

Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №1 на тему:
“Методи розв’язування нелінійних рівнянь”

Виконав студент групи ОМ-3
Скибицький Нікіта

Київ, 2018

1 Постановка задачі

Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, \bar{x} – його розв’язок, тобто $f(\bar{x}) = 0$. Процес розв’язування цього рівняння розбивається на етапи:

1. Перевірка існування та визначення кількості коренів.
2. Відділення коренів, тобто розбиття \mathbb{R} на інтервали, на кожному з яких рівно один корінь.
3. Обчислення на кожному з цих інтервалів кореня із заданою точністю ε

Будемо вважати, що ставиться задача, у якій у заданій функції f на заданому проміжку $[a, b]$ є рівно один корінь.

Мета лабораторної роботи: реалізувати пункт 3 трьома різними методами, проаналізувати кожен із них, і зробити відповідні висновки.

Були використані методи простої ітерації, січних, та хорд для знаходження найменшого за модулем додатного кореня рівняння $x^4 - 4x^3 + 5.5x^2 - 3x + 0.5 = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

2 Теоретична частина

2.1 Метод простої ітерації

Метод полягає у заміні рівняння $f(x) = 0$ еквівалентним йому рівнянням $x = \varphi(x)$. Далі запускається ітераційний процес вигляду $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, де початкове наближення x_0 задається.

Для збіжності методу важливо правильно перейти до функції φ , простим вибором є $\varphi(x) = x + f(x)$, а більш розумним – $\varphi(x) = x + \tau(x) \cdot f(x)$, де $\tau(x)$ – знакостала на $[a, b]$ функція така, що виконуються достатні умова збіжності, тобто $\max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| \leq q < 1$ і $m = |x_1 - x_0| \leq \delta(1 - q)$, де $\delta = \max_{x \in [a, b]} |x - x_0|$.

Переваги методу: простота, при $q < 1/2$ метод збігається швидше ніж метод ділення навпіл, метод узагальнюється на системи.

Недоліки методу: при $q > 1/2$ збігається повільніше ніж метод ділення навпіл, виникають складнощі при зведенні $f(x) = 0$ до $\varphi(x) = x$.

2.2 Модифікований метод Ньютона

Модифікований метод Ньютона полягає у проведенні наступного ітераційного процесу: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_0)$, де x_0 – задане. Враховуючи, що модифікований метод Ньютона є просто частинним випадком методу простої ітерації (і методу релаксації), то для збіжності достатньо $\max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| \leq q < 1$.

Переваги методу: немає необхідності обчислювати похідну на кожній ітерації.

Недоліки методу: має лише лінійну збіжність, тобто $|x_{n+1} - \bar{x}| = O(|x_k - \bar{x}|)$.

2.3 Метод січних

Метод полягає у проведенні ітераційного процесу $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$, де x_0, x_1 – задані.

Переваги методу: степінь збіжності $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, узагальнюється на системи і рівняння в \mathbb{C} .

Недоліки методу: збіжність методу залежить від початкового наближення x_0 , і необхідно $f \in C^{(2)}([a, b])$.

3 Практична частина

Попередній графічний аналіз показує, що найменший за модулем додатний корінь приблизно дорівнює 0.29, тому шукатимемо корінь на проміжку $[a, b] = [0, 0.4]$.

3.1 Метод простої ітерації

Візьмемо $\tau(x) = 0.6$, тоді $\varphi'(x) = x + 0.6 \cdot (x^4 - 4x^3 + 5.5x^2 - 3x + 0.5)$.

Покажемо, що φ опукла на $[0, 0.4]$, тоді її максимум на одному з країв інтервалу.

Справді, $\varphi''(x) = 6.6 - 14.4x + 7.2x^2$, її корені $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1/3}/2$, $x_{1,2} > 1/2 > 0.4$.

Далі підставляємо край: $|\varphi'(0)| = |-0.8| = 0.8$, $|\varphi'(0.4)| = 0.8416 \Rightarrow q = \max_{x \in [a, b]} |\varphi'(x)| = 0.8416 < 1$, отже метод гарантовано зійдеться.

Візьмемо $x_0 = \frac{a+b}{2} = 0.2$.

Знайдемо $m = |x_1 - x_0| = 168/3125 = 0.05376 \leq 0.16832 = \delta(1 - q)$, де $\delta = \max_{x \in [a, b]} |x - x_0| = 0.2$.

Таким чином метод гарантовано зійдеться.

Кількість ітерацій $n \geq \left\lceil \frac{\ln \left(\frac{\varepsilon(1-q)}{(b-a)} \right)}{\ln q} \right\rceil + 1 > 86$.

