Зміст

4.8 Потенціали операторів Лапласа та Гельмгольца, їх властивості

Теорія потенціалів є дуже ефективним засобом дослідження існування і єдності розв'язків граничних задач для еліптичних та параболічних рівнянь. За допомогою потенціалів граничні задачі можна звести до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з полярним ядром, а іноді до інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду з сингулярним або навіть гіперсингулярним ядром.

При отримані замість граничної задачі інтегрального рівняння Фредгольма дослідження існування і єдності розв'язку можна проводити використовуючи теорію Фредгольма для інтегральних рівнянь.

Крім того, використовуючи потенціали можна побудувати більш ефективні чисельні методи знаходження розв'язків граничних задач.

> **Визначення 4.8.0.1.** Чисельні методи які базуються на теорії потенціалу називають *методами граничних інтегральних рівнянь.*

Введемо потенціали для основних еліптичних операторів Лапласа і Гельмгольца для тривимірного евклідового простору:

$$U(x) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y \quad (4.8.1) \qquad U^k(x) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\rho(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y \quad (4.8.2)$$

$$V(x) = \iint\limits_{S} \frac{\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \quad (4.8.3) \qquad V^k(x) = \iint\limits_{S} \frac{e^{\pm ik|x-y|}\mu(y)}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}S_y \quad (4.8.4)$$

$$W(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y \qquad (4.8.5)$$

$$W^k(x) = \iint\limits_S \sigma(y) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \, \mathrm{d}S_y \qquad (4.8.6)$$

Визначення 4.8.0.2. Інтеграли (4.8.1), (4.8.2) будемо називати *потенціалом об'єму* для операторів Лапласа та Гельмгольца відповідно. Інтеграли (4.8.3), (4.8.4) будемо називати *потенціалами простого шару* (слоя) для операторів Лапласа та Гельмгольца відповідно. Інтеграли (4.8.5), (4.8.6) будемо називати *потенціалами подвійного шару* (слоя) для операторів Лапласа та Гельмгольца відповідно.

Визначення 4.8.0.3. При цьому функції ρ, μ, σ називають *щільностями потенціалів*, які задані в області Ω або на поверхні S.

Як легко бачити, при записі усіх потенціалів використовується фундаментальний розв'язок відповідного оператора: фундаментальний розв'язок оператора Лапласа

$$\frac{1}{4\pi|x-y|} \qquad (4.8.7)$$

для потенціалів об'єму, простого шару і подвійного шару для оператора Лапласа, або фундаментальний розв'язок оператора Гельмгольца

$$\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \qquad (4.8.8)$$

для потенціалів об'єму, простого шару і подвійного шару.

Аналогічно потенціалам для операторів Лапласа і Гельмгольца в тривимірному просторі можна ввести потенціали і для двовимірного простору. При цьому треба використовувати фундаментальні розв'язки оператора Лапласа і Гельмгольца в двовимірному просторі.

Нагадаємо, що фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа при $n = 2$ має вигляд

$$q_0(|x-y|) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}, \qquad (4.8.9)$$

а фундаментальний розв'язок для оператора Гельмгольца при $n = 2$ можна записати у вигляді

$$q_k(|x-y|) = \pm \frac{i}{4} \left(J_0(k|x-y|) \pm iN(k|x-y|) \right), \qquad (4.8.10)$$

де функції $J_0(x), N_0(x)$ — функції Бесселя нульового порядку першого і другого роду.

Відповідно до вигляду фундаментальних розв'язків, потенціали в двовимірному просторі матимуть вигляд:

$$U_0(x) = \iint\limits_D \rho(y) q_0(|x-y|)\,\mathrm{d}y \tag{4.8.11}$$

$$U_k(x) = \iint\limits_D \rho(y) q_k(|x-y|)\,\mathrm{d}y \tag{4.8.12}$$

$$V_0(x) = \oint\limits_C \mu(y) q_0(|x-y|)\,\mathrm{d}\ell_y \tag{4.8.13}$$

$$V_k(x) = \oint\limits_C \mu(y) q_k(|x-y|)\,\mathrm{d}\ell_y \tag{4.8.14}$$

$$W_0(x) = \oint\limits_C \sigma(y) \frac{\partial q_0(|x-y|)}{\partial \vec{n}_y}\,\mathrm{d}\ell_y \tag{4.8.15}$$

$$W_k(x) = \oint\limits_C \sigma(y) \frac{\partial q_k(|x-y|)}{\partial \vec{n}_y}\,\mathrm{d}\ell_y \tag{4.8.16}$$

Відмітимо, що властивості потенціалів залежать від декількох факторів, перелічимо їх:

- властивостей щільностей потенціалів;
- положення точки x (належить x області інтеграції або не належить);
- властивості поверхні S для потенціалів простого і подвійного шару.

