Зміст

4.2 Фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів

Нехай L — диференціальний оператор порядку m вигляду

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{4.2.1}$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$Lu = f(x). \tag{4.2.2}$$

Визначення 4.2.1 (узагальненого розв'язку)**.** Узагальненим розв'язком цього рівняння будемо називати будь-яку узагальнену функцію u, яка задовольняє це рівняння в розумінні виконання рівності:

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.2.3}$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Остання рівність рівнозначна рівності

$$\langle u, L^\star \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \tag{4.2.4}$$

для довільної $\varphi \in D(\Omega)$.

Тут було введено

Визначення 4.2.2 (спряженого оператора)**.** *Спряженим* до оператора L нзаивається оператор що визначається рівністю

$$L^\star\varphi = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha\varphi). \tag{4.2.5}$$

Особливу роль в математичній фізиці відіграють фундаментальні розв'язки для основних диференціальних операторів математичної фізики: (Гельмгольца, теплопровідності, хвильового), які представляють собою узагальнені розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$(\Delta + k^2)q_k(x) = -\delta(x), \tag{4.2.6}$$

$$\left(a^2\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon(x,t) = -\delta(x,t), \tag{4.2.7}$$

$$\left(a^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = -\delta(x,t) \tag{4.2.8}$$

Визначення 4.2.3 (фундаментального розв'язку)**.** Узагальнені функції $q_k(x)$, $\varepsilon(x,t)$, $\psi(x,t)$ називаються фундаментальними розв'язками оператора Гельмгольца, теплопровідності, хвильового відповідно, якщо вони задовольняють відповідні рівняння як узагальнені функції:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^n} q_k(x)(\Delta + k^2)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(0), \tag{4.2.9}$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \varepsilon(x,t)\left(a^2\Delta + \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0), \tag{4.2.10}$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \psi(x,t)\left(a^2\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0). \tag{4.2.11}$$

Зауваження 4.2.4 — Тут $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, простір усіх можливих значень (x,t). Зрозуміло, що можна було також записати

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \iiint\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{4.2.12}$$

але було вибрано перше позначення для заощадження часу, місця, а також задля одноманітності.

Зауваження 4.2.5 — Неважко зрозуміти, що фундаментальні розв'язки визначені таким чином є неєдиними і визначаються з точністю до розв'язків відповідного однорідного рівняння. Але серед множини фундаментальних розв'язків вибирають такі, які мають певний характер поведінки на нескінченості.

Загальний метод знаходження фундаментальних розв'язків операторів з постійними коефіцієнтами полягає в застосуванні прямого та оберненого перетворення Фур'є по просторовій змінній x та зведення рівняння в частинних похідних до алгебраїчного рівняння у випадку стаціонарного рівняння, або до звичайного диференціального рівняння у випадку нестаціонарного рівняння.

Ми покажемо що деякі узагальнені функції представляють собою фундаментальні розв'язки основних диференціальних операторів.

4.2.1 Фундаментальні розв'язки операторів Лапласа та Гельмгольца

Розглянемо двовимірний оператор Лапласа

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{4.2.13}$$

Теорема 4.2.6 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Лапласа)

Для двохвимірного оператора Лапласа функція

$$q^{(2)}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \tag{4.2.14}$$

де $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція рівняння

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\delta(x) \tag{4.2.15}$$

Зауваження 4.2.7 — Тут останню рівність необхідно розуміти як

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\varphi(0), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2). \tag{4.2.16}$$

Доведення. Перш за все,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \Delta_2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \varphi(x)\, \mathrm{d}x + \iint\limits_{S_R} \ldots \mathrm{d}S +$$
$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{S\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} \right) \varphi(x) \right) \mathrm{d}S. \tag{4.2.17}$$

Зауваження 4.2.8 — Тут U_R, U_ε — околи нуля такі, що $\operatorname{supp}\varphi \subset U_R$, а U_ε — нескінченно малий окіл.

Також тут позначено $S_R = \partial U_R$, $S_\varepsilon = \partial U_\varepsilon$.

У свою чергу n — вектор нормалі до S_ε.

