

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Пакулина Антонида Николаевна

Вычислительный практикум
по методам вычислений

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2016

Содержание

1. Приближённое решение нелинейных уравнений и систем	8
1.1. Приближённое решение нелинейных уравнений	8
1.1.1. Отделение корней	8
1.1.2. Уточнение корней	8
1.1.3. Метод Ньютона (метод касательных)	9
1.1.4. Метод секущих	10
1.1.5. Метод хорд	10
1.1.6. Метод простой итерации (метод последовательных приближений) . .	11
1.1.7. Задание	12
1.1.8. Варианты заданий	13
1.2. Метод Ньютона для решения системы 2-х уравнений	21
1.2.1. Задание	21
1.2.2. Варианты систем	23
2. Интерполирование по значениям функции.	
Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.	
Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа	26
2.1. Постановка задачи интерполирования	26
2.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.	
Разделенные разности	27
2.3. Задание	27
2.4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа	29
2.5. Задание	29
2.6. Варианты заданий на прямое и обратное интерполирование	30
3. Интерполирование по равностоящим узлам.	
Конечные разности.	
Интерполяционный многочлен в форме Ньютона	31
3.1. Постановка задачи интерполирования	31
3.2. Конечные разности	31
3.3. Построение интерполяционного многочлена	
в зависимости от расположения точки интерполирования	32
3.3.1. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для начала таблицы	32
3.3.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для конца таблицы	34
3.3.3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона-Гаусса	
для середины таблицы (интерполирование вперед)	34
3.4. Задание	35
3.5. Варианты заданий	36
4. Интерполирование Эрмита с использованием разделенных разностей	37
4.1. Постановка задачи	37
4.2. Задание. Образец выполнения задания	37
4.3. Варианты заданий	38

5. Численное дифференцирование	40
5.1. Основные формулы численного дифференцирования для функции, заданной аналитически	40
5.2. Формулы численного дифференцирования для функции, заданной таблично в равноотстоящих узлах	40
5.3. Задание	41
5.4. Варианты заданий	42
6. Приближенное вычисление интегралов по простейшим формулам	48
6.1. Общие сведения	48
6.2. Квадратурные формулы прямоугольников	48
6.2.1. Квадратурная формула левых прямоугольников	48
6.2.2. Квадратурная формула правых прямоугольников	48
6.2.3. Квадратурная формула средних прямоугольников	48
6.2.4. Составные квадратурные формулы прямоугольников	49
6.3. Квадратурная формула трапеций	49
6.4. Квадратурная формула Симпсона	49
6.5. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса	49
6.6. Оценка погрешности квадратурных формул	50
6.7. Правило Рунге практической оценки погрешности (экстраполяция по Ричардсону)	50
6.8. Задание	50
7. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса)	52
7.1. Общие сведения	52
7.2. Построение квадратурной формулы типа Гаусса	53
7.3. Частные случаи формулы типа Гаусса	54
7.3.1. Формула Гаусса	54
7.3.2. Формула Мелера	56
7.4. Варианты заданий	56
8. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка	61
8.1. Постановка задачи	61
8.2. Метод Эйлера и улучшенный метод Эйлера	61
8.2.1. Метод Эйлера	61
8.2.2. Улучшенный метод Эйлера	62
8.3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка	62
8.4. Правило Рунге практической оценки погрешности	63
8.5. Методы Адамса	63
8.5.1. Экстраполяционный метод Адамса	63
8.5.2. Интерполяционный метод Адамса	65
8.6. Расчетные формулы методов Адамса	67
8.7. Варианты заданий	67

9. Вопросы устойчивости задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем. Жесткие задачи	75
9.1. Жесткие уравнения	75
9.1.1. Постановка задачи. Устойчивые уравнения	75
9.1.2. Метод Эйлера	75
9.1.3. Обратный метод Эйлера	76
9.1.4. Метод средней точки	76
9.1.5. Методы Адамса	77
9.2. Жесткие системы	78
9.2.1. Постановка задачи	78
9.2.2. Метод Эйлера	79
9.2.3. Обратный метод Эйлера	79
9.2.4. Методы Адамса	79
9.3. Задание	80
9.4. Варианты заданий	81
10. Векторные и матричные нормы.	
Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы	84
10.1. Векторные нормы	84
10.2. Матричные нормы	84
10.3. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы	85
10.4. Задание	86
10.5. Варианты матриц A	87
11. Прямые методы решения линейных систем	88
11.1. Схема Гаусса единственного деления	88
11.2. Схема Жордана единственного деления	89
11.3. Схемы с выбором главного элемента	89
11.4. LU-разложение	90
11.5. Задание	90
11.6. Варианты расширенных матриц	91
12. Итерационные методы решения линейных систем	95
12.1. Метод простой итерации	95
12.1.1. Расчетная формула. Условие сходимости	95
12.1.2. Получение решения с заданной точностью	95
12.2. Метод Зейделя	96
12.3. Приведение системы вида $Ax = b$ к виду $x = Hx + g$	96
12.4. Метод верхней релаксации	97
12.5. Итерационный метод с чебышевским набором параметров	98
12.6. Прием Люстерника для ускорения сходимости метода последовательных приближений	99
12.7. Варианты заданий	99
13. Проблема собственных значений	107
13.1. Метод вращений (Якоби) решения полной проблемы собственных значений и векторов матрицы	107

13.2. Степенной метод и метод скалярных произведений для нахождения максимального по модулю собственного числа симметричной матрицы	109
13.2.1. Степенной метод	110
13.2.2. Метод скалярных произведений	110
13.3. Нахождение противоположной границы спектра	111
13.4. Метод Виландта для уточнения изолированного собственного числа (метод обратных итераций)	111
13.5. Варианты заданий	112
13.6. Варианты матриц	122
14.Разностный метод решения краевой задачи для обыкновенного диффе- ренциального уравнения второго порядка. Метод прогонки	123
14.1. Постановка задачи	123
14.2. Аппроксимация дифференциального уравнения разностным	123
14.3. Аппроксимация граничных условий	124
14.4. Метод прогонки для решения систем с трехдиагональной матрицей	125
14.5. Задание	126
14.6. Варианты граничных задач	127
15.Проекционные методы решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка	130
15.1. Постановка задачи. Общие сведения	130
15.2. Метод Рунге	130
15.3. Метод Галеркина	131
15.4. Метод моментов	132
15.5. Метод наименьших квадратов	132
15.6. Метод коллокации	133
15.7. Выбор координатной системы	133
15.8. Задание	134
15.9. Варианты заданий	135
16.Численное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода	140
16.1. Метод замены ядра на вырожденное	140
16.1.1. Построение решения и резольвенты	140
16.1.2. Оценка погрешности	141
16.1.3. Задание	142
16.2. Метод механических квадратур	143
16.2.1. Построение решения	143
16.2.2. Задание	144
16.3. Варианты заданий	145
17.Метод сеток для решения уравнения параболического типа	147
17.1. Постановка задачи	147
17.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора L разностным	147
17.3. Явная разностная схема	148
17.4. Схема с весами	149

17.5. Задание	152
17.6. Варианты задач	154
18.Метод сеток для решения уравнения гиперболического типа	158
18.1. Постановка задачи	158
18.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора L разностным	158
18.3. Явная разностная схема	159
18.4. Схема с весами	160
18.5. Задание	163
18.6. Варианты задач	165
19.Разностные схемы для уравнений эллиптического типа. Итерационные методы решений сеточных уравнений	169
19.1. Постановка задачи	169
19.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений	169
19.3. Разностная аппроксимация задачи Дирихле	170
19.4. Расчетные формулы методов	171
19.4.1. Метод простой итерации	172
19.4.2. Метод итерации с оптимальным параметром	173
19.4.3. Метод Зейделя (Некрасова)	173
19.5. Двухслойные итерационные схемы	173
19.5.1. Метод простой итерации	174
19.5.2. Метод итерации с оптимальным параметром	174
19.5.3. Метод Зейделя	174
19.5.4. Метод верхней релаксации	174
19.5.5. Метод с оптимальным чебышевским набором параметров	175
19.5.6. Попеременно-треугольный итерационный метод	175
19.5.7. Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров	177
19.5.8. Выбор точности	178
19.6. Задание	178
19.7. Варианты заданий	181
20.Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Схема переменных направлений	187
20.1. Постановка задачи	187
20.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора L разностным	187
20.3. Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона	188
20.4. Двухслойная схема с весами	189
20.5. Схема переменных направлений	190
20.6. Выбор точности	192
20.7. Задание	193

21. Проблема собственных значений	
в задаче Штурма-Лиувилля	195
21.1. Постановка задачи. Общие сведения	195
21.2. Оценка собственных чисел	195
21.3. Собственные числа и собственные функции оператора с постоянными коэффициентами	196
21.4. Метод Ритца	197
21.5. Обобщенная проблема собственных значений.	
Метод обратных итераций	197
21.6. Выбор координатной системы	198
21.7. Задание	199
21.8. Варианты заданий	201
22. Применение дискретного ряда Фурье для решения методом сеток одно-	
родного уравнения теплопроводности. Спектральный признак устойчи-	
вости	205
22.1. Постановка задачи	205
22.2. Построение точного решения с использованием ряда Фурье	205
22.3. Представление решения в виде дискретного ряда Фурье	206
22.4. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений.	
Аппроксимация дифференциального оператора L разностным	206
22.5. Построение сеточного решения по явной схеме с использованием ДРФ. Спек-	
тральный признак устойчивости	207
22.6. Построение сеточного решения по схеме с весами с использованием ДРФ.	
Спектральный признак устойчивости	209
22.7. Задание	210
22.8. Варианты задач	211
Приложения	213
А. Построение составной формулы Гаусса	213
Б. Указания к алгоритму программы по решению методом сеток уравнения	
 параболического или гиперболического типов (Maple)	214
В. Указания к алгоритму программы решения сеточных уравнений итера-	
 ционными методами	215
Г. Указания к алгоритму программы решения задачи Дирихле методом пе-	
 ременных направлений	217
Список Литературы	218

1. Приближённое решение нелинейных уравнений и систем

1.1. Приближённое решение нелинейных уравнений

Дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $a < x < b$.

Всякое значение x^* , такое что $f(x^*) = 0$ называется корнем уравнения (1) или нулем функции $f(x)$.

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения складывается из двух этапов:

- 1) Отделение корней, т. е. установление промежутков $[\alpha, \beta]$, в которых содержится один и только один корень уравнения (1). Использование этих промежутков для определения начальных приближений к корням.
- 2) Уточнение приближенных корней.

1.1.1. Отделение корней

Для отделения корней следует построить таблицу значений функции или график функции, найти промежутки, на концах которых функция $f(x)$ имеет разные знаки. Тогда внутри этих промежутков содержится по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$. Нужно тем или иным образом убедиться, что данный корень является единственным.

Для уменьшения длин промежутков может быть использован метод половинного деления (бисекции).

Полагаем $[a_0, b_0] = [a, b]$. Пусть $c_0 = (a_0 + b_0)/2$.

Далее строим последовательность промежутков $\{[a_k, b_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, c_{k-1}], & \text{если } f(a_{k-1}) \cdot f(c_{k-1}) < 0, \\ [c_{k-1}, b_{k-1}], & \text{если } f(c_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0. \end{cases}$$

Здесь на каждом шаге длина промежутка уменьшается вдвое, так что

$$b_k - a_k = (b - a)/2^k.$$

1.1.2. Уточнение корней

Для уточнения корней используются итерационные методы. При решении задачи итерационными методами следует обращать внимание на следующие моменты:

- расчетная формула;
- условие сходимости;
- порядок сходимости (скорость сходимости): $\alpha \geq 1$ называют порядком сходимости последовательности $\{x_k\}$ к x^* , если $x_k \rightarrow x^*$ и существует постоянная C , такая что при всех k $|x_k - x^*| \leq C |x_{k-1} - x^*|^\alpha$;
- критерий получения решения с заданной точностью ε . Здесь имеется в виду условие на x_k , обеспечивающее $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Существуют оценки для фактической погрешности $|x_k - x^*|$ априорные или апостериорные. Априорные оценки часто бывают сильно завышены. Легко показать, что для оценки точности приближения x_k любого итерационного метода можно воспользоваться неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1}, \quad (2)$$

где $m_1 = \min |f'(x)|$ при $a \leq x \leq b$.

1.1.3. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть дано уравнение (1).

Предполагаем, что функция $f(x)$ — вещественная и находим вещественный корень x^* .

Будем предполагать, что на отрезке $[a, b]$, таком что $f(a)f(b) < 0$, существуют непрерывные производные $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$.

Выбираем $x_0 \in [a, b]$. Заменим уравнение в окрестности x_0 приближенно уравнением

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

левая часть которого есть линейная часть разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Отсюда

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Действуя аналогично, получаем расчетную формулу метода Ньютона

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Метод Ньютона имеет простой геометрический смысл: x_k есть абсцисса точки пересечения касательной к графику функции $f(x)$, построенной в точке $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, с осью абсцисс.

Теорема 1 (о сходимости). *Если*

- 1) $f(a)f(b) < 0$,
- 2) $f'(x)$, $f''(x)$ отличны от нуля (сохраняют определенные знаки при $x \in [a, b]$),
- 3) $f(x_0)f''(x_0) > 0$, $x_0 \in [a, b]$,

то $x_k \rightarrow x^*$, причем скорость сходимости определяется неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_{k-1} - x^*)^2.$$

Здесь $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Если $f(x_0)f''(x_0) < 0$, то можно не прийти к $x = x^*$, если x_0 не очень хорошее.

Так как метод Ньютона имеет второй порядок сходимости, можно пользоваться следующим критерием: если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Замечание 1. Если $f'(x^*) = 0$, то квадратичной сходимости может и не быть.

Например, пусть $f(x) = x^2$, корень $x^* = 0$ — корень второй кратности, расчетная формула имеет вид: $x_{k+1} = x_k/2$ и сходимость линейная.

Второго порядка сходимости для корня кратности p можно достичь, применяя расчетную формулу вида

$$x_k = x_{k-1} - p \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Замечание 2. Иногда целесообразно применять модифицированный метод Ньютона с расчетной формулой

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_0)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Скорость сходимости модифицированного метода значительно меньше.

Замечание 3. Приведем расчетную формулу метода 3-го порядка сходимости

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} - \frac{f^2(x_{k-1}) f''(x_{k-1})}{2 (f'(x_{k-1}))^3}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

1.1.4. Метод секущих

Заменяя производную в расчетной формуле метода Ньютона её приближенным значением по формулам численного дифференцирования, получаем расчетную формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Порядок сходимости метода секущих определяется неравенством

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_{k-1} - x^*)^\alpha,$$

где $\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.618$.

В методе секущих можно пользоваться критерием: если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

1.1.5. Метод хорд

Пусть известен промежуток $[a, b]$, такой что $f(a) \cdot f(b) < 0$ и $f''(x) > 0$. Рассмотрим два возможных случая.

- 1) $f(a) < 0$, соответственно $f(b) > 0$. В этом случае конец b неподвижен и последовательные приближения при $x_0 = a$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)} (b - x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

образуют монотонно возрастающую последовательность, причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x^* < b.$$

2) $f(a) > 0$, соответственно $f(b) < 0$. В этом случае конец a неподвижен и последовательные приближения при $x_0 = b$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a), \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

образуют монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < x^* < \dots < x_{k+1} < x_k < \dots < x_1 < x_0 = b.$$

Пределы этих последовательностей x^* существуют, так как они ограничены и монотонны.

Для оценки точности можно воспользоваться уже известным неравенством (2)

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1},$$

и

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_k - x_{k-1}|, \quad (10)$$

где $m_1 = \min |f'(x)|$, $M_1 = \max |f'(x)|$ при $a \leq x \leq b$.

Геометрически метод эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через точки $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, $k=0, 1, \dots$

Порядок метода — первый и нельзя пользоваться в качестве критерия модулем разности двух соседних приближений.

1.1.6. Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Заменим уравнение (1) равносильным уравнением

$$x = \varphi(x), \quad (11)$$

где $\varphi(x)$ — непрерывна. Расчетная формула метода

$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2 \dots \quad (12)$$

Если эта последовательность сходящаяся, то $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.

Кратко сформулируем условие сходимости. Пусть в некоторой окрестности (a, b) корня x^* уравнения (11) производная $\varphi'(x)$ сохраняет постоянный знак и выполнено неравенство

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1. \quad (13)$$

Тогда, если производная $\varphi'(x)$ положительна, то последовательные приближения (12) ($x_0 \in (a, b)$) сходятся к корню x^* монотонно, если производная $\varphi'(x)$ отрицательна, то последовательные приближения колеблются около корня x^* .

Априорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1 - q} |x_1 - x_0|. \quad (14)$$

Апостериорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1 - q} |x_k - x_{k-1}|. \quad (15)$$

Отметим, что как показывает оценка (15), ошибочно было бы пользоваться в качестве критерия получения решения с заданной точностью ε совпадения x_k и x_{k-1} с точностью ε .

Замечание 1. Напомним, что приводить уравнение вида (1) к виду (11) следует так чтобы $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, причем, чем меньше число q , тем быстрее, вообще говоря, последовательные приближения сходятся к корню x^* . Укажем один достаточно общий прием приведения. Пусть искомый корень x^* уравнения лежит на отрезке $[a, b]$, причем

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1$$

при $a \leq x \leq b$. Заменим уравнение (1) эквивалентным ему уравнением

$$x = x - \lambda f(x) \quad (\lambda > 0).$$

Из условия сходимости получаем, что можно взять

$$\lambda = \frac{1}{M_1}$$

и тогда

$$q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1$$

Замечание 2. Формулу (3) метода Ньютона можно рассматривать как формулу метода итераций для уравнения $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Легко проверить, что $\varphi'(x^*) = 0$. Поэтому следует ожидать квадратичную сходимость метода.

1.1.7. Задание

Дано уравнение $f(x) = 0$.

Требуется

- 1) Отделить все корни или корни на указанном интервале.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”, ранее и далее в таблице они обозначены x^* .
- 4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку (10). Сравнить с фактической погрешностью.
- 6) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 7) Сравнить результаты, количество итераций.

По крайней мере, для метода Ньютона должна быть создана подпрограмма с параметрами:

- x_0 — нулевое приближение к корню;

- ε — заданная точность;
- k_{\max} — максимальное количество итераций (для исключения заикливания).

Подпрограмма должна возвращать либо x_k , такое что $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, либо $x_{k_{\max}}$.

Результаты методов уточнения оформить в виде таблицы 1.

Таблица 1

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$	$x_k - x^*$	$f(x_k)$
0		—		
1				
...

1.1.8. Варианты заданий

Вариант 1

$$x^2 - 20 \sin(x) = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 2

$$63x^5 - 70x^3 + 15x^2 - 8x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 3

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 - \frac{9}{x+10} = 0. \text{ Найти корни на } [0, 2].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 4

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + \sqrt{1 - 0.2x^2} = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 5

$$\operatorname{ctg}(x) - 2x^2 = 0. \text{ Найти первые три положительные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 6

$$e^{-\frac{\pi}{4}} \sin(\pi x) + 0.1 = 0. \text{ Найти корни } \in [0, 3].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 7

$$\lg(x) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 8

$$\ln(5 - x) + x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.

- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 9

$$e^{-\sqrt{x}} \cos(2\pi x) = 0.6.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 10

$$x^4 + \frac{1}{5-x} + 1 = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 11

$$\operatorname{tg}(x) + e^x = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.

- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 12

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - x - 3 = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 13

$$x^2 - 20 \sin(x) = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 14

$$63x^5 - 70x^3 + 15x^2 - 8x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.

- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 15

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 - \frac{9}{x+10} = 0. \text{ Найти корни } \in [0, 2].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 16

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + \sqrt{1 - 0.2x^2} = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 17

$$\cot(x) - 2x^2 = 0. \text{ Найти первые три положительные корня.}$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.

- 4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 18

$$e^{-\frac{x}{4}} \sin(\pi x) + 0.1 = 0. \text{ Найти корни } \in [0, 3].$$

Требуется

- 1) Отделить корни на указанном интервале.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 19

$$\lg(x) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 20

$$\ln(5 - x) + x = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 21

$$e^{-\sqrt{x}} \cos(2\pi x) = 0.6.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leq |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
- 4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 22

$$x^4 + \frac{1}{5-x} + 1 = 0.$$

Требуется

- 1) Отделить все корни.
- 2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
- 3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
- 4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
- 5) Сравнить результаты, количество итераций.

1.2. Метод Ньютона для решения системы 2-х уравнений

Дана система:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

где $f(x, y)$, $g(x, y)$ достаточно гладкие функции.

В результате действий, аналогичных случаю одного уравнения, т.е. приближенно заменяя систему (16) линейной системой, получаем следующие расчетные формулы:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{d_x^{(k)}}{d^{(k)}}, \quad y_{k+1} = y_k - \frac{d_y^{(k)}}{d^{(k)}},$$

где

$$d^{(k)} = \begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix},$$
$$d_x^{(k)} = \begin{vmatrix} f(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix}, \quad d_y^{(k)} = \begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & f(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & g(x_k, y_k) \end{vmatrix}.$$

1.2.1. Задание

Требуется найти все решения системы уравнений или решения в заданной области с заданной точностью $\varepsilon=0.00001$.

Программа должна содержать подпрограмму для уточнения решения методом Ньютона с параметрами:

x_0, y_0 — нулевое приближение к корню;

ε — заданная точность;

kmax — максимальное количество итераций (для исключения заикливания).

Подпрограмма должна возвращать либо решение (x_k, y_k) , такое что

$$||(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})|| < \varepsilon, \text{ либо } (x_{k \max}, y_{k \max}).$$

Здесь норма вектора $(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})$ может быть вычислена, например, следующим образом:

$$||(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})|| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Отчет должен содержать

- 1) Графики функций $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ для выбора начального приближения, выполненные в математическом пакете Maple.

Для этого следует объявить функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, подключить пакет, содержащий функцию `implicitplot()` для построения графиков неявно заданных функций, и обратиться к ней.

Образец:

```
> f:=(x,y)->exp(y-0.1*x)-x*y-1.4;
> g:=(x,y)->x^2-2*y^2-4;

> with(plots):
> implicitplot({f(x,y)=0,g(x,y)=0},x=-4..4,y=-3..3);
```

- 2) Уточнение начального приближения до тех пор, пока $\|(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\| < \varepsilon$, методом Ньютона.

Результаты оформить в виде таблицы 2.

Таблица 2

k	x_k	y_k	$\ ((x_k - x_{k-1}), (y_k - y_{k-1}))\ $	$f(x_k, y_k)$	$g(x_k, y_k)$
0			—		
1					
...					

1.2.2. Варианты систем

Вариант 1

$$\begin{cases} \sin(x - 0.5y) - x + y^2 = 0, \\ (y + 0.1)^2 + x^2 = 0.6. \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = -0.2, \\ y^2 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} e^{\frac{x}{y-10}} - yx = 1.4, \\ x^2 + 2y^2 = 4. \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x - y - 0.2) = xy, \\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 5

$$\begin{cases} \sin(x - 0.5y) = x - y^2, \\ (y + 0.1)^2 + x^2 = 0.7. \end{cases}$$

Вариант 6

$$(y + 0.1)^2 + x^2 = 0.2,$$

$$x - y^2 = 0.37731.$$

Вариант 7

$$\begin{cases} \sin(x - 0.4y) = x - y^2, \\ (y + 0.1)^2 + x^2 = 0.7. \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(y - 0.8x) + 0.8xy = 0.3, \\ x^2 + y^2 = 1.7. \end{cases}$$

Вариант 9

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(y - 0.2x) + 0.2xy = 0.3, \\ x^2 + y^2 = 1.7. \end{cases}$$

Вариант 10

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x - y - 0.2) = xy, \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 11

$$\begin{cases} e^{x+y} + y = x^2, \\ (x + 0.5)^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Вариант 12

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.1) = x^2, \\ 0.5x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 13

$$\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = -0.2, \\ y^2 + 0.5x^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 14

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0.4) = x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 15

$$\begin{cases} \cos(x^2 + 0.6y) + x^2 + y^2 = 1.6, \\ 1.5(x + 0.1)^2 - (y - 0.1)^2 = 1.4. \end{cases}$$

Вариант 16

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2.1, \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 0.15269. \end{cases}$$

Вариант 17

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} - y^2 = 0.75, \\ \frac{y^2}{4} + x^2 = 3.58595. \end{cases}$$

Вариант 18

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1.3, \\ x - y^2 - y = -0.22456. \end{cases}$$

Вариант 19

$$\begin{cases} (x + 0.5)^2 + y^2 = 2, \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 0.40593. \end{cases}$$

Вариант 20

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 1.544878, \\ \frac{x^2}{0.9} + 2y^2 = 4. \end{cases}$$

2. Интерполирование по значениям функции.

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

2.1. Постановка задачи интерполирования

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана таблица значений вещественной функции $y = f(x)$:

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
\dots	\dots
x_n	$f(x_n)$

Узлы предполагаются попарно различными: $x_i \neq x_j, i \neq j$.

Требуется найти значение функции в точке $x = \bar{x}$, не совпадающей с узлами.

Приближенное значение функции $f(\bar{x})$ может быть найдено как значение интерполяционного многочлена: $f(\bar{x}) \approx P_n(\bar{x})$, где $P_n(x)$ строится единственным образом из условий $P_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$.

Погрешность интерполирования находится из теоремы:

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$ на наименьшем отрезке $[c, d]$, содержащем узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и точку интерполирования \bar{x} , так что $c = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}, d = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$.

Тогда существует такая точка $\xi = \xi(\bar{x}), c < \xi < d$, что

$$R_n(f, \bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x}), \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (1)$$

Оценка погрешности вычисляется следующим образом:

$$|R_n(\bar{x})| \leq M_{n+1} \cdot \frac{|(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_n)|}{(n+1)!}, \quad (2)$$

где

$$M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|, \quad x \in [c, d].$$

Часто практически строится многочлен $P_m(x)$, где $m < n$, по $m+1$ узлу. Очевидно, что из $n+1$ узла следует выбрать такие $m+1$, которые обеспечивают наименьшую погрешность, т.е. узлы, ближайšie к точке интерполирования \bar{x} .

При построении интерполяционного многочлена в виде $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ коэффициенты a_i являются решением системы $P_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$. Определитель этой системы — определитель Вандермонда. Он отличен от нуля, так как узлы попарно различны.

Удобнее строить многочлен в форме Ньютона или в форме Лагранжа.

2.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

Разделенные разности

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона имеет вид:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + A_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \quad (3)$$

Преимуществом этой формы является простота нахождения коэффициентов:

$$A_0 = f(x_0), \quad A_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ и т. д., а также тот факт, что}$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + A_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}).$$

Если узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n выбраны в порядке близости к точке интерполирования \bar{x} , то можно утверждать, что многочлен любой степени $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ обеспечивает минимум погрешности $|f(\bar{x}) - P_i(\bar{x})|$ среди всех многочленов данной степени, построенных по данной таблице узлов.

Разделенные разности вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \text{р.р. 1-го пор. } f(x_i, x_{i+1}) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \\ \text{р.р. 2-го пор. } f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) &= \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, \\ &\dots\dots\dots \\ \text{р.р. n-го пор. } f(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \frac{f(x_1, \dots, x_n) - f(x_0, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Можно доказать, что

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (a, b), \quad a = \min(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad b = \max(x_0, x_1, \dots, x_n),$$

$$P_n(x_0, x_1, \dots, x_n) \equiv \text{const}.$$

Можно показать, что коэффициенты A_i в интерполяционном многочлене в форме Ньютона являются разделенными разностями i -го порядка: $A_i = f(x_0, x_1, \dots, x_i)$.

Заметим, что если целью построения интерполяционного многочлена является не минимизация погрешности в точке интерполирования, а минимизация погрешности на всем промежутке $[a, b]$, то в качестве узлов надо брать корни многочлена Чебышева первого рода, сведенные к промежутку $[a, b]$.

2.3. Задание

Дана функция $y = f(x)$, узлы.

Требуется построить аналитическое выражение интерполяционного многочлена для функции $f(x)$ в форме Ньютона 0-ой, 1-ой, 2-ой, 3-ей степени по заданным узлам. Вычислить приближенное значение функции в заданной точке, фактическую погрешность, оценить теоретическую.

Образец выполнения задания

Пусть $f(x) = x^3 + 2$, узлы: -2, 0, 1, 3, 4, 5. Точка интерполирования $\bar{x} = 2$. Точное значение функции $f(2) = 10$.

Построение интерполяционного многочлена в форме Ньютона с использованием разделенных разностей

1) Заполняем таблицу 1 разделенных разностей.

Таблица 1

x	$f(x)$	р.р. 1-го п.	р.р. 2-го п.	р.р. 3-го п.
-2	-6			
		4		
0	2		-1	
		1		1
1	3		4	
		13		1
3	29		8	
		37		1
4	66		12	
		61		
5	127			
2	?			

2) Получаем аналитические выражения для интерполяционных многочленов и погрешности по следующим формулам:

$$P_0(\bar{x}) = f(x_0).$$

$$P_1(\bar{x}) = P_0(\bar{x}) + f(x_0, x_1)(\bar{x} - x_0).$$

$$P_2(\bar{x}) = P_1(\bar{x}) + f(x_0, x_1, x_2)(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1).$$

$$P_3(\bar{x}) = P_2(\bar{x}) + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2).$$

$$M_{i+1} = \max |f^{(i+1)}(x)|, x \in [c, d], \text{ где}$$

$$c = \min(x_0, x_1, \dots, x_i, \bar{x}), d = \max(x_0, x_1, \dots, x_i, \bar{x}).$$

$$|R_i(\bar{x})| \leq M_{i+1} \cdot \frac{|(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \cdots (\bar{x} - x_i)|}{(i+1)!}.$$

3) Заполняем таблицу результатов 2.

Таблица 2

i	0	1	2	3
Узлы в порядке очередности их использования	1	3	0	4
$P_i(2)$ — значение многочлена в точке интерполирования	3	16	12	10
$f(2) - P_i(2)$ — фактическая погр.	7	-6	-2	0
M_{i+1} — оценка модуля произв.	12	18	6	0
$R_i(2)$ — оценка погрешности	12	9	2	0

2.4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k) = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)} f(x_k). \quad (5)$$

2.5. Задание

- 1) Дана функция $y = f(x)$, узлы, значение функции \bar{y} . Получить таблицу значений функции в узлах.

Требуется приближенно найти такое \bar{x} , что $f(\bar{x}) = \bar{y}$ тремя способами:

- а) “точно”, используя аналитическое выражение обратной функции. Обозначим x^* .
- б) аппроксимацией функции $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$ ($n \geq 2$) в форме Лагранжа и приближенным решением уравнения $P_n(x) = \bar{y}$ методом итераций или методом секущих. Обозначим решение уравнения $P_n(x) = \bar{y}$ через x_{iter} .
- в) если существует однозначная обратная функция $f^{-1}(y)$, то поменять ролями узлы и значения функции и приближенно заменить обратную функцию интерполяционным многочленом $Q_m(y)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) в форме Лагранжа и вычислить $x_m = Q_m(\bar{y})$.

Результаты привести в таблицах вида

m	x_m	$x_m - x_{m-1}$	$x_m - x^*$
0		—	
1			
2			
...			

- 2* Дана функция $y = f(x)$, $[a, b] = [-1, 1]$.

Требуется построить при различных n интерполяционные многочлены $P_n(x)$ в форме Лагранжа по равноотстоящим узлам и по узлам многочлена Чебышева. Сравнить на графике с функцией в одних осях координат.

Указание

В программе Maple составить подпрограмму с параметрами:

- интерполируемая функция;
- степень многочлена;
- массив узлов.

Подпрограмма должна возвращать аналитическое выражение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа заданной степени по заданной таблице узлов для заданной функции.

Рассмотреть функции: а) $\sin(x)$; б) $|x|$; в) $\frac{1}{1 + 25x^2}$.

2.6. Варианты заданий на прямое и обратное интерполирование

Номер варианта	Функция	Узлы	Точка интерполирования	Значение функции
1	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	-0.4	-0.56
2	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35	0.75
3	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3	1.6
4	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4	-0.6
5	$\cos(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, -0.1, 0	-0.4	0.8
6	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 3, 5, 7, 8, 9	4	1.3
7	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.4, -0.2, 0, 0.1	-0.3	-0.8
8	e^x	-0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.3	0.2	0.8
9	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	4	2
10	$\ln(x)$	1, 3, 5, 6, 8, 10	7	2.5
11	$\arcsin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.2	0.6	0.8
12	$\sin(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.8	0.4	0.56
13	$\arccos(x)$	0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6	0.35	0.75
14	$\sqrt[4]{x+2}$	0, 2, 4, 5, 7, 10	3	1.6
15	$\sin(x)$	-0.6, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1	-0.4	-0.6

3. Интерполирование по равностоящим узлам.

Конечные разности.

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

3.1. Постановка задачи интерполирования

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана таблица значений вещественной функции $y = f(x)$:

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a + h$	$f(a + h)$
$a + 2h$	$f(a + 2h)$
\dots	\dots
$a + nh = b$	$f(a + nh)$

Требуется найти значение функции в точке $x = \bar{x}$, не совпадающей с узлами.

Обозначим $x_i = a + ih$, $f(x_i) = y_i$.

3.2. Конечные разности

При построении интерполяционного многочлена по равностоящим узлам могут быть использованы конечные разности, которые играют роль, подобную той, которую играют производные для функций с непрерывно изменяющимся аргументом. Конечная разность первого порядка в точке x_i определяется следующим образом: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Конечные разности высших порядков определяются рекурсивно:

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ — конечная разность k -го порядка в точке x_i .

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функций:

$$\Delta^n y_i = y_{i+n} - n y_{i+n-1} + \dots + (-1)^k C_n^k y_{i+n-k} + \dots + (-1)^n y_i = (S - 1)^n y_i.$$

Здесь S — оператор сдвига, так что $S^k y_i = y_{i+k}$.

Можно показать, что для достаточно гладкой функции $\Delta^n y_0 = h^n f^{(n)}(\xi)$, $\xi \in (x_0, x_0 + nh)$ и поэтому $\Delta^n y_0 \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Обратим внимание на очевидное свойство конечной разности:

$$\Delta^n P_n(x) \equiv \text{const.}$$

Конечные разности принято записывать в таблицу следующего вида:

Таблица 1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
a	y_0			
		Δy_0		
$a + h$	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
$a + 2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		\dots
$a + 3h$	y_3		\dots	
		\dots		\dots
\dots	\dots		\dots	
		Δy_{n-3}		$\Delta^3 y_{n-4}$
$b - 2h$	y_{n-2}		$\Delta^2 y_{n-3}$	
		Δy_{n-2}		$\Delta^3 y_{n-3}$
$b - h$	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}$	
		Δy_{n-1}		
$b = a + nh$	y_n			

Пусть значения функции в узлах интерполирования заданы с точностью ε (например, $\varepsilon = 1/2 \cdot 10^{-5}$). Тогда конечные разности имеет смысл вычислять лишь до тех пор, пока они не будут “постоянными” с учётом ошибки округления ε в значениях функции, т. е. до тех пор, пока $|\Delta^k y_j - \Delta^k y_i| \leq 2^{k+1} \varepsilon = 2^k$ единиц младшего разряда. Число $k \leq n$ принимаем за степень искомого интерполяционного полинома. Полином будет строиться по $(k + 1)$ узлу, которые следует выбирать таким образом, чтобы обеспечить минимальную по абсолютной величине погрешность (разность между значением функции и значением полинома) в точке интерполяции \bar{x} . Для этого в качестве x_0 следует выбирать ближайший к \bar{x} узел. В качестве x_1 выбирать ближайший из оставшихся и т. д. Это следует из теоремы об остатке интерполирования. В связи с этим рассматриваются три варианта расположения точки интерполирования \bar{x} .

3.3. Построение интерполяционного многочлена в зависимости от расположения точки интерполирования

3.3.1. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для начала таблицы

Пусть точка интерполирования \bar{x}_1 удовлетворяет условию $a < \bar{x}_1 \leq a + h/2$. Узлы следует выбирать в следующем порядке: $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, \dots , $x_n = a + nh$.

В этом случае из таблицы 1 используются значения y_0 , Δy_0 , $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0, \dots$, $\Delta^n y_0$, отмеченные в таблице 1 красным цветом.

Обозначим $t = (\bar{x}_1 - a)/h$, тогда интерполяционный многочлен примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P_n(a + th) = & y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \\
 & + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Представим $P_n(t)$ в виде:

$$P_n(a + th) = \sum_{k=0}^n N_k(t) \Delta^k y_0,$$

где $\Delta^0 y_0 = y_0$, $N_0 = 1$, $N_1 = t, \dots$, $N_k = \frac{N_{k-1} \cdot (t - k + 1)}{k}$.

Вычисления удобно оформить в виде таблицы 2.

Таблица 2

k	0	1	2	3	4
$\Delta^k y_0$					
$N_k(t)$					
$N_k \cdot \Delta^k y_0$					
$P_k(\bar{x}_1)$					
$f(\bar{x}_1) - P_k(\bar{x}_1)$					
$ R_k(\bar{x}_1) \leq$					

В ячейки таблицы следует записывать значения согласно обозначениям, помещённым в первом столбце. В предпоследней строке будут получаться значения многочленов в точке интерполирования нулевой, первой, второй и т. д. степеней. Согласно формуле

$$P_k(t) = P_{k-1}(t) + N_k(t) \Delta^k y_0,$$

т. е. для $k > 0$ $P_k(t)$ получается сложением значений, находящихся левее по строке и выше по столбцу. Количество цифр после запятой должно быть согласовано с ε . Часто в учебных целях рассматривается модельная задача, т. е. такая, в которой известно аналитическое выражение для интерполируемой функции. В этом случае следует вычислить “точное” значение функции в точке \bar{x}_1 , привести его рядом с таблицей, привести в последней строке фактические погрешности, проанализировать результаты.

Напомним, что выражение для погрешности интерполирования определяется теоремой:

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$ на наименьшем отрезке $[c, d]$, содержащем узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n и точку интерполирования \bar{x} , так что $c = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$, $d = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}\}$.

Тогда существует такая точка $\xi = \xi(\bar{x})$, $c < \xi < d$, что

$$R_n(f, \bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(\bar{x}), \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

В данном случае, учитывая, что узлы равноотстоящие с шагом h и $t = (\bar{x} - a)/h$, $R_n(f, \bar{x})$ примет вид:

$$R_n(f, \bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{t(t-1) \cdots (t-n+1) \cdot (t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Оценка погрешности значения многочлена k -ой степени в нижней строке таблицы 2 вычисляется следующим образом:

$$|R_k(\bar{x})| \leq M_{k+1} \cdot |N_{k+1}| h^{k+1},$$

где

$$M_{k+1} = \max |f^{(k+1)}(x)|, \quad x \in [a, a + kh].$$

3.3.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для конца таблицы

Пусть теперь требуется найти значение интерполяционного многочлена в точке $\overline{x_2}$, такой что $b - h/2 \leq \overline{x_2} < b$. Узлы следует выбирать в следующем порядке: $b, b - h, b - 2h$ и т. д. Соответственно используются значения $y_n, \Delta y_{n-1}, \Delta^2 y_{n-2}, \Delta^3 y_{n-3}$ и т. д., отмеченные в таблице 1 синим цветом.

Обозначим $t = (\overline{x_2} - b)/h$, тогда

$$P_n(b + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2)$$

Представим $P_n(t)$ в виде:

$$P_n(b + th) = \sum_{k=0}^n N_k(t) \Delta^k y_{n-k},$$

где $\Delta^0 y_n = y_n$, $N_0 = 1$, $N_1 = t, \dots$, $N_k = \frac{N_{k-1}(t + k - 1)}{k}$.

