

# 1. Аналіз похибок заокруглення

## 1.1. Види похибок

Нехай необхідно розв'язати рівняння

$$Au = f. \quad (1)$$

За рахунок неточно заданих вхідних даних насправді ми маємо рівняння

$$\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}. \quad (2)$$

**Означення:** Назвемо  $\delta_1 = u - \tilde{u}$  неусувною похибкою.

Застосування методу розв'язання (2) приводить до рівняння

$$\tilde{A}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h, \quad (3)$$

де  $h > 0$  — малий параметр.

**Означення:** Назвемо  $\delta_2 = \tilde{u} - \tilde{u}_h$  похибкою методу.

Реалізація методу на ЕОМ приводить до рівняння

$$\tilde{A}_h^* \tilde{u}_h^* = \tilde{f}_h^*. \quad (4)$$

**Означення:** Назвемо  $\delta_3 = \tilde{u}_h - \tilde{u}_h^*$  похибкою заокруглення.

**Означення:** Тоді повна похибка  $\delta = u - \tilde{u}_h^* = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ .

**Означення:** кажуть, що задача (1) коректна, якщо

- $\forall f \in F: \exists! u \in U$ ;
- Задача (1) стійка, тобто  $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0$ :

$$|A - \tilde{A}| < \delta, |f - \tilde{f}| < \delta \implies |u - \tilde{u}| < \varepsilon. \quad (5)$$

Якщо задача (1) некоректна, то або розв'язок її не існує, або він неєдиний, або він нестійкий, тобто  $\exists \varepsilon > 0: \forall \delta > 0$ :

$$|A - \tilde{A}| < \delta, |f - \tilde{f}| < \delta \implies |u - \tilde{u}| > \varepsilon. \quad (6)$$

**Означення:** Абсолютна похибка  $\Delta x \leq |x - x^*|$ .

**Означення:** Відносна похибка  $\delta x \leq \Delta x / |x|$ , або  $\Delta x / |x^*|$ .

**Означення:** Значущими цифрами називаються всі цифри, починаючи з першої ненульової зліва.

**Означення:** Вірна цифра — це значуща, якщо абсолютна похибка за рахунок відкидання всіх молодших розрядів не перевищує одиниці розряду цієї цифри.

Тобто, якщо  $x^* = \alpha_n \dots \alpha_0 . \alpha_{-1} \dots \alpha_{-p} \dots$ , то  $\alpha_{-p}$  вірна, якщо  $\Delta x \leq 10^{-p}$  (інколи  $\Delta x \leq w \cdot 10^{-p}$ , де  $1/2 \leq w < 1$  наприклад,  $w = 0.55$ ).

## 1.2. Підрахунок похибок в ЕОМ

Підрахуємо відносну похибку заокруглення числа  $x$  на ЕОМ з плаваючою комою. В  $\beta$ -ічній системі числення число представляється у вигляді

$$x = \pm(\alpha_1\beta^{-1} + \alpha_2\beta^{-2} + \dots + \alpha_t\beta^{-t} + \dots) \cdot \beta^p, \quad (7)$$

де  $0 \leq \alpha_k < \beta$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Якщо в ЕОМ  $t$  розрядів, то при відкиданні молодших розрядів ми оперуємо з наближеним значенням

$$x^* = \pm(\alpha_1\beta^{-1} + \alpha_2\beta^{-2} + \dots + \alpha_t\beta^{-t}) \cdot \beta^p \quad (8)$$

і відповідно похибка заокруглення

$$x - x^* = \pm\beta^p \cdot (\alpha_{t+1}\beta^{-t-1} + \dots). \quad (9)$$

Тоді її можна оцінити так

$$|x - x^*| \leq \beta^{p-t-1} \cdot (\beta - 1) \cdot (1 + \beta^{-1} + \dots) \leq \beta^{p-t-1} \cdot (\beta - 1) \cdot \frac{1}{1 - \beta^{-1}} = \beta^{p-t}. \quad (10)$$

Якщо в представленні (7) взяти  $\alpha_1 = 1$ , то  $|x| \geq \beta^p \cdot \beta^{-1}$ . Звідси остаточно

$$\delta x \leq \frac{\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \beta^{-t+1}. \quad (11)$$

При більш точних способах заокруглення можна отримати оцінку  $\delta x \leq \frac{1}{2} \cdot \beta^{-t+1} = \varepsilon$ . Число  $\varepsilon$  називається «машинним іпсилон». Наприклад, для  $\beta = 2$ ,  $t = 24$ ,  $\varepsilon = 2^{-24} \approx 10^{-7}$ .

