1. Приближённое решение нелинейных уравнений и систем

1.1. Приближённое решение нелинейных уравнений

Дано уравнение

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $a < x < b$.

Всякое значение x^*, такое что $f(x^*) = 0$ называется корнем уравнения (1) или нулем функции $f(x)$.

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения складывается из двух этапов:

1) Отделение корней, т. е. установление промежутков $[\alpha, \beta]$, в которых содержится один и только один корень уравнения (1). Использование этих промежутков для определения начальных приближений к корням.

2) Уточнение приближенных корней.

1.1.1. Отделение корней

Для отделения корней следует построить таблицу значений функции или график функции, найти промежутки, на концах которых функция $f(x)$ имеет разные знаки. Тогда внутри этих промежутков содержится по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$. Нужно тем или иным образом убедиться, что данный корень является единственным.

Для уменьшения длин промежутков может быть использован метод половинного деления (бисекции).

Полагаем $[a_0, b_0] = [a, b]$. Пусть $c_0 = (a_0 + b_0)/2$.

Далее строим последовательность промежутков $\{[a_k, b_k]\}$, $k = 1, 2, \ldots$

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, c_{k-1}], & \text{если } f(a_{k-1}) \cdot f(c_{k-1}) < 0, \\ [c_{k-1}, b_{k-1}], & \text{если } f(c_{k-1}) \cdot f(b_{k-1}) < 0. \end{cases}$$

Здесь на каждом шаге длина промежутка уменьшается вдвое, так что

$$b_k - a_k = (b - a)/2^k.$$

1.1.2. Уточнение корней

Для уточнения корней используются итерационные методы. При решении задачи итерационными методами следует обращать внимание на следующие моменты:

- расчетная формула;
- условие сходимости;
- порядок сходимости (скорость сходимости): $\alpha \geqslant 1$ называют порядком сходимости последовательности $\{x_k\}$ к x^*, если $x_k \to x^*$ и существует постоянная C, такая что при всех k $|x_k - x^*| \leqslant C\,|x_{k-1} - x^*|^\alpha$;
- критерий получения решения с заданной точностью ε. Здесь имеется в виду условие на x_k, обеспечиващее $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Существуют оценки для фактической погрешности $|x_k - x^*|$ априорные или апостериорные. Априорные оценки часто бывают сильно завышены. Легко показать, что для оценки точности приближения x_k любого итерационного метода можно воспользоваться неравенством

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{|f(x_k)|}{m_1}, \tag{2}$$

где $m_1 = \min |f'(x)|$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

1.1.3. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть дано уравнение (1).

Предполагаем, что функция $f(x)$ — вещественная и находим вещественный корень x^*.

Будем предполагать, что на отрезке $[a, b]$, таком что $f(a)f(b) < 0$, существуют непрерывные производные $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$.

Выбираем $x_0 \in [a, b]$. Заменим уравнение в окрестности x_0 приближенно уравнением

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

левая часть которого есть линейная часть разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Отсюда

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Действуя аналогично, получаем расчетную формулу метода Ньютона

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})},\ k = 1,\ 2,\ \ldots. \tag{3}$$

Метод Ньютона имеет простой геометрический смысл: x_k есть абсцисса точки пересечения касательной к графику функции $f(x)$, построенной в точке $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, с осью абсцисс.

Теорема 1 (о сходимости)**.** *Если*

1) $f(a)f(b) < 0$,

2) $f'(x)$, $f''(x)$ *отличны от нуля (сохраняют определенные знаки при* $x \in [a, b]$*),*

3) $f(x_0)f''(x_0) > 0$, $x_0 \in [a, b]$,

то $x_k \to x^*$*, причем скорость сходимости определяется неравенством*

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_{k-1} - x^*)^2.$$

Здесь $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Если $f(x_0)\, f''(x_0) < 0$, то можно не прийти к $x = x^*$, если x_0 не очень хорошее.

Так как метод Ньютона имеет второй порядок сходимости, можно пользоваться следующим критерием: если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

Замечание 1. Если $f'(x^*) = 0$, то квадратичной сходимости может и не быть.

Например, пусть $f(x) = x^2$, корень $x^* = 0$ — корень второй кратности, расчетная формула имеет вид: $x_{k+1} = x_k/2$ и сходимость линейная.

Второго порядка сходимости для корня кратности p можно достичь, применяя расчетную формулу вида

$$x_k = x_{k-1} - p\,\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})},\ k = 1,\, 2,\, \ldots \tag{4}$$

Замечание 2. Иногда целесообразно применять модифицированный метод Ньютона с расчетной формулой

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_0)},\ k = 1,\, 2,\, \ldots \tag{5}$$

Скорость сходимости модифицированного метода значительно меньше.

