

Зміст

4.4.4	Функція Гріна задачі Діріхле для кулі	1
4.4.5	Функція Гріна для областей на площині	3
4.4.6	Функція Гріна першої та другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої	5
4.5	Гармонічні функції та їх властивості	5
4.5.1	Інтегральне представлення функцій класу $C^2(\Omega)$. . .	6

4.4.4 Функція Гріна задачі Діріхле для кулі

Будемо розглядати граничну задачу

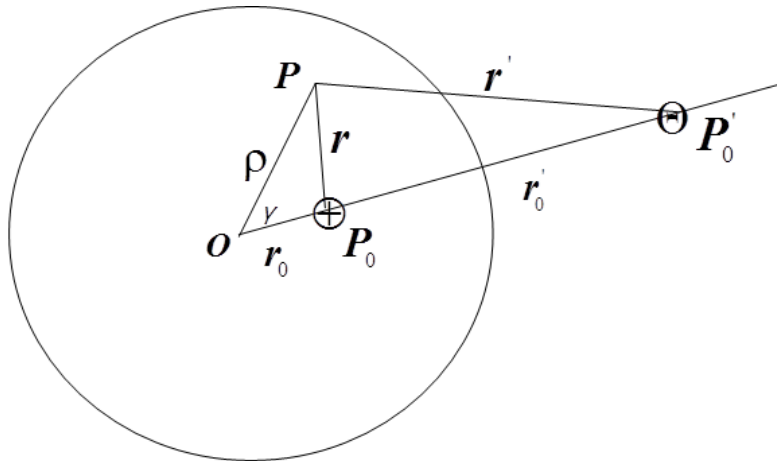
$$\begin{cases} \Delta U(P) = 0, & |P| < R, \\ U(P)|_{|P|=R} = f(P). \end{cases} \quad (4.4.18)$$

Побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа для кулі.

Введемо позначення:

$$|OP_0| = r_0, \quad |OP'_0| = r'_0, \quad r = |P - P_0|, \quad r' = |P - P'_0|. \quad (4.4.19)$$

На довільному промені, який проходить через центр кулі точку O розмістимо всередині кулі у точці P_0 одиничний точковий додатний заряд. Розглянемо точку P'_0 симетричну точці відносно сфери.



Це означає, що обидві точки лежать на одному промені, а їх відстані від центру сфери задовольняють співвідношенню

$$r_0 \cdot r'_0 = R^2. \quad (4.4.20)$$

В точці P'_0 розмістимо від'ємний заряд величини e , яку оберемо виходячи з властивостей функції Гріна.

Запишемо потенціал електростатичного поля від суми зарядів:

$$\Pi(P) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{e}{4\pi r}. \quad (4.4.21)$$

Обчислимо величину e використовуючи теорему косинусів:

$$\begin{aligned} \Pi(P) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \gamma}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2\rho \cdot \frac{R^2}{r_0} \cdot \cos \gamma}} \right) \Bigg|_{\rho=R} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma}} - \frac{e}{\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2R \cdot \frac{R^2}{r_0} \cdot \cos \gamma}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1 - e \cdot \frac{r_0}{R}}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma}} = 0. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Остання рівність буде вірною, якщо $e = R/r_0$.

Таким чином функцію Гріна задачі Діріхле для кулі можна записати при знайденому значенні величини зовнішнього заряду:

$$G_1(P, P_0) = \frac{1}{4\pi} \left(1/\sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \gamma} - 1/\sqrt{R^2 + \frac{\rho^2 r_0^2}{R^2} - 2\rho r_0 \cos \gamma} \right). \quad (4.4.23)$$

Для знаходження формули інтегрального представлення обчислимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial n_P} \Bigg|_{P \in S} &= \frac{\partial G_1(P, P_0)}{\partial \rho} \Bigg|_{\rho=R} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\rho - r_0 \cos \gamma}{(\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \gamma)^{3/2}} + \frac{\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2} - r_0 \cos \gamma}{\left(\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2} + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma \right)^{3/2}} \right) \Bigg|_{\rho=R} = \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \cdot \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Для запису остаточної формули треба ввести сферичну систему координат. Запишемо через сферичні кути:

$$\cos \gamma = \frac{\angle(OP, OP_0)}{\rho r_0} = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (4.4.25)$$

Тут ρ, φ, θ — сферичні координати точки P , а r_0, φ_0, θ_0 — сферичні координати точки P_0 .