## 1.3. Підрахунок похибок обчислення значення функції

Нехай задана функція  $y = f(x_1, \dots, x_n) \in C^1(\Omega)$ . Необхідно обчислити її значення при наближеному значенні аргументів  $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , де  $|x_i - x_i^*| \leq \Delta x_i$  та оцінити похибку обчислення значення функції  $y^* = f(x_1^*, \dots, x_n^*)$ . Маємо

$$|y - y^*| = |f(\vec{x}) - f(\vec{x}^*)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}) \cdot (x_i - x_i^*) \right| \leq \sum_{i=1}^n B_i \cdot \Delta x_i, \quad (12)$$

$$\text{де } B_u = \max_{\vec{x} \in U} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \right|.$$

Тут

$$U = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) : |x_i - x_i^*| \leq \Delta x_i \} \subset \Omega, \quad (13)$$

для  $i = \overline{1, n}$ . Отже з точністю до величин першого порядку малості по

$$\Delta x = \max_i \Delta x_i, \quad (14)$$

$$\Delta y = |y - y^*| \prec \sum_{i=1}^n b_i \cdot \Delta x_i, \quad (15)$$

де  $b_i = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) \right|$  та « $\prec$ » означає приблизно менше.

Розглянемо похибки арифметичних операцій.

- Сума:  $y = x_1 + x_2, x_1, x_2 > 0$ :

$$\Delta y \leq \Delta x_1 + \Delta x_2, \quad (16)$$

$$\delta y \leq \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 + x_2} \leq \max(\delta x_1, \delta x_2). \quad (17)$$

- Різниця:  $y = x_1 - x_2, x_1 > x_2 > 0$ :

$$\Delta y \leq \Delta x_1 + \Delta x_2, \quad (18)$$

$$\delta y \leq \frac{x_2 \delta x_1 + x_1 \delta x_2}{x_1 - x_2}. \quad (19)$$

При близьких  $x_1, x_2$  зростає відносна похибка (за рахунок втрати вірних цифр).

- Добуток:  $y = x_1 \cdot x_2, x_1, x_2 > 0$ :

$$\Delta y \prec x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2, \quad (20)$$

$$\delta y \leq \delta x_1 + \delta x_2. \quad (21)$$

- Частка  $y = x_1/x_2, x_1, x_2 > 0$ :

$$\Delta y \prec \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_2^2}, \quad (22)$$

$$\delta y \leq \delta x_1 + \delta x_2. \quad (23)$$

При малих  $x_2$  зростає абсолютна похибка (за рахунок зростання результату ділення).

**Означення:** Пряма задача аналізу похибок: обчислення  $\Delta y, \delta y$  по заданих  $\Delta x_i, i = \overline{1, n}$ .

**Означення:** *Обернена задача:* знаходження  $\Delta x_i, i = \overline{1, n}$  по заданих  $\Delta y, \delta y$ . Якщо  $n > 1$ , маємо одну умову

$$\sum_{i=1}^n b_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon \quad (24)$$

для багатьох невідомих  $\Delta x_i$ .

Вибирають їх із однієї з умов:

$$\forall i : b_i \cdot \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{n} \quad (25)$$

або

$$\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n b_i}. \quad (26)$$

## 2. Методи розв'язання нелінійних рівнянь

*Постановка задачі.* Нехай маємо рівняння  $f(x) = 0$ ,  $\bar{x}$  — його розв'язок, тобто  $f(\bar{x}) = 0$ .

Задача розв'язання цього рівняння розпадається на етапи:

- Існування та кількість коренів.
- Відділення коренів, тобто розбиття числової вісі на інтервали, де знаходиться один корінь.
- Обчислення кореня із заданою точністю  $\varepsilon$ .

