7. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (формулы типа Гаусса)

7.1. Общие сведения

Требуется вычислить приближенно интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

где подынтегральная функция не является достаточно гладкой на промежутке интегрирования и, значит, не допускает хорошего приближения многочленами. Естественно представить подынтегральную функцию в виде $\varphi(x) = \rho(x)f(x)$, $\rho(x)$ содержит особенности функции $\varphi(x)$, а $f(x)$ является достаточно гладкой функцией. Далее будем рассматривать квадратурную формулу вида

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{1}$$

где x_k — узлы квадратурной формулы, A_k — коэффициенты,

$\rho(x)$ — весовая функция и должна удовлетворять следующим условиям:

- ρ(x)$\geq$0 при $x \in [a, b]$;
- существуют моменты весовой функции $\mu_k = \int\limits_a^b \rho(x)x^k dx < \infty,\ k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;$
- μ_0>0.

Квадратурная формула будет интерполяционной, если

$$A_k = \int_a^b \rho(x)\frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}\, dx, \tag{2}$$

где $\omega(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - x_i)$.

Примеры:

$$\int_0^1 x^\alpha \cos x\, dx, \quad \int_0^1 (1-x)^\alpha e^x\, dx \quad (\alpha > -1).$$

Теорема 1. *Для того чтобы квадратурная формула* (1) *была точна для любого многочлена степени не выше* $2n - 1$*, необходимо и достаточно, чтобы:*

- *узлы* $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ *являлись корнями ортогонального относительно веса* $\rho(x)$ *и отрезка* $[a, b]$ *многочлена* $w(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$*;*
- *формула* (1) *была интерполяционной.*

Теорема 2 (О погрешности)**.** *Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ конечен. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную на $[a, b]$ производную порядка $2n$, то существует точка $\eta \in [a, b]$, такая что погрешность квадратурной формулы (1) гауссова типа имеет представление*

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x)\omega^2(x)dx.$$

7.2. Построение квадратурной формулы типа Гаусса

Узлы находим из первого условия теоремы

$$\int\limits_a^b \rho(x)\omega_n(x)\omega_i(x)\,dx = 0,\ i = 0,\ 1, \dots, (n-1).$$

Очевидно, что достаточно потребовать ортогональности многочлена $w_n(x)$ относительно веса $\rho(x)$ и отрезка $[a, b]$ к одночленам x^i, $i = 0,\ 1, \dots, (n-1)$. Таким образом, коэффициенты искомого многочлена $w_n(x)$ являются решением системы

$$\int\limits_a^b \rho(x)(x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-2} + \dots + a_n)\,x^i\,dx = 0,\ i = 0,\ 1, \dots, (n-1).$$

Учитывая обозначения

$$\mu_k = \int\limits_a^b \rho(x)x^k\,dx,$$

получим следующую систему линейных уравнений относительно $a_1,\ a_2, \dots, a_n$:

$$\begin{cases}
a_1\,\mu_{n-1} & +a_2\,\mu_{n-2} & + & \cdots & +a_n\,\mu_0 & = & -\mu_n, \\
a_1\,\mu_n & +a_2\,\mu_{n-1} & + & \cdots & +a_n\,\mu_1 & = & -\mu_{n+1}, \\
\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\
a_1\,\mu_{2n-2} & +a_2\,\mu_{2n-3} & + & \cdots & +a_n\,\mu_{n-1} & = & -\mu_{2n-1}.
\end{cases}$$

Система имеет единственное решение.
Узлы — решения уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ вещественны, различны и лежат внутри промежутка $[a, b]$.
Коэффициенты A_k находятся по формуле (2).
Известно, что $A_k > 0,\ k = 1, \dots, n$.
Алгебраическая степень точности формулы $d = 2\,n - 1$, формула точно интегрирует многочлены 0-ой степени, следовательно

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \int\limits_a^b \rho(x)\ dx = \mu_0.$$

Приведем алгоритм построения формулы типа Гаусса для $n = 2$.

