Приклад 1. Методом послідовних наближень знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt)^2 \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Розв'язок. $M = 1$, $V = 1$.

Побудуємо повторні ядра

$$K_{(1)}(x,t) = x^2t^2, \quad K_2(x,t) = \int_0^1 x^2z^4t^2\,\mathrm{d}z = \frac{x^2t^2}{5}, \quad K_{(p)}(x,t) = \frac{1}{5^{p-2}}\int_0^1 x^2z^4t^2\,\mathrm{d}z = \frac{x^2t^2}{5^{p-1}}.$$

Резольвента має вигляд

$$\mathcal{R}(x,t,\lambda) = x^2t^2\left(1 + \frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda^2}{5^2} + \ldots + \frac{\lambda^p}{5^p} + \ldots\right) = \frac{5x^2t^2}{5-\lambda}, \quad |\lambda| < 5.$$

Розв'язок інтегрального рівняння має вигляд:

$$\varphi(x) + x + \int_0^1 \frac{5x^2t^3}{5-\lambda}\,\mathrm{d}t = x + \frac{5x^2}{4(5-\lambda)}.$$

Приклад 2. Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\pi \sin(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \cos(x).$$

Розв'язок.

$$\varphi(x) = \lambda \sin(x) \int\limits_0^\pi \cos(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \lambda \cos(x) \int\limits_0^\pi \sin(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \cos(x).$$

Позначимо

$$c_1 = \int\limits_0^\pi \cos(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad c_2 = \int\limits_0^\pi \sin(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

$$\varphi(x) = \lambda(c_1 \sin(x) - c_2 \cos(x)) + \cos(x).$$

Підставляючи останню рівність в попередні отримаємо систем рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^\pi \cos(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y))\,\mathrm{d}y, \\ c_2 = \int\limits_0^\pi \sin(y)(\lambda c_1 \sin(y) - \lambda c_2 \cos(y) + \cos(y))\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

Після обчислення інтегралів:

$$\begin{cases} c_1 + \dfrac{\lambda\pi}{2} c_2 = \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\lambda\pi}{2} c_1 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\lambda\pi}{2} \\ -\dfrac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 + \left(\dfrac{\lambda\pi}{2}\right)^2 \neq 0.$$

За правилом Крамера маємо

$$c_1 = \frac{2\pi}{4 + (\lambda\pi)^2}, \quad c_2 = \frac{\lambda\pi^2}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

Таким чином розв'язок має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi \sin(x) + 4\cos(x)}{4 + (\lambda\pi)^2}.$$

Приклад 3. Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального оператора

$$\varphi(x0 = \lambda \int\limits_0^1 \left(\left(\frac{x}{t}\right)^{2/5} + \left(\frac{t}{x}\right)^{2/5} \right) \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Розв'язок.

$$\varphi(x) = \lambda x^{2/5} \int\limits_0^1 t^{-2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \lambda x^{-2/5} \int\limits_0^1 t^{2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Позначимо

$$c_1 = \int\limits_0^1 t^{-2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad c_2 = \int\limits_0^1 t^{2/5}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\varphi(x) = \lambda c_1 x^{2/5} + \lambda c_2 x^{-2/5}.$$

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_0^1 t^{-2/5}(\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5})\,\mathrm{d}t, \\ c_2 = \int\limits_0^1 t^{2/5}(\lambda c_1 t^{2/5} + \lambda c_2 t^{-2/5})\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)c_1 - 5\lambda c_2 = 0, \\ -\dfrac{5\lambda}{9}c_1 + (1-\lambda)c_2 = 0. \end{cases}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5\lambda \\ -\dfrac{5\lambda}{9} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{25\lambda^2}{9} = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{8}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

З системи однорідних рівнянь при $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{3}{8}$ маємо $c_1 = 3c_2$. Тоді маємо власну функцію $\varphi_1(x) = 3x^{2/5} + x^{-2/5}$.

При $\lambda = \lambda_2 = -\dfrac{3}{2}$ маємо $c_1 = -3c_2$. Маємо другу власну функцію $\varphi_2(x) = -3x^{2/5} + x^{-2/5}$.

