

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
КАФЕДРА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

Звіт до лабораторної роботи №6 на тему:
“Квадратурні формули”

Виконав студент групи ОМ-3
Скибицький Нікіта

Київ, 2019

Зміст

1	Постановка задачі	2
2	Теоретичні відомості	3
2.1	Невласність	3
2.2	Квадратурні формули	4
2.2.1	Середніх прямокутників	4
2.2.2	Трапецій	5
2.2.3	Сімпсона (парабол)	6
2.3	Принцип Рунге і формула Річардсона	6
3	Практична частина	8
3.1	Невласність	8
3.2	Квадратурні формули	8
3.3	Апріорні оцінки похибки	9
3.4	Принцип Рунге	9
3.5	Формула Річардсона	10
3.6	Програми-драйвери	10
3.7	Результати	11
3.7.1	Для формули середніх прямокутників	12
3.7.2	Для формули трапецій	12
3.7.3	Для формули Сімпсона (парабол)	12

1 Постановка задачі

Обчислити невластний інтеграл

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx. \quad (1.0.1)$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

Для обчислень використати:

1. формули:

- (а) середніх прямокутників;
- (б) трапецій;
- (в) Сімпсона (парабол).

2. принцип Рунге;

3. формулу Річардсона;

4. апріорні оцінки похибки.

Вивести:

1. кінцевий крок інтегрування h ;

2. апріорну оцінку точності інтегрування;

3. наближені значення інтегралу $I_h, I_{h/2}$;
4. оцінку похибки інтегрування за принципом Рунге;
5. уточнене значення інтегралу за формулою Річардсона.

2 Теоретичні відомості

2.1 Невласність

Від невластності можна позбутися адитивним методом, тобто представивши підінтегральну функцію у вигляді суми функції з особливістю яку інтегруємо аналітично та не особливої функції яку інтегруємо чисельно:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (x - x_0)^{-\alpha} \varphi(x) dx = \\
 &= \int_a^b (x - x_0)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k dx = \\
 &= \int_a^b (x - x_0)^{-\alpha} \left(\sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k} (x - x_0)^{n+k} \right) dx = \\
 &= \int_a^b (x - x_0)^{-\alpha} \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k dx + \int_a^b (x - x_0)^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k} (x - x_0)^{n+k} dx = \\
 &= \int_a^b g(x) dx + \int_a^b (x - x_0)^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k} (x - x_0)^{n+k} dx = \\
 &= \int_a^b g(x) dx + \int_a^b (x - x_0)^{-\alpha} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k - g(x) \right) dx = \\
 &= \int_a^b g(x) dx + \int_a^b (x - x_0)^{-\alpha} (\varphi(x) - g(x)) dx = \\
 &= \int_a^b g(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx,
 \end{aligned}$$

далі

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b (x - x_0)^{-\alpha} \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k dx \tag{2.1.1}$$

беремо аналітично а

$$\int_a^b \psi(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} c_{n+k} (x - x_0)^{n+k-\alpha} dx \tag{2.1.2}$$

— чисельно.

Такий підхід у нашому випадку працює погано, адже для апріорної оцінки похибки чисельного інтегрування необхідна принаймні скінченна друга похідна у ψ , а для цього в g доводиться брати багато (6) членів ряду Тейлора. А це у свою чергу призводить до малості ψ , що ускладнює точне обчислення її інтегралу за рахунок зростання відносної машинної похибки.

Тому ми просто зробимо заміну і зведемо інтеграл до власного.

2.2 Квадратурні формули

2.2.1 Середніх прямокутників

$$I_0 = (b - a) \cdot f(x_0), \quad x_0 = \frac{a + b}{2} \quad (2.2.1)$$

Знайдемо алгебраїчну степінь точності цієї квадратурної формули:

$$I_0(1) = (b - a) \cdot 1 = I(x), \quad (2.2.2)$$

$$I_0(x) = (b - a) \cdot \frac{a + b}{2} = I(x), \quad (2.2.3)$$

$$I_0(x^2) = (b - a) \cdot \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \neq \frac{b^3 - a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx = I(x^2), \quad (2.2.4)$$

тому $m = 1$.

