

Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт до лабораторної роботи №4 на тему:
“Інтерполяційні поліноми”

Виконав студент групи ОМ-3
Скибицький Нікіта

Київ, 2018

1 Постановка задачі

Функція $f(x) = \frac{1}{2}(|x-4| + |x+4|)$ задана на дискретній множині точок (сітці), які належать проміжку $[-5, 7]$.

Потрібно:

1. Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона $P_n(x)$ (величина n може змінюватися) за множиною:

(а) Рівновіддалених вузлів.

(б) Чебишовських вузлів.

2. Побудувати графіки:

(а) $f(x)$, $P_n(x)$;

(б) $f(x) - P_n(x)$, $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$;

для обох сіток. Пояснити отриманий результат.

3. Методом оберненої інтерполяції знайти наближене значення точки (їх може бути декілька) x_* , в якій $f(x_*) = y_*$, де $y_* = \min_{[a,b]} f(x) + \frac{2}{3} \left(\max_{[a,b]} f(x) - \min_{[a,b]} f(x) \right)$.

2 Теоретична частина

2.1 Інтерполяційний поліном Ньютона

Запишемо формулу Лагранжа інтерполяційного багаточлена

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i) \cdot \omega'_n(x_i)}, \quad (2.1)$$

де $\omega_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$.

Позначимо $\Phi_j(x) = L_j(x) - L_{j-1}(x)$. Тоді, оскільки

$$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + \dots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)),$$

$$L_j(x_i) = L_{j-1}(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, j-1},$$

то

$$\Phi_j(x_i) = A_j \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}), \quad (2.2)$$

де A_j визначається з умови $\Phi_j(x_j) = L_j(x_j) - L_{j-1}(x_j) = f(x_j) - L_{j-1}(x_j)$. Звідси

$$\Phi_j(x) = \frac{f(x_j) - L_{j-1}(x_j)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1})} \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}).$$

Тоді

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{f(x_j) - L_{j-1}(x_j)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1})} = \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1})} - \\
&\quad - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_i)} = \\
&= \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdot \dots \cdot (x_j - x_{j-1})} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_j)} = \\
&= \sum_{i=0}^j \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_j)} = f(x_0; \dots; x_j).
\end{aligned}$$

Звідси маємо інтерполяційну формулу Ньютона вперед ($x_0 \rightarrow x_n$):

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1) \cdot (x - x_0) + \dots + f(x_0; \dots; x_n) \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}). \quad (2.3)$$

Аналогічно, інтерполяційна формула Ньютона назад ($x_n \rightarrow x_0$):

$$\begin{aligned}
L_n(x) &= f(x_n) + f(x_n; x_{n-1}) \cdot (x - x_n) + \dots \\
&\quad \dots + f(x_n; \dots; x_0) \cdot (x - x_n) \cdot \dots \cdot (x - x_1). \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Маємо рекурсію за степенем багаточлена

$$L_n(x) = L_{n-1}(x) + f(x_0; \dots; x_n) \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_1).$$

Звідси

$$L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot (f(x_0; x_1) + (x - x_1) \cdot (\dots + (x - x_{n-1}) \cdot f(x_0; x_1; \dots; x_n)))$$

і цю формулу розкриваємо починаючи з середини (це аналог схеми Горнера обчислення значення багаточлена).

Введемо нову формулу для похибки інтерполювання. Для $x \neq x_i$, $i = \overline{0, n}$ розглянемо розділену різницю

$$f(x; x_0; \dots; x_n) = \frac{f(x)}{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)} + \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) \cdot \frac{(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)} + \dots + f(x_n) \cdot \frac{(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_n - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1})} + \\
&\quad + f(x; x_0; \dots; x_n) \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = L_n(x) + f(x; x_0; \dots; x_n) \cdot \omega_n(x).
\end{aligned}$$

Тоді похибка має вигляд

$$r_n(x) = f(x) - L_n(x) = f(x; x_0; \dots; x_n) \cdot \omega_n(x). \quad (2.5)$$

Це нова форма для залишкового члена.

Порівнюючи з формулою залишкового члена в пункті (6.3), маємо

$$f(x; x_0; \dots; x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

що доводить останню властивість розділених різниць.

