Міністерство освіти ти науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №6 на тему:
"Квадратурні формули"

Виконав студент групи ОМ-3
Скибицький Нікіта

Київ, 2019

Зміст

1 Постановка задачі

Обчислити невласний інтеграл

$$I(f) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.0.1}$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

Для обчислень використати:

1. формули:
   (а) середніх прямокутників;
   (б) трапецій;
   (в) Сімпсона (парабол).
2. прицип Рунге;
3. формулу Річардсона;
4. апріорні оцінки похибки.

Вивести:

1. кінцевий крок інтегрування h;
2. апріорну оцінку тчоності інтегрування;

3. наближені значення інтегралу I_h, $I_{h/2}$;
4. оцінку похибки інтегрування за принципом Рунге;
5. уточнене значення інтегралу за формулою Річардсона.

2 Теоретичні відомості

2.1 Невласність

Від невласності можна позбутися адитивним методом, тобто представивши підінтегральну функцію у вигляді суми функції з особливістю яку інтегруємо аналітично та не особливої функції яку інтегруємо чисельно:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (x-x_0)^{-\alpha}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b (x-x_0)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b (x-x_0)^{-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k}(x-x_0)^{n+k}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b (x-x_0)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x-x_0)^{-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k}(x-x_0)^{n+k}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x-x_0)^{-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k}(x-x_0)^{n+k}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x-x_0)^{-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k - g(x)\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x-x_0)^{-\alpha}\left(\varphi(x) - g(x)\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

далі

$$
\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (x-x_0)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k\,\mathrm{d}x \tag{2.1.1}
$$

беремо аналітично а

$$
\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k}(x-x_0)^{n+k-\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{2.1.2}
$$

— чисельно.

Такий підхід у нашому випадку працює погано, адже для апріорної оцінки похибки чисельного інтегрування необхідна принаймні скінченна друга похідна у ψ, а для цього в g доводиться брати багато (6) членів ряду Тейлора. А це у свою чергу призводить до малості ψ, що ускладнює точне обчислення її інтегралу за рахунок зростання відносної машинної похибки.

Тому ми просто зробимо заміну і зведемо інтеграл до власного.

2.2 Квадратурні формули

2.2.1 Середніх прямокутників

$$I_0 = (b-a) \cdot f(x_0), \quad x_0 = \frac{a+b}{2} \tag{2.2.1}$$

Знайдемо алгебраїчну степінь точності цієї квадратурниої формули:

$$I_0(1) = (b-a) \cdot 1 = I(x), \tag{2.2.2}$$

$$I_0(x) = (b-a) \cdot \frac{a+b}{2} = I(x), \tag{2.2.3}$$

$$I_0(x^2) = (b-a) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \neq \frac{b^3-a^3}{3} = \int\limits_a^b x^2 \,\mathrm{d}x = I(x^2), \tag{2.2.4}$$

тому $m = 1$.

Оцінимо для неї похибку. Взагалі для формули інтерполяційного типу:

$$R_n(f) = I(f) - I_n(f) = I(f) - I(L_n) = I(f - L_n) = I(r_n) = \int\limits_a^b r_n(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.2.5}$$

де $r_n(x)$ — залишковий член інтерполяції. Далі

$$|R_n(f)| \le (b-a) \cdot \max_x |r_n(x)| \le (b-a) \cdot \frac{M_{n+1}}{n+1} \cdot \max_x |\omega_n(x)|. \tag{2.2.6}$$

Для I_0:

$$\begin{aligned} |R_0(f)| &= \left|\int\limits_a^n r_0(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_a^b |r_0(x)|\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b \frac{M_1}{1!}|x - x_0|\,\mathrm{d}x = \\ &= M_1 \int\limits_a^b |x - x_0|\,\mathrm{d}x \le M_1 \cdot \frac{b^2-a^2}{4}. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Але це погана оцінка, вона не використовує той факт, що квадратурна формула має степінь точності на одиницю вищу. Отримаємо кращу оцінку. Маємо при $f \in C^2([a,b])$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} \cdot f''(\xi), \tag{2.2.8}$$

