

# Чисельні методи

Нікіта Скибицький

30 січня 2019 р.

## Зміст

<b>1</b>	<b>Обернена інтерполяція</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Чисельне диференціювання</b>	<b>2</b>
2.1	Точки підвищеної точності . . . . .	4
2.2	Похибка через ряд Тейлора . . . . .	6
2.3	Метод невизначених коефіцієнтів . . . . .	7
2.4	Обчислювальна стійкість формул чисельного диференцію-	
	вання . . . . .	8
2.4.1	Приклад Адамара . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Апроксимація функцій</b>	<b>10</b>
3.1	Елементи найкращого наближення . . . . .	10

## 1 Оборнена інтерполяція

**Задача 1.1.** Застосовуючи обернену інтерполяцію розв'язати рівняння

$$\ln(x) + x - 2 = 0,$$

та оцінити похибку.

**Розв'язок.** Нескладно переконатися що на проміжку  $[1, 2]$  існує і єдиний розв'язок рівняння бо  $f(1) = -1 < 0$ ,  $f(2) = \ln 2 > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$  на  $[0, +\infty)$ . Знаходячи розділені різниці знаходимо все що хочемо (наближаємо лінійною).

Перевагою поліному Ньютона є те, що ми можемо додати ще один вузел не обов'язково впорядковуючи вузли за зростанням, тоді можна буде

не переобчислювати частину (в загальному випадку більшу частину) таблиці розділених різниць.

Нагадаємо, що похибка прямої інтерполяції має вигляд

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x).$$

Знайдемо тепер формулу для похибки для (лінійної) оберненої інтерполяції:

$$|r_1(y)| \leq \frac{M_2}{2!} \cdot \omega_1(y) = \frac{M_2}{2!} \cdot (y - y_0) \cdot (y - y_1),$$

де  $M_2 = \max_{y \in [y_0, y_1]} \left| \frac{d^2 x}{dy^2} \right|$ , де  $\frac{dx}{dy} = \left( \frac{dy}{dx} \right)$ .

Навчимося також брати  $\frac{d^n x}{dy^n}$  знаючи  $\frac{dy}{dx}$ .

## 2 Чисельне диференціювання

Ми розглянемо постановку задачі та ідеологію розв'язання задачі.

Нехай задані точки  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = \overline{0, n}$ . У цих точках задані значення, які ми будемо позначати одним з трьох способів:  $y_i = f_i = f(x_i)$ .

Задача полягає у тому, що **необхідно** знайти значення  $k$ -ої похідної  $f^{(k)}(x)$ .

Задачу будемо розв'язувати базуючись на інтерполяційному підході: подамо функцію  $f(x)$  у вигляді інтерполяційного поліному

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) \quad (2.1)$$

Тут  $P_n$  – інтерполяційний поліном Ньютона, а  $r_n$  – залишковий член. Подамо залишковий член у вигляді

$$r_n(x) = f(x, x_0, \dots, x_n) \cdot \omega_n(x), \quad (2.2)$$

де

$$\omega_n(x) = (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n). \quad (2.3)$$

Тоді, виходячи з (2.1), будемо мати

$$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + r_n^{(k)}(x), \quad k \leq n. \quad (2.4)$$

Зрозуміло, що  $k \leq n$ , бо інакше у нас недостатньо даних для проведення інтерполяції.

Таким чином ми за наближене значення  $k$ -ої похідної будемо брати  $k$ -у похідну від інтерполяційного поліному:

$$f^{(n)}(x) \approx P_n^{(k)}(x). \quad (2.5)$$

Оцінимо похибку  $r_n^{(k)}(x)$ : виходячи з (2.2) можемо записати

$$r_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k C_k^j \cdot f^{(j)}(x, x_0, \dots, x_n) \cdot \omega^{(k-j)}(x). \quad (2.6)$$

Тоді, за формулою зв'язку розділеної різниці і похідної (нагадаємо її для тих, хто не пам'ятає):

