  $Ox$ .

Кількість тепла, яка поступає всередину тіла через переріз  $x$  за час  $\Delta t$  можна записати у вигляді:

$$dQ(x) = k_l \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial \vec{n}} \cdot S \cdot \Delta t = -k_l \cdot \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \cdot S \cdot \Delta t \quad (3.1.40)$$

Таким чином можна скласти рівняння теплового балансу:

$$dQ(t, t + \Delta t) = dQ(x + \Delta x) + dQ(x). \quad (3.1.41)$$

Або після підстановки відповідних значень поділених на  $\Delta x \cdot \Delta t \cdot S$  отримаємо:

$$\frac{c_l \cdot \rho_l \cdot (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))}{\Delta t} = k_l \cdot \left( \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x}. \quad (3.1.42)$$

Після граничного переходу коли  $\Delta x$  та  $\Delta t$  прямують до нуля, отримаємо диференціальне рівняння:

$$c_l \cdot \rho_l \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k_l \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1.43)$$

де  $\xi(t) < x < L$ ,  $t > t_0$ .

Аналогічні міркування дозволяють отримати рівняння для твердої фази:

$$c_s \cdot \rho_s \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k_s \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.1.44)$$

де  $0 < x < \xi(t)$ ,  $t > t_0$ .

**Визначення 3.1.13** (співвідношення на границі розділу фаз). Температура при переході через границю розділу фаз повинна змінюватись неперервно і співпадати з температурою плавлення металу, тобто повинно виконуватись наступне співвідношення:

$$u(\xi(t) - 0, t) = u(\xi(t) + 0, t) = U_{melt}, \quad (3.1.45)$$

яке називається *співвідношенням на границі розділу фаз*.

Отримаємо рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами  $\xi(t) - \Delta x$  та  $\xi(t) + \Delta x$ .

За час  $\Delta t$  затвердіє об'єм металу рівний

$$(\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \cdot S. \quad (3.1.46)$$

При цьому буде виділено кількість тепла рівна

$$dQ_{melt} = (\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \cdot S \cdot \lambda \cdot \rho_s. \quad (3.1.47)$$

Кількість тепла, яка надійде всередину об'єму за рахунок теплових потоків через відповідні перерізи за час  $\Delta t$  може бути записана у вигляді:

$$\Delta t \cdot S \cdot \left( k_l \cdot \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x, t)}{\partial x} - k_s \cdot \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x, t)}{\partial x} \right). \quad (3.1.48)$$

Оскільки фазовий перехід відбувається при постійній температурі, то в околі границі розділу фаз  $\xi(t)$  зміною температури по змінній  $t$  можна нехтувати, в зв'язку з чим можна не враховувати кількість тепла, яка витрачається на зміну температури у виділеному елементарному об'ємі.

Рівняння теплового балансу для елементарного об'єму обмеженого перерізами  $\xi(t) - \Delta x$  та  $\xi(t) + \Delta x$  можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} & (\xi(t + \Delta t) - \xi(t)) \cdot S \cdot \lambda \cdot \rho_s = \\ & = \Delta t \cdot S \cdot \left( k_l \cdot \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x, t)}{\partial x} - k_s \cdot \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x, t)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

Поділивши обидві частини на  $\Delta t$ , скоротивши на  $S$  і спрямувавши  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  до нуля отримаємо співвідношення:

$$\lambda \cdot \rho_s \cdot \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = k_l \cdot \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x, t)}{\partial x} - k_s \cdot \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x, t)}{\partial x}. \quad (3.1.50)$$

**Визначення 3.1.14** (внутрішніх граничних умов (умов спряження)). Останню умову

$$\lambda \cdot \rho_s \cdot \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} = k_l \cdot \frac{\partial u(\xi(t) + \Delta x, t)}{\partial x} - k_s \cdot \frac{\partial u(\xi(t) - \Delta x, t)}{\partial x}. \quad (3.1.51)$$

разом із співвідношенням на границі розділу фаз називають *внутрішніми граничними умовами*, або *умовами спряження*.

Запишемо початкові умови та умови на верхній та нижній основі циліндру:

- В початковий момент часу задана температура розплавленого металу:

$$u(x, t_0) = U_0, \quad 0 < x < L. \quad (3.1.52)$$

- На верхній основі задана температура:

$$u(0, t) = U_1, \quad t > t_0. \quad (3.1.53)$$

- Нижня основа теплоізолювана, тобто тепловий потік, який поступає всередину тіла дорівнює нулю:

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad t > t_0. \quad (3.1.54)$$

- В початковий момент часу положення границі фазового переходу співпадає з верхньою основою циліндру:

$$\xi(0) = 0. \quad (3.1.55)$$

Таким чином до моменту часу, коли весь метал затвердіє постановка задачі Стефана включає в себе диференційні рівняння, умови спряження, початкові умови та граничні умови.

**Зауваження 3.1.15** — Після повного затвердіння металу, тобто коли  $\xi(t_1) = L$ , процес буде описуватись звичайним рівнянням теплообміну для  $t > t_1$  з граничними умовами

$$u(0, t) = U_1, \quad (3.1.56)$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, \quad (3.1.57)$$

та початковою температурою  $u(x, t_1)$ .

## 3.2 Математичні моделі теорії пружності

Відомо, що в природі існують пружні тіла, які можуть змінювати свою форму під дією прикладеної сили, а після припинення дії зовнішньої сили приймати початкову форму. Зовнішня сила викликає в пружних тілах:

- деформації;
- напруження.

**Визначення 3.2.1** (деформації). *Деформацією* називають зміну положення одних точок тіла відносно інших.

**Визначення 3.2.2** (напружень). *Напруженнями* називають внутрішні сили, які прагнуть повернути тіло в положення рівноваги.

**Визначення 3.2.3** (математичної моделі теорії пружності). *Математична модель теорії пружності* — це система диференціальних рівнянь, які описують кількісний зв'язок між зміною форми тіла (деформаціями) і внутрішніми зусиллями (напруженнями).

Введемо позначення:

- $x, y, z$  — координати точки у просторі;
- $U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t)$  — координати вектора зміщень в напрямку вісей  $Ox, Oy, Oz$  відповідно.

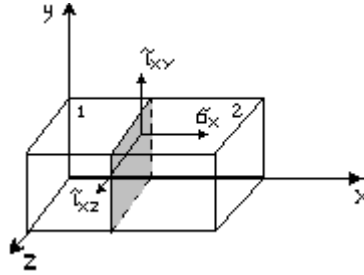
**Зауваження 3.2.4** — Вектор зміщень показує зміщення точки тіла з координатами  $x, y, z$  в напрямку однієї з координатних вісей в момент часу  $t$  від положення рівноваги.

- $F_x(x, y, z, t), F_y(x, y, z, t), F_z(x, y, z, t)$  — компоненти вектора поверхневих сил в напрямку вісей  $Ox, Oy, Oz$  відповідно.

**Зауваження 3.2.5** — Вектор поверхневих сил показує які сили діють на поверхню тіла.

- $X(x, y, z, t), Y(x, y, z, t), Z(x, y, z, t)$  — вектори об'ємних сил;
- $dG$  — елемент об'єму;  $dS$  — елемент поверхні.

Розглянемо просту фізичну модель взаємодії між собою двох частин пружного тіла. Нехай прямокутний паралелепіпед з нескінченно малим поперечним перерізом  $dy \times dz$  витягнутий вздовж вісі  $x$  та умовно розділений на дві частини площиною ортогональною вісі  $x$ :



Охарактеризуємо силу з якою правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед через переріз  $dy \times dz$  в площині  $yOz$  (на рис. площина взаємодії виділена сірим кольором).

Нехай  $\mathbf{t}^{(x)} = (\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})$  — вектор сили.

**Визначення 3.2.6** (вектора сили). Вектор сили показує, з якою силою (на одиницю поверхні) правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед.

**Зауваження 3.2.7** — При цьому  $\sigma_x$  — компонента, що може стиснути, або розтягувати лівий паралелепіпед,  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$  — компоненти, що зрізають (точне визначення цього поняття буде надано далі) паралелепіпед в напрямках вісей  $Oy$  та  $Oz$  відповідно.

Аналогічно, для паралелепіпедів витягнутих вздовж вісей  $Oy$  та  $Oz$  можна розглянути сили, які діють в двох інших площинах  $xOz$  та  $xOy$  на одиницю площі цих перерізів та охарактеризувати їх векторами:

$$\mathbf{t}^{(y)} = (\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}), \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{t}^{(z)} = (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z). \quad (3.2.2)$$

Для будь-якого паралелепіпеда з довжиною ребер  $dx, dy, dz$  а тим самим точки простору напружений стан тіла можна охарактеризувати матрицею

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

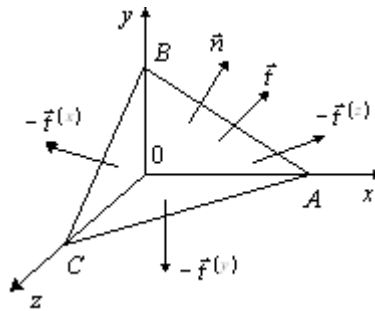
**Зауваження 3.2.8** — При розгляді моделі взаємодії правого паралелепіпеда та лівого паралелепіпеда через спільний переріз має місце принцип рівнодії та протидії, тобто сила, з якою правий паралелепіпед діє на лівий паралелепіпед рівна за величиною та протилежна за напрямком силі з якою лівий паралелепіпед діє на правий пара-



лелєпієд. Сили, що діють на тіло обираються зі знаком плюс, якщо вони діють на переріз, який обмежує тіло з боку зростання значення координатної вісей і зі знаком мінус, якщо вони діють на поверхню, що обмежує тіло з боку спадання значень координатних вісей.

### 3.2.1 Закони рівноваги елемента поверхні

Розглянемо елементарну модель пружної взаємодії. Нехай всередині пружного тіла ми виділили нескінченно малий тетраедр  $OABC$ ,  $\vec{n}$  — вектор зовнішньої нормалі до грані  $ABC$ , а  $S$  — площа цієї грані:



Нехай  $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$  — вектор поверхневої сили, що діє на одиницю площі грані  $ABC$ .

