Лекція 22

Принцип максимуму гармонічних функцій

[6, стор. 97 - 111]

Теорема 1 *(принцип максимуму гармонічних функцій)* Якщо гармонічна в скінченій області функція досягає у внутрішній точці цієї області свого максимального або мінімального значення , то ця функція є тотожна константа.

Доведення Нехай $u(x)$ гармонічна функція в обмеженій області Ω і досягає в точці $x_0 \in \Omega$ свого максимального значення. Розглянемо кулю $U(x_0, R_0) \in \Omega$ максимально великого радіусу.

Оскільки $u(x_0) = \max\limits_{x\in\Omega} u(x)$, то значення функції $u(x)$, коли $x \in S(x_0, R_0)$ задовольняє нерівності $u(x) \le u(x_0)$.

Якщо хоча б у одній точці $S(x_0, R_0)$ нерівність строга, тобто $u(x) < u(x_0)$, то за рахунок неперервності гармонічних функцій ця нерівність буде збережена і в деякому околі цієї точки, а це означатиме, що $u(x_0) > \dfrac{1}{4\pi R_0^2} \iint\limits_{S(x_0,R_0)} u(\xi) dS_\xi$

Тобто ми прийшли до протиріччя з припущенням, що $\exists \xi \in S(x_0, R_0)$, що $u(\xi) < u(x_0)$. Це означає, що $u(x) = u(x_0)$, $x \in S(x_0, R_0)$.

Оскільки ця рівність має місце для кулі будь – якого радіусу $R \le R_0$, то це означає, що $u(x) \equiv u(x_0)$ коли $x \in U(x_0, R_0)$.

Покажемо тепер, що функція $u(x) \equiv u(x_0)$, коли $x \in \Omega$.

Для цього виберемо довільну точку $x^* \in \Omega$, то з'єднаємо її з точкою x_0 ламаною. Побудуємо послідовність куль $U(x_i, R_i), i = 0..N$ з такими властивостями: центри куль x_i, $i = 1..N$ належать ламаній. $x_{i+1} \in U(x_i, R_i) \subset \Omega,\ i = 1, N$, $x^* \in U(x_N, R_N)$.

Оскільки центр кожної наступної кулі з номером $i+1$, лежить всередині кулі з номером i, то використовуючи метод математичної індукції, ми можемо встановити властивість: якщо функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$ коли $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{R}_i)$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$, коли $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{R}_{i+1})$. Це означає, що $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$, коли $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{R}_N)$. Зокрема, це означає, що $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^*) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)$. І теорема доведена.

Наслідки з принципу максимуму

Наслідок 1 Гармонічна функція відмінна від тотожної константи не досягає в скінченій області ні свого максимального ні свого мінімального значення.

Наслідок 2 Якщо функція гармонічна в області Ω і неперервна в $\overline{\Omega}$, то свої максимальне і мінімальне значення вона приймає на границі області.

Наслідок 3 Якщо функція гармонічна в області Ω і неперервна в $\overline{\Omega}$, то $\left|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right| \le \max\limits_{x \in S}\left|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right|$.

Наслідок 4 Нехай $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ - гармонічні функції в області Ω і має місце нерівність $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega$.

Оператор Лапласа в циліндричній та сферичній системах координат

Якщо замість прямокутних координат $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ ввести ортогональні криволінійні координати q_1, q_2, q_3 за допомогою співвідношень

$$q_i = f_i(x, y, z),\ i = 1,2,3 \qquad (5.8),$$

які дозволяють записати обернені перетворення

$$\boldsymbol{x} = \varphi_1(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3),\ \boldsymbol{y} = \varphi_2(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3),\ \boldsymbol{z} = \varphi_3(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3) \qquad (5.9).$$

Загальний вигляд оператора Лапласа в криволінійних координатах має вигляд:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_2 H_1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$
(5.10).

Де
$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_1^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial \boldsymbol{q}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial \boldsymbol{q}_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial \boldsymbol{q}_1}\right)^{2\ 2} \\ \boldsymbol{H}_2^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial \boldsymbol{q}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial \boldsymbol{q}_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial \boldsymbol{q}_2}\right)^2 \\ \boldsymbol{H}_3^2 = \left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial \boldsymbol{q}_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial \boldsymbol{q}_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial \boldsymbol{q}_3}\right) \end{cases} \qquad (5.11).$$

Для сферичної системи координат $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}_2 = \theta, \boldsymbol{q}_3 = \varphi,$ Формули (5.9) мають вигляд $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}\sin\theta\cos\varphi,\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}\sin\theta\sin\varphi, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}\cos\theta, \boldsymbol{H}_1 = 1, \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{r}, \boldsymbol{H}_3 = \boldsymbol{r}\sin\theta$

Таким чином оператор Лапласа у сферичній системі координат матиме вигляд.

$$\Delta_{r,\varphi,\theta}u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \qquad (5.12).$$

Для циліндричної системи координат $q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z,$

Формули (5.9), (5.11) мають вигляд $\boldsymbol{x} = \rho\cos\varphi,\ \boldsymbol{x} = \rho\sin\varphi, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$

$\boldsymbol{H}_1 = 1, \boldsymbol{H}_2 = \rho, \boldsymbol{H}_3 = 1$.