4.8.1 Властивості потенціалів поза областю інтеграції

Теорема 4.8.1.1 (про властивості потенціалів поза областю інтеграції)
Якщо щільності потенціалів простого і подвійного шару інтегровані на поверхні S, ($\iint_S |\mu(y)|\,\mathrm{d}S_y < \infty$, $\iint_S |\sigma(y)|\,\mathrm{d}S_y < \infty$), а потенціал об'єму — інтегрована в області Ω,)$\iiint_\Omega |\rho(y)|\,\mathrm{d}y < \infty$), то відповідні потенціали для оператору Лапласа і Гельмгольца є функціями які мають неперервні похідні будь-якого порядку в довільній області Ω_1, яка не перетинається з областю інтегрування (Ω для потенціалу об'єму та S для потенціалів простого та подвійного шару) і в кожній точці Ω_1 ці потенціали задовольняють рівняння Лапласа або Гельмгольца відповідно.

Доведення теореми для будь-якого з потенціалів практично не відрізняється, тому продемонструємо доведення для випадку потенціалу простого шару оператора Гельмгольца.

Доведення. Оскільки щільність потенціалу простого шару μ інтегрована на S, а функція
$$\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \tag{4.8.17}$$
є неперервно-диференційованою скільки завгодно разів у випадку, коли $(x, y) \in (\Omega_1, S)$, $\Omega_1 \cap S = \emptyset$, то можна застосувати теорему про можливість диференціювання такого інтегралу, шляхом обчислення похідної від підінтегральної функції.

Тобто
$$D^\alpha V^k(x) = \iint\limits_S \mu(y) D^\alpha \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y, \quad x \in \Omega_1, \tag{4.8.18}$$
оскільки підінтегральна функція є неперервною функцією аргументу x, майже для кожного $y \in S$, то
$$\iint\limits_S \mu(y) D^\alpha \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y \in C(\Omega_1). \tag{4.8.19}$$

Оскільки потенціал має неперервні похідні будь-якого порядку, то
$$(\Delta+k^2)V^k(x) = \iint\limits_S \mu(y)(\Delta_x+k^2) \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \mathrm{d}S_y = 0, \quad x \in \Omega_1. \tag{4.8.20}$$

Останній інтеграл дорівнює нулю, оскільки при $x \neq y$:
$$(\Delta_x + k^2) \left(\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) \equiv 0. \tag{4.8.21}$$

□

Теорема 4.8.1.2 (про неперервність і неперервну диференційованість потенціалу об'єму)

Якщо щільність потенціалу об'єму інтегрована в області Ω, то потенціал об'єму для оператора Лапласа і Гельмгольця (4.8.1) та (4.8.2) є неперервними і неперервно-диференційованими функціями в усьому евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$\rho_1(y) = \begin{cases} \rho(y), & y \in \Omega, \\ 0, & y \in \Omega'. \end{cases} \tag{4.8.22}$$

Функція ρ_1 залишається інтегрованою в будь-якій області $\Omega_1 \in \mathbb{R}^3$.

Нехай $x \in \mathbb{R}^3$ — довільна точка. Розглянемо будь-яку область, яка містить точку x, нехай це область Ω_1, тоді

$$U^k(x) = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)\,\mathrm{d}y. \tag{4.8.23}$$

На останню формулу будемо дивитися як на результат відображення деякої функції $\rho_1 \in L_2(\Omega_1)$ за допомогою полярного ядра

$$K(x,y) = \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}. \tag{4.8.24}$$

Відомо, що результатом відображення буде функція $U_k \in C(\Omega_1)$. Таким чином неперервність потенціалу доведена.

Розглянемо тепер функцію

$$U_k^{(s)}(x) = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)\,\mathrm{d}y. \tag{4.8.25}$$

Для неї:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} &= \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\frac{\partial|x-y|}{\partial x_s} = \\ &= \frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\frac{x_s-y_s}{|x-y|} = \frac{A_s(x,y)}{|x-y|^2}, \end{aligned} \tag{4.8.26}$$

де A_s — неперервна функція. Таким чином

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \tag{4.8.27}$$

є полярним ядром в будь-якій області тривимірного простору.

