неизвестных. Из этих приближенных значений тем или иным способом получают новые «улучшенные» приближенные значения. С новыми приближенными значениями поступают точно так же и т. д. При выполнении определенных условий можно придти, вообще говоря, после бесконечного числа шагов к точному решению.

Под нашу классификацию не подходят способы решения по методу Монте-Карло. Так названы методы, использующие случайные величины, математические ожидания которых дают решение системы. Пока методы Монте-Карло не могут соревноваться с другими методами, названными выше. Поэтому мы не будем ими здесь заниматься.

§ 2. Метод исключения

Мы начнем изучение численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений с точных методов. Простейшим из таких методов является метод исключения.

С методом исключения мы сталкивались уже в обычном школьном курсе алгебры. Комбинируя каким-либо образом уравнения системы, добиваются того, что во всех уравнениях, кроме одного, будет исключено одно из неизвестных. Затем исключают другое неизвестное, третье и т. д. В результате получаем систему с треугольной или диагональной матрицей, решение которой не представляет труда. Метод исключений не вызывает каких-либо теоретических затруднений. Однако точность результата и затрачиваемое на его получение время будут во многом зависеть от организации вычислений. Этому вопросу мы и уделим основное внимание.

Рассмотрим ряд схем, осуществляющих метод исключения на примере системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned}
1,1161\,x_1+0,1254\,x_2+0,1397\,x_3+0,1490\,x_4&=1,5471,\\
0,1582\,x_1+1,1675\,x_2+0,1768\,x_3+0,1871\,x_4&=1,6471,\\
0,1968\,x_1+0,2071\,x_2+1,2168\,x_3+0,2271\,x_4&=1,7471,\\
0,2368\,x_1+0,2471\,x_2+0,2568\,x_3+1,2671\,x_4&=1,8471.
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Каждой схеме мы припишем то или иное название. Правда, эти названия не являются общепринятыми.

1. Схема Гаусса с выбором главного элемента. Если вычисления производятся не с помощью автоматических вычислительных машин, то удобно нашу систему записать в следующую схему:

№ п/п.	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1		0,11610	0,12540	0,13970	0.14900	1,54710	3,07730
2		0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3		0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	<u>1,26710</u>	1,84710	3,85490

В первом столбце мы записываем номера уравнений. Значение второго столбца будет ясно дальше. 3-й, 4-й, 5-й и 6-й столбцы содержат коэффициенты уравнений, а 7-й столбец — свободные члены. Последний столбец содержит суммы коэффициентов и свободных членов данной строки.

Выбираем теперь наибольший по модулю элемент a_{ij}. Будем называть его *главным*. В нашем случае это $a_{44} = 1{,}26710$. Он в схеме подчеркнут. Делим все элементы столбца, в котором находится главный элемент (в нашем случае a_{i4}), на главный элемент и отношения с обратным знаком помещаем в столбце m_i в той же строке, где находится делимое:

№ п/п.	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	—0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2	—0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3	—0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	<u>1,26710</u>	1,84710	3,85490

Будем теперь прибавлять к каждой из строк схемы строку, содержащую главный элемент, умноженную на соответствующее m_i. Строку, содержащую главный элемент, в дальнейшем не выписываем. Не выписываем также и столбец, в котором содержится главный элемент, так как он состоит из нулей. В нашем случае получим:

№ п/п.	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	—0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
2	—0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
3		0,15436	0,16281	<u>1,17077</u>		1,41604	2,90398

Мы вписали сюда же значения m_i, которые получатся на следующем шаге. Производим проверку правильности вычислений. Для этого складываем столбцы a_{ij} и b_i и сравниваем со столбцом s_i. Если расхождения в пределах ошибок округления, то считаем вычисления правильными. Если расхождения слишком велики, то повторяем соответствующие вычисления.