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

з (2.6) маємо

$$f^{(j)}(x, x_0, \dots, x_n) = j! \cdot f\left(\underbrace{x, \dots, x}_j, x_0, \dots, x_n\right) = \frac{j! \cdot f^{(n+j+1)}(\xi)}{(n+j+1)!} \quad (2.7)$$

Підставимо це в (2.6):

$$r_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)! \cdot (n+j+1)!} \cdot f^{(n+j+1)}(\xi_j) \cdot \omega^{(k-j)}(x). \quad (2.8)$$

Формула (2.8) дасть нам оцінку похибки:

$$|r_n^{(k)}(x)| \leq M \cdot \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)! \cdot (n+j+1)!} \cdot \omega^{(k-j)}(x), \quad (2.9)$$

де

$$M = \max_{[a,b]} \max_{j=0,k} |f^{(n+j+1)}(x)|$$

Давайте тепер з цієї оцінки отримаємо щось хороше, а то зараз на неї неприємно дивитися. Нехай точки  $x_i$  рівновіддалені:  $x_i = x_0 + ih$ . З'ясуємо який порядок по  $h$  матиме похибка. Тоді

$$x - x_i \approx O(h),$$

тому

$$\omega_n(x) = O(h^{n+1}),$$

а також

$$\omega'_n(x) = O(h^n).$$

Звідси, за індукцією,

$$\omega_n^{(k)}(x) = O(h^{n+1-k}).$$

Повернемося до формули (2.8). Виходячи з останніх зауважень з'ясуємо який же порядок по  $h$  матиме  $r_n^{(k)}$ . Зрозуміло що найнижчий (тобто найгірший) порядок буде у доданку суми де  $j = 0$ , а саме:

$$r_n^{(k)}(x) \approx O(h^{n+1-k}). \quad (2.10)$$

Розглянемо ще одну особливість, таку як точки підвищеної точності.

## 2.1 Точки підвищеної точності

Давайте тепер формулу (2.8) запишемо у двох частинах, окремо для  $j = 0$ :

$$\begin{aligned} r_n^{(k)}(x) = & \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} \cdot \omega_n^{(k)}(x) + \\ & + \sum_{j=1}^k \frac{k!}{(k-j)! \cdot (n+j+1)!} \cdot f^{(n+j+1)}(\xi_j) \cdot \omega^{k-j}(x) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

З формули (2.1.1) бачимо наступне: перший доданок має порядок  $O(h^{n+1-k})$ , а для другого доданку “найгіршим” випадком буде  $j = 1$ , причому його порядком буде  $O(h^{n+2-k})$ , звідки випливає таке спостереження.

Нехай  $\bar{x} : \omega_n^{(k)}(\bar{x}) = 0$ , тоді

$$r_n^{(k)}(\bar{x}) \approx O(h^{n+k-2}). \quad (2.1.2)$$

Такі точки називаються *точками підвищеної точності*.

**Приклад 1.** Побудувати формулу чисельного диференціювання для  $n = 1$ ,  $k = 1$  і знайти точки підвищеної точності.

Оскільки  $n = 1$ , то

$$P_1(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{f_1 - f_0}{h} \quad (2.1.3)$$

де  $h = x_1 - x_0$ .

Тоді

$$P'_1(x) = \frac{f_1 - f_0}{h}. \quad (2.1.4)$$

Таким чином для  $x \in [x_0, x_1]$  похідну можна знаходити за формулою (2.1.4).

Знайдемо тепер похибку. За формулою (2.8) маємо

$$\begin{aligned} r'_1(x) &= \frac{f''(\xi_0)}{2!} \cdot \omega'_1(x) + \frac{f'''(\xi_1)}{3!} \cdot \omega_1(x) = \\ &= \frac{f''(\xi_0)}{2} \cdot (2x - x_0 - x_1) + \frac{f'''(\xi_1)}{6} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Отже порядок формули буде  $O(h)$ , тобто  $r'_1(x) \approx O(h)$ ,  $f \in C^{(2)}$ .

