

§ 8. Разновидности методов последовательных приближений

В методах последовательных приближений решения системы $A\bar{x} = \bar{b}$ исходят из произвольного начального вектора \bar{x}_0 и получают векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ по рекуррентной формуле

$$\bar{x}_{k+1} = F_k(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k), \quad (1)$$

где F_k — некоторая функция, зависящая, вообще говоря, от матрицы системы A , правой части \bar{b} , номера приближения k и предыдущих приближений $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$. Будем говорить, что *метод имеет первый порядок*, если F_k зависит только от \bar{x}_k и не зависит от $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}$. Будем называть метод *стационарным*, если F_k не зависит от k .

Простейшим случаем функций F_k будут линейные функции. Наиболее *общий линейный метод* последовательных приближений первого порядка должен иметь вид

$$\bar{x}_{k+1} = B_k \bar{x}_k + \bar{c}_k, \quad (2)$$

где B_k — квадратная матрица и \bar{c}_k — вектор. Естественно требовать от методов последовательных приближений, что при подстановке в правую часть (1) и (2) вместо \bar{x}_k точного решения системы $A^{-1}\bar{b}$ мы слева снова получили $A^{-1}\bar{b}$. В случае линейного метода первого порядка это приведет к равенству

$$A^{-1}\bar{b} = B_k A^{-1}\bar{b} + \bar{c}_k \quad (3)$$

или

$$\bar{c}_k = (I - B_k) A^{-1}\bar{b} = C_k \bar{b}. \quad (4)$$

В этом случае мы можем переписать (2) в виде

$$\bar{x}_{k+1} = B_k \bar{x}_k + C_k \bar{b}, \quad (5)$$

причем B_k и C_k — квадратные матрицы, не зависящие от \bar{b} и такие, что

$$B_k + C_k A = I. \quad (6)$$

Выражение (5) можно также записать в виде

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - C_k (A\bar{x}_k - \bar{b}). \quad (7)$$

Наконец, если существует матрица C_k^{-1} , то выражение (5) можно записать в виде

$$D_k \bar{x}_{k+1} + E_k \bar{x}_k = \bar{b}. \quad (8)$$

При этом должно быть

$$D_k + E_k = A. \quad (9)$$

При пользовании формулой (8) мы получим \bar{x}_{k+1} в неявной форме. Поэтому желательно, чтобы матрицу D_k было легко обратить. На практике обычно берут D_k диагональной или треугольной. В первом случае метод называют *полношаговым*, во втором — *одношаговым*.

Разнообразные схемы, осуществляющие линейные методы последовательных приближений первого порядка, можно считать реализацией формул (5), (7) или (8).

Много линейных и нелинейных методов последовательных приближений можно получить, используя способ *наименьших квадратов*. При этом минимизируется функция

$$f(\bar{x}) = \|A\bar{x} - \bar{b}\|^2 \quad (10)$$

или же $f(\bar{x})$, сложенная с некоторой постоянной. Разным способам минимизации и задания нормы будут соответствовать различные методы решения систем уравнений. Как мы видели в § 5, в случае симметрической положительно определенной матрицы A можно минимизировать функцию

$$f(\bar{x}) = (\bar{x}, A\bar{x}) - 2(\bar{b}, \bar{x}). \quad (11)$$

Один из способов такой минимизации там был рассмотрен. Этот способ можно обобщить. Выбираем какое-то направление, определяемое вектором \bar{c} . Так же как и в § 5, найдем, что $f(\bar{x} + \alpha\bar{c})$ принимает наименьшее значение при $\alpha = \alpha^*$, где

$$\alpha^* = \frac{(\bar{c}, \bar{b} - A\bar{x})}{(\bar{c}, A\bar{c})}. \quad (12)$$

Если возьмем вместо α^* величину $\alpha = \beta\alpha^*$, то будем иметь:

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x} + \alpha\bar{c}) = (2\alpha\alpha^* - \alpha^2)(\bar{c}, A\bar{c}) = \beta(2 - \beta)\alpha^{*2}(\bar{c}, A\bar{c}). \quad (13)$$

Таким образом, если $(\bar{c}, \bar{b} - A\bar{x}) \neq 0$, то $f(\bar{x}) > f(\bar{x} + \alpha\bar{c})$ при любом β ($0 < \beta < 2$).