А це означає що

$$U_k^{(s)}(x) = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\rho_1(y)\,\mathrm{d}y, \tag{4.8.28}$$

як результат відображення функції $\rho_1 \in L_2(\Omega_2)$ за допомогою полярного ядра є неперервною функцією. Тобто $U_k^{(s)} \in C(\Omega_2)$.

Покажемо тепер, що

$$U_k^{(s)}(x) = \frac{\partial U_k(x)}{\partial x_s}. \tag{4.8.29}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
\int\limits_{z_0}^{z_s} U_k^{(s)}(\ldots, x_s, \ldots)\, \mathrm{d}x_s &= \int\limits_{z_0}^{z_s} \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho_1(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x_s = \\
&= \iiint\limits_{\Omega_1} \rho_1(y) \int\limits_{z_0}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho_1(y)\, \mathrm{d}x_s\, \mathrm{d}y = \\
&= \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho_1(y)\, \mathrm{d}y \Bigg|_{x_s = z_s} - \\
&\quad - \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho_1(y)\, \mathrm{d}y \Bigg|_{x_s = z_0} = \\
&= U_k(x)|_{x_s = z_s} - U_k(x)|_{x_s = z_0}.
\end{aligned} \tag{4.8.30}$$

Вважаємо точку z_s змінною, а z_0 фіксованою і обчислимо похідну від лівої і правої частини останньої рівності:

$$\frac{\partial U_k(\ldots, z_s, \ldots)}{\partial z_s} = U_k^{(s)}(\ldots, z_s, \ldots). \tag{4.8.31}$$

□

Теорема 4.8.1.3 (про другі похідні потенціалу об'єму)
Якщо цільність потенціалу об'єму $\rho \in C^{(1)}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, то об'ємний потенціал (4.8.1) і (4.8.2) має в області Ω неперервні похідні другого порядку і задовольняє відповідно рівнянню Пуассона:

$$\Delta U(x) = -\rho(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.8.32}$$

або неоднорідному рівнянню Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)U_k(x) = -\rho(x), \quad x \in \Omega. \tag{4.8.33}$$

Доведення проведемо для потенціалу об'єму оператора Гельмгольца в тривимірному випадку. Усі інші випадки розглядаються аналогічно.

Доведення. Оскільки щільність потенціалу є неперервною, то згідно до теореми 4.8.1.2 потенціал об'єму має неперервні перші похідні зокрема і в області Ω. Обчислимо похідну потенціалу об'єму:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_k(x)}{\partial x_j} &= \iiint\limits_{\Omega} \rho(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y = -\iiint\limits_{\Omega} \rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y = \\ &= \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{S} \rho(y)\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}, y_j)\,\mathrm{d}S_y\end{aligned} \tag{4.8.34}$$

Тут була використана формула інтегрування за частинами. Таким чином перша частинна похідна потенціалу об'єму представлена у вигляді двох потенціалів: потенціалу об'єму з неперервною щільністю $\partial\rho/\partial y_j$ і потенціалу простого шару з щільністю $\rho(y)\cos(\vec{n}, y_j)$. З теореми 4.8.1.2 випливає що перший доданок — потенціал об'єму — є неперервно-диференційована функція, а з теореми 4.8.1.1 випливає, що другий доданок — потенціал простого шару — теж є неперервно-диференційована функція.

Таким чином можна обчислити другу похідну, шляхом диференціювання рівності (4.8.41):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U_k(x)}{\partial x_j^2} &= \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y - \\ &- \iint\limits_{S} \rho(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y = \\ &= \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial \rho(y)}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y - \\ &- \iint\limits_{S} \rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y, y_j)\,\mathrm{d}S_y = A.\end{aligned} \tag{4.8.35}$$

Перший доданок в правій частині останньої рівності є невласним інтегралом, запишемо його у вигляді:

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{\Omega\setminus U(x,\varepsilon)}\frac{\partial\rho(y)}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{S}\rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y,y_j)\,\mathrm{d}S_y=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{\Omega\setminus U(x,\varepsilon)}\frac{\partial\rho(y)}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y-\underbrace{\iint\limits_{S}\rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y,y_j)\,\mathrm{d}S_y+}$$
$$\underbrace{+\iint\limits_{S}\rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y,y_j)\,\mathrm{d}S_y}-\iint\limits_{S(x,\varepsilon)}\rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y,y_j)\,\mathrm{d}S_y. \tag{4.8.36}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}&=\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\frac{y_j-x_j}{|x-y|}=\\&=\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(y\vec{-}x,y_j)=\\&=-\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos(\vec{n}_y,y_j).\end{aligned}\tag{4.8.37}$$

