Зміст

1 Вступ

1.1 Предмет і методи математичної фізики

Сучасні технології дослідження реального світу доволі інтенсивно використовують методи математичного моделювання, зокрема ці методи широко використовуються тоді, коли дослідження реального (фізичного) об'єкту є неможливими, або надто дорогими. Вже традиційними стали моделювання властивостей таких фізичних об'єктів:

- температурні поля і теплові потоки;
- електричні, магнітні та електромагнітні поля;
- концентрація речовини в розчинах, розплавах або сумішах;
- напруження і деформації в пружних твердих тілах;
- параметри рідини або газу, який рухається (обтікає) деяке тіло;
- перенос різних субстанцій потоками рідин або газу та інші.

Характерною особливістю усіх математичних моделей, що описують перелічені та багато інших процесів є те, що параметри, які представляють інтерес для дослідника є функціями точки простору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ та часу t, а самі співвідношення з яких ці характеристики обчислюються є диференціальними рівняннями в частинних похідних зі спеціальними додатковими умовами (крайовими умовами), які дозволяють виділяти однозначний розв'язок.

Таким чином можна сказати, що основними об'єктами дослідження предмету математична фізика є крайові задачі для рівнянь в частинних похідних, які моделюють певні фізичні процеси.

Процес дослідження реального об'єкту фізичного світу можна представити за наступною схемою:

1. Побудова математичної моделі реального процесу у вигляді диференціального рівняння або системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, доповнення диференціального рівняння в частинних похідних граничними умовами.

2. Дослідження властивостей сформульованої крайової задачі з точки зору її коректності. Коректність постановки задачі передбачає виконання наступних умов:

   - Розв'язок крайової задачі існує;
   - Розв'язок єдиний;
   - Розв'язок неперервним чином залежить від вхідних даних.

3. Знаходження розв'язку крайової задачі:

   - точного для найбільш простих задач;
   - або наближеного для переважної більшості задач.

Треба відмітити, що усі перелічені пункти дослідження окрім побудови наближених методів знаходження розв'язків відносяться до предмету дисципліни Математична фізика.

Для дослідження задач математичної фізики використовуються математичний апарат наступних розділів математики:

- математичний аналіз;
- лінійна алгебра;
- диференціальні рівняння;
- теорія функцій комплексної змінної;
- функціональний аналіз;

При побудові математичних моделей використовуються знання з елементарної фізики.

Наведемо приклад доволі простої і в той же час цілком реальної математичної моделі розповсюдження тепла в стрижні.

Приклад 1.1.1 (моделі розповсюдження тепла в стрижні)
Нехай ми маємо однорідний стрижень з теплоізольованою боковою поверхнею і наступними фізичними параметрами:

- ρ — густина матеріалу;
- S — площа поперечного перерізу;
- k — коефіцієнт теплопровідності;
- c — коефіцієнт теплоємності;
- L — довжина стрижня.

Позначимо $u(x, t)$ — температуру стрижня в точці x в момент часу t, $u_0(x)$ — температуру стрижня у точці x в початковий момент часу $t = 0$.

Припустимо, що на лівому кінці стрижня температура змінюється за заданим законом $\varphi(t)$, а правий кінець стрижня теплоізольований.

В таких припущеннях математична модель може бути записана у вигляді наступної граничної задачі:

- диференціальне рівняння:
$$c\rho \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1.1.1}$$
- граничні умови на кінцях стрижня:
$$u(0, u) = \varphi(t), \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0 \tag{1.1.2}$$
- початкова умова:
$$u(x, 0) = u_0(t) \tag{1.1.3}$$

2 Інтегральні рівняння

2.0.1 Основні поняття

Визначення 2.0.1. *Інтегральні рівняння* — рівняння, що містять невідому функцію під знаком інтегралу.

Багато задач математичної фізики зводяться до лінійних інтегральних рівнянь наступних двох виглядів.

Визначення 2.0.2 (інтегрального рівняння Фредгольма II роду)**.** *Інтегральним рівнянням Фредгольма II роду* називається рівняння вигляду

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + f(x). \tag{2.0.1}$$

Тут λ — комплексний параметр, $\lambda \in \mathbb{C}$ (відомий або невідомий), G — область інтегрування, $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{G}$ — замкнена та обмежена.