Идея многих способов минимизации $f(\bar{x})$, а следовательно и решения системы $A\bar{x} = \bar{b}$, заключается в следующем. Задаются начальным приближением \bar{x}_0 . Определяют закон выбора векторов \bar{c}_k (они могут зависеть от \bar{x}_k). Определяют закон выбора коэффициентов β_k (они могут зависеть от \bar{x}_k). На каждом шаге в качестве последующего вектора рассматривают

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \beta_k \alpha_k^* \bar{c}_k, \quad (14)$$

где α_k^* было определено выше.

Если A не является симметрической положительно определенной матрицей, то можно вместо системы $A\bar{x} = \bar{b}$ рассматривать систему $A'RA\bar{x} = A'R\bar{b}$, где R — симметрическая положительно определенная

матрица. Часто в качестве R берут единичную матрицу I . Это, конечно, не означает, что во всех случаях придется делать предварительное преобразование системы. Бывает достаточно использовать преобразованную систему лишь для построения алгоритма.

§ 9. Линейные полношаговые методы первого порядка

1. Сходимость линейных полношаговых методов первого порядка. Простая итерация. Линейные полношаговые методы первого порядка определяются формулами (5) и (7) предыдущего параграфа. Исследуем сначала сходимость этих методов. Из формулы (5) следует:

$$\bar{x}_{k+1} - A^{-1}\bar{b} = B_k(\bar{x}_k - A^{-1}\bar{b}). \quad (1)$$

Применяя формулу (1) при $k = 0, 1, \dots, m$, получим:

$$\bar{x}_{m+1} - A^{-1}\bar{b} = B_m B_{m-1} \dots B_1 B_0 (\bar{x}_0 - A^{-1}\bar{b}). \quad (2)$$

Следовательно,

$$\|\bar{x}_{m+1} - A^{-1}\bar{b}\| \leq \|B_m\| \|B_{m-1}\| \dots \|B_1\| \|B_0\| \|\bar{x}_0 - A^{-1}\bar{b}\|. \quad (3)$$

Если $\|B_m\| \|B_{m-1}\| \dots \|B_1\| \|B_0\|$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$, то $\|\bar{x}_{m+1} - A^{-1}\bar{b}\|$ стремится к нулю при любом начальном векторе \bar{x}_0 . Как мы видели в § 7, из этого будет следовать, что все компоненты \bar{x}_{m+1} будут стремиться к соответствующим компонентам $A^{-1}\bar{b}$. Для того чтобы произведение норм матриц, стоящее в правой части (3), стремилось к нулю, достаточно потребовать

$$\|B_k\| \leq \gamma < 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

В частности, если процесс стационарен, т. е. B_k не зависят от k , $B_k = B$; последнее условие означает, что какая-то из норм B меньше единицы. Однако для стационарного случая можно дать более точные условия, а именно докажем теорему:

Стационарный линейный процесс

$$\bar{x}_{k+1} = B\bar{x}_k + C\bar{b} \quad (5)$$

сходится при любом начальном векторе и любой правой части тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы.

Действительно, легко проверить по индукции, что

$$\bar{x}_{k+1} = B^{k+1}\bar{x}_0 + (B^k + B^{k-1} + \dots + B + I)C\bar{b}. \quad (6)$$

Очевидно, последовательность

$$(B^k + B^{k-1} + \dots + B + I)C\bar{b} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

будет сходящейся для произвольного вектора \bar{b} в том и только в том случае, если сходится матричный ряд

$$I + B + B^2 + \dots + B^k + \dots \quad (8)$$

Но при этом $B^{k+1} \rightarrow 0$. Следовательно, \bar{x}_{k+1} образуют сходящуюся последовательность при произвольных векторах \bar{x}_0 и \bar{b} в том и только в том случае, когда сходится ряд (8). Как мы видели, ряд (8) сходится в том и только в том случае, если все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы. Утверждение доказано.