то можемо записати, що

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{S(x,\varepsilon)}\rho(y)\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\cos(\vec{n}_y,y_j)\,\mathrm{d}S_y=\\&\quad=-\iint\limits_{S(x,\varepsilon)}\rho(y)\frac{(\pm ik|x-y|-1)e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^2}\cos^2(\vec{n}_y,y_j)\,\mathrm{d}S_y=\\&\quad=\frac{(\pm ik\varepsilon-1)e^{\pm ik\varepsilon}}{4\pi}\iint\limits_{S(0,1)}\rho(x+\varepsilon\xi)\cos^2(n_\xi,y_j)\,\mathrm{d}S_\xi.\end{aligned}\tag{4.8.38}$$

Таким чином друга похідна має вигляд:

$$\frac{\partial^2U_k(x)}{\partial x_j^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\iiint\limits_{\Omega\setminus U(x,\varepsilon)}\rho(y)\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y-\right.$$
$$\left.-\frac{(\pm ik\varepsilon-1)e^{\pm ik\varepsilon}}{4\pi}\iint\limits_{S(0,1)}\rho(x+\varepsilon\xi)\cos^2(n_\xi,x_j)\,\mathrm{d}S_\xi\right). \tag{4.8.39}$$

Обчислимо нарешті значення оператора Гельмгольца від потенціалу об'єму:

$$
\begin{aligned}
(\Delta + k^2)U_k(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\iiint\limits_{\Omega\setminus U(x,\varepsilon)} \rho(y)(\Delta+k^2)\frac{e^{\pm ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\,\mathrm{d}y\right) - \\
&= -\rho(x)\iint\limits_{S(0,1)}\sum_{j=1}^{3}\cos^2(n_\xi, x_j)\,\mathrm{d}S_\xi = -\rho(x).
\end{aligned} \tag{4.8.40}
$$

□

Зауваження 4.8.1.1 — Теорема 4.8.1.3 має цілком конкретне застосування.

Приклад 4.8.1.1

Зокрема частинні розв'язки рівняння Гельмгольца $(\Delta + k^2)u(x) = -F(x)$, $x \in \Omega$ або Пуассона $\Delta u(x) = -F(x)$, $x \in \Omega$ можна знайти у вигляді потенціалів об'єму для оператора Гельмгольца або Лапласу, з щільністю потенціалу $\rho(x) = F(x)$.

4.8.2 Поверхня Ляпунова

Визначення 4.8.2.1. Поверхню $S \subset \mathbb{R}^3$ будемо називати *поверхнею Ляпунова*, якщо вона задовольняє наступним умовам:

- В будь-якій точці x поверхні S існує єдина цілком визначена нормаль $\vec{n}_x$.
- Для будь-яких точок $x, y \in S$, існують такі додатні константи a, α, що кут θ між векторами нормалі $\vec{n}_x, \vec{n}_y$ задовольняє умові

$$\theta \le a|x-y|^\alpha. \tag{4.8.41}$$

Теорема 4.8.2.1 (про сферу Ляпунова)

Нехай S — замкнена поверхня Ляпунова, тоді існує така постійна $d > 0$, що якщо довільну точку $x_0 \in S$ прийняти за центр сфери радіусу d, то будь-яка пряма паралельна нормалі $\vec{n}_{x_0}$ до поверхні S перетинає поверхню S всередині сфери лише один раз.

Визначення 4.8.2.2. Цю сферу $S(x_0, d)$ будемо називати *сферою Ляпунова.*

Зауваження 4.8.2.1 — Зрозуміло, що якщо число d є радіусом сфери Ляпунова, то будь-яке число менше за d теж буде радіусом сфери Ляпунова. Звідси випливає, що число d можна обрати так, що би воно задовольняє нерівності

$$a \cdot d^{\alpha} < 1. \tag{4.8.42}$$

4.8.3 Місцева система координат на поверхні Ляпунова

На поверхні S виберемо довільну точку x і зробимо її початком місцевої локальної системи координат, вісь ξ_3 направимо в напрямку зовнішньої нормалі $\vec{n}_x$, а дві інші вісі ξ_1, ξ_2 розташуємо в дотичній площині до поверхні S в точці x так що би утворити обрані вісі утворювали праву трійку. Враховуючи теорему 4.8.2.1, зрозуміло, що частину поверхні Ляпунова S, яка розташована всередині сфери $S(x, d)$ можна записати у вигляді явного рівняння

$$\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2), \quad f \in C^1. \tag{4.8.43}$$

