

Numerical Analysis

established about 4'000 years ago

- 7. Чисельне диференціювання
 - 7.1. Побудова формул чисельного диференціювання
 - 7.2. Про обчислювальну похибку чисельного диференціювання

7. Чисельне диференціювання

7.1. Побудова формул чисельного диференціювання

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 188–190: [djvu](#), [pdf](#)
- Березин, Жидков, том I, стор. 217–236: [djvu](#), [pdf](#).
- Бахвалов, Жидков, Кобельков, стор. 79–82: [pdf](#)

Задача чисельного диференціювання виникає у випадку коли необхідно обчислити похідну функції, значення якої задані таблицею. Нехай задано

$$f_i = f(x), \quad i = \overline{0, n}, \quad x_i \in [a, b]. \quad (1)$$

Проінтерполюємо ці значення. Тоді

$$f(x) = L_n(x) + r_n(x), \quad (2)$$

де залишковий член у формі Ньютона має вигляд:

$$r_n(x) = f(x; x_0, \dots, x_n) \omega_n(x), \quad (3)$$

де

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (4)$$

Звідси

$$f^{(k)}(x) = L_n^{(k)}(x) + r_n^{(k)}(x). \quad (5)$$

За наближене значення похідної в точці x беремо $f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x)$, $x \in [a, b]$.

Оцінимо похибку наближення — $r^{(k)}(x)$. За формулою Лейбніца:

$$r_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k C_k^j f^{(j)}(x; x_0, \dots, x_n) \omega_n^{(k-j)}(x). \quad (6)$$

З властивості розділених різниць маємо для $f(x) \in C^{n+k+1}[a, b]$:

$$\begin{aligned} f^{(j)}(x; x_0, \dots, x_n) &= j! \cdot \underbrace{f(x, \dots, x; x_0, \dots, x_n)}_{j+1} = \\ &= \frac{j!}{(n+j+1)!} \cdot f^{(n+j+1)}(\xi_j), \end{aligned} \quad (7)$$

де всі $x_j \in [a, b]$.

Остаточно вираз для похибки наближення похідної має вигляд:

$$r_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!(n+j+1)!} \cdot f^{(n+j+1)}(\xi_j) \omega_n^{(k-j)}(x). \quad (8)$$

Оцінка похибки матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \left| f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) \right| &\leq \\ &\leq M \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!(n+j+1)!} \cdot \left| \omega_n^{(k-j)}(x) \right|, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{де } M = \max_{0 \leq j \leq k} \max_{x \in [a, b]} \left| f^{(n+j+1)}(x) \right|.$$

Нагадаємо, що процес інтерполювання розбіжний. Крім того, якщо $k > n$, то $L_n^{(k)}(x) \equiv 0$. Тому не можна брати великими значення n та k . Як правило $k = 1, 2$, іноді $k = 3, 4$. Відповідно, $n = k$, або $n = k + 1$, або $n = k + 2$.

Подивимось як залежить порядок збіжності процесу чисельного диференціювання від кроку. Нехай $x_i = x_0 + ih$, $h > 0$ — крок. Тоді за умови $x_n - x_0 = O(h)$:

$$\omega_n(x) = (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = O(h^{n+1}), \quad (10)$$

де $x \in [x_0, x_n]$.

Перша похідна від $\omega_n(x)$ має порядок на одиницю менше, тобто

$$\omega'_n(x) = O(h^n). \quad (11)$$

Далі

$$r_n^{(k)}(x) = O(h^{n+1-k}), \quad (12)$$

тому

$$f^{(k)}(x) - L_n^{(k)} = O(h^{n+1-k}). \quad (13)$$

При умові $n \geq k$ останній вираз збігається до нуля, тобто

$$f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (14)$$

Далі

$$\begin{aligned} r_n^{(k)}(x) = & \underbrace{f(x; x_0, \dots, x_n) \omega_n^{(k)}(x)}_{O(h^{n+1-k})} + \\ & + \underbrace{\sum_{j=1}^k C_k^j f^{(j)}(x; x_0, \dots, x_n) \omega_n^{(k-j)}(x)}_{O(h^{n+2-k})}. \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо

$$\omega_n^{(k)}(\bar{x}) = 0, \quad (16)$$

то

$$r_n^{(k)}(\bar{x}) = O(h^{n+2-k}). \quad (17)$$

Точки $x = \bar{x}$ називаються *точками підвищеної точності формул чисельного диференціювання*.

