1 Метод Фурье для однородного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями.

№ 643.
Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

<u>**Шаг 1.**</u> **Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде** $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{1.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T"(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T"(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.3}$$
$$X(0) = X(l) = 0, \tag{1.4}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T"(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.5}$$

Задача (1.3)–(1.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.6}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.7}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}\, x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.3), (1.4). Стало быть, рассматривать задачу (1.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T''_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \qquad t > 0, \tag{1.12}$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.1).

Будем искать решение задачи (1.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right). \tag{1.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия
$u(x,0) = \varphi(x)$, $\quad u_t(x,0) = \psi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.14}$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T'_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a \sqrt{\lambda_n} X_n(x). \tag{1.15}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n(x), \tag{1.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n, β_n. Для этого домножим (1.16) на $X_m = \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi m x}{l}\right)\right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int_0^l dx = \frac{l \alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.17}$$

Аналогично, для β_n имеем представление:

$$\beta_n = \frac{2}{l}(\psi, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{1.18}$$

Таким образом, для коэффициентов $A_n,\ B_n$ из представления (1.13) решения $u(x,t)$, сопоставляя (1.14) – (1.16), получим:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx; \tag{1.19}$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{2}{a\pi n}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{1.20}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.13) найденные коэффициенты $A_n,\ B_n$ из (1.19), (1.20).

№ 649^m.

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{1.21}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X'(l) = 0. \tag{1.22}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.23}$$
$$X(0) = X'(l) = 0, \tag{1.24}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.25}$$

Задача (1.23)–(1.24) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.23) имеет вид

$$X(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \ \lambda > 0; \tag{1.26}$$
$$X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \ \lambda < 0; \tag{1.27}$$
$$X(x) = c_1x + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0; \tag{1.28}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.29}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.23), (1.24). Стало быть, рассматривать задачу (1.25) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T''_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad\qquad t > 0. \tag{1.31}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right), \qquad\qquad t > 0, \tag{1.32}$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.21)**.**

Будем искать решение задачи (1.21) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right). \tag{1.33}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия
$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.34}$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T'_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a\sqrt{\lambda_n} X_n(x). \tag{1.35}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n(x), \tag{1.36}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n, β_n. Для этого домножим (1.36) на $X_m = \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{l}x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) dx. \tag{1.37}$$

Аналогично, для β_n имеем представление:

$$\beta_n = \frac{2}{l}(\psi, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) dx. \tag{1.38}$$

Таким образом, для коэффициентов A_n, B_n из представления (1.33) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) dx; \tag{1.39}$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{4}{a\pi(2n-1)}\int\limits_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) dx. \tag{1.40}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.33) найденные коэффициенты A_n, B_n из (1.39), (1.44).

№ 645.

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \end{cases} \tag{1.41}$$

Данная задача – частный случай рассмотренной в №649^m. Поэтому мы можем сразу воспользоваться формулами (1.33), (1.39), (1.44) для получения ответа. Найдём по (1.39) коэффициенты A_n:

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left[-\frac{2l}{(2n-1)\pi}x\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} + \frac{2l}{(2n-1)\pi}\int\limits_0^l \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}\right] = \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\right] = \frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}. \tag{1.42}$$

Для того, чтобы найти B_n, заметим, что заданная функция $\psi(x)$ уже разложена в ряд по функциям $X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$:

$$\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \tag{1.43}$$

Следовательно, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = \beta_4 = \ldots = 0$, откуда, т.к. $B_n = \beta_n\frac{2l}{\pi(2n-1)a}$,

$$B_1 = \frac{2l}{\pi a}, \qquad B_2 = \frac{2l}{3\pi a}, \qquad B_3 = B_4 = \ldots = 0. \tag{1.44}$$

Подставим найденные A_n и B_n в
$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right).$
Получим ответ:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(\frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right) +$$
$$+ \frac{2l}{a\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{\pi a}{2l}t\right) + \frac{2l}{3a\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{3\pi a}{2l}t\right).$$

№ 649.
Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{1.45}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx}$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{1.46}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T"(t) = a^2X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T"(t)}{a^2T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.47}$$
$$X'(0) = X'(l) = 0, \tag{1.48}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.49}$$

Задача (1.47)–(1.48) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.47) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.50}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.51}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.52}$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.53}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.54}$$

- При $\lambda < 0$ имеем
$$X'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\, x} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$$
И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 0$), и второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполняется автоматически, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля имеет собственное число, равное нулю и соответствующую ему собственную функцию:
$$\lambda_0 = 0, \qquad X_0(x) = 1. \tag{1.55}$$
Заметим, что эта пара (собственное число–собственная функция) может быть записана в том же виде, что и λ_n в (1.53) и X_n и (1.54) при $n = 0$:
$\lambda_0 = \frac{\pi^2 0^2}{l^2} = 0, \qquad X_0 = \cos\left(\frac{\pi 0 x}{l}\right) = 1.$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