Вычисления удобно оформить в виде таблицы, аналогичной таблице 2.

3.3.3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона-Гаусса для середины таблицы (интерполирование вперед)

Пусть a — узел в середине таблицы, т. е. в отличие от предыдущих случаев имеются узлы и левее и правее данного. Приведем фрагмент таблицы конечных разностей, где $y_i = f(a + ih)$.

Таблица 3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$a - 3h$	y_{-3}				
		Δy_{-3}			
$a - 2h$	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
$a - h$	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
a	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	
$a + h$	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
$a + 2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_2			
$a + 3h$	y_3				

Пусть требуется найти значение интерполяционного многочлена в точке $\overline{x_3}$, такой что $a < \overline{x_3} \leq a + h/2$. Узлы следует выбирать в следующем порядке: $a, a + h, a - h, a + 2h, a - 2h$ и т. д. Соответственно используются значения $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}$ и т. д., отмеченные в таблице 3 цветом *magenta*.

Обозначим $t = (\bar{x}_3 - a)/h$, тогда

$$P_n(a + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t - (-1)^n [\frac{n}{2}])}{n!} \Delta^n y_{-[\frac{n}{2}]} \quad (3)$$

Представим $P_n(t)$ в виде:

$$P_n(a + th) = \sum_{k=0}^n N_k(t) \Delta^k y_{-[\frac{k}{2}]},$$

где $N_0 = 1$, $N_1 = t$ и т. д.

Здесь выражение $[\frac{n}{2}]$ означает целую часть от деления n на 2.

Вычисления следует оформить в виде таблицы, аналогичной таблице 2.

Упражнения

- 1) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена Ньютона-Гаусса для середины таблицы (интерполирование назад).
- 2) Проиллюстрировать на примере применение формул для интерполяционных многочленов для случая экстраполирования а) $\bar{x} < a$; б) $\bar{x} > b$.
- 3) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена, если $a + h/2 < \bar{x} < a + h$.
- 4) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена, если $b - h < \bar{x} < b - h/2$.

3.4. Задание

Дана функция $f(x)$, промежуток $[a, b]$, точки интерполирования. Требуется

- 1) Построить таблицу значений функции по равноотстоящим узлам с шагом $h = 0.1$ на $[a, b]$, округлив значения функции до 5-го знака после запятой ($\varepsilon = 1/2 \cdot 10^{-5}$).
- 2) Построить таблицу конечных разностей до 4-го порядка.
- 3) Вычислить значение функции в точках интерполирования, используя интерполяционный многочлен в форме Ньютона 0-ой, 1-ой, 2-ой, 3-ей и 4-ой степени по заданным узлам.
- 4) Сравнить с точным значением функции.
- 5) Получить оценку погрешности.

Представить результаты в виде таблицы 2.

3.5. Варианты заданий

- 1) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\overline{x_1} = 0.55$, $\overline{x_3} = 1.05$.
- 2) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\overline{x_1} = 0.45$, $\overline{x_3} = 0.95$.
- 3) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-0.5, 0.5]$, $\overline{x_2} = 0.45$, $\overline{x_3} = 0.05$.
- 4) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\overline{x_1} = 0.45$, $\overline{x_3} = 0.95$.
- 5) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\overline{x_2} = 1.55$, $\overline{x_3} = 1.05$.
- 6) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [2.5, 3.5]$, $\overline{x_2} = 2.55$, $\overline{x_3} = 3.15$.
- 7) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [5, 6]$, $\overline{x_1} = 5.05$, $\overline{x_3} = 5.35$.
- 8) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-3.5, -2.5]$, $\overline{x_2} = -2.55$, $\overline{x_3} = -3.05$.
- 9) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [5.5, 6.5]$, $\overline{x_1} = 5.45$, $\overline{x_3} = 6.25$.
- 10) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [-0.5, 0.5]$, $\overline{x_2} = 0.45$, $\overline{x_3} = 0.05$.
- 11) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [3.5, 4.5]$, $\overline{x_1} = 3.45$, $\overline{x_3} = 3.95$.
- 12) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\overline{x_2} = 1.55$, $\overline{x_3} = 1.05$.
- 13) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-7.5, -6.5]$, $\overline{x_1} = -7.65$, $\overline{x_3} = -6.95$.
- 14) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [2.5, 3.5]$, $\overline{x_2} = 2.45$, $\overline{x_3} = 3.05$.
- 15) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\overline{x_1} = 0.55$, $\overline{x_3} = 1.05$.
- 16) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [4.5, 5.5]$, $\overline{x_1} = 4.45$, $\overline{x_3} = 5.95$.
- 17) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-0.5, 0.5]$, $\overline{x_2} = 0.45$, $\overline{x_3} = 0.05$.
- 18) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\overline{x_1} = 0.35$, $\overline{x_3} = 1.35$.
- 19) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [0.5, 1.5]$, $\overline{x_2} = 1.55$, $\overline{x_3} = 1.05$.
- 20) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [-1.5, -0.5]$, $\overline{x_1} = -1.55$, $\overline{x_3} = -1.05$.
- 21) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [2.5, 3.5]$, $\overline{x_2} = 2.48$, $\overline{x_3} = 2.95$.
- 22) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [5, 6]$, $\overline{x_1} = 4.95$, $\overline{x_3} = 5.35$.
- 23) $f(x) = \sin(x)$, $[a, b] = [6.3, 7.3]$, $\overline{x_1} = 6.25$, $\overline{x_3} = 6.95$.
- 24) $f(x) = \cos(x)$, $[a, b] = [4, 5]$, $\overline{x_2} = 5.05$, $\overline{x_3} = 4.35$.

4. Интерполирование Эрмита с использованием разделенных разностей

4.1. Постановка задачи

Дан $m + 1$ узел, каждый узел x_i имеет кратность r_i , т. е. в нём задано значение функции и значения производных до $(r_i - 1)$ -го порядка. Исходные данные приведем в виде таблицы:

x_0	x_1	\dots	x_m
$f(x_0)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_m)$
$f'(x_0)$	$f'(x_1)$	\dots	$f'(x_m)$
\dots	\dots	\dots	\dots
$f^{(r_0-1)}(x_0)$	$f^{(r_1-1)}(x_1)$	\dots	$f^{(r_m-1)}(x_m)$

Предполагаем, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Пусть $r_0 + r_1 + \dots + r_m = r$, существует единственный многочлен $H_{r-1}(x)$, удовлетворяющий условиям: $H_{(r-1)}^{(\alpha_j)}(x_j) = f^{(\alpha_j)}(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, m$, $\alpha_j = 0, \dots, r_j - 1$.

Частные случаи:

1. $r_0 = r_1 = \dots = r_m = 1$ — обычное интерполирование по значениям функции.
2. $m = 0$, тогда $H_{r_0-1}(x)$ — отрезок ряда Тейлора:

$$H_{r_0-1}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(r_0-1)}(x_0)}{(r_0 - 1)!}(x - x_0)^{r_0-1}. \quad (1)$$

Разделенные разности по кратным узлам вычисляются по следующей формуле:

$$f(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k+1}) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \quad (2)$$

4.2. Задание. Образец выполнения задания

Дана таблица попарно различных узлов, в которых заданы значения функции и значения производных до некоторого порядка. Требуется построить аналитическое выражение интерполяционного полинома Эрмита по данной таблице, используя таблицу разделенных разностей. Проверить, что построенный полином удовлетворяет заданным условиям.

Образец выполнения задания

Пусть дана таблица

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	-17	33	
0	-4	3	-8
2	10		

- 1) Строим таблицу разделенных разностей, повторяя узлы столько раз, какова их кратность. Разделенные разности по некрatным узлам вычисляем обычным образом, а разделенная разность k -го порядка по кратному узлу x_i вычисляется по приведенной выше формуле (2).

x	$f(x)$	р.р. 1 пор	р.р. 2 пор	р.р. 3 пор	р.р. 4 пор	р.р. 5 пор
-1	-17					
		33				
-1	-17		-20			
		13		10		
0	-4		-10		-4	
		3		6		1
0	-4		-4		-1	
		3		3		
0	-4		2			
		7				
2	10					

2) Выпишем интерполяционный многочлен в форме Ньютона:

$$P_5(x) = -17 + 33(x+1) - 20(x+1)^2 + 10(x+1)^2x - 4(x+1)^2x^2 + (x+1)^2x^3$$

3) Проверка интерполяционности многочлена:

x	$P_5(x)$	$P'_5(x)$	$P''_5(x)$
-1	-17	33	
0	-4	3	-8
2	10		

4.3. Варианты заданий

Вариант 1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	2	3	6
0	-2	3	-8

Вариант 2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-2	24	39	-42
1	12		

Вариант 3

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	12	21	30
0	2	3	

Вариант 4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	2	6	
0	-2	4	12

Вариант 5

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-2	-4		
0	-8	2	-16
1	-8		
2	-148	-278	

Вариант 6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	5	-7	10
1	-4	-13	
2	-61	-127	
3	-862		

Вариант 7

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	6		
1	-2	-2	
2	-14	-18	-24
3	-30		

Вариант 8

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-1	7		
1	-11	5	-22
2	-5	-1	
3	43		

5. Численное дифференцирование

5.1. Основные формулы численного дифференцирования для функции, заданной аналитически

Предполагается, что функция $f(x)$ достаточно гладкая.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h), \quad (1)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ — разность вперед.}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x), \quad (2)$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \text{ — разность назад.}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h), \quad (3)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \text{ — симметричная разность.}$$

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x, x+2h). \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-2h, x). \quad (5)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h). \quad (6)$$

5.2. Формулы численного дифференцирования для функции, заданной таблично в равноотстоящих узлах

Пусть узлы $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — равноотстоящие, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), и пусть для функции $y = f(x)$ известны значения $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Формулы (1)-(6) перепишем в следующем виде:

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1a)$$

$$f'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2a)$$

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3a)$$

$$f''(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + O(h^2), \quad i = 0, \dots, n-2. \quad (4a)$$

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + O(h^2), \quad i = 2, \dots, n. \quad (5a)$$

$$f''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (6a)$$

5.3. Задание

1) Вычислить приближенно значения:

- а) первой производной функции $y = f(x)$ с порядком погрешности $O(h)$ и $O(h^2)$ при $i = 0, 1, \dots, n$.
- б) второй производной функции $y = f(x)$ с порядком погрешности $O(h^2)$ при $i = 1, \dots, n-1$.

Напечатать таблицу значений узлов, “точных” значений производных в узлах, приближенных значений производных и их разностей (фактические погрешности) (см. образец). Проверить результаты на многочленах соответствующих степеней. Объяснить полученные результаты.

Образец выполнения задания для функции $f(x) = x + 3$ представлен в таблице 1.

Таблица 1

x	$f(x)$	$f'(x)$	$\frac{f'x}{O(h)}$	погр. $O(h)$	$\frac{f'x}{O(h^2)}$	погр. $O(h^2)$	$f''(x)$	$\frac{f'xx}{O(h^2)}$	погр. $O(h^2)$
0	3	1	1	0	1	0	0		
0,1	3,1	1	1	0	1	0	0	0	0
0,2	3,2	1	1	0	1	0	0	0	0
0,3	3,3	1	1	0	1	0	0	0	0
0,4	3,4	1	1	0	1	0	0	0	0
0,5	3,5	1	1	0	1	0	0	0	0
0,6	3,6	1	1	0	1	0	0	0	0
0,7	3,7	1	1	0	1	0	0	0	0
0,8	3,8	1	1	0	1	0	0	0	0
0,9	3,9	1	1	0	1	0	0	0	0
1	4	1	1	0	1	0	0		

- 2) Пользуясь одной из формул (1)-(6) (указывается преподавателем) в заданной точке x вычислить разностную производную первого или второго порядка, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

Пример:

При использовании формулы (4) в результате ошибки ε , допускаемой в каждом из значений функции, оценка для суммарной погрешности будет выглядеть следующим образом:

$$|R_\varepsilon(x, h, f)| \leq \frac{8\varepsilon}{2h} + \frac{h^2}{3} M_3, \quad M_3 = \max |f'''(\xi)|, \quad \xi \in (x, x+2h).$$

Оптимальный шаг, т. е. такой, при котором обеспечивается минимальная суммарная погрешность, находится обычным образом, как решение задачи на экстремум.

Напечатать таблицу значений h , “точных” значений производной в точке, приближенных значений производной и их разностей (фактические погрешности).

Образец выполнения задания для функции $f(x) = e^{2x}$ представлен в таблице 2.

Здесь $x = 1$, начальный шаг $h = 0.1$, “точное” значение производной $f'(1) = 14,778112$. Значения функции округляются до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

Таблица 2

h	0,1	0,05	0,025	0,0125	0,00625	0,003125
f_x пор. $O(h^2)$	14,5484	14,7249	14,765	14,774	14,7768	14,7744
погр.	0,22971	0,05321	0,01311	0,0037	0,0013122	0,003712

Из таблицы видно, что оптимальным экспериментально является шаг 0,00625, теоретически $h_{opt} \approx 0,0069$.

- 3) Дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона, построенного ранее в задании 3,
 - а) получить формулы численного дифференцирования различных порядков аппроксимации для вычисления приближенного значения первой производной в узле ближайшем к точке интерполирования;
 - б) убедиться, что формулы первого и второго порядков аппроксимации совпадают с формулами, приведенными выше;
 - в) вычислить приближенные значения производной и фактическую погрешность;
 - г) сравнить фактическую и теоретическую погрешности.

5.4. Варианты заданий

Вариант 1

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (3) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 2

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 3

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 2$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах x_0, x_1, x_2, x_3 .

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_2$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 4

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного

значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 5

- 1) Выполнить пункт 1 из задания. Вычислить приближенно значения:
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 6

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{4x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 7

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{5x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 8

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 2$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 9

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (3) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 10

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.

- 2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.
Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 11

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 2$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты. Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах x_0, x_1, x_2, x_3 .
Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_2$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 12

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{2x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах x_0, x_1, x_2, x_3 .
Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_3$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 13

- 1) Выполнить пункт 1 из задания. Вычислить приближенно значения:
- 2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{3x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.
Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 14

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{4x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.
Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

Вариант 15

- 1) Выполнить пункт 1 из задания.
- 2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции e^{5x} , последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экспериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.
Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
- 3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.
Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

6. Приближенное вычисление интегралов по простейшим формулам

6.1. Общие сведения

Квадратурная формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1)$$

где A_k — коэффициенты, x_k — узлы квадратурной формулы, они попарно различны. В дальнейшем предполагается, что $x_k \in [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Сумма в правой части формулы (1) называется квадратурной суммой.

Квадратурная формула называется интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx, \quad \omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (2)$$

Важной характеристикой квадратурной формулы является ее алгебраическая степень точности.

Определение. Целое неотрицательное число d называется алгебраической степенью точности квадратурной формулы, если эта формула точна для всех многочленов степени не выше d и не точна для x^{d+1} .

Теорема 1. Для того чтобы квадратурная формула с n попарно различными узлами была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы $d \geq n - 1$.

6.2. Квадратурные формулы прямоугольников

6.2.1. Квадратурная формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(a). \quad (3)$$

Очевидно, что ее алгебраическая степень точности $d = 0$ и формула является интерполяционной.

6.2.2. Квадратурная формула правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(b). \quad (4)$$

6.2.3. Квадратурная формула средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right). \quad (5)$$

Алгебраическая степень точности $d = 1$ и формула является интерполяционной.

6.2.4. Составные квадратурные формулы прямоугольников

Разбиваем промежуток интегрирования $[a, b]$ на N равных частей, $h = \frac{(b-a)}{N}$ — длина частичного разбиения. Обозначим $x_k = a + kh$, $f_k = f(x_k)$. Составные квадратурные формулы прямоугольников напишем в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left(\sum_{k=1}^N f(\alpha + (k-1)h) \right), \quad (6)$$

где при $\alpha = a$ получаем формулу левых прямоугольников, при $\alpha = a + h/2$ — средних прямоугольников, при $\alpha = a + h$ — правых прямоугольников. Обратим внимание, что алгебраические степени точности формул остаются прежними и составные квадратурные формулы не являются интерполяционными.

6.3. Квадратурная формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \quad (7)$$

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2N}(f_0 + 2(f_1 + \dots + f_{N-1}) + f_N). \quad (8)$$

Алгебраическая степень точности формулы трапеций $d = 1$.

6.4. Квадратурная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (9)$$

Составная квадратурная формула Симпсона

Разбиваем промежуток интегрирования $[a, b]$ на N равных частей.

Пусть $h = \frac{b-a}{2N}$ — половина длины частичного разбиения.

Обозначим $x_k = a + kh$, $f_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2N$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6N}(f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2}) + f_{2N}). \quad (10)$$

Количество узлов формулы Симпсона равно $2N + 1$ — нечетно.

Алгебраическая степень точности квадратурной формулы $d = 3$.

6.5. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Интерполяционные квадратурные формулы по равноотстоящим узлам (концы отрезка $[a, b]$ являются узлами) называются формулами Ньютона-Котеса. Заметим, что рассмотренные выше формула трапеций (7) и формула Симпсона (9) (не составные) относятся

к семейству квадратурных формул Ньютона-Котеса.

Алгебраическая степень точности квадратурной формулы Ньютона-Котеса равна количеству узлов при нечетном их числе (например, формула Симпсона) и на единицу меньше — при четном (например, формула трапеций).

6.6. Оценка погрешности квадратурных формул

Если функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную $(d + 1)$ порядка, то для оценки погрешности рассмотренных выше составных квадратурных формул, имеющих алгебраическую степень точности d , справедливо неравенство

$$|R_N(f)| \leq C(b-a) \left(\frac{b-a}{N} \right)^{d+1} \cdot M_{d+1}, \quad M_{d+1} = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(d+1)}(\xi)|. \quad (11)$$

$$\text{Здесь } C = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{в формуле левых и правых прямоугольников;} \\ \frac{1}{24} & \text{в формуле средних прямоугольников;} \\ \frac{1}{12} & \text{в формуле трапеций,} \\ \frac{1}{2880} & \text{в формуле Симпсона.} \end{cases}$$

6.7. Правило Рунге практической оценки погрешности (экстраполяция по Ричардсону)

Будем предполагать, что $f(x)$ имеет непрерывные на $[a, b]$ производные требуемого порядка. Пусть S_N — квадратурная сумма с N разбиениями, S_{2N} — квадратурная сумма с $2N$ разбиениями, I — точное значение интеграла.

Можно показать, что главный член погрешности может быть вычислен следующим образом:

$$R_{main}^{(N)} = \frac{S_{2N} - S_N}{2^{d+1} - 1}. \quad (12)$$

Экстраполяция по Ричардсону выполняется по следующей формуле:

$$I_{adjusted} = S_{2N} + R_{main}^N. \quad (13)$$

Часто последний результат является более точным.

Заметим, что в результате уточнения по правилу Рунге получаются квадратурные формулы с более высокой алгебраической степенью точности, а именно:

- из формулы левых и правых прямоугольников \Rightarrow формула средних прямоугольников;
- из формулы трапеций \Rightarrow формула Симпсона;
- из формулы Симпсона \Rightarrow квадратурная формула с алгебраической степенью точности $d=5$.

Для достаточно гладких функций при достаточно больших N можно пользоваться следующим критерием: если $|R_{main}^{(N)}| < \varepsilon$, то $|S_{2N} - I| < \varepsilon$.

6.8. Задание

Для заданной функции $f(x)$ вычислить $\int_0^1 f(x) dx$ приближенно по составным квадратурным формулам

- а) левых прямоугольников;
- б) трапеций;
- в) Симпсона.

Результаты оформить в следующем виде (для $N = 2$):

Метод	S_N	$I - S_N$	R_N	S_{2N}	$I - S_{2N}$	R_{2N}	R_{main}	I_{ad}	$I - I_{ad}$
Левых прям.									
Трапеций									
Симпсона									

Протестировать квадратурные формулы на многочленах различных степеней, в зависимости от алгебраической степени точности формулы.

Краткая инструкция по работе с таблицами в Maple приведена [здесь](#).

Вычислить $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + c} dx$, где $c > 0$ определяется вариантом задания.

Заметим, что для оценки модуля производной k -го порядка подынтегральной функции при $x \in [a, b]$ может быть использовано неравенство

$$\left| \left(\frac{1}{x^2 + c} \right)^{(k)} \right| \leq \frac{k!}{(\sqrt{c})^{k+2}}.$$

7. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса)

7.1. Общие сведения

Требуется вычислить приближенно интеграл

$$\int_a^b \varphi(x) dx,$$

где подынтегральная функция не является достаточно гладкой на промежутке интегрирования и, значит, не допускает хорошего приближения многочленами. Естественным образом представить подынтегральную функцию в виде $\varphi(x) = \rho(x)f(x)$, $\rho(x)$ содержит особенности функции $\varphi(x)$, а $f(x)$ является достаточно гладкой функцией. Далее будем рассматривать квадратурную формулу вида

$$\int_a^b \rho(x)f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1)$$

где x_k — узлы квадратурной формулы, A_k — коэффициенты, $\rho(x)$ — весовая функция и должна удовлетворять следующим условиям:

- $\rho(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$;
- существуют моменты весовой функции
$$\mu_k = \int_a^b \rho(x)x^k dx < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$
- $\mu_0 > 0$.

Квадратурная формула будет интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx, \quad (2)$$

где $\omega(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$.

Примеры:

$$\int_0^1 x^\alpha \cos x dx, \quad \int_0^1 (1-x)^\alpha e^x dx \quad (\alpha > -1).$$

Теорема 1. Для того чтобы квадратурная формула (1) была точна для любого многочлена степени не выше $2n - 1$, необходимо и достаточно, чтобы:

- узлы x_1, x_2, \dots, x_n являлись корнями ортогонального относительно веса $\rho(x)$ и отрезка $[a, b]$ многочлена $w(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$;
- формула (1) была интерполяционной.

Теорема 2 (О погрешности). Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ конечен. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную на $[a, b]$ производную порядка $2n$, то существует точка $\eta \in [a, b]$, такая что погрешность квадратурной формулы (1) гауссова типа имеет представление

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega^2(x) dx.$$

7.2. Построение квадратурной формулы типа Гаусса

Узлы находим из первого условия теоремы

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) \omega_i(x) dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Очевидно, что достаточно потребовать ортогональности многочлена $w_n(x)$ относительно веса $\rho(x)$ и отрезка $[a, b]$ к одночленам x^i , $i = 0, 1, \dots, (n-1)$. Таким образом, коэффициенты искомого многочлена $w_n(x)$ являются решением системы

$$\int_a^b \rho(x) (x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n) x^i dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Учитывая обозначения

$$\mu_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx,$$

получим следующую систему линейных уравнений относительно a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_1 \mu_{n-1} & + a_2 \mu_{n-2} & + \dots + a_n \mu_0 = -\mu_n, \\ a_1 \mu_n & + a_2 \mu_{n-1} & + \dots + a_n \mu_1 = -\mu_{n+1}, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1 \mu_{2n-2} & + a_2 \mu_{2n-3} & + \dots + a_n \mu_{n-1} = -\mu_{2n-1}. \end{array} \right.$$

Система имеет единственное решение.

Узлы — решения уравнения $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ вещественны, различны и лежат внутри промежутка $[a, b]$.

Коэффициенты A_k находятся по формуле (2).

Известно, что $A_k > 0$, $k = 1, \dots, n$.

Алгебраическая степень точности формулы $d = 2n - 1$, формула точно интегрирует многочлены 0-ой степени, следовательно

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b \rho(x) dx = \mu_0.$$

Приведем алгоритм построения формулы типа Гаусса для $n = 2$.

1) Вычислить моменты $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$.

2) Построить систему

$$\begin{cases} a_1 \mu_1 + a_2 \mu_0 = -\mu_2, \\ a_1 \mu_2 + a_2 \mu_1 = -\mu_3. \end{cases}$$

3) Вычислить a_1, a_2 , например, по правилу Крамера

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\mu_2 & \mu_0 \\ -\mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_0 \mu_3 - \mu_2 \mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2 \mu_0},$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_2^2 - \mu_3 \mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2 \mu_0}.$$

4) Решить уравнение $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$. Узлы должны быть вещественны, различны и должны принадлежать (a, b) .

5) Вычислить коэффициенты квадратурной формулы.

$$A_1 = \int_a^b \rho(x) \frac{x - x_2}{(x_1 - x_2)} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} (\mu_1 - x_2 \mu_0),$$

$$A_2 = \int_a^b \rho(x) \frac{x - x_1}{(x_2 - x_1)} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} (\mu_1 - x_1 \mu_0).$$

Проверка: коэффициенты должны быть положительны и $A_1 + A_2 = \mu_0$.

Построена формула:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

которая должна быть точна для $f(x) = 1, x, x^2, x^3$.

7.3. Частные случаи формулы типа Гаусса

7.3.1. Формула Гаусса

$\rho(x) \equiv 1, [a, b] = [-1, 1]$. Узлы — корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad (3)$$

а коэффициенты могут быть вычислены по формуле

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}. \quad (4)$$

Приведем формулы Гаусса для $n = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &\approx 2f(0), \\ \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).\end{aligned}$$

Погрешность формулы Гаусса имеет оценку

$$|R_n(f)| \leq \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n} = C_n M_{2n}, \quad (5)$$

$$\text{где } M_{2n} = \max |f^{2n}(\xi)|, \xi \in [-1, 1].$$

Отметим, что коэффициенты C_n быстро убывают:

$$C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{1}{135}, \quad C_3 = \frac{1}{15750}, \quad C_4 = \frac{1}{3472875}.$$

Замечание 1. При вычислении интеграла по промежутку $[a, b]$ следует выполнить замену переменной $x = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{(b+a)}{2}$, $dx = \frac{(b-a)}{2} dt$, так что

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{b-a}{2}t_k + \frac{b+a}{2}\right).$$

Здесь t_k , A_k — соответственно узлы и коэффициенты формулы Гаусса для $[-1, 1]$. Для погрешности формулы Гаусса на промежутке $[a, b]$ имеем оценку

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)}{2} \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \left(\frac{(b-a)}{2}\right)^{2n} M_{2n} = C_n^{[a,b]} M_{2n}, \quad (6)$$

$$\text{где } C_n^{[a,b]} = C_n \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}, \quad M_{2n} = \max |f^{2n}(\xi)|, \xi \in [a, b].$$

Замечание 2. Для составной формулы Гаусса с m разбиениями погрешность

$$|R_n(f)| \leq C_n^{[0,1]} (b-a) \left(\frac{b-a}{m}\right)^{2n} M_{2n}, \quad (7)$$

то есть при уменьшении длины частичного промежутка вдвое погрешность уменьшается в 2^{2n} раз.

7.3.2. Формула Мелера

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad [a, b] = [-1, 1].$$

Узлы — корни многочлена Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right). \quad (8)$$

7.4. Варианты заданий

Вариант 1

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt{x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле Симпсона с 3 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом \sqrt{x} по узлам $x_1=0, x_2=1/2, x_3=1$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 2

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле средних прямоугольников с 2 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt{x}$ по узлам $x_1 = 1/4, x_2 = 3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 3

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt[4]{x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле средних прямоугольников с 2 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[4]{x}$ по узлам $x_1=1/4$, $x_2=3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 3 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 3 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 4

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле средних прямоугольников с 3 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt[3]{x}$ по узлам $x_1=1/6$, $x_2=1/2$, $x_3=5/6$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 5

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с 2 узлами.

- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt[3]{x^2}$ по узлам $x_1=1/4$, $x_2=3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 3 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 3 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 6

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{1-x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле средних прямоугольников с 3 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt[4]{1-x}$ по узлам $x_1=1/6$, $x_2=1/2$, $x_3=5/6$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 7

Требуется вычислить

$$\int_0^1 e^x \sqrt{1-x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле Симпсона с 3 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt{1-x}$ по узлам $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x_3=1$ и вычислить по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 8

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле средних прямоугольников с 3 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt{1-x}$ по узлам $x_1=1/6$, $x_2=1/2$, $x_3=5/6$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 9

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt[3]{1-x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле Симпсона с 3 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[3]{1-x}$ по узлам $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x_3=1$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 10

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \sin(x) \sqrt[4]{(1-x)^3} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
- 2) По формуле средних прямоугольников с 2 узлами.

- 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[4]{(1-x)^3}$ по узлам $x_1=1/4$, $x_2=3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 11

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(2x)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле средних прямоугольников с 3 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ по узлам $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{5}{6}$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 12

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x) \sqrt{1-x} dx$$

следующими способами:

- 1) “Точно”.
 - 2) По формуле Симпсона с 3 узлами.
 - 3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt{1-x}$ по узлам $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x_3=1$ и вычислить интеграл по этой формуле.
 - 4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
 - 5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.
- Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

8. Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

8.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Будем считать, что эта задача имеет единственное решение на промежутке $[x_0, b]$. Запишем (1) в интегральном виде:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (2)$$

Методы численного решения этого уравнения заключаются в приближенном вычислении значений гипотетического решения $y(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_N \in [x_0, b]$. Для простоты мы далее будем считать точки (узлы) x_1, \dots, x_N равноотстоящими, т.е. $x_k = x_0 + kh$, где $h = (b - x_0)/N$.

Во всех рассмотренных методах решения задачи (1) значения в узлах будут строиться последовательно, т.е. будем считать, что значения $y_1 \approx y(x_1), \dots, y_m \approx y(x_m)$ уже известны, построим $y_{m+1} \approx y(x_{m+1})$.

8.2. Метод Эйлера и улучшенный метод Эйлера

Наиболее простой способ получить численное решение уравнения (2) — вычислить интеграл в правой части при помощи какой-либо квадратурной формулы. При этом для вычисления y_{m+1} можно использовать только значение y_m . Отметим, что такие методы решения дифференциального уравнения дают такую же погрешность, как и соответствующие квадратурные формулы.

8.2.1. Метод Эйлера

Применим формулу левых прямоугольников:

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t)) dt = y_m + hf(x_m, y_m) + O(h^2).$$

Расчетная формула метода:

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

На промежутке $[x_0, b]$ метод Эйлера дает погрешность порядка h , т.е.

$$y_N - y(x_N) = O(h).$$

8.2.2. Улучшенный метод Эйлера

Применим для вычисления интеграла в правой части (2) формулу средних прямоугольников. Для этого введем дополнительную точку посередине между x_m и x_{m+1} . Обозначим её $x_{m+\frac{1}{2}} = x_m + \frac{h}{2}$. В ней вычислим значение решения уравнения по обычному методу Эйлера, т. е. при помощи формулы левых прямоугольников:

$$y_{m+\frac{1}{2}} = y_m + \frac{h}{2} \cdot f(x_m, y_m).$$

Теперь значение в точке x_{m+1} вычислим по формуле средних прямоугольников:

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t)) dt \approx y_m + hf\left(x_{m+\frac{1}{2}}, y_{m+\frac{1}{2}}\right) = \\ &= y_m + hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} \cdot f(x_m, y_m)\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Обычный метод Эйлера можно уточнить и другим способом. Предположим, что значение y_{m+1} вычислено по формуле левых прямоугольников, т. е. как в формуле (3), далее вычислим соответствующий интеграл по формуле трапеций. Итак, пусть

$$\tilde{y}_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m).$$

Тогда

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(t, y(t)) dt \approx y_m + \frac{h}{2} \cdot (f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, \tilde{y}_{m+1})) \quad (5)$$

В заключение отметим, что оба предложенных изменения метода Эйлера дают погрешность порядка h^2 .

8.3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Теперь логично для вычисления интеграла в (2) применить формулу Симпсона.

Расчетные формулы метода

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_m, y_m), \\ k_2 &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_m + h, y_m + k_3), \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Оказывается, если $y_m = y(x_m)$ (равенство точное), то $y_{m+1} - y(x_{m+1}) = O(h^5)$. На всей интегральной кривой метод дает погрешность порядка h^4 .

Если уравнение имеет вид $y' = f(x)$, то $k_2 = k_3$ и видно, что расчетная формула метода Рунге-Кутты получается в результате применения формулы Симпсона, иначе — обобщенной формулы Симпсона.

Замечание 1. Все рассмотренные выше методы одношаговые, то есть для получения решения в следующей точке используется решение лишь в одной предыдущей точке. В одношаговых методах шаг может быть переменным.

8.4. Правило Рунге практической оценки погрешности

Предположим, что метод вычисления значений решения задачи (1) фиксирован и имеет порядок точности s . Вычислим значение в точке x_m с шагом h и $h/2$. Полученные значения обозначим через $y_m^{(h)}$ и $y_m^{(h/2)}$ соответственно. Тогда главный член погрешности находится по формуле

$$R_m^{(h)} = \frac{y_m^{(h/2)} - y_m^{(h)}}{2^s - 1}.$$

Экстраполяция по Ричардсону заключается в уточнении значения в точке x_m по формуле

$$\hat{y}_m = y_m^{(h/2)} + R_m^{(h)}. \quad (8)$$

Заметим, что в результате уточнения по формуле (8) строится метод с более высоким порядком погрешности, чем исходный.

8.5. Методы Адамса

Ранее мы отмечали, что узлы x_1, \dots, x_N мы считаем равноотстоящими для удобства. И во всех рассмотренных выше методах это действительно не более чем удобство, поскольку все эти методы являлись одношаговыми, т.е. значение y_{m+1} строилось исключительно по y_m . В частности, все рассмотренные методы допускают переменный шаг аргумента ($x_{m+1} - x_m = h_m$). Теперь мы зафиксируем шаг $h = (b - x_0)/N$ и все узлы $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N$ будем считать равноотстоящими. При построении y_{m+1} будут использоваться значения решения в $k + 1$ предыдущих узлах: y_{m-k}, \dots, y_m .

Предположим, что известны приближенные значения $y(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_m , $y_i \approx y(x_i), i = 0, 1, \dots, m, k \leq m < N$ (они могут быть найдены одним из рассмотренных выше методов), в дальнейшем $m \geq k$.

8.5.1. Экстраполяционный метод Адамса

Начинаем мы, как обычно, с немного измененной формулы (2):

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_m+h} f(x, y(x)) dx.$$

Подынтегральную функцию $f(x, y(x))$ заменим на интерполяционный многочлен, построенный по узлам x_{m-k}, \dots, x_m . Поскольку значение интерполяционного многочлена находится в точке, лежащей вне промежутка, на котором лежат все узлы интерполирования, метод и получил название экстраполяционного. В зависимости от формы многочлена, получатся разные формулы метода.

Сначала предположим, что функцию $f(x, y(x))$ заменили на многочлен в форме Ньютона для конца таблицы. Напомним, что значения y_{m-k}, \dots, y_m мы считаем известными. Положим $q_j = h \cdot f(x_j, y_j)$. Многочлен имеет вид

$$P_k(x_m + th) = q_m + t\Delta q_{m-1} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+j-1)}{j!} \Delta^j q_{m-j} + \dots,$$

где конечные разности вычисляются по правилу

$$\Delta^j q_s = \Delta^{j-1} q_{s+1} - \Delta^{j-1} q_s.$$

Тогда

$$\int_{x_m}^{x_m+h} f(x, y(x)) dx \approx \int_0^1 \sum_{j=0}^k \frac{t(t+1) \cdots (t+j-1)}{j!} \Delta^j q_{m-j} dt.$$

Для упрощения формулы удобно ввести обозначение

$$a_j = \frac{1}{j!} \int_0^1 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt. \quad (9)$$

Тогда получаем расчетную формулу:

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=0}^k a_j \Delta^j q_{m-j}. \quad (10)$$

Формулу (10) можно применять, начиная с $m = k$ для $m = k, k+1, \dots, N-1$.

Если решение $y(x)$ — многочлен степени не выше $k+1$, то экстраполяционный метод Адамса дает точное значение решения.

На шаге погрешность метода $O(h^{k+2})$, на всем промежутке — $O(h^{k+1})$, так что $y(x_{m+1}) = y_{m+1} + O(h^{k+1})$.

При $k = 4$ получаем формулу

$$y_{m+1} = y_m + q_m + \frac{1}{2} \Delta q_{m-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{m-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{m-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 q_{m-4}. \quad (11)$$

Для вычислений рекомендуется использовать таблицу, фрагмент которой представлен таблицей 1.

Таблица 1

x	y	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$	$\Delta^4 q$
x_0	y_0	q_0				
			Δq_0			
x_1	y_1	q_1		$\Delta^2 q_0$		
			Δq_1		$\Delta^3 q_0$	
x_2	y_2	q_2		$\Delta^2 q_1$		$\Delta^4 q_0$
			Δq_2		$\Delta^3 q_1$	
x_3	y_3	q_3		$\Delta^2 q_2$		$\Delta^4 q_1$
			Δq_3		$\Delta^3 q_2$	
x_4	y_4	q_4		$\Delta^2 q_3$		
			Δq_4			
x_5	y_5	q_5				
x_6	y_6					

Начало таблицы — часть таблицы, значения в ячейках которой должны быть известны для применения экстраполяционного метода Адамса. Значения решения в точках начала таблицы следует вычислять соответствующим по порядку методом.

Преимущества метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты:

- экономичность;

- наглядный контроль — по последним конечным разностям можно судить о точности результата.

Недостатком метода Адамса по сравнению с методом Рунге-Кутты является его многошаговость, то есть то, что решение в следующей точке зависит от решения в нескольких предыдущих точках, и они должны быть равноотстоящими.

Используя интерполяционный многочлен в форме Лагранжа или заменяя конечные разности в (11) выражениями через значения функции, можно получить безразностную формулу экстраполяционного метода Адамса:

$$y_{m+1} \approx y_m + \sum_{j=0}^k b_{kj} q_{m-j}, \quad (12)$$

$$b_{kj} = \frac{(-1)^j}{j!(k-j)!} \int_0^1 \frac{t(t+1) \cdots (t+k)}{t+j} dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k. \quad (13)$$

Числа b_{kj} не зависят от m и от h , но зависят от порядка метода.

Расчетные формулы методов различных порядков будут приведены ниже в таблице 2.

Заметим, что алгоритм вычисления решения по безразностной формуле реализуется проще, чем по разностной формуле, но наглядный контроль здесь отсутствует.

8.5.2. Интерполяционный метод Адамса

Пусть $h = (b - x_0)/N$ и $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Предположим, что известны приближенные значения $y(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_m , $y(x_i) \approx y_i$, $i = 0, 1, \dots, m$, $k \leq m < N$. Обозначим $q_i = hf(x_i, y_i)$.

Заменяя приближенно функцию $f(x, y(x))$ в выражении

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)) dx$$

интерполяционным многочленом k -ой степени в форме Ньютона для конца таблицы по узлам $x_{m+1}, x_m, \dots, x_{m+1-k}$ и интегрируя, получим расчетную формулу метода

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=0}^k a_j^* \Delta^j q_{m+1-j}, \quad (14)$$

где

$$a_j^* = \frac{1}{j!} \int_{-1}^0 t(t+1) \cdots (t+j-1) dt. \quad (15)$$

Как видно, в правой части формулы (14) присутствует $q_{m+1} = hf(x_{m+1}, y_{m+1})$, т.е. формула (14) является уравнением относительно y_{m+1} . Интерполяционный метод Адамса является неявным методом. Уравнение (14) рекомендуется решать методом итераций.

В качестве нулевого приближения можно взять y_{m+1} , найденное экстраполяционным методом, обозначим его $y_{m+1}^{(0)}$. Вычислим

$$q_{m+1}^{(0)} = hf(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}), \quad \Delta q_m^{(0)} = q_{m+1}^{(0)} - q_m^{(0)}, \quad \Delta^2 q_{m-1}^{(0)}, \dots, \Delta^k q_{m+1-k}^{(0)}.$$

Используя эти значения, вычисляем, $y_{m+1}^{(1)}$ по расчетной формуле (14). Сравниваем $|y_{m+1}^{(1)} - y_{m+1}^{(0)}| < \varepsilon$, где ε — заданная точность¹. Если условие не выполняется, то делаем перерасчет до тех пор, пока не будет выполнено условие.

