Лекція №21

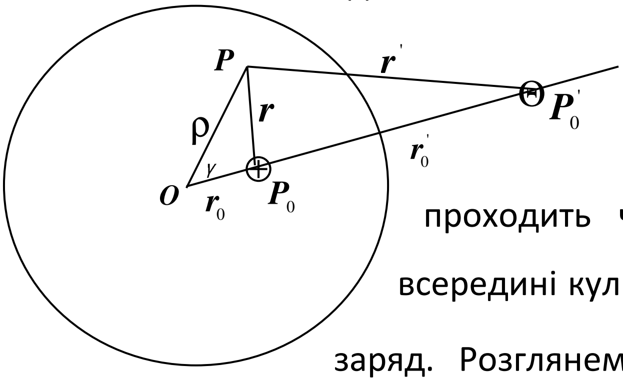
Функція Гріна задачі Діріхле для кулі

[6, стор. 84 - 96]

Будемо розглядати граничну задачу

$$\begin{cases} \Delta U(P)=0,\ |P|<R \\ U(P)\big|_{|P|=R}=f(P) \end{cases} \qquad (4.9).$$

Побудуємо функцію Гріна першої граничної задачі оператора Лапласа для кулі. Введемо позначення $|\boldsymbol{OP}_0|=\boldsymbol{r}_0$, $|\boldsymbol{OP}_0^{'}|=\boldsymbol{r}_0^{'}$



$$\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0|,\ \boldsymbol{r}^{'}=|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0^{'}|$$

На довільному промені, який проходить через центр кулі точку О розмістимо всередині кулі у точці $\boldsymbol{P}_0$ одиничний точковий додатній заряд. Розглянемо точку $\boldsymbol{P}_0^{'}$ симетричну точці $\boldsymbol{P}_0$ відносно сфери.

Це означає, що обидві точки лежать на одному промені, а їх відстані від центру сфери задовольняють співвідношенню $\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{r}_0^{'}=\boldsymbol{R}^2$. В $\boldsymbol{P}_0^{'}$ точці розмістимо від'ємний заряд величини $\boldsymbol{e}$, яку оберемо виходячи з властивостей функції Гріна.

Запишемо потенціал електростатичного поля від суми зарядів

$$\Pi(\boldsymbol{P})=\frac{1}{4\pi\boldsymbol{r}}-\frac{\boldsymbol{e}}{4\pi\boldsymbol{r}^{'}} \qquad (4.10).$$

Обчислимо величину $\boldsymbol{e}$ використовуючи теорему косинусів

$$\Pi(P)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\left(\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos\gamma\right)^{0.5}}-\frac{e}{\left(\rho^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2\rho\frac{R^2}{r_0}\cos\gamma\right)^{0.5}}\right]_{\rho=R}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{0.5}}-\frac{e}{\left(R^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2R\frac{R^2}{r_0}\cos\gamma\right)^{0.5}}\right]=$$

$$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1-e\frac{r_0}{R}}{\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{0.5}}\right]=0$$

Остання рівність буде вірною, якщо $e=R/r_0$.

Таким чином функцію Гріна задачі Діріхле для кулі можна записати у вигляді (4.10) при знайденому значенні величини зовнішнього заряду:

$$G_1(P,P_0)=\frac{1}{4\pi}\Bigg[\left(\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos\gamma\right)^{-0.5}-$$
$$-\left(R^2+\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2}-2\rho r_0\cos\gamma\right)^{-0.5}\Bigg] \qquad (4.11).$$

Для знаходження формули інтегрального представлення обчислимо

$$\left.\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial n_P}\right|_{P\in S}=\left.\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}=\frac{1}{4\pi}\Bigg[-\frac{\rho-r_0\cos\gamma}{\left(\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$\left.+\frac{\frac{\rho r_0^2}{R^2}-r_0\cos\gamma}{\left(\frac{\rho^2 r_0^2}{R^2}+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\right]_{\rho=R}=-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-r_0^2}{\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Для запису остаточної формули треба ввести сферичну систему координат. Запишемо через сферичні кути

$$\cos\gamma=\frac{\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OP_0}\right)}{\rho r_0}=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0) \qquad (4.12)$$

Тут ρ, φ, θ - сферичні координати точки $\boldsymbol{P}$, а $\boldsymbol{r}_0, \varphi_0, \theta_0$ - сферичні координати точки $\boldsymbol{P}_0$.