Полученное нами условие хорошо при теоретических рассуждениях, так как точно отражает положение вещей. Однако оно неудобно для практических применений, ибо в большинстве случаев собственные значения нам неизвестны, а отыскание их представляет задачу более сложную, чем решение системы линейных алгебраических уравнений. В главе 8 мы дадим ряд способов оценки максимального по модулю собственного значения. Пока же будем использовать нормы матриц, данные в § 7, и неравенство $\max |\lambda_i| \leq \|B\|$. При этом получим следующие *три достаточных условия*:

$$\sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n |b_{ij}| \leq \mu < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2 \leq \mu < 1. \quad (11)$$

Пояснений требует только последнее условие. Оно обеспечивает, что норма $\|B\|_3$, равная наибольшему собственному значению λ_1 матрицы $B'B$, не превышает единицы. Действительно, все собственные значения матрицы $B'B$ неотрицательны. Поэтому $\lambda_1 \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. Но последняя сумма равна следу матрицы, который и равен $\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2$.

Изложенный метод часто называют *простой итерацией*.

Для применения простой итерации необходимо предварительное преобразование системы, заданной в виде $A\bar{x} = \bar{b}$, к виду (5). Это можно сделать, например, так. Каждое из уравнений системы

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

делим на a_{ii} и переносим члены с $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ в правую часть равенства. При этом i -е уравнение примет вид

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1 - \frac{a_{i2}}{a_{ii}}x_2 - \dots \\ \dots - \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}}x_{i-1} - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}x_{i+1} - \dots - \frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n. \quad (13)$$

Для того чтобы этот прием был осуществим, коэффициенты a_{ii} должны быть отличны от нуля. Кроме того, для обеспечения

сходимости требуется значительное преобладание диагональных элементов над остальными коэффициентами. Так, неравенства (9) — (11) будут выполнены, если для коэффициентов будут выполнены следующие неравенства:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (14)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_{jj}^2} \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n |a_{ij}|^2 < 1. \quad (16)$$

Приведем пример решения системы методом простой итерации. Опять будем решать ту же систему, которую мы уже использовали в § 2 и 3. В верхней части схемы стоят коэффициенты преобразованной системы. Далее идет начальное приближение, в качестве которого взяты свободные члены преобразованной системы, и идут последующие приближения:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0	— 0,029409	— 0,050810	— 0,022890	— 0,024524	— 0,034634
	— 0,025314	0	— 0,029811	— 0,025272	— 0,021248	— 0,043736
	— 0,038103	— 0,025972	0	— 0,014727	— 0,030521	— 0,031758
	— 0,015192	— 0,019487	— 0,013034	0	— 0,033765	— 0,073469
	— 0,028541	— 0,028730	— 0,047368	— 0,059210	0	— 0,169430
	— 0,051824	— 0,075376	— 0,063370	— 0,165638	— 0,217801	0
$\bar{x}^{(0)}$	1,161765	1,147832	1,129872	0,570275	0,777788	0,770121
$\bar{x}^{(1)}$	1,011799	1,020120	0,999199	0,432689	0,493906	0,287933
$\bar{x}^{(2)}$	1,049027	1,058410	1,034234	0,484170	0,598888	0,398231
$\bar{x}^{(3)}$	1,038527	1,048077	1,024356	0,470754	0,572321	0,359803
$\bar{x}^{(4)}$	1,041622	1,051212	1,027253	0,474964	0,580689	0,369760
$\bar{x}^{(5)}$	1,040736	1,050327	1,026420	0,473804	0,578438	0,366660
$\bar{x}^{(6)}$	1,040994	1,050587	1,026661	0,474149	0,579122	0,367508
$\bar{x}^{(7)}$	1,040920	1,051413	1,026592	0,474051	0,578931	0,367254
$\bar{x}^{(8)}$	1,040915	1,050535	1,026588	0,474062	0,578962	0,367257
$\bar{x}^{(9)}$	1,040940	1,050534	1,026610	0,474078	0,578986	0,367315
$\bar{x}^{(10)}$	1,040936	1,050529	1,026606	0,474073	0,578974	0,367305
$\bar{x}^{(11)}$	1,040937	1,050530	1,026607	0,474074	0,578976	0,367309
$\bar{x}^{(12)}$	1,040936	1,050530	1,026607	0,474074	0,578975	0,367308

