Зміст

4.3.5 Функція Гріна граничних задач оператора теплопровідності

Будемо розглядати граничні задачі для рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -F(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \\ \ell_i u(x,t)\big|_{x\in S} = f(x,t), \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.56}$$

для $x \in \Omega$, $t > 0$.

Тут

$$\ell_1 u(x,t)\big|_{x\in S} = u(x,t)\big|_{x\in S}\,, \tag{4.3.57}$$

$$\ell_2 u(x,t)\big|_{x\in S} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x\in S}, \tag{4.3.58}$$

$$\ell_3 u(x,t)\big|_{x\in S} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + \alpha(x,t)\cdot u(x,t)\right|_{x\in S} \tag{4.3.59}$$

— оператори граничних умов першого, другого, або третього роду.

Визначення 4.3.22 (функції Гріна рівняння теплопровідності)**.** Функцію $E_i(x,\xi,t-\tau)$ будемо називати *функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності* в області Ω з границею S для $t > 0$, якщо вона є розв'язком настуної граничної задачі:

$$\begin{cases} a^2\Delta_x E_i(x,\xi,t-\tau) - \dfrac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t} = -\delta(x-\xi,t-\tau), \\ E_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \ell_i E_i(x,\xi,t-\tau)\big|_{x\in S} = 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.60}$$

для $x \in \Omega$, $t > 0$

Еквівалетнне визначення можна надати у вигляді

Визначення 4.3.23 (функції Гріна рівняння теплопровідності)**.** Функцію $E_i(x, \xi, t-\tau)$ будемо називати *функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі рівняння теплопровідності* в області Ω з границею S для $t > 0$, якщо вона може бути представлена у вигляді

$$E_i(x, \xi, t-\tau) = \varepsilon(x-\xi, t-\tau) + \omega_i(x, \xi, t-\tau), \tag{4.3.61}$$

де перший доданок є фундаментальним розв'язком оператора теплопровідності, а другий є розв'язком наступної граничної задачі

$$\begin{cases} a^2 \Delta_x \omega_i(x, \xi, t-\tau) - \dfrac{\partial \omega_i(x, \xi, t-\tau)}{\partial t} = -\delta(x-\xi, t-\tau), \\ \omega_i(x, \xi, t-\tau)|_{t-\tau \le 0} = 0, \\ \ell_i \omega_i(x, \xi, t-\tau)|_{x \in S} = -\,\ell_i \varepsilon_i(x-\xi, t-\tau)|_{x \in S} \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.3.62}$$

для $x \in \Omega$, $t > 0$.

Вивчимо

Властивості 4.3.24 (функції Гріна оператора теплопровідності)

Легко бачити, що

1. Функція Гріна граничних задач рівняння теплопровідності з аргументами $E_i(x, \xi, -t)$ задовольняє спряженому диференціальному рівнянню

$$a^2 \Delta_x E_i(x, \xi, -t) + \frac{\partial E_i(x, \xi, -t)}{\partial t} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \tag{4.3.63}$$

для усіх $x, \xi \in \Omega$, і $t > 0$.

2. Функція Гріна є також симетричною функцією своїх перших двох аргументів.

Доведення. Доведемо другу властивість. Запишемо співвідношення, яким задовольняє функція Гріна:

$$a^2 \Delta_x E_i(x, \xi, t-\tau_1) + \frac{\partial E_i(x, \xi, t-\tau_1)}{\partial t} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau_1), \quad x, \xi \in \Omega, \tag{4.3.64}$$

$$a^2\Delta_x E_i(x,\eta,\tau_2-t)+\frac{\partial E_i(x,\eta,\tau_2-t)}{\partial t}=-\delta(x-\eta)\delta(t-\tau_2),\quad x,\eta\in\Omega. \tag{4.3.65}$$

