Міністерство освіти та науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт
до лабораторної роботи №1:
«Методи розв’язання нелінійних рівнянь»

студента 3 курсу

факультету кібернетики

групи ДО-3

Бродюка Сергія

м. Київ

Постановка задачі

Нехай маємо рівняння f (x) = 0, x - його розв'язок, тобто f (x) ≡ 0 . Задача розв‘язання цього рівняння розпадається на етапи:

1. Існування та кількість коренів.

2. Відділення коренів, тобто розбиття числової осі на інтервали, де знаходиться один корінь.

3. Обчислення кореня із заданою точністю ε .

Ставиться задача, що для заданої функції f (x) вказані межі [a, b], де тільки один єдиний корінь.

Ціль лабораторної роботи: реалізувати п. 3 трьома різними методами та проаналізувати кожен із них, зробити висновки.

Завдання 1

Метод ділення навпіл (Дихотомії).

Завдання 2

Метод Ньютона (метод дотичних).

Завдання 3

Метод релаксації.

Теоретична частина

Частина 1

Нехай f (a) f (b) < 0 . Припустимо, що f (a) > 0, f (b) < 0 . Покладемо $x_1 = (a + b) / 2$ і підрахуємо $f(x_1)$. Якщо $f(x_1) < 0$, тоді шуканий корінь x* знаходиться на інтервалі (a, x_1) . Якщо ж $f(x_1) > 0$, то $x^* \in (x_1, b)$. Далі з двох інтервалів (a, x_1) і (x_1, b) вибираємо той, на границях якого функція f (x) має різні знаки, знаходимо точку x_2 – середину вибраного інтервалу, підраховуємо $f(x_2)$ і повторюємо вказаний процес.

Частина 2

Припустимо, що рівняння $f(x)=0$ має простий дійсний корінь $\bar{x}$, тобто $f(\bar{x})=0$, $f'(\bar{x})\neq 0$. Нехай виконуються умови: $f(x)\in C^1[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$. Тоді

$$0=f(\bar{x})=f(x_k+\bar{x}-x_k)=f(x_k)+f'(\xi_k)(\bar{x}-x_k),$$

де $\xi_k=x_k+\theta_k(\bar{x}-x_k)$, $0<\theta_k<1$, $\xi_k\approx x_k$. Тому наступне наближення виберемо з рівняння

$$f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)=0.$$

Звідси маємо ітераційний процес

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2\ldots\quad;\quad x_0\text{-задане}.$$

Метод Ньютона ще називають методом лінеаризації або методом дотичних.

Частина 3

Якщо в методі простої ітерації для рівняння $x = x + \tau f(x) \equiv \varphi(x)$ вибрати $\tau(x) = \tau = const$, то ітераційний процес приймає вигляд

$$x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n), \tag{1}$$

$k = 0,1,2,3\ldots$ x_0 – задано. Метод можна записати у вигляді $\dfrac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = f(x_k)$, $k = 0,1,\ldots$. Оскільки $\varphi'(x) = 1 + \tau f'(x)$, то метод збігається при умові

$$|\varphi'(x)| = |1 + \tau f'(x)| \le q < 1.$$

Нехай $f'(x) < 0$, тоді (3) запишеться у вигляді: $-q \le 1 + \tau f'(x) \le q < 1$. Звідси

$$\tau|f'(x_k)| \le 1 + q < 2, \text{ і } 0 < \tau < \frac{2}{|f'(x)|}.$$

Поставимо задачу знаходження τ, для якого $q = q(\tau) \to \min$. Для того, щоб вибрати оптимальний параметр τ, розглянемо рівняння для похибки $z_k = x_k - \bar{x}$.

Підставивши $x_k = \bar{x} + z_k$ в (1), отримаємо

$$z_{k+1} = z_k + \tau f(\bar{x} + z_k).$$

В припущені $f(x) \in C^1[a,b]$ з теореми про середнє маємо

$$f(\bar{x} + z_k) = f(\bar{x}) + z_k f'(\bar{x} + \theta z_k) = z_k f'(\bar{x} + \theta z_k) = z_k f'(\xi_k)$$

$$z_{k+1} = z_k + \tau f'(\xi_k) \cdot z_k$$

$$|z_{k+1}| \le |1 + \tau f'(\xi_k)| \cdot |z_k| \le \max_U |1 + \tau f'(\xi_k)||z_k|$$

$$|z_{k+1}| \le \max\{|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|\}|z_k|$$

$$m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|, \quad M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$$

Таким чином, задача вибору оптимального параметра зводиться до знаходження τ, для якого функція

$$q(\tau) = \max\{|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|\}$$

приймає мінімальне значення: $q(\tau) \to \min$.

