11. Методи розв’язання крайових задач для звичайних диференційних рівнянь

Почнемо з постановки крайових задач.

1. Нелінійна двоточкова крайова задача:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}x} = \vec{F}\left(x, \vec{U}\right), \quad a < x < b, \tag{1}$$

$$\vec{\varphi}\left(\vec{U}(a), \vec{U}(b)\right) = \vec{d}, \tag{2}$$

де $\vec{U} = (u_1, \ldots, u_m)^\intercal$, $u_k = u_k(x)$, $\vec{F} = (f_1, \ldots, f_m)^\intercal$, $f_k = f_k(x, \vec{U})$, $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)^\intercal$, $\varphi_k = \varphi_k(\vec{U}(a), \vec{U}(b))$, $\vec{d} = (d_1, \ldots, d_m)^\intercal$, d_k — числа.

2. Лінійна двоточкова крайова задача:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{U}(x) + \vec{F}(x), \tag{3}$$

$$B_1\vec{U}(a) + B_2\vec{U}(b) = \vec{d}, \tag{4}$$

де $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^m$, $\vec{F} = (f_1, \ldots, f_m)^\intercal$, $f_k = f_k(x)$, B_1, B_2 — числові матриці $m \times m$, $\vec{d}$ — числовий вектор.

Означення: Крайові умови (2) і (4) називаються *нероздільними*.

Означення: Часто зустрічаються *розділені крайові умови*. Наприклад, для лінійної задачі:

$$C_1\vec{U}(a) = \vec{d}_1, \quad C_2\vec{U}(b) = \vec{d}_2, \tag{4’}$$

де C_1 — $(m-k) \times m$-матриця повного рангу, C_2 — $k \times m$-матриця повного рангу, $\vec{d}_1$ — $(m-k)$-вектор, $\vec{d}_2$ — k-вектор.

Твердження: До (3), (4′) зводиться крайова задача для рівнянь вищих порідків.

Доведення: Справді, нехай задана крайова задача

$$\begin{cases} u^{(m)}(x) = p_1(x)u^{(m-1)}(x) + \ldots + p_m(x)u(x) + f(x), \\ \alpha_{i,1}u^{(m-1)}(a) + \ldots + \alpha_{i,m}u(a) = \mu_i, \quad i = \overline{1, m-k}, \\ \beta_{i,1}u^{(m-1)}(b) + \ldots + \beta_{i,m}u(b) = \nu_i, \quad i = \overline{1, k}. \end{cases} \tag{5}$$

Вона зводиться до задачі (3), (4′) з

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ p_m & p_{m-1} & p_{m-2} & \ldots & p_1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$C_1 = (\alpha_{ij})_{i=\overline{1,m-k}}^{j=\overline{i,m}}, \quad C_2 = (\beta_{ij})_{i=\overline{1,k}}^{j=\overline{i,m}}, \tag{7}$$

$$\vec{d}_1 = (\mu_1, \ldots, \mu_{m-k})^\intercal, \quad \vec{d}_2 = (\nu_1, \ldots, \nu_k)^\intercal. \tag{8}$$

Зауваження: Вважаємо, що всі задачі мають єдині розв’язки.

Розглянемо методи розв’язування цих задач.

11.1. Метод стрільби

Розглянемо крайову задачу з нерозділеними крайовими умовами:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{U}(x) + \vec{F}(x), \tag{9}$$

$$B_1\vec{U}(a) + B_2\vec{U}(b) = \vec{d}, \tag{10}$$

Метод стрільби водить крайову задачу до послідовності з $m+1$ задач Коші, а саме:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Y}_0}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{Y}_0, \quad \vec{Y}_0(a) = 0. \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Y}_i}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{Y}_i(x), \quad \vec{Y}_u(a) = \vec{\delta}_i, \tag{12}$$

для $i = \overline{1, m}$, де $\delta_i = (\delta_{ij})_{j=1}^m$.

Означення: Матриця $Y(x) = \left(\vec{Y}_i(x)\right)_{i=\overline{1,m}}$ називається *фундаментальною матрицею* однорідної системи (9).