Вектор нормалі

$$\vec{n} = (\cos(\vec{n}, x), \cos(\vec{n}, y), \cos(\vec{n}, z)), \quad (3.2.4)$$

а

$$S \cdot \cos(\vec{n}, x), \quad S \cdot \cos(\vec{n}, y), \quad S \cdot \cos(\vec{n}, z) \quad (3.2.5)$$

— площі граней тетраедра, ортогональних вісям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Якщо тетраедр знаходиться в стані спокою, або рівномірного прямолінійного руху, то рівнодіюча сил, що діють на всі чотири грані дорівнює нулю, тобто:

$$\vec{f} \cdot S - \mathbf{t}^{(x)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, x) - \mathbf{t}^{(y)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, y) - \mathbf{t}^{(z)} \cdot S \cdot \cos(\vec{n}, z) = 0. \quad (3.2.6)$$

Після скорочення на  $S$  отримаємо

**Теорема 3.2.9** (векторна форма закону рівноваги елемента поверхні)

Виконується співвідношення:

$$\vec{f} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\vec{n}, z). \quad (3.2.7)$$

Запишемо закон рівноваги елемента поверхні в скалярному вигляді:

$$\sigma_x \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_x, \quad (3.2.8)$$

$$\tau_{yx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_y, \quad (3.2.9)$$

$$\tau_{zx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cdot \cos(\vec{n}, z) = f_z. \quad (3.2.10)$$

У випадку, коли елементарний трикутник  $ABC$  є частиною реальної зовнішньої поверхні тіла, то закон рівноваги елемента поверхні приймає вигляд:

$$\sigma_x \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_x, \quad (3.2.11)$$

$$\tau_{yx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cdot \cos(\vec{n}, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_y, \quad (3.2.12)$$

$$\tau_{zx} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cdot \cos(\vec{n}, z) = F_z, \quad (3.2.13)$$

де  $(F_x, F_y, F_z)$  — вектор поверхневих сил.

### 3.2.2 Закон рівноваги елемента об'єму

Розглянемо будь-який об'єм  $G$  та його елементарний об'єм  $dG$ .

Об'ємні сили, що діють на тіло об'єму  $G$  можна обчислити у вигляді

$$\iiint_G \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dG. \quad (3.2.14)$$

Через будь-яку елементарну поверхню тіла діє поверхнева сила  $\vec{f} \cdot dS$ , а результуюча поверхнева сила, яка діє на тіло через усю поверхню  $S$ , що обмежує тіло має вигляд

$$\iint_S \vec{f} dS, \quad (3.2.15)$$

або, в скалярному вигляді:

$$\iint_S (\mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\vec{n}, z)) dS. \quad (3.2.16)$$

**Теорема 3.2.10** (векторний запис закону рівноваги елементу об'єму)

Для того щоб тіло знаходилося в стані спокою або рухалось рівномірно і прямолінійно, рівнодіюча об'ємної та поверхневої сил повинна дорівнювати нулю:

$$\iint_S (\mathbf{t}^{(x)} \cos(\vec{n}, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cos(\vec{n}, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dG = 0. \quad (3.2.17)$$

**Теорема 3.2.11** (скалярний запис закону рівноваги елементу об'єму)

$$\begin{cases} \iint_S (\sigma_x \cos(\vec{n}, x) + \tau_{yx} \cos(\vec{n}, y) + \tau_{zx} \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G X dG = 0, \\ \iint_S (\tau_{xy} \cos(\vec{n}, x) + \sigma_y \cos(\vec{n}, y) + \tau_{zy} \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G Y dG = 0, \\ \iint_S (\tau_{xz} \cos(\vec{n}, x) + \tau_{yz} \cos(\vec{n}, y) + \sigma_z \cos(\vec{n}, z)) dS + \iiint_G Z dG = 0. \end{cases} \quad (3.2.18)$$

**Зауваження 3.2.12** — Додатковою умовою рівноважного положення тіла окрім закону рівноваги елементу об'єму є виконання закону збереження моментів сил з якого випливає симетричність матриці (3.2.3):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (3.2.19)$$

Враховуючи факт симетрії, останній закон можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \iint_S (\mathbf{t}^{(x)}, \vec{n}) dS + \iiint_G X dG = 0, \\ \iint_S (\mathbf{t}^{(y)}, \vec{n}) dS + \iiint_G Y dG = 0, \\ \iint_S (\mathbf{t}^{(z)}, \vec{n}) dS + \iiint_G Z dG = 0. \end{cases} \quad (3.2.20)$$

де

$$\vec{n} = (\cos(\vec{n}, x), \cos(\vec{n}, y), \cos(\vec{n}, z)) \quad (3.2.21)$$

— вектор зовнішньої нормалі до поверхні.

Враховуючи формулу Остроградського-Гауса, кожен поверхневий інтеграл перетворимо в об'ємний, в результаті отримаємо

**Теорема 3.2.13** (диференціальна форма запису закону рівноваги елементу об'єму)

Виконуються співвідношення:

$$\begin{cases} \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{t}^{(x)} + X) dG = 0, \\ \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{t}^{(y)} + Y) dG = 0, \\ \iiint_G (\nabla \cdot \mathbf{t}^{(z)} + Z) dG = 0. \end{cases} \quad (3.2.22)$$

**Визначення 3.2.14** (тензора напружень). В подальшому симетричну матрицю (3.2.3) будемо називати *тензором напружень*.

### 3.2.3 Тензор напружень, головні вісі тензора напружень

Позначимо через  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  орти прямокутної система координат з координатними осями  $Ox, Oy, Oz$ .

Введемо нову систему координат з ортами  $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$  та осями  $O\xi, O\eta, O\zeta$ .

З'ясуємо, яким чином пов'язані вектори  $\mathbf{t}^{(x)}, \mathbf{t}^{(y)}, \mathbf{t}^{(z)}$  які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у системі координат  $x, y, z$ , з векторами  $\mathbf{t}^{(\xi)}, \mathbf{t}^{(\eta)}, \mathbf{t}^{(\zeta)}$  які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у новій системі координат  $\xi, \eta, \zeta$ .

Згідно до загальних формул переходу від одного ортогонального базису до іншого, можна записати:

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{(\xi)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\xi, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\xi, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\xi, z), \\ \mathbf{t}^{(\eta)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\eta, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\eta, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\eta, z), \\ \mathbf{t}^{(\zeta)} = \mathbf{t}^{(x)} \cdot \cos(\zeta, x) + \mathbf{t}^{(y)} \cdot \cos(\zeta, y) + \mathbf{t}^{(z)} \cdot \cos(\zeta, z). \end{cases} \quad (3.2.23)$$

Координати ортів нової системи координат мають значення:

$$\mathbf{e}_\xi = (\cos(\xi, x), \cos(\xi, y), \cos(\xi, z)), \quad (3.2.24)$$

$$\mathbf{e}_\eta = (\cos(\eta, x), \cos(\eta, y), \cos(\eta, z)), \quad (3.2.25)$$

$$\mathbf{e}_\zeta = (\cos(\zeta, x), \cos(\zeta, y), \cos(\zeta, z)). \quad (3.2.26)$$

Для знаходження будь-якої компоненти тензора напружень  $\tau_{\alpha\beta}$ , необхідно обчислити скалярний добуток

$$\tau_{\alpha\beta} = \langle \mathbf{t}^{(\alpha)}, \mathbf{e}_\beta \rangle. \quad (3.2.27)$$

Так, наприклад,

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= (\sigma_x \cos(\eta, x) + \tau_{xy} \cos(\eta, y) + \tau_{xz} \cos(\eta, z)) \cdot \cos(\xi, x) + \\ &+ (\tau_{yx} \cos(\eta, x) + \sigma_y \cos(\eta, y) + \tau_{yz} \cos(\eta, z)) \cdot \cos(\xi, y) + \\ &+ (\tau_{zx} \cos(\eta, x) + \tau_{zy} \cos(\eta, y) + \sigma_z \cos(\eta, z)) \cdot \cos(\xi, z) = \\ &= \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} \tau_{ab} \cos(\xi, a) \cos(\eta, b). \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Отже, для довільної компоненти тензора напружень має місце

**Теорема 3.2.15 (формула переходу до нової системи координат)**

Виконуються співвідношення вигляду

$$\tau_{\alpha\beta} = \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} \tau_{ab} \cos(\alpha, a) \cos(\beta, b). \quad (3.2.29)$$

**Зауваження 3.2.16** — Тут використані позначення  $\tau_{\alpha\alpha} = \sigma_\alpha$ ,  $\tau_{aa} = \sigma_a$ .

Таким чином, тензор напружень — це симетрична матриця

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (3.2.30)$$

компоненти якої перетворюються за формулою вище при переході до нової прямокутної системи координат.

Поставимо задачу вибору нової прямокутної системи координат, для якої тензор напружень має діагональну форму. Нехай  $\mathbf{e}_{v_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  — орти нової прямокутної системи координат. Для того, щоб тензор  $T$  мав діагональну форму запису, кожен вектор  $\mathbf{t}^{(v_i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$  в новій системі координат повинен бути колінеарним відповідному орту  $\mathbf{e}_{v_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  тобто  $\mathbf{t}^{(v_i)} = \sigma_i \vec{v}_i$ .

Скористаємось формулою переходу від однієї до іншої системи координат та запишемо співвідношення для пошуку ортів:

$$\mathbf{t}^{(v)} = \sigma \mathbf{e}_v = \sigma (\cos(v, x), \cos(v, y), \cos(v, z)). \quad (3.2.31)$$

Запишемо останнє співвідношення в координатному вигляді:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(v, x) + \tau_{xy} \cos(v, y) + \tau_{xz} \cos(v, z) = \sigma \cos(v, x), \\ \tau_{yx} \cos(v, x) + \sigma_y \cos(v, y) + \tau_{yz} \cos(v, z) = \sigma \cos(v, y), \\ \tau_{zx} \cos(v, x) + \tau_{zy} \cos(v, y) + \sigma_z \cos(v, z) = \sigma \cos(v, z). \end{cases} \quad (3.2.32)$$

Для ортонормованого базису

$$\cos^2(v, x) + \cos^2(v, y) + \cos^2(v, z) = 1. \quad (3.2.33)$$

Тому в матрично-векторній формі попередні співвідношення мають вигляд

$$T \mathbf{e}_v = \sigma \mathbf{e}_v. \quad (3.2.34)$$

Ця задача на власні значення з симетричною матрицею має три дійсних власних числа, позначимо їх  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  тобто

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.35)$$

і три ортонормовані власні вектори

$$\mathbf{e}_{v_i} = (\cos(v_i, x), \cos(v_i, y), \cos(v_i, z)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2.36)$$

**Визначення 3.2.17** (головних вісей тензора напружень). Координатні вісі, для яких тензор напружень має діагональний вигляд, називаються *головними вісями тензора напружень*.

**Визначення 3.2.18** (головних компонент тензора напружень). Відповідні діагональні компоненти тензора напружень  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  називаються *головними компонентами тензора напружень*.

Використовуючи формулу переходу між системами координат, запишемо зв'язок між компонентами тензора напружень в декартових координатах  $x, y, z$  і головними компонентами тензора напружень:

$$\tau_{ab} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos(v_i, a) \cos(v_i, b), \quad (3.2.37)$$

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos^2(v_i, a), \quad (3.2.38)$$

де  $x, b \in \{x, y, z\}$ .

