Лекція 16

§ 9. Загальна постановка задачі Коші для хвильового рівняння Плоскі хвилі

Характеристичні поверхні

[1, стор. 71 - 73]

В лекції 14 розглядалися питання класифікації диференціальних рівнянь другого порядку з $n > 2$ незалежними змінними. Важливу роль при визначені типу рівняння і вибору нової системи координат відіграють характеристичні поверхні, які є аналогами характеристичних кривих (характеристик) для випадку рівнянь з двома незалежними змінними.

Нехай функція $\omega(x) \in C^1,\ x = x_1, \ldots x_n,\ n \geq 2$ є такою що на поверхні $\omega(x) = 0,\ grad\,\omega(x) \neq 0$ та $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \dfrac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \dfrac{\partial \omega(x)}{\partial x_j} = 0$ (9.1).

Тоді поверхню $\omega(x) = 0$ називають характеристичною поверхнею або характеристикою квазілінійного рівняння $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, grad u) = 0$.

При $n = 2$ характеристична поверхня називається характеристичною лінією.

Оскільки $grad\,\omega(x) \neq 0$, то сімейство характеристик $\omega(x) = const$ заповнює область таким чином, що через кожну точку області проходить одна характеристична поверхня.

Враховуючи закон перетворення коефіцієнтів рівняння $\overline{a_{i,j}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \dfrac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \dfrac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$ при виборі заміни змінних $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots x_n),\ k = 1, \ldots n$, знання однієї чи декількох характеристичних поверхонь дозволяє спростити рівняння, зокрема, якщо $\xi_1 = \omega(x_1, x_2, \ldots x_n)$, то $\overline{a_{1,1}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_i} \dfrac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0$.

Для хвильового рівняння $u_{tt}(t,x) = a^2 \Delta u(t,x) + f(t,x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

характеристичне рівняння має вигляд $\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)^2 = 0$. Одним з розв'язків цього диференціального рівняння першого порядку є поверхня $\omega(x,t) = a^2\left(t-t_0\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{0i}\right)^2 = 0$.

Поверхня $a^2\left(t-t_0\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{0i}\right)^2 = 0$ (9.2)

називається характеристичним конусом з вершиною в точці $\left(x_0, t_0\right)$ є характеристичною поверхнею (характеристикою) хвильного рівняння.

Характеристичний конус є границею конусів $\Gamma^+(x_0,t_0) = \left[a\left(t-t_0\right) > \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{0i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $\Gamma^-(x_0,t_0) = \left[-a\left(t-t_0\right) > \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{0i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$,

які називають конусами майбутнього та минулого відповідно.

Хвильове рівняння має також інше сімейство характеристичних поверхонь $a(t-t_0) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{0,i})e_i = 0$, де $e_i,\ i = 1..n$ довільні числа такі, що $\left|\bar{e}\right| = 1$.

Узагальнена задача Коші для рівняння коливання струни

Довільне квазілінійне рівняння гіперболічного типу з двома незалежними змінними

$$a_{11}(\xi,\eta)U_{\xi\xi}(\xi,\eta) + 2a_{12}(\xi,\eta)U_{\xi\eta}(\xi,\eta) + a_{22}(\xi,\eta)U_{\eta\eta}(\xi,\eta) = F(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)$$

може бути зведене до одного із рівнянь:

$u_{xt}(t,x) = f(x,t,u,u_1,v_x),$ (9.3),

$u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_t,u_x).$ (9.4).

Коефіцієнти $a_{ij}(\xi,\eta)\ (i,j = 1,2)$ і права частина $f(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)$ вважаються неперервно диференційовними функціями у відповідних областях.

При постановці задачі Коші для рівняння (9.4) до тепер ми вважали, що носієм початкових умов є пряма $t=0$.

На прикладі рівняння вільних коливань однорідної струни

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t) \qquad (9.5)$$

покажемо, що носієм початкових умов може бути крива L, яка є відмінною від прямої $t=0,$ причому встановимо, яким умовам повинна задовольняти крива L і який вигляд повинні мати самі початкові умови, щоб одержана задача Коші була поставлена коректно.

Для цього позначимо через D обмежену область фазової площини xOt з кусково-гладкою жордановою межею S. Нехай $u(t,x)\in C^2(D)-$ розв'язок рівняння (9.5), який має неперервні частинні похідні 1-го порядку в області $\overline{D}=D\bigcup S$.

