2. Методи розв’язання нелінійних рівнянь

Постановка задачі. Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, $\bar{x}$ — його розв’язок, тобто $f(\bar{x}) = 0$.

Задача розв’язання цього рівняння розпадається на етапи:

- Існування та кількість коренів.
- Відділення коренів, тобто розбиття числової вісі на інтервали, де знаходиться один корінь.
- Обчислення кореня із заданою точністю ε.

Для розв’язання перших двох задач використовуються методи математичного аналізу та алгебри, а також графічний метод. Далі розглядаються методи розв’язання третього етапу.

2.1. Метод ділення навпіл

Припустимо на $[a, b]$ знаходиться лише один корінь рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

для $f(x) \in C[a, b]$, який необхідно визначити. Нехай $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Припустимо, що $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Покладемо $x_1 = \frac{a+b}{2}$ і підрахуємо $f(x_1)$. Якщо $f(x_1) < 0$, тоді шуканий корінь $\bar{x}$ знаходиться на інтервалі (a, x_1). Якщо ж $f(x_1) > 0$, то $\bar{x} \in (x_1, b)$. Далі з двох інтервалів (a, x_1) і (x_1, b) вибираємо той, на границях якого функція $f(x)$ має різні знаки, знаходимо точку x_2 — середину вибраного інтервалу, підраховуємо $f(x_2)$ і повторюємо вказаний процес.

В результаті отримаємо послідовність інтервалів, що містять шуканий корінь $\bar{x}$, причому довжина кожного послідуючого інтервалу вдвічі менше попереднього.

Цей процес продовжується до тих пір, поки довжина отриманого інтервалу (a_n, b_n) не стане меншою за $b_n - a_n < 2\varepsilon$. Тоді x_{n+1}, як середина інтервалу (a_n, b_n), пов’язане з $\bar{x}$ нерівністю

$$|x_{n+1} - \bar{x}| < \varepsilon. \tag{2}$$

Ця умова для деякого n буде виконуватись за теоремою Больцано-Коші. Оскільки

$$|b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{|b_k - a_k|}{2}, \tag{3}$$

то

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon. \tag{4}$$

Звідси отримаємо нерівність для обчислення кількості ітерацій n для виконання умови (2):

$$n = n(\varepsilon) \ge \left[\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)\right] + 1. \tag{5}$$

Степінь збіжності — лінійна, тобто геометричної прогресії з знаменником $q = 1/2$.

- **Переваги методу:** простота, надійність.

- **Недоліки методу:** низька швидкість збіжності; метод не узагальнюється на системи.

2.2. Метод простої ітерації

Спочатку рівняння

$$f(x) = 0 \tag{6}$$

замінюється еквівалентним

$$x = \varphi(x). \tag{7}$$

Ітераційний процес має вигляд

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Початкове наближення x_0 задається.

Для збіжності велике значення має вибір функції $\varphi(x)$. Перший спосіб заміни рівняння полягає в відділенні змінної з якогось члена рівняння. Більш продуктивним є перехід від рівняння (6) до (7) з функцією $\varphi(x) = x + \tau(x) \cdot f(x)$, де $\tau(x)$ — знакостала функція на тому відрізку, де шукаємо корінь.

> **Означення**: Кажуть, що ітераційний метод збігається, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$.

Далі $U_r = \{x : |x - a| \le r\}$ відрізок довжини $2r$ з серединою в точці a.

З'ясуємо умови, при яких збігається метод простої ітерації.

> **Теорема 1**: Якщо
>
> $$\max_{x\in[a,b]=U_r} |\varphi'(x)| \le q < 1 \tag{9}$$
>
> то метод простої ітерації збігається і має місце оцінка
>
> $$|x_n - \bar{x}| \le \frac{q_n}{1-q} \cdot |x_0 - x_1| \le \frac{q^n}{1-q} \cdot (b-a). \tag{10}$$

Доведення: Нехай $x_{k+1}, x_k \in U_r$. Тоді

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k-1}| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})| \le |\varphi'(\xi_k)| \cdot |x_k - x_{k-1}| \le \\ \le q \cdot |x_k - x_{k-1}| = \ldots = q^k \cdot |x_1 - x_0|, \end{aligned} \tag{11}$$