Таким образом,

$$\begin{aligned} (\bar{x}_{k+1} - A^{-1}\bar{b}, \bar{x}_{k+1} - A^{-1}\bar{b}) &= \\ &= \|\bar{x}_{k+1} - A^{-1}\bar{b}\|_0^2 \leq M_k \|\bar{x}_0 - A^{-1}\bar{b}\|_3^2, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$M_k = \max_{0 \leq i \leq n} \left| \prod_{j=0}^k (1 + \beta_j \lambda_i) \right|. \quad (27)$$

Зафиксируем k и будем подбирать β_j так, чтобы M_k приняло возможно меньшее значение. При этом мы будем предполагать, что нам каким-то образом удалось найти такие a и b , что

$$a \leq \lambda_i \leq b \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

Заменим отрезок $[a, b]$ отрезком $[-1, +1]$, введя новое переменное

$$t = \frac{2\lambda}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}. \quad (29)$$

При этом многочлен

$$P_{k+1}(\lambda) = \prod_{j=0}^k (1 + \beta_j \lambda) \quad (30)$$

перейдет в новый многочлен $Q_{k+1}(t)$. Так как $P_{k+1}(0) = 1$, то $Q_{k+1}\left(\frac{b+a}{a-b}\right) = 1$. Таким образом, перед нами возникает задача об отыскании многочлена степени $k+1$, равного 1 при $t = \frac{b+a}{a-b}$ и обладающего наименьшим максимумом модуля на отрезке $[-1, +1]$ среди всех многочленов, обладающих такими свойствами. Эту задачу решает многочлен (см. упражнения к гл. 4)

$$R_{k+1}(t) = \frac{T_{k+1}(t)}{T_{k+1}\left(\frac{b+a}{a-b}\right)}, \quad (31)$$

где $T_{k+1}(t)$ — многочлен Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля. Корни многочлена $R_{k+1}(t)$ совпадают с корнями $T_{k+1}(t)$ и расположены в точках

$$t_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2(k+1)}. \quad (32)$$

Корни же многочлена $P_{k+1}(\lambda)$ расположены в точках $-\beta_i^{-1}$. Следовательно,

$$\beta_i = 2[(a-b)t_i - (a+b)]^{-1}. \quad (33)$$

При этом

$$M_k = \max_{-1 \leq t \leq 1} |R_{k+1}(t)| = \left[T_{k+1}\left(\frac{b+a}{a-b}\right) \right]^{-1} < 1. \quad (34)$$

Если заранее не ясно, сколько шагов потребуется сделать для получения нужной точности, то целесообразно использовать β_i в ци-

клическом порядке. Задаемся каким-то k , подбираем соответствующие β_i по формуле (33) и производим вычисления по формуле (22), беря β_i в следующем порядке: $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \beta_0, \beta_2, \dots, \beta_k, \dots$. При $k=0$ процесс будет стационарным, при $k>0$ процесс будет нестационарным. Он всегда будет сходящимся в силу неравенств (26) и (34). Такой способ был впервые предложен Ричардсоном, и поэтому мы назовем его *методом Ричардсона*.

3. Обращение матриц методом последовательных приближений. Коснемся еще вопроса об обращении матриц методом последовательных приближений. Пусть нам удалось каким-то способом найти приближенное значение B_0 для матрицы A^{-1} . Предположим, далее, что некоторая норма матрицы

$$C_0 = I - AB_0 \quad (35)$$

меньше единицы, $\|C_0\| \leq q < 1$. Образует тогда последовательности:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= B_0(I + C_0), & C_1 &= I - AB_1; \\ B_2 &= B_1(I + C_1), & C_2 &= I - AB_2; \\ &\dots & \dots & \\ B_{k+1} &= B_k(I + C_k), & C_{k+1} &= I - AB_{k+1}; \\ &\dots & \dots & \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