Інтегруючи тотожність (9.5) по області D і використовуючи формулу Гріна $\iint\limits_D (Q_x(x,t)-P_t\ (x,t))dxdt=\int\limits_S Pdx+Qdt$, де криволінійний інтеграл в правій частині береться по контуру в напрямі проти годинникової стрілки, одержуємо

$$\iint\limits_D (u_{xx}-u_{tt})dx\,dt=\int\limits_S u_x dt+u_t\,dx=\iint\limits_D f(x,t)dxdt \qquad (9.6).$$

Нехай $L-$ розімкнута крива Жордана з неперервною кривизною, яка задовольняє умовам:

кожна пряма із двох сімей характеристик $x+t=const$, $x-t=const$ рівняння (9.5) перетинає криву L не більше, ніж в одній точці;

напрям дотичної до кривої L в жодній точці не збігається з напрямом характеристик рівняння (9.5).

Іноді таку криву L називають «вільною».

Припустимо, що характеристики $x-x_1=t-t_1$ і $x-x_1=t_1-t$, які виходять із точки С, перетинаються із кривою L в точках A і B (рис.1).

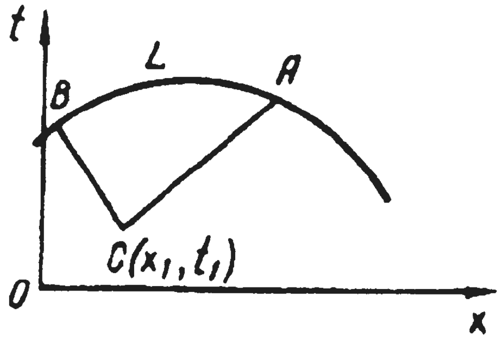

Рисунок. 1

Застосовуючи формулу (9.4) в області, яка обмежена дугою AB кривої L і відрізками характеристик $[CA]$ і $[CB]$, одержуємо

$$\int\limits_{AB+[BC]+[CA]} u_x dt + u_t\, dx = \iint\limits_D f(x,t)dxdt \qquad (9.7).$$

Оскільки вздовж $[BC]$ і $[AC]$ маємо $dx = -dt, \quad dx = dt$ відповідно, то (9.5) запишеться у вигляді $\int\limits_{AB} u_x dt + u_t\, dx - 2u(C) + u(A) + u(B) = \iint\limits_D f(x,t)dxdt,$ звідки знаходимо $u(C) = \frac{1}{2}[u(A) + u(B)] + \frac{1}{2}\int\limits_{AB} u_x dt + u_t\, dx - \frac{1}{2}\iint\limits_D f(x,t)dxdt$ (9.8).

Якщо розв'язок рівняння (9.3) задовольняє умовам

$$u\big|_L = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_L = \psi(x) \qquad (9.9),$$

де φ і $\psi -$ задані дійсні відповідно два рази і один раз неперервно диференційовні функції, а $l -$заданий на L достатньо гладкий вектор, що ніде не збігається з дотичною до кривої L. Визначимо u_x і u_t із рівностей

$$u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad u_x l_x + u_t l_t = \psi,$$

де s – довжина дуги L, і підставляючи відомі значення u, u_x, u_t в праву частину (9.8), одержуємо розв'язок задачі Коші (9.5), (9.9).

Із наведених міркувань випливає, що постановка задачі Коші (9.3), (9.7) є коректною, тобто вона має в розглядуваній області тільки єдиний розв'язок, і він є стійким.

Аналогічно ставиться задача Коші і у випадку рівняння (9.3).

Для рівняння (9.3) характеристиками будуть прямі, паралельні осям координат ($x=\mathrm{const},\quad t=\mathrm{const}$). Отже, в цьому випадку всяка гладка крива L, яка перетинається не більш, ніж в одній точці з прямими, паралельними осям координат, буде «вільною». Нехай рівняння цієї кривої буде $t=g(x)$ (або $x=h(t)$). Вважаємо, що існують похідні $g'(x)$, $h'(t)$, відмінні від нуля. Тоді задача Коші може бути поставлена наступним чином: в області

$$D=\left\{(t,x)\middle|\ x_0<x<x_0+\alpha,\qquad g(x)<t<t_0+\beta\right\},\quad \alpha>0,\quad \beta>0$$

знайти розв'язок диференціального рівняння (9.1), який на кривій L задовольняє умови $u\big|_{t=g(x)}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=g(x)}=\psi(x).$ (9.10).

