3. Интерполирование по равностоящим узлам. Конечные разности. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

3.1. Постановка задачи интерполирования

Пусть на промежутке $[a, b]$ задана таблица значений вещественной функции $y = f(x)$:

x	$f(x)$
a	$f(a)$
$a+h$	$f(a+h)$
$a+2h$	$f(a+2h)$
$\dots$	$\dots$
$a+nh=b$	$f(a+nh)$

Требуется найти значение функции в точке $x = \bar{x}$, не совпадающей с узлами.
Обозначим $x_i = a + ih,\ \ f(x_i) = y_i$.

3.2. Конечные разности

При построении интерполяционного многочлена по равностоящим узлам могут быть использованы конечные разности, которые играют роль, подобную той, которую играют производные для функций с непрерывно изменяющимся аргументом. Конечная разность первого порядка в точке x_i определяется следующим образом: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Конечные разности высших порядков определяются рекурсивно:
$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ — конечная разность $k-$го порядка в точке x_i.

Конечные разности можно выразить непосредственно через значения функций:

$$\Delta^n y_i = y_{i+n} - n y_{i+n-1} + \dots + (-1)^k C_n^k y_{i+n-k} + \dots + (-1)^n y_i = (S-1)^n y_i.$$

Здесь S — оператор сдвига, так что $S^k y_i = y_{i+k}$.

Можно показать, что для достаточно гладкой функции $\Delta^n y_0 = h^n f^{(n)}(\xi)$, $\xi \in (x_0, x_0 + nh)$ и поэтому $\Delta^n y_0 \to 0$ при $h < 1$. Обратим внимание на очевидное свойство конечной разности:

$$\Delta^n P_n(x) \equiv \text{const}.$$

Конечные разности принято записывать в таблицу следующего вида:

Таблица 1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
a	y_0			
		Δy_0		
$a+h$	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
$a+2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		$\dots$
$a+3h$	y_3		$\dots$	
		$\dots$		$\dots$
$\dots$	$\dots$		$\dots$	
		Δy_{n-3}		$\Delta^3 y_{n-4}$
$b-2h$	y_{n-2}		$\Delta^2 y_{n-3}$	
		Δy_{n-2}		$\Delta^3 y_{n-3}$
$b-h$	y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}$	
		Δy_{n-1}		
$b=a+nh$	y_n			

Пусть значения функции в узлах интерполирования заданы с точностью ε (например, $\varepsilon = 1/2 \cdot 10^{-5}$). Тогда конечные разности имеет смысл вычислять лишь до тех пор, пока они не будут "постоянными" с учётом ошибки округления ε в значениях функции, т. е. до тех пор, пока $\left|\Delta^k y_j - \Delta^k y_i\right| \leqslant 2^{k+1}\varepsilon = 2^k$ единиц младшего разряда. Число $k <= n$ принимаем за степень искомого интерполяционного полинома. Полином будет строиться по $(k+1)$ узлу, которые следует выбирать таким образом, чтобы обеспечить минимальную по абсолютной величине погрешность (разность между значением функции и значением полинома) в точке интерполяции $\bar{x}$. Для этого в качестве x_0 следует выбирать ближайший к $\bar{x}$ узел. В качестве x_1 выбирать ближайший из оставшихся и т. д. Это следует из теоремы об остатке интерполирования. В связи с этим рассматриваются три варианта расположения точки интерполирования $\bar{x}$.

3.3. Построение интерполяционного многочлена в зависимости от расположения точки интерполирования

3.3.1. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для начала таблицы

Пусть точка интерполирования $\overline{x_1}$ удовлетворяет условию $a < \overline{x_1} <= a+h/2$. Узлы следует выбирать в следующем порядке: $x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h,\ \dots, x_n = a+nh$.

В этом случае из таблицы 1 используются значения $y_0,\ \Delta y_0,\ \Delta^2 y_0,\ \Delta^3 y_0, \dots,\ \Delta^n y_0$, отмеченные в таблице 1 красным цветом.

Обозначим $t = (\overline{x_1} - a)/h$, тогда интерполяционный многочлен примет следующий вид:

$$P_n(a+th) = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \\ + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{1}$$

Представим $P_n(t)$ в виде:

$$P_n(a+th) = \sum_{k=0}^{n} N_k(t)\Delta^k y_0,$$

где $\Delta^0 y_0 = y_0,\ N_0 = 1,\ N_1 = t, \ldots,\ N_k = \dfrac{N_{k-1} \cdot (t-k+1)}{k}$.

Вычисления удобно оформить в виде таблицы 2.