Формулу (14) можно применять для $m = k, k + 1, \dots, N - 1$.

Если решение $y(x)$ — многочлен степени не выше $k + 1$, то интерполяционный метод Адамса дает точное значение решения.

На шаге погрешность метода $O(h^{k+2})$, на всем промежутке — $O(h^{k+1})$, так что $y(x_{m+1}) = y_{m+1} + O(h^{k+1})$.

При $k = 4$ получаем формулу

$$y_{m+1} = y_m + q_{m+1} - \frac{1}{2}\Delta q_m - \frac{1}{12}\Delta^2 q_{m-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 q_{m-2} - \frac{19}{720}\Delta^4 q_{m-3}. \quad (16)$$

Используя интерполяционный многочлен в форме Лагранжа, или заменяя конечные разности в (16) выражениями через значения функции, можно получить безразностную формулу интерполяционного метода Адамса:

$$y_{m+1} = y_m + \sum_{j=-1}^{k-1} b_{kj}^* q_{m-j}, \quad (17)$$

$$b_{kj}^* = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!(k-1-j)!} \int_0^1 \frac{(t-1)t(t+1)\dots(t+k-1)}{t+j} dt, \quad j = -1, 0, 1, 2, \dots, k-1. \quad (18)$$

Числа b_{kj}^* не зависят от m и от h .

¹Заметим, что все решения в предыдущих точках должны быть вычислены с этой точностью.

8.6. Расчетные формулы методов Адамса

Приведем расчетные формулы безразностных методов Адамса при $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Таблица 2

k	Экстраполяционный метод Адамса
0	$y_{m+1} = y_m + q_m$
1	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(3q_m - q_{m-1})$
2	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{12}(23q_m - 16q_{m-1} + 5q_{m-2})$
3	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{24}(55q_m - 59q_{m-1} + 37q_{m-2} - 9q_{m-3})$
4	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{720}(1901q_m - 2774q_{m-1} + 2616q_{m-2} - 1274q_{m-3} + 251q_{m-4})$
k	Интерполяционный метод Адамса
0	$y_{m+1} = y_m + q_{m+1}$
1	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{2}(q_{m+1} + q_m)$
2	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{12}(5q_{m+1} + 8q_m - q_{m-1})$
3	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{24}(9q_{m+1} + 19q_m - 5q_{m-1} + q_{m-2})$
4	$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{720}(251q_{m+1} + 646q_m - 264q_{m-1} + 106q_{m-2} - 19q_{m-3})$

8.7. Варианты заданий

Указания

- 1) После знака „—“приведены обозначения для полученного решения.
- 2) Протестировать полученные результаты на уравнениях вида $y' = P_{s-1}(x)$, где $P_{s-1}(x)$ — полином степени $s - 1$, s — порядок метода.

Вариант 1

$$y' = \cos(1.75x + y) + 1.25(x - y), \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_math
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - a) с шагом $h = y^h$;
 - b) с шагом $h/2 = y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .

- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 1] — y_{RK}$.
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1] — y_{Ad_ex}$. Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-го порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1] — y_{Ad_in}$.
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_ex}$, $y_{math} - y_{Ad_in}$.

Вариант 2

$$y' = \cos(2x + y) + 1.5(x - y), \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_{math} .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. фор-ла ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - а) с шагом $h — y^h$;
 - б) с шагом $h/2 — y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_{rev} .
- 4) Напечатать таблицу значений y_{math} , y^h , $y^{h/2}$, y_{rev} , $y_{rev} - y_{math}$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.000001$ на $[0, 0.5] — y_{RK}$.
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5] — y_{Ad_ex}$. Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5] — y_{Ad_in}$.
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_ex}$, $y_{math} - y_{Ad_in}$.

Вариант 3

$$y' = 1 - \sin(1.25x + y) - \frac{0.1y}{2+x}, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 1]$ — y_RK .
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 1]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом h на промежутке $[4h, 1]$ — y_Ad_in .
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK, y_math - y_Ad_ex, y_math - y_Ad_in$.

Вариант 4

$$y' = \frac{\cos(y)}{1+x} - 0.5y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. фор-ла ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.000001$ на $[0, 0.5]$ — y_RK .
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_Ad_in .

- 9) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK$, $y_math - y_Ad_ex$, $y_math - y_Ad_in$.

Вариант 5

$$y' = 1 - \sin(1.25x + y) - \frac{0.1y}{2+x}, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. фор-ла трап.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - a) с шагом $h = y^h$;
 - b) с шагом $h/2 = y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений y_math , y^h , $y^{h/2}$, y_rev , $y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 0.5]$ — y_RK .
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5]$ — y_Ad_in .
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK$, $y_math - y_Ad_ex$, $y_math - y_Ad_in$.

Вариант 6

$$y' = 1 + (0.5 - x) \sin(y) - (1 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_math
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - a) с шагом $h = y^h$;
 - b) с шагом $h/2 = y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений y_math , y^h , $y^{h/2}$, y_rev , $y_rev - y_math$ в точках с шагом h .

- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 1]$ — y_{RK} .
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1]$ — $y_{Ad_{ex}}$. Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-го порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1]$ — $y_{Ad_{in}}$.
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_{ex}}$, $y_{math} - y_{Ad_{in}}$.

Вариант 7

$$y' = 1 + (0.75 - x) \sin(y) - (1.25 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_{math} .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. фор-ла ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_{rev} .
- 4) Напечатать таблицу значений y_{math} , y^h , $y^{h/2}$, y_{rev} , $y_{rev} - y_{math}$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 0.5]$ — y_{RK} .
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5]$ — $y_{Ad_{ex}}$. Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5]$ — $y_{Ad_{in}}$.
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_{math} и погрешностей $y_{math} - y_{RK}$, $y_{math} - y_{Ad_{ex}}$, $y_{math} - y_{Ad_{in}}$.

Вариант 8

$$y' = 1 + (1 - x) \sin(y) - (1.5 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. фор-ла трап.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 0.5]$ — y_RK .
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 3-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[3h, 0.5]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 3-го порядка с шагом h на промежутке $[3h, 0.5]$ — y_Ad_in .
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK, y_math - y_Ad_ex, y_math - y_Ad_in$.

Вариант 9

$$y' = 1 + (1.25 - x) \sin(y) - (1.75 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_math
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - а) с шагом $h = y^h$;
 - б) с шагом $h/2 = y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 1]$ — y_RK .
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-го порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1]$ — y_Ad_in .

- 9) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK$, $y_math - y_Ad_ex$, $y_math - y_Ad_in$.

Вариант 10

$$y' = 1 + (1.5 - x) \sin(y) - (2 + x)y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. фор-ла ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - а) с шагом $h - y^h$;
 - б) с шагом $h/2 - y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 3-го порядка с точностью $\varepsilon=0.000001$ на $[0, 0.5]$ — y_RK .
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 3-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[3h, 0.5]$ — y_Ad_ex . Начало таблицы строить методом разложения в ряд.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом h на промежутке $[3h, 0.5]$ — y_Ad_in .
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK$, $y_math - y_Ad_ex$, $y_math - y_Ad_in$.

Вариант 11

$$y' = (0.6 - y^2) \cos(x) + 0.2y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.1$ на $[0, 1]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - а) с шагом $h - y^h$;
 - б) с шагом $h/2 - y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.

- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 1] — y_RK$.
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 5-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[5h, 1] — y_Ad_ex$. Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 5-го порядка с шагом h на промежутке $[5h, 1] — y_Ad_in$.
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK, y_math - y_Ad_ex, y_math - y_Ad_in$.

Вариант 12

$$y' = (0.7 - y^2) \cos(x) + 0.3y, \quad y(0) = 0.$$

Требуется:

- 1) Получить таблицу значений решения задачи с шагом $h = 0.05$ на $[0, 0.5]$, используя функции математического пакета — y_math .
- 2) Методом Эйлера улучшенным (исп. фор-ла ср. прям.) получить таблицу решения на $[0, 0.5]$:
 - а) с шагом $h — y^h$;
 - б) с шагом $h/2 — y^{h/2}$.
- 3) Уточнить решение по правилу Рунге — y_rev .
- 4) Напечатать таблицу значений $y_math, y^h, y^{h/2}, y_rev, y_rev - y_math$ в точках с шагом h .
- 5) Построить графики заданных таблично функций в одних осях координат.
- 6) Вычислить решение методом Рунге-Кутты 4-го порядка с точностью $\varepsilon=0.00001$ на $[0, 0.5] — y_RK$.
- 7) Вычислить решение экстраполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом из метода Рунге-Кутты на промежутке $[4h, 0.5] — y_Ad_ex$. Начало таблицы строить методом Рунге-Кутты.
- 8) Вычислить решение интерполяционным методом Адамса 4-го порядка с шагом h на промежутке $[4h, 0.5] — y_Ad_in$.
- 9) Напечатать таблицу значений решения y_math и погрешностей $y_math - y_RK, y_math - y_Ad_ex, y_math - y_Ad_in$.

9. Вопросы устойчивости задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем. Жесткие задачи

9.1. Жесткие уравнения

9.1.1. Постановка задачи. Устойчивые уравнения

Рассмотрим задачу

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

Разложим правую часть $f(t, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = t_0$, ограничиваясь линейными членами. Получим

$$f(t, y) \approx f(t_0, y_0) + f'_t(t_0, y_0)(t - t_0) + f'_y(t_0, y_0)(y - y_0) = ay + g(t),$$

где $a = f'_y(t_0, y_0)$, $g(t) = f(t_0, y_0) + f'_t(t_0, y_0)(t - t_0) - f'_y(t_0, y_0)y_0$.

Решение задачи $y' = g(t)$, $y(t_0) = 0$ может быть легко найдено, а решение задачи

$$y' = ay, \quad y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

где $|a|$ — велико, представляет интерес с точки зрения вопросов устойчивости. В дальнейшем будем рассматривать модельную задачу (2).

Точное решение задачи (2) имеет вид

$$y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}.$$

Если реально решаем задачу с начальным условием

$$y(t_0) = y_0 + \Delta y_0,$$

то её решение имеет вид:

$$\tilde{y}(t) = (y_0 + \Delta y_0) e^{a(t-t_0)}$$

и

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| = |\Delta y_0| e^{a(t-t_0)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \text{ при } a > 0, \quad |y(t) - \tilde{y}(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \text{ при } a < 0.$$

Следовательно, уравнение (2) будет устойчиво при $a < 0$, и далее будем рассматривать приближенные методы решения лишь таких уравнений. $|a|$ — велико. Заметим, что точное решение $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Задача (2) при $a < 0$, где $|a|$ — велико, называется жесткой.

Решение строится в виде таблицы значений с шагом h в точках $t_i = t_0 + i h$, $i = 0, 1, \dots$. Обозначим $y_i \approx y(t_i)$.

9.1.2. Метод Эйлера

Аппроксимируя производную в левой части уравнения (2) в точке t_i разностью “вперед”, получаем расчетную формулу метода

$$y_{i+1} = y_i + h a y_i = (1 + a h) y_i = R(a h) y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad \text{где } R(a h) = 1 + a h.$$

Пример: рассмотрим задачу

$$y' = -11y, \quad y(0) = 1.$$

Приближенное решение, полученное методом Эйлера, имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i - 11hy_i = (1 - 11h)y_i, \quad R(ah) = 1 - 11h.$$

Пусть $h = 0.2$, тогда $R(ah) = -1.2$, $y_{i+1} = (-1.2)^i \rightarrow \infty$, что противоречит поведению точного решения.

Пусть $h = 0.1$, тогда $R(ah) = -0.1$, $y_{i+1} = (-0.1)^i \rightarrow 0$.

Очевидно, процесс будет устойчив, если $|R(ah)| < 1$.

Обозначим $H = -ah$. Тогда множество таких H , что $H \in (0, 2)$ образуют область абсолютной устойчивости метода Эйлера.

Таким образом, метод Эйлера условно устойчив при $h < -2/a$.

9.1.3. Обратный метод Эйлера

Расчетная формула метода получается из аппроксимации производной в левой части уравнения (2) в точке t_i разностью “назад” и имеет вид

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - ah} = R(ah) y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Здесь $R(ah) = 1/(1 - ah) < 1$ при любых h так как $a < 0$. Следовательно, обратный метод Эйлера устойчив при любых h .

9.1.4. Метод средней точки

Аппроксимируя производную в левой части уравнения (2) в точке t_i симметричной разностью

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = ay_i,$$

получаем разностное уравнение 2-го порядка

$$y_{i+1} - 2ahy_i - y_{i-1} = 0.$$

Для исследования метода на устойчивость подставляем в разностное уравнение частное решение $y_i = \mu^i$. В результате получаем характеристическое уравнение и для устойчивости метода требуется, чтобы все корни характеристического уравнения были по модулю меньше единицы.

Составляем характеристическое уравнение

$$\mu^2 - 2ah\mu - 1 = 0.$$

Его корни

$$\mu_{1,2} = ah \pm \sqrt{a^2h^2 + 1}.$$

Видно, что один из корней $|\mu_2| > 1$ при $a < 0$, что показывает неустойчивость процесса при любых значениях ah . Следовательно, множество абсолютной устойчивости в данном случае пусто.

9.1.5. Методы Адамса

Расчетные формулы экстраполяционного и интерполяционного методов Адамса $(k+1)$ -го порядка соответственно имеют вид

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^k b_{jk} q_{i-j}, \quad y_{i+1} = y_i + \sum_{j=-1}^{k-1} b_{jk}^* q_{i-j}, \quad i = k, k+1, \dots$$

Коэффициенты b_{kj} , b_{kj}^* — известны, а q_k в случае уравнения (2) имеет вид: $q_k = hay_k$. Приведем расчетные формулы методов небольших порядков погрешности.

а) экстраполяционный метод Адамса 1-го порядка (явный метод Эйлера)

$$y_{i+1} = y_i + hay_i = (1 + ha)y_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3)$$

б) интерполяционный метод Адамса 1-го порядка (неявный метод Эйлера)

$$y_{i+1} = y_i + hay_{i+1}, \quad y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - ha}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4)$$

в) экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка

$$y_{i+1} = y_i + \frac{ha}{2}(3y_i - y_{i-1}) = \left(1 + \frac{3ha}{2}\right)y_i - \frac{ha}{2}y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

г) интерполяционный метод Адамса 2-го порядка

$$y_{i+1} = y_i + \frac{ha}{2}(y_{i+1} + y_i), \quad y_{i+1} = \frac{\left(1 + \frac{ha}{2}\right)}{\left(1 - \frac{ha}{2}\right)}y_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (6)$$

д) интерполяционный метод Адамса 3-го порядка

$$y_{i+1} = y_i + \frac{ha}{12}(5y_{i+1} + 8y_i - y_{i-1}), \quad y_{i+1} = \frac{\left(1 + \frac{2ha}{3}\right)}{\left(1 - \frac{5ha}{12}\right)}y_i - \frac{\frac{ha}{12}}{\left(1 - \frac{5ha}{12}\right)}y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Расчетные формулы методов приводят к следующим разностным уравнениям и условиям устойчивости:

а) экстраполяционный метод Адамса 1-го порядка (явный метод Эйлера)

$$y_{i+1} - (1 + ha)y_i = 0, \quad \text{метод устойчив при } h < -\frac{2}{a}.$$

б) интерполяционный метод Адамса 1-го порядка (неявный метод Эйлера)

$$(1 - ha)y_{i+1} - y_i = 0, \quad \text{метод устойчив при любом } h.$$

в) экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка

$$y_{i+1} - (1 + \frac{3ha}{2})y_i + \frac{ha}{2}y_{i-1} = 0, \quad \text{метод устойчив при } h < -\frac{1}{a}.$$

г) интерполяционный метод Адамса 2-го порядка

$$(1 - \frac{ha}{2})y_{i+1} - (1 + \frac{ha}{2})y_i = 0, \quad \text{метод устойчив при любом } h.$$

д) интерполяционный метод Адамса 3-го порядка

$$(1 - \frac{ha}{12})y_{i+1} - (1 + \frac{8ha}{12})y_i + \frac{ha}{12}y_{i-1} = 0, \quad \text{метод устойчив при } h < -\frac{6}{a}.$$

Для исследования метода на устойчивость, как и ранее, подставляем в разностное уравнение частное решение $y_i = \mu^i$. В результате получаем характеристическое уравнение и для устойчивости метода требуется, чтобы все корни характеристического уравнения были по модулю меньше единицы.

Заметим, что методы а), б), г) являются одношаговыми и приходится решать линейное уравнение, методы в) и д) — двухшаговые и характеристическое уравнение соответственно квадратичное.

9.2. Жесткие системы

9.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$Y' = AY, \quad Y(t_0) = Y_0, \quad Y = Y(t), \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A и они различны, U_1, U_2, \dots, U_n — собственные векторы, так что $AU_i = \lambda_i U_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Общее решение системы в данном случае имеет вид

$$Y(t) = C_1 U_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 U_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n U_n e^{\lambda_n t}, \quad (9)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n — определяются из начального условия.

Определение. Если $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ и $\max(-\text{Re}(\lambda_i)) / \min(-\text{Re}(\lambda_i))$ — велико, то система называется жесткой.

Для исследования исходной системы сделаем замену переменных

$$Y(t) = GZ(t), \quad G^{-1}AG = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n].$$

Тогда получим тестовую систему вида $z'_i = \lambda_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, условие $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ аналогично условию $a < 0$ в случае уравнения и обеспечивает устойчивость системы.

Далее будем предполагать, что собственные числа матрицы A вещественны.

Расчетные формулы методов и разностные уравнения записываются аналогично случаю одного уравнения, но здесь вместо параметра a следует подставлять матрицу A или $\lambda_i(A)$ соответственно.

Для устойчивости процесса получения приближенного решения достаточно, чтобы все характеристические числа разностных уравнений, составленных для различных $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \dots, n$, были по модулю меньше единицы.

Таким образом, в условии устойчивости также вместо параметра a следует подставлять $\min(\lambda_i(A))$.

Рассмотрим некоторые методы.

9.2.2. Метод Эйлера

Расчетная формула этого метода получается аналогично случаю решения уравнения и имеет вид

$$Y_{i+1} = (E + Ah)Y_i. \quad (10)$$

Обозначим $W = E + Ah$. В данном случае для устойчивости метода требуется, чтобы все собственные числа матрицы перехода W были по модулю меньше единицы.

$\lambda(W) = 1 + h\lambda(A)$ и для выполнения условия устойчивости h следует выбирать удовлетворяющим условию $h < 2/\max|\lambda_i(A)|$, $i = 1, 2, \dots, n$.

9.2.3. Обратный метод Эйлера

Расчетная формула имеет вид

$$Y_{i+1} = (E - Ah)^{-1}Y_i. \quad (11)$$

Обозначим $W = (E - Ah)^{-1}$, следовательно

$$\lambda_i(W) = \frac{1}{(1 - h\lambda_i(A))},$$

и $|\lambda_i(W)| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. при любых h метод устойчив.

9.2.4. Методы Адамса

Расчетные формулы и условия устойчивости методов Адамса для систем выписываются аналогично расчетным формулам и условиям для уравнений в 9.1.5. Для примера выпишем расчетную формулу интерполяционного метода Адамса 3-го порядка:

$$Y_{i+1} = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(E + \frac{2hA}{3}\right) Y_i - \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(\frac{hA}{12}\right) Y_{i-1}. \quad (12)$$

Обозначим

$$W_1 = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(E + \frac{2hA}{3}\right), \quad W_2 = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1} \left(\frac{hA}{12}\right),$$

тогда

$$\lambda_k(W_1) = \frac{1 + \frac{2h\lambda_k(A)}{3}}{1 - \frac{5h\lambda_k(A)}{12}}, \quad \lambda_k(W_2) = \frac{\frac{h\lambda_k(A)}{12}}{1 - \frac{5h\lambda_k(A)}{12}}.$$

Характеристические уравнения примут вид:

$$(\mu^{(k)})^2 - \lambda_k(W_1)\mu^{(k)} + \lambda_k(W_2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Напомним, что для устойчивости метода требуется, чтобы оба корня всех характеристических уравнений были по модулю меньше единицы, и для интерполяционного метода Адамса 3-го порядка условие устойчивости принимает вид $h < 6/\max |\lambda_i(A)|$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Замечание 1. В двухшаговых методах недостающее решение при $t = h$ можно построить обратным методом Эйлера или интерполяционным методом Адамса 2-го порядка (они оба устойчивы при любом h) с достаточно малым шагом.

9.3. Задание

Для задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1$$

выполнить следующее:

- 1) Построить на промежутке $[0, 0.5]$ точное решение в точках $t_i = ih, i = 1, 2, \dots, 5$, $h = 0.1$.
- 2) Построить на промежутке $[0, 0.5]$ приближенное решение в тех же точках с шагом $h = 0.05$
 - а) явным методом Эйлера;
 - б) неявным методом Эйлера;
 - в) одним из методов Адамса, указанным в варианте задания.
- 3) Исследовать на устойчивость эти методы.
- 4) Повторить п.2 для $h = 0.001$.

Проанализировать результаты.

Результаты представить в 2-х таблицах вида

$$h =$$

Метод		Характерист. числа		t					
				0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Точное	y_1^*	$\lambda_1()$	$\lambda_2()$						
	y_2^*	—	—						
М. Эйлера	$y_1^* - y_1$								
	$y_2^* - y_2$								
Обр. м. Э.	$y_1^* - y_1$								
	$y_2^* - y_2$								
М. Адамса	$y_1^* - y_1$								
	$y_2^* - y_2$								

9.4. Варианты заданий

Вариант 1

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.05 y_2, \\ y_2' = 123.05 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Явный метод Эйлера.
2. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 2

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.1 y_2, \\ y_2' = 123.1 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Неявный метод Эйлера.
2. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 3

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.15 y_2, \\ y_2' = 123.15 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Явный метод Эйлера.
2. Интерполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 4

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.2 y_2, \\ y_2' = 123.2 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Неявный метод Эйлера.
2. Интерполяционный метод Адамса 3-его порядка.

Вариант 5

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.25 y_2, \\ y_2' = 123.25 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Явный метод Эйлера.
2. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 6

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.3 y_2, \\ y_2' = 123.3 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Неявный метод Эйлера.
2. Интерполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 7

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.35 y_2, \\ y_2' = 123.35 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Явный метод Эйлера.
2. Усовершенствованный метод Эйлера.

Вариант 8

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.4 y_2, \\ y_2' = 123.4 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Явный метод Эйлера.
2. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 9

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.45 y_2, \\ y_2' = 123.45 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Неявный метод Эйлера.
2. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 10

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.5 y_2, \\ y_2' = 123.5 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Явный метод Эйлера.
2. Интерполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 11

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.55 y_2, \\ y_2' = 123.55 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Неявный метод Эйлера.
2. Интерполяционный метод Адамса 3-его порядка.

Вариант 12

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.6 y_2, \\ y_2' = 123.6 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Неявный метод Эйлера.
2. Усовершенствованный метод Эйлера.

Вариант 13

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.65 y_2, \\ y_2' = 123.65 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Явный метод Эйлера.
2. Усовершенствованный метод Эйлера.

Вариант 14

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.7 y_2, \\ y_2' = 123.7 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Неявный метод Эйлера.
2. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 15

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.75 y_2, \\ y_2' = 123.75 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Явный метод Эйлера.
2. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 16

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.80 y_2, \\ y_2' = 123.80 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Неявный метод Эйлера.
2. Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 17

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.85 y_2, \\ y_2' = 123.85 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Явный метод Эйлера.
2. Интерполяционный метод Адамса 2-го порядка.

Вариант 18

$$\begin{cases} y_1' = -125 y_1 + 123.9 y_2, \\ y_2' = 123.9 y_1 - 123 y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1.$$

1. Неявный метод Эйлера.
2. Интерполяционный метод Адамса 3-го порядка.

10. Векторные и матричные нормы.

Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

10.1. Векторные нормы

Вектору $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in C^n$ сопоставим вещественное число

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Это число называется нормой Гельдера и удовлетворяет всем свойствам для нормы:

$$\begin{aligned} \|x\|_p &\geq 0, \quad \|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \\ \|\alpha x\|_p &= |\alpha| \|x\|_p, \quad \alpha \in C. \\ \|x + y\|_p &\leq \|x\|_p + \|y\|_p. \end{aligned}$$

На практике используются следующие частные случаи нормы Гельдера:

$$\begin{aligned} p = 1: \quad \|x\|_1 &= \sum_{j=1}^n |x_j|. \\ p = 2: \quad \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}. \\ p = \infty: \quad \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|. \end{aligned}$$

Упражнение 1. $\|(1, -5, 3)\| = ?$

10.2. Матричные нормы

Обозначим через $M_n(C)$ множество квадратных матриц порядка n , элементами которых являются комплексные числа. Пусть

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in C.$$

Для матриц норма Гельдера с показателем p ($p \geq 1$) в $M_n(C)$

$$N_p(A) = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}.$$

Норма при $p = 2$ называется нормой Фробениуса.

Определение. Говорят, что матричная норма $\|\cdot\|$ согласована с векторной $\|\cdot\|$, если выполняется неравенство $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ для любых $x \in C^n$, $A \in M_n(C)$.

Естественнее пользоваться операторной нормой матрицы.

Определение. Операторной нормой матрицы, порожденной векторной нормой $\|x\|$, называется число

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Операторная норма матрицы, порожденная некоторой векторной нормой, является минимальной среди всех матричных норм, согласованных с этой векторной нормой.

Операторную норму называют также нормой матрицы, подчиненной заданной векторной норме.

Определение. Спектральным радиусом матрицы A называется число

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

где λ_i — собственные числа матрицы A .

Можно показать, что

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}.$$

Если $A = A^*$, то $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Упражнение 2. Вычислить все нормы единичной матрицы.

Упражнение 3. Вычислить нормы Фробениуса, $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}.$$

Определение. Матричная норма называется мультипликативной, если $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, $A, B \in M_n(C)$.

Операторная матричная норма и норма Фробениуса мультипликативны.

Теорема 1. $\rho(A) \leq \|A\|$, где $\|A\|$ — мультипликативна.

Можно показать, что

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|A\|.$$

Это неравенство позволяет найти оценки для собственных чисел матрицы по модулю.

10.3. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

Вычислительные задачи, в которых малым изменениям параметров отвечают большие изменения в решениях, называются плохо обусловленными.

Рассмотрим вопрос обусловленности задачи решения линейной алгебраической системы $Ax = b$. Пусть решением системы является вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)'$.

Рассмотрим систему уравнений

$$(A + \Delta A)(x^* + \Delta x) = b + \Delta b, \text{ где } \|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1.$$

Можно получить, что

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right),$$

где

$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ — число обусловленности матрицы².

Очевидно, что $\text{cond}(A) \geq 1$, $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$. Если $A = A^*$, то $\text{cond}_2(A) = |\lambda_1|/|\lambda_n|$, где $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ (λ_i — собственные числа матрицы A).

Упражнение 4. Линейная алгебраическая система $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix},$$

имеет решение $x^* = (1, 1)'$.

Округлим правые части системы до целых, оставив элементы матрицы без изменений.

Система $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, где $\Delta b = (0.01, 0.03)'$ имеет решение $x + \Delta x = (200, -200)'$.

Вычислить число обусловленности матрицы, фактическую относительную погрешность решения и получить для неё оценку.

10.4. Задание

Для заданной матрицы A

а) решить систему $Ax = b$, где

$$b = \begin{pmatrix} 200 \\ -600 \end{pmatrix};$$

б) решить систему с измененной правой частью $A\bar{x} = \bar{b}$, где

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 199 \\ -601 \end{pmatrix};$$

в) найти число обусловленности $\text{cond}(A)$, фактическую относительную погрешность $\delta x = \|\bar{x} - x\|/\|x\|$ и оценку для этой погрешности.

²Число обусловленности матрицы зависит от выбранной нормы.

10.5. Варианты матриц А

1	7
-400.60 199.80 1198.80 -600.40	-402.90 200.70 1204.20 -603.60
2	8
-401.52 200.16 1200.96 -601.68	-400.94 200.02 1200.12 -600.96
3	9
-401.43 200.19 1201.14 -601.62	-401.64 200.12 1200.72 -601.76
4	10
-401.98 200.34 1202.04 -602.32	-403.15 200.95 1205.70 -604.10
5	11
-401.46 200.18 201.08 -601.64	-401.00 200.00 1200.00 -601.00
6	12
-402.50 200.50 1203.00 -603.00	-400.94 200.02 1200.12 -600.96

- 3) При вычислении решения (обратный ход) используются лишь элементы матрицы выше главной диагонали, поэтому можно не вычислять диагональные элементы и элементы ниже диагонали, что приведет к экономии времени.

В этом случае можно действовать по формулам:

$$tmp = a_{kk}, \quad a_{kj} = \frac{a_{kj}}{tmp}, \quad tmp \neq 0, \quad j = k + 1, \dots, n + 1;$$

$$tmp = a_{ik}, \quad a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} * tmp, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, n, \quad j = k + 1, \dots, n + 1, \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

- 4) Весь процесс решения требует порядка $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций.
- 5) Для построения обратной матрицы требуется решить n систем, правыми частями которых будут являться столбцы единичной матрицы.

11.2. Схема Жордана единственного деления

Схема Жордана приводит матрицу системы к диагональному виду, так что решением системы является ее правая часть.

Алгоритм схемы Жордана отличается от схемы Гаусса тем, что обнуляются элементы не только ниже главной диагонали, но и выше.

Соответственно формулы таковы:

$$tmp = a_{kk}, \quad a_{kj} = \frac{a_{kj}}{tmp}, \quad tmp \neq 0, \quad j = k, k + 1, \dots, n + 1,$$

$$tmp = a_{ik},$$

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{kj} * tmp, \quad i = 1, 2, \dots, k - 1, k + 1, k + 2, \dots, n; \quad j = k, k + 1, \dots, n + 1, \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

11.3. Схемы с выбором главного элемента

Во избежание деления на малый ведущий элемент рекомендуется осуществлять выбор наибольшего по модулю элемента и считать его ведущим.

Различают три варианта:

- 1) Выбор главного элемента по столбцу

Пусть

$|a_{pk}| \geq |a_{ik}|, \quad i = k, k + 1, \dots, n.$ Тогда следует поменять местами элементы p -ой и k -ой строк матрицы, то есть $a_{pj} \leftrightarrow a_{kj}, j = 1, 2, \dots, n + 1.$

- 2) Выбор главного элемента по строке

Пусть

$|a_{kq}| \geq |a_{kj}|, j = k, k + 1, \dots, n.$ Тогда следует поменять местами элементы q -го и k -го столбцов матрицы, то есть $a_{iq} \leftrightarrow a_{ik}, i = 1, 2, \dots, n.$

Кроме того, при перестановке столбцов меняется порядок неизвестных, поэтому в этом случае надо запомнить новый порядок неизвестных. Для этого надо сформировать массив с элементами, соответствующими порядку неизвестных. Сначала там должен быть обеспечен порядок неизвестных от 1 до n . По мере перестановки столбцов элементы этого массива с индексами q и k тоже надо поменять местами. При обратном ходе вместо индекса массива неизвестных надо использовать элемент этого массива, например $x[ordx[i]].$

3) Выбор главного элемента по строке и по столбцу

Пусть $|a_{pq}| \geq |a_{ij}|, i = k, k+1, \dots, n; j = k, \dots, n$. Тогда следует поменять местами элементы q -го и k -го столбцов матрицы, p -ой и k -ой строк матрицы, то есть $a_{iq} \leftrightarrow a_{ik}, i = 1, 2, \dots, n, a_{pj} \leftrightarrow a_{kj}, j = 1, 2, \dots, n+1$.

Также следует запомнить порядок неизвестных.

11.4. LU-разложение

LU-разложение — представление матрицы A в виде LU , где L — нижнетреугольная матрица, а U — верхнетреугольная с единичной главной диагональю

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Построить матрицы L и U можно по следующему алгоритму:

Для $i = 1, \dots, n$ выполнять поочередно пункты 1 и 2:

$$1) \quad l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right), \quad j = i, \dots, n;$$

$$2) \quad u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}, \quad j = i, \dots, n.$$

LU-разложение можно использовать для решения следующих задач:

- 1) Решение системы линейных уравнений $Ax = b$, приведенной к виду $LUx = b$ в два шага. На первом шаге решается система $Ly = b$, на втором система $Ux = y$.

Промежуточное решение y выгодно вычислять вместе с коэффициентами u_{ij} , взяв в качестве матрицы A расширенную матрицу со столбцом свободных членов, а U должна быть расширенной матрицей для столбца вектора y . Тогда цикл по j для вычисления элементов u_{ij} следует выполнять до $n+1$.

- 2) Вычисление определителя матрицы A :

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \det(U) = \det(L) = \left(\prod_{i=1}^n l_{ii} \right).$$

- 3) Нахождение обратной матрицы A^{-1} . Для этого следует решить n систем с матрицей LU , а правыми частями будут столбцы единичной матрицы.

11.5. Задание

Для матрицы A , выбранной самостоятельно, найти обратную матрицу A^{-1} , число обусловленности и решение системы $Ax = b$ по схеме Гаусса и LU-разложения, используя программу на алгоритмическом языке.

Программа должна содержать:

- 1) Подпрограмму решения системы по схеме Гаусса единственного деления с выдачей диагностики в случае слишком малого ведущего элемента.
- 2) Подпрограмму решения системы, используя LU-разложение.
- 3) Подпрограмму решения системы по схеме Гаусса с выбором главного элемента (вариант выбора указывается преподавателем).
- 4) Подпрограмму нахождения обратной матрицы.

Параметрами подпрограмм должны являться порядок системы, расширенная матрица системы или матрица системы при нахождении обратной матрицы.

На печать рекомендуется выводить матрицу системы, решение, компоненты вектора невязки $R = b - Ax$.

Отладка программы должна содержать следующие пункты:

- решение системы $Ax = b$ по схеме единственного деления и по схеме с выбором главного элемента. О качестве результата судим по невязке;
- решение системы $Cx = b$ по схеме единственного деления и по схеме с выбором главного элемента, где матрица C отличается от матрицы **лишь** одним элементом $c_{11} = 10^{-8}a_{11}$.

Проанализировать результаты.

11.6. Варианты расширенных матриц

Вариант 1

3.278164	1.046583	-1.378574	-0.527466
1.046583	2.975937	0.934251	2.526877
-1.378574	0.934251	4.836173	5.165441

Вариант 2

7.35272	0.88255	-2.270052	1
0.88255	5.58351	0.528167	0
-2.27005	0.528167	4.430329	0

Вариант 3

8.29381	0.995516	-0.560617	0.766522
0.995516	6.298198	0.595772	3.844422
-0.560617	0.595772	4.997407	5.239231

Вариант 4

8.29381	0.995516	-0.560617	1
0.995516	6.298198	0.595772	0
-0.560617	0.595772	4.997407	0

Вариант 5

8.673134	1.041039	-2.677712	-1.289879
1.041039	6.586211	0.623016	4.020225
-2.677712	0.623016	5.225935	5.269671

Вариант 6

9.016024	1.082197	-2.783575	-1.340873
1.082197	6.846595	0.647647	4.179164
-2.783575	0.647647	5.432541	5.478007

Вариант 7

9.331343	1.120045	-2.880925	7.570463
1.120045	7.086042	0.670297	8.876384
-2.880925	0.670297	5.622534	3.411906

Вариант 8

9.62483	1.15527	-2.97153	8.71670
1.15527	7.30891	0.69138	5.15541
-2.97153	0.69138	5.79937	0.27384

Вариант 9

12.785723	1.534675	-3.947418	9.60565
1.534675	9.709232	0.918435	7.30777
-3.947418	0.918435	7.703946	4.21575

Вариант 10

12.44310	1.493550	-3.841638	5.047556
1.493550	9.449050	0.893829	5.918212
-3.841638	0.893829	7.49750	2.274843

Вариант 11

6.687233	0.80267	-2.06459	0
0.80267	5.07816	0.48037	1
-2.06459	0.48037	4.02934	0

Вариант 12

12.951443	1.554567	-3.998582	4.03171
1.554567	9.835076	0.930339	11.5427
-3.998582	0.930339	7.80380	6.73485

Вариант 13

5.673134	1.041039	-2.677712	0
1.041039	2.586211	0.623016	1
-2.677712	0.623016	4.225935	0

Вариант 14

9.016024	1.082197	-2.783575	0
1.082197	4.543595	0.647647	0
-2.783575	0.647647	5.432541	1

Вариант 15

9.331343	1.120045	-2.880925	7.570463
1.120045	6.086042	0.670297	8.876384
-2.880925	0.670297	4.622534	3.411906

12. Итерационные методы решения линейных систем

Пусть требуется решить линейную систему n -го порядка $Ax = b$.

Для решения линейной системы итерационными методами ее необходимо привести эквивалентно к виду $x = Hx + g$.

Выбираем начальное приближение $x^{(0)}$ (например, вектор с нулевыми компонентами).

12.1. Метод простой итерации

12.1.1. Расчетная формула. Условие сходимости

Расчетная формула метода имеет вид:

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g \quad (1)$$

или покомпонентно

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n h_{ij}x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Необходимое и достаточное условие сходимости: $\rho(H) < 1$, где $\rho(H)$ — спектральный радиус матрицы H .

Достаточное условие сходимости: $\|H\| < 1$, где матричная норма мультипликативна.

12.1.2. Получение решения с заданной точностью

Пусть x^* — точное решение системы, $x^{(k)}$ — решение, полученное на k -ой итерации.

Из расчетной формулы (1) легко получить оценку

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \|H\| \|x^{(k)} - x^*\|, \quad (3)$$

но скорость сходимости метода простой итерации определяется не нормой $\|H\|$, а спектральным радиусом $\rho(H)$.

Пусть требуется найти такое $x^{(k)}$, чтобы $\|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon$ (фактическая погрешность $x^{(k)}$).

Для обеспечения заданной точности используется априорная оценка погрешности решения

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|H\|^k \|x^{(0)}\| + \frac{\|H\|^k}{1 - \|H\|} \|g\| \quad (4)$$

или апостериорная

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|H\|}{1 - \|H\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|. \quad (5)$$

Очевидно, что если

$$\|H\| \leq \frac{1}{2},$$

то

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < \varepsilon \Rightarrow \|x^{(k)} - x^*\| < \varepsilon.$$

12.2. Метод Зейделя

Расчетная формула покомпонентно имеет следующий вид:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n h_{ij} x_j^{(k)} + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Представим эту формулу в векторном виде.

Матрицу H представим в виде $H = H_L + H_R$, где

$$H_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad H_R = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Тогда

$$x^{(k+1)} = H_L x^{(k+1)} + H_R x^{(k)} + g, \quad (8)$$

следовательно расчетная формула метода Зейделя в векторном виде:

$$x^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R x^{(k)} + (E - H_L)^{-1} g. \quad (9)$$

Метод Зейделя для системы $x = Hx + g$ совпадает с методом итерации для системы

$$x = H_{seid} x + g_{seid}, \quad \text{где } H_{seid} = (E - H_L)^{-1} H_R, \quad g_{seid} = (E - H_L)^{-1} g. \quad (10)$$

Достаточное условие сходимости: $\|H\|_\infty < 1$ или $\|H\|_1 < 1$.

Области сходимости методов итерации и Зейделя различны.

12.3. Приведение системы вида $Ax = b$ к виду $x = Hx + g$

Рассмотрим частные случаи.

- 1) Пусть матрица A имеет диагональное преобладание, тогда $H = E - D^{-1}A$, $g = D^{-1}b$, где D — диагональная матрица, у которой на диагонали стоят диагональные элементы матрицы A .