Дані Коші (9.8) дозволяють на кривій $t=g(x)$ знайти значення похідної u_x.

Дійсно, диференціюючи по x першу із умов (9.10), одержуємо

$u_x\big|_{t=g(x)}+u_t\big|_{t=g(x)}g'(x)=\varphi'(x),$ або $u_x\big|_{t=g(x)}=\varphi'(x)-\psi(x)\varphi'(x).$

Узагальнена задача Коші для n- вимірного хвильового рівняння

У випадку хвильового рівняння в n – вимірному просторі

$$u_{tt}(t,x)=a^2\Delta u(t,x)+f(t,x),\qquad x=(x_1,x_2,...,x_n) \tag{9.11}$$

носієм початкових умов може бути будь-яка «вільна» поверхня Σ, тобто гіперповерхня $\Psi(x,t)=0,$ яка задовольняє умовам:

в жодній її точці (x,t) не має місце рівність $\sum\limits_{i=1}^{n}a^2(\Psi_{x_i})^2-(\Psi_t)^2=0,$ тобто поверхня Σ не є характеристичною;

при $n\geq 2\qquad \sum\limits_{i=1}^{n}a^2(\Psi_{x_i})^2-(\Psi_t)^2<0,$ (9.12).

Задача Коші ставиться наступним чином: знайти два рази неперервно диференційовний розв'язок рівняння (9.9), який задовольняє умови

$$u(t,x)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial n}=\psi(x), \qquad (x,t)\in\Sigma, \tag{9.13}$$

де $\mathbf{n}$ – заданий на Σ одиничний вектор нормалі, а $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - задані на Σ досить гладкі функції. Будемо вважати, що поверхня Σ задана рівнянням $t=\sigma(x)$.

Покажемо, що задачу Коші (9.11), (9.13) можна звести до задачі Коші з початковими умовами заданими на поверхні $\tau=0$.

Замість змінної t введемо змінну $\tau=t-\sigma(x)$. Для такої заміни змінних отримаємо хвильове рівняння для функції $\tilde{u}(x,\tau)=u(x,\tau+\sigma(x))$.

Підрахуємо похідні, що входять в хвильове рівняння (9.11):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^2=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x_i^2}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x_i^2}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2}.$$

Таким чином хвильове рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2}=\frac{a^2}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x_i^2}-\frac{a^2}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2}+\frac{1}{a_0}f(x,\tau+\sigma(x)) \tag{9.14}$$

де $a_0=\left[1-a^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\right)^2\right]\neq 0$.

Остання нерівність випливає з того, що Σ задана рівнянням $t=\sigma(x)$ не є характеристичною поверхнею.

При обраній заміні змінних поверхня Σ переходить в площину $\tau=0$.

А умови (9.13) приймають вигляд

$$\tilde{u}\big|_{\tau=0}=u\big|_{\Sigma}=\varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma} \tag{9.15}$$

Залишається знайти $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma}$. Для цього диференціюємо першу з умов (9.15). Врахуємо, що $u\big|_{\Sigma}=\varphi(x)=u(x,\sigma(x))$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial x_i}, i=1,2\ldots n \tag{9.16}$$

Нормаль до поверхні Σ можна записати у вигляді $\mathbf{n}=\frac{1}{\Delta}\left(1,-\mathbf{grad}\,\sigma\right)$. Диференціюємо $u(x,t)$ по нормалі і використаємо другу умову (9.11).

$$\psi(x)=\left.\frac{\partial u(x,\sigma(x))}{\partial n}\right|_{\Sigma}=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \qquad (9.17).$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (9.16), (9.17) має єдиний розв'язок відносно невідомих величин $\frac{\partial u}{\partial x_i},\ i=1,2...n,\ \frac{\partial u}{\partial t}$ на будь – який поверхні Σ, оскільки її визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\sigma}{\partial x_1} & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial\sigma}{\partial x_n} & 0 & ... & 1 \\ \frac{1}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\sigma}{\partial x_1} & ... & -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\sigma}{\partial x_n} \end{vmatrix}=\left(-1\right)^n\Delta\neq 0 \qquad (9.18).$$

Таким чином задача Коші з даними на вільній поверхні Σ є коректною.