Використовуючи формулу (3.16) запишемо розв'язок задачі Діріхле:

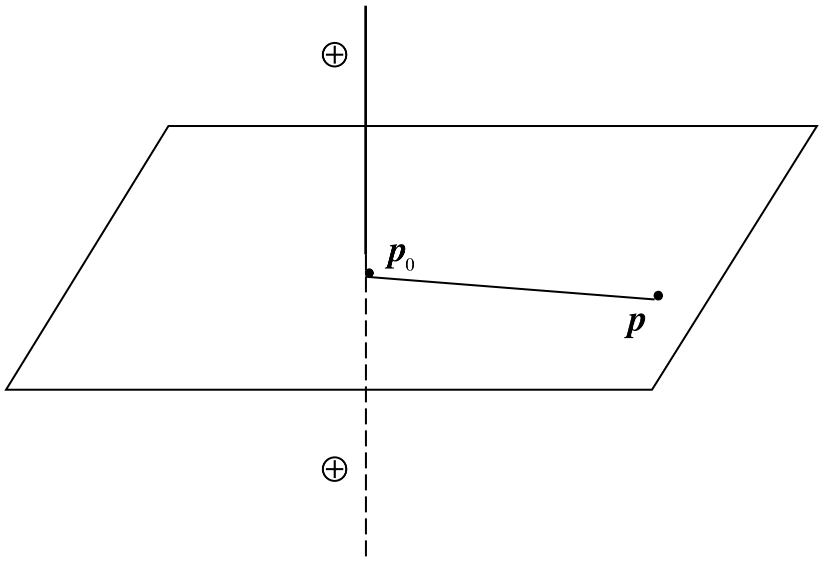
$$U(r_0,\varphi_0,\theta_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left(R^2 - r_0^2\right)\sin\theta\, f(\varphi,\theta)\,d\theta\, d\varphi}{\left(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (4.13).$$

Формула (4.13) дає розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа і називається формулою Пуассона для кулі.

Функція Гріна для областей на площині

Функція Гріна для областей у двовимірному випадку в принципі можна будувати в той же спосіб, що і в тривимірному випадку. При цьому треба враховувати вигляд фундаментального розв'язку для $\boldsymbol{R}^2$, що приводить до наступного вигляду функції Гріна

$$G_i(p,p_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|p-p_0|} + g_i(p,p_0), \;\; p,p_0 \in D \subset R^2 \qquad (4.14).$$



Фізичний зміст фундаментального розв'язку в двовимірному випадку представляє собою потенціал електростатичного поля в точці $\boldsymbol{p}$ рівномірно зарядженої одиничним додатнім зарядом нескінченої нитки, яка проходить ортогонально до площини через деяку точку $\boldsymbol{p}_0$. Точки $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_0$ належать площині.

Аналогічно кулі , можна отримати функцію Гріна задачі Діріхле для кола, яка має вигляд:

$$G_1(p,p_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{r_0^2+\rho^2-2\rho r_0\cos\gamma}}-\ln\frac{R}{r_0}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{r_0}\right)^2+\rho^2-2\rho\frac{R^2}{r_0}\cos\gamma}}\right] \quad (4.15).$$

Або через комплексні змінні $z=\rho e^{i\varphi}$, $\quad z_0=r_0e^{i\varphi_0}$, $\quad z_0^*=\frac{R^2}{\overline{z_0}}$

$$G_1(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_0\left|z-z_0^*\right|}{R\left|z-z_0\right|} \quad (4.15').$$

Таким чином розв'язок задачі Діріхле для кола може бути записана у вигляді :

$$u(r_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}f(\varphi)d\varphi \quad (4.16).$$

