Чисельні методи

Нікіта Скибицький

10 лютого 2019 р.

Зміст

1 Обернена інтерполяція

Задача 1.1. Застосовуючи обернену інтерполяцію розв'язати рівняння

$$\ln(x) + x - 2 = 0,$$

та оцінити похибку.

Розв'язок. Нескладно переконатися що на проміжку $[1, 2]$ існує і єдиний розв'язок рівняння бо $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = \ln 2 > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ на

$[0, +\infty)$. Знаходячи розділені різниці знаходимо все що хочемо (наближаємо лінійною).

Перевагою поліному Ньютона є те, що ми можемо додати ще один вузел не обов'язково впорядковуючи вузли за зростанням, тоді можна буде не переобчислювати частину (в загальному випадку більшу частину) таблиці розділених різниць.

Нагадаємо, що похибка прямої інтерполяції має вигляд

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x).$$

Знайдемо тепер формулу для похибки для (лінійної) оберненої інтерполяції:

$$|r_1(y)| \le \frac{M_2}{2!} \cdot \omega_1(y) = \frac{M_2}{2!} \cdot (y - y_0) \cdot (y - y_1),$$

де $M_2 = \max\limits_{y \in [y_0, y_1]} \left| \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} y^2} \right|$, де $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

Навчимося також брати $\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d} y^n}$ знаючи $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2 Чисельне диференціювання

Ми розглянемо постановку задачі та ідеологію розв'язання задачі.

Нехай задані точки $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$. У цих точках задані значення, які ми будемо позначати одним з трьох способів: $y_i = f_i = f(x_i)$.

Задача полягає у тому, що **необхідно** знайти значення k-ої похідної $f^{(k)}(x)$.

Задачу будемо розв'язувати базуючись на інтерполяційному підході: подамо функцію $f(x)$ у вигляді інтерполяційного поліному

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) \tag{2.1}$$

Тут P_n – інтерполяційний поліном Ньютона, а r_n – залишковий член. Подамо залишковмий член у вигляді

$$r_n(x) = f(x, x_0, \ldots, x_n) \cdot \omega_n(x), \tag{2.2}$$

де
$$\omega_n(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_n). \tag{2.3}$$
Тоді, виходячи з (2.1), будемо мати
$$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + r_n^{(k)}(x), \quad k \le n. \tag{2.4}$$
Зрозуміло, що $k \le n$, бо інакше у нас недостатньо даних для проведення інтерполяції.

Таким чином ми за наближене значення k-ої похідної будемо брати k-у похідну від інтерполяційного поліному:
$$f^{(n)}(x) \approx P_n^{(k)}(x). \tag{2.5}$$
Оцінимо похибку $r_n^{(k)}(x)$: виходячи з (2.2) можемо записати
$$r_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^i \cdot f^{(j)}(x, x_0, \ldots, x_n) \cdot \omega^{(k-j)}(x). \tag{2.6}$$
Тоді, за формулою зв'язку розділеної різниці і похідної (нагадаємо її для тих, хто не пам'ятає):
$$f(x_0, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$
з (2.6) маємо
$$f^{(j)}(x, x_0, \ldots, x_n) = j! \cdot f\left(\underbrace{x, \ldots, x}_{j}, x_0, \ldots, x_n\right) = \frac{j! \cdot f^{(n+j+1)}(\xi)}{(n+j+1!)} \tag{2.7}$$
Підставимо це в (2.6):
$$r_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)! \cdot (n+j+1)!} \cdot f^{(n+j+1)}(\xi_j) \cdot \omega^{k-j}(x). \tag{2.8}$$
Формула (2.8) дасть нам оцінку похибки:
$$|r_n^{(k)}(x)| \le M \cdot \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)! \cdot (n+j+1)!} \cdot \omega^{(k-j)}(x), \tag{2.9}$$
де
$$M = \max_{[a,b]} \max_{j=\overline{0,k}} |f^{(n+j+1)}(x)|$$

Давайте тепер з цієї оцінки отримаємо щось хороше, а то зараз на неї неприємно дивитися. Нехай точки x_i рівновіддалені: $x_i = x_0+ih$. З'ясуємо який порядок по h матиме похибка. Тоді

$$x - x_i \approx O(h),$$

тому

$$\omega_n(x) = O(h^{n+1}),$$

а також

$$\omega_n'(x) = O(h^n).$$

Звідси, за індукцією,

$$\omega_n^{(k)}(x) = O(h^{n+1-k}).$$

Повернемося до формули (2.8). Виходячи з останніх зауважень з'ясуємо який же порядок по h матиме $r_n^{(k)}$. Зрозуміло що найнижчий (тобто найгірший) порядок буде у доданку суми де $j = 0$, а саме:

$$r_n^{(k)}(x) \approx O(h^{n+1-k}). \tag{2.10}$$

Розглянемо ще одну особливість, таку як точки підвищеної точності.