В этом случае элементы матрицы H и столбца свободных членов g вычисляются по следующим формулам:

$$h_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \end{cases} \quad g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}. \quad (11)$$

Очевидно, что достаточное условие сходимости метода простой итерации, который в этом случае называется методом Якоби, будет выполнено.

Посмотрим, какой вид в этом случае будут иметь H_{seid} и g_{seid} .

Обозначим

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Тогда $A = L + D + R$, так что в прежних обозначениях $H_L = -D^{-1}L$, $H_R = -D^{-1}R$,

$$H_{seid} = (E - H_L)^{-1}H_R = -(E + D^{-1}L)D^{-1}R = -(D + L)^{-1}R, \quad g_{seid} = (D + L)^{-1}g. \quad (14)$$

Известно, что если матрица A положительно определена, то метод Зейделя, называемый в этом случае методом Некрасова, для системы $Ax = b$ сходится.

В данном случае для метода Зейделя справедлива апостериорная оценка погрешности

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|H_R\|}{1 - \|H\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|, \quad (15)$$

где H_R , H определяются формулами (7), (11).

Заметим, что в данном случае диагональные элементы матриц H и H_R — нулевые.

2) Пусть A самосопряженная ($A = A^*$) и положительно определенная матрица,

$$0 < m \leq \lambda(A) \leq M, \quad \alpha = 2/(m + M),$$

тогда матрицу H и столбец свободных членов g можно строить следующим образом:
 $H = E - \alpha A$, $g = \alpha b$.

Параметр α называется оптимальным параметром.

Оценки m , M для собственных чисел матрицы A можно найти, используя теорему о кругах Гершгорина.

Упражнение

Проверить выполнение необходимого и достаточного условия сходимости.

12.4. Метод верхней релаксации

Расчетная формула метода для системы $Ax = b$:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + q \frac{b_i - (a_{i1}x_1^{(k)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k)} + a_{ii}x_i^{(k-1)} + \dots + a_{in}x_n^{(k-1)})}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Метод будет сходиться, если матрица симметрическая, положительно-определенная и кроме того $0 < q < 2$.

Для системы $x = Hx + g$, где H и g строятся по формулам (11), расчетная формула, очевидно, примет следующий вид:

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + q \left(\sum_{j=1}^{i-1} h_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n h_{ij} x_j^{(k-1)} - x_i^{(k-1)} + g_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Быстрота сходимости релаксационного циклического процесса определяется наибольшим модулем собственных значений матрицы $S_q = (D + qL)^{-1}(D - qD - qR)$, где D , L и R диагональная, поддиагональная и наддиагональная части матрицы A . Оптимальное значение q вычисляется по формуле:

$$q = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(H)}}, \quad (18)$$

здесь $\rho(H)$ — спектральный радиус матрицы H .

Если же $\rho(H)$ неизвестно, его определяют экспериментально при решении системы методом простой итерации. Если наибольшее по модулю собственное значение матрицы H отделено от остальных собственных значений, то оно может быть определено из отношений одноименных компонент векторов $x^{(k+1)} - x^{(k)}$ и $x^{(k)} - x^{(k-1)}$. Действительно, $x^{(k+1)} - x^{(k)} = H^k(x^{(1)} - x^{(0)})$, $x^{(k)} - x^{(k-1)} = H^{k-1}(x^{(1)} - x^{(0)})$. В качестве приближения к $\rho(H)$ можно взять отношение норм векторов $x^{(k+1)} - x^{(k)}$ и $x^{(k)} - x^{(k-1)}$ при достаточно больших значениях k .

В численных результатах следует привести значение q и убедиться, что оно является оптимальным, то есть реализовать алгоритм, например, с $q_1 = q - 0.1$ и $q_2 = q + 0.1$. Сравнить результаты.

Метод верхней релаксации совпадает с методом Зейделя при $q = 1$.

12.5. Итерационный метод с чебышевским набором параметров

Пусть $0 < m \leq \lambda(A) \leq M$.

Расчетная формула метода

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \tau_k(b - Ax^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, p, \quad (19)$$

где

$$\tau_k = \frac{2}{M + m - (M - m) \cos \frac{2k-1}{2p} \pi}. \quad (20)$$

Этот метод может быть применен, если матрица A симметрическая и положительно-определенная.

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом. Для упорядочения итерационных параметров надо построить последовательность нечетных чисел $\theta_p = \{\theta_p(1), \theta_p(2), \dots, \theta_p(p)\}$, таких, что $1 \leq \theta_p(i) \leq 2p - 1$, и параметры τ_k вычислять по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{(M + m - (M - m)t_k)}, \quad t_k = \cos \frac{\theta_p(k)}{2p} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (21)$$

Рассмотрим способ упорядочения θ_p для случая, когда p есть степень двойки: $p = 2^l$, $l > 0$.

Считая, что $\theta_1 = \{1\}$, поэтапно вычисляются $\theta_2, \theta_4, \dots, \theta_{2^p}$ следующим образом:

$$\theta_{2l}(2i-1) = \theta_l(i), \quad \theta_{2l}(2i) = 4l - \theta_{2l}(2i-1), \quad i = 1, 2, \dots, 2^{p-1},$$

так что

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \{1, 3\}, \\ \theta_4 &= \{1, 7, 3, 5\}, \\ \theta_8 &= \{1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11\}, \\ \theta_{16} &= \{1, 31, 15, 17, 7, 25, 9, 23, 3, 29, 13, 19, 5, 27, 11, 21\}.\end{aligned}$$

Процесс следует повторять число раз кратное p . Число итераций для достижения заданной точности ε определяется по формуле $n(\varepsilon) \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{m}} \ln \frac{2}{\varepsilon}$.

При $p = 1$ метод совпадает с методом итераций с оптимальным параметром.

12.6. Прием Люстерника для ускорения сходимости метода последовательных приближений

Зная $\rho(H)$ — наибольшее по модулю собственное значение матрицы H , можно уточнить построенное ранее приближение $x^{(k)}$ по формуле

$$\bar{x} = x^{(k-1)} + \frac{1}{1 - \rho(H)} (x^{(k)} - x^{(k-1)}). \quad (22)$$

12.7. Варианты заданий

Вариант 1

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D — диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(7)} - x^*\|_\infty$.
- 4) Вычислить $x^{(7)}$ методом простой итерации. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение $x^{(7)}$ системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации.
- 7) Вычислить $x^{(7)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(7)}$, полученные различными методами.

Вариант 2

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
 - 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
 - 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha b$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
 - 4) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(9)} - x^*\|_\infty$. Вычислить $x^{(9)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
 - 5) Вычислить 9-ое приближение $x^{(9)}$ к решению системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
 - 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
 - 7) Вычислить $x^{(9)}$ методом верхней релаксации.
- Сравнить фактические погрешности $x^{(9)}$, полученные различными методами.

Вариант 3

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы A . Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-3}$.
- 4) Вычислить решение методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением k . Вывести фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = Hx + g$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Сравнить результаты с результатами, полученными методом простой итерации.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

Вариант 4

Дана линейная система $Ax = f$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
 - 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
 - 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha f$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
 - 4) Вычислить $x^{(8)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вычислить апостериорную оценку погрешности $\|x^{(8)} - x^*\|_\infty$. Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
 - 5) Вычислить 8-ое приближение $x^{(8)}$ к решению системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
 - 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
 - 7) Вычислить $x^{(8)}$ методом верхней релаксации.
- Сравнить фактические погрешности $x^{(8)}$, полученные различными методами.

Вариант 5

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha \cdot b$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
- 4) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-5}$. Вычислить решение методом итерации с оптимальным параметром с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением k . Вывести фактическую погрешность x^k , апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = Hx + g$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность. Сравнить требуемое количество итераций с количеством итераций, требуемым в методе простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.

- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

Вариант 6

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D — диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы. Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Вычислить $x^{(10)}$ методом простой итерации.
- 4) Вычислить апостериорную оценку погрешности $\|x^{(10)} - x^*\|_\infty$. Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью.
- 5) Вычислить 10-ое приближение $x^{(8)}$ к решению системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить $x^{(10)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(10)}$, полученные различными методами.

Вариант 7

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D — диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы. Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(7)} - x^*\|_\infty$.
- 4) Вычислить $x^{(7)}$ методом простой итерации. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение $x^{(7)}$ системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации.
- 7) Вычислить $x^{(7)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(7)}$, полученные различными методами.

Вариант 8

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha b$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
- 4) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(9)} - x^*\|_\infty$. Вычислить $x^{(9)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить 9-ое приближение $x^{(9)}$ к решению системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить $x^{(9)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(9)}$, полученные различными методами.

Вариант 9

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы. Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-3}$.
- 4) Вычислить решение методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением k . Вывести фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = Hx + g$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Сравнить результаты с результатами, полученными методом простой итерации.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций в различных методах.

Вариант 10

Дана линейная система $Ax = f$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
 - 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
 - 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha f$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
 - 4) Вычислить $x^{(8)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вычислить апостериорную оценку погрешности $\|x^{(8)} - x^*\|_\infty$. Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
 - 5) Вычислить 8-ое приближение $x^{(8)}$ к решению системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
 - 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
 - 7) Вычислить $x^{(8)}$ методом верхней релаксации.
- Сравнить фактические погрешности $x^{(8)}$, полученные различными методами.

Вариант 11

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha \cdot b$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
- 4) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-5}$. Вычислить решение методом итерации с оптимальным параметром с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$, сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением. Вывести фактическую погрешность x^k , апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = Hx + g$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций с количеством итераций, требуемым в методе простой итерации и в методе Зейделя..

Вариант 12

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_D x + g_D$, где $H_D = E - D^{-1}A$, $g_D = D^{-1}b$. Здесь D - диагональная матрица, у которой на диагонали находятся диагональные элементы матрицы. Вычислить $\|H_D\|_\infty$.
- 3) Вычислить $x^{(7)}$ методом простой итерации.
- 4) Вычислить апостериорную оценку погрешности $\|x^{(7)} - x^*\|_\infty$. Сравнить апостериорную оценку с фактической погрешностью.
- 5) Вычислить решение $x^{(7)}$ системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Вычислить $x^{(7)}$ методом верхней релаксации.

Сравнить фактические погрешности $x^{(7)}$, полученные различными методами.

Вариант 13

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
- 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
- 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha \cdot b$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
- 4) Найти априорную оценку того k , при котором $\|x^* - x^k\|_\infty < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-6}$. Вычислить решение методом итерации с оптимальным параметром с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$, сравнить требуемое фактическое число итераций с априорным значением. Вывести фактическую погрешность x^k , апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 5) Вычислить решение системы $x = Hx + g$ методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.
- 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
- 7) Получить решение системы $Ax = b$ методом верхней релаксации с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. В качестве критерия использовать фактическую погрешность.

Сравнить требуемое количество итераций с количеством итераций, требуемым в методе простой итерации и в методе Зейделя..

Вариант 14

Дана линейная система $Ax = b$.

- 1) Найти решение x^* методом Гаусса.
 - 2) Используя теорему о кругах Гершгорина определить такие m и M , что $0 < m \leq \lambda_i(A) \leq M$, вычислить оптимальный параметр $\alpha = 2/(m + M)$.
 - 3) Преобразовать исходную систему к системе вида $x = H_\alpha x + g_\alpha$, где $H_\alpha = E - \alpha A$, $g_\alpha = \alpha b$. Вычислить $\|H_\alpha\|_\infty$.
 - 4) Вычислить априорную оценку погрешности $\|x^{(9)} - x^*\|_\infty$. Вычислить $x^{(9)}$ методом итерации с оптимальным параметром. Вывести его фактическую погрешность, апостериорную оценку, априорную оценку. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
 - 5) Вычислить 9-ое приближение $x^{(9)}$ к решению системы $x = Hx + g$ методом Зейделя. Вывести его фактическую погрешность. Сравнить с решением, полученным методом простой итерации.
 - 6) При выполнении задания в математическом пакете определить спектральный радиус матрицы перехода, если рассматривать метод Зейделя как метод простой итерации. Уточнить последнее приближение по Люстернику. Вывести его фактическую погрешность.
 - 7) Вычислить $x^{(9)}$ методом верхней релаксации.
- Сравнить фактические погрешности $x^{(9)}$, полученные различными методами.

13. Проблема собственных значений

Требуется найти собственные значения λ матрицы и соответствующие этим собственным значениям собственные векторы x , так что $Ax = \lambda x$.

13.1. Метод вращений (Якоби) решения полной проблемы собственных значений и векторов матрицы

Теорема 1. Если A — эрмитова матрица, то существует такая унитарная матрица V , что преобразование подобия с этой матрицей приводит к диагональному виду, т. е. $V^{-1}AV = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица из собственных значений матрицы A .

Для унитарной матрицы $V^{-1} = V^*$.

Частным случаем унитарной матрицы является ортогональная матрица, для которой выполнено следующее:

$$\sum_{i=1}^n V_{ij}^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^n V_{il}V_{ij} = 0, \quad j \neq l.$$

Обозначим через V^T транспонированную матрицу.

Так как $V^T V = E$, то $V^{-1} = V^T$ и преобразование подобия принимает вид $V^T A V = \Lambda$. Задачу нахождения такой матрицы V решают последовательно.

Пусть A — вещественная симметричная матрица. Для такой матрицы метод вращений заключается в построении последовательности матриц $A^{(0)} = A, A^{(1)}, \dots, A^{(k)}, \dots$, так чтобы $A^k \rightarrow \Lambda$. Здесь каждая последующая матрица получается из предыдущей при помощи элементарного шага, состоящего в преобразовании подобия предыдущей матрицы посредством некоторой ортогональной матрицы вращения

$$A^{(k+1)} = V_{i_k j_k}^T(\varphi_k) A^{(k)} V_{i_k j_k}(\varphi_k). \quad (1)$$

У матрицы $V_{i_k j_k}(\varphi_k)$ на диагонали стоят единицы всюду, кроме i_k -ой и j_k -ой строк ($i_k < j_k$) и нули выше и ниже главной диагонали, кроме двух элементов, так что элементы матрицы V описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{ii} &= 1, \quad i \neq i_k, \quad i \neq j_k, \\ v_{i_k i_k} &= c, \quad v_{j_k j_k} = c, \quad c = \cos(\varphi_k), \\ v_{ij} &= 0, \quad i \neq i_k, \quad i \neq j_k, \quad j \neq i_k, \quad j \neq j_k, \\ v_{i_k j_k} &= -s, \quad v_{j_k i_k} = s, \quad s = \sin(\varphi_k). \end{aligned} \quad (2)$$

При $n = 3, i_k = 1, j_k = 3$ матрица будет иметь вид

$$V_{13}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & 0 & -\sin \varphi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_k & 0 & \cos \varphi_k \end{pmatrix}.$$

Матрица $A^{(k+1)}$ строится из $A^{(k)}$ так, чтобы $t^2(A^{(k+1)}) < t^2(A^{(k)})$, где

$$t^2(A^{(k)}) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^n |a_{ij}^{(k)}|^2.$$

Можно показать, что при определенном выборе i_k, j_k, φ_k

$$t^2(A^{(k+1)}) \leq t^2(A^{(k)}) \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) \quad (3)$$

и следовательно

$$t^2(A^{(k)}) \rightarrow 0.$$

Для этого i_k, j_k выбираются как индексы максимального по модулю из наддиагональных элементов матрицы, то есть

$$|a_{i_k j_k}^{(k)}| = \max_{\substack{i, j=1..n \\ i < j}} |a_{ij}^{(k)}|,$$

а угол φ_k выбирается так, чтобы

$$a_{i_k j_k}^{(k+1)} = \frac{a_{j_k j_k}^{(k)} - a_{i_k i_k}^{(k)}}{2} \sin(2\varphi) + a_{i_k j_k}^{(k)} \cos(2\varphi) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg}(2\varphi_k) = \frac{2a_{i_k j_k}^{(k)}}{a_{i_k i_k}^{(k)} - a_{j_k j_k}^{(k)}}, \quad |\varphi_k| \leq \frac{\pi}{4}. \quad (4)$$

Значения $c = \cos(\varphi_k)$ и $s = \sin(\varphi_k)$ можно вычислить и следующим образом:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k}|}{d}\right)}, \\ s &= \operatorname{sign}(a_{i_k j_k} (a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k})) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k}|}{d}\right)}, \\ \text{где } d &= \sqrt{(a_{i_k i_k} - a_{j_k j_k})^2 + 4a_{i_k j_k}^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что если собственные числа простые ($\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$) и

$$|a_{ij}^{(k)}| < \varepsilon, \quad i \neq j,$$

то

$$\lambda_i = a_{ii}^{(k)} + O(\varepsilon^2).$$

Собственные числа можно уточнить по следующей формуле:

$$\lambda_i^{(k)} = a_{ii}^{(k)} + \sum_{j \neq i} \frac{(a_{ij}^{(k)})}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}, \quad (6)$$

тогда

$$\lambda_i = \lambda_i^{(k)} + O(\varepsilon^3).$$

Рассмотрим формулы для элементов матрицы $A^{(k+1)}$.

Обозначим

$$B^{(k)} = A^{(k)} V_{i_k j_k}(\varphi_k),$$

тогда очевидно, что у матрицы $B^{(k)}$ изменятся только i_k и j_k столбцы, а у матрицы $A^{(k+1)} = V_{i_k j_k}^T(\varphi_k)B^{(k)}$ изменятся только i_k и j_k строки, так что в итоге пересчитываем элементы только двух строк или двух столбцов⁴ матрицы по формулам:

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} \quad i \neq i_k, i \neq j_k, j \neq i_k, j \neq j_k. \\
a_{ii_k}^{(k+1)} &= a_{ii_k}^{(k+1)} = ca_{ii_k}^{(k)} + sa_{ij_k}^{(k)}, \\
a_{ij_k}^{(k+1)} &= a_{j_k i}^{(k+1)} = -sa_{ii_k}^{(k)} + ca_{ij_k}^{(k)}, \quad i \neq i_k, i \neq j_k. \\
a_{i_k i_k}^{(k+1)} &= c^2 a_{i_k i_k}^{(k)} + 2csa_{i_k j_k}^{(k)} + s^2 a_{j_k j_k}^{(k)}, \\
a_{j_k j_k}^{(k+1)} &= s^2 a_{i_k i_k}^{(k)} - 2csa_{i_k j_k}^{(k)} + c^2 a_{j_k j_k}^{(k)}, \\
a_{i_k j_k}^{(k+1)} &= a_{j_k i_k}^{(k+1)} = (c^2 - s^2)a_{i_k j_k}^{(k)} + cs(a_{j_k j_k}^{(k)} - a_{i_k i_k}^{(k)}) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, что собственные векторы будут столбцами матрицы

$$X = V_{i_0 j_0} V_{i_1 j_1} \dots V_{i_k j_k}. \tag{8}$$

Итак, для решения задачи следует выполнить следующие действия:

- 1) Подготовить единичную матрицу для собственных векторов ($X = E$).
- 2) В матрице $A^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots$) выбрать среди всех наддиагональных элементов максимальный по абсолютной величине элемент $a_{i_k j_k}^{(k)}$, $i_k < j_k$ и запомнить его индексы.
- 3) Проверить условие $|a_{i_k j_k}^{(k)}| < \varepsilon$.
Если условие не выполнено — перейти к п. 4, если выполнено, завершить процесс.
- 4) Найти $c = \cos(\varphi_k)$, $s = \sin(\varphi_k)$.
- 5) Пересчитать элементы матрицы $A^{(k+1)}$ по формулам (7), пересчитать элементы матрицы X .
- 6) Перейти к п.2.

13.2. Степенной метод и метод скалярных произведений для нахождения максимального по модулю собственного числа симметричной матрицы

Предположим, что собственные числа матрицы пронумерованы следующим образом:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Пусть наибольшее по модулю собственное значение матрицы λ_1 вещественное и простое.

Для нахождения λ_1 выберем $Y^{(0)}$ — начальный вектор. $Y^{(0)}$ следует выбирать так, чтобы коэффициент α_1 в разложении $Y^{(0)} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ не был бы слишком мал. Здесь x_1, x_2, \dots, x_n — собственные векторы, так что $Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$Y^{(0)}$ выбирается опытным путем.

Далее строится последовательность векторов $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots$ по формуле $Y^{(k+1)} = AY^{(k)}$.

$$Y^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})'.$$

⁴По этой причине нерационально строить матрицу $A^{(k+1)}$ по формуле (22.7), используя матричные умножения.

13.2.1. Степенной метод

Обозначим

$$(\lambda_1^{(k,i)})_{pow} = \frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}, \quad (9)$$

тогда

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_1^{(k,i)})_{pow}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda_1 = (\lambda_1^{(k,i)})_{pow} + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k.$$

Хорошее совпадение требуемого числа знаков в отношении

$$\frac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$$

для нескольких компонент может служить признаком для прекращения итераций.

Вектор $Y^{(k)}$ можно взять в качестве приближения к собственному вектору.

13.2.2. Метод скалярных произведений

Расчетные формулы метода выпишем в предположении, что матрица симметричная.

Обозначим

$$(\lambda_1^{(k)})_{scal} = \frac{(Y^{(k+1)}, Y^{(k)})}{(Y^{(k)}, Y^{(k)})}, \quad (10)$$

тогда

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_1^{(k)})_{scal}, \quad \lambda_1 = (\lambda_1^{(k)})_{scal} + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}.$$

Хорошее совпадение требуемого числа знаков $(\lambda_1^{(k)})_{scal}$, $(\lambda_1^{(k+1)})_{scal}$ может служить признаком для прекращения итераций.

Вектор $Y^{(k)}$ можно взять в качестве приближения к собственному вектору.

Замечание 1. При $|\lambda_1| > 1$ компоненты вектора $Y^{(k)}$ быстро растут с возрастанием k , а при $|\lambda_1| < 1$ быстро убывают. Чтобы устранить это нежелательное при вычислениях явление, векторы $Y^{(k)}$ нормируют, например, следующим образом. Пусть

$$|y_p^{(0)}| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(0)}|,$$

Тогда нормируем вектор $Y^{(k)}$ следующим образом:

$$Y_{norm}^{(k)} = \frac{Y^{(k)}}{y_p^{(k)}},$$

так что

$$(y_{norm}^{(k)})_p = 1.$$

В этом случае расчетная формула в степенном методе примет вид:

$$(\lambda_1^{(k,p)})_{pow} = y_p^{(k+1)} \quad (11)$$

и для достижения требуемой точности можно следить за совпадением требуемого числа знаков у соседних приближений к собственному числу $y_p^{(k)}$ и $y_p^{(k+1)}$.

Аналогично в методе скалярных произведений расчетная формула примет вид:

$$(\lambda_1^{(k)})_{scal} = \frac{(AY_{norm}^{(k)}, Y_{norm}^{(k)})}{(Y_{norm}^{(k)}, Y_{norm}^{(k)})}. \quad (12)$$

Замечание 2. Как ранее указывалось, сходимость методов зависит от выбора начального вектора $Y^{(0)}$ и отношения λ_2/λ_1 .

Замечание 3. В [1] приведена апостериорная оценка погрешности вычисленного $\lambda_1^{(k)}$

$$|\lambda_1 - \lambda_1^{(k)}| \leq \frac{\|AY^{(k)} - \lambda_1^{(k)}Y^{(k)}\|_2}{\|Y^{(k)}\|_2}. \quad (13)$$

13.3. Нахождение противоположной границы спектра

Обозначим искомое собственное число $\bar{\lambda}(A)$.

Пусть $\lambda_1(A)$ найдено.

Построим матрицу $B = A - \lambda_1(A)E$, так что $\lambda(B) = \lambda(A) - \lambda_1(A)$.

Рассмотрим 2 случая.

а) $\lambda_1(A) > 0$, значит $\lambda_1(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A)$ и требуется найти

$$\bar{\lambda}(A) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A).$$

В этом случае $\lambda(B) \leq 0$ и, следовательно, применяя степенной метод или метод скалярных произведений, можно вычислить

$$\bar{\lambda}(B) = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(B)$$

и далее искомое

$$\bar{\lambda}(A) = \bar{\lambda}(B) + \lambda_1(A).$$

б) $\lambda_1(A) < 0$, значит $\lambda_1(A) = \min \lambda(A)$ и требуется найти

$$\bar{\lambda}(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A).$$

В этом случае $\lambda(B) \geq 0$ и, следовательно, применяя степенной метод или метод скалярных произведений, можно вычислить

$$\bar{\lambda}(B) = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(B)$$

и далее искомое

$$\bar{\lambda}(A) = \bar{\lambda}(B) + \lambda_1(A).$$

Замечание 3. Если известно, что $\lambda_1(A) > 0$ и в задаче речь сразу идет о нахождении минимального собственного числа, то матрицу B строят следующим образом: $B = A - \|A\|E$.

13.4. Метод Виландта для уточнения изолированного собственного числа (метод обратных итераций)

Пусть известно $\lambda^{(0)}(A)$ — приближение к искомому собственному числу матрицы A . Тогда “сдвинутая” матрица $W = A - \lambda^{(0)}(A)E$ будет иметь одно собственное число значительно меньшее по модулю, чем остальные и итерации матрицей $W^{-1} = (A - \lambda^{(0)}(A)E)^{-1}$ дадут быстро сходящийся процесс. Применяя степенной метод или метод скалярных произведений, находим с заданной точностью собственное число $\lambda(W^{-1})$ и учитывая что

$$\lambda(W^{-1}) = 1/(\lambda(A) - \lambda^{(0)}(A)), \text{ находим } \lambda(A) = 1/\lambda(W^{-1}) + \lambda^{(0)}(A).$$

Замечание 1. Процесс будет сходиться тем быстрее, чем точнее подобрано $\lambda^{(0)}(A)$.

Замечание 2. При построении последовательности векторов $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(k)}$ вместо $Y^{(k+1)} = W^{-1}Y^{(k)}$ экономичнее решать систему $WY^{(k+1)} = Y^{(k)}$.

Замечание 3. Для ускорения процесса рекомендуется применять метод Виландта с параметром, то есть с матрицей W^{-1} предполагается выполнять лишь одну итерацию и полученное приближение к собственному числу использовать сразу для уточнения приближения к собственному числу матрицы, т.е. на каждом шаге выполнять следующие действия:

- 1) Построить матрицу W по формуле $W = A - \lambda^{(k)}E$ (начинать с $k = 0$).
- 2) Найти $Y^{(k+1)}$ из системы $WY^{(k+1)} = Y^{(k)}$.
- 3) Вычислить, например, степенным методом приближение μ к собственному числу матрицы W^{-1} .
- 4) Найти $\lambda^{(k+1)}(A) = 1/\mu + \lambda^{(k)}(A)$ и далее повторять, начиная с пункта 1.

Итерации следует выполнять до совпадения требуемого количества знаков $\lambda^{(k)}(A)$ и $\lambda^{(k+1)}(A)$.

13.5. Варианты заданий

Вариант 1

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность. Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2=1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 2

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|.\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 3

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|.\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 4

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 5

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 6

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 7

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 8

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 9

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 10

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 11

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 12

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon = 0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину.

Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon = 0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2 = 1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2 = 0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon = 0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2 = 1$).
- 5) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon = 0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 13

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы. Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.

- 2) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 3) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2=1$).
- 4) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 14

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.

Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.

- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|.\|_2=1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 15

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|.\|_2=1$).
- 5) Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 16

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.

- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\| \cdot \|_2=1$).
- 5) Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 17

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\| \cdot \|_2=1$).
v Найти собственное число λ_3 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 18

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
v Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 2) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.

- 3) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2=1$).
- 4) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 19

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
v Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2=1$).
- 4) Найти собственное число λ_1 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя метод скалярных произведений. Проверить, вычислив невязку.

Вариант 20

- 1) Найти методом Якоби все собственные числа и собственные векторы матрицы с заданной точностью $\varepsilon=0.000001$. Собственные векторы должны иметь единичную длину. Задачу следует решать с помощью программы, содержащей подпрограмму нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы.
Параметры: порядок матрицы, матрица, заданная точность.
Подпрограмма должна возвращать массив, содержащий собственные числа и массив, содержащий собственные векторы.
- 2) Найти степенным методом с точностью $\varepsilon=0.001$ максимальное по модулю собственное число матрицы A λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $x^{(1)}$, так чтобы $\|x^{(1)}\|_2=1$. Проверить, вычислив невязку $Ax^{(1)} - \lambda_1 x^{(1)}$.
- 3) Найти методом скалярных произведений с точностью $\varepsilon^2=0.000001$ максимальное по модулю собственное число матрицы λ_1 . Сравнить требуемое количество итераций с п.2. Проверить, вычислив невязку.
- 4) Найти, используя метод скалярных произведений с точностью $\varepsilon=0.001$ противоположную к λ_1 границу спектра собственных чисел и соответствующий собственный вектор ($\|\cdot\|_2=1$).
- 5) Найти собственное число λ_2 с точностью $\varepsilon=0.001$ и соответствующий собственный вектор методом Виландта, используя степенной метод. Проверить, вычислив невязку.

13.6. Варианты матриц

матрица 1	-0,81417	-0,01937	0,41372	матрица 7	-0,82005	-0,13542	0,26948
	-0,01937	0,54414	0,00590		-0,13542	0,51486	0,02706
	0,41372	0,00590	-0,81445		0,26948	0,02706	-0,83365
матрица 2	-1,48213	-0,03916	1,08254	матрица 8	-1,53698	-0,19907	0,95855
	-0,03916	1,13958	0,01617		-0,19907	1,17742	0,06992
	1,08254	0,01617	-1,48271		0,95855	0,06992	-1,55151
матрица 3	-1,14896	-0,53716	0,78959	матрица 9	-0,95121	-0,09779	0,35843
	-0,53716	0,88917	0,19536		-0,09779	0,61545	0,02229
	0,78959	0,19536	-1,28186		0,35843	0,022286	-0,95729
матрица 4	-1,00449	-0,38726	0,59047	матрица 10	-1,47887	-0,09357	0,91259
	-0,38726	0,73999	0,12519		-0,09357	1,10664	0,03298
	0,59047	0,12519	-1,08660		0,91259	0,03298	-1,48225
матрица 5	-0,90701	-0,27716	0,44570	матрица 11	-0,88192	-0,04644	0,33422
	-0,27716	0,63372	0,07774		-0,04644	0,56023	0,01075
	0,44570	0,07774	-0,95535		0,33422	0,01075	-0,88342
матрица 6	-0,93016	-0,25770	0,45254	матрица 12	-1,71126	-0,07170	1,23615
	-0,25770	0,65022	0,07193		-0,07170	1,34019	0,02903
	0,45255	0,07193	-0,97112		1,23615	0,02903	-1,71295

14. Разностный метод решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Метод прогонки

14.1. Постановка задачи

Дано уравнение

$$Ly = f(x), \quad (1)$$

где Ly может иметь один из двух видов

$$Ly = -p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y \quad (2)$$

или

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y' + r(x)y. \quad (3)$$

Функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ предполагаются достаточно гладкими, кроме того

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad r(x) \geq 0 \text{ при } x \in [a, b].$$

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = \alpha, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 \geq 0, \quad (4)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta, \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \quad \beta_1 \beta_2 \geq 0. \quad (5)$$

14.2. Аппроксимация дифференциального уравнения разностным

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n равных частей. Пусть $h = (b - a)/n$ и построим сетку узлов с шагом h : $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. Назовем эту сетку узлов основной (рис. 1).

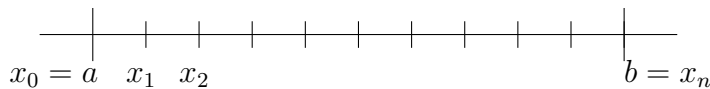


Рис. 1. Основная сетка

Решение исходной задачи будем отыскивать в виде таблицы значений в точках сетки $y_i \approx y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Обозначим через p_i , q_i , r_i , f_i значения функций $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $f(x)$ в точках сетки x_i .

Заменяя производные в уравнении (1) конечно-разностными отношениями с погрешностью $O(h^2)$, получаем для случаев (2) и (3) соответственно

$$-p_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + r_i y_i = f_i \quad (6)$$

$$-\left(p_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h^2} \right) + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + r_i y_i = f_i. \quad (7)$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Назовем эту сетку сдвинутой, в отличие от предыдущей — основной.

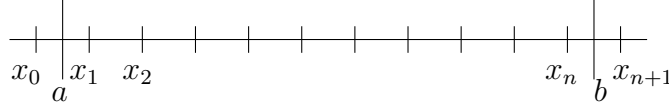


Рис. 2. Сдвинутая сетка

Граничные условия (4-5) аппроксимируем следующим образом:

$$\alpha_1 \frac{y_0 + y_1}{2} - \alpha_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha, \quad (14)$$

$$\beta_1 \frac{y_{n+1} + y_n}{2} + \beta_2 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \beta. \quad (15)$$

Для остальных точек x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ выписываются разностные уравнения, аппроксимирующие дифференциальное уравнение (1) в узлах сдвинутой сетки аналогично (6), (7). В результате приходим к системе $(n + 2)$ -го порядка относительно y_0, y_1, \dots, y_{n+1} . Приводим её к виду, аналогичному (13).

$$\begin{cases} -B_0 y_0 + C_0 y_1 = G_0, \\ A_i y_{i-1} - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n+1} y_n - B_{n+1} y_{n+1} = G_{n+1}. \end{cases} \quad (16)$$

14.4. Метод прогонки для решения систем с трехдиагональной матрицей

Изложим метод на примере системы $(n + 1)$ порядка вида (13).

Будем отыскивать решение системы в виде

$$y_i = s_i y_{i+1} + t_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (17)$$

Прогоночные коэффициенты s_i, t_i подлежат определению.

Из нулевого уравнения системы (13) находим

$$s_0 = \frac{C_0}{B_0}, \quad t_0 = \frac{-G_0}{B_0}.$$

Подставляя y_{i-1} в i -ое уравнение системы

$$A_i(s_{i-1} y_i + t_{i-1}) - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i,$$

получим рекуррентные формулы

$$s_i = \frac{C_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad t_i = \frac{A_i t_{i-1} - G_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

В n -ом уравнении системы (13) $C_n = 0$, следовательно $s_n = 0$, значит из (17) имеем $y_n = t_n$. Затем по формулам (17) находим $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$.

Результаты вычислений удобно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

i	x_i	A_i	B_i	C_i	G_i	s_i	t_i	y_i
0	x_0	A_0	B_0	C_0	G_0	s_0	t_0	y_0
1	x_1	A_1	B_1	C_1	G_1	s_1	t_1	y_1
...
n-1	x_{n-1}	A_{n-1}	B_{n-1}	C_{n-1}	G_{n-1}	s_{n-1}	t_{n-1}	y_{n-1}
n	x_n	A_n	B_n	C_n	G_n	s_n	t_n	$y_n=t_n$

В этой таблице все столбцы, кроме последнего заполняются сверху вниз — прямая прогонка. Последний столбец, содержащий решение, заполняется снизу вверх — обратная прогонка.

Замечание 1. Метод прогонки относится к экономичным методам решения линейных систем, так как количество выполняемых действий линейно зависит от порядка системы — $8(n+1)$.

Замечание 2. При выполнении условий, предусмотренных в постановке задачи, при достаточно малом h , коэффициенты A_i, B_i, C_i , должны быть одного знака и $|A_i + C_i| \leq |B_i|$, $|s_i| \leq 1$, $i = 0, 1, \dots, n$, причём неравенство должно быть строгим хотя бы для одного уравнения.

Замечание 3. Если разностная схема аппроксимирует исходную задачу и устойчива, то решение разностной схемы будет сходиться к решению исходной задачи при $h \rightarrow 0$ с тем же порядком, с которым выполнена аппроксимация.

14.5. Задание

- 1) Для реализации алгоритма метода прогонки следует создать модуль с процедурой, параметрами которой должны являться порядок системы, массивы коэффициентов A, B, C, G . Результатом должен быть массив решения Y в точках основной сетки.
- 2) Используя функцию Maple, получить “точное” решение задачи в узлах основной сетки, обозначим его Y_{ex} .
- 3) Получить решение с порядком $O(h)$ при $n = 10$. Результаты оформить в виде таблицы 1.
- 4) Получить решение с порядком $O(h)$ при $n = 20$. Уточнить по правилу Рунге. Обозначим его Y_{ut} . Сравнить с “точным” решением.
- 5) Получить решение с $O(h^2)$ при $n = 10$. Результаты оформить в виде таблицы 1. При построении решения на сдвинутой сетке следует получить решение в точках основной сетки.
- 6) Получить решение с $O(h^2)$ при $n = 20$. Уточнить по правилу Рунге. Сравнить с “точным” решением.

Результаты в точках основной сетки следует представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

x	Y_{ex}	$O(h)$		$O(h^2)$	
		Y_{ut}	$Y_{ut} - Y_{ex}$	Y_{ut}	$Y_{ut} - Y_{ex}$
a					
$a + h$					
$a + 2h$					
\dots					
$a + nh = b$					

Здесь $n = 10$, $h = (b - a)/n$.

Сравнить решения на графиках.

14.6. Варианты граничных задач

Вариант 1

$$-\left(\frac{1}{2+x}u'\right)' + \cos(x)u = 1+x, \quad u(-1) = u(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 2

$$-\left(\frac{2+x}{3+x}u'\right)' + (1+\sin(x))u = 1-x, \quad u'(-1) = u'(1) + u(1) = 0. \quad O(h).$$

Вариант 3

$$-\frac{1}{x-3}u'' + \left(1 + \frac{x}{2}\right)u' - e^{x/2}u = 2-x, \quad u(-1) = u(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 4

$$-\left(\frac{2}{2+x}u'\right)' + \frac{1+x}{2}u' + \cos\left(\frac{x}{2}\right)u = 1 + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) - u(-1) = u'(1) = 0. \quad O(h).$$

Вариант 5

$$-\frac{1}{x+3}u'' - xu' + \ln(2+x)u = 1 - \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = u'(1) + 1/2 u(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 6

$$\frac{x-2}{x+2}u'' + xu' + (1-\sin(x))u = x^2, \quad u(-1) = u(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 7

$$-\frac{4+x}{5+2x}u'' + \left(\frac{x}{2} - 1\right)u' + (1 + e^{x/2})u = 2 + x, \quad u'(-1) = u'(1) + 2u(1) = 0. \quad O(h).$$

Вариант 8

$$-\frac{4-x}{5-2x}u'' + \frac{1-x}{2}u' + \frac{1}{2}\ln(3+x)u = 1 + \frac{x}{3}, \quad u(-1) = u(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 9

$$-\frac{6+x}{7+3x}u'' - \left(1 - \frac{x}{2}\right)u' + \left(1 + \frac{1}{2}\cos(x)\right)u = 1 - \frac{x}{3}, \quad u'(-1) - 2u(-1) = u'(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 10

$$-\frac{5-x}{7-3x}u'' - \frac{1-x}{2}u' + \left(1 + \frac{1}{2}\sin(x)\right)u = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = 2u'(1) + 3u(1) = 0. \quad O(h).$$

Вариант 11

$$-\frac{7-x}{8+3x}u'' + \left(1 + \frac{x}{3}\right)u' + \left(1 - \frac{1}{2}e^{x/2}\right)u = \frac{1}{2} - \frac{x}{3}, \quad u(-1) = u(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 12

$$-\frac{7+x}{8-3x}u'' + \left(1 - \frac{x}{3}\right)u' + \frac{1}{3}\ln(3+x)u = \frac{1+x}{2}, \quad u'(-1) - 3u(-1) = u'(1) = 0. \quad O(h).$$

Вариант 13

$$-\left(\frac{1}{2x+3}u'\right)' + (1 + \cos(x))u = 1 + x, \quad u(-1) = u'(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 14

$$-\left(\frac{x+3}{2+x}u'\right)' + xu' + e^{x/3}u = 1 + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = u'(1) = 0. \quad O(h).$$

Вариант 15

$$-\left(\frac{x+4}{x+5}u'\right)' + e^{x/4}u = 2 - x, \quad u'(-1) = u(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 16

$$u'' - \frac{\cos(x)}{1+x}u' - (2-x)u = x+1, \quad 0.2u(0) - u'(0) = -0.8, \quad 0.9u(1) + u'(1) = -0.1. \quad O(h^2).$$

Вариант 17

$$u'' - xe^xu = \sin(x), \quad 0.3u(0) - u'(0) = -0.9, \quad 0.5u(1) + u'(1) = -0.2. \quad O(h^2).$$

Вариант 18

$$-((x \cos(x) + 1)u')' + e^{x+1}u = -(1+x)^2(1+x), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 19

$$-\frac{1}{x-3}u'' + \left(1 + \frac{x}{2}\right)u' - e^{x/2}u = 2 - x, \quad u(-1) = u(1) = 0. \quad O(h^2).$$

Вариант 20

$$-\frac{7+x}{8-3x}u'' + \left(1 - \frac{x}{3}\right)u' + \frac{1}{3}\ln(3+x)u = \frac{1+x}{2}, \quad u'(-1) - 3u(-1) = u'(1) = 0. \quad O(h).$$

15. Проекционные методы решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

15.1. Постановка задачи. Общие сведения

Рассмотрим краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с однородными граничными условиями.