задачи (1.47), (1.48). Стало быть, рассматривать задачу (1.49) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T"_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.56}$$

При $n = 0$ это уравнение вырождается в

$$T"_0(t) = 0, \qquad t > 0.$$

Его решение:

$$T_0 = A_0 + B_0 t, \tag{1.57}$$

где $A_0,\ B_0$ – произвольные постоянные.
При $n > 0$ решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \qquad t > 0, \tag{1.58}$$

где $A_n,\ B_n$ – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.45)**.**

Будем искать решение задачи (1.45) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right). \tag{1.59}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия
$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.60}$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n'(0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n X_n(x). \tag{1.61}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд Фурье по косинусам:

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \qquad \psi(x) = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \tag{1.62}$$

где коэффициенты $\alpha_n,\ \beta_n$ имеют вид:

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \qquad \beta_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx.$$

(Конечно, эти формулы для вычисления $\alpha_n,\ \beta_n$ мы могли получить тем же способом, что и формулы (1.37), (1.38), но мы воспользовались знанием стадартных формул для ряда Фурье).

Таким образом, для коэффициентов $A_n,\ B_n$ из представления (1.59) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx \quad n > 0, \qquad A_0 = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) dx \quad n = 0; \tag{1.63}$$

$$B_n = \frac{l\beta_n}{\pi n a} = \frac{2l}{\pi n a}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx \quad n > 0, \qquad B_0 = \frac{\beta_0}{2} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)dx \quad n = 0. \quad (1.64)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.59) найденные коэффициенты $A_n,\ B_n$ из (1.63), (1.64).

2 Метод Фурье для однородного параболического уравнения с однородными краевыми условиями.

№ 688.
Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X'(l) = 0. \tag{2.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.3}$$

$$X(0) = X'(l) = 0, \tag{2.4}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.5}$$

Задача (2.3)–(2.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (2.3) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{2.6}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{2.7}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{2.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений $\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)$, $n \in \mathbb{N}$ задачи (2.3), (2.4). Стало быть, рассматривать задачу (1.25) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2}t} \tag{2.12}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (2.1)**.**

Будем искать решение задачи (2.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2}t}. \tag{2.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{2.14}$$

$$\tag{2.15}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \tag{2.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого домножим (2.16) на $X_m = \sin\left(\pi\left(-\frac{1}{2} + m\right)x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{2.17}$$

Таким образом, для коэффициентов A_n из представления (2.14) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{2.18}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.14) найденные коэффициенты A_n из (2.18).

№ 687^M.

Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{2.20}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.21}$$
$$X(0) = X(l) = 0, \tag{2.22}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.23}$$

Задача (2.21)–(2.22) есть задача Штурма–Лиувилля (мы уже изучали её в № 643). Общее решение уравнения (2.21) имеет вид

$$X(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{2.24}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{2.25}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{2.26}$$

- При $\lambda > 0$ существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ данная задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (2.21), (2.22). Стало быть, рассматривать задачу (2.23) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.29}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \qquad t > 0, \tag{2.30}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (2.19).

Будем искать решение задачи (2.19) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \tag{2.31}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{2.32}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad \text{где} \tag{2.33}$$
$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{2.34}$$
$$\tag{2.35}$$

Сопоставляя (2.32) и (2.33), (2.34) для коэффициентов $A_n \equiv b_n$ получим:

$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{2.36}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.31) найденные коэффициенты A_n из (2.36).

№ 687.
Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = Ax, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $\quad U(x,t) = X(x)T(t)$.
Мы уже несколько раз решали эту задачу, в частности в № 687^M. У неё есть бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Поэтому для функций $T_n(t)$ у нас получается семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.38}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t} \qquad t > 0, \tag{2.39}$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (2.37)**.**

Будем искать решение задачи (2.37) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}. \tag{2.40}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие
$u(x,0) = \varphi(x)$. Но в данном случае функция $\varphi(x)$ нам задана:

$$\varphi(x) = Ax.$$

Поэтому воспользуемся формулами, полученными в № 687^M.

$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx, \qquad \text{где} \tag{2.41}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{2.42}$$

Найдём коэффициенты $A_n \equiv b_n$:

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l Ax\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx = -A\frac{2l}{\pi n l}\left(x\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{x=0}^{x=l} - \int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi n x}{l}dx\right)\right) =$$

$$= -A\frac{2}{\pi n}\left((l(-1)^n - 0) - \frac{l}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом,

$$A_n = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Подставляем найденные коэффициенты A_n в формулу (2.40):

$$u(x,t) = \frac{2Al}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}.$$

№ 691.