Розв’язок (9) шукаємо у вигляді:

$$\vec{Y}(x) = \vec{Y}_0(x) + \sum_{i=1}^m c_i\vec{Y}_i(x). \tag{13}$$

Справді, $\forall c_i$ він задовольняє (9), а самі c_i знаходяться з (10):

$$\begin{aligned} B_1 \left(\vec{Y}_0 + \sum_i c_i\vec{Y}_i(a)\right) + \\ + B_2 \left(\vec{Y}_0(b) + \sum_i c_i\vec{Y}_i(b)\right) = \vec{d}, \end{aligned} \tag{14}$$

або

$$(B_1 + B_2Y(b))\vec{c} = \vec{d} - B_2\vec{Y}_0(b). \tag{15}$$

Розв’язуючи цю СЛАР знаходимо c_i. За єдиністю $\vec{Y}(x) = \vec{U}(x)$.

Алгоритм A1:

1. Розв’язуємо задачу Коші (11), знаходимо $\vec{Y}_0(b)$.
2. Розв’язуємо m задач Коші (12), знаходимо $Y(b)$.
3. Розв’язуємо СЛАР (15), знаходимо c_i, $i = \overline{1, n}$.
4. $\vec{Y}(x) = \vec{U}(x)$ знаходимо з (13).

Складність цього алгоритму така ж, як і складність розв’язування $m+1$ задачі Коші.

Якщо крайові умови розділені, тобто

$$C_1\vec{U}(a) = \vec{d}_1, \quad C_2\vec{U}(b) = \vec{d}_2, \tag{16}$$

то можна зменшити кількість задач Кошы, які необхідно розв’язати. Для цього побудуємо вектор $\vec{V}_0$ такий, що

$$C_1\vec{V}_0 = \vec{d}_1. \tag{17}$$

Це завжди можна зробити, оскільки кількість рівнянь менша за кількість невідомих. Далі будуємо $\vec{V}_i$, $i = \overline{1, k}$ такі, що

$$C_1\vec{V}_i = 0, \quad i = \overline{1, k}. \tag{18}$$

Знову ж таки, це можна здійснити бо $\operatorname{rang} C_1 = m - k$, тобто не повний.

Після цього всього розв’язуємо задачі Коші:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Y}_0}{\mathrm{d}x} = A\vec{Y}_0 + \vec{F}, \quad \vec{Y}_0(a) = \vec{V}_0 \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Y}_i}{\mathrm{d}x} = A\vec{Y}_i, \quad \vec{Y}_i(a) = \vec{V}_i, \quad i = \overline{1, k}. \tag{20}$$

Сталі c_i знаходимо з другої крайової умови.

Алгоритм A2:

1. Розв’язуємо СЛАР (17)–(18).
2. Розв’язуємо задачу Коші (19).
3. Розв’язуємо k задач Коші (20).
4. Розв’язуємо СЛАР

$$B_2\vec{Y}(b) \equiv C_2\left(\vec{Y}_0(b) + \sum_{i=1}^k c_i\vec{Y}(b)\right) = \vec{d}_2 \tag{21}$$

5. Розв’язок

$$\vec{Y}(x) = \vec{Y}_0(x) + \sum_{i=1}^k c_i\vec{Y}_i(x). \tag{22}$$

Оскільки для A1 та A2 розв’язок задачі Коші шукається чисельно, то фактично маємо не всю функцію $\vec{Y}_i(x)$ а значення

$$\vec{Y}_i(x_n), \quad n = \overline{0, N}, \quad x_n \in [a, b]. \tag{23}$$

Їх треба запамя’ятовувати щоб розв’язати (22). Цього недоліку можна уникнути:

Алгоритм A3:

1. Розв’язуємо СЛАР (17)–(18).
2. Розв’язуємо задачу Коші (19).
3. Розв’язуємо k задач Коші (20) і запам’ятовуємо лише $\vec{Y}_i(x_N) = \vec{Y}_i(b)$.
4. Розв’язуємо СЛАР (21).
5. Розв’язуємо ще одну задачу Коші:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Y}}{\mathrm{d}x} = A\vec{Y}, \quad \vec{Y}(a) = \vec{V}_0 + \sum_{i=1}^{k} \vec{V}_i. \tag{24}$$

6. Тоді за формулою (22) $\vec{Y}(x) = \vec{U}(x)$.

Зауваження: Зрозуміло, що «стріляти», тобто починати розв'язувати задачу Коші, треба з того боку, де задано більше крайових умов.

Зауваження (*суттєвий недолік алгоритмів!*) Серед власних значень $A(x)$, як правило, є такі, що $\mathrm{Re}\lambda_i(x) > 0$. Тоді лінійно незалежні розв'язки задачі Коші наростають експоненціально. Це призводить до наростання похибок заокруглень та погано обумовленої матриці системи (15) або (21) (розв'язки $\vec{Y}_i(x)$ стають майже лінійно залежні).

