

## 2 Методи розв'язання нелінійних рівнянь

*Постановка задачі.* Нехай маємо рівняння  $f(x) = 0$ ,  $\bar{x}$  – його розв'язок, тобто  $f(\bar{x}) = 0$ .

Задача розв'язання цього рівняння розпадається на етапи:

1. Існування та кількість коренів.
2. Відділення коренів, тобто розбиття числової вісі на інтервали, де знаходиться один корінь.
3. Обчислення кореня із заданою точністю  $\varepsilon$ .

Для розв'язання перших двох задач використовуються методи математичного аналізу та алгебри, а також графічний метод. Далі розглядаються методи розв'язання третього етапу.

### 2.1 Метод ділення навпіл

Припустимо, що на  $[a, b]$  знаходиться лише один корінь рівняння

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

для  $f(x) \in C([a, b])$  який необхідно визначити. Нехай  $f(a)f(b) < 0$ . Припустимо, що  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$ . Покладемо  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  і обчислимо  $f(x_1)$ . Якщо  $f(x_1) < 0$ , то шуканий корінь  $\bar{x}$  знаходиться на інтервалі  $(a, x_1)$ . Якщо ж  $f(x_1) > 0$ , то  $\bar{x} \in (x_1, b)$ . З двох інтервалів  $(a, x_1)$  і  $(x_1, b)$  вибираємо той, на границях якого  $f(x)$  має різні знаки, знаходимо точку  $x_2$  – середину вибраного інтервалу, обчислюємо  $f(x_2)$ , і повторюємо вказаний процес.

В результаті отримуємо послідовність інтервалів, що містять шуканий корінь  $\bar{x}$ , причому довжина кожного наступного інтервалу вдвічі менше.

Цей процес продовжується доки довжина  $b_n - a_n$  отриманого інтервалу  $(a_n, b_n)$  не стане меншою за  $2\varepsilon$ . Тоді  $x_{n+1}$ , як середина інтервалу  $(a_n, b_n)$ , пов'язана з  $\bar{x}$  нерівністю

$$|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon. \quad (2)$$

За теоремою Больцано-Коші, ця умова буде виконуватися для деякого  $n$ . Справді, оскільки

$$|b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{1}{2}|b_k - a_k|,$$

то

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b - a). \quad (3)$$

Звідси ж отримуємо нерівність для обчислення кількості ітерацій  $n$  для виконання умови (2):

$$n = n(\varepsilon) \geq \left\lceil \log \left( \frac{b-a}{\varepsilon} \right) \right\rceil + 1.$$

Степінь збіжності лінійна, тобто геометричної прогресії зі знаменником  $q = 1/2$ .

Переваги методу: простота, надійність. Недоліки методу: низька швидкість збіжності, метод не узагальнюється на системи.