2.1 Точки підвищеної точності

Давайте тепер формулу (2.8) запишемо у двох частинах, окремо для $j = 0$:

$$r_n^{(k)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!} \cdot \omega_n^{(k)}(x) + \\ + \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{(k-j)! \cdot (n+j+1)!} \cdot f^{(n+j+1)}(\xi_j) \cdot \omega^{k-j}(x) \tag{2.1.1}$$

З формули (2.1.1) бачимо наступне: перший доданок має порядок $O(h^{n+1-k})$, а для другого додатку "найгіршим" випадком буде $j = 1$, причому його порядком буде $O(h^{n+2-k})$, звідки випливає таке спостерженння.

Нехай $\bar{x} : \omega_n^{(k)}(\bar{x}) = 0$, тоді

$$r_n^{(k)}(\bar{x}) \approx O(h^{n+k-2}). \tag{2.1.2}$$

Такі точки називаються *точками підвищеної точності.*

Приклад 1. Побудувати формулу чисельного диференціювання для $n = 1$, $k = 1$ і знайти точки підвищеної точності.

Оскільки $n = 1$, то

$$P_1(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{f_1 - f_0}{h} \tag{2.1.3}$$

де $h = x_1 - x_0$.

Тоді

$$P_1'(x) = \frac{f_1 - f_0}{h}. \tag{2.1.4}$$

Таким чином для $x \in [x_0, x_1]$ похідну можна знаходити за формулою (2.1.4).

Знайдемо тепер похибку. За формулою (2.8) маємо

$$\begin{aligned} r_1'(x) = \frac{f''(\xi_0)}{2!} \cdot \omega_1'(x) + \frac{f'''(\xi_1)}{3!} \cdot \omega_1(x) = \\ = \frac{f''(\xi_0)}{2} \cdot (2x - x_0 - x_1) + \frac{f'''(\xi_1)}{6} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Отже порядок формули буде $O(h)$, тобто $r_1'(x) \approx O(h)$, $f \in C^{(2)}$.

Знайдемо точки підвищеної точності. Нехай $\omega_1'(x) = 0$, тоді

$$\bar{x} = \frac{x_0 + x_1}{2}, \tag{2.1.6}$$

і похибка має порядок $O(h^2)$,

$$r_1'(\bar{x}) = -\frac{h^2}{24} \cdot f'''(\xi_1), \tag{2.1.7}$$

або ж

$$|r_1'(\bar{x})| \le \frac{M_3 \cdot h^2}{24}, \tag{2.1.8}$$

де $M_3 = \max\limits_{[x_0, x_1]} |f'''(x)|$.

Таким чином, похідну на проміжку $x \in [x_0, x_1]$ можна знаходити ща формулою (2.1.4). Переведемо тепер цю формулу на проміжок $x \in [x_{i-1}, x_i]$, отримаємо

$$f'(x) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \triangleq f_{\bar{x},i}. \tag{2.1.9}$$

Її називають *різницевою похідною назад в точці* x_i, або ще *лівою різницевою похідною.*

Якщо ж $x \in [x_i, x_{i+1}]$, то

$$f'(x) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \triangleq f_{x,i}. \tag{2.1.10}$$

Її називають *різницевою похідною вперед в точці* x_i, або ще *правою різницевою похідною.*

Задача 2.1. Побудувати формулу чисельного диференціювання для $n = 2$, $k = 1$ для випадку рівновіддалених вузлів. Знайти точки підвищенної точності.

Зауваження. *Для формул (2.1.9) та (2.1.10) похибка має порядок* $O(h)$, $r_1'(x) \approx O(h)$.

Задача 2.2. Нехай тепер

а)
$$f'(x_i) \approx f_{\bar{x},i} \tag{2.1.11}$$

б)
$$f'(x_i) \approx f_{x,i} \tag{2.1.12}$$

в)
$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \tag{2.1.13}$$

Визначити похибку чисельного диференціювання для формул (2.1.11)-(2.1.13).

