1 Наближене розв'язування нелінійних рівнянь і систем

1.1 Наближене розв'язування нелінійних рівнянь

Задано рівняння

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

де функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому скінченному чи нескінченному інтервалі $a < x < b$. Всяке значення x^* таке, що $f(x^*) = 0$ називається коренем рівняння (1) або нулем функції $f(x)$.

Наближене знаходження ізольованих дійсних коренів рівняння складається з двох етапів:

1. Відділення коренів, тобто встановлення проміжків $[\alpha, \beta]$, у яких міститься один і тільки один корінь рівняння (1). Використання цих проміжків для визначення початкових наближень до коренів.

2. Уточнення наближених коренів.

1.1.1 Відділення коренів

Для відділення коренів потрібно побудувати таблицю значень функції або графік функції, знайти проміжки, на кінцях яких функція $f(x)$ має різні знаки. Тоді всередині цих проміжків міститься принаймні один корінь рівняння $f(x) = 0$. Необхідно тим чи іншим способом упевнитися, що цей корінь є єдиним.

Для зменшення довжин проміжків може бути використаний метод ділення навпіл (бісекції). Покладаємо $[a_0, b_0] = [a, b]$. Нехай $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Далі будуємо послідовність проміжків $\{[a_k, b_k]\}$, $k = 1, 2, \dots$

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, c_{k-1}], & \text{якщо } f(a_{k-1}) \cdot f(c_{k-1}) < 0, \\ [c_{k-1}, b_{k-1}], & \text{якщо } f(c_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0. \end{cases}$$

Тут на кожному кроці довжина проміжку зменшується удвічі, так що

$$b_k - a_k = (b - a)/2^k.$$

1.1.2 Уточнення коренів

Для уточнення коренів використовують ітераційні методи. При розв'язування задачі ітераційними методами варто звертати увагу на наступні моменти:

- розрахункова формула;
- умова збіжності;
- порядок збіжності (швидкість збіжності): $\alpha \geq 1$ називається порядком збіжності послідовності $\{x_k\}$ до x^*, якщо $x_k \to x^*$ і існує стала C, така що для всіх k: $|x_k - x^*| \leq C \cdot |x_{k-1} - x^*|^\alpha$;
- критерій отримання розв'язку із заданою точністю ε. Тут мається на увазі умова на x_k, яка забезпечує $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Існують оцінки для фактичної похибки $|x_k - x^*|$ апріорні та апостеріорні. Апріорні оцінки часто бувають сильно завищені. Легко показати, що для оцінки точності наближення x_k довільного ітераційного методу можна скористатися нерівністю

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1}, \tag{2}$$

де $m_1 = \min |f'(x)|$ при $a \leq x \leq b$.

1.1.3 Метод Ньютона (метод дотичних)

Нехай задано рівняння (1). Припускаємо, що функція $f(x)$ – дійсна і шукаємо дійсний корінь x^*. Будемо припускати, що на відрізку $[a, b]$, такому що $f(a) \cdot f(b) < 0$, існують неперервні похідні $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$. Вибираємо $x_0 \in [a, b]$. Замінимо рівніння в околі x_0 наближено рівнянням

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0,$$

ліва частина якого є лінійною частиною розкладу функції $f(x)$ у ряд Тейлора в околі точки x_0. Звідси

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Діючи аналогічно, отримуємо розрахункову формулу методу Ньютона

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Метод Ньютона має простий геометричний зміст: x_k є абсцисою точки перетину дотичної до графіку $f(x)$, побудованій у точці $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, з віссю абсцис.

Теорема 1 (про збіжність)**.** *Якщо*

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2. $f'(x)$, $f''(x)$ *відмінні від нуля (зберігають знаки при* $x \in [a, b]$*),*
3. $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, $x_0 \in [a, b]$,

то $x_k \to x^*$, *причому швидкість збіжності визначається нерівністю*

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} \cdot (x_{k-1} - x^*)^2.$$

Тут $m_1 = \min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max\limits_{x \in [a,b]} |f''(x)|$.

Якщо $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$, то можна не прийти до $x = x^*$, якщо x_0 не дуже гарне.