Тому $[a, b]$ розбивають на проміжки $[x_{p-1}, x_p]$, $p = \overline{1, M}$, і розв'язують задачу Коші на підпроміжках, а в кінці $x = x_p$ ортогоналізують отримані розв'язки. Зрозуміло, що для $x = b$ отримують не $\vec{Y}_i(b)$, а деякі $\vec{W}_i(b)$, які залежать від $\vec{Y}_i(b)$ та відповідних перетворень ортогоналізації. З їх допомогою по $\vec{W}_i(b)$ обчислюють $\vec{Y}_i(b)$ та «проганяють» ці умови для всіх значень

$$\vec{Y}(a) = \vec{Y}_0(a) + \sum_i c_i \vec{Y}_i(a). \tag{25}$$

Така ідея метода *ортогональної прогонки Годунова*, що широко застосовується на практиці.

11.2. Метод пристрілки

Це метод для розв'язування крайової задачі для нелінійних рівнянь аналогічний методу стрільби.

Розглянемо крайову задачу з розділеними крайовими умовами:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}x} = \vec{F}\left(x, \vec{U}\right), \quad a < x < b, \tag{26}$$

$$u_i(a) = c_i, \quad i = \overline{k+1, m}, \tag{27}$$

$$\varphi\left(\vec{U}(b)\right) = d_i, \quad i = \overline{1, k}. \tag{28}$$

При $x = a$ невідомі k початкових умов $u_i(a)$, $i = \overline{1, k}$. Будемо їх шукати.

Розв'яжемо задачу Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{Y}}{\mathrm{d}x} = \vec{F}\left(x, \vec{Y}\right), & a < x < b \\ \vec{Y}(a) = \vec{C} = (c_i)_{i=1}^m, \end{cases} \tag{29}$$

де c_i, $i = \overline{1, k}$ — невідомі. Їх шукаємо з крайової умови (28):

$$f_i(c_1, \ldots, c_k) \equiv \varphi_i\left(\vec{\varphi}(b; c_1, \ldots, c_k)\right) - d_i = 0, \quad i = \overline{1, k}. \tag{30}$$

Це система нелінійних рівнянь. Задаємо початкові значення $c_i^{(0)}$, $i = \overline{1, k}$. За якимось ітераційним методом знаходимо її розв'язок. Найзручніше використовувати метод січних.

Метод пристрілки найбільш прозоро виглядає для $k = 1$. У цьому випадку нам необхідно знайти тільки c_1. Використаємо метод ділення навпіл. Знайдемо $c_1^{(0)}$ таке, що

$$\varphi_1\left(\vec{y}\left(b; c_1^{(0)}\right)\right) - d_1 > 0, \tag{31}$$

та $c_1^{(1)}$ таке, що

$$\varphi_1\left(\vec{y}\left(b; c_1^{(1)}\right)\right) - d_1 < 0. \tag{32}$$

Тоді вибираємо

$$c_1^{(2)} = \frac{c_1^{(0)} + c_1^{(1)}}{2}. \tag{33}$$

З інтервалів $\left[c_1^{(0)}, c_1^{(2)}\right]$, $\left[c_1^{(1)}, c_1^{(2)}\right]$ (можливо кінці в іншому порядку) вибираємо такий, що $\varphi\left(\vec{y}\left(b; c_1\right)\right) - d_1$ змінює знак. Процес продовжуємо до виконання умови

$$\left|\varphi_1\left(\vec{y}\left(b, c_1^{(k)}\right)\right) - d_1\right| < \varepsilon, \tag{34}$$

де ε — задана точність.

11.3. Метод лінеаризації

Розглянемо задачу:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}x} = \vec{F}\left(x, \vec{U}\right), \quad a < x < b, \tag{35}$$

$$\vec{\varphi}\left(\vec{U}(a), \vec{U}(b)\right) = \vec{d}, \tag{36}$$

Метод лінеаризації для задачі (35) це аналог методу Ньютона для систем нелінійних рівнянь. Нехай $\vec{Y}_0(x)$ — деяке наближення. Побудуємо його уточнення $\vec{Z}_0(x)$ до точного розв'язку $\vec{U}(x)$:

$$\vec{U}(x) = \vec{Y}_0(x) + \vec{Z}_0(x). \tag{37}$$

З (35) маємо

$$\frac{\mathrm{d}Z_0}{\mathrm{d}x} = \Phi_F\left(x, \vec{V}\right)\vec{Z}_0(x) + \vec{F}\left(x, \vec{Y}_0\right) - \frac{\mathrm{d}\vec{Y}_0}{\mathrm{d}x}. \tag{38}$$