Требуется найти решение уравнения

$$Ly = f(x), \quad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\alpha_1 y(-1) - \alpha_2 y'(-1) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 \geq 0, \quad (2)$$

$$\beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \quad \beta_1 \beta_2 \geq 0. \quad (3)$$

Заметим, что при $\alpha_2 = 0$ краевая задача на левом конце промежутка $[-1, 1]$ называется первой (I), при $\alpha_1 = 0$ — второй (II), если же оба коэффициента не равны нулю — третьей (III). Аналогично определяется краевая задача для правого конца промежутка.

При применении любого из проекционных методов выбирается линейно независимая система функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$, называемая координатной, и приближенное решение ищется в виде линейной комбинации этих функций

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \omega_i(x). \quad (4)$$

Коэффициенты разложения c_i являются решением линейной системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Конкретный вид оператора L , дополнительные условия на элементы координатной системы, способ построения элементов матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ и вектора $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)'$ определяются используемым проекционным методом.

15.2. Метод Ритца

Рассматривается уравнение

$$Ly = -(p(x)y')' + r(x)y = f(x), \quad (6)$$

где $p(x)$ — непрерывно дифференцируема и $p(x) \geq p_0 > 0$, а $r(x)$ непрерывна и $r(x) > 0$, $x \in (-1, 1)$.

Дифференциальный оператор L мы считаем заданным на множестве $D(L)$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих соответствующим краевым условиям.

Заданная на $D(L)$ билинейная форма $[y, z] = (Ly, z)$ ((\cdot, \cdot) — скалярное произведение в пространстве $L_2(-1, 1)$), интегрированием по частям приводится к виду

$$[y, z] = \int_{-1}^1 (py'z' + ryz)dx + Q_l + Q_r, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} Q_l &= \begin{cases} 0, & \text{I, II,} \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(-1) y(-1) z(-1), & \text{III.} \end{cases} \\ Q_r &= \begin{cases} 0, & \text{I, II,} \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} p(1) y(1) z(1), & \text{III.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

В Q_l, Q_r справа указан тип краевой задачи (I, II, III).

Билинейная форма $[y, z]$ обладает всеми свойствами скалярного произведения. Используя формулу (7), расширим область задания этого скалярного произведения, включив в нее все абсолютно непрерывные функции, производная которых принадлежит $L_2(-1, 1)$ и которые, кроме того, в случае первой краевой задачи (I) удовлетворяют этому условию. Новая область задания со скалярным произведением $[y, z]$ называется энергетическим пространством оператора L и обозначается H_L .

Зададим на H_L функционал энергии $G(y) = [y, y] - 2(y, f)$. Пусть y^* — решение нашей задачи. Тогда для любой функции $y \in D(L)$ имеем $G(y) = [y, y] - 2[y, y^*] = G(y^*) + [y - y^*, y - y^*]$, откуда видно, что $G(y^*)$ есть минимальное значение функционала G на $D(L)$. Функционал G и на H_L достигает своего минимального значения при $y = y^*$. Это и используется для построения приближенного решения методом Ритца.

Выбирается линейно независимая система функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x) \in H_L$ и приближенное решение ищется в виде линейной комбинации (4) этих функций. Коэффициенты c_j находятся из условия минимума функционала энергии. Последнее требование приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно c_j :

$$\sum_{j=1}^n [\omega_j, \omega_i] c_j = (f, \omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Итак, приближенное решение по методу Ритца строится по формуле (4), где коэффициенты c_j находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad a_{ij} = [\omega_i, \omega_j], \quad f_i = (f, \omega_i). \quad (10)$$

15.3. Метод Галеркина

В случае, когда координатные функции $\omega_i(x)$ выбраны из области определения оператора L ($\omega_i \in D(L)$), система уравнений (9) может быть переписана в виде

$$\sum_{j=1}^n (L\omega_j, \omega_i) c_j = (f, \omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Эту систему можно трактовать как условие ортогональности в L_2 невязки $Ly_n - f$ всем функциям координатной системы. Эти соображения применимы и в случае более общего уравнения, когда оператор L не является самосопряженным и положительно определенным

$$Ly = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x). \quad (12)$$

Итак, метод Галеркина решения уравнения (12) при однородных краевых условиях состоит в следующем. Выбирается координатная система функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x) \in D(L)$.

Приближенное решение строится по формуле (4), в которой коэффициенты c_j находятся из системы уравнений (11).

Отметим одну особенность метода Галеркина. Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad p(x) > 0 \quad (13)$$

и краевая задача не является первой, то координатные функции могут не удовлетворять соответствующему краевому условию. При этом необходимо заменить в системе (11) коэффициенты $(L\omega_j, \omega_i)$ на

$$[\omega_j, \omega_i] + (q\omega_j' + r\omega_j, \omega_i), \quad (14)$$

где

$$[\omega_j, \omega_i] = \int_{-1}^1 p\omega_j' \omega_i' dx + Q_l + Q_r. \quad (15)$$

Здесь Q_l, Q_r имеют прежний смысл и вычисляются по формуле (8).

15.4. Метод моментов

Отличие этого метода решения краевой задачи для уравнения (12) от метода Галеркина состоит в том, что требуется ортогональность невязки приближенного решения не функциям координатной системы, а некоторым другим выбранным функциям.

Итак, метод моментов краевой задачи для уравнения (12) состоит в следующем. Выбирается координатная система функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x) \in D(L)$ и другая система функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$, называемая проекционной системой. Приближенное решение строится по формуле (4), причем коэффициенты c_j находятся из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n (L\omega_j, \psi_i) c_j = (f, \psi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

15.5. Метод наименьших квадратов

Очевидно, что решение y^* краевой задачи для уравнения (12) доставляет минимум функционалу $G(y) = (Ly - f, Ly - f)$, заданному на множестве $D(L)$. В методе наименьших квадратов приближенное решение в виде (4) строится из условия минимизации функционала G , что легко приводит к системе линейных уравнений относительно c_j :

$$\sum_{j=1}^n (L\omega_j, L\omega_i) c_j = (f, L\omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Итак, в методе наименьших квадратов выбирается координатная система, удовлетворяющая краевым условиям, приближенное решение строится по формуле (4), где c_j находятся из системы уравнений (17). Заметим, что этот метод можно рассматривать как частный случай метода моментов при специальном выборе проекционной системы: $\psi_j = L\omega_j$.

15.6. Метод коллокации

Отличие этого метода от метода моментов состоит в том, что мы требуем не ортогональности невязки приближенного решения функциям некоторой системы, а обращения ее в ноль в некоторых точках промежутка $[-1, 1]$.

Итак, в методе коллокации выбирается координатная система, удовлетворяющая крайним условиям, выбирается некоторая система точек $-1 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n \leq 1$, называемых узлами коллокации, и приближенное решение строится по формуле (4), где c_j находятся из системы уравнений $\sum_{j=1}^n (L\omega_j |_{x=t_i}) c_j = f(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$

В качестве узлов коллокации рекомендуется брать узлы многочлена Чебышева первого рода.

15.7. Выбор координатной системы

В качестве координатной системы часто используются системы ортогональных многочленов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Приведем необходимые сведения об этих многочленах. Нам потребуется частный случай многочленов, когда $\alpha = \beta = k$ — целое число.

$$P_n^{(k, k)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{-k} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+k}. \quad (18)$$

Свойства многочленов Якоби

1) $P_n^{(k, k)}$ есть многочлен степени n , четный при четном n и нечетный при нечетном n .

2) Многочлены $P_n^{(k, k)}(x)$ обладают следующим свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^k P_n^{(k, k)}(x) P_m^{(k, k)}(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2^{2k+1} ((n+k)!)^2}{((2n+2k+1)n!(n+2k)!)}, & n = m. \end{cases}$$

3) $P_0^{(k, k)}(x) = 1, \quad P_1^{(k, k)}(x) = (k+1)x.$

4) Три последовательных многочлена Якоби связаны рекуррентной формулой:

$$P_{n+2}^{(k, k)}(x) = \frac{(n+k+2)(2n+2k+3)x \cdot P_{n+1}^{(k, k)}(x) - (n+k+2)(n+k+1)P_n^{(k, k)}(x)}{(n+2k+2)(n+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

5) Правила дифференцирования полиномов Якоби

$$\begin{aligned} \left[P_n^{(k, k)}(x) \right]' &= \frac{n+2k+1}{2} P_{n-1}^{(k+1, k+1)}(x), \quad n \geq 1, \\ \left[(1-x^2)^k P_n^{(k, k)}(x) \right]' &= -2(n+1)(1-x^2)^{k-1} P_{n+1}^{(k-1, k-1)}(x), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Замечание 1. При решении задачи с неоднородными граничными условиями решение следует представить в виде $y(x) = u(x) + z(x)$, где $u(x)$ должно удовлетворять однородным граничным условиям, а $z(x)$ — неоднородным и может иметь, например, вид $z(x) = d_1 x + d_2$. d_1, d_2 определяются из граничных условий. Тогда $u(x)$ является решением задачи

$$\begin{cases} Lu = f(x) - Lz, \\ \alpha_1 u(-1) - \alpha_2 u'(-1) = 0, \\ \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0. \end{cases}$$

Замечание 2. При выполнении задания на Maple можно использовать встроенные полиномы Якоби $P(n, \alpha, \beta, x)$ из пакета *orthopoly*.

Замечание 3. Координатную систему, удовлетворяющую граничным условиям, можно строить следующим образом: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, например, в виде:

$W_1(x) = x^2 + c_1 x + d_1$, $W_2(x) = x^3 + c_2 x + d_2$, где c_1, d_1, c_2, d_2 находятся из граничных условий, а для $i = 3, 4, \dots$ $W_i(x) = (1 - x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$.

Замечание 4. Для решения задачи на промежутке $[a, b] \neq [-1, 1]$ часто бывает удобнее свести задачу к задаче на промежутке $[-1, 1]$ или сделать соответствующую замену переменной в многочленах Якоби, т. е. взять многочлены $P((2x - b - a)/(b - a))$.

15.8. Задание

Написать программу, решающую задачу указанным проекционным методом и методом коллокации.

Число n координатных функций должно являться параметром программы.

Программа должна выдавать на печать

- расширенную матрицу системы;
- число обусловленности матрицы $\mu(A)$;
- коэффициенты разложения приближенного решения по координатным функциям;
- значения приближенного решения в точках -0.5, 0, 0.5.

Сравнить значения решения для различных n с точным решением u^* , полученным обращением к функции Maple. Построить графики решений в одних осях координат. Результаты представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

n	$\mu(A)$	$u^{(n)}(x)$			$u^*(x) - u^{(n)}(x)$		
		$x=-0.5$	$x=0$	$x=0.5$	$x=-0.5$	$x=0$	$x=0.5$
3							
4							
5							
6							
7							

Рассмотреть другие варианты координатных функций. Проанализировать результаты.

15.9. Варианты заданий

Вариант 1

1) Граничная задача

$$-\left(\frac{1}{2+x} u'\right)' + \cos(x) u = 1+x, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

2) Метод Рунге.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 2

1) Граничная задача

$$-\left(\frac{2+x}{3+x} u'\right)' + (1+\sin(x)) u = 1-x, \quad u'(-1) = u'(1) + u(1) = 0.$$

2) Метод Рунге.

Координатная система: $1, x, (1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 3

1) Граничная задача

$$-\frac{1}{x-3} u'' + \left(1 + \frac{x}{2}\right) u' - e^{x/2} u = 2-x, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

2) Метод Галеркина.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 4

1) Граничная задача

$$-\left(\frac{2}{2+x} u'\right)' + \frac{1+x}{2} u' + \cos\left(\frac{x}{2}\right) u = 1 + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) - u(-1) = u'(1) = 0.$$

2) Метод Галеркина.

Координатная система: $1, x, (1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 5

- 1) Граничная задача

$$-\frac{1}{x+3} u'' - x u' + \ln(2+x) u = 1 - \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = u'(1) + \frac{1}{2} u(1) = 0.$$

- 2) Метод Галеркина.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 6

- 1) Граничная задача

$$\frac{x-2}{x+2} u'' + x u' + (1 - \sin(x)) u = x^2, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

- 2) Метод моментов.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

Проекционная система: $P_i^{(0,0)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 7

- 1) Граничная задача

$$-\frac{4+x}{5+2x} u'' + \left(\frac{x}{2} - 1\right) u' + (1 + e^{x/2}) u = 2 + x, \quad u'(-1) = u(1) + 2 u'(1) = 0.$$

- 2) Метод моментов.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

Проекционная система: $P_i^{(0,0)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 8

- 1) Граничная задача

$$-\frac{4-x}{5-2x} u'' + \frac{1-x}{2} u' + \frac{1}{2} \ln(3+x) u = 1 + \frac{x}{3}, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

- 2) Метод Галеркина.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 9

- 1) Граничная задача

$$-\frac{6+x}{7+3x} u'' - \left(1 - \frac{x}{2}\right) u' + \left(1 + \frac{1}{2} \cos(x)\right) u = 1 - \frac{x}{3}, \quad u'(-1) - 2u(-1) = u'(1) = 0.$$

- 2) Метод наименьших квадратов.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 10

- 1) Граничная задача

$$-\frac{5-x}{7-3x} u'' - \frac{1-x}{2} u' + \left(1 + \frac{1}{2} \sin(x)\right) u = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = 2u'(1) + 3u(1) = 0.$$

- 2) Метод Галеркина.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 11

- 1) Граничная задача

$$-\frac{7-x}{8+3x} u'' + \left(1 + \frac{x}{3}\right) u' + \left(1 - \frac{1}{2} e^{x/2}\right) u = \frac{1}{2} - \frac{x}{3}, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

- 2) Метод наименьших квадратов.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 12

- 1) Граничная задача

$$-\frac{7+x}{8-3x} u'' + \left(1 - \frac{x}{3}\right) u' + \frac{1}{3} \ln(3+x) u = \frac{1+x}{2}, \quad u'(-1) - 3u(-1) = u'(1) = 0.$$

- 2) Метод наименьших квадратов.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 13

1) Граничная задача

$$-\left(\frac{1}{2x+3}u'\right)' + (1 + \cos(x))u = 1 + x, \quad u(-1) = u'(1) = 0.$$

2) Метод Рунге.

Координатная система: $W_1(x) = 1 + x$, $W_i(x) = (1 - x^2)P_{i-2}^{(1,1)}(x)$, $i = 2, 3, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 14

1) Граничная задача

$$-\left(\frac{x+3}{2+x}u'\right)' + xu' + e^{x/3}u = 1 + \frac{x}{2}, \quad u(-1) = u'(1) = 0.$$

2) Метод Галеркина.

Координатная система: $1 + x$, $(1 - x^2)P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 15

1) Граничная задача

$$-\left(\frac{x+4}{x+5}u'\right)' + e^{x/4}u = 2 - x, \quad u'(-1) = u(1) = 0.$$

2) Метод Рунге.

Координатная система: $(1 - x)$, $(1 - x^2)P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 16

1) Граничная задача

$$u'' - \frac{\cos(x)}{1+x}u' - (2-x)u = x + 1, \quad 0.2u(0) - u'(0) = -0.8, \quad 0.9u(1) + u'(1) = -0.1.$$

2) Метод моментов.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = x^2(1-x)^2P_{i-3}^{(2,2)}(2x-1)$, $i = 3, 4, \dots$

Проекционная система: $P_i^{(0,0)}(2x-1)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 17

- 1) Граничная задача

$$u'' - xe^xu = \sin(x), \quad 0.3u(0) - u'(0) = -0.9, \quad 0.5u(1) + u'(1) = -0.2.$$

- 2) Метод Рунге.

Координатная система: $1, x, x(1-x)P_i^{(1,1)}(2x-1), i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 18

- 1) Граничная задача

$$-((x \cos(x) + 1)u')' + e^{x+1}u = (1+x)^3, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0.$$

- 2) Метод Галеркина.

Координатная система: $1, x, x(1-x)P_i^{(1,1)}(2x-1), i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 19

- 1) Граничная задача

$$-\frac{1}{x-3}u'' + \left(1 + \frac{x}{2}\right)u' - e^{x/2}u = 2-x, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

- 2) Метод наименьших квадратов.

Координатная система: $(1-x^2)P_i^{(1,1)}(x), i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 20

- 1) Граничная задача

$$-\frac{7+x}{8-3x}u'' + \left(1 - \frac{x}{3}\right)u' + \frac{1}{3}\ln(3+x)u = \frac{1+x}{2}, \quad u'(-1) - 3u(-1) = u'(1) = 0.$$

- 2) Метод Галеркина.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x), i = 3, 4, \dots$

- 3) Метод коллокации.

16. Численное решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

Пусть требуется решить уравнение

$$u(x) - \int_a^b H(x, y)u(y)dy = f(x), \quad f(x) \in C_{[a, b]}, \quad (1)$$

где ядро $H(x, y)$ — достаточное количество раз непрерывно дифференцируемо.

16.1. Метод замены ядра на вырожденное

16.1.1. Построение решения и резольвенты

Вырожденным называется ядро, представимое в виде

$$\tilde{H}(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\beta_i(y), \quad (2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — линейно независимы и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — линейно независимы.

Пусть $H(x, y) \approx \tilde{H}(x, y)$ и будем решать уравнение

$$\tilde{u}(x) - \int_a^b \tilde{H}(x, y)\tilde{u}(y)dy = f(x). \quad (3)$$

Если уравнение (3) имеет решение, то оно представимо в виде:

$$\tilde{u}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} c_i &= \int_a^b \beta_i(y)\tilde{u}(y)dy = \int_a^b \beta_i(y)(f(y) + \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j(y))dy = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_a^b \beta_i(y)\alpha_j(y)dy c_j + \int_a^b \beta_i(y)f(y)dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим

$$\gamma_{ij} = \int_a^b \beta_i(y)\alpha_j(y)dy, \quad b_i = \int_a^b \beta_i(y)f(y)dy, \quad a_{ij} = \delta_{ij} - \gamma_{ij}, \quad (6)$$

(δ_{ij} — символ Кронекера), тогда c_i являются решением системы линейных алгебраических уравнений $AC = B$.

Здесь $A = \{a_{ij}\}$ — матрица коэффициентов, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ — вектор правых частей, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ — искомый вектор.

Если определитель матрицы A не равен нулю, то нетрудно построить резольвенту ядра \tilde{H} , то есть такую функцию $\tilde{G}(x, y)$, что

$$\tilde{u}(x) = f(x) + \int_a^b \tilde{G}(x, y) f(y) dy. \quad (7)$$

Обозначим $D = \{d_{ij}\}$ матрицу, обратную матрице A : $D = A^{-1}$. Тогда коэффициенты c_i вычисляются по формулам

$$c_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} b_j \quad (8)$$

и потому

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \int_a^b \beta_j(y) f(y) dy \alpha_i(x) = \\ &= f(x) + \int_a^b \tilde{G}(x, y) f(y) dy, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{G}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \alpha_i(x) \beta_j(y), \quad (10)$$

$\tilde{G}(x, y)$ — резольвента ядра \tilde{H} .

16.1.2. Оценка погрешности

Теорема 1 (об оценке погрешности). Пусть интегральное уравнение (3) однозначно разрешимо, его решение есть $\tilde{u}(x)$ и для резольвенты \tilde{G} ядра \tilde{H} выполнена оценка

$$\int_a^b |\tilde{G}(x, y)| dy \leq \tilde{B} \quad (x \in [a, b]). \quad (11)$$

Пусть ядра H и \tilde{H} связаны неравенством

$$\int_a^b |H(x, y) - \tilde{H}(x, y)| dy \leq \eta \quad (x \in [a, b]), \quad (12)$$

причем $(1 + \tilde{B})\eta < 1$.

Тогда уравнение (1) также однозначно разрешимо и для его решения $u^*(x)$ выполняется оценка

$$|u^*(x) - \tilde{u}(x)| \leq \frac{(1 + \tilde{B})\eta}{1 - (1 + \tilde{B})\eta} \|\tilde{u}^*(x)\|_C. \quad (13)$$

16.1.3. Задание

- 1) Подобрать вырожденное ядро ранга 3 и найти $\tilde{u}^{(3)}(x)$.
- 2) Вычислить значения $\tilde{u}^{(3)}(x)$ в точках a , $(a+b)/2$, b .
- 3) Подобрать вырожденное ядро ранга 4 и найти $\tilde{u}^{(4)}(x)$.
- 4) Вычислить значения $\tilde{u}^{(4)}(x)$ в точках a , $(a+b)/2$, b .
- 5) Вычислить $\tilde{\Delta} = \max_{i=1,2,3} |\tilde{u}^{(4)}(x_i) - \tilde{u}^{(3)}(x_i)|$, $x_1 = a$, $x_2 = (a+b)/2$, $x_3 = b$.

При использовании пакета Maple вычислить $\tilde{\Delta} = \|\tilde{u}^{(4)}(x) - \tilde{u}^{(3)}(x)\|_C$.

- 6) Оценить погрешность приближенного решения $\tilde{u}^{(3)}(x)$. Сравнить с $\tilde{\Delta}$.
- 7) При использовании пакета Maple построить график разности решений $\tilde{u}^{(3)}(x)$ и $\tilde{u}^{(4)}(x)$.

Результаты представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

x	a	$(a+b)/2$	b
$\tilde{u}^{(3)}(x)$			
$\tilde{u}^{(4)}(x)$			
Оценка $\tilde{\Delta}$			

Указание

При выполнении задания на Maple можно использовать функции:

- $Hn := mtaylor(H(x, y), [x, y], n)$ — разложение функции $H(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x = 0, y = 0)$. Параметр n определяет порядок удерживаемых в разложении функции членов;
- $plot3d(H_Hn, x = a..b, y = a..b, axes = BOXED)$ — построение поверхности, задаваемой выражением H_Hn , в трехмерном пространстве. Поверхность заключена в охватывающий параллелепипед с нанесенными шкалами по трем граням. Эта функция может быть применена для получения оценок, используемых в теореме о погрешности.

Перечислим основные пункты решения задачи для ранга ядра n .

- 1) Построение вырожденного ядра, то есть определение функций $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, таких, что $\tilde{H}(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(y) \approx H(x, y)$.
- 2) Построение матрицы A и столбца правых частей.
- 3) Решение системы $AC = B$.
- 4) Получение решения в точках $x = a$, $(a+b)/2$, b .
- 5) Вычисление апостериорной оценки.

16.2. Метод механических квадратур

16.2.1. Построение решения

Выберем какую-нибудь квадратурную формулу

$$\int_a^b v(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k v(x_k), \quad (14)$$

узлы $x_k \in [a, b]$, $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$.

Заменив интеграл в уравнении (1) приближенно на квадратурную сумму, получим новое уравнение относительно новой неизвестной функции $u^{(n)}(x)$:

$$u^{(n)}(x) - \sum_{k=1}^n A_k H(x, x_k) u^{(n)}(x_k) = f(x). \quad (15)$$

Если квадратурная сумма достаточно хорошо приближает интеграл, то есть основания надеяться, что решение $u^{(n)}(x)$ уравнения (15) близко к решению $u(x)$ уравнения (1).

Для решения уравнения (15) будем полагать x поочередно равным x_1, x_2, \dots, x_n .

Обозначим $\varsigma_j = u^{(n)}(x_j)$, тогда ς_j обязаны удовлетворять системе уравнений

$$\varsigma_j - \sum_{k=1}^n A_k H(x_j, x_k) \varsigma_k = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

или, в матричной записи, $Dz = g$, где

$$D = \{d_{jk}\}, \quad d_{jk} = \delta_{jk} - A_k H(x_j, x_k), \quad g = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)), \quad (17)$$

$z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n)$ — искомый вектор.

После вычисления решения системы (16) $z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n)$ решение уравнения (15) может быть получено по формуле

$$u^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_k H(x, x_k) \varsigma_k + f(x). \quad (18)$$

Теорема 2 (о сходимости метода механических квадратур). Пусть выполнены условия:

- 1) Ядро $H(x, y)$ и правая часть $f(x)$ интегрального уравнения (1) непрерывны.
- 2) Интегральное уравнение (1) однозначно разрешимо.
- 3) Квадратурный процесс сходится.

Тогда

- а) при достаточно больших n системы линейных алгебраических уравнений (16), к которым приводит метод механических квадратур, однозначно разрешимы;
- б) числа обусловленности $\mu_\infty(D)$ матриц этих систем равномерно ограничены;
- в) приближенные решения $u^{(n)}(x)$, построенные по формуле (18), равномерно сходятся к точному решению $u(x)$.

16.2.2. Задание

Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$u(x) - \int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x),$$

используя одну из квадратурных формул:

- 1) Составная формула трапеций.
- 2) Составная формула средних прямоугольников.
- 3) Составная формула Симпсона.
- 4) Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т.д. узлами.
- 5) Составная формула Гаусса с двумя узлами.
- 6) Составная формула Гаусса с тремя узлами.

Количество разбиений в составных формулах рекомендуется удваивать до тех пор, пока значения приближенных решений в точках a , $(a + b)/2$, b не будут совпадать с точностью $\varepsilon = 0.00001$. В формулах Гаусса (не составных) до достижения требуемой точности рекомендуется увеличивать количество узлов на единицу.

Результаты представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

x	a	$(a + b)/2$	b
$u^{(n)}(x)$			
$u^{(2*n)}(x)$			
$u^{(4*n)}(x)$			
\dots			
$u^{(m*n)}(x)$			
$u^{(2*m*n)}(x)$			
$u^{(2*m*n)}(x) - u^{(m*n)}(x)$			
Решение, полученное в 1-ом методе			
Оценка, полученная в 1-ом методе			

Здесь n — начальное количество разбиений в составной формуле, а m такое, что

$$\max_{i=1,2,3} |u^{(2*m*n)}(x_i) - u^{(m*n)}(x_i)| < \varepsilon, \quad x_1 = a, \quad x_2 = (a + b)/2, \quad x_3 = b.$$

Еще раз заметим, что при использовании формул Гаусса (не составных) количество узлов не следует удваивать, а достаточно увеличивать на единицу. Соответственно последнее условие примет вид

$$\max_{i=1,2,3} |u^{(n+m+1)}(x_i) - u^{(n+m)}(x_i)| < \varepsilon, \quad x_1 = a, \quad x_2 = (a + b)/2, \quad x_3 = b.$$

Квадратурные формулы первых четырех методов хорошо известны, указания по построению составных квадратурных формул Гаусса приведены в приложении А.

Для реализации метода составить программу, содержащую подпрограмму, вычисляющую решение в заданных точках методом механических квадратур с n узлами, где n — параметр. Промежуточные результаты должны содержать

- количество узлов квадратурной формулы;
- узлы квадратурной формулы;
- коэффициенты квадратурной формулы;
- матрицу системы относительно значений приближенного решения в узлах и вектор правых частей (только при небольшом числе узлов: 2 или 3);
- решение системы — значения приближенного решения в узлах квадратурной формулы;
- значения решения в точках a , $(a + b)/2$, b ;
- $\max_{i=1,2,3} |u^{(2*m*n)}(x_i) - u^{(m*n)}(x_i)|$
ИЛИ
 $\max_{i=1,2,3} |u^{(n+m+1)}(x_i) - u^{(n+m)}(x_i)| < \varepsilon, \quad x_1 = a, \quad x_2 = (a + b)/2, \quad x_3 = b.$

16.3. Варианты заданий

1. $u(x) - 0.8 \int_0^1 \sin(xy) u(y) dy = x - 0.8$. Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т. д. узлами.
2. $u(x) + 0.1 \int_0^1 \operatorname{sh}(xy^2) u(y) dy = x + 0.1$. Составная формула трапеций.
3. $u(x) - 0.6 \int_0^1 \operatorname{ch}(xy) u(y) dy = x - 0.6$. Составная формула средних прямоугольников.
4. $u(x) + 0.5 \int_0^1 \operatorname{sh}(xy) u(y) dy = x + 0.5$. Составная формула Симпсона.
5. $u(x) - 0.6 \int_0^1 \frac{1}{3+xy^2} u(y) dy = x - 0.6$. Составная формула Гаусса с двумя узлами.
6. $u(x) + 0.5 \int_0^1 \ln(1 + \frac{xy}{3}) u(y) dy = x + 0.5$. Составная формула Гаусса с тремя узлами.
7. $u(x) - 0.5 \int_0^1 \operatorname{th}(xy) u(y) dy = x - 0.5$. Составная формула Симпсона.
8. $u(x) + 0.5 \int_0^1 e^{(x-0.5)y^2} u(y) dy = x + 0.5$. Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т. д. узлами.
9. $u(x) + 0.1 \int_0^1 \sin(x(0.5 + y^2)) u(y) dy = x + 0.1$. Составная формула трапеций.
10. $u(x) - 0.6 \int_0^1 \cos(xy^2) u(y) dy = x - 0.6$. Составная формула средних прямоугольников.

11. $u(x) - 5 \int_0^1 \frac{y \cos(x)}{xy - 2} u(y) dy = 2 + \frac{e^{5x} - 1}{2x}$. Формула Гаусса.
12. $u(x) - 0.7 \int_0^1 \cos(x^2 y) u(y) dy = x - 0.7$. Составная формула Гаусса с двумя узлами.
13. $u(x) - 0.4 \int_0^1 \operatorname{ch}(xy^2) u(y) dy = x - 0.4$. Составная формула трапеций.
14. $u(x) + 0.5 \int_0^1 e^{xy} u(y) dy = x + 0.5$. Составная формула средних прямоугольников.
15. $u(x) - 0.4 \int_0^1 e^{(x-0.5)y} u(y) dy = x - 0.4$. Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т. д. узлами.
16. $u(x) - 0.5 \int_0^1 \frac{1}{3+xy} u(y) dy = x - 0.5$. Составная формула Симпсона.
17. $u(x) - 0.5 \int_0^1 \frac{y}{3 - x * y} u(y) dy = \cos(x) + \frac{\sin(2x)}{x}$. Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т. д. узлами.

17. Метод сеток для решения уравнения параболического типа

17.1. Постановка задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad f(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (2)$$

$$\alpha_1(t)u(0, t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha(t), \quad (3)$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geq 0, \quad |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\beta_1(t)u(1, t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta(t), \quad (4)$$

$$\beta_1(t)\beta_2(t) \geq 0, \quad |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где Lu может иметь один из двух видов:

$$Lu = \begin{cases} \text{а) } a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & a(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \\ \text{б) } \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & p(x) \in C_{[0,1]}^1, \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ b(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}. \end{cases}$$

Требуется найти непрерывное в $\overline{D} = [0, 1] \times [0, T]$ решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и граничным условиям (3)-(4).

17.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора L разностным

Разобьём отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N$, $x_i = i * h$, $i = \overline{0, N}$. Разобьём отрезок $[0, T]$ на M равных частей. Обозначим $\tau = T/M$, $t_k = k * \tau$, $k = \overline{0, M}$. Построим сетку узлов (рис. 1) $\varpi_{\tau h} = \{(x_i, t_k), i = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}$.

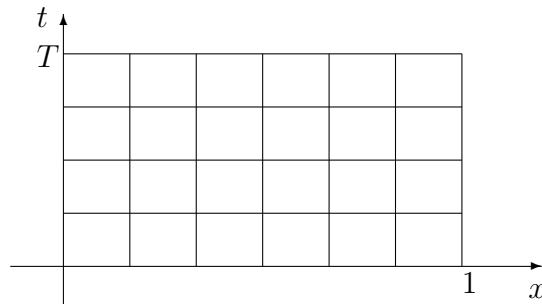


Рис. 1

Приближенное решение поставленной задачи ищется в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h\tau}}$. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k) сеточной функции u , определенной на $\overline{\omega_{h\tau}}$.

Используя аппроксимации дифференциальных выражений разностными, заменяем оператор L разностным оператором:

$$L_h u_i^k = \begin{cases} \text{а) } a(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k, \\ \text{б) } p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k. \end{cases}$$

Здесь $L_h u_i^k$ — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный Lu в точке (x_i, t_k) со вторым порядком аппроксимации, $i = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1, M}$. Предполагается, что точное решение задачи и коэффициенты в операторе L достаточно гладкие, чтобы делать выводы о порядке аппроксимации.

17.3. Явная разностная схема

Аппроксимируем уравнение (1) в узле (x_i, t_{k-1}) :

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (5)$$

Каждое уравнение в (5) содержит решения лишь в четырех точках: u_{i-1}^{k-1} , u_i^{k-1} , u_{i+1}^{k-1} , u_i^k , причем в конфигурации, изображенной на рис. 2.

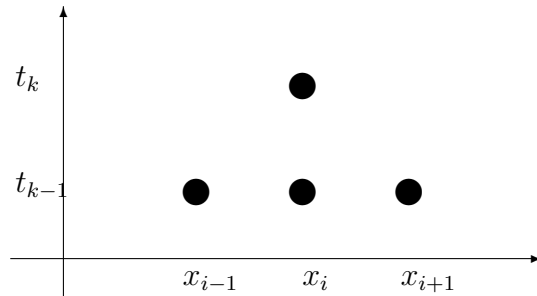


Рис. 2

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (6)$$

Граничные условия (3)-(4) аппроксимируем с порядком $O(h^2)$:

$$\alpha_1(t_k) u_0^k - \alpha_2(t_k) \frac{-3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k}{2h} = \alpha(t_k), \quad (7)$$

$$\beta_1(t_k) u_N^k + \beta_2(t_k) \frac{3u_N^k - 4u_{N-1}^k + u_{N-2}^k}{2h} = \beta(t_k), \quad (8)$$

$k = \overline{1, M}$.

Схема (5)-(8) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$.

Окончательно решение исходной задачи свелось к решению системы (5)-(8), причём, вычислив решение при $k=0$ из (6), далее решение определяется последовательно по слоям во внутренних точках из (5), в граничных из (7)-(8).

Очевидная простота реализации явной разностной схемы «компенсируется» её условной устойчивостью.

Обозначим $A = \max\{a(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ в случае а) или $A = \max\{p(x) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ — в случае б).

Пусть $\nu = \frac{\tau}{h^2}$, тогда условие устойчивости примет вид $A\nu \leq \frac{1}{2}$.

Следует заметить, что данное условие устойчивости справедливо только для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (9)$$

но оно может быть использовано и при $b(x, t) \neq 0$, $c(x, t) \neq 0$, принимающих “небольшие” значения.

Порядок вычисления решения

- 1) Из (6) находим u_i^0 , $i = \overline{0, N}$.
- 2) Из (5) находим $u_i^k = u_i^{k-1} + \tau(L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}))$, $i = \overline{1, N-1}$ при $k = 1$.
- 3) Из (7) находим u_0^k при $k = 1$.
- 4) Из (8) находим u_N^k при $k = 1$.

Тем самым решение при $k = 1$ найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока $k \leq M$.

17.4. Схема с весами

Пусть σ — вещественный параметр.

Рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем:

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h(\sigma u_i^k + (1 - \sigma)u_i^{k-1}) + f(x_i, \bar{t}_k), \quad i = \overline{1, N-1} \quad k = \overline{1, M}. \quad (10)$$

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (11)$$

Для упрощения алгоритма производные в краевых условиях (3)-(4) аппроксимируем с первым порядком:

$$\alpha_1(t_k)u_0^k - \alpha_2(t_k)\frac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha(t_k), \quad (12)$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} = \beta(t_k). \quad (13)$$

Рассмотрим различные значения параметра σ .

1) $\sigma = 0, \overline{t_k} = t_{k-1}$.

В этом случае разностная схема явная, условно устойчивая и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$. Порядок действий указан выше в п. 3.

2) Если $\sigma \neq 0$, то схема (10)-(13) называется неявной двуслойной схемой. Если $\sigma \neq 1$, то каждое уравнение в (10) содержит решения в шести точках: $u_{i-1}^{k-1}, u_i^{k-1}, u_{i+1}^{k-1}, u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k$, причем в следующей конфигурации:

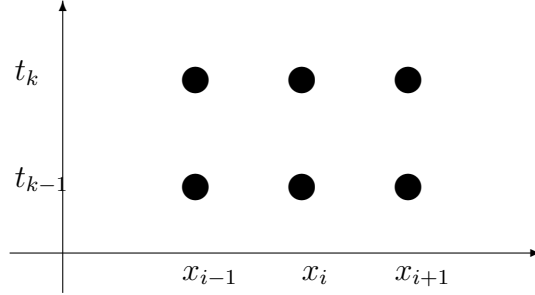


Рис. 3

Так как к моменту определения решения на k -ом слое решение на предыдущем $(k-1)$ -ом слое уже известно, систему (10) перепишем следующим образом:

$$\sigma L_h u_i^k - \frac{1}{\tau} u_i^k = G_i^k, \quad (14)$$

где

$$G_i^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - (1 - \sigma) L_h u_i^{k-1} - f(x_i, \overline{t_k}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (15)$$

Граничные условия (12)-(13) приводим к виду

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^k + C_0 u_1^k &= G_0^k, \\ A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k &= G_N^k. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом k -ом слое в данном случае приходится решать систему $(N+1)$ порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида⁵:

$$\begin{array}{ccc} -B_0 u_0^k & +C_0 u_1^k & = G_0^k, \\ A_i u_{i-1}^k & -B_i u_i^k & +C_i u_{i+1}^k = G_i^k, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ A_N u_{N-1}^k & -B_N u_N^k & = G_N^k, \end{array} \quad (16)$$

$k = \overline{1, M}$.

Для решения системы используется метод прогонки.

Порядок вычисления решения

- 1) Из (11) находим $u_i^0, i = \overline{0, N}$.
- 2) Из (16) находим $u_i^k, i = \overline{0, N}$ при $k = 1$.

⁵Коэффициенты A, B, C в линейной системе (16) могут зависеть от номера слоя k , но для краткости верхний индекс k здесь и далее опущен.

Тем самым решение при $k = 1$ найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока $k \leq M$.

Рекомендуемые значения $\sigma = 1$, $\sigma = 1/2$.

При $\sigma = 1$, $\bar{t}_k = t_k$ получаем разностную схему с опережением или чисто неявную схему с четырехточечным шаблоном (рис. 4).