### 3.2.4 Тензор деформацій і закони його перетворення

Раніше були введені характеристики:

$$U(x, y, z, t), \quad V(x, y, z, t), \quad W(x, y, z, t) \quad (3.2.39)$$

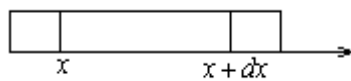
— зміщення точки з координатами  $(x, y, z)$  від положення рівноваги в напрямку відповідної вісі.

Розглянемо можливі види деформації.

#### 1. Нормальні деформації.

**Визначення 3.2.19** (нормальних деформацій). *Нормальні деформації* — зміна довжини в напрямку координатної вісі — характеризуються відносною зміною довжини відрізків.

Приклавши силу в напрямку вісі  $Ox$ , точка  $x$  змістилася і зайняла положення  $x + U(x, \cdot, \cdot)$ ; точка  $x + dx$  теж змістилася і зайняла положення  $(x + dx) + U(x + dx, \cdot, \cdot)$ :



Порахуємо відносне подовження відрізка  $dx$  після прикладення до нього напруження:

$$\begin{aligned} & \frac{(x + dx) + U(x + dx, \cdot, \cdot) - x - U(x, \cdot, \cdot) - dx}{dx} = \\ & = \frac{U(x + dx, \cdot, \cdot) - U(x, \cdot, \cdot)}{dx} \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (3.2.40) \end{aligned}$$

Аналогічно, можна ввести характеристику відносного подовження в напрямку двох інших вісей.

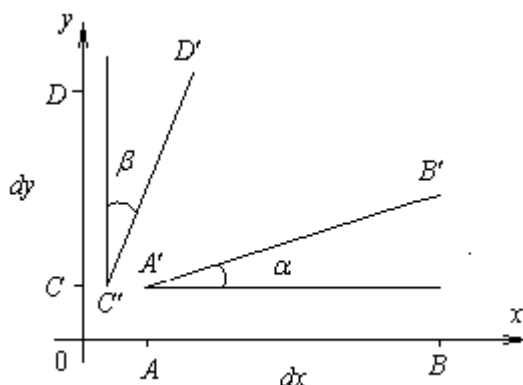
Отже, нормальні деформації характеризуються частинними похідними

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z}. \quad (3.2.41)$$

## 2. Зрізаючі (дотичні) деформації.

**Визначення 3.2.20** (зрізаючих (дотичних) деформацій). *Зрізаючі (дотичні) деформації* будемо характеризувати абсолютною зміною кутів між відрізками в кожній з трьох координатних площин, які до початку дії напружень були ортогональними.

Розглянемо фізичну модель. Нехай відрізки  $AB$  та  $CD$  довжини  $dx$  та  $dy$  відповідно після дії прикладених сил зайняли положення  $A'B'$  та  $C'D'$  відповідно:



Точка  $A$  змістилася на відстань  $V(x, \cdot, \cdot)$ , а точка  $B$  змістилася на відстань  $V(x + dx, \cdot, \cdot)$ .



Тоді

$$\frac{V(x + dx, \cdot, \cdot) - V(x, \cdot, \cdot)}{dx} = \tan \alpha \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3.2.42)$$

тому

$$\alpha \approx \tan \alpha = \partial V / \partial x. \quad (3.2.43)$$

Аналогічно  $\beta \approx \partial U / \partial y$ .

Сумарна зміна кута

$$\alpha + \beta \approx \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (3.2.44)$$

Позначимо

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma_{yx}. \quad (3.2.45)$$

Провівши аналогічні міркування щодо інших координатних площин отримаємо:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma_{zx}, \quad (3.2.46)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma_{zy}. \quad (3.2.47)$$

Позначимо також

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (3.2.48)$$

і  $\gamma_{aa} = 2\varepsilon_a$ .

В результаті повну деформацію у будь-якій точці простору можна охарактеризувати

**Визначення 3.2.21** (тензора деформацій). Симетрична матриця

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (3.2.49)$$

називається симетричним *тензором деформацій*.

### 3.2.5 Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат

Вивчимо перетворення симетричного тензору деформацій при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої. Нехай  $O\xi, O\eta, O\zeta$  — вісі нової системи координат (замість  $Ox, Oy, Oz$ ), а функції  $U', V', W'$  — зміщення в напрямку нових вісей.

Враховуючи формули переходу від одного ортогонального базису до іншого можемо записати:

$$\begin{cases} U' = U \cos(\xi, x) + V \cos(\xi, y) + W \cos(\xi, z), \\ V' = U \cos(\eta, x) + V \cos(\eta, y) + W \cos(\eta, z), \\ W' = U \cos(\zeta, x) + V \cos(\zeta, y) + W \cos(\zeta, z), \end{cases} \quad (3.2.50)$$

а також

$$\begin{cases} x = \xi \cos(\xi, x) + \eta \cos(\eta, x) + \zeta \cos(\zeta, x), \\ y = \xi \cos(\xi, y) + \eta \cos(\eta, y) + \zeta \cos(\zeta, y), \\ z = \xi \cos(\xi, z) + \eta \cos(\eta, z) + \zeta \cos(\zeta, z), \end{cases} \quad (3.2.51)$$

і

$$\begin{cases} \xi = x \cos(\xi, x) + y \cos(\xi, y) + z \cos(\xi, z), \\ \eta = x \cos(\eta, x) + y \cos(\eta, y) + z \cos(\eta, z), \\ \zeta = x \cos(\zeta, x) + y \cos(\zeta, y) + z \cos(\zeta, z). \end{cases} \quad (3.2.52)$$

У цих формулах

$$(\cos(\alpha, x), \cos(\alpha, y), \cos(\alpha, z)) = \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha \in \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (3.2.53)$$

— координати ортів нового базису.

Знайдемо вирази для компонентів тензору у новій системі координатах:  $\varepsilon_\alpha, \gamma_{\alpha,\beta}$  при  $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$ .

Зокрема для  $\varepsilon_\xi$  отримаємо:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\xi &= \frac{\partial U'}{\partial x} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cos(\xi, x) + \\
&+ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cos(\xi, y) + \\
&+ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \cos(\xi, z) = \\
&= \cos(\xi, x) \left( \frac{\partial U}{\partial x} \cos(\xi, x) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(\xi, y) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(\xi, z) \right) + \\
&+ \cos(\xi, y) \left( \frac{\partial V}{\partial x} \cos(\xi, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(\xi, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(\xi, z) \right) + \\
&+ \cos(\xi, z) \left( \frac{\partial W}{\partial x} \cos(\xi, x) + \frac{\partial W}{\partial y} \cos(\xi, y) + \frac{\partial W}{\partial z} \cos(\xi, z) \right). \tag{3.2.54}
\end{aligned}$$

Розкриваючи дужки і використовуючи відповідні позначення отримаємо наступну формулу:

$$\gamma_{\xi\xi} = 2\varepsilon_\xi = \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} \gamma_{ab} \cos(\xi, a) \cos(\xi b). \tag{3.2.55}$$

Отже у загальному вигляді доведена

### Теорема 3.2.22 (формула перетворення тензора деформацій)

Виконуються співвідношення вигляду:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{a,b \in \{x,y,z\}} \gamma_{ab} \cos(\alpha, a) \cos(\beta b), \tag{3.2.56}$$

де  $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta, \zeta\}$ .

Порівнюючи формули переходу до нових координат для обох тензорів, бачимо їх ідентичність, тобто перетворення тензора напружень та тензору деформацій відбувається за однаковими формулами. Таким чином існує система координат  $h_1, h_2, h_3$ , для якої тензор деформації має діагональний вигляд:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \tag{3.2.57}$$

**Визначення 3.2.23** (головних компонент тензора деформацій).  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  називаються *головними компонентами* тензора деформацій.

**Визначення 3.2.24** (головних вісей тензора деформацій).  $h_1, h_2, h_3$  називаються *головними вісями* тензора деформацій.

З формули переходу можна отримати зв'язок між компонентами тензору деформацій у прямокутній системі координат  $x, y, z$  та головними компонентами тензора деформацій:

$$\gamma_{ab} = \sum_{i=1}^3 2\varepsilon_i \cos(h_i, a) \cos(h_i, b), \quad (3.2.58)$$

$$\varepsilon_a = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \cos^2(h_i, a), \quad (3.2.59)$$

де  $a, b \in \{x, y, z\}$ .

Без доведення приймемо до уваги

#### Твердження 3.2.25

Для ізотропних тіл (тіл властивості яких в усіх напрямках однакові) головні вісі тензора деформації та тензора напружень співпадають:

$$\tau_{ab} = \sum_{i=1}^3 2\varepsilon_i \cos(h_i, a) \cos(h_i, b), \quad (3.2.60)$$

$$\sigma_a = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \cos^2(h_i, a), \quad (3.2.61)$$

де  $a, b \in \{x, y, z\}$ .

### 3.2.6 Закон Гука. Зв'язок між тензором деформації та тензором напружень

Розглянемо пружній паралелепіпед до нижньої грані якого прикладене напруження  $\sigma_1$  у напрямку першої головної координатної вісі  $h_1$ :



Згідно до спрощеного трактування закону Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad (3.2.62)$$

де  $E$  — модуль Юнга.

При подовженні паралелепіпеду у напрямку першої координатної вісі  $h_1$ , відбувається стиснення паралелепіпеду у напрямках двох інших головних вісей і це стиснення пропорційне прикладеному напруженню  $\sigma_1$ .

Прикладаючи напруження в напрямку двох інших головних координатних вісей  $\sigma_2$  та  $\sigma_3$ , відповідно будемо мати стиснення в напрямку  $h_1$ . Це від'ємне подовження (стиснення) в напрямку першої координатної вісі, за рахунок напруження  $\sigma_2$  дорівнює  $\sigma_2/mE$ , а за рахунок напруження  $\sigma_3$  дорівнює  $\sigma_3/mE$ .

Отже, маємо

#### Закон 3.2.26 (Гука, загальний)

Повна величина подовження в напрямку першої головної координатної вісі дорівнює

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right) = \frac{m+1}{Em} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{m+1} \right) \quad (3.2.63)$$

Позначимо  $S = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  і запишемо

#### Закон 3.2.27 (Гука)

Зв'язок між головними компонентами тензора напружень та тензора деформації:

$$\varepsilon_i = \frac{m+1}{Em} \left( \sigma_i - \frac{S}{m+1} \right), \quad (3.2.64)$$

для  $i = 1, 2, 3$ .