При цьому очевидно, що

$$f(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2. \tag{4.8.44}$$

Останні рівності мають місце оскільки рівняння дотичної площини, що проходить через точку $(0,0,0)$ має вигляд

$$\xi_3 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_1} \cdot \xi_1 + \frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_2} \cdot \xi_2, \tag{4.8.45}$$

а з іншого боку ця площина задається рівнянням $\xi_3 = 0$.
Оскільки, виконується (4.8.43), то сама функція f і її частинні похідні всередині сфери Ляпунова будуть малими. Наша задача оцінити порядок малості функції f і її частинних похідних.

Позначимо через $S_1(x) = S \cap U(x, d)$ — частину поверхні, яка лежить всередині сфери Ляпунова. Візьмемо довільну точку $y \in S_1(x)$, оцінимо $\cos(\vec{n}_y, \xi_3) = \cos(\vec{n}_y, \vec{n}_x)$:

$$\cos(\vec{n}_y, \xi_3) = \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots \geq 1 - \frac{\theta^2}{2!}, \tag{4.8.46}$$

остання нерівність виконується завдяки нерівностям (4.8.41), (4.8.42), $\theta \le a|x-y|^\alpha < ad^\alpha < 1$. Нехай $r = |x-y|$, тоді

$$\cos(\vec{n}_y, \xi_3) = \cos(\vec{n}_y, \vec{n}_x) \ge 1 - \frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha} \ge \frac{1}{2}. \tag{4.8.47}$$

Оскільки всередині сфери Ляпунова рівняння поверхні має вигляд (4.8.43), то вектор одиничної нормалі можна записати:

$$\vec{n}_y = \frac{\left(-\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}, -\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2}} = \begin{pmatrix} \cos(\vec{n}_y, \xi_1) \\ \cos(\vec{n}_y, \xi_2) \\ \cos(\vec{n}_y, \xi_3) \end{pmatrix}. \tag{4.8.48}$$

Оцінимо

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2} = \frac{1}{\cos(\vec{n}_y, \vec{n}_x)} \le$$
$$\le \frac{1}{1 - \frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}}{1 - \frac{1}{2}a^2 r^{2\alpha}} \le 1 + a^2 r^{2\alpha}. \tag{4.8.49}$$

Таким чином

$$\left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}\right)^2 \le 2a^2 r^{2\alpha} + a^4 r^{4\alpha} \le 3a^2 r^{2\alpha}, \tag{4.8.50}$$

$\left|\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_i}\right| \le \sqrt{3} a r^\alpha$, $i = 1, 2$, або

$$\cos(\vec{n}_y, \xi_i) \le \sqrt{3} a r^\alpha, \quad i = 1, 2. \tag{4.8.51}$$

Оцінимо $|\xi_3| = |f(\xi_1, \xi_2)|$ для частини поверхні $S_1(x)$. Позначимо через $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $r^2 = \rho^2 + \xi_3^2$. Враховуючи оцінку (4.8.51), можна записати оцінку для похідної вздовж будь-якого напряму в дотичній площині:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| \le \sqrt{3} a r^\alpha \le \sqrt{3} a d^\alpha \le \sqrt{3}. \tag{4.8.52}$$

Таким чином

$$r = |\xi_3| = |f| \le \int\limits_0^\rho \left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| \le \sqrt{3}\rho, \tag{4.8.53}$$

а звідси маємо $\rho^2 \le r^2 \le 4\rho^2$, або $\rho \le r \le 2\rho$.