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0. \tag{2.44}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$\frac{X"(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.45}$$

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0, \tag{2.46}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.47}$$

Задача (2.45)–(2.46) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (2.45) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{2.48}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{2.49}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{2.50}$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $-\sqrt{\lambda}\, \sin(\sqrt{\lambda}\, l) + h \cos(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1), и равенство не было бы выполнено)
$$\sqrt{\lambda}\, \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\, l) = h \tag{2.51}$$

Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda_n}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,l) = h, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.52}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.53}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 0$), и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_2 = 0$, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля при $\lambda = 0$ также не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n \quad - \quad \text{решения уравнения (2.51)}, \qquad X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (2.45), (2.46). Стало быть, рассматривать задачу (2.47) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.54}$$

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}, \qquad t > 0, \tag{2.55}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (2.43)**.**

Будем искать решение задачи (2.43) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) \cdot A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}. \tag{2.56}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{2.57}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \tag{2.58}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n \equiv A_n$. Для этого домножим (2.58) на $X_m = \cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля всегда является ортогональной в смысле этого скалярного произведения:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right) dx = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l \left(1+\cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}}\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{h}{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l)}\right] = l + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h}\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l) =$$

$$= l + \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = l + \frac{1-\cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right] =$$

$$= l + \frac{1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}}{h} = \left[\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right) = \frac{h^2}{\lambda_m}\right] = l + \frac{1-\frac{\lambda_m}{\lambda_m+h^2}}{h} =$$

$$= l + \frac{h^2}{h\left(\lambda_m+h^2\right)} = \frac{l\left(\lambda_m+h^2\right)+h}{\lambda_m+h^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$A_n = \alpha_n = 2\frac{\lambda_n+h^2}{l\left(\lambda_n+h^2\right)+h}(\varphi, X_n) = 2\frac{\lambda_n+h^2}{l\left(\lambda_n+h^2\right)+h}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right) dx. \tag{2.59}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.56) найденные коэффициенты A_n из (2.59).

<u>Ответ:</u> $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{2\frac{\lambda_n+h^2}{l(\lambda_n+h^2)+h}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right)dx\right\}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}$.

3 Метод Фурье для неоднородного параболического уравнения с однородными краевыми условиями второго рода.

Рассмотрим неоднородную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x\in(0,l),\quad t>0, \tag{3.1}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \qquad t>0, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x\in[0,l]. \tag{3.3}$$

<u>Шаг 1.</u> Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Рассмотрим задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{3.4}$$

$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{3.5}$$

Задача (3.4)–(3.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (3.4) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{3.6}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{3.7}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{3.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi k$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

  (множитель $\frac{2}{l}$ появляется, чтобы система этих функций превратилась из ортогональной в ортонормированную)

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма–Лиувилля (3.4)–(3.5) имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функця $X_0(x) \equiv \frac{1}{l}$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (3.4)–(3.5).

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде
$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имееют вид:

$$X_0(x) \equiv \frac{1}{l}, \qquad X_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{3.11}$$

Заметим сразу, что каждое слагаемое приведённого ряда удовлетворяет краевым условиям (3.2), что достаточно (если ряд допускает почленный переход к пределу при $x \to 0+0$, $x \to l = -0$) для того, чтобы функция $u(x,t)$, определённая таким образом, также удовлетворяла краевым условиям (3.2).

Пусть функция $f(x,t)$ разложена при каждом $t \in [0,T]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x,t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n(t). \tag{3.12}$$

При этом, в силу утверждения 8.1 (лекция 8),

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{3.13}$$

Тогда уравнение 3.1 приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(X_n(x)T_n'(t) - a^2X"_n(x)T_n(t)\right) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l}T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} && \text{для} \quad n = 0\\
&X_n(x)T_n'(t) - a^2X"_n(x)T_n(t) = f_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для} \quad n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}
&T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2}\cdot l && \text{для} \quad n = 0\\
&\left(T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2}T_n(t)\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = f_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для} \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Это заведомо выполнено, если

$$T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2}\cdot l \qquad \text{для} \quad n = 0 \tag{3.14}$$

$$T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2}T_n(t) = f_n(t) \qquad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.15}$$

Итак мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_t - a^2u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (3.1) – (3.3)**.**

Из условий задачи (3.1) – (3.3) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$. Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд по косинусам

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad x \in [0,l] \qquad \text{где} \tag{3.16}$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{3.17}$$

Подставим функцию $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы

$$T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \qquad \text{для} \quad n = 0$$
$$T_n(0) = \varphi_n \qquad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} \cdot l \\ T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \end{cases} \qquad \text{для} \quad n = 0 \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \qquad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0, T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$.

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить решения задач (3.18), (3.19) в формулу $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$.