Зміст

3.3.10 Ізоентропічні течії (течії з постійною ентропією)

Отримаємо спрощену математичну модель руху ідеальної рідини в припущені, що ентропія ідеальної рідини є величиною постійною в будь-який момент часу і в довільній точці області.

Виходячи з закону збереження ентропії, за відомою формулою

$$\nabla \cdot \left(f\vec{A}\right) = \left\langle \vec{A}, \nabla f \right\rangle + f\left(\nabla \cdot \vec{A}\right), \tag{3.3.51}$$

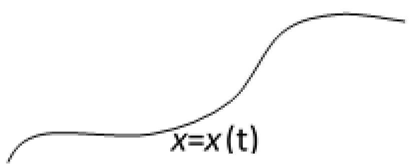
отримаємо:

$$\rho \cdot \frac{\partial S}{\partial t} + S \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\langle V, \nabla S\rangle + S \cdot \left(\nabla \cdot (\rho V)\right) = 0, \tag{3.3.52}$$

або враховуючи рівняння нерозривності маємо не дивергентну форму закону збереження ентропії:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \langle V, \nabla S\rangle = 0. \tag{3.3.53}$$

Знайдемо повну похідну деякого параметра f вздовж траєкторії руху $x = x(t)$ частинки рідини:



тобто похідну по часу t вздовж контуру $x = x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}f(x(t),t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \langle V, \nabla f\rangle. \tag{3.3.54}$$

Будемо називати цей вираз похідною по часу вздовж траєкторії руху частинки.

З не дивергентноъ форму закону збереження ентропії бачимо, що повна зміна ентропії вздовж траєкторії руху частинки дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.3.55}$$

Припустимо що в початковий момент часу $t = 0$ ідеальна рідина займає деяку область $\Omega(0)$, а ентропія $S(x, 0) = S_0 = \text{const}$ для $x \in \Omega(0)$.

Тоді згідно $\mathrm{d}S/\,\mathrm{d}t = 0$ в будь-який момент часу $t > 0$ ентропія буде залишатися постійною в довільній точці області, яка утворилася при переміщенні усіх її частинок вздовж траєкторій руху частинок, тобто області $\Omega(t)$. Таким чином можливе існування течій з постійним значення ентропії. Використовуючи введену термодинамічну функцію ентальпію, за формулою

$$\mathrm{d}W = T\,\mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{3.3.56}$$

при постійному значенні ентропії $S = \text{const}$ отримаємо співвідношення

$$\mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \tag{3.3.57}$$

Перетворимо закон збереження імпульсу, продиференціюємо відповідні добутки та отримаємо:

$$V_i \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \cdot \nabla \cdot (\rho V) + \rho \langle V, \nabla V_i \rangle + \nabla_i p = 0. \tag{3.3.58}$$

Після скорочення отримаємо закон збереження імпульсу в не дивергентній формі:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \langle V, \nabla V_i \rangle + \frac{\nabla_i p}{\rho} = 0. \tag{3.3.59}$$

Векторна форма якого для ізоентропічних течій має вигляд:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left\langle \vec{V}, \nabla \vec{V} \right\rangle + \nabla W = 0, \tag{3.3.60}$$

або

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} + \nabla W = 0 \tag{3.3.61}$$

Скористаємось відомою формулою векторного аналізу

$$\frac{\nabla \left|\vec{V}\right|^2}{2} = \vec{V} \times \nabla \times \vec{V} + \left\langle \vec{V}, \nabla \vec{V} \right\rangle, \tag{3.3.62}$$

де

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}_1 \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) - \vec{i}_2 \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) + \vec{i}_3 \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right). \quad (3.3.63)$$

Отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\nabla \left| \vec{V} \right|^2}{2} - \vec{V} \times \nabla \times \vec{V} + \nabla W = 0 \quad (3.3.64)$$

Подіємо на нього $\nabla\times$, і врахуємо, що для будь-якої скалярної функції f виуонується $\nabla \times \nabla f = 0$, в результаті отримаємо систему рівнянь відносно вектору швидкості.

Рівняння 3.3.12 (система рівнянь руху ідеальної рідини для ізоентропічного випадку)

Виконуються співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{V} \right) - \nabla \times \vec{V} \times \nabla \times \vec{V} = 0. \quad (3.3.65)$$

3.3.11 Потенціальні течії

Потенційні течії є частинним випадком ізоентропічних течій. Покажемо можливість існування потенційних течій.

