# Зміст



### 4.4.4 Функція Гріна задачі Діріхле для кулі

Будемо розглядати граничну задачу

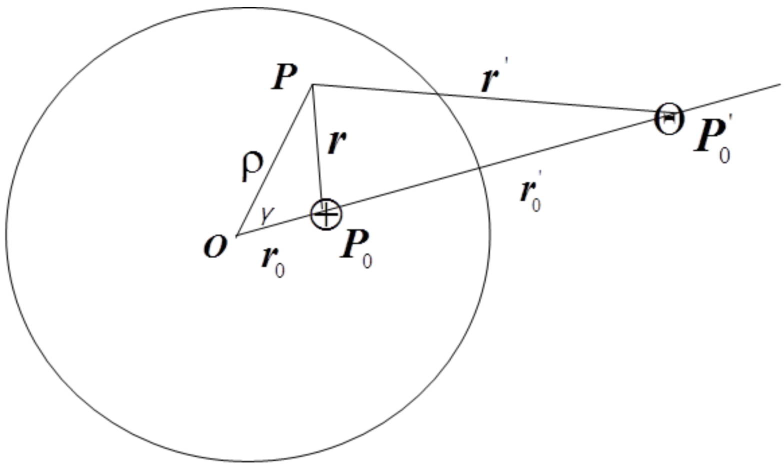
$$\begin{cases} \Delta U(P) = 0, \quad |P| < R, \\ \quad U(P)|_{|P|=R} = f(P). \end{cases} \tag{4.4.18}$$

Побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа для кулі.

Введемо позначення:

$$|OP_0| = r_0, \quad |OP_0'| = r_0', \quad r = |P - P_0|, \quad r' = |P - P_0'|. \tag{4.4.19}$$

На довільному промені, який проходить через центр кулі точку $O$ розмістимо всередині кулі у точці $P_0$ одиничний точковий додатний заряд. Розглянемо точку $P_0'$ симетричну точці відносно сфери.




Це означає, що обидві точки лежать на одному промені, а їх відстані від центру сфери задовольняють співвідношенню

$$r_0 \cdot r_0' = R^2. \tag{4.4.20}$$

В $P_0'$ точці розмістимо від'ємний заряд величини $e$, яку оберемо виходячи з властивостей функції Гріна.

Запишемо потенціал електростатичного поля від суми зарядів:

$$\Pi(P) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{e}{4\pi r}. \tag{4.4.21}$$

Обчислимо величину $e$ використовуючи теорему косинусів:

$$\begin{aligned}
\Pi(P) &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos\gamma}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2\rho\cdot\frac{R^2}{r_0}\cdot\cos\gamma}}\right)\Bigg|_{\rho=R} = \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma}} - \frac{e}{\sqrt{R^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2R\cdot\frac{R^2}{r_0}\cdot\cos\gamma}}\right) = \\
&= \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1-e\cdot\frac{r_0}{R}}{\sqrt{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

Остання рівність буде вірною, якщо $e = R/r_0$.

Таким чином функцію Гріна задачі Діріхле для кулі можна записати при знайденому значенні величини зовнішнього заряду:

$$G_1(P,P_0) = \frac{1}{4\pi}\left(1/\sqrt{\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos\gamma} - 1/\sqrt{R^2+\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2}-2\rho r_0\cos\gamma}\right). \tag{4.4.23}$$

Для знаходження формули інтегрального представлення обчислимо:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial n_P}\bigg|_{P\in S} = \frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=R} = \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\rho-r_0\cos\gamma}{(\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos\gamma)^{3/2}} + \frac{\frac{\rho r_0^2}{R^2}-r_0\cos\gamma}{\left(\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2}+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{3/2}}\right)\Bigg|_{\rho=R} = \\
&\qquad = -\frac{1}{4\pi R}\cdot\frac{R^2-r_0^2}{(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{4.4.24}$$

Для запису остаточної формули треба ввести сферичну систему координат. Запишемо через сферичні кути:

$$\cos\gamma = \frac{\measuredangle(OP,OP_0)}{\rho r_0} = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0). \tag{4.4.25}$$

Тут $\rho, \varphi, \theta$ — сферичні координати точки $P$, а $r_0, \varphi_0, \theta_0$ — сферичні координати точки $P_0$.