Перше рівняння помножимо на $E_i(x,\xi,\tau_2-t)$, друге рівняння помножимо на $E_i(x,\xi,t-\tau_1)$, віднімемо від першого друге і проінтегруємо по $x\in\Omega$ і по $-\infty<t<\tau$:

$$\begin{gathered}a^2\iiint\limits_{\Omega}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\Big(E_i(x,\eta,\tau_2-t)\Delta_x E_i(x,\xi,t-\tau_1)-\\ -E_i(x,\xi,t-\tau_1)\Delta_x E_i(x,\eta,\tau_2-t)\Big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x-\\ -\iiint\limits_{\Omega}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(E_i(x,\xi,t-\tau_1)E_i(x,\eta,\tau_2-t)\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\\ =-E_i(\xi,\eta,\tau_2-\tau_1)+E_i(\eta,\xi,\tau_2-\tau_1).\end{gathered}\tag{4.3.66}$$

В результаті застосування другої формули Гріна до першого інтегралу в лівій частині рівності і обчислення другого інтегралу лівої частини, отримаємо:

$$\begin{gathered}E_i(\xi,\eta,\tau_2-\tau_1)-E_i(\eta,\xi,\tau_2-\tau_1)=\\ =-\iiint\limits_{\Omega}\Big(E_i(x,\xi,\tau-\tau_1)E_i(x,\eta,\tau_2-\tau)-\\ -E_i(x,\xi,-\infty)E_i(x,\eta,-\infty)\Big)\,\mathrm{d}\Omega+\\ +a^2\iint\limits_{S}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\left(\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau_1)}{\partial n}E_i(x,\eta,\tau_2-t)-\right.\\ \left.-E_i(x,\xi,t-\tau_1)\frac{\partial E_i(x,\eta,\tau_2-t)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.\end{gathered}\tag{4.3.67}$$

Обираючи $\tau>\tau_2>\tau_1$, отримаємо з урахування граничних і початкових умов для функції Гріна, що інтеграли в правій частині останньої рівності дорівнює нулю. □

Для отримання інтегрального представлення розв'язків граничних задач, запишемо граничну задачу теплопровідності в змінних ξ, τ :

$$\begin{cases}a^2\Delta u(\xi,\tau)-\dfrac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau}=-F(\xi,\tau),\quad \xi\in\Omega,\quad \tau>0,\\ u(\xi,0)=u_0(\xi),\\ \ell_i u(\xi,\tau)|_{\xi\in S}=f(\xi,\tau),\quad i=1,2,3.\end{cases}\tag{4.3.68}$$

та рівняння для функції Гріна по змінних ξ, τ:

$$a^2\Delta_\xi E_i(x,\xi,t-\tau) + \frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial\tau} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \tag{4.3.69}$$

де $x,\xi\in\Omega$, $t>\tau>0$.

Перше рівняння помножимо на $E_i(x,\xi,t-\tau)$, а друге — на $u(\xi,\tau$, віднімемо від першого друге, і проінтегруємо по $0<\tau<t+\varepsilon$ та по $\xi\in\Omega$.

Отриаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} a^2\int\limits_0^{t+\varepsilon}\iiint\limits_\Omega \Big(&E_i(x,\xi,t-\tau)\Delta u(\xi,\tau)- \\ &- u(\xi,\tau)\Delta_\xi E_i(x,\xi,t-\tau)\Big)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau+ \\ &+\int\limits_0^{t+\varepsilon}\iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau- \\ &-\iiint\limits_\Omega\int\limits_0^{t+\varepsilon}\frac{\partial(E_u(x,\xi,t-\tau)u(\xi,\tau))}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi= \\ =&\int\limits_0^{t+\varepsilon}\iiint\limits_\Omega\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.3.70}$$

Після застосування другої формули Гріна до першого інтегралу, обчислення третього інтегралу при $\varepsilon\to 0$ отримаємо наступну проміжну формулу:

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\int\limits_0^{t}\iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau+ \\ &+\iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi+ \\ &+a^2\int\limits_0^{t}\iint\limits_S\left(E_i(x,\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}-u(\xi,\tau)\frac{\partial E_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}\right)\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.3.71}$$