де $x_0 \equiv \frac{a+b}{2}$, а $\xi \in [a,b]$. Тоді

$$
\begin{aligned}
R_0(f) &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b L_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - f(x_0))\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b \left((x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi)\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot f''(\xi)\,\mathrm{d}x = f''(\eta) \int_a^b \frac{(x - x_0)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{f''(\eta)}{24} \cdot (b - a)^3.
\end{aligned} \tag{2.2.9}
$$

Таким чином

$$
|R_0(f)| \leq \frac{M_2}{24} \cdot (b - a)^3 \tag{2.2.10}
$$

Але тут у нас немає впливу на точність (величину похибки). Тому використовують формулу складеного типу. Якщо сітка рівномірна, то складена квадратурна формула прямокутників має вигляд

$$
I(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{N} h \cdot f(\bar{x}_i) = I_h(f), \tag{2.2.11}
$$

де $\bar{x}_i = x_{i-1/2} = x_i - h/2$.

Оцінимо похибку цієї квадратурної формули:

$$
R_h(f) = I(f) - I_h(f) = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\bar{x}_i))\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} f''(\eta_i) \cdot \frac{h^3}{24}, \tag{2.2.12}
$$

$$
|R_h(f)| \leq \frac{M_2}{24} n h^3 = \frac{M_2 h^2 (b - a)}{24}. \tag{2.2.13}
$$

Тобто ця формула має степінь точності $p = 2$ по кроку h. (Не слід плутати з алгебраїчним степенем точності $m = 1$ для цієї формули).

2.2.2 Трапецій

Нехай $x_0 = a$, $x_1 = b$, $L_1(x) = f(x)$. Тоді отримаємо формулу:

$$
I_1(f) = \frac{b - a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) \tag{2.2.14}
$$

Формула має алгебраїчний степінь точності $m = 1$, оскільки $I(x^2) \neq I_1(x^2)$. Це формула замкненого типу. Залишковий член:

$$
R_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)(x - a)(x - b)}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(b - a)^3}{12} \cdot f''(\xi). \tag{2.2.15}
$$

Оцінка залишкового члена:

$$
|R_1(f)| \leq M_2 \cdot \frac{(b - a)^3}{12}. \tag{2.2.16}
$$

З геометричної точки зору замінюється площа криволінійної трапецій площею звичайної трапеції.

Складена квадратурна формула трапецій:

$$
\begin{aligned}
I_h(f) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{2} \cdot (f(x_{i-1}) + f(x_i)) = \\
&= \frac{h}{2} \cdot f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} h \cdot f(x_i) + \frac{h}{2} \cdot f(b),
\end{aligned}
\tag{2.2.17}
$$

де $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{N}$, $i = \overline{0, N}$ та

$$
|R_h(f)| \le M_2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot h^2, \quad f \in C^2([a,b]). \tag{2.2.18}
$$

2.2.3 Сімпсона (парабол)

Нехай $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. Замість f використовуємо $L_2(x)$. Тоді отримаємо квадратурну формулу:

$$
I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \tag{2.2.19}
$$

Це *квадратурна формула Сімпсона.*

Алгебраїчна степінь точності квадратурної формули Сімпсона $m = 3$.

Для $f \in C^4([a,b])$ залишковий член квадратурної формули Сімпсона має місце представлення:

$$
R_2(f) = \frac{1}{24} \int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) f^{(4)}(\xi)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot (b-a)^5, \tag{2.2.20}
$$

та вірна оцінка:

$$
|R_2(f)| \le \frac{M_4}{2880} \cdot (b-a)^5. \tag{2.2.21}
$$

Складена квадратурна формула Сімпсона має вигляд:

$$
\begin{aligned}
I_h(f) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{6} \left(f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_i) \right) = \\
&= \frac{h}{6}(f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{N-1}) + 4f(x_{N-1/2}) + f(x_N)).
\end{aligned}
\tag{2.2.22}
$$

Якщо $f \in C^4([a,b])$, то має місце оцінка:

$$
|R_h(f)| \le \frac{M_4}{2880} \cdot (b-a) \cdot h^4, \quad p = 4. \tag{2.2.23}
$$