де $\xi_k = x_k + \theta_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$, а у свою чергу $0 < \theta_k < 1$. Далі

$$\begin{aligned} |x_{k+p} - x_k| = |x_{k+p} - x_{k+p-1} + \ldots + x_{k+1} - x_k| = |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + \ldots + |x_{k+1} - x_k| \le \\ \le \left(q^{k+p-1} + q^{k+p-2} + \ldots + q^k\right) \cdot |x_1 - x_0| = \frac{q^k - q^{k+p-1}}{1-q} \cdot |x_1 - x_0| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Бачимо що $\{x_k\}$ — фундаментальна послідовність. Значить вона збіжна. При $p \to \infty$ в (12) отримуємо (10). □

Визначимо кількість ітерацій для досягнення точності ε. З оцінки в теоремі 1 отримаємо

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{q^n}{1-q} \cdot (b-a) < \varepsilon, \tag{13}$$

звідки безпосередньо маємо

$$n(\varepsilon) = n \ge \left[\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-q)}{b-a}\right)}{\ln q} \right] + 1. \tag{14}$$

Практично ітераційний процес зупиняємо при: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$. Але ця умова не завжди гарантує, що $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$.

> **Зауваження**: Умова збіжності методу може бути замінена на умову Ліпшиця
>
> $$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q \cdot |x - y|, \quad 0 < q < 1. \tag{15}$$

- **Переваги методу:** простота; при $q < 1/2$ — швидше збігається ніж метод ділення навпіл; метод узагальнюється на системи.
- **Недоліки методу:** при $q > 1/2$ збігається повільніше ніж метод ділення навпіл; виникають труднощі при зведенні $f(x) = 0$ до $x = \varphi(x)$.

2.3. Метод релаксації

Якщо в методі простої ітерації для рівняння $x = x + \tau \cdot f(x) \equiv \varphi(x)$ вибрати $\tau(x) = \tau = \text{const}$, то ітераційний процес приймає вигляд

$$x_{n+1} = x_n + \tau \cdot f(x_n), \tag{16}$$

де $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$, а x_0 — задано. Метод можна записати у вигляді

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

Оскільки $\varphi'(x) = 1 + \tau \cdot f'(x)$, то метод збігається при умові

$$|\varphi'(x)| = |1 + \tau \cdot f'(x)| \le q < 1. \tag{18}$$

Нехай $f'(x) < 0$, тоді (8) запишеться у вигляді: $-q \le 1 + \tau \cdot f'(x) \le q < 1$. Звідси

$$f'(x) \le 1 + q < 2k\tau, \tag{19}$$

і

$$0 < \tau < \frac{2}{|f'(x)|}. \tag{20}$$

Поставимо задачу знаходження τ, для якого $q = q(\tau) \to \min$. Для того, щоб вибрати оптимальний параметр τ, розглянемо рівняння для похибки $z_k = x_k - \bar{x}$.

Підставивши $x_k = x + z_k$ в (16), отримаємо

$$z_{k+1} = z_k + \tau \cdot f(x + z_k). \tag{21}$$

В припущені $f(x) \in C^1([a, b])$ з теореми про середнє маємо

$$f(\bar{x}+z_k)=f(\bar{x})+z_k\cdot f'(\bar{x}+\theta\cdot z_k)=z_k\cdot f'(\bar{x}+\theta\cdot z_k)=z_k\cdot f'(\xi_k), \tag{22}$$

тобто

$$z_{k+1}=z_k+\tau\cdot f'(\xi_k)\cdot z_k. \tag{23}$$

Звідси

$$|z_{k+1}|\le|1+\tau\cdot f'(\xi_k)|\cdot|z_k|\le\max_U|1+\tau\cdot f'(\xi_k)|\cdot|z_k|. \tag{24}$$