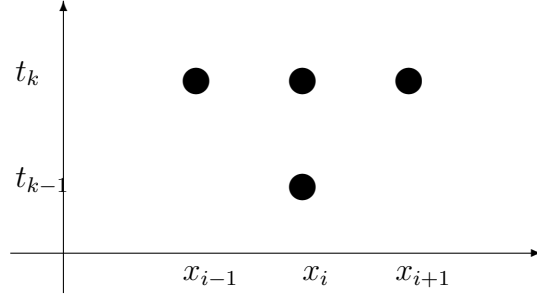


Рис. 4

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$.

При $\sigma = 1/2$, $\bar{t}_k = t_k - \tau/2$ получаем разностную схему Кранка-Никольсона с шести-точечным шаблоном (рис. 5).

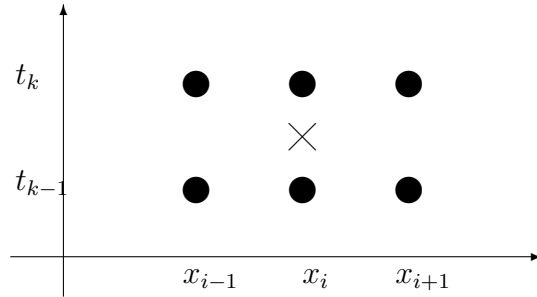


Рис. 5

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau^2 + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau^2 + h)$.

Второй порядок аппроксимации по времени достигается за счет того, что аппроксимация уравнения (1) выполняется в точке $(x_i, t_k - \tau/2)$, отмеченной на рисунке крестиком.

Замечание

Пусть в уравнении (1)

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

а граничные условия (3)-(4) имеют вид

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t).$$

Рассмотрим разностную схему

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h(\sigma u_i^k + (1 - \sigma)u_i^{k-1}) + \Phi(x_i, t_{k-\frac{1}{2}}), \quad i = \overline{1, N-1} \quad k = \overline{1, M}, \quad (17)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad (18)$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_N^k = \beta(t_k), \quad k = \overline{1, M}, \quad (19)$$

где свободный член

$$\Phi(x_i, t_{k-\frac{1}{2}}) = f_i^{k-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{12} L_h f_i^{k-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} f_i^{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} (f_{i-1}^{k-\frac{1}{2}} + f_{i+1}^{k-\frac{1}{2}}), \quad t_{k-\frac{1}{2}} = t_k - \frac{\tau}{2}. \quad (20)$$

Пусть $C_n^m(\overline{D})$ — класс функций, имеющих n производных по x и m производных по t , непрерывных в $\overline{D} = [0, 1] \times [0, T]$.

Тогда, если $u \in C_6^3$, разностная схема (17)-(19) при $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(h^4 + \tau^2)$ ([7, гл. V, §1. п. 3]) и называется схемой повышенного порядка точности.

Упражнение. Какие предположения необходимо сделать о гладкости точного решения $u(x, t)$ и функции $p(x)$ для обеспечения объявленных порядков аппроксимации в рассматриваемых разностных схемах?

17.5. Задание

Найти решение задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0.1, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left(\alpha_1(t)u - \alpha_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1, \\ \left(\beta_1(t)u + \beta_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} &= \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1, \end{aligned}$$

используя различные разностные схемы:

- явную схему порядка $O(h^2 + \tau)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- схему с весами при $\sigma = 0$, $\sigma = 1$, $\sigma = 1/2$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h)$.

По решению задачи должен быть представлен отчет, содержащий:

- 1) Алгоритм решения задачи.
- 2) Тестирование алгоритма на решениях, для которых разностная схема точно аппроксимирует дифференциальную задачу.
- 3) Тестирование алгоритма на решении $u(x, t) = x^3 + t^3$, на котором разностная схема неточно аппроксимирует дифференциальную задачу.

- 4) Таблицы решения на “крупной” сетке независимо от шагов по t и x , с которыми строится решение, следующего вида ($N = 5, 10, 20$)⁶:

Таблица 1

x/t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.02						
0.04						
0.06						
0.08						
0.1						

- 5) Таблицы, характеризующие точность решения и внутреннюю сходимость, следующего вида:

Явная схема

Таблица 2

h	τ	$ J_{ex} - u^{(h,\tau)} $	$ u^{(h,\tau)} - u^{(h*2,\tau)} $
0.2			—
0.1			
0.05			

Здесь τ , τ_1 выбираются из условия устойчивости явной схемы.

J_{ex} — точное решение.

$$||V|| = \max |V_{ik}|, \quad i = \overline{0, 5}, \quad k = \overline{0, 5}.$$

Неявная схема

Таблица 3

h	τ	$ J_{ex} - u^{(h,\tau)} $	$ u^{(h,\tau)} - u^{(h*2,\tau)} $
0.2			—
0.1			
0.05			

Здесь $\tau = 0.1/M$, $M = 10, 100$ (предусмотреть возможность менять M).

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть в приложении Б.

⁶В качестве M следует брать наименьшее из чисел 5, 10, 20, 40, 80 и т. д., удовлетворяющее условию устойчивости при данном N

17.6. Варианты задач

Свободные члены в уравнении, начальных и граничных условиях следует получать, подставляя точное решение, на котором тестируется задача.

Вариант 1

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + xu + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 3

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 4

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 5

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$

Вариант 6

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$

Вариант 7

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$

Вариант 8

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$

Вариант 9

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x u + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(0, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$

Вариант 10

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$

Вариант 11

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$

Вариант 12

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$

Вариант 13

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$

Вариант 14

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 15

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) + 2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 16

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + 2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 17

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 18

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - 2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

18. Метод сеток для решения уравнения гиперболического типа

18.1. Постановка задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad f(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \psi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (3)$$

$$\alpha_1(t)u(0, t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha(t), \quad (4)$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geq 0, \quad |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\beta_1(t)u(1, t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta(t), \quad (5)$$

$$\beta_1(t)\beta_2(t) \geq 0, \quad |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где Lu может иметь один из двух видов:

$$Lu = \begin{cases} \text{а) } a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & a(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \\ \text{б) } \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & p(x) \in C_{[0,1]}^1, \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ b(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}. \end{cases}$$

Требуется найти непрерывное в $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2)-(3) и граничным условиям (4)-(5).

18.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора L разностным

Разобьём отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N$, $x_i = i * h$, $i = \overline{0, N}$. Разобьём отрезок $[0, T]$ на M равных частей. Обозначим $\tau = T/M$, $t_k = k * \tau$, $k = \overline{0, M}$. Построим сетку узлов (рис. 1) $\varpi_{\tau h} = \{(x_i, t_k), i = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}$.

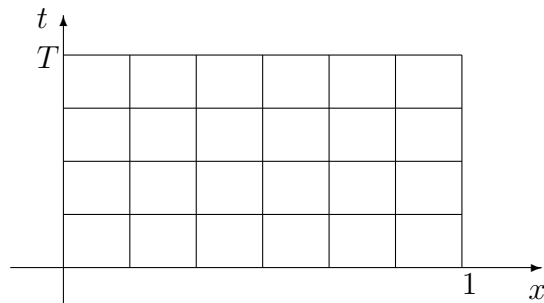


Рис. 1

Приближенное решение поставленной задачи ищется в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h\tau}}$. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k) сеточной функции u , определенной на $\overline{\omega_{h\tau}}$.

Используя аппроксимации дифференциальных выражений разностными, заменяем оператор L разностным оператором:

$$L_h u_i^k = \begin{cases} \text{а) } a(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k, \\ \text{б) } p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k. \end{cases}$$

Здесь $L_h u_i^k$ — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный Lu в точке (x_i, t_k) со вторым порядком аппроксимации, $i = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1, M}$. Предполагается, что точное решение задачи и коэффициенты в операторе L достаточно гладкие, чтобы делать выводы о порядке аппроксимации.

18.3. Явная разностная схема

Аппроксимируем уравнение (1) в узле (x_i, t_k) :

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = L_h u_i^k + f(x_i, t_k), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}. \quad (6)$$

Каждое уравнение в (6) содержит решения лишь в пяти точках: u_i^{k-1} , u_{i-1}^k , u_i^k , u_{i+1}^k , u_i^{k+1} , причем в конфигурации, изображенной на рис. 2.

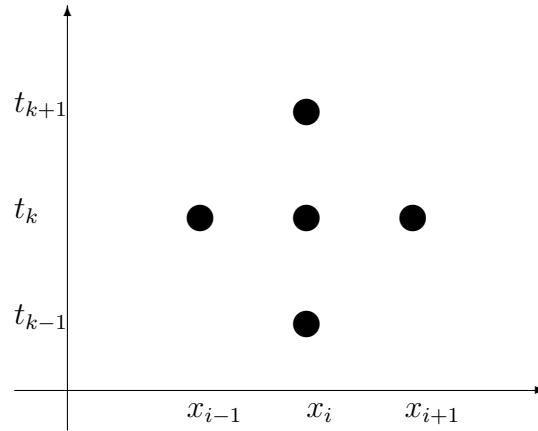


Рис. 2

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (7)$$

Начальное условие (3) аппроксимируем вначале с порядком $O(\tau)$ следующим образом:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (8)$$

Граничные условия (4)-(5) аппроксимируем с порядком $O(h^2)$:

$$\alpha_1(t_{k+1})u_0^{k+1} - \alpha_2(t_{k+1})\frac{-3u_0^{k+1} + 4u_1^{k+1} - u_2^{k+1}}{2h} = \alpha(t_{k+1}), \quad (9)$$

$$\beta_1(t_{k+1})u_N^{k+1} + \beta_2(t_{k+1})\frac{3u_N^{k+1} - 4u_{N-1}^{k+1} + u_{N-2}^{k+1}}{2h} = \beta(t_{k+1}), \quad (10)$$

$k = \overline{1, M-1}$.

Схема (6)-(10) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$.

Окончательно решение исходной задачи свелось к решению системы (6)-(10), причем, вычислив решение при $k = 0$ из (7), при $k = 1$ из (8), далее решение определяется последовательно по слоям во внутренних точках из (6), в граничных из (9)-(10).

Очевидная простота реализации явной разностной схемы «компенсируется» её условной устойчивостью.

Обозначим $A = \max\{a(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ в случае а)
или $A = \max\{p(x) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ — в случае б).

Пусть $\nu = \frac{\tau}{h}$, тогда условие устойчивости: $\sqrt{A} \cdot \nu \leq 1$.

Следует заметить, что данное условие устойчивости справедливо только для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (11)$$

но оно может быть использовано и при $b(x, t) \neq 0$, $c(x, t) \neq 0$, принимающих “небольшие” значения.

Порядок вычисления решения

- 1) Из (7) находим u_i^0 , $i = \overline{0, N}$.
- 2) Из (8) находим u_i^1 , $i = \overline{0, N}$.
- 3) Из (6) находим $u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} + \tau^2(L_h u_i^k + f(x_i, t_k))$, $i = \overline{1, N-1}$ при $k = 1$.
- 4) Из (9) находим u_0^{k+1} при $k = 1$.
- 5) Из (10) находим u_N^{k+1} при $k = 1$.

Тем самым решение при $k = 1$ найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока $k \leq M - 1$.

18.4. Схема с весами

Пусть σ — вещественный параметр.

Рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем:

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = L_h(\sigma u_i^{k+1} + (1 - 2\sigma)u_i^k + \sigma u_i^{k-1}) + f(x_i, t_k), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (12)$$

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (13)$$

Начальное условие (3) аппроксимируем вначале с порядком $O(\tau)$ следующим образом:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (14)$$

Для упрощения алгоритма производные в краевых условиях (4)-(5) аппроксимируем с первым порядком:

$$\alpha_1(t_k)u_0^{k+1} - \alpha_2(t_{k+1})\frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} = \alpha(t_{k+1}), \quad (15)$$

$$\beta_1(t_{k+1})u_N^{k+1} + \beta_2(t_{k+1})\frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} = \beta(t_{k+1}). \quad (16)$$

Рассмотрим различные значения параметра σ .

1) $\sigma = 0$.

В этом случае разностная схема явная, условно устойчивая и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях (4)-(5) не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$. Шаблон разностной схемы приведен на рис. 2. Порядок действий указан выше в п. 3.

2) Если $\sigma \neq 0$, то схема (12)-(15) называется неявной трехслойной схемой. Если $\sigma \neq 1/2$, то каждое уравнение в (12) содержит решения в девяти точках: u_{i-1}^{k-1} , u_i^{k-1} , u_{i+1}^{k-1} , u_{i-1}^k , u_i^k , u_{i+1}^k , u_{i-1}^{k+1} , u_i^{k+1} , u_{i+1}^{k+1} , причем конфигурации, изображенной на рис. 3:

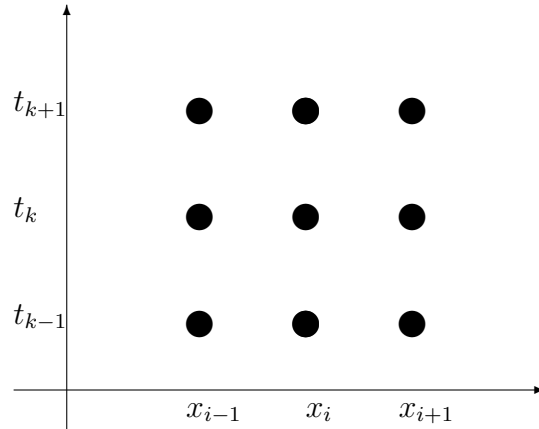


Рис. 3

Так как к моменту определения решения на $(k+1)$ -ом слое решение на предыдущих слоях $(k-1)$ и k уже известно, систему (12) перепишем следующим образом:

$$\sigma L_h u_i^{k+1} - \frac{1}{\tau^2} u_i^{k+1} = G_i^{k+1}, \quad (17)$$

где

$$G_i^{k+1} = \frac{-2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} - (1 - 2\sigma)L_h u_i^k - \sigma L_h u_i^{k-1} - f(x_i, t_k), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (18)$$

$k = \overline{1, M-1}$.

Граничные условия (15)-(15) приводим к виду

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^{k+1} + C_0 u_1^{k+1} &= G_0^{k+1}, \\ A_N u_{N-1}^{k+1} - B_N u_N^{k+1} &= G_N^{k+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом $(k+1)$ -ом слое в данном случае приходится решать систему $(N+1)$ порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида⁷:

$$\begin{array}{rcccl} & -B_0 u_0^{k+1} & +C_0 u_1^{k+1} & = & G_0^{k+1}, \\ A_i u_{i-1}^{k+1} & -B_i u_i^{k+1} & +C_i u_{i+1}^{k+1} & = & G_i^{k+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ A_N u_{N-1}^{k+1} & -B_N u_N^{k+1} & & = & G_N^{k+1}, \end{array} \quad (19)$$

$$k = \overline{1, M-1}.$$

Для решения системы (19) следует использовать метод прогонки.

Порядок вычисления решения

- 1) Из (13) находим u_i^0 , $i = \overline{0, N}$.
- 2) Из (13) находим u_i^1 , $i = \overline{0, N}$.
- 3) Из (19) находим u_i^{k+1} , $i = \overline{0, N}$ при $k = 1$.

Тем самым решение на втором слое найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 3 до тех пор, пока $k \leq M-1$.

Рекомендуемые значения $\sigma = 1/2$, $\sigma = 1/4$.

При $\sigma = 1/2$ получаем неявную разностную схему с семиточечным шаблоном:

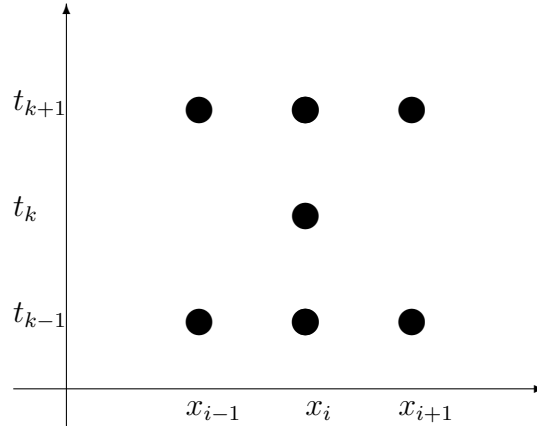


Рис. 4

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях (4)-(5) не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$.

При $\sigma = 1/4$ получаем разностную схему с девятиточечным шаблоном, изображенным на рис. 3, устойчивую и имеющую тот же порядок аппроксимации.

⁷Коэффициенты A, B, C в линейной системе (19) могут зависеть от номера слоя k , но для краткости верхний индекс $k+1$ здесь и далее опущен.

Аппроксимация начального условия (3) с порядком $O(\tau^2)$

Уравнение (1) аппроксимируется разностными уравнениями со вторым порядком по времени $O(\tau^2)$. В предыдущем рассмотрении начальное условие (3) аппроксимировалось лишь с первым порядком.

Рассмотрим два варианта аппроксимации начального условия (3) со вторым порядком по времени. В обоих вариантах предполагаем, что решение может быть продолжено достаточно гладким образом за пределы области, указанной в (1) настолько, насколько это требуется используемым алгоритмом.

1) Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2} (L\varphi|_{x=x_i} + f(x_i, 0)). \quad (20)$$

Здесь

$$L\varphi = \begin{cases} \text{а) } a(x, 0) \frac{d^2\varphi}{dx^2} + b(x, 0) \frac{d\varphi}{dx} + c(x, 0)\varphi, \\ \text{б) } \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) + b(x, 0) \frac{d\varphi}{dx} + c(x, 0)\varphi. \end{cases}$$

2) Второй способ связан со сдвигом сетки по переменной t . Он рассматривался при решении краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Упражнение. Какие предположения необходимо сделать о гладкости точного решения $u(x, t)$ и функции $p(x)$ для обеспечения объявленных порядков аппроксимации в рассматриваемых разностных схемах?

18.5. Задание

Найти решение задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\left(\alpha_1(t)u - \alpha_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\left(\beta_1(t)u + \beta_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

используя различные разностные схемы:

- явную схему порядка $O(h^2 + \tau)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- явную схему порядка $O(h^2 + \tau^2)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;

- схему с весами порядка $O(h + \tau)$ и $O(h + \tau^2)$ при $\sigma = 0$, $\sigma = 1/2$, $\sigma = 1/4$ (с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h)$).

По решению задачи должен быть представлен отчет, содержащий:

- 1) Алгоритм решения задачи.
- 2) Тестирование алгоритма на решениях, для которых разностная схема точно аппроксимирует дифференциальную задачу.
- 3) Тестирование алгоритма на решении $u(x, t) = x^4 + t^3$, на котором разностная схема неточно аппроксимирует дифференциальную задачу.
- 4) Таблицы решения на «крупной» сетке независимо от шагов по t и x , с которыми строится решение, следующего вида ($N = 5, 10, 20$)⁸:

Таблица 1

x/t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.2						
0.4						
0.6						
0.8						
1.0						

- 5) Таблицы, характеризующие точность решения и внутреннюю сходимость, следующего вида:

Явная схема

Таблица 2

h	τ	$\ J_{ex} - u^{(h,\tau)}\ $	$\ u^{(h,\tau)} - u^{(h*2,\tau_1)}\ $
0.2			—
0.1			
0.05			

Здесь τ , τ_1 выбираются из условия устойчивости явной схемы.

J_{ex} — точное решение.

$$\|V\| = \max |V_{ik}|, \quad i = \overline{0, 5}, k = \overline{0, 5}.$$

Неявная схема

Таблица 3

h	τ	$\ J_{ex} - u^{(h,\tau)}\ $	$\ u^{(h,\tau)} - u^{(h*2,\tau)}\ $
0.2			—
0.1			
0.05			

Здесь $\tau = 1/M$, $M = 10, 100$ (предусмотреть возможность менять M).

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть в приложении Б.

⁸В качестве M следует брать наименьшее из чисел 5, 10, 20, 40, 80 и т. д., удовлетворяющее условию устойчивости при данном N

18.6. Варианты задач

Свободные члены в уравнении, начальных и граничных условиях следует получать, подставляя точное решение, на котором тестируется задача.

Вариант 1

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + xu + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 3

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 5

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 8

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 9

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x u + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(0, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 11

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 12

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left((x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 13

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Вариант 14

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

19. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа. Итерационные методы решений сеточных уравнений

19.1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения:

$$-Lu = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$u = \mu(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Пусть $\overline{G} = G + \Gamma = \{0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$ — прямоугольник, а

$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ — достаточно гладкие функции, $0 < c_1 \leq p(x, y) \leq c_2$, $0 < d_1 \leq q(x, y) \leq d_2$, где c_1 , c_2 , d_1 , d_2 — постоянные.

19.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений

Разобьем отрезок $[0, l_x]$ на N равных частей. Обозначим $h_x = l_x/N$, $x_i = ih_x$, $0 \leq i \leq N$.

Разобьем отрезок $[0, l_y]$ на M равных частей. Обозначим $h_y = l_y/M$, $y_i = ih_y$, $0 \leq i \leq M$.

Построим сетку узлов (рис. 1):

$$\overline{\omega_{h_x h_y}} = \{(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M\}.$$

Узлы (x_i, y_j) , $1 \leq i \leq N-1$; $1 \leq j \leq M-1$ — внутренние, остальные, лежащие на границе прямоугольника, — граничные. Внутренний узел (x_i, y_j) будем называть приграничным, если хотя бы один из узлов (x_{i-1}, y_j) , (x_{i+1}, y_j) , (x_i, y_{j-1}) , (x_i, y_{j+1}) является граничным. Приграничные узлы отмечены на рисунке кружочками.

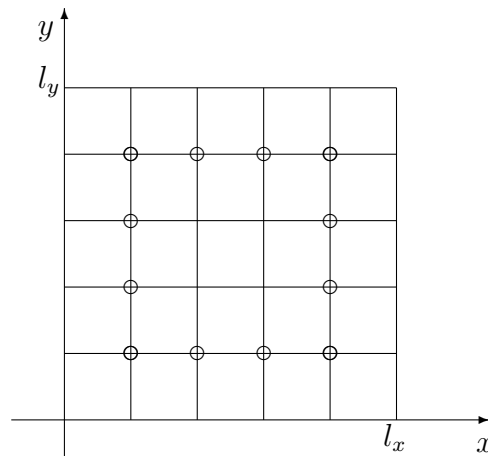


Рис. 1

19.3. Разностная аппроксимация задачи Дирихле

Обозначим $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$. Заменяем оператор L во всех внутренних узлах разностным оператором

$$L_h u_{ij} = p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_x^2} + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_y^2}, \quad (3)$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

Здесь использованы обозначения:

$$\begin{aligned} p_{i+\frac{1}{2}j} &= p(x_i + h_x/2, y_j), \quad p_{i-\frac{1}{2}j} = p(x_i - h_x/2, y_j), \\ q_{ij+\frac{1}{2}} &= q(x_i, y_j + h_y/2), \quad q_{ij-\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j - h_y/2). \end{aligned}$$

Если $u(x, y)$ имеет не менее четырех непрерывных ограниченных в рассматриваемой области производных по x и по y , а $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — не менее трех, то разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный L со вторым порядком, т. е.

$$Lu - L_h u = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_x^2 + h_y^2.$$

Задаче (1)-(2) ставим в соответствие разностную задачу: найти сеточную функцию, удовлетворяющую во внутренних узлах уравнениям

$$-L_h u_{ij} = f_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1, \quad f_{ij} = f(x_i, y_j) \quad (4)$$

и принимающую в граничных узлах заданные значения

$$\begin{cases} u_{i0} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{iM} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{0j} = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq M-1; \\ u_{Nj} = \mu(l_x, y_j), & 1 \leq j \leq M-1. \end{cases} \quad (5)$$

При достаточной гладкости функций $u(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ разностная схема (4)-(5) имеет второй порядок точности. Для исследования разностного оператора этой задачи следует в приграничных уравнениях исключить неизвестные u_{0j} , u_{Nxj} , $1 \leq j \leq M-1$ и u_{i0} , u_{iN} , $1 \leq i \leq N-1$. Итак, решение задачи (1)-(2) свелось к решению линейной системы порядка $(N-1) \cdot (M-1)$. Линейную систему запишем в виде

$$AU = F, \quad (6)$$

где $U = (u_{1,1}, \dots, u_{1,M-1}, \dots, u_{N-1,1}, \dots, u_{N-1,M-1})^T$, а вектор F отличается от вектора f в (4) лишь в приграничных узлах.

Отметим следующие особенности матрицы системы A :

- собственные числа матрицы находятся в диапазоне $[\delta, \Delta]$, где

$$\delta = c_1 \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2l_x} + d_1 \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}, \quad \Delta = c_2 \frac{4}{h_x^2} \cos^2 \frac{\pi h_x}{2l_x} + d_2 \frac{4}{h_y^2} \cos^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}. \quad (7)$$

Заметим, что при $p(x, y) \equiv 1$, $q(x, y) \equiv 1$, $l_x = l_y = 1$, $h_x = h_y = h$ (такую задачу в дальнейшем будем называть простейшей)

$$\delta = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2};$$

- положительную определенность;
- плохую обусловленность, т. е. отношение максимального собственного числа матрицы к минимальному очень велико и является величиной $O(1/h^2)$;
- большой порядок;
- большое количество нулевых элементов;
- специфическую ленточную структуру — блочный трехдиагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} C & I & O & \dots & O \\ I & C & I & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & I & C & I \\ O & \dots & O & I & C \end{pmatrix},$$

где матрица C является трехдиагональной, I — диагональной, O имеет лишь нулевые элементы.

Пусть $p(x, y) \equiv 1$, $q(x, y) \equiv 1$, $h_x = h_y = h$, тогда

$$C = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad I = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы могут быть использованы, например, следующие методы:

- 1) Метод простой итерации.
- 2) Метод итерации с оптимальным параметром.
- 3) Метод Зейделя.
- 4) Метод верхней релаксации.
- 5) Итерационный метод с оптимальным чебышевским набором параметров.
- 6) Попеременно треугольный итерационный метод.
- 7) Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров.
- 8) Итерационный метод переменных направлений.
- 9) Метод покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.
- 10) Метод расщепления предиктор-корректор.
- 11) Метод переменных направлений Дугласа-Рэкфорда.

19.4. Расчетные формулы методов

Заметим, что, как видно будет ниже, в расчетных формулах методов нигде не используются элементы матрицы A , поэтому при численной реализации алгоритма строить матрицу A , хранить её в памяти как двумерный массив большого порядка было бы крайне нецелесообразно.

19.4.1. Метод простой итерации

Систему $AU = F$ сводим к системе вида $U = HU + g$ так, чтобы $\rho(H) < 1$, где $\rho(H)$ — максимальное по модулю собственное число матрицы H (спектральный радиус матрицы). Пусть $H = E - D^{-1}A$, $g = D^{-1}F$, где D — диагональная часть матрицы A . В простейшем случае (коэффициенты уравнения постоянные, сетка квадратная) система примет следующий вид:

$$u_{ij} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (8)$$

Расчетная формула метода итерации $U^{(k)} = HU^{(k-1)} + g$ или в простейшем случае покомпонентно имеет следующий вид:

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{u_{i-1j}^{(k-1)} + u_{i+1j}^{(k-1)} + u_{ij-1}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k-1)} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (9)$$

Расчетная формула метода простой итерации в общем случае:

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j} u_{i-1j}^{(k-1)}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j} u_{i+1j}^{(k-1)}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}} u_{ij-1}^{(k-1)}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}} u_{ij+1}^{(k-1)}}{h_y^2} + f_{ij}}{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}}}{h_y^2}}, \quad (10)$$

где $1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1$.

Необходимое и достаточное условие сходимости метода $\rho(H) < 1$ выполнено. Это легко показать в простейшем случае, т. е. при

$$\begin{aligned} p(x, y) &\equiv 1, \quad q(x, y) \equiv 1, \quad l_x = l_y = 1, \quad h_x = h_y = h \\ \lambda_{\max}(H) &= 1 - \frac{h^2}{4} \lambda_{\min}(A) = 1 - \frac{h^2}{4} \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2} = \cos \pi h, \\ \lambda_{\min}(H) &= 1 - \frac{h^2}{4} \lambda_{\max}(A) = 1 - \frac{h^2}{4} \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi h}{2} = -\cos \pi h. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в простейшем случае $\lambda_{\max}(H) = -\lambda_{\min}(H)$.

Скорость сходимости метода определяется спектральным радиусом $\rho(H)$.

Ввиду того, что $\rho(H) = 1 - O(h^2)$, при уменьшении шага сетки h сходимость замедляется, и близость двух соседних приближений (характеристика 5.6 в п.6), часто ошибочно воспринимаемая за признак хорошей точности, говорит лишь о медленной сходимости метода.

В качестве апостериорной оценки погрешности здесь допустимо использовать следующую:

$$\|U^{(k)} - u^*\| \leq \frac{\rho(H)}{1 - \rho(H)} \|U^{(k)} - U^{(k-1)}\|. \quad (11)$$

В общем случае в методе с оптимальным параметром $\rho(H) = \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta}$ или в обозначении

$$\xi = \frac{\delta}{\Delta} \quad \rho(H) = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}.$$

19.4.2. Метод итерации с оптимальным параметром

Как известно, указанному условию сходимости ($\rho(H) < 1$) будет удовлетворять система вида $U = U + \tau(F - AU)$, где $\tau = 2/(\Delta + \delta)$, т. е. при $H = E - \tau A$, $g = \tau F$, τ — оптимальный параметр. Для простейшего случая $\tau = h^2/4$ и система будет иметь следующий вид:

$$u_{ij} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (12)$$

В простейшем случае метод итерации с оптимальным параметром совпадает с методом простой итерации.

В общем случае расчетная формула метода итерации с оптимальным параметром имеет вид:

$$u_{ij}^{(k)} = u_{ij}^{(k-1)} + \tau \left(p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^{(k-1)} - u_{ij}^{(k-1)}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^{(k-1)} - u_{i-1j}^{(k-1)}}{h_x^2} + \right. \\ \left. + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^{(k-1)} - u_{ij}^{(k-1)}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^{(k-1)} - u_{ij-1}^{(k-1)}}{h_y^2} + f_{ij} \right). \quad (13)$$

19.4.3. Метод Зейделя (Некрасова)

Известно, что если матрица A положительно определена, то метод Некрасова для системы $AU = F$ сходится (см. [8], гл. III, §33), причем в простейшем случае вдвое быстрее, чем метод простой итерации (см. [8], гл. III, §36), т. е. характеристика 5.8 в п.6 сходится к $\rho^2(H)$.

Расчетная формула метода Зейделя в простейшем случае имеет вид

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{u_{i-1j}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k-1)} + u_{ij-1}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k-1)} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (14)$$

В общем случае расчетная формула примет вид

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j} u_{i-1j}^{(k)}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j} u_{i+1j}^{(k-1)}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}} u_{ij-1}^{(k)}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}} u_{ij+1}^{(k-1)}}{h_y^2} + f_{ij}}{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}}}{h_y^2}}, \quad (15)$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

19.5. Двухслойные итерационные схемы

Рассмотрим каноническую форму двухслойной итерационной схемы

$$B_k \frac{U^{(k)} - U^{(k-1)}}{\tau_k} + AU^{(k-1)} = F, \quad (16)$$

откуда

$$U^{(k)} = U^{(k-1)} - \tau_k B_k^{-1} (AU^{(k-1)} - F)$$

или

$$U^{(k)} = U^{(k-1)} - \tau_k B_k^{-1} r^{(k-1)}, \quad (17)$$

где $r^{(k-1)} = (AU^{(k-1)} - F)$ — невязка $U^{(k-1)}$.

Расчетные формулы метода простой итерации, метода итерации с оптимальным параметром и метода Зейделя, рассмотренные выше, а также метода верхней релаксации, метода с оптимальным чебышевским набором параметров, попеременно треугольного итерационного метода могут быть получены как частные случаи из (17).

19.5.1. Метод простой итерации

Полагаем в (17) $B_k = D$, где D диагональная часть матрицы A , $\tau_k = 1$. После приведения подобных членов получим (10).

19.5.2. Метод итерации с оптимальным параметром

Полагаем в (17) $B_k = E$, $\tau_k = \tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\Delta + \delta}$ и получаем расчетную формулу метода (13).

19.5.3. Метод Зейделя

Полагаем в (17) $B = L + D$, где L и D нижняя треугольная и диагональная части матрицы A , $\tau_k = 1$. После приведения подобных членов получим (15).

19.5.4. Метод верхней релаксации

Полагаем в (17) $B = \omega L + D$, где L и D нижняя треугольная и диагональная части матрицы A , $\tau_k = \omega$. В общем случае расчетная формула примет вид

$$u_{ij}^{(k)} = u_{ij}^{(k-1)} + \frac{f_{ij} + p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^{(k-1)} - u_{ij}^{(k-1)}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^{(k-1)} - u_{i-1j}^{(k-1)}}{h_x^2} + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^{(k-1)} - u_{ij}^{(k-1)}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^{(k-1)} - u_{ij-1}^{(k-1)}}{h_y^2}}{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}}}{h_y^2}},$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1. \quad (18)$$

В простейшем случае

$$u_{ij}^{(k)} = u_{ij}^{(k-1)} + \omega \frac{h^2 f_{ij} + u_{i-1j}^{(k-1)} + u_{i+1j}^{(k-1)} + u_{ij-1}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k-1)} - 4u_{ij}^{(k-1)}}{4}, \quad (19)$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

Метод будет сходиться, если матрица A симметричная, положительно определенная и кроме того $0 < \omega < 2$.

Быстрота сходимости релаксационного циклического процесса определяется наибольшим модулем собственных значений матрицы $S = (D + \omega L)^{-1}(D - \omega D - \omega R)$, где D , L и R диагональная, поддиагональная и наддиагональная части матрицы A . Оптимальным значением ω является

$$\omega_{\text{опт}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(H)}}. \quad (20)$$

Тогда спектральный радиус матрицы $S_{\omega_{\text{опт}}}$ будет равен $\omega_{\text{опт}} - 1$ (см. [8], гл. III, §36). Если же $\rho(H)$ неизвестно, $\omega_{\text{опт}}$ определяют экспериментально. Определив $\omega_{\text{опт}}$ на крупной сетке, можно приближенно получить его значение на других сетках, используя тот

факт, что $\omega_{\text{опт}} \approx 2 - Ch$, где постоянная C не зависит от шага сетки. Затем уточнить. В численных результатах следует привести значение $\omega_{\text{опт}}$ и убедиться, что оно является оптимальным, т. е. реализовать алгоритм, например, с $\omega_1 = \omega_{\text{опт}} - 0.1$ и $\omega_2 = \omega_{\text{опт}} + 0.1$. Сравнить результаты. Для простейшей задачи

$$\omega_{\text{опт}} = \frac{2}{1 + \sin(\pi h)}, \quad \rho(S_{\omega_{\text{опт}}}) = \frac{1 - \sin(\pi h)}{1 + \sin(\pi h)} \approx 1 - 2\pi h.$$

19.5.5. Метод с оптимальным чебышевским набором параметров

Этот метод (см. [7], гл. X, §2, п.3) может быть применен, если матрица A симметричная и положительно определенная. Пусть $0 < \delta \leq \lambda(A) \leq \Delta$. Полагаем в (17) $B = E$,

$$\tau_k = \frac{2}{\Delta + \delta + (\Delta - \delta) \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}. \quad (21)$$

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом. Для упорядочения итерационных параметров надо построить последовательность нечетных чисел $\Theta_n = \{\Theta_n(1), \Theta_n(2), \dots, \Theta_n(n)\}$, таких что $1 \leq \Theta_n(i) \leq 2n - 1$, и параметры τ_k вычислять по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{\Delta + \delta + (\Delta - \delta) \sigma_k}, \quad \sigma_k = \cos \frac{\theta_n(k)}{2n} \pi, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (22)$$

Рассмотрим способ упорядочения Θ_n для случая, когда n есть степень двойки: $n = 2^p$, $p > 0$. Считая, что $\Theta_1 = \{1\}$, поэтапно вычисляются $\Theta_2, \Theta_4, \dots, \Theta_{2^p}$ следующим образом: $\Theta_{2m}(2i - 1) = \Theta_m(i)$, $\Theta_{2m}(2i) = 4m - \Theta_{2m}(2i - 1)$, $1 \leq i \leq m$; $1 \leq m \leq 2^p - 1$, так что $\Theta_2 = \{1, 3\}$, $\Theta_4 = \{1, 7, 3, 5\}$, $\Theta_8 = \{1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11\}$, $\Theta_{16} = \{1, 31, 15, 17, 7, 25, 9, 23, 3, 29, 13, 19, 5, 27, 11, 21\}$ (см. [7], гл. X, §2, п.7).

19.5.6. Попеременно-треугольный итерационный метод

Представим ([7], гл. X, §3) матрицу A в виде суммы двух треугольных матриц R и R^T :

$$R + R^T = A, \quad R^* = R^T. \quad (23)$$

Определим матрицу R по правилу

$$r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j; \\ 0.5a_{ij}, & i = j; \\ 0, & i < j, \end{cases} \quad (24)$$

так что R, R^T — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы, причем их диагонали совпадают.

Полагаем в (16) $B_k = B = (E + \omega R)(E + \omega R^T)$ (B — самосопряженная положительно-определенная матрица), $\tau_k = \tau$. Параметры ω, τ выбираются из условия наилучшей сходимости метода.

Пусть известны константы

$$\delta = c_1 \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2l_x} + d_1 \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}, \quad \Delta = c_2 \frac{4}{h_x^2} + d_2 \frac{4}{h_y^2}, \quad (25)$$

такие что

$$\delta E \leq A, \quad RR^T \leq \frac{\Delta}{4}A. \quad (26)$$

Обозначим $\eta = \delta/\Delta$.

Далее из оценки $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$ параметр ω выбирается так, чтобы $\xi = \gamma_1(\omega)/\gamma_2(\omega)$ имело наибольшее значение, так как скорость сходимости определяется величиной $\rho = (1 - \xi)/(1 + \xi)$.

Таким образом, получаем

$$\omega = 2/\sqrt{\delta\Delta}, \quad \gamma_1 = \frac{\delta}{(2 + 2\sqrt{\eta})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}, \quad \tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2). \quad (27)$$

В простейшей задаче

$$\delta = \frac{8}{h^2} \sin^2 \pi \frac{h}{2}, \quad \Delta = \frac{8}{h^2}, \quad \eta = \sin^2 \pi \frac{h}{2}, \quad \omega = \frac{h^2}{4 \sin \pi \frac{h}{2}}, \quad (28)$$

$$\gamma_1 = \frac{4 \sin^2 \pi \frac{h}{2}}{h^2 \left(1 + \sin \pi \frac{h}{2}\right)}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{h^2} \sin \pi \frac{h}{2}, \quad \tau = \frac{h^2 \left(1 + \sin \pi \frac{h}{2}\right)}{\sin \pi \frac{h}{2} \left(1 + 3 \sin \pi \frac{h}{2}\right)}. \quad (29)$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи.

Из уравнения

$$(E + \omega R)(E + \omega R^T) \frac{U^k - U^{k-1}}{\tau} + AU^{k-1} = F, \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

при заданном U^0 видно, что для определения U^k надо решить уравнение

$$(E + \omega R)(E + \omega R^T)U^k = F^{k-1}, \quad (31)$$

где

$$F^{k-1} = BU^{k-1} - \tau(AU^{k-1} - F) = BU^{k-1} + \tau(L_h u^{k-1} + f). \quad (32)$$

Здесь $U^k = U^{k-1} = 0$ на границе области $\gamma_{h_x h_y}$, а $u^{k-1} = U^{k-1}$ во внутренних точках области $\omega_{h_x h_y}$ и принимает заданные значения на границе $\gamma_{h_x h_y}$ ⁹.

Решением задачи (31) является функция U^k , а далее строится u^k , определенная на $\overline{\omega_{h_x h_y}}$: $u^k = U^k$ на $\omega_{h_x h_y}$, $u^k = \mu$ на границе области $\gamma_{h_x h_y}$.