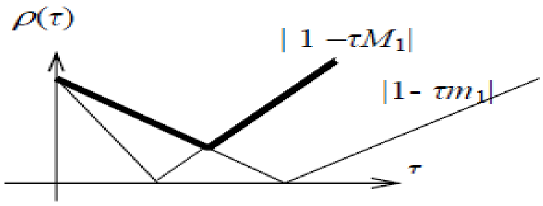


Рис. 1

З графіка видно, що точка мінімуму визначається умовою $|1 - \tau M_1| = |1 - \tau m_1|$. Тому

$$1 - \tau_0 m_1 = \tau_0 M_1 - 1 \Rightarrow \tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1} < \frac{2}{|f'(x)|}$$

При цьому значенні τ маємо

$$q(\tau_0) = \rho_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}.$$

Тоді для похибки вірна оцінка

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{(\rho_0)^n}{1 - \rho_0}(b - a) < \varepsilon$$

Практична частина

Постановка варіанту

Варіант 2

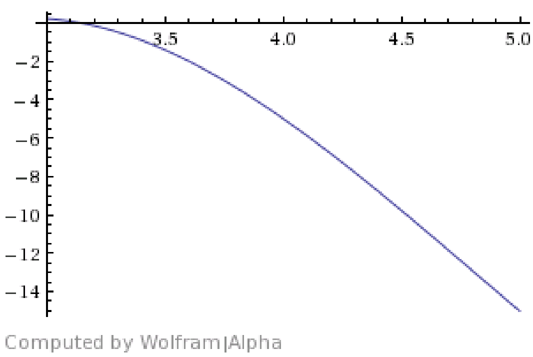
Функція:

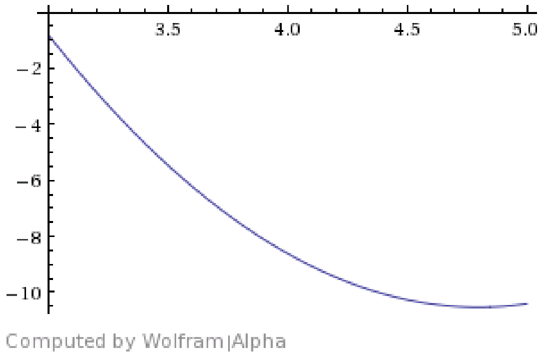
$$f(x) = (x - e) * (x - Pi) * (x - e * Pi)$$

$x^* \in [a, b] = [3, 5]$.

Всюди була взята точність $\varepsilon = 1e\text{-}5$.

Графіки самої функції та її похідної:





Завдання 1

Як вже було згадано в теоретичній частині, ми з двох інтервалів (a, x_1) і (x_1, b) вибираємо той, на границях якого функція f (x) має різні знаки, знаходимо точку x_2 – середину вибраного інтервалу, підраховуємо $f(x_2)$ і повторюємо вказаний процес.

В результаті отримаємо послідовність інтервалів, що містять шуканий корінь $\bar{x}$, причому довжина кожного послідуючого інтервалу вдвічі менше попереднього.

Цей процес продовжується до тих пір, поки довжина отриманого інтервалу (a_n, b_n) не стане меншою за $b_n - a_n < 2\varepsilon$. Тоді x_{n+1}, як середина інтервалу (a_n, b_n), пов'язане з $\bar{x}$ нерівністю

$$|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon. \tag{2}$$

Ця умова для деякого n буде виконуватись за теоремою Больцано – Коші. Оскільки

$$|b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{1}{2}|b_k - a_k|,$$

то

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le \frac{1}{2^{n+1}}(b - a) < \varepsilon. \tag{3}$$

Звідси отримаємо нерівність для обчислення кількості ітерацій n для виконання умови (2):

$$n = n(\varepsilon) \ge \left[\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right] + 1.$$

Степінь збіжності – лінійна, тобто геометричної прогресії з знаменником $q = \frac{1}{2}$.

