1 Аналіз похибок заокруглення

1.1 Види похибок

Нехай необхідно розв'язати рівняння

$$Au = f. \tag{1}$$

Неточно задані вхідні дані призводять до рівняння

$$\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}. \tag{2}$$

Назвемо $\delta_1 = u - \tilde{u}$ *незсувною похибкою.*

Застосування методу розв'язання (2) призводить до рівняння

$$\tilde{A}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h, \tag{3}$$

де $h > 0$ – малий параметр. Назвемо $\delta_2 = \tilde{u} - \tilde{u}_h$ *похибкою методу.*

Реалізація методу на ЕОМ приводить до рівняння

$$\tilde{A}_h^\star \tilde{u}_h^\star = \tilde{f}_h^\star. \tag{4}$$

Назвемо $\delta_3 = \tilde{u}_h - \tilde{u}_h^\star$ *похибкою заокруглення.*

Назвемо $\delta = u - \tilde{u}_h^\star = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ *повною похибкою.*

Визначення 1. Кажуть, що задача (1) *коректна*, якщо

1. $\forall f \in F \ \exists! u \in U$;
2. задача (1) *стійка*, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f : \left\| A - \tilde{A} \right\| < \delta, \left\| f - \tilde{f} \right\| < \delta \Rightarrow \| u - \tilde{u} \| < \varepsilon.$$

Якщо задача (1) некоректна, то або розв'язок її не існує, або він не єдиний, або він нестійкий, тобто

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists f : \left\| A - \tilde{A} \right\| < \delta, \left\| f - \tilde{f} \right\| < \delta, \| u - \tilde{u} \| > \varepsilon.$$

Абсолютна похибка $\Delta x \le |x - x^\star|$.

Відносна похибка $\delta x \le \dfrac{\Delta x}{|x|}$ або $\dfrac{\Delta x}{|x^\star|}$.

Значущими цифрами називаються всі цифри,починаючи з першої ненульової зліва.

Вірна цифра – це значуща, якщо абсолютна похибка за рахунок відкидання всіх молодших розрядів не перевищує одиниці розряду цієї цифри. Тобто, якщо $x^\star = \overline{\alpha_n \ldots \alpha_0}.\overline{\alpha_{-1} \ldots \alpha_{-p}}$, то a_{-p} – вірна, якщо $\Delta x \le 10^{-p}$ (інколи беруть $\Delta x \le q \cdots 10^{-p}$, $1/2 \le w < 1$, наприклад $w = 0.55$).

1.2 Підрахунок похибок в ЕОМ

Обчислимо відносну похибку заокруглення числа x на ЕОМ з плавоючою комою. У системі числення з осоновою β число x представляється у вигляді

$$x = \pm \left(\alpha_1 \beta^{-1} + \alpha_2 \beta^{-2} + \ldots + \alpha_t \beta^{-t} + \ldots \right) \beta^p, \tag{5}$$

де $0 \le \alpha_k < \beta$, $\alpha_1 \ne 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Якщо в ЕОМ t розрядыв, то при выдкиданны молодших розрядыв ми оперуэмо з наближеним значенням

$$x^\star = \pm\left(\alpha_1\beta^{-1} + \alpha_2\beta^{-2} + \ldots + \alpha_t\beta^{-t}\right)\beta^p$$

і, відповідно, похибка заокруглення $x - x^\star = \pm\beta^p\left(\alpha_{t+1}\beta^{-t-1} + \ldots\right)$. Її можна оцінити так:

$$|x - x^\star| \le \beta^{p-t-1}(\beta-1)(1+\beta^{-1}+\ldots) \le \beta^{p-t-1}(\beta-1)\frac{1}{1-\beta^{-1}} = \beta^{p-t}.$$

Враховуючи, що $\alpha_1 \ne 0$?, маємо $|x| \ge \beta^p\beta^{-1} = \beta p - 1$. Звідси остаточно

$$\delta x \le \frac{\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \beta^{-t+1}.$$

При точніших способах заокруглення можна отримати оцінку $\delta x \le \beta^{-t+1}/2 = \varepsilon$. Число ε називаєтсья *машинним іпсилон*. Наприклад, для $\beta = 2$, $t = 24$, $\varepsilon = 2^{-24} \approx 10^{-7}$.

1.3 Обчислення похибок обчислення значення функції