2 Методи розв'язання нелінійних рівнянь

Постановка задачі. Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, $\bar{x}$ – його розв'язок, тобто $f(\bar{x}) = 0$.

Задача розв'язання цього рівняння розпадається на етапи:

1. Існування та кількість коренів.
2. Відділення коренів, тобто розбиття числової вісі на інтервали, де знаходиться один корінь.
3. Обчислення кореня із заданою точністю ε.

Для розв'язання перших двох задач використовуються методи математичного аналізу та алгебри, а також графічний метод. Далі розглядаються методи розв'язання третього епату.

2.1 Метод ділення навпіл

Припустимо, що на $[a, b]$ знаходиться лише один корінь рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

для $f(x) \in C([a, b])$ який необхідно визначити. Нехай $f(a)f(b) < 0$. Припустимо, що $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Покладемо $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ і обчислимо $f(x_1)$. Якщо $f(x_1) < 0$, то шуканий корінь $\bar{x}$ знаходиться на інтервалі (a, x_1). Якщо ж $f(x_1) > 0$, то $\bar{x} \in (x_1, b)$. З двох інтервалів (a, x_1) і (x_1, b) вибираємо той, на границях якого $f(x)$ має різні знаки, знаходимо точку x_2 – середину вибраного інтервалі, обчислюємо $f(x_2)$, і повторюємо вказаний процес.

В результаті отримуємо послідовність інтервалів, що містять шуканий корінь $\bar{x}$, причому довжина кожного натсупного інтервалу вдвічі менше.

Цей процес продовжується доки довжина $b_n - a_n$ отриманого інтервалу (a_n, b_n) не стане меншою за 2ε. Тоді x_{n+1}, як середина інтервалу (a_n, b_n), пов'язана з $\bar{x}$ нерівністю

$$|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon. \tag{2}$$

За теоремою Больцано-Коші, ця умова буде виконуватися для деякого n. Справді, оскільки

$$|b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}|b_k - a_k|,$$

то

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b - a). \tag{3}$$

Звідси ж отримуємо нерівність для обчислення кількості ітерацій n для виконання умови (2):

$$n = n(\varepsilon) \geq \left[\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right] + 1.$$

Степінь збіжності лінійна, тобто геометричної прогресії зі знаменником $q = 1/2$.

Переваги методу: простота, надійність. Недоліки методу: низька швидкість збіжності, метод не узагальнюється на системи.

2.2 Метод простої ітерації

Спочатку рівняння

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

] замінюється еквівалентним

$$x = \varphi(x). \tag{5}$$

Ітераційний процес має вигляд

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{6}$$

Початкове наближення x_0 задається.

Для збіжності велике значення має вибір функції $\varphi(x)$. Перший спосіб заміни рівняння полягає у відділенні змінної з якогось члена рівняння. Більш продуктивним є перехід від рівняння (4) до (5) з функцією $\varphi(x) = x + \tau(x)f(x)$, де $\tau(x)$ – знакостала функція на тому відрізку, де шукаємо корінь.

Кажуть, що ітераційний метод *збігається*, якщо $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$.

Далі $U_r = \{x : |x - a| \leq r\}$ відрізок довжини $2r$ з серединою в точці a. З'ясуємо умови, при яких збігається метод простої ітерації.

Теорема 2.2.1. Якщо $\max\limits_{x\in[a,b]=U_r} |\varphi'(x)| \leq q < 1$, то метод простої ітерації збігається і має місце оцінка

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_0 - x_1| \leq \frac{q^n}{1-q}(b-a) \tag{7}$$

Доведення 1. Нехай $x_{k+1}, x_k \in U_r$. Тоді

$$|x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) = |\varphi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})| \leq$$

$$\xi_k = x_k + \theta_k((x_{k+1}) - x_k), \quad 0 < \theta_k < 1$$

$$\leq |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x_{k-1}| \leq q|x_k - x_{k-1}| = \dots = q^k|x_1 - x_0|$$

$$|x_{k+p} - x_k| = |x_{k+p} - x_{k+p-1} + \dots + x_{k+1} - x_k| \leq |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \leq$$

$$\leq (q^{k+p-1} + q^{k+p-2} + \dots + q^k)|x_1 - x_0| = \frac{q^k - q^{k+p-1}}{1-q}|x_1 - x_0| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Бачимо, що $\{x_k\}$ – фундаментальна послідовність, а тому збіжна. При $p \to \infty$ в (1) отримуємо (7).

Визначимо кількість ітерацій для досягнення точності ε. З оцінки в теоремі 2.2.1 отримуємо

$$x_n - \bar{x}| \leq \frac{q^n}{1-q}(b-a) < \varepsilon \Rightarrow n(\varepsilon) = n \geq \left[\frac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon(1-q)}{b-a}\right)}{\ln q}\right] + 1.$$

Практично ітераційний процес зупиняємо при $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, але ця умова не гарантує $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$.