Переваги методу: простота, надійність. Недоліки методу: низька швидкість збіжності; метод не узагальнюється на системи.

Скрін, що демонструє роботу методу дихотомії:

N	X[n]	f(X[n])	|f(X[n]) - f(X[n-1])|	|X[n] - X[n-1]|	EPS
0	4	-4.9947804	10.014973	1	1e-05
1	3.5	-1.4120002	3.5827802	0.5	1e-05
2	3.25	-0.30491169	1.1070885	0.25	1e-05
3	3.125	0.036541517	0.3414532	0.125	1e-05
4	3.1875	-0.11529013	0.15183165	0.0625	1e-05
5	3.15625	-0.034559014	0.080731114	0.03125	1e-05
6	3.140625	0.0022065181	0.036765532	0.015625	1e-05
7	3.1484375	-0.015873862	0.01808038	0.0078125	1e-05
8	3.1445313	-0.0067578965	0.0091159654	0.00390625	1e-05
9	3.1425781	-0.002256723	0.0045011735	0.001953125	1e-05
10	3.1416016	-2.0358072e-05	0.0022363649	0.0009765625	1e-05
11	3.1411133	0.0010942665	0.0011146245	0.00048828125	1e-05
12	3.1413574	0.00053725076	0.00055701571	0.00024414063	1e-05
13	3.1414795	0.00025852048	0.00027873028	0.00012207031	1e-05
14	3.1415405	0.00011909974	0.00013942074	6.1035156e-05	1e-05
15	3.141571	4.9375466e-05	6.9724272e-05	3.0517578e-05	1e-05
16	3.1415863	1.4509855e-05	3.4865611e-05	1.5258789e-05	1e-05
17	3.1415939	-2.9238189e-06	1.7433674e-05	7.6293945e-06	1e-05
18	3.1415901	5.7930906e-06	8.7169095e-06	3.8146973e-06	1e-05

x* = 3.14159

Завдання 2

Скрін, що демонструє роботу методу Ньютона:

N	X[n]	f(X[n])	|f(X[n]) - f(X[n-1])|	|X[n] - X[n-1]|	EPS
0	4	-4.9947804	10.014973	1	1e-05
1	3.4202474	-1.0014024	3.993378	0.57975263	1e-05
2	3.2126885	-0.18724701	0.81415539	0.20755888	1e-05
3	3.1497971	-0.019082218	0.16816479	0.062891393	1e-05
4	3.1417337	-0.00032237995	0.018759838	0.0080634046	1e-05
5	3.1415927	-9.8889272e-08	0.00032228106	0.00014099307	1e-05
6	3.1415927	-9.1330614e-15	9.8889263e-08	4.3275835e-08	1e-05

x* = 3.14159

Завдання 3

Скрін, що демонструє роботу методу релаксації:

N	X[n]	f(X[n])	|f(X[n]) - f(X[n-1])|	|X[n] - X[n-1]|	EPS
0	4	-4.9947804	10.014973	1	1e-05
1	3.1105154	0.06617965	5.06096	0.88948458	1e-05
2	3.1223009	0.042224798	0.023954852	0.011785459	1e-05
3	3.1298204	0.026209626	0.016015172	0.0075195111	1e-05
4	3.1344879	0.015983593	0.010226033	0.0046674841	1e-05
5	3.1373343	0.0096404882	0.0063431049	0.0028464034	1e-05
6	3.1390511	0.0057755683	0.0038649198	0.0017168053	1e-05
7	3.1400796	0.0034460434	0.0023295249	0.0010285295	1e-05
8	3.1406933	0.0020510934	0.00139495	0.00061368114	1e-05
9	3.1410586	0.0012190359	0.00083205756	0.0003652645	1e-05
10	3.1412756	0.00072388608	0.00049514978	0.00021708935	1e-05
11	3.1414046	0.00042963502	0.00029425106	0.00012891168	1e-05
12	3.1414811	0.00025491531	0.00017471971	7.6510617e-05	1e-05
13	3.1415265	0.00015122135	0.00010369396	4.5396038e-05	1e-05
14	3.1415534	8.9698127e-05	6.1523222e-05	2.6929924e-05	1e-05
15	3.1415694	5.3201737e-05	3.649639e-05	1.5973695e-05	1e-05
16	3.1415788	3.1553805e-05	2.1647932e-05	9.4743154e-06	1e-05
17	3.1415845	1.8714054e-05	1.2839751e-05	5.6191906e-06	1e-05
18	3.1415878	1.1098856e-05	7.6151982e-06	3.3326515e-06	1e-05

