Лекція 8

§ 2. Математичні моделі теорії пружності

[5, стор222 - 245]

Відомо, що в природі існують пружні тіла, які можуть змінювати свою форму під дією прикладеної сили, а після припинення дії зовнішньої сили приймати початкову форму. Зовнішня сила викликає в пружних тілах деформації (зміну положення одних точок тіла відносно інших) та напруження (внутрішні сили, які прагнуть повернути тіло в положення рівноваги).

Математична модель теорії пружності – це система диференціальних рівнянь, які описують кількісний зв'язок між зміною форми тіла (деформаціями) і внутрішніми зусиллями (напруженнями).

Введемо позначення:

x, y, z – координати точки у просторі;

$U(x, y, z, t)$, $V(x, y, z, t)$, $W(x, y, z, t)$ – координата вектора зміщень в напрямку вісей Ох, Оу, Oz відповідно (*вектор зміщень показує зміщення точки тіла з координатами* x, y, z *в* напрямк*у однієї з координатних вісей в момент часу t від положення рівноваги*);

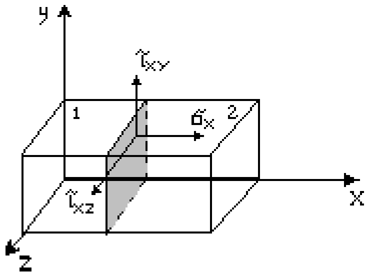
$F_x(x, y, z, t)$, $F_y(x, y, z, t)$, $F_z(x, y, z, t)$ – компоненти вектора поверхневих сил в напрямку вісей 0х, 0у, 0z відповідно, тобто тих сил, що діють на поверхню тіла;

$X(x, y, z, t), Y(x, y, z, t), Z(x, y, z, t)$ – вектори об'ємних сил;

dG – елемент об'єму; dS – елемент поверхні.

Розглянемо просту фізичну модель взаємодії між собою двох частин пружного тіла. Нехай прямокутний паралелепіпед з нескінченно малим поперечним перерізом $dy \times dz$ витягнутий вздовж вісі x та умовно розділений на дві частини площиною ортогональною вісі x.

Охарактеризуємо силу з якою паралелепіпед 2 діє на паралелепіпед 1 через переріз $dy \times dz$ в площині yOz (на рис. площина взаємодії виділена сірим кольором). Нехай $\mathbf{t}^{(\mathbf{x})} = \left(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}\right)$ вектор сили віднесений на одиницю площі перерізу з якою паралелепіпед 2 діє на паралелепіпед 1, при цьому σ_x – компонента, що може стискати, або розтягувати паралелепіпед 1, τ_{xy}, τ_{xz}; - компоненти, що зрізають паралелепіпед в напрямках вісей y та z відповідно.



Аналогічно, для паралелепіпедів витягнутих вздовж вісей Oy та Oz можна розглянути сили, яки діють в двох інших площинах xOz та xOy на одиницю площі цих перерізів та охарактеризувати їх векторами: $\mathbf{t}^{(\mathbf{y})} = \left(\tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}\right)$ $\mathbf{t}^{(\mathbf{z})} = \left(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z\right)$.

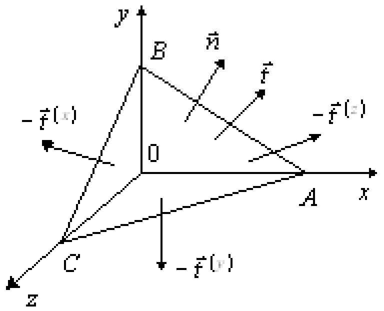
Для будь – якого паралелепіпеда з довжиною ребер dx, dy, dz а тим самим точки простору напружений стан тіла можна охарактеризувати матрицею

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad (2.1)\ .$$

Зауваження. При розгляді моделі взаємодії паралелепіпеда 2 та паралелепіпеда 1 через загальний переріз має місце принцип рівнодії та протидії, тобто сила, з якою паралелепіпед 2 діє на паралелепіпед 1 рівна за величиною та протилежна за напрямком силі з якою паралелепіпед 1 діє на паралелепіпед 2. Сили, що діють на тіло обираються зі знаком плюс, якщо вони діють на переріз, який обмежує тіло з боку зростання значення координатної вісей і зі знаком мінус, якщо вони діють на поверхню, що обмежує тіло з боку спадання значень координатних вісей.