Оскільки метод Ньютона має другий порядок збіжності, то можна користуватися наступним критерієм: якщо $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Зауваження 1.1. *Якщо* $f'(x^*) = 0$, *то квадратичної збіжності може і не бути.*

Наприклад, нехай $f(x) = x^2$, *корінь* x^* *– корінь другої кратності, розрахункова формула має вигляд* $x_{k+1} = x_k/2$ *і збіжність лінійна.*

Другого порядку збіжності для кореня кратності p *можна досягнути, застосовуючи розрахунков формулу вигляду*

$$x_k = x_{k-1} - p \cdot \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Зауваження 1.2. *Інколи має сенс застосовувати модифікований метод Ньютона з розрахунковою формулою*

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_0)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Швидкість збіжності модифікованого методу значно менша.

Зауваження 1.3. *Наведемо розрахункову формулу методу 3-го порядку збіжності*

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} - \frac{f^2(x_{k-1} \cdot f''(x_{k-1}))}{2(f'(x_{k-1}))^3}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

1.1.4 Метод січних

Замінюючи похідну у розрахунковій формулі методу Ньютона її наближеним значенням за формулами чисельного диференціювання , отримуємо розрахункову формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Порядок збіжності методу січних визначається нерівністю

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} \cdot (x_{k-1} - x^*)^{\alpha},$$

де $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$.

У методі січних можна користатися критерієм: якщо $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

1.1.5 Метод хорд

Нехай відомий проміжок $[a, b]$ такий, що $f(a) \cdot f(b) < 0$ і $f''(x) > 0$. Розглянемо два можливих випадки.

1. $f(a) < 0$, відповідно $f(b) > 0$. У цьому випадку кінець b нерухомий і послідовні наближення при $x_0 = a$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)} \cdot (b - x_k), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{8}$$

   утворюють монотонно зростаючу послідовність, причому

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x^* < b.$$

2. $f(a) > 0$, відповідно $f(b) < 0$. У цьому випадку кінець a нерухомий і послідовні наближення при $x_0 = b$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(a)} \cdot (x_k - a), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{9}$$

   утворюють монотонно спадну послідовність, причому

$$b = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_k > x_{k+1} > \ldots > x^* > a.$$

Границі цих послідовностей x^* існують, оскільки вони (послідовності) обмежені і монотонні.

Для оцінки точності можна скористатися уже відомою нерівністю (2)

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1},$$

і

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_k - x_{k-1}|, \tag{10}$$

де $m_1 = \min |f'(x)$, $M_1 = \max |f'(x)|$ при $a \leq x \leq b$.

Геометрично метод еквівалентній заміні кривої $y = f(x)$ хордами, що проходять через точки $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $k = 0, 1, \ldots$.

Порядок методу – перший і не можна користуватися у якості критерію модулем різниці двох послідовних наближень.

1.1.6 Метод простої ітерації (метод послідовних наближень)

Замінимо рівняння (1) рівносильним рівнянням

$$x = \varphi(x), \tag{11}$$

де $\varphi(x)$ – неперервна. Розрахункова формула методу

$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

якщо ця послідовність збіжна, то $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$.

Коротко сформулюємо умову збіжності. Нехай у деякому околі (a, b) кореня x^* рівняння (11) похідна $\varphi'(x)$ зберігає знак і виконується нерівність

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1. \tag{13}$$

Тоді, якщо похідна $\varphi'(x)$ додатня, то послідовні наближення (12) сходять до кореня x^* монотонно, а якщо похідна $\varphi'(x)$ від'ємна, то послідовні наближення коливаються навколо x^*.

Апріорна оцінка похибки

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|. \tag{14}$$

Апостеріорна оцінка похибки

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1-q} \cdot |x_k - x_{k-1}|. \tag{15}$$

Відзначимо, що як показує оцінка (15), помилково було би використовувати у якості критерію отримання розв'язку із заданою точністю ε рівності x_k і x_{k-1} з точністю ε.