x* = 3.14159

Висновок

Як бачимо, ми або ж економимо на дослідженні функції (менший аналіз) але виграємо у простоті, або ж економимо на кількості ітерацій, швидкості, але вимушені якось додатково аналізувати функцію (похідні).

Міністерство освіти та науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №2:

«Методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь»

студента 3 курсу

факультету кібернетики

групи ДО-3

Бродюка Сергія

м. Київ

Постановка задачі

Нехай маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Задача:

1. Розв'язати дану СЛАР (для ітераційного методу точність $\varepsilon = 10^{-4}$).

2. Знайти матрицю обернену до даної (прямий метод).

3. Обчислити число обумовленості матриці (прямий метод).

4. Обчислити визначник матриці (прямий метод).

Ціль лабораторної роботи: реалізувати поставленні вище завдання прямим й ітераційним методами та проаналізувати кожен із них, зробити висновки.

Завдання 1

Метод Прогонки.

Завдання 2

Метод Зейделя.

Теоретична частина

Частина 1

Систему рівнянь A * x = f можна розв'язати методом прогонки, якщо матриця A є тридіагональною, та є діагональна перевага (виконується умова стійкості).

$$\begin{pmatrix} c_0 & b_0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & c_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & c_2 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & c_{n-3} & b_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & c_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Умова стійкості:

$|c_i| \geq |a_i| + |b_i|$ ($i = \overline{0, n-1}$), та хоча б одна з нерівностей строга.

Утворюється така система рівнянь:

$$\begin{cases} -c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0 \\ a_1 y_0 - c_1 y_1 + b_1 y_2 = -f_1 \\ \dots \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i \\ \dots \\ a_{n-2} y_{n-3} - c_{n-2} y_{n-2} + b_{n-2} y_{n-1} = -f_{n-2} \\ a_{n-1} y_{n-2} - c_{n-1} y_{n-1} = -f_{n-1} \end{cases}$$

Власне, сам метод Прогонки:

$\alpha_1 = b_0/c_0$; $\beta_1 = f_0/c_0$

$z_i = c_i - \alpha_i * a_i$

$\alpha_{i+1} = b_i/z_i$; $\beta_{i+1} = (f_i + a_i * \beta_i)/z_i$

$y_n = \beta_{n+1} = (f_n + a_n * \beta_n)/(c_n - \alpha_n * a_n)$

$y_i = \alpha_{i+1} * y_{i+1} + \beta_{b+1}$

Визначник тридіагональної матриці вираховується як добуток z_i.

Для знаходження числа обумовленості матриці A використовують формулу $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

Частина 2

Нехай маємо СЛАР A * x = f, det(A) ≠ 0.
Тоді і-те рівняння системи можна представити у вигляді :

$$x_i = \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} * x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} * x_j}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1,n}$$

Ітераційний процес методу Зейделя будується за формулою:

$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} * (f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} * x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} * x_j^{(k)}), \quad i = \overline{1,n}$, де k – номер ітерації.

Умова зупинки: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le \varepsilon$ або $\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \varepsilon$.

Подаємо матрицю A у вигляді:

$$A = A_L + D + A_R$$
$$A_L = \begin{cases} a_{ij}, i > j \\ 0, i \le j \end{cases} \quad A_R = \begin{cases} 0, i \ge j \\ a_{ij}, i < j \end{cases} \quad D = \{a_{ii}\}$$

Тоді формулу метода Зейделя можна подати у вигляді:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}A_L x^{(k+1)} - D^{-1}A_R x^{(k)} + D^{-1}f$$

Збіжність методу:

Метод Зейделя збігається тоді і тільки тоді, коли корені рівняння $\det((D + A_L)\mu + A_R) = 0$ такі, що $|\cdot| < 1$.