Для розв'язання перших двох задач використовуються методи математичного аналізу та алгебри, а також графічний метод. Далі розглядаються методи розв'язання третього етапу.

### 2.1. Метод ділення навпіл

Припустимо на  $[a, b]$  знаходиться лише один корінь рівняння

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

для  $f(x) \in C[a, b]$ , який необхідно визначити. Нехай  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Припустимо, що  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$ . Покладемо  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  і підрахуємо  $f(x_1)$ . Якщо  $f(x_1) < 0$ , тоді шуканий корінь  $\bar{x}$  знаходиться на інтервалі  $(a, x_1)$ . Якщо ж  $f(x_1) > 0$ , то  $\bar{x} \in (x_1, b)$ . Далі з двох інтервалів  $(a, x_1)$  і  $(x_1, b)$  вибираємо той, на границях якого функція  $f(x)$  має різні знаки, знаходимо точку  $x_2$  — середину вибраного інтервалу, підраховуємо  $f(x_2)$  і повторюємо вказаний процес.

В результаті отримаємо послідовність інтервалів, що містять шуканий корінь  $\bar{x}$ , причому довжина кожного послідовного інтервалу вдвічі менше попереднього.

Цей процес продовжується до тих пір, поки довжина отриманого інтервалу  $(a_n, b_n)$  не стане меншою за  $b_n - a_n < 2\varepsilon$ . Тоді  $x_{n+1}$ , як середина інтервалу  $(a_n, b_n)$ , пов'язане з  $\bar{x}$  нерівністю

$$|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon. \quad (2)$$

Ця умова для деякого  $n$  буде виконуватись за теоремою Больцано-Коші. Оскільки

$$|b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{|b_k - a_k|}{2}, \quad (3)$$

то

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}} < \varepsilon. \quad (4)$$

Звідси отримаємо нерівність для обчислення кількості ітерацій  $n$  для виконання умови (2):

$$n = n(\varepsilon) \geq \left\lceil \log \left( \frac{b - a}{\varepsilon} \right) \right\rceil + 1. \quad (5)$$

Степінь збіжності — лінійна, тобто геометричної прогресії з знаменником  $q = 1/2$ .

- **Переваги методу:** простота, надійність.

- **Недоліки методу:** низька швидкість збіжності; метод не узагальнюється на системи.

## 2.2. Метод простої ітерації

Спочатку рівняння

$$f(x) = 0 \quad (6)$$

замінюється еквівалентним

$$x = \varphi(x). \quad (7)$$

Ітераційний процес має вигляд

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Початкове наближення  $x_0$  задається.

Для збіжності велике значення має вибір функції  $\varphi(x)$ . Перший спосіб заміни рівняння полягає в відділенні змінної з якогось члена рівняння. Більш продуктивним є перехід від рівняння (6) до (7) з функцією  $\varphi(x) = x + \tau(x) \cdot f(x)$ , де  $\tau(x)$  — знакостала функція на тому відрізку, де шукаємо корінь.

**Означення:** Кажуть, що ітераційний метод збігається, якщо  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ .

Далі  $U_r = \{x : |x - a| \leq r\}$  відрізок довжини  $2r$  з серединою в точці  $a$ .

З'ясуємо умови, при яких збігається метод простої ітерації.

**Теорема 1:** Якщо

$$\max_{x \in [a, b] = U_r} |\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (9)$$

то метод простої ітерації збігається і має місце оцінка

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot |x_0 - x_1| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot (b - a). \quad (10)$$

**Доведення:** Нехай  $x_{k+1}, x_k \in U_r$ . Тоді

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k-1}| &= |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})| \leq |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x_{k-1}| \leq \\ &\leq q \cdot |x_k - x_{k-1}| = \dots = q^k \cdot |x_1 - x_0|, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\xi_k = x_k + \theta_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$ , а у свою чергу  $0 < \theta_k < 1$ . Далі

$$\begin{aligned} |x_{k+p} - x_k| &= |x_{k+p} - x_{k+p-1} + \dots + x_{k+1} - x_k| = |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \leq \\ &\leq (q^{k+p-1} + q^{k+p-2} + \dots + q^k) \cdot |x_1 - x_0| = \frac{q^k - q^{k+p-1}}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Бачимо що  $\{x_k\}$  — фундаментальна послідовність. Значить вона збіжна. При  $p \rightarrow \infty$  в (12) отримуємо (10).  $\square$

