

Зміст

4.8.5	Потенціал подвійного шару та його пряме значення	1
4.8.6	Інтеграл Гауса	2
4.8.7	Потенціал простого шару та його властивості	6
4.8.8	Нормальна похідна потенціалу простого шару	9

4.8.5 Потенціал подвійного шару та його пряме значення

Згідно до теореми 4.8.1 попередньої лекції, потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца (а також Лапласа)

$$W^k(x) = \iint_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y \quad (4.8.62)$$

для будь-якої області, яка не має перетину з поверхнею S є функцією яка має похідні будь-якого порядку.

В точках поверхні S потенціали подвійного шару є невластивим інтегралом і його поведінка залежить від властивості щільності та властивості поверхні інтегрування.

Теорема 4.8.5.1 (про пряме значення потенціалу подвійного шару)

Якщо S замкнена поверхня Ляпунова, $\sigma \in C(S)$, тоді потенціал подвійного шару (4.8.3), (4.8.3') має в будь-якій точці x поверхні S цілком визначене скінченне значення і це значення неперервно змінюється, коли точка x пробігає поверхню S .

Доведення. Оскільки $\sigma \in C(S)$, то σ — обмежена на поверхні S , таким чином

$$\begin{aligned} \left| \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right| &\leq M \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right| \leq \\ &\leq M \sqrt{1+k^2|x-y|^2} \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \right| \leq \\ &\leq M_1 \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \right| \end{aligned} \quad (4.8.63)$$

Згідно до теореми 5 лекції 24 інтеграл

$$\iint_S \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right| dS_y \quad (4.8.64)$$

існує, а таким чином існує інтеграл

$$W^k(x) = \iint_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y \quad (4.8.65)$$

коли $x \in S$.

Покажемо тепер, що $W^k \in C(S)$. Розглянемо

$$K(x, y) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad (4.8.66)$$

як ядро інтегрального оператора.

Оскільки

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{4\pi|x-y|^2} \cos(\vec{n}_y, y-x), \quad (4.8.67)$$

де

$$A(x, y) = (\mp ik|x-y| + 1)e^{\pm ik|x-y|}, \quad (4.8.68)$$

то згідно (4.8.19) $\cos(\vec{n}_y, y-x) \leq c_1|x-y|^\alpha$. Таким чином

$$K(x, y) = \frac{A(x, y) \cos(\vec{n}_y, y-x)|x-y|^{-\alpha/2}}{4\pi|x-y|^{2-\alpha/2}} = \frac{A_1(x, y)}{|x-y|^{2-\alpha/2}} \quad (4.8.69)$$

є полярним ядром. А це в свою чергу забезпечує відображення неперервної на S щільності σ в неперервний на S потенціал подвійного шару W^k . \square

Визначення 4.8.5.1. Значення потенціалу подвійного шару в точках поверхні будемо називати *прямим значенням потенціалу подвійного шару* і позначатимемо його $\overline{W^k(x)}$, $x \in S$.

4.8.6 Інтеграл Гауса

Визначення 4.8.6.1. Інтегралом Гауса будемо називати потенціал подвійного шару оператора Лапласа з щільністю $\sigma(y) = 1$, тобто

$$W_0(x) = \iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y. \quad (4.8.70)$$

Лема 4.8.6.1

Якщо S — замкнена поверхня Ляпунова, що обмежує область Ω , то інтеграл Гауса визначається наступною формулою:

$$W_0(x) = \begin{cases} -1, & x \in \Omega, \\ -1/2, & x \in S, \\ 0, & x \in \Omega'. \end{cases} \quad (4.8.71)$$

Доведення. Розглянемо випадок коли $x \in \Omega'$. В цьому випадку функція $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ — гармонічна в області Ω по аргументу y оскільки $y \in S$ то $x \neq y$. Згідно до властивості гармонічної функції маємо

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y = 0. \quad (4.8.72)$$

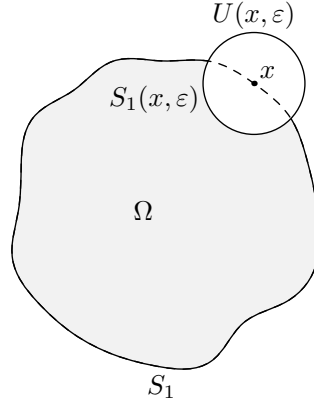
Для випадку, коли $x \in \Omega$ розглянемо область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus U(x, \varepsilon)$. Функція $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ буде гармонічною в області Ω_ε і для неї має місце співвідношення