Враховуючи відповідні граничні умови, яким задовольняє розв'язок на границі поверхні S отримаємо для першої граничної задачі:

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int\limits_0^t \iiint\limits_\Omega E_1(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \iiint\limits_\Omega E_1(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \\ &- a^2\int\limits_0^t \iint\limits_S \left(\frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} f(\xi,\tau)\right)\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.3.72}$$

Для другої та третьої граничних задач отримаємо

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int\limits_0^t \iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \iiint\limits_\Omega E_i(x,\xi,t)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \\ &+ a^2\int\limits_0^t \iint\limits_S E_i(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.3.73}$$

4.3.6 Функція Гріна граничних задач хвильового оператора

Будемо розглядати граничні задачі для хвильового рівняння:

$$\begin{cases} a^2\Delta u(x,t) - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -F(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v_0(x), \\ \ell_i u(x,t)\big|_{x\in s} = f(x,t), \quad i = 1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.74}$$

Визначення 4.3.25 (функції Гріна хвильового рівняння)**.** Функцію $\Theta_i(x,\xi,t-\tau)$ будемо називати функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі хвильового рівняння в області Ω з границею S і $t > 0$, якщо вона є розв'язком наступної граничної задачі:

$$\begin{cases} a^2\Delta_x\Theta_i(x,\xi,t-\tau) - \dfrac{\partial^2\Theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t^2} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau), \\ \Theta_i(x,\xi,t-\tau)|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial\Theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}\right|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \ell_i\Theta_i(x,\xi,t-\tau)|_{x\in S} = 0, \quad i=1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.75}$$

Еквівалентне визначення можна надати у вигляді:

Визначення 4.3.26 (функції Гріна хвильового рівняння)**.** Функцію $\Theta_i(x,\xi,t-\tau)$ будемо називати функцією Гріна першої, другої або третьої граничної задачі хвильового рівняння в області Ω з границею S і $t>0$, якщо вона може бути представлена у вигляді

$$\Theta_i(x,\xi,t-\tau) = \psi(x-\xi,t-\tau) + \theta_i(x,\xi,t-\tau), \tag{4.3.76}$$

де перший доданок є фундаментальним розв'язком хвильового оператора, а другий є розв'язком наступної граничної задачі:

$$\begin{cases} a^2\Delta_x\theta_i(x,\xi,t-\tau) - \dfrac{\partial^2\theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t^2} = 0, \\ \theta_i(x,\xi,t-\tau)|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial\theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t}\right|_{t-\tau\le 0} = 0, \\ \ell_i\theta_i(x,\xi,t-\tau)|_{x\in S} = -\left.\ell_i\psi_i(x,\xi,t-\tau)\right|_{x\in S}, \quad i=1,2,3. \end{cases} \tag{4.3.77}$$

Використовуючи попередні викладки для рівняння теплопровідності, легко встановити, що функція Гріна хвильового рівняння є симетричною функцією перших двох аргументів і по сукупності аргументів ξ, τ задовольняє рівняння:

$$a^2\Delta_\xi\Theta_i(x,\xi,t-\tau) - \frac{\partial^2\Theta_i(x,\xi,t-\tau)}{\partial t^2} = -\delta(x-\xi)\delta(t-\tau). \tag{4.3.78}$$

Для розв'язку граничних задач хвильового рівняння можна отримати формули інтегрального представлення аналогічні відповідним формулам для рівняння теплопровідності:

Формула 4.3.27

Розв'язком першої граничної задачі для хвильового рівняння є

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_\Omega \Theta_1(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\
+ \iiint\limits_\Omega \Theta_1(x,\xi,t)v_0(\xi),\mathrm{d}\xi - \\
- \iiint\limits_\Omega \left.\frac{\partial\Theta_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \\
- a^2 \int\limits_0^t \iint\limits_S \left(\frac{\partial\Theta_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} f(\xi,\tau)\right)\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.79}
$$

Вправа 4.3.28. Отримайте наведену формулу.

