Чисельні методи

Нікіта Скибицький

10 лютого 2019 р.

Зміст

0.1 Метод невизначених коефіцєнтів

Нехай задана сіткова функція $y = f(x)$, у вузлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Побудуємо формулу для похідної:

$$y^{(k)}(x_i) \approx C_0 \cdot y_0 + C_1 \cdot y_1 + \ldots + C_n \cdot y_n = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot y(x_k). \tag{0.1.1}$$

Запишемо тоді формулу для похибки:

$$r_n^{(k)} = y^{(k)}(x_i^\alpha) - \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot x_k^\alpha = 0. \tag{0.1.2}$$

Підставляючи $\alpha = \overline{0, n}$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно C_i.

Приклад 1. Побудувати формулу чисельного диференціювання у точці x_1 методом невизначених коефіцієнтів для $n = 3$ за значеннями y_i у рівновіддалених вузлах $x_i = x_0 + ih$.

Розв'язок. $n = 3$, тому розглянемо функції $(x - x_0)^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Для точки x_1 маємо:

$$y'(x_1) = C_0 \cdot y_0 + C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + C_3 \cdot y_3.$$

З (0.1.2)

$$C_0 \cdot (x_0 - x_0)^\alpha + C_1 \cdot (x_1 - x_0)^\alpha + C_2 \cdot (x_2 - x_0)^\alpha + C_3 \cdot (x_3 - x_0)^\alpha = (x - x_0)|_{x=x_1}. \tag{0.1.3}$$

Зауваження. *Коли* $y(x) = x^\alpha$*:*

$$(x_i^\alpha)^{(k)} - \sum_{i=0}^{n} C_k \cdot x_k^\alpha = 0, \quad \alpha = \overline{0, n} \tag{0.1.4}$$

Звідси отримуємо систему

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 \cdot h + C_2 \cdot (2h) + C_3 \cdot (3h) = 1, \\ C_1 \cdot h^2 + C_2 \cdot (2h)^2 + C_3 \cdot (3h)^2 = 2h, \\ C_1 \cdot h^3 + C_2 \cdot (2h)^3 + C_3 \cdot (3h)^3 = 3h^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи її знаходимо

$$C_0 = \frac{1}{6h} \cdot (-2), \quad C_1 = \frac{1}{6h} \cdot (-3), \quad C_2 = \frac{1}{6h} \cdot (6), \quad C_0 = \frac{1}{6h} \cdot (-1),$$

що дає наступну формулу

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_1} \approx \frac{-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3}{6h}.$$

0.2 Обчислювальна стійкість формул чисельного диференціювання

Сьогодні ми будемо ще говорити про таку річ як наближення функцій. Ситуація наступна: якщо у нас вхідні дані для сіткової функції задані з деякою похибкою. Як ця точність буде впливати на точність фомрули чисельного диференціювання

0.2.1 Приклад Адамара

Розглянемо довільну функцію $f(x)$ і модифікуємо її наступним чином:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \frac{1}{n} \cdot \sin(\omega x),$$

де $n \to \infty$ – параметр. Тоді з одного боку матимемо

$$\left\| \tilde{f} - f \right\|_C \le \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0,$$

а з іншого

$$\tilde{f}'(x) = f' + \frac{\omega}{n} \cdot \cos(\omega x),$$

а тому якщо покласти $\omega = n^2$ то отримаємо

$$\left\| \tilde{f}' - f' \right\|_C \le \frac{\omega}{n} = n \underset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Тобто задача чисельного диференціювання не є стійкою, а тому і не є коректною.

