Лекція 5

Додатньо визначені ядра.

[1, стор. 317 - 318], [1, стор. 325 - 327], [4, стор. 52 - 54]

Означення Неперервне ядро $K(x,y)$ називається додатньо визначеним, якщо $\forall f \in L_2(G)$ $(\mathrm{K} f, f) \geq 0$. Причому $(\mathrm{K} f, f) = 0 \Leftrightarrow \|f\|_{L_2(G)} = 0$.

Довільне додатньо визначене ядро є ермітовим (його білінійна форма (Kf, f) приймає дійсні значення).

<u>**Лема 1**</u> Для того, щоб неперервне ядро було додатньо визначеним необхідно і достатньо, щоб його характеристичні числа були додатні.

Доведення: <u>Необхідність:</u> Для довільної власної функції $(\mathrm{K}\varphi_k, \varphi_k) = \dfrac{1}{\lambda_k} > 0$ $\lambda_k > 0$.

<u>Достатність:</u> Розглянемо $\mathrm{K} f$ як джерелувато-зображувану функцію, згідно до теореми Гілберта – Шмідта $\mathrm{K} f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k$, тоді $(\mathrm{K} f, f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} (\varphi_k, f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k} > 0.$ Отже квадратична форма додатньо визначена.

Таким чином додатність характеристичних чисел є критерієм додатної визначеності ядра.

<u>**Лема 2**</u> Довільне додатньо визначене неперервне ядро має характеристичні числа і для них має місце варіаційний принцип:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ (f, \varphi_i) = 0,\, i = \overline{1, k-1}}} \frac{(\mathrm{K} f, f)_{L_2(G)}}{\|f\|^2_{L_2(G)}},\ k = 1, 2... \qquad (4.16),$$

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$- ортонормована система власних функцій.

Доведення: З теореми Гілберта Шмідта функціонал (4.16) можна оцінити $\frac{\left(\mathrm{K} f, f\right)_{L_2(G)}}{\|f\|^2_{L_2(G)}} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\left|\left(f, \varphi_i\right)\right|^2}{\lambda_i \|f\|^2} \le \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\left|\left(f, \varphi_i\right)\right|^2}{\|f\|^2} \le \frac{1}{\lambda_k}$ (перша нерівність виконується оскільки λ_k – найменше характеристичне число в сумі, а друга випливає з нерівності Бесселя) З іншого боку при $f = \varphi_k$ маємо $\frac{\left(\mathrm{K} \varphi_k, \varphi_k\right)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}$. Тобто існує функція на якій досягається верхня межа цієї нерівності.

<u>Теорема 1</u> *(Мерсера, Про регулярну збіжність білінійного ряду для ермітових ядер зі скінченою кількістю від'ємних характеристичних чисел)* Якщо ермітове неперервне ядро $K(x, y)$ має лише скінчену кількість від'ємних характеристичних чисел, то його білінійний ряд

$$K(x, y) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i} \qquad (4.17)$$

збігається в $\overline{G} \times \overline{G}$ абсолютно і рівномірно.

Доведення: Покажемо, що якщо ядро $K(x, y)$ - додатньо визначене, то $K(x, x) \ge 0,\ x \in \overline{G}$. Оскільки $K(x, y)$ - ермітове, то $K(x, x) = \overline{K}(x, x)$ і є дійсною функцією. Якщо існує хоча б одна точка, що $K(x_0, x_0) < 0, x_0 \in \overline{G}$, то виходячи з неперервності знайдеться і деякій окіл цієї точки $U(x_0, x_0) \subset G \times G$, що $\operatorname{Re} K(x, y) < 0,\ (x, y) \in U(x_0, x_0)$. Оберемо невід'ємну неперервну функцію $\varphi(x)$, яка відміна від нуля лише в $U(x_0, x_0)$ і отримаємо

$$(K\varphi, \varphi) = \int\limits_{U(x_0, x_0)} K(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy = \int\limits_{U(x_0, x_0)} \operatorname{Re} K(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy = < 0$$

Остання нерівність вступає в протиріччя з припущенням додотньої визначеності ядра.

Теорему достатньо довести для додатньо визначених ядер.