Знайдемо точки підвищеної точності. Нехай  $\omega'_1(x) = 0$ , тоді

$$\bar{x} = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad (2.1.6)$$

і похибка має порядок  $O(h^2)$ ,

$$r'_1(\bar{x}) = -\frac{h^2}{24} \cdot f'''(\xi_1), \quad (2.1.7)$$

або ж

$$|r'_1(\bar{x})| \leq \frac{M_3 \cdot h^2}{24}, \quad (2.1.8)$$

де  $M_3 = \max_{[x_0, x_1]} |f'''(x)|$ .

Таким чином, похідну на проміжку  $x \in [x_0, x_1]$  можна знаходити за формулою (2.1.4). Переведемо тепер цю формулу на проміжок  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ , отримаємо

$$f'(x) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \triangleq f_{\bar{x}, i}. \quad (2.1.9)$$

Її називають *різницевою похідною назад в точці  $x_i$* , або ще *лівою різницевою похідною*.

Якщо ж  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , то

$$f'(x) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \triangleq f_{x, i}. \quad (2.1.10)$$

Її називають *різницевою похідною вперед в точці  $x_i$* , або ще *правою різницевою похідною*.

**Задача 2.1.** Побудувати формулу чисельного диференціювання для  $n = 2$ ,  $k = 1$  для випадку рівновіддалених вузлів. Знайти точки підвищеної точності.

**Зауваження.** Для формул (2.1.9) та (2.1.10) похибка має порядок  $O(h)$ ,  $r'_1(x) \approx O(h)$ .

**Задача 2.2.** Нехай тепер

а) 
$$f'(x_i) \approx f_{\bar{x},i} \quad (2.1.11)$$

б) 
$$f'(x_i) \approx f_{x,i} \quad (2.1.12)$$

в) 
$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \quad (2.1.13)$$

Визначити похибку чисельного диференціювання для формул (2.1.11)-(2.1.13).

**Вказівка.** Розв'язок можна безпосередньо отримати з формули (2.1.5) якщо підставити замість  $x$  потрібну точку ( $x_0$ ,  $x_1$ , або  $\frac{x_0+x_1}{2}$  відповідно).

Розглянемо ще один підхід як можна знайти похибку чисельного диференціювання.

## 2.2 Похибка через ряд Тейлора

**Приклад 2.** Для рівновіддалених точок побудувати формулу чисельного диференціювання для  $n = 2$ ,  $k = 2$  та визначити похибку цієї формули за допомогою розвинення в ряд Тейлора:

$$P_2(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{f_1 - f_0}{2} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}.$$

Тоді будемо мати, що

$$P_2''(x) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}. \quad (2.2.1)$$

Перепишемо тепер формулу (2.2.1) для довільного вузла  $x$ :

$$P_2''(x) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \triangleq f_{\bar{x}x,i}. \quad (2.2.2)$$

Тоді, для формули (2.2.2) матимемо

$$\begin{aligned} r_2''(x) &= f''(x) - \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} = \\ &= f''(x) - \frac{1}{h^2} \left( f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{6}f'''_i + \frac{h^4}{24}f^{(4)}_i - 2f_i + \right. \\ &\quad \left. + f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i - \frac{h^3}{6}f'''_i + \frac{h^4}{24}f^{(4)}_i \right) + O(h^4) = \\ &= f''(x) - f''(x_i) - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_i) + O(h^4). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$r_2''(x_i) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)} + O(h^4) \approx O(h^2).$$

Також зауважимо, що (2.2.2) визначає *другу різницеву похідну за трьома точками* і позначається  $f_{\bar{x}x,i}$ .

**Задача 2.3.** За допомогою формули чисельного диференціювання для  $n = 2$ ,  $k = 1$  знайти похідну в точці  $x_i + \frac{h}{2}$ .