Достатня умова збіжності:

Або виконується діагональна перевага
$(q_i + 1) * |a_{ii}| = sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|)$, i = 1..n
Якщо всі $q_i \le 1$
$q = \max(q_i)$

Або $A = A^T > 0$

Апріорна оцінка (для нульового початкового наближення):

$$\frac{q^n}{1-q} < \varepsilon => n \geq \left[\frac{\ln\left(\varepsilon(1-q)\right)}{\ln q}\right] + 1$$

Практична частина

Матриця для прямого методу, методу прогонки:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} c_0 & b_0 & 0 \\ a_1 & c_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перевіркою переконуємось, що вона задовільняє умовам для подальшого розв’язку.

Матриця для ітераційного методу, методу Зейделя:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.75 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Для ітераційного методу Зейделя була взята точність ε = 1e-4.

Завдання 1

Скрін, що демонструє роботу методу прогонки:

```
A * x = f
1           1           0           |1
1           3           2           |1
0           1           2           |1

x*
2           -1          1

|A| = det(A) = 2

A_1 (inversion matrix)
2           -1          1
-1          1           -1
0.5         -0.5        1


cond(A) = ||A||*||A_1|| = 24
```

Завдання 2

Скрін, що демонструє роботу методу Зейделя:

```
A * x = f
3           -1          1           |1
-1          2           0.5         |1.75
1           0.5         3           |2.5

x*
1 | 0.333333   1.04167    0.548611
2 | 0.497685   0.98669    0.50299
3 | 0.494567   0.996536   0.502388
4 | 0.498049   0.998427   0.500912
5 | 0.499172   0.999358   0.500383
6 | 0.499658   0.999733   0.500158
7 | 0.499858   0.99989    0.500066
8 | 0.499941   0.999954   0.500027
```

Для знаходження розв’язку даної СЛАР з точністю ε = 1e-4 знадобилося 8 ітерацій.

Висновок

Метод прогонки досить зручний і економічний. Він легко програмується. Підходить для тридіагональних матриць. Також слід відмітити, що метод прогонки можна використовувати і для знаходження визначника матриці. Серед недоліків методу: він підходить лише до СЛАР з тридіагональною відповідною матрицею.

Метод Зейделя досить швидко збігається, але для застосування цього методу необхідне виконання умови збіжності методу.

Міністерство освіти та науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №3:

«Методи розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь. Часткова проблема власних значень»

студента 3 курсу

факультету кібернетики

групи ДО-3

Бродюка Сергія

м. Київ

Постановка задачі

Нехай маємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (СНЛАР). Задача:
Розв'язати дану СНЛАР конкретним методом із заданою точністю ε.

Часткова проблема власних значень. Задача:
Знайти max та min власні значення заданої матриці із заданою точністю ε.

Ціль лабораторної роботи: реалізувати поставленні вище завдання відповідними методами та проаналізувати кожен із них, зробити висновки.

Завдання 1

Модифікований метод Ньютона.

Завдання 2

Степеневий метод.

Теоретична частина

Частина 1

Маємо систему: $\bar{F}(\bar{x}) = 0$, де $\bar{x}, \bar{F}(\bar{x})$ – n-вимірні вектор-аргумент та вектор-функція відповідно.

Похідна вектор-функції – матриця Якобі:

$$\bar{F}'(\bar{x}) = \left\{\frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right\}_{i,j=\overline{1,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

Лінеаризація рівнянь із розвиненням вектор-функції $\bar{F}(\bar{x})$ у багатовимірний степеневий ряд Тейлора в околі $\overline{x^{(k)}}$ (на k-ому кроці, якщо представити $\overline{x^{(k)}} = \overline{x^{(k)}} + (\bar{x} - \overline{x^{(k)}})$) уможливлює обчислення наближеного значення кореня, а саме, якщо за $\bar{x}$ у цьому розвиненні взяти значення кореня $\bar{\xi}$, то отримаємо

$$\bar{F}\left(\bar{x}^{(k)}\right) + \bar{F}'\left(\bar{\xi}_k\right)\left(\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\right) \approx 0\,, \quad \text{де} \quad \bar{\xi}_k = \bar{x}^{(k)} + \theta\left(\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\right), \;\; 0 < \theta < 1$$

