

Чисельні методи

Нікіта Скибицький

6 лютого 2019 р.

Зміст

0.1	Елемент найкращого середньоквадратичного наближення	1
0.1.1	Системи ортонормованих функцій	4
0.1.2	4
0.1.3	На дискретній множині точок	5
0.1.4	Для періодичних функцій	5

0.1 Елемент найкращого середньоквадратичного наближення

Ми зараз будемо розглядати елементи найкращого наближення в різних конкретних гільбертових просторах, але загальну теорію сформулюємо для абстрактного гільбертового простору H .

Отже, нехай $R = H$, тоді $\exists!$ ЕНН. Тоді

$$\Delta(f, \Phi) = \|f - \Phi\|. \quad (0.1.1)$$

А наша формальна задача набуває вигляду: знайти

$$\inf_{\Phi \in M_n} \Delta(f, \Phi) = \Delta(f). \quad (0.1.2)$$

Тоді ЕНН Φ_0 має вигляд:

$$\Phi = \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi_i, \quad (0.1.3)$$

де $\varphi_i \in M_n$.

$$\left\| f - \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi_i \right\|^2 = (f, f) + \sum_{i,j=0}^n c_i c_j \cdot (\varphi_i, \varphi_j) - 2 \sum_{i=0}^n c_i \cdot (f, \varphi_i). \quad (0.1.4)$$

Для ЕНН Φ_0 з (??) маємо:

$$(f - \Phi_0, \Phi = 0), \quad \forall \Phi \in M_n,$$

а тоді

$$(f - \Phi_0, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{0, n}. \quad (0.1.5)$$

Підставляючи в (0.1.5) вираз (0.1.3) будемо мати наступне:

$$\sum_{j=0}^n c_j \cdot (\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{0, n}. \quad (0.1.6)$$

Це є СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів c_j .

Якщо система функцій $\{\varphi_i\}$ є лінійно-незалежною, то матриця $G = (g_{i,j})_{i,j=\overline{0,n}}$, то $\det G \neq 0$ і система (0.1.6) матиме єдиний розв'язок.

Система (0.1.6) має симетричну матрицю, тому доцільно розв'язувати (0.1.6) методом квадратних коренів, тобто можемо записати її ще у такому вигляді:

$$G\bar{c} = \bar{F}, \quad (0.1.7)$$

де

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

Відхилення ЕНН у цьому випадку визначатиметься за формулою:

$$\Delta(f) = \|f - \Phi_0\|. \quad (0.1.8)$$

Зауваження. Систему вигляду (0.1.6) можна отримати виходячи з (?). Справді, якщо ми візьмемо праву частину (0.1.4) і позначимо її через функціонал від c , $\Phi(c)$, і запишемо $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$.

Таким чином ми побудували алгоритм і нібито все добре, але нагадаємо таку річ як число обумовленості:

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|.$$

Ситуація наступна: нехай $\{\varphi_i\} = \{x^i\}_{i=0}^\infty$, тоді якщо ми візьмемо

$$\Phi_n = \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i$$

і будемо шукати ЕНН у такому вигляді, то для $H = L_2([0, 1])$. У цьому випадку

$$g_{i,j} = \int_0^1 x^i \cdot x^j dx = \frac{1}{i+j+1}, \quad i, j = \overline{0, n},$$

а тоді $\text{cond}(G) \approx 10^8$ при $n = 7$, $\text{cond}(G) \approx 10^9$ при $n = 8$ і так далі, тобто дуже швидко росте, тобто система (0.1.6) буде дуже погано обумовленою.

Теорема 0.1.1 (Мюнца). Система функцій $1, \{x^{n_i}\}$, $0 < n_1 < n_2 < \dots$ буде повною якщо ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n_i}$$

буде розбігатися.

Якщо ж у (0.1.6) ми розглянемо ортогональну систему функцій $\{\varphi_i\}$ простору H , то матриця G системи (0.1.6) буде діагональною, а c_i можна буде знайти за формулами

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (0.1.9)$$

а Φ_0 можна буде як і раніше знайти за формулою (0.1.3):

$$\Phi = \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi_i.$$

Нагадаємо умови ортогональності:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j. \end{cases}$$

У цьому випадку з (0.1.4) будемо мати, що

$$\|f - \Phi\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^n c_i^2 \cdot \|\varphi_i\|^2. \quad (0.1.10)$$

Якщо ж $\{\varphi\}$ – ортонормована ситсема функцій, тобто

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

У цьому випадку розв'язок системи (0.1.6) матиме вигляд

$$c_i = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad (0.1.11)$$

$$\Phi_0 = \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi_i, \quad (0.1.12)$$

$$\Delta^2(f) = \|f - \Phi_0\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^n c_i^2. \quad (0.1.13)$$

Можемо записати розвинення функції f в ряд Фур'є:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (f, \varphi_i) \cdot \varphi_i, \quad (0.1.14)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2.$$

Тоді виходячи з (0.1.13) будемо мати, що

$$\Delta^2(f) = \|f - \Phi_0\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Зауваження. Якщо система функцій $\{\varphi_i\}$ ортогональна з ваговим коефіцієнтом ρ , тобто

$$(\varphi_i, \varphi_j)_\rho = (\rho \varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j, \end{cases}$$

то у цьому випадку формула (0.1.9) набуде вигляду

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)_\rho}{(\varphi_i, \varphi_i)_\rho}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (0.1.15)$$

0.1.1 Системи ортонормованих функцій

1. На $[-1, 1]$ з $\rho = 1$ є поліноми Лежандра.
2. На $[-1, 1]$ з $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ є поліноми Чебишева.
3. На $[0, \infty)$ – поліноми Ерміта.
4. поліноми Якобі
5. ...

0.1.2

$H = L_2(a, b)$, у ньому $(u, v) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x)v(x) dx$.

0.1.3 На дискретній множині точок

$H = \ell_2$, простір сіткових функцій, у ньому $(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i v_i$,
тоді $Q_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot x^j$.

Система функцій $\{\varphi_i\} = \{x^i\}$ буде лінійно незалежною якщо $n \leq N - 1$.
У свою чергу при $n \geq N$ поліном $Q(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ може
обертатися в 0 на всій сітці якщо в якості x_i взяти вузли сітки оскільки
 $n \geq N$.

0.1.4 Для періодичних функцій

Нехай $x \in [0, 2\pi)$ і розглянемо функцію $\{\varphi_k\} = \{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos kx, \sin kx\}$,
тоді тригонометричним поліномом степеню m назовемо

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^m (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx). \quad (0.1.16)$$

$$(\sin kx, \sin mx) = \begin{cases} 0, & k = m \\ \pi, & k \neq m, \end{cases} \quad (0.1.17)$$

$$(\sin kx, \cos mx) = 0,$$

$$(\cos kx, \cos mx) = \begin{cases} 2\pi, & k = m = 0 \\ \pi, & k = m \neq 0 \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad (0.1.18)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx, \quad k = \overline{1, m}, \quad (0.1.19)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx, \quad k = \overline{1, m}. \quad (0.1.20)$$

Зауваження. Якщо функція періодична не на $[0, 2\pi]$, то потрібно зводити або функцію на відповідний проміжок, або систему функцій.

Зауваження. Якщо функція f парна відносно точки π , то $b_k = 0$, а

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \cos(kx) \, dx, \quad k = \overline{1, m},$$

а якщо непарна, то $a_k = 0$, а

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(kx) \, dx, \quad k = \overline{1, m}.$$

Задача 0.1.