при этом

$$\begin{aligned} C_k &= I - AB_k = I - AB_{k-1}(I + C_{k-1}) = I - (I - C_{k-1})(I + C_{k-1}) = \\ &= C_{k-1}^2 = C_{k-2}^4 = \dots = C_0^{2^k}. \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, матрица C_k будет очень быстро стремиться к нулевой и, следовательно, матрица B_k к A^{-1} . Оценим норму разности $\|B_k - A^{-1}\|$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|B_k - A^{-1}\| &= \|A^{-1}(I - C_k) - A^{-1}\| = \|A^{-1}C_k\| = \\ &= \|B_0(I - C_0)^{-1}C_0^{2^k}\| \leq \|B_0\| \cdot \|(I - C_0)^{-1}\| \cdot \|C_0\|^{2^k} \leq \|B_0\| \frac{q^{2^k}}{1-q}. \end{aligned} \quad (38)$$

§ 10. Линейные одношаговые методы первого порядка

Перейдем теперь к изучению линейных одношаговых методов первого порядка. Большое количество таких методов можно получить следующим образом. Представляем матрицу A в виде суммы трех матриц:

$$A = B + C + D. \quad (1)$$

Здесь B — диагональная матрица, в матрице C равны нулю элементы, лежащие на и выше главной диагонали, а в матрице D равны

нулю элементы, лежащие на и под главной диагональю. Выбираем какое-то число $\omega \neq 0$ и осуществляем итерационный процесс по формуле

$$(\omega^{-1}B + C) \bar{x}^{(k+1)} + [(1 - \omega^{-1})B + D] \bar{x}^{(k)} = \bar{b}. \quad (2)$$

Если разрешить (2) относительно $x_i^{(k+1)}$, то получим:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right] - (\omega - 1) x_i^{(k)}. \quad (3)$$

Особенно часто используется случай $\omega = 1$. При этом получается так называемый *метод Зейделя*. Рассмотрим подробно этот метод.

1. Метод Зейделя. Метод Зейделя отличается от простой итерации тем, что, найдя какое-то приближение для компоненты, мы сразу же используем его для отыскания следующей компоненты. Вычисления ведутся по формуле

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}. \quad (4)$$

По начальному приближению $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ находим $x_1^{(1)}$. Затем по $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ находим $x_2^{(1)}$ и т. д. После того как будут найдены все $x_i^{(1)}$, таким же образом находим $x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots$, пока не достигнем нужной точности.

Решим ту же систему, которая рассматривалась в предыдущем параграфе, методом Зейделя. Мы не будем повторять запись коэффициентов, а приведем лишь результаты вычислений:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\bar{x}^{(0)}$	1,161765	1,147832	1,129872	0,970275	0,777788	0,770121
$\bar{x}^{(1)}$	1,011799	1,020120	0,999199	0,432689	0,493906	0,287933
$\bar{x}^{(2)}$	1,049027	1,057467	1,031845	0,482485	0,591246	0,361969
$\bar{x}^{(3)}$	1,040158	1,049654	1,026331	0,474084	0,579940	0,367221
$\bar{x}^{(4)}$	1,040955	1,050021	0,026593	0,474057	0,579006	0,367343
$\bar{x}^{(5)}$	1,040950	1,050047	1,026618	0,474079	0,578982	0,367341
$\bar{x}^{(6)}$	1,040949	1,050528	1,026606	0,474071	0,578970	0,367341
$\bar{x}^{(7)}$	1,040937	1,050530	1,026607	0,474074	0,578975	0,367308
$\bar{x}^{(8)}$	1,040936	1,050530	1,026607	0,474074	0,578975	0,367308

Заметим, что здесь, так же как и при простой итерации, можно было бы сократить вычисления и записи. Прежде всего несколько

первых приближений можно было проводить с меньшим количеством знаков. Наоборот, в последних приближениях, когда старшие разряды уже установились, нет необходимости выписывать их вновь. Последовательные приближения продолжаются обычно до тех пор, пока два следующих друг за другом приближения не станут совпадать.