В дальнейшем поступаем с нашей таблицей, как и с предыдущей. Выбираем главный элемент (в нашем случае это будет 1,17077) и делим на него элементы того же столбца. Результаты с обратными знаками записываются в столбец m_i (у нас это уже сделано). Затем последовательно умножаем строку, из которой взят главный элемент, на m_i и складываем с соответствующими строками. Производим проверку и переходим к следующему шагу. Так продолжаем до тех пор, пока у нас не останется одна строка. В нашем примере будем иметь:

№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1 2	−0,07296	1,07381 0,10492	0,08111 1,11170			1,19746 1,20639	2,35238 2,42301
1		1,06616				1,10944	2,17560

Взяв уравнения, в которых выбирались главные элементы, получим новую систему, эквивалентную данной:

$$\left.\begin{aligned}
&1,06616\,x_1 = 1,10944,\\
&0,10492\,x_1 + 1,11170\,x_2 = 1,20639,\\
&0,15436\,x_1 + 0,16281\,x_2 + 1,17077\,x_3 = 1,41604,\\
&0,23680\,x_1 + 0,24710\,x_2 + 0,25680\,x_3 + 1,26710\,x_4 = 1,84710.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Матрица новой системы треугольная. Решение такой системы не встретит затруднений. Находим:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1,10944}{1,06616} = 1,04059,\\
x_2 &= \frac{1,20639 - 0,10492\cdot 1,04059}{1,11170} = \frac{1,09721}{1,11170} = 0,98697,\\
x_3 &= \frac{1,41604 - 0,15436\cdot 1,04059 - 0,16281\cdot 0,98697}{1,17077} = \frac{1,09473}{1,17077} = 0,93505,\\
x_4 &= \frac{1,84710 - 0,23680\cdot 1,04059 - 0,24710\cdot 0,98697 - 0,25680\cdot 0,93505}{1,26710} =\\
&= \frac{1,11669}{1,26710} = 0,88130.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Приведенную нами схему исключения неизвестных назовем *схемой исключения Гаусса с выбором главного элемента.* Сам процесс исключения называют *прямым ходом,* а решение системы с треугольной матрицей — *обратным ходом.* При практическом использовании схемы Гаусса не следует, конечно, разрывать отдельные этапы, как это сделано нами для облегчения объяснений. Не следует также выписывать и окончательную систему уравнений.

Контроль обратного хода осуществляется с помощью столбца s_i. Если в окончательной системе заменить b_i на s_i, то должны получить вместо x_i величины $x_i + 1$. Проверка полученных результатов может быть сделана также путем подстановки их в исходную систему уравнений. В нашем случае получим последовательно в левых частях равенства: 1,54711; 1,64712; 1,74710; 1,84711. Как мы видим, расхождения между правыми и левыми частями не превосходят двух единиц пятого десятичного знака, что нужно считать удовлетворительным.

Смысл выбора главного элемента состоит в том, чтобы сделать возможно меньшими m_i и тем самым уменьшить вычислительную погрешность.

Как известно, при работе на цифровых машинах, да и при работе вручную, наибольшее количество времени затрачивается на производство действий умножения и деления. Поэтому важно знать, сколько действий умножения и деления потребуется для решения заданной системы. Если система имеет порядок n, то после выбора главного элемента нужно произвести $n-1$ делений для определения коэффициентов m_i. Затем нужно умножить строку, содержащую главный элемент, на каждый из этих множителей. Для этого потребуется $(n+1)(n-1)=n^2-1$ умножений. Таким образом, первый шаг работы по схеме Гаусса требует n^2+n-2 умножений и делений. Следующий шаг потребует $(n-1)^2+(n-1)-2$ таких операций и т. д. Всего до обратного хода нужно произвести

$$[n^2+n-2]+[(n-1)^2+(n-1)-2]+\ldots$$
$$\ldots+[1^2+1-2]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-2n \qquad (4)$$

операций умножения и деления. Для обратного хода потребуется

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (5)$$

операций умножения и деления, если не производить контроля с столбцом s_i. Столько же операций потребуется при использовании такого контроля. Итак, всего на решение системы n уравнений по схеме Гаусса с выбором главного элемента и текущим контролем потребуется

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}-2n+n(n+1)=\frac{n}{3}(n^2+6n-1) \qquad (6)$$

операций умножения и деления.