Приклад 1: Виведемо формули чисельного диференціювання для $k = 1, n = 1$.

Виберемо точки $x_0, x_1 = x_0 + h$ і інтерполяційний багаточлен має вигляд:

$$L_1(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{f_1 - f_0}{h}. \quad (18)$$

Для похідної отримаємо вираз:

$$f'(x) \approx L_1'(x) = \frac{f_1 - f_0}{h}, \quad x \in [x_0, x_1]. \quad (19)$$

Розписавши за формулою Тейлора, отримаємо вираз для похибки:

$$\begin{aligned} r_1'(x) = & \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{3!} \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \frac{f^{(2)}(\xi_0)}{2!} \cdot (2x - x_1 - x_0) = O(h). \end{aligned} \quad (20)$$

Якщо $2\bar{x} - x_1 - x_0 = 0$, то $r'_1(\bar{x}) = O(h^2)$. Тобто $\bar{x} = \frac{x_1+x_0}{2}$ — точка підвищеної точності. Більш точно (див. приклад 3):

$$|r'_1(\bar{x})| \leq \frac{h^2 M_3}{24}, \quad (21)$$

де $M_3 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(3)}(x)|$.

Приклад 2: Аналогічно виведемо формули чисельного диференціювання для $k = 1$, $n = 2$.

Виберемо точки $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$. Інтерполяційний поліном має вигляд:

$$L_2(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{f_1 - f_0}{h} + \\ + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}. \quad (22)$$

Тоді замінимо $f'(x) \approx L_2'(x) = \frac{f_1 - f_0}{h} + (2x - x_0 - x_1) \cdot \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}$, $x \in [x_0, x_2]$.

Якщо сюди підставити $x = x_0$, то отримаємо $f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h}$. Для точки $x = x_1$ маємо $f'(x_1) \approx \frac{f_2 - f_0}{2h} = f'_{x,1}$. Для точки $x = x_2$ маємо $f'(x_2) \approx \frac{f_0 - 4f_1 + 3f_2}{2h}$, $x \in [x_0, x_2]$. Для похибки маємо оцінку $r'_2(x) = O(h^2)$.

Позначимо

- для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \approx f'(x)$, (різницева похідна вперед);
- для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ — $f_{\bar{x},i} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \approx f'(x)$, (різницева похідна назад);
- для $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ — $f_{x,i}^0 \approx f'(x)$ (центральна різницева похідна).

Замість $f'(x_i)$ можна взяти будь-яке із значень: $f_{x,i}$, $f_{\bar{x},i}$ або $f_{x,i}^0$.

Задача 21: Знайти точки підвищеної точності формул чисельного диференціювання для $k = 1$, $n = 2$ і оцінити похибку в цих точках.

Приклад 3: При $n = 1$, $k = 1$ оцінимо точність формул чисельного диференціювання за формулою Тейлора.

1. Нехай $f(x) \in C^2([a, b])$. Тоді

$$\begin{aligned}
f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \\
&= f'(x_0) - \frac{1}{h} \left(f_0 + hf'_0 + \frac{h^2}{2} f''(\xi) - f_0 \right) = \\
&= -\frac{h}{2} \cdot f''(\xi),
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\left| f'(x_0) - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \leq \frac{M_2 h}{2}, \tag{24}$$

де $M_2 = \max_{[x_0, x_1]} |f''(\xi)|$.

