# 5. Численное дифференцирование

## 5.1. Основные формулы численного дифференцирования для функции, заданной аналитически

Предполагается, что функция $f(x)$ достаточно гладкая.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x, x+h), \tag{1}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ — разность вперед.}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x), \tag{2}$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \text{ — разность назад.}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h), \tag{3}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \text{ — симметричная разность.}$$

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x, x+2h). \tag{4}$$

$$f'(x) = \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi), \quad \xi \in (x-2h, x). \tag{5}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x-h, x+h). \tag{6}$$

## 5.2. Формулы численного дифференцирования для функции, заданной таблично в равноотстоящих узлах

Пусть узлы $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ — равноотстоящие, т. е. $x_{i+1} - x_i = h$ $(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1)$, и пусть для функции $y = f(x)$ известны значения $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Формулы (1)-(6) перепишем в следующем виде:

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h), \ \ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1a}$$

$$f'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h), \ \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2a}$$

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \ \ i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3a}$$

$$f'(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + O(h^2), \ \ i = 0, \ldots, n-2. \tag{4a}$$

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + O(h^2), \quad i = 2, \ldots, n. \tag{5a}$$

$$f''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{6a}$$

## 5.3. Задание

1) Вычислить приближенно значения:
   а) первой производной функции $y = f(x)$ с порядком погрешности $O(h)$ и $O(h^2)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$.
   б) второй производной функции $y = f(x)$ с порядком погрешности $O(h^2)$ при $i = 1, \ldots, n-1$.

   Напечатать таблицу значений узлов, "точных" значений производных в узлах, приближенных значений производных и их разностей (фактические погрешности) (см. образец). Проверить результаты на многочленах соответствующих степеней. Объяснить полученные результаты.

   Образец выполнения задания для функции $f(x) = x + 3$ представлен в таблице 1.

Таблица 1

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $fx$ $O(h)$ | погр. $O(h)$ | $fx$ $O(h^2)$ | погр. $O(h^2)$ | $f''(x)$ | $fxx$ $O(h^2)$ | погр. $O(h^2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| 0,1 | 3,1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,2 | 3,2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,3 | 3,3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,4 | 3,4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,5 | 3,5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,6 | 3,6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,7 | 3,7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,8 | 3,8 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,9 | 3,9 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | |

2) Пользуясь одной из формул (1)-(6) (указывается преподавателем) в заданной точке $x$ вычислить разностную производную первого или второго порядка, последовательно уменьшая шаг $h$ (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить $h$ оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Пример:

   При использовании формулы (4) в результате ошибки $\varepsilon$, допускаемой в каждом из значений функции, оценка для суммарной погрешности будет выглядеть следующим образом:

$$|R_\varepsilon(x, h, f)| \leq \frac{8\varepsilon}{2h} + \frac{h^2}{3} M_3, \quad M_3 = \max |f'''(\xi)|, \quad \xi \in (x, x + 2h).$$

Оптимальный шаг, т. е. такой, при котором обеспечивается минимальная суммарная погрешность, находится обычным образом, как решение задачи на экстремум.

Напечатать таблицу значений $h$, "точных" значений производной в точке , приближенных значений производной и их разностей (фактические погрешности).

Образец выполнения задания для функции $f(x) = e^{2x}$ представлен в таблице 2.

Здесь $x = 1$, начальный шаг $h = 0.1$, "точное" значение производной $f'(1) = 14,778112$. Значения функции округляются до 5-го знака после запятой, т. е $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

Таблица 2

| $h$ | 0,1 | 0,05 | 0,025 | 0,0125 | 0,00625 | 0,003125 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_x$ пор. $O(h^2)$ | 14,5484 | 14,7249 | 14,765 | 14,774 | 14,7768 | 14,7744 |
| погр. | 0,22971 | 0,05321 | 0,01311 | 0,0037 | 0,0013122 | 0,003712 |

Из таблицы видно, что оптимальным экспериментально является шаг 0,00625, теоретически $h_{opt} \approx 0,0069$.

3) Дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона, построенного ранее в задании 3,
   а) получить формулы численного дифференцирования различных порядков аппроксимации для вычисления приближенного значения первой производной в узле ближайшем к точке интерполирования;
   б) убедиться, что формулы первого и второго порядков аппроксимации совпадают с формулами, приведенными выше;
   в) вычислить приближенные значения производной и фактическую погрешность;
   г) сравнить фактическую и теоретическую погрешности.

## 5.4. Варианты заданий

### Вариант 1

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (3) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{2x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

## Вариант 2

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{3x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

## Вариант 3

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 2$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{2x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_2$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

## Вариант 4

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{2x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 5

1) Выполнить пункт 1 из задания. Вычислить приближенно значения:
2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{3x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 6

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{4x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \dots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 7

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{5x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

**Вариант 8**

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 2$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{2x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

**Вариант 9**

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (3) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{2x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

**Вариант 10**

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{3x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_1$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 11

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 2$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{2x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_2$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

### Вариант 12

1) Выполнить пункт 1 из задания.

2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{2x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.

3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_3$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

## Вариант 13

1) Выполнить пункт 1 из задания. Вычислить приближенно значения:
2) Пользуясь формулой (6) в точке $x = 1$ вычислить вторую разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{3x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

## Вариант 14

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (4) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{4x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения второй производной с первым порядком аппроксимации в точке $x = x_n$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.

## Вариант 15

1) Выполнить пункт 1 из задания.
2) Пользуясь формулой (5) в точке $x = 1$ вычислить разностную производную второго порядка аппроксимации функции $e^{5x}$, последовательно уменьшая шаг h (например, вдвое) до тех пор, пока фактическая погрешность не начнет возрастать. Определить h оптимальное экпериментально и теоретически, объяснить полученные результаты.

   Значения функции округлять до 5-го знака после запятой, т. е. $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$.
3) Предполагается заданной таблица значений функции в равноотстоящих узлах $x_i, i = 0, \ldots, n$.

   Требуется дифференцированием интерполяционного многочлена в форме Ньютона получить формулу численного дифференцирования для вычисления приближенного значения первой производной с третьим порядком аппроксимации в точке $x = x_0$. Получить выражение для погрешности. Применить формулу для вычисления производной, сравнить с точным значением.