Відзначимо, що умова «вільності» поверхні Σ є принциповою для коректної постановки задачі Коші. Для хвильового рівняння

$$u_{tt}(t,x,y)=u_{xx}(t,x,y)+u_{yy}(t,x,y). \qquad (9.19)$$

площина $y=0$ не є вільною (не виконується умова (9.12)), ні характеристичною поверхнею. Функція $u_m(t,x,y)=\frac{1}{m^2}\operatorname{sh} my\sin\frac{m}{\sqrt{2}}(x+t),$ де m – натуральне число, є розв'язком рівняння (9.11), який задовольняє умови

$$\left.u_m(t,x,y)\right|_{y=0}=0,\ u_y(t,x,0)=\frac{1}{m}\sin\frac{m}{\sqrt{2}}(x+t). \qquad (9.20).$$

Але задача Коші (9.13), (9.14) поставлена некоректно, тому що $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{m}{\sqrt{2}}(x+t)=0,$ а сам розв'язок $u_m(t,x,y)$ при $m\to\infty$ є необмеженим.

Плоскі хвилі. Дисперсія хвиль

Розглянемо однорідне хвильове рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$u_{tt}(t,x) = a^2 \Delta u(t,x) + cu(t,x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots x_n). \qquad (9.21).$$

Покладемо $c = 0$. Розв'язки рівняння (6.1) шукатимемо у вигляді

$$u(t,x) = f\left(bt + \langle \xi, x \rangle\right), \qquad (9.22),$$

де $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$.

При різних значеннях $t = t_0, t_1$ функція $u(t_1, x)$ відрізняється від $u(t_0, x)$ зсувом на вектор $\left|\overline{\xi}\right|^{-2} \overline{\xi} b(t_1 - t_0)$, дійсно

$$u(t_0, x + \overline{\xi}\left|\overline{\xi}\right|^{-2} b(t_1 - t_0)) = f(bt_0 + < \xi, x + \overline{\xi}\left|\overline{\xi}\right|^{-2} b(t_1 - t_0) >) =$$
$$= f(bt_0 + < \xi, x > + < \xi, \xi > \left|\overline{\xi}\right|^{-2} b(t_1 - t_0)) = f(bt_1 + < \xi, x >) = u(t_1, x)) .$$

Розв'язок вигляду (9.22) прийнято називати *плоскою хвилею,* яка рухається вздовж напряму вектора ξ зі швидкістю $v = \left|\overline{\xi}\right|^{-1} b$.

Вираз $bt + < \xi, x >$ називається *фазою хвилі* (9.22), а f – *формою хвилі.* Якщо $b = 0$, то хвиля (9.22) називається *стоячою*.

Знайдемо умови, яким повинні задовольняти b і вектор $\overline{\xi}$, щоб функція (9.22) була розв'язком рівняння (6.1) при $c = 0$. Підставимо (9.22) в (9.21). Отримаємо: $f''(bt + < \xi, x >) b^2 = a^2 f''(bt + < \xi, x >) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Вважаючи, що $f''(Q) \not\equiv 0$, маємо $\quad b^2 = a^2 \left|\overline{\xi}\right|^2$. (9.23).

Розв'язками цього рівняння є вектори $\overline{N} = (\xi, b) \in R_{n+1}$, які лежать на конусі K в R_{n+1}, основою якого є сфера $\left|\overline{\xi}\right| = ba^{-1}$.

Означення 1. Вектор $\overline{N} = (\xi, b) \in E_{n+1}$, $\overline{N} \neq 0$, який задовольняє рівняння (9.23), називається характеристичною нормаллю хвильового рівняння (9.21). Гіперплощина $N^{\perp} = \left\{(t,x) \in R_{n+1} \mid bt + < \xi, x >= \text{const}\right\}$ називається характеристичною гіперплощиною хвильового рівняння (9.21).

Ця площина перпендикулярна до характеристичної нормалі $\overline{N}$.

Означення 2 Гіперповерхня в R_{n+1} називається характеристичною, якщо в кожній точці її дотична гіперплощина є характеристичною.

Характеристичне рівняння (9.23) свідчить, що швидкість поширення всіх плоских хвиль, які задовольняють рівняння (9.21), дорівнює a:

$$v^2 = \frac{b^2}{|\xi|^2} = a^2. \qquad (9.24).$$

Справедливе й обернене твердження. Для довільного $\overline{N} \in R_{n+1}$, який задовольняє (9.23), плоска хвиля (9.24) є розв'язком рівняння (9.21) при довільній функції $f(bt + <\xi, x>)$.