Визначення 2.0.3 (інтегрального рівняння Фредгольма I роду)**.** *Інтегральним рівнянням Фредгольма I роду* називається рівняння вигляду

$$\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = f(x). \tag{2.0.2}$$

Визначення 2.0.4 (ядра інтегрального рівняння)**.** *Ядром* інтегральних рівнянь наведених вище називається функція $K(x,y) \in C\left(\overline{G} \times \overline{G}\right)$.

Визначення 2.0.5 (вільного члена інтегрального рівняння)**.** *Вільним членом* інтегральних рівнянь наведених вище називається функція $f(x) \in C\left(\overline{G}\right)$.

Визначення 2.0.6 (однорідного рівняння Фредгольма II роду)**.** Інтегральне рівняння Фредгольма II роду при $f(x) \equiv 0$ називається *однорідним*:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.0.3}$$

Визначення 2.0.7 (інтегрального оператора)**.** Зрозуміло, що кожному ядру $K(x,y)$ відповідає *інтегральний оператор* $\mathbf{K}$ який визначається наступним чнном:

$$\mathbf{K} : \varphi(x) \mapsto (\mathbf{K}\varphi)(x) = \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.0.4}$$

Будемо записувати інтегральні рівняння скорочено в операторній формі:

$$\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi + f, \tag{2.0.5}$$

$$\mathbf{K}\varphi = f, \tag{2.0.6}$$

$$\varphi = \lambda\mathbf{K}\varphi. \tag{2.0.7}$$

Визначення 2.0.8 (спряженого (союзного ядра)). *Спряженим (сюзним) ядром* називається функція

$$K^\star(x,y) = \overline{K}(y,x). \tag{2.0.8}$$

Визначення 2.0.9 (спряженого (союзного) рівняння). Інтегральне рівняння

$$\psi(x) = \overline{\lambda}\int\limits_G K^\star(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}y + g(x) \tag{2.0.9}$$

називається *спряженим (союзним)* до відповідного інтегрального рівняння Фредгольма II роду.

Операторна форма рівнянь останніх двох рівнянь:

$$\psi = \overline{\lambda}\mathbf{K}^\star\psi + g, \tag{2.0.10}$$

$$\psi = \overline{\lambda}\mathbf{K}^\star\psi. \tag{2.0.11}$$

Визначення 2.0.10 (характеристичних чисел ядра). Комплексні значення λ, при яких однорідне інтегральне рівняння Фредгольма II роду має нетривіальні розв'язки, називаються *характеристичними числами ядра* $K(x,y)$.

Визначення 2.0.11 (власних функцій ядра). Розв'язки, які відповідають власним числам, називаються *власними функціями* ядра.

Визначення 2.0.12 (кратності характеристичного числа)**.** Кількість лінійно-незалежних власних функцій називається *кратністю характеристичного числа.*

2.1 Метод послідовних наближень

2.1.1 Метод послідовних наближень для неперервного ядра

Нагадаємо кілька визначень:

Визначення 2.1.1 (норми у $C\left(\overline{G}\right)$)**.** *Нормою* у банаховому просторі неперервних функцій $C\left(\overline{G}\right)$ називається

$$\|f\|_{C\left(\overline{G}\right)} = \max_{x\in\overline{G}} |f(x)|. \tag{2.1.1}$$

Визначення 2.1.2 (норми у $L_2(G)$)**.** *Нормою* у гільбертовому просторі інтегровних з квадратом функцій $L_2(G)$ називається

$$\|f\|_{L_2(G)} = \left(\int\limits_G |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{2.1.2}$$

Визначення 2.1.3 (скалярного добутку у $L_2(G)$)**.** *Скалярноим добутком* у просторі $L_2(G)$ наизвається

$$(f, g)_{L_2(G)} = \int\limits_G f(x)\bar{g}(x) \,\mathrm{d}x. \tag{2.1.3}$$

Лема 2.1.4

Інтегральний оператор $\mathbf{K}$ з неперервним ядром $K(x,y)$ петворює множини функцій $C\left(\overline{G}\right) \xrightarrow{\mathbf{K}} C\left(\overline{G}\right)$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} L_2(G)$, $L_2(G) \xrightarrow{\mathbf{K}} C\left(\overline{G}\right)$ обмежений та мають місце нерівності:

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \leq MV\|\varphi\|_{C(G)}, \tag{2.1.4}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)} \leq MV\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{2.1.5}$$

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \leq M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}, \tag{2.1.6}$$

де

$$M = \max_{(x,y)\in G\times G} |K(x,y)|, \quad V = \int\limits_G \mathrm{d}y. \tag{2.1.7}$$

Зауваження 2.1.5 — Мається на увазі, що довільна функція φ з множини функцій $C\left(\overline{G}\right)$ під дією інтегрального оператора $\mathbf{K}$ переходить у функцію $\mathbf{K}\varphi$ з множини функцій $C\left(\overline{G}\right)$, і так далі.