А тому

$$|z_{k+1}|\le\max\{|1-\tau M_1|,|1-\tau m_1|\}\cdot|z_k|, \tag{25}$$

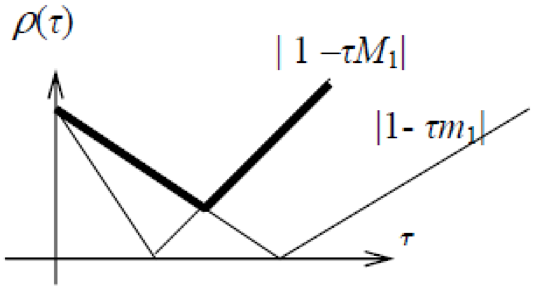
де

$$m_1=\min_{[a,b]}|f'(x)|,\quad M_1=\max_{[a,b]}|f'(x)| \tag{26}$$

Таким чином, задача вибору оптимального параметра зводиться до знаходження τ, для якого функція

$$q(\tau)=\max\{|1-\tau M_1|,|1-\tau m_1|\} \tag{27}$$

приймає мінімальне значення: $q(\tau)\to\min$.



З графіка видно, що точка мінімуму визначається умовою $|1-\tau M_1|=|1-\tau m_1|$. Тому

$$1-\tau_0 m_1=\tau_0 M_1-1\implies\tau_0=\frac{2}{M_1-m_1}<\frac{2}{|f'(x)|}. \tag{28}$$

При цьому значенні τ маємо

$$q(\tau_0)=\rho_0=\frac{M_1-m_1}{M_1+m_1}. \tag{29}$$

Тоді для похибки вірна оцінка

$$|x_n-\bar{x}|\le\frac{\rho_0^n}{1-\rho_0}\cdot(b-a)<\varepsilon. \tag{30}$$

Кількість ітерацій

$$n=n(\varepsilon)\ge\left[\frac{\frac{\ln(\varepsilon(1-\rho_0))}{b-a}}{\ln\rho_0}\right]+1. \tag{31}$$

> **Задача 1**: Дати геометричну інтерпретацію методу простої ітерації для випадків:

$$0 < \varphi'(x) < 1; \quad -1 < \varphi'(x) < 0; \quad \varphi'(x) < -1; \quad \varphi'(x) > 1. \tag{32}$$

Задача 2: Знайти оптимальне $\tau = \tau_0$ для методу релаксації при $f'(x) > 0$.

2.4. Метод Ньютона (метод дотичних)

Припустимо, що рівняння $f(x) = 0$ має простий дійсний корінь $\bar{x}$, тобто $f(\bar{x}) = 0$, $f'(x) \neq 0$. Нехай виконуються умови: $f(x) \in C^1([a,b])$, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тоді

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_k + \bar{x} - x_k) = f(x_k) + f'(\xi_k) \cdot (x - x_k), \tag{33}$$

де $\xi_k = x_k + \theta_k \cdot (\bar{x} - x_k)$, $0 < \theta_k < 1$, $\xi_k \approx x_k$. Тому наступне наближення виберемо з рівняння

$$f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0. \tag{34}$$

Звідси маємо ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{35}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$; x_0 — задане.

Метод Ньютона ще називають методом лінеаризації або методом дотичних.

Задача 3: Дати геометричну інтерпретацію методу Ньютона.

Метод Ньютона можна інтерпретувати як метод простої ітерації з

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{36}$$

тобто

$$\tau(x) = -\frac{1}{f'(x)}. \tag{37}$$

Тому

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}. \tag{38}$$

Якщо $\bar{x}$ — корінь $f(x)$, то $\varphi'(x) = 1$. знайдеться окіл кореня, \end{equation}

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1. \tag{39}$$

Це означає, що збіжність методу Ньютона залежить від вибору x_0.

Недолік методу Ньютона: необхідність обчислювати на кожній ітерації не тільки значення функції, а й похідної.

Модифікований метод Ньютона позбавлений цього недоліку і має вигляд:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{40}$$

Цей метод має лише лінійну збіжність: $|x_{k+1} - x = O(|x_k - \bar{x}|)$.

> **Задача 4**: Дати геометричну інтерпретацію модифікованого методу Ньютона.

В методі Ньютона, для якого $f'(x_k)$ замінюється на

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \tag{41}$$

дає метод січних:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k), \tag{42}$$

де $k = 1, 2, \ldots$, x_0, x_1 — задані.

> **Задача 5**: Дати геометричну інтерпретацію методу січних.