2.3 Принцип Рунге і формула Річардсона

Нехай задана деяка величина I (сіткова функція, інтеграл, неперервна функція). Нехай $I_h \approx I$ та $I_n \to I$ при $h \to 0$. Нехай похибка послідовності I_h представляється у вигляді:

$$
R_h = I - I_h = \overset{\circ}{R}_h + \alpha(h), \tag{2.3.1}
$$

де $\overset{\circ}{R}_h = C \cdot h^m$ — головний член похибки, C не залежить від h, $\alpha(h) = o(h^m)$. Обчислимо $I_{h/2}$. З (2.3.1) випливає, що

$$I = I_h + Ch^m + \alpha(h), \tag{2.3.2}$$

$$I = I_{h/2} + C \cdot \frac{h^m}{2^m} + \alpha(h). \tag{2.3.3}$$

Звідси

$$I_{h/2} - I_h = \frac{Ch^m}{2^m} \cdot (2^m - 1) + \alpha(h). \tag{2.3.4}$$

З (2.3.1):

$$\overset{\circ}{R}_{h/2} = \frac{Ch^m}{2^m} = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^m - 1}, \tag{2.3.5}$$

та

$$\overset{\circ}{R}_h = \frac{2^m}{2^m - 1} \cdot (I_{h/2} - I_h). \tag{2.3.6}$$

Формула (2.3.5) носить назву *апостеріорної оцінки* похибки обчислення I за допомогою наближення $I_{h/2}$. (*Апріорні оцінки* це оцінки отримані до обчислення величини I_h, *апостеріорні оцінки* — під час її обчислення).

З формули (2.3.5) впливає такий алгоритм обчислення інтегралу із заданою точністю ε:

1. обчислюємо I_h, $I_{h/2}$, $\overset{\circ}{R}_{h/2}$;
2. перевіряємо чи $\left|\overset{\circ}{R}_{h/2}\right| < \varepsilon$.
3. Якщо так, то $I \approx I_{h/2}$;
4. Якщо ж ні, то:
    (а) обчислюємо $I_{h/2}$, $I_{h/4}$, $\overset{\circ}{R}_{h/4}$;
    (б) перевіряємо $\left|\overset{\circ}{R}_{h/4}\right| < \varepsilon$ і т. д.
5. Процес продовжуємо поки не буде виконана умова $\left|\overset{\circ}{R}_{h/2^k}\right| < \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$.

Зауваження: Ми даємо оцінку не похибки, а її головного члена з точністю $\alpha(h)$, тому такий метод може давати збої, якщо не виконана умова

$$|\alpha(h)| \ll \left|\overset{\circ}{R}_{h/2^k}\right|. \tag{2.3.7}$$

За допомогою головного члена похибки можна отримати краще значення для I:

$$\tilde{I}_{h/2} = I^{(1)}_{h/2} = I_{h/2} + \overset{\circ}{R}_{h/2} = \frac{2^m}{2^m - 1} \cdot I_{h/2} - \frac{1}{2^m - 1} \cdot I_h. \tag{2.3.8}$$

Це *екстраполяційна формула Річардсона*: $I_h - \tilde{I}_{h/2} = \alpha(h)$.

Для квадратурної формули трапецій $p = 2$ і

$$I - I_h = Ch^2 + O(h^4), \tag{2.3.9}$$
$$\overset{\circ}{R}_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{3}. \tag{2.3.10}$$

Маємо

$$R_h = -\frac{h^2}{12} \int\limits_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x + O(h^4) = O(h^2). \tag{2.3.11}$$

Отже, якщо застосовувати екстраполяційну формулу Річардсона, то

$$\tilde{I}_{h/2} = \frac{4}{3} \cdot I_{h/2} - \frac{1}{3} \cdot I_h, \tag{2.3.12}$$

і $I_h - \tilde{I}_{h/2} = O(h^4)$.

Цей принцип застосовується і для формули Сімпсона $m = 4$. Головна частина залишкового члена для цієї формули:

$$\overset{\circ}{R}_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{15}. \tag{2.3.13}$$

$$\tilde{I}_{h/2} = \frac{16}{15} \cdot I_{h/2} - \frac{1}{15} \cdot I_h, \tag{2.3.14}$$

$$I_h - \tilde{I}_{h/2} = O(h^6). \tag{2.3.15}$$

3 Практична частина

3.1 Невласність

Перш за все зробимо заміну:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \left| t = \sqrt[3]{x}, x = t^3, \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t \right| = \int\limits_{-1}^{1} 3t \ln(2 + t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1.1}$$

Таким чином ми звели інтеграл до власного.

