10. Векторные и матричные нормы. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

10.1. Векторные нормы

Вектору $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \in C^n$ сопоставим вещественное число

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, \ \ p \geq 1.$$

Это число называется нормой Гельдера и удовлетворяет всем свойствам для нормы:

$$\begin{array}{l} \|x\|_p \geq 0, \quad \|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n. \\ \|\alpha x\|_p = |\alpha| \ \|x\|_p, \ \alpha \in C. \\ \|x + y\|_p \leq \ \|x\|_p + \|y\|_p \ . \end{array}$$

На практике используются следующие частные случаи нормы Гельдера:

$$\begin{array}{ll} p = 1: & \|x\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|. \\ p = 2: & \|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^2}. \\ p = \infty: & \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j| \ . \end{array}$$

Упражнение 1. ||(1,-5,3)||=?

10.2. Матричные нормы

Обозначим через $M_n(C)$ множество квадратных матриц порядка n, элементами которых являются комплексные числа. Пусть

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ a_{ij} \in C.$$

Для матриц норма Гельдера с показателем p ($p \geq 1$) в $M_n(C)$

$$N_p(A) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p}.$$

Норма при $p = 2$ называется нормой Фробениуса.

Определение. Говорят, что матричная норма $||.||$согласована с векторной $||.||$, если выполняется неравенство $||Ax|| \leq ||A||||x||$ для любых $x \in C^n$, $A \in M_n(C)$.

Естественнее пользоваться операторной нормой матрицы.

Определение. Операторной нормой матрицы, порожденной векторной нормой $||x||$, называется число

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \,.$$

Операторная норма матрицы, порожденная некоторой векторной нормой, является минимальной среди всех матричных норм, согласованных с этой векторной нормой.

Операторную норму называют также нормой матрицы, подчиненной заданной векторной норме.

Определение. Спектральным радиусом матрицы A называется число

$$\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| \,,$$

где λ_i — собственные числа матрицы A.

Можно показать, что

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}.$$

Если $A = A^*$, то $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Упражнение 2. Вычислить все нормы единичной матрицы.

Упражнение 3. Вычислить нормы Фробениуса, $||\mathrm{A}||_1$, $||\mathrm{A}||_\infty$ матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}.$$

Определение. Матричная норма называется мультипликативной, если
$||AB|| \le ||A||||B||$, $A,\, B \in M_n(C)$.

Операторная матричная норма и норма Фробениуса мультипликативны.

Теорема 1. *$\rho(A) \le ||A||$, где $||A||$ — мультипликативна.*

Можно показать, что

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \le |\lambda| \le \|A\| \,.$$

Это неравенство позволяет найти оценки для собственных чисел матрицы по модулю.

10.3. Обусловленность задачи решения линейной алгебраической системы

Вычислительные задачи, в которых малым изменениям параметров отвечают большие изменения в решениях, называются плохо обусловленными.

Рассмотрим вопрос обусловленности задачи решения линейной алгебраической системы $Ax = b$. Пусть решением системы является вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)'$.

Рассмотрим систему уравнений
$(A + \Delta A)(x^* + \Delta x) = b + \Delta b$, где $||A^{-1}||||\Delta A||<1$.

Можно получить, что

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} \le \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A)\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right),$$

где

$\operatorname{cond}(A) = \|A^{-1}\|\,\|A\|$ — число обусловленности матрицы[2].

Очевидно, что $\operatorname{cond}(A) \ge 1$, $\operatorname{cond}(\alpha A) = \operatorname{cond}(A)$. Если $A = A^*$, то $\operatorname{cond}_2(A) = |\lambda_1|/|\lambda_n|$, где $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$ (λ_i — собственные числа матрицы A).

Упражнение 4. Линейная алгебраическая система $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{bmatrix},$$

имеет решение $x^* = (1,1)'$.

Округлим правые части системы до целых, оставив элементы матрицы без изменений.

Система $A(x+\Delta x) = b+\Delta b$, где $\Delta b = (0.01, 0.03)'$ имеет решение $x+\Delta x = (200, -200)'$.

Вычислить число обусловленности матрицы, фактическую относительную погрешность решения и получить для неё оценку.

10.4. Задание

Для заданной матрицы A

а) решить систему $Ax = b$, где

$$b = \begin{pmatrix} 200 \\ -600 \end{pmatrix};$$

б) решить систему с измененной правой частью $A\overline{x} = \overline{b}$, где

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} 199 \\ -601 \end{pmatrix};$$

в) найти число обусловленности $\operatorname{cond}(A)$, фактическую относительную погрешность $\delta x = ||\overline{x} - x||/||x||$ и оценку для этой погрешности.

[2] Число обусловленности матрицы зависит от выбранной нормы.

10.5. Варианты матриц A

1		7	
-400.60	199.80	-402.90	200.70
1198.80	-600.40	1204.20	-603.60
2		8	
-401.52	200.16	-400.94	200.02
1200.96	-601.68	1200.12	-600.96
3		9	
-401.43	200.19	-401.64	200.12
1201.14	-601.62	1200.72	-601.76
4		10	
-401.98	200.34	-403.15	200.95
1202.04	-602.32	1205.70	-604.10
5		11	
-401.46	200.18	-401.00	200.00
201.08	-601.64	1200.00	-601.00
6		12	
-402.50	200.50	-400.94	200.02
1203.00	-603.00	1200.12	-600.96