Розглянемо інтеграл

$$\Gamma(t) = \oint\limits_{c(t)} \vec{V}(t)\, \mathrm{d}\vec{l} \quad (3.3.66)$$

який називається циркуляцією вектора швидкості вздовж контуру (під знаком інтегралу записано скалярний добуток векторів швидкості $\vec{V}(t)$ та вектору нескінченно малого зміщення вздовж контуру $\mathrm{d}\vec{l}$); $c(t)$ — контур, утворений частинами ідеальної рідини, що рухаються вздовж своїх траєкторій.

Теорема 3.3.13 (Томсона, про збереження циркуляції векторного поля швидкості)
Для ізоентропічних течій ($S = \mathrm{const}$)

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{3.3.67}$$

тобто циркуляція векторного поля вздовж рухомого рідкого контуру є величина постійна.

Доведення.

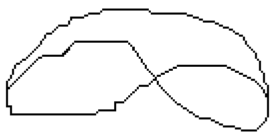
$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = \oint\limits_{c(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \vec{V} \cdot \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} \right) = \tag{3.3.68}$$

$$= \oint\limits_{c(t)} \left(-\nabla W \cdot \mathrm{d}l + \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{V} \right) = \tag{3.3.69}$$

$$= \oint\limits_{c(t)} \mathrm{d} \left(-W + \frac{|V|^2}{2} \right) = 0. \tag{3.3.70}$$

□

Використаємо теорему Стокса для будь-якої поверхні σ, що спирається на контур $c(t)$:

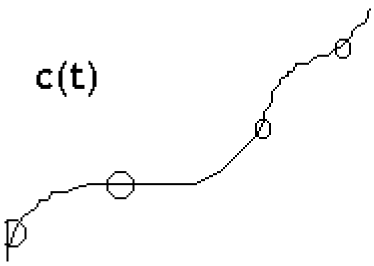


c(t)

Тобто

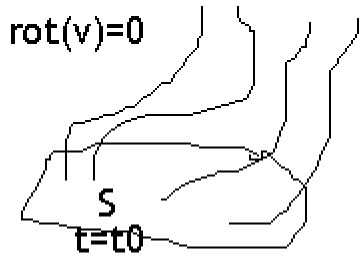
$$\Gamma(t) = \oint\limits_{c(t)} \vec{V}(t) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint\limits_{\sigma(t)} (\nabla \times V)_n \, \mathrm{d}\sigma = \mathrm{const}\,. \tag{3.3.71}$$

Розглянемо деяку траєкторію руху однієї частинки ідеальної рідини і нескінченно малий контур, який нанизаний на траєкторію руху:



Припускаючи, що при $t = 0$ маємо $\nabla \times V = 0$, а таким чином $(\nabla \times V)_n = 0$, то згідно теореми Томсона $(\nabla \times V) = 0$, для $t > 0$.

Якщо розглянути область Ω для якої циркуляція відсутня при $t = 0$ тобто $\nabla \times V = 0$ то вздовж будь-якої траєкторії яка починається в області Ω в будь-який момент часу поле залишається безвихровим, тобто $\nabla \times \vec{V} = 0$:



Це свідчить про існування безвихрових або потенційних течій.

> **Визначення 3.3.14** (потенціальної течії)**.** Отже *потенціальною* називається течія, для якої
> $$\forall t \geq t_0, \quad \forall x \in \Omega : \quad \nabla \times \vec{V}(x,t) = 0. \tag{3.3.72}$$

Звідси випливає, що існує потенціал векторного поля швидкості φ, градієнт якого рівний $\vec{V}$, тобто $\nabla\varphi = \vec{V}$. Використовуючи формулу (3.3.64), де W — тепловміст, закон збереження імпульсу буде мати вигляд:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nabla \left(\frac{|V|^2}{2} + W \right) = 0 \tag{3.3.73}$$

Закон збереження маси запишемо в не дивергентному вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot V) + \langle V, \nabla\rho \rangle = 0. \tag{3.3.74}$$

Проінтегруємо друге рівняння, та врахуємо, що $V = \nabla\varphi$, будемо мати:

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + W\right) = 0 \tag{3.3.75}$$

Звідси

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + W = \Psi(t), \tag{3.3.76}$$

де Ψ — довільна функція змінної часу. Враховуючи, що потенціал вектору швидкості визначається з точністю до адитивної функції часу, покладемо $\Psi(t) \equiv 0$. Отже, отримали

Рівняння 3.3.15 (інтеграл Коші-Лагранжа)
Виконуєтсья співвідношення:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2} + W = 0. \tag{3.3.77}$$