Розглянемо ядро $K^p(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\overline{\varphi_i}(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i}$, де p - номер останнього від'ємного характеристичного числа, так що усі $\lambda_i,\ i = p+1, p+2, \ldots$ є додатніми. Таким чином ядро $K^p(x,y)$ є неперервним та додатньо визначеним. А це означає, що $K^p(x,x) \geq 0,\ x \in \overline{G}$. Таким чином маємо нерівність:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i} \leq K(x,x) \leq M,\ x \in \overline{G},\ N = p+1, p+2, \ldots \qquad (4.18).$$

Розглянемо білінійний ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}$ і доведемо його абсолютну і рівномірну збіжність за критерієм Коші. Використовуючи нерівність Коші – Буняківського маємо:

$$\sum_{k=p}^{p+q} \frac{\left|\varphi_k(x)\overline{\varphi}_k(y)\right|}{\lambda_k} \leq \left[\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k}\right]^{1/2} \qquad (4.19).$$

Але оскільки має місце (4.18), яка гарантує рівномірну збіжність ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i}$, то білінійний ряд (4.17) збігається абсолютно і рівномірно (регулярно) в $\overline{G} \times \overline{G}$.

<u>Зауваження 1</u> Теорема Гілберта - Шмідта і її наслідки, встановлені для ермітового неперервного ядра, залишаються вірними і для ермітового слабо полярного ядра.

<u>Зауваження 2</u> Теорема Гілберта - Шмідта і формула Шмідта у випадку полярного ядра залишаються вірними, але з заміною рівномірної збіжності на середньоквадратичну.

§5. Задача Штурма - Ліувіля. Теорема Стеклова.

[1, стор. 336 - 344], [4, стор. 60 - 67]

Постановка задачі Штурма - Ліувілля:

Нехай L – диференціальний оператор другого порядку:
$$Lu=\left(-p\left(x\right)u'\right)'+q\left(x\right)u=\lambda u\,,\quad 0<x<l \qquad (5.1),$$

$$l_1\left(u\right)|_{x=0}=h_1u\left(0\right)-h_2u'\left(0\right)=0 \qquad (5.2),$$

$$l_2\left(u\right)|_{x=l}=H_1u\left(l\right)+H_2u'\left(l\right)=0 \qquad (5.3),$$

$$p\in C^1\left(\left[0,l\right]\right),\ q\in C\left(\left[0,l\right]\right),\ q\geq 0,\ p>0,\ h_1,h_2,H_1,H_2\geq 0,$$

$$h_1+h_2>0,\ \ H_1+H_2>0 \qquad (5.4),$$

$$M_L=\left\{u\colon\ u\in C^2\left(0,l\right)\cap C^1\left([0,l]\right),u''\in L_2\left(0,l\right),l_1u(0)=l_2u(l)=0\right\} \qquad (5.5),$$

область визначення оператора L.

Означення Знайти розв’язки задачі Штурма - Ліувіля означає знайти всі ті значення параметра λ, при яких гранична задача (5.1) – (5.4) має нетривіальний розв’язок. Ці значення називаються *власними значеннями* задачі Штурма-Ліувіля, а самі розв’язки – *власними функціями*.

Функція Гріна оператора *L*

Будемо припускати, що $\lambda=0$ не є власним числом оператора L задачі Штурма – Ліувіля.

Розглянемо граничну задачу:

$$\begin{cases}\left(-p\left(x\right)u'\right)'+q\left(x\right)u=f\left(x\right), & 0<x<l\\ l_1\left(u\right)\Big|_{x=0}=l_2\left(u\right)\Big|_{x=l}=0\end{cases} \qquad (5.6).$$

Припустимо що $f\in C\left(0,l\right)\cap L_2\left(0,l\right)$.

З припущення, що $\lambda=0$ не є власним числом випливає, що задача (5.6) має єдиний розв’язок.

Розглянемо функції $v_i(x),\ i=1,2$ - ненульові дійсні розв’язки однорідних задач

Коші: $\begin{cases} \left(-p(x)v_i'(x)\right)' + q(x)v_i(x) = 0, \quad i = 1,2 \\ l_1 v_1\big|_{x=0} = 0 \;\; l_2 v_2\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$ (5.7)

З загальної теорії задач Коші виплиає, що розв'язки цих задач Коші існують, тому $v_i(x)$ – двічі неперервно диференційовані функції. Покажемо що $v_1(x)$, $v_2(x)$ – лінійно незалежні.

