

Зміст

2.3.1	Характеристичні числа ермітового неперервного ядра	1
2.4	Теорема Гільберта-Шмідта та її наслідки	3
2.4.1	Білінійне розвинення ермітового неперервного ядра	3
2.4.2	Ряд Фур'є функції із $L_2(G)$	5
2.4.3	Теорема Гільберта-Шмідта	6
2.4.4	Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром	10

2.3.1 Характеристичні числа ермітового неперервного ядра

Теорема 2.3.1.1 (про існування характеристичного числа у ермітового неперервного ядра)

Для будь-якого ермітового неперервного ядра, що не дорівнює тотожно нулю існує принаймні одне характеристичне число і найменше з них за модулем λ_1 задовольняє варіаційному принципу

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}}. \quad (2.3.5)$$

Доведення. Серед усіх $f \in L_2$ оберемо такі, що $\|f\|_{L_2(G)} = 1$. Позначимо

$$\nu = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ \|f\|_{L_2}=1}} \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)}. \quad (2.3.6)$$

Оскільки

$$\|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq MV \|f\|_{L_2(G)} \leq MV, \quad (2.3.7)$$

Згідно до визначення точної верхньої межі,

$$\exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(G) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{K}f_k\|_{L_2(G)} = \nu. \quad (2.3.8)$$

Оцінимо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}^2 f\|_{L_2(G)} &= \|\mathbf{K}(\mathbf{K}f)\|_{L_2(G)} = \\ &= \left\| \mathbf{K} \left(\frac{\mathbf{K}f}{\|\mathbf{K}f\|} \right) \right\|_{L_2(G)} \cdot \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq \\ &\leq \nu \cdot \|\mathbf{K}f\|_{L_2(G)} \leq \nu^2. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Покажемо, що $\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k \rightarrow 0$ в середньому квадратичному. Тобто що

$$\|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (2.3.10)$$

Дійсно:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 &= (\mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k, \mathbf{K}^2 f_k - \nu^2 f_k)_{L_2(G)} = \\
&= \|\mathbf{K}^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 + \nu^4 - \nu^2 (\mathbf{K}^2 f_k, f_k) - \nu^2 (f_k, \mathbf{K}^2 f_k) = \\
&= \|\mathbf{K}^2 f_k\|_{L_2(G)}^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \|\mathbf{K} f_k\|_{L_2(G)}^2 \leq \\
&\leq \nu^2 (\nu^2 - \|\mathbf{K}^2 f_k\|_{L_2(G)}^2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Розглянемо послідовність $\{\mathbf{K} f_k\} = \{\varphi_k\}$, яка є компактною в рівномірній метриці.

У неї існує підпослідовність $\{\varphi_{k_i}\}_{i=1}^\infty$ збіжна в $C(\overline{G})$, тобто $\exists \varphi \in C(\overline{G})$, така що $\|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\overline{G})} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$.

Покажемо, що $\mathbf{K}^2 \varphi - \nu^2 \varphi = 0$ в кожній точці, тобто $\|\mathbf{K}^2 \varphi - \nu^2 \varphi\|_{C(\overline{G})} = 0$.

Справді,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{K}^2 \varphi - \nu^2 \varphi\|_{C(\overline{G})} &= \|\mathbf{K}^2 \varphi - \mathbf{K}^2 \varphi_{k_i} + \mathbf{K}^2 \varphi_{k_i} - \nu^2 \varphi_{k_i} + \nu^2 \varphi_{k_i} - \nu^2 \varphi\|_{C(\overline{G})} \leq \\
&\leq \|\mathbf{K}^2 \varphi - \mathbf{K}^2 \varphi_{k_i}\|_{C(\overline{G})} + \|\mathbf{K}^2 \varphi_{k_i} - \nu^2 \varphi_{k_i}\|_{C(\overline{G})} + \\
&\quad + \|\nu^2 \varphi_{k_i} - \nu^2 \varphi\|_{C(\overline{G})} \leq \\
&\leq (MV)^2 \|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\overline{G})} + M\sqrt{V} \|\mathbf{K}^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\|_{L_2(\overline{G})} + \\
&\quad + \nu^2 \|\varphi_{k_i} - \varphi\|_{C(\overline{G})} \rightarrow 0 + 0 + 0.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Таким чином має місце рівність

$$\mathbf{K}^2 \varphi - \nu^2 \varphi = 0 \tag{2.3.13}$$

Отже маємо: $(\mathbf{K} + E\nu)(\mathbf{K} - E\nu)\varphi = 0$. Ця рівність може мати місце у двох випадках:

1. $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv 0$. Тоді $\varphi = \frac{1}{\nu}\mathbf{K}\varphi$, а отже φ — власна функція, $\frac{1}{\nu}$ — характеристичне число оператора \mathbf{K} .
2. $(\mathbf{K} - E\nu)\varphi \equiv \Phi \neq 0$. Тоді $(\mathbf{K} + E\nu)\Phi \equiv 0$. Тоді $\Phi = -\frac{1}{\nu}\mathbf{K}\Phi$, а отже Φ — власна функція, $-\frac{1}{\nu}$ — характеристичне число оператора \mathbf{K} .

Залишилось довести, що це характеристичне число є мінімальним за модулем. Припустимо супротивне. Нехай $\exists \lambda_0 : |\lambda_0| < |\lambda_1|$, тоді

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|\mathbf{K}f\|}{\|f\|} \geq \frac{\|\mathbf{K}\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{|\lambda_0|}, \tag{2.3.14}$$

тобто $|\lambda_0| \geq |\lambda_1|$, протиріччя. \square

Зауваження 2.3.1.1 — Доведена теорема є вірною і для ермітових полярних ядер,

Звідси безпосередньо випливають такі

Властивості 2.3.1.1 (характеристичних чисел та власних функцій ермітового ядра)

Нескладно показати, що:

1. Множина характеристичних чисел ермітового неперервного ядра не порожня, є підмножиною множини дійсних чисел і не має скінчених граничних точок.
2. Кратність будь-якого характеристичного числа скінчена.
3. Власні функції можна вибрати так, що вони утворюють ортонормовану систему, тобто $\{\varphi_k\}_{k=1,2,\dots}$ такі що $(\varphi_k, \varphi_i)_{L_2(G)} = \delta_{ki}$.

Зауваження 2.3.1.2 — Для доведення останньої властивості достатньо провести процес ортогоналізації Гілберта-Шмідта для будь-якої системи лінійно незалежних власних функцій, і пронормувати отриману систему.

2.4 Теорема Гілберта-Шмідта та її наслідки

2.4.1 Білінійне розвинення ермітового неперервного ядра

Нехай $K(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ — ермітове неперервне ядро, $|\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}|$, $i = 1, 2, \dots$ — його характеристичні числа і $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ — ортонормована система власних функцій, що відповідають власним числам.

Розглянемо послідовність ермітових неперервних ядер:

$$K^p(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\overline{\varphi_i(y)}\varphi_i(x)}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.4.1)$$

Зрозуміло що при цьому

$$K^p(x, y) = (K^p)^*(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G}). \quad (2.4.2)$$

Дослідимо властивості ермітових операторів, що відображають ядру $K^p(x, y)$.

Твердження 2.4.1.1

Будь-яке характеристичне число λ_j , $j \geq p + 1$ та відповідна йому власна функція φ_j є характеристичним числом і власною функцією ядра $K^p(x, y)$.

Доведення. Справді:

$$\mathbf{K}^p \varphi_j = \mathbf{K} \varphi_j - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} (\varphi_i, \varphi_j) = \mathbf{K} \varphi_j = \frac{\varphi_j}{\lambda_j}. \quad (2.4.3)$$

□

Нехай λ_0 , φ_0 — характеристичне число та відповідна власна функція $K^p(x, y)$, тобто $\lambda_0 \mathbf{K}^p \varphi_0 = \varphi_0$.

Твердження 2.4.1.2

$(\varphi_0, \varphi_j) = 0$ для $j = \overline{1, p}$.

Доведення. З того, що φ_0 є власною функцією ядра \mathbf{K}^p випливає, що

$$\varphi_0 = \lambda_0 \mathbf{K} \varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i}{\lambda_i} (\varphi_0, \varphi_i). \quad (2.4.4)$$

Підставляючи цей вираз для φ_0 у потрібний скалярний добуток маємо

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_j) &= \lambda_0 (\mathbf{K} \varphi_0, \varphi_j) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_j)}{\lambda_i} = \\ &= \frac{\lambda_0}{\lambda_j} (\varphi_0, \varphi_j) - \frac{\lambda_0}{\lambda_j} (\varphi_0, \varphi_j) = 0. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

□

Отже λ_0 , φ_0 відповідно характеристичне число і власна функція ядра $K(x, y)$.