Приклад. Нехай f_i задані з похибкою ε_i. Визначити обчислювальну похибку наступної формули чисельного диференціювання:

$$f'(x_i) \approx f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \tag{0.2.1}$$

Розв'язок. Методом розвинення в ряд Тейлора знайдемо похибку апроксимації для формули (0.2.1):

$$r_1'(x)i) = f'(x_i) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f_i' - \frac{f_i + h \cdot f_i' + \frac{h^2}{2} \cdot f_i'' - f_i}{h} - O(h^2) =$$
$$= -\frac{h}{2} \cdot f_i'' + O(h^2) =: r_1'(x_1) + .$$

Давайте тепер подивимося на загальну похибку обчислень $R(h)$. Зрозуміло, що це буде похибка апроксимації і ще щось, а саме:

$$\tilde{f}_i = f_i + \varepsilon_i,$$

тому насправді ми будемо обчислювати

$$\frac{\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{h} \tag{0.2.2}$$

Нехай у формулі (0.2.2) усі ε_i не перевищують заданого ε, а через M_2 позначимо, як зааждди макс
Таким чином загальна похибка

$$R(h) = -\frac{h}{2} \cdot f''(x_i) + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{h}. \tag{0.2.3}$$

Тоді

$$|R(h)| \leq \frac{h}{2} \cdot M_2 + \frac{2\varepsilon}{h}. \tag{0.2.4}$$

Таким чином при $h \to 0$ перший доданок $\to 0$, а другий $\to +\infty$.

Візьмемо функцію $g(h) = \frac{h \cdot M}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}$, тоді

$$g'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\varepsilon}{h^2} = 0,$$

звідки

$$h_0 = 2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{M_2}},$$

тобто оптимальне h, для якого g буде оптимальною, а саме

$$g(h_0) = 2\sqrt{\varepsilon \cdot M_2}. \tag{0.2.5}$$

Хочеться звернути увагу на те, що навіть якщо ε це позибка вводу даних до комп'ютера, то при обчисленні за нашою формулою ми будемо мати вже удвічі менше вірних цифр.

Задача 0.1. Знайти обчислювальну похибну наступних формули чисельного диференціювання:

1. $f''_i \approx f_{\bar{x}x,i}$;
2. $f_i \approx f_{\bar{x},i}$;
3. $f'_i \approx f_{\mathring{x}x,i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$;

1 Апроксимація функцій

Виникає наступне запитання: чого це ми маємо вимагати від поліному щоб він точно проходив через значення функції які ми навіть точно не знаємо? Отже постає задача: нехай є $f(x) in R$, хочемо побудувати функцію $\Phi(x)$ таку що $\|f(x) - \Phi(x)\| \leq \varepsilon$. Виникає ще багато запитань до цієї постановки.

1.1 Елементи найкращого наближення

Нехай R – лінійний нормований простір. У цьому просторі виберемо систему лінійно незалежних функції $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n} \subset R$ і позначимо наступну множину

$$M_n: \quad \Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot \varphi_i, \tag{1.1.1}$$

тоді

$$\Delta(d, \varphi) = \|f - \Phi\| \tag{1.1.2}$$

$f \in R$, $\Phi \in M_n$

$$\Delta(f) = \inf_{\Phi \in M_n} \Delta(f, \Phi) \tag{1.1.3}$$

Елемент на якому досягається інфімум позначимо Φ_0, тобто

$$\Delta(f) = \|f - \Phi_0\| = \inf_{\Phi \in M_n} \Delta(f, \Phi). \tag{1.1.4}$$

Визначення. Елемент Φ_0 з M_n для якого виконується (1.1.4) називається елементом найкращого наближення елементу f простору R.

Теорема 1.1.1. *Для будь-якого елементу f з лінійного нормованого простору R існує елемент найкращого наближення $\Phi_0 \in M_n$, причому множина елементів найкращого наближення є опуклою.*

Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi(C_0, C_1, \dots, C_n) = \left\| f - \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot \varphi_i \right\|. \tag{1.1.5}$$

Виходячи з виразу для $|\varphi(C^1) - \varphi(C^2)|$:

$$\left| \left\| f - \sum_{i=0}^{n} C_i^1 \cdot \varphi_i \right\| - \left\| f - \sum_{i=0}^{n} C_i^2 \cdot \varphi_i \right\| \right| \le \\ \le \left\| \sum_{i=0}^{n} \left(C_i^1 - C_i^2 \right) \cdot \varphi_i \right\| \le \left\| \sum_{i=0}^{n} \left| C_i^1 - C_i^2 \right| \cdot \varphi_i \right\| \tag{1.1.6}$$

маємо, що функція φ є неперервною функцією своїх аргументів $C_0, C_1, \dots, C_n$.