Припустимо що це не так і $v_1(x) = cv_2(x)$, тобто $v_1(x)$ задовольняє одночасно граничним умовам на лівому і правому краях. Тоді $v_1(x)$ – власна функція оператора L, і відповідає власному числу $\lambda = 0$, що суперечить припущенню, тому $v_1(x)$, $v_2(x)$ – лінійно незалежні. В цьому випадку визначник Вронського $w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Будемо шукати розв'язок задачі (5.6) методом варіації довільної сталої у вигляді: $u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x).$

Підставимо в рівняння: $\left(-p\left(c'_1 v_1 + c'_2 v_2 + c_1 v'_1 + c_2 v'_2\right)\right)' + q\left(c_1 v_1 + c_2 v_2\right) = f$

Накладемо першу умову на коефіцієнти: $c'_1 v_1 + c'_2 v_2 = 0$, маємо:

$$-p'\left(\underline{c_1 v_1'} + \underline{\underline{c_2 v_2'}}\right) - p\left(c_1' v_1' + c_2' v_2' + \underline{c_1 v_1''} + \underline{\underline{c_2 v_2''}}\right) + q\left(\underline{c_1 v_1} + \underline{\underline{c_2 v_2}}\right) = f$$

Або $c_1 L v_1 + c_2 L v_2 - p\left(c_1' v_1' + c_2' v_2'\right) = f$, оскільки $c_1 L v_1 = 0$, $c_2 L v_2 = 0$, то $-p\left(c_1' v_1' + c_2' v_2'\right) = f$, отже $c_1' v_1' + c_2' v_2' = -\dfrac{f}{p}$.

Таким чином c_1' та c_2' повинні задовольняти системі лінійних диференціальних рівнянь:

$\begin{cases} c_1' v_1 + c_2' v_2 = 0 \\ c_1' v_1' + c_2' v_2' = -\dfrac{f}{p} \end{cases}$, визначник системи $w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Має місце рівність Ліувілля: $w(x)\,p(x) = w(0)\,p(0) = const$.

Розв’язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -\dfrac{f}{p} & v_2' \end{vmatrix} = \dfrac{v_2(x)\,f(x)}{p(0)\,w(0)} \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & -\dfrac{f}{p} \end{vmatrix} = -\dfrac{v_1(x)\,f(x)}{p(0)\,w(0)} \end{cases} \tag{5.8}$$

Знайдемо додаткові умови для диференціальних рівнянь (5.8).

$l_1 u\big|_{x=0} = h_1\big(c_1(0)v_1(0) + c_2(0)v_2(0)\big) -$

$h_2\big(c_1'(0)v_1(0) + c_2'(0)v_2(0) + c_1(0)v_1'(0) + c_2(0)v_2'(0)\big) = 0$ враховуючи, що $c_1'(0)v_1(0) + c_2'(0)v_2(0) = 0$ маємо

$$c_1(0)\big[h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0)\big] + c_2(0)\big[h_1 v_2(0) - h_2 v_2'(0)\big] = 0$$

Оскільки перший доданок дорівнює нулю, то остання рівність виконується коли $c_2(0) = 0$, аналогічно отримаємо, що $c_1(l) = 0$.

Проінтегруємо (5.8) отримаємо:

$$c_1(x) = -\int_x^l \frac{f(\xi)\,v_2(\xi)}{p(0)\,w(0)}\,\mathrm{d}\xi, \qquad c_2(x) = -\int_0^x \frac{v_1(\xi)\,f(\xi)}{p(0)\,w(0)}\,\mathrm{d}\xi \tag{5.9}$$

Розв’язок граничної задачі (5.6) буде мати вигляд:

$$u(x) = -\int_0^x \frac{v_1(\xi)\,v_2(x)\,f(\xi)}{p(0)\,w(0)}\,d\xi - \int_x^l \frac{v_1(x)\,v_2(\xi)\,f(\xi)}{p(0)\,w(0)}\,d\xi \tag{5.10}$$

Визначимо функцію Гріна:

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{p(0)\,w(0)}\begin{cases} v_1(\xi)\,v_2(x), & 0 \le \xi \le x \le l \\ v_1(x)\,v_2(\xi), & 0 \le x \le \xi \le l \end{cases} \tag{5.11}$$

Отже розв’язок граничної задачі (5.6) можна записати у вигляді:

$$u(x)=\int_0^l G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi \qquad (5.12),$$

$G(x,\xi)$ (дивись (5.11)) називається *функцією Гріна* оператора Штурма – Ліувіля. Попередні міркування доводять наступну лему.

<u>Лема 3</u> Якщо $\lambda=0$ не є власним числом задачі Штурма - Ліувіля (5.1) – (5.4), то розв'язок граничної задачі (5.6) існує та єдиний і представляється за формулою (5.12) через функцію Гріна (5.11).

Властивості функції Гріна

1. $G(x,\xi)\in C\left(\left[0,l\right]\times\left[0,l\right]\right)$, $G(x,\xi)\in C^2\left(0<x<\xi<l\right)$, $G(x,\xi)\in C^2\left(0<\xi<x<l\right)$.