Визначимо кількість ітерацій для досягнення точності  $\varepsilon$ . З оцінки в теоремі 1 отримаємо

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q^n}{1 - q} \cdot (b - a) < \varepsilon, \quad (13)$$

звідки безпосередньо маємо

$$n(\varepsilon) = n \geq \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-q)}{b-a}\right)}{\ln q} \right\rceil + 1. \quad (14)$$

Практично ітераційний процес зупиняємо при:  $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ . Але ця умова не завжди гарантує, що  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ .

**Зауваження:** Умова збіжності методу може бути замінена на умову Ліпшиця

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q \cdot |x - y|, \quad 0 < q < 1. \quad (15)$$

- **Переваги методу:** простота; при  $q < 1/2$  — швидше збігається ніж метод ділення навпіл; метод узагальнюється на системи.
- **Недоліки методу:** при  $q > 1/2$  збігається повільніше ніж метод ділення навпіл; виникають труднощі при зведенні  $f(x) = 0$  до  $x = \varphi(x)$ .

### 2.3. Метод релаксації

Якщо в методі простої ітерації для рівняння  $x = x + \tau \cdot f(x) \equiv \varphi(x)$  вибрати  $\tau(x) = \tau = \text{const}$ , то ітераційний процес приймає вигляд

$$x_{n+1} = x_n + \tau \cdot f(x_n), \quad (16)$$

де  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ , а  $x_0$  — задано. Метод можна записати у вигляді

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (17)$$

Оскільки  $\varphi'(x) = 1 + \tau \cdot f'(x)$ , то метод збігається при умові

$$|\varphi'(x)| = |1 + \tau \cdot f'(x)| \leq q < 1. \quad (18)$$

Нехай  $f'(x) < 0$ , тоді (8) запишеться у вигляді:  $-q \leq 1 + \tau \cdot f'(x) \leq q < 1$ . Звідси

$$f'(x) \leq 1 + q < 2k\tau, \quad (19)$$

і

$$0 < \tau < \frac{2}{|f'(x)|}. \quad (20)$$

Поставимо задачу знаходження  $\tau$ , для якого  $q = q(\tau) \rightarrow \min$ . Для того, щоб вибрати оптимальний параметр  $\tau$ , розглянемо рівняння для похибки  $z_k = x_k - \bar{x}$ .

Підставивши  $x_k = x + z_k$  в (16), отримаємо

$$z_{k+1} = z_k + \tau \cdot f(x + z_k). \quad (21)$$

В припущенні  $f(x) \in C^1([a, b])$  з теореми про середнє маємо

$$f(\bar{x} + z_k) = f(\bar{x}) + z_k \cdot f'(\bar{x} + \theta \cdot z_k) = z_k \cdot f'(\bar{x} + \theta \cdot z_k) = z_k \cdot f'(\xi_k), \quad (22)$$

тобто

$$z_{k+1} = z_k + \tau \cdot f'(\xi_k) \cdot z_k. \quad (23)$$

Звідси

$$|z_{k+1}| \leq |1 + \tau \cdot f'(\xi_k)| \cdot |z_k| \leq \max_U |1 + \tau \cdot f'(\xi_k)| \cdot |z_k|. \quad (24)$$

А тому

$$|z_{k+1}| \leq \max \{|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|\} \cdot |z_k|, \quad (25)$$

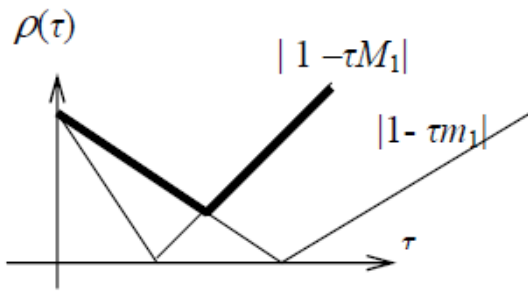
де

$$m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|, \quad M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)| \quad (26)$$

Таким чином, задача вибору оптимального параметра зводиться до знаходження  $\tau$ , для якого функція

$$q(\tau) = \max \{|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|\} \quad (27)$$

приймає мінімальне значення:  $q(\tau) \rightarrow \min$ .