Таблица 2

k	0	1	2	3	4
$\Delta^k y_0$					
$N_k(t)$					
$N_k \cdot \Delta^k y_0$					
$P_k(\overline{x_1})$					
$f(\overline{x_1}) - P_k(\overline{x_1})$					
$\lvert R_k(\overline{x_1})\rvert \leqslant$					

В ячейки таблицы следует записывать значения согласно обозначениям, помещённым в первом столбце. В предпоследней строке будут получаться значения многочленов в точке интерполирования нулевой, первой, второй и т. д. степеней. Согласно формуле

$$P_k(t) = P_{k-1}(t) + N_k(t)\,\Delta^k y_0,$$

т. е. для $k > 0$ $P_k(t)$ получается сложением значений, находящихся левее по строке и выше по столбцу. Количество цифр после запятой должно быть согласовано с ε. Часто в учебных целях рассматривается модельная задача, т. е. такая, в которой известно аналитическое выражение для интерполируемой функции. В этом случае следует вычислить “точное” значение функции в точке $\overline{x_1}$, привести его рядом с таблицей, привести в последней строке фактические погрешности, проанализировать результаты.

Напомним, что выражение для погрешности интерполирования определяется теоремой:

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ имеет конечную непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$ на наименьшем отрезке* [c,d], содержащем узлы интерполирования $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ и точку интерполирования $\overline{x}$, так что $c = \min\{x_0,\ x_1, \ldots, x_n, \overline{x}\}, \quad d = \max\{x_0,\ x_1, \ldots, x_n, \overline{x}\}$.

Тогда существует такая точка $\xi = \xi(\overline{x}), \quad c < \xi < d$, что

$$R_n(f, \overline{x}) = f(\overline{x}) - P_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(\overline{x}), \quad \omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

В данном случае, учитывая, что узлы равноотстоящие с шагом h и $t = (\overline{x} - a)/h$, $R_n(f, \overline{x})$ примет вид:

$$R_n(f, \overline{x}) = f(\overline{x}) - P_n(\overline{x}) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)\cdot(t-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Оценка погрешности значения многочлена k-ой степени в нижней строке таблицы 2 вычисляется следующим образом:

$$|R_k(\overline{x})| <= M_{k+1} \cdot |N_{k+1}|\, h^{k+1},$$

где

$$M_{k+1} = \max |f^{(k+1)}(x)|,\ x \in [a, a+kh].$$

3.3.2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для конца таблицы

Пусть теперь требуется найти значение интерполяционного многочлена в точке $\overline{x_2}$, такой что $b - h/2 <= \overline{x_2} < b$. Узлы следует выбирать в следующем порядке: $b, b-h, b-2h$ и т. д. Соответственно ипользуются значения $y_n,\ \Delta y_{n-1},\ \Delta^2 y_{n-2},\ \Delta^3 y_{n-3}$ и т. д., отмеченные в таблице 1 синим цветом.

Обозначим $t = (\overline{x_2} - b)/h$, тогда

$$P_n(b+th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \cdots + \\ + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (2)$$

Представим $P_n(t)$ в виде:

$$P_n(b+th) = \sum_{k=0}^{n} N_k(t)\Delta^k y_{n-k},$$

где $\Delta^0 y_n = y_n,\ N_0 = 1,\ N_1 = t, \ldots,\ N_k = \dfrac{N_{k-1}(t+k-1)}{k}$.

Вычисления удобно оформить в виде таблицы, аналогичной таблице 2.

3.3.3. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона-Гаусса для середины таблицы (интерполирование вперед)

Пусть a — узел в середине таблицы, т. е. в отличие от предыдущих случаев имеются узлы и левее и правее данного. Приведем фрагмент таблицы конечных разностей, где $y_i = f(a+ih)$.

Таблица 3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
$a-3h$	y_{-3}				
		Δy_{-3}			
$a-2h$	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$	
$a-h$	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$	
a	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$	
$a+h$	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
$a+2h$	y_2		$\Delta^2 y_1$		
		Δy_2			
$a+3h$	y_3				

Пусть требуется найти значение интерполяционного многочлена в точке $\overline{x_3}$, такой что $a < \overline{x_3} <= a + h/2$. Узлы следует выбирать в следующем порядке: $a,\ a+h,\ a-h,\ a+2h,\ a-2h$ и т. д. Соответственно ипользуются значения $y_0,\ \Delta y_0,\ \Delta^2 y_{-1},\ \Delta^3 y_{-1}$ и т. д., отмеченные в таблице 3 цветом *magenta*.