## 2.3 Метод невизначених коефіцієнтів

Нехай задана сіткова функція  $y = f(x)$ , у вузлах  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Побудуємо формулу для похідної:

$$y^{(k)}(x_i) \approx C_0 \cdot y_0 + C_1 \cdot y_1 + \dots + C_n \cdot y_n = \sum_{k=0}^n C_k \cdot y(x_k). \quad (2.3.1)$$

Запишемо тоді формулу для похибки:

$$r_n^{(k)} = y^{(k)}(x_i^\alpha) - \sum_{k=0}^n C_k \cdot x_k^\alpha = 0. \quad (2.3.2)$$

Підставляючи  $\alpha = \overline{0, n}$  отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $C_i$ .

**Приклад 3.** Побудувати формулу чисельного диференціювання у точці  $x_1$  методом невизначених коефіцієнтів для  $n = 3$  за значеннями  $y_i$  у рівновіддалених вузлах  $x_i = x_0 + ih$ .

**Розв’язок.**  $n = 3$ , тому розглянемо функції  $(x - x_0)^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . Для точки  $x_1$  маємо:

$$y'(x_1) = C_0 \cdot y_0 + C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + C_3 \cdot y_3.$$

З (2.3.2)

$$C_0 \cdot (x_0 - x_0)^\alpha + C_1 \cdot (x_1 - x_0)^\alpha + C_2 \cdot (x_2 - x_0)^\alpha + C_3 \cdot (x_3 - x_0)^\alpha = ((x - x_0)^\alpha)|_{x=x_1}. \quad (2.3.3)$$

**Зауваження.** Коли  $y(x) = x^\alpha$ :

$$(x_i^\alpha)^{(k)} - \sum_{i=0}^n C_k \cdot x_k^\alpha = 0, \quad \alpha = \overline{0, n} \quad (2.3.4)$$

Звідси отримуємо систему

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 \cdot h + C_2 \cdot (2h) + C_3 \cdot (3h) = 1, \\ C_1 \cdot h^2 + C_2 \cdot (2h)^2 + C_3 \cdot (3h)^2 = 2h, \\ C_1 \cdot h^3 + C_2 \cdot (2h)^3 + C_3 \cdot (3h)^3 = 3h^2. \end{cases}$$

Розв’язуючи її знаходимо

$$C_0 = \frac{1}{6h} \cdot (-2), \quad C_1 = \frac{1}{6h} \cdot (-3), \quad C_2 = \frac{1}{6h} \cdot (6), \quad C_3 = \frac{1}{6h} \cdot (-1),$$

що дає наступну формулу

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1} \approx \frac{-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3}{6h}.$$

## 2.4 Обчислювальна стійкість формул чисельного диференціювання

Сьогодні ми будемо ще говорити про таку річ як наближення функцій. Ситуація наступна: якщо у нас вхідні дані для сіткової функції задані з деякою похибкою. Як ця точність буде впливати на точність формули чисельного диференціювання



### 2.4.1 Приклад Адамара

Розглянемо довільну функцію  $f(x)$  і модифікуємо її наступним чином:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \frac{1}{n} \cdot \sin(\omega x),$$

де  $n \rightarrow \infty$  – параметр. Тоді з одного боку матимемо

$$\|\tilde{f} - f\|_C \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

а з іншого

$$\tilde{f}'(x) = f' + \frac{\omega}{n} \cdot \cos(\omega x),$$

а тому якщо покласти  $\omega = n^2$  то отримаємо

$$\|\tilde{f}' - f'\|_C \leq \frac{\omega}{n} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Тобто задача чисельного диференціювання не є стійкою, а тому і не є коректною.