З графіка видно, що точка мінімуму визначається умовою  $|1 - \tau M_1| = |1 - \tau m_1|$ . Тому

$$1 - \tau_0 m_1 = \tau_0 M_1 - 1 \implies \tau_0 = \frac{2}{M_1 - m_1} < \frac{2}{|f'(x)|}. \quad (28)$$

При цьому значенні  $\tau$  маємо

$$q(\tau_0) = \rho_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}. \quad (29)$$

Тоді для похибки вірна оцінка

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\rho_0^n}{1 - \rho_0} \cdot (b - a) < \varepsilon. \quad (30)$$

Кількість ітерацій

$$n = n(\varepsilon) \geq \left\lceil \frac{\frac{\ln(\varepsilon(1-\rho_0))}{b-a}}{\ln \rho_0} \right\rceil + 1. \quad (31)$$

**Задача 1:** Дати геометричну інтерпретацію методу простої ітерації для випадків:



$$0 < \varphi'(x) < 1; \quad -1 < \varphi'(x) < 0; \quad \varphi'(x) < -1; \quad \varphi'(x) > 1. \quad (32)$$

**Задача 2:** Знайти оптимальне  $\tau = \tau_0$  для методу релаксації при  $f'(x) > 0$ .

## 2.4. Метод Ньютона (метод дотичних)

Припустимо, що рівняння  $f(x) = 0$  має простий дійсний корінь  $\bar{x}$ , тобто  $f(\bar{x}) = 0$ ,  $f'(\bar{x}) \neq 0$ . Нехай виконуються умови:  $f(x) \in C^1([a, b])$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Тоді

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k + \bar{x} - x_k) = f(x_k) + f'(\xi_k) \cdot (x - x_k), \quad (33)$$

де  $\xi_k = x_k + \theta_k \cdot (\bar{x} - x_k)$ ,  $0 < \theta_k < 1$ ,  $\xi_k \approx x_k$ . Тому наступне наближення виберемо з рівняння

$$f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0. \quad (34)$$

Звідси маємо ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (35)$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $x_0$  — задане.

Метод Ньютона ще називають методом лінеаризації або методом дотичних.

**Задача 3:** Дати геометричну інтерпретацію методу Ньютона.

Метод Ньютона можна інтерпретувати як метод простої ітерації з

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (36)$$

тобто

$$\tau(x) = -\frac{1}{f'(x)}. \quad (37)$$

Тому

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}. \quad (38)$$

Якщо  $\bar{x}$  — корінь  $f(x)$ , то  $\varphi'(\bar{x}) = 1$ . знайдеться окіл кореня, \end{equation}

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1. \quad (39)$$

Це означає, що збіжність методу Ньютона залежить від вибору  $x_0$ .

**Недолік** методу Ньютона: необхідність обчислювати на кожній ітерації не тільки значення функції, а й похідної.

Модифікований метод Ньютона позбавлений цього недоліку і має вигляд:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (40)$$

Цей метод має лише лінійну збіжність:  $|x_{k+1} - \bar{x}| = O(|x_k - \bar{x}|)$ .

**Задача 4:** Дати геометричну інтерпретацію модифікованого методу Ньютона.

В методі Ньютона, для якого  $f'(x_k)$  замінюється на

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (41)$$

дає метод січних:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k), \quad (42)$$

де  $k = 1, 2, \dots$ ,  $x_0, x_1$  — задані.