Вказівка. Розв'язок можна безпосередньо отримати з формули (2.1.5) якщо підставити замість x потрібну точку (x_0, x_1, або $\frac{x_0+x_1}{2}$ відповідно).

Розгялнемо ще один підхід як можна знайти похибку чисельного диференціювання.

2.2 Похибка через ряд Тейлора

Приклад 2. Для рівновіддалених точок побудувати формулу чисельного диференціювання для $n = 2$, $k = 2$ та визначити похибку цієї формули за допомогоб розвинення в ряд Тейлора:

$$P_2(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{f_1 - f_0}{2} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{f_2 - 2f_1 + f_2}{2h^2}.$$

Тоді будемо мати, що

$$P_2''(x) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}. \tag{2.2.1}$$

Перепишемо тепер формулу (2.2.1) для довільного вузла x:

$$P_2''(x) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}, \quad x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \triangleq f_{\bar{x}x,i}. \tag{2.2.2}$$

Тоді, для формули (2.2.2) матимемо

$$\begin{aligned} r_2''(x) = f''(x) - \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} = \\ = f''(x) - \frac{1}{h^2}\Bigg(f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' + \frac{h^3 f_i'''}{6} + \frac{h^4}{24}f_i^{(4)} - 2f_i + \\ + f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' - \frac{h^3}{6}f_i'' + \frac{h^4}{24}f_i^{(4)}\Bigg) + O(h^4) = \\ = f''(x) - f''(x_i) - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_i) + O(h^4). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$r_2''(x_i) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)} + O(h^4) \approx O(h^2).$$

Також зауважимо, що (2.2.2) визначає *другу різницеву похідну за трьома точками* і позначається $f_{\bar{x}x,i}$.

Задача 2.3. За допомогою формули чисельного диференціювання для $n = 2$, $k = 1$ знайти похідну в точці $x_i + \frac{h}{2}$.

2.3 Метод невизначених коефіцєнтів

Нехай задана сіткова функція $y = f(x)$, у вузлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Побудуємо формулу для похідної:

$$y^{(k)}(x_i) \approx C_0 \cdot y_0 + C_1 \cdot y_1 + \ldots + C_n \cdot y_n = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot y(x_k). \tag{2.3.1}$$

Запишемо тоді формулу для похибки:

$$r_n^{(k)} = y^{(k)}(x_i^\alpha) - \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot x_k^\alpha = 0. \tag{2.3.2}$$

Підставляючи $\alpha = \overline{0, n}$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно C_i.

Приклад 3. Побудувати формулу чисельного диференціювання у точці x_1 методом невизначених коефіцієнтів для $n = 3$ за значеннями y_i у рівновіддалених вузлах $x_i = x_0 + ih$.

Розв'язок. $n = 3$, тому розглянемо функції $(x - x_0)^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Для точки x_1 маємо:

$$y'(x_1) = C_0 \cdot y_0 + C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + C_3 \cdot y_3.$$

З (2.3.2)

$$C_0 \cdot (x_0 - x_0)^\alpha + C_1 \cdot (x_1 - x_0)^\alpha + C_2 \cdot (x_2 - x_0)^\alpha + C_3 \cdot (x_3 - x_0)^\alpha = (x - x_0)\big|_{x=x_1}. \tag{2.3.3}$$

Зауваження. *Коли* $y(x) = x^\alpha$*:*

$$(x_i^\alpha)^{(k)} - \sum_{i=0}^{n} C_k \cdot x_k^\alpha = 0, \quad \alpha = \overline{0, n} \tag{2.3.4}$$

Звідси отримуємо систему

$$\begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 \cdot h + C_2 \cdot (2h) + C_3 \cdot (3h) = 1, \\ C_1 \cdot h^2 + C_2 \cdot (2h)^2 + C_3 \cdot (3h)^2 = 2h, \\ C_1 \cdot h^3 + C_2 \cdot (2h)^3 + C_3 \cdot (3h)^3 = 3h^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи її знаходимо

$$C_0 = \frac{1}{6h} \cdot (-2), \quad C_1 = \frac{1}{6h} \cdot (-3), \quad C_2 = \frac{1}{6h} \cdot (6), \quad C_0 = \frac{1}{6h} \cdot (-1),$$