Формула 4.4.4.1 (формула Пуассона для кулі)

Використовуючи формулу (3.16) запишемо розв’язок задачі Діріхле:

$$U(r_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(R^2 - r_0^2) \sin \theta f(\varphi, \theta) d\theta d\varphi}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (4.4.26)$$

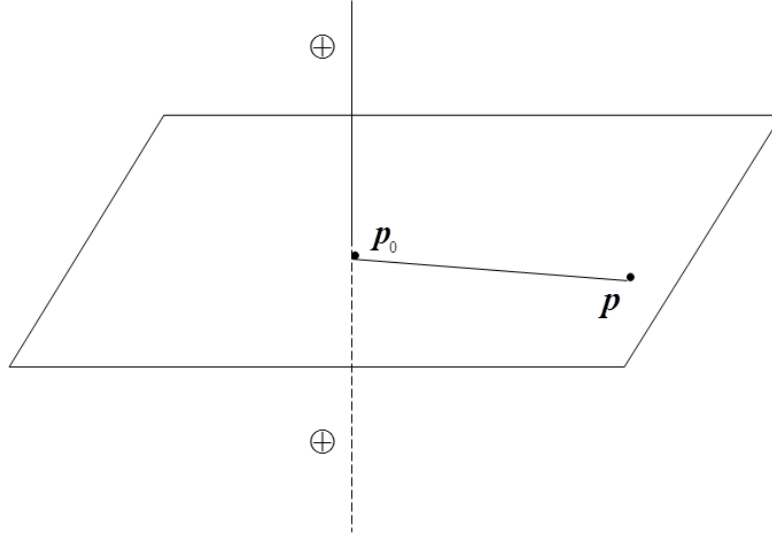
Ця формула дає розв’язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа і називається *формулою Пуассона для кулі*.

4.4.5 Функція Гріна для областей на площині

Функція Гріна для областей у двовимірному випадку в принципі можна будувати в той же спосіб, що і в тривимірному випадку. При цьому треба враховувати вигляд фундаментального розв’язку для \mathbb{R}^2 , що приводить до наступного вигляду функції Гріна:

$$G_i(p, p_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{1}{|p - p_0|} \right) + g_i(p, p_0), \quad p, p_0 \in D \subset \mathbb{R}^2. \quad (4.4.27)$$

Фізичний зміст фундаментального розв’язку в двовимірному випадку представляє собою потенціал електростатичного поля в точці p рівномірно зарядженої одиничним додатнім зарядом нескінченної нитки, яка проходить ортогонально до площини через деяку точку p_0 . Точки p, p_0 належать площині:



Аналогічно кулі, можна отримати функцію Гріна задачі Діріхле для кола, яка має вигляд:

$$G_1(p, p_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + \rho^2 - 2\rho r_0 \cos \gamma}} \right) - \ln \left(\frac{R}{r_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{R^4}{r_0^2} + \rho^2 - 2\rho \cdot \frac{R^2}{r_0} \cdot \cos \gamma}} \right) \right) \quad (4.4.28)$$

Або через комплексні змінні $z = \rho e^{i\varphi}$, $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, $z_0^* = \frac{R^2}{z_0}$:

$$G_1(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0 \cdot |z - z_0^*|}{R \cdot |z - z_0|} \right). \quad (4.4.29)$$

Таким чином розв'язок задачі Діріхле для кола може бути записаним у вигляді:

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} f(\varphi) d\varphi. \quad (4.4.30)$$

Або через точки комплексної площини,

$$\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} = \operatorname{Re} \left(\frac{z + z_0}{z - z_0} \right), \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}. \quad (4.4.31)$$

Тоді попередня формула набуває вигляду

$$u(z_0) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) \cdot \frac{z + z_0}{z - z_0} \cdot \frac{dz}{z}. \quad (4.4.32)$$

Нехай необхідно побудувати функцію Гріна першої граничної задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in D, \\ u(x, y)|_C = f(x, y) \end{cases} \quad (4.4.33)$$

для довільної однозв'язної області D з жордановою границею C .

Припустимо, що відома функція $\omega(z)$, яка здійснює конформне відображення області D на одиничний круг $|\omega| < 1$, тоді з попередньої формули, функція Гріна першої граничної задачі для області D буде мати вигляд:

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \overline{\omega(z_0)}\omega(z)}{\omega(z) - \omega(z_0)} \right|. \quad (4.4.34)$$

А розв'язок задачі Діріхле можна записати у вигляді:

$$u(\zeta_0) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \cdot \frac{\omega(\zeta) + \omega(\zeta_0)}{\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} \cdot d\zeta. \quad (4.4.35)$$

4.4.6 Функція Гріна першої та другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої

4.5 Гармонічні функції та їх властивості

Визначення 4.5.0.1 (гармонічної у відкритій області функції). Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій відкритій області Ω* , якщо $u \in C^{(2)}(\Omega)$ і $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$, тобто функція є двічі неперервно диференційованим розв'язком рівняння Лапласа.

Визначення 4.5.0.2 (гармонічної в точці функції). Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій точці*, якщо ця функція гармонічна в деякому околі цієї точки.

