Зміст

2.4.5 Додатньо визначені ядра

Визначення 2.4.16 (додатно-визначеного ядра)**.** Неперервне ядро $K(x, y)$ називається *додатно-визначеним*, якщо $\forall f \in L_2(G)$: $(\mathbf{K}f, f) \geq 0$, причому $(\mathbf{K}f, f) = 0 \iff \|f\|_{L_2(G)} = 0$.

Зауваження 2.4.17 — Довільне додатньо визначене ядро є ермітовим (його білінійна форма $(\mathbf{K}f, f)$ приймає дійсні значення).

Лема 2.4.18

Для того, щоб неперервне ядро було додатньо визначеним необхідно і достатньо, щоб його характеристичні числа були додатні.

Доведення. Необхідність: для власних функцій $(\mathbf{K}\varphi_k, \varphi_k) = 1/\lambda_k > 0$.

Достатність: Розглянемо $\mathbf{K}f$ як джерелувато-зображувану функцію, згідно до теореми Гілберта-Шмідта

$$\mathbf{K}f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k, \tag{2.4.42}$$

тоді

$$(\mathbf{K}f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} (\varphi_k, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k} > 0, \tag{2.4.43}$$

отже квадратична форма додатньо визначена.

Таким чином додатність характеристичних чисел є критерієм додатної визначеності ядра. □

Лема 2.4.19

Довільне додатньо визначене неперервне ядро має характеристичні числа і для них має місце варіаційний принцип:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in L_2(G) \\ (f,\varphi_i)=0, i=\overline{1,k-1}}} \frac{(\mathbf{K}f, f)_{L_2(G)}}{\|f\|^2_{L_2(G)}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.4.44}$$

де $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots$, а $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ — ортонормована система власних функцій.

Доведення. З теореми Гілберта Шмідта можна оцінити

$$\frac{(\mathbf{K}f, f)_{L_2(G)}}{\|f\|^2_{L_2(G)}} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_i)|^2}{\lambda_i \|f\|^2} \le \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_i)|^2}{\|f\|^2} \le \frac{1}{\lambda_k}. \tag{2.4.45}$$

(перша нерівність виконується оскільки λ_k — найменше характеристичне число в сумі, а друга випливає з нерівності Бесселя).

З іншого боку при $f = \varphi_k$ маємо

$$\frac{(\mathbf{K}\varphi_k, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}, \tag{2.4.46}$$

тобто існує функція на якій досягається верхня межа цієї нерівності. □

Теорема 2.4.20 (Мерсера, про регулярну збіжність білінійного ряду для ермітових ядер зі скінченою кількістю від'ємних характеристичних чисел)

Якщо ермітове неперервне ядро $K(x,y)$ має лише скінчену кількість від'ємних характеристичних чисел, то його білінійний ряд

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \tag{2.4.47}$$

збігається в $\overline{G} \times \overline{G}$ абсолютно і рівномірно.

Доведення. Покажемо, що якщо ядро $K(x,y)$ — додатньо визначене, то $\forall x \in \overline{G}$: $K(x,x) \ge 0$. Оскільки $K(x,y)$ — ермітове, то $K(x,x) = \overline{K}(x,x)$ і є дійсною функцією. Якщо існує хоча б одна точка $x_0 \in \overline{G}$ така, що

$K(x_0, x_0) < 0$, то виходячи з неперервності знайдеться і деякий окіл цієї точки $U(x_0, x_0) \subset \overline{G} \times \overline{G}$ такий, що $\forall (x, y) \in U(x_0, x_0)$: $\mathrm{Re} K(x, y) < 0$. Оберемо невід'ємну неперервну функцію $\varphi(x)$ яка відміна від нуля лише в $U(x_0, x_0)$ і отримаємо

$$\begin{aligned}(\mathbf{K}\varphi, \varphi) = &\int\limits_{U(x_0,x_0)} K(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = &\int\limits_{U(x_0,x_0)} \mathrm{Re}K(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq 0.\end{aligned} \tag{2.4.48}$$

Остання нерівність вступає в протиріччя з припущенням додотньої визначеності ядра, тобто теорему достатньо довести для додатньо визначених ядер.