Оцінимо для неї похибку. Взагалі для формули інтерполяційного типу:

$$R_n(f) = I(f) - I_n(f) = I(f) - I(L_n) = I(f - L_n) = I(r_n) = \int_a^b r_n(x) dx, \quad (2.2.5)$$

де $r_n(x)$ — залишковий член інтерполяції. Далі

$$|R_n(f)| \leq (b - a) \cdot \max_x |r_n(x)| \leq (b - a) \cdot \frac{M_{n+1}}{n + 1} \cdot \max_x |\omega_n(x)|. \quad (2.2.6)$$

Для I_0 :

$$\begin{aligned} |R_0(f)| &= \left| \int_a^b r_0(x) dx \right| \leq \int_a^b |r_0(x)| dx \leq \int_a^b \frac{M_1}{1!} |x - x_0| dx = \\ &= M_1 \int_a^b |x - x_0| dx \leq M_1 \cdot \frac{b^2 - a^2}{4}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Але це погана оцінка, вона не використовує той факт, що квадратурна формула має степінь точності на одиницю вищу. Отримаємо кращу оцінку. Маємо при $f \in C^2([a, b])$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot f''(\xi), \quad (2.2.8)$$

де $x_0 \equiv \frac{a+b}{2}$, а $\xi \in [a, b]$. Тоді

$$\begin{aligned}
R_0(f) &= \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b L_0(x) \, dx = \int_a^b (f(x) - f(x_0)) \, dx = \\
&= \int_a^b \left((x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi) \right) \, dx = \\
&= \int_a^b \frac{(x - x_0)^2}{2} \cdot f''(\xi) \, dx = f''(\eta) \int_a^b \frac{(x - x_0)^2}{2} \, dx = \frac{f''(\eta)}{24} \cdot (b - a)^3.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Таким чином

$$|R_0(f)| \leq \frac{M_2}{24} \cdot (b - a)^3 \tag{2.2.10}$$

Але тут у нас немає впливу на точність (величину похибки). Тому використовують формулу складеного типу. Якщо сітка рівномірна, то складена квадратурна формула прямокутників має вигляд

$$I(f) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \, dx \approx \sum_{i=1}^N h \cdot f(\bar{x}_i) = I_h(f), \tag{2.2.11}$$

де $\bar{x}_i = x_{i-1/2} = x_i - h/2$.

Оцінимо похибку цієї квадратурної формули:

$$R_h(f) = I(f) - I_h(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(\bar{x}_i)) \, dx = \sum_{i=1}^N f''(\eta_i) \cdot \frac{h^3}{24}, \tag{2.2.12}$$

$$|R_h(f)| \leq \frac{M_2}{24} n h^3 = \frac{M_2 h^2 (b - a)}{24}. \tag{2.2.13}$$

Тобто ця формула має степінь точності $p = 2$ по кроку h . (Не слід плутати з алгебраїчним степенем точності $m = 1$ для цієї формули).

2.2.2 Трапецій

Нехай $x_0 = a$, $x_1 = b$, $L_1(x) = f(x)$. Тоді отримаємо формулу:

$$I_1(f) = \frac{b - a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) \tag{2.2.14}$$

Формула має алгебраїчний степінь точності $m = 1$, оскільки $I(x^2) \neq I_1(x^2)$. Це формула замкненого типу. Залишковий член:

$$R_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)(x - a)(x - b)}{2} \, dx = -\frac{(b - a)^3}{12} \cdot f''(\xi). \tag{2.2.15}$$

Оцінка залишкового члена:

$$|R_1(f)| \leq M_2 \cdot \frac{(b - a)^3}{12}. \tag{2.2.16}$$

З геометричної точки зору замінюється площа криволінійної трапеції площею звичайної трапеції.

Складена квадратурна формула трапецій:

$$\begin{aligned} I_h(f) &= \sum_{i=1}^N \frac{h}{2} \cdot (f(x_{i-1}) + f(x_i)) = \\ &= \frac{h}{2} \cdot f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} h \cdot f(x_i) + \frac{h}{2} \cdot f(b), \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

де $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{N}$, $i = \overline{0, N}$ та

$$|R_h(f)| \leq M_2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot h^2, \quad f \in C^2([a, b]). \quad (2.2.18)$$

2.2.3 Сімпсона (парабол)

Нехай $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. Замість f використовуємо $L_2(x)$. Тоді отримаємо квадратурну формулу:

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (2.2.19)$$

Це *квадратурна формула Сімпсона*.

Алгебраїчна степінь точності квадратурної формули Сімпсона $m = 3$.

