Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №2 на тему:
"Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь"

Виконав студент групи ОМ-3
Скибицький Нікіта

Київ, 2018

1 Постановка задачі

Задана система лінійних алгебраїчних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ порядку $n = 5, 6, \ldots$

1. Методом квадратних коренів знайти:
   (а) розв'язок системи $\vec{x}$;
   (б) нев'язку $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$;
   (в) число обумовленості матриці A;
   (г) визначник матриці A;
   (д) обернену матрицю A^{-1} (вивести також матрицю $A^{-1} \cdot A$).
2. Методом Зейделя:
   (а) розв'язок системи $\vec{x}$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$;
   (б) нев'язку $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$;
   (в) вивести кількість ітерацій методу.

2 Теоретична частина

2.1 Метод квадратних коренів

Цей метод призначений для розв'язання систем рівнянь із симетричною матрицею

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad A^T = A. \tag{2.1}$$

Він оснований на розкладі матриці A в добуток:

$$A = S^T D S, \tag{2.2}$$

S – верхня трикутна матриця, S^T – нижня трикутна матриця, D – діагональна матриця.

Виникає питання: як обчислити S, D по матриці A? Маємо

$$\begin{aligned}
&(DS)_{i,j} = \begin{cases} d_{i,i}s_{i,j}, & i \le j \\ 0, & i > j \end{cases} \\
&(S^T DS)_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} s^T_{i,l} d_{l,l} s_{l,j} = \sum_{l=1}^{i-1} s_{l,i} s_{l,j} d_{l,l} + s_{i,i} s_{i,j} d_{i,i} + \underbrace{\sum_{l=i+1}^{n} s_{l,i} s_{l,j} s_{l,l}}_{=0} = a_{i,j}, \quad i, i = \overline{1, n}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Якщо $i = j$, то

$$|s^2_{i,i}| d_{i,i} = a_{i,i} - \sum_{l=1}^{i-1} |s^2_{l,i}| d_{l,l} \equiv p_i.$$

Тому

$$d_{i,i} = \mathrm{sign}(p_i), \quad s_{i,i} = \sqrt{|p_i|}.$$

Якщо $i < j$, то

$$s_{i,j} = \left(a_{i,j} - \sum_{l=1}^{i-1} s_{l,i} d_{l,l} s_{l,j} \right) / (s_{i,i} d_{i,i}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{i+1, n}.$$

Якщо $A > 0$ (тобто головні мінори матриці A додатні), то всі $d_{i,i} = +1$.

Знайдемо розв'язок рівняння (2.1). Враховуючи (2.2), маємо:

$$S^T D\vec{y} = \vec{b} \tag{2.4}$$

$$S\vec{x} = \vec{y} \tag{2.5}$$

Оскільки S – верхня трикутна матриця, а $S^T D$ – нижня трикутна матриця, то

$$y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} s_{j,i} s_{j,j} y_j}{s_{i,i} d_{i,i}}, \quad i = \overline{1,n} \tag{2.6}$$

$$x_n = \frac{y_n}{s_{n,n}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} s_{i,j} x_j}{s_{i,i}}, \quad i = \overline{n-1,1}. \tag{2.7}$$

Метод застосовується лише для симетричних матриць. Його складність – $Q = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$.

Переваги цього методу:

1. він витрачає в 2 рази менше пам'яті ніж метод Гаусса для зберігання $A^T = A$ (необхідний об'єм пам'яті $\frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$;
2. метод однорідний, без перестановок;
3. якщо матриця A має багато нульових елементів, то і матриця S також.

Остання властивість дає економію в пам'яті та кількості арифметичних операцій. Наприклад, якщо A має m ненульових стрічок по діагоналі, то $Q = O(m^2 n)$.

2.2 Обчислення визначника та оберненої матриці

Кількість операцій обчислення детермінанту за означенням – $Q_{\det} = n!$. В методі Гаусса – $PA = LU$.

Тому

$$\det P \det A = \det L \det U \Rightarrow \det A = (-1)^l \det L \det U = (-1)^l \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}^{(k)}, \tag{2.8}$$

де l – кількість перестановок. Ясно, що за методом Гаусса

$$Q_{\det} = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2).$$

В методі квадратного кореня $A = S^T DS$. Тому

$$\det A = \det S^T \det D \det S = \prod_{k=1}^{n} d_{k,k} \prod_{k=1}^{n} s_{k,k}^2. \tag{2.9}$$

Тепер $Q_{\det} = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$.

За означенням
$$AA^{-1} = E \tag{2.10}$$
де A^{-1} обернена до матриці A. Позначимо
$$A^{-1} = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^{n}.$$
Тоді $\vec{\alpha}_j = (\alpha_{i,j})_{i=1}^{n}$ – вектор-стовпчик оберненої матриці. З (2.10) маємо
$$A\vec{\alpha}_j = \vec{e}_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.11}$$
$\vec{e}_j$ – стовпчики одиничної матриці: $\vec{e}_j = (\delta_{i,j})_{i=1}^{n}$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

Для знаходження $^{-1}$ необхідно розв'язати n систем. Для знаходження A^{-1} методом Гаусса необхідна кількість операцій $Q = 2n^3 + O(n^2)$.