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y + \iint_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y = 0. \quad (4.8.73)$$

Обчислимо значення

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S(x, \varepsilon)} \frac{\cos(\vec{n}_y, y-x)}{4\pi|x-y|^2} dS_y = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} (-1) \iint_{S(x, \varepsilon)} dS_y = 1. \end{aligned} \quad (4.8.74)$$

Випадок $x \in S$ можна дослідити, якщо розглянути область $\Omega_\varepsilon^1 = \Omega \setminus (\Omega \cap U(x, \varepsilon))$:



У ній функція $\frac{1}{4\pi|x-y|}$ — гармонічна і записати інтеграл по замкненій поверхні S_ε^1 яка обмежує область Ω_ε^1 та спрямувати ε до нуля. \square

Аналізуючи інтеграл Гауса легко бачити, що навіть у найпростішому випадку постійної щільності потенціал подвійного шару при переході через поверхню S має розрив. Наступна теорема вивчає поведінку потенціалу подвійного шару при підході до поверхні S зсередини та ззовні області.

Теорема 4.8.6.1 (про граничні значення потенціалу подвійного шару)

Нехай S — замкнута поверхня Ляпунова, а σ — неперервна на S щільність, тоді потенціал подвійного шару оператора Гельмгольца та Лапласа $W^k(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C(\overline{\Omega'}) \cap C(S)$ і його граничні значення при підході до поверхні S зсередини $W_i^k(x)$ і ззовні $W_e^k(x)$ задовольняють співвідношенням:

$$W_i^k(x) = \overline{W^k(x)} - \frac{\sigma(x)}{2}, \quad (4.8.75)$$

$$W_e^k(x) = \overline{W^k(x)} + \frac{\sigma(x)}{2}. \quad (4.8.76)$$

Доведення. Розглянемо потенціал подвійного шару

$$\begin{aligned} W^k(x) &= \iint_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y = \\ &= \iint_S \sigma(y) (1 \mp ik|x-y|) e^{\pm ik|x-y|} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} dS_y. \end{aligned} \quad (4.8.77)$$

Позначимо $(1 \mp ik|x-y|) e^{\pm ik|x-y|} = \varphi(|x-y|)$.

Розглянемо довільну точку $x_0 \in S$ та запишемо потенціал подвійного шару у вигляді:

$$\begin{aligned} W^k(x) &= W^k(x) \pm \iint_S \sigma(x_0) \varphi(|x - x_0|) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x - y|} dS_y = \\ &= W_1^k(x) + \sigma(x_0) \varphi(|x - x_0|) W_0(x). \end{aligned} \quad (4.8.78)$$

де

$$W_1^k(x) = \iint_S (\sigma(y) \varphi(|x - y|) - \sigma(x_0) \varphi(|x - x_0|)) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x - y|} dS_y. \quad (4.8.79)$$

а $W_0(x)$ — інтеграл Гауса. Покажемо, що W_1^k — неперервна функція в точці x_0 . Візьмемо точку x_0 за центр сфери $U(x_0, \eta)$, яка розіб'є поверхню S на дві частини S' і S'' , де $S' = S \cap U(x_0, \eta)$, а $S'' = S \setminus S'$. Враховуючи представлення поверхні $S = S' \cup S''$, запишемо

$$W_1^k(x) = W_1'^k(x) + W_1''^k(x) = \iint_{S'} (\dots) dS_y' + \iint_{S''} (\dots) dS_y''. \quad (4.8.80)$$

Покажемо, що $|W_1^k(x) - W_1^k(x_0)|$ можна зробити як завгодно малим за рахунок зближення точок x та x_0 . Запишемо очевидну нерівність:

$$\left| W_1^k(x) - \overline{W_1^k(x_0)} \right| \leq \left| W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)} \right| + \left| W_1'^k(x) \right| + \left| \overline{W_1'^k(x_0)} \right|. \quad (4.8.81)$$

