

4. Ітераційні методи для систем

4.1. Ітераційні методи розв'язання СЛАР

Систему

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (1)$$

зводимо до вигляду

$$\vec{x} = B\vec{x} + \vec{f}. \quad (2)$$

Будь яка система

$$\vec{x} = \vec{x} - C \cdot (A\vec{x} - \vec{b}) \quad (3)$$

має вигляд (2) і при $\det C \neq 0$ еквівалентна системі (1). Наприклад, для $C = \tau \cdot E$:

$$\vec{x} = \vec{x} - \tau \cdot (A\vec{x} - \vec{b}). \quad (3')$$

4.1.1. Метод простої ітерації

Цей метод застосовується до рівняння (2)

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{f}, \quad (4)$$

де $\vec{x}^{(0)}$ — початкове наближення, задано.

Теорема: Ітераційний процес збігається, тобто

$$\left| \vec{x}^{(k)} - \vec{x} \right| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad (5)$$

якщо

$$|B| \leq q < 1. \quad (6)$$

При цьому має місце оцінка

$$\left| \vec{x}^{(n)} - \vec{x} \right| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot \left| \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)} \right|. \quad (7)$$

4.1.2. Метод Якобі

Припустимо $\forall i: a_{i,i} \neq 0$. Зведемо систему (1) до вигляду

$$x_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad (8)$$

де $i = \overline{1, n}$.

Ітераційний процес запишемо у вигляді

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad (9)$$

де $k = 0, 1, \dots$, а $i = \overline{1, n}$.

Теорема: Ітераційний процес збігається до розв'язку, якщо виконується умова

$$\forall i : \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{i,j}| \leq |a_{i,i}|. \quad (10)$$

Це умова діагональної переваги матриці A .

Теорема: Якщо ж

$$\forall i : \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n |a_{i,j}| \leq q \cdot |a_{i,i}|, \quad 0 \leq q < 1. \quad (11)$$

то має місце оцінка точності:

$$|\vec{x}^{(n)} - \vec{x}| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot |\vec{x}^{(0)} - \vec{x}|. \quad (12)$$

4.1.3. Метод Зейделя

В компонентному вигляді ітераційний метод Зейделя записується так:

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad (13)$$

де $k = 0, 1, \dots$, а $i = \overline{1, n}$.

На відміну від методу Якобі на k -му-кроці попередні компоненти розв'язку беруться з $(k + 1)$ -ої ітерації.

Теорема: Достатня умова збіжності методу Зейделя — $A^T = A > 0$.

4.1.4. Матрична інтерпретація методів Якобі і Зейделя

Подано матрицю A у вигляді

$$A = A_1 + D + A_2, \quad (14)$$

де A_1 — нижній трикутник матриці A , A_2 — верхній трикутник матриці A , D — її діагональ. Тоді систему (1) запишемо у вигляді

$$D\vec{x} = A_1\vec{x} + A_2\vec{x} + \vec{b}, \quad (15)$$

або

$$\vec{x} = D^{-1}A_1\vec{x} + D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{b}, \quad (16)$$

Матричний запис методу Якобі:

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}A_1\vec{x}^{(k)} + D^{-1}A_2\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}, \quad (17)$$

методу Зейделя:

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}A_1\vec{x}^{(k+1)} + D^{-1}A_2\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}, \quad (18)$$

Теорема: Необхідна і достатня умова збіжності методу Якобі: всі корені рівняння

$$\det(D + \lambda(A_1 + A_2)) = 0 \quad (19)$$

по модулю більше 1.

Теорема: Необхідна і достатня умова збіжності методу Зейделя: всі корені рівняння

$$\det(A_1 + D + \lambda A_2) = 0 \quad (20)$$

по модулю більше 1.

4.1.5. Однокрокові (двошарові) ітераційні методи

Канонічною формою однокрокового ітераційного методу розв'язку СЛАР є його запис у вигляді

$$B_k \frac{\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}}{\tau_{k+1}} + A\vec{x}^{(k)} = \vec{b}, \quad (21)$$

Тут $\{B_k\}$ — послідовність матриць (пере-обумовлюючі матриці), що задають ітераційний метод на кожному кроці; $\{\tau_{k+1}\}$ — ітераційні параметри.

Означення: Якщо $B_k = E$, то ітераційний процес називається *явним*

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \tau_{k+1} (A\vec{x}^{(k)} + \vec{b}). \quad (22)$$

Означення: Якщо $B_k \neq E$, то ітераційний процес називається *неявним*

$$B_k \vec{x}^{(k+1)} = F^k. \quad (23)$$

У цьому випадку на кожній ітерації необхідно розв'язувати СЛАР.