Твердження 4.2.9
Для $x \neq 0$

$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = 0. \tag{4.2.18}$$

Доведення. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = -\frac{x_i}{|x|^2}, \tag{4.2.19}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4}, \tag{4.2.20}$$
$$\Delta_2 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_i^2}{|x|^4} \right) = 0. \tag{4.2.21}$$

□

Таким чином, перший інтеграл дорівнює нулю. Інтеграл по сфері S_R для великого значення R теж дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції φ.

> **Зауваження 4.2.10 —** Справді, цей інтеграл позначає потік поля $\vec{\varphi}$ через S_R, але $\operatorname{supp}\varphi \subset U_R$, тобто поза $U_{R-\varepsilon}$ для якогось (нового) малого ε поле $\vec{\varphi}$ не діє, а тому його потік дорівнє нулеві.

Обчислимо граничні значення поверхневих інтегралів по сфері S_ε:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{S\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right)\varphi(x)\right)\mathrm{d}S=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)}{\partial n}\,\mathrm{d}\theta-\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right). \tag{4.2.22}$$

> **Зауваження 4.2.11 —** При обчисленні останнього інтегралу враховано, що
> $$\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|x|}\bigg|_{x\in S_\varepsilon}=-\frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{r}\bigg|_{r=\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.2.23}$$
> Множник ε під знаком інтегралу з'являється як якобіан переходу до полярної системи координат.

Враховуючи неперервну диференційовність функції φ, здійснюючи граничний перехід при $\varepsilon\to 0$, отримаємо, що перший інтеграл прямує до нуля, а другий до значення $-\varphi(0,0)$. □

4.2.2 Фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца

Розглянемо тривимірний оператор Гельмгольца:

$$\Lambda_3=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+k^2 \tag{4.2.24}$$

Теорема 4.2.12 (про фундаментальний розв'язок тривимірного оператора Гельмгольца)
Для тривимірного оператора Гельмгольца функція

$$q_{\pm}^{k}(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} \tag{4.2.25}$$

є фундаментальним розв'язком, тобто задовольняє як узагальнена функція диференціальному рівнянню:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 q_{\pm}^{k}(x)}{\partial x_i^2} + k^2 q_{\pm}^{k}(x) = -\delta(x). \tag{4.2.26}$$

Зауваження 4.2.13 — Останнє рівняння треба розуміти як

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} q_{\pm}^{k}(x) \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(0) \tag{4.2.27}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^3)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останньої рівності:

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} q_{\pm}^{k}(x) \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{U_R \setminus U_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \tag{4.2.28}$$

Обчислимо кожний з інтегралів.

Твердження 4.2.14
Для $x \neq 0$

$$\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) q_{\pm}^{k}(x) = 0. \tag{4.2.29}$$

Доведення. Дійсно, для обчислення другої похідної можна скористатися формулою

$$\frac{\partial^2 q_\pm^k(x)}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial |x|^2}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial |x|}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial |x|}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_j^2}\right). \quad (4.2.30)$$

У ній по-перше

$$\frac{\partial^2}{\partial |x|^2}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right) = -\frac{e^{\pm ik|x|}(k^2|x|^2 \pm 2ik|x| - 2)}{4\pi|x|^3}, \quad (4.2.31)$$

і

$$\left(\frac{\partial |x|}{\partial x_j}\right)^2 = \frac{x_j^2}{|x|^2}, \quad (4.2.32)$$

а також

$$\frac{\partial}{\partial |x|}\left(\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}\right)\left(\frac{\partial^2 |x|}{\partial x_j^2}\right) = \frac{e^{\pm ik|x|}(\pm ik|x| - 1)}{4\pi|x|^5}(|x|^2 - x_j^2). \quad (4.2.33)$$

Після підстановки та приведення подібних отримаємо

$$\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2\right) q_\pm^k(x) = \frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|^3}\Big(-k^2|x|^2\Big) + k^2\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|} = 0. \quad (4.2.34)$$

□

Інтеграл по сфері великого радіусу S_R дорівнює нулю за рахунок фінітності пробної функції:

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} q_\pm^k(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\frac{\partial\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\psi, \cos\theta, \varepsilon\sin\theta)}{\partial n}\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \quad (4.2.35)$$

Обчислимо останній поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\partial q_\pm^k(x)}{\partial n}\varphi(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}S = \frac{e^{\pm ik\varepsilon}(\pm ik\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon^2}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^2\sin\theta\cdot\varphi(\varepsilon\cos\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\psi\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\varphi(0).$$

(4.2.36)

□

Зауваження 4.2.15 — З формули для $q^k_\pm(x)$ легко отримати фундаментальний розв'язок для тривимірного оператора Лапласа, тобто показати, що функція
$$\frac{1}{4\pi|x|} \tag{4.2.37}$$
задовольняє наступному рівнянню:
$$\Delta_3 \frac{1}{4\pi|x|} = -\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{4.2.38}$$

Зауваження 4.2.16 — Формально формулу $1/4\pi|x|$ можна отримати з $q^k_\pm(x)$ при $k = 0$.