Визначення 4.5.0.3 (гармонічної в замкненій області функції). Функцію $u(x)$ називають *гармонічною в деякій замкненій області*, якщо вона гармонічна в деякій більш широкій відкритій області.

З гармонічними функціями у тривимірних і двовимірних областях ми вже зустрічалися:

Приклад 4.5.0.1 (гармонічної функції у \mathbb{R}^2)

$$\Delta \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - \xi|} = 0, \quad x \neq \xi, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (4.5.1)$$

Приклад 4.5.0.2 (гармонічної функції у \mathbb{R}^3)

$$\Delta \frac{1}{4\pi|x - \xi|} = 0, \quad x \neq \xi, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (4.5.2)$$

4.5.1 Інтегральне представлення функцій класу $C^2(\Omega)$

Для отримання інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$ будемо використовувати другу формулу Гріна для оператора Лапласа:

$$\iiint_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)) \, dx = \iint_S \left(v(x) \cdot \frac{\partial u(x)}{\partial n} - u(x) \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial n} \right) \, dS. \quad (4.5.3)$$

В якості функції $u(\xi)$ оберемо довільну функцію $C^2(\Omega)$, а у якості v , фундаментальний розв'язок оператора Лапласа для тривимірного евклідового простору $\frac{1}{4\pi|x-\xi|}$.

В результаті підстановки цих величин в останню формулу отримаємо

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(\frac{1}{4\pi|x - \xi|} \Delta u(\xi) - u(\xi) \delta(x - \xi) \right) \, d\xi = \\ & = \iint_S \left(\frac{1}{4\pi|x - \xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi|x - \xi|} \right) \, dS_{\xi}. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Після обчислення другого доданку в лівій частині можемо записати формулу інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} u(x) = & - \iiint_{\Omega} \frac{1}{4\pi|x - \xi|} \Delta u(\xi) \, d\xi + \\ & + \iint_S \left(\frac{1}{4\pi|x - \xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi|x - \xi|} \right) \, dS_{\xi}. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

У випадку коли функція $u(x)$ є гармонічною в області Ω то остання формула прийме вигляд:

$$u(x) = \iint_S \left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) dS_\xi. \quad (4.5.6)$$

З формул вище можна отримати деякі властивості гармонічних функцій:

Властивість 4.5.1.1

Гармонічна в області Ω функція $u(x)$ має в кожній внутрішній точці області Ω неперервні похідні будь-якого порядку.

Доведення. Дійсно, оскільки $x \in \Omega$, $\xi \in S$, $x \neq \xi$, то для обчислення будь-якої похідної необхідно диференціювати підінтегральну функцію, яка має похідні будь-якого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} = & \iint_S \left(\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - \right. \\ & \left. - u(\xi) \cdot \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} \cdot \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) dS_\xi. \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

□

Властивість 4.5.1.2

Якщо $u(x)$ — гармонічна функція в скінченій області Ω з границею S , то має місце співвідношення

$$\oint_S \frac{\partial u(x)}{\partial n} dS = 0. \quad (4.5.8)$$

Доведення. Дійсно, у другій формулі Гріна для оператора Лапласа візьмемо $v(x) \equiv 1$, тоді інтеграл в лівій частині і другий інтеграл правої частини перетворюється в нуль. В результаті чого отримаємо жадану рівність. □

Теорема 4.5.1.1 (про середнє значення гармонічної функції)

Якщо $u(x)$ — гармонічна функція в кулі і неперервна в замиканні цієї кулі, то значення гармонічної функції в центрі кулі дорівнює середньому арифметичному її значень на сфері, що обмежує кулю.

Доведення. Використаємо формулу Гріна для оператора Лапласа:

$$u(x) = \iint_S \left(\frac{1}{4\pi|x-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{4\pi|x-\xi|} \right) dS_\xi. \quad (4.5.9)$$

в якій в якості поверхні S візьмемо сферу радіуса R з центром у точці x_0 , і обчислимо значення функції u в точці x_0 :

$$u(x_0) = \iint_{S(x_0, R)} \left(\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} \cdot \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} \right) dS_\xi. \quad (4.5.10)$$

Оскільки $\xi \in S(x_0, R)$, то $\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} = \frac{1}{4\pi R}$, а

$$\left. \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{4\pi|x_0-\xi|} \right|_{S(x_0, R)} = \frac{1}{4\pi R^2}. \quad (4.5.11)$$

Таким чином

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S(x_0, R)} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} dS_\xi + \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S(x_0, R)} u(\xi) dS_\xi. \quad (4.5.12)$$

Оскільки перший інтеграл дорівнює нулю, то остаточно маємо

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S(x_0, R)} u(\xi) dS_\xi. \quad (4.5.13)$$

□