Зміст

2.5.4 Властивості власних чисел задачі Штурма-Ліувіля

Нагалдаємо, що теоремою **??** встановлена еквівалентність задачі Штурма-Ліувіля і задачі на власні значення для однорідного інтегрального рівняння з ермітовим неперервним ядром $G_1(x, \xi)$. При цьому власні значення λ_k задачі Штурма-Ліувілля пов'язані з характеристичними числами μ_k ядра $G_1(x, \xi)$ співвідношенням $\mu = \lambda + 1$, а відповідні їм власні функції $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ співпадають. Тому для задачі Штурма-Ліувіля справедливі всі положення теорії інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром.

А саме:

Твердження 2.5.9
Множина власних чисел λ_k не порожня та немає скінчених граничних точок.

Твердження 2.5.10
Всі власні числа λ_k дійсні та мають скінчену кратність.

Твердження 2.5.11
Власні функції $u_k \in C^{(2)}(0, l) \cap C^{(1)}([0, l])$, $(u_k, u_j) = \delta_{k,j}$, $k, j = 1, 2, \dots$.

Твердження 2.5.12
Всі $\lambda_k \geq 0$.

Доведення. Справді, це випливає з додатної визначеності диференціального оператора Штурма-Ліувілля з відповідними граничними умовами, для цього оператора всі власні функції, що відповідають різним власним значенням, ортогональні. □

Твердження 2.5.13

Множина власних чисел злічена (не може бути скінчена).

Доведення. Дійсно, якщо б множина була скінченою $\mu_1, \ldots, \mu_N$, то для ядра $G_1(x, \xi)$ було вірним представлення

$$G_1(x, \xi) = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i(x) u_i(\xi)}{\mu_i}. \tag{2.5.37}$$

Але $u_k \in C^{(2)}(0, l) \cap C^{(1)}([0, l])$, і тому таке представлення суперечить властивості функції Гріна $G_1(x, \xi)$ про наявність розриву першої похідної. Ця суперечність і доводить твердження. □

Твердження 2.5.14

Кожне власне число має одиничну кратність.

Доведення. Справді, нехай u_1 та u_2 — власні функції, які відповідають власному значенню λ_0. З граничної умови запишемо:

$$\begin{cases} h_1 u_1(0) - h_2 u_1'(0) = 0, \\ h_1 u_2(0) - h_2 u_2'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.5.38}$$

Розглядатимемо ці співвідношення як систему лінійних рівнянь відносно h_1, h_2. Визначник системи співпадає за величиною з визначником Вронського

$$\begin{vmatrix} u_1(0) & -u_1'(0) \\ u_2(0) & -u_2'(0) \end{vmatrix} = -w(0) \neq 0 \tag{2.5.39}$$

враховуючи лінійну незалежність власних функцій. Звідси випливає, що розв'язок лінійної системи тривіальний, тобто $h_1 = h_2 = 0$, що суперечить припущенню $h_1 + h_2 > 0$.

Тому ці розв'язки лінійно залежні. Це і означає, що λ_0 має одиничну кратність, тобто просте. □

Теорема 2.5.15 (Стеклова про розвинення в ряд Фур'є)
Будь-яка $f \in M_L$ розкладається в ряд Фур'є за системою власних функцій задачі Штурма -Ліувіля

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x), \tag{2.5.40}$$

і цей ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Доведення. Покажемо, що f — джерелувато зображувана:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 f = \mathbf{L} f + f = h, \quad h \in C(0,l) \cap L_2(0,l), \\ l_1 f|_{x=0} = l_2 f|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{2.5.41}$$

Функція f є розв'язком цієї граничної задачі, причому, $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора $\mathbf{L}_1$. Позначимо через $G_1(x, \xi)$ функцію Гріна оператора $\mathbf{L}_1$.