4.2.3 Фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца

Теорема 4.2.17 (про фундаментальний розв'язок двовимірного оператора Гельмгольца)
Функція
$$q^k(x) = \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|), \tag{4.2.39}$$
де $x = (x_1, x_2)$ є фундаментальним розв'язком двовимірного оператора Гельмгольца, тобто задовольняє співвідношенню:
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} q^k(x) \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2 \right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0). \tag{4.2.40}$$

Зауваження 4.2.18 — У формулі для $q^k(x)$ функція $K_\nu(x)$ — функція Бесселя другого роду уявного аргументу v-порядку і є одним з двох лінійно-незалежних розв'язків лінійного диференціального рівняння Бесселя уявного аргументу:
$$x^2 Y'' + xY' - (x^2 + \nu^2)Y = 0. \tag{4.2.41}$$

Доведення. Аналогічне доведенню співвідношення для двовимірного оператора Лапласа.

Твердження 4.2.19

Для $x \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) = 0. \qquad (4.2.42)$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(-k^2 K_0''(-ik|x|) \frac{x_j^2}{|x|^2} - ikK_0'(-ik|x|) \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3} \right). \qquad (4.2.43)$$

Таким чином

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + k^2 \right) \frac{1}{2\pi} K_0(-ik|x|) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(-k^2 K_0''(-ik|x|) - ikK_0'(-ik|x|) \frac{1}{|x|} + k^2 K_0(ik|x|) \right) = 0. \qquad (4.2.44)$$

□

Зауваження 4.2.20 — Остання рівність стає очевидною якщо помножити останнє рівняння на $|x|^2$ та ввести нову незалежну змінну $\xi = -ik|x|$.

Зауваження 4.2.21 — При доведенні необхідної рівності важливим є також характер поведінки фундаментального розв'язку і його першої похідної в околі точки $x = 0$.

Відомо, що

$$K_0(ix) \sim \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \qquad (4.2.45)$$
$$K_0'(ix) \sim -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|}, \qquad (4.2.46)$$

при $x \to +0$.

□

4.2.4 Фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності

Теорема 4.2.22 (про фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності)

Фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності є

$$\varepsilon(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \cdot \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.2.47}$$

Зауваження 4.2.23 — Це означає, що узагальнена функція $\varepsilon(x,t)$ задовольняє інтегральній тотожності:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = -\varphi(0,0) \tag{4.2.48}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Доведення. Очевидно, що $\varepsilon(x,t) \in C^\infty(t > 0)$.

Твердження 4.2.24

Ця функція задовольняє рівняння теплопровідності:

$$\left(a^2 \Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) \varepsilon(x,t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.49}$$

Доведення. Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \left(\frac{|x|^2}{4a^2t^2} - \frac{n}{2t}\right)\varepsilon, \tag{4.2.50}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{2a^2 t}\varepsilon, \tag{4.2.51}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i^2} = \left(\frac{x_i^2}{4a^2t^2} - \frac{1}{2a^2 t}\right)\varepsilon. \tag{4.2.52}$$

Підставляючи знайдені похідні в оператор теплопровідності встановимо справедливість співвідношення. □

Повертаємося до доведення інтегральної тотожності:

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\iiint\limits_{\mathbb{R}^n}\varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=
$$

$$
=\lim_{\substack{\tau\to 0\\ R\to\infty}}\int\limits_{\tau}^{\infty}\iiint\limits_{U_R}\varepsilon(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=
$$

$$
=\lim_{\substack{\tau\to 0\\ R\to\infty}}\left(\int\limits_{\tau}^{\infty}\iiint\limits_{U_R}\varphi(x,t)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-a^2\Delta\varepsilon\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\right.
$$

$$
\left.+\int\limits_{\tau}^{\infty}\iint\limits_{S_R}a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\varepsilon-\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\varphi\right)\mathrm{d}S_r\,\mathrm{d}t+\iiint\limits_{U_R}\varepsilon\,\varphi|_{\tau}^{\infty}\,\mathrm{d}x\right)=
$$

$$
=-\lim_{\tau\to 0}\iiint\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x,\tau)\varepsilon(x,\tau)\,\mathrm{d}x \tag{4.2.53}
$$

Можна показати, що

$$
\iiint\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right\}}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\,\mathrm{d}x=1,\quad t>0. \tag{4.2.54}
$$

Твердження 4.2.25

$$
\frac{\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}\right\}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\xrightarrow[\tau\to+0]{\text{w.}}\delta(x). \tag{4.2.55}
$$

Доведення. Дійсно

$$
\left|\iiint\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}\right\}}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^2}(\varphi(x)-\varphi(0))\,\mathrm{d}x\right|\le
$$

$$
\le\frac{K}{\left(2a\sqrt{\pi\tau}\right)^n}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2\tau}\right\}|x|\,\mathrm{d}x=A, \tag{4.2.56}
$$

де $K=\max\limits_{x}|\varphi'(x)|$. $\square$

Для обчислення останнього інтегралу перейдемо до узагальненої сферичної системи координат та введемо нову змінну: $\xi = r/2a\sqrt{\tau}$:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{K\sigma_n}{(2a\sqrt{\pi\tau})^n} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2\tau}\right\} r^n \, \mathrm{d}r = \\
&= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^{R/2a\sqrt{\tau}} e^{-\xi^2}\xi^n \, \mathrm{d}\xi = \\
&= \frac{2a\sqrt{\tau}K\sigma_n}{\pi^{n/2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2}\xi^n \, \mathrm{d}\xi = \\
&= O\left(\sqrt{\tau}\right) \xrightarrow[\tau\to+0]{} 0.
\end{aligned} \tag{4.2.57}
$$

□

4.2.5 Фундаментальний розв'язок хвильового оператора

Теорема 4.2.26 (про фундаментальний розв'язок одновимірного хвильового оператора)
Узагальнена функція

$$\psi_1(x,t) = \frac{1}{2a}\theta(at - |x|) \tag{4.2.58}$$

є фундаментальним розв'язком одновимірного хвильового оператора, тобто задовольняє інтегральному співвідношенню:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\varphi(0,0) \tag{4.2.59}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$.

Доведення. Обчислимо ліву частину останнього виразу:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \\
&\qquad = -\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{|x|/a}^{\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-at}^{at} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\varphi(x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi(x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi(-x,|x|/a)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + \\
&+ \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}t = (\star)
\end{aligned} \tag{4.2.60}
$$

Зауваження 4.2.27 — Зрозуміло, що третій інтеграл $= 0$, адже ми інтегруємо частинну похідну функції що не залежить від змінної x по змінній x, тобто підінтегральна функція дорівнює нулеві.

В першому та другому інтегралах введемо нову змінну $x = at$, отримаємо

$$
\begin{aligned}
(\star) &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi(at,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial\varphi(-at,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(-at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{\varphi(0,0)}{2} - \frac{\varphi(0,0)}{2} = -\varphi(0,0).
\end{aligned} \tag{4.2.61}
$$

Зауваження 4.2.28 — Тут ми вкотре скористалися скінченністю носія φ (фінітністю пробної функції):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi(at,t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{d}\varphi(at,t) &= \\
&= \left.\frac{\varphi(at,t)}{2}\right|_{0}^{\infty} = \\
&= \frac{\varphi(a\cdot\infty,\infty) - \varphi(a\cdot 0,0)}{2} = \\
&= \frac{0-\varphi(0,0)}{2} = -\frac{\varphi(0,0)}{2}.
\end{aligned} \tag{4.2.62}
$$

□

Зауваження 4.2.29 — Без доведення наведемо вигляд фундаментального розв'язку для двовимірного та тривимірного хвильового оператора.

$$\psi_2(x,t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}, \quad x \in RR^2, \tag{4.2.63}$$

$$\psi_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x), \quad x \in RR^3. \tag{4.2.64}$$