1) Вычислить моменты $\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$.

2) Построить систему
$$\begin{cases} a_1\,\mu_1 + a_2\,\mu_0 = -\mu_2, \\ a_1\,\mu_2 + a_2\,\mu_1 = -\mu_3. \end{cases}$$

3) Вычислить a_1, a_2, например, по правилу Крамера
$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\mu_2 & \mu_0 \\ -\mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_0\mu_3 - \mu_2\mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2\mu_0},$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mu_1 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_2^2 - \mu_3\mu_1}{\mu_1^2 - \mu_2\mu_0}.$$

4) Решить уравнение $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$. Узлы должны быть вещественны, различны и должны принадлежать (a, b).

5) Вычислить коэффициенты квадратурной формулы.
$$A_1 = \int_a^b \rho(x) \frac{x - x_2}{(x_1 - x_2)}\ dx = \frac{1}{x_1 - x_2}(\mu_1 - x_2\mu_0),$$

$$A_2 = \int_a^b \rho(x) \frac{x - x_1}{(x_2 - x_1)}\ dx = \frac{1}{x_2 - x_1}(\mu_1 - x_1\mu_0).$$

Проверка: коэффициенты должны быть положительны и $A_1 + A_2 = \mu_0$.

Построена формула:
$$\int_a^b \rho(x) f(x)\ dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),$$
которая должна быть точна для $f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$.

7.3. Частные случаи формулы типа Гаусса

7.3.1. Формула Гаусса

$\rho(x) \equiv 1,\ [a, b] = [-1, 1]$. Узлы — корни многочлена Лежандра
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \tag{3}$$
а коэффициенты могут быть вычислены по формуле
$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P_n'(x_k)]^2}. \tag{4}$$

Приведем формулы Гаусса для $n = 1,\ 2,\ 3.$

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\ dx \approx 2f(0),$$
$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\ dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\ dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

Погрешность формулы Гаусса имеет оценку

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n} = C_n M_{2n}, \tag{5}$$

где $M_{2n} = \max|f^{2n}(\xi)|$, $\xi \in [-1, 1]$.

Отметим, что коэффициенты C_n быстро убывают:

$$C_1 = \frac{1}{3},\ C_2 = \frac{1}{135},\ C_3 = \frac{1}{15750},\ C_4 = \frac{1}{3472875}.$$

Замечание 1. При вычислении интеграла по промежутку $[a, b]$ следует выполнить замену переменной $x = \dfrac{(b-a)}{2} t + \dfrac{(b+a)}{2}$, $dx = \dfrac{(b-a)}{2}\, dt$, так что

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}\right) dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{n} A_k f\left(\frac{b-a}{2}\, t_k + \frac{b+a}{2}\right).$$

Здесь $t_k,\ A_k$ — соответственно узлы и коэффициенты формулы Гаусса для $[-1, 1]$.
Для погрешности формулы Гаусса на промежутке $[a, b]$ имеем оценку

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{(b-a)}{2} \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \left(\frac{(b-a)}{2}\right)^{2n} M_{2n} = C_n^{[a,b]} M_{2n}, \tag{6}$$

где $C_n^{[a,b]} = C_n \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^{2n+1}$, $M_{2n} = \max|f^{2n}(\xi)|$, $\xi \in [a, b]$.

Замечание 2. Для составной формулы Гаусса с m разбиениями погрешность

$$|R_n(f)| \leqslant C_n^{[0,1]} (b-a) \left(\frac{b-a}{m}\right)^{2n} M_{2n}, \tag{7}$$

то есть при уменьшении длины частичного промежутка вдвое погрешность уменьшается в 2^{2n} раз.

