

то положительные корни $f(x)$ не превосходят числа c . Действительно, из формулы Тейлора

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2!}f''(c) + \dots + \frac{(x-c)^m}{m!}f^{(m)}(c)$$

получаем, что $f(x) > 0$ при $x \geq c$.

Численные методы решения нелинейных уравнений являются, как правило, итерационными методами, которые предполагают задание достаточно близких к искомому решению начальных данных.

Прежде чем переходить к изложению конкретных итерационных методов, отметим два простых приема отделения действительных корней уравнения (1). Предположим, что $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$.

Первый прием состоит в том, что вычисляется таблица значений функции $f(x)$ в заданных точках $x_k \in [a, b]$, $k=0, 1, \dots, n$. Если обнаружится, что при некотором k числа $f(x_k)$, $f(x_{k+1})$ имеют разные знаки, то это будет означать, что на интервале (x_k, x_{k+1}) уравнение (1) имеет по крайней мере один действительный корень (точнее, имеет нечетное число корней на (x_k, x_{k+1})). Затем можно разбить интервал (x_k, x_{k+1}) на более мелкие интервалы и с помощью аналогичной процедуры уточнить расположение корня.

Более регулярным способом отделения действительных корней является *метод бисекции (деления пополам)*. Предположим, что на (a, b) расположен лишь один корень x_* уравнения (1). Тогда $f(a)$ и $f(b)$ имеют различные знаки. Пусть для определенности $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Положим $x_0 = 0,5(a+b)$ и вычислим $f(x_0)$. Если $f(x_0) < 0$, то искомый корень находится на интервале (a, x_0) , если же $f(x_0) > 0$, то $x_* \in (x_0, b)$. Далее, из двух интервалов (a, x_0) и (x_0, b) выбираем тот, на границах которого функция $f(x)$ имеет различные знаки, находим точку x_1 — середину выбранного интервала, вычисляем $f(x_1)$ и повторяем указанный процесс. В результате получаем последовательность интервалов, содержащих искомый корень x_* , причем длина каждого последующего интервала вдвое меньше, чем предыдущего. Процесс заканчивается, когда длина вновь полученного интервала станет меньше заданного числа $\varepsilon > 0$, и в качестве корня x_* приближенно принимается середина этого интервала.

Заметим, что если на (a, b) имеется несколько корней, то указанный процесс сойдется к одному из корней, но заранее неизвестно, к какому именно. Можно использовать прием выделения корней: если корень $x = x_*$ кратности m найден, то рассматривается функция

$$g(x) = f(x)/(x-x_*)^m$$

и для нее повторяется процесс нахождения корня.

2. Метод простой итерации. Он состоит в том, что уравнение (1) заменяется эквивалентным уравнением

$$x = s(x) \tag{3}$$

и итерации образуются по правилу

$$x_{n+1} = s(x_n), \quad n=0, 1, \dots, \tag{4}$$

причем задается начальное приближение x_0 . Для сходимости большое значение имеет выбор функции $s(x)$. Эту функцию можно задавать различными способами, однако обычно она берется в виде

$$s(x) = x + \tau(x)f(x), \quad (5)$$

причем функция $\tau(x)$ не меняет знака на том отрезке, где отыскивается корень. В § 2 будет показано, что метод простой итерации сходится при надлежащем выборе начального приближения x_0 , если $|s'(x_*)| < 1$, где x_* — корень уравнения (1).

Отметим, что в форме метода простой итерации (4) можно записать, по существу, любой одношаговый итерационный метод.

В частности, если $\tau(x) = \tau = \text{const}$, то получим *метод релаксации*

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

для которого $s'(x) = 1 + \tau f'(x)$, и метод сходится при условии

$$-2 < \tau f'(x_*) < 0. \quad (7)$$

Если в некоторой окрестности корня выполняются условия

$$f'(x) < 0, \quad 0 < m_1 < |f'(x)| < M_1, \quad (8)$$

то метод релаксации сходится при $\tau \in (0, 2/M_1)$.

Чтобы выбрать оптимальный параметр τ в методе релаксации, рассмотрим уравнение для погрешности $z_n = x_n - x_*$. Подставляя $x_n = x_* + z_n$ в (6), получим уравнение

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} = f(x_* + z_n).$$

По теореме о среднем имеем

$$f(x_* + z_n) = f(x_*) + z_n f'(x_* + \theta z_n) = z_n f'(x_* + \theta z_n),$$

где $\theta \in (0, 1)$. Таким образом, для погрешности метода релаксации выполняется уравнение

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} = f'(x_* + \theta z_n) z_n.$$

Отсюда приходим к оценке

$$|z_{n+1}| \leq |1 + \tau f'(x_* + \theta z_n)| \cdot |z_n| \leq \max_x |1 + \tau f'(x_* + \theta z_n)| \cdot |z_n|,$$

и если выполнены условия (8), то

$$|z_{n+1}| \leq \max \{ |1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1| \} |z_n|.$$

Таким образом, задача выбора оптимального параметра сводится к нахождению τ , для которого функция

$$q(\tau) = \max \{ |1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1| \}$$

принимает минимальное значение.

Из рассмотрения графика функции $q(\tau)$ видно, что точка минимума определяется условием

$$|1 - \tau M_1| = |1 - \tau m_1|$$

и равна

$$\tau = \tau_0 = 2/(M_1 + m_1).$$

При этом значении τ имеем

$$q(\tau_0) = \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{m_1}{M_1},$$

так что для погрешности справедлива оценка

$$|z_n| \leq \rho_0^n |z_0|, \quad n = 0, 1, \dots$$

3. Метод Ньютона. Пусть начальное приближение x_0 известно. Заменим $f(x)$ отрезком ряда Тейлора

$$f(x) \approx H_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

и за следующее приближение x_1 возьмем корень уравнения $H_1(x) = 0$, т. е.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Вообще, если итерация x_k известна, то следующее приближение x_{k+1} в *методе Ньютона* определяется по правилу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Метод Ньютона называют также *методом касательных*, так как новое приближение x_{k+1} является абсциссой точки пересечения касательной, проведенной в точке $(x_k, f(x_k))$ к графику функции $f(x)$, с осью Ox .

Исследование сходимости метода Ньютона будет проведено в § 3. Здесь отметим без доказательства лишь две особенности этого метода. Во-первых, метод имеет *квадратичную сходимость*, т. е. в отличие от линейных задач погрешность на следующей итерации пропорциональна квадрату погрешности на предыдущей итерации: $x_{k+1} - x_* = O((x_k - x_*)^2)$.

И, во-вторых, такая быстрая сходимость метода Ньютона гарантируется лишь при очень хороших, т. е. близких к точному решению, начальных приближениях. Если начальное приближение выбрано неудачно, то метод может сходиться медленно, либо не сойдется вообще.

Модифицированный метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (10)$$

применяют в том случае, когда хотят избежать многократного вычисления производной $f'(x)$. Метод (10) предъявляет меньше тре-