Тоді має місце представлення

$$f(x) = \int_0^1 G_1(x, \xi) h(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \tag{2.5.42}$$

тобто $f(x)$ — джерелувато-зображувана. За теоремою Гільберта-Шмідта функція f розкладається в регулярно збіжний ряд Фур'є по власним функціям ядра $G_1(x, \xi)$. Але власні функції ядра $G_1(x, \xi)$ співпадають з власними функціями $\{u_k(x)\}$ оператора $\mathbf{L}$. □

2.5.5 Задача Штурма-Ліувіля з ваговим множником

Визначення 2.5.16 (задачі Штурма-Ліувіля з ваговим множником)**.** *Задачею Штурма-Ліувіля з ваговим множником* називається

$$\begin{cases} \mathbf{L} f = \lambda \rho(x) u, \quad 0 < x < l, \\ l_1 u|_{x=0} = l_2 u|_{x=l} = 0, \end{cases} \tag{2.5.43}$$

де $\rho(x) > 0$, $\rho \in C([0, l])$, ρ — ваговий множний.

З теореми **??** випливає представлення

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \rho(\xi) G(x, \xi) u(\xi) \, \mathrm{d}\xi \tag{2.5.44}$$

Інтегральне рівняння має неперервне, але не симетричне ядра, для його симетризації домножимо рівняння на $\sqrt{\rho(x)}$ і отримаємо

$$\rho(x)u(x) = \lambda \int\limits_0^1 \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)} G(x,\xi)\rho(\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.45}$$

Позначимо $v(x) = \sqrt{\rho(x)} \cdot u(x)$, $G_\rho(x,\xi) = \sqrt{\rho(x)\rho(\xi)} G(x,\xi)$, отримаємо інтегральне рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$v(x) = \lambda \int\limits_0^1 G_\rho(x,\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.46}$$

Власні функції задачі Штурма-Ліувіля з ваговим множником пов'язані з власними функціями останнього інтегрального рівняння співвідношенням

$$\sqrt{\rho(x)} \cdot u_k(x) = v_k(x). \tag{2.5.47}$$

Твердження 2.5.17

Має місце співвідношення

$$(v_k, v_i) = \delta_{i,k} = \int\limits_0^l u_k(x) \cdot u_i(x) \cdot \rho(x)\,\mathrm{d}x = (u_k, u_i)_\rho \tag{2.5.48}$$

— ваговий скалярний добуток.

Таким чином система власних функцій задачі Штурма-Ліувілля з ваговим множником є ортонормованою у ваговому скалярному добутку $(u,v)_\rho$.

2.6 Інтегральні рівняння першого роду

Будемо розглядати інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = f(x). \tag{2.6.1}$$

Неважко перевірити, що розв'язок цього інтегрального рівняння може існувати не для будь-якої неперервної функції $f(x)$.

Приклад 2.6.1
Нехай $G = [a, b]$, а

$$K(x, y) = a_0(y)x^m + a_1(y)x^{m-1} + \ldots + a_m(y), \tag{2.6.2}$$

тоді для будь-якої неперервної $\varphi(y)$:

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m \tag{2.6.3}$$

Це означає, що такий самий вигляд повинна мати і функція $f(x)$.

2.6.1 Ядра Шмідта

Будемо розглядати неперервне ядро $K(x, y)$ і спряжене до нього $K^\star(x, y)$ яке задовольняє нерівності

$$\int_G\int_G |K(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty \tag{2.6.4}$$

Відповідні інтегральні оператори Фредгольма позначимо через $\mathbf{K}, \mathbf{K}^\star$. Введемо інтегральні оператори $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}^\star\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}\mathbf{K}^\star$, які є симетричними і додатними. Цим операторам відповідають

Визначення 2.6.2 (ядер Шмідта)**.** *Ядрами Шмідта* називаються ядра

$$K_1(x, y) = \int_G K^\star(x, z)K(z, y)\,\mathrm{d}z, \quad K_2(x, y) = \int_G K(x, z)K^\star(z, y)\,\mathrm{d}z. \tag{2.6.5}$$

Можна довести, що характеристичні числа ядер Шмідта $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ співпадають, позначимо їх через μ_k^2, $k = 1, 2, \ldots$

Позначимо через $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$, $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$ ортонормовані власні функції ядра $K_1(x, y)$ та $K_2(x, y)$ відповідно.

