

Міністерство освіти та науки України  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №2 на тему:  
“Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь”

Виконав студент групи ОМ-3  
Скибицький Нікіта

Київ, 2018

# 1 Постановка задачі

Задана система лінійних алгебраїчних рівнянь  $A\vec{x} = \vec{b}$  порядку  $n = 5, 6, \dots$

1. Методом квадратних коренів знайти:

- (а) розв'язок системи  $\vec{x}$ ;
- (б) нев'язку  $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$ ;
- (в) число обумовленості матриці  $A$ ;
- (г) визначник матриці  $A$ ;
- (д) обернену матрицю  $A^{-1}$  (вивести також матрицю  $A^{-1} \cdot A$ ).

2. Методом Зейделя:

- (а) розв'язок системи  $\vec{x}$  з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$ ;
- (б) нев'язку  $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$ ;
- (в) вивести кількість ітерацій методу.

## 2 Теоретична частина

### 2.1 Метод квадратних коренів

Цей метод призначений для розв'язання систем рівнянь із симетричною матрицею

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad A^T = A. \quad (2.1)$$

Він оснований на розкладі матриці  $A$  в добуток:

$$A = S^T D S, \quad (2.2)$$

$S$  – верхня трикутна матриця,  $S^T$  – нижня трикутна матриця,  $D$  – діагональна матриця.

Виникає питання: як обчислити  $S$ ,  $D$  по матриці  $A$ ? Маємо

$$(DS)_{i,j} = \begin{cases} d_{i,i}s_{i,j}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$$
$$(S^T DS)_{i,j} = \sum_{l=1}^n s_{i,l}^T d_{l,l} s_{l,j} = \sum_{l=1}^{i-1} s_{l,i} s_{l,j} d_{l,l} + s_{i,i} s_{i,j} d_{i,i} + \underbrace{\sum_{l=i+1}^n s_{l,i} s_{l,j} s_{l,l}}_{=0} = a_{i,j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

Якщо  $i = j$ , то

$$|s_{i,i}^2| d_{i,i} = a_{i,i} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{l,i}^2| d_{l,l} \equiv p_i.$$

Тому

$$d_{i,i} = \text{sign}(p_i), \quad s_{i,i} = \sqrt{|p_i|}.$$

Якщо  $i < j$ , то

$$s_{i,j} = \left( a_{i,j} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{l,i} d_{l,l} s_{l,j} \right) / (s_{i,i} d_{i,i}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{i+1, n}.$$

Якщо  $A > 0$  (тобто головні мінори матриці  $A$  додатні), то всі  $d_{i,i} = +1$ .

Знайдемо розв'язок рівняння (2.1). Враховуючи (2.2), маємо:

$$S^T D \vec{y} = \vec{b} \quad (2.4)$$

$$S \vec{x} = \vec{y} \quad (2.5)$$

Оскільки  $S$  – верхня трикутна матриця, а  $S^T D$  – нижня трикутна матриця, то

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{j,i} s_{j,j} y_j}{s_{i,i} d_{i,i}}, \quad i = \overline{1, n} \quad (2.6)$$

$$x_n = \frac{y_n}{s_{n,n}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{i,j} x_j}{s_{i,i}}, \quad i = \overline{n-1, 1}. \quad (2.7)$$

Метод застосовується лише для симетричних матриць. Його складність –  $Q = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ .

Переваги цього методу:

1. він витрачає в 2 рази менше пам'яті ніж метод Гаусса для зберігання  $A^T = A$  (необхідний об'єм пам'яті  $\frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$ ;
2. метод однорідний, без перестановок;
3. якщо матриця  $A$  має багато нульових елементів, то і матриця  $S$  також.

Остання властивість дає економію в пам'яті та кількості арифметичних операцій. Наприклад, якщо  $A$  має  $m$  ненульових стрічок по діагоналі, то  $Q = O(m^2 n)$ .

## 2.2 Обчислення визначника та оберненої матриці

В методі квадратного кореня  $A = S^T D S$ . Тому

$$\det A = \det S^T \det D \det S = \prod_{k=1}^n d_{k,k} \prod_{k=1}^n s_{k,k}^2. \quad (2.8)$$

Тепер  $Q_{\det} = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ .

## 2.3 Метод Зейделя

В компонентному вигляді ітераційний метод Зейделя записується так:

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Достатня умова збіжності методу Зейделя –  $A^T = A > 0$ .

## 2.4 Матрична інтерпретація методу Зейделя

Подано матрицю  $A$  у вигляді

$$A = A_1 + D + A_2,$$

де  $A_1$  – нижній трикутник матриці  $A$ ,  $A_2$  – верхній трикутник матриці  $A$ ,  $D$  – її діагональ. Тоді систему (2.1) запишемо у вигляді

$$D\vec{x} = A_1\vec{x} + A_2\vec{x} + \vec{b},$$

або

$$\vec{x} = D^{-1}A_1\vec{x} + D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{b},$$

Матричний запис методу Зейделя:

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}A_1\vec{x}^{(k+1)} + D^{-1}A_2\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b},$$

Необхідна і достатня умова збіжності методу Зейделя: всі корені рівняння  $\det(A_1 + D + \lambda A_2) = 0$  по модулю більше 1.

## 3 Практична частина

$$b_i = 12 + 5i, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\vec{b} = (17, 22, 27, 32, 37).$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{i+j-1}{2n}, & i \neq j \\ n + 10 + \frac{i+j-1}{2n}, & i = j \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 15.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 15.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 15.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 15.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 15.9 \end{pmatrix}.$$

### 3.1 Метод квадратних коренів

Покажемо наочні результати для значення  $n = 5$ , хоча запрограмований алгоритм дає змогу отримати результати  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

1. В процесі розв'язування задачі, були отримані матриці  $S$  та  $S^T$ , а також діагональна матриця  $D$ :

$$S = \begin{pmatrix} 3.885872 & 0.051469 & 0.077204 & 0.102937 & 0.128671 \\ 0. & 3.911183 & 0.101255 & 0.126484 & 0.151713 \\ 0. & 0. & 3.934944 & 0.147206 & 0.171465 \\ 0. & 0. & 0. & 3.956228 & 0.187635 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 3.974396 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}.$$

$$S^T \cdot D \cdot S = \begin{pmatrix} 15.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 15.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 15.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 15.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 15.9 \end{pmatrix}.$$

Далі отримаємо  $\vec{y}$ , який є допоміжним для знаходження вектору розв'язку  $\vec{x}$ :

$$\vec{y} = (4.374823, 5.567327, 6.632504, 7.549907, 8.312858).$$

Далі отримаємо шуканий вектор  $\vec{x}$ :

$$\vec{x} = (0.961832, 1.244275, 1.526718, 1.809160, 2.091603).$$

2. Знайдемо нев'язку  $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$ :

$$\vec{r} = (0., 0., 0., 0., 0.).$$

З точністю, яку дає змогу отримати ЕОМ.

3. Число обумовленості  $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ , де за норму матриці беремо норму узгоджену з нормою вектора  $\|\cdot\|_1$ :

$$\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| = 18.5, \quad \|A^{-1}\| = 0.073181, \quad \text{cond}(A) = 1.353842.$$

4. Визначник

$$\det A = \det S^T \cdot \det D \cdot \det S = (\det S)^2 = 884249.99942042$$

(зауважимо що істинне значення 885250, на кілька десятитисячних більше).

5. Також було отримано обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.06636132 & -0.00071247 & -0.00111959 & -0.00152672 & -0.00193384 \\ -0.00071247 & 0.0655598 & -0.00150127 & -0.00189567 & -0.00229008 \\ -0.00111959 & -0.00150127 & 0.06478372 & -0.00226463 & -0.00264631 \\ -0.00152672 & -0.00189567 & -0.00226463 & 0.06403308 & -0.00300254 \\ -0.00193384 & -0.00229008 & -0.00264631 & -0.00300254 & 0.06330789 \end{pmatrix}.$$

## 3.2 Метод Зейделя

1. Знайдемо розв'язок системи  $\vec{x}$  з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$  застосовуючи рекурентне відношення методу Зейделя

$$\vec{x} = (0.96183443, 1.24427758, 1.52671812, 1.80915996, 2.09160287).$$

2. Знайдемо нев'язку  $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$ :

$$\vec{r} = (0.0000363060931, 0.0000428437497, 0.0000101477201, -0.00000290943704, -7.10542736 \cdot 10^{-15}).$$

3. Для досягнення заданої точності, було виконано 3 ітерації.