Доведення. Нехай $\varphi \in L_2(G)$. Тоді φ — абсолютно інтегровна функція на G і, оскільки ядро $K(x,y)$ неперервне на $G \times G$, функція $(\mathbf{K}\varphi)(x)$ неперервна на G. Тому оператор $\mathbf{K}$ переводить $L_2(G)$ в $C\left(\overline{G}\right)$ і, з врахуванням нерівності Коші-Буняковського, обмежений. Доведемо нерівності:

1. $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \leq MV\|\varphi\|_{C(G)}$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{K}\varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)} &= \max_{x\in\overline{G}} \left| \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \right| \leq \\
&\leq \max_{x\in\overline{G}} \int\limits_G \left(|K(x,y)|\cdot|\varphi(y)|\right)\mathrm{d}y \leq \\
&\leq \max_{x\in\overline{G}} \left(\max_{y\in\overline{G}} |K(x,y)| \cdot \max_{y\in\overline{G}} |\varphi(y)| \cdot \int\limits_G \mathrm{d}y \right) \leq \\
&\leq \max_{(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}} |K(x,y)| \cdot \max_{y\in\overline{G}} |\varphi(y)| \cdot \int\limits_G \mathrm{d}y = \\
&= MV\|\varphi\|_{C\left(\overline{G}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

2. $\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)} \le MV\|\varphi\|_{L_2(G)}$:

$$\begin{aligned}\left(\|\mathbf{K}\varphi\|_{L_2(G)}\right)^2 &= \int\limits_G \left|\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x \le \\ &\le \int\limits_G \left|\max_{y\in\overline{G}}|K(x,y)| \cdot \int\limits_G \varphi(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x \le \\ &\le \left(\max_{(x,y)\in\overline{G}\times\overline{G}}|K(x,y)|\right)^2 \cdot \left|\int\limits_G \varphi(y)\,\mathrm{d}y\right|^2 \cdot \int\limits_G \mathrm{d}x \le \\ &\le (M\|\varphi\|_{L_2(G)}V)^2.\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

3. $\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(G)} \le M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} &= \max_{x\in\overline{G}}|(\mathbf{K}\varphi)(x)| = \\ &= \max_{x\in\overline{G}}\left|\int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \\ &\le \max_{x\in\overline{G}}\sqrt{\int\limits_G |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y} \cdot \sqrt{\int\limits_G |\varphi(y)|^2\,\mathrm{d}y} \le \\ &\le M\sqrt{V}\|\varphi\|_{L_2(G)}.\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

□

Розв'язок інтегрального рівняння другого роду записаного у операторній формі будемо шукати методом послідовних наближень, тобто запустимо наступний ітераційний процес:

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_1 = \lambda\mathbf{K}\varphi_0 + f, \quad \varphi_2 = \lambda\mathbf{K}\varphi_1 + f, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = \lambda\mathbf{K}\varphi_n + f. \tag{2.1.11}$$

Тоді можна записати

$$\varphi_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda^i \mathbf{K}^i f, \tag{2.1.12}$$

де $\mathbf{K}^{i+1} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^i)$.

Хочеться за розв'язок взяти функцію

$$\varphi_\infty = \lim_{n\to\infty} \varphi_n. \tag{2.1.13}$$

Це підводить нас до

Визначення 2.1.6 (ряду Неймана)**.** *Рядом Неймана* оператора $\mathbf{K}$ називається

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f = \lim_{n\to\infty} \varphi_n. \tag{2.1.14}$$

Дослідимо збіжність ряду Неймана:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathbf{K}^i f \right\|_{C(\overline{G})} &\le \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda^i| \cdot \|\mathbf{K}^i f\|_{C(\overline{G})} \le \\ &\le \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda^i| \cdot (MV)^i \cdot \|f\|_{C(\overline{G})} = \frac{\|f\|_{C(\overline{G})}}{1 - |\lambda| \cdot MV}. \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Справді,

$$\|\mathbf{K}\varphi\|_{C(\overline{G})} \le MV \|\varphi\|_{C(\overline{G})}, \tag{2.1.16}$$