Оцінимо праву частину нерівності. Оберемо радіус сфери η таким чином щоби

$$\left| \sigma(y) \varphi(|x - y|) - \sigma(x_0) \varphi(|x - x_0|) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3C_0}, \quad (4.8.82)$$

де ε — довільне мале число, а C_0 — константа з формулювання теореми 4.8.5, нерівність (4.8.61). Це можливо завдяки неперервності $\sigma(y) \varphi(|x - y|)$ по аргументу y . Таким чином

$$\left| W_1'^k(x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3C_0} \iint_{S'} \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x - y|} \right| dS_y' \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.8.83)$$

Аналогічна нерівність виконується і для $\left| \overline{W_1'^k(x_0)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, як для частинного випадку положення точки $x = x_0$.

Зафіксуємо радіус сфери η і будемо вважати, що точка x достатньо близька до точки x_0 така, що $|x - x_0| \leq \eta/2$, тоді на поверхні S'' :

$$|x - y| \geq |y - x_0| - |x_0 - x| \geq \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}. \quad (4.8.84)$$

Таким чином підінтегральна функція в інтегралі $W_1''^k(x)$ є неперервною і тому неперервним буде і сам інтеграл, тобто $\left|W_1''^k(x) - \overline{W_1''^k(x_0)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Це доводить неперервність $W_1''^k(x)$ в точці x_0 .

З неперервності $W_1^k(x)$, можемо записати

$$W_{1,i}^k(x_0) = W_{1,e}^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)}. \quad (4.8.85)$$

Врахуємо представлення

$$W^k(x) = W_1^k(x) + \sigma(x_0)\varphi(|x - x_0|)W_0(x). \quad (4.8.86)$$

Обчислимо граничні значення потенціалу в точці x_0 зсередини та ззовні:

$$W_i^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0,i}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} - \sigma(x_0), \quad (4.8.87)$$

$$W_e^k(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)} + \sigma(x_0)\varphi(|x_0 - x_0|)W_{0,e}(x_0) = \overline{W_1^k(x_0)}. \quad (4.8.88)$$

Оскільки

$$\overline{W_1^k(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} - \sigma(x_0)\overline{W_0(x_0)} = \overline{W^k(x_0)} + \frac{\sigma(x_0)}{2}, \quad (4.8.89)$$

то з трьох останніх рівностей отримаємо:

$$W_i^k(x) = \overline{W^k(x)} - \frac{\sigma(x)}{2}, \quad (4.8.90)$$

$$W_e^k(x) = \overline{W^k(x)} + \frac{\sigma(x)}{2}. \quad (4.8.91)$$

□

4.8.7 Потенціал простого шару та його властивості

Нагадаємо, що потенціали простого шару для оператора Лапласа та Гельмгольца записуються у вигляді

$$V(x) = \iint_S \frac{\mu(y)}{4\pi|x - y|} dS_y \quad V^k(x) = \iint_S \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x - y|} dS_y. \quad (4.8.92)$$

Вивчимо властивості цих потенціалів в усьому евклідовому просторі.

Теорема 4.8.7.1 (про неперервність потенціалу простого шару)

Якщо S — замкнута поверхня Ляпунова, а μ вимірювана і обмежена на S функція, то потенціал простого шару оператора Лапласа та Гельмгольца є функцією неперервною в усьому евклідовому просторі.

Доведення. Оскільки властивості потенціалів в будь-якій точці простору, яка не належить поверхні S досліджувались в теоремі 4.8.1, то встановити неперервність потенціалу простого шару необхідно лише в точках поверхні S .

Побудуємо сферу Ляпунова $S(x, d)$ і нехай $S'_d(x)$ — частина поверхні S , яка знаходиться всередині сфери Ляпунова. Тоді потенціал простого шару

$$V^k(x) = \iint_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|} \mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y + \iint_{S \setminus S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|} \mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y. \quad (4.8.93)$$

У другому інтегралі підінтегральна функція є неперервна і обмежена, а значить цей інтеграл існує.