Замечание 3. Приведем расчетную формулу метода 3-го порядка сходимости

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} - \frac{f^2(x_{k-1})\, f''(x_{k-1})}{2\,(f'(x_{k-1}))^3},\ k = 1,\, 2,\, \ldots \tag{6}$$

1.1.4. Метод секущих

Заменяя производную в расчетной формуле метода Ньютона её приближенным значением по формулам численного дифференцирования, получаем расчетную формулу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\,(x_k - x_{k-1}),\ \ k = 1,\, 2, \ldots. \tag{7}$$

Порядок сходимости метода секущих определяется неравенством

$$|x_k - x^*| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_{k-1} - x^*)^\alpha,$$

где $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$.

В методе секущих можно пользоваться критерием: если $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, то $|x_k - x^*| < \varepsilon$.

1.1.5. Метод хорд

Пусть известен промежуток $[a, b]$, такой что $f(a) \cdot f(b) < 0$ и $f''(x) > 0$. Рассмотрим два возможных случая.

1) $f(a) < 0$, соответственно $f(b) > 0$. В этом случае конец b неподвижен и последовательные приближения при $x_0 = a$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}\,(b - x_k),\ \ k = 0,\, 1, \ldots. \tag{8}$$

образуют монотонно возрастающую последовательность, причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x^* < b.$$

2) $f(a) > 0$, соответственно $f(b) < 0$. В этом случае конец a неподвижен и последовательные приближения при $x_0 = b$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a), \ \ k = 0, 1, \ldots . \tag{9}$$

образуют монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < x^* < \ldots < x_{k+1} < x_k < \ldots < x_1 < x_0 = b.$$

Пределы этих последовательностей x^* существуют, так как они ограничены и монотонны.

Для оценки точности можно воспользоваться уже известным неравенством (2)

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{|f(x_k)|}{m_1},$$

и

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_k - x_{k-1}|, \tag{10}$$

где $m_1 = \min|f'(x)|$, $M_1 = \max|f'(x)|$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

Геометрически метод эквивалентен замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через точки $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, k=0, 1,...

Порядок метода — первый и нельзя пользоваться в качестве критерия модулем разности двух соседних приближений.

1.1.6. Метод простой итерации (метод последовательных приближений)

Заменим уравнение (1) равносильным уравнением

$$x = \varphi(x), \tag{11}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывна. Расчетная формула метода

$$x_k = \varphi(x_{k-1}), \ \ k = 1, 2 \ldots \tag{12}$$

Если эта последовательность сходящаяся, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Кратко сформулируем условие сходимости. Пусть в некоторой окрестности (a, b) корня x^* уравнения (11) производная $\varphi'(x)$ сохраняет постоянный знак и выполнено неравенство

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1. \tag{13}$$

Тогда, если производная $\varphi'(x)$ положительна, то последовательные приближения (12) ($x_0 \in (a, b)$) сходятся к корню x^* монотонно, если производная $\varphi'(x)$ отрицательна, то последовательные приближения колеблются около корня x^*.

Априорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|. \tag{14}$$

Апостериорная оценка погрешности

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|. \tag{15}$$

Отметим, что как показывает оценка (15), ошибочно было бы пользоваться в качестве критерия получения решения с заданной точностью ε совпадения x_k и x_{k-1} с точностью ε.

Замечание 1. Напомним, что приводить уравнение вида (1) к виду (11) следует так чтобы $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$, причем, чем меньше число q, тем быстрее, вообще говоря, последовательные приближения сходятся к корню x^*. Укажем один достаточно общий прием приведения. Пусть искомый корень x^* уравнения лежит на отрезке $[a, b]$, причем

$$0 < m_1 \leqslant f'(x) \leqslant M_1$$

при $a \leqslant x \leqslant b$. Заменим уравнение (1) эквивалентным ему уравнением

$$x = x - \lambda\, f(x) \;\; (\lambda > 0).$$

Из условия сходимости получаем, что можно взять

$$\lambda = \frac{1}{M_1}$$

и тогда

$$q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1$$

.

Замечание 2. Формулу (3) метода Ньютона можно рассматривать как формулу метода итераций для уравнения $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Легко проверить, что $\varphi'(x^*) = 0$. Поэтому следует ожидать квадратичную сходимость метода.

1.1.7. Задание

Дано уравнение $f(x) = 0$.

