Зміст

4.3.5 Функція Гріна граничних задач оператора теплопровідності

Будемо розглядати граничні задачі для рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -F(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ \ell_i u(x,t)|_{x\in S} = f(x,t), \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.56}$$

Тут

$$\ell_1 u(x,t)|_{x\in S} = u(x,t)|_{x\in S}\,, \tag{4.3.57}$$

$$\ell_2 u(x,t)|_{x\in S} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x\in S}, \tag{4.3.58}$$

$$\ell_3 u(x,t)|_{x\in S} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + \alpha(x,t)\cdot u(x,t)\Big|_{x\in S} \tag{4.3.59}$$

— оператори граничних умов першого, другого, або третього роду.

> **Визначення 4.3.22** (функції Гріна граничної задачі теплопровідності)**.** Функцію $E_i(x,\xi,t-\tau)$ будемо називати *функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності* в області Ω з границею S для $t > 0$, якщо вона є розв'язком настуної граничної задачі:
>
> $$\begin{cases} a^2\Delta_x E_i(x,\xi,t-\tau) - \dfrac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t} = -\delta(x-\xi,t-\tau), \quad x,\xi\in\Omega, \quad t > 0 \\ E_i(x,\xi,t-\tau)|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \ell_i E_i(x,\xi,t-\tau)|_{x\in S} = 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.60}$$

Еквівалетнне визначення можна надати у вигляді

> **Визначення 4.3.23** (функції Гріна граничної задачі теплопровідності)**.** Функцію $E_i(x,\xi,t-\tau)$ будемо називати *функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності* в області Ω з

границею S для $t > 0$, якщо вона може бути представлена у вигляді

$$E_i(x, \xi, t - \tau) = \varepsilon(x - \xi, t - \tau) + \omega_i(x, \xi, t - \tau), \tag{4.3.61}$$

де перший доданок є фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності, а другий є розв'язком наступної граничної задачі

$$\begin{cases} a^2 \Delta_x \omega_i(x, \xi, t - \tau) - \dfrac{\partial \omega_i(x, \xi, t - \tau)}{\partial t} = -\delta(x - \xi, t - \tau), \quad x, \xi \in \Omega, \quad t > 0 \\ \omega_i(x, \xi, t - \tau)\big|_{t - \tau \leq 0} = 0, \\ \ell_i \omega_i(x, \xi, t - \tau)\big|_{x \in S} = - \ell_i \varepsilon_i(x - \xi, t - \tau)\big|_{x \in S} \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.3.62}$$

Вивчимо

Властивості 4.3.24 (функції Гріна оператора теплопровідності)