Використовуючи формули переходу до нової системи координат отримаємо:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \sum_{i=1}^3 \frac{m+1}{Em} \left( \sigma_i - \frac{S}{m+1} \right) \cos^2(h_i, x) = \\
&= \frac{m+1}{Em} \left( \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cos^2(h_i, x) - \frac{S}{m+1} \sum_{i=1}^3 \cos^2(h_i, x) \right) = \\
&= \frac{m+1}{Em} \left( \sigma_x - \frac{S}{m+1} \right).
\end{aligned} \tag{3.2.65}$$

Неважко перевірити, що

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \tag{3.2.66}$$

тобто  $S$  — інваріант для різних прямокутних систем координат.

Для поза діагональних елементів, зв'язок між компонентами тензора деформацій і тензора напружень має вигляд:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(m+1)}{Em} \sum_{i=1}^3 \left( \sigma_i - \frac{S}{m+1} \right) \cos(h_i, x) \cos(h_i, y) = \frac{2(m+1)}{Em} \cdot \tau_{xy}. \tag{3.2.67}$$

Позначимо  $G = Em/2(m+1)$  та запишемо

**Закон 3.2.28** (Гука для будь-якої прямокутної системи координат)

Залежність між тензором деформацій та тензором напружень у довільній прямокутній системі координат:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2G} \left( \sigma_a - \frac{S}{m+1} \right), \tag{3.2.68}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G}, \tag{3.2.69}$$

де  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$ .

Запишемо обернену залежність тензора напружень від тензора деформації, нехай

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left( S - \frac{3S}{m+1} \right) = \frac{1}{2G} \left( \frac{(m-2)S}{m+1} \right), \tag{3.2.70}$$

тоді

$$S = \frac{2\theta(m+1)G}{m-2}. \quad (3.2.71)$$

Таким чином можна записати

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \frac{S}{m+1} = 2G\varepsilon_x + \frac{2G\theta}{m-2} = 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\theta}{m-2} \right). \quad (3.2.72)$$

В результаті маємо

### Закон 3.2.29 (Гука, еквівалентна форма)

Для довільної прямокутної системи координат:

$$\sigma_\alpha = 2G \left( \varepsilon_\alpha + \frac{\theta}{m-2} \right), \quad (3.2.73)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = G\gamma_{\alpha\beta}, \quad (3.2.74)$$

де  $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$ .

Запишемо замкнену систему диференціальних рівнянь, яка складається з останніх рівнянь, закону рівноваги елементу об'єму

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0. \end{cases} \quad (3.2.75)$$

і виразів які зв'язують компоненти тензору деформацій та вектор переміщень:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma_{yx}, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = \gamma_{zx}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma_{zy}, \\ \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.2.76)$$

Всі ці співвідношення складають систему п'ятнадцяти лінійних диференціальних рівнянь з п'ятнадцятьма невідомими функціями.

Найчастіше цю систему перетворюють до вигляду трьох рівнянь з трьома невідомими відносно вектора переміщень. Для здійснення перетворень з першої і третьої груп рівнянь виключимо тензор деформацій, та підставимо отриманий вираз для напружень через переміщення у другу групу рівнянь, отримаємо статичну систему теорії пружності.

#### Рівняння 3.2.30 (статичні рівняння теорії пружності)

Напружено-деформований стан тіла, при умові що воно знаходиться у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, описується системою

$$G \left( \Delta \vec{U} + \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) \right) + \vec{X} = 0, \quad (3.2.77)$$

де  $(x, y, z) \in \Omega$ .

У випадку, коли одні частини тіла рухаються відносно інших, замість статичних рівнянь теорії пружності мають місце

#### Рівняння 3.2.31 (динамічні рівняння теорії пружності)

Напружено-деформований стан тіла, коли одні частини тіла рухаються відносно інших, описується системою

$$G \left( \Delta \vec{U} + \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) \right) + \vec{X} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}, \quad (3.2.78)$$

де  $(x, y, z) \in \Omega$  і  $t > 0$ .

**Зауваження 3.2.32** — Остання система рівнянь може бути отримана, якщо використати більш загальний вигляд закону рівноваги елемента об'єму в якому рівнодіюча поверхневих та об'ємних сил



дорівнюють силі інерції (другий закон Ньютона):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = \rho \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = \rho \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (3.2.79)$$

де права частина формули представляє силу інерції.

### 3.2.7 Початкові та граничні умови для рівнянь теорії пружності

Для нестационарної системи теорії пружності в початковий момент часу необхідно задавати вектор переміщень

$$\vec{U}(x, y, z, 0) = \vec{U}_0(x, y, z) \quad (3.2.80)$$

та вектор початкових швидкостей

$$\frac{\partial \vec{U}(x, y, z, 0)}{\partial t} = \vec{U}_1(x, y, z). \quad (3.2.81)$$

Перейдемо тепер до крайових (граничних) умов:

- Якщо на границі області  $(x, y, z) \in S = \partial\Omega$  відомий вектор зміщень, то задають граничні умови Діріхле.

**Визначення 3.2.33** (умов Діріхле). Умовами Діріхле називають співвідношення

$$\vec{U}(x, y, z, t) \Big|_{(x,y,z) \in S} = \vec{W}(x, y, z, t). \quad (3.2.82)$$

- Якщо на поверхні тіла відомий (заданий) вектор поверхневих сил, то в точках границі згідно закону рівноваги елементу поверхні задають умови для напрямку  $x$ :

$$\sum_{a \in \{x,y,z\}} \tau_{xa} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x,y,z) \in S} = F_x(x, y, z, t). \quad (3.2.83)$$

Аналогічно для напрямків  $y, z$ . Тобто маємо умови Неймана.

**Визначення 3.2.34** (умов Неймана). *Умовами Неймана* називають співвідношення

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{ba} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = F_b(x, y, z, t), \quad (3.2.84)$$

де  $b \in \{x, y, z\}$ .

- Якщо точки границі закріплені пружно, наприклад за допомогою пружини, то у цьому випадку на границю діє поверхнева сила пропорційна зміщенню точок тіла і направлена в бік протилежний зміщенню. Таким чином задаються граничні умови Ньютона.

**Визначення 3.2.35** (умов Ньютона). *Умовами Ньютона* називають співвідношення

$$\sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{ba} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} = -K_b \cdot U_b(x, y, z, t)|_{(x, y, z) \in S}, \quad (3.2.85)$$

де  $b \in \{x, y, z\}$ .

**Зауваження 3.2.36** — Тут  $K_b$  — коефіцієнт пропорційності (пружного закріплення).

- Якщо на тіло закріплено пружно одночасно дії зовнішня сила, то маємо неоднорідну граничну умову третього роду, яка запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \{x, y, z\}} \tau_{ba} \cos(\vec{n}, a) \Big|_{(x, y, z) \in S} &= \\ &= -K_b \cdot (U_b(x, y, z, t) + F_b(x, y, z, t))|_{(x, y, z) \in S}, \end{aligned} \quad (3.2.86)$$

де  $b \in \{x, y, z\}$ .

### 3.2.8 Спрощення системи рівнянь теорії пружності

Відомо, що за теоремою Гельмгольца, векторне поле  $\vec{U}$  завжди можна представити у вигляді суми потенціального та соліноїдального векторних полів.

Тобто існують така скалярна функція  $\varphi$  та векторна функція  $\vec{\Phi}$ , які називають скалярним та векторним потенціалами відповідно що

$$\vec{U} = \nabla\varphi + \nabla \times \vec{\Phi}. \quad (3.2.87)$$

Для вектору масових сил  $\vec{X}$  теж застосуємо представлення у вигляді потенціальної та соліноїдальної складових:

$$\vec{X} = \nabla f + \nabla \times \vec{F}. \quad (3.2.88)$$

Підставимо ці представлення у динамічні рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} \nabla \left( \left( \frac{2G(m-1)}{(m-2)} \cdot \Delta\varphi + f - \rho \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \right) + \\ + \nabla \times \left( G\Delta\vec{\Phi} + \vec{F} - \rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.89)$$

В результаті маємо рівняння скалярне та векторне хвильове рівняння:

#### Рівняння 3.2.37 (скалярне хвильове)

Виконується співвідношення:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left( \frac{2G(m-1)}{(m-2)} \right) \Delta\varphi + f. \quad (3.2.90)$$

#### Рівняння 3.2.38 (векторне хвильове)

Виконується співвідношення:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2} = G\Delta\vec{\Phi} + \vec{F}. \quad (3.2.91)$$

### 3.2.9 Математична модель поздовжніх коливань стрижня

Нехай маємо пружний стрижень, який витягнутий вздовж вісі  $Ox$  і має довжину  $L$ . Відносно стрижня будемо припускати, що переміщення, деформації та напруження, які можуть виникати в стрижні направлені лише вздовж вісі  $Ox$  і не залежать від інших просторових координат.

Зрозуміло, що в цьому випадку для компонентів тензора напружень можна записати:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \sigma_x = \sigma_x(x, t). \quad (3.2.92)$$

Будемо нехтувати також змінами поперечного перерізу при деформаціях вздовж вісі  $Ox$ . В цьому випадку закон Гука має вигляд:  $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ .

Спрощений вигляд закону рівноваги елементу об'єму з можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + F_x(x, t) = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (3.2.93)$$

Або враховуючи зв'язок тензора деформацій і вектору переміщень, будемо мати

### Рівняння 3.2.39 (поздовжніх коливань стрижня)

Виконується рівняння

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F_x(x, t), \quad (3.2.94)$$

де  $0 < x < L$  і  $t > 0$ .

В початковий момент часу необхідно задавати початкові зміщення та початкові швидкості в напрямку вісі  $Ox$ :

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad (3.2.95)$$

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = U_1(x). \quad (3.2.96)$$

Розглянемо можливі граничні умови на правому кінці стрижня:

- На правому кінці заданий закон його руху (зміщення):

$$U(L, t) = \varphi_2(t). \quad (3.2.97)$$

- На правий кінець діє задана сила. Враховуючи, що  $\vec{n} = (1, 0, 0)$ , можна записати  $\sigma_x(L, t) = \psi_2(t)$ , або, враховуючи спрощений закон Гука:

$$E \cdot \frac{\partial U(L, t)}{\partial x} = \psi_2(t). \quad (3.2.98)$$

- Правий кінець закріплений пружно. Можемо записати  $\sigma_x(L, t) + K_x \cdot U(L, t) = 0$ , або враховуючи закон Гука:

$$E \cdot \frac{\partial U(L, t)}{\partial x} + K_x \cdot U(L, t) = 0. \quad (3.2.99)$$

### 3.2.10 Математична модель поперечних коливання струни

Струною будемо називати абсолютно гнучку нитку, нескінченно малого поперечного перерізу, яка не протидіє згинанню.

Нехай струна має довжину  $L$  і в положенні рівноваги співпадає з відрізком вісі  $Ox$ , лівий кінець співпадає з початком координат.

Будемо вважати, що струна рівномірно натягнута з силою  $T_0 = \text{const}$ , і може здійснювати коливання лише в одній площині.