Розглянемо множину таку, що $\|\Phi\| > 2\|f\|$, тоді $\|f - \Phi\| \ge \|\Phi\| - \|f\| > 2\|f\| - \|f\| = \|f\| \ge \Delta(f)$, де остання нерівність випливає з підстановки

$C_0 = C_1 = \ldots = C_n = 0.$

Розглнемо другу область, $\|\Phi\| \leq \|f\|$. На цьому компакті ми знаємо, що $\|\Phi\|$ досягає свого екстремуму, зокрема інфімуму, тобто елемент найкращого наближення існує.

Покажемо, тепер, що якщо Φ_0 і $\tilde{\Phi}_0$ є елементами найкращого наближення, то і $\Phi_2 = a \cdot \Phi_0 + b \cdot \tilde{\Phi}_0$, де $a + b = 1$ буде елементом найкращого наближення.

Розгялнемо

$$\begin{aligned} \Delta(f) \leq \|f - \Phi_2\| = \|(a+b) \cdot f - (a \cdot \Phi_0 + b \cdot \tilde{\Phi}_0)\| \leq \\ \leq \|a \cdot \|f - \Phi_0\| + b \cdot \|f - \tilde{\Phi}_0\| = \\ = a \cdot \Delta(f) + b \cdot \Delta(f) = \Delta(f), \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

тобто Φ_2 – елемент найкращого наближення. □

Теорема 1.1.2. *Якщо R – гільбертів, то елемент найкращого наближення існує і єдиний.*

Спочатку доведемо ось що:

Лема 1.1.1. *якщо Φ_0 – елемент найкращого наближення, то*

$$(f - \Phi_0, \Phi) = 0, \quad \forall \Phi \in M_n. \tag{1.1.8}$$

Доведення. Справді, від супротивного, нехай існує Φ_1 (без обмеження загальності $\|\Phi_1\| = 1$)такий, що

$$(f - \Phi_0, \Phi_1) = \alpha \neq 0 \tag{1.1.9}$$

Тоді знайдеться краще наближення. Справді, розгялнемо

$$\Phi_2 = \Phi_0 + \alpha \cdot \Phi_1 \in M_n,$$

тоді

$$\begin{aligned} \|f - \Phi_2\|^2 = (f - \Phi_0 - \alpha \cdot \Phi_1, f - \Phi_0 - \alpha \cdot \Phi_1) = \\ = \|f - \Phi_0\|^2 - |\alpha| \cdot (f - \Phi_0, \Phi_1) - \alpha \cdot (\Phi_1, f - \Phi_0) + |\alpha^2| \cdot \|\Phi_1\|^2 = \\ = \|f - \Phi_0\|^2 - |\alpha|^2, \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

виходить протиріччя з тим, що Φ_0 – елемент найкращого наближення, бо

$$\|f - \Phi_2\| < \Delta(f). \tag{1.1.11}$$

□

Повернемося тепер до доведення теореми:

Доведення. Зрозуміло що він існує, бо гільбертів простір – частковий випадок лінійного нормованого простору.

Покажемо тепер що він єдиний. Припустимо протилежне, тобто $\exists \Phi_0, \tilde{\Phi}_0$, тоді розглянемо

$$\begin{aligned}(\Phi_0 - \tilde{\Phi}_0, \Phi_0 - \tilde{\Phi}_0) = (\Phi_0 - f + f - \tilde{\Phi}_0, \Phi_0 - \tilde{\Phi}_0) = \\ = (\Phi_0 - f, \Phi_0 - \tilde{\Phi}_0) + (f - \tilde{\Phi}_0, \Phi_0 - \tilde{\Phi}_0) = 0 + 0 = 0, \quad (1.1.12)\end{aligned}$$

отже $\Phi_0 = \tilde{\Phi}_0$. □