2.5. Збіжність методу Ньютона

> **Теорема 1**: Нехай $f(x) \in C^2([a, b])$; $\bar{x}$ простий дійсний корінь рівняння
>
> $$f(x) = 0. \tag{43}$$
>
> і $f'(x) \neq 0$ при $x \in U_r = \{x : |x - \bar{x}| < r\}$. Якщо
>
> $$q = \frac{M_2 \cdot |x_0 - \bar{x}|}{2m_1} < 1, \tag{44}$$
>
> де
>
> $$m_1 = \min_{U_r} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{U_r} |f''(x)|, \tag{45}$$
>
> то для $x_0 \in U_r$ метод Ньютона
>
> $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{46}$$
>
> збігається і має місце оцінка
>
> $$|x_n - \bar{x}| \le q^{2^n - 1} \cdot |x_0 - \bar{x}|. \tag{47}$$

З (46) маємо

$$x_{k+1} - \bar{x} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \bar{x} = \frac{(x_k - \bar{x}) \cdot f'(x_k) - f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{F(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{48}$$

де $F(x) = (x - \bar{x}) f'(x) - f(x)$, така, що

- $F(\bar{x}) = 0$;

- $F'(x) = (x - \bar{x}) \cdot f''(x)$.

Тоді

$$F(x_k) = F(\bar{x}) + \int\limits_{x}^{x_k} F'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{x}^{x_k} (t - \bar{x}) \cdot f''(t)\,\mathrm{d}t. \tag{49}$$

Так як $(t - \bar{x})$ не міняє знак на відрізку інтегрування, то скористаємося теоремою про середнє значення:

$$F(x_k) = f''(\xi_k) \int\limits_{x}^{x_k} (t - \bar{x})\,\mathrm{d}t = \frac{(x_k - x)^2}{2} \cdot f''(\xi_k), \tag{50}$$

де $\xi_k = \bar{x} + \theta_k \cdot (x_k - \bar{x})$, де $0 < \theta_k < 1$. З (48), (50) маємо

$$x_{k+1} - \bar{x} = \frac{(x_k - \bar{x})^2}{2f'(x_k)} \cdot f''(\xi_k). \tag{51}$$

Доведемо оцінку (46) за індукцією. Так як $x_0 \in U_r$, то

$$|\xi_0 - \bar{x}| = |\theta_0 \cdot (x_0 - \bar{x})| < |\theta_0| \cdot |x_0 - \bar{x}| < r \tag{52}$$

звідси випливає $\xi_0 \in U_r$.

Тоді $f''(\xi_0) \le M_2$, тому

$$|x_1 - \bar{x}| \le \frac{(x_0 - \bar{x})^2 \cdot M_2}{2m_1} = \frac{M_2 \cdot |x_0 - \bar{x}|}{2m_1} \cdot |x_0 - \bar{x}| = q \cdot |x_0 - \bar{x}| < r, \tag{53}$$

тобто $x_1 \in U_r$.

Ми довели твердження (47) при $n = 1$. Нехай воно справджується при $n = k$

$$|x_k - \bar{x}| \le q^{2^k - 1} \cdot |x_0 - \bar{x}| < r, \tag{54}$$

$$|\xi_k - \bar{x}| = |\theta_k \cdot (x_k - \bar{x})| < r. \tag{55}$$

Тоді $x_k, \xi_k \in U_r$.

Доведемо (47) для $n = k + 1$. З (51) маємо

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \bar{x}| &\le \frac{|x_k - \bar{x}|^2 \cdot M_2}{2m_1} \le \left(q^{2^k - 1}\right)^2 \cdot \frac{|x_0 - \bar{x}|^2 \cdot M_2}{2m_1} = \\ &= q^{2^{k+1} - 2} \cdot \frac{|x_0 - \bar{x}| \cdot M_2}{2m_1} \cdot |x_0 - \bar{x}| = q^{2^{k+1} - 1} \cdot |x_0 - \bar{x}|. \end{aligned} \tag{56}$$

Таким чином (47) справджується для $n = k + 1$. Значить (47) виконується і для довільного n. Таким чином $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$. $\square$

З (47) маємо оцінку кількості ітерацій для досягнення точності ε

$$n \geq \left[\log_2\left(1 + \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)}{\ln q}\right)\right] + 1. \tag{57}$$

Кажуть, що ітераційний метод має *степінь збіжності* m, якщо

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = O\left(|x_k - \bar{x}|^m\right). \tag{58}$$

Для методу Ньютона

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = \frac{|x_k - \bar{x}|^2| \cdot f''(\xi_k)|}{2|f'(x_k)|}. \tag{59}$$

Звідси випливає, що

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = O\left(|x_k - \bar{x}|^2\right). \tag{60}$$

Значить степінь збіжності методу Ньютона $m = 2$. Для методу простої ітерації і ділення навпіл $m = 1$.