2. Сходимость метода Зейделя. Исследуем теперь сходимость метода Зейделя. Разрешая (2) при $\omega = 1$ относительно $\bar{x}^{(k+1)}$, получим:

$$\bar{x}^{(k+1)} = -(B+C)^{-1} D \bar{x}^{(k)} + (B+C)^{-1} \bar{b}. \quad (5)$$

Это означает, что метод Зейделя эквивалентен простой итерации с матрицей $-(B+C)^{-1} D$. Таким образом, чтобы метод сходился необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения этой матрицы были по модулю меньше единицы. Таким образом, должны быть по модулю меньше единицы все значения λ , удовлетворяющие уравнению

$$|\lambda I + (B+C)^{-1} D| = 0. \quad (6)$$

Но корни этого уравнения будут совпадать с корнями уравнения

$$|\lambda(B+C) + D| = 0. \quad (7)$$

Итак мы доказали теорему. *Для сходимости метода Зейделя необходимости достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

были по модулю меньше единицы.

Области сходимости простой итерации и итерации по Зейделю лишь пересекаются. Это значит, что существуют такие матрицы, для которых метод Зейделя сходится, а метод простой итерации нет, и наоборот. Нетрудно показать, что первое и второе достаточные условия (9) и (10) § 9 для сходимости метода простой итерации будут одновременно достаточными условиями и для сходимости процесса Зейделя.

Иногда метод Зейделя дает более быструю сходимость, чем простая итерация. Так будет, например, если выполнено условие (14) предыдущего параграфа. Обозначим

$$\mu = \max_i \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}. \quad (9)$$

Так как условие (14) выполнено, то $\mu < 1$. Обозначим также

$$-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = c_{ij}, \quad \frac{b_i}{a_{ii}} = d_i. \quad (10)$$

Тогда простой итерации будет соответствовать вычислительная схема

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n c_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad (11)$$

а методу Зейделя схема

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j^{(k)} + d_i. \quad (12)$$

По (11) и (9) разность между точным решением \bar{x} и $(k+1)$ -м приближением, полученным простой итерацией, будет иметь оценку

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \leq \mu \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1. \quad (13)$$

В то же время, если ввести обозначения

$$\sum_{j=1}^{i-1} |c_{ij}| = \beta_i; \quad \sum_{j=i+1}^n |c_{ij}| = \gamma_i; \quad \max_i \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i} = \mu', \quad (14)$$

то для разности между точным решением \bar{x} и $(k-1)$ -м приближением, полученным по методу Зейделя, получим оценку

$$\|x_i - x_i^{(k+1)}\| \leq \beta_i \|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 + \gamma_i \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1 \quad (15)$$

и

$$\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_1 \leq \mu' \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_1. \quad (16)$$

Но

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n |c_{ij}| = \beta_i + \gamma_i \leq \mu < 1 \quad (17)$$

и

$$\beta_i + \gamma_i - \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i} = \frac{\beta_i(1 - \beta_i - \gamma_i)}{1 - \beta_i} \geq 0. \quad (18)$$

Отсюда

$$\mu = \max_i (\beta_i + \gamma_i) \geq \max_i \frac{\gamma_i}{1 - \beta_i} = \mu', \quad (19)$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Если матрица A симметрическая и положительно определенная, а приведение системы $A\bar{x} = \bar{b}$ к виду $\bar{x} = C\bar{x} + \bar{d}$ осуществляется путем деления уравнений на диагональные элементы и последующего перенесения всех членов кроме x_i , где i — номер уравнения, направо, то метод Зейделя сходится.