Будемо розглядати лише малі коливання, тобто такі, коли відхилення точок струни від положення рівноваги є величинами першого порядку малості, при цьому величинами більш високого порядку малості будемо нехтувати.

Припущення про абсолютну гнучкість струни означає, що при відхиленні точок струни від положення рівноваги сила натягу весь час направлена по дотичній до миттєвого профілю струни.

Введемо позначення:

- $\rho$  — лінійна щільність точок струни ( $\text{const}$ );
- $u(x, t)$  — відхилення точок струни від положення рівноваги в точці  $(x, t)$ ;
- $f(x, t)$  — інтенсивність зовнішніх сил.

Запишемо рівняння руху для елементарної частини струни  $(x, x + \Delta x)$  в проекції на вісь  $u$ . Підрахуємо наскільки змінилася довжина частини струни, між перерізами  $x$  і  $x + \Delta x$ . Згідно до відомої формули математичного аналізу можемо записати, що довжина дуги обчислюється

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx dx. \quad (3.2.100)$$

Таким чином зміною довжини дуги струни з точністю до членів другого порядку малості можна нехтувати.

Це в свою чергу означає, що за законом Гука сила натягу залишається постійною в кожному перерізі струни, тобто  $T(x, t) = T_0$ .

Виділимо сили, які діють на елементарну частину струни.

Проекція сили натягу в перерізі  $x + \Delta x$  на вісь вздовж якої відбувається рух точок струни (вісь  $u$ ) дорівнює  $T_0 \sin \alpha(x + \Delta x, t)$ , а в перерізі  $x$  дорівнює  $-T_0 \sin \alpha(x, t)$ , де  $\sin \alpha(x, t)$  — синус кута між дотичною і додатнім напрямом вісі  $x$ . Для малих кутів  $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \partial u / \partial x$ .

Таким чином рівнодіючу сил натягу можна записати у вигляді

$$T_0(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)). \quad (3.2.101)$$

Зовнішня сила яка діє на виділений елемент струни дорівнює  $f(\xi, t)\Delta x$ .

Згідно до другого закону Ньютона рівнодіюча зовнішніх сил повинна дорівнювати силі інерції  $F = ma$ .

Сила інерції елементарного відрізка струни має вигляд:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2}, \quad (3.2.102)$$

де  $\xi$  — якась середня точка, тобто  $\xi \in (x, x + \Delta x)$ .

Таким чином згідно до закону Ньютона можна записати рівняння руху:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = T_0(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)) + f(\xi, t)\Delta x. \quad (3.2.103)$$

Поділивши це рівняння на  $\Delta x$  і спрямувавши його до нуля отримаємо

#### Рівняння 3.2.40 (коливання струни)

Виконується рівняння

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3.2.104)$$

де  $0 < x < L$ , і  $t > 0$ .

Додаткові умови для рівняння коливання струни полягають в необхідності задавати початкове відхилення точок струни і початкові швидкості точок струни:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.2.105)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = v_0(x), \quad (3.2.106)$$

для  $0 < x < L$ .

Окрім початкових умов необхідно задавати умови на кінцях струни. Найбільш поширеними умовами є:

- Кінець струни рухаються за заданим законом;

- На кінець струни діє задана сила;
- Кінець струни закріплений пружно.

Запишемо відповідні граничні умови для випадку лівого кінця.

- Якщо лівий кінець рухається за заданим законом, то

$$u(0, t) = \varphi_1(t). \quad (3.2.107)$$

- У випадку, коли на лівому кінці діє задана сила, то для отримання граничної умови можна записати рівняння руху для елементарного відрізка  $[0, \Delta x]$  яке матиме вигляд:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = T_0 \cdot u_x(\Delta x, t) - \psi_1(t) + f(\xi, t), \quad (3.2.108)$$

де  $\xi$  — якась середня точка, тобто  $\xi \in (0, \Delta x)$ .

Спрямувавши  $\Delta x \rightarrow 0$  отримаємо граничну умову

$$u_x(0, t) = \frac{\psi_1(t)}{T_0}. \quad (3.2.109)$$

- Для випадку пружного закріплення замість заданої сили  $\psi_1(t)$  необхідно розглядати силу реакції пружини, яка пропорційна зміщенню і діє в напрямку протилежному зміщенню. Таким чином рівняння руху буде мати вигляд:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = T_0 \cdot u_x(\Delta x, t) + k \cdot u(0, t) + f(\xi, t), \quad (3.2.110)$$

де  $\xi$  — якась середня точка, тобто  $\xi \in (0, \Delta x)$ .

Після граничного переходу отримаємо

$$u_x(0, t) + \frac{K}{T_0} \cdot u(0, t) = 0, \quad (3.2.111)$$

де  $k$  — коефіцієнт жорсткості пружини.

### 3.3 Математичні моделі руху ідеальної рідини

Будемо розглядати ідеальну рідину, тобто таку рідину для якої можна нехтувати властивостями в'язкості і теплопровідності.

Введемо позначення:

- $x = (x_1, x_2, x_3)$  — точка простору;
- $t$  — час (скалярна величина);
- $\rho(x, t)$  — щільність ідеальної рідини (або газу);
- $\vec{V}(x, t)$  — швидкість в напрямку кожної з трьох вісей;
- $p(x, t)$  — тиск
- $\varepsilon(x, t)$  — питома внутрішня (теплова) енергія.

Вектор швидкості віднесемо до динамічних величин, а щільність, тиск та питому внутрішню енергію — до термодинамічних величин.

Для запису математичної моделі руху ідеальної рідини можна використовувати також інші термодинамічні величини, але будь яку третю термодинамічну величину можна записати як функцію двох інших. При цьому лише дві з них будуть незалежними.

#### 3.3.1 Закон збереження маси

Візьмемо довільний уявний об'єм  $G$  і порахуємо кількість рідини, що міститься в ньому, якщо  $\rho dG$  — кількість рідини в елементарному об'ємі  $dG$ , то в об'ємі  $G$  міститься маса рідини

$$\iiint_G \rho(x, t) dG. \quad (3.3.1)$$

Зміна маси в об'ємі  $G$  за проміжок часу від  $t_1$  до  $t_2$  дорівнює

$$\iiint_G \rho(x, t)|_{t_1}^{t_2} dG. \quad (3.3.2)$$

Через поверхню  $S$  вільно циркулює рідина, підрахуємо кількість рідини, що втікає в об'єм  $G$  (потік векторного поля через поверхню). Вважаємо, що  $\vec{n}$  — напрям зовнішньої нормалі. Тоді кількість рідини, що проходить за час  $dt$  через елемент поверхні  $dS$  всередину тіла буде  $-\rho \mathbf{V}_n dS dt$ , де



$\mathbf{V}_n$  — нормальна складова вектора швидкості ( $\mathbf{V}_n = \langle V, \mathbf{n} \rangle$ ). Тоді кількість рідини, що втікає в об'єм  $G$  за проміжок часу від  $t_1$  до  $t_2$  через усю поверхню дорівнює

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho(x, t) \mathbf{V}_n(x, t) dS dt. \quad (3.3.3)$$

Таким чином ми отримали

#### Закон 3.3.1 (збереження маси)

Зміна маси в об'ємі  $G$  за час від  $t_1$  до  $t_2$  дорівнює кількості рідини, що втікає (витікає) через поверхню тіла за обраний інтервал часу і має вигляд:

$$\iiint_G \rho(x, t)|_{t_1}^{t_2} dG + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho(x, t) \mathbf{V}_n(x, t) dS dt = 0. \quad (3.3.4)$$

З формули Остроградського-Гауса для другого інтегралу:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dG dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G (\nabla \cdot (\rho(x, t) \mathbf{V}_n(x, t))) dG dt = 0. \quad (3.3.5)$$

Ця рівність виконується для будь-якого об'єму  $G$  і для будь-якого проміжку часу, таким чином вона вірна тоді і лише тоді, коли рівний нулю відповідний підінтегральний вираз.

Таким чином ми отримали

#### Рівняння 3.3.2 (нерозривності)

Диференціальна форма закону збереження маси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0. \quad (3.3.6)$$

### 3.3.2 Закон збереження імпульсу

Імпульс — векторна величина. Імпульс для елемента об'єму  $dG$  в напрямку вісі  $Ox_i$  дорівнює  $\rho V_i dG$ , тоді в об'ємі  $G$  кількість руху (складова

вектору імпульсу) обчислюється як:

$$\iiint_G \rho(x, t) V_i(x, t) dG. \quad (3.3.7)$$

Зміна імпульсу за час від  $t_1$  до  $t_2$  має вигляд:

$$\iiint_G \rho(x, t) V_i(x, t) \big|_{t_1}^{t_2} dG. \quad (3.3.8)$$

Імпульс в об'ємі  $G$  змінюється за рахунок імпульсу рідини, яка поступає через поверхню  $dS$  за час  $dt$ :

$$- \rho(x, t) V_n(x, t) V_i(x, t) dS dt \quad (3.3.9)$$

За проміжок часу від  $t_1$  до  $t_2$  через всю поверхню:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho(x, t) V_n(x, t) V_i(x, t) dS dt \quad (3.3.10)$$

Імпульс змінюється також за рахунок поверхневої сила, яка діє на уявний об'єм з боку оточуючої рідини, в нашому випадку це є сила тиску, яка завжди діє ортогонально до поверхні тіла тому її напрям протилежний вектору нормалі:

$$d\vec{F}(x, t) = -p(x, t) \cdot \vec{n}(x, t) \cdot dS. \quad (3.3.11)$$

Зміна імпульсу за рахунок сили тиску через елементарну поверхню за елементарний проміжок часу в напрямку вісі  $Ox_i$  можна записати у вигляді:

$$- p(x, t) \cdot \vec{n}_i(x, t) dS dt, \quad (3.3.12)$$

де  $\vec{n}_i$  —  $i$ -та складова вектора нормалі. Тоді повна зміна імпульсу в напрямку вісі  $Ox_i$  через поверхню  $S$  за час від  $t_1$  до  $t_2$  за рахунок сили тиску можна обчислити:

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S (p(x, t) \cdot \vec{n}_i(x, t)) dS dt \quad (3.3.13)$$

Таким чином ми отримали

### Закон 3.3.3 (збереження імпульсу)

Зміна імпульсу всередині уявного об'єму відбувається за рахунок сили тиску і втікання рідини через поверхню тіла і має вигляд:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_S (p(x, t) \cdot \vec{n}_i(x, t)) dS dt + \iiint_G \rho(x, t) V_i(x, t) \Big|_{t_1}^{t_2} dG = 0. \quad (3.3.14)$$

За формулою Остроградського-Гауса:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_G (\nabla \cdot (\rho V V_i) + \nabla_i p) dG dt + \iiint_G \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} dG dt = 0. \quad (3.3.15)$$

Оскільки ця рівність виконується для будь-якого об'єму  $G$  і для будь-якого проміжку часу, то нулю рівний і відповідний підінтегральний вираз:

$$\nabla \cdot (\rho V V_i) + \nabla_i p + \frac{\partial \rho V_i}{\partial t} = 0. \quad (3.3.16)$$

### 3.3.3 Закон збереження енергії

Кількість енергії в елементі об'єму  $dG$  можна обчислити як:

$$\rho \cdot \frac{|V|^2}{2} \cdot dG + \rho \cdot \varepsilon \cdot dG = \rho \left( \frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) dG, \quad (3.3.17)$$

де  $\rho \cdot |V|^2/2 \cdot dG$  — кількість кінетичної,  $\rho \cdot \varepsilon \cdot dG$  — кількість внутрішньої (теплової) енергії.