тому

$$\|\mathbf{K}^2\varphi\|_{C(\overline{G})} \le (MV)^2 \|\varphi\|_{C(\overline{G})} \tag{2.1.17}$$

і, взагалі кажучи,

$$\|\mathbf{K}^i\varphi\|_{C(\overline{G})} \le (MV)^i \|\varphi\|_{C(\overline{G})}. \tag{2.1.18}$$

Отже ми довели наступне

Твердження 2.1.7 (про умову збіжності методу послідовних наближень)

Ряд Неймана збігається рівномірно при

$$|\lambda| < \frac{1}{MV}. \tag{2.1.19}$$

Лема 2.1.8 (про єдиність розв'язку за умови збіжності методу послідовних наближень)

При виконанні умови збіжності методу послідовних наближень інтегральне рівняння II роду має єдиний розв'язок.

Доведення. Дійсно припустимо, що їх два:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \lambda \mathbf{K} \varphi^{(1)} + f, \\ \varphi^{(2)} &= \lambda \mathbf{K} \varphi^{(2)} + f. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Тоді можемо розглянути їхню різницю

$$\varphi^{(0)} = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}. \tag{2.1.21}$$

Вона буде задовольняти лоднорідному рівнянню:

$$\varphi^{(0)} = \lambda \mathbf{K} \varphi^{(0)}. \tag{2.1.22}$$

Обчислимо норму Чебишева:

$$|\lambda| \cdot \|\mathbf{K}\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} = \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})}. \tag{2.1.23}$$

Застосовуючи нерівність з леми до лівої частини отримуємо

$$\|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} \leq |\lambda| \cdot MV \cdot \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})}. \tag{2.1.24}$$

Звідси безпосередньо випливає

$$(1 - |\lambda| \cdot MV) \cdot \|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} \leq 0. \tag{2.1.25}$$

Звідси маємо, що $\|\varphi^{(0)}\|_{C(\overline{G})} = 0$. □

Таким чином доведена

Теорема 2.1.9 (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значень параметру)
Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з неперервним ядром $K(x, y)$ при умові $|\lambda| < 1/MV$ має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C\left(\overline{G}\right)$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді ряду Неймана.

2.1.2 Повторні ядра

Твердження 2.1.10 (про перенос інтегрального оператору через кому у скалярному добутку)
$\forall f, g \in L_2(G)$ має місце рівність

$$(\mathbf{K}f, g)_{L_2(G)} = (f, \mathbf{K}^\star g)_{L_2(G)}. \tag{2.1.26}$$

Доведення. Якщо $f, g \in L_2(G)$ то, за лемою 2.1.4, маємо $\mathbf{K}f, \mathbf{K}^\star g \in L_2(G)$, і тому

$$\begin{aligned}
(\mathbf{K}f, g) &= \int\limits_G (\mathbf{K}f)(\overline{g}(x))\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_G \left(\int\limits_G K(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y \right) \overline{g}(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_G f(y) \left(\int\limits_G K(x, y)\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \\
&= \int\limits_G f(y) \cdot (\mathbf{K}^\star g)(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= (f, \mathbf{K}^\star g).
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

□

Лема 2.1.11 (про композицію інтегральних операторів)
Якщо $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ — інтегральні оператори що мають неперервні ядра $K_1(x, y)$ і $K_2(x, y)$ відповідно, то оператор $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ також інтегральний оператор з неперервним ядром

$$K_3(x, z) = \int\limits_G K_2(x, y) K_1(y, z)\,\mathrm{d}y. \tag{2.1.28}$$

Зауваження 2.1.12 — При цьому справедлива формула: $(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1)^\star = \mathbf{K}_1^\star\mathbf{K}_2^\star$.

Доведення. Нехай $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ — ядра інтегральних операторів $\mathbf{K}_1$,

$\mathbf{K}_2$. Розглянемо $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{K}_3 f)(x) &= (\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1 f)(x) = \\ &= \int\limits_G K_2(x,y)\left(\int\limits_G K_1(y,z)f(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int\limits_G \left(\int\limits_G K_2(x,y)K_1(y,z)\,\mathrm{d}y\right) f(z)\,\mathrm{d}z = \\ &= \int\limits_G K_3(x,z)f(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{2.1.29}$$

Тобто

$$\int\limits_G K_2(x,y)K_1(y,z)\,\mathrm{d}y \tag{2.1.30}$$

— ядро оператора $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$.

