Чисельні методи

Нікіта Скибицький

10 лютого 2019 р.

Зміст

0.1 Елемент найкращого середньоквадратичного наближення

Ми зараз будемо розглядати елементи найкращого наближення в різних конкретних гілбертових просторах, але загальну теорію сформулюємо для абстрактного гільбертового простору H.

Отже, нехай $R = H$, тоді $\exists!$ ЕНН. Тоді

$$\Delta(f, \Phi) = \|f - \Phi\|. \tag{0.1.1}$$

А наша формальна задача набуває вигляду: знайти

$$\inf_{\Phi \in M_n} \Delta(f, \Phi) = \Delta(f). \tag{0.1.2}$$

Тоді ЕНН Φ_0 має вигляд:

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi_i, \tag{0.1.3}$$

де $\varphi_i \in M_n$.

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi_i \right\|^2 = (f, f) + \sum_{i,j=0}^{n} c_i c_j \cdot (\varphi_i, \varphi_j) - 2 \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot (f, \varphi_i). \tag{0.1.4}$$

Для ЕНН Φ_0 з (**??**) маємо:

$$(f - \Phi_0, \Phi = 0), \quad \forall \Phi \in M_n,$$

а тоді

$$(f - \Phi_0, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{0, n}. \tag{0.1.5}$$

Підставляючи в (0.1.5) вираз (0.1.3) будемо мати наступне:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \cdot (\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{0, n}. \tag{0.1.6}$$

Це є СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів c_j.

Якщо система функцій $\{\varphi_i\}$ є лінійно-незалежною, то матриця $G = (g_{i,j})_{i,j=\overline{0,n}}$, то $detG \neq 0$ і система (0.1.6) матиме єдиний розв'язок.

Система (0.1.6) має симетричну матрицю, тому доцільно розв'язувати (0.1.6) методом квадратних коренів, тобто можемо записати її ще у такому вигляді:

$$G\overline{c} = \overline{F}, \tag{0.1.7}$$

де

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

Відхилення ЕНН у цьому випадку визначатиметься за формулою:

$$\Delta(f) = \|f - \Phi_0\|. \tag{0.1.8}$$

Зауваження. *Систему вигляду* (0.1.6) *можна отримати виходячи з* (**??**). *Справді, якщо ми візьмемо праву частину* (0.1.4) *і позначимо її через функціонал від с,* $\Phi(c)$, *і запишемо* $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$.

Таким чином ми побудували алгоритм і нібито все добре, але нагадаємо таку річ як число обумовленості:

$$cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|.$$

Ситуація наступна: нехай $\{\varphi_i\} = \{x^i\}_{i=0}^{\infty}$, тоді якщо ми візьмемо

$$\Phi_n = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i$$

і будемо шукати ЕНН у такому вигляді, то для $H = L_2([0,1])$. У цьому випадку

$$g_{i,j} = \int_0^1 x^i \cdot x^j \, \mathrm{d}x = \frac{1}{i+j+1}, \quad i,j = \overline{0,n},$$

а тоді $cond(G) \approx 10^8$ при $n = 7$, $cond(G) \approx 10^9$ при $n = 8$ і так далі, тобто дуже швидко росте, тобто система (0.1.6) буде дуже погано обумовленою.

Теорема 0.1.1 (Мюнца)**.** *Система функцій* $1, \{x^{n_i}\}$, $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ *буде повною якщо ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n_i}$$

буде розбігатися.

Якщо ж у (0.1.6) ми розглянемо ортогональну систему функцій $\{\varphi_i\}$ простору H, то матриця G системи (0.1.6) буде діагональною, а c_i можна буде знайти за формулами

$$c_i = \frac{(f,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)}, \quad i = \overline{0,n}, \tag{0.1.9}$$

а Φ_0 можна буде як і раніше знайти за формулою (0.1.3):

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi_i.$$

Нагадаємо умови ортогональності:

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j. \end{cases}$$

У цьому випадку з (0.1.4) будемо мати, що

$$\|f - \Phi\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i^2 \cdot \|\varphi_i\|^2. \tag{0.1.10}$$

Якщо ж $\{\varphi\}$ – ортонормована ситсема функцій, тобто

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

У цьому випадку розв'язок системи (0.1.6) матиме вигляд

$$c_i = (f,\varphi_i), \quad i = \overline{0,n}, \tag{0.1.11}$$

$$\Phi_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi_i, \tag{0.1.12}$$

$$\Delta^2(f) = \|f - \Phi_0\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i^2. \tag{0.1.13}$$

Можемо записати розвинення функції f в ряд Фур'є:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (f, \varphi_i) \cdot \varphi_i, \tag{0.1.14}$$

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2.$$

Тоді виходячи з (0.1.13) будемо мати, що

$$\Delta^2(f) = \|f - \Phi_0\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Зауваження. *Якщо система функцій $\{\varphi_i\}$ ортогональна з ваговим коефіцієнтом ρ, тобто*

$$(\varphi_i, \varphi_j)_\rho = (\rho\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j, \end{cases}$$

то у цьому випадку формула (0.1.9) *набуде вигляду*

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)_\rho}{(\varphi_i, \varphi_i)_\rho}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{0.1.15}$$

0.1.1 Системи ортонормованих функцій

1. На $[-1, 1]$ з $\rho = 1$ є поліноми Лежандра.
2. На $[-1, 1]$ з $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ є поліноми Чебишева.
3. На $[0, \infty)$ – поліноми Ерміта.
4. поліноми Якобі
5. ...

0.1.2 На дискретній множині точок

$H - \ell_2$, простір сіткових функцій, у ньому $(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i v_i$,
тоді $Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^j$.

Система функцій $\{\varphi_i\} = \{x^i\}$ буде лінійно незалежною якщо $n \le N-1$. У свою чергу при $n \ge N$ поліном $Q(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ може обертатися в 0 на всій сітці якщо в якості x_i взяти вузли сітки оскільки $n \ge N$.

0.1.3 Для періодичних функцій

Нехай $x \in [0, 2\pi)$ і розглянемо функцію $\{\varphi_k\} = \{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos kx, \sin kx\}$, тоді тригонометричним поліномом степеню m назвемо

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx). \tag{0.1.16}$$

$$(\sin kx, \sin mx) = \begin{cases} 0, & k = m \\ \pi, & k \neq m, \end{cases} \tag{0.1.17}$$

$$(\sin kx, \cos mx) = 0,$$

$$(\cos kx, \cos mx) = \begin{cases} 2\pi, & k = m = 0 \\ \pi, & k = m \neq 0 \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{0.1.18}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1, m}, \tag{0.1.19}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1, m}. \tag{0.1.20}$$

Зауваження. *Якщо функція періодична не на $[0, 2\pi]$, то потрібно зводити або функцію на відповіний проміжок, або систему функцій.*

Зауваження. *Якщо функція f парна відносно точки π, то $b_k = 0$, а*

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1, m},$$

а якщо непарна, то $a_k = 0$, *а*

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1,m}.$$

Задача 0.1. Показати, що тригонометрчина система функцій до $\sin mx, \cos mx$ на множині рівновіддалених точок $x_i = i\cdot\frac{2\pi}{n}$, $i = \overline{1,n}$, $x_i \in (0, 2\pi]$ є ортогональною, та ортонормувати її.

Зауваження. *У нас степінь полінома* $2m \le n-1$, *а тоді тригонометричний поліном на дискретній множині точок ми можемо записати у вигляді* (0.1.16) *з коефіцієнтами*

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j),$$

$$a_k = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot\cos(kx_j),$$

$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\cdot\sin(kx_j).$$