2. Симетричність: $G(x,\xi)=G(\xi,x),\ x,\xi\in\left[0,l\right]\times\left[0,l\right]$.

3. На діагоналі $x=\xi$ має місце розрив першої похідної:

$$\frac{\partial G(\xi+0,\xi)}{\partial x}-\frac{\partial G(\xi-0,\xi)}{\partial x}=-\frac{1}{p(\xi)},\quad \xi\in(0,l).$$

4. Поза діагоналлю $x=\xi$ функція Гріна задовольняє однорідному диференціальному рівнянню $L_xG(x,y)=0$.

5. На бічних сторонах квадрату $[0,l]\times[0,l]$ функція Гріна $G(x,y)$ задовольняє граничним умовам $l_1G\big|_{x=0}=l_2G\big|_{x=l}=0$.

6. Функція $G(x,\xi)$ є розв'язком неоднорідного рівняння: $L_xG(x,\xi)=-\delta(x-\xi)$, де $\delta(x)$ - *дельта-функція Дірака.*

Зведення граничної задачі з оператором Штурма - Ліувілля до інтегрального рівняння

Розглянемо граничну задачу з параметром

$$\begin{cases} Lu=\left(-p(x)u'\right)'+q(x)u=f+\lambda u \\ l_1(u)\big|_{x=0}=0 \\ l_2(u)\big|_{x=l}=0 \\ f\in C(0,l)\cap L_2(0,l) \end{cases} \qquad (5.13)$$

і покажемо що вона зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з дійсним, симетричним та неперервним ядром $G(x,\xi)$.

<u>Теорема 2</u> *(Про еквівалентність граничної задачі для рівняння другого порядку інтегральному рівнянню з ермітовим ядром)* Гранична задача (5.13) при умові, що $\lambda=0$ не є власним числом оператора L, еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду:

$$u(x)=\lambda\int_0^l G(x,\xi)u(\xi)d\xi+\int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad u\in C([0,l]) \qquad (5.14),$$

де $G(x,\xi)$ – функція Гріна оператора L.

Доведення: <u>Необхідність</u> Нехай виконується (5.13), тоді з леми 3 із заміною правої частини $f\to f+\lambda u$ розв'язок (5.13) можемо представити у вигляді:

$u(x)=\int_0^l G(x,\xi)\left[\lambda u(\xi)+f(\xi)\right]d\xi$, тобто $u(x)$ задовольняє інтегральному рівнянню (5.14).

<u>Достатність</u>. Нехай має місце рівність (5.14) і $u_0(x)$ її розв'язок. Розглянемо граничну задачу: $\begin{cases} Lu=f+\lambda u_0 \\ l_1u\big|_{x=0}=l_2u\big|_{x=l}=0 \end{cases}$

За лемою 3, єдиний розв'язок цієї задачі задається формулою $u(x)=\lambda\int_0^l G(x,\xi)u_0(\xi)d\xi+\int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi$, звідки випливає, що u_0 задовольняє рівнянню $Lu_0=f+\lambda u_0$, таким чином $u(x)=u_0(x)$ тобто u_0 є розв'язком крайової задачі (5.13).

У випадку коли $f \equiv 0$, гранична задача (5.13) перетворюється в задачу Штурма–Ліувіля
$$\begin{cases} \mathrm{L}\,\mathrm{u} = \lambda \mathrm{u}, \ 0 < x < l \\ l_1 \mathrm{u}\,|_{x=0} = l_2 \mathrm{u}\,|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad (5.13^{/}).$$

Задача Штурма - Ліувіля еквівалентна задачі про знаходження характеристичних чисел та власних функцій для однорідного інтегрального рівняння Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int_0^l G(x,\xi) u(\xi) d\xi \quad (5.14^{/})$$

при умові, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора L.

Покажемо як позбавитись цього припущення. Нехай маємо задачу Штурма – Ліувілля:

$$\begin{cases} \mathrm{L}\,\mathrm{u} = \lambda \mathrm{u} \\ l_1 \mathrm{u}\,|_{x=0} = l_2 \mathrm{u}\,|_{x=l} = 0 \\ 0 < x < l \end{cases} \quad (5.15).$$

Легко бачити, що $(Lu, u) \geq 0$, тобто власні числа невід’ємні.