Вычисление U^k сводится к последовательному решению двух задач

$$(E + \omega R)\overline{U} = F^{k-1}, \quad (E + \omega R^T)U^k = \overline{U} \quad (33)$$

с нижней и верхней треугольными матрицами. Отсюда и следует название метода — попеременно-треугольный (ПТМ).

Приведем расчетные формулы метода для $p(x, y) \equiv 1$, $q(x, y) \equiv 1$. В этом случае

$$RU_{ij} = \frac{U_{ij} - U_{i-1j}}{h_x^2} + \frac{U_{ij} - U_{ij-1}}{h_y^2} = \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{ij} - \left(\frac{1}{h_x^2}U_{i-1j} + \frac{1}{h_y^2}U_{ij-1}\right), \quad (34)$$

$$R^T U_{ij} = -\frac{U_{i+1j} - U_{ij}}{h_x^2} - \frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{h_y^2} = \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)U_{ij} - \left(\frac{1}{h_x^2}U_{i+1j} + \frac{1}{h_y^2}U_{ij+1}\right). \quad (35)$$

⁹ $\overline{\omega_{h_x h_y}} = \omega_{h_x h_y} + \gamma_{h_x h_y}$

Обозначим $\kappa_1 = \omega/h_x^2$, $\kappa_2 = \omega/h_y^2$. Тогда, подставляя выражения для R , R^T в (33), получаем для определения значений \bar{U} , U^k рекуррентные формулы

$$\bar{U}_{ij} = \frac{\kappa_1 \bar{U}_{i-1j} + \kappa_2 \bar{U}_{ij-1} + F_{ij}^{k-1}}{1 + \kappa_1 + \kappa_2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M-1; \quad \bar{U}|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (36)$$

$$U_{ij}^k = \frac{\kappa_1 U_{i+1j}^k + \kappa_2 U_{ij+1}^k + \bar{U}_{ij}}{1 + \kappa_1 + \kappa_2}, \quad i = N-1, \dots, 1, \quad j = M-1, \dots, 1; \quad U^k|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0. \quad (37)$$

Как было сказано выше, $u_{ij}^k = U_{ij}^k$ на $\omega_{h_x h_y}$, $u^k = \mu$ на границе области $\gamma_{h_x h_y}$:

$$\begin{cases} u_{i0}^k = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{iM}^k = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{0j}^k = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq M-1; \\ u_{Nj}^k = \mu(l_x, y_j), & 1 \leq j \leq M-1. \end{cases} \quad (38)$$

Метод устойчив.

Учитывая вид правой части (32), можно уменьшить количество операций, требуемых для вычисления решения U^k . Для этого используется алгоритм

$$(E + \omega R)\bar{w} = \Phi^{k-1}, \quad \bar{w}|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (39)$$

$$\Phi^{k-1} = L_h u^{k-1} + f, \quad u^{k-1}|_{\gamma_{h_x h_y}} = \mu, \quad (40)$$

$$(E + \omega R^T)w^k = \bar{w}, \quad w^k|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (41)$$

$$U^k = U^{k-1} + \tau w^k. \quad (42)$$

Для вычисления \bar{w} , w^k естественно использовать формулы, аналогичные (36), (37).

Заметим, что при реализации этого алгоритма используется еще один массив w^k .

Для числа итераций имеем оценку

$$n \geq \frac{\ln \varepsilon^{-1}}{\ln \rho^{-1}}. \quad (43)$$

В простейшем случае при малых $h \ll 1$ $n \geq \frac{\ln \varepsilon^{-1}}{2\pi h}$.

19.5.7. Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров

В этом методе мы также как и в предыдущем, полагаем в (16)

$$B_k = B = (E + \omega R)(E + \omega R^T),$$

но параметр τ_k — переменный и при заданном числе итераций n вычисляется по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{\gamma_2 + \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (44)$$

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом, как и в 19.5.5.

В остальном алгоритм остается прежним, расчетные формулы приведены в 19.5.6. Для числа итераций имеем оценку $n \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta}}$.

В простейшем случае при малых $h \ll 1$ $n \geq \frac{0.29}{\sqrt{h}} \ln \frac{2}{\varepsilon}$.

19.5.8. Выбор точности

Разностная схема (4)-(5) аппроксимирует исходную задачу (1)-(2) со вторым порядком относительно шага сетки. Заданная точность приближенного решения должна быть согласована с порядком аппроксимации. Обычно судят о точности решения по его относительной погрешности $\|U^{(k)} - u^*\| / \|U^{(0)} - u^*\|$ или, так как точное решение u^* неизвестно, по величине относительной невязки $\frac{\|AU^{(k)} - F\|}{\|AU^{(0)} - F\|}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданная относительная погрешность, с которой надо найти приближенное решение задачи (1)-(2). Вычисления прекращают, если выполнено условие $\frac{\|U^{(n)} - u^*\|}{\|U^{(0)} - u^*\|} < \varepsilon$ или $\frac{\|AU^{(n)} - F\|}{\|AU^{(0)} - F\|} < \varepsilon$. Можно получить, что

- для метода итераций $n \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi}$, в простейшем случае $n \geq 2 \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)^2}$;
- для метода Зейделя $n \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{4\xi}$, в простейшем случае $n \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)^2}$;
- для метода верхней релаксации $n \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\sqrt{\xi}}$, в простейшем случае $n \geq 2 \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)}$;
- для метода с оптимальным чебышевским набором параметров, $n \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}}$ для простейшей задачи $n \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{(\pi h)}$.

В качестве критерия конца вычислений может быть выбран один из следующих:

- а) $\|U^{(k)} - u^*\| < \varepsilon$. Если u^* неизвестно, но известно $\rho(H)$, можно использовать тот факт, что

$$\|U^{(k)} - u^*\| \leq \frac{\rho(H)}{1 - \rho(H)} \|U^{(k)} - U^{(k-1)}\|.$$

б) $\frac{\|U^{(k)} - u^*\|}{\|U^{(0)} - u^*\|} < \varepsilon$.

в) $\frac{\|AU^{(k)} - F\|}{\|AU^{(0)} - F\|} < \varepsilon$.

- г) выполнить вычисленное заранее количество итераций n , требуемое для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз.

Замечание 1. Следует иметь в виду, что в методе с оптимальным чебышевским набором параметров количество выполняемых итераций должно быть кратно n , используемому в (21) для вычисления параметров.

19.6. Задание

Найти решение поставленной задачи

- методом простой итерации или методом итерации с оптимальным параметром (указывается преподавателем);
- методом Зейделя;
- одним из методов 4-6 (указывается преподавателем);

г) одним из методов 7-10 (указывается преподавателем)¹⁰.

Алгоритмы решения задачи численно реализовать по программе на алгоритмическом языке.

Желательно отлаживать программу на модельной задаче, т. е. такой, точное решение которой известно.

Требуется получить приближенное решение задачи на сгущающихся сетках при $N = 5, 10, 20$. Ввиду того, что в некоторых случаях может оказаться проблематичным получить решение с заданной точностью ε , независимо от используемого критерия конца вычислений, во избежание заикливания следует поставить ограничение на количество выполняемых итераций. Обозначим его, например k_{\max} .

Рекомендуемое значение k_{\max} в методах простой итерации и Зейделя

N	k_{\max}
5	5 (отладочный вариант)
5	50
10	100
20	100

k_{\max} в методах второй (3-5) и третьей (6-9) группы рекомендуется выбрать самостоятельно с учетом скорости сходимости метода.

В качестве нулевого приближения $U^{(0)}$ можно взять, например, вектор с нулевыми компонентами значений решения во внутренних узлах сетки.

На печать должны выводиться следующие характеристики:

- 1) Мера аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой на точном решении¹¹ $\|F - Au^*\|$. Здесь и в дальнейшем используется сеточный аналог нормы в C

$$\|V\|_C = \max_{\substack{1 \leq i \leq N-1, \\ 1 \leq j \leq M-1}} |v_{ij}|,$$

так что в данном случае

$$\|F - Au^*\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N-1, \\ 1 \leq j \leq M-1}} |L_h u_{ij}^* + f_{ij}|.$$

- 2) Норма невязки нулевого приближения $\|F - AU^{(0)}\|$.
- 3) Оценка количества итераций, требуемых для выполнения условия $\frac{\|U^{(n)} - u^*\|}{\|U^{(0)} - u^*\|} < \varepsilon$
или $\frac{\|AU^{(n)} - F\|}{\|AU^{(0)} - F\|} < \varepsilon$ при заданном ε (0.05 - 0.001).
- 4) Спектральный радиус матрицы перехода или его оценка для задачи с переменными коэффициентами. Сравнить с экспериментальными данными (для методов 1-3).
- 5) Характеристики вычисленного в цикле с параметром k приближенного решения $U^{(k)}$

Таблица 1

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8
k	$\ F - AU^{(k)}\ $	rel.d.	$\ U^{(k)} - u^*\ $	rel.error	$\ U^{(k)} - U^{(k-1)}\ $	apost.est.	$\bar{\rho}_k$

¹⁰ Алгоритм метода переменных направлений рассматривается в п 20. Разностные схемы других методов установления изложены в [6] и [9].

¹¹ Если точное решение неизвестно, характеристики, зависящие от точного решения, опускаются.

Здесь

5.1 — номер итерации;

5.2 — норма невязки k -го приближения;

5.3 — относительная невязка k -го приближения $\frac{\|F - AU^{(k)}\|}{\|F - AU^{(0)}\|}$;

5.4 — норма абсолютной погрешности k -го приближения;

5.5 — относительная погрешность k -го приближения $\frac{\|U^{(k)} - u^*\|}{\|U^{(0)} - u^*\|}$;

5.6 — норма разности двух соседних приближений;

5.7 — оценка погрешности k -го приближения $\frac{\rho(H)\|U^{(k)} - U^{(k-1)}\|}{1 - \rho(H)}$ (для методов 1-3);

5.8 — k -ое приближение к спектральному радиусу матрицы H (матрицы перехода от $U^{(k-1)}$ к $U^{(k)}$, т.е. такой что $U^{(k)} = HU^{(k-1)} + g$) (для методов 1-3).

Указание

Обозначим $\rho_k = \frac{\|U^{(k+1)} - U^{(k)}\|}{\|U^{(k)} - U^{(k-1)}\|}$, тогда

$$\overline{\rho_k} = \begin{cases} \sqrt{\rho_k \rho_{k-1}}, & \lambda_{\max}(H) = -\lambda_{\min}(H) \\ \rho_k, & \lambda_{\max}(H) \neq -\lambda_{\min}(H) \end{cases}$$

В отладочном варианте ($N = 5, M = 5, k_{\max} = 5$) информацию о решении следует печатать на каждой итерации. При больших значениях k_{\max} информацию следует печатать лишь при некоторых значениях k , например, при k кратных 10 (это значение удобнее задавать константой с именем, например pk , чтобы иметь возможность легко менять его по мере необходимости).

- 6) Решение $U^{(n)}$ или $U^{(k_{\max})}$ на “крупной” сетке. “Крупной” будем называть сетку при $N = 5, M = 5$ и, независимо от значений N и M , приближенное решение должно печататься только в точках этой сетки, например при $l_x = l_y = 1$ должна быть выведена таблица со значениями решения $U^{(n)}$ или $U^{(k_{\max})}$ следующего вида:

Таблица 2

$y \setminus x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.2						
0.4						
0.6						
0.8						
1						

- 7) Таблица точного решения на “крупной” сетке.

Проанализировать полученные результаты.

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть в приложении В.

19.7. Варианты заданий

В некоторых вариантах не указаны конкретные выражения для правых частей уравнения и граничных условий. В этих случаях их рекомендуется получить, используя предлагаемое точное решение задачи, то есть $f(x, y) = -L(u^*(x, y))$, $\mu(x, y) = u^*(x, y)|_{\Gamma}$.

Вариант 1

Найти решение задачи

$$\begin{aligned} Lu &= -f(x, y), \\ \text{где } Lu &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u(x, y)|_{\Gamma} &= \mu(x, y) \end{aligned}$$

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^{(k)} - u^*\|}{\|U^{(0)} - u^*\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = x^3y + xy^2$.

Вариант 2

Найти решение задачи

$$\begin{aligned} Lu &= -f(x, y), \\ \text{где } Lu &= \frac{\partial}{\partial x} \left((1+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u(x, y)|_{\Gamma} &= \mu(x, y) \end{aligned}$$

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с оптимальным чебышевским набором параметров;
- 4) Методом покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|AU^{(k)} - F\|}{\|AU^{(0)} - F\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = y^2 + y^3(1+x)$.

Вариант 3

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Попеременно-треугольным итерационным методом;
- 4) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: выполнить вычисленное заранее количество итераций **n**, требуемое для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = \sin x \cos y$.

Вариант 4

Найти решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с оптимальным чебышевским набором параметров;
- 4) Методом переменных направлений Дугласа-Рекфорда.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^{(k)} - u^*\|}{\|U^{(0)} - u^*\|}$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = e^x \sin(y)$.

Вариант 5

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln(2+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln(2+y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом простой итерации;

- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|AU^{(k)} - F\|}{\|AU^{(0)} - F\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$.

Вариант 6

Найти решение задачи

$$Lu == -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с оптимальным чебышевским набором параметров;
- 4) Методом расщепления предиктор-корректор.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^{(k)} - u^*\|}{\|U^{(0)} - u^*\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = 2x^3y^3$.

Вариант 7

Найти решение задачи

$$Lu = 0,$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \sin(\pi x)) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{1+y} \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, 0) = \tan \left(\frac{\pi}{4} x \right)$$

$$u(x, 1) = xe^{(x-1)}, \quad u(0, y) = y \cos \left(\frac{\pi}{2} y \right), \quad u(1, y) = \frac{1}{1 + y(1 - y)}$$

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;

- 4) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие на апостериорную оценку погрешности решения.

Вариант 8

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + 2x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Попеременно-треугольным итерационным методом с оптимальным чебышевским набором параметров;
- 4) Методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^{(k)} - u^*\|}{\|U^{(0)} - u^*\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = x^2 y^2 (1 + y)$,

Вариант 9

Найти решение задачи

$$\Delta u = x^2 + y^2, \quad u(x, 0) = u(0, y) = 0, \quad u(x, 1) = x^2/2, \quad u(1, y) = y^2/2$$

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Методом переменных направлений Дугласа-Рекфорда.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\|U^k - u^*\| < \varepsilon$.

Вариант 10

Найти решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;

- 3) Попеременно-треугольным итерационным методом с оптимальным чебышевским набором параметров;
- 4) Методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|AU^{(k)} - F\|}{\|AU^{(0)} - F\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^* = e^{2x} \sin(2y)$.

Вариант 11

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Методом покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\|U^{(k)} - u^*\| < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = \cos x \cos y$.

Вариант 12

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + x/2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с оптимальным чебышевским набором параметров;
- 4) Методом покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\|U^{(k)} - u^*\| < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = xy^2(1 + y)$,

Вариант 13

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln(2+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln(2+y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|AU^{(k)} - F\|}{\|AU^{(0)} - F\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$.

Вариант 14

Найти решение задачи

$$Lu == -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Попеременно-треугольным итерационным методом с оптимальным чебышевским набором параметров;
- 4) Методом расщепления предиктор-корректор.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^{(k)} - u^*\|}{\|U^{(0)} - u^*\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = 2x^3y^3$.

20. Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Схема переменных направлений

20.1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения

$$-Lu = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$u = \mu(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Пусть $\bar{G} = G + \Gamma = \{0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$ — прямоугольник, а

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3)$$

$p(x, y), q(x, y)$ — достаточно гладкие функции,

$0 < c_1 \leq p(x, y) \leq c_2, 0 < d_1 \leq q(x, y) \leq d_2$, где c_1, c_2, d_1, d_2 — постоянные.

Обозначим $A = \max(c_2, d_2)$.

20.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора L разностным

Разобьем отрезок $[0, l_x]$ на N_x равных частей. Обозначим $h_x = l_x/N_x, x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x$.

Разобьем отрезок $[0, l_y]$ на N_y равных частей. Обозначим $h_y = l_y/N_y, y_i = ih_y, 0 \leq i \leq N_y$.

Построим сетку узлов (рис. 1):

$$\overline{\omega_{h_x h_y}} = \{(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y\}.$$

Узлы $(x_i, y_j), 1 \leq i \leq N_x - 1; 1 \leq j \leq N_y - 1$ — внутренние, остальные, лежащие на границе прямоугольника, — граничные.

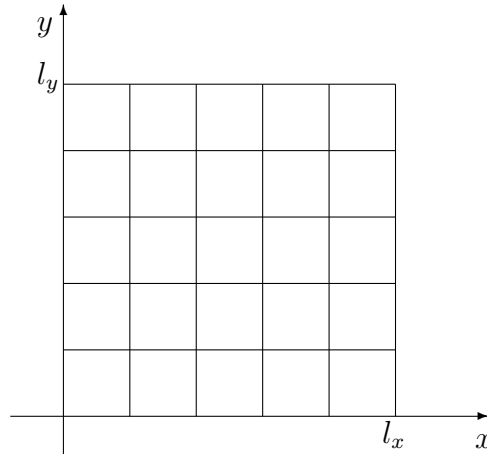


Рис. 1

Решение отыскивается в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h_x h_y}}$. Обозначим $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$.

Пусть

$$L_1 u = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad L_2 u = \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (4)$$

так что

$$Lu = L_1 u + L_2 u.$$

Операторы L_1 и L_2 заменим разностными операторами Λ_1 и Λ_2

$$\Lambda_1 u_{ij} = p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_x^2}, \quad (5)$$

$$\Lambda_2 u_{ij} = q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_y^2}. \quad (6)$$

Здесь

$$p_{i+\frac{1}{2}j} = p(x_i + h_x/2, y_j), \quad p_{i-\frac{1}{2}j} = p(x_i - h_x/2, y_j), \\ q_{ij+\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j + h_y/2), \quad q_{ij-\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j - h_y/2).$$

Обозначим

$$\Lambda u_{ij} = \Lambda_1 u_{ij} + \Lambda_2 u_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

Если $u(x, y)$ имеет не менее четырех непрерывных ограниченных в рассматриваемой области G производных по x и по y , а $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — не менее трех, то разностный оператор Λ аппроксимирует дифференциальный L со вторым порядком, т. е.

$$Lu - \Lambda u = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_x^2 + h_y^2.$$

Итак, решение задачи (1)-(2) свелось к решению разностной задачи Дирихле

$$-(\Lambda_1 u_{ij} + \Lambda_2 u_{ij}) = f_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (7)$$

при граничных условиях

$$\begin{cases} u_{i0} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{0j} = \mu(0, y_j), & 0 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{N_x j} = \mu(l_x, y_j), & 0 \leq j \leq N_y - 1. \end{cases} \quad (8)$$

20.3. Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Для вычисления решений многих стационарных задач математической физики, описывающих равновесные состояния, рассматриваются последние как результат установления развивающегося во времени процесса, расчет которого оказывается проще, чем прямой расчет равновесного состояния. Рассмотрим вспомогательную нестационарную задачу о распространении тепла

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u + L_2 u + f(x, y), \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, y), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \end{cases} \quad (9)$$

где $f(x, y)$ имеет прежний смысл, а $u_0(x, y)$ — произвольно. Поскольку источники тепла $f(x, y)$ и температура на границе $\mu(x, y)$ не зависят от времени, то естественно ожидать, что и решение $u(x, y, t)$ с течением времени будет меняться все медленнее, распределение температур в пределе при $t \rightarrow \infty$ превратится в равновесное распределение температуры $u(x, y)$, описываемое исходной задачей (1)-(2). Надо решать задачу до тех пор, пока ее решение не перестанет меняться в пределах интересующей нас точности.

Рассмотрим вначале разностную схему, с помощью которой могла бы решаться задача (7)-(8), но на практике ее не применяют по указанным в п. 20.4 причинам.

20.4. Двухслойная схема с весами

Аппроксимируем задачу (9) разностной схемой

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \Lambda(\sigma u_{ij}^{k+1} + (1 - \sigma)u_{ij}^k) + f(x_i, y_j), \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+1} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y}^{k+1} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{0j}^{k+1} = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{N_x j}^{k+1} = \mu(l_x, y_j), & 1 \leq j \leq N_y - 1. \end{cases} \quad (11)$$

Решение при $k = 0$ находится из начального условия в (9)

$$u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

Рассмотрим два варианта значений параметра σ .

- а) При $\sigma = 0$ получаем явную схему и решение во внутренних узлах сетки вычисляется по формуле

$$u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k + \tau(\Lambda_1 u_{ij}^k + \Lambda_2 u_{ij}^k) + \tau f(x_i, y_j), \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Схема (4) условно устойчива при $\tau \leq \frac{Ah^2}{4}$. Общее число действий при переходе со слоя на слой пропорционально числу узлов сетки, т. е. $O(N_x N_y)$ — схема экономичная.

- б) При $\sigma = 1$ получаем неявную схему. Она устойчива при любых h и τ . Для определения u_{ij}^{k+1} получаем на каждом слое линейную систему

$$u_{ij}^{k+1} - \tau(\Lambda_1 u_{ij}^{k+1} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1}) = u_{ij}^k + \tau f(x_i, y_j), \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Матрица этой системы пятидиагональная и решать систему можно методом матричной прогонки или методом исключения Гаусса, который при учете специального вида матрицы требует $O(N_x^2 N_y^2)$ действий, т. е. схема не является экономичной.

¹²При решении стационарных задач методом установления k — номер итерации, а τ — итерационный параметр, который выбирается из соображений точности аппроксимации и скорости сходимости.

20.5. Схема переменных направлений

Эта схема сочетает лучшие качества явной схемы — экономичность и неявной — устойчивость. Наряду с основными значениями u_{ij}^k и u_{ij}^{k+1} вводится промежуточное значение $u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$, которое формально можно рассматривать как значение при $t = t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + \frac{\tau}{2}$. Решение задачи в этом случае сводится к решению двух систем вида (14)-(15) с трехдиагональными матрицами.

$$\frac{u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - u_{ij}^k}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^k + f(x_i, y_j), \quad (14)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1} + f(x_i, y_j), \quad (15)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

$$k = 0, 1, \dots$$

В граничных узлах решение должно принимать заданные в (11) значения.

Схема (14) неявна по направлению x и явна по направлению y , а схема (15) явна по направлению x и неявна по направлению y , что позволяет использовать для нахождения решения одномерные прогонки.

Система (14) с учетом граничных условий (11) может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{0j}^{k+\frac{1}{2}} & = & \mu(0, y_j), \\ \overline{A}_{ij} u_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} - \overline{B}_{ij} u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \overline{C}_{ij} u_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} & = & \overline{G}_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \\ u_{N_x j}^{k+\frac{1}{2}} & = & \mu(l_x, y_j) \end{array} \right. \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{G}_{ij}^{k+\frac{1}{2}} &= -u_{ij}^k - \frac{\tau}{2}(\Lambda_2 u_{ij}^k + f(x_i, y_j)), \\ 1 \leq j \leq N_y - 1. \end{aligned} \quad (17)$$

В итоге при каждом $1 \leq j \leq N_y - 1$ получили линейную замкнутую систему $(N_x + 1)$ -го порядка относительно $u_{0j}^{k+\frac{1}{2}}, u_{1j}^{k+\frac{1}{2}}, \dots, u_{N_x j}^{k+\frac{1}{2}}$.

Матрица системы 3-х диагональная и решать систему следует методом прогонки.

Прогонки осуществляются вдоль строк (рис. 2).

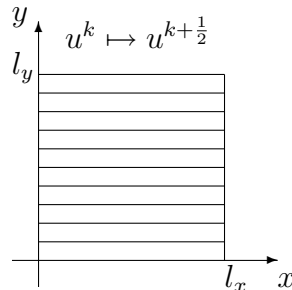


Рис. 2
190

При $j = 0$, $j = N_y$ решения находятся из (11):

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+\frac{1}{2}} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y}^{k+\frac{1}{2}} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N_x. \end{cases} \quad (18)$$

Система (15) с учетом граничных условий (11) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+1} = \mu(x_i, 0), \\ \bar{A}_{ij} u_{ij-1}^{k+1} - \bar{B}_{ij} u_{ij}^{k+1} + \bar{C}_{ij} u_{ij+1}^{k+1} = \bar{G}_{ij}^{k+1}, & 1 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{iN_y}^{k+1} = \mu(x_i, l_y), \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ij}^{k+1} &= -u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2}(\Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + f(x_i, y_j)), \\ 1 \leq i \leq N_x - 1, \end{aligned} \quad (20)$$

В итоге при каждом $1 \leq i \leq N_x - 1$ получили линейную замкнутую систему $(N_y + 1)$ -го порядка относительно $u_{i0}^{k+1}, u_{i1}^{k+1}, \dots, u_{iN_y}^{k+1}$. Матрица системы 3-х диагональная и решать систему следует методом прогонки.

Прогонки осуществляются вдоль столбцов (рис. 3).

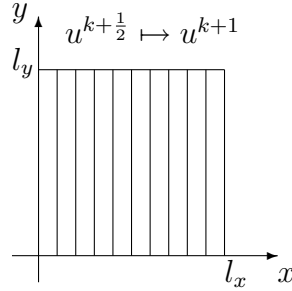


Рис. 3

При $i = 0$, $i = N_x$ решения находятся из (11):

$$\begin{cases} u_{0j}^{k+1} = \mu(0, y_j), & 0 \leq j \leq N_y, \\ u_{N_x j}^{k+1} = \mu(l_x, y_j), & 0 \leq j \leq N_y. \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно, что в простейшей задаче ($p(x, y) \equiv 1$, $q(x, y) \equiv 1$, $hx = hy = h$)

$$\bar{A}_{ij} = \bar{A}_{ij} = \frac{\tau}{2h^2}, \quad \bar{B}_{ij} = \bar{B}_{ij} = \frac{\tau}{h^2} + 1, \quad \bar{C}_{ij} = \bar{C}_{ij} = \frac{\tau}{2h^2}. \quad (22)$$

Итак, рассмотрим алгоритм метода переменных направлений.

1) Из начального условия получаем решение при $k = 0$ во всех точках сетки

$$u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N_x, \quad 0 \leq j \leq N_y.$$

2) Полагая $k = 0$, решаем методом прогонки при каждом $1 \leq j \leq N_y - 1$ систему (16).

Решение при $j = 0$ и $j = N_y$ находится из (18). Тем самым найдено решение $u_{ij}^{\frac{1}{2}}$ на промежуточном слое $\frac{1}{2}$ во всех точках сетки.

3) Полагая $k = 0$, решаем методом прогонки при каждом $1 \leq i \leq N_x - 1$ систему (19).

Решение при $i = 0$ и $i = N_x$ находится из (21). Тем самым найдено решение u_{ij}^1 на слое $k = 1$ во всех точках сетки.

4) Вычислив характеристики полученного решения, увеличиваем номер слоя на единицу ($k = k + 1$) и повторяем пункты 2 и 3 пока не будет выполнен критерий окончания счета.

Указание к выбору параметра τ

В методе переменных направлений, если известны границы спектра разностных операторов $-\Lambda_1, -\Lambda_2$

$$\delta_1 = c_1 \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2l_x}, \quad \Delta_1 = c_2 \frac{4}{h_x^2} \cos^2 \frac{\pi h_x}{2l_x}, \quad \delta_2 = d_1 \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}, \quad \Delta_2 = d_2 \frac{4}{h_y^2} \cos^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}$$

и $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$, то в качестве оптимального τ берется $\tau_{opt.} \approx \frac{2}{\sqrt{\delta \Delta}}$.

В модельной задаче $\tau_{opt.} \approx \frac{h^2}{\sin(\pi h)}$. Количество итераций, необходимое для уменьше-

ния первоначальной нормы погрешности в ε раз $n \approx \frac{N}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

Эти рекомендации являются лишь ориентировочными и следует их испытать, т. е. проверить скорость сходимости при τ больших и меньших $\tau_{opt.}$, указанного выше.

20.6. Выбор точности

Разностная схема (7)-(8) аппроксимирует исходную задачу (1)-(2) со вторым порядком относительно шага сетки.

Заданная точность приближенного решения должна быть согласована с порядком аппроксимации.

Часто отлаживают задачу на известном точном решении u^* , тогда судят о точности решения по его фактической абсолютной погрешности $\|u^k - u^*\|$ ¹³ или по относительной погрешности $\|u^k - u^*\|/\|u^0 - u^*\|$. Если точное решение неизвестно и неизвестны оценки для погрешностей, то судят по величине невязки $\|\Lambda u^k + F\|$. Здесь F — вектор значений правой части системы (7) во внутренних точках сетки.

Для получения невязки подставляем значения u^k в точках сетки в разностное уравнение (7) и вычисляем

$$\|\Lambda u^k + F\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1, \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |\Lambda u_{ij}^k + f_{ij}|.$$

¹³Здесь и в дальнейшем используется сеточный аналог нормы в C

$$\|V\|_C = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1, \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |v_{ij}|.$$

Также можно судить по величине относительной невязки $\|\Lambda u^{(k)} + F\|/\|\Lambda u^0 + F\|$.

Итак, в качестве критерия конца вычислений может быть выбран один из следующих:

- а) $\|u^k - u^*\| < \varepsilon$,
- б) $\|\Lambda u^k + F\| < \varepsilon$,
- в) $\frac{\|u^k - u^*\|}{\|u^0 - u^*\|} < \varepsilon$,
- г) $\frac{\|\Lambda u^k + F\|}{\|\Lambda u^0 + F\|} < \varepsilon$.
- д) выполнить вычисленное заранее количество итераций n , требуемое для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз.

20.7. Задание

Алгоритмы решения задачи¹⁴ численно реализовать по программе на алгоритмическом языке.

Желательно отлаживать программу на модельной задаче, т. е. такой, точное решение которой известно.

Требуется получить приближенное решение задачи на сгущающихся сетках при $N_x = 5, 10, 20$. Ввиду того, что в некоторых случаях может оказаться проблематичным получить решение с заданной точностью ε , независимо от используемого критерия конца вычислений, во избежание заикливания следует поставить ограничение на количество выполняемых итераций. Обозначим его, например, k_{\max} .

k_{\max} рекомендуется выбирать самостоятельно с учетом скорости сходимости метода.

В качестве нулевого приближения u^0 можно взять, например, вектор с нулевыми компонентами значений решения во внутренних узлах сетки и принимающий заданные значения в граничных.

На печать должны выводиться следующие характеристики:

- 1) Мера аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой на точном решении¹⁵. Для получения меры аппроксимации подставляем значения точного решения в разностное уравнение (7) и вычисляем

$$\gamma(u^*) = \|\Lambda u^* + F\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1, \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |\Lambda u_{ij}^* + f_{ij}|.$$

- 2) Норма невязки нулевого приближения $\|\Lambda u^0 + F\|$.
- 3) Характеристики вычисленного в цикле с параметром k приближенного решения u^k (Таблица 1)

Таблица 1

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
k	$\ \Lambda u^k + F\ $	rel.d.	$\ u^k - u^*\ $	rel.error	$\ u^k - u^{k-1}\ $
0					—

Здесь

¹⁴Варианты задач Дирихле приведены в п. 19.7.

¹⁵Если точное решение неизвестно, характеристики, зависящие от точного решения, опускаются.

5.1 — номер итерации;

5.2 — норма невязки k -го приближения;

5.3 — относительная невязка k -го приближения $\frac{\|\Lambda u^k + F\|}{\|\Lambda u^0 + F\|}$;

5.4 — норма абсолютной погрешности k -го приближения;

5.5 — относительная погрешность k -го приближения $\frac{\|u^k - u^*\|}{\|u^0 - u^*\|}$;

5.6 — норма разности двух соседних приближений.

- 4) Решение, удовлетворяющее заданной точности ε , или $u^{k_{\max}}$ на “крупной” сетке. “Крупной” будем называть сетку при $N_x = 5$, $N_y = 5$ и, независимо от значений N_x и N_y , приближенное решение должно печататься только в точках этой сетки, например при $l_x = l_y = 1$ должна быть выведена таблица со значениями решения следующего вида:

Таблица 2

$y \setminus x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.2						
0.4						
0.6						
0.8						
1						

- 5) Таблица точного решения на “крупной” сетке.

Проанализировать полученные результаты.

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть в приложении Г.

Разностные схемы других методов установления изложены в [6] и [9].

21. Проблема собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля

21.1. Постановка задачи. Общие сведения

Рассматривается краевая задача

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, \quad (1)$$

где при $x \in (a, b)$ $p(x)$ — непрерывно дифференцируема и $p(x) \geq p_0 > 0$, а $q(x)$ непрерывна и $q(x) \geq q_0 > 0$ с граничными условиями вида

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 \geq 0, \quad (2)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \quad \beta_1 \beta_2 \geq 0. \quad (3)$$

Заметим, что при $\alpha_2 = 0$ краевая задача на левом конце промежутка $[a, b]$ называется первой (I), при $\alpha_1 = 0$ — второй (II), если же оба коэффициента не равны нулю — третьей (III). Аналогично определяется краевая задача для правого конца промежутка.

Оператор задачи самосопряженный, положительно-определенный. Пусть H_L ¹⁶ — энергетическое пространство оператора. Известно, что все собственные числа рассматриваемой задачи имеют кратность равную единице и могут быть перенумерованы в порядке возрастания: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Скалярное произведение в пространстве $L_2(a, b)$ имеет вид $(y, z) = \int_a^b yz \, dx$. Введем энергетическое скалярное произведение, связанное с дифференциальным оператором:

$$[y, z] = \int_a^b (py'z' + qyz) \, dx + Q_l + Q_r, \quad (4)$$

где

$$Q_l = \begin{cases} 0, & \text{I, II,} \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(a) y(a) z(a), & \text{III.} \end{cases} \quad (5)$$

$$Q_r = \begin{cases} 0, & \text{I, II,} \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} p(b) y(b) z(b), & \text{III.} \end{cases}$$

В Q_l , Q_r справа указан тип краевой задачи (I, II, III).

21.2. Оценка собственных чисел

Из формулы $(Ly, y) = [y, y]$ при $y = y_i$ имеем $\lambda_i(y_i, y_i) = [y_i, y_i]$, следовательно

$$\lambda_i = \frac{[y_i, y_i]}{(y_i, y_i)} > q_0, \quad (6)$$

¹⁶ Абсолютно непрерывные функции, производная которых принадлежит $L_2(a, b)$ и которые, кроме того, в случае первой краевой задачи (I) удовлетворяют этому условию.

где λ_i , y_i — любое собственное число и соответствующая ему собственная функция оператора L .

Известен также вариационный принцип Куранта для этих значений:

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{[y, y]}{(y, y)} \mid y \in H_L, (y, y) \neq 0 \right\}, \quad (7)$$

$$\lambda_m = \max \{ M(z_1, \dots, z_{m-1}) \mid z_j \in H_L, j = 1, \dots, m-1 \}, \quad (8)$$

$$\text{где } m > 1, M(z_1, \dots, z_{m-1}) = \min \left\{ \frac{[y, y]}{(y, y)} \mid y \in H_L, (y, z_j) = 0, j = 1, \dots, m-1 \right\}. \quad (9)$$

Этот максимум минимума достигается, когда y есть собственная функция, соответствующая собственному числу λ_m , а z_j — собственные функции, соответствующие λ_j .

Из принципа Куранта вытекает простой способ получения верхних и нижних границ для всех собственных чисел задачи.

Действительно, если положим $p_{\min} = \min p(x)$, $q_{\min} = \min q(x)$, заменим в дифференциальном уравнении $p(x)$ и $q(x)$ на p_{\min} , q_{\min} , то собственные числа вновь полученной задачи будут служить нижними оценками для собственных чисел исходной задачи. Если заменить коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ их верхними оценками, то получим задачу на верхние оценки собственных чисел.

21.3. Собственные числа и собственные функции оператора с постоянными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$-\bar{p}y'' + \bar{q}y = \lambda y \quad (10)$$

и граничные условия (2), (3).

Его решение ищем в виде $y(x) = e^{\mu x}$, так что характеристическое уравнение имеет вид:

$$-\bar{p}\mu^2 + \bar{q} - \lambda = 0 \quad \text{или} \quad -\bar{p}\mu^2 = \lambda - \bar{q}. \quad (11)$$

Так как согласно (6) $\lambda > \bar{q}$, то корни этого уравнения чисто мнимые. Обозначим их через $\mu_1 = i\nu$ и $\mu_2 = -i\nu$, где $\nu = \sqrt{\frac{\lambda - \bar{q}}{\bar{p}}}$.

Собственные функции имеют следующий вид:

$$y(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x, \quad (12)$$

где C_1 , C_2 , ν определяются граничными условиями (2), (3)¹⁷, а собственные числа затем находятся по формуле $\lambda = \nu^2 \bar{p} + \bar{q}$.

Заметим, что $y(x)$ не зависит от \bar{p} и \bar{q} и имеет место ортогональность

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x) y_j(x) dx = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

¹⁷Следует подставить собственные функции в виде (12) в граничные условия и определитель однородной системы относительно C_1 , C_2 приравнять нулю. Корнями этого уравнения будут ν_1, ν_2, \dots . Далее при выбранном ν собственная функция в зависимости от краевой задачи, например, в виде $y_i(x) = \cos \nu_i x + C \sin \nu_i x$ или в виде $y_i(x) = C \cos \nu_i x + \sin \nu_i x$ подставляется в одно из граничных условий, определяется C , а окончательно собственные функции находятся из условия нормировки $\|y_i\|_{L_2} = 1$.

21.4. Метод Ритца

Выбирается линейно независимая координатная система функций $\omega_1, \dots, \omega_n$ из H_L и в принципе Куранта минимум по функциям y из H_L заменяется на минимум лишь по тем, которые имеют представление $y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \omega_i(x)$.

Задача на минимум (7) сводится к алгебраической обобщенной задаче на собственные числа:

$$\Gamma_L c - \lambda \Gamma c = 0, \quad (13)$$

где $\Gamma = \{(\omega_k, \omega_j)\}$ и $\Gamma_L = \{[\omega_k, \omega_j]\}$ — матрицы Грама координатной системы в пространствах L_2 и H_L .

Пусть $\lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \dots < \lambda_n^{(n)}$ — собственные числа этой алгебраической задачи и $c^k = (c_1^k, \dots, c_n^k)$, $k = 1, \dots, n$ — соответствующие им собственные векторы. Тогда $\lambda_k^{(n)}$ принимаются за приближения к собственным числам λ_k и функции $y_k^{(n)} = \sum_{j=1}^n c_j^k \omega_j(x)$ за приближения к соответствующим λ_k собственным функциям.

Из принципа Куранта следует, что метод Ритца дает приближения к собственным числам сверху.

Если координатная система выбрана ортогональной и нормированной: $(\omega_k, \omega_j) = \delta_k^j$ (δ_k^j — символ Кронекера), то $\lambda_k^{(n)}$ — собственные числа матрицы Γ_L , а c^k — ее собственные векторы.

21.5. Обобщенная проблема собственных значений.

Метод обратных итераций

Метод Ритца с координатными функциями, не удовлетворяющими условию ортогональности, приводит задачу к решению алгебраической обобщенной проблемы на собственные значения (13), где Γ_L и Γ — симметричные матрицы.