Визначення 3.3.16 (інтеграла Бернуллі)**.** Для стаціонарних течій, що не залежать від часу, цей інтеграл називається *інтегралом Бернуллі*:

$$\frac{|V|^2}{2} + W = \mathrm{const}\,. \tag{3.3.78}$$

З $\mathrm{d}W = \mathrm{d}p/\rho$ випливає, що

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{\rho}c^2\,\mathrm{d}\rho, \tag{3.3.79}$$

але $c^2 = \mathrm{d}p/\,\mathrm{d}\rho$, звідки

$$c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} = \rho \cdot \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \tag{3.3.80}$$

Враховуючи недивергнетну форму рівняння нерозривності отримаємо:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \Delta\varphi = 0. \tag{3.3.81}$$

Система рівнянь з інтегралу Коші-Лагранжа та останнього співвідношення є системою двох нелінійних рівнянь з двома змінними і описує потенціальний рух ідеальної рідини.

З інтегралу Коші-Лагранжа та останнього співвідношення маємо

$$\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + \Delta\varphi = 0. \tag{3.3.82}$$

Диференціюючи інтеграл Коші-Лагранжа по t:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|V|^2}{2}\right) + \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{3.3.83}$$

з урахуванням попереднього рівняння отримаємо:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right) - c^2\Delta\varphi = 0. \tag{3.3.84}$$

Це рівняння використовується для дослідження потенціальних течій. Розкриємо це рівняння у тривимірному випадку:

$$\varphi_{tt} + 2\sum_{i=1}^{3} V_i\varphi_{x_it} + \sum i, k = 1^3 V_{x_i}V_{x_k}\varphi_{x_ix_k} = c^2\sum_{i=1}^{3}\varphi_{x_ix_i}. \tag{3.3.85}$$

Для стаціонарних течій у три- та дво-вимірному випадках маємо:

$$\begin{aligned}(c^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} + (c^2 - \varphi_z^2)\varphi_{zz} - \\ - 2(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_z\varphi_y\varphi_{zy} + \varphi_x\varphi_z\varphi_{xz}) = 0,\end{aligned} \tag{3.3.86}$$

і

$$(c^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0. \tag{3.3.87}$$

відповідно.

Швидкості звуку у першому з цих рівнянь можна обчислити виходячи з формули Бернулі

$$W + \frac{|V|^2}{2} = W_0 + \frac{|V_0|^2}{2}. \tag{3.3.88}$$

Зокрема, для широкого спектру ідеальних газів, з рівнянням стану $\varepsilon = p/\rho(\gamma - 1$ можна отримати

$$c^2 = c_0^2 + \frac{\gamma - 1}{2}\cdot|V_0|^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\cdot|V|^2. \tag{3.3.89}$$

3.3.12 Модель акустичного руху рідини

Акустичними рухами ідеальної рідини будемо називати такі її рухи для яких фізичні характеристики рідини мало відрізняються від деяких постійних значень.

Розглянемо систему

Рівняння 3.3.17 (система рівнянь ізоентропічного руху ідеальної рідини)

Виконуються співвідношення

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot V) + \langle V, \nabla \rho \rangle = 0, \\ \dfrac{\partial V_i}{\partial t} + \langle V, \nabla V_i \rangle + \dfrac{\nabla_i p}{\rho} = 0, \\ S(p, \rho) = S(p_0, \rho_0). \end{cases} \tag{3.3.90}$$

Відносно параметрів руху будемо припускати, що

$$\begin{cases} p = p_0 + \tilde{p}, \quad \rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \quad V = V_0 + \tilde{V}, \\ p_0 = \text{const}, \quad \rho_0 = \text{const}, \quad V_0 = \text{const} = 0, \\ \tilde{\rho} \ll \rho_0, \quad \tilde{p} \ll p_0, \quad \tilde{V} \ll 1. \end{cases} \tag{3.3.91}$$

Проведемо лінеаризацію системи рівнянь зберігаючи лише величини першого порядку малості.

Для першого рівняння системи отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \tilde{\rho}) + (\rho_0 + \tilde{\rho})(\nabla \cdot \tilde{V}) + \left\langle \tilde{V}, \nabla(\rho_0 + \tilde{\rho}) \right\rangle = 0. \tag{3.3.92}$$

Зберігаючи члени першого порядку малості отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0(\nabla \cdot \tilde{V}) = 0. \tag{3.3.93}$$

Для другого рівняння системи маємо

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \left(\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \left\langle \tilde{V}, \nabla \tilde{V}_i \right\rangle \right) + \nabla_i (p_0 + \tilde{p}) = 0. \tag{3.3.94}$$