Оператор Лапласа в циліндричній системі координат має вигляд:

$$\Delta_{\rho,\varphi,z}\boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}^2} \qquad (5.13).$$

Якщо функція $\boldsymbol{u}$ не залежить від змінної z, то отримуємо полярну систему координат і вираз оператора Лапласа в полярній системі координат:

$$\Delta_{\rho,\varphi}u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \qquad (5.14).$$

Перетворення Кельвіна гармонічних функцій.

Нехай функція $\boldsymbol{u}$ гармонічна за межами кулі $\boldsymbol{U}(0,\boldsymbol{R})$, тоді функцію

$$v(y) = \left(\frac{R}{|y|}\right)^{n-2} u\left(\frac{R^2}{|y|^2}y\right) \qquad (5.15).$$

(в (5.15) використовується перетворення аргументу обернених радіус векторів $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{R}^2}{|\boldsymbol{y}|^2}\boldsymbol{y}$ або обернене $\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{R}^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}$) будемо називати перетворенням Кельвіна гармонічної функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{n}$ - вимірному евклідовому просторі.

В подальшому будемо вважати, що $\boldsymbol{R}=1$, цього завжди можна досягти шляхом зміни масштабу. Покажемо, що для $\boldsymbol{n}=3$ перетворення Кельвіна $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$ гармонічної функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ є гармонічною функцією аргументу $\boldsymbol{y}$.

Легко показати, що перший доданок в операторі Лапласа (5.12) може бути записаний у вигляді $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}$

Таким чином при $n=3,\ R=1$ (5.15) має вигляд $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{u}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right)$. Оскільки $\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}$, а $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}$, то $|\boldsymbol{y}|=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}$, або $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$.

Покажемо, що функція $v(r',\theta,\varphi)=ru(r,\theta,\varphi)$. Де $\boldsymbol{r}=\frac{1}{\boldsymbol{r}'}$, задовольняє рівнянню Лапласа, якщо $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},\theta,\varphi)$ - гармонічна функція.

Дійсно маємо

$$r\Delta_{r,\varphi,\theta}u=\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0=$$
$$=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right)+$$
$$\frac{r'^2}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=r'^4\Delta_{r',\varphi,\theta}v(r',\theta,\varphi)=0$$

При отриманні останньої рівності було враховано що $\frac{\partial v}{\partial r}=-r'^2\frac{\partial v}{\partial r'},\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right)$.

Аналогічно тому, як було показана гармонічність $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})=\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\boldsymbol{u}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^2}\right)$ у тривимірному евклідовому просторі, можна показати гармонічність функції $v(y) = u\left(\frac{y}{|y|^2}\right)$ у двовимірному евклідовому просторі.

Лекція 22

Гармонічність в нескінченно віддаленій точці та поведінка гармонічних функцій на нескінченості.

Означення Будемо говорити, що функція $u(x)$ є гармонічною функцією в нескінченно віддаленій точці , якщо функція

$$v(y) = \begin{cases} \frac{1}{|y|} u\left(\frac{y}{|y|^2}\right), & n = 3 \\ u\left(\frac{y}{|y|^2}\right), & n = 2 \end{cases} \tag{5.16}$$

є гармонічною функцією в точці нуль.Легко бачити, що $v(y) = \begin{cases} |x| u(x), & n = 3 \\ u(x), & n = 2 \end{cases}$

Теорема 2 *(про поведінку гармонічних функцій в нескінченно віддалені точці в просторі)* Якщо при $n = 3$ функція $u(x)$ гармонічна в нескінченно віддаленій точці, то при $|x| \to \infty$ функція прямує до нуля не повільніше $\frac{1}{|x|}$, а частинні похідні ведуть себе як $D^\alpha u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\right)$.

Теорема 3 *(про поведінку гармонічних функцій в нескінченно віддалені точці на площині)* Якщо при $n = 2$ функція $u(x)$ гармонічна в нескінченно віддаленій точці, то при $|x| \to \infty$ функція $u(x)$ обмежена, а частинні похідні ведуть себе як $D^\alpha u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+|\alpha|}}\right)$.