Зауваження 1.4. *Нагадаємо, що приводити рівняння вигляду (1) до вигляду (11) варто так, аби $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, причому, чим менше число q, тим швидше, взагалі кажучи, послідовні наближення зійдуться до кореня x^*. Вкажемо один достатньо загальний прийом зведення. Нехай шуканий корінь x^* рівняння лежить на відрізку $[a, b]$, причому*

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1$$

при $a \leq x \leq b$. Замінимо рівняння (1) еквівалентним йому рівнянням

$$x = x - \lambda \cdot f(x) \quad (\lambda > 0).$$

З умови збіжності отримуємо, що можна взяти

$$\lambda = \frac{1}{M_1}$$

і тоді

$$q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1$$

Зауваження 1.5. *Формулу (3) методу Ньютона можна розглядати як формулу методу ітерацій для рівняння $x = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = f(x)/f'(x)$.*

Легко перевірити, що $\varphi'(x^*) = 0$. Тому варто очікувати квадратичну збіжність методу.

1.1.7 Завдання

Задано рівняння $f(x)$. Вимагається

1. Відділити усі корені, або корені на вказаному інтервалі.
2. Звузити інтервали, визначені вище, у декілька разів, використовуючи метод ділення навпіл.
3. Обчислити корені методом Ньютона (або модифікованим) з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$. Ці значення коренів надалі будемо вважати "точними", раніше і пізніше в таблиці вони позначені x^*.

4. Використовуючи інтервали з 1-го чи 2-го пункту, знайти потрібні корені з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ методом січних. У якості критерію використовувати модуль різниці між двума сусідніми наближеннями. Порівняти з фактичною похибкою.

5. Використовуючи інтервали з 1-го чи 2-го пункту, знайти потрібні корені з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ методом хорд. У якості критерію використовувати оцінку (10). Порівняти з фактичною похибкою.

6. Обчислити корені методом ітерацій з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$, вибравши у якості x_0 те ж значення, що і в методі Ньютона.

7. Порівняти результати, кількість ітерацій.

Принаймні для методу Ньютона повинна бути створені підпрограма з параметрами

- x_0 – нульове наближення до кореня;
- ε – задана точність;
- kmax – максимальна кількість ітерацій (для виключення зациклювання).

Підпрограма повинна повертати або x_k таке, що $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, або x_{kmax}. Результати методів оформити у вигляді таблиці:

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$	$x_k - x^*$	$f(x_k)$
0		–		
1				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

1.2 Метод Ньютона для розв'язування системи 2-х рівнянь

Задана система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

де $f(x, y)$, $g(x, y)$ достатньо гладкі функції.

У результаті дій, аналогічних випадку одного рівняння, тобто приблизно замінюючи систему (16) лінійною системо, отримуємо наступні розрахункові формули:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{d_x^{(k)}}{d^{(k)}}, \quad y_{k+1} = y_k - \frac{d_y^{(k)}}{d^{(k)}},$$

де

$$d^{(k)} = \begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix},$$

$$d_x^{(k)} = \begin{vmatrix} f(x_k, y_k) & f'_y(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) & g'_y(x_k, y_k) \end{vmatrix}, \quad d_y^{(k)} = \begin{vmatrix} f'_x(x_k, y_k) & f(x_k, y_k) \\ g'_x(x_k, y_k) & g(x_k, y_k) \end{vmatrix}.$$

1.2.1 Завдання

Вимагається знайти всі розв'язки системи рівнянь, або розв'язки в заданій області із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-6}$. Програма має містити підпрограму для уточнення розв'язку методом ньютона з параметрами:

- x_0, y_0 – нульове наближення до кореня;
- ε – задана точність;
- kmax – максимальна кількість ітерацій (для виключення зациклювання).

Підпрограма повинна повертати або (x_k, y_k) таке, що

$$\|(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\| < \varepsilon,$$

або $(x_{\mathrm{kmax}}, y_{\mathrm{kmax}})$. Тут норма вектора $(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})$ може бути обчислена, наприклад, наступним чином:

$$\|(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Звіт повинен містити:

1. Графіки функцій $f(x, y) = 0$ і $g(x, y) = 0$ для вибору початкового наближення.
2. Уточнення початкового наближення до того часу, коли $\|(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\| < \varepsilon$, методом Ньютона.

Результати оформити у вигляді таблиці:

k	x_k	y_k	$\|(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})\|$	$f(x_k, y_k)$	$g(x_k, y_k)$
0			–		
1					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