що дає наступну формулу

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_1} \approx \frac{-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3}{6h}.$$

2.4 Обчислювальна стійкість формул чисельного диференціювання

Сьогодні ми будемо ще говорити про таку річ як наближення функцій. Ситуація наступна: якщо у нас вхідні дані для сіткової функції задані з деякою похибкою. Як ця точність буде впливати на точність фомрули чисельного диференціювання

2.4.1 Приклад Адамара

Розглянемо довільну функцію $f(x)$ і модифікуємо її наступним чином:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \frac{1}{n} \cdot \sin(\omega x),$$

де $n \to \infty$ – параметр. Тоді з одного боку матимемо

$$\left\| \tilde{f} - f \right\|_C \le \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0,$$

а з іншого

$$\tilde{f}'(x) = f' + \frac{\omega}{n} \cdot \cos(\omega x),$$

а тому якщо покласти $\omega = n^2$ то отримаємо

$$\left\| \tilde{f}' - f' \right\|_C \le \frac{\omega}{n} = n \underset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Тобто задача чисельного диференціювання не є стійкою, а тому і не є коректною.

Приклад. Нехай f_i задані з похибкою ε_i. Визначити обчислювальну похибку наступної формули чисельного диференціювання:

$$f'(x_i) \approx f_{x,i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} \tag{2.4.1}$$

Розв'язок. Методом розвинення в ряд Тейлора знайдемо похибку апроксимації для формули (2.4.1):

$$\begin{aligned} r_1'(x)i) = f'(x_i) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f_i' - \frac{f_i + h \cdot f_i' + \frac{h^2}{2} \cdot f_i'' - f_i}{h} - O(h^2) = \\ = -\frac{h}{2} \cdot f_i'' + O(h^2) =: r_1'(x_1) + . \end{aligned}$$

Давайте тепер подивимося на загальну похибку обчислень $R(h)$. Зрозуміло, що це буде похибка апроксимації і ще щось, а саме:

$$\tilde{f}_i = f_i + \varepsilon_i,$$

тому насправді ми будемо обчислювати

$$\frac{\tilde{f}_{i+1} - \tilde{f}_i}{h} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{h} \tag{2.4.2}$$

Нехай у формулі (2.4.2) усі ε_i не перевищують заданого ε, а через M_2 позначимо, як завжди макс
Таким чином загальна похибка

$$R(h) = -\frac{h}{2} \cdot f''(x_i) + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{h}. \tag{2.4.3}$$

Тоді

$$|R(h)| \le \frac{h}{2} \cdot M_2 + \frac{2\varepsilon}{h}. \tag{2.4.4}$$

Таким чином при $h \to 0$ перший доданок $\to 0$, а другий $\to +\infty$.

Візьмемо функцію $g(h) = \frac{h \cdot M}{2} + \frac{2\varepsilon}{h}$, тоді

$$g'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2\varepsilon}{h^2} = 0,$$

звідки

$$h_0 = 2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{M_2}},$$

тобто оптимальне h, для якого g буде оптимальною, а саме

$$g(h_0) = 2\sqrt{\varepsilon \cdot M_2}. \tag{2.4.5}$$

Хочеться звернути увагу на те, що навіть якщо ε це позибка вводу даних до комп'ютера, то при обчисленні за нашою формулою ми будемо мати вже удвічі менше вірних цифр.

Задача 2.4. Знайти обчислювальну похибну наступних формули чисельного диференціювання:

1. $f''_i \approx f_{\bar{x}x,i}$;
2. $f_i \approx f_{\bar{x},i}$;
3. $f'_i \approx f_{\mathring{x}x,i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$;

3 Апроксимація функцій

Виникає наступне запитання: чого це ми маємо вимагати від поліному щоб він точно проходив через значення функції які ми навіть точно не знаємо? Отже постає задача: нехай є $f(x) in R$, хочемо побудувати функцію $\Phi(x)$ таку що $\|f(x) - \Phi(x)\| \le \varepsilon$. Виникає ще багато запитань до цієї постановки.