Для $f \in C^4([a, b])$ залишковий член квадратурної формули Сімпсона має місце представлення:

$$R_2(f) = \frac{1}{24} \int_a^b (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) f^{(4)}(\xi) dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880} \cdot (b-a)^5, \quad (2.2.20)$$

та вірна оцінка:

$$|R_2(f)| \leq \frac{M_4}{2880} \cdot (b-a)^5. \quad (2.2.21)$$

Складена квадратурна формула Сімпсона має вигляд:

$$\begin{aligned} I_h(f) &= \sum_{i=1}^N \frac{h}{6} (f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_i)) = \\ &= \frac{h}{6} (f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{N-1}) + 4f(x_{N-1/2}) + f(x_N)). \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Якщо $f \in C^4([a, b])$, то має місце оцінка:

$$|R_h(f)| \leq \frac{M_4}{2880} \cdot (b-a) \cdot h^4, \quad p = 4. \quad (2.2.23)$$

2.3 Принцип Рунге і формула Річардсона

Нехай задана деяка величина I (сіткова функція, інтеграл, неперервна функція). Нехай $I_h \approx I$ та $I_n \rightarrow I$ при $h \rightarrow 0$. Нехай похибка послідовності I_h представляється у вигляді:

$$R_h = I - I_h = \overset{\circ}{R}_h + \alpha(h), \quad (2.3.1)$$

де $\overset{\circ}{R}_h = C \cdot h^m$ — головний член похибки, C не залежить від h , $\alpha(h) = o(h^m)$. Обчислимо $I_{h/2}$. З (2.3.1) випливає, що

$$I = I_h + Ch^m + \alpha(h), \quad (2.3.2)$$

$$I = I_{h/2} + C \cdot \frac{h^m}{2^m} + \alpha(h). \quad (2.3.3)$$

Звідси

$$I_{h/2} - I_h = \frac{Ch^m}{2^m} \cdot (2^m - 1) + \alpha(h). \quad (2.3.4)$$

З (2.3.1):

$$\overset{\circ}{R}_{h/2} = \frac{Ch^m}{2^m} = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^m - 1}, \quad (2.3.5)$$

та

$$\overset{\circ}{R}_h = \frac{2^m}{2^m - 1} \cdot (I_{h/2} - I_h). \quad (2.3.6)$$

Формула (2.3.5) носить назву *апостеріорної оцінки* похибки обчислення I за допомогою наближення $I_{h/2}$. (*Апріорні оцінки* це оцінки отримані до обчислення величини I_h , *апостеріорні оцінки* — під час її обчислення).

З формули (2.3.5) впливає такий алгоритм обчислення інтегралу із заданою точністю ε :

1. обчислюємо $I_h, I_{h/2}, \overset{\circ}{R}_{h/2}$;
2. перевіряємо чи $\left| \overset{\circ}{R}_{h/2} \right| < \varepsilon$.
3. Якщо так, то $I \approx I_{h/2}$;
4. Якщо ж ні, то:

(а) обчислюємо $I_{h/2}, I_{h/4}, \overset{\circ}{R}_{h/4}$;

(б) перевіряємо $\left| \overset{\circ}{R}_{h/4} \right| < \varepsilon$ і т. д.

5. Процес продовжуємо поки не буде виконана умова $\left| \overset{\circ}{R}_{h/2^k} \right| < \varepsilon, k = 1, 2, \dots$

Зауваження: Ми даємо оцінку не похибки, а її головного члена з точністю $\alpha(h)$, тому такий метод може давати збої, якщо не виконана умова

$$|\alpha(h)| \ll \left| \overset{\circ}{R}_{h/2^k} \right|. \quad (2.3.7)$$

За допомогою головного члена похибки можна отримати краще значення для I :

$$\tilde{I}_{h/2} = I_{h/2}^{(1)} = I_{h/2} + \overset{\circ}{R}_{h/2} = \frac{2^m}{2^m - 1} \cdot I_{h/2} - \frac{1}{2^m - 1} \cdot I_h. \quad (2.3.8)$$

Це *екстраполяційна формула Річардсона*: $I_h - \tilde{I}_{h/2} = \alpha(h)$.

Для квадратурної формули трапецій $p = 2$ і

$$I - I_h = Ch^2 + O(h^4), \quad (2.3.9)$$

$$\overset{\circ}{R}_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{3}. \quad (2.3.10)$$

Маємо

$$R_h = -\frac{h^2}{12} \int_a^b f''(x) dx + O(h^4) = O(h^2). \quad (2.3.11)$$

Отже, якщо застосовувати екстраполяційну формулу Річардсона, то

$$\tilde{I}_{h/2} = \frac{4}{3} \cdot I_{h/2} - \frac{1}{3} \cdot I_h, \quad (2.3.12)$$

і $I_h - \tilde{I}_{h/2} = O(h^4)$.