**Формула 4.4.1** (формула Пуассона для кулі)

Використовуючи формулу (3.16) запишемо розв'язок задачі Діріхле:

$$U(r_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{R}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{(R^2 - r_0^2) \sin\theta f(\varphi, \theta)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\gamma)^{3/2}}. \tag{4.4.26}$$

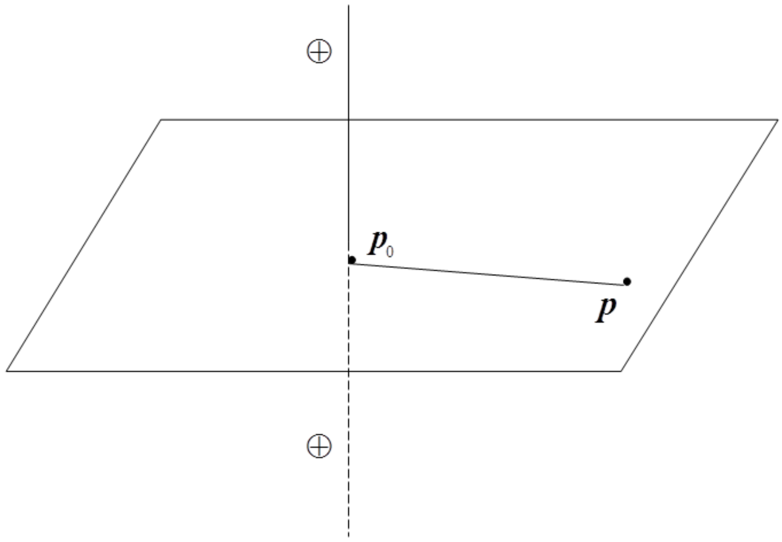
Ця формула дає розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа і називається *формулою Пуассона для кулі.*

### 4.4.5 Функція Гріна для областей на площині

Функція Гріна для областей у двовимірному випадку в принципі можна будувати в той же спосіб, що і в тривимірному випадку. При цьому треба враховувати вигляд фундаментального розв'язку для $\mathbb{R}^2$, що приводить до наступного вигляду функції Гріна:

$$G_i(p, p_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{1}{|p - p_0|}\right) + g_i(p, p_0), \quad p, p_0 \in D \subset \mathbb{R}^2. \tag{4.4.27}$$

Фізичний зміст фундаментального розв'язку в двовимірному випадку представляє собою потенціал електростатичного поля в точці $p$ рівномірно зарядженої одиничним додатнім зарядом нескінченої нитки, яка проходить ортогонально до площини через деяку точку $p_0$. Точки $p, p_0$ належать площині:




Аналогічно кулі, можна отримати функцію Гріна задачі Діріхле для кола, яка має вигляд:

$$G_1(p,p_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2+\rho^2-2\rho r_0\cos\gamma}}\right)-\ln\left(\frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{r_0^2}+\rho^2-2\rho\cdot\frac{R^2}{r_0}\cdot\cos\gamma}}\right)\right) \tag{4.4.28}$$

Або через комплексні змінні $z=\rho e^{i\varphi}$, $z_0=r_0e^{i\varphi_0}$, $z_0^\star=\frac{R^2}{\overline{z_0}}$:

$$G_1(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{r_0\cdot|z-z_0^\star|}{R\cdot|z-z_0|}\right). \tag{4.4.29}$$

Таким чином розв'язок задачі Діріхле для кола може бути записаним у вигляді:

$$u(r_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{4.4.30}$$

Або через точки комплексної площини,

$$\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}=\mathrm{Re}\left(\frac{z+z_0}{z-z_0}\right),\quad \mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}z}{iz}. \tag{4.4.31}$$

Тоді попередня формула набуває вигляду

$$u(z_0)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R}f(z)\cdot\frac{z+z_0}{z-z_0}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{4.4.32}$$

Нехай необхідно побудувати функцію Гріна першої граничної задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \\ u(x, y)|_C = f(x, y) \end{cases} \tag{4.4.33}$$

для довільної однозв'язної області $D$ з жордановою границею $C$.

Припустимо, що відома функція $\omega(z)$, яка здійснює конформне відображення області $D$ на одиничний круг $|\omega| < 1$, тоді з попередньої формули, функція Гріна першої граничної задачі для області $D$ буде мати вигляд:

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \overline{\omega(z_0)}\omega(z)}{\omega(z) - \omega(z_0)} \right|. \tag{4.4.34}$$

А розв'язок задачі Діріхле можна записати у вигляді:

$$u(\zeta_0) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(\zeta) \cdot \frac{\omega(\zeta) + \omega(\zeta_0)}{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \cdot \mathrm{d}\zeta. \tag{4.4.35}$$

### 4.4.6 Функція Гріна першої та другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої

## 4.5 Гармонічні функції та їх властивості

**Визначення 4.5.1** (гармонічної у відкритій області функції)**.** Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій відкритій області* $\Omega$, якщо $u \in C^{(2)}(\Omega)$ і $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$, тобто функція є двічі неперервно диференційованим розв'язком рівняння Лапласа.

**Визначення 4.5.2** (гармонічної в точці функції)**.** Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій точці*, якщо ця функція гармонічна в деякому околі цієї точки.