Нехай маємо сітку рівновіддалених вузлів: $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = \overline{0, n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Розначимо $\Delta f_0 = f_1 - f_0$, $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$, \dots – скінченні різниці. Запишемо формули Ньютона у нових позначеннях:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \dots + \frac{t \cdot (t-1) \cdot (t-n+1)}{n!} \cdot \Delta^n f_0, \quad t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Це інтерполяційна формула Ньютона вперед по рівновіддалених вузлах.

2.1.1 Чебишовські вузли

$$x_m = \frac{(b-a) \cos\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right) + a + b}{2}, \quad m = \overline{0, n-1}.$$

2.1.2 Рівновіддалені вузли

$$x_m = a + n \cdot \frac{b-a}{n-1}, \quad m = \overline{0, n-1}.$$

2.2 Метод оберненої інтерполяції

а) *Обернене інтерполювання.* Якщо відома обернена функція $x = x(y)$, то $\bar{x} = x(\bar{y})$. Нехай функція $f(x)$ задана значеннями $y_i = f(x_i)$, $x_i \in [a, b]$. Побудуємо інтерполяційний багаточлен $L_n(y)$ по значеннях $\{y_i, x_i\}$, $i = \overline{0, n}$, де y_i вважаються значеннями аргументу, а x_i – значеннями оберненої функції. Тоді наближення до кореня є $x^* = L_n(\bar{y})$.

Оцінимо похибку:

$$|\bar{x} - x^*| = |x(\bar{y}) - L_n(\bar{y})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(\bar{y})|, \quad (2)$$

$$\text{де } M_{n+1} = \max_{y_{\min} < y < y_{\max}} \left| \frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}} x(y) \right|, \quad \omega_n(y) = (y - y_0) \dots (y - y_n).$$

Недоліком методу є складність обчислення похідних старших порядків оберненої функції.

3 Практична частина

Покажемо наочні результати для значення $n = 13$, хоча запрограмований алгоритм дає змогу отримати результати $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x-4| + |x+4|).$$

3.1 Інтерполяційний поліном Ньютона

3.1.1 Рівновіддалені вузли

Для $n = 11$ отримаємо такі вузли:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
-5	-2	1	4	7

Отримана програма дає такі результати для рівновіддалених вузлів на заданому відрізку

$$P_n(x) = x^5 - x^4 - 24x^3 + 62x^2 + 139x - 98.$$

3.1.2 Чебишовські вузли

Для $n = 5$ отримаємо такі вузли:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
-4.7063	-2.5267	1.	4.5267	6.7063

$$P_n(x) = x^5 - 4.9738x^4 + 123.667x^2 + 284.23x - 352.197.$$

Потрібно зазначити, що коефіцієнти при відповідних степенях зазначені з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ біля нуля, тобто якщо $|a_n| < \varepsilon$, то a_n береться рівним 0.