**Приклад.** Нехай  $f_i$  задані з похибкою  $\varepsilon_i$ . Визначити обчислювальну похибку наступної формули чисельного диференціювання:

$$f'(x_i) \approx f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \quad (2.4.1)$$

**Розв'язок.** Методом розвинення в ряд Тейлора знайдемо похибку апроксимації для формули (2.4.1):

$$\begin{aligned} r'_1(x_i) &= f'(x_i) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f'_i - \frac{f_i + h \cdot f'_i + \frac{h^2}{2} \cdot f''_i - f_i}{h} - O(h^2) = \\ &= -\frac{h}{2} \cdot f''_i + O(h^2) =: r'_1(x_1) + . \end{aligned}$$

Давайте тепер подивимося на загальну похибку обчислень  $R(h)$ . Зрозуміло, що це буде похибка апроксимації і ще щось, а саме:

$$\tilde{f}_i = f_i + \varepsilon_i,$$

тому насправді ми будемо обчислювати

$$\frac{\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{h} \quad (2.4.2)$$

Нехай у формулі (2.4.2) усі  $\varepsilon_i$  не перевищують заданого  $\varepsilon$ , а через  $M_2$  позначимо, як зазвичай, макс

Таким чином загальна похибка

$$R(h) = -\frac{h}{2} \cdot f''(x_i) + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{h}. \quad (2.4.3)$$

Тоді

$$|R(h)| \leq \frac{h}{2} \cdot M_2 + \frac{2\varepsilon}{h}. \quad (2.4.4)$$

Таким чином при  $h \rightarrow 0$  перший доданок  $\rightarrow 0$ , а другий  $\rightarrow +\infty$ .

Візьмемо функцію  $g(h) = \frac{h \cdot M}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}$ , тоді

$$g'(h) = \frac{M}{2} - \frac{2\varepsilon}{h^2} = 0,$$

звідки

$$h_0 = 2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{M_2}},$$

тобто оптимальне  $h$ , для якого  $g$  буде оптимальною, а саме

$$g(h_0) = 2\sqrt{\varepsilon \cdot M_2}. \quad (2.4.5)$$

Хочеться звернути увагу на те, що навіть якщо  $\varepsilon$  це похибка вводу даних до комп'ютера, то при обчисленні за нашою формулою ми будемо мати вже удвічі менше вірних цифр.

**Задача 2.4.** Знайти обчислювальну похибку наступних формули чисельного диференціювання:

1.  $f_i'' \approx f_{\bar{x}x,i}$ ;
2.  $f_i \approx f_{\bar{x},i}$ ;
3.  $f_i' \approx f_{\bar{x}x,i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ ;

### 3 Апроксимація функцій

Виникає наступне запитання: чого це ми маємо вимагати від поліному щоб він точно проходив через значення функції які ми навіть точно не знаємо? Отже постає задача: нехай  $f(x) \in R$ , хочемо побудувати функцію  $\Phi(x)$  таку що  $\|f(x) - \Phi(x)\| \leq \varepsilon$ . Виникає ще багато запитань до цієї постановки.

### 3.1 Елементи найкращого наближення

Нехай  $R$  – лінійний нормований простір. У цьому просторі виберемо систему лінійно незалежних функцій  $\{\varphi_i\}_{i=0}^n \subset R$  і позначимо наступну множину

$$M_n : \quad \Phi(x) = \sum_{i=0}^n C_i \cdot \varphi_i, \quad (3.1.1)$$

тоді

$$\Delta(d, \varphi) = \|f - \Phi\| \quad (3.1.2)$$

$f \in R, \Phi \in M_n$

$$\Delta(f) = \inf_{\Phi \in M_n} \Delta(f, \Phi) \quad (3.1.3)$$

Елемент на якому досягається інфімум позначимо  $\Phi_0$ , тобто

$$\Delta(f) = \|f - \Phi_0\| = \inf_{\Phi \in M_n} \Delta(f, \Phi). \quad (3.1.4)$$

**Визначення.** Елемент  $\Phi_0$  з  $M_n$  для якого виконується (3.1.4) називається елементом найкращого наближення елементу  $f$  простору  $R$ .

**Теорема 3.1.1.** Для будь-якого елементу  $f$  з лінійного нормованого простору  $R$  існує елемент найкращого наближення  $\Phi_0 \in M_n$ , причому множина елементів найкращого наближення є опуклою.