Покладемо $\bar{\xi}_k = \bar{x}^{(k+1)}$ і припускаючи існування оберненої матриці Якобі прийдемо до рекурентних співвідношень методу Ньютона

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \bar{F}'\left(\bar{x}^{(k)}\right)^{-1}\bar{F}\left(\bar{x}^{(k)}\right)$$

Для того, щоб реалізувати модифікований метод Ньютона ми знаходимо матрицю A_0 на 0-кроці, як $A_0 = \bar{F}'\left(\bar{x}^{(0)}\right)$ і позначимо $\bar{z}^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k+1)}$ ітераційні кроки зводяться до наступних:

$$A_0\bar{z}^{(k)} = \bar{F}\left(\bar{x}^{(k)}\right), \bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \bar{z}^{(k)}$$

Умова припинення ітераційного процесу: $\left\|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}\right\| \leq \varepsilon$.

Достатні умови збіжності методу:

Нехай дано систему нелінійних рівнянь із дійсними коефіцієнтами, де вектор-функція $\bar{F}(\bar{x}) \in C^2(X)$ та $\bar{x}^{(0)} \in \Delta = \{\|\bar{x} - \bar{a}\| \leq r\} \subset X$, причому виконуються такі умови:

1. Матриця Якобі $\bar{F}'(\bar{x})$ при $\bar{x} = \bar{x}^{(0)}$ має обернену матрицю до $A_0 = \bar{F}'\left(\bar{x}^{(0)}\right)$ і $\|A_0\| \leq a$.
2. $\left\|A_0^{-1}\bar{F}\left(\bar{x}^{(0)}\right)\right\| \leq b \leq \frac{r}{2}$.
3. $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_k}\right| \leq c$, i, j = 1..n.
4. $nabc \leq \frac{1}{2}$.

Частина 2

Нехай маємо матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Тоді, для знаходження максимального та мінімального значення власних чисел матриці А, застосовуємо степеневий, ітераційний, метод. А – λE = 0

Початкове наближення власного вектора x ≠ 0 (тотожно): $\bar{x}^0 \neq \bar{0}$

$$\bar{x}^0 = C_1\bar{e}_1 + C_2\bar{e}_2 + \cdots + C_n\bar{e}_n$$

Ітераційний процес:

$$\bar{x}^{k+1} = A\bar{x}^k = A^k\bar{x}^0 = C_1\lambda_1^{k+1}\bar{e}_1 + C_2\lambda_2^{k+1}\bar{e}_2 + \cdots + C_n\lambda_n^{k+1}\bar{e}_n$$

$\mu_m^k = \frac{x_m^{k+1}}{x_m^k}$, m – m-та компонента $\bar{x}^k$ (m = 1..n).

$$\mu_1^i \xrightarrow[i\to\infty]{} \lambda_{max}(A) = \lambda_1$$

Цей ітераційний процес збіжний, при виконанні умови:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

Умова зупинки: $\left\|\mu_1^{(k+1)} - \mu_1^{(k)}\right\| \leq \varepsilon$.

Компоненти $\bar{x}^k$ різко збільшуватимуться (зменш.), якщо $|\lambda_1| > 1$ ($|\lambda_1| < 1$)

Виконується нормування (одразу після знаходження самого $\bar{x}^k = A^{k-1}\bar{x}^0$):

$$\bar{x}^k \leftarrow \frac{\bar{x}^k}{\|\bar{x}^k\|}, \bar{x}^0 = (1, 1, \ldots, 1)$$

$\lambda_{min}(A) = \lambda_{max}(A) - \lambda_{max}(B)$, $B = \lambda_{max}(A)E - A$

Практична частина

СНЛАР для Завдання 1:

$$\begin{cases} 2x - \sin\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ 2y - \cos\dfrac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

Для обох методів була взята точність ε = 1e-4.

Завдання 1

Скрін, що демонструє роботу модифікованого методу Ньютона:

```
0          0          0
1          -0.166667  0.5
2          -0.160515  0.493103
3          -0.16051   0.493102
```

Для знаходження розв'язку даної СНЛАР з точністю ε = 1e-4 знадобилося всього 3 ітерації.

