

1 Аналіз похибок заокруглення

1.1 Види похибок

Нехай необхідно розв'язати рівняння

$$Au = f. \quad (1)$$

Неточно задані вхідні дані призводять до рівняння

$$\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{f}. \quad (2)$$

Назвемо $\delta_1 = u - \tilde{u}$ *незсувеною похибкою*.

Застосування методу розв'язання (2) призводить до рівняння

$$\tilde{A}_h \tilde{u}_h = \tilde{f}_h, \quad (3)$$

де $h > 0$ – малий параметр. Назвемо $\delta_2 = \tilde{u} - \tilde{u}_h$ *похибкою методу*.

Реалізація методу на ЕОМ призводить до рівняння

$$\tilde{A}_h^* \tilde{u}_h^* = \tilde{f}_h^*. \quad (4)$$

Назвемо $\delta_3 = \tilde{u}_h - \tilde{u}_h^*$ *похибкою заокруглення*.

Назвемо $\delta = u - \tilde{u}_h^* = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ *повною похибкою*.

Визначення 1. Кажуть, що задача (1) *коректна*, якщо

1. $\forall f \in F \exists! u \in U$;
2. задача (1) *стійка*, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f : \|A - \tilde{A}\| < \delta, \|f - \tilde{f}\| < \delta \Rightarrow \|u - \tilde{u}\| < \varepsilon.$$

Якщо задача (1) некоректна, то або розв'язок її не існує, або він не єдиний, або він нестійкий, тобто

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists f : \|A - \tilde{A}\| < \delta, \|f - \tilde{f}\| < \delta, \|u - \tilde{u}\| > \varepsilon.$$

Абсолютна похибка $\Delta x \leq |x - x^*|$.

Відносна похибка $\delta x \leq \frac{\Delta x}{|x|}$ або $\frac{\Delta x}{|x^*|}$.

Значущими цифрами називаються всі цифри, починаючи з першої ненульової зліва.

Вірна цифра – це значуща, якщо абсолютна похибка за рахунок відкидання всіх молодших розрядів не перевищує одиниці розряду цієї цифри. Тобто, якщо $x^* = \overline{\alpha_n \dots \alpha_0}.\overline{\alpha_{-1} \dots \alpha_{-p}}$, то α_{-p} – вірна, якщо $\Delta x \leq 10^{-p}$ (інколи беруть $\Delta x \leq q \dots 10^{-p}$, $1/2 \leq w < 1$, наприклад $w = 0.55$).

1.2 Підрахунок похибок в ЕОМ

Обчислимо відносну похибку заокруглення числа x на ЕОМ з плаваючою комою. У системі числення з основою β число x представляється у вигляді

$$x = \pm (\alpha_1 \beta^{-1} + \alpha_2 \beta^{-2} + \dots + \alpha_t \beta^{-t} + \dots) \beta^p, \quad (5)$$

де $0 \leq \alpha_k < \beta$, $\alpha_1 \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$

Якщо в ЕОМ t розрядів, то при відкиданні молодших розрядів ми оперуємо з наближеним значенням

$$x^* = \pm (\alpha_1 \beta^{-1} + \alpha_2 \beta^{-2} + \dots + \alpha_t \beta^{-t}) \beta^p$$

і, відповідно, похибка заокруглення $x - x^* = \pm \beta^p (\alpha_{t+1} \beta^{-t-1} + \dots)$. Її можна оцінити так:

$$|x - x^*| \leq \beta^{p-t-1} (\beta - 1) (1 + \beta^{-1} + \dots) \leq \beta^{p-t-1} (\beta - 1) \frac{1}{1 - \beta^{-1}} = \beta^{p-t}.$$

Враховуючи, що $\alpha_1 \neq 0$, маємо $|x| \geq \beta^p \beta^{-1} = \beta^{p-1}$. Звідси остаточно

$$\delta x \leq \frac{\beta^{p-t}}{\beta^{p-1}} = \beta^{-t+1}.$$

При точніших способах заокруглення можна отримати оцінку $\delta x \leq \beta^{-t+1}/2 = \varepsilon$. Число ε називається *машинным іпсилон*. Наприклад, для $\beta = 2$, $t = 24$, $\varepsilon = 2^{-24} \approx 10^{-7}$.

1.3 Обчислення похибок обчислення значення функції