В окремому випадку $f(bt + <\xi, x>)$ може бути й розривною (або функцією, яка швидко змінюється) в деякій точці, наприклад при $bt + <\xi, x> = 2$ Тоді розв'язок (9.22) буде мати той самий розрив уздовж всієї гіперплощини в R_{n+1} $(\xi \neq 0)$:

$$bt + <\xi, x> = 2. \qquad (9.25).$$

При фіксованому t цей розрив розміщений на площині в E_n з рівнянням (9.25). Ця площина рухається із зростанням t у напрямі перпендикулярного їй вектора $-\overline{\xi}$, зі швидкістю $v = a = b\left|\overline{\xi}\right|^{-1}$.

Звідси можна зробити висновок:

1) довільна характеристична гіперплощина може бути поверхнею розриву розв'язку рівняння (9.21) при $c = 0$;

2) усі плоскі хвилі й розриви цих хвиль, які задовольняють рівняння (9.21) при $c = 0$, поширюються зі швидкістю a у напрямі вектора $-\overline{\xi}$ без спотворення (хвиля без дисперсії[1]).

Зазначимо, що з формулою (9.24) пов'язане відкриття електромагнітної природи світла і спеціальної теорії відносності. Так, із рівнянь електродинаміки Максвелл вивів, що потенціали електромагнітного поля задовольняють хвильове рівняння $u_{tt}(t,x,y,z)=a^2\Delta u(t,x,y,z)$, де $a^2=(\varepsilon\mu)^{-1}$, ε і μ – відповідно діелектрична та магнітна проникність вакууму. Останні величини знаходяться експериментально з чисто електромагнітних вимірювань. Після обчислення Максвеллом швидкості поширення електромагнітних хвиль виявилось, що вона з великою точністю збігається із швидкістю світла: $a=(\varepsilon\mu)^{-1/2}\approx 299976$ км/с. Звідси Максвелл зробив висновок, що світло має електромагнітну природу.

Розглянемо диференціальне рівняння (9.21), коли $c\neq 0$. Якщо $u(t,x)=f(bt+<\xi,x>)$ – плоска хвиля для рівняння (9.21), то ми відразу дістаємо для заданих ξ і b рівняння

$$f''(bt+<\xi,x>)(a^2\left|\overline{\xi}\right|^2-b^2)+f(bt+<\xi,x>)c=0. \qquad (9.26).$$

Отже, в цьому разі функція $f(bt+<\xi,x>)$ не може бути довільною – вона повинна бути розв'язком рівняння (9.26). Очевидно, що для швидкості $v=a$, тобто для $a^2\left|\overline{\xi}\right|^2=b^2$, уже не існує біжучої плоскої хвилі. Але для інших швидкостей і для довільного напряму можливі форми хвиль визначаються із рівняння (9.26) і є експоненціальними функціями. У зв'язку з цим напрям руху хвилі і її швидкість, яка відповідає рівнянню (9.21), можуть задаватися довільним чином (за винятком $v=a$), але при цьому можливі тільки спеціальні форми плоских хвиль. З фізичних міркувань виключаються із розгляду розв'язки, які не є рівномірно обмеженими функціями в просторі. Беручи до уваги, що

$$f(bt+<\xi,x>)=f(v\left|\overline{\xi}\right|t-<e,x>\left|\overline{\xi}\right|)=f((vt-<e,x>)\left|\overline{\xi}\right|)=g(vt-<e,x>),$$

де $g(z)=f(z\left|\overline{\xi}\right|);\overline{e}=-\overline{\xi}\left|\overline{\xi}\right|^{-1},\quad \left|\overline{e}\right|=1;\quad z=vt-<e,x>$, маємо:

$$g''(z)(a^2\left|\overline{\xi}\right|^2-b^2)+g(z)c=0 \qquad (9.26').$$

Рівномірно обмежені розв'язки рівняння (9.26') можна записати у вигляді

$g(z)=e^{-ikz}$, при виконанні рівності $-(k\nu)^2=-a^2k^2+c$. (9.27).

Позначимо $\omega=kv$ - частота хвилі.