Теорема 2: Нехай $f(x) \in C^2([a, b])$ та x простий корінь рівняння $f(x) = 0$ ($f'(x) \neq 0$). Якщо $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ ($f'(x) \cdot f''(x) < 0$) то для методу Ньютона при $x_0 = b$ послідовність наближень $\{x_k\}$ монотонно спадає (монотонно зростає при $x_0 = a$).

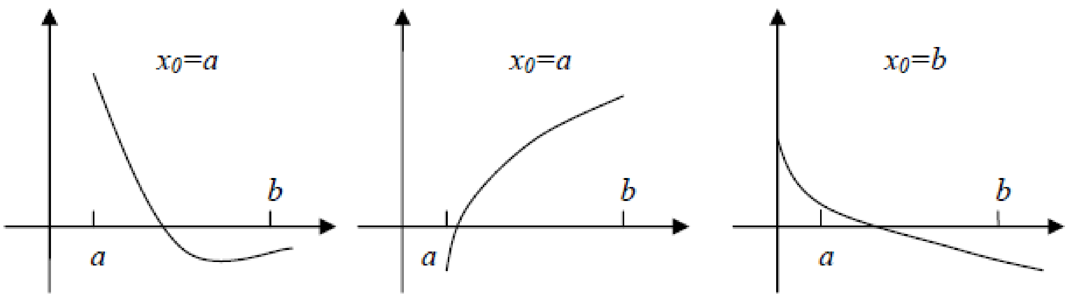
Задача 6: Довести теорему 2 при

- $f'(x) \cdot f''(x) > 0$;
- $f'(x) \cdot f''(x) < 0$.

Задача 7: Знайти степінь збіжності методу січних [Калиткин Н.Н., Численные методы, с. 145–146]

Якщо $f(a) \cdot f''(a) > 0$ та $f''(x)$ не міняє знак, то потрібно вибирати $x_0 = a$; при цьому $\{x_k\} \uparrow \bar{x}$.

Якщо $f(b) \cdot f''(b) > 0$, то $x_0 = b$; маємо $\{x_k\} \downarrow \bar{x}$. Пояснення на рисунку 2:



Зауваження 1: Якщо $\bar{x}$ — p-кратний корінь тобто

$$f^{(m)}(\bar{x}) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, p-1; \quad f^{(p)}(x) \neq 0, \tag{61}$$

то в методі Ньютона необхідна наступна модифікація

$$x_{k+1} - x_k - p \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{62}$$

і

$$q = \frac{M_{p+1} \cdot |x_0 - \bar{x}|}{m_p \cdot p \cdot (p+1)} < 1. \tag{63}$$

Зауваження 2: Метод Ньютона можна застосовувати і для обчислення комплексного кореня

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \tag{64}$$

В теоремі про збіжність

$$q = \frac{|x_0 - \bar{x}| M_2}{2m_1}, \tag{65}$$

де

$$m_1 = \min_{U_r} |f'(z)|, \quad M_2 = \max_{U_r} f''(z)|. \tag{66}$$

Тут $|z|$ — модуль комплексного числа.

Переваги методу Ньютона:

- висока швидкість збіжності;
- узагальнюється на системи рівнянь;
- узагальнюється на комплексні корені.

Недоліки методу Ньютона:

- на кожній ітерації обчислюється не тільки $f(x_k)$, а і похідна $f'(x_k)$;
- збіжність залежить від початкового наближення x_0, оскільки від нього залежить умова збіжності

$$q = \frac{M_2 |x_0 - \bar{x}|}{2m_1} < 1; \tag{67}$$

- потрібно, щоб $f(x) \in C^2([a,b])$.