Таким чином φ_0 — ортогональна до усіх власних функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$. Але тоді λ_0 співпадає з одним із характеристичних чисел $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$ тобто $\varphi_0 = \varphi_k$ для деякого $k \geq p + 1$.

Отже у ядра $K^p(x, y)$ множина власних функцій і характеристичних чисел вичерпується множиною власних функцій і характеристичних чисел ядра $K(x, y)$ починаючи з номера $p + 1$.

Враховуючи, що λ_{p+1} — найменше за модулем характерне число ядра $K^p(x, y)$, має місце нерівність

$$\frac{\|\mathbf{K}^p f\|_{L_2(G)}}{\|f\|_{L_2(G)}} \leq \frac{1}{|\lambda_{p+1}|}. \quad (2.4.6)$$

Для ядра, що має скінчену кількість характеристичних чисел, очевидно, має місце рівність

$$K^N(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \equiv 0. \quad (2.4.7)$$

Тобто будь-яке ермітове ядро зі скінченною кількістю характеристичних чисел є виродженим і представляється у вигляді

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \quad (2.4.8)$$

Враховуючи теорему про існування характеристичних чисел у ермітового оператора можемо записати:

$$\|K^{(p)} f\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}f - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} \leq \frac{\|f\|_{L_2(G)}}{|\lambda_{p+1}|} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \quad (2.4.9)$$

Тобто можна вважати, що ермітове ядро в певному розумінні наближається наступним білінійним рядом:

$$K(x, y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \quad (2.4.10)$$

Для виродженого ядра маємо його представлення у вигляді

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}. \quad (2.4.11)$$

2.4.2 Ряд Фур'є функції із $L_2(G)$

Розглянемо довільну функцію $f \in L_2(G)$ і деяку ортонормовану систему функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Визначення 2.4.2.1 (ряду Фур'є). *Рядом Фур'є* функції f із $L_2(G)$ називається

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f, u_i) u_i \sim f. \quad (2.4.12)$$

Визначення 2.4.2.2 (коефіцієнта Фур'є). Вираз (f, u_i) називається *коефіцієнтом Фур'є*.

Теорема 2.4.2.1 (нерівність Бесселя)

$\forall f \in L_2(G)$ виконується *нерівність Бесселя*: $\forall N$

$$\sum_{i=1}^N |(f, u_i)|^2 \leq \|f\|_{L_2(G)}^2. \quad (2.4.13)$$

Зауваження 2.4.2.1 — Нерівність Бесселя гарантує збіжність ряду Фур'є в середньоквадратичному, але не обов'язково до функції f .

Визначення 2.4.2.3 (повної (замкненої) системи функцій). Ортонормована система функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ називається *повною (замкненою)*, якщо ряд Фур'є для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ по цій системі функцій збігається до цієї функції в просторі $L_2(G)$.

Теорема 2.4.2.2 (критерій повноти ортонормованої системи функцій)

Для того щоб система функцій $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ була повною в $L_2(G)$ необхідно і достатньо, щоби для будь-якої функції $f \in L_2(G)$ виконувалась рівність Парсеваля-Стеклова:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, u_i)|^2 = \|f\|_{L_2(G)}^2. \quad (2.4.14)$$

2.4.3 Теорема Гільберта-Шмідта

Визначення 2.4.3.1 (джерелувато-зображуваної функції). Функція $f(x)$ називається *джерелувато-зображуваною* через ермітове неперервне ядро $K(x, y) = K^*(x, y)$, $K \in C(\overline{G} \times \overline{G})$, якщо існує функція $h(x) \in L_2(G)$, така що

$$f(x) = \int_G K(x, y)h(y) dy. \quad (2.4.15)$$

Теорема 2.4.3.1 (Гільберта-Шмідта)

Довільна джерелувато-зображувана функція f розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою власних функцій ермітового неперервного ядра $K(x, y)$

Доведення. Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$(f, \varphi_i) = (\mathbf{K}h, \varphi_i) = (h, \mathbf{K}\varphi_i) = \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i}. \quad (2.4.16)$$