Твердження 2.6.3

Виконуються рівності:

$$v_k = \mu_k \mathbf{K} u_k, \tag{2.6.6}$$
$$u_k = \mu_k \mathbf{K}^\star v_k. \tag{2.6.7}$$

Доведення. Дійсно: $v_k = \mu_k^2 \mathbf{K}_2 v_k$, тоді

$$\mathbf{K}^\star v_k = \mu_k \mathbf{K}^\star \mathbf{K}_2 v_k = \mu_k \mathbf{K}^\star \mathbf{K} \mathbf{K}^\star v_k = \mu_k^2 \mathbf{K}_1 \mathbf{K} v_k \tag{2.6.8}$$

звідси випливає, що $C_k \mathbf{K}^\star v_k = u_k$. Оберемо константу з умови ортонормованості:

$$\begin{aligned}(u_k, u_k) &= C_k^2 (\mathbf{K}^\star v_k, \mathbf{K}^\star v_k) = \\ &= C_k^2 (v_k, \mathbf{K}\mathbf{K}^\star v_k) = \\ &= C_k^2 (v_k, \mathbf{K}_2 v_k) = \\ &= C_k^2/\mu_k^2 = 1,\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

звідси $C_k = \mu_k$. І перша рівність доведена.

Аналогічно доводиться друга. □

Виходячи з теореми Мерсера про регулярну збіжність білінійного ряду для неперервних ядер зі скінченою кількістю від'ємних характеристичних чисел, для ядер Шмідта має місце відоме розвинення:

$$K_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\overline{u}_k(y)}{\mu_k^2}, \tag{2.6.10}$$
$$K_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\overline{v}_k(y)}{\mu_k^2}. \tag{2.6.11}$$

Ці ряди для неперервних ядер збігається абсолютно і рівномірно, а для ядер, які належать $L_2(G)$ — в середньому квадратичному.

Твердження 2.6.4

Для ядра $K(x,y)$ має місце білінійне розвинення за формулою:

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\overline{u}_k(y)}{\mu_k^2}, \tag{2.6.12}$$
$$K^\star(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\overline{v}_k(y)}{\mu_k^2}. \tag{2.6.13}$$

Доведення. Дійсно, написане розвинення представляє собою ряд Фур'є ядра по ортонормованой системі функцій $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, або $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ і збігається в середньому по кожній змінній x, y. Тобто

$$\int\limits_G \left| K(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i(x)\overline{u}_i(y)}{\mu_i} \right|^2 \mathrm{d}x = \int\limits_G |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k(y)|^2}{\mu_k^2} = \\ = K_1(y,y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k(y)|^2}{\mu_k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|u_k(x)|^2}{\mu_k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad (2.6.14)$$

□

Зауваження 2.6.5 — При доведенні цього представлення було використане друге співвідношення з 2.6.3.

2.6.2 Інтегральні рівняння першого роду з симетричним ядром

Нехай $K(x,y)$ симетричне ядро, а λ_i, $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ — характеристичні числа та ортонормована система власних функцій цього ядра.

Визначення 2.6.6 (повного ядра)**.** Будемо називати симетричне ядро *повним*, якщо система його власних функцій є повною.

Якщо ядро не є повним, то інтегральне рівняння $\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0$ має розв'язок відмінний від нуля. Інтегральне рівняння з симетричним повним ядром може мати лише єдиний розв'язок.