Гармонічні функції які мають поведінку на нескінченості визначену теоремами 1 та 2 для тривимірного і двовимірного просторів називають регулярними на нескінченості гармонічними функціями , а відповідні оцінки умовами регулярності на нескінченості.

Єдиність гармонічних функцій

Нехай $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ - гармонічна функція в обмеженій області Ω з границею $\boldsymbol{S}$, тоді має місце рівності Діріхле

$$\iiint_{\Omega} |\boldsymbol{gradU}|^2 \boldsymbol{dx} = \iint_{S} \boldsymbol{U} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{dS} \tag{5.17}$$

Нехай $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ - гармонічна функція області $\boldsymbol{U}(0,\boldsymbol{R})/\Omega$ з границями $\boldsymbol{S}$ та $\boldsymbol{S}(0,\boldsymbol{R})$, де $\boldsymbol{R}$ як завгодно велике число, тоді має місце рівності Діріхле

$$\iiint_{U(0,\boldsymbol{R})/\Omega} |\boldsymbol{gradU}|^2 \boldsymbol{dx} = \iint_{S} \boldsymbol{U} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{dS} + \iint_{S(0,\boldsymbol{R})} \boldsymbol{U} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{dS} \tag{5.18}$$

Для доведення рівності Діріхле (5.17) достатньо записати очевидну ціпочку рівностей.

$$0 = \iiint_{\Omega} U(x)\Delta U(x)dx = \iiint_{\Omega} U(x)div(gradU(x))dx = \iint_{S} U(x)(gradU(x),n)dS - \iiint_{\Omega} |gradU(x)|^2 dx .$$

Аналогічно можна довести і рівність (5.18)

При формулюванні теорем єдиності гармонічних функцій ми скрізь будемо припускати існування відповідної гармонічної функції, хоча сам факт існування гармонічної функції ми доведемо пізніше.

Теорема 4 *(Перша теорема єдиності гармонічних функцій)* Якщо в обмеженій області Ω, (або в області $\Omega' = \boldsymbol{R}^3/\Omega$) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні $\boldsymbol{S}$ задані значення, то така функція єдина.

Доведення Припустимо, що в області Ω існує принаймні дві гармонічні функції, які приймають на поверхні S однакові значення $\begin{cases}\Delta u_i(x)=0, \ x\in\Omega \\ u_i\big|_{x\in S}=f, \ i=1,2\end{cases}$

Для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$ будемо мати задачу $\begin{cases}\Delta u(x)=0, \ x\in\Omega \\ u\big|_{x\in S}=0,\end{cases}$

Застосуємо рівність Діріхле для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Будемо мати

$\iiint\limits_{\Omega}|gradu|^2dx=\iint\limits_{S}u\dfrac{\partial u}{\partial n}dS=0$. Звідси маємо, що $\boldsymbol{gradu}(\boldsymbol{x})\equiv 0, \boldsymbol{x}\in\Omega$. Остання рівність означає, що $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\equiv \boldsymbol{const}, \boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}$, а оскільки $u(x)=0, \ x\in S$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\equiv 0, \boldsymbol{x}\in\Omega$. Тобто ми маємо, що $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$.

Покажемо справедливість теореми для області Ω'.

Припускаючи існування двох регулярних гармонічних функцій які приймають на поверхні S однакові значення $\begin{cases}\Delta u_i(x)=0, \ x\in\Omega' \\ u_i\big|_{x\in S}=f, \ i=1,2\end{cases}$ отримаємо для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$ задачу $\begin{cases}\Delta u(x)=0, \ x\in\Omega' \\ u\big|_{x\in S}=0, \ u(x)=O\left(\dfrac{1}{|x|}\right), x\to\infty\end{cases}$

Застосуємо для $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ рівність (5.18) $\iiint\limits_{U(0,R)/\Omega}|gradu|^2dx=\iint\limits_{S}u\dfrac{\partial u}{\partial n}dS+\iint\limits_{S(0,R)}u\dfrac{\partial u}{\partial n}dS=\iint\limits_{S(0,R)}u\dfrac{\partial u}{\partial n}dS$.

Спрямуємо радіус кулі $\boldsymbol{R}$ до нуля і врахуємо умову регулярності на нескінченості $\iiint\limits_{\Omega'}|gradu|^2dx=\lim\limits_{R\to\infty}\iint\limits_{S(0,R)}u\dfrac{\partial u}{\partial n}dS=\lim\limits_{R\to\infty}O\left(\dfrac{1}{R^3}\right)\iint\limits_{S(0,R)}dS=0$.