Згідно правила переносу інтегрального оператора через кому у скалярному добутку для всіх $f, g \in L_2(G)$ отримуємо $(f, \mathbf{K}_3^\star g - \mathbf{K}_1^\star\mathbf{K}_2^\star g) = 0$, звідки випливає, що $\mathbf{K}_3^\star = \mathbf{K}_1^\star\mathbf{K}_2^\star$. □

Із доведеної леми випливає, що оператори $\mathbf{K}^n = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{n-1}) = (\mathbf{K}^{n-1})\mathbf{K}$ — інтегральні та їх ядра $K_{(n)}(x,y)$ — неперервні та задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$K_{(1)}(x,y) = K(x,y), \quad \ldots, \quad K_{(n)}(x,y) = \int\limits_G K(x,\xi)K_{(n-1)}(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.1.31}$$

Визначення 2.1.13 (повторних (ітерованих) ядер)**.** Інтегральні ядра $K_{(n)}(x,y)$ називаються *повторними (ітерованими)*.

Операторна форма:

$$\mathbf{K}f = \int\limits_G K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad \ldots, \quad \mathbf{K}^n f = \int\limits_G K_{(n)}(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.1.32}$$

2.1.3 Резольвента інтегрального оператора

Пригадаємо представлення розв'язку інтегрального рівняння II роду у вигляді ряду Неймана. Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} (\mathbf{K}^i f)x = \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= f(x) + \lambda \int\limits_G \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) \right) f(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= f(x) + \lambda \int\limits_G \mathcal{R}(x,y,\lambda) f(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{2.1.33}$$

при $|\lambda| < 1/MV$.

Визначення 2.1.14 (резольвенти інтегрального оператора)**.** Функція

$$\mathcal{R}(x,y,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{(i)}(x,y) \tag{2.1.34}$$

називається *резольвентою* інтегрального оператора $K(x,y)$.

Операторна форма запису розв'язку рівняння Фредгольма через резольвенту ядра має вигляд:

$$\varphi = f + \lambda \mathbf{R} f. \tag{2.1.35}$$

Твердження 2.1.15

Мають місце операторні рівності:

$$\varphi = (E + \lambda \mathbf{R}) f, \tag{2.1.36}$$

$$(E - \lambda \mathbf{K})\varphi = f, \tag{2.1.37}$$

$$\varphi = (E - \lambda \mathbf{K})^{-1} f. \tag{2.1.38}$$

Вправа 2.1.16. Доведіть попереднє твердження.

Таким чином маємо

$$E + \lambda \mathbf{R} = (E - \lambda \mathbf{K})^{-1}, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}. \tag{2.1.39}$$

Зважуючи на формулу розв'язку рівняння Фредгольма через резольвенту, має місце теорема

Теорема 2.1.17 (про існування розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром для малих значенням параметру)
Будь-яке інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з неперервним ядром $K(x, y)$ при умові $|\lambda| < 1/MV$ має єдиний розв'язок φ в класі неперервних функцій $C\left(\overline{G}\right)$ для будь-якого неперервного вільного члена f. Цей розв'язок може бути знайдений у вигляді $f + \lambda \mathbf{R} f$ за допомогою резольвенти $\mathbf{R}$.

Приклад 2.1.18
Методом послідовних наближень знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt)^2 \varphi(t) \, dt.$$

Розв'язок. Перш за все зауважимо, що $M = 1$ і $V = 1$.

Побудуємо повторні ядра

$$K_{(1)}(x,t) = x^2 t^2,$$
$$K_2(x,t) = \int_0^1 x^2 z^4 t^2 \, dz = \frac{x^2 t^2}{5},$$
$$K_{(p)}(x,t) = \frac{1}{5^{p-2}} \int_0^1 x^2 z^4 t^2 \, dz = \frac{x^2 t^2}{5^{p-1}}.$$

Резольвента має вигляд

$$\mathcal{R}(x,t,\lambda) = x^2 t^2 \left(1 + \frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda^2}{5^2} + \ldots + \frac{\lambda^p}{5^p} + \ldots \right) = \frac{5x^2 t^2}{5 - \lambda}, \quad |\lambda| < 5.$$

Розв'язок інтегрального рівняння має вигляд:

$$\varphi(x) + x + \int_0^1 \frac{5x^2t^3}{5-\lambda}\,\mathrm{d}t = x + \frac{5x^2}{4(5-\lambda)}.$$