Отже ряд Фур'є функції f має вигляд

$$f \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \quad (2.4.17)$$

Якщо власних чисел скінчена кількість, то можливе точне представлення

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i(x), \quad (2.4.18)$$

якщо ж власних чисел злічена кількість, то можемо записати:

$$\left\| f - \sum_{i=1}^p \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} = \left\| \mathbf{K}h - \sum_{i=1}^p \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\|_{L_2(G)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \quad (2.4.19)$$

Покажемо, що формулу

$$K(x, y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}. \quad (2.4.20)$$

можна розглядати як розвинення ядра $K(x, y)$ в ряд Фур'є по системі власних функцій $\varphi_i(x)$. Перевіримо це обчислюючи коефіцієнт Фур'є:

$$\begin{aligned} (K(x, y), \varphi_i)_{L_2(G)} &= \int_G K(x, y) \overline{\varphi_i}(x) dx = \\ &= \int_G \overline{K(y, x)} \overline{\varphi_i}(x) dx = \frac{\overline{\varphi_i}(y)}{\lambda_i}. \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Доведемо рівномірну збіжність ряду Фур'є за критерієм Коші і покажемо, що при $n, m \rightarrow \infty$, відрізок ряду прямує до нуля. За нерівністю Коші-Буняківського маємо:

$$\left| \sum_{i=n}^m \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right| \leq \sum_{i=n}^m |(h, \varphi_i)| \frac{|\varphi_i|}{|\lambda_i|} \leq \left(\sum_{i=n}^m |(h, \varphi_i)|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=n}^m \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \right)^{1/2} \quad (2.4.22)$$

Але

$$\sum_{i=n}^m |(h, \varphi_i)|^2 \leq \|h\|_{L_2(G)}^2, \quad (2.4.23)$$

тобто ряд збігається, а вказана сума прямує до 0 при $n, m \rightarrow \infty$. Зокрема маємо

$$\sum_{i=n}^m \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \leq \int_G |K(x, y)|^2 dx \leq M^2 V, \quad (2.4.24)$$

тобто ряд збігається.

Отже

$$\left(\sum_{i=n}^m |(h, \varphi_i)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=n}^m \frac{|\varphi_i|^2}{\lambda_i^2} \right)^{1/2} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0, \quad (2.4.25)$$

а отже

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \quad (2.4.26)$$

збігається абсолютно і рівномірно саме до функції $f(x)$. \square

Наслідок 2.4.3.1

Довільне повторне ядро для ермітового неперервного ядра $K(x, y)$ розкладається в білінійний ряд по системі власних функцій ермітового неперервного ядра, який збігається абсолютно і рівномірно, а саме рядом

$$K_{(p)}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i^p}, \quad (2.4.27)$$

де $p = 2, 3, \dots$, і коефіцієнти Фур'є $\overline{\varphi_i(y)}/\lambda_i^p$.

Повторне ядро $K_{(p)}(x, y) = \int_G K(x, \xi) K_{(p-1)}(\xi, y) d\xi$ є джерелувато-зображувана функція і таким чином для нього має місце теорема Гільберта-Шмідта.

Доведемо деякі важливі рівності:

$$\begin{aligned} K_{(2)}(x, x) &= \int_G K(x, \xi) K(\xi, x) d\xi = \\ &= \int_G K(x, \xi) \overline{K(x, \xi)} d\xi = \\ &= \int_G |K(x, \xi)|^2 d\xi = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i^2}. \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Зауваження 2.4.3.1 — Останій перехід впливає з наслідку вище.

Проінтегруємо отримане співвідношення, отримаємо

$$\iint_{G \times G} |K(x, y)|^2 dx dy = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}. \quad (2.4.29)$$

Теорема 2.4.3.2 (про збіжність білінійного ряду для ермітового неперервного ядра)

Ермітове неперервне ядро $K(x, y)$ розкладається в білінійний ряд

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \quad (2.4.30)$$

по своїх власних функціях, і цей ряд збігаються в нормі $L_2(G)$ по аргументу x рівномірно для кожного $y \in \bar{G}$, тобто

$$\left\| K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right\|_{L_2(x \in G)} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{y \in \bar{G}} 0. \quad (2.4.31)$$