Цей принцип застосовується і для формули Сімпсона $m = 4$. Головна частина залишкового члена для цієї формули:

$$\overset{\circ}{R}_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{15}. \quad (2.3.13)$$

$$\tilde{I}_{h/2} = \frac{16}{15} \cdot I_{h/2} - \frac{1}{15} \cdot I_h, \quad (2.3.14)$$

$$I_h - \tilde{I}_{h/2} = O(h^6). \quad (2.3.15)$$

3 Практична частина

3.1 Невласність

Перш за все зробимо заміну:

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx = \left| t = \sqrt[3]{x}, x = t^3, dx = 3t^2 dt \right| = \int_{-1}^1 3t \ln(2 + t) dt. \quad (3.1.1)$$

Таким чином ми звели інтеграл до власного.

3.2 Квадратурні формули

Були написані наступні функції для обчислення квадратурних формул:

```
def rectangle(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
             h: float) -> float:
    return h * np.sum(f(np.arange(a + h / 2, b + h / 2, h)))

def trapezoid(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
             h: float) -> float:
    return h / 2 * (f(a) + 2 * np.sum(f(np.arange(a + h, b, h))) + f(b))
```



```
def simpson(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
            h: float) -> float:
    return h / 6 * (f(a) + 2 * np.sum(f(np.arange(a + h, b, h))) +
                    4 * np.sum(f(np.arange(a + h / 2, b + h / 2, h))) + f(b))
```

3.3 Априорні оцінки похибки

Були написані наступні функції для обчислення априорних оцінок похибок:

```
def rectangle(a: float, b: float, M_2: float, h: float) -> float:
    return M_2 * h**2 * (b - a) / 24
```

```
def trapezoid(a: float, b: float, M_2: float, h: float) -> float:
    return M_2 * h**2 * (b - a) / 12
```

```
def simpson(a: float, b: float, M_4: float, h: float) -> float:
    return M_4 * h**4 * (b - a) / 2880
```

Тут нам знадобляться M_2 і M_4 , знайдемо їх:

$$M_2 = \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right|, \quad M_4 = \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \frac{d^4 f(t)}{dt^4} \right|. \quad (3.3.1)$$

Послідовно знаходимо:

$$\frac{df(t)}{dt} = 3 \left(\frac{t}{t+2} + \ln(t+2) \right), \quad (3.3.2)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{3(t+4)}{(t+2)^2}, \quad (3.3.3)$$

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} = -\frac{3(t+6)}{(t+2)^2}, \quad (3.3.4)$$

$$\frac{d^4 f(t)}{dt^4} = \frac{6(t+8)}{(t+2)^4}, \quad (3.3.5)$$

$$\frac{d^5 f(t)}{dt^5} = -\frac{18(t+10)}{(t+2)^5}. \quad (3.3.6)$$

Як бачимо $d^3 f(t)/dt^3 < 0$ на $[-1, 1]$, тому M_2 досягається або в -1 , або в 1 . Підставляючи знаходимо $f''(-1) = 9$, $f''(1) = 5/3$, тому $M_2 = 9$.

Як бачимо $d^5 f(t)/dt^5 < 0$ на $[-1, 1]$, тому M_4 досягається або в -1 , або в 1 . Підставляючи знаходимо $f^{(4)}(-1) = 42$, $f^{(4)}(1) = 2/3$, тому $M_4 = 42$.

3.4 Принцип Рунге

Були написані наступні функції для обчислення похибки за принципом Рунге:

```
def rectangle(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
            h: float) -> float:
```

```

I_h, I_half_h = integrate.rectangle(a, b, f, h), \
    integrate.rectangle(a, b, f, h / 2)
return abs(I_half_h - I_h) / 3

```

```

def trapezoid(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
    h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.trapezoid(a, b, f, h), \
        integrate.trapezoid(a, b, f, h / 2)
    return abs(I_half_h - I_h) / 3

```

```

def simpson(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
    h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.simpson(a, b, f, h), \
        integrate.simpson(a, b, f, h / 2)
    return abs(I_half_h - I_h) / 15

```

3.5 Формула Річардсона

Були написані наступні функції для обчислення уточненого значення інтегралу за екстраполяційною формулою Річардсона:

```

def rectangle(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
    h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.rectangle(a, b, f, h), \
        integrate.rectangle(a, b, f, h / 2)
    return (4 * I_half_h - I_h) / 3