Формула 4.3.29

Розв'язком другої і третьої граничних задач для хвильового рівняння є

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_\Omega \Theta_i(x,\xi,t-\tau)F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \\
+ \iiint\limits_\Omega \Theta_i(x,\xi,t)v_0(\xi),\mathrm{d}\xi - \\
- \iiint\limits_\Omega \left.\frac{\partial\Theta_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \\
- a^2 \int\limits_0^t \iint\limits_S \Big(\Theta_i(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\Big)\mathrm{d}S_\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{4.3.80}
$$

Вправа 4.3.30. Отримайте наведену формулу.

4.4 Методи побудови функції Гріна для канонічних областей

Знаходження розв'язку граничної задачі за допомогою функції Гріна для відповідного оператора, заданої області та типу граничних умов фактично зводиться до необхідності розв'язання граничної задачі еквівалентної вихідній з спеціальними граничними умовами. Побудова функції Гріна для довільних областей є задачею такого ж рівня складності як і безпосереднє знаходження розв'язку, в той же час існують так звані канонічні області для яких можна в явному вигляді записати функцію Гріна, а значить побудувати розв'язок граничної задачі.

До канонічних областей будемо відносити паралелепіпед в прямокутній системі координат, а також області які в ортогональних криволінійних координатах є паралелепіпедами. Зокрема, півпростір, четверта частина простору, двогранний кут величини π/n, шар, що міститься між двома паралельними площинами, куля та її канонічні частини, циліндр прямокутного та кругового перерізу, паралелепіпед та інші.

4.4.1 Побудова функції Гріна методом відображення зарядів для граничних задач оператора Лапласа

Для побудови функції Гріна оператора Лапласа використовується фізична інтерпретація фундаментального розв'язку тривимірного та двовимірного евклідового простору. Нагадаємо, що фундаментальний розв'язок оператора Лапласа має вигляд:

$$q_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi|x|}, & x \in \mathbb{R}^3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x|}, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Для тривимірного простору фізичний зміст фундаментально розв'язку нам відомий і представляє потенціал електростатичного поля в точці x одиничного точкового заряду, який розташований в початку координат. Для двовимірного випадку ми визначимо фізичний зміст фундаментального розв'язку трохи нижче.

Таким чином функцію Гріна для деякої просторової області можна шукати у вигляді потенціалу електростатичного поля сукупності точкових або розподілених зарядів, один з яких є одиничним позитивним і знаходиться в довільній внутрішній точці області Ω, а усі інші лежать поза областюю Ω, місце розташування і величина зарядів підбираються таким чином, щоби задовільними однорідним граничним умовам на поверхні області.

Тобто функція Гріна для канонічних областей дуже часто може бути знайдена у вигляді:

$$G_i(p, P_0) = \frac{1}{4\pi|P - P_0|} + \sum_j \frac{\gamma_j}{4\pi|P - P_j|}. \qquad (4.4.2)$$

У цьій формулі перший доданок є фундаментальним розв'язком і одночасно моделює потенціал в точці P одиничного точкового заряду розташованого в точці $P_0 \in \Omega$. Сума — другий регулярний доданок, який фігурує в означенні 2 функції Гріна представляє функцію $g_i^k(x, \xi)$, γ_k — константи, які моделюють величину точкового заряду, $P_j \notin \Omega$ — точки розташування зарядів, які лежать поза областю Ω.

Оскільки має місце рівність

$$\Delta_P \frac{1}{4\pi|P - P_j|} = 0, \qquad (4.4.3)$$

для $P \neq P_j$, то сума

$$\sum_j \frac{\gamma_j}{4\pi|P - P_j|} \qquad (4.4.4)$$

в рівності вище дійсно задовольняє рівняння Лапласа коли $P \in \Omega$, $P_j \notin \Omega$.

