Додатковою умовою рівноважного положення тіла окрім закону рівноваги елементу об’єму є виконання закону збереження моментів сил з якого випливає симетричність матриці (2.1):

, , . Враховуючи факт симетрії, (2.6/) можна записати у вигляді  (2.6//).

 - вектор зовнішньої нормалі до поверхні.

Враховуючи формулу Остроградського – Гауса, кожен поверхневий інтеграл перетворимо в об’ємний, в результаті отримаємо:

  (2.7).

Формула (2.7) – диференціальна форма запису закону рівноваги елементу об’єму.

В подальшому симетричну матрицю (2.1) будемо називати тензором напружень.

Тензор напружень, головні вісі тензора напружень

Позначимо через  орти прямокутної система координат з координатними осями .

Введемо нову систему координат з ортами . та осями .

З’ясуємо, яким чином пов’язані вектори , які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у системі координат , з векторами , які складають стрічки (стовпці) тензору напружень у новій системі координат .

Згідно до загальних формул переходу від одного ортогонального базису до іншого, можна записати:

 (2.8).

Координати ортів нової системи координат мають значення:







Для знаходження будь – якої компоненти тензора напружень , необхідно обчислити скалярний добуток . Так, наприклад, .

Отже, для довільної компоненти тензора напружень має місце формула переходу від однієї до іншої системи координат   
 (2.9).   
У формулі (2.9) використані позначення .

Таким чином, тензор напружень – це симетрична матриця, , компоненти якої перетворюються за формулою (2.9) при переході до нової прямокутної системи координат.

Поставимо задачу вибору нової прямокутної системи координат, для якої тензор напружень має діагональну форму. Нехай  - орти нової прямокутної системи координат. Для того, щоб тензор  мав діагональну форму запису, кожен вектор ,  в новій системі координат повинен бути колінеарним відповідному орту , тобто .

Скористаємось формулою (2.8) та запишемо співвідношення для пошуку ортів ;

Запишемо останнє співвідношення в координатному вигляді:

 (2.10).

Для ортонормованого базису .

В матрично – векторній формі (2.10) має вигляд

. (2.10’).

Ця задача на власні значення з симетричною матрицею має три дійсних власних числа, позначимо їх , тобто , і три ортонормовані власні вектори .

Координатні вісі, для яких тензор напружень має діагональний вигляд, називаються головними вісями тензора напружень.

Відповідні діагональні компоненти тензора напружень ,  називаються головними компонентами тензора напружень.

Використовуючи формулу (2.9), запишемо зв’язок між компонентами тензора напружень в декартових координатах  і головними компонентами тензора напружень:

 (2.11),

  (2.11/).

Тензор деформацій і закони його перетворення

Раніше були введені характеристики:  --зміщення точки з координатами (x, y, z) від положення рівноваги в напрямку відповідної вісі.

Розглянемо можливі види деформації.

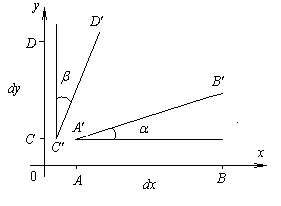
**1. Нормальні деформації** - (зміна довжини в напрямку координатної вісі) характеризуються відносною зміною довжини відрізків.

6Приклавши силу в напрямку вісі , точка  змістилася і зайняла положення ; точка  теж змістилася і зайняла положення .

Порахуємо відносне подовження відрізка  після прикладення до нього напруження:

.  
Аналогічно, можна ввести характеристику відносного подовження в напрямку двох інших вісей.

Отже, нормальні деформації характеризуються частинними похідними .

**2. Зрізуючи (дотичні) деформації**  будемо характеризувати абсолютною зміною кутів між відрізками в кожній з трьох координатних площин, які до початку дії напружень були ортогональними.

Розглянемо наступну фізичну модель. Нехай відрізки  та  довжини  та  відповідно після дії прикладених сил зайняли положення  та  відповідно. Точка  змістилася на відстань , а точка  змістилася на відстань .

Тоді  .

Аналогічно .

Сумарна зміна кута . Позначимо .

Провівши аналогічні міркування щодо інших координатних площин отримаємо:

,  (2.12).

Позначимо: ,,,, (2.13).

В результаті повну деформацію у будь – якій точці простору можна охарактеризувати симетричною матрицею: , яка називається симетричним тензором деформацій.

Перетворення тензора деформацій до нових прямокутних координат

Вивчимо перетворення симетричного тензору деформацій при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої. Нехай  вісі нової системи координат (замість ), а функції  зміщення в напряму нових вісей.

Враховуючи формули переходу від одного ортогонального базису до іншого можемо записати:



 (2.12),









 (2.13).





У формулах (2.12), (2.13)  координати ортів нового базису.

Знайдемо вирази для компонентів тензору у новій системі координатах:  при .

Зокрема для  отримаємо:



Розкриваючи дужки і використовуючи відповідні позначення отримаємо наступну формулу: .

Загальна формула перетворення тензора деформацій матиме вигляд:

,  (2.14).