Таким чином $u(x)\equiv const, x\in\Omega'$, а оскільки $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=0, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}$, то $u_1(x)\equiv u_2(x), \ x\in\Omega'$

Теорема 5 *(Друга теорема єдиності гармонічних функцій)* Якщо в обмеженій області Ω, (або в області $\Omega'=\boldsymbol{R}^3/\Omega$) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні $\boldsymbol{S}$ задані значення своєї нормальної похідної $\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x\in S}$, то в області Ω вона визначається с точністю до адитивної константи, а в області Ω' вона єдина.

Доведення Припустимо, що в області Ω існує принаймі дві гармонічні функції, які приймають на поверхні $\boldsymbol{S}$ однакові значення нормальної похідної

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x\in S} = \boldsymbol{f}, \ \boldsymbol{i} = 1,2 \end{cases}.$$

Для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$ будемо мати

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x\in S} = 0, \end{cases}$$

Для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ використаємо рівність Діріхле

$\iiint\limits_{\Omega} |grad u|^2 dx = \iint\limits_{S} u \dfrac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, тобто $grad u(x) \equiv 0, x \in \Omega$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{const}$.

Константа залишається невизначеною і таким сином $u_1(x) = u_2(x) + const$.

Покажемо справедливість теореми для області Ω'.

Припускаючи існування двох регулярних гармонічних функцій які приймають на поверхні $\boldsymbol{S}$ однакові значення $\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega' \\ \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x\in S} = \boldsymbol{f}, \ \boldsymbol{i} = 1,2 \end{cases}$ отримаємо для функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$ задачу $\begin{cases} \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \Omega' \\ \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{x\in S} = 0, \end{cases}$

Застосуємо для $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ рівність (5.18)

$$\iiint\limits_{U(0,R)/\Omega} |grad u|^2 dx = \iint\limits_{S} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \iint\limits_{S(0,R)} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint\limits_{S(0,R)} u \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Спрямуємо радіус кулі $\boldsymbol{R}$ до нуля і врахуємо умову регулярності на нескінченості. В результаті будемо мати

$$\iiint\limits_{\Omega'} |grad u|^2 dx = \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{S(0,R)} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \lim_{R\to\infty} O\left(\frac{1}{R^3}\right) \iint\limits_{S(0,R)} dS = 0$$

Таким чином $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{const}, \boldsymbol{x} \in \Omega'$, а оскільки $\lim_{x \to \infty} u(x) = 0$, то $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, а $u_1(x) \equiv u_2(x)$ Друга теорема єдиності доведена .

Теорема 6 *(Третя теорема єдиності гармонічних функцій)* Якщо в обмеженій області Ω, (або в області $\Omega' = \boldsymbol{R}^3 / \Omega$) існує гармонічна функція (або гармонічна функція регулярна на нескінченості), яка приймає на поверхні $\boldsymbol{S}$ задані значення лінійної комбінації нормальної похідної та функції $\left.\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{n}} + \alpha(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\right|_{x \in S}$, $\alpha \geq 0$, то в області Ω та в області Ω' вона визначається єдиним чином.

Теорему 6 довести самостійно.

§ 6 Рівняння Гельмгольца, деякі властивості його розв'язків

[6, стор. 349 - 353], [1, стор. 438 - 441]

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^2 \Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) - \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}^2} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}), \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \left.\boldsymbol{l}_i \boldsymbol{u}\right|_{x \in S} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \end{cases} \qquad (6.1).$$

В задачі (6.1) відсутні початкові умови у зв'язку з тим, що розглядаються спеціальні значення функції $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ та $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$. А саме ми вважаємо, що ці функції є періодичними по аргументу $\boldsymbol{t}$ з однаковим періодом.

Покладемо, що $F(x,t) = F_1(x)\cos(\omega t) - F_2(x)\sin(\omega t)$,

$$f(x,t) = f_1(x)\cos(\omega t) - f_2(x)\sin(\omega t) \qquad (6.2).$$

Можна очікувати, що в результаті доволі тривалої дії таких збурень розв'язок задачі при будь – яких початкових умовах теж буде періодичним , тобто

$$u(x,t) = V_1(x)\cos(\omega t) - V_2(x)\sin(\omega t). \qquad (6.3)$$

Підставляючи (6.3) в задачу (6.1), отримаємо

$$\left(\Delta \boldsymbol{V}_1 + \frac{\omega^2}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{V}_1\right)\cos(\omega \boldsymbol{t}) - \left(\Delta \boldsymbol{V}_2 + \frac{\omega^2}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{V}_2\right)\sin(\omega \boldsymbol{t}) = -\frac{\boldsymbol{F}_1}{\boldsymbol{a}^2}\cos(\omega \boldsymbol{t}) + -\frac{\boldsymbol{F}_2}{\boldsymbol{a}^2}\sin(\omega \boldsymbol{t})$$

$$\cos(\omega t) l_i V_1\big|_{x \in S} - \sin(\omega t) l_i V_2\big|_{x \in S} = f_1 \cos(\omega t) - f_2 \sin(\omega t)$$