Або через точки комплексної площини, $\frac{R^2-r_0^2}{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}=\mathrm{Re}\frac{z+z_0}{z-z_0}$,

$d\varphi=\frac{dz}{iz}$ Тоді, формула (4.16) має вигляд:

$$u(z_0)=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}f(z)\frac{z+z_0}{z-z_0}\frac{dz}{z} \quad (4.15').$$

Нехай необхідно побудувати функцію Гріна першої граничної задачі

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in D\\ u(x,y)\big|_C=f(x,y)\end{cases} \quad (4.17).$$

для довільної однозв'язної області $\boldsymbol{D}$ з жордановою границею $\boldsymbol{C}$. Припустимо, що відома функція $\omega(z)$, яка здійснює конформне відображення області $\boldsymbol{D}$ на одиничний круг $|\omega|<1$, тоді з (4.15') функція Гріна першої граничної задачі для області $\boldsymbol{D}$ буде мати вигляд : $\boldsymbol{G}(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{1-\overline{\omega(z_0)}\omega(z)}{\omega(z)-\omega(z_0)}\right|$ (4.18).

А розв'язок задачі Діріхле (4.17) можна записати у вигляді:

$$u(\varsigma_0)=\mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\varsigma)\frac{\omega(\varsigma)+\omega(\varsigma_0)}{\omega(\varsigma)-\omega(\varsigma_0)}\frac{\omega'(\varsigma)}{\omega(\varsigma)}d\varsigma \qquad (4.19).$$

Функція Гріна першої та другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої

[6, 207 - 214]

Ми покажемо, як за допомогою функції Гріна можна знайти розв'язок першої та другої граничних задач рівняння теплопровідності для півпрямої $x>0$.

Нехай ми розглядаємо граничні задачі :

$$\begin{aligned}&a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-f(x,t),\ t>0,x>0\\&u(0,t)=\varphi(t),\ u(x,0)=u_0(x)\end{aligned} \qquad (4.20).$$

$$\begin{aligned}&a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-f(x,t),\ t>0,x>0\\&\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\varphi(t),\ u(x,0)=u_0(x)\end{aligned} \qquad (4.21).$$

Для побудови функції Гріна використаємо фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності в одновимірному евклідовому просторі. Як відомо від має вигляд: $\varepsilon(x,t)=\dfrac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{2a^2t}}$

Оскільки при побудові функції Гріна використовується фізична інтерпретація фундаментального розв'язку, то з'ясуємо її знайшовши розв'язок наступної задачі:

В нескінченому стрижні з теплоізольованою боковою поверхнею і нульовою початковою температурою в початковий момент часу $t=0$ в точці $x=0$ миттєво виділилося Q одиниць тепла. Необхідно визначити температуру стрижня в довільний момент часу в довільній його точці.

Розв'язання.

Запишемо математичну постановку задачі.

Розповсюдження тепла у однорідному стрижні задається рівнянням теплопровідності з постійними коефіцієнтами:

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-\frac{f(x,t)}{c\rho S},\ t>0,-\infty<x<\infty,$$ де $a^2=\frac{k}{c\rho}$, $f(x,t)$ - потужність теплових джерел. За умовою задачі теплове джерело є таким, що виділяє миттєво Q одиниць тепла *в точці* $x=0$ *в* початковий момент часу*, тому* функція $f(x,t)=Q\delta(t)\delta(x)$. Тобто сумарна кількість тепла дорівнює

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Q\delta(t)\delta(x)dxdt=Q$$

Оскільки до моменту дії теплових джерел початкова температура дорівнювала нулю, то початкова умова повинна мати вигляд: $u(x,0)=0$.

Таким чином ми маємо задачу Коші для рівняння теплопровідності з однорідною початковою умовою.