Її зміна за проміжок часу від  $t_1$  до  $t_2$  в довільному об'ємі  $G$  обчислюється за формулою:

$$\iiint_G \rho \left( \frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) \Big|_{t_1}^{t_2} dG. \quad (3.3.18)$$

Кількість енергії, що потрапила в середину об'єму  $G$  через елементарну поверхню  $dS$  за час  $dt$ :

$$- \rho V_n \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} + \varepsilon \right) dS dt, \quad (3.3.19)$$

і відповідно за проміжок часу від  $t_1$  до  $t_2$ , через усю поверхню  $S$ :

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho V_n \left( \frac{|\vec{V}|^2}{2} + \varepsilon \right) dS dt. \quad (3.3.20)$$

Енергія в об'ємі  $G$  змінюється також за рахунок роботи сил тиску. Величина цієї роботи за елементарний відрізок часу  $dt$  обчислюється за відомою формулою фізики:

$$d\vec{A} = \langle \vec{F}, \vec{V} \rangle dt, \quad (3.3.21)$$

де  $\vec{F}$  — вектор сили, а  $\vec{V}$  — вектор швидкості руху. У випадку сили тиску будемо мати:

$$- \langle p \cdot dS \cdot \vec{n}, \vec{V} \rangle dt \quad (3.3.22)$$

Робота сил тиску через поверхню  $S$  за час від  $t_1$  до  $t_2$  обчислюється за формулою

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iint_S p V_n dS dt \quad (3.3.23)$$

Таким чином ми отримали

#### Закон 3.3.4 (збереження повної енергії)

Зміна повної енергії в довільному об'ємі відбувається за рахунок її проникнення з масою рідини через поверхню тіла та за рахунок роботи сил тиску:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left( \rho(x, t) V_n(x, t) \left( \frac{|V(x, t)|^2}{2} + \varepsilon(x, t) \right) + p(x, t) V_n(x, t) \right) dS dt + \\ & + \iiint_G \rho(x, t) \left( \frac{|V(x, t)|^2}{2} + \varepsilon(x, t) \right) \Big|_{t_1}^{t_2} dG = 0 \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Застосування теореми Остроградського-Гауса до поверхневого інтегралу приводить до інтегральної рівності:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \left( \nabla \cdot \left( \rho \left( \frac{|V|^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right) \right) dG dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \iiint_G \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( \frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) dG dt = 0. \quad (3.3.25)$$

з якої можна отримати диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( \frac{|V|^2}{2} + \varepsilon \right) \right) + \nabla \cdot \left( \rho \left( \frac{|V|^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right) = 0. \quad (3.3.26)$$

Воно є диференціальною формою запису закону збереження повної енергії.

Сукупність трьох отриманих законів у диференціальному вигляді будемо розглядати як систему з 5 рівнянь із 6-ма невідомими функціями. Ця система описує загальні закономірності руху ідеальної рідини. Для замикання системи диференціальних рівнянь її треба доповнити рівнянням стану, яке враховує індивідуальні властивості середовища і зв'язує між собою три термодинамічні параметри наприклад це рівняння може мати вигляд:

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \quad (3.3.27)$$

Конкретний вигляд цієї функції залежить від індивідуальних властивостей ідеальної рідини.

### 3.3.4 Інші термодинамічні функції та закон збереження ентропії

Серед інших термодинамічних функцій найбільш важливими є ентропія  $S$ , абсолютна температура  $T$ , та повний тепловміст (ентальпія)  $W$ . Згідно другого закону термодинаміки зміна ентропії в елементарному об'ємі при ізотермічному процесі дається диференціальним співвідношенням:

$$dS = \frac{1}{T} \left( d\varepsilon + \frac{dp}{\rho} \right) \quad (3.3.28)$$

а зміна ентальпії співвідношенням:

$$dW = d \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right), \quad (3.3.29)$$

або з врахуванням попереднього:

$$dW = T ds + \frac{dp}{\rho} \quad (3.3.30)$$

Для певних режимів руху рідини (малі швидкості, відсутність великих градієнтів параметрів) з системи законів з використанням щойно наведених рівностей можна отримати ще один закон збереження для ідеальної рідини, який називається закон збереження ентропії:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho V S) = 0. \quad (3.3.31)$$

Це рівняння у цьому випадку можна використовувати замість закону збереження енергії, а рівняння стану доцільно розглядати у вигляді

$$S = S(p, \rho). \quad (3.3.32)$$

### 3.3.5 Додаткові умови математичної моделі руху ідеальної рідини

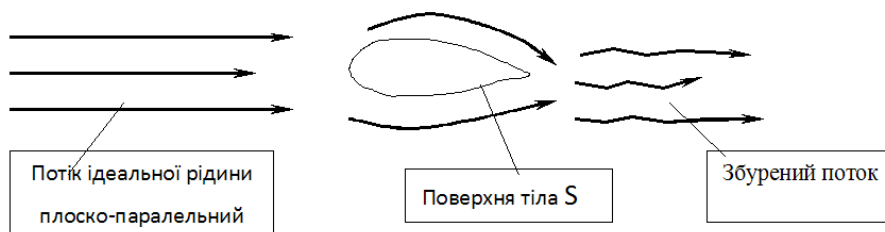
Як правило систему рівнянь руху ідеальної рідини розглядають в області  $G$ , яка обмежена деякою поверхнею  $S$  та на деякому проміжку часу  $t > t_0$ . Для виділення єдиного розв'язку системи рівнянь необхідно задати додаткові умови.

Початкові умови задають значення усіх невідомих параметрів в початковий момент часу, нехай  $t_0 = 0$ :

- $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$  — початкова щільність;
- $V(x, 0) = V_0(x)$  — початкова вектор-функція швидкості;
- $p(x, 0) = p_0(x)$  — початкова функція тиску.

На границі області  $S$  необхідно задавати граничні умови, вигляд яких залежить від фізичного змісту задачі.

### 3.3.6 Задача обтікання тіл



Через поверхню тіла потік не протікає це означає, що нормальна складова вектора швидкості дорівнює нормальній складовій вектору швидкості поверхні тіла  $U_n$ :

$$V_n(x, t)|_{x \in S} = U_n(x, t). \quad (3.3.33)$$

Якщо тіло нерухоме, а потік набігає на тіло, то умова непротікання приймає вигляд

$$V_n(x, t)|_{x \in S} = 0. \quad (3.3.34)$$

### 3.3.7 Задача про поршень

**Визначення 3.3.5** (поршня). *Поршень* — непрониклива для рідини поверхня, яка рухається в просторі, і при цьому може змінювати свою форму.

Задача про поршень узагальнює задачу обтікання тіла. Рівняння поверхні поршня запишемо у вигляді:

$$h(x, t) = 0. \quad (3.3.35)$$

На поверхні поршня повинна виконуватись умова непротікання. Запишемо її з використанням рівняння поверхні поршня:

$$dh = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot dx_i + \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dt = 0. \quad (3.3.36)$$

Позначимо  $U_i = dx_i/dt$  — складові вектора швидкості поверхні в напрямку вісі  $Ox_i$ . Вектор нормалі до поверхні поршня можна записати у вигляді

$$\vec{n} = \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} = \frac{1}{\|\nabla h\|} (h_x, h_y, h_z). \quad (3.3.37)$$

Тоді легко отримати нормальну складову вектору швидкості поверхні:

$$\left( \sum_{i=1}^3 h_{x_i} U_i \right) \cdot \frac{1}{\|\nabla h\|} = U_n = -\frac{h'_t}{\|\nabla h\|}. \quad (3.3.38)$$

Нормальна складова вектора швидкості рідини дорівнює:

$$V_n = \langle \vec{V}, \vec{n} \rangle = \sum_{i=1}^3 \frac{V_i h_{x_i}}{\|\nabla h\|}. \quad (3.3.39)$$

Прирівнюючи нормальну складову вектору швидкості поверхні і вектору швидкості рідини отримаємо граничну умову на поршні

$$-\frac{h'_t}{\|\nabla h\|} = \sum_{i=1}^3 \frac{V_i h_{x_i}}{\|\nabla h\|}. \quad (3.3.40)$$

Або після скорочення

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot V_i \Big|_{x \in S} = 0 \quad (3.3.41)$$

— гранична умова на поверхні  $S$  поршня.

### 3.3.8 Задача про вільну поверхню

**Визначення 3.3.6** (вільної поверхні). *Вільна поверхня* — поверхня, яка розділяє дві ідеальні рідини, і форма цієї поверхні знаходиться в процесі розв'язку задачі, нехай  $h(x, t)$  — невідома функція, яка описує форму поверхні.

Оскільки через вільну поверхню рідина не протікає то на цій поверхні виконується умова як і на поверхні поршня з невідомою функцією  $h(x, t)$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot V_i \Big|_{x \in S} = 0 \quad (3.3.42)$$

Це додаткове рівняння для знаходження функції  $h$ .

Для знаходження додаткової невідомої функції  $h$  на поверхні розділу середовищ задається розподіл тиску:

$$p(x, t)|_{x \in S} = P_a(x, t). \quad (3.3.43)$$

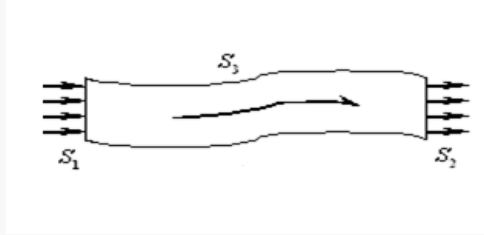
Для випадку поршня і для випадку вільної поверхні початковий стан поверхні задається у вигляді:

$$h(x, 0) = h_0(x). \quad (3.3.44)$$

### 3.3.9 Задача руху рідини в каналах



**Визначення 3.3.7** (каналу). *Канал* — просторова область, яку можна утворити якщо переміщувати вздовж деякого незамкненого контуру в просторі нанизаний на нього замкнений контур змінної форми. В результаті утвориться область обмежена непроникливою для рідини поверхнею  $S_3$ , і проникливими для рідини поверхнями  $S_1$ ,  $S_2$  через які рідина може втікати або витікати:



Як правило канали використовують для перетворення потоків.