Оскільки функції $\sin(\omega t), \cos(\omega t)$ - лінійно незалежні, то для амплітуди

$\boldsymbol{V}_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{i}=1{,}2$ отримаємо рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases}\Delta \boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{x})+\dfrac{\omega^2}{\boldsymbol{a}^2}=-\dfrac{\boldsymbol{F}_j}{\boldsymbol{a}^2},\ \boldsymbol{x}\in\Omega, \boldsymbol{j}=1{,}2\\ \boldsymbol{l}_i\boldsymbol{V}_j\big|_{x\in S}=\boldsymbol{f}_j\end{cases} \qquad (6.4).$$

Аналогічний результат можна отримати, якщо ввести комплексну амплітуду $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{i}\boldsymbol{V}_2$, комплексну зовнішню силу та комплексну амплітуду граничної умови $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{i}\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{i}\boldsymbol{f}_2$.

Шукаючи розв’язок (6.1) у вигляді $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^{i\omega t}$ (6.5).

Отримаємо для комплексної амплітуди задача

$$\begin{cases}\Delta \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})+\dfrac{\omega^2}{\boldsymbol{a}^2}=-\dfrac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{a}^2},\ \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \boldsymbol{l}_i\boldsymbol{V}\big|_{x\in S}=\boldsymbol{f}\end{cases} \qquad (6.4')$$

Другим джерелом виникнення рівняння Гельмгольца є стаціонарне рівняння дифузії при наявності в середовище процесів , що ведуть до розмноження речовини. Такі процеси наприклад виникають при дифузії нейтронів. Рівняння має вигляд:

$$\Delta \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=0 \qquad (6.6).$$

Де $\boldsymbol{D}$ - коефіцієнт дифузії, $\boldsymbol{c}$ - швидкість розмноження нейтронів.

Суттєвою відмінністю граничних задач для рівняння Гельмгольца від граничних задач рівняння Лапласа полягає в можливому порушенні єдиності розв’язку як для внутрішніх так і для зовнішніх задач.

Розглянемо таку граничну задачу:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2k^2u=0,\ 0<x<\pi; 0<y<\pi\\ u(0,y)=u(\pi,y)=u(x,0)=u(x,\pi)=0\end{cases} \qquad (6.7).$$

При $\boldsymbol{k}=0$ задача (6.7) має лише тривіальний розв’язок, що випливає з першої теореми єдності гармонічних функцій.

Нехай, $\boldsymbol{k}$ - ціле число. Неважко перевірити, що в цьому разі задача (6.7) має нетривіальний розв’язок $u(x,y)=\sin(kx)\sin(ky)$, а це в свою чергу означає, що задача з неоднорідними граничними умовами та неоднорідне рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2k^2u=-F(x,y),\ 0<x<\pi;0<y<\pi \\ u(0,y)=\varphi_1(y), u(1,y)=\varphi_2(y),\ u(x,0)=\psi_1(x), u(x,1)=\psi_2(x) \end{cases} \quad (6.8)$$

має неєдиний розв’язок , який визначається з точністю до розв’язку однорідного рівняння, тобто з точністю до функції $A\sin(kx)\sin(ky)$.

Розглянемо приклад зовнішньої задачі для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta u(x)+k^2u=0, |x|>\pi, x=(x_1,x_2,x_3) \\ u(x)\big|_{|x|=\pi}=0,\ u(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0 \end{cases} \quad (6.9).$$

При $\boldsymbol{k}=0$. Гранична задача має лише тривіальний розв’язок тотожньо рівний нулю, що випливає з другої теореми єдиності гармонічних функцій. У випадку, коли $\boldsymbol{k}$ - ціле ми маємо, що розв’язком граничної задачі (6.9) окрім тотожного нуля буде функція $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\sin(\boldsymbol{k}|\boldsymbol{x}|)}{4\pi|\boldsymbol{x}|}$. Легко перевірити, що ця функція задовольняє як однорідному рівнянню Гельмгольца (це уявна частина фундаментального розв’язку) так і граничній умові на сфері і умові на нескінченості.

Наявність нетривіального розв’язку у однорідної задачі означає неєдиність розв’язку відповідної неоднорідної задачі.