Закони рівноваги елемента поверхні

Розглянемо елементарну модель пружної взаємодії. Нехай всередині пружного тіла ми виділили нескінченно малий тетраедр $OABC$, $\vec{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до грані ABC, а S площа цієї грані.



Нехай $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ – вектор поверхневої сили, що діє на одиницю площі грані ABC.

Вектор нормалі $\mathbf{n} = \cos(\overrightarrow{n,x}), \cos(\overrightarrow{n,y}), \cos(\overrightarrow{n,z})$, а

$S\cos(\overrightarrow{n,x}), S\cos(\overrightarrow{n,y}), S\cos(\overrightarrow{n,z})$ – площі граней тетраедра, ортогональних вісям 0x, 0y, 0z.

Якщо тетраедр знаходиться в стані спокою, або рівномірного прямолінійного руху, то рівнодіюча сил, що діють на всі чотири грані дорівнює нулю, тобто: $\vec{f}\,S - \vec{t}^{\,x} S\cos(n,x) - \vec{t}^{\,y} S\cos(n,y) - \vec{t}^{\,z} S\cos(n,z) = 0$. Після скорочення на S отримаємо векторну форму закону рівноваги елементу поверхні.

$$\vec{f} = \vec{t}^{\,x}\cos(n,x) + \vec{t}^{\,y}\cos(n,y) + \vec{t}^{\,z}\cos(n,z) \qquad (2.2).$$

Запишемо закон рівноваги елемента поверхні в скалярному вигляді:

$$\begin{aligned}
\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx}\cos(n,y) + \tau_{zx}\cos(n,z) &= f_x \\
\tau_{xy} \cos(n,x) + \sigma_y\cos(n,y) + \tau_{zy}\cos(n,z) &= f_y \\
\tau_{xz} \cos(n,x) + \tau_{zy}\cos(n,y) + \sigma_z\cos(n,z) &= f_z
\end{aligned} \qquad (2.3).$$

У випадку, коли елементарний трикутник АВС, є частиною реальної зовнішньої поверхні тіла, то закон рівноваги елемента поверхні приймає вигляд:

$$\begin{aligned}
\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx}\cos(n,y) + \tau_{zx}\cos(n,z) &= F_x \\
\tau_{xy} \cos(n,x) + \sigma_y\cos(n,y) + \tau_{zy}\cos(n,z) &= F_y \\
\tau_{xz} \cos(n,x) + \tau_{zy}\cos(n,y) + \sigma_z\cos(n,z) &= F_z
\end{aligned} \qquad (2.3'),$$

де (F_x, F_y, F_z) – вектор поверхневих сил.

Закон рівноваги елемента об’єму

Розглянемо будь-який об’єм G та його елементарний об’єм dG.

Об’ємні сили, що діють на тіло об’єму G: можна обчислити у вигляді. $\iiint\limits_G \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dG$ (2.4).

Через будь-яку елементарну поверхню тіла діє поверхнева сила $\vec{f}dS$, а результуюча поверхнева сила, яка діє на тіло через усю поверхню S, що обмежує тіло має вигляд $\iint\limits_S \vec{f}dS$, або в скалярному вигляді:

$$\iint\limits_S \left[t^{(x)} \cos(n,x) + t^{(y)} \cos(n,y) + t^{(z)} \cos(n,z) \right] dS \qquad (2.5).$$

Для того щоб тіло знаходилося в стані спокою або рухалось рівномірно і прямолінійно, рівнодіюча об’ємної та поверхневої сил повинна дорівнювати нулю

$$\iint\limits_S \left[t^{(x)} \cos(n,x) + t^{(y)} \cos(n,y) + t^{(z)} \cos(n,z) \right] dS + \iiint\limits_G \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dG = 0 \qquad (2.6).$$

Рівняння (2.6) є векторним записом закону рівноваги елементу об’єму.