Обозначим $t = (\overline{x_3} - a)/h$, тогда

$$P_n(a+th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\ + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-(-1)^n[\frac{n}{2}])}{n!}\Delta^n y_{-[\frac{n}{2}]} \tag{3}$$

Представим $P_n(t)$ в виде:

$$P_n(a+th) = \sum_{k=0}^{n} N_k(t)\Delta^k y_{-[\frac{k}{2}]},$$

где $N_0 = 1$, $N_1 = t$ и т. д.

Здесь выражение $[\frac{n}{2}]$ означает целую часть от деления n на 2.

Вычисления следует оформить в виде таблицы, аналагичной таблице 2.

Упражнения

1) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена Ньютона-Гаусса для середины таблицы (интерполирование назад).
2) Проиллюстрировать на примере применение формул для интерполяционных многочленов для случая экстраполирования а) $\bar{x} < a$; б) $\bar{x} > b$.
3) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена, если $a + h/2 < \bar{x} < a + h$.
4) Написать и проиллюстрировать на примере формулу для интерполяционного многочлена, если $b - h < \bar{x} < b - h/2$.

3.4. Задание

Дана функция $f(x)$, промежуток $[a, b]$, точки интерполирования. Требуется

1) Построить таблицу значений функции по равноотстоящим узлам с шагом $h = 0.1$ на $[a, b]$, округлив значения функции до 5-го знака после запятой ($\varepsilon = 1/2 \cdot 10^{-5}$).
2) Построить таблицу конечных разностей до 4-го порядка.
3) Вычислить значение функции в точках интерполирования, используя интерполяционный многочлен в форме Ньютона 0-ой, 1-ой, 2-ой, 3-ей и 4-ой степени по заданным узлам.
4) Сравнить с точным значением функции.
5) Получить оценку погрешности.

Представить результаты в виде таблицы 2.

3.5. Варианты заданий

1) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [0.5, 1.5], \ \overline{x_1} = 0.55, \ \overline{x_3} = 1.05.$
2) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [0.5, 1.5], \ \overline{x_1} = 0.45, \ \overline{x_3} = 0.95.$
3) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [-0.5, 0.5], \ \overline{x_2} = 0.45, \ \overline{x_3} = 0.05.$
4) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [0.5, 1.5], \ \overline{x_1} = 0.45, \ \overline{x_3} = 0.95.$
5) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [0.5, 1.5], \ \overline{x_2} = 1.55, \ \overline{x_3} = 1.05.$
6) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [2.5, 3.5], \ \overline{x_2} = 2.55, \ \overline{x_3} = 3.15.$
7) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [5, 6], \ \overline{x_1} = 5.05, \ \overline{x_3} = 5.35.$
8) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [-3.5, -2.5], \ \overline{x_2} = -2.55, \ \overline{x_3} = -3.05.$
9) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [5.5, 6.5], \ \overline{x_1} = 5.45, \ \overline{x_3} = 6.25.$
10) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [-0.5, 0.5], \ \overline{x_2} = 0.45, \ \overline{x_3} = 0.05.$
11) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [3.5, 4.5], \ \overline{x_1} = 3.45, \ \overline{x_3} = 3.95.$
12) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [0.5, 1.5], \ \overline{x_2} = 1.55, \ \overline{x_3} = 1.05.$
13) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [-7.5, -6.5], \ \overline{x_1} = -7.65, \ \overline{x_3} = -6.95.$
14) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [2.5, 3.5], \ \overline{x_2} = 2.45, \ \overline{x_3} = 3.05.$
15) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [0.5, 1.5], \ \overline{x_1} = 0.55, \ \overline{x_3} = 1.05.$
16) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [4.5, 5.5], \ \overline{x_1} = 4.45, \ \overline{x_3} = 5.95.$
17) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [-0.5, 0.5], \ \overline{x_2} = 0.45, \ \overline{x_3} = 0.05.$
18) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [0.5, 1.5], \ \overline{x_1} = 0.35, \ \overline{x_3} = 1.35.$
19) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [0.5, 1.5], \ \overline{x_2} = 1.55, \ \overline{x_3} = 1.05.$
20) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [-1.5, -0.5], \ \overline{x_1} = -1.55, \ \overline{x_3} = -1.05.$
21) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [2.5, 3.5], \ \overline{x_2} = 2.48, \ \overline{x_3} = 2.95.$
22) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [5, 6], \ \overline{x_1} = 4.95, \ \overline{x_3} = 5.35.$
23) $f(x) = \sin(x), [a, b] = [6.3, 7.3], \ \overline{x_1} = 6.25, \ \overline{x_3} = 6.95.$
24) $f(x) = \cos(x), [a, b] = [4, 5], \ \overline{x_2} = 5.05, \ \overline{x_3} = 4.35.$