Розв'язок такої задачі (температуру стрижня в точці x в момент часу t) можна записати за формулою:

$$u(x,t)=\int_0^t\iiint_{R_n}F(\xi,\tau)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau+\iiint_{R_n}\varepsilon(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi \qquad (4.22).$$

Використовуючи її для цієї задачі будемо мати:

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q}{c\rho S}\delta(\tau)\delta(\xi)\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau=\frac{Q}{c\rho S}\varepsilon(x,t)=\frac{Q}{c\rho S}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{2a^2t}}$$

Таким чином, фундаментальний розв'язок оператора теплопровідності представляє собою функцію, що моделює температуру стрижня в точці x в момент часу t за рахунок дії миттєвого точкового джерела інтенсивності $Q=c\rho S$ яке діє в початковий момент часу в точці $x=0$.

Для побудови функції Гріна граничних задач (4.20), (4.21) на півпрямій використаємо метод відображення теплових джерел.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці ξ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ інтенсивності $c\rho S$, а симетричній точці $-\xi$ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ і має інтенсивність $-c\rho S$, то з фізичних міркувань можна очікувати , що в точці $x=0$, яка лежить посередині між точками $x=\xi$ та $x=-\xi$, вплив теплових джерел дає нульову температуру. Дійсно, виходячи з фізичного змісту фундаментального розв’язку, отримаємо, що температура від дії двох точкових джерел дорівнює

$$E_1(x,\xi,t-\tau)=\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}}-\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}} \quad (4.23).$$

Легко перевірити, що $E_1(0,\xi,t-\tau)=0$, $E_1(x,\xi,t-\tau)\big|_{t-\tau<0}=0$, а другий додаток $\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}}$ задовольняє однорідному рівнянню теплопровідності при $x>0, t-\tau>0$. Таким чином $E_1(x,\xi,t-\tau)$ є функція Гріна першої граничної задачі рівняння теплопровідності для півпрямої.

Якщо на прямій розташувати в довільній точці ξ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ інтенсивності $c\rho S$, а симетричній точці $-\xi$ миттєве точкове джерело, яке діє в момент часу τ і має інтенсивність $c\rho S$, то з фізичних міркувань можна очікувати , що в точці $x=0$, яка лежить посередині між точками $x=\xi$ та $x=-\xi$, тепловий потік буде дорівнювати нулю.

Запишемо температуру в цьому випадку

$$E_2(x,\xi,t-\tau)=\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}}+\frac{\theta(t-\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{|x+\xi|^2}{2a^2(t-\tau)}} \quad (4.24).$$

Легко перевірити, що $\left.\frac{\partial E_2(x,\xi,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{\theta(t-\tau)}{2a^3\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}\left[\xi e^{-\frac{\xi^2}{2a^2t}}-\xi e^{-\frac{\xi^2}{2a^2t}}\right]=0$,

Таким чином $E_2(x,\xi,t-\tau)$ є функцією Гріна другої граничної задачі рівняння теплопровідності для пів прямої.

Для запису розв’язку граничних задач (4.20), (4.21) будемо використовувати формули (3.22) та (3.23) , які треба записати для випадку пів прямої

Для першої граничної задачі будемо мати:

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty E_1(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^\infty E_1(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+$$
$$+a^2\int_0^t\left(\left.\frac{\partial E_1(x,\xi,t-\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}\varphi_0(\tau)\right)d\tau \quad (4.25).$$

Для другої граничної задачі отримаємо

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^\infty E_2(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^\infty E_2(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi-$$
$$-a^2\int_0^t\big(E_2(x,0,t-\tau)\varphi(\tau)\big)d\xi d\tau, \quad (4.26).$$

Продемонстрований метод це лише один з прийомів, який використовується для побудови функції Гріна.

Метод відображення дозволяє будувати функції Гріна для одновимірного хвильового рівняння.

§ 5 *Гармонічні функції та їх властивості*

[6, стор. 97 - 111]

Означення 1 Функцію $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ називають гармонічною в деякій відкритій області Ω, якщо $\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{C}^2(\Omega)$ і $\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega.$, тобто функція є двічі неперервно диференційованим розв’язком рівняння Лапласа.

Означення 2 Функцію $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ називають гармонічною в деякій точці, якщо ця функція гармонічна в деякому околі цієї точки.