3.2 Квадратурні формули

Були написані наступні функції для обчислення квадратурних формул:

```
def rectangle(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
        h: float) -> float:
    return h * np.sum(f(np.arange(a + h / 2, b + h / 2, h)))


def trapezoid(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
        h: float) -> float:
    return h / 2 * (f(a) + 2 * np.sum(f(np.arange(a + h, b, h))) + f(b))
```

```
def simpson(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
        h: float) -> float:
    return h / 6 * (f(a) + 2 * np.sum(f(np.arange(a + h, b, h))) +
        4 * np.sum(f(np.arange(a + h / 2, b + h / 2, h))) + f(b))
```

3.3 Апріорні оцінки похибки

Були написані наступні функції для обчислення апріорних оцінок похибок:

```
def rectangle(a: float, b: float, M_2: float, h: float) -> float:
    return M_2 * h**2 * (b - a) / 24


def trapezoid(a: float, b: float, M_2: float, h: float) -> float:
    return M_2 * h**2 * (b - a) / 12


def simpson(a: float, b: float, M_4: float, h: float) -> float:
    return M_4 * h**4 * (b - a) / 2880
```

Тут нам знадобляться M_2 і M_4, знайдемо їх:

$$M_2 = \max_{-1 \le t \le 1} \left| \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} \right|, \quad M_4 = \max_{-1 \le t \le 1} \left| \frac{\mathrm{d}^4 f(t)}{\mathrm{d}t^4} \right|. \tag{3.3.1}$$

Послідовно знаходимо:

$$\frac{\mathrm{d} f(t)}{\mathrm{d}t} = 3 \left(\frac{t}{t+2} + \ln(t+2) \right), \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{3(t+4)}{(t+2)^2}, \tag{3.3.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 f(t)}{\mathrm{d}t^3} = -\frac{3(t+6)}{(t+2)^2}, \tag{3.3.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 f(t)}{\mathrm{d}t^4} = \frac{6(t+8)}{(t+2)^4}, \tag{3.3.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^5 f(t)}{\mathrm{d}t^5} = -\frac{18(t+10)}{(t+2)^5}. \tag{3.3.6}$$

Як бачимо $\mathrm{d}^3 f(t)/\,\mathrm{d}t^3 < 0$ на $[-1, 1]$, тому M_2 досягається або в -1, або в 1. Підставляючи знаходимо $f''(-1) = 9$, $f(1) = 5/3$, тому $M_2 = 9$.

Як бачимо $\mathrm{d}^5 f(t)/\,\mathrm{d}t^5 < 0$ на $[-1, 1]$, тому M_4 досягається або в -1, або в 1. Підставляючи знаходимо $f^{(4)}(-1) = 42$, $f^{(4)}(1) = 2/3$, тому $M_4 = 42$.

3.4 Принцип Рунге

Були написані наступні функції для обчислення похибки за принципом Рунге:

```
def rectangle(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
        h: float) -> float:
```

```
    I_h, I_half_h = integrate.rectangle(a, b, f, h), \
        integrate.rectangle(a, b, f, h / 2)
    return abs(I_half_h - I_h) / 3


def trapezoid(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
        h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.trapezoid(a, b, f, h), \
        integrate.trapezoid(a, b, f, h / 2)
    return abs(I_half_h - I_h) / 3


def simpson(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
        h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.simpson(a, b, f, h), \
        integrate.simpson(a, b, f, h / 2)
    return abs(I_half_h - I_h) / 15
```

3.5 Формула Річардсона

Були написані наступні функції для обчислення уточненого значення інтегралу за екстраполяційною формулою Річардсона:

```
def rectangle(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
        h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.rectangle(a, b, f, h), \
        integrate.rectangle(a, b, f, h / 2)
    return (4 * I_half_h - I_h) / 3


def trapezoid(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
        h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.trapezoid(a, b, f, h), \
        integrate.trapezoid(a, b, f, h / 2)
    return (4 * I_half_h - I_h) / 3


def simpson(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
        h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.simpson(a, b, f, h), \
        integrate.simpson(a, b, f, h / 2)
    return (16 * I_half_h - I_h) / 15
```