Розкриваючи дужки та нехтуючи членами другого порядку малості отримаємо

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \nabla_i \tilde{p} = 0. \tag{3.3.95}$$

Для лінеаризації третього співвідношення системи, ліву частину співвідношення розкладемо за формулою Тейлора зберігаючи лише члени першого порядку малості

$$S(p_0 + \tilde{p}, \rho_0 + \tilde{\rho}) = S(p_0, \rho_0) + \frac{\partial S(p_0, \rho_0)}{\partial p} \cdot \tilde{p} + \frac{\partial S(p_0, \rho_0)}{\partial \rho} \cdot \tilde{\rho} = S(p_0, \rho_0). \tag{3.3.96}$$

Таким чином можна записати:

$$\tilde{p} = -\frac{S'_\rho(p_0, \rho_0)}{S'_p(p_0, \rho_0)} \cdot \tilde{\rho}, \tag{3.3.97}$$

або

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \tag{3.3.98}$$

Таким чином маємо

Рівняння 3.3.18 (система рівнянь акустики (звукових коливань))
Виконуються співвідношення:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \tilde{V}) = 0, \\ \rho_0 \cdot \dfrac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \nabla_i \tilde{p} = 0, \\ \tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}. \end{cases} \tag{3.3.99}$$

З системи рівнянь можна отримати одне рівняння для тиску, або щільності.

Для цього перше рівняння продиференціюємо по часу, а на друге векторне рівняння подіємо операцією дивергенція, в результаті будемо мати:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} + \rho_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right) = 0, \tag{3.3.100}$$

$$\rho_0 \left(\nabla \cdot \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \nabla \tilde{p} = 0. \tag{3.3.101}$$

Віднімаючи від першого рівняння друге і використовуючи третє рівняння отримаємо

Рівняння 3.3.19 (хвильове)
Виконується співвідношення:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \tilde{\rho}. \tag{3.3.102}$$

Враховуючи потенціальний характер акустичних рухів, вектор швидкості $\tilde{V}$ можна представити у вигляді градієнту потенціалу і отримати хвильове рівняння відносно потенціалу вектора швидкості.

3.3.13 Потенційне обтікання тонких тіл

Розглянемо тонке нерухоме тіло розташоване під малим кутом до плоско паралельного потоку газу, який набігає на це тіло. При певних умовах взаємодії, потік газу навколо тіла можна вважати потенційним, а швидкість газу в околі тіла буде мало відрізняється від вектора швидкості $\vec{V_0}$ потоку, що набігає з нескінченості. Таким чином вектор швидкості збуреного потоку $\vec{V}$ можна представити як суму $\vec{V} = \vec{V_0} + \tilde{V}$. Де $|\tilde{V}| \ll |\vec{V_0}|$, тобто збурення внесені тонким тілом є малі по відношенню до набігаючого потоку.

Виберемо систему координат таким чином, щоби координатна вісь Ox співпадала з напрямом вектора швидкості потоку, що набігає, тобто $\vec{V_0} = (\vec{V_0^x}, 0, 0)$.

Замість потенціалу φ повної швидкості V введемо потенціал $\tilde{\varphi}$ швидкості $\tilde{V}$, тобто $\tilde{V} = \nabla \tilde{\varphi}$. Зрозуміло, що

$$\varphi = \tilde{\varphi} + x V_0^x. \tag{3.3.103}$$

Візьмемо за основу нелінійне рівняння для стаціонарної течії у тривимірному просторі і підставимо в нього останнє рівняння, проведемо лінеаризацію рівняння, зберігаючи величини лише першого порядку малості.

В результаті отримаємо співвідношення

$$(1 - M_0^2) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} = 0, \tag{3.3.104}$$

де $(x, y, z) \in \Omega'$, а $M_0 = V_0^x / c_0$ — число Маха потоку що набігає.

Це рівняння має певну область застосування, зокрема рівняння становиться неприйнятним якщо число M_0 близьке до одиниці (біля звукова течія). В цьому випадку коефіцієнт при першому члені є малим, що вимагає збереження членів більш високого порядку малості. На поверхні тіла задається умова непротікання, яку з використанням процесу лінеаризації можна записати у вигляді:

$$\left(V_0^x + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}\right) n_x + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \cdot n_z = 0, \tag{3.3.105}$$

або

$$\left.\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n}\right|_S = -V_0^x n_x. \tag{3.3.106}$$

В нескінченно віддаленій точці збурений потік співпадає з потоком, що набігає, тому має місце співвідношення:

$$\tilde{\varphi} \xrightarrow[x,y,z \to \infty]{} 0. \tag{3.3.107}$$