Будемо шукати розв'язок інтегрального рівняння першого роду у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x), \qquad (2.6.15)$$

де c_i — невідомі константи. Вільний член рівняння представимо у вигляді ряду Фур'є по системі власних функцій ядра в результаті чого будемо мати рівність:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \int\limits_G K(x,y)u_i(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i)u_i(x), \qquad (2.6.16)$$

або, після спрощення

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda_i} u_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i(x). \tag{2.6.17}$$

Враховуючи лінійну незалежність власних функцій $u_i(x)$ отримаємо співвідношення

$$c_i = (f, u_i)\lambda_i. \tag{2.6.18}$$

Теорема 2.6.7 (Пікара про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром)
Нехай $K(x, y)$ повне ермітове ядро $f \in L_2(G)$. Тоді для існування розв'язку рівняння I роду необхідно і достатньо щоб збігався ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f, u_k)|^2. \tag{2.6.19}$$

Доведення. Необхідність: Нехай існує розв'язок $u(x)$ з $L_2(G)$ інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Нехай c_k — коефіцієнти Фур'є розв'язку по системі власних функцій $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Виходячи з вигляду у якому шукаємо розв'язок маємо, що вищезгаданий ряд збігається.

Достатність: Нехай ряд збігається. Тоді існує єдина функція $u(x) \in L_2(G)$ з коефіцієнтами Фур'є $(f, u_i)\lambda_i$. Вона має вигляд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, u_i) u_i(x) \tag{2.6.20}$$

і задовольняє інтегральному рівнянню Фредгольма I роду. □

2.6.3 Несиметричні ядра

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма I роду з несиметричним ядром. Для представлення ядра скористаємось форумалима з твердження 2.6.4, а для представлення вільного члена $f(x)$ застосуємо розвинення цієї функції в ряд Фур'є по системі власних функцій ядра $K_2(x, y)$, $v_k(x)$. В результаті будемо мати:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_G \frac{v_i(x)\overline{u}_i(y)}{\mu_i} \varphi(y)\, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty} (f, v_i) v_i(x). \tag{2.6.21}$$

Ліву частину можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, u_i)v_i(x)}{\mu_i} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\infty} (f, v_i)v_i(x). \tag{2.6.22}$$

З останньої рівності можна записати співвідношення для коефіцієнтів Фур'є розв'язку:

$$(\varphi, u_i) = (f, v_i)\mu_i. \tag{2.6.23}$$

Таким чином, доведена настуна теорема:

Теорема 2.6.8 (критерій існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма I роду з несиметричним ядром)

Для існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма I роду з несиметричним ядром необхідно і достатньо щоби вільний член $f \in L_2(G)$ можна було розкласти в ряд Фур'є по системі власних функцій $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ ядра Шмідта

$$K_2(x, y) = \int\limits_G K(x, z)K^\star(z, y)\,\mathrm{d}z, \tag{2.6.24}$$

а числовий ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, v_i)|^2 \mu_i^2. \tag{2.6.25}$$

збігався.

Приклад 2.6.9

Звести задачу Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$\begin{cases} \mathbf{L}y \equiv -(1+e^x)y'' - e^x y' = \lambda x^2 y, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) - 2y'(0) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Побудуємо функцію Гріна оператора $\mathbf{L}$. Розглянемо задачі Коші:

$$\begin{cases} -(1+e^x)v_i'' - e^x v_i' = 0, \quad i = 1, 2, \\ v_1(0) - 2v_1'(0) = v_2'(1) = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$$-(1+e^x)y'' - e^x y' = 0$$

має вигляд

$$c_1(x - \ln(1+e^x)) + c_2.$$

Тоді розв'язки задач Коші:

$$\begin{aligned} &v_1(x) = a(x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2), \quad a = \text{const}, \\ &v_2(x) = b, \quad b = \text{const}. \end{aligned}$$

Обчислимо визначник Вронського

$$\begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{ab}{1+e^x}.$$

Про всяк випадок перевіримо тотожність Ліувілля:

$$p(x) \cdot w(x) = a \cdot b = \text{const}$$

Запишемо функцію Гріна за формулою:

$$G(x,\xi) = -\begin{cases} (x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2), & 0 \le x \le \xi \le 1, \\ (\xi - \ln(1+e^\xi) + 1 + \ln 2), & 0 \le \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

Запишемо інтегральне рівняння:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 \big(G(x,\xi) \cdot \xi^2 \cdot y(\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi.$$