4.4.2 Задача Діріхле для півпростору

Розглянемо граничну задачу:

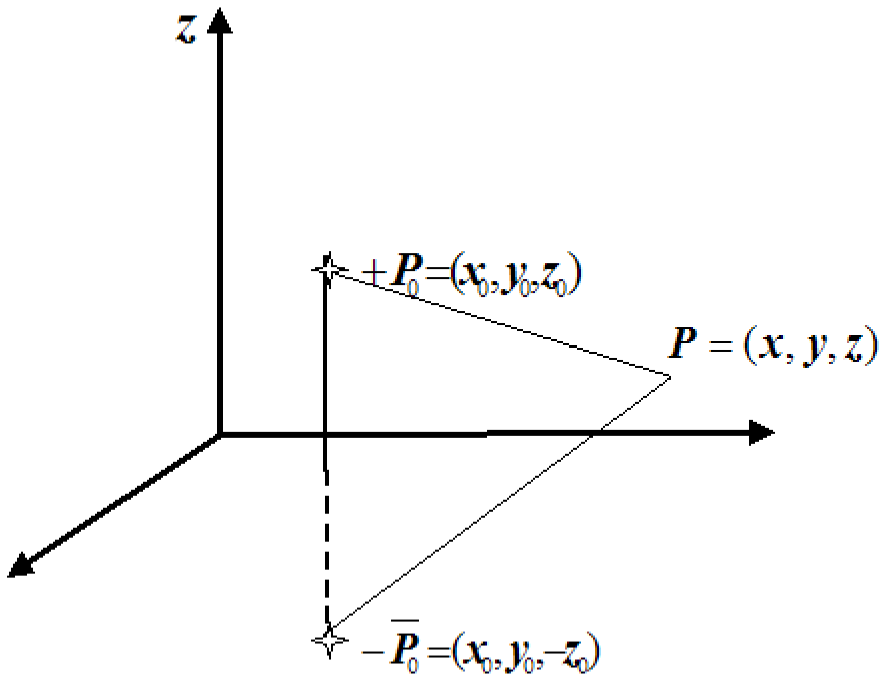
$$\begin{cases} \Delta U(P) = -F(P), & P \in \Omega = \{(x, y, z) : z > 0, x, y \in \mathbb{R}\}, \\ U(P)|_{P \in S} = f(P), & S = \{(x, y, z) : z = 0, x, y \in \mathbb{R}\}. \end{cases} \qquad (4.4.5)$$

Для знаходження розв'язку цієї задачі побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа у півпросторі $z > 0$.

В довільній точці P_0 верхнього півпростору розташуємо одиничний точковий заряд, потенціал якого обчислюється

$$\frac{1}{4\pi|P - P_0|}, \qquad (4.4.6)$$

в нижньому півпросторі $z < 0$, розташуємо компенсуючи заряди, так що би в кожній точці поверхні (площини $z = 0$) сумарний потенціал електростатичного поля дорівнював нулю:



Користуючись принципом суперпозиції електростатичних полів, легко зрозуміти, що компенсація потенціалу заряду в точці P_0 відбудеться у випадку, коли компенсуючий заряд розташувати дзеркально існуючому відносно площини $z = 0$, а величину заряду обрати одиничну зі знаком мінус.

В результаті отримаємо сумарний потенціал електростатичного поля:

$$\begin{aligned}\Pi(P) &= \frac{1}{4\pi|P-P_0|} - \frac{1}{4\pi|P-\overline{P_0}|} = \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}.\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Легко перевірити, що

$$\Pi(P)|_{P\in S} = 0. \tag{4.4.8}$$

Таким чином побудована функція представляє собою функцію Гріна першої граничної задачі (Діріхле) оператора Лапласа для півпростору:

$$G_1(P,P_0)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\\ -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}. \tag{4.4.9}$$

Для знаходження розв'язку задачі Діріхле скористаємося формулою інтегрального представлення:

$$U(P_0)=\iiint\limits_{\Omega} G_1(P,P_0)F(P)\,\mathrm{d}P-\iint\limits_{S}\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial n_P}f(P)\,\mathrm{d}S_P. \tag{4.4.10}$$