Скалярна форма запису закону має вигляд:

$$\begin{cases} \iint\limits_S \left(\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{yx} \cos(n,y) + \tau_{zx} \cos(n,z)\right) dS + \iiint\limits_G X dG = 0 \\ \iint\limits_S \left(\tau_{xy} \cos(n,x) + \sigma_y co(n,y) + \tau_{zy} \cos(n,z)\right) dS + \iiint\limits_G Y dG = 0 \\ \iint\limits_S \left(\tau_{xz} \cos(n,x) + \tau_{yz} \cos(n,y) + \sigma_z \cos(n,z)\right) dS + \iiint\limits_G Z dG = 0 \end{cases} \qquad (2.6^{/}).$$

Додатковою умовою рівноважного положення тіла окрім закону рівноваги елементу об’єму є виконання закону збереження моментів сил з якого випливає симетричність матриці (2.1):

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Враховуючи факт симетрії, ($2.6^{/}$) можна записати у вигляді $\begin{cases} \iint\limits_S \left(t^{(x)}, n\right) dS + \iiint\limits_G X dG = 0 \\ \iint\limits_S \left(t^{(y)}, n\right) dS + \iiint\limits_G Y dG = 0 \\ \iint\limits_S \left(t^{(z)}, n\right) dS + \iiint\limits_G Z dG = 0 \end{cases}$ (2.6//).

$\vec{\mathbf{n}} = (\cos(n,x), \cos(n,y), \cos(n,z))$ - вектор зовнішньої нормалі до поверхні.

Враховуючи формулу Остроградського – Гауса, кожен поверхневий інтеграл перетворимо в об'ємний, в результаті отримаємо:

$$\begin{cases} \iiint\limits_G \left(\operatorname{div} t^{(x)} + X\right) dG = 0 \\ \iiint\limits_G \left(\operatorname{div} t^{(y)} + Y\right) dG = 0 \\ \iiint\limits_G \left(\operatorname{div} t^{(z)} + Z\right) dG = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (2.7).$$

Формула (2.7) – диференціальна форма запису закону рівноваги елементу об'єму.

В подальшому симетричну матрицю (2.1) будемо називати тензором напружень.

Тензор напружень, головні вісі тензора напружень

Позначимо через $\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}$ орти прямокутної система координат з координатними осями x, y, z.

Введемо нову систему координат з ортами $\mathrm{e}_{\xi,} \mathrm{e}_{\eta}, \mathrm{e}_{\zeta}$. та осями ξ, η, ζ.

З'ясуємо, яким чином пов'язані вектори $\vec{t}^{(x)}, \vec{t}^{(y)}, \vec{t}^{(z)}$, які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у системі координат x, y, z, з векторами $\vec{t}^{(\xi)}, \vec{t}^{(\eta)}, \vec{t}^{(\zeta)}$, які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у новій системі координат ξ, η, ζ.

Згідно до загальних формул переходу від одного ортогонального базису до іншого, можна записати:

$$\begin{cases} \vec{t}^{\,(\xi)} = \vec{t}^{\,(x)}\cos(\xi,x) + \vec{t}^{\,(y)}\cos(\xi,y) + \vec{t}^{\,(z)}\cos(\xi,z) \\ \vec{t}^{\,(\eta)} = \vec{t}^{\,(x)}\cos(\eta,x) + \vec{t}^{\,(y)}\cos(\eta,y) + \vec{t}^{\,(z)}\cos(\eta,z) \\ \vec{t}^{\,(\zeta)} = \vec{t}^{\,(x)}\cos(\zeta,x) + \vec{t}^{\,(y)}\cos(\zeta,y) + \vec{t}^{\,(z)}\cos(\zeta,z) \end{cases} \qquad (2.8).$$