2. Компактная схема Гаусса. Придумано много различных видоизменений схемы Гаусса, дающих те или иные преимущества. Приведем одну такую схему. Рассмотрим сначала систему четырех уравнений общего вида:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+a_{13}^{(0)}x_3+a_{14}^{(0)}x_4&=a_{15}^{(0)},\\
a_{21}^{(0)}x_1+a_{22}^{(0)}x_2+a_{23}^{(0)}x_3+a_{24}^{(0)}x_4&=a_{25}^{(0)},\\
a_{31}^{(0)}x_1+a_{32}^{(0)}x_2+a_{33}^{(0)}x_3+a_{34}^{(0)}x_4&=a_{35}^{(0)},\\
a_{41}^{(0)}x_1+a_{42}^{(0)}x_2+a_{43}^{(0)}x_3+a_{44}^{(0)}x_4&=a_{45}^{(0)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Исходные данные, промежуточные и окончательные результаты будем записывать в следующую схему:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & a_{14}^{(0)} & a_{15}^{(0)} \\
a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & a_{24}^{(0)} & a_{25}^{(0)} \\
a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & a_{34}^{(0)} & a_{35}^{(0)} \\
a_{41}^{(0)} & a_{42}^{(0)} & a_{43}^{(0)} & a_{44}^{(0)} & a_{45}^{(0)} \\
\hline
b_{11}^{(1)} & c_{12}^{(2)} & c_{13}^{(2)} & c_{14}^{(2)} & c_{15}^{(2)} \\
b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(3)} & c_{23}^{(4)} & c_{24}^{(4)} & c_{25}^{(4)} \\
b_{31}^{(1)} & b_{32}^{(3)} & b_{33}^{(5)} & c_{34}^{(6)} & c_{35}^{(6)} \\
b_{41}^{(1)} & b_{42}^{(3)} & b_{43}^{(5)} & b_{44}^{(7)} & c_{45}^{(8)} \\
\hline
x_1^{(12)} & x_2^{(11)} & x_3^{(10)} & x_4^{(9)} &
\end{array}
$$

Верхнюю половину схемы мы отводим для коэффициентов и свободных членов исходной системы, а в нижней половине будут помещаться промежуточные и окончательные результаты. Верхний индекс показывает порядок получения промежуточных и окончательных результатов.

Величины $b_{i1}^{(1)}$ просто совпадают с соответствующими величинами $a_{i1}^{(0)}$ и выписываются здесь лишь для удобства пользования схемой.

Величины $c_{1j}^{(2)}$ вычисляем по формулам

$$c_{1j}^{(2)} = \frac{a_{1j}^{(0)}}{b_{11}^{(1)}} \qquad (j = 2,\ 3,\ 4,\ 5). \tag{8}$$

При этом уравнение

$$x_1 + c_{12}^{(2)} x_2 + c_{13}^{(2)} x_3 + c_{14}^{(2)} x_4 = c_{15}^{(2)} \tag{9}$$

эквивалентно первому уравнению исходной системы.

После этого вычисляем величины $b_{i2}^{(3)}$ $(i > 1)$ по формулам

$$b_{i2}^{(3)} = a_{i2}^{(0)} - b_{i1}^{(1)} c_{12}^{(2)} \qquad (i = 2,\ 3,\ 4). \tag{10}$$

Таким образом, $b_{i2}^{(3)}$ будут являться коэффициентами при x_2 во втором, третьем и четвертом уравнениях системы после исключения в них неизвестного x_1 с помощью уравнения (9).

Следующим этапом будет являться получение коэффициентов и правой части второго уравнения после исключения из него указанным выше способом неизвестного x_1 и последующего деления на коэффициент при x_2. Очевидно, эти величины $c_{2j}^{(4)}$ будут определяться по формулам:

$$c_{2j}^{(4)} = \frac{a_{2j}^{(0)} - b_{21}^{(1)} c_{1j}^{(2)}}{b_{22}^{(3)}} \qquad (j = 3,\ 4,\ 5). \tag{11}$$

Таким образом, после преобразования второе уравнение примет вид

$$x_2 + c_{23}^{(4)} x_3 + c_{24}^{(4)} x_4 = c_{25}^{(4)}. \tag{12}$$

Далее будем исключать неизвестное x_2 из третьего и четвертого уравнений. Опять сначала подсчитываем коэффициенты при x_3 в третьем и четвертом уравнениях. Они определятся по формулам:

$$b_{i3}^{(5)} = a_{i3}^{(0)} - b_{i1}^{(1)} c_{13}^{(2)} - b_{i2}^{(3)} c_{23}^{(4)} \qquad (i = 3,\ 4). \tag{13}$$

Первые два члена правой части этой формулы дают коэффициенты при x_3 третьего и четвертого уравнений после исключения x_1, а после вычитания последнего члена получим результат исключения x_2.