3.2 Графіки многочленів

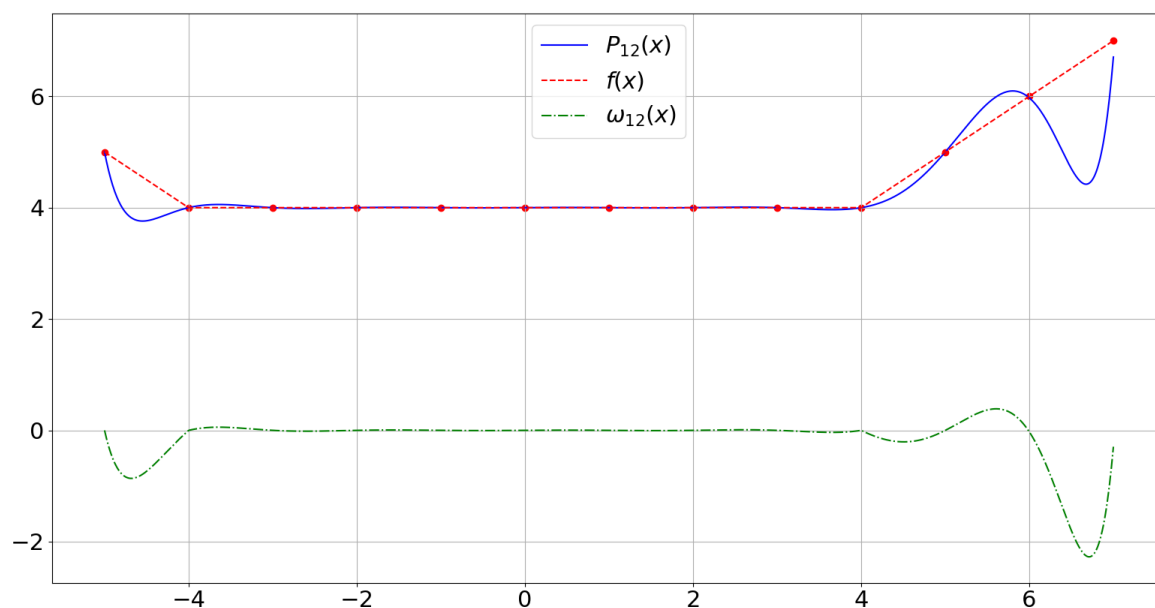


Рис. 1: Рівновіддалені вузли

Проаналізувавши графік побудованого полінома Ньютона по відповідним вузлам, можна сказати що ближче до центру відрізка досягається досить висока точність інтерполяції, проте чим ближче до кінців відрізка, тим більшою стає похибка, при чому вона не є сталою. Поглянувши на графік різниці полінома та початковою функцією, видно, що похибка зростає при прямуванні до країв інтервалу.

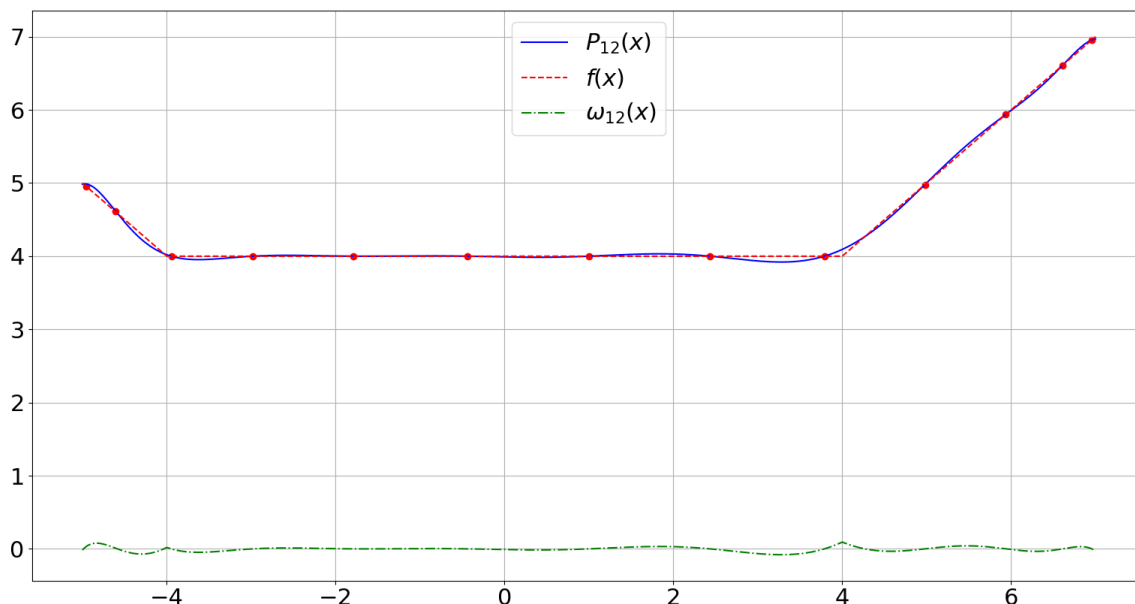


Рис. 2: Чебишівські вузли

Проаналізувавши графік побудованого полінома, можна зробити висновок, що досягнута досить висока точність на всьому інтервалі інтерполювання. Також можна зробити висновок, що чебишовська сітка має таку властивість, як сталість відхилення на всьому інтервалі.