2. Нехай $f(x) \in C^3([a, b])$. Тоді, розписавши розклад по формулі Тейлора до третьої похідної, маємо оцінку:

$$\begin{aligned}
f'(\bar{x}) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \\
&= f'(\bar{x}) - \frac{1}{h} \left(f'(\bar{x}) + \frac{h}{2} \cdot f'(\bar{x}) + \frac{h^2}{8} \cdot f''(\bar{x}) + \frac{h^3}{48} \cdot f'''(\xi) \right) - \\
&\quad - f(\bar{x}) + \frac{f}{2} \cdot f'(\bar{x}) - \frac{h^2}{8} \cdot f''(\bar{x}) + \frac{h^3}{48} \cdot f'''(\eta) = \\
&= -\frac{h^2}{24} \cdot f'''(\zeta).
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\left| f'(\bar{x}) - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \leq \frac{h^2 M_3}{24}, \tag{26}$$

де $\bar{x} = \frac{x_1 + x_0}{2}$.

Задача 22: Показати, що якщо $f(x) \in C^3([a, b])$, то $\left| f'(x_1) - \frac{f_2 - f_0}{2h} \right| \leq \frac{M_3 h^2}{6}$.

Приклад 4: При $n = 2, k = 2$ маємо:

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \cdot (x - x_{i-1}) + \\
&\quad + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)
\end{aligned} \tag{27}$$

$$L_2''(x) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}. \tag{28}$$

Для $f(x) \in C^4([a, b])$ оцінимо точність формул чисельного диференціювання за формулою Тейлора:

$$\begin{aligned}
f''(x_1) - \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} &= \\
&= f''(x_1) - \frac{f(x_1 + h) - 2f(x_1) + f(x_1 - h)}{h^2} = \\
&= f''(x_1) - \frac{1}{h^2} \left(f_1 + hf_1'' + \frac{h^2}{2} \cdot f_1'' + \frac{h^3}{6} \cdot f_1''' + \frac{h^4}{24} \cdot f^{(4)}(\xi_1) - 2f_1 + \right. \\
&\quad \left. + f_1 - hf_1'' + \frac{h^2}{2} \cdot f_1'' - \frac{h^3}{6} \cdot f_1''' + \frac{h^4}{24} \cdot f^{(4)}(\xi_2) \right) \\
&= \frac{h^2}{12} \cdot f^{(4)}(\xi),
\end{aligned} \tag{29}$$

де $\xi_1, \xi_2, \xi \in [x_0, x_2]$.

Отже,

$$\left| f_1'' - \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} \right| \leq \frac{M_4 h^2}{12}. \tag{30}$$

Задача 23: Побудувати формулу чисельного диференціювання $k = 2, n = 2$ у випадку нерівновіддалених вузлів: $x_0, x_1 = x_0 + h_1, x_2 = x_1 + h_2$. Оцінити точність формули. Знайти точки підвищеної точності оцінити похибку.

Крім інтерполяційних формул для чисельного диференціювання можна застосовувати сплайни. Нехай $f_i = f(x_i)$. Побудуємо інтерполяційний сплайн першого степеня $s_1(x)$, для якого має місце оцінка $|f^{(k)}(x) - s_1^{(k)}(x)| = O(h^{2-k})$, $k = 0, 1$. Звідси при $k = 1$ маємо $f'(x) - s_1'(x) = O(h)$.

Для кубічного інтерполяційного сплайну $s_3(x)$ маємо для першої та другої похідних:

$$|f^{(k)}(x) - s_3^{(k)}(x)| = O(h^{4-k}), \quad k = 1, 2. \tag{31}$$

7.2. Про обчислювальну похибку чисельного диференціювання

Література:

- Самарский, Гулин, стор. 186–188: [djvu](#), [pdf](#)
- Бахвалов, Жидков, Кобельков, стор. 79–82: [pdf](#)

Нехай значення функції обчислені з деякою похибкою. Постає питання про вплив цих похибок на значення похідних обчислених за формулами чисельного диференціювання.

Перед цим зробимо зауваження про вплив збурення функції на значення звичайних похідних.