Постановка граничних умов для течій в каналах має специфіку, яка визначається властивостями рівнянь руху ідеальної рідини (газової динаміки). Граничні умови на непроникливій поверхні  $S_3$  є класичні умови непротікання. Вигляд граничних умов на поверхнях  $S_1$  та  $S_2$  залежить від швидкості рідини на цих границях, а також від того втікає або витікає рідина з каналу.

Рухи рідини можна розділити на два режими:

- $V_n > c$  — надзвуковий режим руху (швидкий рух);
- $V_n < c$  — дозвуковий режим руху (повільний рух).

**Зауваження 3.3.8** — Тут  $c$  — термодинамічна скалярна величина, яка характеризує швидкість розповсюдження малих збурень (акустичних коливань) в рідині. Для визначення швидкості звуку використовується співвідношення

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S=\text{const}} > 0. \quad (3.3.45)$$

При цьому рівняння стану зручно вибирати у вигляді  $S = S(p, \rho)$ .

1. Розглянемо дозвукове втікання на поверхні  $S_1$ :  $V_n < c$ .

В цьому випадку необхідно задавати одну динамічну умову, наприклад потік маси через поверхню:

$$(\rho V_n)(x, t) = K (p(x, t) - p_a)|_{x \in S_1} \quad (3.3.46)$$

**Зауваження 3.3.9** — Тут  $p(x, t)$  — тиск на поверхні  $S_1$ ,  $p_a$  — атмосферний тиск,  $(\rho V_n)(x, t)$  — потік маси.

**Зауваження 3.3.10** — Оскільки рідина втікає, то  $p_a > p(x, t)$ .

Друга гранична умова при дозвуковому втіканні потребує завдання однієї термодинамічної функції, наприклад ентropії:

$$S(x, t)|_{x \in S_1} = S_i, \quad (3.3.47)$$

або питомої внутрішньої енергії

$$\varepsilon(x, t)|_{x \in S_1} = \varepsilon_i, \quad (3.3.48)$$

2. Розглянемо дозвукове втікання на поверхні  $S_2$ :  $V_n < c$ .

В цьому випадку достатньо задати лише одну граничну умову:

$$(\rho V_n)(x, t) = K (p(x, t) - p_a)|_{x \in S_2} \quad (3.3.49)$$

**Зауваження 3.3.11** — Оскільки рідина витікає, то  $p_a < p(x, t)$ .

3. Розглянемо надзвукове втікання на поверхні  $S_1$ :  $V_n > 1$ ,

При надзвуковому втіканні рідини на границі  $S_1$  необхідно задавати усі п'ять функцій:

$$\vec{V}|_{x \in S_1} = \vec{V}_i, \quad \rho|_{x \in S_1} = \rho_i, \quad p|_{x \in S_1} = p_i. \quad (3.3.50)$$

4. Розглянемо надзвукове втікання через поверхню  $S_2$ :  $V_n > c$ .

В цьому випадку ніяких граничних умов на відповідній границі ставити не треба, рідина, яка **дуже швидко** витікає через  $S_2$  ніяк не впливає на внутрішню течію в каналі.

### 3.3.10 Ізоентропічні течії (течії з постійною ентропією)

Отримаємо спрощену математичну модель руху ідеальної рідини в припущенні, що ентропія ідеальної рідини є величиною постійною в будь-який момент часу і в довільній точці області.

Виходячи з закону збереження ентропії, за відомою формулою

$$\nabla \cdot (f \vec{A}) = \langle \vec{A}, \nabla f \rangle + f (\nabla \cdot \vec{A}), \quad (3.3.51)$$

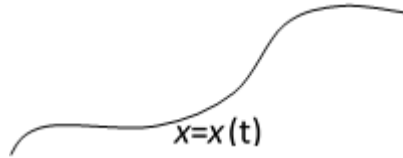
отримаємо:

$$\rho \cdot \frac{\partial S}{\partial t} + S \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \langle V, \nabla S \rangle + S \cdot (\nabla \cdot (\rho V)) = 0, \quad (3.3.52)$$

або враховуючи рівняння нерозривності маємо не дивергентну форму закону збереження ентропії:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \langle V, \nabla S \rangle = 0. \quad (3.3.53)$$

Знайдемо повну похідну деякого параметра  $f$  вздовж траєкторії руху  $x = x(t)$  частинки рідини:



тобто похідну по часу  $t$  вздовж контуру  $x = x(t)$ :

$$\frac{df(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle V, \nabla f \rangle. \quad (3.3.54)$$

Будемо називати цей вираз похідною по часу вздовж траєкторії руху частинки.

З не дивергентної форму закону збереження ентропії бачимо, що повна зміна ентропії вздовж траєкторії руху частинки дорівнює нулю, тобто

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (3.3.55)$$

Припустимо що в початковий момент часу  $t = 0$  ідеальна рідина займає деяку область  $\Omega(0)$ , а ентропія  $S(x, 0) = S_0 = \text{const}$  для  $x \in \Omega(0)$ .

Тоді згідно  $dS/dt = 0$  в будь-який момент часу  $t > 0$  ентропія буде залишатися постійною в довільній точці області, яка утворилася при переміщенні усіх її частинок вздовж траєкторій руху частинок, тобто області  $\Omega(t)$ . Таким чином можливе існування течій з постійним значення ентропії. Використовуючи введену термодинамічну функцію ентальпії, за формулою

$$dW = T dS + \frac{dp}{\rho} \quad (3.3.56)$$

при постійному значенні ентропії  $S = \text{const}$  отримаємо співвідношення

$$dW = \frac{dp}{\rho}. \quad (3.3.57)$$

Перетворимо закон збереження імпульсу, продиференціюємо відповідні добутки та отримаємо:

$$V_i \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \cdot \nabla \cdot (\rho V) + \rho \langle V, \nabla V_i \rangle + \nabla_i p = 0. \quad (3.3.58)$$

Після скорочення отримаємо закон збереження імпульсу в не дивергентній формі:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \langle V, \nabla V_i \rangle + \frac{\nabla_i p}{\rho} = 0. \quad (3.3.59)$$

Векторна форма якого для ізоентропічних течій має вигляд:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \langle \vec{V}, \nabla \vec{V} \rangle + \nabla W = 0, \quad (3.3.60)$$

або

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \nabla W = 0 \quad (3.3.61)$$

Скористаємось відомою формулою векторного аналізу

$$\frac{\nabla |\vec{V}|^2}{2} = \vec{V} \times \nabla \times \vec{V} + \langle \vec{V}, \nabla \vec{V} \rangle, \quad (3.3.62)$$

де

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} &= \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}_1 \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) - \vec{i}_2 \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) + \vec{i}_3 \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.3.63)$$

Отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\nabla |\vec{V}|^2}{2} - \vec{V} \times \nabla \times \vec{V} + \nabla W = 0 \quad (3.3.64)$$

Подіємо на нього  $\nabla \times$ , і врахуємо, що для будь-якої скалярної функції  $f$  вионується  $\nabla \times \nabla f = 0$ , в результаті отримаємо систему рівнянь відносно вектору швидкості.

**Рівняння 3.3.12** (система рівнянь руху ідеальної рідини для ізоентропічного випадку)

Виконуються співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{V}) - \nabla \times \vec{V} \times \nabla \times \vec{V} = 0. \quad (3.3.65)$$

### 3.3.11 Потенціальні течії

Потенційні течії є частинним випадком ізоентропічних течій. Покажемо можливість існування потенційних течій.

Розглянемо інтеграл

$$\Gamma(t) = \oint_{c(t)} \vec{V}(t) d\vec{l} \quad (3.3.66)$$

який називається циркуляцією вектора швидкості вздовж контуру (під знаком інтегралу записано скалярний добуток векторів швидкості  $\vec{V}(t)$  та вектору нескінченно малого зміщення вздовж контуру  $d\vec{l}$ );  $c(t)$  — контур, утворений частинами ідеальної рідини, що рухаються вздовж своїх траєкторій.

**Теорема 3.3.13** (Томсона, про збереження циркуляції векторного поля швидкості)

Для ізоентропічних течій ( $S = \text{const}$ )

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad (3.3.67)$$

тобто циркуляція векторного поля вздовж рухомого рідкого контуру є величина постійна.

*Доведення.*

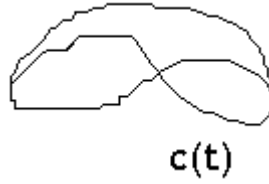
$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{c(t)} \left( \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} + \vec{V} \cdot d\frac{d\vec{l}}{dt} \right) = \quad (3.3.68)$$

$$= \oint_{c(t)} \left( -\nabla W \cdot d\vec{l} + \vec{V} \cdot d\vec{V} \right) = \quad (3.3.69)$$

$$= \oint_{c(t)} d \left( -W + \frac{|\vec{V}|^2}{2} \right) = 0. \quad (3.3.70)$$

□

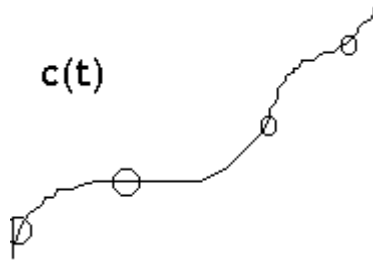
Використаємо теорему Стокса для будь-якої поверхні  $\sigma$ , що спирається на контур  $c(t)$ :



Тобто

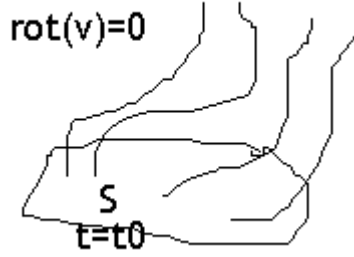
$$\Gamma(t) = \oint_{c(t)} \vec{V}(t) \cdot d\vec{l} = \iint_{\sigma(t)} (\nabla \times \vec{V})_n d\sigma = \text{const}. \quad (3.3.71)$$

Розглянемо деяку траєкторію руху однієї частинки ідеальної рідини і нескінченно малий контур, який нанизаний на траєкторію руху:



Припускаючи, що при  $t = 0$  маємо  $\nabla \times \vec{V} = 0$ , а таким чином  $(\nabla \times \vec{V})_n = 0$ , то згідно теореми Томсона  $(\nabla \times \vec{V}) = 0$ , для  $t > 0$ .