Координати ортів нової системи координат мають значення:

$$e_\xi = (\cos(\xi,x), \cos(\xi,y), \cos(\xi,z))$$

$$e_\eta = (\cos(\eta,x), \cos(\eta,y), \cos(\eta,z))$$

$$e_\zeta = (\cos(\zeta,x), \cos(\zeta,y), \cos(\zeta,z))$$

Для знаходження будь – якої компоненти тензора напружень $\tau_{\alpha\beta}$, необхідно обчислити скалярний добуток $\tau_{\alpha\beta} = \left(t^{(\alpha)}, e_\beta\right)$. Так, наприклад,

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= \left(\sigma_x \cos(\eta,x) + \tau_{xy}\cos(\eta,y) + \tau_{xz}\cos(\eta,z)\right)\cos(\xi,x) + \\ &+ \left(\tau_{yx}\cos(\eta,x) + \sigma_y\cos(\eta,y) + \tau_{yz}\cos(\eta,z)\right)\cos(\xi,y) + \\ &+ \left(\tau_{zx}\cos(\eta,x) + \tau_{zy}\cos(\eta,y) + \sigma_z\cos(\eta,z)\right)\cos(\xi,z) = \sum_{a,b\in\{x,y,z\}} \tau_{ab}\cos(\xi,a)\cos(\eta,b). \end{aligned}$$

Отже, для довільної компоненти тензора напружень має місце формула переходу від однієї до іншої системи координат

$$\tau_{\alpha\beta} = \sum_{a,b\in\{x,y,z\}} \tau_{ab}\cos(\alpha,a)\cos(\beta,b) \qquad (2.9).$$

У формулі (2.9) використані позначення $\tau_{\alpha\alpha} = \sigma_\alpha$, $\tau_{aa} = \sigma_a$.

Таким чином, тензор напружень – це симетрична матриця, $T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$, компоненти якої перетворюються за формулою (2.9) при переході до нової прямокутної системи координат.

Поставимо задачу вибору нової прямокутної системи координат, для якої тензор напружень має діагональну форму. Нехай e_{ν_i}, $i = 1,2,3$ - орти нової прямокутної системи координат. Для того, щоб тензор T мав діагональну форму запису, кожен вектор $t^{(\nu_i)}$, $i=1,2,3$ в новій системі координат повинен бути колінеарним відповідному орту e_{ν_i}, $i=1,2,3$, тобто $t^{(\nu_i)}=\sigma_i\nu_i$.

Скористаємось формулою (2.8) та запишемо співвідношення для пошуку ортів $\overrightarrow{t^{(\nu)}}=\sigma\vec{e}_\nu=\sigma\left[\cos(\nu,x),\cos(\nu,y),\cos(\nu,z)\right]$;

Запишемо останнє співвідношення в координатному вигляді:

$$\begin{cases}\sigma_x\cos(\nu,x)+\tau_{yx}\cos(\nu,y)+\tau_{zx}\cos(\nu,z)=\sigma\cos(\nu,x)\\ \tau_{xy}\cos(\nu,x)+\sigma_y\cos(\nu,y)+\tau_{zy}\cos(\nu,z)=\sigma\cos(\nu,y)\\ \tau_{xz}\cos(\nu,x)+\tau_{yz}\cos(\nu,y)+\sigma_z\cos(\nu,z)=\sigma\cos(\nu,z)\end{cases} \qquad (2.10).$$

Для ортонормованого базису $\cos^2(\nu,x)+\cos^2(\nu,y)+\cos^2(\nu,z)=1$.

В матрично – векторній формі (2.10) має вигляд

$$T\vec{e}_\nu=\sigma\vec{e}_\nu. \qquad (2.10').$$

Ця задача на власні значення з симетричною матрицею має три дійсних власних числа, позначимо їх $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, тобто $\begin{vmatrix}(\sigma_x-\sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & (\sigma_y-\sigma) & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z-\sigma)\end{vmatrix}=0$, і три ортонормовані власні вектори $e_{\nu_i}=(\cos(\nu_i,x),\cos(\nu_i,y),\cos(\nu_i,z))$, $i=1,2,3$.

