Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №1 на тему:
"Методи розв'язування нелінійних рівнянь'

Виконав студент групи ОМ-3
Скибицький Нікіта

Київ, 2018

1 Постановка задачі

Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, $\bar{x}$ – його розв'язок, тобто $f(\bar{x}) = 0$. Процес розв'язування цього рівняння розбивається на етапи:

1. Перевірка існування та визначення кількості коренів.
2. Відділення коренів, тобто розбиття $\mathbb{R}$ на інтервали, на кожному з яких рівно один корінь.
3. Обчислення на кожному з цих інтервалів кореня із заданою точністю ε

Будемо вважати, що ставиться задача, у якій у заданої функції f на заданому проміжку $[a, b]$ є рівно один корінь.

Мета лабораторної роботи: реалізувати пункт 3 трьома різними методами, проаналізувати кожен із них, і зробити відповідні висновки.

Були використані методи простої ітерації, січних, та хорд для знаходження найменшого за модулем додатного кореня рівняння $x^4 - 4x^3 + 5.5x^2 - 3x + 0.5 = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

2 Теоретична частина

2.1 Метод простої ітерації

Метод полягає у заміні рівняння $f(x) = 0$ еквівалентним йому рівнянням $x = \varphi(x)$. Далі запускається ітераційний процес вигляду $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, де початкове наближення x_0 задається.

Для збіжності методу важливо правильно перейти до функції φ, простим вибором є $\varphi(x) = x + f(x)$, а більш розумним – $\varphi(x) = x + \tau(x) \cdot f(x)$, де $\tau(x)$ – знакостала на $[a, b]$ функція така, що виконуються достатні умова збіжності, тобто $\max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| \le q < 1$ і $m = |x_1 - x_0| \le \delta(1-q)$, де $\delta = \max\limits_{x\in[a,b]} |x - x_0|$.

Переваги методу: простота, при $q < 1/2$ метод збігається швидше ніж метод ділення навпіл, метод узагальнюється на системи.

Недоліки методу: при $q > 1/2$ збігається повільніше ніж метод ділення навпіл, виникають складнощі при зведенні $f(x) = 0$ до $\varphi(x) = x$.

2.2 Модифікований метод Ньютона

Модифікований метод Ньютона полягає у проведенні наступного ітераційного процесу: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0)$, де x_0 – задане. Враховуючи, що модифікований метод Ньютона є просто частинним випадком методу простої ітерації (і методу релаксації), то для збіжності достатньо $\max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| \le q < 1$.

Переваги методу: немає необхідності обчислювати похідну на кожній ітерації.

Недоліки методу: має лише лінійну збіжність, тобто $|x_{n+1} - \bar{x}| = O(|x_k - \bar{x}|)$.

2.3 Метод січних

Метод полягає у проведенні ітераційного процесу $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$, де x_0, x_1 – задані.

Переваги методу: степінь збіжності $\varphi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, узагальнюється на системи і рівняння в $\mathbb{C}$.

Недоліки методу: збіжність методу залежить від початкового наближення x_0, і необхідно $f \in C^{(2)}([a,b])$.

3 Практична частина

Попередній графічний аналіз показує, що найменший за модулем додатній корінь приблизно дорівнює 0.29, тому шукатимемо корінь на проміжку $[a,b]=[0,0.4]$.

3.1 Метод простої ітерації

Візьмемо $\tau(x)=0.6$, тоді $\varphi'(x)=x+0.6\cdot(x^4-4x^3+5.5x^2-3x+0.5)$.

Покажемо, що φ опукла на $[0,0.4]$, тоді її максимум на одному з країв інтервалу.

Справді, $\varphi''(x)=6.6-14.4x+7.2x^2$, її корені $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1/3}/2$, $x_{1,2}>1/2>0.4$.

Далі підставляємо краї: $|\varphi'(0)|=|-0.8|=0.8$, $|\varphi'(0.4)|=0.8416 \Rightarrow q=\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)|=0.8416<1$, отже метод гарантовано зійдеться.

Візьмемо $x_0=\dfrac{a+b}{2}=0.2$.

Знайдемо $m=|x_1-x_0|=168/3125=0.05376\le 0.16832=\delta(1-q)$, де $\delta=\max\limits_{x\in[a,b]}|x-x_0|=0.2$.

Таким чином метод гарантовано зійдеться.

Кількість ітерацій $n \ge \left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon(1-q)}{(b-q)}\right)}{\ln q}\right]+1>86$.