2.2.1 Метод Зейделя

В компонентному вигляді ітераційний метод Зейделя записується так:
$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.12}$$
На відміну від методу Якобі на k-му-кроці попередні компоненти розв'язку беруться з $k+1$-ої ітерації.

Достатня умова збіжності методу Зейделя – $A^T = A > 0$.

2.2.2 Матрична інтерпретація методів Якобі і Зейделя

Подамо матрицю A у вигляді
$$A = A_1 + D + A_2,$$
де A_1 – нижній трикутник матриці A, A_2 – верхній трикутник матриці A, D – її діагональ. Тоді систему (**??**) запишемо у вигляді
$$D\vec{x} = A_1\vec{x} + A_2\vec{x} + \vec{b},$$
або
$$\vec{x} = D^{-1}A_1\vec{x} + D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{b},$$
Матричний запис методу Якобі:
$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}A_1\vec{x}^{(k)} + D^{-1}A_2\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b},$$
методу Зейделя:
$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}A_1\vec{x}^{(k+1)} + D^{-1}A_2\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b},$$
Необхідна і достатня умова збіжності методу Якобі: всі корені рівняння $\det(D + \lambda(A_1 + A_2)) = 0$ по модулю більше 1.

Необхідна і достатня умова збіжності методу метода Зейделя: всі корені рівняння $\det(A_1 + D + \lambda A_2) = 0$ по модулю більше 1.

3 Практична частина

$$b_i = 12 + 5i, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\vec{b} = (17, 22, 27, 32, 37).$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{i+j-1}{2n}, & i \neq j \\ n + 10 + \frac{i+j-1}{2n}, & i = j \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 15.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 15.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 15.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 15.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 15.9 \end{pmatrix}.$$

3.1 Метод квадратних коренів

Покажемо наочні результати для значення $n = 5$, хоча запрограмований алгоритм дає змогу отримати результати $\forall n \in \mathbb{N}$:

1. В процесі розв'язання задачі, були отримані матриці S та S^T, а також діагональна матриця D:

$$S = \begin{pmatrix} 3.88587185 & 0.0514685 & 0.07720275 & 0.102937 & 0.12867125 \\ 0. & 3.91118281 & 0.10125492 & 0.12648398 & 0.15171305 \\ 0. & 0. & 3.93494437 & 0.1472056 & 0.17146482 \\ 0. & 0. & 0. & 3.95622753 & 0.18763459 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 3.97439554 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}.$$

$$S^T \cdot D \cdot S = \begin{pmatrix} 15.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 15.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & 15.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 15.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 15.9 \end{pmatrix}.$$

Далі отримаємо $\vec{y}$, який є допоміжним для знаходження вектору розв'язку $\vec{x}$:

$$\vec{y} = (4.37482261.5.5673272, 6.63250353, 7.54990688, 8.31285785).$$

Далі отримаємо шуканий вектор $\vec{x}$:

$$\vec{x} = (0.96183206, 1.24427481, 1.52671756, 1.80916031, 2.09160305).$$

2. Знайдемо нев'язку $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$:

$$\vec{r} = (0., 0., 0., 0., 0.).$$

З точністю, яку дає змогу отримати ЕОМ.

3. Число обумовленості $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, де за норму матриці беремо норму узгоджену з нормою вектора $\|\cdot\|_1$:

$$\|A\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = 18.5, \quad \|A^{-1}\| = 0.07318066157760814, \quad \text{cond}(A) = 1.3538422391857505.$$

4. Визначник

$$\det A = \det S^T \cdot \det D \cdot \det S = (\det S)^2 = 884249.99942042$$

(зауважимо що істинне значення 885250, на кілька десятитисячних більше).

5. Також було отримано обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.06636132 & -0.00071247 & -0.00111959 & -0.00152672 & -0.00193384 \\ -0.00071247 & 0.0655598 & -0.00150127 & -0.00189567 & -0.00229008 \\ -0.00111959 & -0.00150127 & 0.06478372 & -0.00226463 & -0.00264631 \\ -0.00152672 & -0.00189567 & -0.00226463 & 0.06403308 & -0.00300254 \\ -0.00193384 & -0.00229008 & -0.00264631 & -0.00300254 & 0.06330789 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}.$$

3.2 Метод Зейделя

1. Знайдемо розв'язок системи $\vec{x}$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ застосовуючи рекурентне відношення методу Зейделя

$$\vec{x} = (0.96183443, 1.24427758, 1.52671812, 1.80915996, 2.09160287).$$

2. Знайдемо нев'язку $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$:

$$\vec{r} = (0.0000363060931, 0.0000428437497, 0.0000101477201, -0.00000290943704, -7.10542736 \cdot 10^{-15}).$$

3. Для досягнення заданої точності, було виконано 3 ітерації.