Координатні вісі, для яких тензор напружень має діагональний вигляд, називаються головними вісями тензора напружень.

Відповідні діагональні компоненти тензора напружень σ_i, $i=1,2,3$ називаються головними компонентами тензора напружень.

Використовуючи формулу (2.9), запишемо зв'язок між компонентами тензора напружень в декартових координатах (x,y,z) і головними компонентами тензора напружень:

$$\tau_{ab}=\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\cos(\nu_i,a)\cos(\nu_i,b) \qquad (2.11),$$

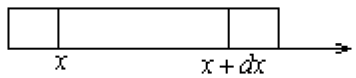
$$\sigma_a=\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\cos^2(\nu_i,a) \qquad a,b\in\{x,y,z\} \qquad (2.11').$$

Тензор деформацій і закони його перетворення

Раніше були введені характеристики: $\left.\begin{matrix} U(x,y,z,t) \\ V(x,y,z,t) \\ W(x,y,z,t) \end{matrix}\right\}$ --зміщення точки з координатами (x, y, z) від положення рівноваги в напрямку відповідної вісі.

Розглянемо можливі види деформації.

1. Нормальні деформації - (зміна довжини в напрямку координатної вісі) характеризуються відносною зміною довжини відрізків.



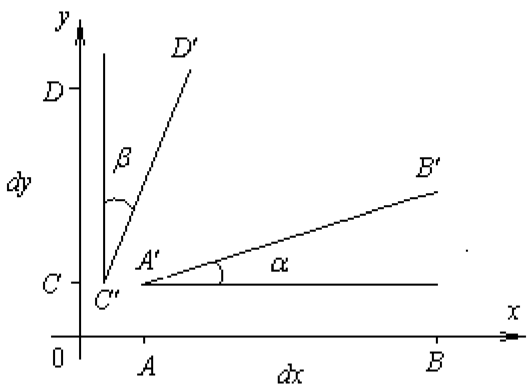
Приклавши силу в напрямку вісі Ox, точка x змістилася і зайняла положення $x+U(x,\cdot,\cdot)$; точка $x+dx$ теж змістилася і зайняла положення $(x+dx)+U(x+dx,\cdot,\cdot)$.

Порахуємо відносне подовження відрізка dx після прикладення до нього напруження:

$$\frac{(x+dx)+U(x+dx,\cdot,\cdot)-x-U(x,\cdot,\cdot)-dx}{dx}=\frac{U(x+dx,\cdot,\cdot)-U(x,\cdot,\cdot)}{dx}\xrightarrow[dx\to 0]{}\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Аналогічно, можна ввести характеристику відносного подовження в напрямку двох інших вісей.

Отже, нормальні деформації характеризуються частинними похідними $\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial W}{\partial z}$.



2. Зрізуючи (дотичні) деформації будемо характеризувати абсолютною зміною кутів між відрізками в кожній з трьох координатних площин, які до початку дії напружень були ортогональними.

Розглянемо наступну фізичну модель. Нехай відрізки AB та CD довжини dx та dy відповідно після дії прикладених сил зайняли положення $A'B'$ та $C'D'$

відповідно. Точка A змістилася на відстань $V(x,...)$, а точка B змістилася на відстань $V(x+dx,...)$.

Тоді $\frac{V(x+dx,\cdot,\cdot)-V(x,\cdot,\cdot)}{dx}=tg\,\alpha \xrightarrow[dx\to 0]{} \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \alpha \approx \frac{\partial V}{\partial x}$.

Аналогічно $tg\beta=\frac{U(\cdot,y+dy,\cdot)-U(\cdot,y,\cdot)}{dy} \xrightarrow[dy\to 0]{} \frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow \beta \approx \frac{\partial U}{\partial y}$.