Проверим, что при выполнении наших условий все собственные значения матрицы

$$-(B+C)^{-1}D = -(B+C)^{-1}C' \quad (20)$$

по модулю меньше единицы. Пусть λ_i и λ_j — два каких-то собственных значения этой матрицы, а \bar{z}_i и \bar{z}_j — соответствующие им собственные векторы. Тогда мы можем записать:

$$\left. \begin{aligned} -(B+C)^{-1}C'\bar{z}_i &= \lambda_i\bar{z}_i, \\ -(B+C)^{-1}C'\bar{z}_j &= \lambda_j\bar{z}_j. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} C'\bar{z}_i &= -\lambda_i B\bar{z}_i - \lambda_i C\bar{z}_i, \\ C'\bar{z}_j &= -\lambda_j B\bar{z}_j - \lambda_j C\bar{z}_j. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Рассмотрим скалярные произведения $(C'\bar{z}_i, \bar{z}_j)$ и $(C'\bar{z}_j, \bar{z}_i)$. Они будут представляться в виде

$$\left. \begin{aligned} (C'\bar{z}_i, \bar{z}_j) &= -\lambda_i (B\bar{z}_i, \bar{z}_j) - \lambda_i (C\bar{z}_i, \bar{z}_j), \\ (C'\bar{z}_j, \bar{z}_i) &= -\lambda_j (B\bar{z}_j, \bar{z}_i) - \lambda_j (C\bar{z}_j, \bar{z}_i). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Используя свойства скалярного произведения, получим:

$$\left. \begin{aligned} (C'\bar{z}_j, \bar{z}_i) &= (\bar{z}_j, \overline{C\bar{z}_i}) = \overline{(C\bar{z}_i, \bar{z}_j)}, \\ (C\bar{z}_j, \bar{z}_i) &= (\bar{z}_j, C'\bar{z}_i) = \overline{(C'\bar{z}_i, \bar{z}_j)}, \\ (B\bar{z}_j, \bar{z}_i) &= (\bar{z}_j, B\bar{z}_i) = \overline{(B\bar{z}_i, \bar{z}_j)}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Поэтому второе из равенств (23) можно переписать в виде

$$\overline{(C\bar{z}_i, \bar{z}_j)} = -\lambda_j \overline{(B\bar{z}_i, \bar{z}_j)} - \lambda_j \overline{(C'\bar{z}_i, \bar{z}_j)}, \quad (25)$$

или

$$(\overline{C\bar{z}_i}, \bar{z}_j) = -\bar{\lambda}_j (B\bar{z}_i, \bar{z}_j) - \bar{\lambda}_j (C'\bar{z}_i, \bar{z}_j). \quad (26)$$

Решая (26) и первое из равенств (23) относительно $(\overline{C\bar{z}_i}, \bar{z}_j)$ и $(C'\bar{z}_i, \bar{z}_j)$, получим:

$$\left. \begin{aligned} (\overline{C\bar{z}_i}, \bar{z}_j) &= \frac{\bar{\lambda}_j (\lambda_i - 1)}{1 - \lambda_i \bar{\lambda}_j} (B\bar{z}_i, \bar{z}_j), \\ (C'\bar{z}_i, \bar{z}_j) &= \frac{\lambda_i (\bar{\lambda}_j - 1)}{1 - \lambda_i \bar{\lambda}_j} (B\bar{z}_i, \bar{z}_j). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (A\bar{z}_i, \bar{z}_j) &= (B\bar{z}_i, \bar{z}_j) + (C\bar{z}_i, \bar{z}_j) + (C'\bar{z}_i, \bar{z}_j) = \\ &= \left[1 + \frac{\bar{\lambda}_j(\lambda_i - 1)}{1 - \lambda_i\bar{\lambda}_j} + \frac{\lambda_i(\bar{\lambda}_j - 1)}{1 - \lambda_i\bar{\lambda}_j} \right] (B\bar{z}_i, \bar{z}_j) = \frac{(1 - \lambda_i)(1 - \bar{\lambda}_j)}{1 - \lambda_i\bar{\lambda}_j} (B\bar{z}_i, \bar{z}_j). \end{aligned} \quad (28)$$

Положив здесь $i = j$, найдем:

$$(A\bar{z}_i, \bar{z}_i) = \frac{|1 - \lambda_i|^2}{1 - |\lambda_i|^2} (B\bar{z}_i, \bar{z}_i). \quad (29)$$

Отсюда

$$1 - |\lambda_i|^2 = |1 - \lambda_i|^2 \frac{(B\bar{z}_i, \bar{z}_i)}{(A\bar{z}_i, \bar{z}_i)}. \quad (30)$$