Приклад 4. Знайти розв'язок інтегрального рівняння при всіх значеннях параметрів λ, a, b, c:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})\varphi(y)\,\mathrm{d}y + ax^2 + bx + c.$$

Розв'язок. Запишемо рівняння у вигляді:

$$\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}\int_{-1}^{1} \varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{y}\varphi(y)\,\mathrm{d}y + ax^2 + bx + c.$$

Введемо позначення:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} \varphi(y)\,\mathrm{d}y, \quad c_2 = \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{y}\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

та запишемо розв'язок у вигляді: $\varphi(x) = \lambda\sqrt[3]{x}c_1 + \lambda c_2 + ax^2 + bx + c$.

Для визначення констант отримаємо СЛАР:

$$\begin{cases} c_1 - 2\lambda c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ -\dfrac{6\lambda}{5}c_1 + c_2 = \dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Визначник системи дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\dfrac{6\lambda}{5} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{12\lambda^2}{5}.$$

Характеристичні числа ядра $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

Нехай $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$. Тоді розв'язок існує та єдиний для будь-якого вільного члена і має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{5\lambda(14a + 30\lambda b + 42c)}{21(5 - 12\lambda^2)}\sqrt[3]{x} + \frac{28\lambda a + 84\lambda c + 30b}{7(5 - 12\lambda^2)} + ax^2 + bx + c.$$

Нехай $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$. Тоді система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} c_1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Ранги розширеної і основної матриці співпадатимуть якщо має місце рівність $\dfrac{2a}{3} + 2c = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{6}{7}b$, $(*)$.

При виконанні цієї умови розв'язок існує $c_2 = c_2$, $c_1 = \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 + \dfrac{2a}{3} + 2c$.

Таким чином розв'язок можна записати

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + x.$$

Якщо $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$, а умова $(*)$ не виконується, то розв'язків не існує.

Нехай $\lambda = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$. Після підстановки цього значення отримаємо СЛАР

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = \dfrac{2a}{3} + 2c, \\ c_1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 = \sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{6b}{7}. \end{cases}$$

Остання система має розв'язок при умові, $\dfrac{2a}{3} + 2c = \sqrt{\dfrac{5}{3}}\dfrac{6}{7}b$, $(**)$.

При виконанні умови $(**)$, розв'язок існує $c_2 = c_2$, $c_1 = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}c_2 + \dfrac{2a}{3} + 2c$.

Розв'язок інтегрального рівняння можна записати:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x}\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + \frac{2a}{3} + 2c\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}c_2 + ax^2 + bx + c.$$

Приклад 5. Знайти ті значення параметрів a, b для яких інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(xy - \frac{1}{3} \right) \varphi(y) \, \mathrm{d}y + ax^2 - bx + 1$$

має розв'язок для будь-якого значення λ.

Розв'язок. Знайдемо характеристичні числа та власні функції спряженого однорідного рівняння (ядро ермітове).

$$\varphi(x) = \lambda x \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y) \, \mathrm{d}y - \frac{\lambda}{3} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y) \, \mathrm{d}y = \lambda x c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2.$$

$$\begin{cases} c_1 = \int\limits_{-1}^{1} y\varphi(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} y \left(\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) \mathrm{d}y = \frac{2\lambda}{3} c_1, \\ c_2 = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(y) \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \left(\lambda y c_1 - \frac{\lambda}{3} c_2 \right) \mathrm{d}y = -\frac{2\lambda}{3} c_2. \end{cases}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{2\lambda}{3} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2\lambda}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = 1.$$

Умови ортогональності:

$$\begin{cases} \int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1)x \, \mathrm{d}x = -\frac{2b}{3} = 0, \\ \int\limits_{-1}^{1} (ax^2 - bx + 1) \, \mathrm{d}x = \frac{2a}{3} + 2 = 0. \end{cases}$$

$$a = -3, \quad b = 0.$$

Приклад 6. Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + x,$$

де

$$K(x,y) = \begin{cases} x(y-1), & 0 \le x \le y \le 1 \\ y(x-1), & 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}.$$

Розв'язок. Розв'язок будемо шукати за формулою Шмідта. Знайдемо характеристичні числа та власні функції ермітового ядра. Запишемо однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^x y(x-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_x^1 x(y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Продиференціюємо рівняння:

$$\varphi'(x) = \lambda \int\limits_0^x y\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda x(x-1)\varphi(x) + \lambda \int\limits_x^1 (y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \lambda x(x-1)\varphi(x).$$