Коэффициенты и правая часть третьего уравнения после деления на коэффициент при x_3 примут вид

$$c_{3j}^{(6)} = \frac{a_{3j}^{(0)} - b_{31}^{(1)} c_{1j}^{(2)} - b_{32}^{(3)} c_{2j}^{(4)}}{b_{33}^{(5)}} \qquad (j = 4,\ 5), \tag{14}$$

а само это уравнение запишется в виде

$$x_3 + c_{34}^{(6)} x_4 = c_{35}^{(6)}. \tag{15}$$

Остается еще исключить x_3 из четвертого уравнения. При этом коэффициент при x_4 в нем примет вид

$$b_{44}^{(7)} = a_{44}^{(0)} - b_{41}^{(1)} c_{14}^{(2)} - b_{42}^{(3)} c_{24}^{(4)} - b_{43}^{(5)} c_{34}^{(6)}, \tag{16}$$

а свободный член после исключения x_3 и деления на коэффициент при x_4 будет

$$c_{45}^{(8)} = \frac{a_{45}^{(0)} - b_{41}^{(1)} c_{15}^{(2)} - b_{42}^{(3)} c_{25}^{(4)} - b_{43}^{(5)} c_{35}^{(6)}}{b_{44}^{(7)}}. \tag{17}$$

При этом четвертое уравнение запишется в виде

$$x_4 = c_{45}^{(8)}. \tag{18}$$

Нетрудно заметить, что для системы n уравнений при отыскании величин $b_{ij}^{(2j-1)}$, $c_{jl}^{(2j)}$ следует поочередно использовать формулы:

$$b_{ij}^{(2j-1)} = a_{ij}^{(0)} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}^{(2k-1)} c_{kj}^{(2k)} \qquad (i = j,\ j+1,\ \ldots,\ n), \tag{19}$$

$$c_{jl}^{(2j)} = \frac{a_{jl}^{(0)} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^{(2k-1)} c_{kl}^{(2k)}}{b_{jj}^{(2j-1)}} \qquad (l = j+1,\ j+2,\ \ldots,\ n+1). \tag{20}$$

Если проследить ход вычислений по схеме, то легко обнаружить закон образования величин $b_{ij}^{(2j-1)}$ и $c_{jl}^{(2j)}$.

Неизвестные $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ находятся последовательно из системы уравнений

$$x_i + \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}^{(2i)} x_k = c_{i,n+1}^{(2i)} \qquad (i = n, n-1, \ldots, 1). \tag{21}$$

Будем называть эту схему *компактной схемой Гаусса*. При решении системы n уравнений по компактной схеме Гаусса требуется произвести столько же умножений и делений, как и в схеме главных элементов. Однако она требует меньше записей. Схема допускает такой же контроль, как и ранее.

Так как вычисления по компактной схеме Гаусса более систематизированы, чем по схеме главных элементов, то процесс вычислений легче программируется для автоматических машин. С другой стороны, вычисления по этой схеме могут привести к большой потере точности. Кроме того, для того чтобы процесс вычислений был осуществим, нужно требовать отличие от нуля всех $b_{ii}^{(2i-1)}$.

Приведем результаты вычислений при решении приведенной в начале параграфа системы (1) по компактной схеме Гаусса:

1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
1,11610	0,11236	0,12517	0,13350	1,38617	2,75720
0,15820	1,14972	0,13655	0,14437	1,24187	2,52279
0,19680	0,18499	1,16691	0,14921	1,06655	2,21576
0,23680	0,22049	0,19705	1,17425	0,88130	1,88130
1,04058	0,98696	0,93505	0,88130		