*Доведення.* Розглянемо функцію

$$\varphi(C_0, C_1, \dots, C_n) = \left\| f - \sum_{i=0}^n C_i \cdot \varphi_i \right\|. \quad (3.1.5)$$

Виходячи з виразу для  $|\varphi(C^1) - \varphi(C^2)|$ :

$$\begin{aligned} \left\| \left\| f - \sum_{i=0}^n C_i^1 \cdot \varphi_i \right\| - \left\| f - \sum_{i=0}^n C_i^2 \cdot \varphi_i \right\| \right\| &\leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=0}^n (C_i^1 - C_i^2) \cdot \varphi_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=0}^n |C_i^1 - C_i^2| \cdot \varphi_i \right\| \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

маємо, що функція  $\varphi$  є неперервною функцією своїх аргументів  $C_0, C_1, \dots, C_n$ .

Розглянемо множину таку, що  $\|\Phi\| > 2\|f\|$ , тоді  $\|f - \Phi\| \geq \|\Phi\| - \|f\| > 2\|f\| - \|f\| = \|f\| \geq \Delta(f)$ , де остання нерівність випливає з підстановки

$$C_0 = C_1 = \dots = C_n = 0.$$

Розглянемо другу область,  $\|\Phi\| \leq \|f\|$ . На цьому компактi ми знаємо, що  $\|\Phi\|$  досягає свого екстремуму, зокрема інфімуму, тобто елемент найкращого наближення існує.

Покажемо, тепер, що якщо  $\Phi_0$  і  $\tilde{\Phi}_0$  є елементами найкращого наближення, то і  $\Phi_2 = a \cdot \Phi_0 + b \cdot \tilde{\Phi}_0$ , де  $a + b = 1$  буде елементом найкращого наближення.

Розглянемо

$$\begin{aligned} \Delta(f) &\leq \|f - \Phi_2\| = \|(a + b) \cdot f - (a \cdot \Phi_0 + b \cdot \tilde{\Phi}_0)\| \leq \\ &\leq \|a \cdot \|f - \Phi_0\| + b \cdot \|f - \tilde{\Phi}_0\| = \\ &= a \cdot \Delta(f) + b \cdot \Delta(f) = \Delta(f), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

тобто  $\Phi_2$  – елемент найкращого наближення.  $\square$

**Теорема 3.1.2.** *Якщо  $R$  – гільбертів, то елемент найкращого наближення існує і єдиний.*

Спочатку доведемо ось що:

**Лема 3.1.1.** *якщо  $\Phi_0$  – елемент найкращого наближення, то*

$$(f - \Phi_0, \Phi) = 0 \quad \forall \Phi \in M_n. \quad (3.1.8)$$

*Доведення.* Справді, від супротивного, нехай існує  $\Phi_1$  (без обмеження загальності  $\|\Phi_1\| = 1$ ) такий, що

$$(f - \Phi_0, \Phi_1) = \alpha \neq 0 \quad (3.1.9)$$

Тоді знайдеться краще наближення. Справді, розглянемо

$$\Phi_2 = \Phi_0 + \alpha \cdot \Phi_1 \in M_n,$$

тоді

$$\begin{aligned} \|f - \Phi_2\|^2 &= (f - \Phi_0 - \alpha \cdot \Phi_1, f - \Phi_0 - \alpha \cdot \Phi_1) = \\ &= \|f - \Phi_0\|^2 - |\alpha| \cdot (f - \Phi_0, \Phi_1) - \alpha \cdot (\Phi_1, f - \Phi_0) + |\alpha|^2 \cdot \|\Phi_1\|^2 = \\ &= \|f - \Phi_0\|^2 - |\alpha|^2, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

виходить протиріччя з тим, що  $\Phi_0$  – елемент найкращого наближення, бо

$$\|f - \Phi_2\| < \Delta(f). \quad (3.1.11)$$

$\square$

Повернемося тепер до доведення теореми:

*Доведення.* Зрозуміло що він існує, бо гільбертів простір – частковий випадок лінійного нормованого простору.

Покажемо тепер що він єдиний.

□