Означення: Якщо $\tau_{k+1} \equiv \tau$, $B_k \equiv B$, то ітераційний процес називається *стаціонарним*; інакше — *нестационарним*.

Методам, що розглянуті вище відповідають:

- методу простої ітерації: $B_k = E$, $\tau_{k+1} = \tau$;
- методу Якобі: $B_k = D$, $\tau_{k+1} = 1$;
- методу Зейделя: $B_k = D + A_1$, $\tau_{k+1} = 1$.

4.1.6. Збіжності стаціонарних ітераційних процесів у випадку симетричних матриць

Розглянемо випадок симетричних матриць $A^T = A$ і стаціонарний ітераційний процес $B_k \equiv E$, $\tau_{k+1} \equiv \tau$.

Нехай для A справедливі нерівності

$$\gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0. \quad (24)$$

Тоді при виборі $\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ ітераційний процес збігається. Найбільш точним значенням γ_1, γ_2 при яких виконуються обмеження (24) є $\gamma_1 = \min \lambda_i(A)$, $\gamma_2 = \max \lambda_i(A)$. Тоді

$$q = q_0 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (25)$$

і справедлива оцінка

$$\left| \vec{x}^{(n)} - \vec{x} \right| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \left| \vec{x}^{(0)} - \vec{x} \right|. \quad (26)$$

Зауваження: аналогічно обчислюється q і для методу релаксації розв'язання нелінійних рівнянь, де $\gamma_1 = m = \min |f'(x)|$, $\gamma_2 = M_1 = \max |f'(x)|$.

Явний метод з багатьма параметрами $\{\tau_k\}$:

$$B \equiv E, \quad \tau_k : \min_{\tau} q(\tau), \quad n = n(\varepsilon) \rightarrow \min, \quad (27)$$

які обчислюються за допомогою нулів багаточлена Чебишова, називаються ітераційним методом з чебишевським набором параметрів.

4.1.7. Метод верхньої релаксації

Узагальненням методу Зейделя є метод верхньої релаксації:

$$(D + \omega A_1) \cdot \frac{\vec{x}^{(k+1)} + \vec{x}^{(k)}}{\omega} + A\vec{x}^{(k)} = \vec{b}, \quad (28)$$

де D — діагональна матриця з елементами $a_{i,i}$ по діагоналі. $\omega > 0$ — заданий числовий параметр.

Тепер $B = D + \omega A_1$, $\tau = \omega$. Якщо $A^T = A > 0$, то метод верхньої релаксації збігається при умові $0 < \omega < 2$. Параметр підбирається експериментально з умови мінімальної кількості ітерацій.

4.1.8. Методи варіаційного типу

До цих методів відносяться: метод мінімальних нев'язок, метод мінімальних поправок, метод найшвидшого спуску, метод спряжених градієнтів. Вони дозволяють обчислювати наближення без використання апіорної інформації про γ_1 , γ_2 в (24).

Нехай $B = E$. Для методу мінімальних нев'язок параметри τ_{k+1} обчислюються з умови

$$\left| \vec{r}^{(k+1)} \right|^2 = \left| \vec{r}^{(k)} \right|^2 - 2\tau_{k+1} \cdot \left\langle \vec{r}^{(k)}, A\vec{r}^{(k)} \right\rangle + \tau_{k+1}^2 \cdot \left| A\vec{r}^{(k)} \right|^2 \rightarrow \min. \quad (29)$$

Тому

$$\tau_{k+1} = \frac{\left\langle A\vec{r}^{(k)}, \vec{r}^{(k)} \right\rangle}{\left| \vec{r}^{(k)} \right|^2}, \quad (30)$$

де $\vec{r}^{(k)} = A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}$ — нев'язка.

Умова для завершення ітераційного процесу:

$$\left| \vec{r}^{(n)} \right| < \varepsilon. \quad (31)$$

Швидкість збіжності цього методу співпадає із швидкістю методу простої ітерації з одним оптимальним параметром $\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$.

Аналогічно будуються методи з $B \neq E$. Матриця B називається переобумовлювачем і дозволяє підвищити швидкість збіжності ітераційного процесу. Його вибирають з умов

- легко розв'язувати СЛАР $B\vec{x}^{(k)} = F_k$ (діагональний, трикутний, добуток трикутних та інше);
- зменшення числа обумовленості матриці $B^{-1}A$ у порівнянні з A .