**Задача 5:** Дати геометричну інтерпретацію методу січних.

## 2.5. Збіжність методу Ньютона

**Теорема 1:** Нехай  $f(x) \in C^2([a, b])$ ;  $\bar{x}$  простий дійсний корінь рівняння

$$f(x) = 0. \quad (43)$$

і  $f'(x) \neq 0$  при  $x \in U_r = \{x : |x - \bar{x}| < r\}$ . Якщо

$$q = \frac{M_2 \cdot |x_0 - \bar{x}|}{2m_1} < 1, \quad (44)$$

де

$$m_1 = \min_{U_r} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{U_r} |f''(x)|, \quad (45)$$

то для  $x_0 \in U_r$  метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (46)$$

збігається і має місце оцінка

$$|x_n - \bar{x}| \leq q^{2^n - 1} \cdot |x_0 - \bar{x}|. \quad (47)$$

З (46) маємо

$$x_{k+1} - \bar{x} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \bar{x} = \frac{(x_k - \bar{x}) \cdot f'(x_k) - f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{F(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (48)$$

де  $F(x) = (x - \bar{x})f'(x) - f(x)$ , така, що

- $F(\bar{x}) = 0$ ;

- $F'(x) = (x - \bar{x}) \cdot f''(x).$

Тоді

$$F(x_k) = F(\bar{x}) + \int_x^{x_k} F'(t) dt = \int_x^{x_k} (t - \bar{x}) \cdot f''(t) dt. \quad (49)$$

Так як  $(t - \bar{x})$  не міняє знак на відрізку інтегрування, то скористаємося теоремою про середнє значення:

$$F(x_k) = f''(\xi_k) \int_x^{x_k} (t - \bar{x}) dt = \frac{(x_k - \bar{x})^2}{2} \cdot f''(\xi_k), \quad (50)$$

де  $\xi_k = \bar{x} + \theta_k \cdot (x_k - \bar{x})$ , де  $0 < \theta_k < 1$ . З (48), (50) маємо

$$x_{k+1} - \bar{x} = \frac{(x_k - \bar{x})^2}{2f'(\xi_k)} \cdot f''(\xi_k). \quad (51)$$

Доведемо оцінку (46) за індукцією. Так як  $x_0 \in U_r$ , то

$$|\xi_0 - \bar{x}| = |\theta_0 \cdot (x_0 - \bar{x})| < |\theta_0| \cdot |x_0 - \bar{x}| < r \quad (52)$$

звідси випливає  $\xi_0 \in U_r$ .

Тоді  $f''(\xi_0) \leq M_2$ , тому

$$|x_1 - \bar{x}| \leq \frac{(x_0 - \bar{x})^2 \cdot M_2}{2m_1} = \frac{M_2 \cdot |x_0 - \bar{x}|}{2m_1} \cdot |x_0 - \bar{x}| = q \cdot |x_0 - \bar{x}| < r, \quad (53)$$

тобто  $x_1 \in U_r$ .

Ми довели твердження (47) при  $n = 1$ . Нехай воно справджується при  $n = k$

$$|x_k - \bar{x}| \leq q^{2^k - 1} \cdot |x_0 - \bar{x}| < r, \quad (54)$$

$$|\xi_k - \bar{x}| = |\theta_k \cdot (x_k - \bar{x})| < r. \quad (55)$$

Тоді  $x_k, \xi_k \in U_r$ .

Доведемо (47) для  $n = k + 1$ . З (51) маємо

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \bar{x}| &\leq \frac{|x_k - \bar{x}|^2 \cdot M_2}{2m_1} \leq \left(q^{2^k - 1}\right)^2 \cdot \frac{|x_0 - \bar{x}|^2 \cdot M_2}{2m_1} = \\ &= q^{2^{k+1} - 2} \cdot \frac{|x_0 - \bar{x}| \cdot M_2}{2m_1} \cdot |x_0 - \bar{x}| = q^{2^{k+1} - 1} \cdot |x_0 - \bar{x}|. \end{aligned} \quad (56)$$

Таким чином (47) справджується для  $n = k + 1$ . Значить (47) виконується і для довільного  $n$ . Таким чином  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .  $\square$

З (47) маємо оцінку кількості ітерацій для досягнення точності  $\varepsilon$

$$n \geq \left\lceil \log_2 \left( 1 + \frac{\ln \left( \frac{\varepsilon}{b-a} \right)}{\ln q} \right) \right\rceil + 1. \quad (57)$$

Кажуть, що ітераційний метод має *ступінь збіжності*  $m$ , якщо

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = O(|x_k - \bar{x}|^m). \quad (58)$$

Для методу Ньютона

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = \frac{|x_k - \bar{x}|^2 \cdot |f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|}. \quad (59)$$

Звідси випливає, що

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = O(|x_k - \bar{x}|^2). \quad (60)$$

Значить ступінь збіжності методу Ньютона  $m = 2$ . Для методу простої ітерації і ділення навпіл  $m = 1$ .