Так как A положительно определенная, то все ее диагональные элементы положительны. Поэтому

$$(A\bar{z}_i, \bar{z}_i) > 0, \quad (B\bar{z}_i, \bar{z}_i) > 0. \quad (31)$$

Заметим, что $\lambda = 1$ не является собственным значением матрицы $-(B+C)^{-1}C'$. Действительно, если бы существовал такой вектор \bar{z} , что

$$-(B+C)^{-1}C'\bar{z} = \bar{z}, \quad (32)$$

то мы имели бы

$$-C'\bar{z} = (B+C)\bar{z} \quad (33)$$

или

$$(B+C+C')\bar{z} = A\bar{z} = 0, \quad (34)$$

а это равенство возможно только при $\bar{z} = 0$, так как существует обратная матрица A^{-1} .

Итак, из (30) следует, что

$$1 - |\lambda_i|^2 > 0, \quad (35)$$

и утверждение доказано.

Можно доказать также, что если матрица A симметрична и ее диагональные элементы положительны, то положительная определенность матрицы A необходима для сходимости метода Зейделя.

3. Релаксационный метод ¹⁾. Метод Зейделя является разновидностью метода наименьших квадратов. При этом в качестве векторов \bar{c}_k , о которых говорилось в § 8, берутся в циклическом порядке единичные векторы, направленные по координатным осям.

¹⁾ См. обзорную статью М. В. Николаевой «О релаксационном методе Саусвелла», Труды математического института им. Стеклова, т. XXVIII, 1949 г.

Иногда бывает целесообразно для упрощения вычислений или для улучшения сходимости изменить порядок уравнений в заданной системе или же нумерацию неизвестных. Можно пойти и еще дальше, а именно при каждом цикле процесса последовательных приближений брать свой порядок. Так, например, поступают в *релаксационном методе*. Выбирают начальное приближение $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Вычисляют так называемые невязки

$$\delta_i = a_{i1}x_1^{(0)} + a_{i2}x_2^{(0)} + \dots + a_{in}x_n^{(0)} - b_i. \quad (36)$$

Находится $x_1^{(1)}$, удовлетворяющее равенству

$$a_{i1}x_1^{(1)} + a_{i2}x_2^{(0)} + \dots + a_{in}x_n^{(0)} = b_i, \quad (37)$$

где i — номер уравнения с максимальной по модулю невязкой. Затем подсчитываем невязки

$$\delta_j = a_{j1}x_1^{(1)} + a_{j2}x_2^{(0)} + \dots + a_{jn}x_n^{(0)} - b_j \quad (j \neq i) \quad (38)$$

и подбираем $x_2^{(1)}$, удовлетворяющее равенству

$$a_{j1}x_1^{(1)} + a_{j2}x_2^{(1)} + a_{j3}x_3^{(0)} + \dots + a_{jn}x_n^{(0)} = b_j, \quad (39)$$

где j — номер уравнения с наибольшей по модулю невязкой. Так продолжаем и дальше, пока не используем все n уравнений. При этом будут найдены все $x_i^{(1)}$. Тогда начинаем второй цикл, который производится так же, как и первый, но вместо $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ используется $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$. Повторение циклов продолжают до тех пор, пока не достигнут требуемой точности. Иногда при выборе уравнения, из которого вычисляется «улучшенное» приближение, руководствуются не принципом максимальной по модулю невязки, а каким-либо другим. Во всех случаях стараются брать уравнения в таком порядке, чтобы в кратчайший срок получить нужное решение. Этот довольно-таки неопределенный принцип требует от вычислителя навыка и искусства. Поэтому релаксационный метод трудно осуществить на машинах.

Релаксационный метод является нестационарным.

§ 11. Метод скорейшего спуска

В качестве примера нелинейных методов рассмотрим в этом параграфе метод скорейшего спуска, о котором уже говорилось в § 4. В методе скорейшего спуска исходят из некоторого начального приближения $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ и по нему находят следующее приближение $\bar{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ по формуле

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \alpha_0 \bar{r}^{(0)}, \quad (1)$$