Розглянемо ядро

$$K^p(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\overline{\varphi}_i(y)\varphi_i(x)}{\lambda_i}, \tag{2.4.49}$$

де p — номер останнього від'ємного характеристичного числа, так що усі λ_i, $i = p+1, p+2, \dots$ є додатніми. Таким чином ядро $K^p(x, y)$ є неперервним та додатньо визначеним. А це означає, що $\forall x \in \overline{G} : K(x, x) \geq 0$. Таким чином маємо нерівність:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i} \leq K(x, x) \leq M, \quad x \in \overline{G}, N = p+1, p+2, \dots, \tag{2.4.50}$$

тобто ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \tag{2.4.51}$$

рівномірно збіжний.

Розглянемо білінійний ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \tag{2.4.52}$$

і доведемо його абсолютну і рівномірну збіжність за критерієм Коші. Використовуючи нерівність Коші-Буняківського маємо:

$$\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x)\overline{\varphi}_k(y)|}{\lambda_k} \leq \left(\sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \cdot \sum_{k=p}^{p+q} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k}\right)^{1/2} \tag{2.4.53}$$

Але оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \tag{2.4.54}$$

рівномырно збіжний, то білінійний ряд

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \tag{2.4.55}$$

збігається абсолютно і рівномірно (регулярно) в $\overline{G} \times \overline{G}$. □

Зауваження 2.4.21 — Теорема Гільберта-Шмідта і її наслідки, встановлені для ермітового неперервного ядра, залишаються вірними і для ермітового слабо полярного ядра.

Зауваження 2.4.22 — Теорема Гільберта-Шмідта і формула Шмідта у випадку полярного ядра залишаються вірними, але з заміною рівномірної збіжності на середньоквадратичну.

2.5 Задача Штурма-Ліувілля. Теорема Стеклова

Постановка задачі Штурма-Ліувілля: нехай $\mathbf{L}$ — диференціальний оператор другого порядку: задано рівняння

$$\mathbf{L}u = (-p(x)u')' + q(x)u = \lambda u, \quad 0 < x < l, \tag{2.5.1}$$

з крайовими умовами

$$l_1(u)|_{x=0} = h_1u(0) - h_2u'(0) = 0, \tag{2.5.2}$$
$$l_2(u)|_{x=l} = H_1u(l) - H_2u'(l) = 0, \tag{2.5.3}$$

де функція $p \in C^{(1)}([0,l])$, $p > 0$, функція $q \in C([0,l])$, $q \geq 0$, виконуються наступні умови на сталі: $h_1, h_2, H_1, H_2 \geq 0$, $h_1 + h_2 > 0$, $H_1 + H_2 > 0$, а також

$$M_L = \{u : u \in C^{(2)}(0,l) \cap C^{(1)}([0,l]), u'' \in L_2(0,l), l_1u(0) = l_2u(l) = 0\} \tag{2.5.4}$$

– область визначення оператора $\mathbf{L}$.

Визначення 2.5.1 (власних чисел і функцій задачі Штурма-Ліувілля)**.** Знайти розв'язки задачі Штурма-Ліувіля означає знайти всі ті значення параметра λ, при яких вищезгаданакрайова задача має нетривіальний розв'язок. Ці значення називаються *власними значеннями* задачі Штурма-Ліувіля, а самі розв'язки — *власними функціями*.

2.5.1 Функція Гріна оператора L

Будемо припускати, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора $\mathbf{L}$ задачі Штурма-Ліувіля.

Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} (-p(x)u')' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{2.5.5}$$

Припустимо що $f \in C(0,l) \cap L_2(0,l)$.

З припущення, що $\lambda = 0$ не є власним числом випливає, що задача має єдиний розв'язок.

Розглянемо функції $v_i(x)$, $i = 1,2$ — ненульові дійсні розв'язки однорідних задач Коші:

$$\begin{cases} (-p(x)v_i'(x))' + q(x)v_i'(x) = 0, \quad i = 1,2 \\ l_1 v_1|_{x=0} = l_2 v_2|_{x=l} = 0 \end{cases} \tag{2.5.6}$$

З загальної теорії задач Коші випливає, що розв'язки цих задач Коші існують, тому $v_i(x)$ — двічі неперервно диференційовані функції.

Твердження 2.5.2

$v_1(x)$, $v_2(x)$ — лінійно незалежні.