Завдання 2

Скрін, що демонструє роботу степеневого методу:

```
Matrix A
5          1          2
1          4          1
2          1          3

lambda(max)* = 6.8952
lambda(min)* = 1.7078
```

Для знаходження максимального власного значення матриці А з точністю ε = 1e-4 знадобилося 12 ітерацій, а для мінімального - 24.

Висновок

Модифікований метод Ньютона швидко збігається. Але він потребує значення похідних.

Степеневий метод зручний для знаходження min та max власних значень матриці.

Міністерство освіти та науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт
до лабораторної роботи №4:
«Інтерполяція»

студента 3 курсу

факультету кібернетики

групи ДО-3

Бродюка Сергія

м. Київ

Постановка задачі

Нехай маємо n+1 точки (x_0; y_0), (x_1; y_1), … , (x_n; y_n). Задача:
Побудувати інтерполяційні многочлени Ньютона.

Ціль лабораторної роботи: реалізувати поставленні вище завдання відповідними методами та проаналізувати кожен із них, зробити висновки.

Завдання 1

Знайти 10 вузлів Чебишева на певному проміжку для заданої функції та побудувати інтерполяційний поліном у формі Ньютона для цих вузлів.

Завдання 2

Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона для рівновіддалених вузлів на певному проміжку для заданої функції.

Теоретична частина

Частина 1

Нехай $x \in [a;b]$

Поліном Чебишева $T_n(x)$ має n коренів , які можна обчислити за формулою:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\,, k = \overline{0, n-1}$$

За отриманими вузлами будується інтерполяційний поліном.

Інтерполяційний поліном Ньютона:

Обчислюємо розділені різниці: $f(x, x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, звідси

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x, x_0)$$

Наступна розділена різниця матиме вигляд: $f(x, x_0, x_1) = \frac{f(x,x_0)-f(x_0,x_1)}{x-x_1}$, тоді

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x, x_0, x_1)$$

Загальний вигляд отримаємо: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, де

$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x, x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x, x_0, x_1) + \cdots + (x - x_0) \dots (x - x_n)f(x, x_0, \dots, x_n)$ – формула Ньютона запису інтерполяційного полінома.

$R_n(x)$-залишковий член.

Частина 2

$$x_k = a + kh, k = \overline{0, n-1}, h = \frac{b-a}{n-1}$$

Інтерполяційний поліном Ньютона – див. *Частина 1*.

Практична частина

Функція:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Інтервал: $x \in [a; b] = [-1; 4]$

Для заданого інтервалу пораховано Чебишевські та рівновіддалені вузли (за відповідними формулами) у кількості 10.

Чебишевські:	x	Рівновіддалені:
-0.9692208514878446	x1	-1.0
-0.7275163104709197	x2	-0.4444444444444444
-0.2677669529663689	x3	0.11111111111111116
0.3650237506511329	x4	0.6666666666666667
1.1089138373994227	x5	1.2222222222222223
1.8910861626005766	x6	1.7777777777777777
2.634976249348867	x7	2.3333333333333335
3.267766952966369	x8	2.8888888888888893
3.7275163104709197	x9	3.4444444444444446
3.969220851487844	x10	4.0

Було обрано точку x = 1.5, так як вона не дуже близько до жодного з коренів вузлів (знаходиться відносно посередині інтервалу).

Завдання 1

Демонстрація підстановки точки x в поліном Ньютона побудованим на основі Чебишевських вузлів:

x = 1.5
f(x) = 0.10539922456186433
P(x) = 0.09956444977350562
R(x) = 0.005834774788358 7125

Завдання 2

Демонстрація підстановки точки x в поліном Ньютона побудованим на основі рівновіддалених вузлів:

x = 1.5
f(x) = 0.10539922456186433
P(x) = 0.10409211182279374
R(x) = 0.0013071127390705956

Висновок

Інтерполяційний поліном у формі Ньютона досить точно відтворює функцію.

При його побудові на основі Чебишевських вузлів ми отримуємо малу похибку на всьому інтервалі. В той час як при побудові на основі рівновіддалених вузлах на краях похибка буде значча, а ближче до середини інтервалу значно зменшуватись.