Применяя компактную схему Гаусса, мы элементарными преобразованиями переводим матрицу A системы в верхнюю треугольную матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12}^{(2)} & c_{13}^{(2)} & c_{14}^{(2)} & \ldots & c_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & c_{23}^{(4)} & c_{24}^{(4)} & \ldots & c_{2n}^{(4)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Интересно отметить, что если рассмотреть еще матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(3)} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}^{(1)} & b_{n2}^{(3)} & b_{n3}^{(5)} & b_{n4}^{(7)} & \ldots & b_{n,n}^{(2n-1)} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

также получающуюся в процессе наших вычислений, то имеет место равенство

$$A = BC. \tag{24}$$

Это равенство просто получается, если использовать формулы (19) и (20). Так как B^{-1} снова треугольная матрица, то прямой ход при решении системы уравнений по компактной схеме Гаусса эквивалентен умножению системы на треугольную матрицу.

3. Обращение матрицы. Равенство (24) можно использовать для *обращения матриц*. Эта задача важна как сама по себе, так и в тех случаях, когда приходится решать много систем с одной и той же матрицей, но с различными правыми частями.

Перепишем (24) следующим образом:

$$A^{-1}B = C^{-1}, \quad CA^{-1} = B^{-1}. \tag{25}$$

Матрица C^{-1} будет верхней треугольной, и ее диагональные элементы равны единице. Поэтому если обозначить элементы матрицы A^{-1} через d_{ij}, то первое из равенств (25) даст $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений для определения d_{ij}:

$$\left.\begin{array}{rcccc}
i = & 1 & 2 & 3 \ldots n, \\
\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij} b_{j1}^{(1)} = & 1 & 0 & 0 \ldots 0, \\
\sum\limits_{j=2}^{n} d_{ij} b_{j2}^{(3)} = & & 1 & 0 \ldots 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
d_{nn} b_{nn}^{(2n-1)} = & & & 1.
\end{array}\right\} \tag{26}$$

Так как матрица B^{-1} нижняя треугольная, то второе из равенств (25) даст еще $\frac{n(n-1)}{2}$ уравнений для отыскания d_{ij}:

$$\left.\begin{array}{rccc}
j = & 2 & 3 \ldots n, \\
d_{1j} + \sum\limits_{i=2}^{n} d_{ij} c_{1i}^{(2)} = & 0 & 0 \ldots 0, \\
d_{2j} + \sum\limits_{i=3}^{n} d_{ij} c_{2i}^{(4)} = & & 0 \ldots 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
d_{n-1,n} + d_{nn} c_{n-1,n}^{(2n-2)} = & & 0.
\end{array}\right\} \tag{27}$$

Таким образом, мы получили n^2 уравнений для определения неизвестных элементов d_{ij} обратной матрицы A^{-1}. Решение системы (26) — (27) не представляет труда. Полагаем в каждом из уравнений (26) $i = n$ и находим последовательно $d_{n,n}, d_{n,n-1}, \ldots, d_{n,1}$. Затем из уравнений (27) при $j = n$ находим $d_{n-1,n}, d_{n-2,n}, \ldots, d_{1,n}$. Потом снова возвращаемся к уравнениям (26) и, полагая в них $i = n - 1$, находим $d_{n-1,n-1}, d_{n-1,n-2}, \ldots, d_{n-1,1}$. После этого из уравнений (27) при $j = n - 1$ находим $d_{n-2,n-1}, \ldots, d_{1,n-1}$. Так, переходя поочередно от системы (26) к (27) и наоборот, мы в конце концов найдем все d_{ij}. Вычислительная схема остается прежней, только вместо одной строки для неизвестных x_i у нас будет n строк для матрицы A^{-1}.

Если воспользоваться результатами, полученными при решении примера (1) по компактной схеме Гаусса, то без труда найдем, что матрица, обратная к матрице данной системы, будет такова:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}93794 & -0{,}06844 & -0{,}07961 & -0{,}08592 \\ -0{,}08852 & 0{,}90599 & -0{,}09919 & -0{,}10560 \\ -0{,}11135 & -0{,}11697 & 0{,}87842 & -0{,}12707 \\ -0{,}13546 & -0{,}14018 & -0{,}14381 & 0{,}85161 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Интересно заметить, что при этом оказывается

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0{,}99999 & 0{,}00000 & 0{,}00000 & 0{,}00000 \\ 0{,}00000 & 1{,}00001 & 0{,}00000 & -0{,}00001 \\ 0{,}00000 & 0{,}00000 & 0{,}99999 & 0{,}00000 \\ 0{,}00000 & 0{,}00000 & 0{,}00000 & 1{,}00000 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Точность вполне удовлетворительна. Если бы точность нас не удовлетворила, то для уточнения можно было бы применить какой-либо метод последовательного приближения, о чем будем говорить позже.