Обчислимо другу похідну:

$$\varphi''(x) = \lambda x\varphi(x) - \lambda(x-1)\varphi(x).$$

Або після спрощення $\varphi'' = \lambda\varphi$. Доповнимо диференціальне рівняння другого порядку граничними умовами вигляду (**??**), (**??**). Легко бачити що

$$\varphi(0) = \lambda \int\limits_0^0 y(0-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_0^1 0(y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Аналогічно

$$\varphi(1) = \lambda \int\limits_0^1 y(1-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_1^1 1(y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Таким чином отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \varphi'' = \lambda\varphi, & 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Для знаходження власних чисел і власних функцій розглянемо можливі значення параметру λ:

1. $\lambda > 0$, $\varphi(x) = c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}x)$.

   Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

   $$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

   Визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю.

   $$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sinh(\sqrt{\lambda}) & \cosh(\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} = -\sinh(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

   Єдиним розв'язком цього рівняння є $\lambda = 0$, яке не задовольняє, бо $\lambda > 0$. Це означає, що система рівнянь має тривіальний розв'язок і будь-яке $\lambda > 0$ не є власним числом.

2. $\lambda = 0$, $\varphi(x) = c_1 x + c_2$. З граничних умов маємо, що $c_1 = c_2 = 0$. Тобто $\lambda = 0$ не є власним числом.

3. $\lambda < 0$, $\varphi(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda} x)$.

   Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}) = 0. \end{cases}$$

   Визначник цієї системи прирівняємо до нуля

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{-\lambda}) & \cos(\sqrt{-\lambda}) \end{vmatrix} = -\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

   Це рівняння має зліченну множину розв'язків $\lambda_k = -(\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок $c_2 = 0$, $c_1 = c_1$.

   Таким чином нормовані власні функції задачі Штурма-Ліувілля мають вигляд $\varphi_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$.

   Порахуємо коефіцієнти Фур'є

$$f_n = (f, \varphi_n) = \sqrt{2} \int\limits_0^1 x \sin(\pi n x) \, \mathrm{d}x = \sqrt{2} \frac{(-1)^n}{\pi n}.$$

   Згідно до формули Шмідта розв'язок рівняння при $\lambda \neq \lambda_k$ має вигляд:

$$\varphi(x) = x - 2\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin(\pi k x)}{((\pi k)^2 + \lambda)\pi k}.$$

   При $\lambda = \lambda_k$ розв'язок не існує, оскільки не виконана умова ортогональності вільного члена до власної функції.

Приклад 7. Звести задачу Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння з ермітовим неперервним ядром:

$$\begin{cases} \mathbf{L}y \equiv -(1+e^x)y'' - e^x y' = \lambda x^2 y, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) - 2y'(0) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Побудуємо функцію Гріна оператора $\mathbf{L}$. Розглянемо задачі Коші:

$$\begin{cases} -(1+e^x)v_i'' - e^x v_i' = 0, \quad i = 1, 2, \\ v_1(0) - 2v_1'(0) = v_2'(1) = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння $-(1+e^x)y''-e^x y' = 0$ має вигляд $c_1(x-\ln(1+e^x))+c_2$. Тоді розв'язки задач Коші:

$$v_1(x) = a(x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2), \quad a = const, \quad v_2(x) = b, \quad b = const.$$

Обчислимо визначник Вронського

$$\begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{ab}{1+e^x}.$$

Перевіримо тотожність Ліувілля $p(x)w(x) = ab = const$. Запишемо функцію Гріна за формулою:

$$G(x,\xi) = -\begin{cases} (x - \ln(1+e^x) + 1 + \ln 2), & 0 \le x \le \xi \le 1, \\ (\xi - \ln(1+e^\xi) + 1 + \ln 2), & 0 \le \xi \le i \le 1. \end{cases}$$

Запишемо інтегральне рівняння

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)\xi^2 y(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Симетризуємо ядро інтегрального рівняння, помножимо обидві частини на x:

$$x \cdot y(x) = \lambda \int\limits_0^1 x \cdot \xi \cdot G(x,\xi) \cdot \xi \cdot y(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Введемо позначення:

$$\omega(x) = xy(x), \quad G_1(x,\xi) = x\xi G(x,\xi).$$

Отримаємо однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром:

$$\omega(x) = \lambda \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\omega(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$