proof

2 Методи розв'язання нелінійних рівнянь

Постановка задачі. Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, $\bar{x}$ – його розв'язок, тобто $f(\bar{x}) = 0$.

Задача розв'язання цього рівняння розпадається на етапи:

1. Існування та кількість коренів.
2. Відділення коренів, тобто розбиття числової вісі на інтервали, де знаходиться один корінь.
3. Обчислення кореня із заданою точністю ε.

Для розв'язання перших двох задач використовуються методи математичного аналізу та алгебри, а також графічний метод. Далі розглядаються методи розв'язання третього епату.

2.1 Метод ділення навпіл

Припустимо, що на $[a, b]$ знаходиться лише один корінь рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

для $f(x) \in C([a, b])$ який необхідно визначити. Нехай $f(a)f(b) < 0$. Припустимо, що $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Покладемо $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ і обчислимо $f(x_1)$. Якщо $f(x_1) < 0$, то шуканий корінь $\bar{x}$ знаходиться на інтервалі (a, x_1). Якщо ж $f(x_1) > 0$, то $\bar{x} \in (x_1, b)$. З двох інтервалів (a, x_1) і (x_1, b) вибираємо той, на границях якого $f(x)$ має різні знаки, знаходимо точку x_2 – середину вибраного інтервалі, обчислюємо $f(x_2)$, і повторюємо вказаний процес.

В результаті отримуємо послідовність інтервалів, що містять шуканий корінь $\bar{x}$, причому довжина кожного натсупного інтервалу вдвічі менше.

Цей процес продовжується доки довжина $b_n - a_n$ отриманого інтервалу (a_n, b_n) не стане меншою за 2ε. Тоді x_{n+1}, як середина інтервалу (a_n, b_n), пов'язана з $\bar{x}$ нерівністю

$$|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon. \tag{2}$$

За теоремою Больцано-Коші, ця умова буде виконуватися для деякого n. Справді, оскільки

$$|b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}|b_k - a_k|,$$

то

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le \frac{1}{2^{n+1}}(b - a). \tag{3}$$

Звідси ж отримуємо нерівність для обчислення кількості ітерацій n для виконання умови (2):

$$n = n(\varepsilon) \ge \left[\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right] + 1.$$

Степінь збіжності лінійна, тобто геометричної прогресії зі знаменником $q = 1/2$.

Переваги методу: простота, надійність. Недоліки методу: низька швидкість збіжності, метод не узагальнюється на системи.

2.2 Метод простої ітерації

Спочатку рівняння

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

] замінюється еквівалентним

$$x = \varphi(x). \tag{5}$$

Ітераційний процес має вигляд

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Теорема 2.2.1. Якщо $\max\limits_{x\in[a,b]=U_r} |\varphi'(x)| \le q < 1$, то метод простої ітерації збігається і має місце оцінка

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{q^n}{1-q}|x_0 - x_1| \le \frac{q^n}{1-q}(b-a) \tag{7}$$

Доведення. Нехай $x_{k+1}, x_k \in U_r$. Тоді

$$|x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) = |\varphi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| \le \xi_k = x_k + \theta_k(x_{k+1}) - x_k), \quad 0 < \theta_k < 1 \le |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x_{k-1}| \le \tag{8}$$

Бачимо, що $\{x_k\}$ – фундаментальна послідовність, а тому збіжна. При $p \to \infty$ в (8) отримуємо (7). $\square$

Визначимо кількість ітерацій для досягнення точності ε. З оцінки в 2.2.1 отримуємо

$$x_n - \bar{x}| \le \frac{q^n}{1-q}(b-a) < \varepsilon \Rightarrow n(\varepsilon) = n \ge \left[\frac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon(1-q)}{b-a)}\right)}{\ln q}\right] + 1.$$

Практично ітераційний процес зупиняємо при $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, але ця умов не гарантуэ $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$.

Зауваження 1. Умова збіжності методу може бути замінена на умову Ліпщиця

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x-y|, \quad 0 < q < .1$$

Переваги методу: простота, при $q < 1/2$ метод збігається швидше ніж метод ділення навпіл, метод узагальнюєтсья на системи. Недоліки методу: при $q > 1/2$ збігається повільніше ніж метод ділення навпіл, виникають труднощі при звдеені $f(x) = 0$ до $\varphi(x) = x$.