4. Вычисление определителей. Схемы Гаусса можно применить для вычисления определителей. При этом никаких новых трудностей не возникает, поэтому только кратко опишем для примера применение для этой цели схемы Гаусса с выбором главного элемента.

Анализируя схему Гаусса с выбором главного элемента для решения системы уравнений, легко убедиться, что при выполнении прямого хода мы совершаем такие преобразования матрицы коэффициентов исходной системы, при которых величина ее определителя не изменяется. После завершения прямого хода получается система с такой матрицей, которую путем перестановки строк и столбцов можно преобразовать в треугольную матрицу, причем на главной диагонали будут стоять наши главные элементы. Следовательно, определитель матрицы исходной системы только знаком может отличаться от произведения главных элементов. С каким знаком нужно брать это произведение, легко сообразить, не выполняя преобразование матрицы к треугольному виду.

Эти рассуждения показывают, что для вычисления определителя по схеме Гаусса с выбором главного элемента нужно в точности повторить прямой ход для решения системы по этой схеме (не выполняя действий со столбцом свободных членов), а затем взять с соответствующим знаком произведение главных элементов.

5. Схема Жордана. Когда мы решали систему по схеме Гаусса, то на каждом шаге число уравнений уменьшалось на единицу. Будем теперь оставлять все уравнения, но при выборе главного элемента не будем учитывать коэффициенты тех уравнений, из которых уже выбирался главный элемент. Получим новую схему, которую будем называть *схемой Жордана*. Так как здесь нет по существу ничего нового, то мы лишь проиллюстрируем эту схему на том же самом примере:

№ п/п.	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	−0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2	−0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3	−0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
1	−0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
2	−0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
4	−0,21934	0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
1	−0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
2		0,10492	1,11170			1,20639	2,42301
3	−0,14645	0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
4	−0,19015	0,20294	0,21139		1,26710	1,53651	3,21794
1		1,06616				1,10944	2,17560
2	−0,09841	0,10492	1,11170			1,20639	2,42301
3	−0,13037	0,13899		1,17077		1,23936	2,54912
4	−0,17163	0,18299			1,26710	1,30711	2,75720
1		1,06616				1,10944	2,17560
2			1,11170			1,09721	2,20891
3				1,17077		1,09472	2,26549
4					1,26710	1,11670	2,38380

Отсюда без труда находим:

$$x_1 = 1{,}04059; \quad x_2 = 0{,}98697; \quad x_3 = 0{,}93504; \quad x_4 = 0{,}88130. \tag{30}$$

При решении по схеме Жордана система приводится к диагональному виду и обратный ход значительно облегчается. Всего для решения системы n уравнений с текущим контролем по схеме Жордана требуется произвести

$$\frac{n^3 + 4n^2 - n}{2} \tag{31}$$

операций умножения и деления.

Каждый шаг прямого хода по схеме Жордана эквивалентен умножению системы уравнений слева на матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \alpha_{1i} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \alpha_{2i} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{i+1,\, i} & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n,\, i} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

если не выбирать главный элемент, а идти последовательно, исключая $x_1, x_2, \ldots$ с помощью первого, второго, третьего, ... уравнений.

6. Схема без обратного хода. Приведем еще одну схему исключения, при которой вообще не требуется обратного хода. Пусть дана система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\} \tag{33}$$

Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Подберем постоянные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ так, чтобы после умножения первой строки матрицы на y_1, второй на $y_2, \ldots$, n-й на y_n и сложения их с последней строкой в этой последней все элементы, кроме крайнего правого, обратились бы в нули. Таким образом, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ \ldots\ +a_{n1}y_n=1, \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ \ldots\ +a_{n2}y_2=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ \ldots\ +a_{nn}y_n=0. \end{array}\right\} \tag{35}$$