Таким чином, хвиля довільної форми, що задовольняє рівняння (9.21) при виконанні умови (9.27) може бути зображена як суперпозиція гармонічних хвиль вигляду: $u_k(t,x)=e^{-ik(vt-<e,x>)}$, (9.28)

З (9.27) маємо $$-\omega^2=-a^2k^2+c,$$

Тобто $k=\pm\frac{1}{a}\sqrt{c+\omega^2}$ і гармонічні коливання (9.28) матимуть фазову швидкість $\frac{\omega}{k}$, яка залежатиме від частоти ω, що дорівнює $v=\frac{\omega}{k}=\frac{a\omega}{\sqrt{c+\omega^2}}$.

Отже, $u_k(t,x)=e^{-\frac{i}{a}\sqrt{c+\omega^2}\left(\frac{a\omega}{\sqrt{c+\omega^2}}t-<e,x>\right)}$. (9.29).

Оскільки розв'язок рівняння (9.21) – це суперпозиція хвиль вигляду (9.29), які поширюються в одному й тому самому напрямі, причому всі ці хвилі мають форму, яка задовольняє рівняння (9.26), то різні компоненти поширюються з різними швидкостями; отже, форма складової хвилі $u(t,x)$ змінюватиметься з часом t і хвильовий процес при своєму поширенні буде спотворюватися (хвилі з дисперсією). Кажуть, що якщо фазова швидкість гармонічних хвиль залежить від частоти, то рівняння (9.21) описує явище дисперсії.

Очевидно, що якщо рівняння (9.21) не допускає розв'язків у вигляді хвиль довільної форми, то має місце дисперсія хвиль. Доданок $cu(t,x)$ в рівнянні (9.21) іноді називають *дисперсійним членом.*

Для прикладу розглянемо телеграфне рівняння, яке описує електричні коливання в провідниках

$$u_{xx}(t,x)-LCu_{tt}-(RC+LG)u_t(t,x)-RGu(t,x)=0, \qquad (9.30),$$

де C – місткість, R – омічний опір; L – індуктивність; G – втрата ізоляції. Всі ці величини розраховані на одиницю довжини провідника Позначимо $b=RC+LG,\quad d=RG,\quad a^2=(LG)^{-1}$ і введемо нову невідому функцію

$$v(t,x) = u(t,x)\, e^{0,5a^2bt}. \qquad (9.31).$$

Тоді рівняння (6.10) запишеться у вигляді

$$a^2 v_{xx}(t,x) - v_{xx}(t,x) + cv(t,x) = 0, \qquad (9.32),$$

де $c = \dfrac{a^2}{4}(a^2b^2 - 4d) = \dfrac{a^4}{4}(b^2 - 4\dfrac{d}{a^2}) = \dfrac{a^4}{4}(RC - LG)^2$.

Отже, на підставі попередніх міркувань при виконанні умови

$RC = LG$ (9.33), тобто $c = 0$ рівняння (9.32) буде мати хвилі без дисперсії і в силу (9.31), рівняння (9.30) має хвилі без дисперсії із згасанням вигляду

$$u(t,x) = e^{-Kt} f(x - at), \quad u(t,x) = e^{-Kt} f(-x - at), \text{ де } K = 0,5\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right).$$

Коли коефіцієнти рівняння (9.30), які характеризують провідник, задовольняють умову (9.33). то в провіднику хвилі довільної форми поширюються без спотворення і можуть лише затухати. Але це затухання в пункті прийому хвиль - сигналів завжди можна компенсувати за рахунок їх підсилення, тим самим можна точно відновити сигнали, які передаються по провіднику.

Ця обставина має дуже важливе значення в галузі телефонного зв'язку при передаванні сигналів по кабелях на великі віддалі.

Зауважимо нарешті, що рівняння (9.21) при $c = 0$ можуть мати, крім плоских хвиль, хвилі інших форм. Наприклад, якщо $n = 3$, характеристиками для рівняння (9.21) будуть також поверхні

$r - at = \text{const}, \quad -r - a = \text{const}$, де $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_{i,0})^2}$, $(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ − фіксована точка, а функції $u = \dfrac{1}{4\pi r} f(r - at),\ u = \dfrac{1}{4\pi r} f(-r - at)$ − хвилі без дисперсії із затуханням для рівняння (6.1) при $n = 3$ і $c = 0$. Ці хвилі називаються *сферичними*.