Означення 3 Функцію $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ називають гармонічною в деякій замкненій області, якщо вона гармонічна в деякій більш широкій відкритій області.

З гармонічними функціями у тривимірних і двовимірних областях ми вже зустрічалися, а саме нам відомо, що

$$\Delta\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}=0, x\neq\xi,\ x,\xi\in R^2 \quad (5.1).$$

$$\Delta\frac{1}{4\pi|x-\xi|}=0,\ x\neq\xi,\ \ x,\xi\in R^3 \quad (5.2).$$

Інтегральне представлення функцій класу $C^2(\Omega)$

Для отримання інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$ будемо використовувати другу формулу Гріна для оператора Лапласа.

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[v(x)\Delta u(x)-u(x)\Delta v(x)\right]dx=\iint\limits_{S}\left[v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}-u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right]dS \qquad (5.3).$$

В якості функції $u(\xi)$ оберемо довільну функцію $C^2(\Omega)$, а у якості v, фундаментальний розв'язок оператора Лапласа для тривимірного евклідового простору $\frac{1}{4\pi|x-\xi|}$

В результаті підстановки цих величин в (5.3) отримаємо

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\Delta u(\xi)+u(\xi)\delta(x-\xi)\right]d\xi=\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right]dS_{\xi}$$

Після обчислення другого доданку в лівій частині можемо записати формулу інтегрального представлення функцій класу $C^2(\Omega)$.

$$u(x)=-\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\Delta u(\xi)d\xi+\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right]dS_{\xi} \quad (5.4).$$

У випадку коли функція u є гармонічною в області Ω то формула (5.4) прийме вигляд:

$$u(x)=\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right]dS_{\xi} \qquad (5.5).$$

З формули (5.5) та (5.3) можна отримати деякі властивості гармонічних функцій:

Властивість 1 Гармонічна в області Ω функція $u(x)$ має в кожній внутрішній точці області Ω неперервні похідні будь – якого порядку. Дійсно, оскільки $x\in\Omega, \xi\in S, x\neq\xi$, то для обчислення будь – якої похідної необхідно диференціювати підінтегральну функцію, яка має похідні будь - якого порядку:

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}=\iint_S\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x-\xi|}\right]dS_\xi$$

Властивість 2 Якщо $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ гармонічна функція в скінченій області Ω с границею $\boldsymbol{S}$ то має місце співвідношення $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}dS=0$ (5.6).

Дійсно, у формулі (5.3) оберемо $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\equiv 1$, тоді інтеграл в лівій частині і другий інтеграл правої частини перетворюється в нуль. В результаті чого отримаємо рівність (5.6).

Теорема 1 *(про середнє значення гармонічної функції)* Якщо $\boldsymbol{u}$ гармонічна функція в кулі і неперервна в замиканні цієї кулі, то значення гармонічної функції в центрі кулі дорівнює середньому арифметичному її значень на сфері, що обмежує кулю.

Доведення Використаємо формулу (5.5) в якій в якості поверхні $\boldsymbol{S}$ візьмемо сферу радіусу $\boldsymbol{R}$ з центром у точці x_0, і обчислимо значення функції $\boldsymbol{u}$ в точці $\boldsymbol{x}_0$

$$u(x_0)=\iint_{S(x_0,R)}\left[\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}-u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|}\right]dS_\xi$$

Оскільки $\xi\in \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{R})$, то $\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}_0-\xi|}=\frac{1}{4\pi\boldsymbol{R}}$, а $\left.\frac{\partial}{\partial n_\xi}\frac{1}{4\pi|x_0-\xi|}\right|_{S(x_0,R)}=\frac{1}{4\pi R^2}$.

Таким чином $u(x_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{S(x_0,R)}\frac{\partial u(\xi)}{\partial n}dS_\xi+\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S(x_0,R)}u(\xi)dS_\xi$

Оскільки перший інтеграл дорівнює нулю, то остаточно маємо

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{4\pi\boldsymbol{R}^2}\iint_{S(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{R})}\boldsymbol{u}(\xi)\boldsymbol{dS}_\xi \qquad (5.7).$$