Справді, метод успішно відпрацьовує, причому за значно меншу кількість ітерацій:

n	x_n	$f(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
1	0.2	0.0896	0.2
2	0.25376	0.0316717363	0.05376
3	0.2727630418	0.0152704811	0.019003
4	0.2819253304	0.0080599509	0.0091623
5	0.286761301	0.0044305753	0.004836
6	0.2894196461	0.0024864697	0.0026583
7	0.290911528	0.0014111068	0.0014919
8	0.2917581921	0.00080581	0.0008467
9	0.292241678	0.0004617709	0.0004835
10	0.2925187406	0.0002651468	0.0002771
11	0.2926778287	0.0001524198	0.0001591
12	0.2927692806	0.000087676	9.15e-05
13	0.2928218862	0.0000504525	5.26e-05
14	0.2928521577	0.0000290388	3.03e-05
15	0.292869581	0.0000167159	1.74e-05
16	0.2928796105	0.000009623	1e-05
17	0.2928853843	0.00000554	5.8e-06
18	0.2928887083	0.0000031895	3.3e-06
19	0.292890622	0.0000018363	1.9e-06
20	0.2928917237	0.0000010572	1.1e-06
21	0.292892358	0.0000006087	6e-07 *

3.2 Модифікований метод Ньютона

Будемо шукати корінь на $[0.2, 0.3]$.

Перевіримо збіжність звичайного методу Ньютона:

Знайдемо x_0 для якого $f''(x_0) \cdot f(x_0) > 0$:

$f''(x) = 11 - 24x + 12x^2 > 0$ на $[0, 0.4]$, тому достатньо просто вибрати x_0 так, що $f(x_0) > 0$, наприклад $x_0 = 0.2$ для якого $f(x_0) = 0.0896 > 0$, тоді $|x_0 - \bar{x}| \leq 0.1$.

$$m_1 = \min_{x \in [a, b]} f'(x) \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} f''(x).$$

Умова збіжності $q = \frac{M_2}{2m_1} |x_0 - \bar{x}| \leq 1$:

$$\begin{cases} f'(0.2) = -1.248 \\ f'(0.3) = -0.672 \end{cases} \Rightarrow m_1 = 0.672$$

$$\begin{cases} f''(0.2) = 6.68 \\ f''(0.3) = 4.88 \end{cases} \Rightarrow M_2 = 6.68$$

$q \leq \frac{6.68}{1.344} \cdot 0.1 \approx 0.497 < 1$, отже метод гарантовано зійдеться.

$$\text{Кількість ітерацій } n \geq \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{|x_0 - \bar{x}|}{\varepsilon}\right)}{\ln(1/q)} \right\rceil + 1 > 17.$$

Але це оцінка на кількість ітерацій методу Ньютона а не модифікованого, тому може бути більше ітерацій.

Справді, метод успішно відпрацьовує:

n	x_n	$f(x_n)$	$ x_n - x_{n-1} $
1	0.2	0.0896	0.2
2	0.2444444444	0.0404538333	0.04444444
3	0.26451083	0.0221485969	0.0200664
4	0.2754972372	0.0130723485	0.0109864
5	0.281981537	0.008017075	0.0064843
6	0.2859582608	0.0050249356	0.0039767
7	0.2884507884	0.003190859	0.0024925
8	0.2900335557	0.0020425975	0.0015828
9	0.291046749	0.0013141928	0.0010132
10	0.2916986303	0.0008482741	0.0006519
11	0.2921194012	0.00054867	0.0004208
12	0.2923915589	0.0003553566	0.0002722
13	0.2925678271	0.0002303515	0.0001763
14	0.2926820887	0.000149403	0.0001143
15	0.2927561974	0.0000969357	7.41e-05
16	0.2928042806	0.0000629086	4.81e-05
17	0.2928354852	0.0000408321	3.12e-05
18	0.2928557393	0.0000265056	2.03e-05
19	0.2928688869	0.0000172068	1.31e-05
20	0.292877422	0.0000111707	8.5e-06
21	0.292882963	0.0000072522	5.5e-06
22	0.2928865603	0.0000047084	3.6e-06
23	0.292888958	0.0000030569	2.3e-06
24	0.2928904121	0.0000019846	1.5e-06
25	0.2928913966	0.0000012885	1e-06 *

3.3 Метод січних

Почнемо з $x_0 = 0.05$, $x_1 = 0.1$. Апріорних умов збіжності немає, тому просто перевіримо чи метод зійдеться перевіряючи на кожній ітерації умови $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ та $|f(x_n)| < \varepsilon$.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
1	0.1	0.2511	0.05
2	0.2119420451	0.0751672237	0.1119420451
3	0.2597692489	0.026269176	0.0478272038
4	0.2854631426	0.0053930356	0.0256938937
5	0.292100772	0.0005619159	0.0066376294
6	0.2928728061	0.000014435	0.0007720341
7	0.2928931617	0.0000000404	0.0000203556
8	0.2928932188	0.0000000000	0.0000000571 *

4 Висновки

Як бачимо, ми або заощаджуємо на аналізі (дослідженні) функції але виграємо у простоті методу, або ж заощаджуємо на кількості ітерацій/швидкодії, але додатково аналізуємо функцію (обчислюємо похідні, скінченні різниці, тощо).