3.1 Елементи найкращого наближення

Нехай R – лінійний нормований простір. У цьому просторі виберемо систему лінійно незалежних функції $\{\varphi_i\}_{i=0}^n \subset R$ і позначимо наступну множину

$$M_n : \quad \Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot \varphi_i, \tag{3.1.1}$$

тоді

$$\Delta(d, \varphi) = \|f - \Phi\| \tag{3.1.2}$$

$f \in R$, $\Phi \in M_n$

$$\Delta(f) = \inf_{\Phi \in M_n} \Delta(f, \Phi) \tag{3.1.3}$$

Елемент на якому досягається інфімум позначимо Φ_0, тобто

$$\Delta(f) = \|f - \Phi_0\| = \inf_{\Phi \in M_n} \Delta(f, \Phi). \tag{3.1.4}$$

Визначення. Елемент Φ_0 з M_n для якого виконується (3.1.4) називається елементом найкращого наближення елементу f простору R.

Теорема 3.1.1. *Для будь-якого елементу f з лінійного нормованого простору R існує елемент найкращого наближення $\Phi_0 \in M_n$, причому множина елементів найкращого наближення є опуклою.*

Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi(C_0, C_1, \ldots, C_n) = \left\| f - \sum_{i=0}^{n} C_i \cdot \varphi_i \right\|. \tag{3.1.5}$$

Виходячи з виразу для $|\varphi(C^1) - \varphi(C^2)|$:

$$\left| \left\| f - \sum_{i=0}^{n} C_i^1 \cdot \varphi_i \right\| - \left\| f - \sum_{i=0}^{n} C_i^2 \cdot \varphi_i \right\| \right| \le$$

$$\leq \left\| \sum_{i=0}^{n} \left(C_i^1 - C_i^2\right) \cdot \varphi_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=0}^{n} \left|C_i^1 - C_i^2\right| \cdot \varphi_i \right\| \quad (3.1.6)$$

маємо, що функція φ є неперервною функцією своїх аргументів $C_0, C_1, \ldots, C_n$.

Розглянемо множину таку, що $\|\Phi\| > 2\|f\|$, тоді $\|f - \Phi\| \geq \|\Phi\| - \|f\| > 2\|f\| - \|f\| = \|f\| \geq \Delta(f)$, де остання нерівність випливає з підстановки $C_0 = C_1 = \ldots = C_n = 0$.

Розглнемо другу область, $\|\Phi\| \leq \|f\|$. На цьому компакті ми знаємо, що $\|\Phi\|$ досягає свого екстремуму, зокрема інфімуму, тобто елемент найкращого наближення існує.

Покажемо, тепер, що якщо Φ_0 і $\tilde{\Phi}_0$ є елементами найкращого наближення, то і $\Phi_2 = a \cdot \Phi_0 + b \cdot \tilde{\Phi}_0$, де $a + b = 1$ буде елементом найкращого наближення.

Розгялнемо

$$\begin{aligned} \Delta(f) \leq \|f - \Phi_2\| = \|(a+b) \cdot f - (a \cdot \Phi_0 + b \cdot \tilde{\Phi}_0)\| \leq \\ \leq \|a \cdot \|f - \Phi_0\| + b \cdot \|f - \tilde{\Phi}_0\| = \\ = a \cdot \Delta(f) + b \cdot \Delta(f) = \Delta(f), \quad (3.1.7) \end{aligned}$$

тобто Φ_2 – елемент найкращого наближення. □

Теорема 3.1.2. *Якщо R – гільбертів, то елемент найкращого наближення існує і єдиний.*

Спочатку доведемо ось що:

Лема 3.1.1. *якщо Φ_0 – елемент найкращого наближення, то*

$$(f - \Phi_0, \Phi) = 0, \quad \forall \Phi \in M_n. \quad (3.1.8)$$

Доведення. Справді, від супротивного, нехай існує Φ_1 (без обмеження загальності $\|\Phi_1\| = 1$)такий, що

$$(f - \Phi_0, \Phi_1) = \alpha \neq 0 \quad (3.1.9)$$

Тоді знайдеться краще наближення. Справді, розгялнемо

$$\Phi_2 = \Phi_0 + \alpha \cdot \Phi_1 \in M_n,$$

тоді

$$\|f-\Phi_2\|^2 = (f-\Phi_0-\alpha\cdot\Phi_1, f-\Phi_0-\alpha\cdot\Phi_1) =$$
$$= \|f-\Phi_0\|^2 - |\alpha|\cdot(f-\Phi_0,\Phi_1) - \alpha\cdot(\Phi_1, f-\Phi_0) + |\alpha^2|\cdot\|\Phi_1\|^2 =$$
$$= \|f-\Phi_0\|^2 - |\alpha|^2, \quad (3.1.10)$$

виходить протиріччя з тим, що Φ_0 – елемент найкращого наближення, бо

$$\|f-\Phi_2\| < \Delta(f). \quad (3.1.11)$$

□

Повернемося тепер до доведення теореми:

Доведення. Зрозуміло що він існує, бо гільбертів простір – частковий випадок лінійного нормованого простору.