Для оцінки першого інтегралу введемо локальну систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 з центром у точці x . Нехай $G'(x)$ — проекція $S'_d(x)$ на площину $\xi_3 = 0$, дотичну до поверхні S в точці x , тоді:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{S'_d(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|} \mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y \right| &\leq \iint_{G'(x)} \frac{|\mu(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2}{4\pi \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \cos(\vec{n}_y, \xi_3)} \leq \\ &\leq 2M \int_0^{2\pi} \int_0^d \frac{\rho d\rho}{4\pi\rho} = Md. \end{aligned} \quad (4.8.94)$$

При дослідженні інтегралу були використані оцінки (4.8.47) та оцінка

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = \frac{1}{\rho}. \quad (4.8.95)$$

Таким чином потенціал простого шару дійсно існує в кожній точці простору \mathbb{R}^3 .

Покажемо тепер неперервність потенціалу в точці $x \in S$.

Оберемо сферу Ляпунова $S(x, \eta)$, $\eta < d$. Тоді потенціал простого шару можна представити аналогічно (4.8.93) у вигляді:

$$V^k(x) = \iint_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y + \iint_{S \setminus S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y. \quad (4.8.96)$$

Очевидно, що другий інтеграл

$$V_1^k(x) = \iint_{S \setminus S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y \quad (4.8.97)$$

є неперервною функцією і $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ така, що $|V_1^k(x) - V_1^k(x')| \leq \varepsilon/3$ як тільки $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$.

Покажемо, що

$$\left| \iint_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y - \iint_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|} dS_y \right| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \quad (4.8.98)$$

при $|x - x'| < \delta$.

Очевидно, що

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y - \iint_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|} dS_y \right| \leq \\ & \leq \left| \iint_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y \right| + \left| \iint_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|}\mu(y)}{4\pi|x'-y|} dS_y \right|. \end{aligned} \quad (4.8.99)$$

Розглянемо другий інтеграл і виберемо точки x, x' так, що $|x - x'| < \eta/2$.

Введемо локальну систему координат з центром в точці x . Тоді нехай точка $y = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а $x' = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$. Тоді

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|y - x'|} \leq \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi'_1)^2 + (\xi_2 - \xi'_2)^2}} \leq \frac{1}{\rho} \quad (4.8.100)$$

а також

$$\rho \leq |y - x'| = |y - x' + x - x| \leq |x - x'| + |x - y| \leq \eta + \frac{\eta}{2} = \frac{3\eta}{2}. \quad (4.8.101)$$

Таким чином можна записати оцінку інтеграла

$$\begin{aligned} \left| \iint_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x'-y|} \mu(y)}{4\pi|x'-y|} dS_y \right| &\leq 2M \iint_{G'_\eta(x)} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{4\pi\sqrt{(\xi_1 - \xi'_1)^2 + (\xi_2 - \xi'_2)^2}} \leq \\ &\leq 2M \int_0^{2\pi} \int_0^{3\eta/2} \frac{\rho d\rho}{4\pi\rho} = \frac{3\eta M}{2} \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned} \quad (4.8.102)$$

за рахунок вибору достатньо маленького значення η .

Інтеграл

$$\left| \iint_{S'_\eta(x)} \frac{e^{\pm ik|x-y|} \mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad (4.8.103)$$

як частинний випадок попереднього інтегралу при $x' = x$. Таким чином встановлено, що $|V^k - V^k(x')| \leq \varepsilon$, якщо $|x - x'| \leq \delta$. \square

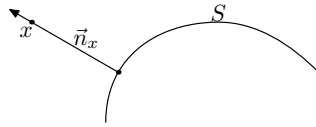
4.8.8 Нормальна похідна потенціалу простого шару

Будемо розглядати потенціал простого шару

$$V^k(x) = \iint_S \frac{e^{\pm ik|x-y|} \mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y \quad (4.8.104)$$

для оператора Гельмгольца.

Візьмемо довільну точку $x \notin S$, і проведемо через цю точку яку-небудь нормаль \vec{n}_x до поверхні S :



Для такого випадку в точці x , можна обчислити похідну по напрямку нормалі \vec{n}_x від потенціалу простого шару, яку обчислюють шляхом диференціювання підінтегральної функції

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x} = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \iint_S \frac{e^{\pm ik|x-y|} \mu(y)}{4\pi|x-y|} dS_y = \iint_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} dS_y. \quad (4.8.105)$$