7.3.2. Формула Мелера

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ [a,b] = [-1,1].$$

Узлы — корни многочлена Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\ dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right). \tag{8}$$

7.4. Варианты заданий

Вариант 1

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \cos(x)\sqrt{x}\, dx$$

следующими способами:

1) "Точно".
2) По формуле Симпсона с 3 узлами.
3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt{x}$ по узлам $x_1{=}0, x_2{=}1/2,\ x_3{=}1$ и вычислить интеграл по этой формуле.
4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 2

Требуется вычислить

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx$$

следующими способами:

1) "Точно".
2) По формуле средних прямоугольников с 2 узлами.
3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt{x}$ по узлам $x_1 = 1/4, x_2 = 3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 3

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 \cos(x)\sqrt[4]{x}\,dx$$

следующими способами:

1) "Точно".
2) По формуле средних прямоугольников с 2 узлами.
3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[4]{x}$ по узлам $x_1{=}1/4$, $x_2{=}3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.
4) По формуле Гаусса с 3 узлами.
5) Построить формулу типа Гаусса с 3 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 4

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

следующими способами:

1) "Точно".
2) По формуле средних прямоугольников с 3 узлами.
3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt[3]{x}$ по узлам $x_1{=}1/6$, $x_2{=}1/2$, $x_3{=}5/6$ и вычислить интеграл по этой формуле.
4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 5

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

следующими способами:

1) "Точно".
2) По формуле средних прямоугольников с 2 узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt[3]{x^2}$ по узлам $x_1=1/4$, $x_2=3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с 3 узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с 3 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 6

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[4]{1-x}}\,dx$$

следующими способами:

1) "Точно".

2) По формуле средних прямоугольников с 3 узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt[4]{1-x}$ по узлам $x_1=1/6$, $x_2=1/2$, $x_3=5/6$ и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с 2 узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 7

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 e^x\sqrt{1-x}\,dx$$

следующими способами:

1) "Точно".

2) По формуле Симпсона с 3 узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt{1-x}$ по узлам $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x_3=1$ и вычислить по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с 2 узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 8

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

следующими способами:

1) “Точно”.
2) По формуле средних прямоугольников с 3 узлами.
3) Построить интерполяционную формулу с весом $1/\sqrt{1-x}$ по узлам $x_1{=}1/6$, $x_2{=}1/2$, $x_3{=}5/6$ и вычислить интеграл по этой формуле.
4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 9

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 \cos(x)\sqrt[3]{1-x}\,dx$$

следующими способами:

1) “Точно”.
2) По формуле Симпсона с 3 узлами.
3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[3]{1-x}$ по узлам $x_1{=}0$, $x_2{=}1/2$, $x_3{=}1$ и вычислить интеграл по этой формуле.
4) По формуле Гаусса с 2 узлами.
5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 10

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 \sin(x)\sqrt[4]{(1-x)^3}\,dx$$

следующими способами:

1) “Точно”.
2) По формуле средних прямоугольников с 2 узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt[4]{(1-x)^3}$ по узлам $x_1{=}1/4$, $x_2{=}3/4$ и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с 2 узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 11

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos(2x)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

следующими способами:

1) "Точно".

2) По формуле средних прямоугольников с 3 узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ по узлам $x_1=\dfrac{1}{6}$, $x_2=\dfrac{1}{2}$, $x_3=\dfrac{5}{6}$ и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с 2 узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.

Вариант 12

Требуется вычислить

$$\int\limits_0^1 \cos(x)\sqrt{1-x}\,dx$$

следующими способами:

1) "Точно".

2) По формуле Симпсона с 3 узлами.

3) Построить интерполяционную формулу с весом $\sqrt{1-x}$ по узлам $x_1{=}0$, $x_2{=}1/2$, $x_3{=}1$ и вычислить интеграл по этой формуле.

4) По формуле Гаусса с 2 узлами.

5) Построить формулу типа Гаусса с 2 узлами и вычислить интеграл по этой формуле.

Все результаты сравнить с точным значением — вычислить фактическую погрешность.