Доведення. Припустимо що це не так і $v_1(x) = cv_2(x)$, тобто $v_1(x)$ задовольняє одночасно граничним умовам на лівому і правому краях. Тоді $v_1(x)$ — власна функція оператора $\mathbf{L}$, і відповідає власному числу $\lambda = 0$ що суперечить припущенню. □

В цьому випадку визначник Вронського

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.5.7}$$

Будемо шукати розв'язок задачі методом варіації довільної сталої у вигляді:

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x). \tag{2.5.8}$$

Підставимо в рівняння:

$$(-p(c_1'v_1 + c_2'v_2 + c_1v_1' + c_2v_2')' + q(c_1v_1 + c_2v_2) = f. \tag{2.5.9}$$

Накладемо першу умову на коефіцієнти: $c_1'v_1 + c_2'v_2 = 0$, маємо:

$$-p'(c_1v_1' + c_2v_2') - p(c_1'v_1' + c_2'v_2' + c_1v_1'' + c_2v_2'') + q(c_1v_1 + c_2v_2) = f, \tag{2.5.10}$$

або

$$c_1Lv_1 + c_2Lv_2 - p(c_1'v_1' + c_2'v_2') = f, \tag{2.5.11}$$

оскільки $c_1\mathbf{L}v_1 = 0$, $c_2\mathbf{L}v_2 = 0$, то

$$-p(c_1'v_1' + c_2'v_2') = f, \tag{2.5.12}$$

отже

$$c_1'v_1' + c_2'v_2' = -\frac{f}{p}. \tag{2.5.13}$$

Таким чином c_1' та c_2' повинні задовольняти системі лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'v_1 + c_2'v_2 = 0, \\ c_1'v_1' + c_2'v_2' = -\dfrac{f}{p}, \end{cases} \tag{2.5.14}$$

визначник системи

$$w(x) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.5.15}$$

> **Зауваження 2.5.3** — Має місце рівність Ліувілля:
>
> $$w(x) \cdot p(x) = w(0) \cdot p(0) = \text{const}. \tag{2.5.16}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ -\dfrac{f}{p} & v_2' \end{vmatrix} = \dfrac{v_2(x)f(x)}{p(0)w(0)}, \\ c_2'(x) = \dfrac{1}{w(x)} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & -\dfrac{f}{p} \end{vmatrix} = -\dfrac{v_1(x)f(x)}{p(0)w(0)}, \end{cases} \tag{2.5.17}$$

Знайдемо додаткові умови для диференціальних рівнянь вище:

$$\begin{aligned} l_1 u|_{x=0} &= h_1(c_1(0)v_1(0) + c_2(0)v_2(0)) - \\ &- h_2(c_1'(0)v_1(0) + c_2'(0)v_2(0) + c_1(0)v_1'(0) + c_2(0)v_2'(0)) = 0, \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

а враховуючи, що $c_1'(0)v_1(0) + c_2'(0)v_2(0) = 0$ маємо

$$c_1(0)(h_1 v_1(0) - h_2 v_1'(0)) + c_2(0)v_2'(0) = 0. \tag{2.5.19}$$

Оскільки перший доданок дорівнює нулю, то остання рівність виконується коли $c_2(0) = 0$, аналогічно отримаємо, що $c_1(l) = 0$.

Проінтегруємо систему дифурів що розглядається, отримаємо

$$c_1(x) = -\int\limits_x^l \frac{f(\xi)v_2(\xi)}{p(0)w(0)}\,\mathrm{d}\xi, \quad c_2(x) = -\int\limits_0^x \frac{v_1(\xi)f(\xi)}{p(0)w(0)}\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.20}$$

Тоді розв'язок крайової задачі буде мати вигляд:

$$u(x) = -\int\limits_0^x \frac{v_1(\xi)v_2(x)f(\xi)}{p(0)w(0)}\,\mathrm{d}\xi - \int\limits_x^l \frac{f(\xi)v_1(x)v_2(\xi)}{p(0)w(0)}\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.21}$$

Визначення 2.5.4 (функції Гріна)**.** *Функція Гріна* визначається наступним чином:

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{p(0)w(0)}\begin{cases} v_1(\xi)v_2(x), & 0 \le \xi \le x \le l, \\ v_1(x)v_2(\xi), & 0 \le x \le \xi \le l. \end{cases} \tag{2.5.22}$$

Отже розв'язок крайової задачі можна записати у вигляді

$$u(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.23}$$

$G(x,\xi)$ називається функцією Гріна оператора Штурма-Ліувіля. Попередні міркування доводять наступну лемму.