Умножая обе части последних равенств последовательно на $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$, где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — решение исходной системы, и складывая их, получим:

$$\begin{aligned} &y_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1n}x_n)+ \\ &+y_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{2n}x_n)+ \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+y_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \ldots\ +a_{nn}x_n)=x_1. \end{aligned} \tag{36}$$

Но выражения в скобках равны последовательно $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Таким образом,

$$b_1y_1+b_2y_2+\ \ldots\ +b_ny_n=x_1, \tag{37}$$

т. е. правый крайний элемент последней строки будет равен x_1. Совершенно аналогично, если бы мы взяли -1 во втором столбце последней строки, то крайний правый элемент последней строки стал бы равен x_2. Такие же рассуждения можно провести, беря -1 в любом из первых n столбцов. Рассмотрим теперь клеточную матрицу

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & b \\ \cdot & & \cdots \\ -I & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где A — матрица коэффициентов системы, b — столбец свободных членов, I — единичная матрица и 0 — столбец нулей. Пусть нам удалось путем прибавления к последним n строкам этой матрицы линейных комбинаций n первых строк сделать минус единичную матрицу нулевой. Тогда в силу наших рассуждений нулевой столбец обратится в столбец неизвестных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Схема, которую мы сейчас проиллюстрируем на том же примере, и будет реализацией указанного процесса. За основу будет взята схема Гаусса с выбором главного элемента. Будем называть данную схему *схемой без обратного хода.*

№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	— 0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2	— 0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,36670
3	— 0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
IV	0,78920				— 1		— 1
1	— 0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
2	— 0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
IV	— 0,17311	0,18688	0,19501	0,20267		1,45773	2,04229
III	0,85414			— 1			— 1
1	— 0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
2		0,10492	1,11170			1,20639	2,42301
IV	— 0,15007	0,16016	0,16683			1,21260	1,53959
III	— 0,12509	0,13185	0,13906			1,20950	1,48041
II	0,89952		— 1				— 1
1		1,06616				1,10944	2,17560
IV	— 0,13545	0,14441				1,03156	1,17597
III	— 0,11136	0,11873				1,05859	1,17732
II	— 0,08852	0,09438				1,08517	1,17955
I	0,93795	— 1					— 1
IV						0,88129	0,88128
III						0,93504	0,93505
II						0,98696	0,98697
I						1,04060	1,04060

Значения неизвестных, содержащиеся в последних четырех строках. близки к найденным ранее. При решении системы уравнений по схеме без обратного хода с контрольным столбцом требуется произвести

$$\frac{n^3+5n^2}{2} \tag{39}$$

операций умножения и деления.

Приведенная схема допускает очевидные обобщения. Так, если вместо (38) взять

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -C & d \end{array}\right), \tag{40}$$

где C — произвольная квадратная матрица и d — произвольный столбец, то, действуя по схеме без обратного хода, мы получим на месте столбца d столбец $CA^{-1}b+d$.

Если же рассмотреть матрицу

$$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline -C & 0 \end{array}\right), \tag{41}$$

где B — произвольная матрица и 0 — матрица нулей, то нашим процессом мы придем к матрице $CA^{-1}B$. В частности, если взять матрицу

$$\left(\begin{array}{c:c} A & I \\ \hdashline -I & 0 \end{array}\right), \tag{42}$$

то мы придем к матрице A^{-1}.

§ 3. Метод квадратного корня

В том случае, когда матрица A симметрическая, в приведенных ранее схемах можно сделать ряд упрощений. Мы не будем здесь останавливаться на этих довольно простых вопросах, а изложим вместо этого очень удобный для симметрических матриц *метод квадратного корня.*

Пусть данная нам система записана в виде

$$Ax=b, \tag{1}$$

где A — квадратная симметрическая матрица, b — вектор-столбец из правых частей системы и x — вектор-столбец неизвестных. Решение системы (1) будем осуществлять в два этапа. На первом этапе представим матрицу A в виде

$$A=LL', \tag{2}$$

где L — нижняя треугольная матрица и L' — транспонированная по отношению к L матрица. Такое представление всегда возможно. Чтобы не осложнять записей, ограничимся рассмотрением систем четвертого порядка. Будем разыскивать такие α_{ij}, что

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{43} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{bmatrix}. \tag{3}$$