Пусть ставится задача найти только минимальное собственное число λ_{min} . Это будет минимальное собственное число матрицы $\Gamma^{-1}\Gamma_L$. Кроме того, справедливо

$$\lambda_{min}(\Gamma^{-1}\Gamma_L) = \frac{1}{\lambda_{max}(\Gamma_L^{-1}\Gamma)}.$$

Для нахождения λ_{max} можно применить степенной метод или метод скалярных произведений, для чего строится по вектору z^0 последовательность $z^l = (\Gamma_L^{-1}\Gamma) z^{l-1}$. Вектор z^l можно определять из системы

$$\Gamma_L z^l = \Gamma z^{l-1}. \quad (14)$$

В силу хорошей разделённости собственных чисел достаточно 5-10 итераций (14), чтобы получить хорошее приближение к $\lambda_{min} = \lambda_1$. Последнюю итерацию $z^l = (z_1^l, z_2^l, \dots, z_n^l)$ можно взять за вектор коэффициентов для построения приближения к собственной функции

$$y_1^{(n)} = \sum_{j=1}^n z_j^l \omega_j(x). \quad (15)$$

21.6. Выбор координатной системы

- 1) В качестве ортогональной и нормированной координатной системы в случае краевых задач II или III на обоих концах для $[a, b] = [-1, 1]$ следует взять нормированные многочлены Лежандра

$$\omega_k(x) = \hat{P}_{k-1}(x) = \sqrt{\frac{2k-1}{2}} P_{k-1}^{(0,0)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

- 2) В случае первой краевой задачи для $[a, b] = [-1, 1]$ рекомендуется взять многочлены

$$\omega_k(x) = (1-x^2) \hat{P}_{k-1}^{(2,2)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \text{где} \quad (17)$$

$$\hat{P}_i^{(2,2)}(x) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(i+3)(i+4)(2i+5)}{2(i+1)(i+2)}} P_i^{(2,2)}(x). \quad (18)$$

Здесь $\hat{P}_i^{(2,2)}(x)$ — ортогональные с весом $(1-x)^2(1+x)^2$ и нормированные многочлены Якоби, удовлетворяющие следующему условию ортогональности:

$$\int_a^b (1-x)^2(1+x)^2 \hat{P}_i^{(2,2)}(x) \hat{P}_j^{(2,2)}(x) dx = \delta_i^j \quad (\delta_i^j \text{ — символ Кронекера}).$$

Необходимые сведения о многочленах Якоби можно посмотреть в п. 15.7

- 3) В случае первой краевой задачи только на левом конце промежутка $[-1, 1]$ в качестве координатных функций можно взять полиномы Лежандра, умноженные на сомножитель, обеспечивающий выполнение граничного условия, т. е. $\omega_k(x) = (1+x)P_{k-1}^{(0,0)}(x)$. Но следует учитывать, что ортогональными и нормированными такие координатные функции уже не будут.

Ортогональными и нормированными в данном случае будут следующие координатные функции: $\omega_k(x) = (1+x)\hat{P}_{k-1}^{(0,2)}(x)$.

Многочлены $P_i^{(0,2)}(x)$ обладают следующим свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^1 (1+x)^2 P_i^{(0,2)}(x) P_j^{(0,2)}(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \frac{8}{2i+3}, & j = i. \end{cases} \quad (19)$$

Многочлены $P_i^{(0,2)}(x)$ для $i > 1$ можно вычислять, используя следующее рекуррентное соотношение:

$$P_i^{(0,2)}(x) = \frac{(2i+1)(-1+i(i+1)x)P_{i-1}^{(0,2)}(x) - (i^2-1)(i+1)P_{i-2}^{(0,2)}(x)}{i^2(i+2)}, \quad (20)$$

где

$$P_0^{(0,2)}(x) = 1, \quad P_1^{(0,2)}(x) = -1 + 2x.$$

После построения нормируем $P_i^{(0,2)}(x)$ по формуле:

$$\hat{P}_i^{(0,2)}(x) = \sqrt{\frac{2i+3}{8}} P_i^{(0,2)}(x). \quad (21)$$

- 4) В случае первой краевой задачи только на правом конце промежутка $[-1, 1]$ аналогично в качестве координатных функций можно взять полиномы Лежандра, умноженные на сомножитель, обеспечивающий выполнение граничного условия, т. е. $\omega_k(x) = (1-x)P_{k-1}^{(0,0)}(x)$. Но следует учитывать, что ортогональными и нормированными такие координатные функции не будут.

Ортогональными и нормированными в данном случае будут следующие координатные функции: $\omega_k(x) = (1-x)\hat{P}_{k-1}^{(2,0)}(x)$.

Многочлены $P_i^{(2,0)}(x)$ обладают следующим свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^2 P_i^{(2,0)}(x) P_j^{(2,0)}(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \frac{8}{2i+3}, & j = i. \end{cases} \quad (22)$$

Многочлены $P_n^{(2,0)}(x)$ для $n > 1$ можно вычислять, используя следующее рекуррентное соотношение:

$$P_i^{(2,0)}(x) = \frac{(2i+1)(1+i(i+1)x)P_{i-1}^{(2,0)}(x) - (i^2-1)(i+1)P_{i-2}^{(2,0)}(x)}{i^2(i+2)}, \quad (23)$$

где

$$P_0^{(2,0)}(x) = 1, \quad P_1^{(2,0)}(x) = 1 + 2x.$$

После построения нормируем $P_i^{(2,0)}(x)$ по формуле:

$$\hat{P}_i^{(2,0)}(x) = \sqrt{\frac{2i+3}{8}} P_i^{(2,0)}(x). \quad (24)$$

- 5) Для решения задачи на промежутке $[a, b] \neq [-1, 1]$ часто бывает удобнее свести задачу к задаче на промежутке $[-1, 1]$ или сделать соответствующую замену переменной в многочленах Лежандра или Якоби, т. е. взять многочлены $P((2x-b-a)/(b-a))$. Очевидно, что в связи с заменой переменной изменится и нормирующий множитель.

Замечание 1. Если оператор L симметричный, но не положительно определенный, а ограниченный снизу, то метод Ритца состоит в минимизации функционала $[y, y]/(y, y)$ на множестве функций, которые имеют представление $y(x) = \sum_{i=1}^n c_i w_i(x)$, и приводит к такой же задаче (13), только выражение $[y, z]$ не будет иметь смысла скалярного произведения.

21.7. Задание

Требуется

- Получить верхние и нижние оценки для первых двух собственных чисел и соответствующие им собственные функции оператора Штурма-Лиувилля “точно”. Собственные функции выбрать удовлетворяющими условию нормировки $\|y_i\|_{L_2} = 1$. Проверить удовлетворение краевой задаче. Результаты представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

	λ_1		λ_2	
	Оценки	Невязки	Оценки	Невязки
<i>min</i>				
<i>max</i>				

- 2) Получить приближения для первых двух собственных чисел по формуле

$$\lambda_i = \frac{[y_i, y_i]}{(y_i, y_i)},$$

используя в качестве функций y_i собственные функции, найденные в предыдущем пункте.

- 3) Построить матрицы Ритца Γ_L и Γ для $n = 7$, где n — число координатных функций. Используя встроенные функции математического пакета (Maple, Matlab), получить два первых собственных числа. Будем считать их “точными”. Обозначим λ_1^* , λ_2^* . Сравнить с результатами, полученными в п. 1, п. 2.

- 4) Извлекая подматрицы из матриц Ритца, построенных в предыдущем пункте, получить первое собственное число и соответствующую ему собственную функцию для различных значений n методом обратных итераций. Собственную функцию выбрать удовлетворяющей условию нормировки $\|y_1\|_{L_2} = 1$.

Использовать методы (указывается преподавателем):

- а) степенной метод;
- б) метод скалярных произведений.

Точность получения собственных чисел должна быть параметром подпрограммы.

Результаты представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

Метод обратных итераций			
n	$\lambda_1^{(n)}$	$\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^*$	$(Ly_1^{(n)} - \lambda_1 y_1^{(n)})$ при $x = (a + b)/2$
3			
4			
5			
6			
7			

- 5) Сравнить полученные результаты, построить графики собственных функций.

21.8. Варианты заданий

Вариант 1

$$\begin{aligned} -\left(\left(1+\frac{x}{4}\right)u'\right)' + \left(1+\sin\frac{x}{2}\right)u &= \lambda u, \\ 2u(0) - u'(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2+x/3}u'\right)' + \left(\exp\left(\frac{x}{5}\right)\right)u &= \lambda u, \\ u'(-1) - 0.6u(-1) &= u'(1) + 0.65u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 3

$$\begin{aligned} -\left((kx+l)u'\right)' + \left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u &= \lambda u, \quad k=1.59194, \quad l=5.42365, \\ u(-1) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 4

$$\begin{aligned} -\left((kx+l)u'\right)' + \left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u &= \lambda u, \quad k=15.7503, \quad l=19.58201, \\ u(-1) &= u(-0.7978525) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 5

$$\begin{aligned} -\left((1+\sin(x/2))u'\right)' + (2+3x)u &= \lambda u, \\ u(0) &= u(1) + 3u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 6

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2+x/3} u' \right)' + (\exp(x/5)) u = \lambda u, \\ & u'(-1) - 0.7u(-1) = u'(1) + 0.75u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 7

$$\begin{aligned} & - \left((kx+l) u' \right)' + \left(k^2 \left(\frac{1}{kx+l} - kx \right) \right) u = \lambda u, \quad k = 1.57894, \quad l = 8.59453, \\ & u(-1) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 8

$$\begin{aligned} & - \left((kx+l) u' \right)' + \left(k^2 \left(\frac{1}{kx+l} - kx \right) \right) u = \lambda u, \quad k = 15.7503, \quad l = 19.58201, \\ & u(-0.7978525) = u(-0.5973559) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 9

$$\begin{aligned} & - \left(\left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) u' \right)' + \left(2 + \sin \frac{x}{2} \right) u = \lambda u, \\ & u(0) - 1/2 u'(0) = u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 10

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2+x/3} u' \right)' + (\exp(x/5)) u = \lambda u, \\ & u'(-1) - 0.8u(-1) = u'(1) + 0.85u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 11

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=1.57495, \quad l=11.74842, \\ u(-1)=u(1)=0.$$

Вариант 12

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=15.7503, \quad l=19.58201, \\ u(0.2017789)=u(0.4013681)=0.$$

Вариант 13

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=1.57495, \quad l=11.74842, \\ u(-1)=u(1)=0.$$

Вариант 14

$$-\left(\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)u'\right)'+\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)u=\lambda u, \\ u(0)-1/2u'(0)=u'(1)=0.$$

Вариант 15

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=1.57262, \quad l=18.04324, \\ u(-1)=u(1)=0.$$

Вариант 16

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=15.7503, \quad l=19.58201, \\ u(-0.7978525)=u(-0.5973559)=0.$$

Вариант 17

$$-\left(\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)u'\right)'+\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)u=\lambda u, \\ u(0)-1/2u'(0)=u'(1)=0.$$

Вариант 18

$$-\left(\frac{1}{2+x/3}u'\right)'+(\exp(x/5))u=\lambda u, \\ u'(-1)-0.8u(-1)=u'(1)+0.85u(1)=0.$$

Вариант 19

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=1.57495, \quad l=11.74842, \\ u(-1)=u(1)=0.$$

Вариант 20

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=15.7503, \quad l=19.58201, \\ u(0.2017789)=u(0.4013681)=0.$$

22. Применение дискретного ряда Фурье для решения методом сеток однородного уравнения теплопроводности. Спектральный признак устойчивости

22.1. Постановка задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (3)$$

Требуется найти непрерывное в $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и граничным условиям (3).

22.2. Построение точного решения с использованием ряда Фурье

Ортонормированными собственными функциями задачи

$$v''(x) = \lambda v(x), \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0 \quad (4)$$

являются функции $\psi_p(x) = \sqrt{2} \sin(p\pi x)$. Собственные числа $\lambda_p = -p^2\pi^2$.

Пусть $\varphi(x)$ представлена в виде ряда Фурье по функциям $\psi_p(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \psi_p(x), \quad \text{где} \quad c_p = \int_0^1 \varphi(x) \psi_p(x) dx. \quad (5)$$

Решение $u(x, t)$ задачи (1)-(3) находим также в виде ряда $u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} T_p(t) \psi_p(x)$. После подстановки в уравнение теплопроводности получаем уравнения для $T_p(t)$:

$$T'_p + \pi^2 p^2 T_p = 0, \quad T_p(0) = c_p. \quad (6)$$

Решение этой задачи Коши имеет вид:

$$T_p(t) = c_p e^{-\pi^2 p^2 t}. \quad (7)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) может быть представлено в виде:

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{\infty} c_p e^{-\pi^2 p^2 t} \sin(p\pi x). \quad (8)$$

Понятно, что, например, при $\varphi(x) = \sin(\pi x)$ лишь c_1 в разложении (8) будет отлично от нуля и $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

22.3. Представление решения в виде дискретного ряда Фурье

Определим ряды Фурье для сеточных функций.

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N$ — длина частичного разбиения и точки разбиения $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Рассмотрим множество всех вещественных функций $v = \{v_i\}$, определенных в точках $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$; $Nh = 1$, обращающихся в нуль при $i = 0$ и $i = N$. Совокупность этих функций с обычными операциями сложения и умножения их на вещественные числа образует линейное пространство. Размерность этого пространства есть $N - 1$, поскольку система функций $\psi^{(p)} = \{\sqrt{2} \sin p\pi ih\}$, $p = 1, 2, \dots, N - 1$ образует ортонормальный базис в рассматриваемом пространстве, в котором скалярное произведение вводится следующим образом:

$$(v, \omega) = h \sum_{i=1}^{N-1} v_i \omega_i. \quad (9)$$

Множитель h здесь введен для согласования с непрерывным случаем. Если $v(x)$ и $\omega(x)$ — непрерывные функции на $[0, 1]$, то $(v, \omega) \rightarrow \int_0^1 v(x)\omega(x)dx$ при $N \rightarrow \infty$.

Любая сеточная функция $v = (v_0, v_1, \dots, v_N)$ разлагается по ортонормальному базису в сумму $v = \tilde{c}_1 \psi^{(1)} + \dots + \tilde{c}_{N-1} \psi^{(N-1)}$ или

$$v_i = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \sin p\pi ih, \quad (10)$$

где

$$\tilde{c}_p = (v, \psi^{(p)}) = \sqrt{2}h \sum_{i=1}^{N-1} v_i \sin p\pi ih. \quad (11)$$

Сумма (10) и есть разложение сеточной функции $v = \{v_i\}$ в дискретный ряд Фурье.

Итак, для построения решения в виде дискретного ряда Фурье надо вначале найти коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ в дискретный ряд Фурье по формулам:

$$\tilde{c}_p = (\bar{\varphi}, \psi^{(p)}) = \sqrt{2}h \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\varphi}_i \sin p\pi ih. \quad (12)$$

Здесь $\bar{\varphi} = \{\bar{\varphi}_i\}$ — сеточная функция, где $\bar{\varphi}_i = \varphi(ih)$, $i = 0, \dots, N$.

Затем строится решение по формуле

$$u(x, t) \approx \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p e^{-\pi^2 p^2 t} \sin(p\pi x). \quad (13)$$

22.4. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений.

Аппроксимация дифференциального оператора L разностным

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N$ — длина частичного разбиения и точки разбиения $x_i = i * h$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на M равных частей. Обозначим $\tau = \frac{T}{M}$, точки разбиения $t_k = k * \tau$, $k = 0, \dots, M$.

Построим сетку узлов (рис. 1) $\varpi_{\tau h} = \{(x_i, t_k), i = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}$.

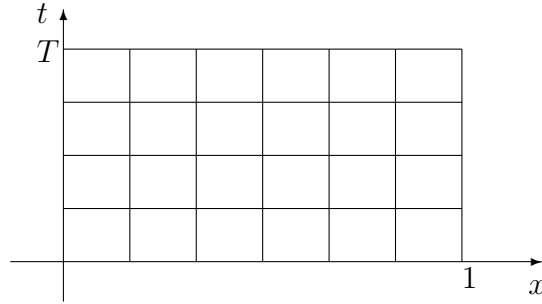


Рис. 1

Приближенное решение поставленной задачи (1)-(3) отыскивается в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega}_{h\tau}$. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k) сеточной функции $u^k = \{u_i^k\}$, определенной на слое k сеточной области $\overline{\omega}_{h\tau}$.

Используя аппроксимацию дифференциального выражения разностным, заменяем оператор L разностным оператором:

$$L_h u_i^k = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, M. \quad (14)$$

Здесь $L_h u_i^k$ — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный Lu в точке (x_i, t_k) со вторым порядком $(O(h^2))$ ¹⁸.

В теории разностных схем установилась традиция, когда не делают различия между матрицей и порождаемым ею линейным оператором. Здесь через оператор L_h (матрицу) обозначен оператор, который функции v со значениями $v_0 = 0, v_1, \dots, v_{N-1}, v_N = 0$ в точках x_0, x_1, \dots, x_N ставит в соответствие функцию со значениями в тех же точках равными $0, L_h v_1, \dots, L_h v_{N-1}, 0$.

Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} L_h \sin p\pi i h &= \frac{1}{h^2} (\sin p\pi(i+1)h - 2\sin p\pi i h + \sin p\pi(i-1)h) = \\ &= \frac{2}{h^2} (\cos p\pi h - 1) \sin p\pi i h = \mu_p \sin p\pi i h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\mu_p = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}$.

Отсюда следует, что собственной функции оператора L_h $\psi^{(p)} = \{\sqrt{2} \sin p\pi i h\}$ соответствуют собственные значения μ_p .

22.5. Построение сеточного решения по явной схеме с использованием ДРФ. Спектральный признак устойчивости

Аппроксимируем уравнение (1) в точке (x_i, t_{k-1}) :

¹⁸ Здесь и далее предполагается, что точное решение задачи достаточно гладкое, чтобы делать выводы о порядке аппроксимации.

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h u_i^{k-1}, \quad i = 1, \dots, N-1; \quad k = 1, \dots, M. \quad (16)$$

Начальное и граничные условия выписываем следующим образом:

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (17)$$

$$u_0^k = u_N^k = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (18)$$

Схема (16)-(18) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(h^2 + \tau)$.
Перепишем (16) следующим образом:

$$u_i^k = u_i^{k-1} + \tau L_h u_i^{k-1} = (E + \tau L_h) u_i^{k-1}. \quad (19)$$

Здесь E — тождественный оператор: $E u_i^{k-1} = u_i^{k-1}$.

Обозначим $S = (E + \tau L_h)$ — оператор (матрицу) перехода со слоя на слой, так что $u^k = S u^{k-1}$.

Относительно сеточных функций $u^k \equiv \{u_i^k\}$ аргумента i предполагается, что при каждом фиксированном k они принадлежат рассмотренному пространству, т. е. $u_0^k = u_N^k = 0$.

Матрица S — симметрическая и $\|S\|_2 = \max_p |\lambda_p|$, где

$$\lambda_p(S) = 1 + \tau \mu_p = 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}. \quad (20)$$

Выше было показано, что $u_i^0 = \varphi(ih)$ может быть представлена в виде дискретного ряда Фурье $u_i^0 = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \sin p\pi i h$, где $\tilde{c}_p = (\bar{\varphi}, \psi^{(p)}) = \sqrt{2} h \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\varphi}_i \sin p\pi i h$. Здесь $\bar{\varphi} = \{\bar{\varphi}_i\}$ — сеточная функция, где $\bar{\varphi}_i = \varphi(ih)$, $i = 0, \dots, N$.

Поэтому $u_i^1 = S \left(\sum_{p=1}^{N-1} \sqrt{2} \tilde{c}_p \sin p\pi i h \right) = \sum_{p=1}^{N-1} \sqrt{2} \lambda_p(S) \tilde{c}_p \sin p\pi i h$.

Для выполнения условия устойчивости процесса построения сеточного решения требуется, чтобы

$$\max |\lambda_p| = \max \left| 1 - 4r \sin^2 \frac{p\pi h}{2} \right| \leq 1, \quad r = \frac{\tau}{h^2}. \quad (21)$$

Это неравенство выполнено в случае, если $r \leq \frac{1}{2}$.

Итак, приведем расчетные формулы для построения решения:

$$u_i^0 = \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \sqrt{2} \sin p\pi i h, \quad (22)$$

$$\tilde{c}_p = (\bar{\varphi}, \psi^{(p)}) = h \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\varphi}_i \sin p\pi i h, \quad (23)$$

$$u_i^k = \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \lambda_p^k \sqrt{2} \sin p\pi i h. \quad (24)$$

Решение (24) есть искомое представление решения задачи в виде дискретного ряда Фурье и будет удовлетворять заданному начальному условию $u_i^0 = \varphi(ih)$.

Заметим, что для дальнейших исследований требуется строить решение с помощью ДРФ лишь в точках крупной сетки. Для этой цели следует пользоваться формулой:

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \lambda_p^k \sqrt{2} \sin p\pi x. \quad (25)$$

Здесь k — номер слоя, соответствующего значению t , так что $t = k * \tau$.

22.6. Построение сеточного решения по схеме с весами с использованием ДРФ. Спектральный признак устойчивости

Рассмотрим разностную схему более общего вида

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h((1 - \sigma)u_i^{k-1} + \sigma u_i^k), \quad i = 1, \dots, N-1; \quad k = 1, \dots, M, \quad (26)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, \dots, N, \quad (27)$$

$$u_0^k = u_N^k = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (28)$$

для той же дифференциальной задачи (1)-(3). Здесь σ — параметр.

Схема (26)-(28) аппроксимирует исходную задачу с порядком

$O(h^2 + \tau)$ при $\sigma = 0, 1$;

$O(h^2 + \tau^2)$ при $\sigma = \frac{1}{2}$;

$O(h^4 + \tau^2)$ при $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ ¹⁹.

Здесь матрица S^σ (оператор перехода со слоя на слой), очевидно, имеет вид

$$S^\sigma = (E - \sigma\tau L_h)^{-1}(E + (1 - \sigma)\tau L_h) \quad (29)$$

и собственные числа этой матрицы

$$\lambda_p^\sigma = \frac{1 + \tau(1 - \sigma)\mu_p}{1 - \tau\sigma\mu_p} \quad (30)$$

или

$$\lambda_p^\sigma = \frac{1 - \frac{4(1 - \sigma)\tau}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}}{1 + \frac{4\sigma\tau}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}}, \quad p = 1, 2, \dots, N-1. \quad (31)$$

Решение в узле (x_i, t_k) следует строить по формуле

$$u_i^k = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p (\lambda_p^\sigma)^k \sin p\pi i h. \quad (32)$$

Формула (32) и есть искомое представление решения задачи в виде дискретного ряда Фурье.

¹⁹При решении неоднородного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t)$ свободный член в разностной схеме должен иметь вид $f_i^{k-1/2} + h^2 L_h f_i^{k-1/2} / 12$ ([7, гл. V, §1. п. 3]).

Заметим еще раз, что для дальнейших исследований требуется строить решение с помощью ДРФ лишь в точках крупной сетки. Для этой цели следует пользоваться формулой:

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p(\lambda_p^\sigma)^k \sin p\pi x. \quad (33)$$

Здесь k — номер слоя, соответствующего значению t , так что $t = k * \tau$.

Устойчивость процесса имеет место, если $\max |\lambda_p^\sigma| \leq 1$ или

$$|1 - 4(1 - \sigma)r \sin^2 \frac{p\pi h}{2}| \leq |1 + 4\sigma r \sin^2 \frac{p\pi h}{2}|, \quad r = \frac{\tau}{h^2}. \quad (34)$$

Очевидно, что при $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ это неравенство выполняется, каково бы ни было g .

При $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ должно выполняться неравенство

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1 - 2\sigma)}. \quad (35)$$

Если $\sigma = 0$ ($\lambda_p^0 = \lambda_p$), то разностная схема превращается в уже рассмотренную выше явную разностную схему и для выполнения условия устойчивости при всех h нужно, чтобы $r \leq \frac{1}{2}$.

22.7. Задание

Для задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad T = 0.1, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T \end{aligned}$$

- 1) Построить аналитическое решение, используя ряд Фурье. Количество слагаемых в ряде выбирается экспериментально, исходя из заданной точности. Решение при $t = 0$ строить из начального условия (2). Обозначим uf .
- 2) Построить аналитическое решение, используя дискретный ряд Фурье (ДРФ) при $N = 5, 10, 20$.²⁰ Обозначим $udsf^{(N)}$.
- 3) Найти сеточное решение, используя ДРФ по схеме с весами при $N = 5, 10, 20$ для различных значений параметра σ .

Проанализировать результаты.

Программа должна содержать подпрограмму печати таблицы решения на “крупной” сетке независимо от шагов по t и x , с которыми строится решение, следующего вида:

²⁰Если решения должны различаться при разных N .

Таблица 1

x/t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
$T/5$						
$2T/5$						
$3T/5$						
$4T/5$						
T						

Представить следующие результаты:

- 1) Таблицу решения uf в точках “крупной” сетки в виде таблицы 1.
- 2) Привести $\|uf - udsf^{(N)}\| = \max |uf(x_i, t_k) - udsf^{(N)}(x_i, t_k)|$, $N = 5, 10, 20$.
Здесь \max выбирается по значениям модуля разности в точках “крупной” сетки, отмеченным в таблице 1.
- 3) Привести таблицу значений (Таблица 2) модуля разности uf^{21} и приближенных сеточных решений $\|uf - \bar{u}\|$, где \bar{u} — приближенное решение, полученное указанным в 1-ой графе методом.
 $\|uf - \bar{u}\| = \max |uf(x_i, t_k) - \bar{u}_i^k|$, здесь \max также выбирается по значениям модуля разности в точках “крупной” сетки. Проанализировать результаты.

Таблица 2

(h, τ)	(0.2, 0.02)	(0.1, 0.005)	(0.05, 0.00125)	(0.05, 0.005)
ДРФ $\sigma=0$				
ДРФ $\sigma=1$				
ДРФ $\sigma=1/2$				
ДРФ $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$				

22.8. Варианты задач

- 1) $\varphi(x) = \sin(\pi x)$.
- 2) $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$.
- 3) $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x(x-1)\right)$.
- 4) $\varphi(x) = x(1-x)$.
- 5) $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x(x-1)\right)$.
- 6) $\varphi(x) = \sin(3\pi x)$.
- 7) $\varphi(x) = (x-1) \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$.
- 8) $\varphi(x) = \sin(\pi x(x-1))$.

²¹В качестве uf решения можно взять решение, полученное в п. 2 $udsf$ при $N = 20$.

- 9) $\varphi(x) = x \sin \left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right).$
- 10) $\varphi(x) = \sin(5\pi x) + x(x-1).$
- 11) $\varphi(x) = 2 \sin(2\pi x) - \sin(3\pi x).$
- 12) $\varphi(x) = \sin(4\pi x).$
- 13) $\varphi(x) = \sin \left(\frac{\pi}{4}x(x-1) \right).$
- 14) $\varphi(x) = x(1-x).$
- 15) $\varphi(x) = \sin(3\pi x).$
- 16) $\varphi(x) = (x-1) \sin \left(\frac{\pi}{3}x \right).$
- 17) $\varphi(x) = \sin(\pi x(x-1)).$
- 18) $\varphi(x) = x \sin \left(\frac{\pi}{2}(x-1) \right).$
- 19) $\varphi(x) = \sin(5\pi x) + x(x-1).$
- 20) $\varphi(x) = 3 \sin(\pi x) - 0.5 \sin(2\pi x).$

А. Построение составной формулы Гаусса

Пусть p — количество узлов в формуле Гаусса;

m — количество разбиений промежутка интегрирования $[a, b]$, $h = (b - a)/m$, точки разбиения $a_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, m$, так что $a_m = b$, $mp = n$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_i+h} f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{h}{2}t + a_i + \frac{h}{2}\right) dt \approx \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^p B_j f\left(\frac{h}{2}t_j + a_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^p B_j f\left(\frac{h}{2}t_j + a + (2i+1)\frac{h}{2}\right). \end{aligned}$$

Здесь B_j , t_j — коэффициенты и узлы квадратурной формулы Гаусса.

Для реализации алгоритма метода механических квадратур необходимо получить выражения для A_k , x_k в формуле

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Очевидно, что коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{h}{2} B_1, \quad A_2 = \frac{h}{2} B_2, \dots, \quad A_p = \frac{h}{2} B_p, \\ A_{p+1} &= \frac{h}{2} B_1, \quad A_{p+2} = \frac{h}{2} B_2, \dots, \quad A_{2p} = \frac{h}{2} B_p, \\ A_{(m-1)p+1} &= \frac{h}{2} B_1, \quad A_{(m-1)p+2} = \frac{h}{2} B_2, \dots, \quad A_{mp} = \frac{h}{2} B_p, \end{aligned}$$

то есть $A_{ip+j} = \frac{h}{2} B_j$, $i = 0, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, p$.

Узлы квадратурной формулы:

$$x_{ip+j} = \frac{h}{2} t_j + a + (2i+1)\frac{h}{2}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad j = 1, \dots, p.$$

Напомним квадратурные формулы Гаусса для $p = 2$ и для $p = 3$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t)dt &\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \int_{-1}^1 f(t)dt &\approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right). \end{aligned}$$

Б. Указания к алгоритму программы по решению методом сеток уравнения параболического или гиперболического типов (Maple)

Программа должна содержать:

- 1) Подпрограмму печати элементов массива **array(0..5,0..5)**, например следующего содержания:

```
>prt:=proc(u)
  local i,k;
  for k from 0 to 5 do
    printf("\n");
    for i from 0 to 5 do
      printf("%10.5f",u[i,k]);
    od;
  od;
end proc;
```

- 2) Подпрограмму с параметрами, например, u, v , вычисления нормы разности решений, заданных таблично: $u := \text{array}(0..5,0..5)$ и $v := \text{array}(0..5,0..5)$, по формуле
$$\|u - v\| = \max_{i,j=0..5} |u_{ij} - v_{ij}|$$

- 3) Подпрограмму построения сеточного решения по явной схеме с параметрами:

N — число разбиений по оси x ,
 M — число разбиений по оси t .

Подпрограмма должна строить решение во всех точках сетки, например, массив u , а “возвращать” решение только в точках “крупной” сетки, например, массив us (таблица 1). Можно использовать следующий алгоритм заполнения массива us по элементам массива u :

```
> hx:=trunc(N/5);ht:=trunc(M/5);
  us:=array(0..5,0..5):
  for i from 0 to 5 do
    for k from 0 to 5 do
      us[i,k]:=u[i*hx,k*ht];
    od;
  od;
```

```
> prt(us); #печать решения на крупной сетке
```

- 4) Подпрограмму построения сеточного решения по неявной схеме с параметрами:

N — число разбиений по оси x ,
 M — число разбиений по оси t .
 σ — вес.

Подпрограмма должна строить решение во всех точках сетки (u), а “возвращать” решение только в точках “крупной” сетки (us) (таблица 1).

Далее, обращаясь к перечисленным выше подпрограммам, строятся таблицы вида 2 и 3.

В. Указания к алгоритму программы решения сеточных уравнений итерационными методами

Заметим, что в итерационных методах не следует хранить решение на каждой итерации, достаточно использовать два массива, например, $U0$ — для решения на предыдущей $(k-1)$ -ой итерации, $U1$ — для решения на k -ой итерации, затем выполнять пересылку командой $U0 := copy(U1)$.

Таким образом, в данной задаче достаточно хранить 4 двумерных массива: два для решений на двух соседних итерациях, один для значений правой части и один для точного решения (если оно задано).

Примерный план программы

- 1) Комментарий: ФИО, группа, постановка задачи, метод.
- 2) Задание исходных данных:
 - точность решения — ε ,
 - концы промежутков — l_x, l_y ,
 - число разбиений по оси x — N ,
 - число разбиений по оси y — M ,
 - $kmax$ — максимальное количество итераций. В отладочном варианте $kmax = 5$,
 - k — шаг печати характеристик в таблице 1. В отладочном варианте $k = 1$.
- 3) Вычисления:
 - шаг по оси — h_x ,
 - шаг по оси y — h_y ²²,
 - точки разбиения по оси x — $x_i, i = \overline{0, N}$,
 - точки разбиения по оси y — $y_i, i = \overline{0, M}$.
- 4) Объявление функций:
 - 4.1. Точное решение (если оно известно),
 - 4.2. $f(x, y)$,
 - 4.3. $p(x, y), q(x, y)$.
- 5) Объявление процедур:
 - 5.1. Вычисление $\|u - v\|$ (параметры u, v).
 - 5.2. Вычисление нормы невязки $\|L_h u + f\|$ (параметр u).
 - 5.3. Печать решения на “крупной” сетке.
 - 5.4. Печать “шапки” в таблице 1.
 - 5.5. Вычисление U^k (массив $U1$) через $U^{(k-1)}$ (массив $U0$) методом простой итерации (опт. пар.).
 - 5.6. Вычисление U^k (массив $U1$) через $U^{(k-1)}$ (массив $U0$) методом Зейделя.
 - 5.7. Вычисление U^k (массив $U1$) через $U^{(k-1)}$ (массив $U0$) другими методами.
 - 5.8. Процедуры вычисления решения заданным методом с заданной точностью, вычисление и печать заданных характеристик решения.
 - 5.8.1. Печать названия метода.
 - 5.8.2. Вычисление и печать требуемого теоретически количества итераций для достижения требуемой точности.
 - 5.8.3. Печать “шапки” таблицы через обращение к процедуре.

²² В случае области-квадрата взять $M = N, h_x = h_y = h$.

5.8.4. Предварительное присвоение переменных для последующего вычисления приближенного спектрального радиуса.

5.8.5. $\text{erru} := 2 * \text{eps}$;

5.8.6. **Цикл: по k от 1 до k_{\max} пока $\text{erru} > \varepsilon$ выполнить**

5.8.6.1. Обращение к процедуре вычисления решения на следующей итерации $U1$ заданным методом.

5.8.6.2. Вычисление $\|U^k - U^{k-1}\|$ через обращение к процедуре с параметрами $U1$, $U0$.

5.8.6.3. Вычисление приближения к спектральному радиусу.

5.8.6.4. Далее следует вставить проверку, требуется ли печатать характеристики решения на k -ой итерации, т.е. кратно ли k pk , например следующим способом:

if abs(round(k/pk)- k/pk) < 0.0001 then ...

Если печатать надо, то следует вычислить и напечатать характеристики решения Ri , которые приведены в таблице 1, здесь i — номер столбца в таблице 1.

$R2 =$ (обращение к процедуре вычисления невязки k -го приближения к решению — $U1$).

$R3 = R1 / \|AU^0 - F\|$ ($\|AU^0 - F\|$ вычислена ранее)

Далее вычисляются $R4$, $R5$, $R7$, $R8 = \sqrt{r_{k-1} \cdot r_k}$ согласно формулировке задачи (п. 6.5).

Печать k , $R2$, $R3$, $R4$, $R5$, $R6$, $R7$, $R8$ в столбцах, соответствующих “шапке” таблицы.

Конец условного оператора

$U0 = U1$ (поэлементно в цикле или с использованием функции **copy** для подготовки вычисления решения на следующей итерации).

Конец цикла по k .

5.8.7. Печать полученного приближенного решения на “крупной” сетке.

6) Главная программа

6.1. Построение массива значений правой части в узлах сетки²³.

6.2. Построение массива значений точного решения U^* в узлах сетки. Печать на “крупной” сетке точного решения.

6.3. Вычисление и печать нормы невязки точного решения (меры аппроксимации) $\|F - AU^*\|$.

6.4. Построение массива значений нулевого приближения $U0$, например, по следующему алгоритму: присваивание элементам массива для нулевого приближения значений точного решения, а затем “обнуление” значений во внутренних узлах сетки — тем самым будет обеспечено удовлетворение граничным условиям. Вычисление и печать $\|F - AU^0\|$.

Вычисление и печать $\|U^* - U^0\|$.

6.5. Построение массива значений для решения на следующей итерации $U1$, удовлетворяющего граничным условиям — например, командой $U1 := \text{copy}(U0)$.

6.6. Вычисление границ спектра δ , Δ матрицы A .

6.7. Вычисление спектрального радиуса $\rho(H) = (\Delta - \delta) / (\Delta + \delta)$.

6.8. Вычисление других необходимых параметров.

7) Обращение к процедурам вычисления решения заданным методом (п. 5.8).

²³ Все массивы перед использованием объявить.

Г. Указания к алгоритму программы решения задачи Дирихле методом переменных направлений

Заметим, что в итерационных методах не следует хранить решение на всех слоях, в методах переменных направлений для двумерной задачи достаточно использовать три массива, например, $u0$ — для решения на предыдущем k -ом слое, $u1$ — для решения на $(k + 1)$ -ом слое, $u12$ — для решения на промежуточном $(k + 1/2)$ слое, затем выполнять пересылку, например, командой $u0 := copy(u1)$.

Таким образом, в данной задаче достаточно хранить 5 двумерных массивов: три для приближенных решений, один для значений правой части и один для точного решения (если оно задано).

Примерный план программы

- 1) Комментарий: ФИО, группа, постановка задачи, метод.
- 2) Задание исходных данных:
 - точность решения — ε ,
 - концы промежутков — l_x, l_y ,
 - число разбиений по оси x — N_x ,
 - число разбиений по оси y — N_y ,
 - шаг по оси t — τ ,
 - максимальное количество слоев по t — k_{max} . В отладочном варианте $k_{max}=5$.
- 3) Вычисления:
 - шаг по оси x — h_x ,
 - шаг по оси y — h_y ²⁴,
 - точки разбиения по оси x — $x_i, i = \overline{0, N_x}$,
 - точки разбиения по оси y — $y_i, i = \overline{0, N_y}$.
- 4) Объявление функций:
 - 4.1. Точное решение (если оно известно),
 - 4.2. $f(x, y)$,
 - 4.3. $p(x, y), q(x, y)$.
- 5) Объявление процедур:
 - 5.1. Вычисление $\|u - v\|$ (параметры u, v).
 - 5.2. Вычисление нормы невязки $\|\Lambda u + F\|$ (параметр u).
 - 5.3. Печать решения u на “крупной” сетке (параметр u).
 - 5.4. Печать “шапки” в таблице 1.
 - 5.5. Вычисление $u^{k+1/2}$ (массив $u12$) через u^k (массив $u0$).
Вычисление u^{k+1} (массив $u1$) через $u^{k+1/2}$ (массив $u12$).
 - 5.7. Печать полученного приближенного решения на “крупной” сетке (параметр u).
- 6) Главная программа
 - 6.1. Построение массива значений правой части в узлах сетки²⁵.
 - 6.2. Построение массива значений точного решения u^* в узлах сетки. Печать на “крупной” сетке точного решения.

²⁴ В случае области-квадрата взять $N_y = N_x, h_x = h_y = h$.

²⁵ Все массивы перед использованием объявить.

6.3. Вычисление и печать нормы невязки точного решения (меры аппроксимации) $\|\Lambda u^* + F\|$.

6.4. Построение массива значений нулевого приближения u^0 , например, по следующему алгоритму: присваивание элементам массива для нулевого приближения значений точного решения, а затем “обнуление” значений во внутренних узлах сетки — тем самым будет обеспечено удовлетворение граничным условиям.

Вычисление и печать $\|\Lambda u^0 + F\|$.

Вычисление и печать $\|u^* - u^0\|$.

6.5. Построение массивов значений для решения на следующей итерации $u12$, $u1$, удовлетворяющих граничным условиям — например, командами $u12 := \text{coru}(u0)$, $u1 := \text{coru}(u0)$.

- 7) Обращение к процедурам вычисления решения заданным методом, вычисление и печать заданных характеристик решения.

Список литературы

- [1] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.. Вычислительные методы: Учебное пособие. 4-е изд., СПб., 2014.
- [2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М., 2001.
- [3] Годунов С.К., Рябенький В.С.. Разностные схемы. М., 1977.
- [4] Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. СПб., 2006.
- [5] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т. I, II. М., 1977.
- [6] Марчук Г.И. Методы расщепления. М., 1988.
- [7] Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1983.
- [8] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб., 2002.
- [9] Практикум по численным методам / Воронкова А.И., Даугавет И.К., Марданов А.А. и др. СПб., 2003.