Обчислимо вираз

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} &= \frac{\pm ik|x-y| - 1}{4\pi|x-y|^2} \cdot e^{\pm ik|x-y|} \sum_{j=1}^3 \frac{x_j - y_j}{|x-y|} \cos(\vec{n}_x, x_j) = \\ &= \frac{(\pm ik|x-y| - 1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(\vec{n}_x, x-y).\end{aligned}\tag{4.8.106}$$

Теорема 4.8.8.1 (про пряме значення нормальної похідної потенціалу простого шару)

Якщо μ обмежена і вимірювана функція на поверхні Ляпунова S , то нормальна похідна потенціалу простого шару

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x} = \iint_S \mu(y) \frac{(\pm ik|x-y| - 1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(\vec{n}_x, x-y) dS_y.\tag{4.8.107}$$

має в кожній точці поверхні S цілком визначене скінчене значення, яке неперервно змінюється коли точка x пробігає поверхню S .

Визначення 4.8.8.1. Це значення називають *прямим значенням нормальної похідної потенціалу простого шару*, позначається $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x}$, $x \in S$.

Доведення. При доведенні теореми будемо розглядати нормальну похідну потенціалу, як результат відображення щільності μ за допомогою інтегрального оператора з ядром

$$K(x, y) = \frac{(\pm ik|x-y| - 1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2} \cos(\vec{n}_x, x-y).\tag{4.8.108}$$

Враховуючи властивості поверхні Ляпунова, можна показати, що це ядро є полярним, оскільки для достатньо малих значень $|x-y|$ виконується $\cos(\vec{n}_x, x-y) \leq a_2|x-y|^\alpha$. Це означає, що

$$\begin{aligned}K(x, y) &= \frac{(\pm ik|x-y| - 1)e^{\pm ik|x-y|} \cos(\vec{n}_x, x-y)|x-y|^{-\alpha/2}}{4\pi|x-y|^{2-\alpha/2}} = \\ &= \frac{A(x, y)}{4\pi|x-y|^{2-\alpha/2}}\end{aligned}\tag{4.8.109}$$

є полярним ядром. Далі використовуємо, що інтегральний оператор з полярним ядром відображає обмежену функцію у неперервну. \square

Теорема 4.8.8.2 (про граничні значення нормальної похідної потенціалу простого шару)

Якщо S замкнута поверхня Ляпунова, а μ неперервна на S щільність, то потенціал простого шару має на S граничні значення правильної нормальної похідної при підході до точки $x \in S$ зсередини та ззовні, і ці граничні значення можуть бути обчислені за формулами:

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_i} = \frac{\overline{\partial V^k(x)}}{\partial \vec{n}} + \frac{\mu(x)}{2}, \quad (4.8.110)$$

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_e} = \frac{\overline{\partial V^k(x)}}{\partial \vec{n}} - \frac{\mu(x)}{2}. \quad (4.8.111)$$

Визначення 4.8.8.2. Граничні значення нормальної похідної в точці $x_0 \in S$ потенціалу простого шару зсередини $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_i}$ та ззовні $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_e}$ будемо називати *правильними*, якщо вони є граничними значеннями $\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}}$ коли $x \rightarrow x_0$ вздовж нормалі \vec{n}_{x_0} зсередини та ззовні відповідно.

Доведення. Розглянемо вираз, який представляє собою суму потенціалу подвійного шару і нормальної похідної потенціалу простого шару з однаковою щільністю $\mu(x)$:

$$\frac{\partial V^k(x)}{\partial \vec{n}_x} + W^k(x) = \iint_S \mu(y) \left(\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} + \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) dS_y. \quad (4.8.112)$$

Можна показати, що ця функція змінюється неперервно, коли точка x перетинає поверхню S , рухаючись по нормалі до цієї поверхні в точці x .

Враховуючи цю неперервність при переході через поверхню вздовж нормалі, можемо записати:

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} + W_i^k(x_0) = \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} + W_e^k(x_0) = \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x} + \overline{W^k(x_0)}. \quad (4.8.113)$$

Звідси маємо:

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_i} = \overline{W^k(x_0)} - W_i^k(x_0) + \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x} = \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x} + \frac{\mu(x_0)}{2}. \quad (4.8.114)$$

$$\frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_e} = \overline{W^k(x_0)} - W_e^k(x_0) + \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x} = \frac{\partial V^k(x_0)}{\partial n_x} - \frac{\mu(x_0)}{2}. \quad (4.8.115)$$

□