**Теорема 2:** Нехай  $f(x) \in C^2([a, b])$  та  $x$  простий корінь рівняння  $f(x) = 0$  ( $f'(x) \neq 0$ ). Якщо  $f'(x) \cdot f''(x) > 0$  ( $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ ) то для методу Ньютона при  $x_0 = b$  послідовність наближень  $\{x_k\}$  монотонно спадає (монотонно зростає при  $x_0 = a$ ).

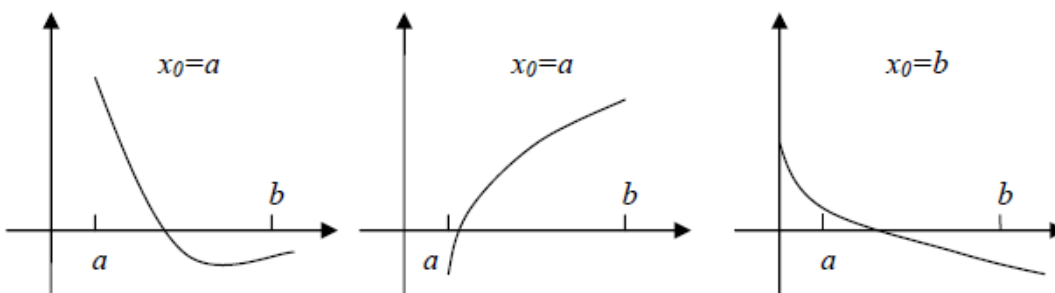
**Задача 6:** Довести [теорему 2](#) при

- $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ ;
- $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ .

**Задача 7:** Знайти ступінь збіжності методу січних [Калиткин Н.Н., Численные методы, с. 145–146]

Якщо  $f(a) \cdot f''(a) > 0$  та  $f''(x)$  не міняє знак, то потрібно вибирати  $x_0 = a$ ; при цьому  $\{x_k\} \uparrow \bar{x}$ .

Якщо  $f(b) \cdot f''(b) > 0$ , то  $x_0 = b$ ; маємо  $\{x_k\} \downarrow \bar{x}$ . Пояснення на рисунку 2:



**Зауваження 1:** Якщо  $\bar{x}$  —  $p$ -кратний корінь тобто

$$f^{(m)}(\bar{x}) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p-1; \quad f^{(p)}(\bar{x}) \neq 0, \quad (61)$$

то в методі Ньютона необхідна наступна модифікація

$$x_{k+1} = x_k - p \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (62)$$

i

$$q = \frac{M_{p+1} \cdot |x_0 - \bar{x}|}{m_p \cdot p \cdot (p+1)} < 1. \quad (63)$$

**Зауваження 2:** Метод Ньютона можна застосовувати і для обчислення комплексного кореня

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \quad (64)$$

В теоремі про збіжність

$$q = \frac{|x_0 - \bar{x}| M_2}{2m_1}, \quad (65)$$

де

$$m_1 = \min_{U_r} |f'(z)|, \quad M_2 = \max_{U_r} |f''(z)|. \quad (66)$$

Тут  $|z|$  — модуль комплексного числа.

**Переваги** методу Ньютона:

- висока швидкість збіжності;
- узагальнюється на системи рівнянь;
- узагальнюється на комплексні корені.

**Недоліки** методу Ньютона:

- на кожній ітерації обчислюється не тільки  $f(x_k)$ , а і похідна  $f'(x_k)$ ;
- збіжність залежить від початкового наближення  $x_0$ , оскільки від нього залежить умова збіжності

$$q = \frac{M_2 |x_0 - \bar{x}|}{2m_1} < 1; \quad (67)$$

- потрібно, щоб  $f(x) \in C^2([a, b])$ .