Замінюючи середнє значення $\vec{V}(x)$ на $\vec{Y}_0(x)$ отримаємо лінійне рівняння:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Z}_0}{\mathrm{d}z} = \Phi_F\left(x, \vec{Y}_0\right)\vec{Z}_0 + \vec{F}\left(x, \vec{Y}_0\right) - \frac{\mathrm{d}\vec{Y}_0}{\mathrm{d}x}. \tag{39}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} &\Phi_a\left(\vec{Y}_0(a), \vec{Y}_0(b)\right)\vec{Z}_0(a) + \\ &\quad + \Phi_b\left(\vec{Y}_0(a), \vec{Y}_0(b)\right)\vec{Z}_0(b) = \\ &= \vec{d} - \vec{\varphi}\left(\vec{Y}_0(a), \vec{Y}_0(b)\right), \end{aligned} \tag{40}$$

де

- $\Phi_F = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^m$ — матриця Якобі правої частини $\vec{F}\left(x, \vec{U}\right)$;
- $\Phi_a = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(a)\right)_{i,j=1}^m$, $\Phi_b = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(b)\right)_{i,j=1}^m$ — матриці Якобі для $\vec{\varphi}\left(\vec{U}(a), \vec{U}(b)\right)$ по крайовим умовам в точках $x = a$ та $x = b$ відповідно.

Задача (39)–(40) — лінійна і розв'язується методом стрільби (з ортогоналізацією). Розв'язавши цю задачу, маємо настуне наближення $\vec{Y}_1(x) = \vec{Y}_0(x) + \vec{Z}_0(x)$. Цей процес продовжуємо до виконання умови точності $\left\|\vec{Z}_k(x)\right\| < \varepsilon$.

Недоліки методу:

1. Наявність похідної $\mathrm{d}\vec{Y}_0/\,\mathrm{d}x$ в правій частині. Оскільки розв'язок задач Коші чисельний, то для її обчислення треба застосовувати формули чисельного диференціювання. Це може привести до великих похибок за рахунок нестійкості задачі чисельного диференціювання.

2. Збіжність залежить від вибору $\vec{Y}_0$.

11.4. Метод продовження за параметром

Суттєвим недоліком методу ліанерізації є необхідність задавати хороше початкове наближення та чисельне диференціювання попереднього наближення. Розглянемо метод, який позбавлений цих недоліків.

Розглянемо задачу знаходження вектора $\vec{U}(x) = (u_i)_{i=1}^n$, що задовольняє умовам:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}x} = \vec{F}\left(x, \vec{U}\right), \quad a < x < b, \tag{41}$$

$$\vec{\varphi}\left(\vec{U}(a), \vec{U}(b)\right) = \vec{d}, \tag{42}$$

Нехай розв'язок цієї задачі існує та єдиний.

Розв'яжемо задачу Коші

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Y}}{\mathrm{d}x} = \vec{F}\left(x, \vec{Y}\right), \quad \vec{Y}(a) = \vec{Y}_0. \tag{43}$$

Вибір $\vec{Y}_0$ здійснимо так, щоб було задовольнялося як можна більша кількість з крайових умов (42). Наприклад, якщо $\varphi_i\left(\vec{U}(a), \vec{U}(b)\right) \equiv u_i(a)$, то вибираємо $y_{0,i} = d_i$.

Обчислимо $\vec{d}_0 = \vec{\varphi}\left(\vec{Y}(a), \vec{Y}(b)\right)$. Якщо $\vec{d}_0 \equiv \vec{d}$, то $\vec{Y} \equiv \vec{U}$. Але, як правило, $\vec{d}_0 \neq \vec{d}$ і тому необхідно уточнювати початкове наближення. Розглянемо параметричну крайову задачу

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}x} = \vec{F}\left(x, \vec{V}\right), \quad a < x < b, \tag{44}$$

$$\vec{\varphi}\left(\vec{V}(a), \vec{V}(b)\right) = \lambda\vec{d} + (1 - \lambda)\vec{d}_0, \tag{45}$$

яка залежить від параметра λ: $\vec{V} = \vec{V}(x, \lambda)$. Ясно, що $\vec{V}(x, 0) = \vec{Y}(x)$, а $\vec{V}(x, 1) = \vec{U}$.