Справді, метод успішно відпрацьовує, причому за значно меншу кількість ітерацій:

n	x_n	$f(x_n)$
1	0.2	0.0896
2	0.25376	0.0316717363
3	0.2727630418	0.0152704811
4	0.2819253304	0.0080599509
5	0.286761301	0.0044305753
6	0.2894196461	0.0024864697
7	0.290911528	0.0014111068
8	0.2917581921	0.00080581
9	0.292241678	0.0004617709
10	0.2925187406	0.0002651468
11	0.2926778287	0.0001524198
12	0.2927692806	0.000087676
13	0.2928218862	0.0000504525
14	0.2928521577	0.0000290388
15	0.292869581	0.0000167159
16	0.2928796105	0.000009623
17	0.2928853843	0.00000554
18	0.2928887083	0.0000031895
19	0.292890622	0.0000018363
20	0.2928917237	0.0000010572
21	0.292892358	0.0000006087 *

3.2 Модифікований метод Ньютона

Будемо шукати корінь на $[0.2, 0.3]$.

Перевіримо збіжність звичайного методу Ньютона:

Знайдемо x_0 для якого $f''(x_0) \cdot f(x_0) > 0$:

$f''(x) = 11 - 24x + 12x^2 > 0$ на $[0, 0.4]$, тому достатньо просто вибрати x_0 так, що $f(x_0) > 0$, наприклад $x_0 = 0.2$ для якого $f(x_0) = 0.0896 > 0$, тоді $|x_0 - \bar{x}| \leq 0.1$.

$$m_1 = \min_{x \in [a,b]} f'(x) \qquad M_2 = \max_{x \in [a,b]} f''(x).$$

Умова збіжності $q = \dfrac{M_2}{2m_1}|x_0 - \bar{x}| \leq 1$:

$$\begin{cases} f'(0.2) = -1.248 \\ f'(0.3) = -0.672 \end{cases} \Rightarrow m_1 = 0.672$$

$$\begin{cases} f''(0.2) = 6.68 \\ f''(0.3) = 4.88 \end{cases} \Rightarrow M_2 = 6.68$$

$q \leq \dfrac{6.68}{1.344} \cdot 0.1 \approx 0.497 < 1$, отже метод гарантовано зійдеться.

Кількість ітерацій $n \geq \left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{|x_0 - \bar{x}|}{\varepsilon}\right)}{\ln(1/q)} \right] + 1 > 17.$

Але це оцінка на кількість ітерацій методу Ньютона а не модифікованого, тому може бути більше ітерацій.

Справді, метод успішно відпрацьовує:

n	x_n	$f(x_n)$
1	0.2	0.0896
2	0.2444444444	0.0404538333
3	0.26451083	0.0221485969
4	0.2754972372	0.0130723485
5	0.281981537	0.008017075
6	0.2859582608	0.0050249356
7	0.2884507884	0.003190859
8	0.2900335557	0.0020425975
9	0.291046749	0.0013141928
10	0.2916986303	0.0008482741
11	0.2921194012	0.00054867
12	0.2923915589	0.0003553566
13	0.2925678271	0.0002303515
14	0.2926820887	0.000149403
15	0.2927561974	0.0000969357
16	0.2928042806	0.0000629086
17	0.2928354852	0.0000408321
18	0.2928557393	0.0000265056
19	0.2928688869	0.0000172068
20	0.292877422	0.0000111707
21	0.292882963	0.0000072522
22	0.2928865603	0.0000047084
23	0.2928888958	0.0000030569
24	0.2928904121	0.0000019846
25	0.2928913966	0.0000012885 *

3.3 Метод січних

Почнемо з $x_0 = 0.05$, $x_1 = 0.1$. Апріорних умов збіжності немає, тому просто перевіримо чи метод зійдеться перевіряючи на кожній ітерації умови $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ та $|f(x_n)| < \varepsilon$.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
1	0.1	0.2511	0.05
2	0.2119420451	0.0751672237	0.1119420451
3	0.2597692489	0.026269176	0.0478272038
4	0.2854631426	0.0053930356	0.0256938937
5	0.292100772	0.0005619159	0.0066376294
6	0.2928728061	0.000014435	0.0007720341
7	0.2928931617	0.0000000404	0.0000203556
8	0.2928932188	0.0000000000	0.0000000571 *

4 Висновки

Як бачимо, ми або заощаджуємо на аналізі (дослідженні) функції але виграємо у простоті методу, або ж заощаджуємо на кількості ітерацій/швидкодії, але додатково аналізуємо функцію (обчислюємо похідні, скінченні різниці, тощо).