Требуется

1) Отделить все корни или корни на указанном интервале.
2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”, ранее и далее в таблице они обозначены x^*.
4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
5) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта, найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку (10). Сравнить с фактической погрешностью.
6) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
7) Сравнить результаты, количество итераций.

По крайней мере, для метода Ньютона должна быть создана подпрограмма с параметрами:

- x_0 — нулевое приближение к корню;

- ε — заданная точность;
- kmax — максимальное количество итераций (для исключения зацикливания).

Подпрограмма должна возвращать либо x_k, такое что $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, либо $x_{k\max}$.

Результаты методов уточнения оформить в виде таблицы 1.

Таблица 1

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$	$x_k - x^*$	$f(x_k)$
0		—		
1				
...	...	...	...	...

1.1.8. Варианты заданий

Вариант 1

$$x^2 - 20\,\sin(x) = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 2

$$63\,x^5 - 70\,x^3 + 15\,x^2 - 8\,x = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 3

$$32\,x^6 - 48\,x^4 + 18\,x^2 - 1 - \frac{9}{x+10} = 0. \text{ Найти корни на } [0, 2].$$

Требуется

1) Отделить корни на указанном интервале.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leqslant |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 4

$$64\,x^7 - 112\,x^5 + 56\,x^3 - 7\,x + \sqrt{1 - 0.2\,x^2} = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

1) Отделить корни на указанном интервале.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 5

$$\mathrm{ctg}(x) - 2\,x^2 = 0. \text{ Найти первые три положительные корня.}$$

Требуется

1) Отделить корни на указанном интервале.
2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 6

$$e^{-\frac{x}{4}}\sin(\pi\, x) + 0.1 = 0. \text{ Найти корни } \in [0,3].$$

Требуется

1) Отделить корни на указанном интервале.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leqslant |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 7

$$\lg(x) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 8

$$\ln(5 - x) + x = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.

4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 9

$$e^{-\sqrt{x}}\cos(2\pi\, x) = 0.6.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leqslant |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 10

$$x^4 + \frac{1}{5-x} + 1 = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 11

$$\mathrm{tg}(x) + e^x = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

1) Отделить корни на указанном интервале.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать “точными”.
3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.

4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 12

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - x - 3 = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leqslant |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 13

$$x^2 - 20\,\sin(x) = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 14

$$63\,x^5 - 70\,x^3 + 15\,x^2 - 8\,x = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.

5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 15

$$32\,x^6 - 48\,x^4 + 18\,x^2 - 1 - \frac{9}{x+10} = 0. \text{ Найти корни } \in [0, 2].$$

Требуется

1) Отделить корни на указанном интервале.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leqslant |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 16

$$64\,x^7 - 112\,x^5 + 56\,x^3 - 7\,x + \sqrt{1 - 0.2\,x^2} = 0. \text{ Найти отрицательные корни.}$$

Требуется

1) Отделить корни на указанном интервале.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 17

$$\cot(x) - 2\,x^2 = 0. \text{ Найти первые три положительные корня.}$$

Требуется

1) Отделить корни на указанном интервале.
2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".

4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 18

$$e^{-\frac{x}{4}} \sin(\pi x) + 0.1 = 0. \text{ Найти корни } \in [0, 3].$$

Требуется

1) Отделить корни на указанном интервале.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leqslant |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 19

$$\lg(x) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
5) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 20

$$\ln(5 - x) + x = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Вычислить корни методом итераций с точностью $\varepsilon = 0.00001$, выбрав в качестве x_0 то же значение, что и в методе Ньютона.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 21

$$e^{-\sqrt{x}}\cos(2\pi\, x) = 0.6.$$

Требуется

1) Отделить все корние.
2) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
3) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.001$ методом хорд. В качестве критерия использовать оценку $|x_k - x^*| \leqslant |f(x_k)|/m_1$. Сравнить с фактической погрешностью.
4) Сравнить результаты, количество итераций.

Вариант 22

$$x^4 + \frac{1}{5-x} + 1 = 0.$$

Требуется

1) Отделить все корни.
2) Сузить интервалы, определенные выше, в несколько раз, используя метод половинного деления.
3) Вычислить корни методом Ньютона (или модифицированным) с точностью $\varepsilon = 0.000001$. Эти значения корней далее будем считать "точными".
4) Используя интервалы из 1-го или 2-го пункта найти требуемые корни с точностью $\varepsilon = 0.0001$ методом секущих. В качестве критерия использовать модуль разности между двумя соседними приближениями. Сравнить с фактической погрешностью.
5) Сравнить результаты, количество итераций.