Якщо розглянути область  $\Omega$  для якої циркуляція відсутня при  $t = 0$  тобто  $\nabla \times V = 0$  то вздовж будь-якої траєкторії яка починається в області  $\Omega$  в будь-який момент часу поле залишається безвихровим, тобто  $\nabla \times \vec{V} = 0$ :



Це свідчить про існування безвихрових або потенційних течій.

**Визначення 3.3.14** (потенціальної течії). Отже *потенціальною* називається течія, для якої

$$\forall t \geq t_0, \quad \forall x \in \Omega : \quad \nabla \times \vec{V}(x, t) = 0. \quad (3.3.72)$$

Звідси випливає, що існує потенціал векторного поля швидкості  $\varphi$ , градієнт якого рівний  $\vec{V}$ , тобто  $\nabla \varphi = \vec{V}$ . Використовуючи формулу (3.3.64), де  $W$  — тепловміст, закон збереження імпульсу буде мати вигляд:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nabla \left( \frac{|V|^2}{2} + W \right) = 0 \quad (3.3.73)$$

Закон збереження маси запишемо в не дивергентному вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot V) + \langle V, \nabla \rho \rangle = 0. \quad (3.3.74)$$

Проінтегруємо друге рівняння, та врахуємо, що  $V = \nabla \varphi$ , будемо мати:

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + W \right) = 0 \quad (3.3.75)$$

Звідси

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + W = \Psi(t), \quad (3.3.76)$$

де  $\Psi$  — довільна функція змінної часу. Враховуючи, що потенціал вектору швидкості визначається з точністю до адитивної функції часу, покладемо  $\Psi(t) \equiv 0$ . Отже, отримали

**Рівняння 3.3.15 (інтеграл Коші-Лагранжа)**

Виконується співвідношення:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + W = 0. \quad (3.3.77)$$

**Визначення 3.3.16** (інтеграла Бернуллі). Для стаціонарних течій, що не залежать від часу, цей інтеграл називається *інтегралом Бернуллі*:

$$\frac{|V|^2}{2} + W = \text{const}. \quad (3.3.78)$$

З  $dW = dp/\rho$  випливає, що

$$dW = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} d\rho = \frac{1}{\rho} c^2 d\rho, \quad (3.3.79)$$

але  $c^2 = dp/d\rho$ , звідки

$$c^2 \cdot \frac{d\rho}{dp} = \rho \cdot \frac{dW}{dt}. \quad (3.3.80)$$

Враховуючи недиเวอร์гентну форму рівняння нерозривності отримаємо:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \Delta\varphi = 0. \quad (3.3.81)$$

Система рівнянь з інтегралу Коші-Лагранжа та останнього співвідношення є системою двох нелінійних рівнянь з двома змінними і описує потенціальний рух ідеальної рідини.

З інтегралу Коші-Лагранжа та останнього співвідношення маємо

$$\frac{1}{c^2} \frac{dW}{dt} + \Delta\varphi = 0. \quad (3.3.82)$$

Диференціюючи інтеграл Коші-Лагранжа по  $t$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} \right) + \frac{dW}{dt} = 0. \quad (3.3.83)$$

з урахуванням попереднього рівняння отримаємо:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} \right) - c^2 \Delta\varphi = 0. \quad (3.3.84)$$



Це рівняння використовується для дослідження потенціальних течій. Розкриємо це рівняння у тривимірному випадку:

$$\varphi_{tt} + 2 \sum_{i=1}^3 V_i \varphi_{x_i t} + \sum_{i,k=1}^3 V_{x_i} V_{x_k} \varphi_{x_i x_k} = c^2 \sum_{i=1}^3 \varphi_{x_i x_i}. \quad (3.3.85)$$

Для стаціонарних течій у три- та дво-вимірному випадках маємо:

$$(c^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} + (c^2 - \varphi_z^2) \varphi_{zz} - 2(\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + \varphi_z \varphi_y \varphi_{zy} + \varphi_x \varphi_z \varphi_{xz}) = 0, \quad (3.3.86)$$

і

$$(c^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} + 2\varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} = 0. \quad (3.3.87)$$

відповідно.

Швидкості звуку у першому з цих рівнянь можна обчислити виходячи з формули Бернуллі

$$W + \frac{|V|^2}{2} = W_0 + \frac{|V_0|^2}{2}. \quad (3.3.88)$$

Зокрема, для широкого спектру ідеальних газів, з рівнянням стану  $\varepsilon = p/\rho(\gamma - 1)$  можна отримати

$$c^2 = c_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot |V_0|^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \cdot |V|^2. \quad (3.3.89)$$

### 3.3.12 Модель акустичного руху рідини

Акустичними рухами ідеальної рідини будемо називати такі її рухи для яких фізичні характеристики рідини мало відрізняються від деяких постійних значень.

Розглянемо систему

**Рівняння 3.3.17** (система рівнянь ізоентропічного руху ідеальної рідини)

Виконуються співвідношення

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot V) + \langle V, \nabla \rho \rangle = 0, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} + \langle V, \nabla V_i \rangle + \frac{\nabla_i p}{\rho} = 0, \\ S(p, \rho) = S(p_0, \rho_0). \end{cases} \quad (3.3.90)$$

Відносно параметрів руху будемо припускати, що

$$\begin{cases} p = p_0 + \tilde{p}, & \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, & V = V_0 + \tilde{V}, \\ p_0 = \text{const}, & \rho_0 = \text{const}, & V_0 = \text{const} = 0, \\ \tilde{\rho} \ll \rho_0, & \tilde{p} \ll p_0, & \tilde{V} \ll 1. \end{cases} \quad (3.3.91)$$

Проведемо лінеаризацію системи рівнянь зберігаючи лише величини першого порядку малості.

Для першого рівняння системи отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \tilde{\rho}) + (\rho_0 + \tilde{\rho})(\nabla \cdot \tilde{V}) + \langle \tilde{V}, \nabla(\rho_0 + \tilde{\rho}) \rangle = 0. \quad (3.3.92)$$

Зберігаючи члени першого порядку малості отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0(\nabla \cdot \tilde{V}) = 0. \quad (3.3.93)$$

Для другого рівняння системи маємо

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \left( \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \langle \tilde{V}, \nabla \tilde{V}_i \rangle \right) + \nabla_i(p_0 + \tilde{p}) = 0. \quad (3.3.94)$$

Розкриваючи дужки та нехтуючи членами другого порядку малості отримаємо

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \nabla_i \tilde{p} = 0. \quad (3.3.95)$$

Для лінеаризації третього співвідношення системи, ліву частину співвідношення розкладемо за формулою Тейлора зберігаючи лише члени першого порядку малості

$$S(p_0 + \tilde{p}, \rho_0 + \tilde{\rho}) = S(p_0, \rho_0) + \frac{\partial S(p_0, \rho_0)}{\partial p} \cdot \tilde{p} + \frac{\partial S(p_0, \rho_0)}{\partial \rho} \cdot \tilde{\rho} = S(p_0, \rho_0). \quad (3.3.96)$$

Таким чином можна записати:

$$\tilde{p} = -\frac{S'_\rho(p_0, \rho_0)}{S'_p(p_0, \rho_0)} \cdot \tilde{\rho}, \quad (3.3.97)$$

або

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \quad (3.3.98)$$

Таким чином маємо

**Рівняння 3.3.18 (система рівнянь акустики (звукових коливань))**

Виконуються співвідношення:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \tilde{V}) = 0, \\ \rho_0 \cdot \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \nabla_i \tilde{p} = 0, \\ \tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \end{cases} \quad (3.3.99)$$

З системи рівнянь можна отримати одне рівняння для тиску, або щільності.

Для цього перше рівняння продиференціюємо по часу, а на друге векторне рівняння подіємо операцією дивергенція, в результаті будемо мати:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \rho_0 \left( \nabla \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.3.100)$$

$$\rho_0 \left( \nabla \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \nabla \tilde{p} = 0. \quad (3.3.101)$$

Віднімаючи від першого рівняння друге і використовуючи третє рівняння отримаємо

**Рівняння 3.3.19 (хвильове)**

Виконується співвідношення:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \tilde{\rho}. \quad (3.3.102)$$

Враховуючи потенціальний характер акустичних рухів, вектор швидкості  $\tilde{V}$  можна представити у вигляді градієнту потенціалу і отримати хвильове рівняння відносно потенціалу вектора швидкості.

**3.3.13 Потенційне обтікання тонких тіл**

Розглянемо тонке нерухоме тіло розташоване під малим кутом до плоско паралельного потоку газу, який набігає на це тіло. При певних умовах взаємодії, потік газу навколо тіла можна вважати потенційним, а швидкість газу в околі тіла буде мало відрізняється від вектора швидкості  $\vec{V}_0$

потoku, що набігає з нескінченості. Таким чином вектор швидкості збуреного потоку  $\vec{V}$  можна представити як суму  $\vec{V} = \vec{V}_0 + \tilde{V}$ . Де  $|\tilde{V}| \ll |\vec{V}_0|$ , тобто збурення внесені тонким тілом є малі по відношенню до набігаючого потоку.

Виберемо систему координат таким чином, щоби координатна вісь  $Ox$  співпадала з напрямом вектора швидкості потоку, що набігає, тобто  $\vec{V}_0 = (\vec{V}_0^x, 0, 0)$ .

Замість потенціалу  $\varphi$  повної швидкості  $V$  введемо потенціал  $\tilde{\varphi}$  швидкості  $\tilde{V}$ , тобто  $\tilde{V} = \nabla \tilde{\varphi}$ . Зрозуміло, що

$$\varphi = \tilde{\varphi} + xV_0^x. \quad (3.3.103)$$

Візьмемо за основу нелінійне рівняння для стаціонарної течії у тривимірному просторі і підставимо в нього останнє рівняння, проведемо лінеаризацію рівняння, зберігаючи величини лише першого порядку малості.

В результаті отримаємо співвідношення

$$(1 - M_0^2) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} = 0, \quad (3.3.104)$$

де  $(x, y, z) \in \Omega'$ , а  $M_0 = V_0^x/c_0$  — число Маха потоку що набігає.

Це рівняння має певну область застосування, зокрема рівняння становиться неприйнятним якщо число  $M_0$  близьке до одиниці (біля звукова течія). В цьому випадку коефіцієнт при першому члені є малим, що вимагає збереження членів більш високого порядку малості. На поверхні тіла задається умова непротікання, яку з використанням процесу лінеаризації можна записати у вигляді:

$$\left( V_0^x + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) n_x + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \cdot n_z = 0, \quad (3.3.105)$$

або

$$\left. \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} \right|_S = -V_0^x n_x. \quad (3.3.106)$$

В нескінченно віддаленій точці збурений потік співпадає з потоком, що набігає, тому має місце співвідношення:

$$\tilde{\varphi} \xrightarrow{x, y, z \rightarrow \infty} 0. \quad (3.3.107)$$