4.2. Методи розв'язання нелінійних систем

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Перепишемо її у векторному вигляді:

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0. \quad (33)$$

4.2.1. Метод простої ітерації

В цьому методі рівняння (33) зводиться до еквівалентного вигляду

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x}). \quad (34)$$

Ітераційний процес представимо у вигляді:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{\Phi}(\vec{x}^{(k)}). \quad (35)$$

початкове наближення $\vec{x}^{(0)}$ — задано.

Нехай оператор $\vec{\Phi}$ визначений на множині H . За теоремою про стискуючі відображення ітераційний процес (35) сходиться, якщо виконується умова

$$\left| \vec{\Phi}(\vec{x}) - \vec{\Phi}(\vec{y}) \right| \leq q \cdot |\vec{x} - \vec{y}|, \quad 0 < q < 1, \quad (36)$$

або

$$\left| \vec{\Phi}'(\vec{x}) \right| \leq q < 1, \quad (37)$$

де $\vec{x} \in U_r$, $\vec{\Phi}'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$. Для похибки справедлива оцінка

$$\left| \vec{x}^{(m)} - \vec{x} \right| \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \left| \vec{x}^{(0)} - \vec{x} \right|. \quad (38)$$

Частинним випадком методу простої ітерації є метод релаксації для рівняння (33):

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \tau \cdot \vec{F}(\vec{x}^{(k)}), \quad (39)$$

де $\tau < 2 / \left\| \vec{F}'(\vec{x}) \right\|$.

4.2.2. Метод Ньютона

Розглянемо рівняння

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0. \quad (40)$$

Представимо його у вигляді

$$\vec{F}(\vec{x}^{(k)}) + \vec{F}'(\vec{\xi}^{(k)}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^{(k)}) = 0, \quad (41)$$

де

$$\vec{\xi}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} + \theta_k \cdot (\vec{x}^{(k)} - \vec{x}), \quad (42)$$

де $0 < \theta_k < 1$. Тут $\vec{F}'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$ — матриця Якобі для $\vec{F}(\vec{x})$. Можемо наближено вважати $\vec{\xi}^{(k)} \approx \vec{x}^{(k)}$. Тоді з (41) матимемо

$$\vec{F}(\vec{x}^{(k)}) + \vec{F}'(\vec{x}^{(k)}) \cdot (\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) = 0. \quad (43)$$

Ітераційний процес представимо у вигляді:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{F}'(\vec{x}^{(k)})^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x}^{(k)}). \quad (44)$$

Для реалізації методу Ньютона потрібно, щоб існувала обернена матриця

$$\vec{F}'(\vec{x}^{(k)})^{-1}. \quad (45)$$

Можна не шукати обернену матрицю, а розв'язувати на кожній ітерації СЛАР

$$\begin{aligned} A_k \vec{z}^{(k)} &= \vec{F}(\vec{x}^{(k)}), \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} - \vec{z}^{(k)}, \end{aligned} \quad (46)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$, і $\vec{x}^{(0)}$ — задано, а матриця $A_k = \vec{F}'(\vec{x}^{(k)})$.

Метод має квадратичну збіжність, якщо добре вибрано початкове наближення. Складність методу (при умові використання методу Гаусса розв'язання СЛАР (46) на кожній ітерації $Q_n = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$, де n — розмірність системи (33).

4.2.3. Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес має вигляд:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{F}'(\vec{x}^{(0)})^{-1} \cdot \vec{F}(\vec{x}^{(k)}). \quad (47)$$

Тепер обернена матриця обчислюється тільки на нульовій ітерації. На інших — обчислення нового наближення зводиться до множення матриці $A_0 = \vec{F}'(\vec{x}^{(0)})^{-1}$ на вектор $\vec{F}(\vec{x}^{(k)})$ та додавання до $\vec{x}^{(k)}$.

Запишемо метод у вигляді системи лінійних рівнянь (аналог (46))

$$\begin{aligned} A_0 \vec{z}^{(k)} &= \vec{F}(\vec{x}^{(k)}), \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} - \vec{z}^{(k)}, \end{aligned} \quad (48)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$

Оскільки матриця A_0 розкладається на трикутні (або обертається) один раз, то складність цього методу на одній ітерації (окрім нульової) $Q_n = O(n^2)$. Але цей метод має лінійну швидкість збіжності.

Можливе циклічне застосування модифікованого методу Ньютона, тобто коли обернену матрицю похідних шукаємо та обертаємо через певне число кроків ітераційного процесу.

Задача 9: Побудувати аналог методу січних для систем нелінійних рівнянь.