```

```

def trapezoid(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
    h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.trapezoid(a, b, f, h), \
        integrate.trapezoid(a, b, f, h / 2)
    return (4 * I_half_h - I_h) / 3

```

```

def simpson(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array],
    h: float) -> float:
    I_h, I_half_h = integrate.simpson(a, b, f, h), \
        integrate.simpson(a, b, f, h / 2)
    return (16 * I_half_h - I_h) / 15

```

3.6 Програми-драйвери

Були написані наступні програми-драйвери:

```

def rectangle(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array], h: float,
    I_True: float, M_2: float) -> None:
    while runge.rectangle(a, b, f, h) > eps:
        h /= 2

```

```

h /= 2

I_h, I_half_h, I_richardson = integrate.rectangle(a, b, f, h), \
    integrate.rectangle(a, b, f, h / 2), richardson.rectangle(a, b, f, h)

def trapezoid(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array], h: float,
    I_True: float, M_2: float) -> None:
    while runge.trapezoid(a, b, f, h) > eps:
        h /= 2

h /= 2

I_h, I_half_h, I_richardson = integrate.trapezoid(a, b, f, h), \
    integrate.trapezoid(a, b, f, h / 2), richardson.trapezoid(a, b, f, h)

def simpson(a: float, b: float, f: Callable[[np.array], np.array], h: float,
    I_True: float, M_4: float) -> None:
    while runge.simpson(a, b, f, h) > eps:
        h /= 2

h /= 2

I_h, I_half_h, I_richardson = integrate.simpson(a, b, f, h), \
    integrate.simpson(a, b, f, h / 2), richardson.simpson(a, b, f, h)

if __name__ == '__main__':
    def f(t):
        return 3 * t * np.log(2 + t)

    a, b = -1, 1
    I_true = 6 - 9 / 2 * np.log(3)

    M_2, M_4 = 9, 42

    h = b - a
    eps = 1e-5

    rectangle(a, b, f, h, I_true, M_2)
    trapezoid(a, b, f, h, I_true, M_2)
    simpson(a, b, f, h, I_true, M_4)

```

3.7 Результати

Тут

- h — кінцевий крок інтегрування;
- I_{true} — справжнє значення інтегралу;
- I_h — значення інтегралу за відповідною квадратурною формулою для кроку h ;

- `R_h_true` — відхилення `I_h` від `I_true`;
- `I_half_h` — значення інтегралу за відповідною квадратурною формулою для кроку $h/2$;
- `R_half_h_true` — відхилення `I_half_h` від `I_true`;
- `R_runge` — оцінка відхилення `I_h` від `I_true` за принципом Рунге;
- `I_richardson` — уточнене значення інтегралу за екстраполяційною формулою Річардсона;
- `R_richardson_true` — відхилення `I_richardson` від `I_true`;
- `apriori_error` — апіорна оцінка відхилення `I_h` від `I_true`.

3.7.1 Для формули середніх прямокутників

```
h           = 0.00390625
I_true      = 1.0562447009935063
I_h         = 1.0562400624293735
R_h_true    = 4.638564132797285e-06
I_half_h    = 1.0562435413517188
R_half_h_true = 1.1596417874848441e-06
R_runge     = 1.1596407817708136e-06
I_richardson = 1.0562447009925007
R_richardson_true = 1.0056400157054668e-12
apriori_error = 1.1444091796875e-05
```

3.7.2 Для формули трапецій

```
h           = 0.00390625
I_true      = 1.0562447009935063
I_h         = 1.0562539781252218
R_h_true    = 9.277131715501596e-06
I_half_h    = 1.0562470202772976
R_half_h_true = 2.3192837912411335e-06
R_runge     = 2.319282641420154e-06
I_richardson = 1.0562447009946563
R_richardson_true = 1.1499690089067371e-12
apriori_error = 2.288818359375e-05
```

3.7.3 Для формули Сімпсона (парабол)

```
h           = 0.125
I_true      = 1.0562447009935063
I_h         = 1.0562459003461577
R_h_true    = 1.199352651415353e-06
I_half_h    = 1.056244776246562
R_half_h_true = 7.525305578681696e-08
R_runge     = 7.49399730419024e-08
I_richardson = 1.056244701306589
R_richardson_true = 3.130826708996892e-10
apriori_error = 7.120768229166667e-06
```