**Визначення 4.5.3** (гармонічної в замкненій області функції)**.** Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій замкненій області*, якщо вона гармонічна в деякій більш широкій відкритій області.

З гармонічними функціями у тривимірних і двовимірних областях ми вже зустрічалися:

**Приклад 4.5.4** (гармонічної функції у $\mathbb{R}^2$)

$$\Delta \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-\xi|} = 0, \quad x \neq \xi, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{4.5.1}$$

**Приклад 4.5.5** (гармонічної функції у $\mathbb{R}^3$)

$$\Delta \frac{1}{4\pi|x-\xi|} = 0, \quad x \neq \xi, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{4.5.2}$$

### 4.5.1 Інтегральне представлення функцій класу $C^2(\Omega)$

Для отримання інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$ будемо використовувати другу формулу Гріна для оператора Лапласа:

$$\iiint\limits_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x))\,\mathrm{d}x = \iint\limits_{S} \left( v(x) \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial n} \right) \mathrm{d}S. \tag{4.5.3}$$

В якості функції $u(\xi)$ оберемо довільну функцію $C^2(\Omega)$, а у якості $v$, фундаментальний розв'язок оператора Лапласа для тривимірного евклідового простору $\frac{1}{4\pi|x-\xi|}$.

В результаті підстановки цих величин в останню формулу отримаємо

$$\begin{gathered} \iiint\limits_{\Omega} \left( \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \Delta u(\xi) - u(\xi)\delta(x-\xi) \right) \mathrm{d}\xi = \\ = \iint\limits_{S} \left( \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) \mathrm{d}S_{\xi}. \end{gathered} \tag{4.5.4}$$

Після обчислення другого доданку в лівій частині можемо записати формулу інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$.

$$\begin{gathered} u(x) = -\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \Delta u(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ + \iint\limits_{S} \left( \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial n}{\partial n} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) \mathrm{d}S_{\xi}. \end{gathered} \tag{4.5.5}$$

У випадку коли функція $u(x)$ є гармонічною в області $\Omega$ то остання формула прийме вигляд:

$$u(x) = \iint\limits_S \left( \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.6}$$

З формул вище можна отримати деякі властивості гармонічних функцій:

**Властивість 4.5.6**

Гармонічна в області $\Omega$ функція $u(x)$ має в кожній внутрішній точці області $\Omega$ неперервні похідні будь-якого порядку.

*Доведення.* Дійсно, оскільки $x \in \Omega$, $\xi \in S$, $x \neq \xi$, то для обчислення будь-якої похідної необхідно диференціювати підінтегральну функцію, яка має похідні будь-якого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} = \iint\limits_S \Bigg( & \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - \\ & - u(\xi) \cdot \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} \cdot \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \Bigg) \mathrm{d}S_\xi. \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

□

**Властивість 4.5.7**

Якщо $u(x)$ — гармонічна функція в скінченій області $\Omega$ з границею $S$, то має місце співвідношення

$$\oint\!\!\!\oint\limits_S \frac{\partial u(x)}{\partial n} \mathrm{d}S = 0. \tag{4.5.8}$$

*Доведення.* Дійсно, у другій формулі Гріна для оператора Лапласа оберемо $v(x) \equiv 1$, тоді інтеграл в лівій частині і другий інтеграл правої частини перетворюється в нуль. В результаті чого отримаємо жадану рівність. □

**Теорема 4.5.8** (про середнє значення гармонічної функції)
Якщо $u(x)$ — гармонічна функція в кулі і неперервна в замиканні цієї кулі, то значення гармонічної функції в центрі кулі дорівнює середньому арифметичному її значень на сфері, що обмежує кулю.

*Доведення.* Використаємо формулу Гріна для оператора Лапласа:

$$u(x) = \iint\limits_S \left( \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.9}$$

в якій в якості поверхні $S$ візьмемо сферу радіусу $R$ з центром у точці $x_0$, і обчислимо значення функції $u$ в точці $x_0$:

$$u(x_0) = \iint\limits_{S(x_0,R)} \left( \frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} \right) \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.10}$$

Оскільки $\xi \in S(x_0, R)$, то $\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} = \frac{1}{4\pi R}$, а

$$\left. \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} \right|_{S(x_0,R)} = \frac{1}{4\pi R^2}. \tag{4.5.11}$$

Таким чином

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{S(x_0,R)} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} \, \mathrm{d}S_\xi + \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S(x_0,R)} u(\xi) \, \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.12}$$

Оскільки перший інтеграл дорівнює нулю, то остаточно маємо

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S(x_0,R)} u(\xi) \, \mathrm{d}S_\xi. \tag{4.5.13}$$

□