Розглянемо граничну задачу:

$$\begin{cases} L_1 u \equiv \left(-p(x)u'\right)' + \left(q(x)+1\right)u = \mu u \\ l_1 u\,|_{x=0} = l_2 u\,|_{x=l} = 0, \ \mu = \lambda + 1 \end{cases} \quad (5.16).$$

Задача (5.16) с точністю до позначень співпадає з задачею Штурма – Ліувіля (5.1) – (5.3) Очевидно, що μ = 0 не є власним числом задачі Штурма - Ліувіля (5.16) (бо тоді λ = -1 могло би бути власним числом задачі Штурма – Ліувілля (5.1) – (5.4)). Введемо диференціальний оператор $L_1 u = (-pu')' + q_1 u = \mu u$

Отже, задача (5.16) еквівалентна задачі (5.15) при $\mu = \lambda + 1$, та еквівалентна інтегральному рівнянню $u(x)=(\lambda+1)\int\limits_0^1 G_1(x,\xi)u(\xi)d\xi$ (5.17),

де $G_1(x,\xi)$ – функція Гріна оператора L_1.

Таким чином, ввівши оператор L_1 і відповідну йому функцію Гріна $G_1(x,\xi)$, можна позбутися припущення, що $\lambda=0$ не є власним числом задачі Штурма – Ліувілля.

Приклад Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy+x$ де $K(x,y)=\begin{cases} x(y-1),\ 0\le x\le y\le 1 \\ y(x-1),\ 0\le y\le x\le 1 \end{cases}$

Розв'язання: Розв'язок будемо шукати за формулою Шмідта. Знайдемо характеристичні числа та власні функції ермітового ядра. Запишемо однорідне рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^x y(x-1)\varphi(y)dy+\lambda\int\limits_x^1 x(y-1)\varphi(y)dy$$

Продиференціюємо рівняння:

$$\varphi'(x)=\lambda\int\limits_0^x y\varphi(y)dy+\lambda x(x-1)\varphi(x)+\lambda\int\limits_x^1 (y-1)\varphi(y)dy-\lambda x(x-1)\varphi(x).$$

Обчислимо другу похідну:

$\varphi''(x)=\lambda x\varphi(x)-\lambda(x-1)\varphi(x)$ Або після спрощення

$\varphi''=\lambda\varphi$. Доповнимо диференціальне рівняння другого порядку граничними умовами вигляду (5.2), (5.3)

Легко бачити що $\varphi(0)=\lambda\int\limits_0^0 y(0-1)\varphi(y)dy+\lambda\int\limits_0^1 0(y-1)\varphi(y)dy=0$

Аналогічно $\varphi(1)=\lambda\int\limits_0^1 y(1-1)\varphi(y)dy+\lambda\int\limits_1^1 1(y-1)\varphi(y)dy=0$

Таким чином отримаємо задачу Штурма - Ліувілля:

$$\begin{cases} \varphi'' = \lambda\varphi, \; 0 < x < 1 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

Для знаходження власних чисел і власних функцій розглянемо можливі значення параметру λ.

1. $\lambda > 0$, $\varphi(x) = c_1 sh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 ch(\sqrt{\lambda}x)$.

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь $\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \\ c_1 sh(\sqrt{\lambda}) + c_2 ch(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$

Визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю.

$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ sh\sqrt{\lambda} & ch\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = -sh\sqrt{\lambda} = 0$. Єдиним розв'язком цього рівняння є $\lambda = 0$, яке не задовольняє, бо $\lambda > 0$. Це означає, що система рівнянь має тривіальний розв'язок і будь – яке $\lambda > 0$ не є власним числом.

2. $\lambda = 0$, $\varphi(x) = c_1 x + c_2$. З граничних умов маємо, що $c_1 = c_2 = 0$. Тобто $\lambda = 0$ не є власним числом.

3. $\lambda < 0$, $\varphi(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$

Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \\ c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{cases}$ Визначник цієї системи прирівняємо до нуля

$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin\sqrt{-\lambda} & \cos\sqrt{-\lambda} \end{vmatrix} = -\sin\sqrt{-\lambda} = 0$. Це рівняння має злічену множину розв'язків $\lambda_k = -(k\pi)^2, k = 1, 2, \ldots$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок $c_2 = 0, \; c_1 = c_1$.

Таким чином нормовані власні функції задачі Штурма – Ліувілля мають вигляд $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$.

Порахуємо коефіцієнти Фур’є $f_n = (f, \varphi_n) = \sqrt{2}\int_0^1 x \sin(n\pi x)dx = \sqrt{2}\frac{(-1)^n}{n\pi}$.

Згідно до формули Шмідта розв’язок рівняння при $\lambda \neq \lambda_k$ має вигляд: $\varphi(x) = x - 2\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin(k\pi x)}{((k\pi)^2 + \lambda)k\pi}$.

При $\lambda = \lambda_k$ розв’язок не існує, оскільки не виконана умова ортогональності вільного члена до власної функції.