Зауваження 1. Умова збіжності методу може бути замінена на умову Ліпщиця

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad 0 < q < .1$$

Переваги методу: простота, при $q < 1/2$ метод збігається швидше ніж метод ділення навпіл, метод узагальнюєтсья на системи. Недоліки методу: при $q > 1/2$ збігається повільніше ніж метод ділення навпіл, виникають труднощі при звдееніі $f(x) = 0$ до $\varphi(x) = x$.

2.3 Метод релаксації

Якщо в методі простої ітерації для рівняння $x = x + \tau f(x) \equiv \varphi(x)$ вибрати $\tau(x) = \tau = \text{const}$, то ітераційний процес набуває вигляду

$$x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{8}$$

де x_0 задано.

Метод можна записати у вигляді $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_n)$. Оскільки $phi'(x) = 1 + \tau f'(x)$, то метод збігається при умові

$$|\varphi'(x)| = |1 + \tau f'(x)| \le q < 1.$$

Нехай $f'(x) < 0$, тоді (7) запишеться у вигляді $-q \le 1 + \tau f'(x) \le q < 1$. Звідси

$$\tau |f'(X_k)| \le 1 + q < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < \tau < \frac{2}{|f'(x)|}.$$

Поставимо задачу знаходження τ для якого $q = q(\tau) \to \min$. Для того щоб вибрати оптимальний параметр τ, розглянемо рівняння для похибки $z_k = x_k \bar{x}$.

Підставивши $x_k = \bar{x} + z_k$ в (8), отримаємо

$$z_{k+1} = z_k + \tau f(\bar{x} + z_k).$$

В припущенні $f(x) \in C^{(1)}([a,b])$ з теореми про середнє маємо

$$f(\bar{x} + z_k) = f(\bar{x}) + z_k f'(\bar{x} + \theta z_k) = z_k f'(\bar{x} + \theta z_k) = z_k f'(\xi_k)$$

$$z_{k+1} = z_k + \tau f'(\xi_k) \cdot z_k$$

$$|z_{k+1}| \le |1 + \tau f'(\xi_k)| \cdot |z_k| \le \max_U |1 + \tau f'(\xi_k)| \cdot |z_k|$$

$$|z_{k+1}| \le \max\{|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|\} \cdot |z_k|$$

$$m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|, \quad M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$$

Таким чином, задача вибору оптимального параметра зводиться до знаходження τ для якого функція

$$q(\tau) = \max\{|1 - \tau M_1| m |1 - \tau m_1|\}$$

набуває мінімального значення.

Точка мінімуму визначається умовою $|1 - \tau M_1| = |1 - \tau m_1|$. Тому

$$1 - \tau_0 m_1 = \tau_0 M_1 - 1 \Rightarrow \tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1} < \frac{2}{|f'(x)|}$$

При цьому значенні τ маємо

$$q(\tau_0) = \rho_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}.$$

Тоді для похибки виконується оцінка

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{(\rho_0)^n}{1 - \rho_0}(b - a) < \varepsilon$$

Кількість ітерацій

$$n = n(\varepsilon) \ge \left[\frac{(1 - \rho_0) \ln \varepsilon}{(b - a) \ln \rho_0}\right] + 1$$

Задача 1. Дати інтерпретацію методу простої ітерації для випадків:

$$0 < \varphi'(x) < 1; \quad -1 < \varphi'(x) < 0; \quad \varphi'(x) < -1; \quad \varphi'(x) > 1.$$

Задача 2. Знайти оптимальне $\tau = \tau_0$ для методу релаксації при $f'(x) > 0$.

2.4 Метод Ньютона (дотичних)

Припустимо, що рівняння $f(x) = 0$ має простий дійсний корінь $\bar{x}$, тобто $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) \neq 0$. Нехай виконуються умови $f(x) \in C^{(1)}([a,b])$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, тоді

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k + \bar{x} - x_k) = f(x_k) + f'(\xi_k)(\bar{x} - x_k),$$

де $\xi_k = x_k + \theta_k(\bar{x} - x_k)$, $0 < \theta_k < 1$, $\xi_k \approx x_k$. Тому наступне наближення виберемо з рівняння

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Звідси маємо ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(X_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_0\text{задане.}$$

Метод Ньютона ща називають методом лінеаризації або методом дотичних.

Задача 3. Дати геометричну ынтерпретацыю методу Ньютона.

Метод Ньютона можна інтерпретувати як метод простої ітерації з

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \text{ тобто } \tau(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Тому $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Якщо $\bar{x}$ корынь f, то $\varphi'(x) = 0$, тому знайдеться окыл кореня у якому

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1.$$

Це означає, що збіжність методу Ньютона залежить від вибору x_0.

Недоліком методу Ньютона є необхідність обчислювати на кожній ітерації не тільки значення функції, а й похідної.