3.6 Програми-драйвери

Були написані наступні програми-драйвери:

```
def rectangle(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array], h: float,
        I_True: float, M_2: float) -> None:
        while runge.rectangle(a, b, f, h) > eps:
                h /= 2
```

```
        h /= 2

        I_h, I_half_h, I_richardson = integrate.rectangle(a, b, f, h), \
                integrate.rectangle(a, b, f, h / 2), richardson.rectangle(a, b, f, h)

def trapezoid(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array], h: float,
        I_True: float, M_2: float) -> None:
        while runge.trapezoid(a, b, f, h) > eps:
                h /= 2

        h /= 2

        I_h, I_half_h, I_richardson = integrate.trapezoid(a, b, f, h), \
                integrate.trapezoid(a, b, f, h / 2), richardson.trapezoid(a, b, f, h)

def simpson(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array], h: float,
        I_True: float, M_4: float) -> None:
        while runge.simpson(a, b, f, h) > eps:
                h /= 2

        h /= 2

        I_h, I_half_h, I_richardson = integrate.simpson(a, b, f, h), \
                integrate.simpson(a, b, f, h / 2), richardson.simpson(a, b, f, h)

if __name__ == '__main__':
        def f(t):
                return 3 * t * np.log(2 + t)

        a, b = -1, 1
        I_true = 6 - 9 / 2 * np.log(3)

        M_2, M_4 = 9, 42

        h = b - a
        eps = 1e-5

        rectangle(a, b, f, h, I_true, M_2)
        trapezoid(a, b, f, h, I_true, M_2)
        simpson(a, b, f, h, I_true, M_4)
```

3.7 Результати

Тут

- `h` — кінцевий крок інтегрування;
- `I_true` — справжнє значення інтегралу;
- `I_h` — значення інтегралу за відповідною квадратурною формулою для кроку h;

- `R_h_true` — відхилення `I_h` від `I_true`;
- `I_half_h` — значення інтегралу за відповідною квадратурною формулою для кроку $h/2$;
- `R_half_h_true` — відхилення `I_half_h` від `I_true`;
- `R_runge` — оцінка відхилення `I_h` від `I_true` за принципом Рунге;
- `I_richardson` — уточнене значення інтегралу за екстраполяційною формулою Річардсона;
- `R_richardson_true` — відхилення `I_richardson` від `I_true`;
- `apriori_error` — апріорна оцінка відхилення `I_h` від `I_true`.

3.7.1 Для формули середніх прямокутників

```
h                  = 0.00390625
I_true             = 1.0562447009935063
I_h                = 1.0562400624293735
R_h_true           = 4.638564132797285e-06
I_half_h           = 1.0562435413517188
R_half_h_true      = 1.1596417874848441e-06
R_runge            = 1.1596407817708136e-06
I_richardson       = 1.0562447009925007
R_richardson_true  = 1.0056400157054668e-12
apriori_error      = 1.1444091796875e-05
```

3.7.2 Для формули трапецій

```
h                  = 0.00390625
I_true             = 1.0562447009935063
I_h                = 1.0562539781252218
R_h_true           = 9.277131715501596e-06
I_half_h           = 1.0562470202772976
R_half_h_true      = 2.3192837912411335e-06
R_runge            = 2.319282641420154e-06
I_richardson       = 1.0562447009946563
R_richardson_true  = 1.1499690089067371e-12
apriori_error      = 2.288818359375e-05
```

3.7.3 Для формули Сімпсона (парабол)

```
h                  = 0.125
I_true             = 1.0562447009935063
I_h                = 1.0562459003461577
R_h_true           = 1.199352651415353e-06
I_half_h           = 1.056244776246562
R_half_h_true      = 7.525305578681696e-08
R_runge            = 7.49399730419024e-08
I_richardson       = 1.056244701306589
R_richardson_true  = 3.130826708996892e-10
apriori_error      = 7.120768229166667e-06
```