Сумарна зміна кута $\alpha+\beta=\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}$. Позначимо $\gamma_{xy}=\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=\gamma_{yx}$.

Провівши аналогічні міркування щодо інших координатних площин отримаємо:

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}=\gamma_{zx},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}=\gamma_{zy} \qquad (2.12).$$

Позначимо: $\varepsilon_x=\frac{\partial U}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial V}{\partial y},\varepsilon_z=\frac{\partial W}{\partial z},\gamma_{aa}=2\varepsilon_a,$ (2.13).

В результаті повну деформацію у будь – якій точці простору можна охарактеризувати симетричною матрицею: $\begin{pmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{pmatrix}$, яка називається симетричним тензором деформацій.

Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат

Вивчимо перетворення симетричного тензору деформацій при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої. Нехай ξ,η,ζ вісі нової системи координат (замість x,y,z), а функції U',V',W' зміщення в напряму нових вісей.

Враховуючи формули переходу від одного ортогонального базису до іншого можемо записати:

$$U'=U\cos(\xi,x)+V\cos(\xi,y)+W\cos(\xi,z)$$
$$V'=U\cos(\eta,x)+V\cos(\eta,y)+W\cos(\eta,z) \qquad (2.12),$$
$$W'=U\cos(\zeta,x)+V\cos(\zeta,y)+W\cos(\zeta,z)$$

$$x=\xi\cos(\xi,x)+\eta\cos(\eta,x)+\zeta\cos(\zeta,x)$$

$$\xi=x\cos(\xi,x)+y\cos(\xi,y)+z\cos(\xi,z)$$

$$y=\xi\cos(\xi,y)+\eta\cos(\eta,y)+\zeta\cos(\zeta,y)$$

$$\eta=x\cos(\eta,x)+y\cos(\eta,y)+z\cos(\eta,z) \qquad (2.13).$$

$$z=\xi\cos(\xi,z)+\eta\cos(\eta,z)+\zeta\cos(\zeta,z)$$

$$\zeta=x\cos(\zeta,x)+y\cos(\zeta,y)+z\cos(\zeta,z)$$

У формулах (2.12), (2.13) $(\cos(\alpha,x),\cos(\alpha,y),\cos(\alpha,z))=\vec{e}_\alpha$, $\alpha\in(\xi,\eta,\varsigma)$ координати ортів нового базису.

Знайдемо вирази для компонентів тензору у новій системі координатах: $\varepsilon_\xi,\varepsilon_\eta,\varepsilon_\zeta,\gamma_{\alpha\beta}$ при $\alpha,\beta\in\{\xi,\eta,\zeta\}$.

Зокрема для ε_ξ отримаємо:

$$\varepsilon_\xi=\frac{\partial U'}{\partial\xi}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\cos(\xi,x)+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\cos(\xi,y)+$$
$$+\left(\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\cos(\xi,z)=$$
$$\cos(\xi,x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos(\xi,x)+\frac{\partial U}{\partial y}\cos(\xi,y)+\frac{\partial U}{\partial z}\cos(\xi,z)\right)+$$
$$+\cos(\xi,y)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos(\xi,x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(\xi,y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(\xi,z)\right)+$$
$$+\cos(\xi,z)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\cos(\xi,x)+\frac{\partial W}{\partial y}\cos(\xi,y)+\frac{\partial W}{\partial z}\cos(\xi,z)\right)$$

Розкриваючи дужки і використовуючи відповідні позначення отримаємо наступну формулу: $\gamma_{\xi\xi}=2\varepsilon_\xi=\sum_{a,b\in\{x,y,z\}}\gamma_{ab}\cos(\xi,a)\cos(\xi,b)$.

Загальна формула перетворення тензора деформацій матиме вигляд:

$$\gamma_{\alpha\beta}=\sum_{a,b\in\{x,y,z\}}\gamma_{ab}\cos(\alpha,a)\cos(\beta,b),\ \alpha,\beta\in\{\xi,\eta,\zeta\} \qquad (2.14).$$