Покажемо тепер що він єдиний. Припустимо протилежне, тобто $\exists\Phi_0,\tilde{\Phi}_0$, тоді розглянемо

$$(\Phi_0-\tilde{\Phi}_0,\Phi_0-\tilde{\Phi}_0) = (\Phi_0-f+f-\tilde{\Phi}_0,\Phi_0-\tilde{\Phi}_0) =$$
$$= (\Phi_0-f,\Phi_0-\tilde{\Phi}_0) + (f-\tilde{\Phi}_0,\Phi_0-\tilde{\Phi}_0) = 0+0=0, \quad (3.1.12)$$

отже $\Phi_0=\tilde{\Phi}_0$. □

3.2 Елемент найкращого середньоквадратичного наближення

Ми зараз будемо розглядати елементи найкращого наближення в різних конкретних гілбертових просторах, але загальну теорію сформулюємо для абстрактного гільбертового простору H.

Отже, нехай $R=H$, тоді $\exists!$ ЕНН. Тоді

$$\Delta(f,\Phi) = \|f-\Phi\|. \quad (3.2.1)$$

А наша формальна задача набуває вигляду: знайти

$$\inf_{\Phi\in M_n}\Delta(f,\Phi) = \Delta(f). \quad (3.2.2)$$

Тоді ЕНН Φ_0 має вигляд:

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n} c_i\cdot\varphi_i, \quad (3.2.3)$$

де $\varphi_i \in M_n$.

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi_i \right\|^2 = (f, f) + \sum_{i,j=0}^{n} c_i c_j \cdot (\varphi_i, \varphi_j) - 2 \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot (f, \varphi_i). \qquad (3.2.4)$$

Для ЕНН Φ_0 з (3.1.8) маємо:

$$(f - \Phi_0, \Phi = 0), \quad \forall \Phi \in M_n,$$

а тоді

$$(f - \Phi_0, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{0, n}. \qquad (3.2.5)$$

Підставляючи в (3.2.5) вираз (3.2.3) будемо мати наступне:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \cdot (\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{0, n}. \qquad (3.2.6)$$

Це є СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів c_j.

Якщо система функцій $\{\varphi_i\}$ є лінійно-незалежною, то матриця $G = (g_{i,j})_{i,j=\overline{0,n}}$, то $detG \neq 0$ і система (3.2.6) матиме єдиний розв'язок.

Система (3.2.6) має симетричну матрицю, тому доцільно розв'язувати (3.2.6) методом квадратних коренів, тобто можемо записати її ще у такому вигляді:

$$G\overline{c} = \overline{F}, \qquad (3.2.7)$$

де

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

Відхилення ЕНН у цьому випадку визначатиметься за формулою:

$$\Delta(f) = \|f - \Phi_0\|. \qquad (3.2.8)$$

Зауваження. *Систему вигляду (3.2.6) можна отримати виходячи з (??). Справді, якщо ми візьмемо праву частину (3.2.4) і позначимо її через функціонал від c, $\Phi(c)$, і запишемо $\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$.*

Таким чином ми побудували алгоритм і нібито все добре, але нагадаємо таку річ як число обумовленості:

$$cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|.$$

Ситуація наступна: нехай $\{\varphi_i\} = \{x^i\}_{i=0}^{\infty}$, тоді якщо ми візьмемо

$$\Phi_n = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i$$

і будемо шукати ЕНН у такому вигляді, то для $H = L_2([0,1])$. У цьому випадку

$$g_{i,j} = \int_0^1 x^i \cdot x^j \,\mathrm{d}x = \frac{1}{i+j+1}, \quad i,j = \overline{0,n},$$

а тоді $cond(G) \approx 10^8$ при $n = 7$, $cond(G) \approx 10^9$ при $n = 8$ і так далі, тобто дуже швидко росте, тобто система (3.2.6) буде дуже погано обумовленою.

Теорема 3.2.1 (Мюнца)**.** *Система функцій* $1, \{x^{n_i}\}$, $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ *буде повною якщо ряд*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n_i}$$

буде розбігатися.