Спробуємо продовжити розв'язок задачі (44)–(45) від відомого $\vec{Y}(x)$ до шуканого $\vec{U}(x)$. Для цього продиференціюємо (44)–(45) по λ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{F}}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial \lambda}, \quad a < x < b, \tag{46}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_j}(a) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \lambda}(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_j}(b) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \lambda}(b) = \vec{d} - \vec{d}_0, \tag{47}$$

Позначимо $\vec{Z} = \partial \vec{V} / \partial \lambda$. Тоді останню систему можна записати у вигляді:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Z}}{\mathrm{d}x} = \vec{\Phi}_F \left(x, \vec{V} \right) \vec{Z}, \quad a < x < b, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} &\vec{\Phi}_a \left(\vec{V}(a), \vec{V}(b) \right) \vec{Z}(a) + \\ &\quad + \vec{\Phi}_b \left(\vec{V}(a), \vec{V}(b) \right) \vec{Z}(b) = \\ &= \vec{d} - \vec{d}_0, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \lambda} = \vec{Z}, \quad \vec{V}(x, 0) = \vec{Y}_0 \tag{50}$$

де

- $\Phi_F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j} \right)_{i,j=1}^{n}$ — матриця Якобі правої частини (41), $\vec{F}\left(x, \vec{U} \right)$;
- $\Phi_a = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(a) \right)_{i,j=1}^{n}$ — матриця Якобі лівої частини $\vec{\varphi}\left(\vec{U}(a), \vec{U}(b) \right)$ крайової умови (42) по першому аргументу $\vec{U}(a)$;
- $\Phi_b = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(b) \right)_{i,j=1}^{n}$ — матриця Якобі лівої частини $\vec{\varphi}\left(\vec{U}(a), \vec{U}(b) \right)$ крайової умови (42) по другому аргументу $\vec{U}(b)$;

Задача (48)–(50) не простіше ніж вихідна задача (41)–(42), а ще й складніша за неї. Спростимо її, застосувавши до задачі Коші (50) чисельний метод, наприклад, метод Ейлера:

$$\vec{V}^{(k+1)}(x) = \vec{V}^{(k)}(x) + \Delta\lambda \vec{Z}^{(k)}(z), \quad \vec{V}^{(0)}(x) = \vec{Y}(x). \tag{51}$$

Тут $\vec{V}^{(k)} = \vec{V}(x, \lambda_k)$, $\Delta\lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_K = 1$, $k = \overline{1, K}$.

Знайдене наближення $\vec{V}^{(k+1)}(x)$ використовується для знаходження наступного наближення $\vec{Z}^{(k+1)}$ лінійної крайової задачі (48)–(49).

Повністю алгоритм розв'язання крайової задачі (41)–(42) цим методом такий:

1. Розв'язуємо задачу Коші (43) . Задаємо початкові значення $\vec{V}^{(0)}(x) = \vec{Y}(x)$

2. Для $k = \overline{1, K}$ розв'язуємо лінійні крайові задачі:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{Z}^{(k)}}{\mathrm{d}x} = \Phi_F \left(x, \vec{V}^{(k)} \right) \vec{Z}^{(k)}, \quad a < x < b, \tag{52}$$

$$\begin{aligned} &\vec{\Phi}_a \left(\vec{V}^{(k)}(a), \vec{V}^{(k)}(b) \right) \vec{Z}^{(k)}(a) + \\ &\quad + \vec{\Phi}_b \left(\vec{V}^{(k)}(a), \vec{V}^{(k)}(b) \right) \vec{Z}^{(k)}(b) = \\ &= \vec{d} - \vec{d}_0, \end{aligned} \tag{53}$$

3. Продовжуємо розв'язок по параметру λ:

$$\vec{V}^{(k+1)}(x) = \vec{V}^{(k)}(x) + \Delta\lambda \vec{Z}^{(k)}(x). \tag{54}$$

4. Шуканий розв'язок $\vec{U}(x) \approx \vec{V}^{(K)}(x)$.

Лінійні крайові задачі пункту 2 розв'язуються, наприклад, методом стрільби. Для розв'язання задачі Коші (50) можна застосовувати більш точні методи ніж метод Ейлера.