Лема 2.5.5

Якщо $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувіля, то розв'язок крайової задачі існує та єдиний і представляється за формулою

$$u(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.24}$$

через функцію Гріна.

2.5.2 Властивості функції Гріна

Властивості 2.5.6 (функції Гріна)

Можна показати, що:

1. • $G(x,\xi) \in C([0,l] \times [0,l])$;
   • $G(x,\xi) \in C^{(2)}(0 < x < \xi < l)$;
   • $G(x,\xi) \in C^{(2)}(0 < \xi < x < l)$.
2. Симетричність: $G(x,\xi) = G(\xi,x)$, $x,\xi \in [0,l] \times [0,l]$.
3. На діагоналі $x = \xi$ має місце розрив першої похідної:
$$\frac{\partial G(\xi+0,\xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi-0,\xi)}{\partial x} = -\frac{1}{p(\xi)}, \tag{2.5.25}$$
   да $\xi \in (0,l)$.
4. Поза діагоналлю $x = \xi$ функція Гріна задовольняє однорідному диференціальному рівнянню $\mathbf{L}_x G(x,y) = 0$.
5. На бічних сторонах квадрату $[0,l] \times [0,l]$ функція Гріна $G(x,y)$ задовольняє граничним умовам $l_1 G|_{x=0} = l_2 G|_{x=l} = 0$.
6. Функція $G(x,\xi)$ є розв'язком неоднорідного рівняння:
$$\mathbf{L}_x G(x,\xi) = -\delta(x-\xi), \tag{2.5.26}$$
   де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака.

2.5.3 Зведення крайової задачі з оператором Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння

Розглянемо крайову задачу з параметром

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = (-p(x)u')' + q(x)u = f + \lambda u, \\ l_1(u)|_{x=0} = 0, \\ l_2(u)|_{x=l} = 0, \\ f \in C(0,l) \cap L_2(0,l), \end{cases} \tag{2.5.27}$$

і покажемо що вона зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з дійсним, симетричним та неперервним ядром $G(x, \xi)$.

Теорема 2.5.7 (про еквівалентність крайової задачі для рівняння другого порядку інтегральному рівнянню з ермітовим ядром)
Крайова задача при умові, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора $\mathbf{L}$, еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду:

$$u(x) = \lambda \int\limits_0^l G(x,\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^l G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad u \in C([0,l]), \tag{2.5.28}$$

де $G(x, \xi)$ — функція Гріна оператора $\mathbf{L}$.

Доведення. Необхідність. Нехай виконуються умови крайової задачі, тоді з леми 2.5.5 із заміною правої частини $f \mapsto f + \lambda u$ розв'язок крайової задачі можемо представити у вигляді:

$$u(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi)(\lambda u(\xi) + f(\xi))\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.5.29}$$

тобто $u(x)$ задовольняє вищенаведеному інтегральному рівнянню.

Достатність. Нехай має місце інтегралнья рівність і $u_0(x)$ — її розв'язок. Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f + \lambda u_0, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

За лемою 2.5.5, єдиний розв'язок цієї задачі задається формулою

$$u(x) = \lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^1 G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.5.30}$$

звідки випливає, що u_0 задовольняє рівнянню $Lu_0 = f + \lambda u_0$, таким чином $u(x) = u_0(x)$ тобто u_0 є розв'язком вищенаведеної крайової задачі. $\square$

У випадку коли $f \equiv 0$, ця крайова задача перетворюється в задачу Штурма-Ліувіля

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = \lambda u, \quad 0 < x < l, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases} \tag{2.5.31}$$

Задача Штурма-Ліувіля еквівалентна задачі про знаходження характеристичних чисел та власних функцій для однорідного інтегрального рівняння Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int\limits_0^1 G(x,\xi)u(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{2.5.32}$$

при умові, що $\lambda = 0$ не є власним числом оператора $\mathbf{L}$.

Покажемо як позбавитись цього припущення. Нехай маємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = \lambda u, \quad 0 < x < l, \\ l_1(u)|_{x=0} = l_2(u)|_{x=l} = 0. \end{cases} \tag{2.5.33}$$

Легко бачити, що $(\mathbf{L}u, u) \geq 0$, тобто власні числа невід'ємні.

Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 u \equiv (-p(x)u')' + (q(x)+1)u = \mu u, \\ l_1 u|_{x=0} = l_2 u|_{x=l}, \quad \mu = \lambda + 1. \end{cases} \tag{2.5.34}$$

Ця задача з точністю до позначень співпадає з початковою задачею Штурма-Ліувіля. Очевидно, що $\mu = 0$ не є власним числом нової задачі Штурма-Ліувіля (бо тоді $\lambda = -1$ могло би бути власним числом початкової задачі Штурма-Ліувілля).

Введемо диференціальний оператор

$$\mathbf{L}_1 u = (-pu')' + q_1 u = \mu u \tag{2.5.35}$$

Отже, нова задача еквівалентна попередній задачі при $\mu = \lambda + 1$, та еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u(x) = (\lambda + 1) \int\limits_0^1 G_1(x, \xi) u(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \tag{2.5.36}$$

де $G_1(x, \xi)$ — функція Гріна оператора $\mathbf{L}_1$.

Таким чином, ввівши оператор $\mathbf{L}_1$ і відповідну йому нову функцію Гріна $G_1(x, \xi)$, можна позбутися припущення, що $\lambda = 0$ не є власним числом задачі Штурма-Ліувілля.

Приклад 2.5.8

Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + x,$$

де

$$K(x,y) = \begin{cases} x(y-1), & 0 \le x \le y \le 1 \\ y(x-1), & 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}.$$

Розв'язок. Розв'язок будемо шукати за формулою Шмідта. Знайдемо характеристичні числа та власні функції ермітового ядра. Запишемо однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^x y(x-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_x^1 x(y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Продиференціюємо рівняння:

$$\varphi'(x) = \lambda \int\limits_0^x y\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda x(x-1)\varphi(x) + \lambda \int\limits_x^1 (y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y - \lambda x(x-1)\varphi(x).$$

Обчислимо другу похідну:

$$\varphi''(x) = \lambda x\varphi(x) - \lambda(x-1)\varphi(x).$$

Або після спрощення $\varphi'' = \lambda\varphi$. Доповнимо диференціальне рівняння другого порядку крайовими умовами: легко бачити що

$$\varphi(0) = \lambda \int\limits_0^0 y(0-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_0^1 0(y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Аналогічно

$$\varphi(1) = \lambda \int\limits_0^1 y(1-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int\limits_1^1 1(y-1)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Таким чином отримаємо задачу Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} \varphi'' = \lambda\varphi, \quad 0 < x < 1, \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

Для знаходження власних чисел і власних функцій розглянемо можливі значення параметру λ:

1. $\lambda > 0$, $\varphi(x) = c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}x)$.

   Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

   $$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

   Визначник цієї системи повинен дорівнювати нулю:

   $$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sinh(\sqrt{\lambda}) & \cosh(\sqrt{\lambda}) \end{vmatrix} = -\sinh(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

   Єдиним розв'язком цього рівняння є $\lambda = 0$, яке не задовольняє, бо $\lambda > 0$. Це означає, що система рівнянь має тривіальний розв'язок і будь-яке $\lambda > 0$ не є власним числом.

2. $\lambda = 0$, $\varphi(x) = c_1 x + c_2$. З граничних умов маємо, що $c_1 = c_2 = 0$. Тобто $\lambda = 0$ не є власним числом.

3. $\lambda < 0$, $\varphi(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

   Враховуючи граничні умови, маємо систему рівнянь

   $$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 = 0, \\ c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}) = 0. \end{cases}$$

   Визначник цієї системи прирівняємо до нуля:

   $$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\sqrt{-\lambda}) & \cos(\sqrt{-\lambda}) \end{vmatrix} = -\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

   Це рівняння має зліченну множину розв'язків $\lambda_k = -(\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок $c_2 =$

0, $c_1 = c_1$.

Таким чином нормовані власні функції задачі Штурма-Ліувілля мають вигляд $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$.

Порахуємо коефіцієнти Фур'є:

$$f_n = (f, \varphi_n) = \sqrt{2}\int_0^1 x\sin(\pi n x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\frac{(-1)^n}{\pi n}$$

Згідно до формули Шмідта розв'язок рівняння при $\lambda \neq \lambda_k$ має вигляд:

$$\varphi(x) = x - 2\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin(\pi k x)}{((\pi k)^2 + \lambda)\pi k}$$

При $\lambda = \lambda_k$ розв'язок не існує, оскільки не виконана умова ортогональності вільного члена до власної функції.