Якщо ж у (3.2.6) ми розглянемо ортогональну систему функцій $\{\varphi_i\}$ простору H, то матриця G системи (3.2.6) буде діагональною, а c_i можна буде знайти за формулами

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}, \quad i = \overline{0,n}, \tag{3.2.9}$$

а Φ_0 можна буде як і раніше знайти за формулою (3.2.3):

$$\Phi = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi_i.$$

Нагадаємо умови ортогональності:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j. \end{cases}$$

У цьому випадку з (3.2.4) будемо мати, що

$$\|f - \Phi\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i^2 \cdot \|\varphi_i\|^2. \tag{3.2.10}$$

Якщо ж $\{\varphi\}$ – ортонормована ситсема функцій, тобто

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

У цьому випадку розв'язок системи (3.2.6) матиме вигляд

$$c_i = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{0, n}, \tag{3.2.11}$$

$$\Phi_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi_i, \tag{3.2.12}$$

$$\Delta^2(f) = \|f - \Phi_0\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{n} c_i^2. \tag{3.2.13}$$

Можемо записати розвинення функції f в ряд Фур'є:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (f, \varphi_i) \cdot \varphi_i, \tag{3.2.14}$$

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2.$$

Тоді виходячи з (3.2.13) будемо мати, що

$$\Delta^2(f) = \|f - \Phi_0\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Зауваження. *Якщо система функцій $\{\varphi_i\}$ ортогональна з ваговим коефіцієнтом ρ, тобто*

$$(\varphi_i, \varphi_j)_\rho = (\rho \varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \neq 0, & i = j, \end{cases}$$

то у цьому випадку формула (3.2.9) набуде вигляду

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)_\rho}{(\varphi_i, \varphi_i)_\rho}, \quad i = \overline{0, n}. \tag{3.2.15}$$

3.2.1 Системи ортонормованих функцій

1. На $[-1, 1]$ з $\rho = 1$ є поліноми Лежандра.
2. На $[-1, 1]$ з $\rho = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ є поліноми Чебишева.
3. На $[0, \infty)$ – поліноми Ерміта.
4. поліноми Якобі
5. ...

3.2.2 На дискретній множині точок

$H - \ell_2$, простір сіткових функцій, у ньому $(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_i v_i$,
тоді $Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^j$.

Система функцій $\{\varphi_i\} = \{x^i\}$ буде лінійно незалежною якщо $n \le N - 1$.
У свою чергу при $n \ge N$ поліном $Q(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ може обертатися в 0 на всій сітці якщо в якості x_i взяти вузли сітки оскільки $n \ge N$.

3.2.3 Для періодичних функцій

Нехай $x \in [0, 2\pi)$ і розглянемо функцію $\{\varphi_k\} = \{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos kx, \sin kx\}$, тоді тригонометричним поліномом степеню m назвемо

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx). \tag{3.2.16}$$

$$(\sin kx, \sin mx) = \begin{cases} 0, & k = m \\ \pi, & k \ne m, \end{cases} \tag{3.2.17}$$

$$(\sin kx, \cos mx) = 0,$$

$$(\cos kx, \cos mx) = \begin{cases} 2\pi, & k = m = 0 \\ \pi, & k = m \ne 0 \\ 0, & k \ne m. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3.2.18}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1, m}, \tag{3.2.19}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1, m}. \tag{3.2.20}$$

Зауваження. *Якщо функція періодична не на* $[0, 2\pi]$*, то потрібно зводити або функцію на відповіний проміжок, або систему функцій.*

Зауваження. *Якщо функція* f *парна відносно точки* π*, то* $b_k = 0$*, а*

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1, m},$$

а якщо непарна, то $a_k = 0$*, а*

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\,\mathrm{d}x, \quad k = \overline{1, m}.$$

Задача 3.1. Показати, що тригонометрчина система функцій до $\sin mx, \cos mx$ на множині рівновіддалених точок $x_i = i \cdot \frac{2\pi}{n}$, $i = \overline{1, n}$, $x_i \in (0, 2\pi]$ є ортогональною, та ортонормувати її.

Зауваження. *У нас степінь полінома* $2m \le n - 1$*, а тоді тригонометричний поліном на дискретній множині точок ми можемо записати у вигляді* (3.2.16) *з коефіцієнтами*

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j),$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \cos(kx_j),$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \cdot \sin(kx_j).$$