Доведення.

$$\left\| K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right\|_{L_2(G)}^2 = \int_G |K(x, y)|^2 dx - \sum_{i=1}^p \frac{|\varphi_i(y)|^2}{\lambda_i^2} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{y \in \bar{G}} 0. \quad (2.4.32)$$

Додатково інтегруючи по аргументу $y \in G$ отримаємо збіжність вищезгаданого білінійного ряду в середньоквадратичному:

$$\iint_{G \times G} \left(K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \right)^2 dy dx \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.4.33)$$

□

2.4.4 Формула Шмідта для розв'язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду $\varphi = \lambda \mathbf{K} \varphi + f$, з ермітовим неперервним ядром

$$K(x, y) = K^*(x, y). \quad (2.4.34)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p, \dots, \varphi_1, \dots, \varphi_p, \dots$ — множина характеристичних чисел та ортонормована система власних функцій ядра $K(x, y)$.

Розкладемо розв'язок рівняння φ по системі власних функцій ядра $K(x, y)$:

$$\begin{aligned}\varphi &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{K}\varphi, \varphi_i) \varphi_i + f = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, \mathbf{K}\varphi_i) \varphi_i + f = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i + f,\end{aligned}\tag{2.4.35}$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$(\varphi, \varphi_k) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_i)}{\lambda_i} (\varphi_i, \varphi_k) + (f, \varphi_k) = \lambda \frac{(\varphi, \varphi_k)}{\lambda_k} + (f, \varphi_k).\tag{2.4.36}$$

Отже,

$$(\varphi, \varphi_k) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) = (f, \varphi_k),\tag{2.4.37}$$

і тому

$$(\varphi, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}, \quad k = 1, 2, \dots\tag{2.4.38}$$

Таким чином має місце

Теорема 2.4.4.1 (формула Шмідта)

Виконується співвідношення

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x) + f(x).\tag{2.4.39}$$

Розглянемо усі можливі значення λ :

1. Якщо $\lambda \notin \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, тоді існує єдиний розв'язок для довільного вільного члена f і цей розв'язок представляється за формулою Шмідта.
2. Якщо $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+q-1}$ — співпадає з одним з характеристичних чисел кратності q , та при цьому виконуються умови ортогональності

$$(f, \varphi_k) = (f, \varphi_{k+1}) = \dots = (f, \varphi_{k+q-1}) = 0\tag{2.4.40}$$

тоді розв'язок існує (не єдиний), і представляється у вигляді

$$\varphi(x) = \lambda_k \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq \lambda_k}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i - \lambda_k} \varphi_i(x) + f(x) + \sum_{j=k}^{k+q-1} c_j \varphi_j(x), \quad (2.4.41)$$

де c_j — довільні константи.

3. Якщо $\exists j : (f, \varphi_j) \neq 0, k \leq j \leq k+q-1$ то розв'язків не існує.

Приклад 2.4.4.1

Знайти ті значення параметрів a, b для яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(xy - \frac{1}{3} \right) \varphi(y) dy + ax^2 - bx + 1$$

має розв'язок для будь-якого значення λ .

Розв'язок. Знайдемо характеристичні числа та власні функції спряженого однорідного рівняння (ядро ермітове).

$$\varphi(x) = \lambda x \int_{-1}^1 y \varphi(y) dy - \frac{\lambda}{3} \int_{-1}^1 \varphi(y) dy = \lambda x c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2.$$

Маємо СЛАР:

$$\begin{cases} c_1 = \int_{-1}^1 y \varphi(y) dy = \int_{-1}^1 y \left(\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) dy = \frac{2\lambda}{3} c_1, \\ c_2 = \int_{-1}^1 \varphi(y) dy = \int_{-1}^1 \left(\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) dy = -\frac{2\lambda}{3} c_2. \end{cases}$$

Її визначник

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2\lambda}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Тобто характеристичні числа

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

А відповідні власні функції

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = 1.$$

Умови ортогональності:

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 (ax^2 - bx + 1)x \, dx = -\frac{2b}{3} = 0, \\ \int_{-1}^1 (ax^2 - bx + 1) \, dx = \frac{2a}{3} + 2 = 0. \end{cases}$$

Тобто розв'язок існує для будь-якого λ якщо

$$a = -3, \quad b = 0.$$