Нехай $f(x) \in C^1([a, b])$ і її збурення має вигляд:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \frac{\sin(\omega x)}{n}. \quad (32)$$

При $n \rightarrow \infty$ маємо $\|f(x) - \tilde{f}(x)\|_{C([a, b])} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, звідси $\tilde{f}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$. Таким чином це малі збурення. Маємо $\tilde{f}'(x) = f'(x) + \frac{\omega}{n} \cdot \cos(\omega x)$. Нехай $\omega = n^2$, тоді

$$|f(x) - \tilde{f}(x)|_{C([a, b])} = \frac{|\omega|}{n} = n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty. \quad (33)$$

Цей приклад ілюструє нестійкість оператора диференціювання. Є сподівання, що ця нестійкість має місце і для чисельного диференціювання.

Нехай $\tilde{f}_i = f_i + \delta_i$, $f_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $|\delta_i| \leq \delta$. Розглянемо вплив похибок δ_i на конкретних формулах чисельного диференціювання.

Приклад 1: Оцінімо вплив збурень на похибку обчислення першої похідної $n = 1$, $k = 1$.

$$f'_i = \frac{\tilde{f}_i - \tilde{f}_{i-1}}{h} = f'_i - \frac{f_i - f_{i-1}}{h} - \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{h}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \left| f'_i - \frac{\tilde{f}_i - \tilde{f}_{i-1}}{h} \right| &\leq \left| f'_i - \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \right| + \left| \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{h} \right| \leq \\ &\leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\delta}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \infty \end{aligned} \quad (35)$$

Таким чином, як і для аналітичного диференціювання, маємо некоректність: при малих збуреннях $|\delta_i| \ll \delta_i$ можуть бути як завгодно великі похибки, якщо $\frac{\delta}{h} \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$.

Мінімізуємо вплив цих збурень. Позначимо

$$\varphi(h) = \frac{M_2 h}{2} + \frac{2\delta}{h}. \quad (36)$$

Тоді мінімум цієї функції досягається для таких h :

$$\varphi'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\delta}{h^2} = 0, \quad (37)$$

звідки $h_0 = 2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}$. При такому значенні h оцінка похибки (35) така:

$$\varphi(h_0) = 2\sqrt{M_2 \delta} = O(\sqrt{\delta}) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 0. \quad (38)$$

Приклад 2: Подивимось на вплив збурень на похибку обчислення першої похідної при використанні центральної різницевої похідної.

$$\begin{aligned}
 \left| f'_i - \frac{\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_{i-1}}{2h} \right| &\leq \\
 &\leq \left| f'_i - \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \right| + \left| \frac{\delta_{i+1} - \delta_{i-1}}{2h} \right| \leq \\
 &\leq \frac{M_3 h^2}{6} + \frac{\delta}{h} = \varphi(h).
 \end{aligned} \tag{39}$$

З рівняння $\varphi'(h) = \frac{M_3 h}{3} - \frac{\delta}{h^2} = 0$ маємо: $h_0^3 = \frac{3\delta}{M_3}$, $h_0 = \sqrt[3]{\frac{3\delta}{M_3}}$. Отже,

$$\begin{aligned}
 \varphi(h_0) &= \frac{M_3}{6} \sqrt[3]{\frac{9\delta^2}{M_3^2}} + \frac{\delta}{\sqrt[3]{\frac{3\delta}{M_3}}} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{M_3 \delta^2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{M_3 \delta^2}{3}} = \\
 &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{M_3 \delta^2}{3}} = O\left(\sqrt[3]{\delta^2}\right).
 \end{aligned} \tag{40}$$

Таким чином швидкість збіжності при $\delta \rightarrow 0$ похибки формули чисельного диференціювання центральною похідною вища ніж для формули з [прикладу 1](#) (похідна вперед або назад).

Задача 24: Дослідити похибку чисельного диференціювання для $n = 2$, $k = 2$, вибрати оптимальний крок h_0 , дати оцінку $\varphi(h_0)$.

[Назад до лекцій](#)

[Назад на головну](#)

numerical-analysis is maintained by [csc-knu](#).

© 2019 Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Андрій Риженко, Скибицький Нікіта