Симетризуємо ядро інтегрального рівняння, помножимо обидві частини на x:

$$x \cdot y(x) = \lambda \int\limits_0^1 x \cdot \xi \cdot G(x,\xi) \cdot \xi \cdot y(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Введемо позначення:

$$\omega(x) = x \cdot y(x),$$

та

$$G_1(x,\xi) = x \cdot \xi \cdot G(x,\xi).$$

Отримаємо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром:

$$\omega(x) = \lambda \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\omega(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

2.6.4 Питання до першого розділу

1. Записати інтегральне рівняння Фредгольма першого та другого роду.
2. Дати визначення характеристичних чисел і власних функцій інтегрального рівняння.
3. Що називається союзним інтегральним рівнянням, спряженим ядром?
4. Сформулювати лему про обмеженість інтегрального оператора з неперервним ядром.
5. Записати схему методу послідовних наближень, ряд Неймана.
6. Сформулювати теорему про збіжність методу послідовних наближень для неперервних ядер.
7. Дати визначення повторних ядер і резольвенти, записати умова збіжності резольвенти.
8. Дати визначення полярного ядра, сформулювати лему про поводження повторних ядер для полярного ядра.
9. Сформулювати лему про обмеженість інтегрального оператора з полярним ядром.
10. Сформулювати теорему про збіжність методу послідовних наближень для інтегральних рівнянь із полярним ядром.
11. Записати резольвенту інтегрального оператора з полярним ядром, сформулювати умови її збіжності.
12. Дати визначення виродженого ядра, записати систему рівнянь для інтегрального рівняння. з виродженим ядром.
13. Сформулювати першу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром.
14. Сформулювати другу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром.
15. Сформулювати третю теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з виродженим ядром.

16. В чому полягає ідея доведення теорем Фредгольма для неперервного ядра.

17. Сформулювати першу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.

18. Сформулювати другу теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.

19. Сформулювати третю теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.

20. Сформулювати четверту теорему Фредгольма для інтегрального рівняння з неперервним ядром.

21. В чому полягає ідея доведення теорем Фредгольма для полярного ядра.

22. Сформулювати наслідку з теорем Фредгольма.

23. Дати визначення компактної множини в рівномірній метриці. Сформулювати теорему Арцела-Асколі.

24. Дати визначення цілком неперервного оператора, сформулювати лему про цілковиту неперервність оператора з неперервним ядром.

25. Дати визначення ермітового оператора, властивість характеристичних чисел, критерій ермітовості.

26. Ряд Фур'є, нерівність Бесселя, рівність Парсеваля-Стеклова.

27. Визначення джерелуватозображуваної функції. Теорема Гільберта-Шмідта.

28. Представлення виродженого ядра через характеристичні числа та власні функції.

29. Теорема про білінійне розкладання ермітового неперервного ядра.

30. Наслідок з теореми Гільберта-Шмідта про розкладання повторного ядра для ермітового ядра.

31. Формула Шмідта, особливості її застосування для різних значень параметра.

32. Теорема про існування характеристичних чисел ермітового неперервного та ермітового полярного ядра.

33. Додатньо визначені ядра. Лема про властивості характеристичних чисел додатньо визначених ядер.

34. Теорема Мерсера.

35. Постановка задачі Штурма-Ліувілля, визначення власних чисел і власних функцій.

36. Визначення функції Гріна для оператора Штурма-Ліувілля.

37. Властивості функції Гріна.

38. Властивості власних функцій і власних значень задачі Штурма-Ліувілля.

39. Лема про зведення задачі Штурму-Ліувілля до інтегрального рівняння.

40. Задача Штурма-Ліувілля з ваговим множником, зведення її до інтегрального рівняння з ермітовим ядром.

41. Теорема Стеклова про розкладання функцій у ряд Фур'є.

42. Ядра Шмідта та їх властивості, білінійне розвинення ядер Шмідта.

43. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду з ермітовим ядром, теорема існування розв'язку.

44. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду з несиметричним ядром, умови існування розв'язку.