Обчислимо

$$\left.\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial n_P}\right|_{P\in S}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\right.\\ \left.-\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)=\\ =-\left(\frac{z-z_0}{4\pi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}-\right.\\ \left.\left.-\frac{z-z_0}{4\pi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2)^{3/2}}\right)\right|_{z=0}=\\ =\frac{-z_0}{2\pi(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{3/2}}. \tag{4.4.11}$$

Таким чином, використовуючи формулу (**??**) інтегрального представлення розв'язку першої граничної задачі, можемо записати розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона:

$$U(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\right.\\ \left.-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\\ +\frac{z_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{3/2}} \tag{4.4.12}$$

4.4.3 Задача Неймана для півпростору

Будемо розглядати граничну задачу:

$$\begin{cases} \Delta U(P) = -F(P), \quad P \in \Omega = \{(x,y,z) : z > 0, x, y \in \mathbb{R}\}, \\ -\left.\dfrac{\partial U(P)}{\partial z}\right|_{P\in S} = f(P), \quad S = \{(x,y,z) : z = 0, x, y \in \mathbb{R}\}. \end{cases} \tag{4.4.13}$$

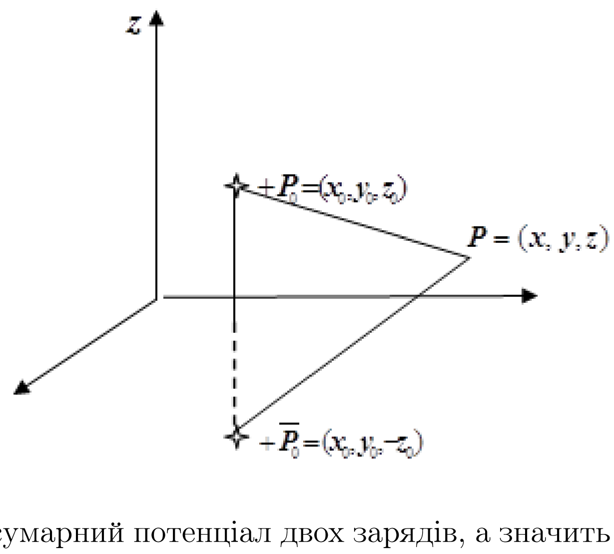
Для знаходження розв'язку цієї задачі побудуємо функцію Гріна другої граничної задачі оператора Лапласа для півпростору.

Для випадку умови другого роду тобто коли на площині $z = 0$ виконується умова

$$\left.\frac{\partial G_2(P, P_0)}{\partial n_P}\right|_{P\in S} = 0, \tag{4.4.14}$$

її можна інтерпретувати як рівність нулю потоку електростатичного поля крізь площину $z = 0$.

Це означає, що поле внутрішнього одиничного заряду треба компенсувати полем зовнішніх зарядів. Це можна зробити, якщо дзеркально одиничному позитивному заряду в точці P_0 розташувати заряд додатного знаку в симетричній точці $\overline{P_0}$:



Таким чином сумарний потенціал двох зарядів, а значить і функцію Гріна можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}\Pi(P) &= \frac{1}{4\pi|P-P_0|} + \frac{1}{4\pi|P-\overline{P_0}|} = \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} = G_2(P,P_0).\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

Перевіримо, що побудована функція Гріна задовольняє граничній умові:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G_2(P,P_0)}{\partial n_P}\right|_{P\in S} &= -\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)\right|_{z=0} = \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{z-z_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{z+z_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2)^{3/2}}\right)\right|_{z=0} = 0.\end{aligned} \tag{4.4.16}$$

Враховуючи формулу (**??**) інтегрального представлення розв'язку другої граничної задачі, отримаємо формулу для розв'язку задачі Неймана рівняння Пуассона в півпросторі:

$$\begin{aligned}U(x_0,y_0,z_0) &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right) F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^{3/2}}.\end{aligned} \tag{4.4.17}$$