З (4.8.52) маємо
$$\left|\frac{\partial f}{\partial \rho}\right| \leq \sqrt{3}ar^{\alpha} \leq 2^{\alpha}\sqrt{3}a\rho^{\alpha}. \tag{4.8.54}$$
Таким чином з (4.8.53):
$$|\xi_3| \leq \frac{2^{\alpha}a\sqrt{3}}{\alpha+1} = a_1\rho^{\alpha+1} \leq a_1r^{\alpha+1}. \tag{4.8.55}$$
Оцінимо тепер $\cos(\vec{n}_y, \vec{r})$ де $\vec{r} = y \vec{-} x$. Дійсно
$$\begin{aligned} \cos(\vec{n}_y, \vec{r}) &= \sum_{k=1}^{3} \frac{y_k - x_k}{y - x}\cos(\vec{n}_y, x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{2} \frac{\xi_k}{r}\cos(\vec{n}_y, x_k) + \frac{\xi_3}{r}\cos(\vec{n}_y, x_3) \leq \\ &\leq 2\sqrt{3}r^{\alpha} + a_1r^{\alpha} = c_1r^{\alpha}. \end{aligned} \tag{4.8.56}$$
Остаточно маємо маємо
$$\cos(\vec{n}_y, \vec{r}) \leq c_1r^{\alpha}. \tag{4.8.57}$$

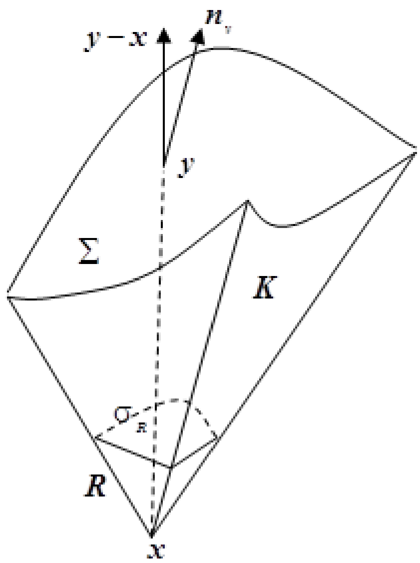
4.8.4 Тілесний кут спостереження поверхні

Розглянемо двосторонню кусково-гладку поверхню Σ, яка може бути як замкненою так і незамкненою. Зафіксуємо одну з двох сторін поверхні, обравши на ній додатній напрямок нормалі. Нехай $y \in \Sigma$ — довільна точка, $\vec{n}_y$ — зовнішня нормаль в точці y до поверхні Σ. Нехай x — довільна точка простору, зокрема може належати і поверхні Σ.

Будемо вважати, що взаємне розташування поверхні Σ і точки x є таким, що $\cos(\vec{n}_y, y - x) \geq 0$.

З'єднаємо кожну точку поверхні Σ з точкою x. Поверхня, яка утворюється в результаті з'єднання країв поверхні Σ з точкою x утворює конічну поверхню K.

Оберемо точку x за центр сфери достатньо малого радіусу R, такого, щоб сфера $S(x, R)$ не перетиналася з поверхнею Σ. Позначимо через σ_R площу поверхні тієї частини сфери, яка опинилася всередині конусу:



Визначення 4.8.4.1. *Тілесним кутом спостереження* поверхні Σ з деякої точки $x \in \mathbb{R}^3$ будемо називати величину

$$\omega(x, \Sigma) = \frac{\sigma_R}{R^2}. \tag{4.8.58}$$

Остання величина, очевидно, не залежить від радіусу сфери R і тому представляє міру тілесного кута.

У випадку, коли поверхня Σ є такою, що величина $\cos(\vec{n}_y, y - x)$ змінює свій знак в залежності від положення точки y, для визначення тілесного кута спостереження такої поверхні, вона розбивається на окремі частини $\Sigma = \bigsqcup_i \Sigma_i$, на кожній з яких $\operatorname{sign}(\cos(\vec{n}_y, y - x)) = \mathrm{const}$, $y \in \Sigma_i$.

Таким чином

$$\omega(x, \Sigma) = \sum_i \omega(x, \Sigma_i) \cdot \operatorname{sign}(\cos(\vec{n}_y, y - x))\big|_{y \in \Sigma_i}. \tag{4.8.59}$$

Лема 4.8.4.1

Для будь-якої кусково-гладкої поверхні Σ, кут спостереження цієї поверхні визначається за формулою

$$\omega(x, R) = -\iiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{|x - y|} \, \mathrm{d}S_y. \tag{4.8.60}$$

Теорема 4.8.4.1 (про обмеженість кута спостереження для скінченої поверхні Ляпунова)

Якщо Σ — скінченна поверхня Ляпунова, то існує така постійна C_0, що

$$\iiint\limits_{\Sigma} \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right| \mathrm{d}S_y \leq C_0. \tag{4.8.61}$$